

1



1



دانشگاه شاهرود

دانشکده فیزیک  
گروه ذرات بنیادی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته  
فیزیک، گرایش ذرات بنیادی

عنوان

ولگشت‌های کوانتومی حافظه‌دار یک بعدی

استاد راهنما

دکتر مصطفی عنابستانی

دانشجو

مهناز رضازاده

شهریور ۱۳۹۴

تقدیم بہ فردا...  
..

سپاس گزارمی ...

باسپاس از پدر و مادر عزیزم که همواره مایه می دلگرمی ام بوده اند.  
از استاد ارجمندم جناب دکتر مصطفی عنایتانی که صبورانه راهنمای اینجانب بوده اند،  
سپاس گزارم.

همچنین دوستان عزیزم؛

خانم ها آقایان: مجید مرادی، کوثر تفلخ، زانیه گلرخ، میترا فریدنیوا و معصومه گلارا.

میناز رضازاده  
شهریور ۱۳۹۴

## تعمدنامه

اینجانب مهناز رضازاده دانشجوی کارشناسی ارشد رشته فیزیک دانشکده فیزیک دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **ولگشت‌های کوانتومی حافظه‌دار یک بعدی**، تحت راهنمایی دکتر مصطفی عنابستانی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مهناز رضازاده  
شهریور ۱۳۹۴

## مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

# چکیده

در این نوشتار، ابتدا به معرفی و بررسی اجمالی ولگشت کلاسیکی روی خط می‌پردازیم. توزیع احتمال، انحراف معیار را برای آن محاسبه می‌کنیم و با کمک شبیه‌سازی بعضی از این خواص را بررسی می‌کنیم. سپس به مطالعه ولگشت کوانتومی روی خط می‌پردازیم. عملگر تحول را معرفی می‌کنیم و اثر آن را بر حالت ولگشت بررسی می‌کنیم. نمودار توزیع احتمال را برای این ولگشت به دست می‌آوریم و تفاوت آن را با ولگشت کلاسیکی نشان خواهیم داد. همین‌طور، برای مقایسه با ولگشت کلاسیکی نمودار واریانس را برای ولگشت کوانتومی رسم می‌کنیم. نشان خواهیم داد که چگونه با داشتن هر حالت و استفاده از عملگر تحول می‌توانیم حالت بعد را بسازیم. با استفاده از تبدیل فوری، عملگر تحول را به فضای  $k$  برده و در آنجا ویژه‌مقادیر و ویژه‌بردارهای ولگشت کوانتومی روی خط را تعیین می‌کنیم. علاوه بر این در ادامه فصل روشی را برای کلاسیکی کردن رفتار ولگشت کوانتومی روی خط، بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که با استفاده از چندین سکه کوانتومی و در نتیجه کم شدن اثرات تداخل بین مسیرها برای حرکت ولگشت، این کار امکان‌پذیر می‌باشد. جواب‌ها را برای سیستم تک سکه به دست می‌آوریم و این جواب‌ها را با شبیه‌سازی عددی مقایسه می‌کنیم.

در فصل بعد به معرفی نوع خاصی از ولگشت کوانتومی خواهیم پرداخت که به آن ولگشت کوانتومی حافظه‌دار می‌گویند، در این نوع ولگشت کوانتومی رفتار آینده‌ی ولگشت متأثر از گذشته‌ی آن است و خواص متفاوتی را ایجاد می‌کند. در این فصل به معرفی این نوع ولگشت کوانتومی و تفاوت‌های آن با ولگشت‌های معمولی پرداخته و سعی خواهیم کرد تاثیرات انواع مختلف حافظه بر ولگشت‌های کوانتومی را بررسی کنیم.

در فصل آخر نوعی از ولگشت کوانتومی یک بعدی را معرفی می‌کنیم که آن را ولگشت کوانتومی شتاب‌دار می‌نامیم. در این نوع ولگشت، فضای هیلبرت دیگری به سیستم اضافه می‌شود. بدین ترتیب پارامتر سرعت را برای این نوع ولگشت تعریف می‌کنیم که تغییرات این پارامتر با توجه به حالت سکه خواهد بود و از طرفی عملگرها را به گونه‌ای بازتعریف می‌کنیم که تغییر مکان وابسته به سرعت در نظر گرفته شود و تغییرات حاصل از این وابستگی را در رفتار ولگشت نسبت به ولگشت‌های کوانتومی معمولی بررسی خواهیم کرد.

وجود فضای هیلبرت سرعت در ولگشت‌های کوانتومی، راه را برای تعریف و آزمون انواع مختلفی از این نوع ولگشت باز می‌کند که دو نوع ولگشت با سرعت حدی و ولگشت با سرعت چرخه‌ای در این پایان‌نامه به صورت عددی بررسی شده‌اند.

**کلمات کلیدی:** ولگشت تصادفی کلاسیکی، ولگشت کوانتومی، عملگر سکه، توزیع احتمال

# لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. ولگشت کوانتومی یک بعدی شتابدار؛ رضازاده، مهناز؛ عنابستانی، مصطفی؛ کنفرانس انجمن فیزیک ایران، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، شهریور ۱۳۹۴.

# فهرست مطالب

د	فهرست تصاویر
ژ	فهرست جداول
۱	۱ انواع ولگشت
۱	۱.۱ ولگشت تصادفی کلاسیکی
۱	۱.۱.۱ ولگشت تصادفی روی یک خط راست
۶	۲.۱.۱ نقطه جذب کلاسیکی
۷	۲.۱ ولگشت‌های کوانتومی زمان-گسسته
۱۶	۱.۲.۱ حل تحلیلی ولگشت کوانتومی با سری فوریه
۱۷	۲.۲.۱ تبدیل فوریه گسسته
۲۲	۳.۱ ولگشت کوانتومی با چندین سکه
۲۲	۱.۳.۱ ولگشت کوانتومی تک سکه
۲۲	۲.۳.۱ روش تحلیل‌های ترکیبی
۲۶	۳.۳.۱ ولگشت‌های چند سکه‌ای
۳۱	۲ ولگشت کوانتومی حافظه‌دار
۳۱	۱.۲ ولگشت کوانتومی حافظه‌دار روی خط
۳۲	۱.۱.۲ ولگشت‌های مرتبه ۲
۳۴	۲.۱.۲ ولگشت هادامارد
۳۵	۳.۱.۲ دامنه‌ها
۳۹	۴.۱.۲ شبیه‌سازی ولگشت کوانتومی حافظه‌دار
۴۳	۲.۲ ولگشت کوانتومی حافظه‌دار روی دایره
۴۴	۱.۲.۲ توزیع احتمال ولگشت روی دایره
۴۹	۲.۲.۲ متوسط زمانی توزیع حدی احتمال
۵۱	۳.۲ ولگشت‌های کوانتومی حافظه‌دار با سکه چرخشی و سکه وابسته به حافظه کل
۵۱	۱.۳.۲ فرمالیزم ولگشت کوانتومی برای گراف‌های خطی



۵۲	.....	فرمالیزم باحافظه	۲.۳.۲
۵۵	.....	فضای دو بعدی	۳.۳.۲
۵۶	.....	سکه‌های وابسته به تاریخچه	۴.۳.۲
۶۰	.....	یک مدل فیزیکی برای ولگشت‌های وابسته به تاریخچه سکه	۵.۳.۲
۶۱	.....	حافظه بعنوان یک مدل واهمدوسی	۶.۳.۲
۶۵		ولگشت کوانتومی شتاب‌دار یک بعدی	۳
۶۶	.....	عملگر تحول	۱.۳
۶۸	.....	ولگشت کوانتومی شتاب‌دار با سرعت حدی	۲.۳
۷۴	.....	ولگشت کوانتومی شتاب‌دار با سرعت چرخه‌ای	۳.۳
۸۱		اثبات قضیه ۳.۱.۲	آ
۸۹		مراجع	

# فهرست تصاویر

۲	۱۰۱	نمودار تابع توزیع احتمال حاصل از ولگشت تصادفی کلاسیکی با ۱۰۰ گام . . . . .
	۲۰۱	توزیع احتمال برای ولگشت تصادفی کلاسیکی یک بعدی به ازای $t = ۷۲, t = ۱۸۰$ و $t = ۴۵$ . . . . .
۳	۳۰۱	واریانس ولگشت تصادفی کلاسیکی در بازه ۱۰۰ گام. (تعداد تکرار: ۱۰۰۰۰ بار) .
۷	۴۰۱	توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی هادامارد پس از ۱۰۰ گام با حالت اولیه
۱۳	۵۰۱	$ \psi\rangle =  0\rangle 0\rangle$ . . . . .
	۵۰۱	توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی هادامارد پس از ۱۰۰ گام با حالت اولیه
۱۳	۶۰۱	$ \psi\rangle =  1\rangle 0\rangle$ . . . . .
	۶۰۱	توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی هادامارد پس از ۱۰۰ گام با حالت اولیه
۱۴		$ \psi\rangle = \frac{ 0\rangle - i 1\rangle}{\sqrt{2}}$ . . . . .
۱۵	۷۰۱	واریانس ولگشت کوانتومی هادامارد در بازه ۱۰۰ گام . . . . .
	۸۰۱	مقایسه انحراف معیار ولگشت کوانتومی (خط ممتد) در مقایسه با ولگشت کلاسیکی
۱۵		به ازای ۱۰۰ گام. . . . .
۲۱	۹۰۱	مقایسه توزیع احتمال کلاسیکی و کوانتومی [۱۷] . . . . .
۲۹	۱۰۰۱	نمودار توزیع احتمال به ازای ۵۰۰ گام برای ولگشت کوانتومی برای ۱ تا ۵ سکه . . .
	۱۱۰۱	توزیع احتمال حاصل از نتایج عددی برای ولگشت کوانتومی به ازای ۲۰۰ گام و ۲۰
۳۰		سکه با حالت اولیه $ R\rangle$ . . . . .
۳۰	۱۲۰۱	نمودار توزیع احتمال به ازای ۵۰۰ گام برای ولگشت کوانتومی با ۲ سکه . . . . .
	۱۰۲	توزیع احتمال برای سه ولگشت کلاسیکی و کوانتومی عادی و کوانتومی حافظه‌دار به
۴۰		ازای ۱۰ گام (شکل سمت چپ) و به ازای ۴۰ گام (شکل سمت راست) [۲۱] . . . . .
	۲۰۲	[۲۱] توزیع احتمال برای سه ولگشت کلاسیکی و کوانتومی عادی و کوانتومی حافظه‌دار
۴۱		با حالت اولیه متقارن، بعد از ۴۰ گام . . . . .
	۳۰۲	توزیع حدی برای ولگشت‌های هادامارد روی دایره با یک گام حافظه به ازای تعداد
		جایگاه $d = ۳, ۴, ۶, ۱۱$ برای حالت‌های اولیه داده شده در معادله (۵۰.۲) (خطوط
		ممتد) و $(\phi_1) = (1, 0, 0, 0)^T$ (نقطه چین). برای هر مورد نتایج از $d$ تا $d$ رسم
۵۰		شده‌اند که به‌طور تناوبی توزیع حدی را نشان می‌دهد. . . . .

- ۴.۲ توزیع حدی برای ولگشت کوانتومی هادامارد روی دایره با یک گام حافظه به ازای تعداد جایگاه  $d = 300$ ، با حالت اولیه  $|\phi_0\rangle$  (از معادله (۵۰.۲) (شکل چپ) و حالت اولیه  $|\phi_1\rangle = (1, 0, 0, 0)^T$  (شکل راست). . . . . ۵۱
- ۵.۲ شماتیکی از ولگشت کوانتومی حافظه‌دار. ولگرد را می‌توانیم بعنوان مولکولی در نظر بگیریم که  $N$  ذره با اسپین  $\frac{1}{2}$  را حمل می‌کند. عمل چرخش سکه روی اسپین  $N$  یک دوران یکانی با زاویه‌ای است که به وسیله مجموع قطبیدگی  $1 - N$  اسپین حافظه دیگر تعیین می‌شود (یک تابع حافظه). اسپین مرکزی  $N$  اثر انتقال را روی تمام اسپین مولکول در فضا فراهم می‌کند. در نهایت در گام بروزرسانی حافظه اسپین‌ها چرخه‌ای جایگزین می‌شوند. . . . . ۵۳
- ۶.۲ تحول زمانی بالای ۱۲ گام برای ولگشت گلدفیش ( $N = 1$ )، که در شکل دو قله انتشار ولگشت کوانتومی را می‌بینید. (الف) و همچنین برای ولگشت فیل ( $N = 12$  که در شکل آمار ولگشت کلاسیکی تصادفی را می‌بینید (ب)). . . . . ۵۴
- ۷.۲ توزیع احتمال خروجی برای  $t = 12$  با طول حافظه متفاوت ( $N$ ). از چپ به راست:  $N = 1$  (ولگشت گلدفیش)،  $N = 3$ ،  $N = 10$ ،  $N = 12$  و  $N = t$  (ولگشت فیل). در مورد یک ولگشت گلدفیش معمولا توزیع دو قله‌ای ولگشت کوانتومی تک سکه استاندارد را مشاهده می‌کنیم و در مورد یک ولگشت فیل، توزیع دو جمله‌ای آمارهای کلاسیکی را می‌بینیم. . . . . ۵۴
- ۸.۲ توزیع فضایی یک ولگشت کوانتومی روی شبکه دو بعدی با  $t = 6$  با استفاده از چرخش سکه جدایی‌پذیر (از معادله (۶۷.۲)) و سکه درهم‌تنیده (از معادله (۶۸.۲)). (۱) ولگشت گلدفیش و سکه‌های جدایی‌پذیر، (۲) ولگشت فیل و سکه‌های جدایی‌پذیر، (۳) ولگشت گلدفیش و سکه‌های درهم‌تنیده، (۴) ولگشت فیل و سکه‌های درهم‌تنیده. وقتی که سکه‌های جدایی‌پذیر به کار برده شود یا حافظه کامل در نظر گرفته شود، توزیع احتمال طی دو درجه آزادی فضایی جدایی‌پذیر می‌باشد. . . . . ۵۶
- ۹.۲ تحول زمانی طی ۱۲ گام برای یک ولگشت پیردانا با  $N = 5$  و تابع حافظه از معادله (۶۶.۲). (چپ) (یک ولگشت هادامارد)  $\phi = 0$ ، (وسط)  $\phi = 0.5$  (راست)  $\phi = 1$ . هر چه  $\phi$  افزایش یابد انتشار در یک جهت بیشتر از دیگری می‌شود، تا توزیعی متقارن حاصل شود. . . . . ۵۷
- ۱۰.۲ تحول واریانس توزیع احتمال نسبت به زمان به ازای  $N = 5$  برای یک ولگشت پیردانا برای پارامترهای متفاوت تاریخچه  $\phi$  و تابع حافظه معادله (۶۶.۲). هر چه  $\phi$  بیشتر شود انتشار افزایش می‌یابد. . . . . ۵۷
- ۱۱.۲ تحول زمانی طی ۱۲ گام برای یک ولگشت پیردانا با  $N = 5$  با تابع حافظه معادله (۷۲.۲). انتشار به دو جهت محدود می‌شود تا به توزیعی موضعی می‌رسد. . . . . ۵۹

- ۱۲.۲ تحول زمانی طی ۱۲ گام برای یک ولگشت پیر دانا با  $N = 5$  و تابع حافظه از معادله (۷۳.۲).  $\phi = 0/5$  (الف).  $\phi = 1$  (ب). در مقایسه با شکل ۹.۲ (چپ) پراکندگی در دو جهت بیشتر شده. برای  $\phi = 1$  می‌بینیم که ولگرد به سرعت به دو جهت برده می‌شود. به طور کلی این اتفاق رخ نمی‌دهد اما این نتایج از انتخاب حالت اولیه  $|\psi_{in}\rangle = \frac{(|0,-1,\dots,-1\rangle + |0,+1,\dots,+1\rangle)}{\sqrt{2}}$  به دست می‌آیند، در این حالت بیشترین پراکندگی ممکن را داریم. . . . . ۵۹
- ۱۳.۲ تحول واریانس توزیع احتمال نسبت به زمان برای یک ولگشت پیر دانا با  $N = 5$  به ازای پارامترهای تاریخچه  $\phi$  مختلف و تابع حافظه معادله (۷۳.۲). با افزایش  $\phi$  انتشار افزایش می‌یابد. . . . . ۶۰
- ۱۴.۲ حافظه را بعنوان سیستم محیط تصور می‌کنیم. وقتی که عملگر گام، حافظه محیط را با مکان جفت می‌کند، عملگرهای به روزرسانی سکه و حافظه فقط روی زیرسیستم حافظه اثر می‌کنند. در پایان تحول روی محیط رد می‌گیریم و فقط زیر سیستم مکان را مشاهده می‌کنیم که معمولاً یک حالت مختلط است. . . . . ۶۲
- ۱.۳ توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی عادی، (QW) (خط ممتد) و ولگشت کوانتومی شتاب دار، (AQW) (نقطه چین)، با سرعت حدی ۱ به ازای ۱۲ گام و حالت اولیه متقارن. . . . . ۶۹
- ۲.۳ واریانس برای ولگشت کلاسیکی عادی، (CRW) (خط ممتد) و کوانتومی عادی (QW)، (خط چین) و برای کوانتومی شتاب دار، (AQW) (نقطه چین)، با سرعت حدی ۳ به ازای ۱۲ گام و حالت اولیه متقارن. . . . . ۷۰
- ۳.۳ واریانس برای ولگشت کلاسیکی شتاب دار، (ACRW) با سرعت حدی ۳ (خط-نقطه) و سرعت حدی ۶ (نقطه چین) و برای ولگشت کوانتومی شتاب دار، (AQW) با سرعت حدی ۳ (خط چین) و سرعت حدی ۶ (خط ممتد)، به ازای ۱۲ گام و حالت اولیه متقارن. . . . . ۷۰
- ۴.۳ نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کلاسیکی شتاب دار برای سرعت حدی ۱ به ازای ۱۲ گام و حالت سکه اولیه متقارن، برای همه جایگاه‌ها (نقطه چین) و جایگاه‌های فرد (خط ممتد). . . . . ۷۱
- ۵.۳ نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کلاسیکی شتاب دار برای سرعت حدی ۳ به ازای ۱۲ گام و حالت سکه اولیه متقارن، برای همه جایگاه‌ها (خط چین) و جایگاه‌های فرد (خط ممتد). . . . . ۷۱
- ۶.۳ نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کلاسیکی شتاب دار برای سرعت حدی ۱۲ به ازای ۱۲ گام و حالت سکه اولیه متقارن، برای همه جایگاه‌ها (نقطه چین) و جایگاه‌های فرد (خط ممتد). . . . . ۷۲

- ۷۰.۳ نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی شتابدار برای سرعت حدی ۱ به ازای ۱۲ گام و حالت سکه اولیه متقارن، برای همه جایگاهها (نقطه‌چین) و جایگاه‌های فرد (خط ممتد). . . . . ۷۳
- ۸۰.۳ نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی شتابدار برای سرعت حدی ۳ به ازای ۱۲ گام و حالت سکه اولیه متقارن، برای همه جایگاهها (نقطه‌چین) و جایگاه‌های فرد (خط ممتد). . . . . ۷۳
- ۹۰.۳ نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی شتابدار برای سرعت حدی ۱۲ به ازای ۱۲ گام و حالت سکه اولیه متقارن، برای همه جایگاهها (نقطه‌چین) و جایگاه‌های فرد (خط ممتد). . . . . ۷۴
- ۱۰۰.۳ نمودار مقایسه توزیع احتمال ولگشت کوانتومی شتابدار عادی ( $AQW$ ) (خط چین) و ولگشت کوانتومی شتابدار با سرعت چرخه‌ای ( $CAQW$ ) (خط ممتد)، به ازای ۱۲ گام و سرعت حدی ۱ و حالت سکه متقارن. . . . . ۷۶
- ۱۱۰.۳ نمودار مقایسه توزیع احتمال ولگشت کوانتومی شتابدار عادی ( $AQW$ ) (خط چین) و ولگشت کوانتومی شتابدار با سرعت چرخه‌ای ( $CAQW$ ) (خط ممتد)، به ازای ۱۲ گام و سرعت حدی ۳ و حالت سکه متقارن. . . . . ۷۷
- ۱۲۰.۳ نمودار توزیع احتمال ولگشت کوانتومی شتابدار با سرعت چرخه‌ای ( $CAQW$ ) برای سرعت حدی ۲ به ازای ۱۲ گام و حالت سکه متقارن، برای همه جایگاهها (خط چین) و جایگاه‌های فرد (خط ممتد). . . . . ۷۷
- ۱۳۰.۳ نمودار توزیع احتمال ولگشت کوانتومی شتابدار با سرعت چرخه‌ای ( $CAQW$ ) برای سرعت حدی ۳ به ازای ۱۲ گام و حالت سکه متقارن، برای همه جایگاهها (خط چین) و جایگاه‌های فرد (خط ممتد). . . . . ۷۸
- ۱۴۰.۳ نمودار مقایسه واریانس ولگشت کوانتومی شتابدار عادی ( $AQW$ ) (خط چین) و ولگشت کوانتومی شتابدار با سرعت چرخه‌ای ( $CAQW$ ) (خط ممتد)، به ازای ۱۲ گام و سرعت حدی ۶ و حالت سکه متقارن. . . . . ۷۸

# فهرست جداول

۱	۱.۱	احتمال پیدا شدن ذره در مکان $n$ ، بعد از زمان $t$ . ولگشت تصادفی از مبدا آغاز شده است.
۱۱	۲.۱	احتمال پیدا شدن ذره کوانتومی در مکان $n$ در زمان $t$ . با فرض این که ولگشت از مبدا شروع شده باشد.
۳۳	۱.۲	اثر عملگر انتقال
۳۴	۲.۲	اثر عملگر انتقال

## پیش‌گفتار

یوری مانین<sup>۱</sup> (۱۹۸۰ [۱]) و فاینمن<sup>۲</sup> (۱۹۸۲ [۲]) به طور مستقل دریافتند که جهان فیزیکی می‌تواند به وسیله کامپیوترهای کوانتومی به صورت ایده‌آل شبیه‌سازی شود. یک دهه پس از آن، مطالعات نظری و امکان ساخت کامپیوترهای کوانتومی بر اساس قوانین کوانتومی مانند برهم‌نهی و تداخل میان دامنه‌های کوانتومی به یکی از حوزه‌های فعال تحقیقاتی بدل شد. الگوریتم دویچ<sup>۳</sup> (۱۹۸۵ [۳]) و الگوریتم دویچ-جوza<sup>۴</sup> [۴] از اولین الگوریتم‌هایی بودند که نشان دادند کامپیوترهای کوانتومی می‌توانند مسائل محاسباتی خاصی را، بسیار کارآمدتر از کامپیوترهای کلاسیکی حل کنند. در ۱۹۹۴، شور<sup>۵</sup> یک الگوریتم کوانتومی را ابداع کرد که اعداد صحیح دلخواه را با سرعتی نمایی بیش از بهترین همتای کلاسیکی‌اش به اعداد اول تجزیه می‌کرد [۵] [۶]. الگوریتم شور منجر به آغاز تحقیقات فعالی در حوزه اطلاعات کوانتومی و محاسبات کوانتومی در گستره‌ای وسیع از شاخه‌ها شامل فیزیک کوانتومی علوم کامپیوتر، ریاضیات و مهندسی شد. این تحقیق تأثیرات جدید زیادی را آشکار کرد که کاملاً با همتاهای کلاسیک خود فرق دارند. طراحی و تحلیل الگوریتم‌های کوانتومی برای حل کارآمدتر مسائل گوناگون نسبت به الگوریتم‌های کلاسیکی به حوزه تحقیقاتی پر جنب و جوشی بدل شده است [۷] [۸].

بسیاری از الگوریتم‌های کلاسیک مبتنی بر ولگشت تصادفی هستند. شبیه‌سازی زنجیره مارکوف<sup>۶</sup> که به عنوان یک ابزار الگوریتمی قوی ظهور کرده است [۹]، یکی از این مثال‌ها است. همانند ولگشت تصادفی کلاسیکی، نسخه کوانتومی هم به جزئی مهم از الگوریتم‌ها و محاسبات کوانتومی تبدیل شده است. ولگشت کوانتومی، آن گونه که امروز شناخته شده است، شکل تعمیم یافته ولگشت تصادفی کلاسیکی است که با استفاده از جنبه‌هایی از مکانیک کوانتومی از قبیل برهم‌نهی و تداخل دامنه‌های کوانتومی توسعه یافته است.

مفهوم ولگشت کوانتومی توسعه یافت و اکنون به دو شکل استاندارد مورد مطالعه قرار می‌گیرد: ولگشت کوانتومی زمان-پیوسته و ولگشت کوانتومی زمان-گسسته. ولگشت کوانتومی زمان-پیوسته

---

<sup>۱</sup>Yuri Manin

<sup>۲</sup>Feynman

<sup>۳</sup>Deutsch

<sup>۴</sup>Deutsch-Jozsa

<sup>۵</sup>Shor

<sup>۶</sup>Markov

توسط فرهی<sup>۷</sup> و گوتمن<sup>۸</sup> ([۱۰]) و ولگشت کوانتومی زمان-گسسته توسط واتروس<sup>۹</sup> (۲۰۰۱ [۱۱]) معرفی شدند. نوعی خاص از ولگشت کوانتومی زمان-گسسته که به عنوان ولگشت هادامارد<sup>۱۰</sup> شناخته می‌شود، توسط آمباینیس<sup>۱۱</sup> و دیگران (۲۰۰۱ [۱۲]) معرفی شد. یک مقاله مروری توسط کمپه<sup>۱۲</sup> [۱۳] به تفصیل به همراه بعضی کاربردهای الگوریتمی، درباره این دو نوع بحث می‌کند. گذشته از کاربرد در الگوریتم‌های کوانتومی، ولگشت کوانتومی به عنوان یک ابزار بالقوه در درک پدیده‌های گوناگون در سیستم‌های فیزیکی ظاهر شده است و برای نشان دادن کنترل ارتباط در سیستم‌های کوانتومی بس ذره‌ای به کار گرفته شده است.

---

<sup>۷</sup>Farhi

<sup>۸</sup>Gutmann

<sup>۹</sup>Watrous

<sup>۱۰</sup>Hadamard

<sup>۱۱</sup>Ambainis

<sup>۱۲</sup>Kempe2003



# فصل ۱

## انواع ولگشت

### ۱.۱ ولگشت تصادفی کلاسیکی

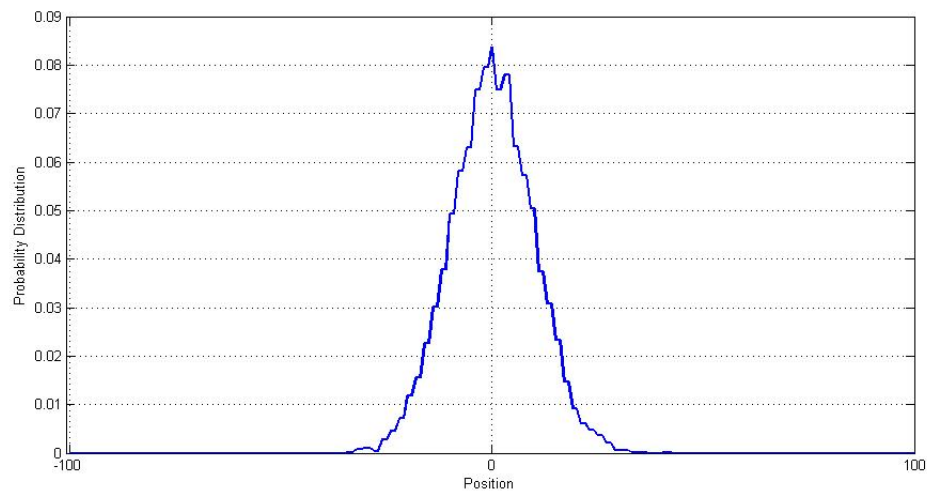
#### ۱.۱.۱ ولگشت تصادفی روی یک خط راست

ساده‌ترین مثال ولگشت تصادفی حرکت کلاسیکی ذره روی خط راست است که جهت حرکتش با یک سکه تعیین می‌شود. سکه را پرتاب می‌کنیم اگر پشت بیاید ذره یک گام به راست و اگر رو بیاید یک گام به چپ می‌رود این فرایند در یک بازه زمانی مشخص تکرار می‌شود. چون این یک فرایند احتمالاتی است ما با قطعیت نمی‌دانیم که ذره در زمان بعدی دقیقا کجا خواهد بود، اما می‌توانیم احتمال پیدا شدن ذره در مکان  $n$  را در زمان  $t$  محاسبه کنیم.

جدول ۱.۱: احتمال پیدا شدن ذره در مکان  $n$ ، بعد از زمان  $t$ . ولگشت تصادفی از مبدا آغاز شده است.

۵	۴	۳	۲	۱	۰	-۱	-۲	-۳	-۴	-۵	$n / t$
					۱						۰
				$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$					۱
			$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$				۲
		$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{8}$			۳
	$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{16}$		۴
$\frac{1}{32}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{5}{16}$		$\frac{5}{16}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{1}{32}$	۵

فرض کنیم ذره در زمان  $t = 0$  در مبدا باشد، پس احتمال  $p(t = 0, n = 0) = 1$  می‌باشد.



شکل ۱.۱: نمودار تابع توزیع احتمال حاصل از ولگشت تصادفی کلاسیکی با ۱۰۰ گام.

(در جدول ۱.۱) ذره در  $t = ۱$  می‌تواند در یکی از دو مکان  $-۱$  و  $۱$  باشد، پس:

$$p(n = ۱) = \frac{۱}{۲}$$

و

$$p(n = -۱) = \frac{۱}{۲}$$

و احتمال حضور ذره وقتی که در  $n = ۰$  باشد صفر می‌شود:  $p(n = ۰) = ۰$  و به همین ترتیب بقیه احتمالات در جدول ۱.۱ را تایید می‌کنیم. جمله کلی در این جدول با رابطه زیر داده می‌شود:

$$p(t, n) = \frac{۱}{۲^t} \binom{t}{\frac{t+n}{۲}} \quad (۱.۱)$$

که

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{(a-b)!b!}$$

اگر شروع ولگشت از مکان  $۰$  باشد و بعد از  $t$  گام به مکان  $n$  برسد، داریم:

$$n_- = \frac{(t-n)}{۲}$$

و

$$n_+ = \frac{(t+n)}{۲}$$

$$N(n, t) = \binom{t}{n_+} = \frac{t!}{n_+!n_-!}$$

تعداد همه حالت‌ها:

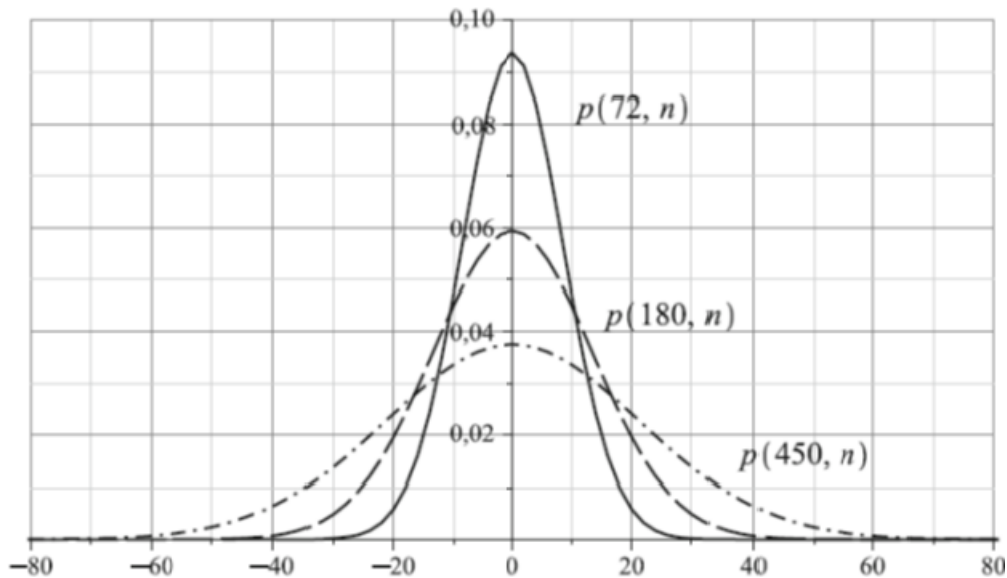
$$N(t) = 2^t$$

$$p(n, t) = N(n, t)/N(t)$$

احتمال پیدا شدن ذره در مکان  $n$  ، بعد از  $t$  گام:

$$p(n, t) = \frac{t!}{2^t n_+! n_-!}$$

که عبارت  $\frac{t+n}{2}$  در رابطه (۱.۱) باید صحیح باشد و از آنجاییکه  $n$  و  $t$  هر دو صحیح هستند، باید یا هر دو زوج باشند و یا هر دو فرد. با رسم نمودار می‌توان دریافت که این توزیع دو جمله‌ای به صورت یک منحنی گاوسی است. در مورد شکل نمودار باید گفت که منحنی(های) به دست آمده پوش توزیع نقاط است. زیرا همان‌طور که پیش‌تر گفته شد، اگر  $t$  زوج باشد، احتمال حضور ولگشت در مکان‌های  $n$  فرد، صفر خواهد شد.



شکل ۲.۱: توزیع احتمال برای ولگشت تصادفی کلاسیکی یک بعدی به ازای  $t = 72, t = 180, t = 450$

در حد  $t$  های بزرگ و  $n$  های کوچک توزیع احتمال رابطه (۱.۱) به یک توزیع نرمال منجر می شود. که به شکل زیر می توان اثبات کرد.

برای این اثبات از تقریب استرلینگ استفاده می کنیم.

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (2.1)$$

$$Ln n! \simeq n Ln(n) - n + \frac{1}{2} Ln(2\pi n)$$

با استفاده از رابطه (۱۲.۱) رابطه (۱۱.۱) را به صورت زیر بسط می دهیم.

$$Ln p(t, n) = -tLn 2 + tLn t - t + \frac{1}{2} Ln(2\pi t) - \frac{1}{2} (t+n) Ln \frac{1}{2} (t+n) \quad (3.1)$$

$$+ \frac{1}{2} (t+n) - \frac{1}{2} Ln(\pi(t+n)) - \frac{1}{2} (t-n) Ln \frac{1}{2} (t-n)$$

$$+ \frac{1}{2} (t-n) - \frac{1}{2} Ln(\pi(t-n)) = -tLn 2 + tLnt - t + \frac{1}{2} Ln(2\pi t)$$

$$- \frac{1}{2} (t+n) [-Ln 2 + Ln(t+n)] + \frac{1}{2} t + \frac{n}{2} - \frac{1}{2} Ln(\pi(t+n))$$

$$- \frac{1}{2} (t-n) [-Ln 2 + Ln(t-n)] + \frac{t}{2} - \frac{n}{2} - \frac{1}{2} Ln\pi(t-n)$$

$$= -tLn 2 + tLnt + \frac{1}{2} Ln(2\pi t) + \frac{t}{2} Ln 2 + \frac{n}{2} Ln 2 - \frac{1}{2} (t+n) Ln(t+n)$$

$$- \frac{1}{2} Ln\pi(t+n) + \frac{t}{2} Ln 2 - \frac{n}{2} Ln 2 - \frac{1}{2} (t-n) Ln(t-n) - \frac{1}{2} Ln\pi(t-n)$$

$$= tLnt + \frac{1}{2} Ln(2\pi t) - \frac{1}{2} (t+n) Ln(t+n) - \frac{1}{2} (t-n) Ln(t-n)$$

$$- \frac{1}{2} Ln\pi(t+n) - \frac{1}{2} Ln\pi(t-n)$$

از تقریب تیلور  $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2}$  استفاده می‌کنیم.

رابطه (۳.۱) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 & \text{(۴.۱)} \\
 \text{Ln } p(t, n) &= t \text{Ln} t + \frac{1}{2} \text{Ln}(\sqrt{\pi t}) - \frac{1}{2} (t+n) \text{Ln} t \left(1 + \frac{n}{t}\right) - \frac{1}{2} (t-n) \text{Ln} \left(1 + \frac{n}{t}\right) \\
 & - \frac{1}{2} \text{Ln} \pi (t+n) - \frac{1}{2} \text{Ln} \pi (t-n) = t \text{Ln} t + \frac{1}{2} \text{Ln}(\sqrt{\pi t}) - \frac{1}{2} (t+n) \text{Ln} t \\
 & - \frac{1}{2} (t+n) \frac{n}{t} + \frac{1}{2} (t+n) \frac{1}{2} \left(\frac{n}{t}\right)^2 - \frac{1}{2} (t-n) \text{Ln} t + \frac{1}{2} (t-n) \frac{n}{t} \\
 & + \frac{1}{2} (t-n) \frac{1}{2} \left(\frac{n}{t}\right)^2 - \frac{1}{2} \text{Ln} \pi t \left(1 + \frac{n}{t}\right) - \frac{1}{2} \text{Ln} \pi t \left(1 + \frac{n}{t}\right) \\
 & = t \text{Ln} t + \frac{1}{2} \text{Ln}(\sqrt{\pi t}) - \frac{t}{2} \text{Ln} t - \frac{n}{2} \text{Ln} t - \frac{t}{2} \frac{n}{t} - \frac{n}{2} \frac{n}{t} + \frac{t}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{n}{t}\right)^2 \\
 & + \frac{n}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{n}{t}\right)^2 - \frac{t}{2} \text{Ln} t + \frac{n}{2} \ln t + \frac{t}{2} \frac{n}{t} - \frac{n}{2} \frac{n}{t} + \frac{t}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{n}{t}\right)^2 - \frac{n}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{n}{t}\right)^2 \\
 & - \frac{1}{2} \text{Ln} \pi t \left(\frac{n}{t} - \frac{1}{2} \left(\frac{n}{t}\right)^2\right) - \frac{1}{2} \pi t \left(-\frac{n}{t} - \frac{1}{2} \left(\frac{n}{t}\right)^2\right) = \frac{1}{2} \text{Ln}(\sqrt{\pi t}) - \frac{n^2}{t} \\
 & + \frac{t}{2} \left(\frac{n}{t}\right)^2 + \frac{t}{2} \left(\frac{n}{t}\right)^2 - \frac{1}{2} \text{Ln} \pi t - \frac{1}{2} \text{Ln} \left(1 + \frac{n}{t}\right) - \frac{1}{2} \text{Ln} \pi t - \frac{1}{2} \text{Ln} \left(1 - \frac{n}{t}\right) \\
 & = \frac{1}{2} \text{Ln}(\sqrt{\pi t}) - \frac{n^2}{t} + \frac{1}{2} \frac{n^2}{t} - \frac{1}{2} \text{Ln} \pi t - \frac{1}{2} \left(\frac{n}{t} - \frac{1}{2} \left(\frac{n^2}{t^2}\right)\right) - \frac{1}{2} \text{Ln} \pi t \\
 & - \frac{1}{2} \left(-\frac{n}{t} - \frac{1}{2} \left(\frac{n^2}{t^2}\right)\right) = \frac{1}{2} \text{Ln}(\sqrt{\pi t}) - \frac{n^2}{2t} - \text{Ln} \pi t + \frac{1}{4} \frac{n^2}{t^2} + \frac{1}{4} \frac{n^2}{t^2} \\
 & = \text{Ln} \frac{\sqrt{\pi t}}{\pi t} - \frac{n^2}{2t} = \text{Ln} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi t}} - \frac{n^2}{2t} = \text{Ln}(p(n, t)) = \text{Ln} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi t}} - \frac{n^2}{2t}
 \end{aligned}$$

که در آخر به رابطه زیر می‌رسیم:

$$p(n, t) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{n^2}{2t}} \quad (5.1)$$

معادله بدست آمده، بسیار شبیه توزیع گاوسی است.

در ولگشت کلاسیکی انحراف استاندارد<sup>۱</sup> متناسب با  $\sqrt{N}$  است، که  $N$  تعداد گام‌ها است [۱۳]. برای اثبات این ادعا می‌توان به صورت زیر عمل کرد. اگر ولگشت در هر گام به اندازه  $L$  جابه‌جا شود و با احتمال  $p$  به سمت راست حرکت کند و با احتمال  $1-p$  به سمت چپ حرکت کند، مقدار چشمداشتی  $\langle x \rangle$  و  $\langle x^2 \rangle$  به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$\langle x \rangle = p(+L) + (1-p)(-L) = pL - L + pL = (2p - 1)L \quad (6.1)$$

$$\langle x^2 \rangle = p(+L)^2 + (1-p)(-L)^2$$

بعد از  $N$  گام مقدار چشمداشتی  $\langle x \rangle$  و  $\langle x^2 \rangle$  به صورت زیر می‌باشند:

$$\langle x \rangle = Np(+L) + N(1-p)(-L) = NpL - NL + NpL = (2p - 1)NL \quad (7.1)$$

$$\langle x^2 \rangle = Np(+L)^2 + N(1-p)(-L)^2 = NpL^2 + NL^2 - NpL^2 = NL^2$$

برای ولگشتی که با احتمال یکسان  $1/2$  به سمت چپ یا راست حرکت می‌کند  $\langle x \rangle = 0$  است، بنابراین می‌توان واریانس و انحراف معیار را به شکل زیر حساب کرد.

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = NL^2 \quad (8.1)$$

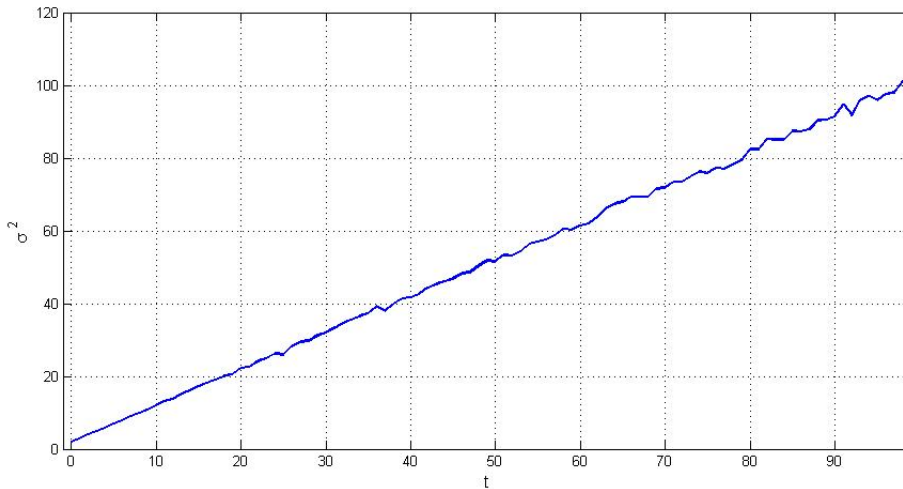
$$\sigma = \sqrt{NL}$$

بنابراین در ولگشت‌های کلاسیکی انحراف معیار متناسب با  $\sqrt{N}$  است.

## ۲.۱.۱ نقطه جذب کلاسیکی

فرض کنید در مسیر ذره‌ای که در حال ولگشت است، دیواره‌ای جذبی وجود دارد که ذره را متوقف کرده و اجازه ادامه ولگشت به او نمی‌دهد. حالتی را در نظر می‌گیریم که دیواره جذب در مکان صفر و

<sup>۱</sup>Standard deviation



شکل ۳.۱: واریانس ولگشت تصادفی کلاسیکی در بازه ۱۰۰ گام. (تعداد تکرار: ۱۰۰۰۰ بار)

مکان ذره در نقطه یک از محور مختصات باشد. برای سادگی، سکه را متقارن با احتمالات برابر در نظر می‌گیریم.

احتمال رفتن به چپ و راست با هم برابر و مساوی  $1/2$  است. فرض کنید  $p$  احتمال این است که ذره به دیواره رسیده و ولگشت متوقف شود. ذره از نقطه یک شروع به حرکت می‌کند. به احتمال  $1/2$  به نقطه صفر رسیده و متوقف می‌شود. در غیر این صورت، با احتمال  $1/2$  به نقطه دو می‌رسد. احتمال این که ذره از نقطه دو به نقطه صفر برود را با  $p_{20}$  نشان می‌دهیم. این احتمال برابر با حاصل ضرب، احتمالات رفتن ذره از نقطه دو به نقطه یک  $p_{21}$  و سپس به نقطه صفر  $p_{10}$  است. چون ولگشت به صورت همگن انجام می‌شود، هر دو احتمال  $p_{21}$  و  $p_{10}$  برابر با  $p$  خواهد بود. پس

$$p = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}p_{21}p_{10} = \frac{1}{4}(1 + p^2) \quad (9.1)$$

با حل معادله درجه دوم رابطه بالا داریم،  $p = 1$  است. یعنی ولگشت هر چقدر از مرز جاذب دور شده باشد دوباره به مرز جاذب برمی‌گردد [۱۲]، البته این نتیجه برای حالت یک بعدی و دو بعدی صادق است. اما در حالت سه بعدی و بالاتر ولگشت با یک احتمال مشخص می‌تواند از مرز جاذب فرار کند [۱۵].

## ۲.۱ ولگشت‌های کوانتومی زمان-گسسته

حالت یک سیستم کوانتومی با یک بردار در فضای هیلبرت معرفی می‌شود و اگر سیستم با محیط اطرافش برهم‌کنش نداشته باشد یا به عبارتی منزوی باشد، تحول سیستم با یک عملگر یکانی رخ می‌دهد.

اگر سیستم بیش از یک قسمت داشته باشد، فضای هیلبرتش معادل با ضرب تانسوری فضای هیلبرت قسمت‌ها می‌باشد. چون تحول سیستم کوانتومی منزوی، یکانی است پس هیچ بخش تصادفی وجود ندارد در نتیجه نام ولگشت کوانتومی تصادفی شاید خیلی مناسب نباشد. اما لازم است به این نکته اشاره کرد که سیستمی کوانتومی که کاملاً منزوی نباشد ممکن است تصادفی باشد. در این نوشتار فقط به بررسی ولگشت کوانتومی زمان-گسسته می‌پردازیم. در ولگشت کوانتومی، مکان ولگشت با بردار  $|n\rangle$  در فضای هیلبرت مکان  $H_p$  نشان داده می‌شود؛ پایه‌های محاسباتی این فضا به صورت  $\{|n\rangle | n \in Z\}$  هستند. همچنین جهت حرکت در فضای مکان توسط فضای دیگری تعیین می‌شود که به آن فضای سکه  $H_c$  می‌گویند. مثلاً الکترونی که روی یک شبکه یک بعدی در حال حرکت است. الکترون یک ذره با اسپین  $\frac{1}{2}$  است یعنی  $\{|s, m_s\rangle | s = \frac{1}{2}, m_s = \pm \frac{1}{2}\}$ . بنابراین می‌توان از این فضای دو بعدی اسپین الکترون به عنوان فضای سکه استفاده کرد و قرار داد کرد:  $|R\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$  و  $|L\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$ . یعنی اگر  $m_s = +\frac{1}{2}$  باشد، الکترون یک گام به سوی راست و اگر  $m_s = -\frac{1}{2}$  باشد، الکترون یک گام به سمت چپ جابه‌جا شود. بنابراین فضای هیلبرت الکترون شامل یک فضای مکان  $n$  بعدی و یک فضای اسپین دو بعدی است. ولگشت کوانتومی یک بعدی نیز فضای هیلبرت مشابهی دارد که از دو قسمت مکانی و سکه تشکیل شده است:

$$H = H_c \otimes H_p \quad (10.1)$$

در ولگشت کوانتومی یک عملگر یکانی [۱۳] (عملگر سکه  $\hat{C}$ ) بر فضای دو بعدی سکه عمل می‌کند و بر اساس نتیجه آن ولگشت در یکی از دو سو پیش می‌رود. این تغییر در مکان ولگشت به وسیله عملگر جابه‌جایی شرطی اعمال می‌شود. عملگر جابه‌جایی شرطی از دو قسمت تشکیل شده است که یکی بر فضای سکه اثر می‌کند و دیگری بر فضای مکان. در این مثال خاص می‌توان اثر عملگر جابه‌جایی شرطی را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$S |R\rangle |n\rangle = |R\rangle |n+1\rangle \quad (11.1)$$

$$S |L\rangle |n\rangle = |L\rangle |n-1\rangle \quad (12.1)$$

حال با دانستن اساس محاسباتی اثر  $S$  روی  $H$ ، می‌توانیم توصیفی کامل از این عملگر خطی داشته باشیم، بنابراین عملگر جابه‌جایی  $S$  را این‌گونه می‌توانیم بازنویسی کنیم:

$$S = |R\rangle \langle R| \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n+1\rangle \langle n| + |L\rangle \langle L| \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n-1\rangle \langle n|$$



که اثر این عملگر روی  $|R\rangle$  و  $|L\rangle$  همان اثری است که در رابطه (۱۱.۱) و (۱۲.۱) انتظار داریم. و در نتیجه  $S$  را به گونه ای که در بالا نشان دادیم خواهیم داشت. در ولگشت کوانتومی ابتدا باید عملگر سکه را روی حالت اولیه سکه اعمال کنیم، این مشابه تاس اندازی سکه در ولگشت تصادفی کلاسیکی است. عملگر سکه دوران حالت سکه را ایجاد می‌کند. ممکن است سکه اولیه با یک حالت توصیف شده باشد اما نتیجه، برهم‌نهی از حالات باشد. هر جمله در این برهم‌نهی یک انتقال را در یکی از این جهات تولید خواهد کرد. برای مثال می‌خواهیم یک سکه دلخواه را برای تولید یک ولگشت متقارن در اطراف مبدا انتخاب کنیم. حالت اولیه ذره جایگزیده را در مبدا  $|n = 0\rangle$  و حالت اولیه سکه را با اسپین بالا  $|R\rangle \equiv |0\rangle$  در نظر می‌گیریم، در بعضی متون به جای  $|R\rangle$  از  $|0\rangle$  و به جای  $|L\rangle$  از  $|1\rangle$  استفاده می‌شود که این تعریف می‌تواند برخی از روابط را ساده‌تر کند. از این پس در این پایان‌نامه از  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  به جای  $|R\rangle$  و  $|L\rangle$  استفاده می‌کنیم. بنابراین  $|\psi(0)\rangle = |0\rangle |n = 0\rangle$  حالت ولگشت در زمان اولیه است و  $|\psi(t)\rangle$  حالت ولگشت در زمان  $t$  را نشان می‌دهد. عملگر سکه‌ای که معمولاً برای ولگشت‌های کوانتومی یک بعدی استفاده می‌شود عملگر هادامارد است.

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

اولین گام شامل اعمال عملگر هادامارد روی حالت سکه می‌شود.  $H \otimes I$  را اعمال می‌کنیم که  $I$  عملگر یکانی فضای هیلبرت می‌باشد. در ادامه عملگر جابجایی  $S$  را اعمال می‌کنیم.

$$|0\rangle \otimes |0\rangle \xrightarrow{H \otimes I} \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle \xrightarrow{S} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |-1\rangle) \quad (13.1)$$

در نتیجه برهم‌نهی دو ذره در مکان  $n = 1$  و  $n = -1$  را داریم. برهم‌نهی مکان، نتیجه برهم‌نهی تولید شده به وسیله عملگر سکه می‌باشد. مشاهده می‌کنیم که عملگر سکه هادامارد وقتی که روی  $|0\rangle$  اعمال می‌شود جهت‌دار نیست. از این رو دامنه قسمت راست با دامنه قسمت چپ معادل است. اگر  $H$  را روی  $|1\rangle$  اعمال کنیم یک علامت مختلف بین دامنه قسمت چپ و راست ایجاد می‌شود. وقتی که احتمال پیدایش ذره در مکان  $n$  را محاسبه می‌کنیم علامت هیچ نقشی را بازی نمی‌کند بنابراین می‌توانیم بگوییم عملگر هادامارد  $H$  یک سکه بدون سو و جهت می‌باشد.

در ولگشت کوانتومی اگر بخواهیم مکان ذره را بعد از گام اول به دست آوریم باید روی مکان ولگشت اندازه‌گیری انجام دهیم. با عمل اندازه‌گیری، ۵۰ درصد شانس پیدا شدن ذره در مکان  $n = 1$  و ۵۰ درصد شانس پیدا کردنش را در  $n = -1$  داریم. اگر نتایج را با اولین گام ولگشت کلاسیکی تصادفی مقایسه کنیم این نتیجه یکسان است. اگر همان روش را به درستی اعمال کنیم (مرحله ۱) و بعد عملگر جابه‌جایی  $S$  را اعمال کنیم (مرحله ۲) و اندازه‌گیری کنیم (مرحله ۳) دوباره ولگشت کلاسیکی تصادفی را به دست می‌آوریم. هدف ما این است که خصوصیات کوانتومی را به کار گیریم تا به نتایج جدیدی برسیم که با مفهوم کلاسیکی نمی‌توان به آن‌ها رسید. وقتی که مکان ذره را بعد از اولین گام اندازه‌گیری می‌کنیم، هم‌بستگی بین مکان‌های مختلف را که یکی از ویژگی‌های سیستم‌های کوانتومی است، از بین می‌بریم. اگر اندازه‌گیری انجام ندهیم و عملگر سکه را اعمال کنیم و عملگر جابه‌جایی را نیز به درستی اعمال کنیم،

این هم‌بستگی کوانتومی بین مکان‌های مختلف می‌تواند به تداخل سازنده یا ویرانگر منجر شود و همین اثر است که رفتاری متفاوت از مفهوم کلاسیکی تولید می‌کند و این خصوصیت ولگشت کوانتومی است. می‌بینیم که در ولگشت کوانتومی توزیع احتمال دیگر توزیع نرمال نیست و انحراف معیار از مرتبه  $\sqrt{t}$  نمی‌باشد.

ولگشت کوانتومی از اعمال عملگر تحول کلی زیر که عملگری یکانی نیز می‌باشد ایجاد می‌شود:

$$u = S(H \otimes I)$$

روی گام اول عملگر  $u$  را اعمال می‌کنیم، که اول عملگر سکه و بعد جابه‌جایی اعمال می‌شود. در گام بعدی عملگر  $u$  را بدون اندازه‌گیری اعمال می‌کنیم. بعد از  $t$  گام حالت ولگرد با  $|\psi(t)\rangle = u^t |\psi(0)\rangle$  داده می‌شود.

اکنون گام‌های اولیه را برای ولگشت کوانتومی محاسبه می‌کنیم و با ولگشت کلاسیکی تصادفی مقایسه می‌کنیم: معادله  $|\psi(0)\rangle = |0\rangle |n=0\rangle$  را به‌عنوان شرایط اولیه در نظر می‌گیریم، گام بعدی رابطه (۱۳.۱) می‌شود و گام دوم با فرمول  $|\psi(1)\rangle = u |\psi(0)\rangle$  نیز محاسبه می‌شود:

$$|\psi(1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle |-1\rangle + |0\rangle |1\rangle)$$

$$|\psi(2)\rangle = \frac{1}{2} (-|1\rangle |-2\rangle + |0\rangle + |1\rangle |0\rangle + |0\rangle |2\rangle)$$

$$|\psi(3)\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} (|1\rangle |-3\rangle - |0\rangle |-1\rangle + (2|0\rangle + |1\rangle) |1\rangle + |0\rangle |3\rangle)$$

این تعداد گام‌های اولیه تفاوت ولگشت کوانتومی با ولگشت کلاسیکی تصادفی را برای ما معلوم می‌کند.

جدول ۲.۱ توزیع احتمال را پس از گام پنجم (بدون اندازه‌گیری کردن) نشان می‌دهد. تابع توزیع احتمال در نقاط مرکزی متمرکز نشده است و در کناره‌ها متقارن می‌شود. در مقایسه با جدول ۱.۱ این عامل به‌وضوح نشان داده می‌شود.

علاقه‌مندیم توزیع احتمال را برای گام‌های بیشتر از ۵ بیابیم. برای این کار روش دستی ما برای محاسبه، دیگر مفید نخواهد بود. برای مثال اگر توزیع احتمال بعد از صد گام را بخواهیم، ابتدا باید  $|\psi(100)\rangle$  را محاسبه کنیم. یک روش که برای انجام این کار محاسباتی وجود دارد، استفاده از روابط بازگشتی است که در ادامه به‌دست خواهیم آورد: حالت کلی ولگشت کوانتومی می‌تواند این‌گونه نوشته شود:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_n(t) |0\rangle + B_n(t) |1\rangle) |n\rangle$$

جدول ۲۰۱: احتمال پیدا شدن ذره کوانتومی در مکان  $n$  در زمان  $t$ . با فرض این‌که ولگشت از مبدا شروع شده باشد.

۵	۴	۳	۲	۱	۰	-۱	-۲	-۳	-۴	-۵	$n / t$
					۱						۰
				$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$					۱
			$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$				۲
		$\frac{1}{8}$		$\frac{5}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$			۳
	$\frac{1}{16}$		$\frac{5}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{16}$		۴
$\frac{1}{32}$		$\frac{17}{32}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{1}{32}$	۵

که ضرایب  $A_n$  و  $B_n$  باید در شرط زیر صدق کنند ( شرط بهنجارش):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n(t)|^2 + |B_n(t)|^2 = 1$$

$|\psi(t)\rangle$  وقتی که  $H \otimes I$  و بعد عملگر  $S$  را اعمال می‌کنیم، می‌توانیم روابط بازگشتی که ضرایب  $A_n$  و  $B_n$  در آن هستند را به دست بیاوریم.

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_n(t)|\circ\rangle + B_n(t)|\uparrow\rangle) \otimes |n\rangle$$

$$s = |\circ\rangle\langle\circ| \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n+1\rangle\langle n+1| \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n-1\rangle\langle n|$$

داریم:  $|\psi(t+1)\rangle = u|\psi(t)\rangle$  با اعمال  $H \otimes I$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ A_n(t) \left( \frac{|\circ\rangle + |\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \right) + B_n(t) \left( \frac{|\circ\rangle - |\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \right) \right] \otimes |n\rangle$$

با اعمال  $S$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(t) \frac{|\circ\rangle\langle\circ|}{\sqrt{2}} \otimes |n+1\rangle\langle n| + B_n(t) \frac{|\circ\rangle\langle\circ|}{\sqrt{2}} \otimes |n+1\rangle\langle n| \\ & + A_n(t) \frac{|\uparrow\rangle\langle\uparrow|}{\sqrt{2}} \otimes |n-1\rangle\langle n| - B_n(t) \frac{|\uparrow\rangle\langle\uparrow|}{\sqrt{2}} \otimes |n-1\rangle\langle n| \end{aligned}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n(t)|\circ\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{B_n(t)|\circ\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |n+1\rangle + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n(t) - B_n(t)}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle \otimes |n-1\rangle$$

حال  $|\psi(t)\rangle$  و  $|\psi(t+1)\rangle$  را مقایسه می‌کنیم:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_n(t)|\circ\rangle + B_n(t)|\uparrow\rangle) \otimes |n\rangle$$

$$|\psi(t+1)\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n(t) + B_n(t)}{\sqrt{2}} |\circ\rangle \otimes |n+1\rangle + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n(t) - B_n(t)}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle \otimes |n-1\rangle$$

$$A_n(t+1) = \frac{A_{n-1}(t) + B_{n-1}(t)}{\sqrt{2}}$$

$$B_n(t+1) = \frac{A_{n+1}(t) - B_{n+1}(t)}{\sqrt{2}}$$

در نهایت داریم:

$$A_n(t+1) = \frac{A_{n-1}(t) + B_{n-1}(t)}{\sqrt{2}}$$

$$B_n(t+1) = \frac{A_{n+1}(t) - B_{n+1}(t)}{\sqrt{2}}$$

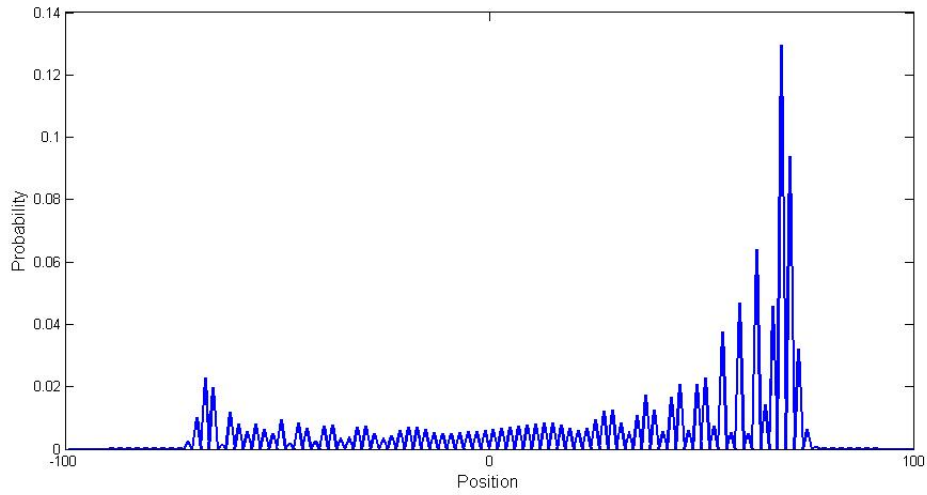
با به‌کارگیری شرایط اولیه داریم:  $A_n(\circ) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = \circ \\ \circ & \text{else} \end{cases}$  و  $B_n(\circ) = \circ$   
 با به‌کارگیری این فرمول‌ها توزیع احتمال را محاسبه می‌کنیم:

$$p(t, n) = |A_n(t)|^2 + |B_n(t)|^2$$

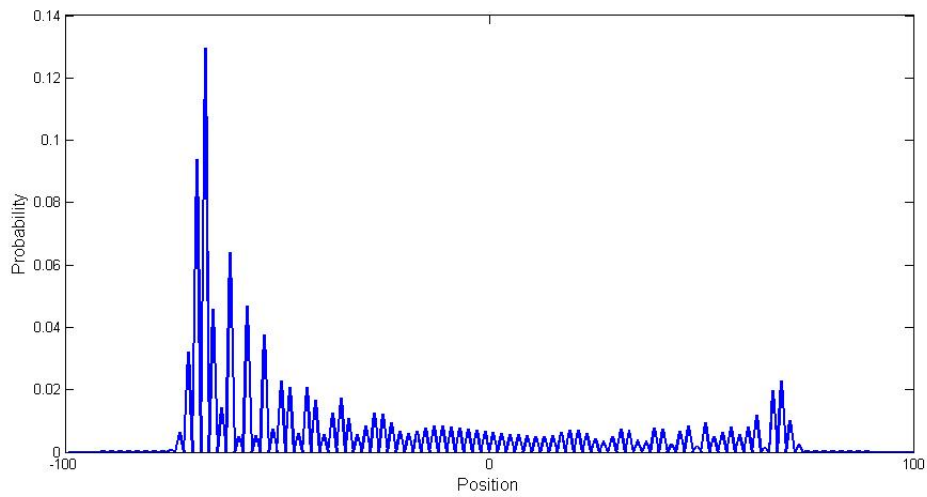
نمودار توزیع احتمال را برای ولگشت کوانتومی هادامارد بعد از  $100$  گام رسم می‌کنیم.

از مقایسه نمودارهای ولگشت کلاسیکی و ولگشت کوانتومی در می‌یابیم که در ولگشت کوانتومی نمودار توزیع احتمال، برخلاف ولگشت کلاسیکی یک نمودار نامتقارن است. از سوی دیگر بیشینه احتمال در نقاط مرکزی قرار نگرفته است. به عبارت دیگر ولگشت تمایل به دور شدن از مبدا حرکت دارد و احتمال یافتن ذره برای  $n$  های نزدیک به  $\frac{t}{\sqrt{2}}$  بیشینه است [۱۶]. این تمایل به سمت راست به دلیل استفاده از عملگر هادامارد به عنوان سکه است زیرا اثر این عملگر روی حالت  $|\circ\rangle$  و  $|\uparrow\rangle$  متفاوت است:

$$\begin{aligned} H|\circ\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\circ\rangle + |\uparrow\rangle) \\ H|\uparrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\circ\rangle - |\uparrow\rangle) \end{aligned} \tag{۱۴.۱}$$



شکل ۴.۱: توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی هادامارد پس از  $100$  گام با حالت اولیه  $|\psi\rangle = |0\rangle|0\rangle$



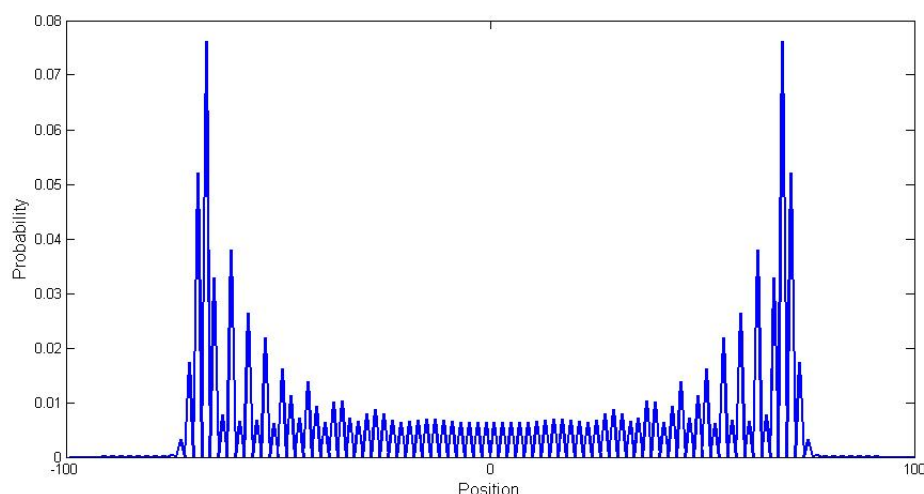
شکل ۵.۱: توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی هادامارد پس از  $100$  گام با حالت اولیه  $|\psi\rangle = |1\rangle|0\rangle$

وجود فاز منفی در حالات  $|1\rangle$  باعث آثار تداخلی شده و احتمال حضور را تغییر خواهد داد. از آنجاییکه وجود این فاز منفی به حالت اولیه بستگی دارد، تابع توزیع احتمال به حالت اولیه وابسته خواهد بود. می‌توان نشان داد حالت اولیه  $|\psi(0)\rangle = |1\rangle|0\rangle$  نمودار را به سمت چپ منتقل خواهد کرد (شکل ۵.۱).

اما می‌توان شکلی از ولگشت کوانتومی را نیز به وجود آورد که در آن توزیع احتمال به صورت متقارن باشد. برای این کار باید از تاثیر ویرانگر نتایج حاصل از اثر هادامارد بر  $|0\rangle$  و یا  $|1\rangle$  جلوگیری کرد.

یک راه استفاده از یک عملگر سکه متفاوت می‌باشد [۱۳]، مانند  $Y = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$  راه دیگر

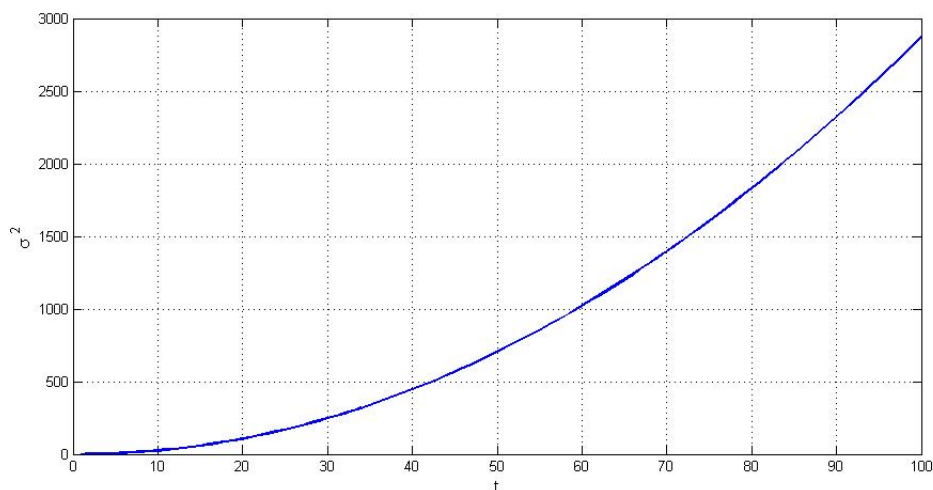
استفاده از یک حالت اولیه متفاوت است، برای مثال اگر حالت اولیه به صورت  $|\psi(0)\rangle = \frac{|0\rangle - i|1\rangle}{\sqrt{3}}$  در نظر گرفته شود، مشاهده می‌شود که توزیع احتمال به صورت متقارن در می‌آید (شکل ۶.۱).



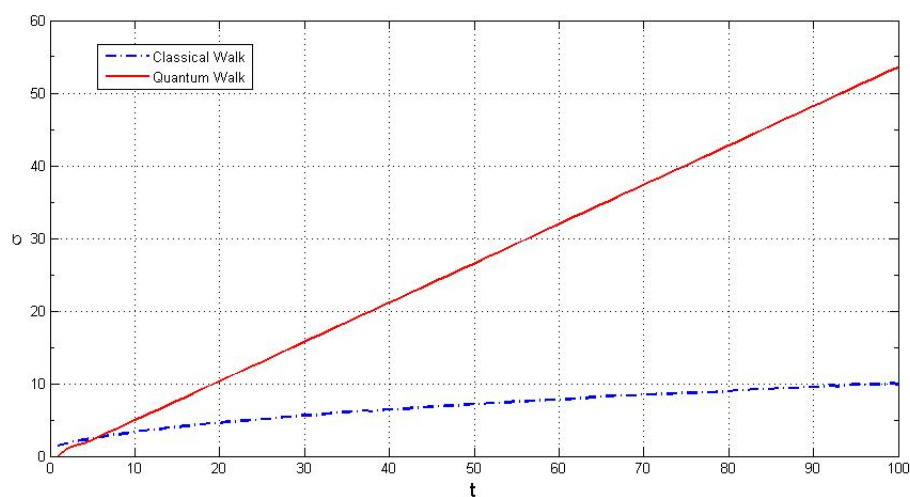
شکل ۶.۱: توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی هادامارد پس از  $10^6$  گام با حالت اولیه  $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle - i|1\rangle}{\sqrt{3}}$

عناصر عملگر هادامارد همگی حقیقی هستند، بنابراین هنگامی که این عملگر بر قسمت اسپینی اثر می‌کند هیچ تداخلی بین جملاتی که منجر به حرکت ولگشت به سمت چپ می‌شوند با جملات منجر به حرکت به سمت راست، وجود نخواهد داشت. در این حالت که توزیع احتمال متقارن است، مقدار چشمداشتی مکان ولگشت صفر خواهد بود،  $\langle n \rangle = 0$ . می‌توان نشان داد که در ولگشت کوانتومی  $\sigma = t$  که در مقایسه با ولگشت کلاسیکی ( $\sigma = \sqrt{t}$ ) به صورت توانی بیشتر است (شکل ۸.۱) [۱۳]، این سرعت انتشار توانی یکی از خواص برجسته ولگشت کوانتومی است که بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته است، زیرا امید می‌رود الگوریتم‌هایی که بر پایه ولگشت کوانتومی بنا شده‌اند به صورت توانی

از الگوریتم‌های ولگشت کلاسیکی سریع‌تر باشند. به همین دلیل محققان بر این امیدند که الگوریتم‌های کوانتومی که بر پایه ولگشت‌های کوانتومی بنا شده‌اند، از هم‌تاهای کلاسیکی خود بسیار سریع‌تر باشند.



شکل ۷.۱: واریانس ولگشت کوانتومی هادامارد در بازه ۱۰۰ گام



شکل ۸.۱: مقایسه انحراف معیار ولگشت کوانتومی (خط ممتد) در مقایسه با ولگشت کلاسیکی به ازای ۱۰۰ گام.

### ۱.۲.۱ حل تحلیلی ولگشت کوانتومی با سری فوریه

دو روش برای حل تحلیلی ولگشت‌های کوانتومی روی خط وجود دارد اولین روش بر پایه تبدیل فوریه است که به روش تبدیل فوریه معروف است و روش دوم روش شمارش مسیر نام دارد. که در این جا ما تبدیل فوریه را مورد بررسی قرار می‌دهیم. استفاده از تبدیل فوریه گسسته برای حل تحلیلی ولگشت کوانتومی روی خط اولین بار توسط نایاک معرفی شد [۱۶].

اگر فرض کنیم حالت سیستم بعد از زمان  $t$  در مکان  $n$  به شکل زیر است.

$$|\psi(n, t)\rangle = \psi_R(n, t) |0\rangle + \psi_L(n, t) |1\rangle \quad (15.1)$$

اعمال عملگر تحول روی حالت  $|\Psi\rangle_t$  را می‌توان به شکل زیر نوشت.

$$|\Psi\rangle_{t+1} = U |\Psi\rangle_t = S. (I_p \otimes H) |\Psi\rangle_t \quad (16.1)$$

و نتیجه آن به صورت زیر است.

$$(17.1)$$

$$\begin{aligned} |\psi(t+1)\rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S (\psi_R(t) |n\rangle H |0\rangle + \psi_L(t) |n\rangle H |1\rangle) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S \left( \psi_R(t) |n\rangle \left( \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \right) + \psi_L(t) |n\rangle \left( \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{S}{\sqrt{2}} (\psi_R(t) |n\rangle |0\rangle + \psi_R(t) |n\rangle |1\rangle + \psi_L(t) |n\rangle |0\rangle - \psi_L(t) |n\rangle |1\rangle) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_R(t) |n+1\rangle |0\rangle + \psi_R(t) |n-1\rangle |1\rangle + \psi_L(t) |n+1\rangle |0\rangle \\ &\quad - \psi_L(t) |n-1\rangle |1\rangle) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\psi_R(t)+\psi_L(t)}{\sqrt{2}} |n+1\rangle |0\rangle + \frac{\psi_R(t)-\psi_L(t)}{\sqrt{2}} |n-1\rangle |1\rangle \right) \end{aligned}$$

بنابراین دامنه احتمال حضور ولگشت در مکان  $n$  در گام  $t+1$  به صورت زیر، به دامنه احتمال‌های مکان‌های قبل و بعد  $n$  بستگی دارد.



$$\Psi_R(n, t+1) = \frac{\Psi_R(n-1, t) + \Psi_L(n-1, t)}{\sqrt{r}} \quad (18.1)$$

$$\Psi_L(n, t+1) = \frac{\Psi_R(n+1, t) - \Psi_L(n+1, t)}{\sqrt{r}}$$

با استفاده از این روابط بازگشتی می‌توان احتمال حضور را به دست آورد، اما شکل تابع توزیع احتمال را نشان نمی‌دهد. می‌توان با استفاده از روابط تبدیل فوریه روابطی را برای تابع توزیع احتمال به دست آورد. برای این کار رابطه (۱۷.۱) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$(19.1)$$

$$\begin{aligned} \Psi(n, t+1) &= \frac{1}{\sqrt{r}} \begin{pmatrix} \Psi_R(n-1, t) + \Psi_L(n-1, t) \\ \Psi_R(n+1, t) - \Psi_L(n+1, t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{r}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_R(n-1, t) \\ \Psi_L(n-1, t) \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{r}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_R(n+1, t) \\ \Psi_L(n+1, t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{r}} & \frac{1}{\sqrt{r}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Psi(n-1, t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{r}} & -\frac{1}{\sqrt{r}} \end{pmatrix} \Psi(n+1, t) \end{aligned}$$

یا

$$|\Psi\rangle_{t+1} = M_+ \Psi(n-1, t) + M_- \Psi(n+1, t) \quad (20.1)$$

که در آن  $M_+$  و  $M_-$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} M_+ &= |R\rangle \langle R| H \\ M_- &= |L\rangle \langle L| H \end{aligned} \quad (21.1)$$

## ۲.۲.۱ تبدیل فوریه گسسته

در این تبدیل تابع گسسته‌ای مانند  $F(n)$  که  $n \in \mathbb{Z}$  به تابع پیوسته متناوبی مانند  $\tilde{F}(k)$  تبدیل می‌شود، فرض کنید  $F: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  تابعی از اعداد صحیح به اعداد مختلط است در این صورت تبدیل گسسته آن  $F: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  است [۱۲].

$$\tilde{F}(k) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F(n) e^{-ink} \quad (22.1)$$

و عکس این تبدیل به صورت زیر خواهد بود.

$$F(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{\sqrt{\pi}} \tilde{F}(k) e^{ink} \quad (23.1)$$

با استفاده از تبدیل فوریه گسسته داریم.

$$\tilde{\Psi}(t, k) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t, n) e^{-ink} \quad (24.1)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(t+1, k) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} [M_+ \Psi(t, n-1) + M_- \Psi(t, n+1)] e^{ink} \\ &= M_+ e^{-ik} \sum_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t, n-1) e^{-i(n-1)k} + M_- e^{ik} \sum_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t, n+1) e^{-i(n+1)k} \\ &= (M_+ e^{-ik} + M_- e^{+ik}) \tilde{\Psi}(t, k) = M_K \tilde{\Psi}(t, k) \end{aligned}$$

که در آن  $M_K$  به صورت زیر است:

$$M_K = M_+ e^{-ik} + M_- e^{ik} \quad (25.1)$$

بنابراین تحول سیستم در فضای  $n$  را می‌توان با اعمال عملگر  $M_k$  در فضای  $k$  نوشت. برای اعمال  $M_k$  روی سیستم بهتر است شکل قطری آن را داشته باشیم، برای قطری کردن ابتدا ویژه مقادیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{vmatrix} \frac{e^{-ik}}{\sqrt{\lambda}} - \lambda & \frac{e^{-ik}}{\sqrt{\lambda}} \\ \frac{e^{ik}}{\sqrt{\lambda}} & -\left(\frac{e^{ik}}{\sqrt{\lambda}} + \lambda\right) \end{vmatrix} = 0 \quad (26.1)$$

و معادله مشخصه آن به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}
 & - \left( \frac{e^{-ik}}{\sqrt{2}} - \lambda \right) \left( \frac{e^{ik}}{\sqrt{2}} + \lambda \right) - \frac{1}{2} = 0 \\
 \Rightarrow & - \left( \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} (e^{ik} - e^{-ik}) - \lambda^2 \right) - \frac{1}{2} = 0 \\
 & \Rightarrow \lambda^2 + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} (e^{ik} - e^{-ik}) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \\
 & \Rightarrow \lambda^2 + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} (2i \sin k) - 1 = 0
 \end{aligned}
 \tag{۲۷.۱}$$

ویژه مقادیر آن برابر است [۱۶] با:

$$\begin{aligned}
 \lambda_k^0 &= e^{-iw_k} \\
 \lambda_k^1 &= e^{i(\pi+w_k)}
 \end{aligned}
 \tag{۲۸.۱}$$

که

$$\text{Sin}(w_k) = \frac{\text{Sin}(k)}{\sqrt{2}} \quad w_k \in \left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]
 \tag{۲۹.۱}$$

برای به دست آوردن ویژه حالات به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{-ik} & e^{-ik} \\ e^{ik} & -e^{ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{-iw_k} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow & (x + y) e^{-ik} = \sqrt{2} x e^{-iw_k} \\
 \Rightarrow & y = x (\sqrt{2} e^{-i(w_k-k)} - 1)
 \end{aligned}
 \tag{۳۰.۱}$$

فرض می‌کنیم که  $x = 1$  پس  $y = (\sqrt{2} e^{-i(w_k-k)} - 1)$  است. ویژه بردار مربوط به این ویژه مقدار به صورت زیر است.

$$|\Phi_0\rangle = \frac{1}{N_0} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} e^{-i(w_k-k)} - 1 \end{pmatrix}
 \tag{۳۱.۱}$$

که  $N_0$  ضریب نرمالیزه است، که برابر است با

$$N_0 = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos^2 k) - 2 \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}}} \quad (32.1)$$

پس ویژه بردار متناظر با ویژه مقدار  $\lambda_k^0 = e^{-iw_k}$  به صورت زیر است.

$$|\Phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2[(1 + \cos^2 k) + \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}]}} \begin{pmatrix} e^{-ik} \\ \sqrt{2} e^{-iw_k} - e^{-ik} \end{pmatrix} \quad (33.1)$$

ویژه بردار دوم نیز با روشی تقریباً مشابه به دست می آید:

$$|\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2[(1 + \cos^2 k) - \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}]}} \begin{pmatrix} e^{-ik} \\ -\sqrt{2} e^{iw_k} - e^{-ik} \end{pmatrix} \quad (34.1)$$

می توان  $M_k$  را بر حسب ویژه بردارها و ویژه مقادیر بسط داد.

$$M_k = (\lambda_k^0) |\Phi_k^0\rangle \langle \Phi_k^0| + (\lambda_k^1) |\Phi_k^1\rangle \langle \Phi_k^1| \quad (35.1)$$

برای به دست آوردن حالت ولگشت کوانتومی بعد از  $t$  گام باید عملگر  $M_k$  را  $t$  بار اثر دهیم.

$$\tilde{\Psi}(k, t) = M_K^t \tilde{\Psi}(k, 0) = \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_R(k, t) \\ \tilde{\Psi}_L(k, t) \end{pmatrix} \quad (36.1)$$

که ماتریس  $M_k^t$  به صورت زیر است.

$$M_K^t = (\lambda_k^0)^t |\Phi_k^0\rangle \langle \Phi_k^0| + (\lambda_k^1)^t |\Phi_k^1\rangle \langle \Phi_k^1| \quad (37.1)$$

با فرض حالت اولیه  $|\Psi\rangle_{initial} = |0\rangle \otimes |R\rangle$

$$\tilde{\Psi}_L(t, k) = \frac{e^{-ik}}{2\sqrt{1 + \cos^2 k}} (e^{iw_k t} - (-1)^t e^{-iw_k t}) \quad (38.1)$$

$$\tilde{\Psi}_R(t, k) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{iw_k t} + \frac{(-1)^t}{2} \left( 1 - \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{-iw_k t}$$

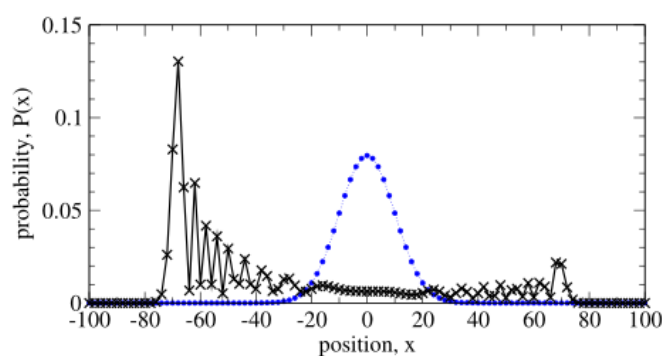
که دامنه احتمال در فضای  $k$  هستند. برای به دست آوردن دامنه در فضای مکان  $n$  از عکس تبدیل فوریه (۲۴.۱) استفاده می‌کنیم، بنابراین

$$\Psi_L(t, n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-ie^{ik}}{\sqrt{1+\cos^2 k}} (e^{-i(w_k t - kn)}) dk \quad (39.1)$$

$$\Psi_R(t, n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \left( 1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1+\cos^2 k}} \right) (e^{-i(w_k t - kn)}) dk$$

احتمال یافتن ولگشت کوانتومی از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$P(n, t) = |\Psi_L(n, t)|^2 + |\Psi_R(n, t)|^2 \quad (40.1)$$



شکل ۹.۱: مقایسه توزیع احتمال کلاسیکی و کوانتومی [۱۷]

### ۳.۱ ولگشت کوانتومی با چندین سکه

در این بخش یک روش را برای کلاسیکی کردن رفتار ولگشت کوانتومی روی خط، بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که با استفاده از چندین سکه کوانتومی و در نتیجه کم شدن اثرات تداخل بین مسیرها برای حرکت ولگشت، این کار امکان‌پذیر می‌باشد. جواب‌ها را برای سیستم تک سکه‌ای به دست می‌آوریم و این جواب‌ها را باشبیه‌سازی عددی مقایسه می‌کنیم. دو راه بدیهی برای رسیدن به نتایج کلاسیکی وجود دارد: یکی این است که سکه کوانتومی در هر گام اندازه گرفته شود و راه دیگر اینکه، در هر گام یک سکه جدید به کار برده شود.

#### ۱.۳.۱ ولگشت کوانتومی تک سکه

در این قسمت می‌خواهیم دامنه‌های توزیع احتمال را برای سیستم تک سکه به دست بیاوریم و محاسبات آن را انجام دهیم. برای این کار دو رهیافت وجود دارد: یکی تحلیل فوریه که رفتار درونی سیستم را به ما می‌دهد که در آن‌ها به حل‌هایی برای تابع موج برحسب بعضی انتگرال‌های نسبتاً بدرفتار می‌رسیم که حل دقیقی برای آن‌ها شناخته نشده است و معمولاً در حد  $t \rightarrow \infty$  تقریب زده می‌شوند و روش دوم، روش تحلیل ترکیبی<sup>۳</sup> است. برای زمان‌های طولانی روش‌های تقریبی (تحلیل فوریه) مناسب‌تر است و برای تعداد سکه‌های زیاد، رهیافت ترکیبات مناسب‌تر می‌باشد. روش تحلیل فوریه را در بخش قبلی بررسی کردیم و در این جا به مطالعه‌ی تحلیل‌های ترکیبی خواهیم پرداخت.

#### ۲.۳.۱ روش تحلیل‌های ترکیبی

با استفاده از روابط جایگشتی، برای ولگشت تک سکه می‌توانیم تحلیل‌هایی کاملاً متفاوت نسبت به استدلال فوریه انجام دهیم (مشابه با کارهای انجام شده در مراجع [۱۸] و [۱۹]). فرض کنیم با  $x = 0$  و حالت سکه‌ی  $|R\rangle$  شروع کنیم. می‌بینیم که حالت ولگشت بعد از اولین چرخش سکه چگونه تغییر می‌کند:

$$|\Psi_0\rangle = |0\rangle |R\rangle,$$

$$|\Psi(1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle |R\rangle + |-1\rangle |L\rangle),$$

$$|\Psi(2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^2}} (|2\rangle |R\rangle + |0\rangle |L\rangle + |0\rangle |R\rangle - |-2\rangle |L\rangle) \quad (4.1.1)$$

در زمان  $t$ ، جمله  $2^t$  خواهیم داشت که دامنه‌ی هر کدام  $\pm \sqrt{\frac{1}{2^t}}$  می‌باشد. هر کدام از این جملات متناظر با یک مسیر ممکن برای ولگشت کلاسیکی تصادفی است. برای محاسبه دامنه برای مکان خاص  $x$  و

<sup>۳</sup>Combinatorial Analysis

سکه نشان داده شده  $|R\rangle$  یا  $|L\rangle$ ، باید همه دامنه‌ها را برای تمام مسیرهایی که به مکان  $x$  و سکه نمایش داده شده ختم شده‌اند را با هم جمع کنیم. سکه‌ای که در زمان  $t$  به مکان  $x$  می‌رسد، باید در مجموع با تعداد گام  $N_L = \frac{t-x}{\frac{1}{4}}$  به چپ و با تعداد گام  $N_R = \frac{t+x}{\frac{1}{4}}$  به راست حرکت کند. برای یک جمله متناظر با مسیر کلاسیکی داده شده به فازی که فقط به تعداد  $N_L$  و  $N_R$  و تعداد دسته‌های چرخش‌های  $L$  متوالی وابسته است می‌رسیم.

هر مسیری فاکتور فازی دارد که مقدار  $\pm 1$  را می‌دهد. هر دو گام چپ متوالی یک فاکتور فاز  $-1$  می‌دهد و هر سه گام چپ متوالی یک فاکتور فاز  $+1$  را می‌دهد. پس می‌توان این‌گونه بیان کرد که هر دسته  $m$  تایی گام‌های چپ به صورت  $(-1)^{m-1}$  در فاز شرکت می‌کنند. از این گفته‌ها می‌توان نتیجه گرفت که تک گام‌های چپ در فاز مشارکت نمی‌کنند چون همان‌طور که می‌بینید:

$$(-1)^{m-1} = (-1)^{1-1} = (-1)^0 = 1$$

گام چپ را با  $L$  نمایش می‌دهیم و تعداد دسته‌های  $L$  را با  $C$  نشان خواهیم داد. هر دسته باید حداقل شامل یک  $L$  باشد و رفتن یک  $L$  از دسته‌ای به دسته دیگر فاز هر کدام از دو دسته را به  $-1$  تغییر می‌دهد اما در فاز کل مسیر تاثیری ندارد. تنها تعداد دسته‌های  $L$  و تعداد کل  $L$ ها برای ما دارای اهمیت می‌باشد. اگر تعداد دسته‌های چپ  $C$  و تعداد کل  $L$ ها  $N_L$  باشد آن‌گاه سلسله‌ای به شکل زیر داریم (سلسله‌ای از گام‌ها را با  $S$  نشان می‌دهیم):

$$S : \underbrace{L \ L \ L \ L \dots L}_{C-1 \text{ دسته‌های تک گام چپ}} \quad \underbrace{LLLLLLLLLL \dots L}_{N_L - (C-1) \text{ دسته‌ای متوالی از گام‌های چپ با تعداد } (C-1)}$$

فاز برای این مسیر به این صورت است:

$$\varphi(S) = (-1)^{N_L - (C-1) - 1} = (-1)^{N_L - C}$$

بنابراین وقتی که  $N_L - C$  عددی فرد باشد فاز تمام مسیر  $-1$  می‌شود. بین هر دسته  $L$  باید حداقل یک گام  $R$  وجود داشته باشد. این گروه  $R$ ها با  $P$  نشان می‌دهیم.

هر سلسله‌ای از گام‌ها شامل  $P$ ها و دسته‌های متوالی هست. واضح است که  $C$  (تعداد دسته‌های  $L$ ) نمی‌تواند بیشتر از تعداد  $L$ ها باشد و  $P$  هم نمی‌تواند بیشتر از  $N_R$ ها باشد. پس:  $P = C$  یا  $P = C \pm 1$ .

تقسیم کردن  $N_L$  تا  $L$  بین  $C$  دسته می‌تواند به  $\binom{N_L - 1}{C - 1}$  راه انجام شود و  $N_R$  تا  $R$  بین  $P$  قسمت

به  $\binom{N_R - 1}{P - 1}$  تا روش می‌تواند تقسیم شود.

پس تعداد کل راه‌ها می‌شود:

$$Path = \begin{pmatrix} N_L - 1 \\ C - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_R - 1 \\ P - 1 \end{pmatrix}$$

در ادامه چند حالت ممکن را باید در نظر بگیریم:

مورد ۱

$$x > 0 \rightarrow N_R > N_L$$

تعداد دسته‌های  $C$  می‌تواند از صفر باشد تا  $N_L$ ، (فقط وقتی که  $x = t$ ) و تعداد  $P$  ها نیز می‌تواند  $C$  یا  $C + 1$  یا  $C - 1$  باشد، به جز وقتی که  $C = 0, 1$  است.

مورد ۲

$$x < 0 \rightarrow N_L > N_R$$

در این مورد  $C$  می‌تواند از ۱ باشد تا  $N_R + 1$  و  $P$  می‌تواند مقادیر  $C$  و  $C + 1$  و  $C - 1$  را داشته باشد.

مورد ۳

$$x = 0 \rightarrow N_R = N_L$$

$C$  و  $P$  می‌توانند هر مقداری از ۱ تا  $N_R = N_L$  باشند.

در این جا ۴ امکان واضح را بررسی می‌کنیم:

$$P = C - 1 \rightarrow [cluster]partition[cluster]partition...[cluster]$$

$$P = C \rightarrow partition[cluster]partition...[cluster]$$

$$P = C \rightarrow [cluster]partition[cluster]...partition$$

$$P = C + 1 \rightarrow partition[cluster]partition[cluster]...partition$$

قرارداد زیر را در نظر می‌گیریم:

اگر  $a < 0$  و  $b < 0$  و  $b > a$   
آن‌گاه:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$



پس دامنه برای رسیدن به مکان  $x$  بعد از  $t$  بار سکه انداختن که به  $L$  ختم شود را به این شکل می‌نویسیم:

$$a_L(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2^t}} \left[ \sum_{C=1}^N (-1)^{N_L-C} \binom{N_L-1}{C-1} \left\{ \binom{N_R-1}{C-2} + \binom{N_R-1}{C-1} \right\} \right] \quad (42.1)$$

برای  $x \geq 0$  جمع روی  $N_L$  است و برای  $x < 0$  روی  $N_R + 1$  . به‌طور مشابه دامنه هر  $x$  در  $t$  برای حالت سکه‌ای که به  $R$  ختم می‌شود به صورت زیر می‌باشد:

$$a_R(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2^t}} \left[ \sum_{C=1}^N (-1)^{N_L-C} \binom{N_L-1}{C-1} \left\{ \binom{N_R-1}{C-1} + \binom{N_R-1}{C} \right\} \right] \quad (43.1)$$

اما فقط در صورتی که  $N_L \neq 0$  باشد، این روابط برقرار هستند. در ترکیبات از این روابط می‌توان استفاده کرد:

$$\binom{N_R-1}{C-2} + \binom{N_R-1}{C-1} = \binom{N_R}{C-1}$$

$$\binom{N_R-1}{C-1} + \binom{N_R-1}{C} = \binom{N_R}{C}$$

پس معادله (۴۲.۱) و (۴۳.۱) را به این شکل بازنویسی می‌کنیم:

$$a_L(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2^t}} \left[ \sum_{C=1}^N (-1)^{N_L-C} \binom{N_L-1}{C-1} \binom{N_R}{C-1} \right] \quad (44.1)$$

$$a_R(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2^t}} \left[ \sum_{C=1}^N (-1)^{N_L-C} \binom{N_L-1}{C-1} \binom{N_R}{C} \right] \quad (45.1)$$

برای حالتی که  $N_L = 0$  باشد دامنه همیشه  $2^{-\frac{t}{2}}$  می‌شود.

حالا اگر حالت سکه اولیه را  $|L\rangle$  انتخاب کنیم، دامنه‌ها به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$b_L(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2^t}} \left[ \sum_{C=1}^N (-1)^{N_L-C} \binom{N_L-1}{C-1} \binom{N_R}{C-1} \frac{N_R-2C+2}{N_R} \right] \quad (46.1)$$

$$b_R(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2^t}} \left[ \sum_{C=1}^N (-1)^{N_L-C} \binom{N_L-1}{C-1} \binom{N_R}{C} \frac{N_R-2C}{N_R} \right] \quad (47.1)$$

در این جا برای  $x \geq 0$  جمع روی  $N_L$  و برای  $x < 0$  جمع روی  $N_R + 1$  می‌باشد، برای  $N_L = 0$  مانند قبل جداگانه محاسبه می‌شود. جواب‌هایی که با معادلات (44.1) و (45.1) به دست می‌آیند به نظر می‌رسد از جواب‌های معادلات (39.1) در زیربخش 2.2.1 خیلی متفاوت هستند اما به طور شگفت‌آوری خروجی آن‌ها دقیقا یکسان است. علاوه بر این برای تقریب زمان طولانی مشابه، معادلات (39.1) می‌تواند از معادلات (44.1) و (45.1) به دست بیاید (مرجع [19] را ببینید).  
اگر سکه در حالت دلخواه زیر شروع شود:

$$\psi_{init} = \alpha |R\rangle + \beta |L\rangle \quad (48.1)$$

دامنه‌ها به ترتیب به این شکل خواهند بود:

$$g_L(x, t) = \alpha a_L(x, t) + \beta b_L(x, t) \quad (49.1)$$

$$g_R(x, t) = \alpha a_L(x, t) + \beta b_L(x, t) \quad (50.1)$$

### ۳.۳.۱ ولگشت‌های چند سکه‌ای

برای ولگشت به دست آمده با  $M$  سکه، تابع موج  $2^M$  جز دارد؛ برای مثال ولگشتی با دو سکه تابع موجی به شکل زیر دارد:

$$|\psi(x, t)\rangle = \begin{pmatrix} a_{RR}(x, t) \\ a_{RL}(x, t) \\ a_{LR}(x, t) \\ a_{LL}(x, t) \end{pmatrix} \quad (51.1)$$

در هر گام جهت حرکت ذره با سکه ای تعیین می‌شود که فعال است و سکه دیگر خنثی باقی می‌ماند تا دوباره یک چرخش سکه بخواهد انجام شود. در ابتدا فرض می‌کنیم که بین سکه‌ها چرخش کنیم اما

بعدا قاعده خاص تری هم می‌توانیم در نظر بگیریم.  
انتقال یکانی که از چرخش  $m$  امین سکه نتیجه می‌شود به شکل زیر است:

$$\hat{E}_m = \left( \hat{S} \otimes \hat{P}_{Rm} + \hat{S}^\dagger \otimes \hat{P}_{Lm} \right) \left( \hat{I} \otimes \hat{H}_m \right) \quad (52.1)$$

$\hat{H}_m$  تبدیل هادامارد روی  $m$  امین سکه است و  $\hat{P}_{L,Rm}$  به ترتیب به روی سکه‌ای که در حالت  $L$  یا  $R$  باشد، اثر می‌کند. اگر بین سکه‌ها چرخش کنیم و  $t$  بار سکه بیاندازیم (هر سکه  $t/M$  بار انداخته شود)، سپس حالت ولگشت به شکل زیر خواهد بود:

$$|\psi(t)\rangle = \left( \hat{E}_M \dots \hat{E}_1 \right)^{t/M} |\psi_0\rangle \quad (53.1)$$

در این بخش به‌طور عددی این سیستم را به ازای  $M$  سکه مختلف شبیه سازی کرده‌ایم. اگر  $t = M$  باشد توزیع احتمال با نتایج کلاسیکی مطابقت می‌کند. توزیع‌های چند سکه‌ای رفتارشان به شدت نوسانی است و به سرعت (به صورت خطی با  $t$ ) پراکنده می‌شوند، شبیه رفتار ولگشت تک سکه. (شکل ۱۰.۱ را ببینید) حالا می‌خواهیم ببینیم چطور می‌توانیم نتایج سیستم‌های  $M$  سکه را بفهمیم. مساله مهمی که این انتقال یکانی را برای ما تعیین می‌کند این است که همه  $\{\hat{E}_m\}$  ها با هم جابه‌جا می‌شوند:

$$\left[ \hat{E}_m, \hat{E}_n \right] = 0 \quad (54.1)$$

به دلیل این‌که اندیسی که در آن‌ها آمده ارتباطی با هم ندارند.  
پس می‌توان تساوی به این صورت داشت:

$$|\psi(Mt)\rangle = (E_M)^{t/M} \dots (E_1)^{t/M} |\psi_0\rangle \quad (55.1)$$

برای استفاده از عملگر سکه می‌توان قاعده خاصی در نظر گرفت، مثلا در این جا می‌توان به ازای  $t/M$  تعداد گام‌ها، یک سکه را استفاده کرد و به ازای  $t/M$  دیگر سکه ای دیگر را به کار برد. این روند ادامه می‌یابد تا وقتی که تمام سکه‌ها استفاده شوند.  
اگر فرض کنیم که سکه‌ها بصورت چرخشی استفاده شوند وقتی که حرکت ولگشت تمام شد  $M$  تا سکه قبلی به‌عنوان حافظه کوانتومی آخرین سکه ای که ذره با توجه به آن حرکت کرده محسوب می‌شوند.

حال می‌خواهیم حالتی را بررسی کنیم که ولگشت  $M$  بار گشت انجام می‌دهد اما فقط با یک سکه!  
برای این کار ولگشت باید به صورت زیر عمل کند:

- ۱- اولین گشت را با سکه انجام می‌دهد،
  - ۲- روی فضای سکه اندازه‌گیری انجام می‌شود و هیچ اندازه‌گیری روی مکان ولگشت انجام نمی‌گیرد،
  - ۳- حالت سکه بر اساس نتایج اندازه‌گیری مرحله ۲، به‌عنوان حالت اولیه گشت بعدی قرار می‌گیرد،
  - ۴- تمام مراحل برای گشت بعدی تکرار می‌شود.
- این فرآیند را تکرار می‌کنیم تا وقتی که  $M$  گشت داشته باشیم و در این حالت توزیع احتمال ولگشت با

وقتی که  $M$  سکه داشته باشیم و به طور چرخه‌ای روی هر سکه اندازه‌گیری انجام دهیم، یکسان می‌باشد. برای روشن‌سازی این ادعا فرض کنیم تمام سکه‌ها در حالت اولیه  $|R\rangle$  و مکان ذره در حالت اولیه  $|0\rangle$  شروع شود. سکه‌ها را به اندازه  $t/M$  هر بار چرخش می‌دهیم. ( برای راحتی‌ن جا این کسر را زوج در نظر می‌گیریم). بعد از  $t/M$  بار که هر سکه چرخش داده شد روی آن اندازه‌گیری انجام می‌دهیم و آن را در حالت  $R$  یا  $L$  پیدا می‌کنیم. پس عملگر تحول شرطی برای مکان ذره را این‌گونه تعریف می‌کنیم:

$$\hat{A}_L\left(\frac{t}{M}\right) = \sum_{j=-\frac{t}{2M}}^{\frac{t}{2M}-1} a_L\left(\frac{t}{M}, j\right) \hat{S}^{2j},$$

$$\hat{A}_R\left(\frac{t}{M}\right) = \sum_{j=-\frac{t}{2M}+1}^{\frac{t}{2M}} a_R\left(\frac{t}{M}, j\right) \hat{S}^{2j} \quad (56.1)$$

در این جا  $x = 2j$  است و  $a_L\left(\frac{t}{M}, j\right)$  و  $a_R\left(\frac{t}{M}, j\right)$  از روابط (۴۴.۱) و (۴۵.۱) نوشته می‌شوند و  $\hat{S}^{2j}$  عملگر یکانی جابه‌جایی است. بعد از اندازه‌گیری روی سکه‌ها  $N$  سکه در حالت  $R$  و  $M - N$  تا سکه  $L$  داریم. پس حالت ذره را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\left[\hat{A}_R\left(\frac{t}{M}\right)\right]^N \left[\hat{A}_L\left(\frac{t}{M}\right)\right]^{M-N} |0\rangle \quad (57.1)$$

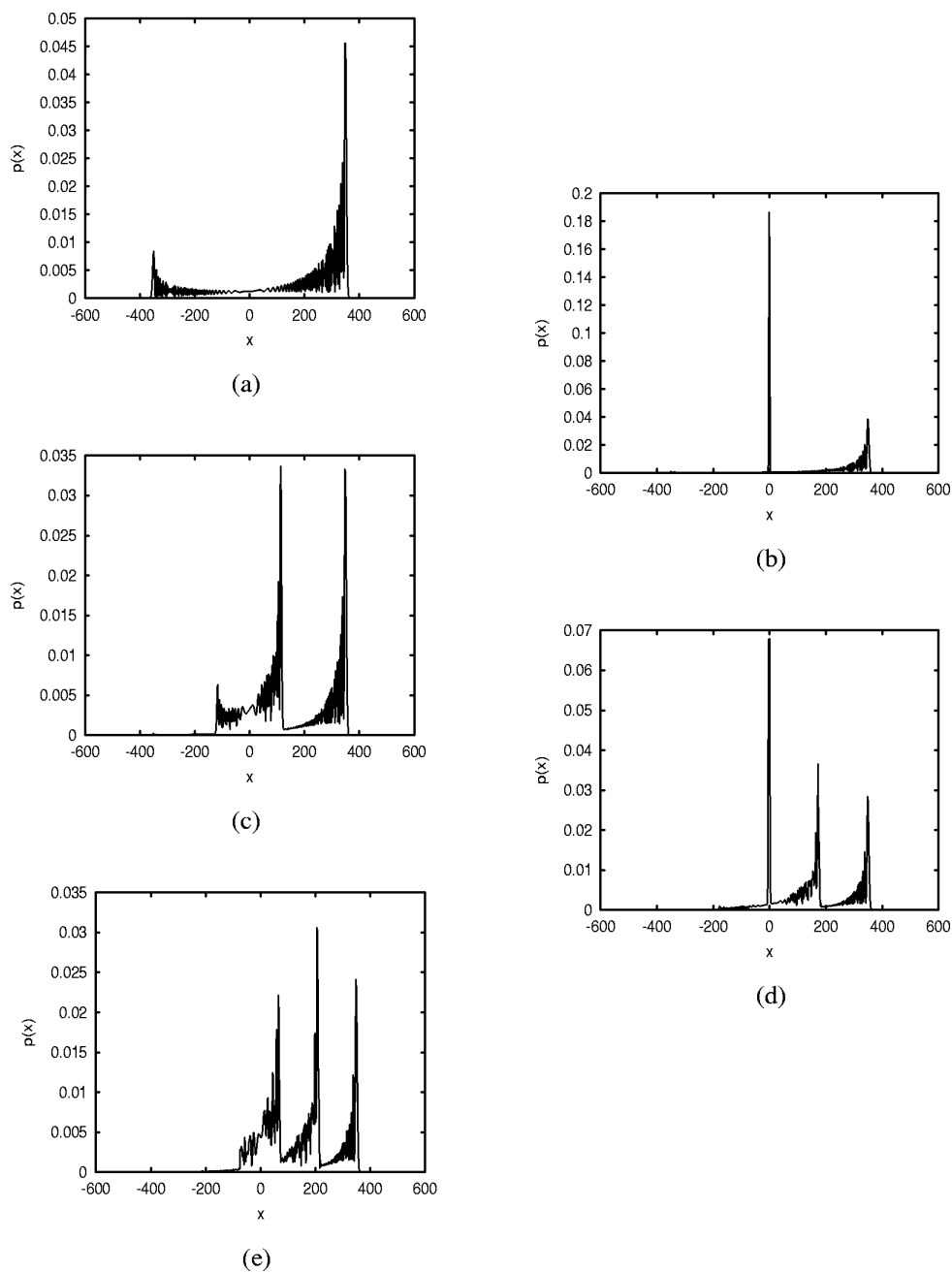
احتمالی که ذره در نهایت در زمان  $t$  به مکان  $x$  می‌رسد  $p(x, t) = |\psi(x, t)|^2$  است، که در این جا:

$$p(x, t) = \sum_{N=0}^M \binom{M}{N} \left| \langle x | \left[\hat{A}_R\left(\frac{t}{M}\right)\right]^N \left[\hat{A}_L\left(\frac{t}{M}\right)\right]^{M-N} |0\rangle \right|^2 \quad (58.1)$$

همان‌طور که می‌بینیم توزیع احتمال به تعداد چرخش‌های هر سکه وابسته نیست. اندازه‌گیری روی  $m$  تا سکه دقیقاً بعد از این که هر کدام  $t/M$  بار چرخش کرد انجام شد.

در شکل ۱۰.۱ توزیع احتمال بر حسب مکان به ازای  $50^\circ$  گام برای ولگشت کوانتومی برای ۱ تا ۵ سکه رسم شده است. در همه شکل‌ها حالت اولیه سکه از  $|R\rangle$  شروع شده است که دلیل غیرمتقارن بودن توزیع است. نمودارها فقط برای مکان‌های  $x$  زوج رسم شده‌اند و برای  $t - x$  نقطه فرد  $p(x) = 0$  است.

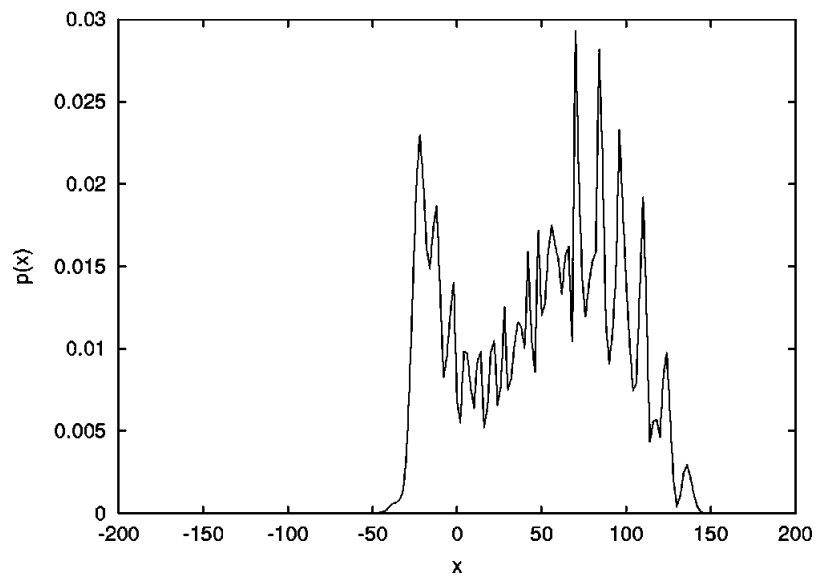
برای دامنه‌های  $a_{L,R}$  در معادله (۵۶.۱) می‌توانیم هر کدام از بیان‌های (۳۹.۱) و (۴۴.۱) و (۴۵.۱) را به کار بگیریم. می‌توانیم آن‌ها را به صورت عددی محاسبه کنیم، معادله (۵۸.۱) روش کاربردی‌تری از



شکل ۱۰.۱: نمودار توزیع احتمال به ازای  $50^\circ$  گام برای ولگشت کوانتومی برای ۱ تا ۵ سکه

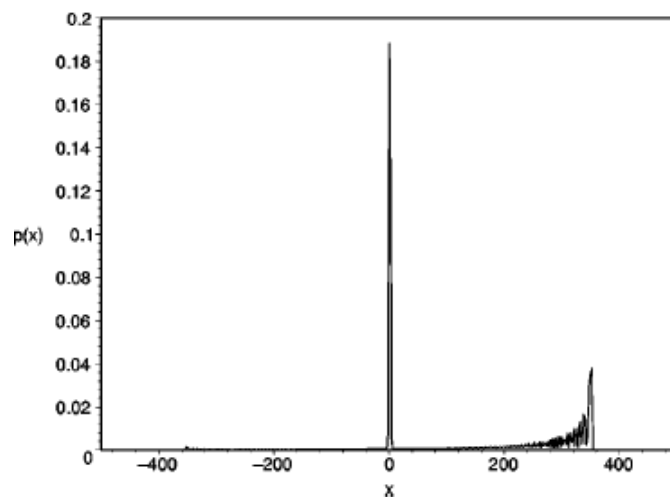
محاسبات عددی را برای شبیه‌سازی به ما می‌دهد. ما این سیستم‌ها را به‌ازای تعداد سکه‌های بزرگ شبیه‌سازی می‌کنیم (شکل ۱۱.۱ را ببینید).

جواب تقریبی برای ولگشت کوانتومی با دو سکه در شکل ۱۲.۱ رسم شده است که با نتایج عددی آن در مورد  $b$  شکل ۱۰.۱ به خوبی مطابقت دارد. (جزئیات این محاسبات را در پیوست ب مرجع [۲۰]



شکل ۱۱.۱: توزیع احتمال حاصل از نتایج عددی برای ولگشت کوانتومی به ازای  $20^\circ$  گام و  $20^\circ$  سکه با حالت اولیه  $|R\rangle$

بینید.)



شکل ۱۲.۱: نمودار توزیع احتمال به ازای  $50^\circ$  گام برای ولگشت کوانتومی با ۲ سکه

# فصل ۲

## ولگشت کوانتومی حافظه‌دار

### ۱.۲ ولگشت کوانتومی حافظه‌دار روی خط

می‌خواهیم نوعی از ولگشت کوانتومی یک بعدی حافظه‌دار را بررسی کنیم که حرکت آن به دو گام قبلی‌اش وابسته است. سپس دامنه‌ها و احتمالات را برای این نوع ولگشت‌ها به دست می‌آوریم و مشخص می‌کنیم که با ولگشت تصادفی کلاسیکی و ولگشت کوانتومی بدون حافظه چه تفاوت‌هایی دارد. همان‌طور که می‌دانیم ولگشت کوانتومی گسسته‌ی یک بعدی استاندارد با بردار حالت زیر نشان داده می‌شود:

$$|n, p\rangle$$

که  $n \in \mathbb{Z}$  و  $p \in \{0, 1\}$  می‌باشد، اولین متغیر، مکان ولگشت ( $n$ ) و دومین متغیر ( $p$ ) حالت سکه نامیده می‌شود. در اینجا  $0$  و  $1$  حالات مربوط به فضای دوبعدی هستند که می‌توانند حالات هر سیستم دوبعدی باشند، مثلاً  $0$  می‌تواند اسپین بالا و  $1$  می‌تواند اسپین پایین باشد. یک گام ولگشت با انتقال‌های زیر داده می‌شود:

$$|n, 0\rangle \rightarrow a|n-1, 0\rangle + b|n+1, 1\rangle \quad (1.2)$$

$$|n, 1\rangle \rightarrow c|n-1, 0\rangle + d|n+1, 1\rangle \quad (2.2)$$

ضرایب  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  را به صورت یک ماتریس این‌چنین نشان می‌دهیم:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in su(2) \quad (3.2)$$

$su(2)$  گروه ماتریس‌های یکانی هستند که در مینانشان ۱ می‌باشد. اینجا ما ولگشت کوانتومی حافظه‌دار را بررسی می‌کنیم که بردار حالتش توسط بردارهایی به شکل زیر تعیین می‌شود:

$$|n_r, n_{r-1}, \dots, n_2, n_1, p\rangle \quad (4.2)$$

$n_j = n_{j-1} \pm 1$  یعنی مکان فعلی از مکان قبلی یکی کمتر یا یکی بیشتر می‌باشد، چون ولگشت در هر بازه‌ی زمانی فقط یک گام به چپ یا راست می‌رود.  $n_j$  مکان ولگرد در زمان  $t - j + 1$  است (بنابراین  $n_1$  مکان فعلی می‌باشد). انتقالات به شکل زیر می‌باشد:

$$(5.2)$$

$$|n_r, n_{r-1}, \dots, n_2, n_1, 0\rangle \rightarrow a |n_{r-1}, \dots, n_2, n_1, n_1 \pm 1, 0\rangle + b |n_{r-1}, \dots, n_2, n_1, n_1 \pm 1, 1\rangle$$

$$(6.2)$$

$$|n_r, n_{r-1}, \dots, n_2, n_1, 1\rangle \rightarrow c |n_{r-1}, \dots, n_2, n_1, n_1 \pm 1, 0\rangle + d |n_{r-1}, \dots, n_2, n_1, n_1 \pm 1, 1\rangle$$

$r$  را مرتبه ولگشت کوانتومی می‌نامیم.

## ۱.۱.۲ ولگشت‌های مرتبه ۲

بردار حالت این نوع ولگشت از بردارهای زیر تشکیل شده است :

$$|n-1, n, 0\rangle, \quad |n-1, n, 1\rangle, \quad |n+1, n, 0\rangle, \quad |n+1, n, 1\rangle \quad (7.2)$$

در ادامه نشان می‌دهیم که حالت  $|n-1, n, p\rangle$  را به‌عنوان راست رونده و  $|n+1, n, p\rangle$  را به‌عنوان چپ رونده می‌توانیم در نظر بگیریم [۱۹]. حالا می‌خواهیم روابط انتقال (۵.۲) و (۶.۲) را در دو مرحله بررسی کنیم، پس برای عملگر سکه  $C$  و عملگر انتقال  $S$ ، به صورت جداگانه می‌نویسیم:

$$C : |n_2, n_1, 0\rangle \rightarrow a |n_2, n_1, 0\rangle + b |n_2, n_1, 1\rangle \quad (8.2)$$

$$C : |n_2, n_1, 1\rangle \rightarrow c |n_2, n_1, 0\rangle + d |n_2, n_1, 1\rangle \quad (9.2)$$

$$S : |n_2, n_1, p\rangle \rightarrow |n_2, n_1 \pm 1, p\rangle \quad (10.2)$$

در ادامه می‌خواهیم احتمالات را برای عملگر انتقال  $S$  بررسی کنیم. فرض کنیم  $S$  هر دو حالت  $|n-1, n, 0\rangle$  و  $|n+1, n, 0\rangle$  را با بردار یکسان  $|n, n+1, 0\rangle$  انتقال بدهد. همان‌طور که می‌بینیم با این انتقال این نوع ولگشت دیگر از مرتبه دوم نیست (رفتار ولگشت به  $n_2$  بستگی ندارد فقط به  $n_1$  بستگی دارد) و در این صورت اثر این عملگر روی بردار حالت  $|n_2, n_1, p\rangle$  یکانی نیست.



در مورد  $p = ۱$  دو حالت داریم:

۱. اگر عملگر انتقال دو حالت  $|n - ۱, n, ۱\rangle$  و  $|n + ۱, n, ۱\rangle$  را در جهت یکسان انتقال بدهد (چپ یا راست)، در این مورد عملگر  $S$  دوباره مانند انتقال ولگشت مرتبه اول رفتار می‌کند (یعنی باز مکان قبلی ذره کوانتومی را نادیده می‌گیرد انگار که هیچ حافظه‌ای وجود نداشته است، در نتیجه همانند ولگشت مرتبه ۱ می‌شود و تنها به  $n$  بستگی دارد).

۲. اگر عملگر انتقال دو حالت  $|n - ۱, n, ۱\rangle$  و  $|n + ۱, n, ۱\rangle$  را در دو جهت مختلف انتقال بدهد. بنابراین برای عملگر  $S$  شبیه ولگشت مرتبه دوم رفتار می‌کند. در این مورد روشن می‌شود که این رفتار، یک انتقال برگشت‌پذیر را نمی‌دهد و ماتریس انتقال یکانی نیست. عملگر انتقال نیاز دارد که به ازای دو مقدار  $p$ ، دو حالت  $|n - ۱, n, p\rangle$  و  $|n + ۱, n, p\rangle$  را به حالت‌های متفاوتی انتقال دهد.

۴ حالت ممکن در جدول زیر آورده شده است:

جدول ۱.۰۲: اثر عملگر انتقال

Initial State	Final State			
	Case a	Case b	Case c	Case d
$ n - 1, n, 0\rangle$	$ n, n + 1, 0\rangle$	$ n, n + 1, 0\rangle$	$ n, n - 1, 0\rangle$	$ n, n - 1, 0\rangle$
$ n - 1, n, 1\rangle$	$ n, n + 1, 1\rangle$	$ n, n - 1, 1\rangle$	$ n, n + 1, 1\rangle$	$ n, n - 1, 1\rangle$
$ n + 1, n, 0\rangle$	$ n, n - 1, 0\rangle$	$ n, n - 1, 0\rangle$	$ n, n + 1, 0\rangle$	$ n, n + 1, 0\rangle$
$ n + 1, n, 1\rangle$	$ n, n - 1, 1\rangle$	$ n, n + 1, 1\rangle$	$ n, n - 1, 1\rangle$	$ n, n + 1, 1\rangle$

بسته به حالت سکه، ولگشت یا انتقال داده می‌شود یا بازتاب. انتقال مطابق است با:

$$|n - ۱, n, p\rangle \rightarrow |n, n + ۱, p\rangle, |n + ۱, n, p\rangle \rightarrow |n, n - ۱, p\rangle$$

در انتقال، ذره مسیرش را در یک جهت یکسان ادامه می‌دهد. بازتاب مطابق است با:

$$|n - ۱, n, p\rangle \rightarrow |n, n - ۱, p\rangle, |n + ۱, n, p\rangle \rightarrow |n, n + ۱, p\rangle$$

در بازتاب جهت حرکت ذره عوض می‌شود.

در جدول زیر اثر عملگر انتقال توضیح داده شده در جدول ۱.۰۲ را به‌عنوان مثال می‌آوریم:

جدول ۲.۲: اثر عملگر انتقال

Value of $p$	Action of $S$			
	Case a	Case b	Case c	Case d
0	Transmit	Transmit	Reflect	Reflect
1	Transmit	Reflect	Transmit	Reflect

### ۲.۱.۲ ولگشت هادامارد

می‌بینیم که موارد (a) و (d) بررسی شده در جدول ۱.۲ به ما هیچ ویژگی خاصی را نمی‌دهند. در مورد (a) ذره فقط بسته به حالت اولیه به‌طور یکنواختی به چپ یا راست حرکت می‌کند. اگر حالت اولیه برهنه‌ی از حرکت به چپ و راست باشد، ولگشت به‌طور هم‌زمان به چپ و راست پیش‌روی می‌کند. برای مورد (d) نیز ولگشت کوانتومی برای همیشه در یک حرکت نوسانی (به ازای بعضی مقادیر  $n$ ) بین  $n + 1$  و  $n$  باقی می‌ماند. در واقع در دو مورد (a) و (d) عملگر سکه هیچ نقشی ایفا نمی‌کند بنابراین اثر عملگر انتقال مستقل از حالت سکه می‌باشد پس هیچ ویژگی کوانتومی در این ولگشت وجود ندارد. موارد (b) و (c) نتایج جالبی را به ما می‌دهند و برای تحلیل این نتایج ما یک عملگر سکه خاص مطابق با ولگشت هادامارد را انتخاب می‌کنیم.

حالت کلاسیکی: عملگر سکه،  $|n_2, n_1, p\rangle$  را به یکی از دو حالت  $|n_2, n_1, 0\rangle$  یا  $|n_2, n_1, 1\rangle$  با احتمال برابر  $\frac{1}{2}$  ارسال می‌کند.

حالت کوانتومی:

$$C : |n_2, n_1, 0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|n_2, n_1, 0\rangle + |n_2, n_1, 1\rangle) \quad (11.2)$$

$$C : |n_2, n_1, 1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|n_2, n_1, 0\rangle - |n_2, n_1, 1\rangle) \quad (12.2)$$

از معادلات (۱۱.۲) و (۱۲.۲) ضرایب  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  مطابق‌اند با  $a = b = c = -d = \frac{1}{\sqrt{2}}$  که به‌عنوان ولگشت هادامارد شناخته شده‌اند.

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{عملگر یکانی هادامارد}$$

مورد (c) را بررسی می‌کنیم:  
سه گام اول برای یک ولگشت کوانتومی استاندارد که از مکان  $n$  شروع می‌شود، باید به شکل زیر باشد:

$$|n, 0\rangle \xrightarrow{1} \frac{1}{\sqrt{2}} (|n-1, 0\rangle + |n+1, 1\rangle) \quad (13.2)$$

$$\xrightarrow{2} \frac{1}{\sqrt{2}} (|n-2, \circ\rangle + |n, 1\rangle + |n, \circ\rangle - |n+2, 1\rangle) \quad (14.2)$$

$$\xrightarrow{3} \frac{1}{\sqrt{3}} (|n-3, \circ\rangle + |n-1, 1\rangle + |n-1, \circ\rangle - |n+1, 1\rangle + |n-1, \circ\rangle + |n+1, 1\rangle - |n+1, \circ\rangle + |n+3, 1\rangle) \quad (15.2)$$

بنابراین بعد از گام سوم تداخل‌های سازنده و ویرانگر ظاهر می‌شوند. (حذف شدن جملات چهارم و ششم و جمع شدن جملات سوم و پنجم در رابطه (۱۵.۲)). در مورد (c) برای مثال اولین گام‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$|n-1, n, \circ\rangle \xrightarrow{1} \frac{1}{\sqrt{2}} (|n, n-1, \circ\rangle + |n, n+1, 1\rangle) \quad (16.2)$$

$$\xrightarrow{2} \frac{1}{\sqrt{2}} (|n-1, n, \circ\rangle + |n-1, n-2, 1\rangle + |n+1, n, \circ\rangle - |n+1, n+2, 1\rangle) \quad (17.2)$$

$$\xrightarrow{3} \frac{1}{2\sqrt{3}} (|n, n-1, \circ\rangle + |n, n+1, 1\rangle + |n-2, n-1, \circ\rangle - |n-2, n-3, 1\rangle + |n, n+1, \circ\rangle + |n, n-1, 1\rangle - |n+2, n+1, \circ\rangle + |n+2, n+3, 1\rangle) \quad (18.2)$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{4} \frac{1}{\sqrt{4}} & (|n-1, n, \circ\rangle + |n-1, n-2, 1\rangle + |n+1, n, \circ\rangle - |n+1, n+2, 1\rangle \\ & + |n-1, n-2, \circ\rangle + |n-1, n, 1\rangle - |n-3, n-2, \circ\rangle + |n-3, n-4, 1\rangle + |n+1, n, \circ\rangle \\ & + |n+1, n+2, 1\rangle + |n-1, n, \circ\rangle - |n-1, n-2, 1\rangle - |n+1, n+2, \circ\rangle - |n+1, n, 1\rangle \\ & + |n+3, n+2, \circ\rangle - |n+3, n+4, 1\rangle) \end{aligned} \quad (19.2)$$

بعد از سه گام هیچ تداخلی (چه سازنده چه ویرانگر) وجود ندارد اما تداخل‌ها بعد از گام چهارم ظاهر می‌شوند. بنابراین ما می‌توانیم تفاوت ولگشت حافظه‌دار را از ولگشت تصادفی کلاسیکی و از ولگشت کوانتومی استاندارد ببینیم.

### ۳.۱.۲ دامنه‌ها

(این قسمت بسیار شبیه روشی است که در پیوست آ مرجع [۲۰] به‌کار گرفته شده است) می‌خواهیم بیان‌های تحلیلی برای دامنه‌های تابع موج در مورد (c) جدول ۱.۲ را به‌دست بیاوریم، سکه کوانتومی را

عملگر هادامارد (۱۱.۲) و (۱۲.۲) می‌گیریم.

$$|n_2, n_1, 0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|n_2, n_1, 0\rangle + |n_2, n_1, 1\rangle)$$

$$|n_2, n_1, 1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|n_2, n_1, 0\rangle - |n_2, n_1, 1\rangle)$$

برای ولگشت یک بعدی سلسله‌ای متوالی از گام‌های چپ و راست را داریم. راه‌های زیادی برای رسیدن به حالت نهایی وجود دارد، ما نیاز داریم که دامنه‌های این مسیرهای مختلف را با هم جمع کنیم (با فازهای مختص خودشان) دامنه‌ها را برای حالت نهایی ترکیب کنیم. به‌عنوان یک مثال خوب در یک مورد کلاسیکی احتمال این‌که ذره‌ای که حرکتش از مبدا شروع کرده با سه گام به موقعیت ۱ برسد را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۳ حالت ممکن که به مکان ۱ ختم می‌شوند  $LRR$  و  $RLR$  و  $RRL$  می‌باشند. تعداد کل ولگشت‌های ممکن با سه گام  $2^3 = 8$  می‌شود. بنابراین احتمال رسیدن به موقعیت ۱ با سه گام برابر با  $\frac{3}{8}$  می‌باشد. اجازه بدهید حالت اولیه را  $|0, 0, 0\rangle$  و تعداد گام‌های ولگشت را  $n$  بگیریم، بنابراین ولگرد حرکتش را از مبدا شروع می‌کند.

در یک ولگشت یک بعدی، اگر  $n$  فرد (یا زوج) باشد فقط در مکان‌های صحیح فرد (یا زوج) ذره را می‌یابیم.

$N_L$  را تعداد گام‌های چپ و  $N_R$  را تعداد گام‌های راست در نظر می‌گیریم.

لم ۱.۱.۲. فرض کنیم  $N_L^1$  تعداد  $L$ ‌های منزوی و  $N_R^1$  تعداد  $R$ ‌های منزوی باشد (منظور از گام منزوی  $L$  ( $R$ )، گام  $L$  ( $R$ ) است که بوسیله گام  $L$  ( $R$ ) دیگر محدود نشده باشد)، در این صورت فاز کوانتومی مرتبط با این سلسله گام‌ها به‌شکل زیر می‌باشد:

$$(-1)^{N_L + N_R + N_L^1 + N_R^1}$$

برهان. در ادامه ما اول سلسله مراتب گام‌های  $L$  را تحلیل می‌کنیم (این مباحث بطور یکسان برای گام‌های  $R$  نیز اعمال می‌شوند).

یک تک  $L$  منزوی و زوج  $LL$  که با گام‌های  $R$  کراندار شده‌اند در فاز شرکت نمی‌کنند. چون فاز  $+1$  را می‌دهند. اولین دسته گام‌های  $L$  که می‌توانند در فاز کوانتومی مشارکت داشته باشند دسته  $LLL$  است چون فاز  $-1$  را می‌دهد. پس به‌طور معمول یک سلسله  $j$  تایی از  $L$ ‌ها فاز  $(-1)^j$  را به ازای  $j > 2$  می‌دهد.

حالا می‌خواهیم دسته‌های گام‌های  $L$ ، با اندازه بزرگ‌تر از ۲ را امتحان کنیم.

اگر دو دسته این‌گونه داشته باشیم، می‌توانیم بدون این‌که هیچ تغییری در فاز کل صورت گیرد یک  $L$  را از دسته اول به دوم ببریم.

فرض کنید این فرآیند را آن قدر تکرار کنیم تا همه دسته‌ها به جز یک دسته بزرگ از  $L$ ها، به دسته‌های دوتایی  $L$  و کمتر کوچک شوند. سلسله گام‌هایی را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$RLR...RLR...RLLR...RLR...RLLR...R \underbrace{LLLL...L}_{\text{یک دسته بزرگ از } L \text{ها}} R...$$

تعداد کل دسته‌های  $L$  را با  $C_L$  نشان می‌دهیم. پس تعداد کل دسته‌های سایز ۲، ۱،  $C_L - N_L^1$  می‌باشد، بنابراین اندازه یک دسته بزرگ  $L$ ها می‌شود:

$$N_L - N_L^1 - 2(C_L - N_L^1 - 1) = N_L + N_L^1 - 2C_L + 2 \quad (20.2)$$

بنابراین فاز اشتراک  $(-1)^{N_L+N_L^1}$  می‌باشد.

همین مباحث را برای سلسله  $R$ ها نیز داریم، پس فاز اشتراک کل به این شکل نوشته می‌شود:

$$(-1)^{N_L+N_R+N_L^1+N_R^1}$$

بعد از  $n$  گام می‌خواهیم ببینیم احتمال این‌که ذره در مکان  $K$  باشد چقدر است. از مباحث قبلی می‌دانیم  $n - k \leq k \leq n$  و  $(-1)^n = (-1)^k$ . چهار حالت کوانتومی نهایی ممکن که ذره به موقعیت  $K$  برسد در مدل ما مطابق است با:

$$|k-1, k, \circ\rangle, |k-1, k, 1\rangle, |k+1, k, \circ\rangle, |k+1, k, 1\rangle \quad (21.2)$$

دامنه‌های این چهار حالت را در تابع موج نهایی  $\psi$  این‌گونه مشخص می‌کنیم:

$$a_{KLR}, a_{KRR}, a_{KRL}, a_{KLL}$$

وقتی‌که پیدا شدن ذره در مکان  $K$  را اندازه‌گیری کنیم، احتمال به صورت زیر می‌باشد:

$$|a_{KLR}|^2 + |a_{KRR}|^2 + |a_{KRL}|^2 + |a_{KLL}|^2 \quad (22.2)$$

قبل از این‌که دامنه‌ها را حساب کنیم به اصل دیگری نیاز داریم:

۲.۱.۲. اگر سیستم  $n$  عضوی ( $n$  صحیح) را به  $C$  قسمت تقسیم کرده و  $N^1$  را تعداد یک‌ها در این سیستم بگیریم، دو حالت زیر را خواهیم داشت (که در مورد این ترکیب یا مورد ۱ برقرار است یا مورد ۲):

$$n = C = N^1 \quad 1.$$

$$\max(0, 2C - n) \leq N^1 \leq C - 1 \quad ۰۲$$

برهان. مورد ۱: بدیهی است اگر  $n$  بار عدد یک را با هم جمع کنیم برابر با  $n$  می‌شود.

$$n = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{\text{جمله } n}$$

مورد ۲: برای این مورد حد بالایی بدیهی است، بیشترین تعدادی که یک‌ها می‌توانند به خودشان اختصاص دهند  $C - 1$  می‌باشد، که ترکیبشان به این صورت است:

$$n = \underbrace{1 + 1 + 1 \dots + 1}_{\text{جمله } C-1} + (n - (C - 1)) \quad (۲۳.۲)$$

برای حد پایین: فرض می‌کنیم  $C < \frac{n}{2}$ ، همیشه ممکن است که ترکیب را با تعداد جملات کمتری بنویسیم بدون این‌که جملات تک‌تایی در آن به‌کار برده شود. می‌توانیم  $C - 1$  جمله اول ترکیب را جملات دوتایی بنویسیم، در این صورت بخاطر فرضی که کرده‌ایم اندازه جمله آخر  $2(C - 1) - n$  می‌شود. حالا فرض کنیم  $C \geq \frac{n}{2}$ ، کمترین تعداد ۱‌های موجود در ترکیب را می‌توانیم با نوشتن ۲‌ها بدست بیاوریم. فرض کنیم تعداد دسته‌های دوتایی،  $r$  باشد و بقیه جملات یک‌تایی باشند، بنابراین  $2r + N^1 = n$  و همچنین  $r = C - N$  و در نهایت تعداد ۱‌ها را به این صورت داریم:  $N^1 = 2C - n$ .

قضیه ۳.۱.۲. دامنه‌های  $a_{KLR}$  و  $a_{KRL}$ ،  $a_{KLL}$ ،  $a_{KRR}$  برای حالات نهایی داده شده در معادله (۲۱.۲) به این شکل به‌دست می‌آیند (اثبات در پیوست آ):

$$\begin{aligned} 2^{\frac{n}{2}} a_{KLL} = & \sum_{C=2}^{N_L-1} \sum_{\substack{N_L^1=\max(1, \\ 2C-N_L)}^{C-1}} \sum_{\substack{N_R^1=\max(0, \\ 2C-N_R-2)}^{C-2}} (-1)^{n+N_L^1+N_R^1} \frac{N_L^1(C-N_L^1)}{C(C-1)} \binom{C}{N_L^1} \binom{C-1}{N_R^1} + \\ & \sum_{\substack{N_L^1=\max(1, \\ 2N_R-N_L+2)}^{N_R}} (-1)^{N_L+N_L^1} \frac{N_L^1(N_R-N_L^1+1)}{N_R(N_R+1)} \binom{N_R+1}{N_L^1} \end{aligned} \quad (۲۴.۲)$$

$$\begin{aligned} 2^{\frac{n}{2}} a_{KLR} = & \sum_{C=2}^{N_L-1} \sum_{\substack{N_L^1=\max(1, \\ 2C-N_L)}^{C-1}} \sum_{\substack{N_R^1=\max(0, \\ 2C-N_R)}^{C-1}} (-1)^{n+N_L^1+N_R^1} \frac{N_L^1(N_R^1)}{C^2} \binom{C}{N_L^1} \binom{C}{N_R^1} + \delta_{N_L, N_R} \\ & + \sum_{\substack{N_L^1=\max(1, \\ 2N_R-N_L)}^{N_R-1}} (-1)^{\frac{N_L+N_L^1+N_L^1}{N_R}} \binom{N_R}{N_L^1} + \sum_{\substack{N_R^1=\max(1, \\ 2N_L-N_R)}^{N_L-1}} (-1)^{N_R+N_R^1} \frac{N_R^1}{N_L} \binom{N_L}{N_R^1} \end{aligned} \quad (۲۵.۲)$$

$$\begin{aligned}
 \gamma^{\frac{n}{\gamma}} a_{kRL} &= \sum_{C=\gamma}^{N_L-1} \sum_{\substack{N_L^1=\max(\gamma, \\ \gamma C-N_L)}}^{C-1} \sum_{\substack{C-\gamma \\ \gamma C-N_R-\gamma}}^{C-1} (-1)^{n+N_L^1+N_R^1} \\
 &\quad \frac{N_L^1(N_L^1-1)}{C(C-1)} \binom{C}{N_L^1} \binom{C-1}{N_R^1} + \delta_{N_L-1, N_R} \\
 &\quad \sum_{\substack{N_L^1=\max(\gamma, \\ \gamma N_R-N_L+\gamma)}^{N_R}} (-1)^{N_L+N_L^1} \frac{N_L^1(N_L^1-1)}{N_R(N_R+1)} \binom{N_R+1}{N_L^1} \\
 &\quad + \sum_{\substack{N_L-\gamma \\ N_R^1=\max(\circ, \\ \gamma N_L-N_R)}}^{N_L-\gamma} (-1)^{N_R+N_R^1} \binom{N_L-1}{N_R^1}
 \end{aligned} \tag{۲۶.۲}$$

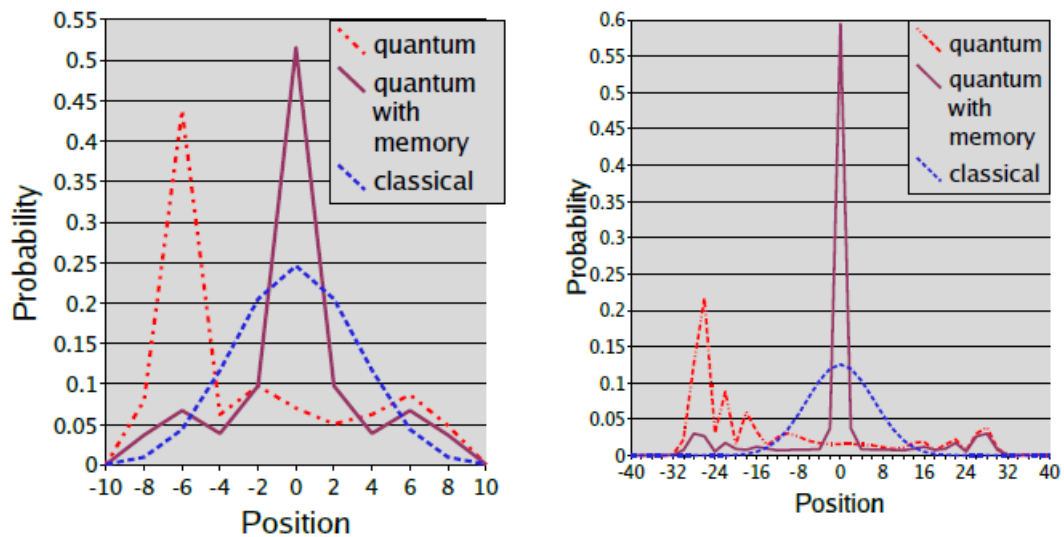
$$\begin{aligned}
 \gamma^{\frac{n}{\gamma}} a_{kRR} &= \sum_{C=1}^{N_L-1} \sum_{\substack{N_L^1=\max(1, \\ \gamma C-N_L)}}^{C-1} \sum_{\substack{C-1 \\ \gamma C-N_R}}^{C-1} (-1)^{n+N_L^1+N_R^1} \\
 &\quad \frac{N_L^1(C-N_R^1)}{C^\gamma} \binom{C}{N_L^1} \binom{C-1}{N_R^1} \\
 &\quad + \sum_{\substack{N_L-1 \\ N_R^1=\max(\circ, \\ \gamma N_L-N_R)}}^{N_L-1} (-1)^{N_R+N_R^1} \frac{N_L-N_R^1}{N_L} \binom{N_L}{N_R^1}
 \end{aligned} \tag{۲۷.۲}$$

### ۴.۱.۲ شبیه‌سازی ولگشت کوانتومی حافظه‌دار

در شکل ۱.۲ دامنه‌ها برای سه نوع ولگشت مختلف کلاسیکی و کوانتومی عادی و کوانتومی حافظه‌دار نشان داده شده است [۲۳]. در شکل ۱.۲ حالت‌های اولیه برای سه ولگشت،  $|\circ\rangle$  و  $|\circ, \circ\rangle$  و  $|-1, \circ, \circ\rangle$  هستند. [۱۶] در مورد ولگشت کوانتومی می‌توانیم یک حالت اولیه با تقارن بیشتری انتخاب کنیم که باعث می‌شود یک توزیع احتمال متفاوت داشته باشیم.

برای ولگشت کوانتومی حالت اولیه ما در  $\frac{(|\circ, \circ\rangle + i|\circ, 1\rangle)}{\sqrt{2}}$  می‌باشد و برای ولگشت حافظه‌دار  $\frac{(|-1, \circ, \circ\rangle + |-1, \circ, 1\rangle + |1, \circ, \circ\rangle + |1, \circ, 1\rangle)}{2}$  می‌باشد. توزیع احتمال برای این موارد، به ازای  $4^\circ$  گام، در شکل

۲.۲ رسم شده است.



شکل ۱۰.۲: توزیع احتمال برای سه ولگشت کلاسیکی و کوانتومی عادی و کوانتومی حافظه‌دار به ازای گام ۱۰ (شکل سمت چپ) و به ازای گام ۴۰ (شکل سمت راست) [۲۱]

احتمال این‌که ولگشت کوانتومی حافظه‌دار حتی بعد از گام ۴۰ در مبدا حضور داشته باشد بیش از ۵۰ درصد است، در بقیه مکان‌ها قله‌های کوچکتري می‌بینیم که کاملاً با یک فاصله مشخصی از مبدا مطابق‌اند (مکان ۶ در شکل ۱۰.۲، (سمت چپ) و مکان ۲۸ در شکل ۱۰.۲، (سمت راست)). توزیع نسبت به صفر متقارن است به‌جز یک مورد خاص: اگر  $N_R = N_L \pm 1$  (در یک ولگشت با گام‌های فرد، احتمال پیدا شدن ذره در مکان ۱ یکسان نیست).

در ولگشت کوانتومی حافظه‌دار با افزایش تعداد گام‌ها، حتی بعد از  $n$  گام، ذره با شانس بیشتر از ۵۰ درصد در مبدا پیدا خواهد شد.

برای اثبات این ادعا  $n = 2j$  را در نظر می‌گیریم (می‌دانیم ذره می‌تواند به ازای تعداد گام‌های زوج در مبدا باشد).

نشان می‌دهیم که به ازای تعداد گام‌های  $n$  و گام‌های قبلی آن تداخل سازنده صورت می‌گیرد و باعث افزایش دامنه در مبدا می‌شود. با  $a_{k^{**}}(n)$  نمادگذاری را انجام می‌دهیم. دامنه به تعداد گام‌ها ( $n$ ) وابسته شده و  $**$  یکی از حالات  $LL$  و  $LR$  و  $RL$  و  $RR$  می‌باشد.

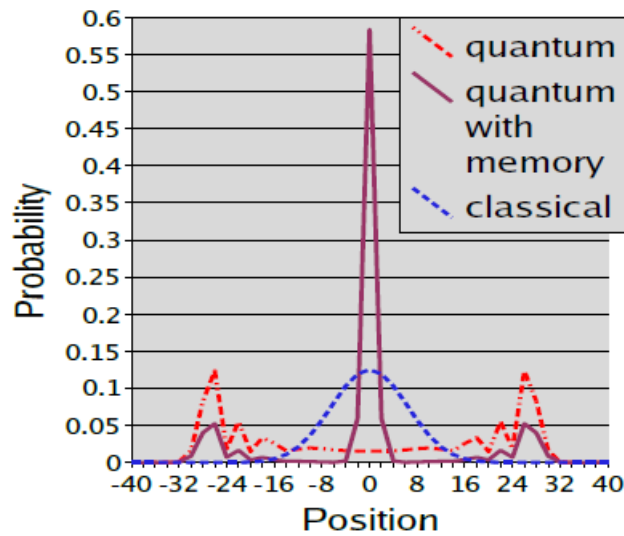
اکنون روی وابستگی ولگشت به دو گام قبلی آن تمرکز می‌کنیم. دامنه‌های گام  $n$  ام را با مجموعه  $S$  و دامنه‌های دو گام قبلی را با  $S'$  نشان می‌دهیم:

$$S = \{a_{\circ LR}(n), a_{\circ RL}(n)\}$$

$$S' = \{a_{\circ LR}(n-2), a_{\circ RL}(n-2)\}$$

حالت سکه اولیه را  $|0\rangle$  در نظر می‌گیریم. از آنجاییکه عملگر انتقال برای این حالت سکه به صورت





شکل ۲.۲: [۲۱] توزیع احتمال برای سه ولگشت کلاسیکی و کوانتومی عادی و کوانتومی حافظه‌دار با حالت اولیه متقارن، بعد از ۴۰ گام

بازتابی عمل می‌کند، فقط دو دامنه  $a_{\circ RL}$  و  $a_{\circ LR}$  را برای گام  $n$  و  $n - 2$  داریم. فرض می‌کنیم دامنه‌های  $a_{\circ RL}(n)$ ,  $a_{\circ LR}(n)$  مثبت و مجموعشان ۱ است. برای اینکه ذره در مبدا باشد دو حالت  $|1, 0, 0\rangle$  و  $|-1, 0, 0\rangle$  را داریم. دامنه  $|1, 0, 0\rangle$  مطابق است با  $a_{\circ LR}(n)$ . به‌ازای دو گام قبل نیز دو مورد برای  $(n - 2)$  وجود دارد: یک مورد  $a_{\circ LR}(n - 2)$  است، ذره ابتدا یک گام به چپ و سپس به راست حرکت می‌کند و حالت دیگر با  $a_{\circ RL}(n - 2)$  مطابق است، ذره ابتدا به راست و سپس به چپ حرکت می‌کند. اگر در گام  $n$  حالت  $|1, 0, 0\rangle$  را داشته باشیم. گام‌های قبلی را به این صورت محاسبه می‌کنیم: برای یک گام قبل داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{4}} (|0, -1, 0\rangle + |-2, -1, 1\rangle) \quad (28.2)$$

دو گام را به این شکل می‌نویسیم:

$$\frac{1}{4} (|-1, 0, 0\rangle + |-1, -2, 1\rangle + |-1, -2, 0\rangle - |-3, -2, 1\rangle) \quad (29.2)$$

همان‌طور که در روابط بالا می‌بینیم برای مورد  $a_{\circ LR}(n - 2)$  فاز مثبت باقی می‌ماند و فاکتور دامنه برابر با  $\left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right)^2 = 0.5$  می‌شود. برای حالت  $a_{\circ RL}(n - 2)$  نیز فاز مثبت باقی می‌ماند و فاکتور دامنه برابر با  $\left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right)^2 = 0.5$  می‌باشد.

بنابراین جمع دامنه‌ها را برای این دو مورد به شکل زیر خواهیم داشت:

$${}^{\circ}/\omega a_{\circ LR}(n-2) + {}^{\circ}/\omega a_{\circ RL}(n-2) = {}^{\circ}/\omega a_{\circ LR}(n-2) + {}^{\circ}/\omega (1 - a_{\circ LR}(n-2)) = {}^{\circ}/\omega$$

حالت  $\langle 1, \circ, \circ \rangle$  را بررسی می‌کنیم:

دامنه این حالت با  $a_{\circ LR}(n)$  مطابق است و به‌ازای دو گام قبل دو مورد برای  $a_{\circ **}(n-2)$  وجود دارد. یک مورد  $a_{\circ LR}(n-2)$  است، ذره ابتدا به سمت چپ و سپس به راست حرکت می‌کند، فاز ساختار مثبت می‌ماند و فاکتور دامنه  ${}^{\circ}/\omega = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$  است. مورد دیگر  $a_{\circ RL}(n-2)$  می‌باشد، ذره به سمت راست و سپس به چپ حرکت می‌کند و فاز ساختار مثبت باقی می‌ماند و فاکتور دامنه  ${}^{\circ}/\omega = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$  می‌باشد، بنابراین جمع دامنه‌ها به شکل زیر خواهد بود:

$${}^{\circ}/\omega a_{\circ LR}(n-2) + {}^{\circ}/\omega a_{\circ RL}(n-2) = {}^{\circ}/\omega a_{\circ LR}(n-2) + {}^{\circ}/\omega (1 - a_{\circ LR}(n-2)) = {}^{\circ}/\omega$$

بنابراین برای هر دو دامنه تداخل سازنده مشاهده می‌کنیم.

اکنون نشان خواهیم داد که دامنه‌های  $a_{\circ LL}(n-2)$  و  $a_{\circ RR}(n-2)$  دامنه‌های ما را برای  $a_{\circ **}(n)$  کاهش نمی‌دهند.

برای مثال  $a_{\circ LL}(n-2)$  را بررسی می‌کنیم. این حالت از حرکت ذره مطابق با یکی از دو حالت  $RL$  یا  $LR$  به وجود می‌آید. فاکتور دامنه همان‌طور که دیدیم  ${}^{\circ}/\omega$  بود اما فاکتور فاز ساختارها مخالف هم هستند. برای  $RL$  فاز مثبت می‌باشد در حالی‌که برای  $LR$  منفی است. برای روشن شدن این ادعا به محاسبات زیر توجه کنید: اگر دو گام قبل را به صورت  $\langle 1, \circ, 1 \rangle$  داشته باشیم، گام بعدی را به این صورت می‌نویسیم:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|{}^{\circ}, 1, \circ\rangle - |{}^{\circ}, -1, 1\rangle) \quad (30.2)$$

و گام  $n$  ام را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1}{2} (|1, \circ, \circ\rangle + |1, 2, 1\rangle - |-1, \circ, \circ\rangle + |-1, -2, 1\rangle) \quad (31.2)$$

همان‌طور که می‌بینید در جمله اول که نشان‌دهنده حرکت  $RL$  ذره است، فاز مثبت و برای جمله سوم که حرکت  $LR$  ذره را نشان می‌دهد، فاز منفی می‌باشد. بنابراین  ${}^{\circ}/\omega a_{\circ LL}(n-2)$  را به دامنه حالت  $a_{\circ RL}(n)$  اضافه می‌کند و  ${}^{\circ}/\omega a_{\circ LL}(n-2)$  را از دامنه  $a_{\circ LR}(n)$  کم می‌کند. همان‌طور که پیش‌تر اشاره کردیم،  $a_{\circ LR}(n-2)$  و  $a_{\circ RL}(n-2)$  دو عدد مثبت‌اند که جمعشان برابر با یک می‌باشد، اگر  $\varepsilon = {}^{\circ}/\omega a_{\circ LL}(n-2)$  را در نظر بگیریم بنابراین دامنه‌ها در این جا  $a_{\circ RL}(n-2) + \varepsilon$  و  $a_{\circ LR}(n-2) - \varepsilon$  هستند. برای دامنه  $a_{\circ RR}(n-2)$  نیز به همین صورت می‌باشد.

در این جا ما نشان دادیم برای همه  $n$  های زوج که دامنه‌هایشان  $a_{\circ LR}(n)$  و  $a_{\circ RL}(n)$  هستند که دو عدد مثبت‌اند که مجموع آن‌ها ۱ است، مشارکتشان در احتمال  $(|a_{\circ LR}(n)|^2 + |a_{\circ RL}(n)|^2)$ ، حداقل  $\frac{1}{5}$  می‌باشد. به طور معمول نوشته می‌شود که  $a_{\circ LL}(n)$  و  $a_{\circ RR}(n)$  غیر صفر خواهند بود و در احتمال حضور ذره در مکان صفر شرکت می‌کنند.

## ۲.۲ ولگشت کوانتومی حافظه‌دار روی دایره

در این مدل، فضایی که ولگشت کوانتومی از آن استفاده می‌کند از دو بخش ترکیب شده است: سکه و فضای حالت  $d$  بعدی. عملگر انتقال برای این مورد به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$s_{\circ} = \sum_{c=\circ}^1 \sum_{v=\circ}^{d-1} |c\rangle \langle c| \otimes |v + 2c - 1 \pmod{d}\rangle \langle v| \quad (32.2)$$

این مدل را می‌پذیریم و آن را با یک ثبت کننده اضافی که به عنوان ثبت کننده حافظه می‌باشد، توسعه می‌دهیم، این ثبت کننده، تاریخچه (حافظه) ولگشت را ذخیره می‌کند.

برای یک ولگشت کوانتومی با یک گام حافظه به یک تک کیوبیت برای ذخیره حافظه ولگشت نیاز داریم. برای این مورد فضای هیلبرت این‌گونه تعریف می‌شود:  $H = H_{\zeta} \otimes H_{\eta} \otimes H_d$ ، فضای هیلبرت را به ترتیب برای سکه، حافظه و مکان در نظر می‌گیریم. دومین ثبت کننده حافظه ولگشت را ذخیره می‌کند. حافظه بیان‌گر جهتی است که ذره در حرکت قبلی از آن جا آمده است. به این شکل قرارداد می‌کنیم که اگر این ثبت کننده در حالت  $|\circ\rangle$  باشد، مکان قبلی ذره  $n + 1$  بوده است. اگر این ثبت کننده در حالت  $|1\rangle$  باشد، مکان قبلی ذره در  $n - 1$  بوده است. ثبت کننده سکه نشان می‌دهد که ولگشت باید جهت حرکت قبلی خود را ادامه بدهد (انتقال در حالت  $|\circ\rangle$ ) یا جهت را تغییر بدهد (انعکاس در حالت  $|1\rangle$ ). مطابق با این‌ها، عملگر انتقال را برای ولگشت کوانتومی با یک گام حافظه روی دایره با  $d$  جایگاه، به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} s_1 = & \sum_{n=\circ}^{d-1} (|\circ\rangle \langle \circ| \otimes |\circ, n - 1 \pmod{d}\rangle \langle \circ, n| \\ & + |\circ\rangle \langle \circ| \otimes |1, n + 1 \pmod{d}\rangle \langle 1, n| \\ & + |1\rangle \langle 1| \otimes |1, n + 1 \pmod{d}\rangle \langle \circ, n| \\ & + |1\rangle \langle 1| \otimes |\circ, n - 1 \pmod{d}\rangle \langle 1, n|) \end{aligned} \quad (33.2)$$

یا در حالت کلی داریم:

$$s_1 = \sum_{n,m,c} |c\rangle \langle c| \otimes |h_{m,c}, n + 2h_{m,c} - 1 \pmod{d}\rangle \langle m, n| \quad (34.2)$$

این جا  $h_{m,c} = m + c \pmod{2}$  حافظه وابسته به ولگشت را بیان می‌کند. عملگر تحول کلی ولگشت این‌گونه به دست می‌آید:

$$W_1 = s_1 (C \otimes I_2 \otimes I_d) \quad (35.2)$$

در این رابطه  $C$  عملگر سکه است که اینجا عملگر هادامارد  $H$  را به‌عنوان عملگر سکه استفاده می‌کنیم (یا هر ماتریس  $(2) \in SU$ ):

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (36.2)$$

حرکت ولگشت از حالت اولیه  $|\phi_0\rangle$  شروع می‌شود. بعد از هر گام  $t$  حالت مطابق رابطه زیر تغییر می‌کند:

$$|\phi_n\rangle = W_1^n |\phi_0\rangle \quad (37.2)$$

یا رابطه بازگشتی زیر را خواهیم داشت:

$$|\phi_{n+1}\rangle = W_1 |\phi_n\rangle \quad (38.2)$$

احتمال پیدا شدن ذره در مکان  $v$  بعد از  $t$  گام، بعد از میانگین‌گیری روی ثبت‌کننده‌های سکه و حافظه به شکل زیر به دست می‌آید:

$$p(v, n) = \sum_{c,m} |\langle c, m, v | \phi_n \rangle|^2 \quad (39.2)$$

## ۱.۲.۲ توزیع احتمال ولگشت روی دایره

در ادامه می‌خواهیم توزیع احتمال پیدا شدن ذره در هر جایگاه دایره را ارزیابی کنیم. ما فقط ولگشت هادامارد را بررسی می‌کنیم. پس عملگر ولگشت به شکل زیر داده می‌شود:

$$W = S (H \otimes I_{2d}) \quad (40.2)$$

دومین متغیر در معادله (۳۹.۲) به شکل ماتریسی این‌گونه نوشته می‌شود:

$$H \otimes I_{2d} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_{2d} & I_{2d} \\ I_{2d} & -I_{2d} \end{pmatrix} \quad (41.2)$$

طبق بیان به دست آمده برای توزیع احتمال، از روش تحلیل فوریه استفاده می‌کنیم [۱۶] [۲۵] [۲۶]. دامنه‌ها را برای ولگشت روی دایره با یک گام حافظه با اثر دادن ماتریس هادامارد روی ثبت کننده سکه، محاسبه می‌کنیم. برای این مورد بردار دامنه‌ها را به این شکل معرفی می‌کنیم:

$$\Phi(n, t) = \begin{pmatrix} \langle 0, 0, n | \psi(t) \rangle \\ \langle 0, 1, n | \psi(t) \rangle \\ \langle 1, 0, n | \psi(t) \rangle \\ \langle 1, 1, n | \psi(t) \rangle \end{pmatrix} \quad (42.2)$$

عملگر انتقال همان‌طور که در معادله (۳۳.۲) تعریف شد، می‌باشد. برای این مورد، قسمت عملگر انتقال به شکل زیر است:

$$S_1(n) = |0\rangle \langle 0| \otimes |0, n\rangle \langle 0, n+1| + |0\rangle \langle 0| \otimes |1, n\rangle \langle 1, n-1| + |1\rangle \langle 1| \otimes |0, n\rangle \langle 1, n+1| + |1\rangle \langle 1| \otimes |1, n\rangle \langle 0, n-1| \quad (43.2)$$

بعد از یک گام تحول زمانی داریم:

$$\Phi(n, t+1) = \begin{pmatrix} \langle 0, 0, n+1 | (H \otimes I_2 \otimes I_d) | \psi(t) \rangle \\ \langle 0, 1, n-1 | (H \otimes I_2 \otimes I_d) | \psi(t) \rangle \\ \langle 1, 1, n+1 | (H \otimes I_2 \otimes I_d) | \psi(t) \rangle \\ \langle 1, 0, n-1 | (H \otimes I_2 \otimes I_d) | \psi(t) \rangle \end{pmatrix}$$

با ارزیابی کردن اثر عملگر هادامارد روی ثبت کننده سکه داریم:

$$\Phi(n, t+1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \langle 0, 0, n+1 | \psi_t \rangle + \langle 1, 0, n+1 | \psi_t \psi_t \rangle \\ \circ \\ \langle 0, 1, n+1 | \psi_t \rangle - \langle 1, 1, n+1 | \psi_t \rangle \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ \langle 0, 1, n-1 | \psi_t \rangle + \langle 1, 1, n-1 | \psi_t \rangle \\ \circ \\ \langle 0, 0, n-1 | \psi_t \rangle - \langle 1, 0, n-1 | \psi_t \rangle \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \circ \\ \langle 0, 1, n-1 | \psi_t \rangle + \langle 1, 1, n-1 | \psi_t \rangle \\ \circ \\ \langle 0, 0, n-1 | \psi_t \rangle - \langle 1, 0, n-1 | \psi_t \rangle \end{pmatrix}$$

با بازنویسی بیان بالا با استفاده از  $\Phi(n+1, t)$  و  $\Phi(n-1, t)$  داریم:

$$\Phi(n, t+1) = M_- \Phi(n+1, t) + M_+ \Phi(n-1, t) \quad (44.2)$$

که ماتریس‌های  $M_+$  (پیش‌برنده) و  $M_-$  (عقب‌برنده) به شکل زیر خوانده می‌شوند:

$$M_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (45.2)$$

$$M_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (46.2)$$

مطابق با روابط (42.2) و (43.2) بیانی برای دامنه‌های ولگشت کوانتومی با حافظه روی دایره به دست می‌آوریم [۱۶] و تحول زمانی ولگشت را با سری فوریه نشان می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(k, t+1) &= \sum_{n=0}^{d-1} e^{\gamma \pi i k n / d} \Phi(n, t+1) \\ &= \sum_{n=0}^{d-1} e^{\gamma \pi i k n / d} (M_- \Phi(n+1, t) + M_+ \Phi(n-1, t)) = (e^{-\gamma \pi i k / d} M_- + e^{\gamma \pi i k / d} M_+) \tilde{\Phi}(k, t) \end{aligned} \quad (47.2)$$

از روابط بالا برای تحول زمانی یک رابطه بازگشتی در فضای فوریه می‌نویسیم:

$$\tilde{\Phi}(k, t) = M_k^t \tilde{\Phi}(k, 0) \quad (48.2)$$

که

$$M_k = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\gamma i k \pi}{d}} & 0 & e^{-\frac{\gamma i k \pi}{d}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\gamma i k \pi}{d}} & 0 & e^{\frac{\gamma i k \pi}{d}} \\ 0 & e^{\frac{\gamma i k \pi}{d}} & 0 & -e^{-\frac{\gamma i k \pi}{d}} \\ e^{\frac{\gamma i k \pi}{d}} & 0 & -e^{\frac{\gamma i k \pi}{d}} & 0 \end{pmatrix} \quad (49.2)$$

$A = \exp(-2\pi ik/d)$  نشان می‌دهیم. ماتریس  $M_k$  ویژه‌مقادیر زیر را دارد [۲۲]:

$$\lambda_1 = -1,$$

$$\lambda_2 = 1,$$

$$\lambda_3 = \frac{1 + A^2 + \sqrt{A^4 - 6A^2 + 1}}{2\sqrt{2}A},$$

$$\lambda_4 = \frac{1 + A^2 - \sqrt{A^4 - 6A^2 + 1}}{2\sqrt{2}A},$$

ویژه‌بردارهای متناظر را به این شکل خواهیم داشت:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}A^2}{2A+\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}A+1} \\ \frac{A(\sqrt{2}A+2)}{2A+\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} \frac{A^2}{\sqrt{2}A-1} \\ \frac{1}{\sqrt{2}A-1} \\ \frac{A(\sqrt{2}A-2)}{\sqrt{2}-2A} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(A^2 - \sqrt{A^4 - 6A^2 + 1} - 1) \\ \frac{A^2 + \sqrt{A^4 - 6A^2 + 1} - 1}{2A^2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(A^2 + \sqrt{A^4 - 6A^2 + 1} - 1) \\ -\frac{A^2 + \sqrt{A^4 - 6A^2 + 1} + 1}{2A^2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ولگشت را از مکان  $0$ ، با سکه در حالت  $|0\rangle$  شروع می‌کنیم. برای این مورد به ثبت کننده دیگری برای ذخیره حافظه نیاز داریم، در حالت اولیه، بردار حالت این‌گونه نوشته می‌شود:

$$|\phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes |0\rangle \quad (50.2)$$

این رابطه نشان می‌دهد ثبت کننده حافظه برهم‌نهی از  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$  و کت حالت  $|0\rangle$  ثبت کننده سکه می‌باشد.

بردارهای دامنه در این بخش به صورت زیر نشان داده می‌شوند:

$$\Phi(n, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \delta_{n0} \quad (51.2)$$

بنابراین حالت اولیه تبدیل فوریه یافته به شکل زیر است:

$$\tilde{\Phi}(k, \circ) = \frac{1}{\sqrt{۴}} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix} \quad (۵۲.۲)$$

به ازای هر  $k = \circ, \dots, d - ۱$ .

حالا می‌خواهیم دامنه‌ها را در فضای فوریه بعد از  $t$  گام محاسبه کنیم. بعد از  $t$  گام بردار دامنه‌ها این‌گونه نشان داده می‌شود:

$$\tilde{\Phi}(k, t) = M_k^t \tilde{\Phi}(k, \circ) = M_k^t \frac{1}{\sqrt{۴}} \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix} \quad (۵۳.۲)$$

به ازای تمام مقادیر  $K$ .

حالا حالت اولیه ولگشت  $\tilde{\Phi}(k, \circ)$  را بر مبنای  $\{v_i\}_{i=۱, \dots, ۴}$  می‌نویسیم:

$$\tilde{\Phi}(k, \circ) = \sum_{i=۱}^۴ \alpha_i(k) v_i(k) \quad (۵۴.۲)$$

که:

$$\alpha_i(k) = (v_i(k), \tilde{\Phi}(k, \circ)) \quad (۵۵.۲)$$

اجزاء  $\tilde{\Phi}(k, \circ)$  بر حسب  $\{v_i\}_{i=۱, \dots, ۴}$  هستند. تحول را در فضای فوریه می‌توان به این صورت نوشت:

$$\tilde{\Phi}(k, t) = M_k^t \sum_{i=۱}^۴ \alpha_i(k) v_i(k) = \sum_{i=۱}^۴ \alpha_i(k) \lambda_i(k)^t v_i(k) \quad (۵۶.۲)$$

اجزاء اصلی توسط بردارهای سری فوریه به این شکل نوشته می‌شوند:

$$\tilde{\Phi}(n, t) = \frac{1}{d} \sum_{k=\circ}^{d-۱} e^{i\pi kn/d} \tilde{\Phi}(k, t) = \frac{1}{d} \sum_{k=\circ}^{d-۱} \sum_{j=۱}^۴ e^{i\pi kn/d} \alpha_j(k) \lambda_j(k)^t v_j(k) \quad (۵۷.۲)$$



با استفاده از رابطه بالا احتمال پیدا شدن ذره در  $n$  امین جایگاه بعد از  $t$  گام به شکل زیر می‌باشد:

$$p(n, t) = |\Phi(n, t)|^2 = \frac{1}{d^2} \sum_{k, m=0}^{d-1} \sum_{j, l=1}^4 e^{\gamma \pi i(m-k)n/d} \alpha_j^*(k) \alpha_l(m) \times v_j^\dagger(k) v_l(m) [\lambda_j(k)^* \lambda_l(m)]^t \quad (58.2)$$

## ۲.۲.۲ متوسط زمانی توزیع حدی احتمال

مطابق [۱۹]، متوسط زمانی توزیع احتمال  $\bar{p}(n) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} p(n, s)$  را بررسی می‌کنیم. با استفاده از بیان (۵۸.۲) برای  $p(n, t)$  می‌رسیم به:

$$\bar{p}(n) = \sum_{k, m=0}^{d-1} \sum_{j, l=1}^4 K_n(k, j, m, l) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} [\lambda_j^*(k) \lambda_l(m)]^s \quad (59.2)$$

که:

$$K_n(k, j, m, l) \equiv \frac{1}{d^2} \alpha_j^*(k) \alpha_l(m) v_j^\dagger(k) v_l(m) e^{\gamma \pi i(m-k)n/d} \quad (60.2)$$

می‌توان گفت که هم‌گرایی  $\bar{p}(n)$  فقط به رفتار جمله زیر بستگی دارد:

$$f(k, j, m, l) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} [\lambda_j^*(k) \lambda_l(m)]^s \quad (61.2)$$

مقدار این تابع به ضرب ویژه‌مقادیر بستگی دارد:

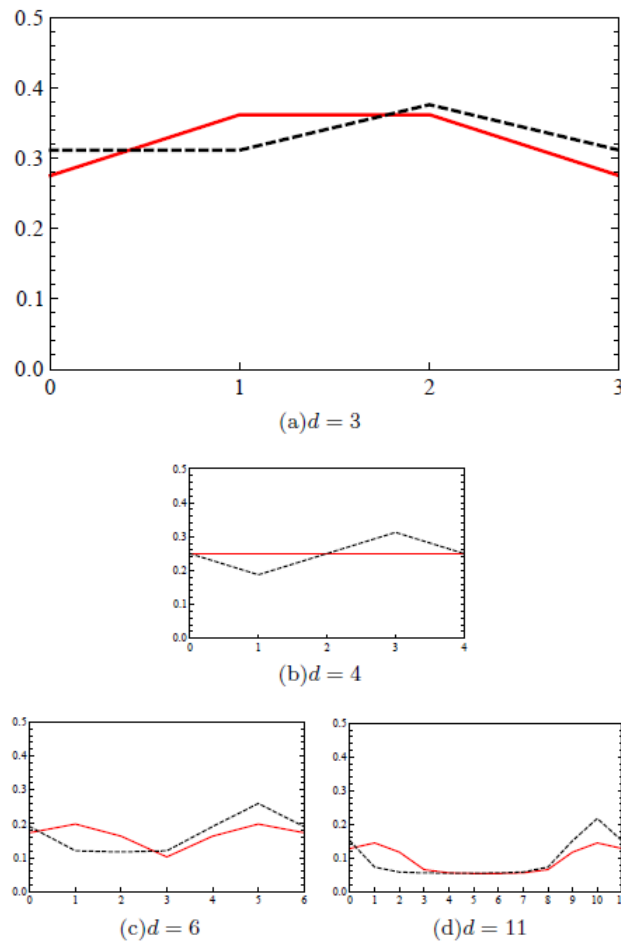
$$f(k, j, m, l) = \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda_j^*(k) \lambda_l(m) = 1 \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \quad (62.2)$$

برای مثال میانگین توزیع حدی<sup>۱</sup> برای مدلی که در معادله (۵۹.۲) استفاده شده است، در شکل ۳.۲ و ۴.۲ نشان داده شده است.

برای مشاهده تاثیر حالت اولیه روی نتایج توزیع، دو حالت اولیه متفاوت را برای رسم نمودار توزیع حدی به کار بردیم. وقتی که حالت اولیه را معادله (۵۰.۲) در نظر گرفته باشیم و ثبت‌کننده<sup>۲</sup> حافظه برهم‌نهی از حالات باشد، نتایج متوسط زمانی توزیع احتمال نسبت به مکان شروع حرکت ذره، متقارن است و اگر ثبت‌کننده حافظه حالت اولیه  $\langle 0 |$  باشد، این ویژگی را نخواهد داشت.

<sup>۱</sup>Limiting Distribution

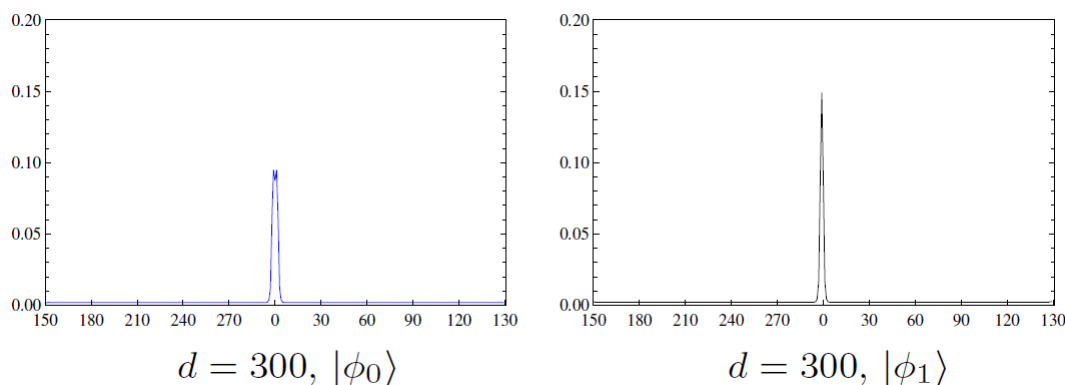
<sup>۲</sup>Register



شکل ۳.۲: توزیع حدی برای ولگشت‌های هادامارد روی دایره با یک گام حافظه به ازای تعداد جایگاه  $d = 3, 4, 6, 11$  برای حالت‌های اولیه داده شده در معادله (۵.۲) (خطوط ممتد) و  $|\phi_1\rangle$  (نقطه‌چین). برای هر مورد نتایج از  $0$  تا  $d$  رسم شده‌اند که به‌طور تناوبی توزیع حدی را نشان می‌دهد.

مقایسه نمودارهای توزیع حدی به ازای تعداد جایگاه‌هایی زیاد در شکل ۴.۲ نشان داده شده است. در شکل ۴.۲ می‌بینیم که قله شدیدی از توزیع حدی در نزدیکی جایگاهی می‌باشد که ذره حرکت خود را شروع کرده است. تفاوت مهمی که در مقایسه این نمودارها با ولگشت کوانتومی روی دایره وجود دارد این است که در مورد ولگشت‌های کوانتومی حافظه‌دار، میانگین توزیع حدی، به حالت اولیه سکه و ثبت‌کننده حافظه وابسته است اما به پاریته<sup>۲</sup> و تعداد جایگاه‌ها وابستگی ندارد [۲۷] [۲۸].

<sup>۲</sup>Parity



شکل ۴.۲: توزیع حدی برای ولگشت کوانتومی هادامارد روی دایره با یک گام حافظه به ازای تعداد جایگاه  $d = 300$ ، با حالت اولیه  $|\phi_0\rangle$  از معادله (۵۰.۲) (شکل چپ) و حالت اولیه  $|\phi_1\rangle = (1, 0, 0, 0)^T$  (شکل راست).

## ۳.۲ ولگشت‌های کوانتومی حافظه‌دار با سکه چرخشی و سکه وابسته به حافظه کل

در این قسمت با استفاده از یک تابع حافظه، از طریق یک سکه وابسته به تاریخچه سکه، مدلی برای ولگشت کوانتومی حافظه‌دار زمان-گسسته معرفی می‌کنیم. با شبیه‌سازی عددی این مدل چندین پدیده را می‌توان مشاهده کرد.

در مدل کوانتومی زمان-گسسته معمولی ولگشت، تعدادی سکه مرتبط با خود دارد که جهت ولگشت را در انتشار راس‌های گراف تعیین می‌کند. در این بخش ما موردی را بررسی می‌کنیم که در آن چند سکه را به کار می‌گیرند که می‌تواند به‌عنوان حافظه یا مقدار سکه قبلی تفسیر شود. نشان داده شده است که این حافظه تاثیر زیادی روی تحول ولگشت کوانتومی خواهد داشت و می‌تواند موجب انتقال از آمار کوانتومی به آمار کلاسیکی باشد [۲۹].

همچنین در این بخش اثرات سکه‌های وابسته به تاریخچه را بررسی خواهیم کرد. تاثیراتی را که اندازه‌گیری عناصر حافظه روی تحول ولگشت دارد را بررسی می‌کنیم و روی آهنگ انتشار توزیع احتمال به‌عنوان یک تابع طول حافظه بحث می‌کنیم.

### ۱.۳.۲ فرمالیزم ولگشت کوانتومی برای گراف‌های خطی

با تعریف کردن یک ولگشت به‌عنوان یک سیستم دوقسمتی  $|x, c\rangle$  شروع می‌کنیم.  $x$  مکان ولگشت در گراف و  $c$  مقدار سکه است که جهت حرکت ولگشت را تعیین می‌کند. در فرمالیزم ولگشت کوانتومی

زمان-گسسته استاندارد برای یک تک ولگشت روی گراف خطی، تحول سیستم به دو گام تجزیه می‌شود:

$$C : |x, c\rangle \rightarrow \sum_j A_{cj}^x |x, j\rangle \quad (۶۳.۲)$$

$$S : |x, c\rangle \rightarrow |x + c, c\rangle$$

که  $A^x$  ماتریس سکه یکانی است که دامنه‌های انتقال را در موقعیت  $x$  تعریف می‌کند، با توجه به حالت سکه، مکان ولگشت یکی اضافه یا کم می‌شود. عملگر سکه مقدار سکه را اداره می‌کند و حالت سکه را تبدیل به برهم‌نهی از چپ و راست می‌کند ( $|R\rangle + |L\rangle$ ) و عملگر انتقال مقدار مکان را مطابق با مقدار سکه تغییر می‌دهد. بعد از اعمال عملگر سکه، مقدار سکه جهتی را که ولگشت می‌خواهد در گام بعدی انتشار پیدا کند، بیان می‌کند. بعد از گذشتن  $t$  گام حالت خروجی می‌شود:

$$(SC)^t |\psi_{in}\rangle = |\psi_{out}\rangle$$

$$|\psi\rangle_t = U^t |\psi\rangle_{in}$$

این فرمالیزم را می‌توان با تعمیم دادن فضای سکه بیشتر از  $\pm 1$  به گراف‌های مرتبه بالاتر تعمیم داد. اما ابتدا برای سادگی روی گراف‌های خطی تمرکز می‌کنیم.

### ۲.۳.۲ فرمالیزم با حافظه

برای بررسی تعدادی عنصر حافظه دلخواه می‌توانیم فضای هیلبرت حافظه اضافی تولید کنیم. با  $N$  عنصر حافظه، حالت ولگشت به عنوان  $|x, c_1, \dots, c_N\rangle$  تعریف می‌شود و تحول سیستم را با اضافه کردن یک عملگر به‌روز رسانی حافظه ( $M$ )، به سه مرحله تجزیه می‌کنیم و به شکل زیر می‌نویسیم:

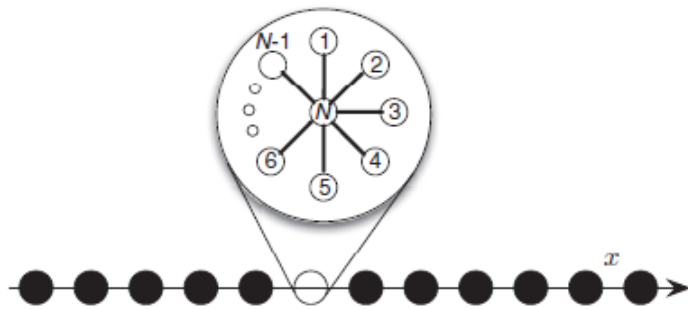
$$C : |x, c_1, \dots, c_N\rangle \rightarrow \sum_j A_{c_N, j}^{(x)} |x, c_1, \dots, c_{N-1}, j\rangle$$

$$S : |x, c_1, \dots, c_N\rangle \rightarrow |x + c_N, c_1, \dots, c_N\rangle$$

$$M : |x, c_1, \dots, c_N\rangle \rightarrow |x, c_N, c_1, \dots, c_{N-1}\rangle \quad (۶۴.۲)$$

$c_i$  مقدار سکه عنصر حافظه  $i$ ام می‌باشد (حافظه مقدار سکه  $i$ گام قبل)، شکل ۷.۲ را ببینید.

همان‌طور که قبلاً هم گفته شد همدوسی عملگر سکه آخرین عنصر حافظه را اداره می‌کند و آن را به برهم‌نهی از چپ و راست تبدیل می‌کند و عملگر انتقال نیز مکان فعلی را مطابق با آخرین عنصر حافظه به‌روز رسانی می‌کند و عملگر به‌روز رسانی حافظه به طور دوره‌ای عنصر حافظه را همانند  $c_i \rightarrow c_i + 1$  جابجا می‌کند.



شکل ۵.۲: شماتیکی از ولگشت کوانتومی حافظه‌دار. ولگرد را می‌توانیم بعنوان مولکولی در نظر بگیریم که  $N$  ذره با اسپین  $\frac{1}{2}$  را حمل می‌کند. عمل چرخش سکه روی اسپین  $N$  یک دوران یکانی با زاویه‌ای است که به وسیله مجموع قطبیدگی  $N - 1$  اسپین حافظه دیگر تعیین می‌شود (یک تابع حافظه). اسپین مرکزی  $N$  اثر انتقال را روی تمام اسپین مولکول در فضا فراهم می‌کند. در نهایت در گام بروزرسانی حافظه اسپین‌ها چرخه‌ای جایگزین می‌شوند.

وقتی که تعداد عناصر حافظه کمترین مقدار خود، یعنی  $N = 1$  را داشته باشد به آن ولگشت گلدفیش<sup>۴</sup> می‌گویند (گلدفیش کمترین حافظه را بین حیوانات دارد) و وقتی که  $N = t$  باشد به آن ولگشت فیل<sup>۵</sup> می‌گویند (فیل به داشتن بهترین حافظه در بین حیوانات مشهور است). می‌خواهیم اثر چرخش سکه وابسته به حافظه بر روی ولگشت کوانتومی را بررسی کنیم. عملگر سکه را باید به گونه‌ای انتخاب کنیم که آخرین عنصر حافظه را اداره کند. بعد از گذشت  $t$  گام حالت خروجی به این شکل داده می‌شود:

$$|\psi_{out}\rangle = (MSC)^t |\psi_{in}\rangle$$

از این پس حالت ورودی را به شکل تقارنی زیر در نظر می‌گیریم:

$$|\psi_{in}\rangle = |0\rangle \otimes \frac{(|-1, \dots, -1\rangle + |1, \dots, 1\rangle)}{\sqrt{2}} \quad (65.2)$$

و یک سکه متقارن را به کار می‌بریم:

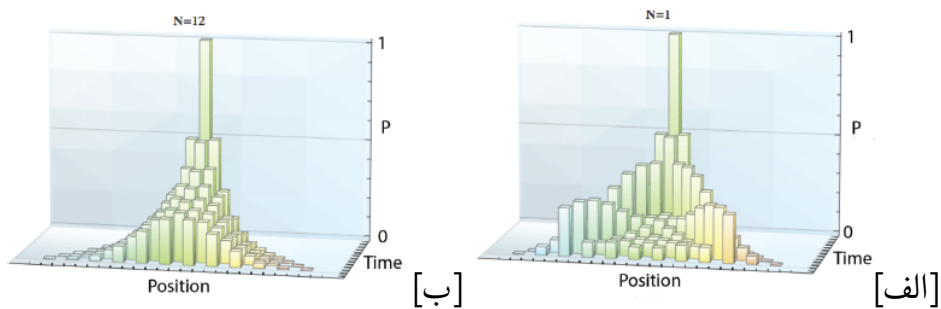
$$A(x) = e^{-i\frac{\pi}{4}\delta^x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \forall x \quad (66.2)$$

تحول زمانی کامل به ازای ۱۲ گام برای دو نوع ولگشت گلدفیش و فیل در شکل ۶.۲، نشان داده شده است.

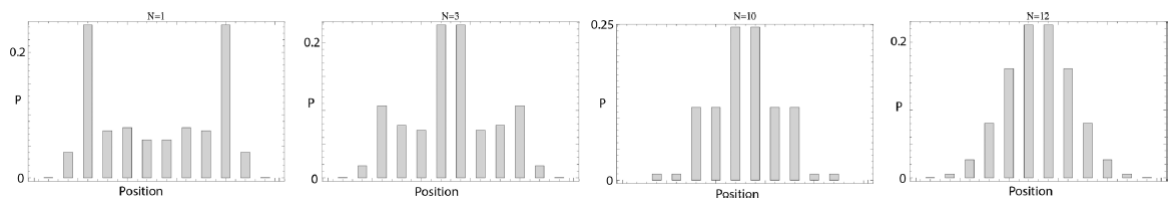
توزیع احتمال خروجی برای میزان حافظه‌های متفاوت در شکل ۷.۲ نشان داده شده است:

<sup>۴</sup>goldfish walk

<sup>۵</sup>elephant walk



شکل ۶.۲: تحول زمانی بالای ۱۲ گام برای ولگشت گلدفیش ( $N = 1$ )، که در شکل دو قله انتشار ولگشت کوانتومی را می‌بینید. (الف) و همچنین برای ولگشت فیل ( $N = t = 12$ ) که در شکل آمار ولگشت کلاسیکی تصادفی را می‌بینید. (ب).



شکل ۷.۲: توزیع احتمال خروجی برای  $t = 12$  با طول حافظه متفاوت ( $N$ ). از چپ به راست:  $N = 1$  (ولگشت گلدفیش)،  $N = 3$ ،  $N = 10$ ، و  $N = t = 12$  (ولگشت فیل). در مورد یک ولگشت گلدفیش معمولاً توزیع دو‌قله‌ای ولگشت کوانتومی تک سکه استاندارد را مشاهده می‌کنیم و در مورد یک ولگشت فیل، توزیع دو جمله‌ای آمارهای کلاسیکی را می‌بینیم.

در مورد ولگشت گلدفیش می‌بینیم که توزیع یک ولگشت کوانتومی استاندارد با تک سکه دو قله دارد و در ولگشت فیل یک توزیع دو جمله‌ای را می‌بینیم. دلیل این‌که برای ولگشت فیل آمار کلاسیکی می‌بینیم این است که ولگشت همیشه یک حافظه کامل از تحول را دارد بنابراین دو خط سیر باهم تداخل نمی‌کنند و بنابراین مستقل از دیگری رشد می‌کنند و توزیع کلاسیکی حاصل می‌شود.

ولگشت گلدفیش نسبت به ولگشت فیل، کوانتومی است و اگر در هر گام روی سکه اندازه‌گیری انجام بدهیم به توزیع ولگشت فیل می‌رسیم. یا به‌طور معادل مقدار سکه در هر گام دچار واهمدوسی می‌شود.

در مورد ولگشت فیل آمار کلاسیکی را مشاهده می‌کنیم و تحول یکانی است و به‌وسیله برگشت زمانی می‌توانیم به حالت ورودی ولگشت بازگردیم که این در مورد ولگشت کلاسیکی امکان‌پذیر نیست.

### ۳.۳.۲ فضای دو بعدی

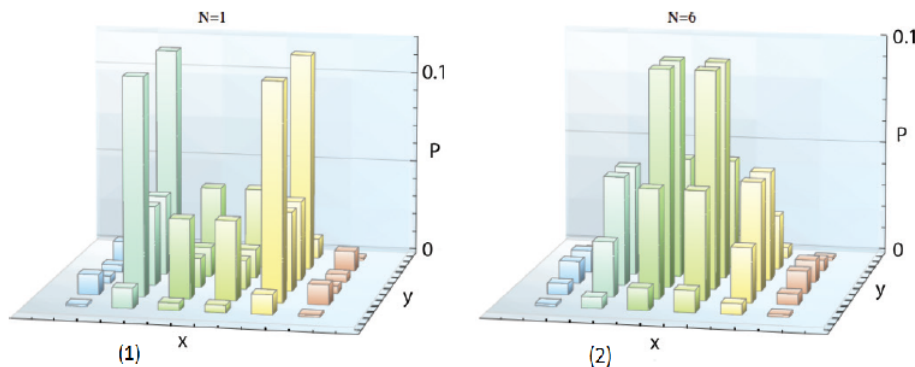
می‌خواهیم ولگشت کوانتومی روی فضای دو بعدی را بررسی کنیم. این کار را با فرمالیزم تولید شده در قبل و توسعه درجه آزادی سکه به داشتن چهار حالت کلی (بالا و پایین و چپ و راست) می‌توان انجام داد. حالت پایه به این شکل می‌باشد:  $|x, y, c_1, \dots, c_N\rangle$ . دو بعد فضا را مشخص می‌کنند. ما با ولگشتی که در مرکز گراف قرار گرفته است شروع می‌کنیم و مواردی را بررسی می‌کنیم که جدایی‌پذیر هستند:

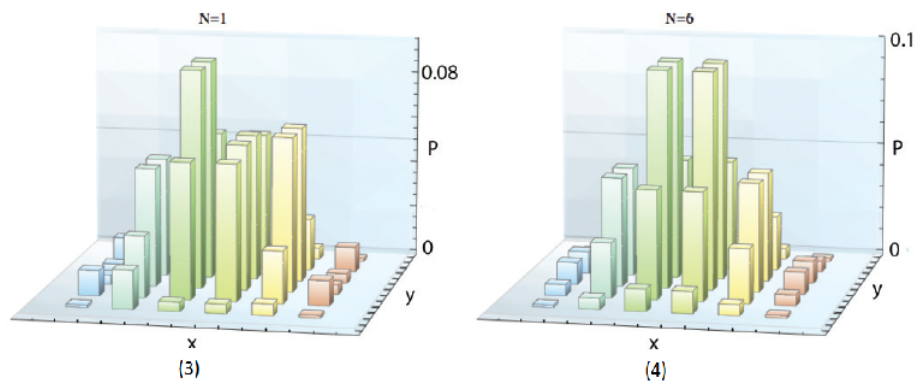
$$A_{\psi D}^{(x)} = e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma^x} \otimes e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma^x} \forall x \quad (۶۷.۲)$$

عملگر سکه روی دو فضا به‌طور مستقل عمل می‌کند. عملگر سکه‌ای که حالت بیشینه درهم‌تنیده ایجاد می‌کند را به این شکل معرفی می‌کنیم:

$$A_{\psi Dent}^{(x)} = (e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma^x} \otimes e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma^x}). \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \forall x \quad (۶۸.۲)$$

توزیع احتمال نهایی، در حضور حافظه و بدون حافظه در شکل ۸.۲ نشان داده شده است.





شکل ۸.۲: توزیع فضایی یک ولگشت کوانتومی روی شبکه دو بعدی با  $t = ۶$  با استفاده از چرخش سکه جدایی‌پذیر (از معادله (۶۷.۲)) و سکه درهم‌تنیده (از معادله (۶۸.۲)). (۱) ولگشت گلدفیش و سکه‌های جدایی‌پذیر، (۲) ولگشت فیل و سکه‌های جدایی‌پذیر، (۳) ولگشت گلدفیش و سکه‌های درهم‌تنیده، (۴) ولگشت فیل و سکه‌های درهم‌تنیده. وقتی که سکه‌های جدایی‌پذیر به‌کاربرده شود یا حافظه کامل در نظر گرفته شود، توزیع احتمال طی دو درجه آزادی فضایی جدایی‌پذیر می‌باشد.

می‌توانیم ببینیم که همه توزیع‌های احتمال نسبت به محورهای  $x$  و  $y$  (درجات آزادی مکان)، جدایی‌پذیر هستند به‌جز جایی که سکه‌های درهم‌تنیده به‌کارگرفته شده است و هیچ حافظه‌ای وجود ندارد (شکل ۸.۲ مورد ۳). برای حالتی که حافظه معرفی کرده باشیم، حتی وقتی که سکه درهم‌تنیده به‌کار ببریم هیچ درهم‌تنیدگی بین درجات آزادی مکانی مشاهده نمی‌کنیم (شکل ۸.۲ مورد ۴). یعنی اگر ولگشت کوانتومی حافظه کامل داشته باشد توزیع‌ها جدایی‌پذیرند حتی اگر سکه درهم‌تنیده باشد. بنابراین حافظه نه تنها توزیع ولگشت را به توزیع دوجمله‌ای کلاسیکی کاهش می‌دهد بلکه درهم‌تنیدگی بین دو درجه آزادی فضا را نیز از بین می‌برد.

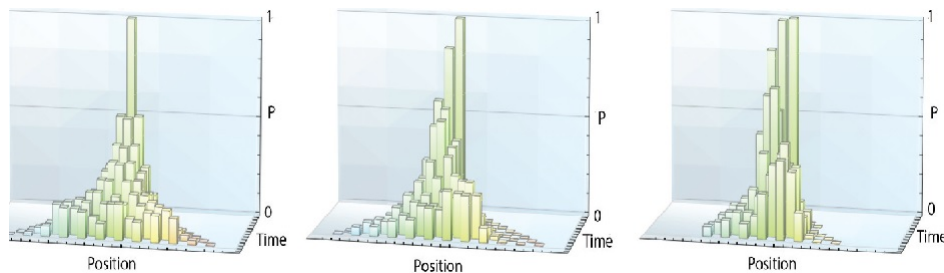
### ۴.۳.۲ سکه‌های وابسته به تاریخچه

تا به حال سکه‌هایی را بررسی کردیم که مستقل از تمام تاریخچه حافظه بودند و فقط به آخرین عنصر حافظه وابسته بودند. اینجا موردی را بررسی می‌کنیم که در آن عملگر سکه تابعی از تمامی حافظه‌های قبلی می‌باشد و این روش را به‌عنوان ولگشت پیردانا<sup>۶</sup> در نظر می‌گیریم. عملگر سکه‌ای به شکل زیر را در نظر می‌گیریم:

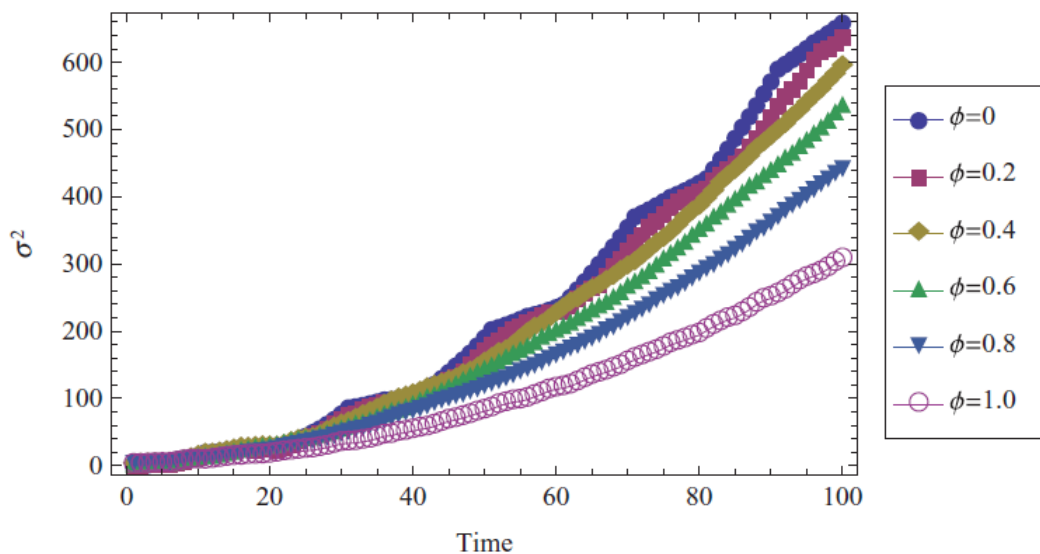
$$A^x(\theta) = e^{i\theta\sigma^y} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \forall x \quad (۶۹.۲)$$

<sup>۶</sup>wise old man





شکل ۹.۲: تحول زمانی طی ۱۲ گام برای یک ولگشت پیر دانا با  $N = 5$  و تابع حافظه از معادله (۶۶.۲). (چپ) یک ولگشت هادامارد ( $\phi = 0$ )، (وسط)  $\phi = 0.5$ ، (راست)  $\phi = 1$ . هر چه  $\phi$  افزایش یابد انتشار در یک جهت بیشتر از دیگری می‌شود، تا توزیعی متقارن حاصل شود.



شکل ۱۰.۲: تحول واریانس توزیع احتمال نسبت به زمان به ازای  $N = 5$  برای یک ولگشت پیر دانا برای پارامترهای متفاوت تاریخچه  $\phi$  و تابع حافظه معادله (۶۶.۲). هر چه  $\phi$  بیشتر شود انتشار افزایش می‌یابد.

که زاویه  $\theta$  با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \phi \frac{\pi}{4} \frac{\sum_{i=1}^{N-1} c_i}{N-1} \quad (70.2)$$

$0 \leq \phi \leq 1$  پارامتری است که میزان تاثیر حافظه را تعیین می‌کند.  $\theta$  را به‌عنوان تابع حافظه در نظر می‌گیریم که ویژگی‌های جزئی ولگشت را تعیین می‌کند. البته این تعریف فقط وقتی کارایی دارد که  $N \geq 2$  باشد. وقتی که  $\phi = 0$  باشد عملگر سکه به عملگر سکه متقارن هادامارد کاهش می‌یابد و مستقل از حافظه می‌باشد و به ولگشت‌هایی مشابه آن‌چه قبلاً بحث کردیم می‌رسیم.

در شکل ۹.۲ تحول زمانی یک ولگشت پیر دانا را با  $N = 5$  و به ازای پارامترهای متفاوت حافظه  $\phi$  رسم کردیم. اینجا حالت ورودی  $|\psi_{in}\rangle = |0, 1, \dots, 1\rangle$  را در نظر می‌گیریم. وقتی که  $\phi = 0$  باشد داریم به سکه نرمال هادامارد می‌رسیم. با افزایش  $\phi$  پخش‌شدگی کاهش می‌یابد. برای این کمیت، واریانس توزیع را برای  $\phi$  های متفاوت در شکل ۱۰.۲ نشان داده‌ایم.

فرض کنیم  $\phi = 1$ . اگر ولگشت یک حافظه طولانی حرکت کردن به راست را داشته باشد:  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{4}$  و عملگر سکه به ماتریس بیت-فلیپ<sup>۷</sup> کاهش می‌یابد.

$$A^{(x)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \forall x \quad (71.2)$$

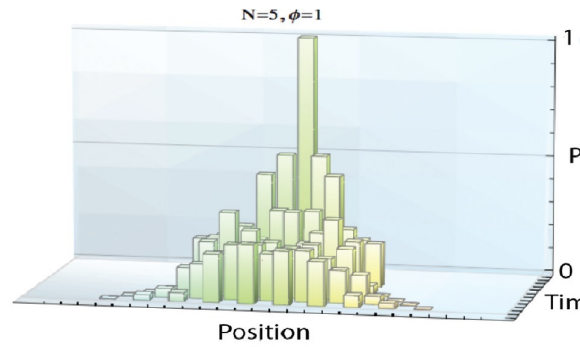
سپس ولگشت جهت خودش را پیدا می‌کند و به طرف مبدا به عقب برمی‌گردد. از طرفی دیگر اگر ولگشت یک حافظه طولانی از حرکت به سمت چپ داشته باشد  $\theta \rightarrow 0$  و عملگر سکه به ماتریس همانی کاهش پیدا می‌کند:  $diag(1, 1) = A^{(x)}(0) = I \forall x$  و ولگشت تمایل دارد به جهت فعلی‌اش ادامه دهد بنابراین ولگشت به انتشار در یک جهت اصرار می‌کند، در حالی‌که در دیگری این‌گونه نیست و توزیع نامتقارنی که در شکل ۹.۲ دیده می‌شود را خواهیم داشت. برای بهتر فهمیدن این ویژگی‌ها حالت ورودی  $|\psi_{in}\rangle = |0, -1, \dots, -1\rangle$  را بررسی می‌کنیم. در این مورد عملگر سکه یک ماتریس همانی است و همانی باقی می‌ماند و بدون وارد شدن هیچ برهم‌نهی ولگشت به سمت چپ فرستاده می‌شود (که این مورد را شکل نشان نمی‌دهد)، به این دلیل است که در شکل ۹.۲ فقط جمله  $|\psi_{in}\rangle = |0, 1, \dots, 1\rangle$  را بررسی کرده‌ایم که به خوبی پافشاری ذره را در جهت حرکت به راست نشان می‌دهد. البته انتخاب تابع حافظه برای شکل ۱۱.۲ یکتا نیست و هر تابعی می‌تواند انتخاب شود.

یک مثال ساده از انتخاب تابع حافظه به این شکل است:

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \phi \frac{\pi}{4} \frac{\left| \sum_{i=1}^{N-1} c_i \right|}{N-1} \quad (72.2)$$

تابع حافظه‌ای که مورد بحث قرار دادیم موجب کاهش پراکندگی توزیع ولگشت می‌شود. می‌توانیم

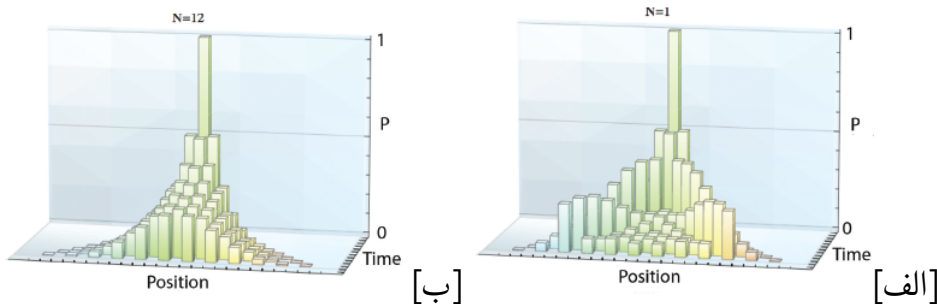
<sup>۷</sup>bit-flip



شکل ۱۱.۲: تحول زمانی طی ۱۲ گام برای یک ولگشت پیر دانا با  $N = 5$  با تابع حافظه معادله (۷۲.۲). انتشار به دو جهت محدود می‌شود تا به توزیعی موضعی می‌رسد.

تابع حافظه را به گونه‌ای انتخاب کنیم که انتشار را افزایش دهد.

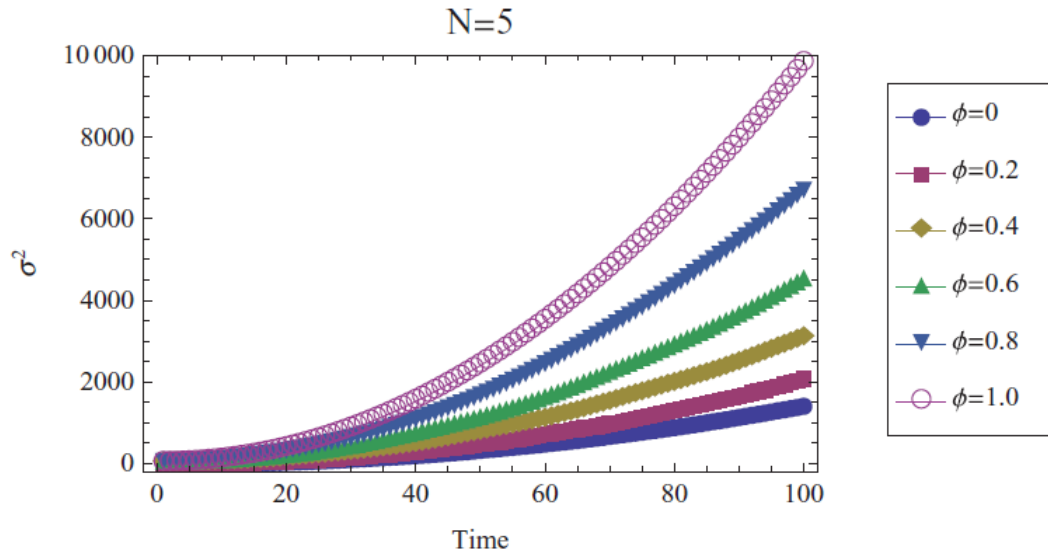
$$\theta = \frac{\pi}{4} - \phi \frac{\pi}{4} \frac{\left| \sum_{i=1}^{N-1} c_i \right|}{N-1} \quad (۷۳.۲)$$



شکل ۱۲.۲: تحول زمانی طی ۱۲ گام برای یک ولگشت پیر دانا با  $N = 5$  و تابع حافظه از معادله (۷۳.۲).  $\phi = 0/5$  (الف).  $\phi = 1$  (ب). در مقایسه با شکل ۹.۲ (چپ) پراکندگی در دو جهت بیشتر شده. برای  $\phi = 1$  می‌بینیم که ولگرد به سرعت به دو جهت برده می‌شود. به طور کلی این اتفاق رخ نمی‌دهد اما این نتایج از انتخاب حالت اولیه  $|\psi_{in}\rangle = \frac{(|0, -1, \dots, -1\rangle + |0, +1, \dots, +1\rangle)}{\sqrt{2}}$  به دست می‌آیند، در این حالت بیشترین پراکندگی ممکن را داریم.

اگر تابع حافظه را به شکلی که در بالا نشان دادیم انتخاب کنیم انتشار به ازای  $\phi$ ‌های بزرگ‌تر افزایش پیدا می‌کند. وقتی که تاریخچه در جهت یکسانی دوام پیدا کند عملگر سکه به ماتریس همانی کاهش می‌یابد و وقتی که بدون جهت باشد (یعنی احتمال حضور برای راست و چپ رفتن ذره یکسان باشد)، عملگر سکه به ماتریس هادامارد کاهش می‌یابد. (این در شکل ۱۲.۲ با یک حالت ورودی متقارن نشان

داده شده است). در شکل (۱۳.۲) واریانس را برای  $\phi$  های مختلف با تابع حافظه از معادله (۷۳.۲) رسم کرده‌ایم. همه منحنی‌ها به توزیع درجه دوم می‌رسد. تابع حافظه در معادله (۷۳.۲) همان تابع حافظه در معادله (۷۲.۲) می‌باشد با مقدار  $\phi$  -.



شکل ۱۳.۲: تحول واریانس توزیع احتمال نسبت به زمان برای یک ولگشت پیر دانا با  $N = 5$  به ازای پارامترهای تاریخچه  $\phi$  مختلف و تابع حافظه معادله (۷۳.۲). با افزایش  $\phi$  انتشار افزایش می‌یابد.

بنابراین برای تابع حافظه در معادله (۷۲.۲) سه مورد وجود دارد:  $\phi = 0$ ، در این مورد پهن‌شدگی هادامارد معمولی را می‌بینیم.  $0 < \phi \leq 1$  کاهش انتشار و به ازای  $0 < \phi < 1$  افزایش انتشار را داریم. توجه داشته باشید که:

$$\sigma^2 \propto t^{2\phi}$$

### ۵.۳.۲ یک مدل فیزیکی برای ولگشت‌های وابسته به تاریخچه سکه

برای تابع حافظه‌ای که در رابطه (۷۰.۲) تعریف شد نیاز داریم شرایط چرخش سکه  $N$  ام را جوری فراهم کنیم که حالت سکه  $N$  ام بر اساس حالت  $N - 1$  سکه باشد و  $N - 1$  حافظه قبل را به خاطر بیاورد. برای این کار رابطه (۶۴.۲) به این شکل تغییر می‌کند:

$$MSC \rightarrow MSU(\phi)C$$

$M$  و  $S$  مثل قبل تعریف می‌شود، فقط  $U(\phi)$  اضافه می‌شود.

$$C : |x, c_1, \dots, c_N\rangle \rightarrow \sum_j A_{c_N, j}^{(x)} \left( \frac{\pi}{4} \right) |x, c_1, \dots, c_{N-1}, j\rangle,$$

$$U : |x, c_1, \dots, c_N\rangle \rightarrow \sum_j U_{c_N, j}^{(x)}(\phi) |x, c_1, \dots, c_{N-1}, j\rangle,$$

$$S : |x, c_1, \dots, c_N\rangle \rightarrow |x + c_N, c_1, \dots, c_N\rangle,$$

$$M : |x, c_1, \dots, c_N\rangle \rightarrow |x, c_N, c_1, \dots, c_{N-1}\rangle \quad (74.2)$$

که:

$$U^{(x)}(\phi) = e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_N^x} e^{-i\frac{\pi\phi(x)}{4(N-1)} \sum_{j=1}^{N-1} \sigma_j^z \otimes \sigma_N^z} e^{-i\frac{\pi}{4}\sigma_N^x} \quad (75.2)$$

اینجا زاویه چرخش  $\phi(x)$  تابعی از مکان می‌باشد. همیوگ آن بوسیله دوران موضعی روی  $N$  امین سکه تعیین می‌شود. این عملگر یونیتاری توسط یک جفت‌کنندگی بین  $N-1$  سکه و  $N$  ام تولید شده است. عملگر یکانی  $U(\phi)$  شرایط دورانی را با یک زاویه‌ای که با چرخش  $S^z = \sum_{j=1}^{N-1} \sigma_j^z$  دیگر سکه‌های حافظه روی  $N$  امین سکه متناسب است، فراهم می‌کند.

### ۶.۳.۲ حافظه بعنوان یک مدل واهمدوسی<sup>۸</sup>

همان‌طور که پیش‌تر دیدیم حافظه کامل، توزیع احتمال ولگشت کوانتومی را به ولگشت کلاسیکی کاهش می‌دهد. حالا برای اینکه ببینیم چگونه این مورد اتفاق می‌افتد شواهد دیگری را بررسی می‌کنیم. کلی‌ترین شکل تحول زمان گسسته، فرمالیسمی است که تحول یکانی، اندازه‌گیری و فرایندهای واهمدوسی را دربرمی‌گیرد. هر فرایند کوانتومی را می‌توان بعنوان یک سیستم اولیه  $P$  در نظر گرفت که با سیستم محیط  $E$  برهم‌کنش می‌کند. در اینجا روی محیط رد گرفته می‌شود و فقط سیستم اولیه مشاهده می‌شود [۳۰]. بنابراین هر فرایند کوانتومی را می‌توان به شکل زیر نشان داد:

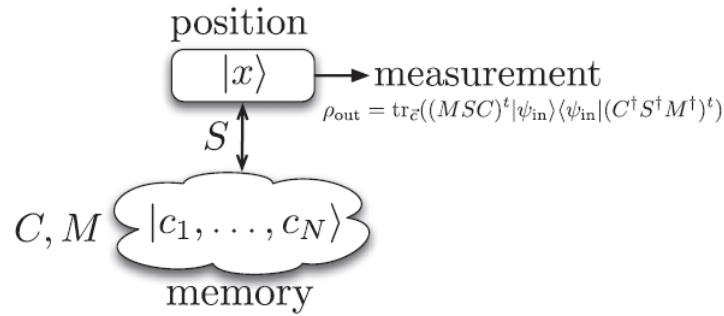
$$\rho = \varepsilon(|\psi\rangle\langle\psi|) = Tr_E(U_{P,E}|\psi\rangle\langle\psi|U_{P,E}^\dagger) \quad (76.2)$$

$U_{P,E}$  عملگر یکانی روی سیستم اولیه و محیط است که معمولاً دو سیستم را درهم‌تنیده می‌کند. در ولگشت کوانتومی حافظه‌دار این عملگر یکانی به شکل زیر است:

$$U_{P,E} = MSC$$

<sup>۸</sup>Decoherence

اینجا دو عملگر  $M$  و  $C$  فقط روی زیرسیستم سکه اثر می‌کنند و  $S$  یک عملیات درهم‌تنیدگی انجام می‌دهد که دو زیرسیستم را جفت می‌کند. پس عملگر  $U_{P,E}$  درهم‌تنیده است. در ادامه فقط  $P$  را اندازه می‌گیریم و روی  $E$  رد می‌گیریم. مدلی مانند رابطه (۷۶.۲). به شکل ۱۴.۲ نگاه کنید.



شکل ۱۴.۲: حافظه را بعنوان سیستم محیط تصور می‌کنیم. وقتی که عملگر گام، حافظه محیط را با مکان جفت می‌کند، عملگرهای به‌روزرسانی سکه و حافظه فقط روی زیرسیستم حافظه اثر می‌کنند. در پایان تحول روی محیط رد می‌گیریم و فقط زیر سیستم مکان را مشاهده می‌کنیم که معمولاً یک حالت مختلط است.

برای اینکه بفهمیم حافظه کامل چگونه توزیع احتمال یک ولگشت کوانتومی را به کلاسیکی نزدیک می‌کند، ابتدا یک گام از تحول ولگشت کوانتومی را بررسی می‌کنیم. در گام اول فقط یک سکه تولید می‌شود. تحول روی یک گام به شکل زیر است:

$$\begin{aligned}
 |\psi_{in}\rangle &= |0, +1\rangle, \\
 C|\psi_{in}\rangle &= (|0, +1\rangle - i|0, -1\rangle) / \sqrt{2}, \\
 SC|\psi_{in}\rangle &= (|1, +1\rangle - i|-1, -1\rangle) / \sqrt{2}
 \end{aligned}
 \tag{77.2}$$

بعد از اعمال  $SC$  یک حالت بیشینه درهم‌تنیده بین دو مکان داریم. با رد گرفتن روی سیستم سکه حالت بیشینه مختلط را بین دو مکان به این شکل به دست می‌آوریم:

$$Tr_{\bar{C}} (SC|\psi_{in}\rangle \langle\psi_{in}| C^{\dagger} S^{\dagger}) = (|1\rangle \langle 1| + |-1\rangle \langle -1|) / 2
 \tag{78.2}$$

این حالتی است که برای تک گام ولگشت کلاسیکی نیز به آن می‌رسیم. بنابراین مشاهده کردیم که تولید

یک سکه جدید در هر گام موجب بیشینه درهم‌تنیدگی آن با مکان می‌شود که پس از رد گرفتن روی فضای سکه به یک چرخش سکه متقارن کلاسیکی رسیدیم، بنابراین حافظه کامل که معادل است با تولید سکه جدید در هر گام در نهایت ما را به توزیع احتمال ولگشت کلاسیکی می‌رساند. از طرف دیگر چنانچه بین مقادیر سکه قبل و بعد، همبستگی کوانتومی وجود داشته باشد با میزان حافظه جزیی برای  $t \leq N$  به جای اینکه به آمار کلاسیکی برسیم رفتارهای کوانتومی ظاهر می‌شوند.  $t$  تعداد گام‌ها و  $N$  تعداد سکه‌ها می‌باشد.

این نتایج عجیب نیستند. با افزایش اندازه محیط سیستم میکروسکوپی می‌شود و واهمدوسی افزایش می‌یابد و همان‌طور که پیش از این گفتیم واهمدوسی یک ویژگی سیستم کوانتومی حافظه‌دار است که حافظه در آن اندازه‌گیری نشده باشد.





# فصل ۳

## ولگشت کوانتومی شتاب‌دار یک بعدی

در اینجا مدلی را معرفی می‌کنیم که به آن ولگشت کوانتومی شتاب‌دار می‌گوییم. بنابراین سرعت آن متغیر و طول گام آن نیز متغیر است. در این مدل فرض می‌کنیم که اگر حالت سکه  $|R\rangle$  باشد سرعت ولگرد یک واحد افزایش و اگر  $|L\rangle$  باشد یک واحد کاهش پیدا می‌کند، بنابراین فضای هیلبرتی به سیستم اضافه می‌کنیم که سرعت ولگرد در آن قابل تعریف باشد، بنابراین فضای هیلبرت کلی را برای ولگشت کوانتومی شتاب‌دار یک بعدی به شکل زیر می‌نویسیم:

$$H = H_p \otimes H_v \otimes H_c$$

از آنجاییکه طول گام‌های زمانی ما یک واحدی است بنابراین تغییر طول گام دقیقاً برابر با تغییر سرعت است. بنابراین حالت ولگشت دارای سه قسمت مکان، سرعت و سکه است و به این شکل نشان داده می‌شود:

$$|n\rangle \otimes |v\rangle \otimes |c\rangle$$

که از این پس به طور خلاصه به صورت  $|n, v, c\rangle$  می‌نویسیم.  $c$  حالت سکه،  $v$  سرعتی است که ولگشت به خود می‌گیرد و  $n$  حالت مکان ولگشت می‌باشد. تغییر سرعت ذره برحسب حالت سکه را می‌توان به صورت  $v' = v + (-1)^c$  نشان داد بنابراین مکان ذره با توجه به سرعت آن به این صورت  $n' = n + v'$  تغییر می‌کند.

در این نوع ولگشت به دلیل اینکه مکان از سرعت تاثیر می‌پذیرد و گام‌های قبلی باعث افزایش یا کاهش سرعت شده‌اند، این ولگشت جزء ولگشت‌های حافظه‌دار محسوب می‌شود اما این بار حافظه روی مکان یا سکه تاثیر ندارد بلکه روی طول گام‌های ولگشت تاثیر دارد.

### ۱.۳ عملگر تحول

عملگر تحول در این نوع ولگشت شامل سه قسمت است. همانند قبل، عملگر سکه را عملگر استاندارد هادامارد در نظر می‌گیریم:

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

بدین ترتیب عملگر تغییر سرعت را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{V} = \sum_{v=-t}^t [|v+1\rangle \langle v| \otimes |R\rangle \langle R|] + \sum_{v=-t}^t [|v-1\rangle \langle v| \otimes |L\rangle \langle L|] \quad (2.3)$$

و عملگر انتقال که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{S} = \sum_n |n+v\rangle \langle n| \otimes |v\rangle \langle v| \quad (3.3)$$

بنابراین عملگر تحول کلی به این صورت است:

$$\hat{U} = (\hat{S} \otimes \hat{I}_c) \cdot (\hat{I}_n \otimes \hat{V}) \cdot (\hat{I}_n \otimes \hat{I}_v \otimes \hat{C}) \quad (4.3)$$

از این پس برای ساده‌تر نوشتن روابط به جای  $|R\rangle$  از  $|^\circ\rangle$  و به جای  $|L\rangle$  از  $|1\rangle$  استفاده می‌کنیم. اگر حالت اولیه سکه  $|^\circ\rangle$  باشد و ذره حرکت خود را با سرعت اولیه  $^\circ$ ، از مبدا شروع کند، حالت اولیه ولگرد را به‌طور خلاصه به این شکل  $|^\circ, ^\circ, ^\circ\rangle$  می‌نویسیم. برای بررسی نحوه عملکرد عملگر تحول چند گام اولیه را به شکل زیر می‌توان خلاصه کرد؛ در اولین گام:

$$\begin{aligned} |^\circ, ^\circ, ^\circ\rangle &\xrightarrow{H} \frac{1}{\sqrt{2}} (|^\circ, ^\circ, ^\circ\rangle + |^\circ, ^\circ, 1\rangle), \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (|^\circ, ^\circ, ^\circ\rangle + |^\circ, ^\circ, 1\rangle) &\xrightarrow{V} \frac{1}{\sqrt{2}} (|^\circ, 1, ^\circ\rangle + |^\circ, -1, 1\rangle), \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (|^\circ, 1, ^\circ\rangle + |^\circ, -1, 1\rangle) &\xrightarrow{S} \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 1, ^\circ\rangle + |-1, -1, 1\rangle). \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\xrightarrow{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |3, 2, 0\rangle + |1, 0, 1\rangle + |-1, 0, 0\rangle - |-3, -2, 1\rangle \} \quad (6.3)$$

$$\xrightarrow{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |6, 3, 0\rangle + |4, 1, 1\rangle + |2, 1, 0\rangle - |0, -1, 1\rangle + |0, 1, 0\rangle + \\ |-2, -1, 1\rangle - |-4, -1, 0\rangle + |-6, -3, 1\rangle \} \quad (7.3)$$

$$\xrightarrow{4} \frac{1}{\sqrt{4}} \{ |10, 4, 0\rangle + |8, 2, 1\rangle + |6, 2, 0\rangle - |4, 0, 1\rangle + |4, 2, 0\rangle + \\ |2, 0, 1\rangle - |0, 0, 0\rangle + |-2, -2, 1\rangle + |2, 2, 0\rangle + |0, 0, 1\rangle + |-2, 0, 0\rangle - \\ |-4, -2, 1\rangle - |-4, 0, 0\rangle + |-6, -2, 1\rangle + |-8, -2, 0\rangle - |-10, -4, 1\rangle \} \quad (8.3)$$

و در نهایت حالت ولگرد بعد از گام پنجم به شکل زیر خواهد بود:

$$\xrightarrow{5} \frac{1}{4\sqrt{2}} \{ |15, 5, 0\rangle + |13, 3, 1\rangle + |11, 3, 0\rangle - |9, 1, 1\rangle + |9, 3, 0\rangle + \\ |7, 1, 1\rangle - |5, 1, 0\rangle + |3, -1, 1\rangle + |7, 3, 0\rangle + |5, 1, 1\rangle + |3, 1, 0\rangle - \\ |1, -1, 1\rangle - |1, 1, 0\rangle - |-1, -1, 1\rangle + |-3, -1, 0\rangle - |-5, -3, 1\rangle + \\ |5, 3, 0\rangle + |3, 1, 1\rangle + |1, 1, 0\rangle - |-1, -1, 1\rangle + |-1, 1, 0\rangle - \\ |-3, -1, 1\rangle - |-5, -1, 0\rangle + |-7, -3, 1\rangle - |-3, 1, 0\rangle - \\ |-5, -1, 1\rangle + |-7, -1, 0\rangle + |-9, -3, 1\rangle + |-9, -3, 0\rangle + \\ |-11, -3, 1\rangle - |-13, -3, 0\rangle + |-15, -5, 1\rangle \} \quad (9.3)$$

مشاهده می‌شود برخلاف ولگشت کوانتومی معمولی که در آن جملات تداخلی از گام سوم به بعد ظاهر می‌شوند، در ولگشت کوانتومی شتاب‌دار این جملات از گام پنجم ظاهر خواهند شد. یک ویژگی که ولگشت کلاسیکی و کوانتومی را از یکدیگر متمایز می‌کند تداخل‌های کوانتومی است. اگر در ولگشت ما هیچ تداخلی صورت نگیرد، سیستم کلاسیکی می‌شود. در مورد ولگشت کوانتومی شتاب‌دار از آنجاییکه جملات تداخلی دیرتر از ولگشت کوانتومی عادی ظاهر می‌شوند شاید این‌گونه به نظر

آید که سیستم نسبت به ولگشت کوانتومی عادی، کلاسیکی‌تر باشد. اما از آنجاییکه تعداد جملات تداخلی و قدرت تداخل‌های ویرانگر بدون حل تحلیلی یا حداقل حل عددی برای گام‌های زیاد، مشخص نمی‌شود نمی‌توان در این مورد قضاوت کرد. ما در این پایان‌نامه برای پاسخ به این سوال و بررسی این موضوع از شبیه‌سازی کامپیوتری استفاده می‌کنیم.

### ۲.۳ ولگشت کوانتومی شتاب‌دار با سرعت حدی

در ولگشت کوانتومی شتاب‌دار با افزایش تعداد گام‌ها سرعت ولگشت نیز در هر گام یک واحد افزایش می‌یابد و این به‌دین معنی است که سرعت ذره به بی‌نهایت میل می‌کند و از آنجاییکه این موضوع از نظر فیزیکی ما را دچار تناقض می‌کند و سرعت اجسام در طبیعت نیز محدود است و همچنین در ولگشت کوانتومی عادی نیز ولگرد با سرعت ۱ حرکت می‌کند ما نیز در این نوع ولگشت سرعت ذره را محدود می‌کنیم.

بنابراین ما در اینجا برای ولگرد، سرعت حدی  $\pm v_c$  را تعریف می‌کنیم که با رسیدن به آن سرعت ذره افزایش (کاهش) نیابد. بدین ترتیب عملگر تغییر سرعت را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

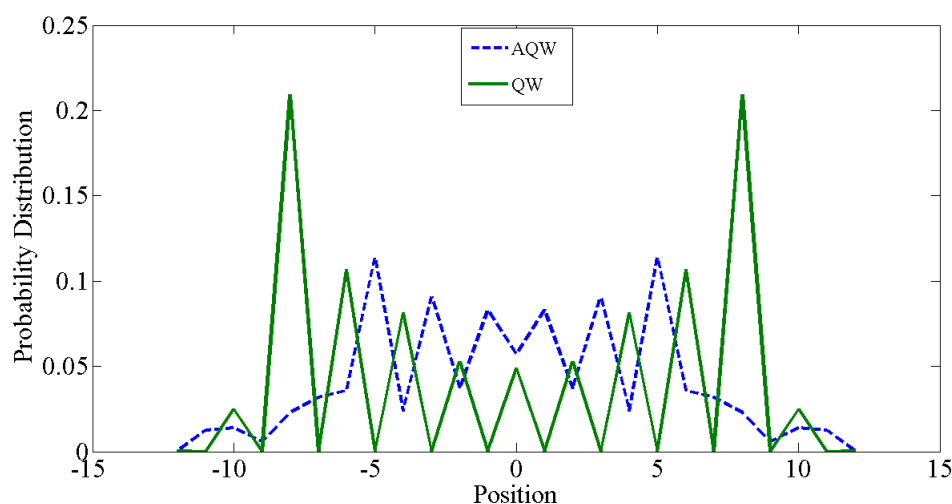
$$\hat{V} = \sum_{v=-v_c}^{v_c-1} [|v+1\rangle \langle v| \otimes |R\rangle \langle R|] + |v_c\rangle \langle v_c| \otimes |L\rangle \langle R| \quad (10.3)$$

$$+ \sum_{v=-v_c+1}^{v_c} [|v-1\rangle \langle v| \otimes |L\rangle \langle L|] + |-v_c\rangle \langle -v_c| \otimes |R\rangle \langle L|$$

که اینجا وارد کردن جملات دوم و چهارم برای یکانی بودن عملگر سرعت الزامی است.

نتیجه شبیه‌سازی ما در مورد تابع توزیع احتمال نشان می‌دهد که برخلاف حالت بدون شتاب که به ازای گام‌های زوج فقط مکان‌های زوج و به ازای گام‌های فرد فقط مکان‌های فرد اشغال می‌شدند، در ولگشت شتاب‌دار به ازای هر تعداد گامی تمام جایگاه‌ها می‌توانند اشغال شوند. از طرفی به نظر می‌رسد در ولگشت شتاب‌دار ذره تمایل بیشتری برای حفظ جایگاه خود در اطراف مبدا دارد (شکل ۱۰.۳).

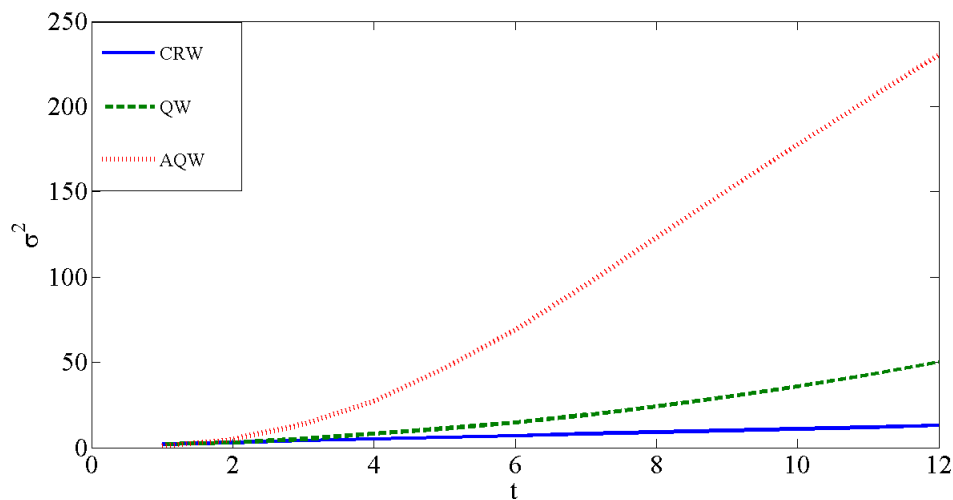
از طرفی از آنجایی که طول گام در این نوع ولگشت افزایش می‌یابد انتظار داریم ولگشت را بتوان در مکان‌های دورتری (نسبت به حالت بدون شتاب) بیابیم. بنابراین واریانس در این نوع ولگشت افزایش خواهد یافت (شکل ۲.۳ افزایش چشمگیر واریانس ولگشت شتاب‌دار نسبت به ولگشت‌های



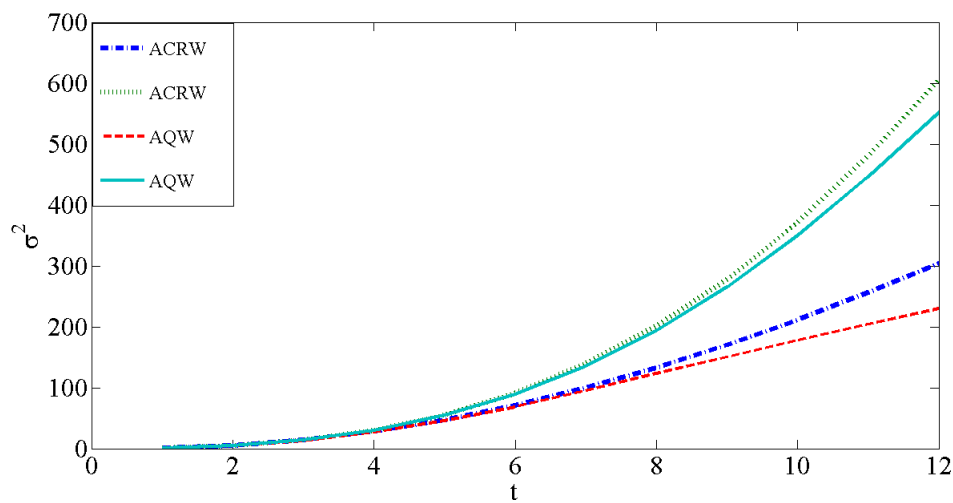
شکل ۱.۳: توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی عادی، (QW) (خط ممتد) و ولگشت کوانتومی شتاب‌دار، (AQW) (نقطه‌چین)، با سرعت حدی ۱ به ازای ۱۲ گام و حالت اولیه متقارن. بدون شتاب را نشان می‌دهد).

واریانس به‌عنوان کمیتی مهم در ولگشت‌های کوانتومی که می‌تواند معیاری از سرعت الگوریتم‌هایی باشد که بر پایه ولگشت کوانتومی ساخته می‌شوند، حایز اهمیت است. معرفی ولگشت‌های کوانتومی به‌عنوان همتای ولگشت‌های کلاسیکی نشان داد که تداخل‌های کوانتومی چگونه می‌توانند باعث افزایش توانی واریانس شوند. نتایج شبیه‌سازی‌های ما نشان می‌دهد که ولگشت شتاب‌دار به‌طور چشمگیری واریانس را افزایش می‌دهد (شکل ۲.۳). اما از آنجایی که در این نوع ولگشت علاوه بر حضور تداخل‌های کوانتومی طول گام نیز افزایش پیدا می‌کند، این سوال مطرح می‌شود که افزایش واریانس در اثر افزایش طول متوسط گام‌هاست یا در اثر تداخل‌های کوانتومی. برای پاسخ به این سوال مدل جدیدی به‌نام ”ولگشت کلاسیکی شتاب‌دار” را معرفی می‌کنیم که در آن طول گام‌ها متغیر است اما تداخل کوانتومی وجود ندارد.

نتایج شبیه‌سازی‌های ما نشان می‌دهد افزایش واریانس در ”ولگشت‌های کلاسیکی شتاب‌دار” و کوانتومی شتاب‌دار از یک مرتبه است و حتی در مورد کلاسیکی اندکی بیشتر است (شکل ۳.۳). این نتیجه نشان می‌دهد که تداخل کوانتومی در مورد ولگشت کوانتومی شتاب‌دار اثر مثبتی در افزایش واریانس ندارد. البته این نتیجه دور از انتظار نیست زیرا تحقیقات نشان داده است هرگونه حافظه روی سکه و مکان باعث حذف خصوصیات کوانتومی و میل به حالت کلاسیک است [۲۱][۲۹]. در حقیقت

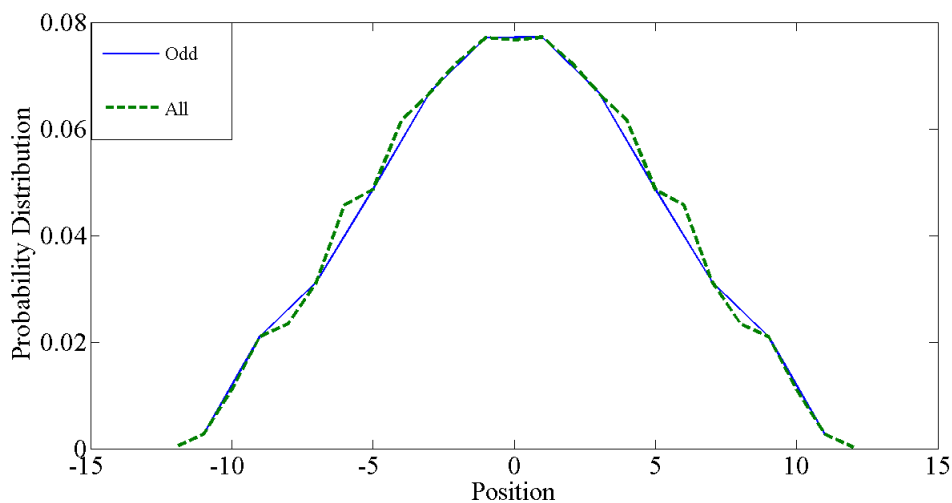


شکل ۲.۳: واریانس برای ولگشت کلاسیکی عادی (CRW) (خط ممتد) و کوانتومی عادی (QW)، (خط چین) و برای کوانتومی شتاب‌دار (AQW) (نقطه‌چین)، با سرعت حدی ۳ به ازای ۱۲ گام و حالت اولیه متقارن.

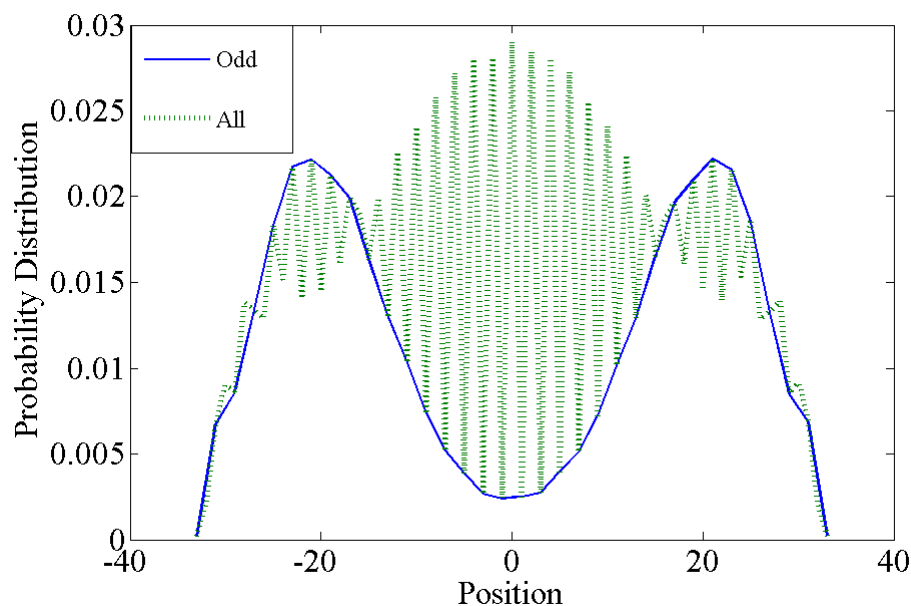


شکل ۳.۳: واریانس برای ولگشت کلاسیکی شتاب‌دار (ACRW) با سرعت حدی ۳ (خط-نقطه) و سرعت حدی ۶ (نقطه‌چین) و برای ولگشت کوانتومی شتاب‌دار (AQW) با سرعت حدی ۳ (خط چین) و سرعت حدی ۶ (خط ممتد)، به ازای ۱۲ گام و حالت اولیه متقارن.

ولگشت کوانتومی شتاب‌دار نیز نوعی ولگشت حافظه‌دار است که حافظه آن روی طول گام موثر است و بنابراین مدلی که در این پایان نامه ارائه دادیم گواهی به این واقعیت است که وجود حافظه باعث حذف بعضی ویژگی‌های کوانتومی می‌شود حتی اگر حافظه روی طول گام باشد. اگرچه تداخل کوانتومی تاثیر معنی‌داری روی واریانس نمی‌گذارد اما آثارش در تابع توزیع احتمال به وضوح قابل مشاهده است (شکل ۱.۳).



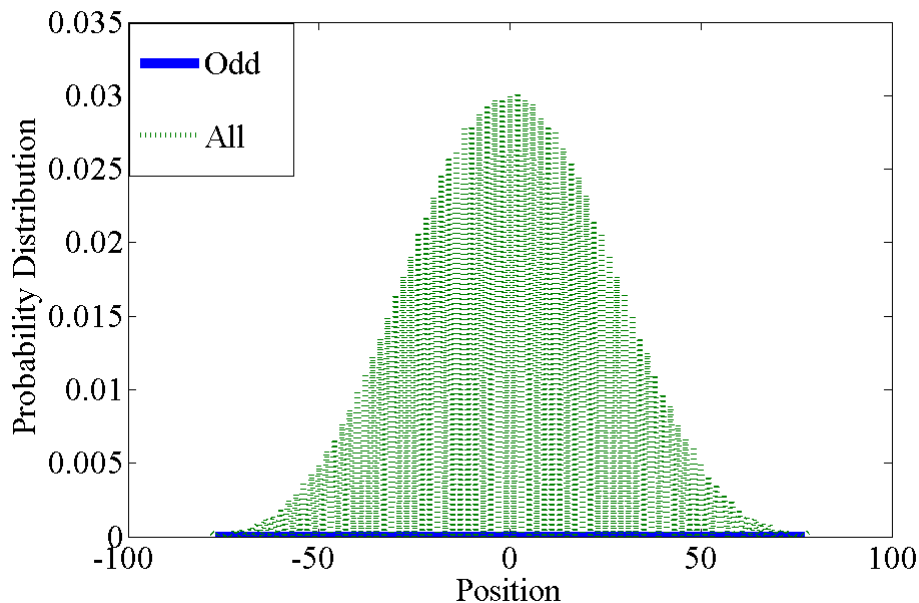
شکل ۴.۳: نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کلاسیکی شتابدار برای سرعت حدی ۱ به ازای ۱۲ گام و حالت سکه اولیه متقارن، برای همه جایگاهها (نقطه چین) و جایگاههای فرد (خط ممتد).



شکل ۵.۳: نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کلاسیکی شتابدار برای سرعت حدی ۳ به ازای ۱۲ گام و حالت سکه اولیه متقارن، برای همه جایگاهها (خط چین) و جایگاههای فرد (خط ممتد).

با شبیه‌سازی‌های انجام شده مشخص گردید که شکل کلی تابع توزیع احتمال برای ”ولگشت‌های

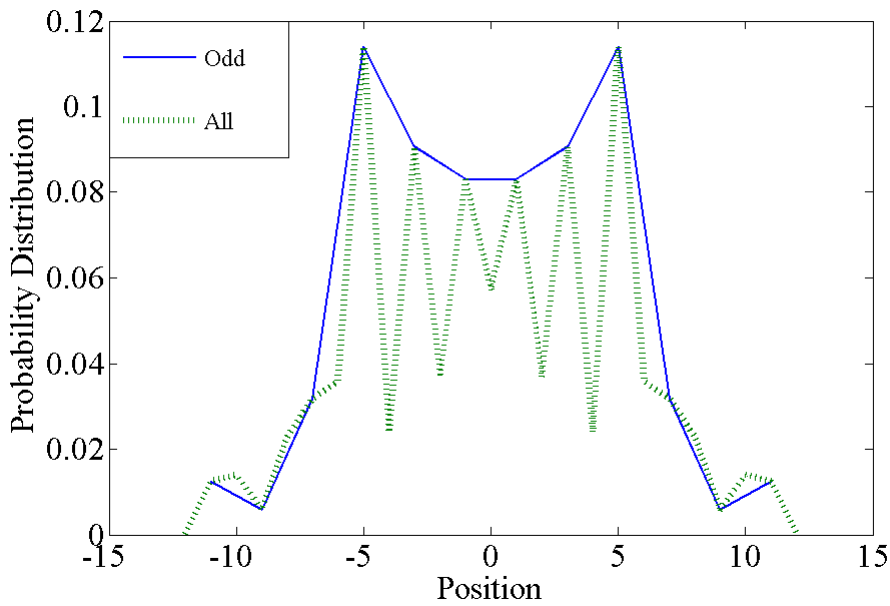
کلاسیکی شتاب‌دار” به همان صورت گاوسی باقی خواهد ماند اما برخلاف حالت بدون شتاب آن، ذره قادر خواهد بود تمام مکان‌ها را اشغال کند (شکل ۴.۳).



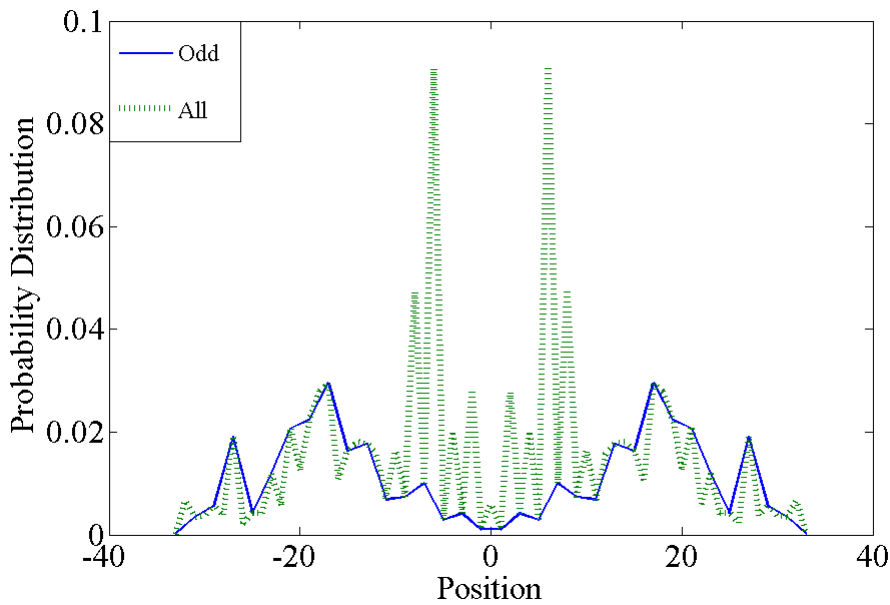
شکل ۴.۳: نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کلاسیکی شتاب‌دار برای سرعت حدی ۱۲ به ازای ۱۲ گام و حالت سکه اولیه متقارن، برای همه جایگاه‌ها (نقطه‌چین) و جایگاه‌های فرد (خط ممتد).

همچنین نشان دادیم که ولگشت کلاسیکی با شتاب ۱ قادر به اشغال تمام مکان‌ها خواهد بود (شکل ۴.۳) در حالیکه افزایش شتاب این قابلیت را محدود به نقاط دور از مرکز در دو طرف تابع توزیع (با احتمال کم) خواهد کرد (شکل ۵.۳) و در حد سرعت بیشینه  $v_c = t$  این قابلیت به کلی محو خواهد شد (شکل ۶.۳). همین خواص در نتایج شبیه‌سازی ما برای ولگشت کوانتومی شتاب‌دار نیز به دست آمد. با این تفاوت که نمودارهای ما شکل کلی ولگشت کوانتومی بدون شتاب را حفظ نمی‌کند بلکه تداخل‌های کوانتومی باعث ایجاد قله‌های شدیدی در دو طرف مبدا می‌شود (شکل ۷.۳ و ۸.۳ و ۹.۳).

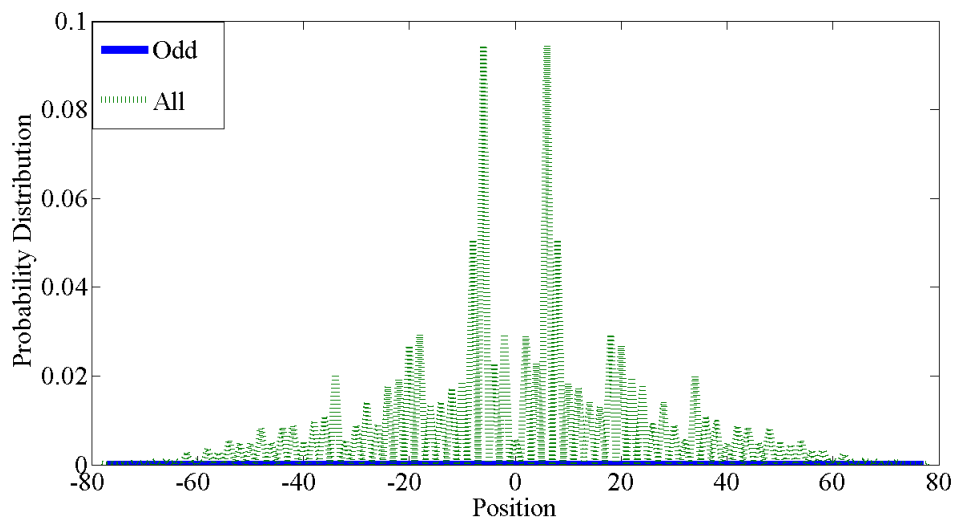




شکل ۷.۳: نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی شتابدار برای سرعت حدی ۱ به ازای ۱۲ گام و حالت سکه اولیه متقارن، برای همه جایگاه‌ها (نقطه‌چین) و جایگاه‌های فرد (خط ممتد).



شکل ۸.۳: نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی شتابدار برای سرعت حدی ۳ به ازای ۱۲ گام و حالت سکه اولیه متقارن، برای همه جایگاه‌ها (نقطه‌چین) و جایگاه‌های فرد (خط ممتد).



شکل ۹.۳: نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی شتاب‌دار برای سرعت حدی ۱۲ به ازای ۱۲ گام و حالت سکه اولیه متقارن، برای همه جایگاه‌ها (نقطه‌چین) و جایگاه‌های فرد (خط ممتد).

### ۳.۳ ولگشت کوانتومی شتاب‌دار با سرعت چرخه‌ای

اگر ولگشت کوانتومی عادی روی خط راست را در نظر بگیریم و ابتدا و انتهای مسیر را بهم وصل کنیم به نوع متفاوتی از ولگشت کوانتومی می‌رسیم که ولگشت کوانتومی روی چرخه نامیده می‌شود که در آن ولگشت پس از رسیدن به مکان انتهایی به نقطه آغاز حرکت خود بازمی‌گردد. از این رو به آن ولگشت کوانتومی روی دایره هم گفته می‌شود.

این نوع ولگشت ویژگی‌های جالبی دارد که آن را از ولگشت روی خط متمایز می‌کند. برای مثال تابع توزیع احتمال به یک توزیع مشخص میل نمی‌کند، در عوض تابع حدی آن به شکل مشخصی میل می‌کند [۱۳] [۲۴] [۲۷]. زمان آمیختگی در این ولگشت در مقایسه با ولگشت کلاسیکی خود، به صورت توانی کوچک‌تر است که باعث شده است این نوع ولگشت مورد توجه محققان قرار گیرد [۱۳] [۲۴].

در مدلی که ما در این پایان نامه معرفی کرده‌ایم از آنجاییکه عملگر سرعت دقیقاً همانند عملگر انتقال در ولگشت کوانتومی عادی رفتار می‌کند، یعنی با توجه به حالت سکه، اگر حالت سکه  $|0\rangle$  باشد این عملگر سرعت ولگرد را یکی افزایش و اگر حالت سکه  $|1\rangle$  باشد، سرعت ولگرد را یکی کاهش می‌دهد، بنابراین می‌توان سرعت ولگرد را چرخه‌ای در نظر بگیریم و عملگر سرعت ولگشت کوانتومی شتاب‌دار را به گونه‌ای تغییر دهیم که وقتی سرعت ولگرد به سرعت حدی  $v_c$  رسید، سرعت را به  $-v_c$  تغییر دهد. برای درک درستی این ایده می‌توان به پدیده فیزیکی برخورد و ضربه اشاره کرد. مثلاً اگر یک توپ با

سرعت  $v$  به یک دیواره برخورد کند با سرعت  $-v$  به عقب برمی‌گردد.

بنابراین عملگر سرعت را برای ولگشت کوانتومی شتابدار با سرعت چرخه‌ای این‌گونه می‌نویسیم:

$$\hat{V}_{cyclic} = \sum_{v=0}^{2v_c} [|(v+1) \bmod (2v_c+1)\rangle \langle v| \otimes |R\rangle \langle R|] + \sum_{v=0}^{2v_c} [|(v-1) \bmod (2v_c+1)\rangle \langle v| \otimes |L\rangle \langle L|] \quad (11.3)$$

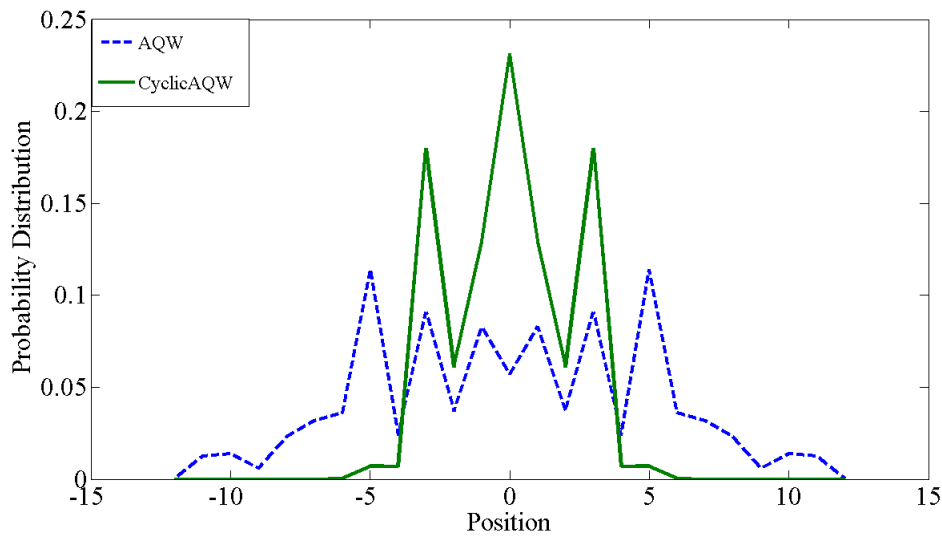
و با توجه به اینکه ابتدا و انتهای بازه سرعت را برای این نوع ولگشت از  $0$  تا  $2v_c$  در نظر گرفته‌ایم، عملگر انتقال را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{S}_{cyclic} = \sum_n |n+v-v_c\rangle \langle n| \otimes |v\rangle \langle v| \quad (12.3)$$

این تعریف برای عملگر  $\hat{S}_{cyclic}$  باعث می‌شود که طول گام برای انتهای بازه سرعت  $(2v_c)$ ،  $v_c$  در نظر گرفته شود و برای ابتدای بازه  $(0)$ ،  $-v_c$ .  
بنابراین عملگر تحول کلی به این صورت است:

$$\hat{U}_{cyclic} = (\hat{S}_{cyclic} \otimes \hat{I}_c) \cdot (\hat{I}_n \otimes \hat{V}_{cyclic}) \cdot (\hat{I}_n \otimes \hat{I}_v \otimes \hat{C}) \quad (13.3)$$

که عملگر سکه را در اینجا نیز، عملگر هادامارد در نظر می‌گیریم.  
همان‌طور که گفته شد در ولگشت کوانتومی شتابدار با سرعت چرخه‌ای وقتی سرعت ولگرد به سرعت حدی  $v_c$  رسید، در گام بعدی سرعت ولگرد به  $-v_c$  تبدیل می‌شود در نتیجه ذره با طول گامی به اندازه  $v_c$  به عقب برمی‌گردد، در حالیکه در ولگشت کوانتومی شتابدار عادی وقتی که سرعت به  $v_c$  (سرعت حدی) رسید، همین سرعت را حفظ کرده و در نتیجه با گامی به طول  $v_c$  به جلو خواهد رفت.  
بنابراین در ولگشت کوانتومی شتابدار با سرعت چرخه‌ای، احتمال حضور ذره کوانتومی در اطراف مبدا بیشتر می‌شود و شبیه‌سازی‌های ما نیز گواه خوبی بر این موضوع است و نمودار توزیع احتمال این نوع ولگشت نسبت به ولگشت کوانتومی شتابدار عادی جمع‌تر می‌شود (شکل ۱۰.۳).

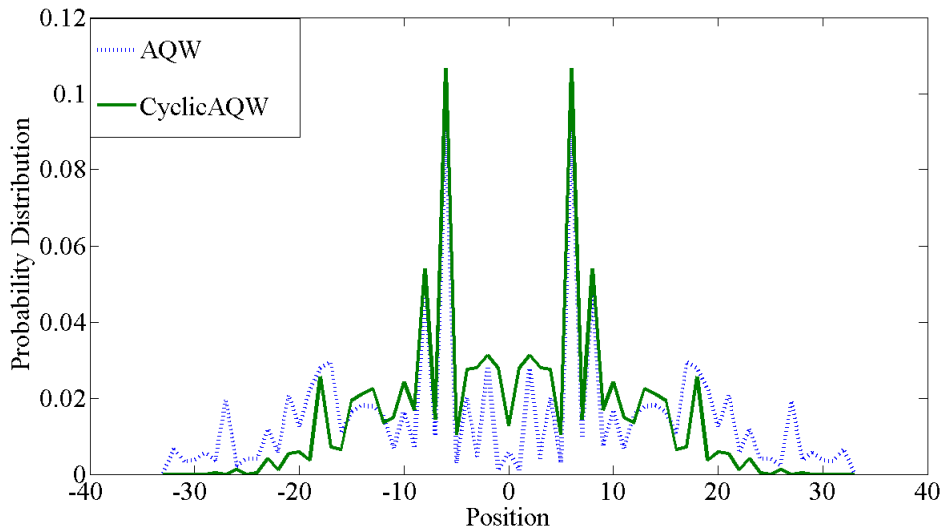


شکل ۱۰.۳: نمودار مقایسه توزیع احتمال ولگشت کوانتومی شتاب‌دار عادی ( $AQW$ ) (خط چین) و ولگشت کوانتومی شتاب‌دار با سرعت چرخه‌ای ( $CAQW$ ) (خط ممتد)، به ازای ۱۲ گام و سرعت حدی ۱ و حالت سکه متقارن.

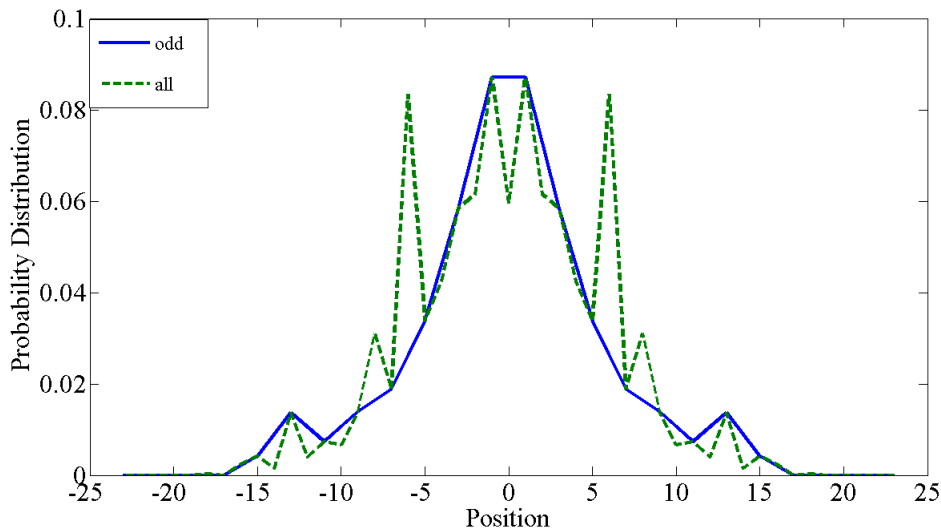
از آنجاییکه در ولگشت با سرعت چرخه‌ای، بزرگترین گام‌های رو به عقب با طول  $v_c$  (مقدار سرعت حدی)، برداشته می‌شود انتظار داریم به ازای سرعت‌های حدی بالاتر جمع‌شدگی بیشتری را شاهد باشیم (نسبت به حالت ولگشت شتاب‌دار عادی)، در حالیکه نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که میزان این جمع‌شدگی خیلی کم‌تر از انتظار ما است (شکل ۱۱.۳).

در ولگشت کوانتومی شتاب‌دار با سرعت چرخه‌ای نیز مانند ولگشت‌های کوانتومی شتاب‌دار عادی، شکل کلی تابع توزیع احتمال به همان صورت باقی خواهد ماند و همچنین ذره قادر خواهد بود تمام مکان‌ها را اشغال کند و شبیه‌سازی‌های ما نشان می‌دهد که در این نوع ولگشت کوانتومی تابع توزیع احتمال نسبت به ولگشت کوانتومی شتاب‌دار عادی نرم‌تر است، این به این مفهوم است که در این نوع ولگشت احتمال اشغال مکان‌های مجاور (مکان‌های زوج و فرد)، توسط ولگرد به یکدیگر نزدیکتر است (شکل ۱۲.۳ و ۱۳.۳).

در مدل معرفی شده با توجه به اینکه احتمال حضور ذره در اطراف مبدا بیشتر از ولگشت کوانتومی

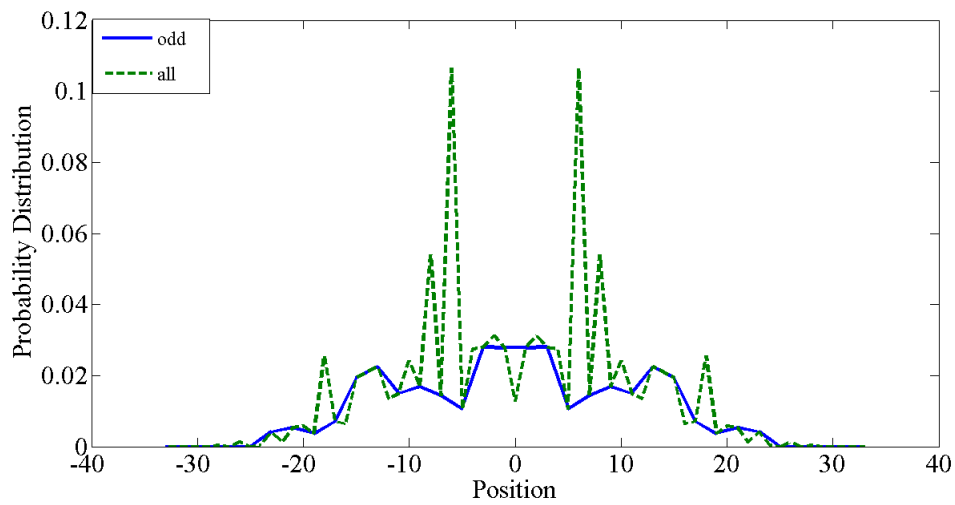


شکل ۱۱.۳: نمودار مقایسه توزیع احتمال ولگشت کوانتومی شتابدار عادی (AQW) (خط چین) و ولگشت کوانتومی شتابدار با سرعت چرخه‌ای (CAQW) (خط ممتد)، به ازای ۱۲ گام و سرعت حدی ۳ و حالت سکه متقارن.

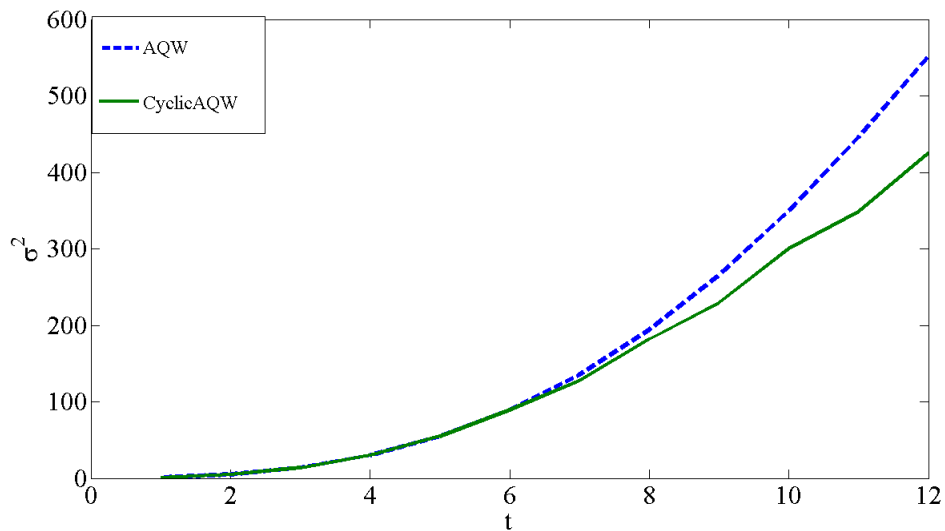


شکل ۱۲.۳: نمودار توزیع احتمال ولگشت کوانتومی شتابدار با سرعت چرخه‌ای (CAQW) برای سرعت حدی ۲ به ازای ۱۲ گام و حالت سکه متقارن، برای همه جایگاه‌ها (خط چین) و جایگاه‌های فرد (خط ممتد).

شتابدار عادی است پس باید کاهش واریانس را داشته باشیم. در شکل ۱۴.۳ واریانس این دو نوع ولگشت را مقایسه کرده‌ایم.



شکل ۱۳.۳: نمودار توزیع احتمال ولگشت کوانتومی شتابدار با سرعت چرخه‌ای (CAQW) برای سرعت حدی ۳ به ازای ۱۲ گام و حالت سکه متقارن، برای همه جایگاه‌ها (خط چین) و جایگاه‌های فرد (خط ممتد).



شکل ۱۴.۳: نمودار مقایسه واریانس ولگشت کوانتومی شتابدار عادی (AQW) (خط چین) و ولگشت کوانتومی شتابدار با سرعت چرخه‌ای (CAQW) (خط ممتد)، به ازای ۱۲ گام و سرعت حدی ۶ و حالت سکه متقارن.

## نتیجه‌گیری

در این نوشتار نوع جدیدی از ولگشت‌ها به نام ولگشت‌های کوانتومی شتاب‌دار معرفی گردید که به نوعی دارای حافظه روی طول گام هستند که باعث به وجود آمدن تداخل‌های کوانتومی متفاوتی می‌شوند. در این ولگشت از آنجاییکه جملات تداخلی دیرتر از ولگشت کوانتومی عادی ظاهر می‌شوند، سیستم نسبت به ولگشت کوانتومی عادی کلاسیکی‌تر می‌شود و با شبیه‌سازی کامپیوتری نیز این موضوع را نشان دادیم.

همچنین نشان دادیم با این الگوهای تداخلی جدید اگر چه تابع توزیع احتمال به طرز چشمگیری متفاوت با حالت بدون شتاب است و واریانس آن به طرز چشمگیری از ولگشت کلاسیکی و یا حتی ولگشت کوانتومی بدون شتاب بیشتر است اما با معرفی "ولگشت کلاسیکی شتاب‌دار" نشان دادیم که این الگوهای تداخلی تفاوت چشمگیری در واریانس نسبت به "ولگشت‌های کلاسیکی شتاب‌دار" ایجاد نمی‌کند. نتایج شبیه‌سازی ما نشان می‌دهد برخلاف ولگشت کوانتومی عادی که به ازای تعداد گام‌های فرد ذره در مکان‌های فرد و به ازای تعداد گام‌های زوج فقط در مکان‌های زوج پیدا می‌شود، شتاب‌دار کردن ولگشت‌های کوانتومی می‌تواند باعث اشغال تمام مکان‌های ممکن توسط ولگرد شود. هر چه سرعت حدی در این نوع ولگشت افزایش یابد قابلیت اشغال تمام مکان‌ها کمتر و محدود به نقاط مرزی دارای احتمال کم می‌شوند. این قابلیت در حد نهایی  $v_c = t$  از بین می‌رود.

همچنین در این پایان‌نامه نوع دیگری از ولگشت کوانتومی شتاب‌دار را با نام ولگشت کوانتومی شتاب‌دار با سرعت چرخه‌ای را ارایه دادیم که برای این نوع ولگشت کوانتومی شتاب‌دار با توجه به نحوه عملکرد عملگر سرعت، نمودار تابع توزیع احتمال ما نسبت به ولگشت کوانتومی شتاب‌دار عادی جمع‌تر شد و با اینکه انتظار می‌رفت با افزایش سرعت حدی ولگشت این جمع شدگی بیشتر باشد اما نتایج شبیه‌سازی ما نشان داد که این انتظار برآورده نمی‌شود. این مطلب را می‌توان این‌گونه توضیح داد که اگرچه در سرعت‌های حدی بالاتر ذره با گام‌های بزرگتری به عقب برمی‌گردد اما همین امر باعث می‌شود که الگوی تداخل‌های سازنده و ویرانگر تغییر کرده به‌گونه‌ای که اثر کلی آن مانع از جمع‌شدگی بیش از حد شود.

با استفاده از حل تحلیلی می‌توان به بررسی دقیق این تداخل‌های کوانتومی پرداخت اما از آنجاییکه در مدل معرفی شده ما یک فضای هیلبرت  $2v_c + 1$  بعدی برای سرعت ولگشت به سیستم کوانتومی ما

اضافه شده است، محاسبات آن کار پیچیده‌ای است که به‌عنوان موضوعی قابل بررسی در آینده می‌توان به آن پرداخت.

از جمله کمیت‌هایی را که می‌توان برای این نوع ولگشت کوانتومی مورد بررسی قرار داد توزیع حدی و درهم‌تنیدگی می‌باشد که بررسی آن می‌تواند بسیار مفید باشد، همچنین به‌دلیل وجود فضای هیلبرت اضافی سرعت، درهم‌تنیدگی بین مکان-سرعت-سکه، مکان-سرعت-سکه و مکان-سکه-سرعت قابل بررسی است که می‌تواند خصوصیات جدیدی از ولگشت‌های کوانتومی را نمایان کند.

در این پایان‌نامه عملگر انتقالی که برای ولگشت کوانتومی شتاب‌دار معرفی کردیم، طول گام را افزایش می‌دهد اما سبب وجود گام‌هایی با طول صفر نیز برای این نوع ولگشت کوانتومی می‌شود و برای ذره کوانتومی، حالت سکون نیز وجود دارد. می‌توان این عملگر را به‌گونه‌ای تعریف کرد که طول گام ولگشت متغیر باشد ولی حالت سکون وجود نداشته باشد. این کار باعث تغییر تابع توزیع و دیگر پارامترهای ولگشت کوانتومی می‌شود که بررسی آن‌ها می‌تواند مفید باشد. این مورد از این جهت نیز می‌تواند برای ما دارای اهمیت باشد که تعریف آن برای سرعت حدی ۱، مشابه با ولگشت کوانتومی عادی می‌باشد.



# پیوست آ

## اثبات قضیه ۳.۱.۲

در یک ولگشت با گام‌های متوالی از راست ( $R$ ) و چپ ( $L$ )، تعداد دسته‌های  $L$  را با  $C_L$  نشان می‌دهیم، (تعداد دسته‌های  $R$  را با  $C_R$  نشان می‌دهیم). برای مثال در سلسله گام‌های  $LRLRLRLRL$ ،  $C_L = 4$  و  $C_R = 3$  می‌باشد.

ابتدا فرض کنیم ترکیب صحیحی از  $N_L$  با  $C_L$  قسمت داشته باشیم. به دلیل اینکه فاز کلی را به صورت  $(-1)^{N_L+N_R+N'_L+N'_R}$  داریم و این فاز به تعداد دسته‌های گام  $L$  با اندازه ۱ ( $N'_L$ ) وابسته است، نیاز داریم بدانیم ترکیبی که اینجا می‌خواهیم در نظر بگیریم، چگونه به تعداد دسته‌هایی با اندازه ۱ وابسته است ( $N'_L$  دسته‌هایی فقط با یک گام  $L$ ). تعداد ترکیبات  $N_L$  تایی با  $C_L$  قسمت که هیچ دسته‌ای با اندازه ۱ در آن وجود نداشته باشد، از رابطه ترکیب زیر محاسبه می‌شود [۳۱]:

$$\binom{N_L - C_L - 1}{C_L - 1} \quad (1.\bar{A})$$

اگر دقیقاً یک دسته با اندازه ۱ (یک دسته تک تایی از  $L$ ) را بخواهیم جدا کنیم، یک ترکیب  $N_L - 1$  تایی با  $C_L - 1$  قسمت را در نظر می‌گیریم و فقط یک دسته با اندازه ۱ را اضافه می‌کنیم. راه‌هایی که می‌توانیم این ترکیب را داشته باشیم به این صورت است:

$$\binom{N_L - C_L - 1}{C_L - (1 + 1)} \rightarrow \binom{N_L - C_L - 1}{C_L - 2} \quad (2.\bar{A})$$

در حالت کلی در رابطه (۲.آ) به جای ۱،  $N'_L$  (تعداد دسته‌های ۱) را قرار می‌دهیم:

$$\begin{pmatrix} N_L - C_L - 1 \\ C_L - N_L^1 - 1 \end{pmatrix} \quad (۳.۱)$$

برای مثال می‌توانیم فرض کنیم که  $C_L$  تا جعبه داریم که  $N_L^1$  تای آن‌ها به واسطه دسته‌های تک‌تایی اشغال شده باشد (به تعداد  $\frac{C_L!}{(C_L - N_L^1)!N_L^1!}$  راه جداگانه می‌توان این ترکیب را به دست آورد)؛ و  $C_L - N_L^1$  جعبه بدون هیچ دسته یک‌تایی باقی می‌ماند که یک ترکیب  $N_L - N_L^1$  تایی با  $C_L - N_L^1$  قسمت را به خود اختصاص می‌دهد.

بنابراین رابطه کلی برای تعداد ترکیبات  $N_L$  از  $C_L$  قسمت با دقت  $N_L^1$  تا دسته تک‌تایی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{pmatrix} C_L \\ N_L^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_L - C_L - 1 \\ C_L - N_L^1 - 1 \end{pmatrix} \quad (۴.۱)$$

ما نمونه ترکیبی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c - a - 1 \\ a - b - 1 \end{pmatrix} = \frac{a!}{b!(a-b)!} \frac{(c-a-1)!}{(c-2a+b)!(a-b-1)!} \quad (۵.۱)$$

که با توجه به این ترکیب رابطه (۴.۱) را می‌توانیم به شکل زیر تعریف کنیم:

$$\begin{pmatrix} C_L \\ N_L^1 \\ N_L \end{pmatrix} \quad (۶.۱)$$

برای مقدار ثابت  $N_L$  و  $N_R$  (بنابراین یک مکان ثابت  $k$ ) در حالت کلی تعداد ترکیبات برای ولگشت‌هایی با تعداد گام‌ها با  $C_L$  دسته گام چپ ( $N_L^1$  تعداد دسته تک‌تایی  $L$ ) و  $C_R$  دسته گام راست ( $N_R^1$  تعداد دسته تک‌تایی  $R$ )، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{pmatrix} C_L \\ N_L^1 \\ N_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_R \\ N_R^1 \\ N_R \end{pmatrix} \quad (۷.۱)$$

دو رابطه زیر را از قبل داریم:

$$|n_2, n_1, 0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|n_2, n_1, 0\rangle + |n_2, n_1, 1\rangle) \quad (۸.۱)$$

$$|n_2, n_1, 1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|n_2, n_1, 0\rangle - |n_2, n_1, 1\rangle) \quad (۹.۱)$$

با قرار دادن فاکتور فاز از لم ۱.۱.۲ در فصل ۳ و فاکتور  $\sqrt{2}$  از معادلات (۸.آ)، (۹.آ) و جمع بستن روی  $N_L^1$  و  $N_R^1$  و  $C_L$  و  $C_R$ ، بیان زیر را برای دامنه‌ها می‌توانیم بنویسیم:

$$\sum_{C_L} \sum_{C_R} \sum_{N_L^1} \sum_{N_R^1} \frac{(-1)^{n+N_L^1+N_R^1}}{2^{\binom{n}{2}}} \begin{pmatrix} C_L \\ N_L^1 \\ N_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_R \\ N_R^1 \\ N_R \end{pmatrix} \quad (۱۰.آ)$$

حالا می‌خواهیم این رابطه را برای ۴ حالت ممکن با مکان نهایی  $k$  به دست بیاوریم. در تمام موارد حالت اولیه ولگشت را  $|1, 0, 0\rangle$  در نظر می‌گیریم که مطابق با ولگشتی است که آغازش با  $LR \dots$  بوده است. (به این معنی است که  $N_L^1$  برای این مورد خاص حداقل ۱ می‌باشد، چون اولین گام  $L$  می‌باشد). (باید توجه داشته باشیم که در اینجا برای حالت سکه  $|0\rangle$ ، عملگر انتقال بازتابی عمل می‌کند). مورد ۱: اگر حالت نهایی ولگشت  $|k+1, k, 1\rangle$  باشد. اثبات رابطه (۲۴.۲)، همان‌طور که در قبل قرارداد کردیم، شروع همه ولگشت‌ها را از  $LR$  در نظر می‌گیریم، بنابراین این حالت با ولگشتی به شکل  $LR \dots LL$  مطابقت دارد. از آنجایی که شروع و پایان سلسله گام‌ها در این ولگشت با گام  $L$  است، پس این رابطه را داریم:  $C_R = C_L - 1$ ، که با توجه به این رابطه جمع بستن روی  $C_R$  برداشته می‌شود. به‌طور کلی داریم:  $N_L \geq C_L \geq N_L^1$  و هر سه تای این‌ها یا مختلف‌اند یا با هم برابر هستند.

- دسته‌های  $L$ ،  $(C_L)$  از کل تعداد گام‌های  $L$  یا کم‌ترند یا مساوی آن‌ها هستند.

- دسته‌های  $L$ ،  $(C_L)$  از کل تعداد گام‌های  $L$  سبزرگتر؛ یا مساوی با آن‌ها هستند.

در این مورد خاص مقدار  $C_L$  از ۲ تا  $N_L - 1$  است.

حال  $N_R^1$  و  $N_L^1$  را بررسی می‌کنیم. برای تعداد  $C_L$  خاصی که برای این ولگشت بیان شد مقدار  $N_L^1$  از ۱ تا  $C_L - 1$  است، (حداکثر تعداد  $N_L^1$  با  $C_L$  نمی‌تواند برابر باشد زیرا همان‌طور که اشاره کردیم سه تعداد  $N_L$  و  $C_L$  و  $N_L^1$  یا با هم برابرند یا با یکدیگر متفاوت هستند که در این ولگشت می‌دانیم که  $C_L$  و  $N_L^1$  با هم برابر نیستند). مقدار  $N_R^1$  می‌تواند از ۰ تا  $C_R$  یا از ۰ تا  $C_L - 1$  باشد.

از آنجایی که رابطه (۱۰.آ) برای همه ولگشت‌ها است، نیاز است که این رابطه را به ولگشت‌هایی که با  $LR$  آغاز شده و با  $LL$  تمام می‌شوند، محدود کنیم.

برای ترکیب  $N_L$  تایی از  $L$  با  $C_L$  دسته، دسته اول باید یک‌تایی باشد و دسته آخر نباید دسته‌ای یک‌تایی از گام چپ باشد. کسر ولگشت‌هایی که دسته اول در آن‌ها یک‌تایی باشد  $\frac{N_L^1}{C_L}$  است. از این‌ها نتیجه می‌شود کسر ولگشتی که یک دسته یک‌تایی در پایان نداشته باشد،  $\frac{C_L - N_L^1}{C_L - 1}$  است. از کنار هم قرار دادن این‌ها رابطه (۱۰.آ) به صورت زیر تغییر خواهد کرد:

$$\sum_{C_L=2}^{N_L-1} \sum_{N_L^1=1}^{C_L-1} \sum_{N_R^1}^{C_L-1} \frac{(-1)^{n+N_L^1+N_R^1}}{(2)^{\frac{n}{\gamma}}} \frac{N_L^1(C_L - N_L^1)}{C_L(C_L - 1)} \begin{pmatrix} C_L \\ N_L^1 \\ N_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_L - 1 \\ N_R^1 \\ N_R \end{pmatrix} \quad (11.آ)$$

برای این رابطه دو مورد زیر را جداگانه بررسی می‌کنیم:

$$1. N_R = C_R = N_R^1$$

و با استفاده از نتایج لم ۲.۱.۲ بیان (۱۰.آ) به شکل زیر خواهد شد:

$$\frac{(-1)^{N_L+N_L^1}}{(2)^{\frac{n}{\gamma}}} \frac{N_L^1(N_R + N_L^1 + 1)}{N_R(N_R + 1)} \begin{pmatrix} N_R + 1 \\ N_L^1 \\ N_L \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{N_L+N_L^1}}{(2)^{\frac{n}{\gamma}}} \frac{N_L^1(N_R - N_L^1 + 1)}{N_R(N_R + 1)} \begin{pmatrix} N_R + 1 \\ N_L^1 \\ N_L \end{pmatrix} \quad (12.آ)$$

۲.  $N_R > C_R > N_R^1$ : با استفاده از نتایج لم ۲.۱.۲ دامنه را به صورت زیر داریم:

$$\sum_{C_L=2}^{N_L-1} \sum_{N_L^1=\max}^{C_L-1} \sum_{N_R^1}^{C_L-2} \frac{(-1)^{n+N_L^1+N_R^1}}{(2)^{\frac{n}{\gamma}}} \frac{N_L^1(C_L - N_L^1)}{C_L(C_L - 1)} \begin{pmatrix} C_L \\ N_L^1 \\ N_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_L - 1 \\ N_R^1 \\ N_R \end{pmatrix} \quad (13.آ)$$

با توجه به دو رابطه بالا، به دامنه (۲۷.۲) در فصل ۳ می‌رسیم.

$$a_{KLL} = \frac{1}{2^{\frac{n}{\gamma}}} \sum_{C=2}^{N_L-1} \sum_{\substack{N_L^1=\max(1, \\ \gamma C - N_L)}}^{C-1} \sum_{\substack{N_R^1=\max(0, \\ \gamma C - N_R - \gamma)}}^{C-2} (-1)^{n+N_L^1+N_R^1} \frac{N_L^1(C - N_L^1)}{C(C - 1)} \begin{pmatrix} C \\ N_L^1 \\ N_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C - 1 \\ N_R^1 \\ N_R \end{pmatrix} + \frac{1}{2^{\frac{n}{\gamma}}} \sum_{\substack{N_L^1=\max(1, \\ \gamma N_R - N_L + \gamma)}}^{N_R} (-1)^{N_L+N_L^1} \frac{N_L^1(N_R - N_L^1 + 1)}{N_R(N_R + 1)} \begin{pmatrix} N_R + 1 \\ N_L^1 \\ N_L \end{pmatrix} \quad (14.آ)$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Y}^{\frac{n}{2}} a_{KLR} = & \sum_{C=2}^{N_L-1} \sum_{\substack{N_L^1=\max(1, \\ \mathcal{Y}C-N_L)}^{C-1}} \sum_{\substack{N_R^1=\max(0, \\ \mathcal{Y}C-N_R)}^{C-1}} (-1)^{n+N_L+N_R} \frac{N_L^1(N_R^1)}{C^{\mathcal{Y}}} \begin{pmatrix} C \\ N_L^1 \\ N_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ N_R^1 \\ N_R \end{pmatrix} + \delta_{N_L, N_R} \\
 & + \sum_{\substack{N_R^1-1 \\ N_L^1=\max(1, \\ \mathcal{Y}N_R-N_L)}} (-1)^{\frac{N_L+N_L^1 N_L^1}{N_R}} \begin{pmatrix} N_R \\ N_L^1 \\ N_L \end{pmatrix} + \sum_{\substack{N_L-1 \\ N_R^1=\max(1, \\ \mathcal{Y}N_L-N_R)}} (-1)^{N_R+N_R^1 \frac{N_R^1}{N_L}} \begin{pmatrix} N_L \\ N_R^1 \\ N_R \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{۱۵.آ}$$

مورد ۲: اگر حالت نهایی ولگشت  $|k-1, k, 0\rangle$  باشد.

اثبات رابطه (۱۵.آ)، این حالت با ولگشتی به شکل  $LR \dots LR$  مطابقت دارد. از آنجاییکه این ولگشت با یک گام چپ و با یک گام راست تمام شده است، رابطه  $C_L = C_R$  برقرار است که در این مورد جمع از روی  $C_R$  برداشته می‌شود. برای این مورد خاص مقدار  $C_L$  از ۲ تا  $N_L$  است؛ چون حداقل در این سلسله دو تا دسته  $L$  وجود دارد.

حالا  $N_R^1$  و  $N_L^1$  را بررسی می‌کنیم:

برای این مقدار خاص  $C_L$  و  $N_L^1$  می‌تواند از ۱ تا  $C_L$  باشد و مقدار  $N_R^1$  می‌تواند از ۱ تا  $C_R$ ، یا از ۱ تا  $C_L$  باشد، چون  $C_R = C_L$ .

حال باید رابطه ۱۰.آ را برای ولگشتی که با  $LR$  آغاز و با  $LR$  نیز تمام می‌شود، بنویسیم. در ترکیب  $L$ ها که اندازه دسته اول، یک گام  $L$  باشد، کسر ولگشت را به صورت  $\frac{N_L^1}{C_L}$  داریم. در ترکیب متناظری از  $R$ ها، اندازه دسته آخر باید یک گام  $R$  باشد و کسر این نوع ولگشت به صورت  $\frac{N_R^1}{C_R}$  است. از کنار هم قرار دادن این‌ها و با اعمال لم ۲.۱.۲، رابطه (۱۰.آ) به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\sum_{C_L=2}^{N_L} \sum_{\substack{N_L^1=\max \\ (1, \mathcal{Y}C_L-N_L)}}^{C_L} \sum_{\substack{N_R^1=\max \\ (1, \mathcal{Y}C_L-N_R)}}^{C_L} \frac{(-1)^{n+N_L+N_R} N_L^1(N_R^1)}{\binom{n}{\mathcal{Y}} C_L^{\mathcal{Y}}} \begin{pmatrix} C_L \\ N_L^1 \\ N_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_L \\ N_R^1 \\ N_R \end{pmatrix} \tag{۱۶.آ}$$

برای این رابطه موارد زیر را بررسی می‌کنیم:

$$:N_L = C_L = N_L^1 \quad , \quad N_R = C_R = N_R^1 \cdot 1$$

این مطابق است با سلسله‌ای از  $R$ ها و  $L$ ها.  $LRLRLR \dots LR$ .

واضح است این مدل فقط در صورتی وجود دارد که  $N_L = N_R$  بنابراین دامنه‌ها به شکل

$$\cdot N_L = N_R + 1 \text{ می‌شوند، که } \delta_{N_L, N_R} / \binom{n}{\mathcal{Y}}$$

$$:N_L = C_L = N_L^1, \quad N_R > C_R > N_R^1 \quad ۲.$$

$$\begin{cases} C_R = C_L \\ C_L = N_L \end{cases} \quad \text{و داریم:}$$

پس بیان ۱۰.آ می شود:

$$\sum_{\substack{N_R^1 = \max \\ (1, \forall N_L - N_R)}}^{N_L - 1} \frac{(-1)^{N_R - N_R^1}}{2^{\frac{n}{2}}} \frac{N_R^1}{N_L} \begin{pmatrix} N_L \\ N_R^1 \\ N_R \end{pmatrix} \quad (۱۷.آ)$$

$$.N_L > C_L > N_L^1, \quad N_R = C_R = N_R^1 \quad ۳.$$

بیان (۱۰.آ) می شود:

$$\sum_{\substack{N_L^1 = \max \\ (1, \forall N_R - N_L)}}^{N_R - 1} \frac{(-1)^{N_L - N_L^1}}{2^{\frac{n}{2}}} \frac{N_L^1}{N_R} \begin{pmatrix} N_R \\ N_L^1 \\ N_L \end{pmatrix} \quad (۱۸.آ)$$

که در آن  $C_L = C_R = N_R$  برقرار است.

$$:N_L > C_L > N_L^1, \quad N_R > C_R > N_R^1 \quad ۴.$$

$$\sum_{C_L=2}^{N_L-1} \sum_{\substack{N_L^1 = \max \\ (1, \forall C_L - N_L)}}^{C_L-1} \sum_{\substack{N_R^1 = \max \\ (1, \forall C_L - N_R)}}^{C_L-1} \frac{(-1)^{n+N_L+N_R^1}}{(2)^{\frac{n}{2}}} \frac{N_L^1(N_R^1)}{C_L^2} \begin{pmatrix} C_L \\ N_L^1 \\ N_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_L \\ N_R^1 \\ N_R \end{pmatrix} \quad (۱۹.آ)$$

مورد ۳: اگر حالت نهایی ولگشت  $\langle k+1, k, 0 \rangle$  باشد.

(اثبات رابطه (۲۶.۲)) ، این حالت مطابق با ولگشتی به شکل  $LR \dots RL$  می باشد. از آنجاییکه این ولگشت با یک گام  $L$  شروع و با  $L$  نیز تمام شده است، رابطه  $C_R = C_L - 1$  را داریم که جمع بستن روی  $C_R$  را برمی دارد. در این مورد خاص، مقدار  $C_L$  از ۲ تا  $N_L$  می باشد که برای این مقدار  $C_L$ ، مقدار  $N_L^1$  از ۲ تا  $C_L$  است، در حالی که  $N_R^1$  می تواند از ۰ تا  $C_L - 1$  باشد.

اکنون باید رابطه (۱۰.آ) را با برای ولگشتی که با  $LR$  شروع شده است و با  $RL$  خاتمه یافته است بازنویسی کنیم. (این محدودیت مکان ها روی ترکیبات  $N_L$  برای  $L$  ها است نه روی  $R$  ها). کسر

ولگشت هایی که با یک تک  $L$  شروع می شوند،  $\frac{N_L^1}{C_L}$  است. از این ها نتیجه می شود که کسر ولگشتی که

با تک  $L$  دیگر ختم شود به صورت  $\frac{N_L^1 - 1}{C_L - 1}$  می باشد. از کنار هم قرار دادن این ها و با اعمال لم ۲.۱.۲

رابطه (۱۰.آ) را به شکل زیر داریم:

$$\sum_{C_L=2}^{N_L} \sum_{\substack{N_L^1=max \\ (1, 2^{C_L-N_L-2})}}^{C_L} \sum_{\substack{C_L-1 \\ N_R^1=max \\ (1, 2^{C_L-N_R-2})}} \frac{(-1)^{n+N_L^1+N_R^1} N_L^1(N_L^1-1)}{(2)^{\frac{n}{2}} C_L(C_L-1)} \begin{pmatrix} C_L \\ N_L^1 \\ N_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_L-1 \\ N_R^1 \\ N_R \end{pmatrix} \quad (20. \tilde{A})$$

برای این حالت موارد زیر را بررسی می‌کنیم:

$$.N_L = C_L = N_L^1 \quad , \quad N_R = C_R = N_R^1 \quad .1$$

این با سلسله متوالی  $R$  ها و  $L$  ها مطابق است،  $LRLRLRLRLRL$ . واضح است که این سلسله گام‌ها فقط در صورتی وجود دارد که:  $N_L = N_R + 1$ ، زیرا به هر حال تعداد  $L$  ها یکی بیشتر از  $R$  ها است. بنابراین دامنه‌ها به صورت  $\delta_{N_L-1, N_R} / 2^{\frac{n}{2}}$  می‌شوند؛ که  $N_R + 1 - 1 = N_R$  و  $\delta_{ij} = 1$  است اگر  $i = j$  باشد.

$$.N_L = C_L = N_L^1 \quad , \quad N_R > C_R > N_R^1 \quad .2$$

جمع روی  $C_L$  به صورت زیر است.

$$\sum_{\substack{N_L-2 \\ N_R^1=max \\ (0, 2^{N_L-N_R-2})}} \frac{(-1)^{N_R-N_R^1}}{2^{\frac{n}{2}}} \begin{pmatrix} N_L-1 \\ N_R^1 \\ N_R \end{pmatrix} \quad (21. \tilde{A})$$

$$.N_L > C_L > N_L^1 \quad , \quad N_R = C_R = N_R^1 \quad .3$$

جمع روی  $C_L$  و  $N_R^1$  از بین می‌رود و نتیجه می‌گیریم:

$$\sum_{\substack{N_R \\ N_L^1=max \\ (2, 2^{N_R-N_L+2})}} \frac{(-1)^{N_L-N_L^1} N_L^1(N_L^1-1)}{2^{\frac{n}{2}} N_R(N_R+1)} \begin{pmatrix} N_R+1 \\ N_L^1 \\ N_L \end{pmatrix} \quad (22. \tilde{A})$$

$$.N_L > C_L > N_L^1 \quad , \quad N_R > C_R > N_R^1 \quad .4$$

$$\sum_{C_L=2}^{N_L-1} \sum_{\substack{C_L-1 \\ N_L^1=max \\ (2, 2^{C_L-N_L})}} \sum_{\substack{C_L-2 \\ N_R^1=max \\ (0, 2^{C_L-N_R-2})}} \frac{(-1)^{n+N_L^1+N_R^1} N_L^1(N_L^1-1)}{(2)^{\frac{n}{2}} C_L(C_L-1)} \begin{pmatrix} C_L \\ N_L^1 \\ N_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_L-1 \\ N_R^1 \\ N_R \end{pmatrix} \quad (23. \tilde{A})$$

مورد ۴: اگر حالت نهایی ولگشت  $|k-1, k, 1\rangle$  باشد.

(اثبات رابطه (۲۷.۲) ) ، این حالت مطابق با ولگشتی به صورت  $LR \dots RR$  می‌باشد. از آنجاییکه

این ولگشت با یک گام  $L$  شروع شده و با یک گام  $R$  تمام شده است. پس رابطه  $C_R = C_L$  را داریم، که جمع بستن را از روی  $C_R$  برمی‌دارد. مقدار  $C_L$  می‌تواند از ۱ تا  $N_L$  باشد، در حالی که مقدار  $N_L^1$  از ۱ تا  $C_L$  است و مقدار  $C_R$  می‌تواند از ۱ تا  $N_R - 1$  باشد، در حالی که مقدار  $N_R^1$  از ۰ تا  $C_R - 1$  است. برای ولگشتی که به این صورت باشد ترکیب  $N_L$  برای گام‌های چپ که با یک تک  $L$  آغاز شده است عامل  $\frac{N_L^1}{C_L}$  را به ما می‌دهد و ترکیب  $N_R$  برای گام‌های راست که با تک گام  $R$  تمام شده است عامل  $\frac{C_R - N_R^1}{C_R}$  را به ما می‌دهد. با اعمال لم ۲.۱.۲ رابطه (آ.۱۰) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sum_{C_L=1}^{N_L} \sum_{\substack{N_L^1=\max \\ (1, \checkmark_{C_L-N_L})}}^{C_L} \sum_{\substack{N_R^1=\max \\ (0, \checkmark_{C_L-N_R})}}^{C_L-1} \frac{(-1)^{n+N_L^1+N_R^1}}{(2)^{\frac{n}{\checkmark}}} \frac{N_L^1(C_R - N_R^1)}{C_L^{\checkmark}} \begin{pmatrix} C_L \\ N_L^1 \\ N_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_L \\ N_R^1 \\ N_R \end{pmatrix} \quad (24.1)$$

دو مورد زیر را برای این ولگشت باید بررسی کنیم:

$$1. N_L = C_L = N_L^1$$

(۲۴.آ) به شکل زیر خلاصه می‌شود:

$$\sum_{\substack{N_R^1=\max \\ (0, \checkmark_{N_L-N_R})}}^{N_L-1} \frac{(-1)^{N_R+N_R^1}}{(2)^{\frac{n}{\checkmark}}} \frac{N_L - N_R^1}{N_L} \begin{pmatrix} N_L \\ N_R^1 \\ N_R \end{pmatrix} \quad (25.1)$$

$$2. N_L > C_L > N_L^1$$

بیان (۲۴.آ) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sum_{C_L=1}^{N_L-1} \sum_{\substack{N_L^1=\max \\ (1, \checkmark_{C_L-N_L})}}^{C_L-1} \sum_{\substack{N_R^1=\max \\ (0, \checkmark_{C_L-N_R})}}^{C_L-1} \frac{(-1)^{n+N_L^1+N_R^1}}{(2)^{\frac{n}{\checkmark}}} \frac{N_L^1(C_L - N_R^1)}{C_L^{\checkmark}} \begin{pmatrix} C_L \\ N_L^1 \\ N_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_L \\ N_R^1 \\ N_R \end{pmatrix} \quad (26.1)$$



## مراجع

- [1] Manin, Yuri. Computable and Uncomputable. *Sovetskoye Radio (Moscow)*, 1980.
- [2] Feynman, Richard. Simulating physics with computers. *Int. J. Theor. Phys* 21:467, 1982.
- [3] D.Deutsch. Quantum theory, The Church-Turing principle, and the universal quantum computer. *Proceeding the Royal Society of London, Series A*, 1985
- [4] D.Deutsch and R.Jozsa. Rapid solution of problems by quantum computation. *Proceeding the Royal Society of London, Mathematical and Physical Sciences*, 439(1907): 553-558, 1992.
- [5] P.shor. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring. *Proceeding of the 35th Annual Symposium on the Foundations of Computer Science, Edited by S.Goldwasser, (Los Alamitos, CA: IEEE Computer Society Press)*, 1994.
- [6] P.shor. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on quantum computer. *SIAM J. Computing*, 26:1484-1509, 1997.
- [7] Mosca, Michele. Quantum algorithms. *Springer Encyclopedia of Complexity and Systems*, 2008.
- [8] A.M.Childs and van Dam, W. Quantum algorithms for algebraic problems. *arXiv:0812.0380*, 2008.
- [9] S.P.Meyn and R.L.Tweedie. Markov chains and stochastic stability.
- [10] Farhi, Edward and Gutmann, Sam. *Quantum Computation and Decision Trees*. 1998.
- [11] J.Watrous. Quantum simulation of classical random walks and undirected graph connectivity. *Journal of Computer and System Sciences*, 62:376-391, 2001.

- [12] A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath, and J. Watrous. *One-dimensional quantum walks*. In Proceedings of the 33th ACM Symposium on The Theory of Computation (STOC'01) ACM, 2001.
- [13] J. Kempe. Quantum random walk- an introductory overview. *Contemporary Physics*, 44:307, 2003.
- [14] Portugal, Renato. Quantum Walks and Search Algorithms. 2013.
- [15] Stefanak, Martin. Interference Phenomena in Quantum Information. *A thesis for the degree of doctor of philosophy, CZECH Technical University in PRAGUE ,Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering*, September 2010.
- [16] Nayak, Ashwin and Vishwanath, Ashvin. Quantum Walk on the Line (Extended Abstract). pp. 1–20
- [17] E. Salvador, A. Venegas. Quantum walks: a comprehensive review. *Quantum Information Processing* **11**, pp. 1015-1106, 2012.
- [18] D.A. Meyer, J. Stat. Phys. **85**, 551 (1996), quant-ph/9604003.
- [19] A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath, and J. Watrous, in *Proceedings of ACM Symposium on Theory of Computation (STOC'01)*, 2001 Association for Computing Machinery, New York, 2001!, pp. 37–49.
- [20] Todd A. Brun, Hilary A. Carteret, and Andris Ambainis. Quantum walks driven by many coins. *Phys. Rev. A*, 67(052317), 2003.
- [21] M. McGettrick; "One Dimensional Quantum Walks with Memory"; *Quantum Information and Computation*, Vol. 10, No. 56, 0509-0524, (2010).
- [22] Michael Mc Gettrick; Quantum walks with memory on cycles; *arXiv:1301.2905v2 [quant-ph]*; 2014.
- [23] R. J. Jenks and R. S. Sutor. Axiom - The Scientific Computation System. *Springer Verlag New York*, 1992. ISBN 0-387-97855-0.
- [24] D. Aharonov, A. Ambainis, J. Kempe, and U. Vazirani. Quantum walks on graphs. In *Proceedings of the 30th Annual ACM Symposium on Theory of Computation*, pages 5059. ACM Press, 2001.

- 
- [25] G. Grimmett, S. Janson, and P.F. Scudo. Weak limits for quantum random walks. *Phys. Rev. E*, 69(2):026119, Feb 2004.
- [26] N. Konno and T. Machida. Limit theorems for quantum walks with memory. *Quant. Inf. Comp*, 10(1112):1004–1017, 2010.
- [27] M. Bednarska, A. Grudka, P. Kurzynski, T. Luczak, and A. Wojcik. Quantum walks on cycles. *Phys. Lett. A*, 317(1-2):2125, 2003.
- [28] B. C. Travaglione and G. J. Milburn. Implementing the quantum random walk. *Phys. Rev. A*, 65(3):032310, 2002.
- [29] Peter P. Rohde, Gavin K. Brennen, and Alexei Gilchrist; ” Quantum walks with memory provided by recycled coins and a memory of the coinflip history”; *PHYSICAL REVIEW A* 87, 052302, (2013).
- [30] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information, (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).
- [31] Donatella Merlini, Francesca Uncini, and M. Cecilia Verri. A uni  
ed ap- proach to the study of general and palindromic compositions. *INTEGERS: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, 4(A23), 2004.

## Abstract

In the first chapter of this thesis we first introduce Classical Random Walk (CRW). The probability distribution and standard deviation which are important parameters of CRW are calculated by simulation in this chapter too. Then the quantum walk on a line (QWL) as well as its quantum operator are introduced and compared its probability distribution with classical one. Then we introduced the Fourier transformation which is an appropriate tool to map the evolution operator in  $K$  space in order to simplify eigenvalue problem.

In addition a method is introduced to make a transition from quantum walk to classical random walk. We also show that we can make a transition from quantum walk to classical random walk by using more coins and reducing the effects of interference among different paths. We have compared the probability distribution of single coin by multiple coins with numerical simulation.

In the next chapter we introduce some new kinds of quantum walk which are called quantum walk with memory. In these types of quantum walks, current state of the walker is influenced by its previous state. We explain this type of quantum walk and its differences with ordinary walks and try to study the effect of different types of memory on quantum walks as well.

In the last chapter, we introduce a new kind of 1-D quantum walk which is called "accelerated quantum walk". In this type of quantum walk, we add another Hilbert space to the system in order to define velocity of the walker which is changeable according to the state of the coin. We modify the conditional shifting operator in order to change the position of the walker according to the velocity of the walker as well, and we study the features of this type of quantum walk and compare it with ordinary one.

Existence of the velocity Hilbert space in quantum walk lets us to define and test different types of accelerated QW. In this thesis we introduce and study two kinds of these walks namely "limited Velocity Quantum Walk" and "Cyclic Velocity Quantum Walk".

**Keywords:** classical random walk, quantum walk, coin operator, probability distribution



Shahrood University  
Faculty Of Physics

Dissertation Submitted in Partial  
Fulfillment of The Requirements For The  
Degree of Master of Science in  
Particle Physics

# **One Dimensional Quantum Walk With Memory**

Supervisor

**Dr. Mostafa Annabestani**

by

**Mahnaz Rezazadeh**

September 2015