



دانشکده فیزیک و مهندسی هسته ای

پایان نامه کارشناسی ارشد فیزیک گرایش اتمی و مولکولی-پلاسما

مطالعه امواج ضربه در پلاسماهای چند مولفه ای در حضور اثرات ویسکوزیته

نگارنده: فروغ محمودی آرا

استاد راهنما

دکتر مهدی مومنی

بهمن ۱۳۹۵

باسپاس از

پدر، مادر عزیزم

نه میتوانم موهایشان را که در راه عزت من سفید شد، سیاه کنم و نه برای دستهای پینه بسته شان که ثمره تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم. پس توفیقم ده که هر لحظه شکر گزارشان باشم و ثانیه های عمرم را در عصای دست بودشان بگذرانم.

و با تشکر از استاد خوبم دکتر مهدی مومنی برای تمام راهنمایی‌شان برای کردآوری این پایان نامه

تقدیم به، همسر عزیزم

که سایه مهربانیش سایه ساز زندگی من می باشد، او که اسوه صبر و تحمل بوده و مشکلات مسیر را برای من تسهیل نمود

و تقدیم به تمام آزاد مردانی که نیک می اندیشند و عقل و منطق را پیشه خود نموده، دانشمندان، بزرگان، و جوانمردانی که جان و مال خود را در حفظ و اعتلای این مرز و بوم فدا نموده و می نمایند.

تعهد نامه

اینجانب فروغ محمودی آرا دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته فیزیک گرایش اتمی - مولکولی - پلاسما دانشکده فیزیک و مهندسی هسته ای دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه مطالعه امواج ضربه در پلاسماهای چند مولفه ایی با حضور اثرات ویسکوزیته تحت راهنمایی جناب آقای دکتر مهدی مومنی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا یافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.

چکیده

مگنتو هیدرودینامیک (MHD)، به عنوان یک نظریه نسبتاً بالغ در زمینه فیزیک پلاسما توسعه یافته است. مگنتو هیدرودینامیک ارائه دهنده ی، مدل منسجم توصیف خواص تعادل و پایداری ماکروسکوپی در پلاسما است. مدل مگنتو هیدرودینامیک می تواند تاثیرات غیر ایده آلی همچون مقاومت، ویسکوزیته، فشار و اثرات محدود شعاع لارمور را بر پلاسماهای پایدار یا غیر پایدار ضعیف در مقابل مدل های ایده آل، مورد بررسی قرار دهد.

در این تحقیق به بررسی تاثیرهای غیر ایده آل همچون ایجاد برخوردها و در پی آن مقاومت ویژه و ویسکوزیته و در پی آن ایجاد تنش های برشی تقریباً یکسان بر رفتار غیر خطی یک پلاسما کلاسیکی می پردازیم.

روش هایی که در حل مسائل، منسجم (خود سازگار) رفتار پلاسما را توجیه می کنند را به عنوان یک مدل توصیف پلاسما در نظر می گیریم. مدل هایی را برای توصیف این پلاسماها انتخاب می کنیم. در این تحقیق مدل مگنتو هیدرودینامیک (MHD) برای پلاسما الکترون - پوزیترون و پلاسما الکترون - یون مورد استفاده قرار گرفته است. اثرات اتلافی ویسکوزیته و برخوردها در این مدل گنجانده شده است و رفتار خطی و غیر خطی امواج در پلاسما مورد بررسی قرار گرفته است. رفتار خطی ناشی از امواج با دامنه کوچک و رفتار غیر خطی ناشی از امواج با دامنه ی بزرگ است که با استفاده از تئوری خطی قابل توجیه نیست.

در ادامه، رفتار خطی رابطه ی پاشندگی پلاسما را که مرتبط با عوامل مؤثر بر پایداری تر کردن و یا آشفته تر کردن پلاسما، (همچون عدد ماخ و اینرسی الکترون و برخورد) برای طول موج های مختلف مورد بررسی قرار می گیرد را بدست می آوریم و برای رفتار غیر خطی پلاسما الکترون - پوزیترون و الکترون - یون، معادلات غیر خطی (kdv , kdv_B) که امواج سالیتمونی و امواج ضربه مهمترین جوابها برای این معادلات می باشند را اثبات می کنیم.

سپس با استفاده از این معادلات به بررسی سالیتون ها و امواج ضربه الکترومغناطیسی برانگیخته و مقدار عوامل مؤثر بر آنها (همچون عدد ماخ، جریان جا به جایی، حرارت، آنتروپی و ویسکوزیته) در پلاسماهای کلاسیکی سرد و گرم می پردازیم.

کلمات کلیدی:

(امواج سالیتونی و امواج ضربه- پلاسمای کلاسیکی سرد و گرم- رابطه پاشندگی خطی و غیر خطی- ضریب برخورد- مقاومت ویژه- ویسکوزیته)

فهرست مطالب

۱.....	فصل اول: معرفی پلاسما.....
۲.....	۱۰۱ مقدمه.....
۳.....	۲۰۱ معیارهای پلاسما.....
۴.....	۳۰۱ حفاظ دبای.....
۵.....	۴۰۱ دسته بندی پلاسما.....
۹.....	۵۰۱ تقسیم بندی ناحیه‌های مختلف پلاسما.....
۱۱.....	۶۰۱ مدل‌های توصیف پلاسما و معادلات وابسته با آن.....
۱۳.....	۷۰۱ مدل سیالی و معادلات حاکم به آن در پلاسمای کلاسیکی.....
۱۴.....	۸۰۱ مدل‌های توصیف پلاسمای کوانتومی.....
۱۵.....	۹۰۱ معادلات نظریه‌ی جنبشی در پلاسمای کلاسیکی.....
۱۵.....	۱۰۰۱ ساختار پایان نامه.....
۱۷.....	فصل دوم: امواج در پلاسما.....
۱۸.....	۲۰۱ مقدمه.....
۱۸.....	۲۰۲ امواج آلفن.....
۲۴.....	۳۰۲ امواج مغناطوسوتی.....
۲۶.....	۴۰۲ معادله kdv

- ۵۰۲ امواج سالیوتونی و ضربه در پلاسمای الکترون - پوزیترون مغناطیسی..... ۲۸
- ۶۰۲ مدل تئوری و قواعد اولیه..... ۳۲
- ۷۰۲ تعریف ویسکوزیته..... ۴۱
- فصل سوم: دستیابی به معادلات جفت شده‌ی امواج سالیوتونی و ضربه‌ی دامنه بزرگ امواج
- اینرسی آلفنی در پلاسمای مگنتوهیدرودینامیک ۴۵
- ۱۰۳ مقدمه..... ۴۶
- ۲۰۳ مدل ریاضیات و رابطه خطی امواج متراکم اینرسی آلفنی..... ۴۷
- ۳۰۳ امواج اینرسی خطی..... ۵۵
- ۴۰۳ بررسی و ترسیم شکل‌ها..... ۵۶
- ۵۰۳ بررسی امواج آلفنی در حضور اینرسی الکترون غیر صفر در قانون اهم تعمیم یافته و حضور ویسکوزیته در پلاسمای تراکم ناپذیر مگنتوهیدرو دینامیک..... ۶۱
- فصل چهارم: اثرات ویسکوزیته بر ساختار امواج ضربه در گازهای ساده..... ۷۱
- ۱۰۴ مقدمه..... ۷۲
- ۲۰۴ معادلات اساسی..... ۷۲
- ۳۰۴ مدل ریاضیات امواج ضربه..... ۷۳
- ۴۰۴ شکل ضربه..... ۷۴
- ۵۰۴ بررسی نمودارها..... ۷۶
- ۶۰۴ رفتار محدوده‌ی آنتروپی پیش از امواج ضربه..... ۷۸

فصل پنجم: نتیجه گیری و پیشنهادات..... ۸۱

۱۰۵ مقدمه..... ۸۲

۲۰۵ نتایج به دست آمده از بررسی های انجام شده..... ۸۳

۳۰۵ پیشنهادات..... ۸۳

منابع..... ۸۴

پیوست..... ۸۷

فهرست اشکال

- شکل (۱-۱). تقسیم بندی پلاسمای کلاسیکی و کوانتومی..... ۹
- شکل (۲-۱). دو توزیع سرعت متفاوت با توجیه نظریه سیالی..... ۱۲
- شکل (۱-۲). انتشار امواج آلفنی در راستای میدان مغناطیسی و اعوجاج اغراق آمیز خطوط نیرو..... ۲۳
- شکل (۲-۲). اثرات افزایش عدد ماخ و جریان جابه جایی بر امواج سالیتوننی میدان مغناطیسی و چگالی پلازما در پلاسمای سرد و حرارتی..... ۳۶
- شکل (۳-۲). امواج ضربه میدان مغناطیسی و چگالی پلازما در پلاسمای حرارتی برای مقادیرهای متفاوت فرکانس برخورد..... ۴۱
- شکل (۱-۳). قسمت حقیقی فرکانس نرمالایز شده a و قسمت میرایی فرکانس نرمالایز شده b ، امواج متراکم آلفنی در پلاسمای سرد و گرم..... ۵۴
- شکل (۲-۳). سالیتون میدان مغناطیسی و چگالی پلازما برای عددهای ماخ متفاوت..... ۵۷
- شکل (۳-۳). سالیتون میدان مغناطیسی و چگالی پلازما برای افزایش دما..... ۵۷
- شکل (۴-۳). سالیتون میدان مغناطیسی و چگالی پلازما برای افزایش اینرسی الکترون..... ۵۸
- شکل (۵-۳). ضربه میدان مغناطیسی و چگالی پلازما برای افزایش مقدار برخوردهای متفاوت..... ۵۸
- شکل (۶-۳). ضربه میدان مغناطیسی و چگالی پلازما برای افزایش دما..... ۵۹
- شکل (۷-۳). دامنه‌ی سرعت یون‌های فراری در مقابل تغییرات دامنه چگالی در پلاسمای سرد..... ۶۱
- شکل (۸-۳). اثرات ویسکوزیته قسمت حقیقی فرکانس بی بعد شده امواج نامتراکم آلفنی در پلاسمای سرد و با در نظر گرفتن حرارتی..... ۶۷

شکل (۳-۹). قسمت میرایی فرکانس بی بعد شده امواج نامتراکم آلفنی در پلاسمای سرد و حرارتی..... ۶۸

شکل (۳-۱۰). مقایسه نرخ رشد امواج آلفنی برای $\mu = 0, \mu = 0.1$ در پلاسمای سرد..... ۶۸

شکل (۳-۱۱). نرخ رشد با افزایش ویسکوزیته در پلاسمای سرد..... ۶۹

شکل (۴-۱). شکل ضربه که تابعی از عدد موج است برای ویسکوزیته های ثابت و وابسته به دما و عدد ماخ ($M = 1.2$)..... ۷۷

شکل (۴-۲). شکل ضربه که تابعی از عدد موج است برای ویسکوزیته های ثابت و وابسته به دما و عدد ماخ ($M = 1.5$)..... ۷۷

شکل (۴-۳). شکل آنتروپی که تابعی از سرعت بی بعد است برای ویسکوزیته مخالف صفر (ثابت و وابسته به دما) و عدد ماخ ($M = 1.2$)..... ۷۹

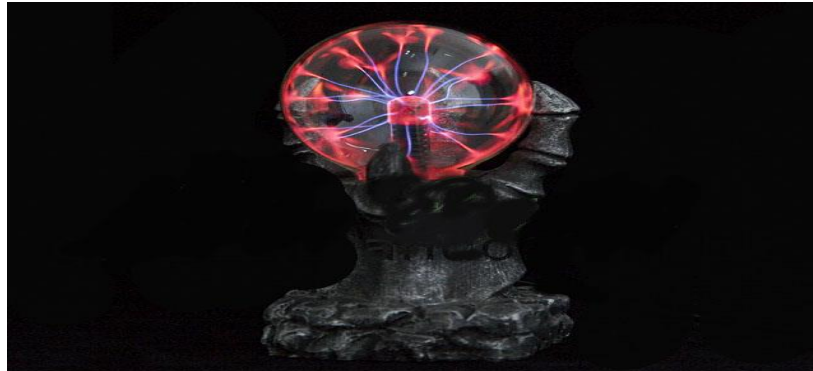
شکل (۴-۴). شکل آنتروپی که تابعی از سرعت بی بعد است برای ویسکوزیته و ویسکوزیته مخالف صفر (ثابت و وابسته به دما) و عدد ماخ ($M = 1.4$)..... ۸۰

فصل اول

معرفی پلاسما

۱-۱ مقدمه

• تعریف پلاسما



در تعریف پلاسما، آن را به عنوان چهارمین حالت ماده که به سه حالت اصلی جامد، مایع و گاز اضافه گردیده است معرفی می کنند.

این تعریف به انرژی ذرات و یا به عبارت دیگر به دمای ماده اشاره دارد. پلاسما گاز یونیده ای است که تعداد الکترون های آزاد تقریباً برابر یون های مثبت آن است.

در دماهای زیاد الکترون های آزاد انرژی کافی دارند تا در برخورد با اتم های دیگر بتوانند الکترون را از هسته جدا کنند. (انرژی لازم برای آزاد کردن از هسته، انرژی یونش نامیده می شود) این الکترون آزاد شده برخوردهای دیگری انجام می دهد و این فرایند ادامه دارد تا گاز یونیزه و به حالت پلاسما در آید. در یک درجه حرارت مطلق و غیر صفر هرگازی دارای تعدادی اتم یونیزه شده به صورت یون های مثبت، منفی و خنثی است. به نظر چنین می رسد که ما در یک درصدی از عالم زندگی می کنیم که در آن پلاسما به طور طبیعی یافت نمی شود. علت این امر را می توان از معادله ی ساها که میزان یونش یک گاز را در حال تعادل حرارتی نشان می دهد را دریافت:

$$\frac{n_i}{n_n} \approx 2.4 \times 10^{21} \frac{T^{\frac{3}{2}}}{n_i} \left(e^{-\frac{u_i}{k_B T}} \right) \quad (1-1)$$

n_i و n_n به ترتیب اتم های یونیزه و خنثی هستند. T دمای پلاسما و u_i انرژی یونش گازی می باشد. این رابطه نشان می دهد که افزایش دما سبب می شود که n_n کمتر از n_i شود تا سرانجام پلاسما کاملاً یونیزه شود.

۱-۲ معیارهای پلاسما

پلاسما گاز شبه خنثی ایی از ذرات باردار و خنثی است که رفتار جمعی از خود نشان می دهد. ملاک پلاسما بودن یک گاز یونیزه این است که چگالی اش آنقدر بزرگ باشد که طول دبای (λ_D) بسیار کوچکتر از L (ابعاد دستگاه) باشد.

شبه خنثائیت:

- منظور از شبه خنثی بودن این است که می توان فرض کرد $n_i \approx n_e \approx n$ باشد. n چگالی مشترک است که چگالی پلاسما نامیده می شود.
- به این معنی است که تفکیک بارها فقط در یک فاصله به اندازه ی طول دبای وجود داشته و در فواصل دورتر از طول دبای پلاسما اساساً خنثی است.

رفتار جمعی:

- حرکت های هر ذره فقط به قید های موضعی بستگی ندارد بلکه به موقعیت ها و سرعت های همه ی ذرات دیگر در پلاسما بستگی دارد. این رفتار جمعی به خاطر طبیعت دور برد بودن نیروهای الکترومغناطیسی است.

۳-۱ حفاظ دبای

یکی از مشخصات اساسی پلاسما توانایی آن برای دفع پتانسیل های الکتریکی است که به آن اعمال می شود. اگر بخواهیم با وارد کردن دو گلوله ی فلزی متصل به یک اختلاف پتانسیل یک میدان الکتریکی در داخل پلاسما ایجاد کنیم، خواهیم دید این گلوله ها ذره های با بار مخالف را جذب کرده و بلافاصله ابری از ذرات اطراف گلوله ها تشکیل می شود و تشکیل حفاظی را می دهند که باعث می شود میدان به طور نمایی کاهش یابد و اصطلاحاً پرده ای در جلوی ذرات ایجاد می شود. اگر حرکت گرمایی داخل پلاسما وجود نداشت، حفاظ کامل می شد و میدان الکتریکی خارج از ناحیه ابرها وجود نداشت. اما حرکات گرمایی باعث می شود که پتانسیل به داخل پلاسما نشت کند و میدان های الکتریکی متناهی در آن ایجاد شود. پتانسیل در هر نقطه به فاصله x از گلوله از رابطه زیر بدست می آید.

$$\varphi = \varphi_0 e^{-|x|/\lambda_D} \quad (۲-۱)$$

در رابطه بالا کمیت λ_D ، اندازه ای از فاصله ی حفاظ یا ضخامت غلاف می باشد که طول دبای نامیده می شود و رابطه آن به این صورت است [1].

$$\lambda_D \equiv \left(\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n e^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{v_{th}}{\omega_p} \quad (۳-۱)$$



هر محیط پلاسمایی دارای پارامترهای مهمی است که بر اساس آن پارامترها نوع پلاسما تعیین می شود. مهمترین این پارامترها چگالی و دما هستند به طوری که مشخصات دیگر پلاسما وابسته به این دو مشخصه می باشند. گستره ی وسیع چگالی و دمای یک پلاسما، آن را به یک حالت منحصر به فرد تبدیل کرده است. چگالی یک پلاسما بین 10^6 تا 10^{36} (بر متر مکعب m^{-3}) می باشد و همچنین انرژی ذرات آن که به دمای پلاسما وابسته است می تواند بین 1 تا 10^6 (eV) تغییر می کند.

۴-۱ دسته بندی پلاسما

در یک دسته بندی کلی پلاسما را می توان به دو دسته کلاسیکی و کوانتومی تقسیم کرد:

• پلاسماهای کلاسیکی

در پلاسماهای کلاسیکی بارهای یونیده جداگانه در فاصله طول دبای قرار دارند. و در خارج طول دبای، به جز برای نوسان های کوچک، پلاسما اساسا خنثی است.

پلاسماهای کلاسیکی از ذرات غیر تبهگن با چگالی عددی پایین و دمای بالا تشکیل شده است دومین ویژگی پلاسماهای کلاسیکی این است که اثرات جمعی نقش مهمی در دینامیک آن ایفا می کند.

پلاسماهای کلاسیکی از تابع توزیع ماکسول - بولتزمن تبعیت می کند و برای توصیف ذرات کلاسیکی به کار می رود.

فرکانس پلاسمایی:

با اعمال یک اختلال کوچک به پلاسما الکترون ها به دلیل سبک بودن حرکت می کنند و بار مثبت به جای می ماند. جدایی بارهای مثبت و منفی نیروهای کولنی بوجود می آورند و الکترون

ها را به سمت یون ها باز می گردانند این حرکت رفت و برگشت ادامه پیدا می کند و فرکانس پلاسمایی ایجاد می شود.

$$\omega_{pe} = \left(\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m}\right)^{1/2} \quad (۴-۱) \quad \omega_{pi} = \left(\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 M}\right)^{1/2} \quad (۵-۱)$$

سرعت گرمایی :

ناشی از حرکات گرمایی تصادفی می باشد.

$$v_{th} = \left(\frac{k_B T_e}{m}\right)^{1/2} \quad (۶-۱)$$

پارامتر جفت شدگی:

کمیتی است که نشان دهنده تاثیر برخوردها در پلاسماست و به صورت نسبت انرژی برخوردی کولنی به انرژی جنبشی تعریف می شود. ذرات در فاصله ی $d = n^{-1/3}$ قرار دارند.

$$g_c = \frac{E_{int}}{E_{kin}} = \frac{e^2 n^{1/3}}{\epsilon_0 k_B T} \quad (۷-۱)$$

زمانی که g_c کوچکتر از 1 باشد ($g_c < 1$) یا به عبارتی که $E_{kin} > E_{int}$ باشد برخوردهای کولنی دوتایی، ضعیف و در نتیجه اثرات گرمایی بر این برخوردها غالب می شوند. در این ناحیه میدان اصلی که روی ذرات بار دار شده اثر می کند میدان غیر موضعی ناشی از اثرات جمعی است. در این ناحیه رژیم کلاسیکی بدون برخورد (ایده آل) را خواهیم داشت. بنابراین پلاسماهای کلاسیکی در دماهای زیاد و چگالی کم، بدون برخورد هستند. بر عکس زمانی که $g_c > 1$ باشد برخوردهای دو ذره ای را نمی توان نادیده گرفت و پلاسما برخوردی و شدیداً جفت شده می باشند.

• پلاسمای کوانتومی

پلازما طیف وسیعی از حالت های ماده از نظر دما و چگالی را در بر دارد زمانی که طبیعت و خواص کوانتومی یک پلازما به طور اساسی روی ویژگی های ماکروسکوپی آن تاثیر گذارد آن پلازما را کوانتومی گویند. زمانی که پلازما سرد شود دمای آن به سمت دمای فرمی میل کرده انرژی آن کاهش پیدا می کند ذرات طبق فرمول پارامتر تبهگنی $(1-10)$ ، تبهگن می شوند الکترون ها به دلیل جرم کم طول موج دبروی بزرگتری کسب کرده و سریعتر از ذرات سنگین تبهگن می شوند. تابع توزیع ذرات از تابع توزیع فرمی - دیراک تبعیت می کنند و انرژی ذرات به انرژی فرمی نزدیک می شود. و اساسا پلازما کوانتیده می شود و اثرات کوانتومی نقش محوری را ایفا می کنند. و پلازما دیگر از نظریات کلاسیکی پیروی نمی کند. در پلازماهای کوانتومی ، الکترون ها و پوزیترون ها تبهگن و یون ها معمولا به دلیل سنگین تر بودن غیر تبهگن می باشند بنابراین الکترون ها جزء اصلی سازنده پلازماها می باشند. ویژگی اساسی این نوع پلازما چگالی بالا و دمای پایین است. کمیت های مهم و تاثیر گذار دیگری نیز وجود دارد که در زیر به طور مختصر اشاره می شود.

طول موج دوبروی

زمانی که چگالی خیلی زیاد باشد میانگین فاصله ی بین ذره ای با طول موج گرمایی دوبروی توصیف می شود. در پلازماهای کلاسیکی این کمیت نقشی ندارد به دلیل اینکه در مقایسه با میانگین فاصله ی بین ذره ای $(n^{-1/3})$ بسیار کوچک می باشد به طوری که ذرات می توانند مانند بار نقطه ای در نظر گرفته شوند.

$$\lambda_B = \frac{\hbar}{mv_{th}} = \frac{h}{\sqrt{2\pi mk_B T}} \quad (\lambda-1)$$

طول موج دو بروی به جرم و انرژی ذرات بستگی دارد در نتیجه این کمیت برای الکترون ها که سبک تر هستند دارای مقدار بیشتری است و اثرات کوانتومی برای الکترون ها نسبت به یون ها بیشتر است بنابراین الکترون ها ذرات کوانتومی معرفی می شوند و دینامیک یون ها عمدتاً کلاسیکی در نظر گرفته می شود. در پلاسماهای با دما و چگالی معمولی رفتارهای کوانتومی قابل صرف نظر کردن هستند. اما با کاهش دما هنگامی که دما به سمت دمای فرمی میل می کند این رفتارها پر رنگ تر می شوند. دمای فرمی با رابطه زیر نشان داده می شود.

$$T_f = \frac{E_f}{k_B} = \frac{\hbar^2}{2mk_B} (3\pi^2)^{2/3} n_e^{3/2} \quad (9-1)$$

نسبت دمای فرمی به دمای پلاسما را با χ نشان می دهند که به آن پارامتر تبهگنی گفته می شود.

$$\chi = \frac{T_f}{T} = \frac{1}{2} (3\pi^2)^{2/3} (n\lambda^3)^{2/3} \quad (10-1)$$

اگر $\chi \geq 1$ تمام ذرات در سطح فرمی و کاملاً تبهگن هستند. چون دما یک پارامتر متغیری است و اغلب اتفاق می افتد که یون ها و الکترون ها، توزیع های ماکسولی جداگانه ای با دماهای مختلف T_e و T_i داشته باشند اندازه گیری آن دشوار است و شاید پلاسما آن قدر باقی نماند تا این دو دما برابر هم شوند [1]. به جای آن از کمیت چگالی استفاده می کنیم و با افزایش چگالی اثرات کوانتومی نقش مهمتری ایفا می کنند. به همین دلیل پلاسماهای چگال را پلاسماهای کوانتومی می نامند.

سرعت

در محدوده ی دماهای خیلی کوچک سرعت گرمایی بسیار کم اهمیت می شود بنابراین سرعت فرمی-

دیراک، نشان دهنده ی سرعت تابع توزیع، فرمی-دیراک و یک الکترون در سطح فرمی می باشد.

سرعت فرمی - دیراک اینگونه نشان داده می شود:

$$v_f = \left(\frac{2E_f}{m}\right)^{1/2} \equiv \frac{\hbar}{m} (3\pi^2 n)^{1/3} \quad (11-1)$$

پارامتر جفت شدگی کوانتومی:

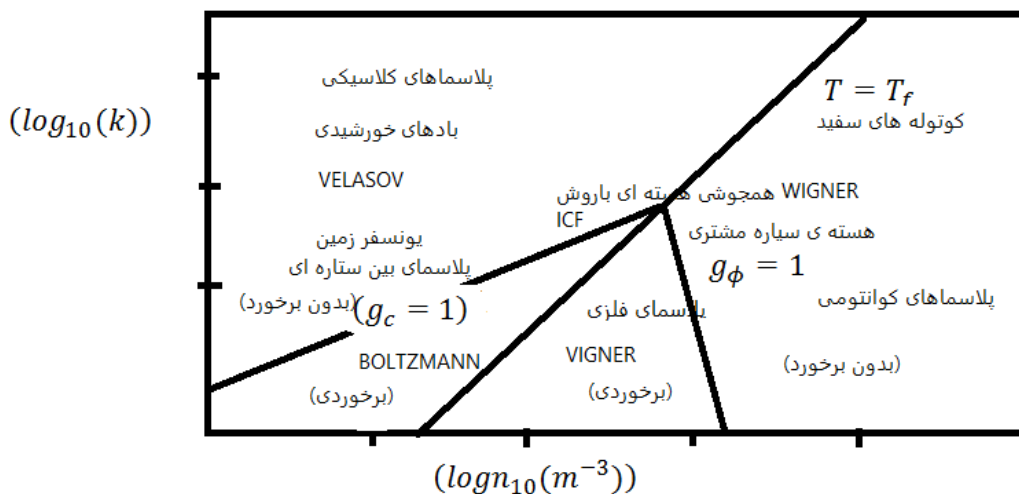
این کمیت یک مشخصه مهم از برخوردها در پلاسماهای کوانتومی است که به صورت نسبت انرژی برخوردی $E_{int} = e^2 n^{1/3} / \epsilon_0$ (مشابه نمونه کلاسیکی) به انرژی جنبشی تعریف می شود. انرژی جنبشی تعریف مشابه کلاسیکی ندارد و به جای آن از انرژی فرمی در واقع ($E_{int} = E_f$) استفاده می شود.

$$g_{\phi} = \frac{E_{int}}{E_f} \sim \left(\frac{1}{n\lambda_f^3}\right)^{\frac{2}{3}} \sim \left(\frac{\hbar\omega_p}{E_f}\right)^2 \quad (12-1)$$

با توجه به رابطه بالا پلاسماهای کوانتومی مشابه پلاسماهای کلاسیکی در چگالی بالا شدیداً برخوردی هستند.

۵-۱ تقسیم بندی ناحیه های مختلف پلاسما

در شکل زیر ناحیه های مختلف پلاسما نشان داده شده اند.



شکل (۱-۱) تقسیم بندی پلاسماهای کلاسیکی و کوانتومی

این شکل به دو ناحیه کلاسیکی و کوانتومی و هر کدام از این دو ناحیه نیز به دو ناحیه برخوردی و غیر برخوردی تقسیم می شوند. خط $T = T_f$ مرز بین پلاسمای کلاسیکی و کوانتومی می باشد. ناحیه ای که دما بزرگتر از دمای فرمی باشد ($T > T_f$) ناحیه کلاسیکی است و $g_c = 1$ حد بین پلاسما های کلاسیکی برخوردی و غیر برخوردی است. برای $g_c < 1$ یعنی انرژی داخلی در قیاس با انرژی جنبشی کوچکتر باشد پلاسمای کلاسیکی بدون برخورد وجود دارد و اثرات حرارتی بر اثرات برخوردی کولنی غالب هستند. نمونه ای از پلاسماهای کلاسیکی بدون برخورد، پلاسماهای یونسفری، فضای بین ستاره ای، باد های خورشیدی و غیره خواهند بود. معادله ای که برای توصیف این پلاسما ها به کار می رود معادله ولاسوف می باشد. برای $g_c \geq 1$ پلاسماهای کلاسیکی برخوردی وجود دارند که بوسیله معادله بولتزمن توصیف می شوند. ناحیه ای که دما کوچکتر از دمای فرمی است $T < T_f$ ناحیه مربوط به پلاسماهای کوانتومی می باشد. این ناحیه به ازای $g_\phi < 1$ شامل پلاسمای کوانتومی غیر برخوردی مانند ستاره های نوترونی هستند و به وسیله تابع ویگنر که مدل کوانتومی معادله ولاسوف است توصیف می شوند. به عبارتی دیگر این پلاسماها غیر برخوردی هستند. زمانی که فاصله بین ذره ای از مرتبه شعاع بور $a_0 = \frac{\hbar^2}{2m_e e^2} \approx 53A^0$ (یعنی $n_e \geq 1.22 \times 10^{26} \text{ cm}^{-3}$ چگالی $d = \frac{1}{\frac{1}{n_e^{1/3}}} < \frac{[3\pi^2]^{2/3}}{8\pi} a_0 \approx .38a_0$) کوچکتر باشد، چگالی $n_e \geq 1.22 \times 10^{26} \text{ cm}^{-3}$ می باشد که سه مرتبه بزرگتر از چگالی الکترونی در فلزات معمولی است.

مدلی که برای توصیف پلاسمای کوانتومی برخوردی که در ناحیه $g_\phi \geq 1$ قرار دارند به کار می رود با (برخوردی) *wigner* نشان داده شده است. در موارد تبهگن فرمی، اصل طرد پائولی صادق است. این اصل شدیداً نرخ برخوردهای الکترون - یون و الکترون - الکترون را کاهش می دهد. باید توجه کرد اجسام اختر فیزیکی مانند کوتوله سفید به طور صریحی کوانتومی و بدون برخورد می باشند. اگرچه مانند پلاسمای خورشیدی داغ هستند. ولی از آنجا که دما نسبت به چگالی سنجیده می شود و آنها دمای کمتری نسبت به چگالی دارند جزء پلاسمای کوانتومی محسوب می شوند.

۱-۶ مدل های توصیف پلاسما و معادلات وابسته با آن :

۱- مدل ذره ای ۲- مدل سیالی ۳- مدل جنبشی

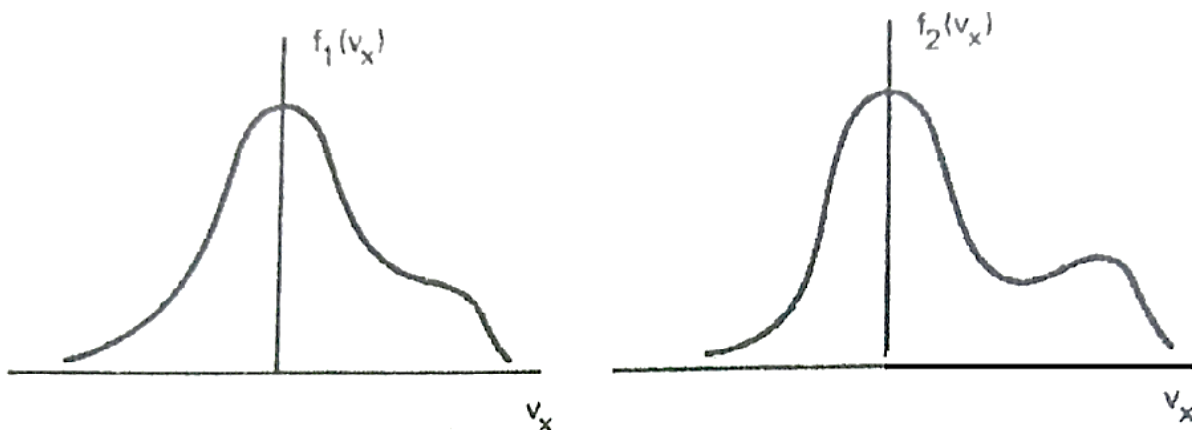
- مدل ذره ای: با توجه به اینکه چگالی یک پلاسما نوعی ممکن است در حدود 10^{12} جفت یون و الکترون در cm^3 باشد. توصیف رفتار پلاسما، با در نظر گرفتن مسیرهای هر یک از آنها تحت تاثیر نیروهای الکتریکی و مغناطیسی طبق قانون لورنتس، کار پیچیده ای به نظر می رسد. البته برای چگالی های کم این بررسی امکان پذیر است. این مدل، خام و ابتدایی می باشد.

$$\frac{mdv}{dt} = q(E + (v \times B)) \quad (1-13)$$

- مدل سیالی: در یک سیال معمولی ذرات در اثر برخورد های مکرر بین خودشان در یک عنصر سیال نگه داشته و با هم حرکت می کنند. با وجود اینکه در پلاسما این برخوردها کمتر اتفاق می افتد یک چنین مدلی برای پلاسما هم کاربرد دارد. در این مدل به جای ذره منفرد و محاسبه ی سرعت تک تک ذرات، حرکت سیالی و سرعت متوسط در نظر گرفته می شود. به عبارت دیگر پلاسما بر اساس کمیت های ماکروسکوپی نظیر سرعت های لحظه ای، توزیع چگالی، سرعت متوسط و انرژی متوسط ذرات توصیف می شود. پلاسما سیالی حاوی ذرات باردار و خنثی می باشد در صورتی که سیال معمولی، برخوردهای فراوان بین ذرات خنثی در یک جز سیال نگه داشته می شود تا با هم حرکت کنند. روابط مربوط به مدل سیالی برای پلاسمای کلاسیکی از معادلات هیدرودینامیک کلاسیکی و برای پلاسمای کوانتومی از مفاهیم کوانتومی تابع موج استخراج می شود.

- مدل جنبشی: نظریه سیالی به کار برده شده، ساده ترین شکل توصیف پلاسماست؛ البته اسباب خوشوقتی است که این تقریب برای توصیف قسمت اعظم پدیده های مشاهده شده از دقت کافی برخوردار است. با این حال، پدیده هایی هستند که در مورد آنها مطرح کردن

پلازما به صورت سیال کاملا درست نیست. در مورد این پدیده ها، باید تابع توزیع سرعت $f(v)$ را برای هر نوع از ذرات در نظر بگیریم؛ این مبحث را نظریه جنبشی می نامند. در نظریه سیالی، متغیرهای وابسته توابعی فقط از چهار متغیر x, y, z, t هستند. البته این امکان پذیر است، زیرا توزیع سرعت های انواع ذرات در همه جا ماکسولی فرض می شود و بنابراین می تواند منحصرًا توسط یک عدد یعنی دما T مشخص شود. چون در پلازماهای با دمای بالا و چگالی پایین، برخورد کمتری اتفاق می افتد، می توان برای مدت نسبتاً طولانی، جلوی انحراف از تعادل حرارتی را گرفت. به عنوان مثال دو توزیع سرعت $f_1(v)$ و $f_2(v)$ را در یک دستگاه یک بعدی در نظر بگیرید این دو توزیع، رفتار کاملاً متفاوتی دارند، ولی تا وقتی که سطح زیر منحنی ها یکی است، نظریه سیالی، فرقی بین آنها قایل نیست.



شکل (۱-۲) دو توزیع سرعت متفاوت با توجیه نظریه سیالی

در نظریه جنبشی تابع توزیع ذرات شامل هفت متغیر $x, y, z, v_x, v_y, v_z, t$ می باشد زیرا ممکن است هم شکل توزیع و هم چگالی توزیع با مکان و زمان تغییر کند. یک تابع توزیع مهم در نظریه جنبشی، تابع توزیع، فرمی - دیراک می باشد.

رسم $f(r, v)$ در یک لحظه معین غیر ممکن است مگر اینکه از ابعاد آن کاسته شود. در یک دستگاه یک بعدی، $f(x, v_x)$ را می توان به صورت یک سطح نمایش داد فصل مشترک این سطح

با صفحات $x = constant$ توزیع های سرعت $f(v_x)$ را می دهند. فصل مشترک با صفحات $v_x = constant$ نمایه ی چگالی ذرات با v_x معین را می دهند. فصل مشترک با صفحات $(f = constant)$ ، منحنی های تراز یا منحنی های f ثابت را نشان می دهد که این نقشه ها از این لحاظ که اطلاعات اولیه ای از رفتار پلاسما را عرضه می کنند حایز اهمیت هستند. اگر حرکت دو بعدی باشد و f نسبت v_x و v_y همسانگرد باشد پر بند دایره ای و اگر ناهمسانگرد باشد پربند بیضوی دارد.

۷-۱ مدل سیالی و معادلات حاکم به آن در پلاسمای کلاسیکی:

معادله ای که حرکت سیال معمولی را بیان می کند، معادله ناویر-استوکس است. که به شکل زیر است.

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right) = -\nabla p + \rho \nu \nabla^2 u \quad (14-1)$$

که در آن ρ چگالی ، u سرعت ، p فشار ، ν ویسکوزیته جنبشی می باشد.

اما معادله توصیف کننده ی حرکت پلاسمای کلاسیکی به شکل زیر است.

$$mn \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right] = qn(E + u \times B) - \nabla p \quad (15-1)$$

معادله پیوستگی

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (nu) = 0 \quad (16-1)$$

معادلات ماکسول در خلا:

$$\epsilon_0 \nabla \cdot E = \rho \quad (17-1)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (18-1)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (19-1)$$

$$\nabla \times B = \mu_0 \left(j + \frac{\varepsilon_0 \partial E}{\partial t} \right) \quad (20-1)$$

دسته معادلات مدل سیالی را نشان می دهد.

۸-۱ معادلات نظریه ی جنبشی در پلاسمای کلاسیکی:

اساسی ترین معادله ای که $f(r, v, t)$ باید در آن صدق کند، معادله بولتزمن می باشد. که به شکل زیر است:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla f + \frac{F}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c \quad (21-1)$$

در اینجا F نیروی وارد بر ذرات و $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c$ میزان تغییر زمانی f در اثر برخورد است. علامت ∇ طبق معمول گرادیان در فضای (x, y, z) را نشان می دهد. علامت $\partial / \partial v$ یا ∇_v ، گرادیان در فضای سرعت را نشان می دهد.

$$\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v_x} \hat{X} + \frac{\partial}{\partial v_y} \hat{Y} + \frac{\partial}{\partial v_z} \hat{Z}$$

در پلاسمایی که به اندازه کافی داغ است به دلیل اینکه چگالی پلازما بسیار کاهش یافته است می توان از برخوردها صرفنظر کرد. اگر علاوه بر این نیروی F کلا الکترومغناطیسی باشد، معادله به شکل زیر در می آید و معادله ولاسوف خوانده می شود [1].

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla f + \frac{q}{m} (E + v \times B) \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad (22-1)$$

۹-۱ مدل های توصیف پلاسمای کوانتومی:

۱- مدل هارتری ۲- مدل هارتری - فوک ۳- مدل ویگنر - پواسون

۱۰-۱ ساختار پایان نامه

هدف از این تحقیق بررسی اثرات ویسکوزیته بر پلاسمای چند مولفه ای و گازهای ساده کلاسیکی و بررسی تغییر آثار خطی و غیر خطی این پلاسمای با حضور اثرات ویسکوزیته می باشد.

این پایان نامه مشتمل بر پنج فصل می باشد:

در فصل اول مقدمه ای از تعریف پلاسمای، دسته بندی پلاسمای، پارامترها، مدل ها و معادلات پلاسمای انجام شد.

در فصل دوم امواج هیدرومغناطیسی از جمله امواج آلفنی و امواج مغناطیو صوتی را تعریف کردیم و در ادامه معادله (kdv) را برای امواج یونی بزرگ دامنه بدست آوردیم. سپس امواج سالیتمونی (kdv) و امواج ضربه $(kdv - B)$ را در پلاسمای الکترون - پوزیترون بدست می آوریم و اثرات (جریان جا به جایی، عدد ماخ، افزایش حرارت، برخورد، ویسکوزیته) را بر موج سالیتمونی و ضربه بررسی کردیم [3].

در فصل سوم امواج آلفنی بزرگ دامنه را در حضور الکترون اینرسی غیر صفر موجود در قانون اهم تعمیم یافته بررسی کرده و امواج سالیتمونی (kdv) و امواج ضربه $(kdv - B)$ را در پلاسمای متراکم مگنتوهیدروینامیک بدست می آوریم. در ادامه ویسکوزیته را بر رفتار خطی امواج آلفنی با فرض کوچک بودن دامنه اثر داده و نمودار رابطه ی پاشندگی را بدست می آوریم [4].

در فصل چهارم اثرات ویسکوزیته (در حالی که یک بار ویسکوزیته را ثابت در نظر گرفته و بار دیگر ویسکوزیته را تابعی از دما فرض کرده ایم) در گازهای ساده بررسی کرده و امواج سالیتمونی را در نقش آنتروپی بررسی کرده و امواج ضربه را برای این پلاسمای بدست می آوریم [5].

در نهایت در فصل پنجم نتایج و یافته های تحقیق، ذکر و در مورد آنها بحث می شود و پیشنهاداتی نیز جهت ادامه مطالعه ارائه می گردد.

فصل دوم

امواج در پلاسما

۱-۲ مقدمه

از بررسی امواج پلاسما، به بحث درباره ی نوسانات یونی با فرکانس پایین در حضور یک میدان مغناطیسی می پردازیم. از بین تعداد زیاد مد ممکن، فقط دو مد را مطرح می کنیم: موج هیدرو مغناطیسی در طول میدان مغناطیسی B_0 ، یا موج آلفن و موج هیدرو مغناطیسی در عرض میدان مغناطیسی B_0 ، یا موج مغناطی صوتی نامیده می شود.

۲-۲ امواج آلفن :

از معادلات ماکسول شروع می کنیم.

$$\nabla \times E_1 = -\frac{\partial B_1}{\partial t} \quad \text{القای فارادی} \quad (1-2)$$

$$c^2 \nabla \times B_1 = \frac{1}{\varepsilon_0} j_1 + \frac{\partial E_1}{\partial t} \quad \text{قانون آمپر} \quad (2-2)$$

با گرفتن مشتق زمانی از رابطه ۲، گرفتن کرل از رابطه ۱ و قرار دادنش در رابطه ۲،

$$c^2 \nabla \times \dot{B}_1 = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial j_1}{\partial t} + \ddot{E}_1$$

$$\nabla \times (\nabla \times E_1) = \nabla(\nabla \cdot E_1) - \nabla^2 E_1 = -\nabla \times \dot{B}_1$$

اگر تغییرات امواج تخت را به صورت $e^{i(k \cdot r - \omega t)}$ در نظر بگیریم، داریم :

$$\varepsilon_0(\omega^2 - c^2 k^2) E_1 = -i\omega j_1 \quad (3-2)$$

$$k = k_z, E_1 = E_{1x} \quad (4-2)$$

لذا فقط مولفه x این معادله مهم است. حال با توجه به اینکه فرکانس های پایین مد نظرم است نظریه ی شبه خنثیائیت نقض و چگالی الکترون ها با چگالی یون ها برابر نمی باشد و در نتیجه سرعت

های متفاوتی برای الکترون ها و یون ها در نظر می گیریم و جریان J_1 هم از یون ها و هم از الکترون ها ناشی می شود.

$$\varepsilon_0(\omega^2 - c^2 k^2)E_1 = -i\omega n_0 e(v_{ix} - v_{ex}) \quad (5-2)$$

$$v_{ix} = \frac{ie}{M\omega} \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} E_1 \quad (6-2)$$

$$v_{iy} = \frac{e}{M\omega} \frac{\Omega_c}{\omega} \left(1 - \frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)^{-1} E_1 \quad (7-2)$$

جواب مربوط به حرکت الکترون را می توان با تبدیل $M \rightarrow m$ ، $e \rightarrow -e$ ، $\Omega_c \rightarrow \omega_c$ و سپس گرفتن حد $\omega_c^2 \gg \omega^2$ پیدا کرد:

$$v_{ex} = \frac{ie}{m\omega} \frac{\omega^2}{\omega_c^2} E_1 \rightarrow 0 \quad (8-2)$$

$$v_{ey} = -\frac{e}{m} \frac{\omega_c}{\omega^2} \frac{\omega^2}{\omega_c^2} E_1 = -\frac{E_1}{B_0} \quad (9-2)$$

با جایگذاری کمیات تعریف شده در رابطه (5-2) و فرض $\omega^2 \ll \Omega_c^2$ ، فرکانس امواج هیدرومغناطیسی بمراتب از فرکانس تشدید سیکلوترونی یونی پایین تر است. در این حد، خواهیم داشت:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{1 + \left(\frac{\rho}{\varepsilon_0 B_0^2}\right)} = \frac{c^2}{1 + \left(\frac{\rho \mu_0}{B_0^2}\right) c^2} \quad (10-2)$$

که در آن ρ همان چگالی جرمی $n_0 M$ است.

ثابت دی الکتریک در یک پلاسما

حالتی را در نظر می گیریم که میدان الکتریکی نسبت به زمان تغییر می کند:

$$E = E_0 e^{i\omega t} \hat{X}$$

چون $E'_0 = i\omega E_x$ ، لذا می توانیم معادله حرکت را به صورت زیر در بیاوریم:

$$m \left(\frac{dv}{dt} \right) = q[E(x) + v \times B]$$

$$\dot{v}_y = -\frac{qB}{m} v_x \quad \text{و} \quad \dot{v}_x = \frac{qB}{m} v_y + \frac{q}{m} E_x(x)$$

$$\ddot{v}_x = -\omega_c^2 v_x \pm \omega_c \frac{\dot{E}_x}{B} = -\omega_c^2 \left(v_x \mp \frac{i\omega \widetilde{E}_x}{\omega_c B} \right) *$$

تعریف زیر را انجام می دهیم:

$$\widetilde{v}_p \equiv \pm \frac{i\omega \widetilde{E}_x}{\omega_c B}$$

که در آن علامت مد، صرفاً به عنوان تأکیدی بر نوسانی بودن سوق افزوده شده است. علامت بالایی (یا پایینی)، طبق معمول، q مثبت (یا منفی) را مشخص می کند. حال معادله * به صورت زیر در می آید:

$$\ddot{v}_x = -\omega_c^2 (v_x - \widetilde{v}_p)$$

مولفه سرعت در راستای x ، سوق جدیدی در امتداد E بوجود می آورد که سوق قطبشی (سوق پلاریزاسیون) خوانده می شود. با جایگزینی $i\omega$ توسط $\frac{\partial}{\partial t}$ می توانیم سوق قطبشی را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$V_p = \pm \frac{1}{\omega_c B} \frac{dE}{dt}$$

چون برای یون ها و الکترون ها، جهات مخالفی دارد، یک جریان قطبشی بوجود خواهد آمد که بصورت زیر تعریف می شود:

$$j_p = ne(v_{ip} - v_{ep}) = \frac{ne}{eB^2} (M + m) \frac{dE}{dt} = \frac{\rho}{B^2} \frac{dE}{dt} **$$

که در آن ρ چگالی جرمی است.

اثر قطبش در پلاسما مثل اثر قطبش در یک دی الکتریک جامد است، که برای آن

$(D = \epsilon_0 E + P)$. یون ها و الکترون ها در پلاسما به منزله ی دو قطبی ها هستند که با فاصله r_l از هم جدا شده اند. ولی از آنجایی که یون ها و الکترون ها می توانند برای نگهداری شبه خنثائیت، به این طرف و آن طرف حرکت کنند، لذا با اعمال یک میدان E پایا، نمی توان میدان قطبشی مثل P ایجاد کرد. با این حال اگر E نوسان کند، از درنگ حاصل از لختی یون، یک جریان نوسان کننده J_p حاصل می شود. میدان افت و خیز کننده ی E سبب بروز جریان قطبشی J_p می شود. این جریان به نوبه ی خود سبب پیدایش یک بار قطبشی می گردد که توسط معادله پیوستگی داده می شود:

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial t} + \nabla \cdot j_p = 0$$

اما همان طوری که قبلا خاطر نشان ساختیم، تا وقتی که یک میدان الکتریکی متغیر با زمان در پلاسما وجود نداشته باشد، اثر قطبش ظاهر نمی شود. چون رابطه ی صریحی برای J_p داریم نه برای σ_p ، لذا کار با معادله چهارم ماکسول راحت تر است:

$$\nabla \times B = \mu_0(j_f + j_p + \epsilon_0 \dot{E})$$

می خواهیم این معادله را به شکل

$$\nabla \times B = \mu_0(j_f + \epsilon \dot{E})$$

بنویسیم. این عمل را می توان با انتخاب

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{j_p}{\dot{E}}$$

انجام داد. با جایگذاری معادله جریان قطبشی (***) در عبارت بالا داریم خواهیم داشت:

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{\rho}{B^2} \quad \text{یا} \quad \epsilon_R = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\mu_0 \rho c^2}{B^2}$$

این کمیت، ثابت دی الکترونیک پلاسمای فرکانس پایین برای حرکات عرضی است. توضیحات فوق از این نظر که رابطه j_p فقط در حالت $\omega^2 \ll \omega_C^2$ و برای E عمود بر B معتبر است لازم به نظر می رسد. توجه داشته باشید که وقتی $\rho \rightarrow 0$ ، ϵ_R به سمت مقدار مربوطه اش در خلا یعنی واحد نزدیکتر می شود. همچنین وقتی $B \rightarrow \infty$ ، ϵ_R به واحد نزدیک می شود. علت این امر صفر شدن سوق قطبشی V_p در این حالت بوده و این که ذرات دیگر در پاسخ به میدان الکترونیکی عرضی حرکتی نمی کنند.

همانطور که می بینید مخرج معادله (۲-۱۰) عینا شبیه ثابت دی الکترونیک برای حرکات عمودی با فرکانس پایین می باشد.

$$\frac{\omega}{k} = v_A = B_0 / (\mu_0 \rho)^{1/2} \quad (۲-۱۱)$$

v_A سرعت مشخصه ای است که با آن اختلالات خطوط نیرو منتشر می شوند. می توان ثابت دی الکترونیک را به صورت زیر نوشت:

$$\epsilon_R = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \left(\frac{c^2}{v_A^2} \right) \quad (۲-۱۲)$$

برای پلاسماهای خیلی چگال سرعت آلفنی کوچک و رابطه‌ی پاشندگی امواج هیدرومغناطیسی در راستای میدان مغناطیسی دی الکترونیک بزرگ دارد. در یک پلاسما، ϵ بزرگ حفاظی در مقابل میدان‌های الکترونیکی متناوب می گردد. درست نظیر پلاسمایی با λ_D کوچک، که حفاظی در مقابل میدان الکترونیکی مستقیم (dc) تشکیل می دهد [1].

برای درک اینکه در موج آلفن، از لحاظ فیزیکی چه اتفاقی صورت می گیرد، یادآور می شویم که موج مزبور یک موج الکترومغناطیسی است با یک میدان اف و خیز کننده‌ی B_1 که توسط رابطه‌ی زیر داده می شود:

$$\nabla \times E_1 = - \frac{\partial B_1}{\partial t} \quad (۲-۱۳)$$

$$E_x = \left(\frac{\omega}{k}\right) B_y \quad *$$

وقتی مولفه B_1 به B_0 اضافه شود، به خطوط نیرو، شکل سینوسی می دهد که به طور اغراق آمیز در شکل زیر نشان داده ایم. که B_1 در جهت مثبت y است ω/k در جهت z باشد، E_x در جهت مثبت x است میدان الکتریکی، سرعت سوقی معادل $E_1 \times B_0$ در جهت منفی y ها به پلاسما می دهد. چون $\omega^2 \ll \Omega_c^2$ را در نظر گرفته ایم، لذا یونها و الکترونها سوق یکسانی خواهند داشت. بدین ترتیب سیال در امتداد y ها به طرف بالا و پایین حرکت می کند. مقدار این سرعت برابر $\left(\frac{E_x}{B_0}\right)$ است. سرعت رو به پایین خط نیرو $\left(\frac{\omega}{k}\right) \left|\frac{B_y}{B_0}\right|$ طبق رابطه ستاره (*) درست مساوی با سرعت سیال است. بدین ترتیب سیال و خطوط میدان چنان با هم نوسان می کنند گویی ذرات به خطوط چسبیده و فریز هستند.



شکل (۱-۲) انتشار امواج آلفنی در راستای میدان مغناطیسی و اعوجاج (اغراق آمیز) خطوط نیرو

به صورت خلاصه ویژگی های موج آلفن در زیر ذکر شده است.

۱. دارای نوسانات عرضی می باشد.
۲. انتشار آن در راستای امتداد میدان مغناطیسی است.
۳. موج آلفن خاصیت مغناطیسی داشته و حرکت های گرمایی در آن از اهمیت پایینی برخوردار هستند.
۴. ذرات بر خطوط نیرو منجمد شده است.

۲-۳ امواج مغناطو صوتی

بالاخره امواج الکترومغناطیسی فرکانس پایینی را در نظر می‌گیریم که در عرض B_0 منتشر می‌شوند. می‌توانیم $B_0 = B_0 \hat{z}$ و $E_1 = E_1 \hat{x}$ بگیریم. ولی در اینجا $k = k \hat{y}$ گرفته می‌شود. می‌بینیم که سوق $E_x \times B_0$ در امتداد k قرار می‌گیرد، به طوری که پلازما در دوره ی نوسانتش متراکم و سپس رها می‌شود. بنابراین لازم است که در معادله حرکت، عبارت ∇P نگاهداشته شود. برای یونها داریم:

$$\frac{Mn_0 \partial v_{i1}}{\partial t} = en_0(E_1 + v_{i1} \times B_0) - \gamma_i k T_i \nabla n_1 \quad (14-2)$$

γ نسبت گرماهای ویژه $\frac{c_p}{c_v}$ است. به طوری که برای یک تراکم (ایزوترم) برابر یک و برای تراکم بی‌درو برابر $3/2$ می‌باشد [1].

با انتخابی که برای k و E_1 داشتیم، معادله فوق به شکل زیر در می‌آید:

$$v_{ix} = \frac{ie}{M\omega} (E_x + v_{iy} B_0) \quad (15-2)$$

$$v_{iy} = \frac{ie}{M\omega} (-v_{ix} B_0) + \frac{k \gamma_i k T_i n_1}{\omega M n_0} \quad (16-2)$$

از معادله پیوستگی داریم:

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{k}{\omega} v_{iy} \quad (17-2)$$

با جایگذاری در معادله v_{iy} چنین می‌شود.

$$v_{iy} = -\frac{ie}{M\omega} v_{ix} B_0 + \frac{k^2 \gamma_i k T_i}{\omega^2 M} v_{iy} \quad (18-2)$$

با استفاده از اختصار:

$$A \equiv \frac{k^2 \gamma_i k T_i}{\omega^2 M} \quad (19-2)$$

معادله فوق به صورت زیر در می آید:

$$v_{iy}(1 - A) = -\frac{i\Omega_c}{\omega} v_{ix} \quad (20-2)$$

با ترکیب معادله اخیر با معادله (2-15) (سرعت در راستای x) داریم و تنها مولفه قابل ملاحظه ی معادله موج عبارت است از:

$$\varepsilon_0(\omega^2 - c^2k^2)E_x = -i\omega n_0 e(v_{ix} - v_{ex}) \quad (21-2)$$

برای یافتن v_{ex} ، کافیتست که تغییرات مناسبی در معادله v_{ix} بدهیم و حد جرم کوچک الکترون را در نظر بگیریم، به طوریکه $\omega^2 \ll \omega_c^2$ و $\omega^2 \ll k^2 v_{th}^2$

$$v_{ex} = \frac{ie}{m\omega} \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \left(1 - \frac{k^2 \gamma_e k T_e}{\omega^2 m}\right) E_x = -\frac{ik^2 \gamma_e k T_e}{\omega B_0^2 e} E_x \quad (22-2)$$

با کنار هم گذاشتن سه معادله اخیر داریم:

$$\varepsilon_0(\omega^2 - c^2k^2)E_x = -i\omega n_0 e \left[\frac{ie}{M\omega} E_x \frac{1-A}{1-A-\left(\frac{\Omega_c^2}{\omega^2}\right)} + \frac{ik^2 M \gamma_e k T_e}{\omega B_0^2 e M} E_x \right] \quad (23-2)$$

باز هم فرض می کنیم $\omega^2 \ll \Omega_c^2$ ، به طوری که $1 - A$ در مقابل Ω_c^2/ω^2 قابل صرفنظر کردن باشد. به کمک تعاریف Ω_p و v_A داریم:

$$(\omega^2 - c^2k^2) = -\frac{\Omega_p^2}{\Omega_c^2} \omega^2 (1 - A) + \frac{k^2 c^2 \gamma_e k T_e}{v_A^2 M} \quad (24-2)$$

$$\left(\omega^2 - c^2k^2 \left(1 + \frac{\gamma_e k T_e}{M v_A^2}\right) + \frac{\Omega_p^2}{\Omega_c^2 \left(\omega^2 - \frac{k^2 \gamma_i k T_i}{M}\right)} = 0 \right) \quad (25-2)$$

از آنجایی که

$$\frac{\Omega_p^2}{\Omega_c^2} = \frac{c^2}{v_A^2}$$

خواهیم داشت

$$\omega^2 \left(1 + \frac{c^2}{v_A^2}\right) = c^2 k^2 \left(1 + \frac{\gamma_e k T_e + \gamma_i k T_i}{M v_A^2}\right) = \frac{c^2 k^2 (1 + v_s^2)}{v_A^2} \quad (26-2)$$

که در آن v_s سرعت صوت است. بالاخره داریم:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2 (v_s^2 + v_A^2)}{c^2 + v_A^2} \quad (27-2)$$

این رابطه پاشندگی برای موج مغناطو صوتی است. که در امتداد عمود بر B_0 منتشر می شود. موج مزبور، یک موج صوتی است که در آن تراکم و انبساط به وسیله ی حرکات در طول E به وجود نمی آیند بلکه توسط سوق های $E \times B$ عمود بر E تولید می شوند. در حد $B_0 \rightarrow 0$ موج مغناطو صوتی به یک موج یون صوتی عادی تبدیل می شود. در حد $kT \rightarrow 0$ ، نیروی گرادیان فشار از بین می رود و موج به یک موج آلفن تغییر شکل یافته مبدل می گردد. سرعت فاز مد مغناطو صوتی تقریباً همیشه از v_A بزرگتر است، به این علت است که اغلب آنرا موج هیدرو مغناطیسی سریع می نامند.

۲-۴ معادله kdv :

دو معادله غیر خطی، که در ارتباط با امواج غیر خطی پلاسما می باشند مورد بررسی قرار گرفته شده اند. اثر غیر خطی هنگامی که یک موج یون - صوتی دامنه ی بزرگی کسب می کند باعث تیز شدن شیب موج می باشد. این اثر از عبارت $v \cdot \nabla v$ در معادله حرکت، در معادله ی موج یونی خود را نشان می دهد. که توسط معادله kdv بررسی می شود. می خواهیم نشان دهیم که معادله کورته - وگ - ده وری امواج یونی بلند دامنه را توصیف می کند. حالت ساده امواج یک بعدی را با یون های سرد را در نظر می گیریم. با استفاده از معادله حرکت، پایستگی، پواسون و بولتزمن به رابطه ی اصلی معادله kdv برسیم.

$$mn \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = qn(E + v \times B) \quad \text{معادله حرکت} \quad (28-2)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{u_i \partial u_i}{\partial x} = \frac{e}{m} E = -\frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (29-2)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_i u_i) = 0 \quad \text{معادله پیوستگی} \quad (30-2)$$

$$n_e = n_0 e^{e\varphi/kT_e} \quad \text{معادله بولتزمن} \quad (31-2)$$

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot E = e(n_e - n_i) \quad \text{معادله پواسون} \quad (32-2)$$

$$\frac{\varepsilon_0 \partial^2 \varphi}{\partial x^2} = e(n_0 e^{e\varphi/kT_e} - n_i) \quad (33-2)$$

متغیرهای بی بعد

$$u_s = \left(\frac{kT_e}{M}\right)^{1/2} \quad \dot{x} = \frac{x}{\lambda_e} = x \left(\frac{n_0 e^2}{kT_e \varepsilon_0}\right)^{1/2}$$

$$\dot{u} = u_i/u_s \quad \dot{n} = n_i/n_0 \quad \dot{t} = \Omega_p t = t \left(\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 M}\right)^{1/2}$$

$$\chi = e\varphi/kT_e \rightarrow \varphi = kT_e \chi/e$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = \frac{1}{\lambda_D} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \dot{t}} \frac{\partial \dot{t}}{\partial t} = \Omega_p \frac{\partial}{\partial \dot{t}}$$

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial \dot{t}} + \dot{u} \frac{\partial \dot{u}}{\partial \dot{x}} = -\frac{\partial \chi}{\partial \dot{x}} \quad \text{معادله حرکت نرمالایز شده} \quad (34-2)$$

$$\frac{\partial \dot{n}}{\partial \dot{t}} + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} (\dot{n} \dot{u}) = 0 \quad \text{معادله پیوستگی نرمالایز شده} \quad (35-2)$$

$$\frac{\varepsilon_0 kT_e}{\lambda_D^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \dot{x}^2} = (e\chi - \dot{n}) \rightarrow \frac{\partial^2 \chi}{\partial \dot{x}^2} = e\chi - \dot{n} \quad \text{معادله پواسون نرمالایز شده}^1 \quad (36-2)$$

بعد از یک سری معادلات جبری به معادله kdv می رسیم.

¹ برای ادامه اثبات به پیوست قسمت الف مراجعه شود.

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{u \partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} = 0 \quad (37-2)$$

معادله کورته وگ - وریس یا همان kdv همانطور که قبلا گفته شد، یک معادله غیر خطی، پاشنده و غیر اتلافی است که در سال ۱۹۸۵ توسط دی ادریک کورته وگ و گوستا ده وریس معرفی شد. این معادله جواب های سالی تونی دارد. در حل آن مرسوم است جواب ها به صورت موج ایستاده در نظر گرفته شود^۲:

$$u(\eta) = 3c \operatorname{sech}^2 \left(\left(\frac{c}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \eta \right) \quad (38-2)$$

این سالی تون دارای سرعت c ، دامنه $3c$ و نیم پهنای $(2/c)^{1/2}$ است.

سالی تون یک موج منزوی خود - تقویت کننده (یک بسته موج یا پالس) است که وقتی با سرعت ثابت حرکت می کند شکلش را حفظ می کند.

سالی تون ها در نتیجه ی خنثی سازی آثار شیب غیر خطی^۳ و پاشندگی در محیط حاصل می شوند.

۲-۵ امواج سالی تونی و ضربه در پلاسمای الکترون - پوزیترون مغناطیسی

در ادامه ما راه حل های غیر خطی، امواج سالی تونی و ضربه برای پلاسمای الکترون - پوزیترون مغناطیسی در چارچوب مگنتوهیدرودینامیک را بدست می آوریم و در حد غیر برخوردی ساختار انتشار امواج سالی تونی شبه ثابت را برای میدان مغناطیسی و چگالی پلاسمای بدست می آوریم. و می بینیم که دامنه امواج با عدد ماخ و سرعت آلفنی افزایش پیدا می کند. با این حال وابستگی به دمای پلاسمای تنها مخالف است.

^۲ برای حل معادله kdv به کتاب اف چن مراجعه شود.

^۳ nonlinear steepening

سرعت آلفنی، انرژی سالیتون را مشخص می کند. هر اندازه انرژی بزرگتر باشد، به همان اندازه سرعت و دامنه بزرگتر می شود. حدوث سالیتون ها به شرایط اولیه بستگی دارد. اگر آشفتگی اولیه، انرژی کافی داشته باشد و فازها مناسب باشند یک سالیتون می تواند بوجود آید، در غیر اینصورت یک موج بلند دامنه ظاهر خواهد شد.

برای این پلاسمای مورد بررسی، وجود امواج سالیتونی تنها به رنج⁴ سرعت آلفنی در پلاسمای سرد و با در نظر گرفتن حرارت در پلاسمای (پلاسمای گرم) وجود امواج سالیتونی علاوه بر رنج سرعت آلفنی به دمای پلاسمای نیز بستگی دارد.

در حضور برخورد، میدان های مغناطیسی و چگالی پلاسمای می توانند به عنوان ساختارهای شوک⁵ نوسانی به دلیل اتلاف ناشی از برخورد پدیدار شوند. همچنین افزایش فرکانس برخوردی ساختار امواج ضربه را یکنواخت تر می کند که در ادامه به طور کامل مورد بررسی می شود.

پلاسمای الکترون - پوزیترون را می توان درجهان اولیه و در کهکشان های فعال و در بسیاری از آزمایشهای آزمایشگاهی پیدا کرد. بدلیل جرم یکسان و بار مخالف الکترون ها و پوزیترون ها، ساختار موضعی پلاسمای الکترون - پوزیترون متفاوت از الکترون - یون والکترون - پوزیترون - یون می باشد و بدلیل فشار و نیروی اثر گذار یکسان برای الکترون و پوزیترون بدلیل جرم برابر آنها، معمولاً پلاسمای خالص الکترون - پوزیترون به سختی از وجود امواج سالیتونی حمایت کند [3]. اما امواج سالیتونی امکان تبدیل شدن دارند اگر برخی از ویژگی های نامتقارن در پلاسمای الکترون - پوزیترون (*EP*) معرفی شده باشد به عنوان مثال پلاسمای (*EP*) مغناطیسی شده.

در این مبحث ما امواج سالیتونی و امواج ضربه را برای پلاسمای الکترون - پوزیترون مغناطیسی شده ی سرد و با در نظر گرفتن اثر حرارتی (گرم) در مدل مگنتو هیدرودینامیک مورد بررسی قرار می دهیم

⁴ range

⁵ shock

و معادلات جفت شده‌ی میدان مغناطیسی و چگالی پلاسما را بدست آورده و حل عددی آن را انجام می‌دهیم.

قانون اهم برای پلاسماى الکترون - پوزیترون EP که بدلیل جرم متقارن و بار مخالف از پلاسماى مرسوم EI متمایز می‌گردد و آن را در چهارچوب غیرنسبیتی MHD بدست می‌آوریم.

معادله بولتزمن غیر نسبیتی را برای مسیر مولفه تابع توزیع می‌نویسیم:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{q}{m} \left(E + \frac{1}{c} v \times B \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial v} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c$$

که q و m مولفه بار و جرم می‌باشند و v, E, B مولفه‌های سرعت و میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی می‌باشند. رابطه بالا را برای مولفه پوزیترون و الکترون بازنویسی می‌کنیم و مولفه سرعت u_j را در آن ضرب می‌کنیم.

$$u = (U + u_j)$$

$$j = p, e$$

$$U = \frac{n_p m_p u_p + n_e m_e u_e}{n_p m_p + n_e m_e} \quad (\text{سرعت جرمی})$$

$$k_p = n_p k$$

$$k_e = n_e k$$

$$k = \frac{(v m_p m_e)(u_e - u_p)}{m_p + m_e} \quad (\text{نیروی برهم کنش بین پوزیترون و الکترون})$$

$$\frac{\partial(n_p m_p u_p)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot [\vec{P}_p + n_p m_p (U u_p + u_p U)] - q_p n_p E - \frac{q_p n_p u_p \times B}{c} = k_p \quad *$$

$$\frac{\partial(n_e m_e u_e)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot [\vec{P}_e + n_e m_e (U u_e + u_e U) - q_e n_e E - \frac{q_e n_e u_e \times B}{c}] = k_e \quad **$$

معادله * را در $\frac{e}{m_p}$ و معادله ** را در $-\frac{e}{m_e}$ در دو طرف معادله ضرب می کنیم و معادلات را با هم جمع می کنیم.

$$\frac{\partial}{\partial t} [e(n_p u_p - n_e u_e)] + \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left\{ e \left(\frac{\vec{P}_p}{m_p} - \frac{\vec{P}_e}{m_e} \right) + [U e (n_p u_p - n_e u_e)] \right. \\ \left. + e(n_p u_p - n_e u_e) U \right\}$$

$$-e^2 \left(\frac{n_p}{m_p} + \frac{n_e}{m_e} \right) E - \frac{e^2}{c} \left(\frac{n_p u_p}{m_p} + \frac{n_e u_e}{m_e} \right) \times B = e \left(\frac{n_p}{m_p} + \frac{n_e}{m_e} \right) k$$

$$m_p = m_e = m, \quad n_p = n_e = \frac{n}{2}, \quad \vec{P}_p = \vec{P}_e$$

$$J = e(n_p u_p - n_e u_e) \quad (\text{چگالی جریان})$$

$$\rho = (n_p m_p + n_e m_e) \quad (\text{چگالی جرمی})$$

$$E + \frac{1}{c} U \times B = \frac{m^2}{\rho e^2} \left[\frac{\partial J}{\partial t} + \nabla \cdot (UJ + JU) \right] + \eta J$$

اثرات پوزیترون

همانطور که در ابتدا اشاره کردیم بدلیل فشار و نیروی اثر گذار یکسان برای الکترون و پوزیترون بدلیل جرم برابر آنها، معمولا پلاسمای خالص الکترون - پوزیترون به سختی از وجود امواج سالیتمونی حمایت می کند و پلاسمای مذکور یک عامل نامتقارن می خواهد که سالیتمون ها را نشان داده و در آن تغییر شکل ایجاد کند. بنابراین پلاسمای الکترون - پوزیترون را در حضور میدان مغناطیسی خارجی بررسی می کنیم [3].

و همچنین می توان دید که با اینکه جرم الکترون ها و پوزیترون ها با هم برابر است اما سرعت پوزیترون ها و الکترون ها با یکدیگر متفاوت می باشد و همین امر باعث ایجاد جریان جا به جایی در سیال پلاسما می شود و آثار پلاسمای الکترون - پوزیترونی در جمله جدید $\nabla \cdot (UJ + JU)$ در قانون اهم بدست آید و جریان جابجایی (تغییرات میدان الکتریکی نسبت به زمان) را در مقایسه با جریان هدایتی (تغییرات میدان مغناطیسی نسبت به مکان) حفظ می کند. تنها زمانی می توان جریان جا به جایی را نادیده گرفت که سرعت آلفنی سیال خیلی کوچک ($\alpha \ll 1$) بوده یا میدان مغناطیسی خارجی کوچک باشد. هرچند که زمانی که میدان مغناطیسی پس زمینه به اندازه کافی قوی باشد جریان جا به جایی نقش مهمی را برای تغییر شکل امواج سالیوتونی بازی می کند [3].

۲-۶ مدل ریاضی و روابط امواج غیرخطی

در اینجا، ما امواج سالیوتونی میدان الکترومغناطیسی و چگالی پلاسما را در پلاسمای الکترون - پوزیترون با حضور میدان مغناطیسی خارجی $B_0 \hat{z}$ در نظر می گیریم.

معادلات عمومی (MHD)، از جمله معادلات حرکت سیال و قانون اهم غیر نسبیته را برای پلاسمای (EP) و معادلات ماکسول در زیر نوشته شده است:

$$\rho = (n_p m_p + n_e m_e) \quad (\text{چگالی جرمی})$$

$$J = e(n_p u_p - n_e u_e) \quad (\text{چگالی جریان})$$

$$\xi = e(n_p - n_e)$$

$$m_p = m_e = m, \quad n_p = n_e = \frac{n}{2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \quad (39-2)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right] = -\nabla p + \xi E + \frac{1}{c} J \times B \quad (40-2)$$

$$E + \frac{1}{c} u \times B = \frac{m^2}{\rho e^2} \left[\frac{\partial J}{\partial t} + \nabla \cdot (uJ + Ju) \right] + \eta J \quad (۴۱-۲)$$

$$\nabla \cdot E = 4\pi\xi \quad (۲۴-۲)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (۴۳-۲)$$

$$\nabla \times E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \quad (۴۴-۲)$$

$$\nabla \times B = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} J \quad (۴۵-۲)$$

که c سرعت نور در خلا، q چگالی جرمی، u سرعت جرمی سیال، ξ چگالی جرمی بار، J چگالی جریان، η مقاومت ویژه سیال رسانا است. E میدان الکتریکی، B میدان مغناطیسی کل و پلاسما همدم فرض شده و $P = nkT$ که n چگالی تعداد کل ذرات، k_B ثابت بولتزمن و T دمای الکترون ها و پوزیترون ها که برای هر دو نوع ذره یکسان فرض شده است. شرط شبه خنثائیت منجر به صفر شدن چگالی بار ($\xi = 0$) می شود. در محاسبات زیر معادلات جفت شدهی میدان مغناطیسی و چگالی پلاسما، در غیاب و حضور مقاومت در دستگاه بدست آمده اند. ما سرعت جرمی را راستای $u = u\hat{x}$ و میدان الکتریکی را در راستای $E = E\hat{y}$ و چگالی جریان را در راستای $J = J\hat{y}$ و میدان مغناطیسی را در راستای $B = B\hat{z}$ در نظر می گیریم و معادلات بالا را باز نویسی می کنیم.

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu)}{\partial x} = 0 \quad (۴۶-۲)$$

$$nm \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u\partial u}{\partial x} \right) = \frac{1}{c} JB - K_B T \frac{\partial n}{\partial x} \quad (۴۷-۲)$$

$$E - \frac{1}{c} uB = \frac{m}{ne^2} \left(\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{u\partial J}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} J \right) \quad (۴۸-۲)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{c\partial E}{\partial x} \quad (۴۹-۲)$$

$$J = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (۵۰-۲)$$

علاوه بر این ما مقادیر بی بعد شده را به شرح زیر معرفی می کنیم:

زمان $\omega_c t$ ، طول $\omega_c x / v_A$ ، سرعت $\frac{u}{v_A}$ ، میدان های الکترومغناطیسی $\frac{cE}{B_0 v_A}$ و $\frac{B}{B_0}$ ، چگالی $\frac{n}{n_0}$ ،

چگالی جریان $\frac{4\pi v_A}{c \omega_c B_0}$ که $\omega_c = \frac{e B_0}{m_e c}$ فرکانس سیکلوترونی الکترون و $v_A = B_0 / \sqrt{4\pi n_0 m_e}$

سرعت آلفنی با میدان مغناطیسی خارجی B_0 و جرم سکون الکترون و n_0 تعداد چگالی غیر

آشفته پلاسما می باشند و ما معادلات بی بعد شده را بدست می آوریم:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu)}{\partial x} = 0 \quad (51-2)$$

$$n \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u \partial u}{\partial x} \right) = JB - \beta \frac{\partial n}{\partial x} \quad (52-2)$$

$$E - uB = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{u \partial J}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} J \right) \quad (53-2)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = - \frac{\partial E}{\partial x} \quad (54-2)$$

$$J = - \frac{\partial B}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E}{\partial t} \quad (55-2)$$

که $\alpha = \frac{v_A^2}{c^2}$ (ضریب جریان جا به جایی) و $\beta = \frac{n_0 v_A T}{\frac{B_0^2}{4\pi}} = \frac{v_T^2}{v_A^2}$ (ضریب هدایت حرارت) که $v_T \equiv$

سرعت حرارتی الکترون می باشد. جریان جا به جایی $\frac{\partial E}{\partial t}$ در معادله (55-2) در مقابل جریان

هدایتی پایدار باقی می ماند. در این مبحث فقط تنها زمانی جریان جا به جایی را می توان نادیده گرفت

که $1 \ll \alpha$ و میدان مغناطیسی خارجی بسیار ضعیف باشد یا چگالی سیستم بالا باشد.

با این حال، همانطور که در زیر می بینیم این جریان جابه جایی نقش های مهمی در تغییر دادن امواج

سالیتمونی زمانی که میدان مغناطیسی بسیار قوی است بازی می کند.

ما بدنبال راه حل های امواج سالیتمونی در چارچوب جدید با مرجع u_g/v_A ، $\xi = x - Mt$ ، $M =$

اعمال شرایط مرزی زمانی که $\xi \rightarrow \infty$

$$u(\infty) = 0, B(\infty) = 1, n(\infty) = 1, \frac{\partial B}{\partial \xi} = 0 \quad (56-2)$$

معادلات بالا تقلیل پیدا می کنند به معادلات زیر^۶:

$$-Mn + nu = -M \quad (57-2)$$

$$-n(M - u) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial n}{\partial \xi} = JB \quad (58-2)$$

$$n(E - uB) = -(M - u) \frac{\partial J}{\partial \xi} + J \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad (59-2)$$

$$E = M(B - 1) \quad (60-2)$$

$$J = -(1 - \alpha M^2) \frac{\partial B}{\partial \xi} \quad (61-2)$$

از معادله (57-2) بدیهی است که $U = M(1 - \frac{1}{n})$ ←

معادله (60-2) و (61-2) را در معادله (59-2) جایگزین می کنیم و یکی از معادلات جفت شده ی

بین میدان مغناطیسی و چگالی پلاسما را بدست می آوریم:

$$B'' - \frac{1}{n} B' n' - \frac{(B-n)n}{1-\alpha M^2} = 0 \quad (62-2)$$

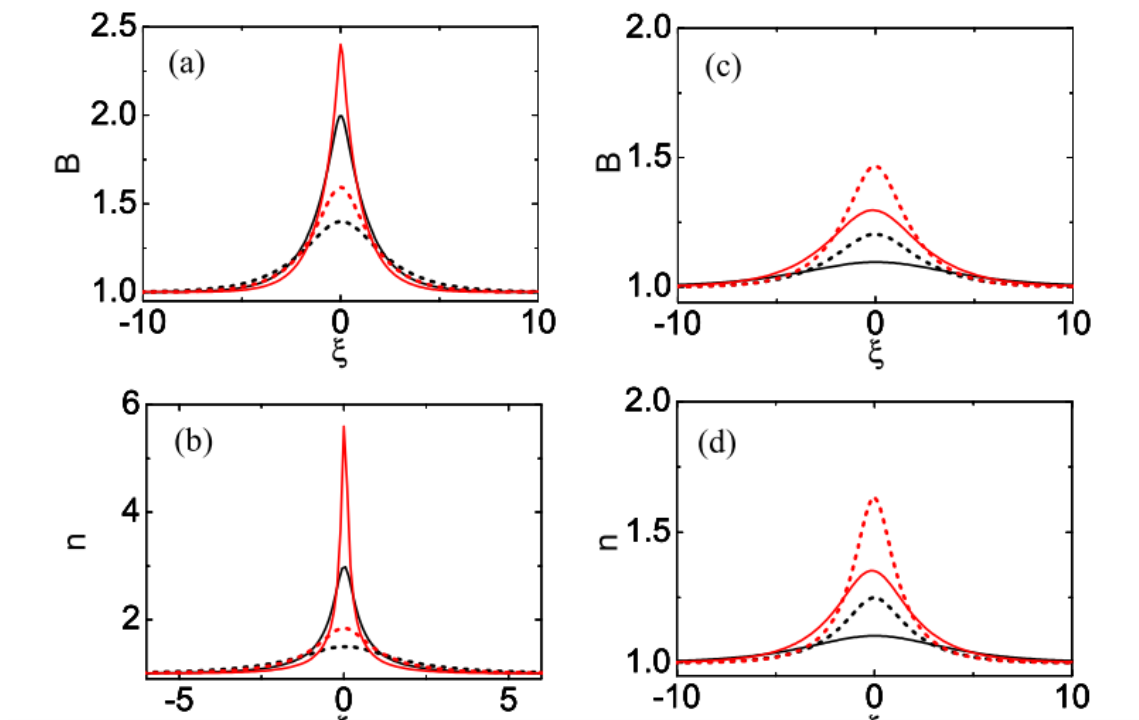
که در اینجا B'' (مشتق دوم میدان مغناطیسی نسبت به ξ است) و B' (مشتق اول میدان مغناطیسی

نسبت به ξ است).

معادله ی دیگر جفت شده را می توان از معادله (57-2) و (58-2) و (61-2) بدست می آوریم:

^۶ برای اثبات روابط به پیوست قسمت ب مراجعه شود.

$$M^2 \left(\frac{1}{n} - 1 \right) + \frac{1-\alpha M^2}{2} (B^2 - 1) + \beta(n - 1) = 0 \quad (۶۳-۲)$$



شکل (۲-۲) ستون سمت چپ در پلاسمای سرد $\beta = 0$ و ستون سمت راست اثر حرارتی در پلاسمای $\beta = 0.1$ در نظر گرفته شده است.

ستون سمت چپ: $M = 1.2, \alpha = 0$ (خط چین پایین) و $M = 1.2, \alpha = 0.1$ (خط چین بالاتر)،

$M = 1.5, \alpha = 0$ (خط پایین) و $M = 1.5, \alpha = 0.1$ (خط بالاتر)

ستون سمت راست: $M = 1.2, \alpha = 0$ (خط چین پایین) و $M = 1.2, \alpha = 0.1$ (خط چین پایین)،

$M = 1.5, \alpha = 0$ (خط بالاتر) و $M = 1.5, \alpha = 0.1$ (خط چین بالاتر)

بررسی نمودار بالا:

با در نظر گرفتن اثر حرارتی بر پلاسمای سرد، درجه حرارت باعث کاهش چگالی می شود و از تندی و شیب غیر خطی در معادله kdv کاسته می شود و همانطور که در شکل بالا می بینید سالیتون ها با افزایش دمای پلاسمای کوتاهتر (کاهش) می شوند و بنابراین ما ماکزیمم مقدار دامنه را در پلاسمای سرد داریم.

و همچنین افزایش عدد ماخ به علت افزایش سرعت گروه سیال، ارتفاع دامنه سالیتون را افزایش می دهد.

اثر ناشی از پلاسمای الکترون - پوزیترون یعنی حفظ وجود جریان جا به جایی در کنار جریان هدایتی عامل دیگری است که دامنه ی سالیتون را در هر دو پلازما (سرد و حرارتی) افزایش می دهد.

بررسی امواج ضربه

برای یک پلاسمای الکترون - پوزیترون برخوردی، اثر اتلافی ناشی از برخورد بین الکترون ها و پوزیترون ها باید در نظر گرفته شود و لازم است معادلات (MHD) را با جمله برخورد حل کنیم:

$$\rho = (n_p m_p + n_e m_e) \quad (\text{چگالی جرمی})$$

$$J = e(n_p u_p - n_e u_e) \quad (\text{چگالی جریان})$$

$$\xi = e(n_p - n_e)$$

$$m_p = m_e = m, \quad n_p = n_e = \frac{n}{2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \quad (64-2)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right] = -\nabla p + \xi E + \frac{1}{c} J \times B \quad (65-2)$$

$$E + \frac{1}{c} u \times B = \frac{m^2}{\rho e^2} \left[\frac{\partial J}{\partial t} + \nabla \cdot (uJ + Ju) \right] + \eta J \quad (66-2)$$

$$\nabla \cdot E = 4\pi \xi \quad \text{و} \quad \nabla \cdot B = 0 \quad (67-2)$$

$$\nabla \times E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \quad (68-2)$$

$$\nabla \times B = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} J \quad (69-2)$$

که c سرعت نور در خلا، q چگالی جرمی، u سرعت جرمی سیال، ξ چگالی جرمی بار، J چگالی جریان، η مقاومت ویژه سیال رسانا است. E میدان الکتریکی، B میدان مغناطیسی کل و پلاسما همدمما فرض شده و $P = nkT$ که n تعداد چگالی کل، k_B ثابت بولتزمن و T دمای الکترون ها و پوزیترون ها که برای هر دو نوع ذره یکسان فرض شده است. شرط شبه خنثائیت منجر به صفر شدن چگالی ($\xi = 0$) می شود. در محاسبات زیر معادلات جفت شده ی میدان مغناطیسی و چگالی پلاسما در حضور مقاومت در دستگاه بدست آمده اند. ما سرعت جرمی را راستای $u = u\hat{x}$ و میدان الکتریکی را در راستای $E = E\hat{y}$ و چگالی جریان را در راستای $J = J\hat{y}$ و میدان مغناطیسی را در راستای $B = B\hat{z}$ در نظر می گیریم و معادلات بالا را باز نویسی می کنیم.

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu)}{\partial x} = 0 \quad (70-2)$$

$$nm \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u \partial u}{\partial x} \right) = \frac{1}{c} JB - K_B T \frac{\partial n}{\partial x} \quad (71-2)$$

$$E - \frac{1}{c} uB = \frac{m}{ne^2} \left(\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{u \partial J}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} J \right) + \left(\frac{m^2 v}{ne^2} \right) J \quad (72-2)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = - \frac{c \partial E}{\partial x} \quad (73-2)$$

$$J = - \frac{c}{4\pi} \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (74-2)$$

علاوه بر این ما مقادیر بی بعد شده را به شرح زیر معرفی می کنیم:

زمان $\omega_c t$ ، طول $\omega_c x / v_A$ ، سرعت $\frac{u}{v_A}$ ، میدان های الکترومغناطیسی $\frac{cE}{B_0 v_A}$ و $\frac{B}{B_0}$ ، چگالی $\frac{n}{n_0}$ ، چگالی جریان $\frac{4\pi v_A}{c \omega_c B_0}$ که $\omega_c = \frac{eB_0}{m_e c}$ فرکانس سیکلوترونی الکترون و $v_A = B_0 / \sqrt{4\pi n_0 m_e}$ سرعت آلفنی با میدان مغناطیسی خارجی B_0 و m_e جرم سکون الکترون و n_0 تعداد چگالی غیر

آشفته پلازما می باشند و $\eta = \frac{m^2 v}{\rho e^2}$ مقاومت ویژه پلازما می باشد. ما معادلات بی بعد شده را بدست

می آوریم:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu)}{\partial x} = 0 \quad (۷۵-۲)$$

$$n \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u \partial u}{\partial x} \right) = JB - \beta \frac{\partial n}{\partial x} \quad (۷۶-۲)$$

$$E - uB = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{u \partial J}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} J \right) + \frac{mv}{n} \quad (۷۷-۲)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = - \frac{\partial E}{\partial x} \quad (۷۸-۲)$$

$$J = - \frac{\partial B}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E}{\partial t} \quad (۷۹-۲)$$

که $\alpha = \frac{v_A^2}{c^2}$ (ضریب جریان جا به جایی) و $\beta = \frac{n_0 v_A T}{\frac{B_0^2}{4\pi}} = \frac{v_T^2}{v_A^2}$ (ضریب هدایت حرارت) که $v_T \equiv$

سرعت حرارتی الکترون و جریان جا به جایی در معادله (۷۷،۲) پایدار باقی می ماند. در این

مبحث فقط تنها زمانی می توان جریان جا به جایی را نادیده گرفت که $1 \ll \alpha$ و میدان مغناطیسی

خارجی بسیار ضعیف باشد یا چگالی سیستم بالا باشد.

با این حال، همانطور که در زیر می بینیم این جریان جابه جایی نقش های مهمی در تغییر دادن امواج

مجرد (سالیتون) زمانی که میدان مغناطیسی بسیار قوی است بازی می کند.

ما بدنبال راه حل های امواج سالیتونی در چارچوب جدید با مرجع $M = \frac{ug}{v_A}$ ، $\xi = x - Mt$ ، با اعمال

شرایط مرزی زمانی که $\xi \rightarrow \infty$

$$u(\infty) = 0, B(\infty) = 1, n(\infty) = 1, \frac{\partial B}{\partial \xi} = 0 \quad (۸۰-۲)$$

معادلات بالا تقلیل پیدا می کنند به معادلات زیر^۷:

$$-Mn + nu = -M \quad (۸۱-۲)$$

$$-n(M - u) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial n}{\partial \xi} = JB \quad (۸۲-۲)$$

$$n(E - uB) = -(M - U) \frac{\partial J}{\partial \xi} + J \frac{\partial u}{\partial \xi} + mv \quad (۸۳-۲)$$

$$E = M(B - 1) \quad (۸۴-۲)$$

$$J = -(1 - \alpha M^2) \frac{\partial B}{\partial \xi} \quad (۸۵-۲)$$

از معادله (۸۱-۲) بدیهی است که $U = M(1 - \frac{1}{n})$ ←

معادله (۸۴-۲) و (۸۵-۲) را در معادله (۸۳-۲) جایگزین می کنیم و یکی از معادلات جفت شده ی

بین میدان مغناطیسی و چگالی پلاسما را بدست می آوریم:

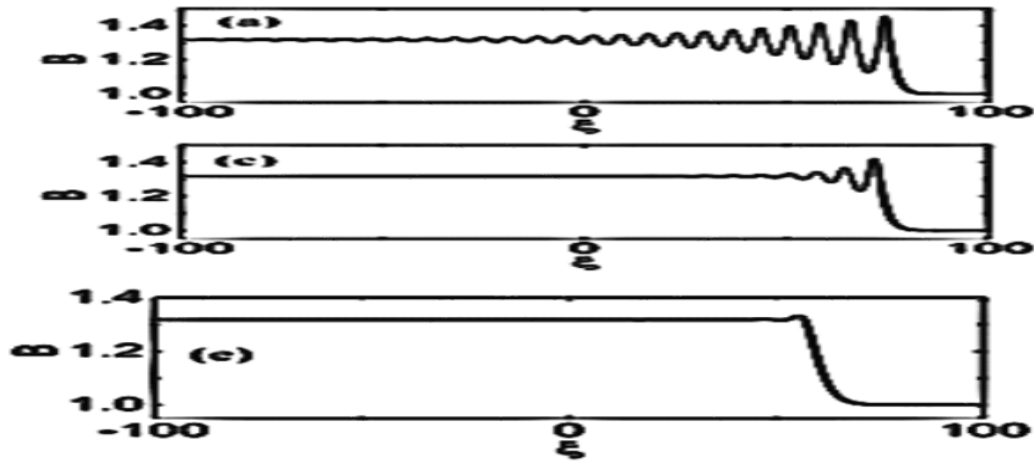
$$B'' - \frac{1}{n} B' n' - \frac{(B-n)n}{1-\alpha M^2} - \frac{nv}{M} \dot{B} = 0 \quad (۸۶-۲)$$

که در اینجا B'' (مشتق دوم میدان مغناطیسی نسبت به ξ است) و B' (مشتق اول میدان مغناطیسی نسبت به ξ است). n' (مشتق اول چگالی نسبت به ξ است).

در حضور برخورد ، اتلاف ایجاد می شود و منجر به ساختار های ضربه نوسانی برای میدان مغناطیسی و چگالی پلاسما می شود. با افزایش فرکانس برخورد بین الکترون ها و پوزیترون ها و افزایش جمله اتلافی در معادله $kdv - B$ به دلیل بالا رفتن مقاومت ویژه پلاسما با افزایش فرکانس برخوردی و کاهش پاشندگی از قدرت ضربه کاسته و ارتعاشات ضربه یکنواخت تر^۸ می شود که در شکل های زیر نشان داده شده است.

^۷ اثبات روابط به پیوست قسمت ب مراجعه شود.

^۸ monotonic



شکل (۲-۳) شکل امواج ضربه میدان مغناطیسی (B) و چگالی پلاسما (n) با در نظر گرفتن حرارت در پلاسما ($\beta = 0.1$) برای عدد ماخ ($M = 1.2$) و سرعت آلفنی $\alpha = 0.1$ و مقدارهای متفاوت فرکانس برخورد $\nu = 0.05$ (ردیف بالا) $\nu = 0.2$ (ردیف وسط) $\nu = 0.9$ (ردیف پایین)

۷-۲ تعریف ویسکوزیته (گرانروی)

(لزج بودن یا ویسکوزیته) به انگلیسی (*viscosity*) عبارت است از مقاومت لایه های سیال در برابر جاری شدن یا اعمال ایجاد تنش برشی تقریباً یکسان. هر ماده ای که از لزجت بیشتری برخوردار است تنش برشی بیشتر و نیروی بیشتری برای جاری شدن نیاز دارند. در یک سیال جاری (در حال حرکت)، که لایه های مختلف آن نسبت به یکدیگر جابجا می شوند، به مقدار مقاومت لایه های سیال در برابر لغزش روی هم گرانروی سیال می گویند. هرچه گرانروی مایعی بیشتر باشد، برای ایجاد تغییر شکل یکسان، به تنش برشی بیشتری نیاز است. تنش ها در جامدات از تغییر شکل الاستیک و در سیالات از جریان ویسکوز ناشی می شوند. لذا می گوئیم جامدات الاستیک هستند و سیالات ویسکوز می باشند. (گفتنی است اغلب بافت های بیولوژیکی، ویسکوالاستیک هستند، یعنی مشخصه های جامد و سیال را باهم دارند). در یک سیال ساکن، تنش برشی وجود ندارد. لزجت عامل اصلی انتقال تکانه در لایه های سیال می باشد و هنگامی ظاهر می شود که بین لایه های سیال حرکت نسبی وجود داشته باشد.

ویسکوزیته ناشی از دو عامل زیر است

(الف) نیروهای جاذبه مولکولی که در مایعات مطرح می‌شود

(ب) نیروهای تبادل تکانه مولکولی که در گازها مطرح می‌گردد

انواع ویسکوزیته :

ویسکوزیته دینامیکی : ویسکوزیته دینامیکی خاصیتی از سیال است که در برابر جریانهای برشی ایجاد مقاومت میکند این جریانها در جایی به وجود می‌آیند که لایه های سیال دارای سرعتهای مختلفی باشند. در مایعات با افزایش دما نیروی بین مولکولی کاهش می‌یابد و در نتیجه لزجت که در مایعات به نیروی بین مولکولی ربط دارد کاهش می‌یابد. چون در گازها لزجت ناشی از حرکت تصادفی مولکولهاست. وقتی دما زیاد می‌شود حرکت تصادفی بیشتر و در نتیجه لزجت بیشتر می‌شود اگر افزایش فشار خیلی زیاد نباشد لزجت مستقل از فشار است ولی در تغییر فشارهای بالا، لزجت مایعات و گازها با افزایش فشار افزایش می‌یابد. توجه داشته باشید که بی اثر بودن فشار روی لزجت گازها به این دلیل است که با افزایش فشار، سرعت برخورد مولکولی افزایش یافته ولی طول برخورد کاهش می‌یابد که این دو، اثر مخالف روی لزجت دارند و در نتیجه لزجت گازها مستقل از فشار خواهد بود. بنابراین برای یک سیال رابطه تنش و گرادیان سرعت یا همان تغییر شکل به صورت خطی است که این خطی بودن با ویسکوزیته دینامیکی ایجاد میشود. ویسکوزیته مطلق یا ضریب ویسکوزیته مطلق اندازه‌گیری مقاومت داخلی است.

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

ویسکوزیته جنبشی

ویسکوزیته جنبشی را ضریب نفوذ تکانه می نامند و حاصل تقسیم ویسکوزیته دینامیکی به چگالی

است

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

تفاوت ویسکوزیته دینامیکی و ویسکوزیته جنبشی در نحوه برخورد با مسائل است به عنوان مثال در مسائلی که بررسی رفتار بین ملکولی و تعمیم آنها به خاصیت مکانیکی مد نظر است از ویسکوزیته دینامیکی استفاده می شود و در مسایلی که حرکت سیال اهمیت دارد از ویسکوزیته جنبشی استفاده می شود.

لزجت سینماتیک بر خلاف لزجت دینامیکی تابع فشار است. با افزایش فشار، لزجت سینماتیک گازها کاهش می یابد ولی لزجت سینماتیک مایعات افزایش می یابد. و با توجه به کاهش قابل ملاحظه چگالی گازها با دما، تغییرات لزجت سینماتیکی گازها با دما زیادتر از تغییرات لزجت دینامیکی است.

حال اگر اثرات ویسکوزیته به معادله حرکت این پلاسما اضافه گردد به معادلات زیر دست می یابیم:

$$-\frac{n(M-u)\partial u}{\partial \xi} + \frac{\beta \partial n}{\partial \xi} = JB + \frac{\mu' \partial^2 u}{\partial \xi^2} \quad (۸۷-۲)$$

$$\mu' = \mu \omega_p$$

$$U = M(1 - \frac{1}{n}) \leftarrow \text{از معادله (۸۱-۲) بدیهی است که}$$

$$\frac{\beta n^3}{3} + [-\beta - M^2 + \left(\frac{1-\alpha M^2}{2}\right)(B^2 - 1)\left(\frac{1}{2} - \frac{n^2}{2}\right) + M\mu'(1-n)] = 0 \quad (۸۸-۲)$$

$$B'' - \frac{1}{n} B' n' - \frac{(B-n)n}{1-\alpha M^2} - \frac{nv}{M} \dot{B} = 0 \quad (۸۹-۲)$$

فصل سوم

دستیابی به معادلات جفت شده ی

امواج سالیتمونی و ضربه ی اینرسی

آلفنی در پلاسمای

مگنتوهیدرودینامیک

۳-۱ مقدمه

امواج سالیتمونی و ضربه‌ی دامنه بزرگ امواج آلفنی را در پلاسمای متراکم مگنتو هیدرودینامیک مورد بررسی قرار می‌دهیم.

امواج آلفنی به دلیل پتانسیل مهم آنها در انرژی دادن ذرات در ۱- پلاسمای مغناطیده شده و ۲- به کار بردن آن در آزمایشگاه و ۳- پلاسمای نجومی و ۴- پلاسمای فضایی و ۵- پلاسمای حرارتی تاج خورشید و ۶- پلاسمای یونهای سنگین و حرارتی غیر عادی در ادامه تاج خورشید مطالعه گسترده شده‌اند.

بنابراین مکانیزم بقا و برآشفتگی امواج آلفن AWS^9 در محیط‌های وسیع مورد علاقه هستند.

در پلاسمای فضایی و آزمایشگاهی پراکندگی دامنه محدود امواج آلفن بوسیله‌ی بسیاری از منابع مثل آنتن خارجی انجام می‌شود. دامنه‌ی بزرگ امواج آلفن یک مقدار قابل توجهی از انرژی را از نقاط دور مگنتوسفر تا فضای نزدیک زمین جا به جا می‌کنند.

امواج سالیتمون آلفن، پایداریشان به دلیل وجود تعادل بین سرایشی غیرخطی موج و پاشندگی غیرخطی موج است. جمله غیر خطی اغلب در نتیجه مقیاس فضایی و زمانی بزرگ و احتمالاً در پلاسمای نجومی اتفاق می‌افتد و جمله پاشندگی از سوی دیگر می‌تواند از اثرات پلاسمای مختلف شرح داده شده بوسیله قانون اهم تعمیم یافته بدست آید. هنگامی که اثر پاشندگی به اندازه کافی قوی باشد، پاشندگی را می‌توان با شیب غیر خطی امواج متعادل کرد و منجر به تشکیل سالیتمون شود. که در حضور اتلاف منجر به ساختار ضربه می‌شود.

توجه زیادی به اثرات پاشندگی امواج آلفن وابسته به طول اینرسی الکترون λ_e شده است. که محدوده‌ی حدوداً ۵۰ متر در بالای یونسفر، چندین کیلومتر در مگنتوسفر است. در اینجا، یک شکل گرای

⁹ *Alfvenic wave shock*

غیر خطی را برای امواج مجرد و ضربه آلفنی امتحان می کنیم که از میان میدان مغناطیسی خطی در مدل پلاسمای MHD انتشار پیدا کرده و بوسیله ی اینرسی الکترون پراکنده می شود.

در بخش دوم ، ما از معادلات MHD استفاده می کنیم و رابطه پاشندگی خطی را برای امواج اینرسی آلفنی متراکم^{۱۰} ($ICAW$) را در پلاسمای برخوردی بدست می آوریم.

۲-۳ مدل ریاضی و رابطه خطی امواج متراکم اینرسی آلفنی

در مطالعه ($ICAW$) ، تاثیرات فشار و اینرسی الکترون های غیر - ایده آل در نظر گرفته شده است و از معادلات (MHD) که یک سری معادلات کوپل شده برای سرعت جرمی \vec{U} و میدان مغناطیسی \vec{B} و فشار p و چگال جرمی ρ است استفاده می کنیم.

معادله ممنتوم :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = \vec{j} \times \vec{B} - \nabla p \quad (۱-۳)$$

نسبت تغییرات میدان مغناطیسی به زمان توسط معادله القای فارادی انجام می شود.

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} \quad (۲-۳)$$

که میدان الکتریکی توسط قانون اهم تعمیم یافته که شامل اینرسی الکترون غیرصفر است محاسبه می شود.

$$\vec{E} = -\vec{u} \times \vec{B} + \eta \vec{j} - \frac{1}{en} \nabla p_e + \frac{m_e}{e^2 n} \frac{d\vec{j}}{dt} \quad (۳-۳)$$

جریان توسط قانون آمپر توصیف می شود.

¹⁰ Inertial compressional Alfvénic waves

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (4-3)$$

معادله (۲-۳) و (۳-۳) را ترکیب کرده و معادله جریان القایی غیر ایده آل که شامل جرم الکترون غیر صفر است را بدست می آوریم.

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \left((\vec{u} \times \vec{B}) - \eta \vec{J} - \frac{m_e}{e^2 n} \frac{d\vec{J}}{dt} \right) \quad (5-3)$$

و بقای جرم و معادله حرارت به ترتیب ،

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad (6-3)$$

در اینجا ، \vec{u} سرعت جرمی و p مجموع فشار الکترون و فشار یون می باشد و \vec{B} میدان مغناطیسی و ρ چگالی جرمی معرفی شده اند. و γ به فرضیات شار حرارتی و همگرایی در توزیع انرژی بستگی دارد و به ترتیب برای پلاسماهای همدمای و بی دررو ، ۱ و ۳ در نظر گرفته شده اند. ما ویژگی های انتشار امواج متراکم اینرسی آلفنی را در یک بعد از میان میدان مغناطیسی محدود شده B_{0z} در پلاسما MHD شبه خنثی برخوردی مورد مطالعه قرار می دهیم. فرض می کنیم که انتشار به طور مستقیم در راستای $\vec{K} = k_x$ و مولفه جزیی حرکت را در راستای x می نویسیم [4].

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_x \frac{\partial}{\partial x} \right) u_x = \frac{1}{\rho} J_y B - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (7-3)$$

از معادله (۴-۳) داریم:

$$\nabla \times B = \mu_0 J \rightarrow J_y = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial x}$$

در معادله (۷-۳) جایگذاری می کنیم.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_x \frac{\partial}{\partial x} \right) u_x = -\frac{1}{2\rho\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (8-3)$$

η جمله فرکانس بر خوردی $\Omega = ne^2/m_e v_{ei}$ ، $\eta = \frac{1}{\Omega}$ ، در معادله (۵-۳) جایگذاری می شود:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial(u_x B)}{\partial x} + \lambda_e^2 v_{ei} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) + \lambda_e^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial B}{\partial x} \right) \quad (۹-۳)$$

و معادله (۶-۳) به شکل زیر در می آید:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{u_x \partial}{\partial x} \right) \rho + \frac{\rho \partial u_x}{\partial x} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad (۱۰-۳)$$

که $\lambda_e^2 = \frac{c^2}{\omega_{pe}^2}$ ، طول اینرسی الکترون^{۱۱} تعریف می شود و $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ ، $\omega_{pe}^2 = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}$ و e, m_e بار و جرم الکترون هستند و n_0 چگالی زمینه الکترون و یون می باشد .

معادلات (۸-۳) تا (۱۰-۳) دستگاه بالا را در حالی که $P = P_0 + P_1$ و $\rho = \rho_0 + \rho_1$

$B = B_0 + B_1$ ، و $\rho_1 < \rho_0$ و $p_1 < p_0$ می باشد را خطی سازی می کنیم.

معادله (۸-۳) را خطی می کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{1x} + \frac{B_0}{\rho_0 u_0} \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_1}{\partial x} = 0$$

یک بار دیگر نسبت به $\partial / \partial t$ مشتق می گیریم.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_{1x} + \frac{B_0}{\rho_0 u_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} \right) = 0 \quad (۱۱-۳)$$

معادله (۹-۳) را خطی سازی می کنیم:

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} = -\frac{B_0 \partial u_{1x}}{\partial x} + \lambda_e^2 v_{ei} \frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} + \lambda_e^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial B_1}{\partial x} \right) \quad (۱۲-۳)$$

از معادله (۱۰-۳) داریم:

^{۱۱} Electron inertial length

$$\frac{\partial u_{1x}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + u_{0x} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial u_{1x}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \quad *$$

از معادله حرارت داریم:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial p_1}{\partial t} = p_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial t}$$

$$\frac{1}{p_0} \frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial t}$$

از معادله * داریم:

$$\frac{\partial u_{1x}}{\partial x} = -\frac{1}{p_0} \frac{\partial p_1}{\partial t} \quad (۱۳-۳)$$

از (۱۳-۳) نسبت به x مشتق گرفته و در داخل (۱۱-۳) استفاده می کنیم.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) U_{1x} + \frac{B_0}{\rho_0 \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial B_1}{\partial x} = 0$$

معادله را در $\partial / \partial x$ ضرب می کنیم. $\frac{p_0}{\rho_0} = c_s^2$ و $v_A^2 = B_0^2 / \rho_0 \mu_0$ خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) B_0 \frac{\partial u_{1x}}{\partial x} + v_A^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} = 0 \quad (۱۴-۳)$$

حالا از معادله (۱۲-۳)، $B_0 \partial u_{1x} / \partial x$ را می سازیم و در معادله (۱۴-۳) قرار می دهیم و

از جمله اول و دوم فاکتور می گیریم و در یک منفی ضرب کرده در نتیجه معادله به این

شکل در می آید:

$$B_0 \frac{\partial u_{1x}}{\partial x} = -\frac{\partial B_1}{\partial t} + \lambda_e^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial B_1}{\partial x} \right) + \lambda_e^2 v_{ei} \frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(1 - \lambda_e^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) B_1$$

$$-v_{ei} \lambda_e^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} - c_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} \right) - v_A^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} B_1 = 0 \quad (۱۵-۳)$$

فرض می کنیم که B_1 متناسب با $e^{-i\omega t + ik_x x}$ است که منجر به یک رابطه ی پاشندگی خطی در محدوده ی کم $\beta = c_s/v_A < 1$ می شود.

$$(-i\omega)(-i\omega) - c_s^2 (ik)(ik)(-i\omega)[1 - \lambda_e^2 (ik)(ik)] B_1$$

$$-v_{ei} \lambda_e^2 (-i\omega)(-i\omega)(ik)(ik) B_1 + v_{ei} \lambda_e^2 c_s^2 (ik)(ik)(ik)(ik) B_1$$

$$-v_A^2 (-i\omega)(ik)(ik) B_1 = 0$$

که $\Omega = \omega/k_0 v_A$ فرکانس بی بعد شده است و $k = k_x/k_0$ عدد موج بی بعد شده است و دیگر پارامترهای بی بعد شده $d_e = \lambda_e k_0$ و $\alpha = v_{ei}/k_0 v_A$ هستند همراه k_0 که یک نمایه از عدد موج می باشد .

$$[-\omega^2 + c_s^2 k_0^2 k^2](-i\omega)[1 + \lambda_e^2 k_0^2 k^2] - v_{ei} \lambda_e^2 [\omega^2 k_0^2 k^2 - c_s^2 k_0^4 k^4] - v_A^2 (i\omega k_0^2 k^2) = 0$$

همه را بر $i\omega k_0^2 v_A^2$ تقسیم می کنیم.

$$\Omega^2 = k^2 \beta^2 + \left[\frac{k^2}{(1+k^2 d_e^2)} \right] \left[1 + \frac{i\alpha \beta^2 k^2 d_e^2}{(1+k^2 d_e^2)} \right] - \frac{i\alpha \Omega k^2 d_e^2}{(1+k^2 d_e^2)} \quad (۱۶-۳)$$

دومین جمله رابطه پاشندگی بالا ، مد امواج متراکم اینرسی آلفنی^{۱۲} با مد صوتی جفت شده است [4].

بدست آوردن قسمت حقیقی و موهومی

معادله (۳-۱۶) یک معادله درجه دوم موهومی می باشد. ابتدا ریشه درجه دوم معادله را می گیریم:

$$\Omega^2 + \frac{i\alpha k^2 d_e^2}{(1 + k^2 d_e^2)} \Omega - \left[k^2 \beta^2 + \left(\frac{k^2}{(1 + k^2 d_e^2)} \right) + \left(\frac{k^2}{(1 + k^2 d_e^2)} \right) \left(\frac{i\alpha \beta^2 k^2 d_e^2}{(1 + k^2 d_e^2)} \right) \right] = 0$$

$$\Delta = - \left(\frac{\alpha k^2 d_e^2}{(1 + k^2 d_e^2)} \right)^2$$

$$-4 \left[k^2 \beta^2 + \left(\frac{k^2}{(1 + k^2 d_e^2)} \right) + \left(\frac{k^2}{(1 + k^2 d_e^2)} \right) \left(\frac{i\alpha \beta^2 k^2 d_e^2}{(1 + k^2 d_e^2)} \right) \right]$$

$$\Omega_{1,2} = \frac{-i\alpha k^2 d_e^2}{2(1 + k^2 d_e^2)} \pm \sqrt{\frac{-1}{4} \left(\frac{\alpha k^2 d_e^2}{(1 + k^2 d_e^2)} \right)^2 - \left[k^2 \beta^2 + \left(\frac{k^2}{(1 + k^2 d_e^2)} \right) + \left(\frac{k^2}{(1 + k^2 d_e^2)} \right) \left(\frac{i\alpha \beta^2 k^2 d_e^2}{(1 + k^2 d_e^2)} \right) \right]}$$

اکنون زیر رادیکال را از روش ریاضی فیزیک ۳ حل می کنیم.

مساله بر میگردد به اینکه بینیم آیا معادله $z^2 = \xi$ را می توان به ازای عدد مختلط

دلخواه ξ حل نمود یا نه؟ اگر قرار دهیم

$$z = u + iv$$

$$\xi = \alpha + i\beta$$

¹² Inertial compressional Alfvénic waves

میتوان مساله را چنین بیان کرد: آیا همواره میتوانیم دو عدد حقیقی (u, v) چنان پیدا کنیم که به ازای دو عدد حقیقی دلخواه (α, β) تساوی زیر برقرار باشد

$$(u + iv)^2 = \alpha + i\beta \quad *$$

$$(u^2 - v^2) + 2iuv = \alpha + i\beta$$

$$(u^2 - v^2) = \alpha$$

$$i2uv = i\beta$$

دو طرف رابطه ستاره را به توان دو می‌رسانیم و خواهیم داشت:

$$(u^2 + v^2)^2 + (2iuv)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + (2i\alpha^2\beta^2)$$

چون $(\alpha^2, \beta^2, u^2, v^2) \in \mathbb{R}$

$$(u^2 + v^2) = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$$

دو جواب پیشنهادی برای u, v که در رابطه بالا صدق می‌کند

$$u^2 = \frac{1}{2}(\alpha + \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}) \quad , \quad v^2 = \frac{1}{2}(-\alpha + \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)})$$

که باید علامتها را چنان اختیار کرد که در تساوی $2uv = \beta$ صدق نماید. یعنی ریشه دوم

$$\sqrt{\xi} = u + iv$$

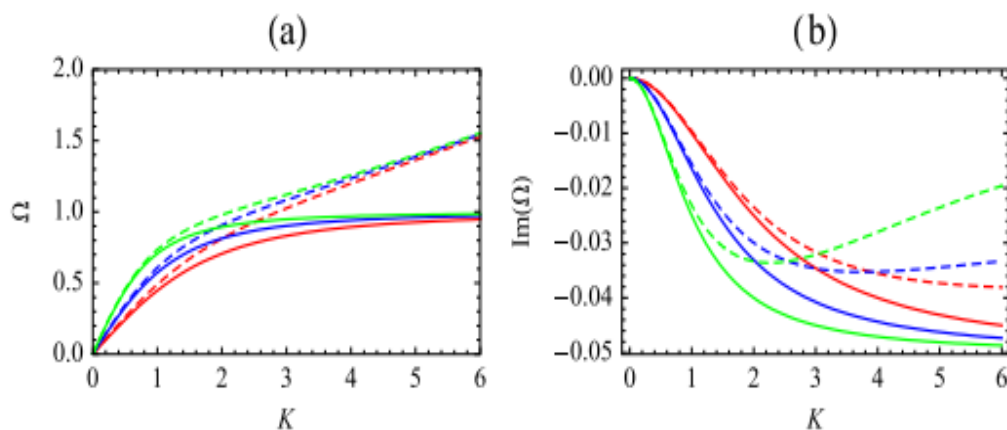
$$\pm \left(\left(\frac{\alpha + \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + i \left(\frac{-\alpha + \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad \beta > 0$$

$$\pm \left(- \left(\frac{\alpha + \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + i \left(\frac{-\alpha + \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad \beta < 0$$

$$\alpha = \frac{-1}{4} \left(\frac{\alpha k^2 d_e^2}{1+k^2 d_e^2} \right)^2 - k^2 \beta^2 - \frac{k^2}{1+k^2 d_e^2} \quad (\text{قسمت حقیقی})$$

$$\beta = -\frac{k^4 \alpha \beta^2 d_e^2}{(1+k^2 d_e^2)^2} \quad (\text{قسمت موهومی})$$

فرکانس بی بعد شده و میرایی امواج متراکم اینرسی آلفنی در شکل های (a) و (b) ترسیم شده است.



شکل (۱-۳) قسمت حقیقی فرکانس نرمالایز شده (a) و قسمت میرایی فرکانس نرمالایز شده (b)، امواج متراکم آلفنی در پلاسمای سرد $\beta = 0$ (خط) و با در نظر گرفتن حرارت در پلاسمای $\beta = 0.1$ (خط چین) برای ضریب برخورد $\alpha = 0.1$ و اینرسی الکترون $d_e = 0.5$ (قرمز) و $d_e = 0.7$ (آبی) و $d_e = 1$ (سبز)

همانطور که مشاهده می کنید با افزایش اینرسی الکترون به سیستم پلاسمای، تعداد برخوردها افزایش و نرخ رشد ناپایداری کاهش پیدا کرده است.

در غیاب برخورد (α) ما رابطه ی پاشندگی را اینگونه بدست می آوریم :

آلفنی خارج از تاثیر اینرسی الکترون به شکل $\Omega^2 = k^2\beta^2 + \frac{k^2}{1+k^2d_e^2}$ ، علاوه بر این در حدود $(\alpha = 0, k^2d_e^2 \gg 1)$ فرکانس امواج مترکم

ترسیم می شود. $\Omega^2 = 1 + k^2\beta^2$

۳-۳ امواج ایستای غیر خطی^{۱۳}

برای راه حل های غیر خطی امواج (ICAW) در چهارچوب حرکت، تغییر متغیر $\xi(X - Mt)$ را در نظر می گیریم. در حالی که $M = U/v_A$ عدد ماخ و \vec{u} ساختار غیر خطی سرعت است. در چهارچوب بدون شتاب معادله های (3-8) تا (3-1) طبق روابط زیر بی بعد می شوند و بدست می آیند [4].

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -M \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad d_e = \lambda_e k_0 \quad \text{و} \quad \frac{p}{p_0}, \frac{\rho}{\rho_0}, \frac{B}{B_0}, \frac{u_x}{v_A}, \frac{t}{k_0 v_A}, \frac{x}{X} = \frac{1}{k_0}$$

معادلات بی بعد شده به شکل زیر در می آیند:

از معادله (۳-۸) داریم:

$$\rho \left(-\frac{M\partial}{\partial \xi} + \frac{u_x \partial}{\partial \xi} \right) u_x = -\frac{1}{2} \frac{\partial B^2}{\partial \xi} - \frac{\beta \partial p}{\partial \xi} \quad (۳-۱۷)$$

از معادله (۳-۹) داریم:

$$\left(-\frac{M\partial B}{\partial \xi} = -\frac{\partial(u_x B)}{\partial \xi} + \alpha d_e^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial B}{\partial \xi} \right) \right. \\ \left. + d_e^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\rho} \left(-\frac{M\partial}{\partial \xi} + \frac{u_x \partial}{\partial \xi} \right) \frac{\partial B}{\partial \xi} \right) \right) \quad (۳-۱۸)$$

از معادله (۳-۱۰) داریم:

¹³ Nonlinear stationary waves

$$-\frac{M\partial\rho}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\xi}(\rho u_x) = 0 \quad (19-3)$$

$$-M\frac{1}{p}\frac{dp}{d\xi} + M\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\xi} = 0 \quad (20-3)$$

از معادلات بالا نسبت به ξ انتگرال گرفته و شرایط مرزی را اعمال می کنیم چنین که پلاسما در $\xi \rightarrow \infty$ آشفته است و بعد از یک سری محاسبات جبری معادلات جفت شده برای چگالی پلاسما و میدان مغناطیسی را برای امواج متراکم اینرسی آلفنی (*ICAW*) با حضور جریان های عمودی اینرسی الکترون بدست می آوریم^{۱۴}

$$u_x = M\left(1 - \frac{1}{\rho}\right) \quad (21-3)$$

$$M^2\left(\frac{1}{\rho} - 1\right) + \frac{1}{2}(B^2 - 1) + \beta(\rho - 1) = 0 \quad (22-3)$$

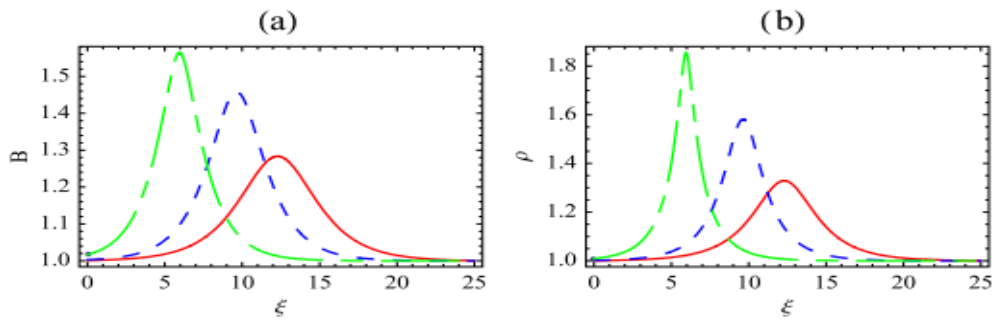
$$\frac{d_e^2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial B}{\partial\xi}\right) - B + \rho - \frac{d_e^2\alpha}{M}\frac{\partial B}{\partial\xi} = 0 \quad (23-3)$$

۳-۴ بررسی و ترسیم شکل ها

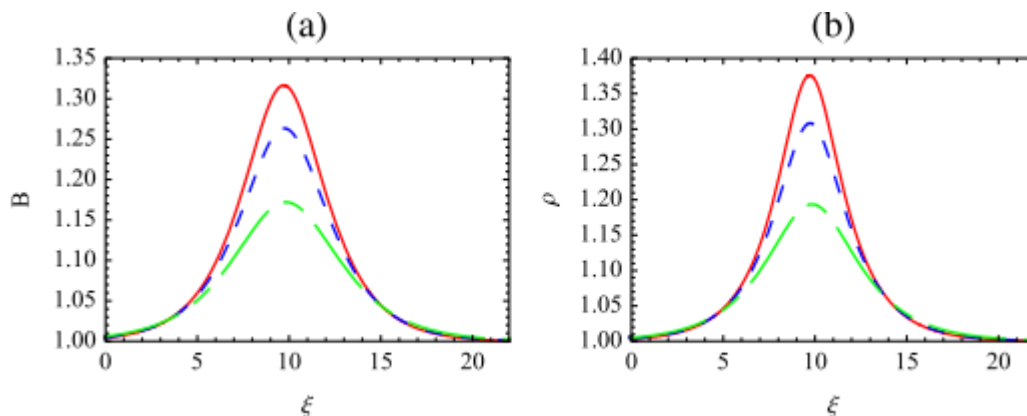
به طور خلاصه در فصل سوم ما دامنه بزرگ امواج سالیوتونی و ضربه متراکم اینرسی آلفنی را در پلاسمای *MHD* مورد بررسی قرار دادیم. وجود سالیوتون ها از یک تعادل بین سرایشی غیرخطی امواج و پاشندگی امواج خطی توسط جریان عمودی اینرسی الکترون بر محیط میدان مغناطیسی ناشی می شود. جریان اینرسی الکترون ها از طریق قانون اهم تعمیم یافته معرفی می شوند. در غیاب برخورد امواج سالیوتونی میدان مغناطیسی و چگالی پلاسما برای مقادیر مختلف، الکترون ایستایی (d_e) و عدد ماخ $\left(M = \frac{U}{v_A}\right)$ در شکل های زیر نمایش داده می شوند. که افزایش عدد ماخ بدلیل افزایش سرعت سیال، ارتفاع دامنه ی سالیوتون را بلندتر و وقتی دمای پلاسما افزایش پیدا می کند بدلیل اینکه چگالی

^{۱۴} اثبات روابط قسمت ج ۱ پیوست

کاهش، تعداد برخوردها کاهش پیدا می کند و اثرات گرمایی بر برخوردهای کولنی طبق پارامتر جفت شدگی $g_c = \frac{E_{int}}{E_{kin}} < 1$ غالب می شود، و در معادله kdv شیب غیرخطی که عامل تیز شدن موج می باشد کم می شود و ارتفاع سالیتون کاهش پیدا می کند.

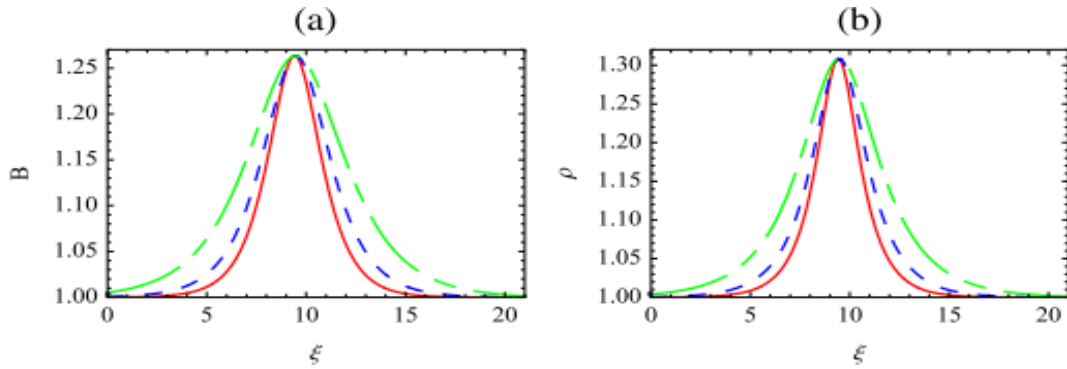


شکل (۲-۳) شکل سالیتون میدان مغناطیسی (a) و چگالی پلاسما (b) برای $(\beta = 0.1)$ و $(d_e = 1)$ و $M = 1.2$ (خط قرمز) $M = 1.3$ (خط چین آبی) $M = 1.2$ (خط چین های بزرگتر سبز)



شکل (۳-۳) شکل سالیتون میدان مغناطیسی (a) و چگالی پلاسما (b) برای $(d_e = 1)$ و $(M = 1.2)$ و $\beta = 0.05$ (خط قرمز) $\beta = 0.1$ (خط چین آبی) $\beta = 0.2$ (خط چین های بزرگتر سبز)

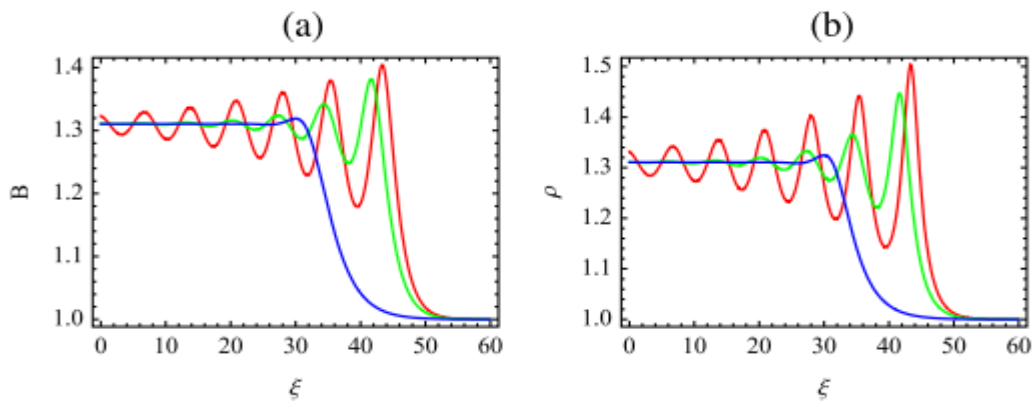
و اما افزایش اینرسی الکترون، در معادله kdv جمله پاشندگی از برخورد را افزایش می دهد ولی چون اثرات حرارتی عامل مخالف می باشد و سالیتون نمی تواند ارتفاع بگیرد، برای حفظ تعادل بین تندی شیب و جمله پاشندگی و حفظ پالس سالیتونی، عمق سالیتون افزایش پیدا می کند. که در شکل زیر نمایش داده می شود



شکل (۳-۴) شکل سالیتون میدان مغناطیسی (a) و چگالی پلاسما (b) برای $(\beta = 0.1)$ و $(M = 1.2)$ و

$d_e = 0.5$ (خط قرمز) $d_e = 0.7$ (خط چین آبی) $d_e = 1$ (خط چین های بزرگتر سبز)

نتایج اتلاف برخورد الکترون - یون ، ساختار ضربه را بوجود می آورد. همانطور که در شکل زیر می بینید با افزایش فرکانس برخورد، از میزان تعداد نوسانات کاسته و رفته رفته امواج نوسانی ضربه، یکنواخت تر^{۱۵} می شود [4].

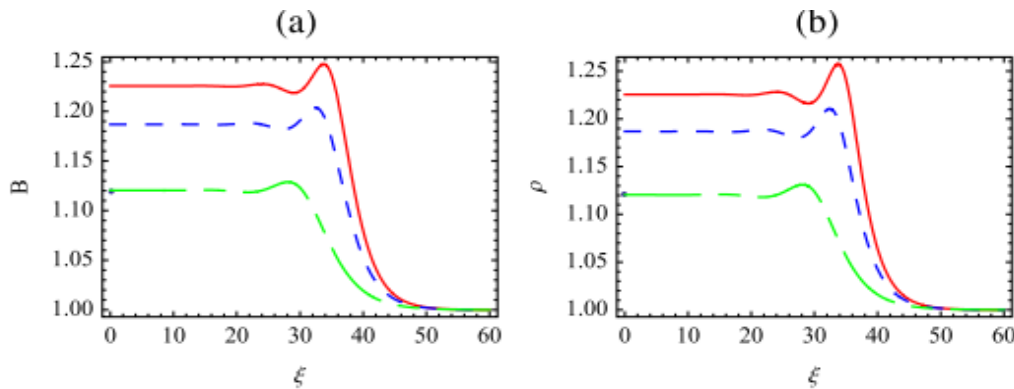


شکل (۳-۵) امواج ضربه میدان مغناطیسی (a) و چگالی پلاسما (b) برای $\beta = 0.1, M = 1.2$

$d_e = 1, \alpha = 0.1$ (خط قرمز) $\alpha = 0.25$ (خط چین آبی) $\alpha = 1$ (خط چین های بزرگتر سبز)

¹⁵ monotonic

در شکل زیر می بینید که با افزایش دما به دلیل اینکه از تعداد برخوردها کاسته می شود و چون شیب غیرخطی که عامل تیز شدن موج است کم می شود، ارتفاع ضربه نیز کاهش پیدا می کند.



شکل (۳-۶) امواج ضربه میدان مغناطیسی (a) و چگالی پلاسما (b) برای $\alpha = 0.5, M = 1.2$

$d_e = 1$ $\beta = 0.05$ (خط قرمز) $\beta = 0.1$ (خط چین آبی) $\beta = 0.2$ (خط چین های بزرگتر سبز)

در مدل مگنتو هیدرودینامیک (MHD)، قانون اهم تعمیم یافته ای را تعریف کردیم که اینرسی الکترون غیر صفر در آن حضور داشت و با خطی سازی کردن معادلات، رابطه ی پاشندگی را برای دامنه کوچک امواج آلفنی بدست می آوریم و نتیجه می گیریم که نرخ رشد ناپایداری با افزایش طول اینرسی الکترون^{۱۶} کاهش پیدا می کند.

در ادامه با تغییر متغیر $\xi(x - Mt)$ ، راه حل غیر خطی را در چارچوب چهارچوب حرکت برای امواج بزرگ دامنه پیاده می کنیم و رابطه ی جفت شده معادلات دیفرانسیل چگالی پلاسما و میدان مغناطیسی که در غیاب برخورد به ما امواج سالیتمونی و در حضور برخورد که یک نوع اتلاف محسوب می شود، امواج ضربه در پلاسما را نشان می دهد را بدست می آوریم.

¹⁶ electron inertial length

و برای سالیتون ها نتیجه گرفتیم که با افزایش عدد ماخ (بیشتر شدن سرعت سیال) ارتفاع سالیتون افزایش پیدا می کند و نتیجتاً قدرت امواج ضربه را زیاد می کند. اما عامل تضعیف سالیتون افزایش دما می باشد.

عوامل تضعیف بر امواج ضربه ، همچون ضریب برخورد و افزایش دما در پلاسما را بررسی کردیم. با افزایش برخورد نرخ رشد ناپایداری پلاسما، رو به کاهش است و از تندی و شیب اثرات غیر خطی کاسته می شود و همچنین جمله اتلافی در معادله $kdv - B$ افزایش و از قدرت امواج ضربه کاسته و موج شروع به یکنواخت تر کردن ارتعاشات ضربه می کند.

و همچنین با افزایش دمای پلاسما، آنتروپی پلاسما را افزایش داده و عامل تقویت کننده ی برخوردها و ثابا باعث کاهش چگالی می باشند ارتفاع ضربه نیز کم می شود و از قدرت ضربه کاسته می شود.

در اثر تغییرات دامنه چگالی ، برخی یونها گریز^{۱۷} پیدا می کنند که ما دامنه سرعت یونهای گریزی را در محدوده ی تعیین شده اندازه گرفته ایم. اگر دوباره شرایط مرزی وقتی $\xi \rightarrow \infty$ میل می کند را اعمال کنیم از معادلات غیر خطی ، دامنه ی تغییرات چگالی را بدست می آوریم^{۱۸}.

$$\tilde{\rho} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + 8M^2} \right)$$

$$, \Delta \tilde{\rho} = (1 - \tilde{\rho}) = 1 - \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + 8M^2} \right) \quad (۲۴-۳)$$

تابع پراکندگی عمودی سرعت یون ها در $(DICAW)$ را بدست می آوریم.

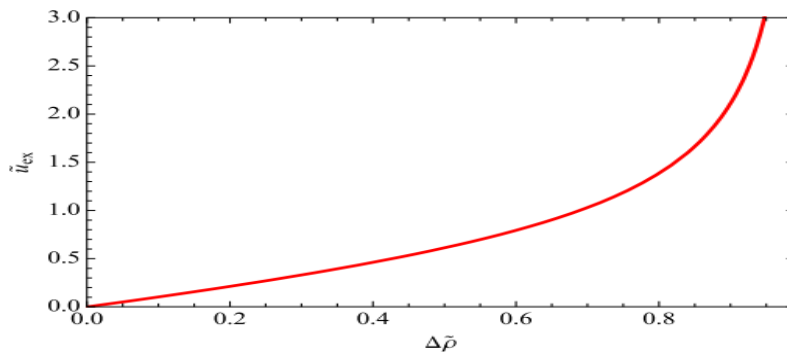
$$\tilde{u}_{ex} = M \left(1 - \frac{1}{\Delta \tilde{\rho}} \right) \quad (۲۵-۳)$$

¹⁷ escaping

¹⁸ برای اثبات روابط به پیوست قسمت (ج ۲) مراجعه شود.

$$\tilde{u}_{ex} = \pm \sqrt{\frac{2-3\Delta\tilde{\rho}+\Delta\tilde{\rho}^2}{2}} \left(\frac{\Delta\tilde{\rho}}{1-\Delta\tilde{\rho}} \right) \quad (۲۶-۳)$$

سرعت یون های گریزی \tilde{u}_{ex} در جهت مخالف، بالا و پایین آمدن (خیز) چگالی ترسیم می شوند.



شکل (۷-۳) شکل دامنه ی سرعت یون های فراری در مقابل تغییرات دامنه ی چگالی در پلاسمای سرد

۵-۳ بررسی امواج آلفنی در حضور اینرسی الکترون غیر صفر در قانون اهم

تعمیم یافته و حضور ویسکوزیته در پلاسمای تراکم ناپذیر مگنتوهیدرودینامیک

در این بحث، رابطه پاشندگی امواج خطی آلفنی را در حضور برخورد اینرسی الکترون بدست می آوریم با فرض اینکه سیستم پلاسمایی دارای یک ویسکوزیته ثابت باشد. سپس نتیجه را با قسمت ۲-۳ (بررسی رابطه پاشندگی امواج خطی آلفنی در حضور برخورد با اینرسی الکترون بدون حضور ویسکوزیته) برای نرخ رشد امواج بررسی می کنیم.

در ادامه، تاثیر افزایش ویسکوزیته سیستم پلاسمایی را، بر روی نرخ رشد امواج آلفنی بدست می آوریم.

برای معادله حرکت اوپلری داریم :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) = \vec{j} \times \vec{B} - \nabla P + \mu (\nabla^2 \vec{u}) \quad (۲۷-۳)$$

نرخ تغییرات زمانی میدان مغناطیسی را توسط قانون فارادی داریم:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} \quad (28-3)$$

که میدان الکتریکی توسط قانون اهم تعمیم یافته که شامل الکترون اینرسی غیرصفر است محاسبه می شود

$$\vec{E} = -\vec{u} \times \vec{B} + \eta \vec{j} - \frac{1}{en} \nabla p_e + \frac{m_e}{e^2 n} \frac{d\vec{j}}{dt} \quad (29-3)$$

جریان توسط قانون آمپر توصیف می شود

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \rightarrow j_y = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial x} \quad (30-3)$$

معادله (28-3) و (29-3) را ترکیب کرده و معادله جریان القایی غیر ایده آل که شامل جرم الکترون غیر صفر است را بدست می آوریم

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times \left((\vec{u} \times \vec{B}) - \eta \vec{j} - \frac{m_e}{e^2 n} \frac{d\vec{j}}{dt} \right) \quad (31-3)$$

و بقای جرم و معادله حرارت به ترتیب،

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad (32-3)$$

طبق فرض که انتشار به طور مستقیم در راستای $\vec{K} = k_x$ است مولفه جزیی حرکت را در راستای x می نویسیم.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_x \frac{\partial}{\partial x} \right) u_x = \frac{1}{\rho} J_y B - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_x \right) \quad (33-3)$$

از معادله (30-3) داریم:

$$\mu = \rho \nu, \nabla \times B = \mu_0 J \rightarrow J_y = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial x} \quad (34-3)$$

در معادله (۳۳-۳) جایگذاری می کنیم

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_x \frac{\partial}{\partial x}\right) u_x = -\frac{1}{2\rho\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_x\right) \quad (۳۵-۳)$$

در معادله (۳۱-۳) (جریان القایی) که $\eta = \frac{1}{\sigma}$ و $\sigma = e^2 n / m_e \nu_{ei}$ را جایگذاری می کنیم و خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial(u_x B)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\epsilon_0 m_e \nu_{ei}}{\epsilon_0 e^2 n}\right) \left(\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\epsilon_0 m_e}{\epsilon_0 e^2 n}\right) \left(\frac{1}{\mu_0}\right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)\right)$$

که $\lambda_e^2 = \frac{c^2}{\omega_{pe}^2}$ ، طول الکترون ایستایی تعریف می شود و $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$ و $\omega_{pe}^2 = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}$ و e و m_e

، بار و جرم الکترون هستند. و n_0 چگالی زمینه الکترون ویون می باشد.

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial(u_x B)}{\partial x} + \lambda_e^2 \nu_{ei} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right) + \lambda_e^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d}{dt}\right) \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right) \quad (۳۶-۳)$$

و معادله (۳۲-۳) (معادله حرارت) به شکل زیر در می آید:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{u_x \partial}{\partial x}\right) \rho + \frac{\rho \partial u_x}{\partial x} = 0 \text{ and } \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho}\right) = 0 \quad (۳۷-۳)$$

معادلات (۳۵-۳) تا (۳۷-۳) دستگاه بالا را در حالی که:

$u_{0x} = 0, \rho_1 < \rho_0, p_0 < p_1, B_0 < B_1$ و $\rho = \rho_0 + \rho_1, P = P_0 + P_1, B = B_0 + B_1$ می باشد

خطی سازی می کنیم.

معادله (۳۵-۳) را خطی می کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{1x} + \frac{B_0}{\rho_0 \mu_0} \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_1}{\partial x} - \nu \left[\frac{\partial^2 u_{1x}}{\partial x^2}\right] = 0$$

یک بار دیگر از طرفین معادله نسبت به $\frac{\partial}{\partial t}$ مشتق می گیریم:

$$\left(\frac{\partial^2 u_{1x}}{\partial t^2} + \frac{B_0}{\rho_0 \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} \right) - \nu \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u_{1x}}{\partial x^2} \right) \right] \right) = 0 \quad (38-3)$$

معادله (36-3) را خطی سازی می کنیم:

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} = -\frac{B_0}{\rho_0} \frac{\partial u_{1x}}{\partial x} + \lambda_e^2 \nu_{ei} \frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} + \lambda_e^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial B_1}{\partial x} \right)$$

$$u_{0x} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \left(u \frac{\partial}{\partial x} \right) \right)$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} = -\frac{B_0}{\rho_0} \frac{\partial u_{1x}}{\partial x} + \lambda_e^2 \nu_{ei} \frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} + \lambda_e^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial B_1}{\partial x} \right) \quad (39-3)$$

معادله (37-3) را خطی سازی می کنیم:

$$\frac{\partial u_{1x}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + u_{0x} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \right)$$

$$u_{0x} = 0$$

$$\frac{\partial u_{1x}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \quad (40-3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial p_1}{\partial t} = p_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \quad , \quad \frac{1}{p_0} \frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial t}$$

و خواهیم داشت:

$$\frac{\partial u_{1x}}{\partial x} = -\frac{1}{p_0} \frac{\partial p_1}{\partial t} \quad (41-3)$$

از (41-3) نسبت به x دوباره مشتق می گیریم

$$\frac{\partial^2 u_{1x}}{\partial x^2} = -\frac{1}{p_0} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p_1}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \frac{p_0 \partial^2 u_{1x}}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p_1}{\partial x}$$

و در داخل معادله (۳۸-۳) استفاده می کنیم.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{p_0}{\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - v \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) U_{1x} + \frac{B_0}{\rho_0 \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial B_1}{\partial x} = 0$$

معادله را در $\partial / \partial x$ ضرب می کنیم. $\frac{p_0}{\rho_0} = c_s^2$ و $v_A^2 = B_0^2 / \rho_0 \mu_0$ خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{c_s^2 \partial^2}{\partial x^2} - v \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) B_0 \frac{\partial u_{1x}}{\partial x} + v_A^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} B_1 = 0 \quad (۴۲-۳)$$

حالا از معادله (۳۹-۳)، $B_0 \partial u_{1x} / \partial x$ را می سازیم

$$B_0 \frac{\partial u_{1x}}{\partial x} = -\frac{\partial B_1}{\partial t} + \lambda_e^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial B_1}{\partial x} \right) + \lambda_e^2 v_{ei} \frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2}$$

و در معادله (۴۲-۳) قرار می دهیم و از جمله اول و دوم فاکتور می گیریم و در یک منفی ضرب کرده

در نتیجه معادله به این شکل در می آید:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - v \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(1 - \lambda_e^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) B_1 \\ & - \left(v_{ei} \lambda_e^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} - c_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} - v \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right) \\ & - \left(v_A^2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial x^2} B_1 \right) = 0 \quad (۴۳-۳) \end{aligned}$$

فرض می کنیم که B_1 متناسب با $e^{-i\omega t + ik_x x}$ است که منجر به یک رابطه ی پاشندگی خطی در

محدوده ی کم $\beta = c_s / v_A < 1$ می شود.

$$\begin{bmatrix} (-i\omega)(-i\omega) - c_s^2 (ik)(ik) \\ -v (-i\omega)(ik)(ik) \end{bmatrix} (-i\omega) [1 - \lambda_e^2 (ik)(ik)] B_1$$

$$-v_{ei} \lambda_e^2 (-i\omega)(-i\omega)(ik)(ik) B_1 + v_{ei} \lambda_e^2 c_s^2 (ik)(ik)(ik)(ik) B_1$$

$$+v_{ei}\lambda_e^2\nu(-i\omega)(ik)(ik) - v_A^2(-i\omega)(ik)(ik)B_1 = 0$$

که $\Omega = \omega/k_0 v_A$ فرکانس بی بعد شده است و $k = \frac{k_x}{k_0}$ عدد موج بی بعد شده است و دیگر پارامترهای بی بعد شده $d_e = \lambda_e k_0$ و $\alpha = \frac{v_{ei}}{k_0 v_A}$ و $\mu = \frac{\nu}{k_0 v_A}$ هستند، همراه k_0 که یک نمایه از عدد موج می باشد.

$$[-\omega^2 + c_s^2 k_0^2 k^2 - i\omega\nu k_0^2 k^2](-i\omega)[1 + \lambda_e^2 k_0^2 k^2]$$

$$-v_{ei}\lambda_e^2[\omega^2 k_0^2 k^2 - c_s^2 k_0^4 k^4 - \nu i\omega k_0^2 k^2] - v_A^2(i\omega k_0^2 k^2) = 0$$

همه را بر $i\omega k_0^2 v_A^2$ تقسیم می کنیم.

$$\Omega^2(1 + k^2 d_e^2) - k^2 \beta^2(1 + k^2 d_e^2) + i\Omega\mu(1 + k^2 d_e^2)$$

$$+i\Omega k^2 d_e^2 \alpha - i \frac{\beta^2 d_e^2 k^4 \alpha}{(1 + k^2 d_e^2)} - k^2 d_e^2 \alpha \mu - k^2 = 0$$

همه را بر $(1 + k^2 d_e^2)$ تقسیم می کنیم.

$$\Omega^2 + i \left[\frac{\alpha k^2 d_e^2}{(1+k^2 d_e^2)} + \mu \right] \Omega - \left[k^2 \beta^2 + \left(\frac{k^2}{(1+k^2 d_e^2)} \right) + \quad (44-3)$$

$$\left(\frac{k^2}{(1+k^2 d_e^2)} \right) \left(\frac{i\alpha\beta^2 k^2 d_e^2}{(1+k^2 d_e^2)} \right) + \left(\frac{d_e^2 \alpha \mu k^2}{(1+k^2 d_e^2)} \right) \right] = 0$$

سومین جمله رابطه پاشندگی بالا، مد امواج اینرسی آلفنی با مد صوتی و مد ویسکوزیته جفت شده است.

محاسبه قسمت حقیقی و قسمت موهومی

$$\Delta = - \left(\left(\frac{\alpha k^2 d_e^2}{(1 + k^2 d_e^2)} + \mu' \right) \right)^2$$

$$-4 \left[k^2 \beta^2 + \left(\frac{k^2}{(1+k^2 d_e^2)} \right) + \left(\frac{k^2}{(1+k^2 d_e^2)} \right) \left(\frac{i \alpha \beta^2 k^2 d_e^2}{(1+k^2 d_e^2)} \right) + \frac{k^2 \alpha d_e^2 \mu'}{(1+k^2 d_e^2)} \right]$$

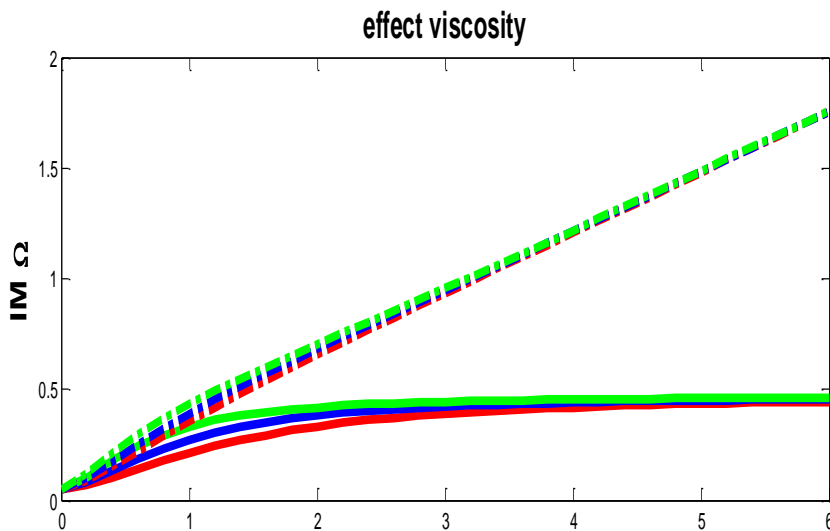
$$\Omega_{1,2} = -\frac{i}{2} \left[\frac{\alpha k^2 d_e^2}{(1+k^2 d_e^2)} + \mu' \right]$$

$$\pm \sqrt{\frac{-1}{4} \left(\frac{\alpha k^2 d_e^2}{(1+k^2 d_e^2)} + \mu' \right)^2 - \left(k^2 \beta^2 + \left(\frac{k^2}{(1+k^2 d_e^2)} \right) + \left(\frac{k^2}{(1+k^2 d_e^2)} \right) \left(\frac{i \alpha \beta^2 k^2 d_e^2}{(1+k^2 d_e^2)} \right) + k^2 \alpha d_e^2 \mu' / (1+k^2 d_e^2) \right)}$$

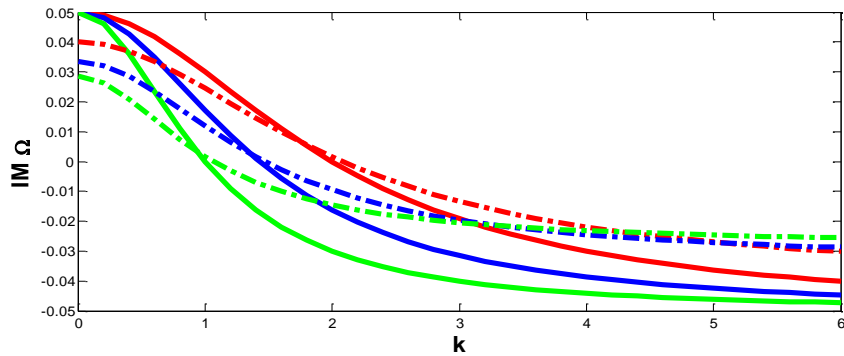
$$\alpha = -\frac{1}{4} \left(\frac{\alpha k^2 d_e^2}{1+k^2 d_e^2} + \mu' \right)^2 - k^2 \beta^2 - \frac{k^2}{1+k^2 d_e^2} - \quad (\text{قسمت حقیقی زیر رادیکال})$$

$$\frac{\alpha \mu' d_e^2 k^2}{1+k^2 d_e^2}$$

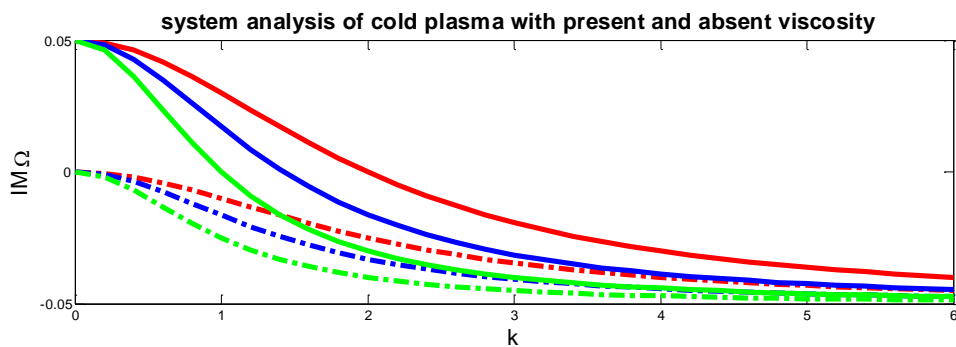
$$\beta = -\frac{k^4 \alpha \beta^2 d_e^2}{(1+k^2 d_e^2)^2} \quad (\text{قسمت موهومی زیر رادیکال})$$



شکل (۳-۸) قسمت حقیقی فرکانس نرمالایز شده (a)، امواج نامتراکم آلفنی در پلاسمای سرد $\beta = 0$ (خط) و در نظر گرفتن حرارت $\beta = 0.1$ (خط چین) برای ضریب برخورد $\alpha = 0.1$ و ضریب ویسکوزیته $(\mu = 0.1)$ و اینرسی الکترون $d_e = 0.5$ (قرمز) $d_e = 0.7$ (آبی) $d_e = 1$ (سبز)

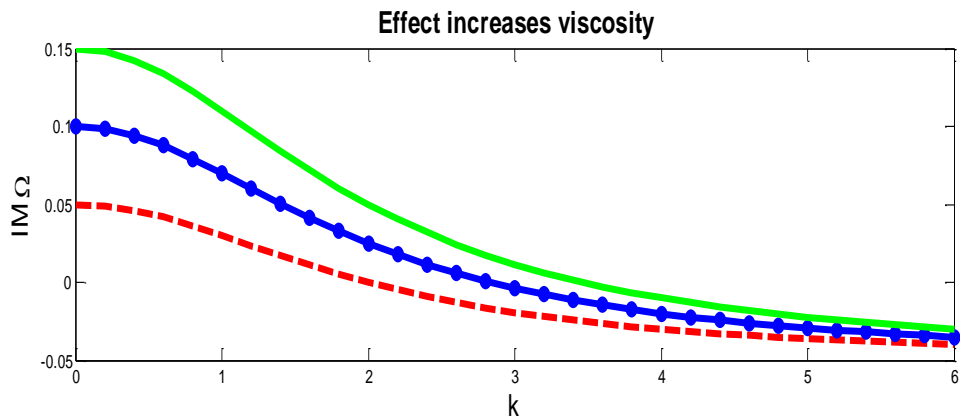


شکل (۹-۳) قسمت میرایی فرکانس نرمالایز شده (b)، امواج نامتراکم آلفنی در پلاسمای سرد $\beta = 0$ (خط) و پلاسمای گرم $\beta = 0.1$ (خط چین) برای ضریب برخورد $\alpha = 0.1$ و ضریب ویسکوزیته $(\mu = 0.1)$ و اینرسی الکترون $d_e = 0.5$ (قرمز) $d_e = 0.7$ (آبی) $d_e = 1$ (سبز)



شکل (۱۰-۳) مقایسه نرخ رشد امواج آلفنی، پلاسمای $(\beta = 0)$ برای خط چین $\mu = 0$ و برای خط $\mu = 0.1$

همانطور که می بینید اضافه شدن ویسکوزیته ثابت به عنوان اثر اتلافی به معادله ممنوم، باعث می شود که شروع، کاهش نرخ رشد امواج دامنه کوچک آلفنی افزایش پیدا کند و سریعتر به حالت پایدار برسد.



شکل (۱۱-۳) قسمت میرایی فرکانس نرمالایز شده، امواج نامتراکم آلفنی در پلاسمای سرد $\beta = 0$ و برای ضریب برخورد $\alpha = 0.1$ و اینرسی الکترون $d_e = 0.5$ و ضریب ویسکوزیته $(\mu = 0.1)$ خط چین قرمز، $(\mu = 0.2)$ خط چین سبز نقطه آبی، $(\mu = 0.3)$ خط سبز

همانطور که مشاهده می کنید در شکل (۱۱-۳)، افزایش ویسکوزیته در سیستم پلاسمایی نرخ رشد امواج آلفنی را افزایش می دهد. بدلیل اینکه مقاومت ویژه در برابر پخش ذرات کم می شود.

فصل چهارم

اثرات ویسکوزیته بر ساختار امواج

ضربه در گازهای ساده

۴-۱ مقدمه

ساختار امواج ضربه در یک بعد در معادله ناویر-استوکس برای حالت های گازی مورد بررسی داده قرار می شود. نتایج سیستم برای سه معادله دیفرانسیل غیرخطی معمولی، به یک سیستمی که دو معادله غیر خطی مستقل هستند و حل دقیق دارند، تقلیل پیدا می کنند. شکل این حل ها با فرض اینکه ویسکوزیته تابعی از دما است و ضریب انتشار حرارت در نظر گرفته نشود بدست می آید.

هدف اصلی در این مبحث، حل دقیق امواج ضربه را در گازهای ساده بوسیله ی اینکه فرض کنیم ویسکوزیته (μ) وابسته به دما و ضریب انتشار حرارت ($\lambda = 0$) در نظر گرفته نشود به دست آورده و تاثیر ویسکوزیته را بر شکل امواج ضربه پیدا کنیم [5].

۴-۲ معادلات اساسی

سه معادله ی پایا برای جریان یکنواخت در یک بعد، برای سیال قراردادی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0 \quad (۱-۴)$$

$$\frac{d}{dx}(\rho u^2 + p + p_{xx}) = 0 \quad (۲-۴)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\rho u \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) + u(p + p_{xx}) + q_x \right] = 0 \quad (۳-۴)$$

در اینجا ρ , u , p , e , p_{xx} , q_x به ترتیب از راست به چپ، مولفه ی جزئی x جریان حرارتی، استرس، انرژی داخلی، فشار، سرعت جریان و چگالی جرمی می باشد.

معادلات بالا طبق شرایط مرزی زیر حل می شوند:

$$u = u_0 \quad T = T_0 \quad \text{for} \quad x \rightarrow -\infty$$

$$u = u_1 \quad T = T_1 \quad \text{for} \quad x \rightarrow +\infty$$

۳-۴ مدل ریاضی امواج ضربه

از معادلات بالا نسبت به x انتگرال می گیریم

$$(\rho u) = m \quad (۴-۴)$$

$$(\rho u^2 + p + p_{xx}) = P \quad (۵-۴)$$

$$\left(\left[\rho u \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) + \right] \right. \\ \left. \left[u(p + p_{xx}) + q_x \right] \right) = E \quad (۶-۴)$$

بیان ساده تر رفتار برای معادلات حالت ، فشار، استرس و شار حرارتی به شکل زیر باید نشان داده شود:

$$e = c_v T \quad , \quad p = \rho R T \quad (۷-۴)$$

$$p_{xx} = -\frac{4}{3} \mu \frac{du}{dx} \quad , \quad q_x = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad (۸-۴)$$

که ثابت های E, p به ترتیب رابطه های زیر می باشد

$$\frac{P}{m} = u_0 + \frac{RT_0}{u_0} = \left(1 + \frac{1}{kM_0^2} \right) u_0 \quad (۹-۴)$$

$$k = \frac{1}{RT_0}$$

$$E = \left(\frac{1}{(k-1)M_0^2} + \frac{1}{2} \right) u_0^2 \quad (۱۰-۴)$$

معادله (۵-۴) را بر معادله (۴-۴) تقسیم کرده و معادله زیر را به دست می آوریم:

$$\frac{4\mu}{3m} \frac{du}{dx} = u + \frac{RT}{u} - \frac{P}{m} \quad (۱۱-۴)$$

معادله (۴-۶) را بر معادله (۴-۴) تقسیم کرده و از معادله (۴-۵) نیز استفاده کرده و معادله زیر را به دست می آوریم^{۱۹}:

$$\left\{ \frac{\lambda}{m} \frac{dT}{dx} = [c_v T + \frac{1}{2} u^2 + u \left(\frac{P}{m} - u \right) - E] \right\} \quad (۱۲-۴)$$

معادلات (۴-۱۱) و (۴-۱۲) را بی بعد می کنیم [5].

$$\omega = \frac{mu}{p}, \theta = \frac{m^2 RT}{p^2}, \phi = \frac{p}{P}$$

$$\alpha + 1 = \frac{2Em^2}{p^2}, \delta = \frac{R}{2c_v} = \frac{1}{2}(k - 1)$$

$$k = \frac{c_p}{c_v}, R = c_p - c_v$$

$$\tilde{\mu} = \frac{4\mu}{3m}, \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{(c_v m)}$$

$$\frac{\tilde{\mu} d\omega}{dx} = \omega + \frac{\theta}{\omega} - 1 \quad (۱۳-۴)$$

$$\frac{\tilde{\lambda} d\theta}{dx} = \theta - \delta[(1 - \omega)^2 + \alpha] \quad (۱۴-۴)$$

۴-۴ شکل ضربه

شکل ضربه وابسته به \mathcal{X} است. ما فرض می کنیم که ویسکوزیته وابسته به درجه حرارت است و همیشه مقدار کمی ویسکوزیته مشخص کنیم. که طبق فرمول زیر محاسبه می شود:

$$\bar{\mu} = \bar{\mu} \left(\frac{T}{T_0} \right)^s = \bar{\mu}_0 \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right)^s \quad (۱۵-۴)$$

^{۱۹} برای اثبات روابط به پیوست (قسمت د) مراجعه شود.

که $\bar{\mu}_0 = const = \frac{4\mu_0}{3m}$ و S هر مقدار صحیح مثبت می باشد. و این رابطه را در معادله (۴-۱۳)

جایگذاری می کنیم و $\lambda = 0$ را در معادله (۴-۱۴) قرار می دهیم و رابطه های زیر را بدست می آوریم:

$$\bar{\mu}_0 \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^S \frac{d\omega}{dx} = \omega + \frac{\theta}{\omega} - 1 \quad (۴-۱۶)$$

$$\theta = \delta[(1 - \omega)^2 + \alpha] \quad (۴-۱۷)$$

درجه حرارت را در معادله (۴-۱۶) جایگذاری می کنیم و یک معادله دیفرانسیل تنها را بدست می

آوریم [5].

$$\left(\frac{\delta^S \bar{\mu}_0}{\theta_0^S} \omega [((1 - \omega)^2) + \alpha]^S \frac{d\omega}{dx} = \right. \quad (۴-۱۸)$$

$$\left. (1 + \delta)\omega^2 - (2\delta + 1)\omega + \delta(1 + \alpha) \right)$$

از معادله (۴-۱۸) با شرایط مرزی $\omega = \omega_1$ $x \rightarrow +\infty$, $\omega = \omega_0$ $x \rightarrow -\infty$ انتگرال می

گیریم و حل برای $\omega(x)$ را بدست می آوریم.

فرض می کنیم μ تابعی از حرارت است معادله (۴-۱۸) را حل می کنیم و به رابطه ی زیر می رسیم:

$$\frac{1}{2} \omega \delta (\omega + \bar{A}_1) + \bar{B}_1 \ln(\omega_0 - \omega) - \bar{C}_1 \ln(\omega - \omega_1) = \bar{X}_1 \quad (۴-۱۹)$$

که

$$\bar{X}_1 = \frac{(1+\delta)\theta_0}{\bar{\mu}_0} x$$

$$\bar{A}_1 = 2(A - 2), A = \omega_0 + \omega_1$$

$$\bar{B}_1 = \frac{\omega_0 \theta_0}{\omega_0 - \omega_1}, \bar{C}_1 = \frac{\omega_1 \theta_1}{\omega_0 - \omega_1}$$

در حالت تعادل داریم:

$$\omega_{0,1} = \frac{(1+2\delta)\pm\epsilon}{2(1+\delta)}, \theta_{0,1} = \frac{1}{4(1+\delta)} [(1+2\delta) - \epsilon^2 \mp 2\delta\epsilon]$$

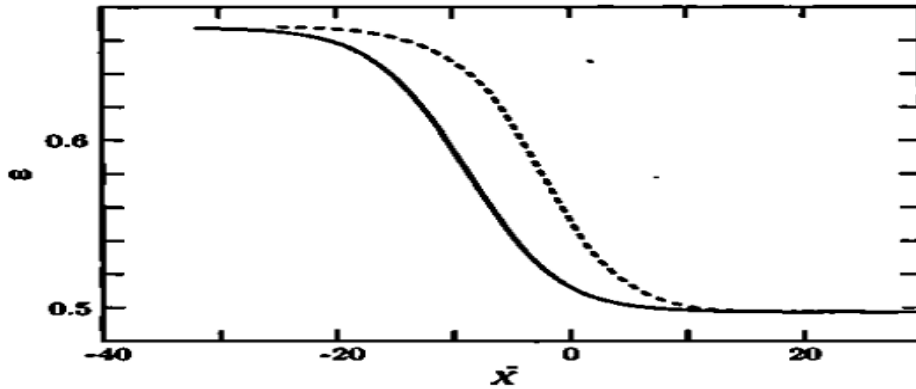
که ϵ مقیاس قدرت تغییرات در متغیرهای حالت می باشد.

$$M_0^2 = \frac{\left(1 + \left(\frac{\epsilon}{k}\right)\right)}{1 - \epsilon}$$

برای امواج ضربه های قوی $M_0 \rightarrow \infty$ و $\epsilon \rightarrow 1$ میل می کند. و امواج ضربه قوی نمی تواند در $(\epsilon = 0)$ اتفاق بیافتد.

۴-۵ بررسی نمودارها

در فصل چهار ما اثرات ویسکوزیته که یک نوع اتلاف است با فرض اینکه ضریب هدایت حرارتی $(\lambda = 0)$ را بر ساختار ضربه مورد بررسی قرار دادیم. یک بار معادله ضربه را وقتی ویسکوزیته ثابت باشد را حل کردیم و نمودار آن را کشیدیم و بار دیگر فرض کردیم که ویسکوزیته تابعی از درجه حرارت است معادله ضربه را حل کردیم و نمودار آن را کشیدیم. امواج ضربه با ویسکوزیته ثابت (نسبت به ویسکوزیته وابسته به حرارت) چگالی بیشتر داشته برخوردها بیشتر و آنتروپی (سالیتون) با دامنه بیشتر ظاهر می شود، ضربه در تعداد فرکانس های (عدد موج) بیشتر اتفاق می افتد. اما اگر ویسکوزیته تابعی از دما باشد به دلیل کاهش چگالی تعداد برخوردها کمتر و بی نظمی یا (آنتروپی) قبل از ضربه، با دامنه کم ظاهر می شود و ضربه در تعداد فرکانس (عدد موج) کمتر اتفاق می افتد.



شکل (۱-۴): شکل ضربه که تابعی از هماهنگ \bar{X} است برای

$m = 1.2, \delta = 0.2$ به ازای (ثابت μ) (خط چین) و به ازای (ثابت $\mu \neq$) (خط)

اما وقتی $\bar{\mu} = \bar{\mu}_0 = const$ ما معادله زیر را بدست می آوریم:

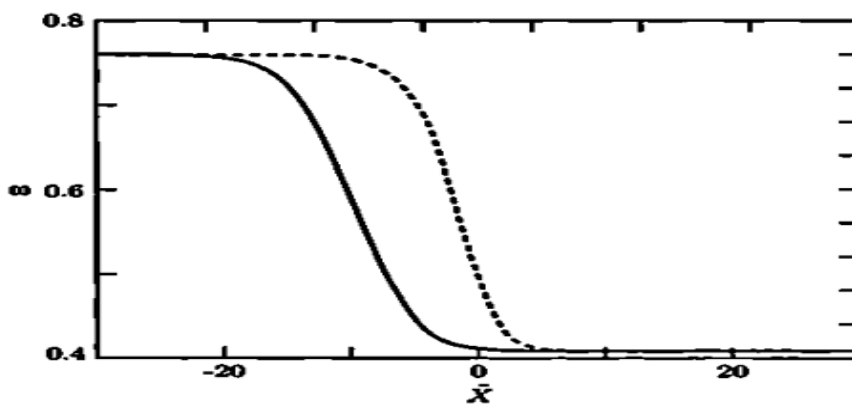
$$B_1 \ln(\omega_0 - \omega) - C_1 \ln(\omega - \omega_1) = \bar{X} \quad (۲۰-۴)$$

$$\bar{X}_1 = \frac{(1 + \delta)}{\bar{\mu}_0} x$$

$$\bar{B}_1 = \frac{\omega_0}{\omega_0 - \omega_1}, \bar{C}_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0 - \omega_1}$$

حل معادله (۱۹-۳) شکل امواج ضربه را وقتی ویسکوزیته تابعی از دما است را می دهد و معادله ۲۰

شکل ضربه را وقتی ویسکوزیته ثابت است را می دهد.



شکل (۲-۴): شکل ضربه که تابعی از هماهنگ \bar{X} است برای

$m = 1.5, \delta = 0.2$ به ازای (ثابت η) (خط چین) و به ازای (ثابت $\eta \neq$) (خط)

همانطور که میبینید با افزایش عدد ماخ ارتفاع ضربه افزایش پیدا می کند و قدرت ضربه افزایش پیدا می کند.

۴-۶ رفتار محدوده ی آنتروپی پیش از امواج ضربه

محاسبه رفتار آنتروپی امواج ضربه به وسیله ی معادله آنتالپی توصیف می شود.

$$dh = Tds + vdp$$

که h آنتالپی است و مقدار آن $h = c_p dT$ و T, p و $v = \left(\frac{1}{\rho}\right)$ به ترتیب آنتروپی، حجم، دما و فشار می باشد. می توانیم معادله بالا را به صورت زیر بنویسیم.

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} \quad (21,4)$$

که از معادله (۲۱-۳) انتگرال گرفته و آنتروپی را بدست می آوریم

$$s = c_p \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - R \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) \quad (22,4)$$

که p_0, T_0 ، دما و فشار قبل از برخورد می باشد. با استفاده از معادلات زیر، معادله (۲۲-۳) را بی بعد می کنیم و خواهیم داشت

$$\omega = \frac{mu}{p}, \theta = \frac{m^2 RT}{p^2}, \phi = \frac{p}{P}$$

$$\alpha + 1 = \frac{2Em^2}{p^2}, \delta = \frac{R}{2c_v} = \frac{1}{2}(k - 1)$$

$$k = \frac{c_p}{c_v}, R = c_p - c_v$$

و خواهیم داشت:

$$\bar{s} = \ln\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right) - (k - 1) \ln\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) \quad (23,4)$$

$$\bar{s} = \frac{s}{c_v}$$

برای $\bar{\lambda} \neq 0$ و $\bar{\mu} = 0$ ، و با استفاده از رابطه های بالا خواهیم داشت :

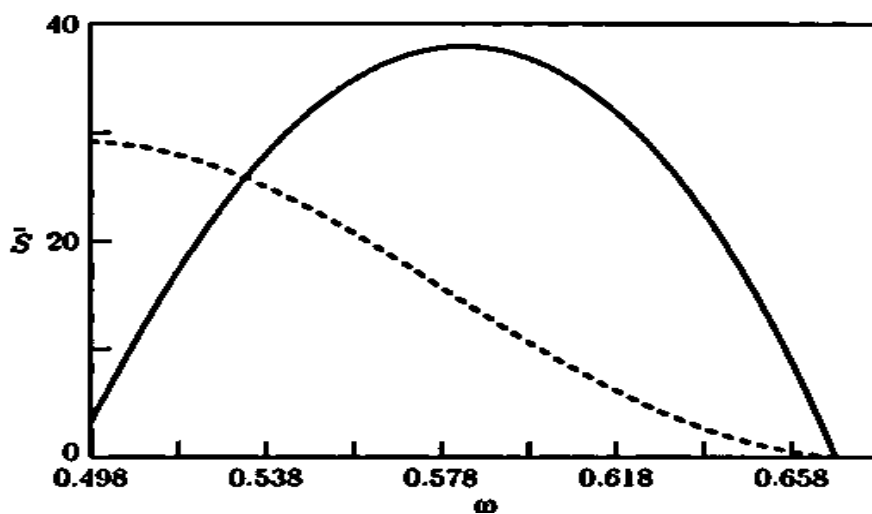
$$\bar{s} = \ln[\tilde{A}\omega^k(1 - \omega)] \quad (25,4)$$

$$\tilde{A} = \frac{1}{\theta_0 \omega_0^{k-1}}$$

اما برای $\bar{\lambda} = 0$ و $\bar{\mu} \neq 0$ ، معادله (23-3) به رابطه زیر تبدیل می شود^{۲۰}:

$$\bar{s} = \ln \left[\tilde{A}_1 \omega^k \left(\omega + \frac{\tilde{B}}{\omega-2} \right) \right] \quad (26,4)$$

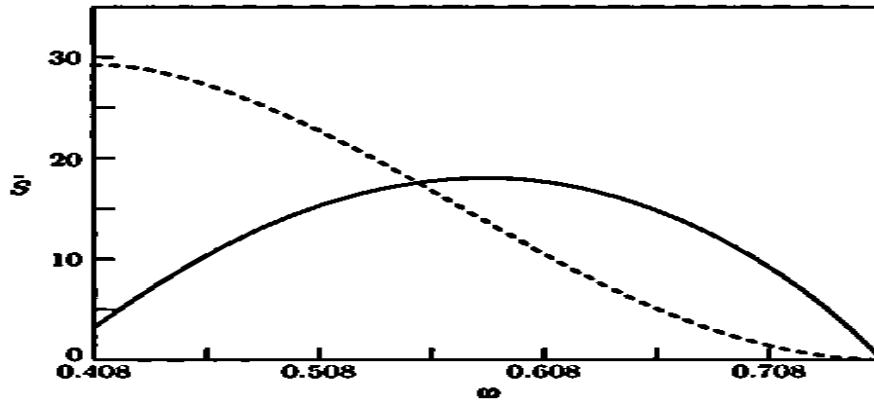
$$\tilde{B} = (1 + \alpha), \tilde{A}_1 = \delta \tilde{A}$$



شکل (3-4) : شکل آنتروپی که تابعی از سرعت بی بعد (ω) است برای

$m = 1.2, \delta = 0.2$ (به ازای $\tilde{\mu} = 0, \tilde{\lambda} \neq 0$ (خط) از مرتبه $\times 10^{-3}$) و (به ازای $\tilde{\mu} \neq 0, \tilde{\lambda} = 0$) (خط چین) از مرتبه $\times 10^{-4}$)

^{۲۰} اثبات در پیوست (قسمت ذ) مراجعه شود



شکل (۴-۴): شکل آنتروپی که تابعی از سرعت بی بعد (ω) است برای

$m = 1.5, \delta = 0.2$ (به ازای $\tilde{\mu} = 0, \tilde{\lambda} \neq 0$ (خط) از مرتبه $\times 10^{-2}$) و (به ازای $\tilde{\mu} \neq 0, \tilde{\lambda} = 0$) (خط چین) از مرتبه $\times 10^{-3}$)

در مورد شکل ۳، وقتی $\tilde{\mu} = 0, \tilde{\lambda} \neq 0$ همانطور که می بینید خط منحنی $S(\omega)$ ، آنتروپی با کاهش سرعت افزایش پیدا می کند تا بیشترین مقدار را در مرکز لایه ها به دست بیاورد. سپس دوباره با کاهش سرعت کاهش پیدا میکند. رفتارش همانند یک سهمی است. این یک مقدار چشم داشتی قبل از امواج ضربه است.

همانطور که می بینید با تئوری غیرخطی برای دامنه های بزرگ، ویسکوزیته تأثیری زیادی بر کاهش آنتروپی و در واقع همان سالیتون ها دارد و قدرت امواج ضربه را کاهش می دهد. ولی با افزایش عدد ماخ (بیشترین مقدار آنتروپی) نیز بیشتر شده و ارتفاع سالیتون و قدرت ضربه افزایش پیدا می کند.

برای شکل ۴، وقتی $\tilde{\mu} \neq 0, \tilde{\lambda} = 0$ همانطور که می بینید خط منحنی $S(\omega)$ ، آنتروپی با کاهش سرعت (ω) ، افزایش پیدا می کند تا جایی که بیشترین مقدار قبل امواج ضربه را بگیرد [5].

فصل پنجم

نتیجه گیری و پیشنهادات

۵-۱ مقدمه

هدف از این تحقیق بررسی اثرات ویسکوزیته بر پلاسما های تک مولفه ای - چند مولفه ای کلاسیکی و بررسی تغییر آثار خطی و غیر خطی این پلاسماها با حضور اثرات ویسکوزیته می باشد به طور خلاصه آنچه در این پایان نامه حاصل گردید به شرح زیر می باشد.

- معرفی پلاسما و مدل های توصیف پلاسما ومعادلات وابسته با آن

- معرفی امواج هیدرومغناطیسی و معرفی امواج آلفنی و ویژگی های موج آلفنی و امواج مغناطیصوتی

- بدست آوردن معادله کورته - وگ - ده وری (kdv) برای امواج یون - صوتی با دامنه ی بزرگ

- معرفی امواج سالیوتونی و ضربه در پلاسما ی الکترون - پوزیترون مغناطیسی با حضور جریان جا به جایی $\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)$

- معرفی ویسکوزیته و عامل های ایجاد کننده آن

- معرفی قانون اهم تعمیم یافته و حضور اینرسی الکترون ها در آن

- بدست آوردن معادلات جفت شده امواج سالیوتونی و ضربه ی دامنه ی بزرگ امواج آلفنی در پلاسما ی متراکم مگنتو هیدرودینامیک

- اثرات ویسکوزیته بر امواج آلفنی دامنه کوچک در حضور اینرسی الکترون غیر صفر در قانون اهم تعمیم یافته در پلاسما ی تراکم ناپذیر مگنتو هیدرودینامیک

- اثرات ویسکوزیته بر ساختار امواج ضربه در گازهای ساده

- مقایسه امواج ضربه با فرض اینکه ویسکوزیته تابعی از دما باشد یا ثابت باشد.

- مقایسه رفتار آنتروپی برای امواج با ویسکوزیته ثابت و ویسکوزیته صفر به عنوان مقدار چشم داشتی قبل از امواج ضربه.

۵-۲ نتایج بدست آمده از بررسی های انجام شده

- با افزایش برخورد، مقاومت ویژه پلازما زیاد و نرخ رشد افزایش ناپایداری تضعیف و کم می شود.

- در ادامه وقتی اثر ویسکوزیته را در معادله حرکت سیال اضافه می کنیم، نرخ رشد کاهش ناپایداری را، (بدلیل اینکه مقاومت ویژه با کاهش تعداد برخوردها، کم می شود) تقویت می کند.

- ویسکوزیته در دامنه های بزرگ یا امواج غیرخطی، مقاومت در مقابل نیروهای وارد شده بر سیال می باشد. همانطور که می دانیم افزایش دما باعث کاهش چگالی می شود و کاهش چگالی تعداد برخوردها را کمتر می کند و در نتیجه ضریب ویسکوزیته ای که تابع حرارت است نسبت به ضریب ویسکوزیته ای که ثابت است اتلاف را کمتر و نتیجتاً ضربه در عدد موج کمتر اتفاق می افتد و قدرت ضربه کاهش پیدا می کند. و می توان گفت ویسکوزیته، آنتروپی سیستم را کاهش می دهد.

۵-۳ پیشنهادات

۱- در این تحقیق از نقش اثرات ویسکوزیته بر پلاسماهای کوانتومی صرف نظر شده است پیشنهاد می شود این اثر بر پلاسماهای کوانتومی بررسی شوند.

۲- اثرات ویسکوزیته را بر ناپایداری های خاص همچون (ناپایداری دو جریانی) بررسی کنید.

References

- [1] **Chen, f**, "introduction to plasma physics and controlled fusion."volum¹: plasma physics.1984
- [2] **Swanson, D.G.**, "plasma waves."2003: CRC press
- [3] Ding Lu, Zi-liang Li, and Nuriman Abdukerim."2014:AIP physics of plasma21,022108
- [4] (Anuraj panwar, H.Rizvi and C.M.Ryu."2013:AIP physics of plasma20,052103)
- [5] HNAA Hamad, proc.R.Soc.Lond.A.(1996)
- [6] C. M. Surko and R. G. Greaves, [Phys. Plasmas](#) 11, 2333 (2004).
- [7] S. V. Bulanov, T. Z. Esirkepov, N. M. Naumova, F. Pegoraro, and V. A. Vshivkov, [Phys. Rev. Lett.](#) 82, 3440 (1999).
- [8] V. I. Berezhiani, V. Skarka, and S. Mahajan, [Phys. Rev. E](#) 48, R3252 (1993).
- [9] D. Farina and S. V. Bulanov, [Phys. Rev. Lett.](#) 86, 5289 (2001).
- [10] B. S. Xie and S. C. Du, [Phys. Plasmas](#) 13, 074504 (2006).
- [11] B. S. Xie and S. C. Du, [Phys. Scr.](#) 74, 638 (2006).
- [12] V. I. Berezhiani, D. D. Tskhakaya, and P. K. Shukla, [Phys. Rev. A](#) 46, 6608 (1992).
- [13] V. I. Berezhiani, M. Y. El-Ashry, and U. A. Mofiz, [Phys. Rev. E](#) 50, 448 (1994).
- [14] V. I. Berezhiani and S. M. Mahajan, [Phys. Rev. Lett.](#) 73, 1110 (1994); [Phys. Rev. E](#) 52, 1968 (1995).
- [15] S. I. Popel, S. V. Vladimirov, and P. K. Shukla, [Phys. Plasmas](#) 2, 716 (1995).
- [16] S. Mahmood and H. Saleem, [Phys. Plasmas](#) 10, 4680 (2003).
- [17] V. I. Berezhiani, L. N. Tsintsadze, and P. K. Shukla, [J. Plasmas Phys.](#) 48, 139 (1992).
- [18] B. S. Xie, Z. L. Li, D. Lu, and H. B. Sang, [Phys. Plasmas](#) 20, 112109 (2013).
- [19] D. Farina and S. V. Bulanov, [Phys. Rev. E](#) 64, 066401 (2001).

- [20] G. P. Zank and R. G. Greaves, [Phys. Rev. E](#) 51, 6079 (1995).
- [21] P. K. Shukla, N. N. Rao, M. Y. Yu, and N. L. Tsintsadze, [Phys. Rep.](#) 138, 1 (1986).
- [22] P. K. Shukla, M. Marklund, and B. Eliasson, [Phys. Lett. A](#) 324, 193 (2004).
- [23] P. K. Shukla, B. Eliasson, and L. Stenflo, [Phys. Rev. E](#) 84, 037401 (2011).
- [24] B. Shen, M. Y. Yu, and X. Wang, [Phys. Plasmas](#) 10, 4570 (2003).
- [25] Q. L. Hu, G. L. Xiao, X. G. Yu, J. C. Peng, and A. J. Wu, [Phys. Plasmas](#) 19, 042306 (2012).
- [26] M. Dutta, S. Ghosh and N. Chakrabarti, [Phys. Rev. E](#) 86, 066408 (2012).
022108-7 Lu et al. [Phys. Plasmas](#) 21, 022108 (2014)
- 24P. K. Shukla, B. Eliasson, and L. Stenflo, [Europhys. Lett.](#) 95, 45001 (2011).
- [27] H. R. Pakzad and K. Javidan, [Astrophys. Space Sci.](#) 331, 175 (2011).
- [28] C. C. Hua, B. S. Xie, and K. F. He, [Chaos, Solitons Fractals](#) 25, 1161 (2005).
- [29] D. Lu, Z. L. Li, and B. S. Xie, [Phys. Rev. E](#) 88, 033109 (2013).
- [30] M. Gedalin, D. B. Melrose, and E. Gruman, [Phys. Rev. E](#) 57, 3399 (1998).
- [31] R. A. Lopez, F. A. Asenjo, V. Muñoz, A. C.-L. Chian, and J. A. Valdivia, [Phys. Rev. E](#) 88, 023105 (2013).
- [32] E. G. Blackman and G. B. Field, [Phys. Rev. Lett.](#) 71, 3481 (1993).
- [33] M. Gedalin, [Phys. Rev. Lett.](#) 76, 3340 (1996).
- [34] S. Koide, [Phys. Rev. D](#) 78, 125026 (2008).
- [35] P. A. Sturrok, *Plasma Physics* (Cambridge University Press, 1994).
- [36] W. Gekelman, S. Vincena, B. Van Compernelle, G. J. Morales, J. E. Maggs, P. Pribyl, and T. A. Carter, [Phys. Plasmas](#) 18, 055501 (2011).
- [37] W. Gekelman, M. Van Zeeland, S. Vincena, and P. Pribyl, [J. Geophys. Res.](#) 108, 1281, doi: 10.1029/2002JA009741 (2003).
- [38] V. J. Pereira, [Phys. Scr. T](#) 60, 113 (1995).
- [39] L. Chen, [Plasma Phys. Controlled Fusion](#) 50, 124001 (2008).
- [40] G. Vlad, F. Zonca, and S. Briguglio, [Riv. Nuovo Cimento](#) 22(7), 1–97 (1999).
- [41] K. Stasiewicz, P. Bellan, C. Chaston, C. Kletzing, R. Lysak, J. Maggs, O. Pokhotelov, C. Seyler, P. Shukla, L. Stenflo, A. Streltsov, and J.-E.

- Wahlund, [Space Sci. Rev.](#) 92, 423 (2000).
- [42] P. K. Shukla, R. Bingham, B. Eliasson, M. E. Dieckmann, and L. Stenflo, [Plasma Phys. Controlled Fusion](#) 48, B249–B255 (2006).
- [43] D. J. Wu and L. Yang, [Astrophys. J.](#) 659, 1693 (2007).
- [44] A. A. Mamun and P. K. Shukla, [Phys. Plasmas](#) 9, 1474 (2002).
- [45] I. Ballai, J. C. Thelen, and B. Roberts, [Astron. Astrophys.](#) 404, 701–707 (2003).
- [46] N. S. Saini and I. Kourakis, [Plasma Phys. Controlled Fusion](#) 52, 075009 (2010).
- [47] E. I. El-Awady and W. M. Moslem, [Phys. Plasmas](#) 18, 082306 (2011).
- [48] H. Alinejad, [Phys. Plasmas](#) 19, 052302 (2012).
- [49] I. Kourakis, S. Sultana, and M. A. Hellberg, [Plasma Phys. Controlled Fusion](#) 54, 124001 (2012).
- [50] S. V. Singh, S. Devanandhan, G. S. Lakhina, and R. Bharuthram, [Phys. Plasmas](#) 20, 012306 (2013).

پیوست

اثبات روابط فصل دوم

الف:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} = \frac{1}{\lambda_D} \frac{\partial}{\partial \dot{x}}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \dot{t}} \frac{\partial \dot{t}}{\partial t} = \Omega_p \frac{\partial}{\partial \dot{t}}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{معادله حرکت}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Omega_p) (\dot{u}_s) + (\dot{u}_s) \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \frac{1}{\lambda_D} (\dot{u}_s) = -\frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \frac{1}{\lambda_D} \left(\frac{kT_e \chi}{e} \right)$$

$$\Omega_p u_s \frac{\partial \dot{u}}{\partial \dot{t}} + \frac{1}{\lambda_D} u_s^2 \dot{u} \frac{\partial \dot{u}}{\partial \dot{x}} = \left(-\frac{1}{m} \right) \frac{kT_e}{\lambda_D} \frac{\partial \chi}{\partial \dot{x}}$$

$$u_s^2 = \frac{kT_e}{m}, \quad \frac{u_s}{\lambda_D \Omega_p} = 1$$

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial \dot{t}} + \dot{u} \frac{\partial \dot{u}}{\partial \dot{x}} = -\frac{\partial \chi}{\partial \dot{x}} \quad \text{معادله حرکت نرمالایز شده}$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_i u_i) = 0 \quad \text{معادله پیوستگی}$$

$$\Omega_p n_0 \frac{\partial}{\partial \dot{t}} (\dot{n}) + \frac{1}{\lambda_D} n_0 u_s \frac{\partial}{\partial \dot{x}} (\dot{n} \dot{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \dot{n}}{\partial \dot{t}} + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} (\dot{n} \dot{u}) = 0 \quad \text{معادله پیوستگی نرمالایز شده}$$

$$\frac{\varepsilon_0 \partial^2 \phi}{\partial x^2} = e \left(n_0 e^{\frac{e\phi}{kT_e}} - n_i \right) \quad \text{معادله پواسون}$$

$$\left(\begin{aligned} \frac{\varepsilon_0 k T_e}{\lambda_D^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} &= (e^{\chi} - \dot{n}) \rightarrow \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \\ &= e^{\chi} - \dot{n} \end{aligned} \right)$$

معادله پواسون نرمالایز شده

$$n' = 1 + \delta n_1 + \delta^2 n_2 + \dots$$

$$\chi = \delta \chi_1 + \delta^2 \chi_2 + \dots$$

$$u' = \delta u_1 + \delta^2 u_2 + \dots$$

تغییر متغیر

$$\xi = \delta^{1/2} (x' - t') \quad , \quad \tau = \delta^{3/2} t'$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \delta^{3/2} \frac{\partial}{\partial \tau} - \delta^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \delta^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

این بسط ها و تغییر متغیر را در معادلات نرمالایز شده جایگذاری می کنیم و از مرتبه های زیر روابط

زیر را پیدا می کنیم .

معادله ۱:

$$\left(\left(\delta^{\frac{3}{2}} \frac{\partial}{\partial \tau} - \delta^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) (\delta u_1 + \delta^2 u_2 + \dots) + (\delta u_1 + \delta^2 u_2 + \dots) \right. \\ \left. \dots \right) \left(\delta^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) (\delta u_1 + \delta^2 u_2 + \dots) = - \left(\delta^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) (\delta \chi_1 + \delta^2 \chi_2 + \dots)$$

معادله ۲:

$$\left(\begin{aligned} &\left(\delta^{\frac{3}{2}} \frac{\partial}{\partial \tau} - \delta^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) (1 + \delta n_1 + \delta^2 n_2 + \dots) \\ &+ \left(\delta^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) (1 + \delta n_1 + \delta^2 n_2 + \dots) (\delta u_1 + \delta^2 u_2 + \dots) \end{aligned} \right)$$

معادله ۳ :

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\delta \chi_1 + \delta^2 \chi_2 + \dots) \\ = 1 + (\delta \chi_1 + \delta^2 \chi_2 + \dots) + \frac{(\delta \chi_1 + \delta^2 \chi_2 + \dots)^2}{2} + \dots \end{array} \right)$$

از معادله سه و مرتبه δ^1 داریم : $\chi_1 = n_1$ و از معادله سه و مرتبه δ^2 داریم :

$$\left(n_2 = -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \chi_1 + \chi_2 + \frac{1}{2} \chi_1^2 \right) \quad *$$

از معادله سه و مرتبه $\delta^{3/2}$ داریم : $\chi_1 = n_1 = u_1 = u$

از معادله یک و مرتبه $\delta^{5/2}$ داریم :

$$\frac{\partial u_2}{\partial \xi} = \frac{\partial \chi_2}{\partial \xi} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1}{\partial \tau} \quad **$$

از معادله دو داریم :

$$\frac{\partial n_1}{\partial \tau} - \frac{\partial n_2}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} (n_1 u_1) + \frac{\partial u_2}{\partial \xi} = 0 \quad ***$$

* و ** را در معادله *** قرار می دهیم و معادله kdv را بدست می آوریم.

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{u \partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} = 0$$

ب :

نرمالایز کردن روابط (2-46) تا (2-50)

$$\left(\frac{1}{\omega_c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{n}{n_0} \right) + \frac{v_A}{\omega_c} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{n}{n_0} \right) \left(\frac{u}{v_A} \right) = 0 \right)$$

$$\left(\left(\frac{n}{n_0} \right) m \left(\frac{1}{\omega_c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u}{v_A} \right) + \left(\frac{u}{v_A} \right) \frac{v_A}{\omega_c} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{v_A} \right) \right) \right. \\ \left. = \frac{1}{c} \left(\frac{4\pi v_A J}{c \omega_c B_0} \right) \left(\frac{B}{B_0} \right) - k_B T \frac{v_A}{\omega_c} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{n}{n_0} \right) \right)$$

$$\left(\frac{cE}{B_0 v_A} - \frac{1}{c} \left(\frac{u}{v_A} \right) \left(\frac{B}{B_0} \right) = \frac{m n_0}{e^2 n} \left(\frac{1}{\omega_c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{4\pi v_A J}{c \omega_c B_0} \right) + \left(\frac{u}{v_A} \right) \frac{v_A}{\omega_c} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{4\pi v_A J}{c \omega_c B_0} \right) + \frac{v_A}{\omega_c} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{v_A} \right) \left(\frac{4\pi v_A J}{c \omega_c B_0} \right) \right) \right)$$

$$\left(\frac{1}{\omega_c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B}{B_0} \right) = - \frac{v_A}{\omega_c} \frac{\partial}{\partial x} \frac{cE}{B_0 v_A} \right)$$

$$\left(\left(\frac{4\pi v_A J}{c \omega_c B_0} \right) = - \frac{c}{4\pi} \frac{v_A}{\omega_c} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{B_0} \right) - \frac{1}{4} \frac{1}{\omega_c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{cE}{B_0 v_A} \right)$$

$$\alpha = \frac{v_A^2}{c^2}, \beta = \frac{n_0 k_B T}{\frac{B_0^2}{4\pi}} = \frac{v_T^2}{v_A^2}, v_T \equiv \sum \frac{k_B T}{m_e}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu)}{\partial x} = 0$$

$$n \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u \partial u}{\partial x} \right) = JB - \beta \frac{\partial n}{\partial x}$$

$$E - uB = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{u \partial J}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} J \right)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial x}$$

$$J = -\frac{\partial B}{\partial x} - \alpha \frac{\partial E}{\partial t}$$

در چارچوب جدید با مرجع $\frac{u_g}{v_A}$ ، $M = \frac{u_g}{v_A}$ ، $\xi = x - Mt$ ، با اعمال شرایط مرزی زمانی که $\xi \rightarrow \infty$

$$u(\infty) = 0, B(\infty) = 1, n(\infty) = 1, \frac{\partial B}{\partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -M \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$-M \frac{\partial n}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} (nu) = 0 \rightarrow -Mn + nu = -M$$

$$n \left(-M \frac{\partial u}{\partial \xi} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = JB - \beta \frac{\partial n}{\partial \xi} \rightarrow -n(M - u) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial n}{\partial \xi} = JB$$

$$\left(\begin{array}{l} E - uB = \frac{1}{n} \left(-M \frac{\partial J}{\partial \xi} + u \frac{\partial J}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \xi} J \right) \\ \rightarrow \left(n(E - uB) = -(M - U) \frac{\partial J}{\partial \xi} + J \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \end{array} \right)$$

$$-M \frac{\partial B}{\partial \xi} = -\frac{\partial E}{\partial \xi} \rightarrow E = M(B - 1)$$

$$J = -\frac{\partial B}{\partial \xi} + M\alpha \frac{\partial E}{\partial \xi} \rightarrow J = -(1 - \alpha M^2) \frac{\partial B}{\partial \xi}$$

معادله (۶۰،۲) و (۶۱،۲) را در معادله (۵۹،۲) جایگزین می کنیم.

$$\left(\begin{aligned} nM(B-1) - nM\left(1 - \frac{1}{n}\right)B &= \left(M - M\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)(1 - \alpha M^2)B'' \\ &+ (1 - \alpha M^2)B' \left(M\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)' \end{aligned} \right)$$

و معادلات کوپل شده را بدست می آوریم.

$$B'' - \frac{1}{n} B' n' - \frac{(B-n)n}{1 - \alpha M^2} = 0$$

$$M^2 \left(\frac{1}{n} - 1\right) + \frac{1 - \alpha M^2}{2} (B^2 - 1) + \beta(n-1) = 0$$

اثبات روابط فصل سوم

ج ۱:

$$-M \frac{1}{p} \frac{dp}{d\xi} + M \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\xi} = 0 \quad (۲۰،۳)$$

$$-M \int \frac{\partial \rho}{\partial \xi} dx + \int \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial \xi} dx = 0$$

$$-M\rho \left(\begin{smallmatrix} \infty \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + (\rho u_x) \left(\begin{smallmatrix} \infty \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 0$$

$$\left(\begin{aligned} &|\xi| \rightarrow \infty, \quad u_x(\infty) = 0, \\ \rho(\infty) = 1, \quad p(\infty) = 1, \quad B(\infty) = 1, \quad \left[\frac{\partial B}{\partial \xi}\right] = 0 \end{aligned} \right)$$

$$u_x = M \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) \quad (۲۱،۳)$$

$$-M \frac{1}{p} \frac{dp}{d\xi} + M \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\xi} = 0 \quad (۲۰,۳)$$

$$-M \int \frac{dp}{p} d\xi + M \int \frac{d\rho}{\rho} d\xi = 0$$

$$-M \int \ln p d\xi + M \int \ln \rho d\xi = 0$$

$$-M[p \ln p - p + c] \left(\frac{\infty}{\xi} \right) + M[\rho \ln \rho - \rho + c'] \left(\frac{\infty}{\xi} \right) = 0$$

$$\rightarrow p = \rho$$

$$\rho \left(-\frac{M\partial}{\partial\xi} + \frac{u_x\partial}{\partial\xi} \right) u_x = -\frac{1}{2} \frac{\partial B^2}{\partial\xi} - \frac{\beta\partial p}{\partial\xi} \quad (۱۷,۳)$$

$$\left(\begin{aligned} & -M \int \frac{\partial}{\partial\xi} \left(M \left(1 - \frac{1}{\rho} \right) \right) d\xi + \int \rho M \left(1 - \frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial\xi} M \left(1 - \frac{1}{\rho} \right) d\xi \\ & = \int -\frac{1}{2} \frac{\partial B^2}{\partial\xi} d\xi - \beta \int \frac{\partial \rho}{\partial\xi} d\xi \end{aligned} \right)$$

$$-M^2 \rho \left(1 - \frac{1}{\rho} \right) \left(\frac{\infty}{0} \right) + \frac{\rho M^2}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho} \right)^2 \left(\frac{\infty}{0} \right) = -\frac{1}{2} B^2 \left(\frac{\infty}{0} \right) - \beta \rho \left(\frac{\infty}{0} \right)$$

$$M^2 \left(\frac{1}{\rho} - 1 \right) + \frac{1}{2} (B^2 - 1) + \beta(\rho - 1) = 0 \quad (۲۲,۳)$$

ما می دانیم که $q^2 = [1 + 2(M^2 + \beta)]$ ، معادله ۲۲ را در ۲ ضرب می کنیم و معادله ۲۲ به

شکل زیر در می آید:

$$\frac{2M^2}{\rho} + 2\beta\rho = q^2 - B^2$$

$$2M^2 + 2\beta\rho^2 = (q^2 - B^2)\rho$$

$$2\beta\rho^2 - (q^2 - B^2)\rho + 2M^2 = 0$$

$$\Delta = (q^2 - B^2)^2 - 4(2\beta)(2M^2)$$

$$\rho = \frac{(q^2 - B^2)}{4\beta} \pm \frac{[(q^2 - B^2)^2 - 16\beta M^2]^{\frac{1}{2}}}{4\beta}$$

$$(1 \pm x)^m = 1 \pm mx \pm m(m-1)x^2 \pm \dots$$

شکل بسط لورن

$$\left((q^2 - B^2) \left[1 - \frac{16\beta M^2}{(q^2 - B^2)^2} \right]^{\frac{1}{2}} = (q^2 - B^2) \left[1 - \frac{1}{2} \frac{16\beta M^2}{(q^2 - B^2)^2} - \dots \right] \right)$$

$$= (q^2 - B^2) - \frac{8\beta M^2}{(q^2 - B^2)}$$

$$\rho = \frac{(q^2 - B^2)}{4\beta} + \frac{(q^2 - B^2)}{4\beta} - \frac{8\beta M^2}{4\beta(q^2 - B^2)}$$

$$\rho = \frac{(q^2 - B^2)}{2\beta} - \frac{2M^2}{(q^2 - B^2)}$$

$$\left(\begin{aligned} -\frac{M\partial B}{\partial \xi} &= -\frac{\partial(u_x B)}{\partial \xi} + \alpha d_e^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial B}{\partial \xi} \right) \\ &+ d_e^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\rho} \left(-\frac{M\partial}{\partial \xi} + \frac{u_x \partial}{\partial \xi} \right) \frac{\partial B}{\partial \xi} \right) \end{aligned} \right) \quad (18,3)$$

$$\left(\begin{aligned} &-M \int \frac{\partial B}{\partial \xi} d\xi = \\ &-\int \frac{\partial \left(M \left(1 - \frac{1}{\rho} \right) B \right)}{\partial \xi} d\xi + \alpha d_e^2 \int \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial B}{\partial \xi} d\xi \\ &+ d_e^2 \int \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\rho} \left(-M \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial B}{\partial \xi} \right) d\xi \\ &+ d_e^2 \int \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\rho} \left(M \left(1 - \frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial B}{\partial \xi} \right) \right) d\xi \right) \end{aligned} \right)$$

$$\frac{d_{\xi}^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial B}{\partial \xi} \right) - B + \rho - \frac{d_{\xi}^2 \alpha}{M} \frac{\partial B}{\partial \xi} = 0 \quad (23,3)$$

ج ۲:

معادله ۲۲ را می نویسیم و شرایط مرزی را اعمال می کنیم و سپس $\tilde{\rho}$ را بدست می آوریم و $\Delta \tilde{\rho}$ را نیز بدست می آوریم. و طبق فرمول \tilde{u}_{ex} ، M را بدست می آوریم و در فرمول جایگذاری می کنیم.

$$M^2 \left(\frac{1}{\rho} - 1 \right) + \frac{1}{2} (B^2 - 1) + \beta (\rho - 1) = 0$$

$$\frac{M^2}{\rho} \left(\frac{\infty}{0} \right) - M^2 + \frac{1}{2} B^2 \left(\frac{\infty}{0} \right) - \frac{1}{2} + \beta \rho \left(\frac{\infty}{0} \right) - \beta = 0$$

$$-2M^2 - B^2 \rho - 2\beta \rho^2 = 0$$

$$\rho^2 + \frac{B^2}{2\beta} \rho + \frac{M^2}{\beta} = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{B^2}{2\beta} \right)^2 - 4 \left(\frac{M^2}{\beta} \right) = \frac{B^4}{4\beta} - 4 \frac{M^2}{\beta}$$

$$\tilde{\rho} = \frac{-\frac{B^2}{2\beta} \pm \sqrt{\frac{B^4}{4\beta} - 4 \frac{M^2}{\beta}}}{2}$$

اگر دوباره شرایط مرزی را اعمال کنیم دامنه چگالی پلاسما و تغییرات چگالی پلاسما بدست می آید.

$$if \beta = -\frac{1}{2}, B(\infty) = 1$$

$$\left(\begin{array}{l} \tilde{\rho} = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{1 + 8M^2}) \\ , \Delta \tilde{\rho} = (1 - \tilde{\rho}) = 1 - \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{1 + 8M^2}) \end{array} \right)$$

اثبات معادله ۲۴

تابع پراکندگی عمودی سرعت یون ها در (DICA) را بدست می آوریم.

$$\widetilde{u}_{ex} = M \left(1 - \frac{1}{\Delta\tilde{\rho}} \right) \quad (۲۵,۳)$$

$$\Delta\tilde{\rho} = 1 - \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{1 + 8M^2})$$

$$(2\Delta\tilde{\rho} - 1) = (1 \pm \sqrt{1 + 8M^2})$$

$$2\Delta\tilde{\rho} - 2 - 1 = (1 \pm \sqrt{1 + 8M^2})$$

$$(2\Delta\tilde{\rho} - 3)^2 = \pm(1 + 8M^2)$$

$$4\Delta\tilde{\rho}^2 - 12\Delta\tilde{\rho} + 9 - 1 = 8M^2 \rightarrow \pm \sqrt{\frac{\Delta\tilde{\rho}^2 - 3\Delta\tilde{\rho} + 2}{2}} = M$$

$$\widetilde{u}_{ex} = \pm \sqrt{\frac{2-3\Delta\tilde{\rho}+\Delta\tilde{\rho}^2}{2}} \left(\frac{\Delta\tilde{\rho}}{1-\Delta\tilde{\rho}} \right) \quad \text{اثبات رابطه ۲۶}$$

اثبات روابط فصل چهارم

: د

اثبات روابط (۹,۴) و (۱۰,۴)

$$e = c_v T , \quad p = \rho RT , \quad p_{xx} = -\frac{4}{3} \eta \frac{du}{dx} , \quad q_x = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

$$(\rho u) = m \quad (۴,۴)$$

$$((\rho u^2 + p + p_{xx}) = P) \rightarrow (\rho u^2 + p = P - p_{xx}) \quad (5,4)$$

معادله (5,4) را بر (4,4) تقسیم می کنیم و رابطه (9,4) بدست می آید :

$$\frac{\rho u^2}{\rho u} + \frac{\rho RT}{\rho u} = \frac{p}{m} - \frac{4}{3}\eta \frac{du}{dx}$$

$$\frac{4}{3}\eta \frac{du}{dx} = u + \frac{RT}{u} - \frac{p}{m}$$

از معادله (5,4) بر (4,4) داریم :

$$\frac{p + p_{xx}}{\rho u} = \frac{p}{m} - \frac{\rho u^2}{\rho u} = \frac{p}{m} - u$$

از معادله (6,4) داریم :

$$\rho u \left(c_v T + \frac{1}{2} u^2 \right) + u(p + p_{xx}) = E + \lambda \frac{dT}{dx}$$

حالا معادله (6,4) را بر معادله (4,4) تقسیم می کنیم و رابطه (10,4) اثبات می شود.

$$\frac{\lambda}{m} \frac{dT}{dx} = c_v T + \frac{1}{2} u^2 + u \left(\frac{p}{m} - u \right) - E$$

طرفین معادله (9,4) را در $\frac{m}{p}$ ضرب می کنیم و طبق رابطه های زیر به معادله (13,4) می رسیم :

$$\left(\begin{array}{l} \omega = \frac{mu}{p}, \theta = \frac{m^2 RT}{p^2}, \phi = \frac{p}{P} \\ , \alpha + 1 = \frac{2Em^2}{P^2}, \delta = \frac{R}{2c_v} = \frac{1}{2}(k - 1), \\ k = \frac{c_p}{c_v}, R = c_p - c_v, \tilde{\eta} = \frac{4\eta}{3m}, \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{(c_v m)} \end{array} \right)$$

$$\frac{4}{3}\eta \frac{d(mu/p)}{dx} = \frac{mu}{p} + \frac{m^2 RT}{\omega p^2} - 1$$

$$\tilde{\lambda} \frac{d\omega}{dx} = \omega + \frac{\theta}{\omega} - 1 \quad \text{اثبات (۱۳,۴)}$$

طرفین معادله (۱۰,۴) را در این ثابت $\frac{m^2 R}{c_v p^2}$ ضرب می کنیم و طبق رابطه های بالا به معادله (۱۴,۴)

می رسیم:

$$\left(\begin{array}{l} \frac{\lambda}{m} \frac{dT}{dx} \left(\frac{m^2 R}{c_v p^2} \right) = \left(\frac{m^2 R}{c_v p^2} \right) c_v T \\ + \left(\frac{m^2 R}{c_v p^2} \right) \frac{1}{2} u^2 \\ + \left(\frac{m^2 R}{c_v p^2} \right) u \left(\frac{p}{m} - u \right) - \left(\frac{m^2 R}{c_v p^2} \right) E \end{array} \right)$$

$$\frac{\tilde{\lambda} d\theta}{dx} = \theta - \delta[(1 - \omega) + \alpha] \quad \text{اثبات (۱۴,۴)}$$

ذ:

اثبات روابط (۲۴,۴) و (۲۵,۴)

$$s = c_p \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) - R \ln \left(\frac{p}{p_0} \right)$$

$$s = c_p \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) - R \ln \left(\frac{p}{p_0} \right)$$

که $\Phi = \frac{p}{P} = \frac{\theta}{\omega}$, $p = \frac{P\theta}{\omega}$, $p_0 = \frac{P\theta_0}{\omega_0}$ از اینرو معادله بالا به شکل زیر در می آید:

$$s = c_p \ln \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right) - R \ln \left(\frac{\theta \omega_0}{\theta_0 \omega} \right) = (c_p - R) \ln \frac{\theta}{\theta_0} - R \ln \frac{\omega_0}{\omega},$$

$$s = c_v \ln \frac{\theta}{\theta_0} - R \ln \frac{\omega_0}{\omega},$$

$$\frac{s}{c_v} = \ln \frac{\theta}{\theta_0} - (k-1) \ln \frac{\omega_0}{\omega},$$

$$\frac{s}{c_v} = \ln \frac{\theta \omega^{k-1}}{\theta_0 \omega_0^{k-1}},$$

با قرار دادن $\tilde{\mu} = 0$ در معادله (۱۶,۴) رابطه زیر را بدست می آوریم

$$\bar{\mu}_0 \left(\frac{\theta}{\theta_0} \right)^s \frac{d\omega}{dx} = \omega + \frac{\theta}{\omega} - 1 \quad (۱۶,۴)$$

$$\theta = \omega - \omega^2$$

θ را در معادله زیر جایگذاری می کنیم

$$\frac{s}{c_v} = \ln \frac{\theta \omega^{k-1}}{\theta_0 \omega_0^{k-1}} - (k-1) \ln \frac{\omega_0}{\omega},$$

$$\frac{s}{c_v} = \ln \frac{(\omega - \omega^2) \omega^{k-1}}{\theta_0 \omega_0^{k-1}},$$

$$\bar{s} = \ln \left[\frac{\omega^k (1 - \omega)}{\theta_0 \omega_0^{k-1}} \right]$$

$$\bar{S} = \ln [\tilde{A} \omega^k (1 - \omega)] \quad \text{اثبات رابطه (۲۴,۴)}$$

با قرار دادن $\tilde{\lambda} = 0$ در معادله (۱۴,۴) رابطه زیر را بدست می آوریم

$$\frac{\tilde{\lambda} d\theta}{dx} = \theta - \delta [(1 - \omega)^2 + \alpha] \quad (۱۴,۴)$$

$$\theta = \delta [\omega^2 - 2\omega + (1 + \alpha)]$$

که θ را در معادله زیر قرار می دهیم.

$$\frac{s}{c_v} = \ln \frac{(\omega - \omega^2)\omega^{k-1}}{\theta_0 \omega_0^{k-1}},$$

$$\frac{s}{c_v} = \ln \left[\frac{\delta}{\theta_0 \omega_0^{k-1}} \omega^{k-1} (\omega^2 - 2\omega + 1 + \alpha) \right]$$

$$\bar{s} = \ln \left[\tilde{A}_1 \omega^k \left(\omega + \frac{\tilde{B}}{\omega} - 2 \right) \right]$$

$$\bar{S} = \ln \left[\tilde{A}_1 \omega^k \left(\omega + \frac{\tilde{B}}{\omega-2} \right) \right] \quad \text{اثبات رابطه (۲۵,۴)}$$

$$\tilde{A}_1 = \frac{\delta}{\theta_0 \omega_0^{k-1}}, \tilde{B}_1 = (1 + \alpha)$$

از معادلات زیر \tilde{B} را بدست می آوریم.

$$\frac{p}{m} = u_0 + \frac{RT_0}{u_0} = \left(1 + \frac{1}{kM_0^2} \right) u_0 \quad (۹,۴)$$

$$E = \left(\frac{1}{(k-1)M_0^2} + \frac{1}{2} \right) u_0^2 \quad (۱۰,۴)$$

$$\alpha + 1 = \frac{2Em^2}{p^2}, \delta = \frac{R}{2c_v} = \frac{1}{2}(k-1)$$

$$\tilde{B} = \frac{k^2 M_0^2 [(k-1)M_0^2 + 2]}{k-1(1+kM_0^2)^2}$$

Abstract

Magnetohydro dynamics *MHD* has developed into a relatively mature theory within the field of plasma physics. *MHD* represents the simplest, self-consistent model describing the macroscopic equilibrium and stability properties of plasma. Magnetohydro dynamics model considering non-ideal effects such as (resistivity, viscosity, pressure and finite larmor radius effects) and their influence on plasma that are stable or weakly unstable against the ideal modes. In this search to study, pay influences non-ideal such as (collision and flowing that resistivity, viscosity and flowing that shear stresses) on the non-linear of a classical plasma. The ways consider in solving questions, which justify the behavior self-consistent of plasma as a model is description plasma.

In this search, model of Magneto hydro dynamics *MHD* for electron-positron plasma and ion plasma has been used. Also the effects dissipative viscosity and collisions has been investigated. And linear, nonlinear behavior has studied.

Key word: (cold and warm classical plasma, linear and nonlinear relation, resistivity, collision coefficient, viscosity, soliton and shock waves)



Shahrood University of Technology

Faculty of Physics and Nuclear Engineering

MSc Thesis in Atomic and Molecular Physics

Study of the shock waves in multi component plasma with
viscosity

By: Foroogh Mahmoodi Ara

Supervisor:
Dr Mehdi Momeni

Feb 2017