

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده فیزیک

گروه فیزیک

رهیافت کوانتومی به اثر فارادی و دوفامی دایروی نانو ساختارها

دانشجو : منا اصفیا

اساتید راهنما :

دکتر حسین عشقی

دکتر میر فائز میری

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور ۱۳۹۳

ب

با تقدیر و سپاس فراوان از

اساتید محترم راهنما آقای دکتر حسین عشقی که به عنوان استاد راهنمای اول این پایان نامه قبول زحمت فرمودند.

و همچنین آقای دکتر میرفائز میری که به عنوان استاد راهنمای دوم بار اصلی انجام این پایان نامه بر عهده ایشان بود.

در نهایت از زحمات بی دریغ پدر و مادر عزیز و خواهر مهربانم که پیوسته در تمام مراحل زندگی از پشتیبانی و محبتشان برخوردار بودم قدردانی و سپاسگزاری می کنم.

چکیده

موادی که صفحه قطبش نور قطبیده خطی فرودی را می چرخانند، مواد فعال اپتیکی نامیده می شوند. ما در این رساله نتایج بارون و آتکینز برای توجیه این پدیده را بازآفرینی می کنیم. ویژگی اصلی این روش، کوانتش هر دو سیستم میدان الکترومغناطیسی و اتم است. ما همچنین مروری بر پدیده ابرتابش می کنیم. این اثر دسته جمعی که مجموعه N اتم، تابشی شدیدتر از N برابر تابش یک اتم دارند، شاید به حوزه فعالیت اپتیکی هم قابل تعمیم باشد.

کلمات کلیدی: کوانتش، میدان الکترومغناطیسی، اتم، ابرتابش، فعالیت اپتیکی

فهرست مطالب

۱	فصل اول: مقدمه
۳-۱-۱	چرخش اپتیکی و دوفامی دایروی
۸-۱-۲	چرخش فارادی
۱۲-۱-۳	بررسی فعالیت اپتیکی با فرض کوانتش ماده و کلاسیک بودن نور
۱۷-۱-۴	لزوم کوانتش میدان الکترومغناطیس
۱۹-۱-۵	پایان نامه
۲۱	فصل دوم: کوانتش میدان الکترومغناطیسی
۲۳-۱-۲	مقدمه
۲۳-۲-۲	نظریه پتانسیل برای میدان الکترومغناطیسی کلاسیکی
۲۵-۲-۳	پیمانه کولن
۲۵-۲-۴	میدان کلاسیکی آزاد
۲۹-۲-۵	نوسانگر هارمونیک مکانیک کوانتومی
۳۱-۲-۶	کوانتش میدان
۳۵	فصل سوم: پدیده چرخش اپتیکی: رهیافت نظریه میدان کوانتومی الکترومغناطیسی
۳۷-۱-۳	مقدمه
۳۹-۲-۳	ماتریس پراکندگی
۴۰-۳-۳	هامیلتونی برهم کنش

۴۷ چرخش اپتیکی ۴-۳
۷۷	فصل چهارم: حالت های اتمی جمعی و متغیرهای دینامیکی جمعی
۷۹ ۱-۴. اثرات جمعی
۸۶ ۱-۴.۱. حالت های دیکی
۹۹ ۴-۱-۲. تبهگنی حالت های دیکی
۱۰۱ ۴-۲. تابش اتمی دسته جمعی
۱۰۱ ۴-۲-۱. ابرتایش دیکی
۱۰۵ ۴-۲-۲. تابش دسته جمعی در حالت حاصلضربی اتمی
۱۰۹ ۴-۲-۳. تحول زمانی ابرتایش
۱۱۳	جمع بندی و کارهای پیش رو
۱۱۵	منابع

فهرست اشکال

- شکل (۱-۱) چرخش چپگرد سطح قطبش توسط یک محیط فعال اپتیکی ۳
- شکل (۲-۱) طیف دوفامی دایروی یک پلی پتید با آرایش ماریچ- α و صفحه- β ۸
- شکل (۳-۱) سه گذار تابشی انیشتین ۱۷
- شکل (۱-۴) مقایسه نرخ گسیل ابرتابش با گسیل خود بخودی برای سیستمی شامل ۲۰ اتم ۱۱۲

فهرست جداول

- جدول (۱-۱) توان چرخشی کوارتز ۴
- جدول (۲-۱) ضرایب شکست نور دایروی چپگرد و راستگرد در کوارتز. این مقادیر ۷
- مربوط به کوارتز راستگرد بوده و برای کوارتز چپگرد، مقادیر بالا معکوس می شوند.
- جدول (۳-۱) مقادیر ثابت وردت برای چند ماده ۹

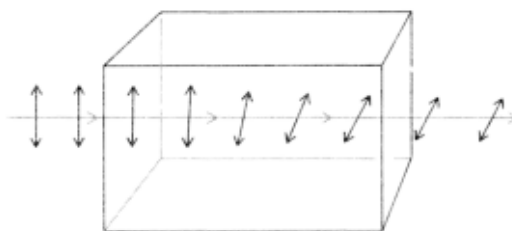
فصل اول

مقدمه

۱-۱. چرخش اپتیکی و دوفامی دایروی

به پدیده چرخش صفحه قطبش نور قطبیده تخت در اثر عبور از محیط، فعالیت اپتیکی گفته می شود. هرگاه یک باریکه نور قطبیده خطی از یک محیط فعال اپتیکی مطابق شکل زیر عبور کند، صفحه قطبش نور آشکار شده با زاویه ای متناسب با طول مسیر نور چرخش می یابد [۸].

$$\theta \propto \frac{L}{V} I(\omega) \quad (1-1)$$



شکل (۱-۱) چرخش چپگرد سطح قطبش توسط یک محیط فعال اپتیکی [۸].

فعالیت اپتیکی بلور کوارتز برای اولین بار توسط آراگو^۱ (۱۸۱۱) مشاهده گردید. آزمایش های پیرو توسط بیو^۲ (۱۸۱۲) انجام شد که دو اثر متمایز را کشف کرد: ۱- چرخش اپتیکی، که چرخش سطح قطبش باریکه نور قطبیده خطی است. ۲- پاشندگی چرخش اپتیکی، که چرخش نابرابر صفحه قطبش طول موج های متفاوت نور است.

مواد فعال اپتیکی را از لحاظ چرخش صفحه قطبش نور فرودی به دو دسته تقسیم می نمایند. اگر صفحه قطبش به صورت ساعتگرد بچرخد، ماده را راستگرد و اگر چرخش صفحه قطبش پادساعتگرد باشد، ماده را چپگرد می نامند. به عنوان مثال سدیم کلراید، سولفور جیوه و انواع به خصوصی از قندها نمونه هایی از مواد فعال اپتیکی محسوب می شوند. اگرچه کوارتز مذاب از

¹ Arago

² Biot

لحاظ اپتیکی همسانگرد است، بلور کوارتز علاوه بر فعال اپتیکی بودن دارای خاصیت شکست دوگانه نیز می باشد. بلور کوارتز به دو صورت راستگرد و چپگرد موجود است. جدول (۱-۱) توان چرخشی خاص دو نوع بلور کوارتز را به ازای طول موج های مختلف برای نور انتشار یافته در راستای محور اپتیکی نشان می دهد.

جدول (۱-۱) توان چرخشی کوارتز [۸].

طول موج (آنگسترم)	توان چرخشی خاص (درجه/ میلی متر)
۴۰۰۰	۴۹
۴۵۰۰	۳۷
۵۰۰۰	۳۱
۵۵۰۰	۲۶
۶۰۰۰	۲۲
۶۵۰۰	۱۷

از جدول بالا واضح است که میزان فعالیت اپتیکی کوارتز برحسب طول موج تغییر می کند. به این تغییر توان چرخشی برحسب طول موج، پاشندگی چرخشی گفته می شود [۸].
منشا فعالیت اپتیکی طبیعی، ساختار بلوری یا ساختار مولکولی کایرال می باشد. اگر ساختار غیرمنطبق با تصویر آینه ای خود باشد فعالیت اپتیکی ممکن است رخ دهد [۷].

در حوزه الکترومغناطیس کلاسیک، فعالیت اپتیکی را می توان براساس مدل ساده و زیبایی فرنل توضیح داد. کافی است فرض کنیم که سرعت انتشار نور قطبیده دایروی راست، متفاوت با سرعت انتشار نور قطبیده دایروی چپ در محیط است [۸]. برای بیان این موضوع، استفاده از بردار جونز مناسب است. فرض می کنیم که n_L و n_R به ترتیب ضریب شکست محیط برای نور قطبیده دایروی راستگرد و چپگرد با فرکانس ω را نشان دهند. $k_R = n_R \frac{\omega}{c}$ و $k_L = n_L \frac{\omega}{c}$ می گیریم. بردار جونز موجهای راستگرد و چپگرد عبارتند از:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{i(k_R z - \omega t)} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{i(k_L z - \omega t)} \end{cases} \quad (2-1)$$

با فرض اینکه باریکه نور فرودی قطبیده خطی و قطبش اولیه در راستای افقی است، می توان بردار جونز اولیه را برحسب دو بردار جونز بالا نوشت:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad (3-1)$$

بردار جونز نور پس از طی مسافت l از محیط عبارت است از:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{ik_R l} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{ik_L l} \\ &= \frac{1}{2} e^{i(k_R + k_L)l/2} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{i(k_R - k_L)l/2} + \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{-i(k_R - k_L)l/2} \right\} \end{aligned} \quad (4-1)$$

با معرفی دو کمیت θ و ψ

$$\psi = \frac{1}{2}(k_R + k_L)l \quad (5-1)$$

$$\theta = \frac{1}{2}(k_R - k_L)l \quad (6-1)$$

بردار جونز بصورت زیر نوشته می شود:

$$e^{i\psi} \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{i\theta} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{-i\theta} \right\}$$

$$= e^{i\psi} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \end{bmatrix} = e^{i\psi} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad (7-1)$$

رابطه (7-1) نشان دهنده چرخش راستای قطبش نور به اندازه θ نسبت به راستای اولیه آن است. به این ترتیب می توان نوشت:

$$\theta = (n_R - n_L) \frac{\omega l}{2c} = (n_R - n_L) \frac{\pi l}{\lambda} \quad (8-1)$$

λ طول موج نور در خلا می باشد. لازم به ذکر است که ضرایب شکست n_L و n_R هر یک تابعی از طول موج نیز می باشند. به عنوان مثال ضرایب شکست n_L و n_R برای انتشار نور در راستای محور اپتیکی کوارتز در جدول (2-1) آورده شده است:

جدول (۲-۱) ضرایب شکست نور دایروی چپگرد و راستگرد در کوارتز. این مقادیر مربوط به کوارتز راستگرد بوده و برای کوارتز چپگرد، مقادیر بالا معکوس می شوند [۸].

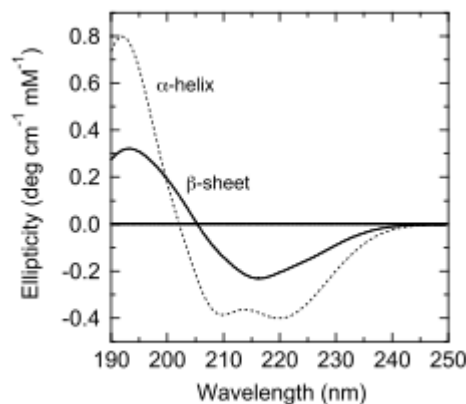
$\lambda(\text{\AA})$	n_R	n_L	$n_R - n_L$
۳۹۶۰	۱/۵۵۸۱۰	۱/۵۵۸۲۱	۰/۰۰۰۱۱
۵۸۹۰	۱/۵۴۴۲۰	۱/۵۴۴۲۷	۰/۰۰۰۰۷
۷۶۰۰	۱/۵۳۹۱۴	۱/۵۳۹۲۰	۰/۰۰۰۰۶

پدیده دیگری که در مواد فعال اپتیکی مشاهده می شود، دوفامی دایروی^۳ است. مواد دوفام دایره ای، نورهای قطبیده دایروی راستگرد و چپگرد را به میزان متفاوتی جذب می کنند [۱۱]. بزرگی دوفامی دایروی از تفاضل ضرایب جذب نور قطبیده دایروی راستگرد و چپگرد بدست می آید:

$$\Delta n' = n'_L - n'_R \quad (۹-۱)$$

شکل (۲-۱) به عنوان مثال طیف دوفامی دایروی یک پلی پتید با آرایش مارپیچ- α و صفحه- β را نشان می دهد.

³ Circular Dichroism



شکل (۲-۱) طیف دوفامی دایروی یک پلی پپتید با آرایش مارپیچ- α و صفحه- β [۱۱].

۲-۱. چرخش فارادی

هرگاه یک دی الکتریک ایزوتروپیک در میدان مغناطیسی قرار داده شود و یک باریکه نور قطبیده خطی از آن در راستای میدان عبور داده شود، آنگاه شاهد چرخش صفحه قطبش نور خواهیم بود. به عبارت دیگر حضور میدان سبب فعالیت اپتیکی ماده می شود [۸]. این پدیده در سال ۱۸۴۵ توسط مایکل فارادی^۴ کشف گردید. θ میزان چرخش صفحه قطبش نور متناسب با اندازه میدان مغناطیسی \vec{B} و طول مسیر حرکت نور در محیط l است، یعنی

$$\theta = VBl \quad (۱۰-۱)$$

V معروف به ثابت وردت^۵ است. V مشخصه ماده می باشد. به عنوان مثال مقادیر ثابت وردت چند نمونه در نور زرد با طول موج ۵۸۹۰ آنگسترم در جدول (۳-۱) آورده شده است:

⁴ Michael Faraday

⁵ Verdet

جدول (۳-۱) مقادیر ثابت ورودت برای چند ماده [۸].

ماده	V (Minutes of Angle/per Oe/cm)
فلوریت	۰/۰۰۰۹
الماس	۰/۰۱۲
چخماق	۰/۰۳۰ - ۰/۰۵۰
سدیم کلراید	۰/۰۳۶

در حوزه فیزیک کلاسیک به منظور شرح اثر فارادی، می بایست معادله حرکت الکترون های مقید در حضور میدان مغناطیسی خارجی \vec{B} و میدان الکتریکی نوسانی \vec{E} نور را بررسی کرد. معادله دیفرانسیل حرکت الکترون عبارت است از:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + K \vec{r} = -e \vec{E} - e \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) \times \vec{B} \quad (11-1)$$

در این معادله \vec{r} مکان الکترون از نقطه تعادل آن، K ثابت فنر معادل، m جرم الکترون و $-e$ بار الکترون می باشد. به منظور ساده سازی محاسبات از نیروی کوچک حاصل از میدان مغناطیسی نور و نیز اثرات میرایی صرف نظر شده است. با فرض اینکه میدان \vec{E} بستگی زمانی $e^{-i\omega t}$ دارد، \vec{r} نیز دارای بستگی زمانی هارمونیک مشابه است. پس می توان نوشت:

$$-m\omega^2 \vec{r} + K \vec{r} = -e \vec{E} + i\omega e \vec{r} \times \vec{B} \quad (12-1)$$

قطبش محیط $\vec{P} = -Ne \vec{r}$ است. در اینجا N تعداد الکترون در واحد حجم محیط می باشد. بنابراین رابطه (۱۲-۱) را می توان بصورت زیر بازنویسی نمود:

$$(-m\omega^2 + K) \vec{P} = Ne^2 \vec{E} + i\omega e \vec{P} \times \vec{B} \quad (13-1)$$

رابطه برداری (۱۳-۱) معادل سه معادله برای مولفه های P_x, P_y, P_z بردار قطبش است. با حل

معادله می بینیم که هر مولفه \vec{P} بصورت خطی به میدان \vec{E} بستگی دارد. به عبارت دیگر

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (۱۴-۱)$$

که χ تانسور پذیرفتاری است. از حل معادله (۱۳-۱) داریم:

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_{11} & i\chi_{12} & 0 \\ -i\chi_{12} & \chi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix} \quad (۱۵-۱)$$

به طوری که

$$\begin{cases} \chi_{11} = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \left[\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2 \omega_c^2} \right] \\ \chi_{33} = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \left[\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \right] \\ \chi_{12} = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \left[\frac{\omega \omega_c}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2 \omega_c^2} \right] \end{cases} \quad (۱۶-۱)$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ فرکانس تشدید و $\omega_c = \frac{eB}{m}$ فرکانس سیکلوترون است.

برای اینکه نشان دهیم χ ، تانسور پذیرفتاری محیط فعال اپتیکی است، کافی است معادله موج

را حل کنیم. فرض می کنیم راستای انتشار نور، راستای \hat{z} است. معادله موج در حوزه فوریه

عبارت است از

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \chi \vec{E} \quad (۱۷-۱)$$

برحسب مولفه های \vec{E} داریم:

$$\begin{cases} -k^2 E_x + \frac{\omega^2}{c^2} E_x = -\frac{\omega^2}{c^2} (\chi_{11} E_x + i\chi_{12} E_y) & (18-1) \\ -k^2 E_y + \frac{\omega^2}{c^2} E_y = -\frac{\omega^2}{c^2} (-i\chi_{12} E_x + \chi_{11} E_y) & (19-1) \\ \frac{\omega^2}{c^2} E_z = -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{33} E_z & (20-1) \end{cases}$$

از رابطه (۲۰-۱) خواهیم داشت: $E_z = 0$. از روابط (۱۸-۱) و (۱۹-۱) شرط غیر صفر بودن E_x و E_y را می توان نوشت:

$$\begin{vmatrix} -k^2 + (\omega^2/c^2)(1 + \chi_{11}) & i(\omega^2/c^2)\chi_{12} \\ -i(\omega^2/c^2)\chi_{12} & -k^2 + (\omega^2/c^2)(1 + \chi_{11}) \end{vmatrix} = 0$$

که حل آن عبارت است از

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \chi_{11} \pm \chi_{12}} \quad (21-1)$$

با جایگذاری k از رابطه (۲۱-۱) در رابطه (۱۸-۱) یا (۱۹-۱) خواهیم داشت:

$$E_x = \pm i E_y \quad (22-1)$$

بنابراین نتیجه می گیریم دو مقدار بدست آمده برای k از رابطه (۲۱-۱) متناظر با نور قطبیده دایروی

راستگرد و چپگرد می باشند. پس به ترتیب ضرایب شکست مربوط به نور قطبیده دایروی راستگرد و

چپگرد را می توان بصورت زیر نوشت:

$$n_R = k_R c / \omega = \sqrt{1 + \chi_{11} + \chi_{12}} \quad (23-1)$$

$$n_L = k_L c / \omega = \sqrt{1 + \chi_{11} - \chi_{12}} \quad (24-1)$$

تفاضل n_L و n_R را می شود نوشت:

$$n_R - n_L \approx \frac{\chi_{12}}{\sqrt{1 + \chi_{11}}} = \frac{\chi_{12}}{n_0} \quad (25-1)$$

که در آن n_0 ضریب شکست عادی می باشد. پس طبق رابطه (1-18) چرخش سطح قطبش خواهد شد:

$$\theta = \frac{\chi_{12} \pi}{n_0 \lambda} l \quad (26-1)$$

رابطه (1-26) نشان می دهد که چرخش صفحه قطبش نور به طور مستقیم متناسب با مولفه χ_{12} تانسور پذیرفتاری است.

۳-۱. بررسی فعالیت اپتیکی با فرض کوانتس ماده و کلاسیک بودن نور

توجیه فعالیت اپتیکی که پیش از این مطرح شد، کاملاً در حوزه فیزیک کلاسیک است. ناکافی بودن این نظریه واضح می باشد. اکنون به مرور نظریه ای که ماده را کوانتومی و نور را کلاسیک در نظر می گیرد، می پردازیم. نور قطبیده تخت را می توان بصورت ترکیب دو مولفه نور قطبیده دایروی راستگرد E^+ و نور قطبیده دایروی چپگرد E^- بیان نمود [۹].

$$\vec{E}^{\pm} = E \hat{i} \cos \phi_{\pm} \pm E \hat{j} \sin \phi_{\pm} \quad (27-1)$$

بردارهای \hat{i} و \hat{j} بردارهای واحد عمود بر راستای انتشار \hat{k} می باشند و

$$\begin{cases} \phi_{\pm} = \omega t - \frac{2\pi z}{\lambda_{\pm}} \\ \lambda_{\pm} = \frac{v_{\pm}}{v} = \frac{c}{n_{\pm} v} \end{cases} \quad (28-1)$$

رابطه (1-28) نشان دهنده متفاوت بودن سرعت انتشار نور قطبیده دایروی راستگرد و چپگرد در محیط و همچنین متفاوت بودن ضرایب شکست n_+ و n_- نور قطبیده دایروی راستگرد و

چپگرد نیز می باشند. با توجه به معادلات ماکسول، تغییر فضایی میدان الکتریکی $\partial \vec{E} / \partial x$

متناسب با تغییر زمانی میدان مغناطیسی می باشد یعنی $\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \propto \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. بنابراین قطبش الکتریکی

\vec{P} ناشی از تغییر فضایی میدان الکتریکی متناسب با تغییر زمانی میدان مغناطیسی \vec{B}

می باشد. به این ترتیب با در نظر گرفتن تغییر فضایی میدان الکتریکی انتظار داریم قطبش کل

محیط بصورت زیر به \vec{E} و \vec{B} بستگی داشته باشد.

$$\vec{P} = N\alpha\vec{E} - N\beta\vec{B} \quad (29-1)$$

جمله $\alpha\vec{E}$ متناظر با ممان دوقطبی الکتریکی در صفحه بردار الکتریکی و جمله $\beta\vec{B}$ متناظر با

ممان الکتریکی در صفحه ای موازی با \vec{B} و عمود بر \vec{E} می باشد. در محیط های غیرفعال

اپتیکی جمله دوم سمت راست رابطه (29-1) وجود نخواهد داشت. اما در صورت غیر صفر

بودن β انتظار می رود $n_+ \neq n_-$ باشد.

در ادامه توجه می کنیم که براساس معادله ماکسول $\vec{\nabla} \times \vec{E}^{\pm} = -\dot{\vec{B}}^{\pm}$ و رابطه (27-1)،

مولفه مغناطیسی میدان الکترومغناطیسی خواهد شد:

$$\vec{B}^{\pm} = - \int \vec{\nabla} \times \vec{E}^{\pm} dt = -Ek_{\pm} \int (\sin\phi_{\pm} \hat{j} \pm \cos\phi_{\pm} \hat{i}) dt$$

$$\vec{B}^{\pm} = \frac{Ek_{\pm}}{\omega} (\hat{j} \cos\phi_{\pm} \mp \hat{i} \sin\phi_{\pm}) \quad (30-1)$$

آنگاه

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}^{\pm} = \frac{Ek_{\pm}^2}{\omega} (-\sin\phi_{\pm} \hat{i} \pm \cos\phi_{\pm} \hat{j}) = \pm k_{\pm} \vec{B}^{\pm} \quad (31-1)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B}^\pm = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}^\pm) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}^\pm) = \mp k_\pm \vec{\nabla} \times \vec{B}^\pm = -k_\pm^2 \vec{B}^\pm \quad (32-1)$$

$$\vec{B}^\pm = -E\omega k_\pm (\cos \phi_\pm \hat{j} \mp \sin \phi_\pm \hat{i}) = -\omega^2 \vec{B}^\pm \quad (33-1)$$

خواهیم داشت:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B}^\pm = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}^\pm) \approx -\mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{D}^\pm = -\mu_0 \epsilon_0 \left(1 + \frac{N\alpha}{\epsilon_0}\right) \vec{\nabla} \times \vec{E}^\pm + \mu_0 N\beta \vec{\nabla} \times \vec{B}^\pm$$

طبق معادله ماکسول $\vec{\nabla} \times \vec{E}^\pm = -\vec{B}^\pm$ پس

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B}^\pm = \mu_0 \epsilon_0 \left(1 + \frac{N\alpha}{\epsilon_0}\right) \vec{B}^\pm + \mu_0 N\beta \vec{\nabla} \times \vec{B}^\pm \quad (34-1)$$

سپس با جایگذاری روابط (31-1)، (32-1) و (33-1) در رابطه (34-1) می توان نوشت:

$$k_\pm^2 = \epsilon_0 \mu_0 \left(1 + \frac{N\alpha}{\epsilon_0}\right) \pm \mu_0 \beta N \omega^2 k_\pm \quad (35-1)$$

با جایگذاری $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ و $k_\pm = \frac{n_\pm \omega}{c}$ رابطه (35-1) را می توان بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$n_\pm^2 = 1 + \frac{\alpha N}{\epsilon_0} \pm \frac{\omega \beta N n_\pm}{c \epsilon_0} \quad (36-1)$$

رابطه (36-1) یک معادله درجه دوم برای n_\pm می باشد. بنابراین ضرایب شکست یک محیط

فعال اپتیکی به طور تقریبی برابر است با:

$$n_\pm \approx 1 + \frac{\alpha N}{2\epsilon_0} \pm \frac{\omega \beta N}{2c \epsilon_0} \quad (37-1)$$

اکنون می بایست قطبش محیط را در پاسخ به میدان الکترومغناطیسی بصورت کوانتومی

محاسبه نمود. به عبارت دیگر به محاسبه α و β می پردازیم. هامیلتونی اختلال را می توان

اینگونه نوشت:

$$H_{\pm}^{(1)}(t) = -\mu \cdot E^{\pm}(t) - m \cdot B^{\pm}(t) \quad (38-1)$$

μ و m به ترتیب عملگرهای ممان دوقطبی الکتریکی و ممان دوقطبی مغناطیسی مولکول می باشند. بعلاوه

$$\begin{cases} E^{\pm}(t) = E(\hat{i} \cos \omega t \pm \hat{j} \sin \omega t) \\ B^{\pm}(t) = B(\pm \hat{i} \sin \omega t - \hat{j} \cos \omega t) \end{cases} \quad (39-1)$$

همیلتونی $H_{\pm}^{(1)}(t)$ را با جایگذاری رابطه (39-1) در (38-1) اینگونه می نویسیم:

$$\begin{aligned} H_{\pm}^{(1)}(t) = & -\frac{1}{2}(1 - e^{-t/\tau})\mu \cdot E[(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})\hat{i} \pm i(e^{-i\omega t} - e^{i\omega t})\hat{j}] \\ & -\frac{1}{2}(1 - e^{-t/\tau})m \cdot B[\mp i(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})\hat{i} - (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})\hat{j}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{\pm}^{(1)}(t) = & -\frac{1}{2}E(1 - e^{-t/\tau})[(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})\mu_x \mp i(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})\mu_y] \\ & -\frac{1}{2}B(1 - e^{-t/\tau})[-(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})m_y \mp i(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})m_x] \end{aligned} \quad (40-1)$$

در اینجا عامل $1 - e^{-t/\tau}$ را وارد کرده ایم تا اختلال بصورت کند روشن شود. با در نظر گرفتن ضرایب تابع موج اختلالی $a_n^{\pm}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t H_{\pm, n_0}^{(1)}(t) e^{i\omega_{n_0} t} dt$ مقدار چشمداشتی عملگر ممان دوقطبی الکتریکی خواهد شد:

$$\begin{aligned} \langle \mu^{\pm} \rangle = & \mu_0 + \sum_n^I \{ \mu_{0n} a_n^{\pm}(t) e^{-i\omega_{n_0} t} + \mu_{n0} a_n^{\pm*}(t) e^{i\omega_{n_0} t} \} \\ = & \frac{2}{\hbar} \mathcal{R}e \sum_n^I \left\{ \mu_{0n} (E\mu_{x,n_0} - Bm_{y,n_0}) \left(\frac{\omega_{n_0} \cos \omega t - i\omega \sin \omega t}{\omega_{n_0}^2 - \omega^2} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\mp i\mu_{0n}(E\mu_{y,n0} + Bm_{x,n0}) \left(\frac{i\omega_{n0} \sin \omega t - \omega \cos \omega t}{\omega_{n0}^2 - \omega^2} \right)$$

تمام توابع مربوط به اتم منفرد، حقیقی در نظر گرفته می شوند. بنابراین عناصر ماتریسی μ_{n0} حقیقی می باشند در حالی که m_{n0} ها موهومی هستند. پس می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \langle \mu^\pm \rangle &= \frac{2}{\hbar} \mathcal{R}e \sum_n \left(\frac{E\omega_{n0}}{\omega_{n0}^2 - \omega^2} \right) \mu_{0n} (\mu_{x,n0} \cos \omega t \pm \mu_{y,n0} \sin \omega t) \\ &\quad - \frac{2}{\hbar} \mathcal{I}m \sum_n \left(\frac{B\omega}{\omega_{n0}^2 - \omega^2} \right) \mu_{0n} (m_{y,n0} \sin \omega t \pm m_{x,n0} \cos \omega t) \\ &= \frac{2}{\hbar} \mathcal{R}e \sum_n \left(\frac{E\omega_{n0}}{\omega_{n0}^2 - \omega^2} \right) \mu_{0n} \mu_{n0} \cdot (\hat{i} \cos \omega t \pm \hat{j} \sin \omega t) \\ &\quad - \frac{2}{\hbar} \mathcal{I}m \sum_n \left(\frac{B\omega}{\omega_{n0}^2 - \omega^2} \right) \mu_{0n} m_{n0} \cdot (\hat{j} \sin \omega t \pm \hat{i} \cos \omega t) \end{aligned}$$

طبق رابطه (۳۹-۱)

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\hbar} \mathcal{R}e \sum_n \left(\frac{\omega_{n0}}{\omega_{n0}^2 - \omega^2} \right) \mu_{0n} \mu_{n0} \cdot E^\pm(t) \\ &\quad - \frac{2}{\hbar} \mathcal{I}m \sum_n \left(\frac{1}{\omega_{n0}^2 - \omega^2} \right) \mu_{0n} m_{n0} \cdot \dot{B}^\pm(t) \end{aligned} \quad (۴۱-۱)$$

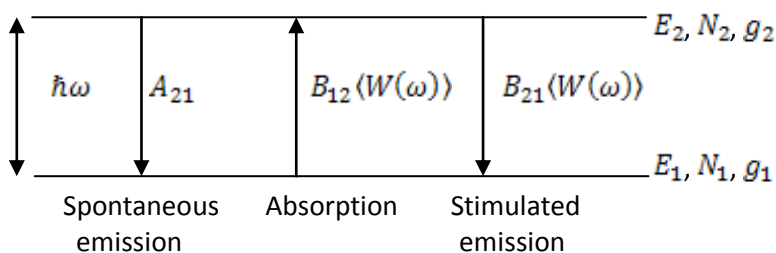
پس از ضرب کردن طرفین رابطه (۴۱-۱) در N و مقایسه آن با رابطه (۲۹-۱) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2}{\hbar} \mathcal{R}e \sum_n \frac{\omega_{n0} \mu_{0n} \mu_{n0}}{\omega_{n0}^2 - \omega^2} \\ \beta = \frac{2}{\hbar} \mathcal{I}m \sum_n \frac{\mu_{0n} m_{n0}}{\omega_{n0}^2 - \omega^2} \end{cases} \quad (۴۲-۱)$$

گرچه این نظریه بخوبی فعالیت ایتیکی را توجیه می کند اما هنوز ناقص است، چراکه میدان الکترومغناطیسی نیز باید کوانتیده در نظر گرفته شود. در ادامه این مبحث را روشنتر می کنیم.

۴-۱. لزوم کوانتس میدان الکترومغناطیس

لزوم کوانتس میدان الکترومغناطیسی، از همان ابتدا که انیشتین نظریه پدیده شناختی خود را برای توجیه تابش اتم ارائه کرد، معلوم شد. انیشتین سه فرایند تابش خود بخودی، جذب و تابش القایی را معرفی کرد. به شکل (۳-۱) نگاه کنید.



شکل (۳-۱) سه گذار تابشی انیشتین [۱].

در ابتدا یک اتم در حالت برانگیخته $|2\rangle$ را در نظر بگیرید. اتم به طور خود بخودی به حالت $|1\rangle$ بر می گردد و فوتون با انرژی $\hbar\omega$ تابش می شود [۱]. از مدل انیشتین، نرخ گسیل خود بخودی A_{21} است. اکنون یک اتم در حالت $|1\rangle$ را در نظر بگیرید. در حضور تابش، گذار از حالت $|1\rangle$ به حالت $|2\rangle$ همراه با جذب یک فوتون با انرژی $\hbar\omega$ انجام می شود. نرخ چنین گذاری متناسب با چگالی انرژی تابشی و برابر $B_{12}\langle W(\omega) \rangle$ است.

در فرایندی دیگر، فوتونی با انرژی $\hbar\omega$ اتمی در حالت $|2\rangle$ را تحریک می کند که منجر به گذار اتم از حالت $|2\rangle$ به حالت $|1\rangle$ با نرخ $B_{21}\langle W(\omega) \rangle$ متناسب با چگالی انرژی تابشی می گردد. اکنون به بررسی تاثیر این سه فرایند روی جمعیت ترازهای اتمی می پردازیم. می توان نوشت:

$$dN_1/dt = -dN_2/dt = N_2A_{21} - N_1B_{12}\langle W(\omega) \rangle + N_2B_{21}\langle W(\omega) \rangle \quad (43-1)$$

در حالت تعادل تغییرات زمانی جمعیت صفر می شود.

$$N_2A_{21} - N_1B_{12}\langle W(\omega) \rangle + N_2B_{21}\langle W(\omega) \rangle = 0 \quad (44-1)$$

از حل رابطه (44-1)، تحت شرایط تعادل گرمایی داریم:

$$\langle W_T(\omega) \rangle = \frac{A_{21}}{(N_1/N_2)B_{12} - B_{21}} \quad (45-1)$$

متوسط تعداد اتم ها در دو تراز در حالت تعادل گرمایی از قانون بولتزمن پیروی می کنند، پس می توان نوشت:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{g_1 \exp(-E_1/k_B T)}{g_2 \exp(-E_2/k_B T)} = \frac{g_1}{g_2} \exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) \quad (46-1)$$

با جایگذاری رابطه (46-1) در رابطه (45-1) داریم:

$$\langle W_T(\omega) \rangle = \frac{A_{21}}{(g_1/g_2) \exp(\hbar\omega/k_B T) B_{12} - B_{21}} \quad (47-1)$$

$$\langle W_T(\omega) \rangle d\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{d\omega}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}$$

به این ترتیب از مقایسه رابطه (47-1) با قانون پلانک

خواهیم داشت:

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21} \quad (48-1)$$

$$(\hbar\omega^3/\pi^2 c^3) B_{21} = A_{21} \quad (49-1)$$

سه ضریب انیشتین مستقل از هم نمی باشند. فرایند گسیل خود بخودی نقشی اساسی دارد. اما اگر معادله شرودینگر را برای اتم بپذیریم، اتمی که در ویژه حالت $|2\rangle$ است، در همان حالت باقی خواهد ماند و به حالت $|1\rangle$ گذار نخواهد کرد. وقتی این تناقض حل می شود که کوانتومی بودن میدان الکترومغناطیسی هم در نظر گرفته شود. برای جزئیات به مرجع [1] و سایر مراجع نگاه کنید.

۱-۵. پایان نامه

با توجه به مقدمات ذکر شده، باید در بررسی برهم کنش نور و ماده، هم میدان الکترومغناطیسی و هم ماده را بصورت کوانتومی بررسی کرد. در فصل سوم این پایان نامه با در نظر گرفتن میدان الکترومغناطیس کوانتیده و یک اتم منفرد به بازآفرینی محاسبه چرخش اپتیکی ارائه شده در مرجع [۴] می پردازیم. سپس در فصل چهارم، از مساله یک اتم به مساله چند اتم مهاجرت می کنیم و اثرات اتمی جمعی را مرور می کنیم. پدیده ابرتابش دیکی^۶ را مطرح می نماییم. این اثر دسته جمعی که مجموعه N اتم می توانند تابشی شدیدتر از N برابر تابش یک اتم یکسان داشته باشند، شاید به حوزه فعالیت اپتیکی هم قابل تعمیم باشد. البته ما هنوز موفق به ساختن این نظریه نشده ایم.

⁶ Dicke superradiance

فصل دوم

کوانتس میدان الکترومغناطیسی

۱-۱. مقدمه

این نکته پذیرفته شده است که تاکنون مکانیک کوانتومی بهترین تصویر از پدیده های فیزیکی و کامل ترین توصیف از میدان تابشی را فراهم آورده است. در این نظریه میدان های مشاهده پذیر \vec{E} و \vec{B} به صورت عملگر نمایش داده می شوند. این فصل به مرور کوانتس میدان الکترومغناطیسی [۱] اختصاص یافته است. عبارت هایی برای عملگرهایی که توصیف کننده مشاهده پذیرهای میدان هستند، و انواع حالت های میدان بدست می آیند. مشاهده خواهد شد که کوانتس، اثرات ویژه مکانیک کوانتومی را به میدان تابشی القا می کند. به عنوان مثال، داشتن موج الکترومغناطیسی با دامنه و فاز کاملاً مشخص ممکن نیست [۱].

۲-۲. نظریه پتانسیل برای میدان الکترومغناطیسی کلاسیکی

معادلات ماکسول کلاسیک برای میدان های الکترومغناطیسی در خلا به صورت زیر نمایش

داده می شوند:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t \quad (1-2)$$

$$\mu_0^{-1} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 (\partial \vec{E} / \partial t) + \vec{J} \quad (2-2)$$

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \sigma \quad (3-2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4-2)$$

به طوری که σ و \vec{J} به ترتیب چگالی های بار و جریان می باشند. میدان های کلاسیکی ماکسول بر حسب پتانسیل های اسکالر ϕ و پتانسیل برداری \vec{A} قابل بیان هستند. برای برقراری رابطه (۴-۲) معادلات ماکسول، می توان \vec{B} را بر حسب پتانسیل \vec{A} طبق رابطه (۵-۲) اینگونه نوشت.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (۵-۲)$$

جایگذاری این عبارت در معادله (۱-۲) با توجه به اتحاد $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = 0$ می دهد

$$\nabla \times (\vec{E} + \partial \vec{A} / \partial t) = 0$$

پس می توان نشان داد که

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (۶-۲)$$

پس در صورتی که پتانسیل های ϕ و \vec{A} معلوم باشند آنگاه می توان طبق روابط (۵-۲) و (۶-۲) میدان های \vec{E} و \vec{B} را یافت. پتانسیل ها را می توان با جایگذاری روابط (۵-۲) و (۶-۲) در معادلات ماکسول (۲-۲) و (۳-۲) بدست آورد:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \phi + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right] = \mu_0 \vec{J} \quad (۷-۲)$$

و

$$-\epsilon_0 \vec{\nabla}^2 \phi - \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot (\partial \vec{A} / \partial t) = \sigma \quad (۸-۲)$$

یادآوری می کنیم که $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ و $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$

بایستی توجه داشت تعاریف (۵-۲) و (۶-۲) برای \vec{A} و ϕ نمی توانند پتانسیل را به طور کامل تعیین نمایند. با فرض آنکه \vec{A}_0 و ϕ_0 میدان های الکتریکی و مغناطیسی \vec{E} و \vec{B} را بدست دهند، پتانسیل های جدید \vec{A} و ϕ که بصورت زیر تعریف می شوند نیز کارساز هستند.

$$\vec{A} = \vec{A}_0 - \vec{\nabla}\xi \quad (۹-۲)$$

$$\phi = \phi_0 + (\partial\xi/\partial t) \quad (۱۰-۲)$$

در اینجا ξ ، تابعی دلخواه از مکان \vec{r} و زمان t می باشد. از رابطه (۶-۲) آشکار است \vec{E} و \vec{B} تحت تبدیل پیمانه ای فوق تغییر نمی کنند.

۳-۲. پیمانه کولن

در صورتی که پتانسیل برداری از شرط زیر تبعیت نماید، گفته می شود که از پیمانه کولن استفاده شده است.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (۱۱-۲)$$

با استفاده از پیمانه کولن می توان معادلات میدان (۷-۲) و (۸-۲) را به صورت زیر ساده نمود:

$$-\vec{\nabla}^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \phi = \mu_0 \vec{J} \quad (۱۲-۲)$$

$$-\vec{\nabla}^2 \phi = \sigma / \epsilon_0 \quad (۱۳-۲)$$

۴-۲. میدان کلاسیکی آزاد

در ادامه امواج الکترومغناطیسی را در ناحیه ای از فضا که دارای بار و جریان الکتریکی نیست، بررسی می کنیم. چون $\sigma = 0$ معادله (۱۳-۲) به ما می دهد $\phi = 0$. بنابراین از رابطه (۱۲-۲) داریم:

$$-\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (14-2)$$

اکنون ناحیه مکعبی از فضا به طول L مشابه با کاواک مکعبی بررسی می گردد، "کاواک" فقط به عنوان ناحیه ای از فضا بدون هیچ مرز واقعی در نظر گرفته می شود. به جای حل امواج ایستاده از امواج رونده سازگار با شرایط مرزی دوره ای استفاده می کنیم. با این وصف، پتانسیل برداری در کاواک را می توان به صورت سری فوریه بسط داد:

$$\vec{A} = \sum_{\mathbf{k}} \{A_{\mathbf{k}}(t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \vec{r}) + A_{\mathbf{k}}^*(t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \vec{r})\} \quad (15-2)$$

به طوری که مولفه های بردار موج \vec{k} دارای مقادیر زیر خواهد بود:

$$k_x = 2\pi v_x/L, \quad k_y = 2\pi v_y/L, \quad k_z = 2\pi v_z/L \quad (16-2)$$

که $v_x, v_y, v_z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ اعداد صحیح هستند.

پیمانه کولن (۱۱-۲) برقرار خواهد بود در صورتی که داشته باشیم

$$\vec{k} \cdot \vec{A}_{\mathbf{k}}(t) = \vec{k} \cdot \vec{A}_{\mathbf{k}}^*(t) = 0 \quad (17-2)$$

به ازای هر \vec{k} دو جهت مستقل برای $\vec{A}_{\mathbf{k}}(t)$ وجود خواهد داشت. مولفه های فوریه \vec{A} مستقل بوده و می بایست جداگانه در معادله موج (۱۴-۲) صدق کنند. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 A_k(t)}{\partial t^2} + \omega_k^2 A_k(t) = 0 \quad (18-2)$$

به طوری که

$$\omega_k = kc \quad (19-2)$$

به این ترتیب ضرایب فوریه از یک معادله هارمونیک ساده تبعیت می کنند.

در اینجا انرژی الکترومغناطیسی مد نرمالی را که توسط بردار موج \vec{k} مشخص شده است را محاسبه می کنیم. جواب معادله (18-2) به صورت زیر بیان می شود:

$$A_k(t) = A_k \exp(-i\omega_k t) \quad (20-2)$$

و شکل کامل پتانسیل برداری طبق رابطه (15-2) خواهد شد:

$$\vec{A} = \sum_k \{A_k \exp(-i\omega_k t + i\vec{k} \cdot \vec{r}) + A_k^* \exp(i\omega_k t - i\vec{k} \cdot \vec{r})\} \quad (21-2)$$

به این ترتیب برای میانگین زمانی انرژی تک مد \vec{k} داریم:

$$\bar{\mathcal{E}}_k = \frac{1}{2} \int_{\text{کوارک}} (\epsilon_0 \bar{E}_k^2 + \mu_0^{-1} \bar{B}_k^2) dV \quad (22-2)$$

به طوری که علامت بار اشاره به میانگین زمانی در یک دوره تناوب داشته و \vec{E}_k و \vec{B}_k

میدان های الکتریکی و مغناطیسی مرتبط با مد را نشان می دهند. از روابط (2-5)، (2-6) و

(21-2) خواهیم داشت:

$$\vec{E}_k = i\omega_k \{A_k \exp(-i\omega_k t + i\vec{k} \cdot \vec{r}) - A_k^* \exp(i\omega_k t - i\vec{k} \cdot \vec{r})\} \quad (23-2)$$

$$\vec{B}_k = i\vec{k} \times \{A_k \exp(-i\omega_k t + i\vec{k} \cdot \vec{r}) - A_k^* \exp(i\omega_k t - i\vec{k} \cdot \vec{r})\} \quad (24-2)$$

بنابراین با جایگذاری روابط (23-2) و (24-2) در رابطه (22-2) و محاسبه میانگین زمانی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{E}}_k = \frac{1}{2} \int_{\text{کابلی}} \{ & \epsilon_0 \omega_k^2 (A_k \cdot A_k^* - A_k^2 \exp[2(-i\omega_k t + i\vec{k} \cdot \vec{r})] - A_k^{*2} \exp[2(i\omega_k t - i\vec{k} \cdot \vec{r})] \\ & + A_k \cdot A_k^*) + \epsilon_0 \omega_k^2 (A_k \cdot A_k^* - A_k^2 \exp[2(-i\omega_k t + i\vec{k} \cdot \vec{r})] \\ & - A_k^{*2} \exp[2(i\omega_k t - i\vec{k} \cdot \vec{r})] + A_k \cdot A_k^*) \} dV \end{aligned}$$

$$\bar{\mathcal{E}}_k = 2\epsilon_0 V \omega_k^2 A_k \cdot A_k^* \quad (25-2)$$

که $V = L^3$ حجم کابلی می باشد.

طبق تبدیل زیر می توان مختصه مکان تعمیم یافته Q_k و اندازه حرکت تعمیم یافته P_k را جایگزین متغیرهای A_k و A_k^* نمود.

$$A_k = (4\epsilon_0 V \omega_k^2)^{-\frac{1}{2}} (\omega_k Q_k + iP_k) \vec{\epsilon}_k \quad (26-2)$$

$$A_k^* = (4\epsilon_0 V \omega_k^2)^{-\frac{1}{2}} (\omega_k Q_k - iP_k) \vec{\epsilon}_k \quad (27-2)$$

مختصه های Q_k و P_k کمیت های اسکالر می باشند. ویژگی های سمتی A_k و A_k^* را می توان با معرفی بردار قطبش واحد $\vec{\epsilon}_k$ در نظر گرفت. انرژی تک مد (۲-۲۵) را می توان توسط روابط (۲-۲۶) و (۲-۲۷) به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{1}{2} (P_k^2 + \omega_k^2 Q_k^2) \quad (2-28)$$

رابطه (۲-۲۸) صورت متداول انرژی یک نوسانگر هارمونیک کلاسیکی را نشان می دهد. بنابراین مساله پتانسیل برداری مربوط به کاواک معادل مساله نوسانگر هارمونیک کلاسیکی شده است. همچنین هامیلتونی کلاسیکی کل برای کاواک را می توان با استفاده از رابطه (۲-۲۸) با جمع زدن روی \vec{k} و در نظر گرفتن دو راستای مستقل $\vec{\epsilon}_k$ تشکیل داد.

۲-۵. نوسانگر هارمونیک مکانیک کوانتومی

برای هامیلتونی کوانتومی نوسانگر هارمونیک یک بعدی با جرم واحد داریم:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2) \quad (2-29)$$

به طوری که \hat{p} و \hat{q} از رابطه جابه جایی $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ تبعیت می نمایند. سپس عملگرهای \hat{a}

و \hat{a}^\dagger به منظور جایگزینی با \hat{q} و \hat{p} به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\hat{a} = (2\hbar\omega)^{-\frac{1}{2}} (\omega\hat{q} + i\hat{p}) \quad (2-30)$$

$$\hat{a}^\dagger = (2\hbar\omega)^{-\frac{1}{2}} (\omega\hat{q} - i\hat{p}) \quad (2-31)$$

عملگرهای \hat{a} و \hat{a}^\dagger به ترتیب عملگرهای خلق و فنای نوسانگر هارمونیک نامیده می شوند.

بنابراین با استفاده از روابط (۳۰-۲) و (۳۱-۲) می توان جابه جاگر زیر را محاسبه کرد:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1 \quad (۳۲-۲)$$

همچنین هامیلتونی به صورت زیر بیان می شود:

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (۳۳-۲)$$

$\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ عملگر تعداد نامیده می شود. در صورتی که $|n\rangle$ ویژه حالت انرژی نوسانگر

هارمونیک با ویژه مقدار E_n باشد، معادله ویژه مقداری آن خواهد شد:

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = E_n |n\rangle \quad (۳۴-۲)$$

نشان داده می شود که:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (۳۵-۲)$$

حالت خلا $|0\rangle$ حالت پایه متناظر $n = 0$ کمترین انرژی را دارد. حالت $|0\rangle$ در رابطه

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \quad \text{صدق می کند.}$$

$|n\rangle$ ، ویژه حالت هم زمان \hat{H} و \hat{n} تعریف می شود:

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle \quad (۳۶-۲)$$

می شود نشان داد که:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (۳۷-۲)$$

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = (n+1)^{\frac{1}{2}} |n+1\rangle \quad (38-2)$$

۲-۶. کوانتس میدان

اکنون می توان با مرتبط ساختن یک نوسانگر هارمونیک کوانتومی با هر مد k از میدان تابشی، میدان الکترومغناطیسی را کوانتیده نمود. مد هر عملگر کوانتومی به صورت زیرنویس نمایش داده می شود، بنابراین \hat{a}_k^\dagger و \hat{a}_k عملگرهای خلق و فنا ی مد میدان الکترومغناطیسی کاواک با بردار موج \vec{k} را نشان می دهند. تعداد فوتون های با بردار موج \vec{k} برانگیخته شده در کاواک توسط ویژه مقدار n_k مربوط به عملگر تعداد $\hat{n}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ مشخص می شود که دارای مقادیر ممکن ... ۰، ۱، ۲، ... می باشد. حالت میدان با $|n_k\rangle$ نمایش داده می شود.

حالت میدان تابشی کل در کاواک توسط تعداد فوتون های برانگیخته شده $n_{k1}, n_{k2}, n_{k3}, \dots$ از مجموعه مدهای کاواک k_1, k_2, k_3, \dots مشخص می شود. همچنین باید توجه داشت در شمارش مد، برای هر بردار موج \vec{k} دو راستای مستقل قطبش \vec{E}_k وجود دارد.

لازم است در اینجا قطبش دقیق تر بررسی شود. در صورتی که θ و φ مختصات قطبی بردار موج \vec{k} باشند، آنگاه مولفه های دکارتی آن خواهد شد:

$$\vec{k} = k(\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta) \quad (39-2)$$

سپس با انتخاب مناسب بردارهای قطبش عرضی خواهیم داشت:

$$\vec{\varepsilon}_{\mathbf{k}}(1) = (\sin \varphi, -\cos \varphi, 0) \quad (40-2)$$

$$\vec{\varepsilon}_{\mathbf{k}}(2) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta) \quad (41-2)$$

به راحتی می توان نشان داد:

$$\vec{\varepsilon}_{\mathbf{k}i}(1)\vec{\varepsilon}_{\mathbf{k}j}(1) + \vec{\varepsilon}_{\mathbf{k}i}(2)\vec{\varepsilon}_{\mathbf{k}j}(2) = \delta_{ij} - (k_i k_j / k^2) \quad (42-2)$$

در آینده از این اتحاد بهره خواهیم برد.

بطور خلاصه حالت میدان را می توان به صورت حاصلضرب حالت تک تک مدها بیان نمود:

$$|n_{\mathbf{k}1}, n_{\mathbf{k}2}, n_{\mathbf{k}3}, \dots\rangle = |n_{\mathbf{k}1}\rangle |n_{\mathbf{k}2}\rangle |n_{\mathbf{k}3}\rangle \dots \quad (43-2)$$

در برخی موارد می توان رابطه (43-2) را مختصرنویسی نمود به گونه ای که

$$|\{n_{\mathbf{k}}\}\rangle = |n_{\mathbf{k}1}\rangle |n_{\mathbf{k}2}\rangle |n_{\mathbf{k}3}\rangle \dots \quad (44-2)$$

پتانسیل های برداری کلاسیک $A_{\mathbf{k}}^*$ و $A_{\mathbf{k}}$ برای کاواکی در مد \mathbf{k} طبق روابط (26-2) و (27-2)

بر حسب $Q_{\mathbf{k}}$ و $P_{\mathbf{k}}$ بیان می شوند را می توان در اینجا تبدیل به عملگرهای کوانتومی بر حسب

$\hat{q}_{\mathbf{k}}$ و $\hat{p}_{\mathbf{k}}$ نمود. پس خواهیم داشت:

$$A_{\mathbf{k}} = (4\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}}^2)^{-\frac{1}{2}} (\omega_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}} + iP_{\mathbf{k}}) \vec{\varepsilon}_{\mathbf{k}} \rightarrow$$

$$(4\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}}^2)^{-\frac{1}{2}} (\omega_{\mathbf{k}} \hat{q}_{\mathbf{k}} + i\hat{p}_{\mathbf{k}}) \vec{\varepsilon}_{\mathbf{k}} = (\hbar/2\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}})^{\frac{1}{2}} \hat{a}_{\mathbf{k}} \vec{\varepsilon}_{\mathbf{k}} \quad (45-2)$$

$$A_{\mathbf{k}}^* = (4\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}}^2)^{-\frac{1}{2}} (\omega_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}} - iP_{\mathbf{k}}) \vec{\epsilon}_{\mathbf{k}} \rightarrow$$

$$(4\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}}^2)^{-\frac{1}{2}} (\omega_{\mathbf{k}} \hat{q}_{\mathbf{k}} - i\hat{p}_{\mathbf{k}}) \vec{\epsilon}_{\mathbf{k}} = (\hbar/2\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}})^{\frac{1}{2}} \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \vec{\epsilon}_{\mathbf{k}} \quad (46-2)$$

در گام آخر این معادلات از روابط (۳۰-۲) و (۳۱-۲) استفاده شده است.

بنابراین در تبدیل الکترودینامیک کلاسیک به الکترودینامیک کوانتومی، عملگرهای خلق و فنا $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ و $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ (صرفنظر از یک ضریب) جایگزین ضرایب فوریه کلاسیکی $A_{\mathbf{k}}$ و $A_{\mathbf{k}}^*$ می شوند.

عملگر پتانسیل برداری با جایگذاری روابط (۴۵-۲) و (۴۶-۲) در رابطه (۲۱-۲) خواهد شد:

$$\tilde{A} = \sum_{\mathbf{k}} (\hbar/2\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}})^{\frac{1}{2}} \vec{\epsilon}_{\mathbf{k}} \{ \hat{a}_{\mathbf{k}} \exp(-i\omega_{\mathbf{k}} t + i\vec{k} \cdot \vec{r}) + \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \exp(i\omega_{\mathbf{k}} t - i\vec{k} \cdot \vec{r}) \} \quad (47-2)$$

در ادامه عملگرهای میدان الکتریکی و مغناطیسی مربوط به مد k ، $\vec{E}_{\mathbf{k}}$ و $\vec{B}_{\mathbf{k}}$ را می توان با جایگذاری روابط (۴۵-۲) و (۴۶-۲) در معادلات (۲۳-۲) و (۲۴-۲) بدست آورد.

$$\vec{E}_{\mathbf{k}} = i(\hbar\omega_{\mathbf{k}}/2\epsilon_0 V)^{\frac{1}{2}} \vec{\epsilon}_{\mathbf{k}} \{ \hat{a}_{\mathbf{k}} \exp(-i\omega_{\mathbf{k}} t + i\vec{k} \cdot \vec{r}) - \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \exp(i\omega_{\mathbf{k}} t - i\vec{k} \cdot \vec{r}) \} \quad (48-2)$$

$$\vec{B}_{\mathbf{k}} = i(\hbar/2\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}})^{\frac{1}{2}} \vec{k} \times \vec{\epsilon}_{\mathbf{k}} \{ \hat{a}_{\mathbf{k}} \exp(-i\omega_{\mathbf{k}} t + i\vec{k} \cdot \vec{r}) - \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \exp(i\omega_{\mathbf{k}} t - i\vec{k} \cdot \vec{r}) \} \quad (49-2)$$

مقدار انرژی الکترومغناطیسی مد k برای حالتی که $n_{\mathbf{k}}$ فوتون برانگیخته شده اند، برابر است با:

$$\bar{\epsilon}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} \int_{\text{کابوای}} \langle n_{\mathbf{k}} | \epsilon_0 \vec{E}_{\mathbf{k}} \cdot \vec{E}_{\mathbf{k}} + \mu_0^{-1} \vec{B}_{\mathbf{k}} \cdot \vec{B}_{\mathbf{k}} | n_{\mathbf{k}} \rangle dV \quad (50-2)$$

در رابطه (۵۰-۲)، علامت بار به میانگین زمانی اشاره دارد که این میانگین گیری پس از محاسبه عنصر ماتریسی انجام می شود. بنابراین با استفاده از روابط (۴۸-۲) و (۴۹-۲) انرژی بصورت زیر بیان می شود:

$$\bar{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} \int_{\text{کاوک}} 2(\hbar\omega_{\mathbf{k}}/V) \left(n_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) dV$$

$$\bar{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}} = \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(n_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right)$$

(۵۱-۲)

انرژی حالت پایه پیامدی از کوانتش میدان الکترومغناطیسی می باشد. به این ترتیب هامیلتونی برای میدان الکترومغناطیسی کل در کاواک خواهد شد:

$$\hat{H}_R = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) \quad (۵۲-۲)$$

و انرژی کل تابش برای حالت $|\{n_{\mathbf{k}}\}\rangle$ به صورت زیر بیان می شود:

$$\bar{\mathcal{E}} = \sum_{\mathbf{k}} \bar{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} \left(n_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_{\mathbf{k}} \quad (۵۳-۲)$$

فصل سوم

پدیده چرخش اپتیکی: رهیافت نظریه
میدان کوانتومی الکترومغناطیسی

ما در این فصل مروری می‌کنیم بر مرجع [۴] که پدیده چرخش اپتیکی را با استفاده از نظریه کوانتومی میدان الکترومغناطیسی بررسی کرده است. رهیافت اصلی مقاله [۴]، بررسی مساله بصورت پراکندگی نور از اتم است. قبل از برخورد، نور قطبش خطی مشخصی دارد. فوتون‌های فرودی در اثر برخورد با مولکول، با قطبشی متفاوت پراکنده می‌شوند. به عبارتی دیگر شاهد چرخش قطبش نور خواهیم بود. البته تغییر زاویه قطبش همراه با تغییر درجه بیضوی بودن بیضی قطبش است.

روشی که برای بیان پراکندگی از آن استفاده می‌کنیم، روش ماتریس پراکندگی می‌باشد. همچنین سیستم یکاها که ما انتخاب می‌کنیم، سیستم SI می‌باشد.

می‌خواهیم زاویه چرخش قطبش باریکه فوتون قطبیده تخت را توسط محلولی که از مولکول‌های فعال اپتیکی تشکیل شده است، محاسبه کنیم. هامیلتونی بر هم کنش نور و اتم را از ابتدا بصورت بر هم کنش‌های دو قطبی‌های الکتریکی و مغناطیسی بیان می‌کنیم.

در اپتیک کلاسیک، شدت باریکه‌ها (فرودی یا خروجی) و مشخصات بیضی قطبش هر یک از باریکه‌ها را می‌توان با پارامترهای استوکس بیان کرد. در نظریه کوانتومی، مقادیر چشمداشتی عملگرهای استوکس متناظر محاسبه می‌شوند.

در ادامه از نماد گذاری های زیر استفاده می کنیم. σ_0 معرف ماتریس واحد مرتبه⁷ دوم و $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

معرف ماتریس های پائولی هستند. $a_{k,1}$ و $a_{k,1}^\dagger$ به ترتیب بیانگر عملگرهای خلق و فنا فوئونی با بردار

موج \vec{k} و قطبشی در راستای بردار یکه $\vec{\epsilon}(k, 1)$ می باشند. به همین ترتیب $a_{k,2}$ و $a_{k,2}^\dagger$ معرف

عملگرهای خلق و فنا فوئونی با بردار موج \vec{k} و قطبشی در راستای بردار یکه $\vec{\epsilon}(k, 2)$ خواهند بود.

بردارهای \vec{k} ، $\vec{\epsilon}(k, 1)$ و $\vec{\epsilon}(k, 2)$ تشکیل یک مجموعه متعامد را می دهند، به طوری که داریم.

$$\vec{\epsilon}(k, 1) \cdot \vec{\epsilon}(k, 2) = \vec{\epsilon}(k, 1) \cdot \vec{k} = \vec{\epsilon}(k, 2) \cdot \vec{k} = 0 \quad (1-3)$$

$$\vec{k} \times \vec{\epsilon}(k, 1) = |\vec{k}| \vec{\epsilon}(k, 2) \quad (2-3)$$

$$\vec{k} \times \vec{\epsilon}(k, 2) = -|\vec{k}| \vec{\epsilon}(k, 1) \quad (3-3)$$

برای یک k مشخص، عملگرهای استوکس، $\hat{\Sigma}_0, \hat{\Sigma}_1, \hat{\Sigma}_2, \hat{\Sigma}_3$ به صورت زیر تعریف می

شوند. در اینجا $a = \begin{pmatrix} a_{k,1} \\ a_{k,2} \end{pmatrix}$ است.

$$\hat{\Sigma}_0 = a^\dagger \cdot \sigma_0 \cdot a$$

$$\hat{\Sigma}_0 = \begin{pmatrix} a_{k,1}^\dagger & a_{k,2}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k,1} \\ a_{k,2} \end{pmatrix} = a_{k,1}^\dagger a_{k,1} + a_{k,2}^\dagger a_{k,2} \quad (4-3)$$

$$\hat{\Sigma}_1 = a^\dagger \cdot \sigma_1 \cdot a$$

$$\hat{\Sigma}_1 = \begin{pmatrix} a_{k,1}^\dagger & a_{k,2}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k,1} \\ a_{k,2} \end{pmatrix} = a_{k,2}^\dagger a_{k,1} + a_{k,1}^\dagger a_{k,2} \quad (5-3)$$

$$\hat{\Sigma}_2 = a^\dagger \cdot \sigma_2 \cdot a$$

$$\hat{\Sigma}_2 = \begin{pmatrix} a_{k,1}^\dagger & a_{k,2}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k,1} \\ a_{k,2} \end{pmatrix} = i a_{k,2}^\dagger a_{k,1} - i a_{k,1}^\dagger a_{k,2} \quad (6-3)$$

⁷ Rank

$$\bar{\Sigma}_3 = (a_{k,1}^\dagger \quad a_{k,2}^\dagger) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k,1} \\ a_{k,2} \end{pmatrix} = a_{k,1}^\dagger a_{k,1} - a_{k,2}^\dagger a_{k,2} \quad (7-3)$$

۲-۳. ماتریس پراکندگی

در صورتی که $\Psi(t_0)$ نشان دهنده حالت ابتدایی سیستم در زمان t_0 و $\Psi(t)$ نشان دهنده حالت سیستم در زمان t باشد، با معرفی عملگر تحول زمانی $\hat{U}(t, t_0)$ طبق رابطه (۲.۱.۱۳) مرجع [۲] خواهیم داشت:

$$\Psi(t) = \hat{U}(t, t_0) \Psi(t_0) \quad (8-3)$$

اگر P عملگر زمانی دایسون باشد آنگاه عملگر تحول زمانی $\hat{U}(t, t_0)$ بر حسب هامیلتونی $\hat{H}(t)$ طبق روابط (۲.۱.۳۲) و (۲.۱.۳۳) مرجع [۲] به صورت زیر است:

$$\hat{U}(t, t_0) = \bar{P} \exp\left[\left(\frac{1}{i\hbar}\right) \int_{t_0}^t dt' \hat{H}(t')\right] \quad (9-3)$$

فرض می شود که سیستم در زمان $t_0 \rightarrow -\infty$ تحت اثر اختلال نبوده و تابع موج فوتون بصورت موج تخت Φ_i است. آنگاه در زمان $t \rightarrow \infty$ احتمال بودن در حالتی متناظر موج تخت Φ_f طبق رابطه (۱۹.۶۲) مرجع [۳] به شکل زیر نمایش داده می شود. S_{fi} معرف عنصر ماتریس پراکندگی است.

$$S_{fi} = \langle \Phi_f | \hat{U}(t, t_0) | \Phi_i \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \langle \Phi_f | \hat{U}(t, t_0) | \Phi_i \rangle \quad (10-3)$$

با جایگذاری رابطه (۹-۳) در (۱۰-۳) ماتریس پراکندگی را میتوان طبق رابطه (۱۹.۶۵) [۳] به صورت زیر تعریف کرد.

$$S = \hat{U}(\infty, -\infty) = \bar{P} \exp\left[\left(\frac{1}{i\hbar}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dt' \hat{H}(t')\right] \quad (11-3)$$

از طرفی عنصر ماتریس پراکندگی را میتوان طبق رابطه (۱۹.۵۴) [۳] برحسب ماتریس واکنش \hat{S} به صورت زیر تعریف کرد.

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2\pi i \delta(E_f - E_i) R_{fi} \quad (۱۲-۳)$$

ماتریس واکنش را میتوان بر حسب پتانسیل بصورت اختلالی بسط داد. به این ترتیب ماتریس واکنش طبق رابطه (۱۹.۱۶) مرجع [۳] بصورت زیر در می آید.

$$R_{fi} = V_{fi} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_n \left\{ \frac{V_{fn} R_{ni}}{E_i - E_n + i\epsilon} \right\} \quad (۱۳-۳)$$

از تکرار رابطه (۱۳-۳) تا مرتبه دوم اختلال خواهیم داشت

$$R_{fi} = V_{fi} + \sum_n \left\{ \frac{V_{fn} V_{ni}}{E_i - E_n + i\epsilon} \right\}_{\epsilon \rightarrow 0^+} + \dots \quad (۱۴-۳)$$

۳-۳. هامیلتونی برهم کنش

بطور مفصل مطالعه شده است [۱]. ما در اینجا فقط \hat{H}_I هامیلتونی برهم کنش اتم و میدان برهم کنش های دو قطبی الکتریکی و دو قطبی مغناطیسی را در نظر می گیریم.

$$\hat{H}_I = -\vec{d} \cdot \vec{E} - \vec{m} \cdot \vec{B} + \dots \quad (۱۵-۳)$$

که \vec{d} و \vec{m} گشتاور دو قطبی الکتریکی و مغناطیسی اتم هستند. رابطه (۱۵-۳) را میتوان بصورت زیر بازنویسی کرد

$$\hat{H}_I = \hat{H}_{ED} + \hat{H}_{MD} + \dots \quad (۱۶-۳)$$

⁸ R-Matrix (reaction matrix)

در اینجا \hat{H}_{ED} معرف بر هم کنش دو قطبی الکتریکی و \hat{H}_{MD} معرف بر هم کنش دو قطبی مغناطیسی است. طبق روابط (۵.۴۰) و (۵.۴۴) مرجع [۱] می توان این هامیلتونی ها را با توجه به کوچک بودن اتم در مقایسه با طول موج نور به شکل مناسبتری نوشت

$$\hat{H}_{ED} = -\vec{d} \cdot \hat{E}(0) \quad (۱۷-۳)$$

$$\hat{H}_{MD} = -\vec{m} \cdot \hat{B}(0) \quad (۱۸-۳)$$

در اینجا $\hat{E}(0)$ و $\hat{B}(0)$ به این معنا هستند که میدان در $\vec{r} = 0$ محاسبه شده است.

در نظریه کوانتومی میدان الکترومغناطیسی، عملگرهای میدان الکتریکی و مغناطیسی طبق رابطه (۵.۸۳) [۱] عبارت هستند از:

$$\hat{E} = \sum_{\mathbf{k}} [\hat{E}^+(\mathbf{k}, 1) + \hat{E}^-(\mathbf{k}, 1)] + \sum_{\mathbf{k}} [\hat{E}^+(\mathbf{k}, 2) + \hat{E}^-(\mathbf{k}, 2)] \quad (۱۹-۳)$$

$$\hat{B} = \sum_{\mathbf{k}} [\hat{B}^+(\mathbf{k}, 1) + \hat{B}^-(\mathbf{k}, 1)] + \sum_{\mathbf{k}} [\hat{B}^+(\mathbf{k}, 2) + \hat{B}^-(\mathbf{k}, 2)] \quad (۲۰-۳)$$

هر یک از جملات دو رابطه (۱۶-۳) و (۱۷-۳)، طبق روابط (۵.۸۴) و (۵.۸۵) مرجع [۱] عبارتند از:

$$\hat{E}^+(\mathbf{k}, 1) + \hat{E}^+(\mathbf{k}, 2) = i(\hbar\omega_{\mathbf{k}}/2\epsilon_0 V)^{1/2} \{ \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1) \hat{a}_{\mathbf{k},1} \exp(-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) \hat{a}_{\mathbf{k},2} \exp(-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \} \quad (۲۱-۳)$$

با توجه $\hat{a}_{\mathbf{k},1}(t) = \hat{a}_{\mathbf{k},1} \exp(-i\omega_{\mathbf{k}}t)$ و روابط مشابه می توان نوشت

$$\hat{E}^+(\mathbf{k}, 1) + \hat{E}^+(\mathbf{k}, 2) = i(\hbar\omega_{\mathbf{k}}/2\epsilon_0 V)^{1/2} \{ \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1) \hat{a}_{\mathbf{k},1}(t) + \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) \hat{a}_{\mathbf{k},2}(t) \} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

(۲۲-۳)

به همین ترتیب بخش فرکانس مثبت میدان الکتریکی عبارت است از

$$\hat{E}^-(\mathbf{k}, 1) + \hat{E}^-(\mathbf{k}, 2) = -i(\hbar\omega_{\mathbf{k}}/2\epsilon_0 V)^{1/2} \{ \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1) \hat{a}_{\mathbf{k},1}^\dagger \exp(i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) \hat{a}_{\mathbf{k},2}^\dagger \exp(i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \} \quad (۲۳-۳)$$

توجه کنید که برای تاکید بر نقش دو بردار قطبش ممکن $\vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1)$ و $\vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2)$ بازای هر بردار

موج \vec{k} ، میدان های $\hat{E}^-(\mathbf{k}, 1)$ و $\hat{E}^-(\mathbf{k}, 2)$ را معرفی کرده ایم.

عملگر میدان مغناطیسی طبق رابطه (۴.۱۱۲) مرجع [۱] بدین صورت است

$$\hat{B} = \sum_{\mathbf{k}} i(\hbar/2\epsilon_0 V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2} \{ \vec{k} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1) (\hat{a}_{\mathbf{k},1} \exp(-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \hat{a}_{\mathbf{k},1}^\dagger \exp(i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) + \vec{k} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) (\hat{a}_{\mathbf{k},2} \exp(-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) - \hat{a}_{\mathbf{k},2}^\dagger \exp(i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) \} \quad (۲۴-۳)$$

به همین ترتیب عملگر \hat{B} را نیز همانند عملگر \hat{E} به دو قسمت فرکانس مثبت و فرکانس منفی تقسیم می کنیم.

$$\hat{B}^+(\mathbf{k}, 1) + \hat{B}^+(\mathbf{k}, 2) = i(\hbar/2\epsilon_0 V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2} \{ \vec{k} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1) \hat{a}_{\mathbf{k},1}(t) + \vec{k} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) \hat{a}_{\mathbf{k},2}(t) \} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (۲۵-۳)$$

$$\hat{B}^-(\mathbf{k}, 1) + \hat{B}^-(\mathbf{k}, 2) = -i(\hbar/2\epsilon_0 V\omega_{\mathbf{k}})^{1/2} \{ \vec{k} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1) \hat{a}_{\mathbf{k},1}^\dagger(t) + \vec{k} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) \hat{a}_{\mathbf{k},2}^\dagger(t) \} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (۲۶-۳)$$

فرض می کنیم که $|p, k1[n_{k,1}]\rangle$ حالت سیستم (اتم و میدان) را نشان دهد، به این معنا که

مولکول در حالت $|p\rangle$ است، و $n_{k,1}$ فوتون در حالت $k1$ (با بردار موج \vec{k} و قطبشی در راستای

$\vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1)$) قرار دارند. حال عناصر ماتریسی را میتوان محاسبه کرد.

در ابتدا بر هم کنش دو قطبی الکتریکی، \hat{H}_{ED} ، طبق رابطه (۵.۵۷) (۵) مرجع [۱] محاسبه می شود:

$$\hat{H}_{ED} = ie \sum_k \sum_{\alpha, \beta} (\hbar \omega_k / 2 \epsilon_0 V)^{1/2} \vec{D}_{\alpha\beta} \cdot \{ \vec{\epsilon}(k, 1) [\hat{a}_{k,1}(t) - \hat{a}_{k,1}^\dagger(t)] + \vec{\epsilon}(k, 2) [\hat{a}_{k,2}(t) - \hat{a}_{k,2}^\dagger(t)] \} |\alpha\rangle\langle\beta| \quad (۲۷-۳)$$

عنصر ماتریسی ممان دو قطبی الکتریکی، $\vec{d}_{\alpha\beta}$ عبارت است از

$$\vec{d}_{\alpha\beta} = -e \vec{D}_{\alpha\beta} \quad (۲۸-۳)$$

که e بار پروتون، و $|\alpha\rangle$ حالت اتمی را مشخص می کنند. طبق رابطه (۵.۵۶) (۵) داریم

$$\vec{D}_{\alpha\beta} = \langle \alpha | \vec{D} | \beta \rangle \quad (۲۹-۳)$$

حال عنصر ماتریسی $\langle q, k1[n_{k,1} + 1] | \hat{H}_{ED} | p, k1[n_{k,1}] \rangle$ بصورت زیر محاسبه می گردد.

از ساندویچ کردن قسمت مولکولی \hat{H}_{ED} بین دو حالت $|p\rangle$ و $|q\rangle$ داریم

$$\left\langle q \left| \left(\sum_{\alpha, \beta} |\alpha\rangle\langle\beta| \right) \right| p \right\rangle = \sum_{\alpha, \beta} \langle q | \alpha \rangle \langle \beta | p \rangle = \langle q | q \rangle \langle p | p \rangle = 1 \quad (۳۰-۳)$$

سپس قسمت فوتونی \hat{H}_{ED} را بین $n_{k,1}$ فوتون که در حالت $k1$ واقع شده اند و $n_{k,1} + 1$ فوتون در حالت $k1$ ، ساندویچ می کنیم. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
\langle q, k1[n_{k,1} + 1] | \tilde{H}_{ED} | p, k1[n_{k,1}] \rangle &= -i \sum_k (\hbar \omega_k / 2\epsilon_0 V)^{1/2} \vec{d}_{qp} \cdot \{\vec{\epsilon}(k, 1) \\
&\quad [\langle k1[n_{k,1} + 1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\
&\quad - \langle k1[n_{k,1} + 1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle] + \vec{\epsilon}(k, 2) \\
&\quad [\langle k1[n_{k,1} + 1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\
&\quad - \langle k1[n_{k,1} + 1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle]\} \quad (31-3)
\end{aligned}$$

طبق روابط (۴.۹۱) و (۴.۹۲) مرجع [۱] داریم

$$\begin{cases}
\hat{a}_{k,1} |k1[n_{k,1}] \rangle = n_{k,1}^{1/2} |k1[n_{k,1} - 1] \rangle \\
\hat{a}_{k,1}^\dagger |k1[n_{k,1}] \rangle = (n_{k,1} + 1)^{1/2} |k1[n_{k,1} + 1] \rangle \\
\hat{a}_{k,2} |k1[n_{k,1}] \rangle = n_{k,1}^{1/2} |k1[n_{k,1} - 1] \rangle \delta_{k2,k1} = 0 \\
\hat{a}_{k,2}^\dagger |k1[n_{k,1}] \rangle = (n_{k,1} + 1)^{1/2} |k1[n_{k,1} + 1] \rangle \delta_{k2,k1} = 0
\end{cases} \quad (32-3)$$

پس خواهیم داشت:

$$\langle q, k1[n_{k,1} + 1] | \tilde{H}_{ED} | p, k1[n_{k,1}] \rangle = i \sum_k (\hbar \omega_k / 2\epsilon_0 V)^{1/2} \vec{\epsilon}(k, 1) \cdot \vec{d}_{qp} (n_{k,1} + 1)^{1/2} \quad (33-3)$$

به این ترتیب با تعریف b_k بصورت

$$b_k = (\hbar c^2 / 2\epsilon_0 V \omega_k)^{1/2} \quad (34-3)$$

خواهیم داشت:

$$\langle q, k1[n_{k,1} + 1] | \tilde{H}_{ED} | p, k1[n_{k,1}] \rangle = i \sum_k (\omega_k / c) b_k \vec{\epsilon}(k, 1) \cdot \vec{d}_{qp} (n_{k,1} + 1)^{1/2} \quad (35-3)$$

به طور مشابه برای محاسبه عنصر ماتریسی $\langle q, k1[n_{k,1} - 1] | \hat{H}_{ED} | p, k1[n_{k,1}] \rangle$ عمل می کنیم.

$$\begin{aligned} \langle q, k1[n_{k,1} - 1] | \hat{H}_{ED} | p, k1[n_{k,1}] \rangle &= -i \sum_k (\hbar \omega_k / 2\epsilon_0 V)^{1/2} \vec{d}_{qp} \cdot \{ \vec{\epsilon}(k, 1) \\ &[\langle k1[n_{k,1} - 1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\ &-\langle k1[n_{k,1} - 1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle] + \vec{\epsilon}(k, 2) \\ &[\langle k1[n_{k,1} - 1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\ &-\langle k1[n_{k,1} - 1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle] \} \end{aligned} \quad (36-3)$$

طبق روابط (32-3) داریم

$$\langle q, k1[n_{k,1} - 1] | \hat{H}_{ED} | p, k1[n_{k,1}] \rangle = -i \sum_k (\hbar \omega_k / 2\epsilon_0 V)^{1/2} \vec{\epsilon}(k, 1) \cdot \vec{d}_{qp} n_{k,1}^{1/2} \quad (37-3)$$

بنابراین طبق تعریف (34-3) خواهیم داشت:

$$\langle q, k1[n_{k,1} - 1] | \hat{H}_{ED} | p, k1[n_{k,1}] \rangle = -i \sum_k (\omega_k / c) b_k \vec{\epsilon}(k, 1) \cdot \vec{d}_{qp} n_{k,1}^{1/2} \quad (38-3)$$

اکنون می خواهیم به محاسبه عنصر ماتریسی $\langle q, k1[n_{k,1} + 1] | \hat{H}_{MD} | p, k1[n_{k,1}] \rangle$ بپردازیم.

ابتدا بر هم کنش دو قطبی مغناطیسی، \hat{H}_{MD} را با استفاده از رابطه (3-18) بیان می کنیم. به همین

منظور عملگر واحد را از دو طرف روی \hat{m} حاضر در رابطه (3-18) اثر می دهیم.

$$\hat{m} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} |\alpha\rangle \langle \alpha | \hat{m} | \beta\rangle \langle \beta| = \sum_{\alpha, \beta} \hat{m}_{\alpha\beta} |\alpha\rangle \langle \beta| \quad (39-3)$$

سپس با جایگذاری \hat{m} و رابطه (3-24) در رابطه (3-18) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \hat{H}_{MD} = & -i \sum_k \sum_{\alpha, \beta} (\hbar/2\epsilon_0 V \omega_k)^{1/2} \hat{m}_{\alpha\beta} \cdot \{\vec{k} \times \vec{\epsilon}(k, 1) [\hat{a}_{k,1}(t) - \hat{a}_{k,1}^\dagger(t)] + \vec{k} \times \vec{\epsilon}(k, 2) \\ & [\hat{a}_{k,2}(t) - \hat{a}_{k,2}^\dagger(t)]\} |\alpha\rangle \langle \beta| \end{aligned} \quad (40-3)$$

مثل محاسبات قبلی عنصر ماتریسی $\langle q, k1[n_{k,1} + 1] | \hat{H}_{MD} | p, k1[n_{k,1}] \rangle$ را به سادگی می توان نوشت. ابتدا قسمت مولکولی \hat{H}_{MD} را بین دو حالت $|p\rangle$ و $|q\rangle$ ساندویچ می کنیم و از رابطه (30-3) استفاده می نماییم.

$$\begin{aligned} \langle q, k1[n_{k,1} + 1] | \hat{H}_{MD} | p, k1[n_{k,1}] \rangle = & -i \sum_k (\hbar/2\epsilon_0 V \omega_k)^{1/2} \hat{m}_{qp} \cdot \{\vec{k} \times \vec{\epsilon}(k, 1) \\ & \langle k1[n_{k,1} + 1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\ & - \langle k1[n_{k,1} + 1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle + \vec{k} \times \vec{\epsilon}(k, 2) \\ & \langle k1[n_{k,1} + 1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\ & - \langle k1[n_{k,1} + 1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle\} \end{aligned} \quad (41-3)$$

و طبق رابطه (32-3) می توان نوشت

$$\langle q, k1[n_{k,1} + 1] | \hat{H}_{MD} | p, k1[n_{k,1}] \rangle = i \sum_k (\hbar/2\epsilon_0 V \omega_k)^{1/2} (\vec{k} \times \vec{\epsilon}(k, 1)) \cdot \hat{m}_{qp} (n_{k,1} + 1)^{1/2} \quad (42-3)$$

بنابراین طبق تعریف (34-3) خواهیم داشت:

$$\langle q, k1[n_{k,1} + 1] | \hat{H}_{MD} | p, k1[n_{k,1}] \rangle = i \sum_k (b_k/c) (\vec{k} \times \vec{\epsilon}(k, 1)) \cdot \hat{m}_{qp} (n_{k,1} + 1)^{1/2} \quad (43-3)$$

به طور مشابه برای محاسبه عنصر ماتریسی $\langle q, k1[n_{k,1} - 1] | \hat{H}_{MD} | p, k1[n_{k,1}] \rangle$ عمل می کنیم.

$$\begin{aligned}
\langle q, k1[n_{k,1} - 1] | \hat{H}_{MD} | p, k1[n_{k,1}] \rangle &= -i \sum_k (\hbar/2\epsilon_0 V \omega_k)^{1/2} \hat{m}_{qp} \cdot \{ \vec{k} \times \vec{\epsilon}(k, 1) \\
&[\langle k1[n_{k,1} - 1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\
&-\langle k1[n_{k,1} - 1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle] + \vec{k} \times \vec{\epsilon}(k, 2) \\
&[\langle k1[n_{k,1} - 1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\
&-\langle k1[n_{k,1} - 1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle] \} \quad (44-3)
\end{aligned}$$

و طبق روابط (۳۲-۳) عبارت بالا را می توان به صورت زیر بیان نمود.

$$\langle q, k1[n_{k,1} - 1] | \hat{H}_{MD} | p, k1[n_{k,1}] \rangle = -i \sum_k (\hbar/2\epsilon_0 V \omega_k)^{1/2} (\vec{k} \times \vec{\epsilon}(k, 1)) \cdot \hat{m}_{qp} n_{k,1}^{1/2} \quad (45-3)$$

بنابراین طبق تعریف (۳۴-۳) خواهیم داشت:

$$\langle q, k1[n_{k,1} - 1] | \hat{H}_{MD} | p, k1[n_{k,1}] \rangle = -i \sum_k (b_k/c) (\vec{k} \times \vec{\epsilon}(k, 1)) \cdot \hat{m}_{qp} n_{k,1}^{1/2} \quad (46-3)$$

۴-۳. چرخش اپتیکی

فرض کنید نور قطبیده خطی پس از بر هم کنش با ماده، توسط یک قطبشگر تحلیل می شود. چرخش اپتیکی θ معمولا از روی تعیین زاویه قطبشگر به گونه ای که شدت باریکه عبوری کمینه باشد، تعیین می شود. بر این اساس اگر \hat{n}_θ تعداد فوتون هایی با زاویه قطبش θ را نشان دهد آنگاه زاویه θ بایستی به گونه ای تعیین شود که:

$$\langle d\hat{n}_\theta/d\theta \rangle = 0; \quad \langle d^2\hat{n}_\theta/d\theta^2 \rangle < 0 \quad (47-3)$$

یادآوری می کنیم که θ زاویه بین قطبش نور فرودی و محور بزرگ بیضی قطبش نور خروجی است. می توان عملگر \hat{n}_θ را به مولفه هایی در راستای $\vec{\epsilon}(k, 1)$ و $\vec{\epsilon}(k, 2)$ تفکیک کرد. به همین منظور عملگرهای خلق و فنا ی فوتونی با زاویه قطبش θ را بصورت زیر تعریف می کنیم.

$$\hat{a}_\theta^\dagger = c_1 a_{k,1}^\dagger + c_2 a_{k,2}^\dagger \quad (48-3)$$

$$\hat{a}_\theta = c_1 a_{k,1} + c_2 a_{k,2}$$

در ادامه باید ضرایب c_1 و c_2 را بدست آوریم. از آنجایی که تجزیه هر برداری که با محور $\vec{\epsilon}(k, 1)$ زاویه θ می سازد روشن است، می نویسیم.

$$\hat{a}_\theta^\dagger = \cos \theta a_{k,1}^\dagger + \sin \theta a_{k,2}^\dagger \quad (49-3)$$

$$\hat{a}_\theta = \cos \theta a_{k,1} + \sin \theta a_{k,2}$$

آنگاه باید رابطه جابه جایی $[\hat{a}_\theta, \hat{a}_\theta^\dagger] = 1$ برقرار باشد. برای تحقیق این موضوع اینگونه محاسبه می کنیم.

$$\begin{aligned} [\hat{a}_\theta, \hat{a}_\theta^\dagger] &= [\cos \theta \hat{a}_{k,1} + \sin \theta \hat{a}_{k,2}, \cos \theta \hat{a}_{k,1}^\dagger + \sin \theta \hat{a}_{k,2}^\dagger] \\ &= \cos^2 \theta [\hat{a}_{k,1}, \hat{a}_{k,1}^\dagger] + \cos \theta \sin \theta [\hat{a}_{k,1}, \hat{a}_{k,2}^\dagger] + \sin \theta \cos \theta [\hat{a}_{k,2}, \hat{a}_{k,1}^\dagger] \\ &\quad + \sin^2 \theta [\hat{a}_{k,2}, \hat{a}_{k,2}^\dagger] \end{aligned}$$

$$[\hat{a}_\theta, \hat{a}_\theta^\dagger] = \cos^2 \theta + \cos \theta \sin \theta \delta_{k_1 k_2} + \sin \theta \cos \theta \delta_{k_2 k_1} + \sin^2 \theta = 1 \quad (50-3)$$

پس خواهیم داشت:

$$\hat{n}_\theta = \hat{a}_\theta^\dagger \hat{a}_\theta = (\cos \theta a_{k,1}^\dagger + \sin \theta a_{k,2}^\dagger)(\cos \theta a_{k,1} + \sin \theta a_{k,2})$$

$$= \cos^2 \theta \hat{a}_{k,1}^\dagger \hat{a}_{k,1} + \cos \theta \sin \theta \hat{a}_{k,1}^\dagger \hat{a}_{k,2} + \sin \theta \cos \theta \hat{a}_{k,2}^\dagger \hat{a}_{k,1} + \sin^2 \theta \hat{a}_{k,2}^\dagger \hat{a}_{k,2}$$

$$= \cos^2 \theta \hat{a}_{k,1}^\dagger \hat{a}_{k,1} + \cos \theta \sin \theta (\hat{a}_{k,1}^\dagger \hat{a}_{k,2} + \hat{a}_{k,2}^\dagger \hat{a}_{k,1}) + \sin^2 \theta \hat{a}_{k,2}^\dagger \hat{a}_{k,2} \quad (51-3)$$

به این ترتیب می توان نشان داد:

$$\begin{aligned} d\hat{n}_\theta/d\theta &= -2 \sin \theta \cos \theta \hat{a}_{k,1}^\dagger \hat{a}_{k,1} + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) (\hat{a}_{k,1}^\dagger \hat{a}_{k,2} + \hat{a}_{k,2}^\dagger \hat{a}_{k,1}) \\ &\quad + 2 \sin \theta \cos \theta \hat{a}_{k,2}^\dagger \hat{a}_{k,2} \\ &= 2 \sin \theta \cos \theta (\hat{a}_{k,2}^\dagger \hat{a}_{k,2} - \hat{a}_{k,1}^\dagger \hat{a}_{k,1}) + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) (\hat{a}_{k,1}^\dagger \hat{a}_{k,2} + \hat{a}_{k,2}^\dagger \hat{a}_{k,1}) \\ &= \sin 2\theta (\hat{a}_{k,2}^\dagger \hat{a}_{k,2} - \hat{a}_{k,1}^\dagger \hat{a}_{k,1}) + \cos 2\theta (\hat{a}_{k,1}^\dagger \hat{a}_{k,2} + \hat{a}_{k,2}^\dagger \hat{a}_{k,1}) \\ &= \cos 2\theta (\hat{a}_{k,1}^\dagger \hat{a}_{k,2} + \hat{a}_{k,2}^\dagger \hat{a}_{k,1}) - \sin 2\theta (\hat{a}_{k,1}^\dagger \hat{a}_{k,1} - \hat{a}_{k,2}^\dagger \hat{a}_{k,2}) \end{aligned} \quad (52-3)$$

و طبق روابط (5-3) و (7-3) می توان نوشت

$$d\hat{n}_\theta/d\theta = \bar{\Sigma}_1 \cos 2\theta - \bar{\Sigma}_3 \sin 2\theta \quad (53-3)$$

از طرفی طبق رابطه (3-47)، مشتق \hat{n}_θ نسبت به θ بایستی صفر گردد. اگر θ زاویه چرخش اپتیکی باشد بنابراین داریم:

$$\langle d\hat{n}_\theta/d\theta \rangle = \langle \bar{\Sigma}_1 \rangle \cos 2\theta - \langle \bar{\Sigma}_3 \rangle \sin 2\theta = 0 \quad (54-3)$$

بنابراین می توان نوشت:

$$\tan 2\theta = \langle \bar{\Sigma}_1 \rangle / \langle \bar{\Sigma}_3 \rangle \quad (55-3)$$

حالت ابتدایی سیستم را بصورت $|p, k1 [n_{k,1}] \rangle$ نمایش می دهیم. این حالت نشان دهنده باریکه ای است شامل $n_{k,1}$ فوتون که در راستای $\vec{E}(k, 1)$ بصورت خطی قطبیده شده اند، و مولکول مختل نشده ای که در حالت پایه $|p \rangle$ قرار دارد. آنگاه پس از بر هم کنش نور

و ماده، مولکول همچنان حالت $|p\rangle$ را حفظ می کند ولی فوتون ها با احتمالی قابل توجه از حالت قطبش در راستای $\vec{\epsilon}(k, 1)$ به حالت قطبشی در راستای $\vec{\epsilon}(k, 2)$ می روند.

به این ترتیب $\Psi(\infty)$ حالت نهایی سیستم را می توان بصورت زیر نوشت. هر دو احتمال اینکه فوتون ها پس از برهم کنش جهت قطبش $\vec{\epsilon}(k, 1)$ خود را حفظ کنند و یا اینکه فوتون ها به جهت قطبش $\vec{\epsilon}(k, 2)$ جا به جا شوند، در نظر گرفته می شوند.

$$\Psi(\infty) = \sum_{k'} |p, k1[n_{k,1} - 1], k'1[1]\rangle \langle p, k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{S} | p, k1[n_{k,1}]\rangle + \sum_{k'} |p, k1[n_{k,1} - 1], k'2[1]\rangle \langle p, k1[n_{k,1} - 1], k'2[1] | \hat{S} | p, k1[n_{k,1}]\rangle \quad (56-3)$$

با جایگذاری ماتریس S از رابطه (3-12) داریم

$$\begin{aligned} \Psi(\infty) &= \sum_{k'} |p, k1[n_{k,1} - 1], k'1[1]\rangle \\ &\langle p, k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \{1 - 2\pi i \delta(E_{k'1} - E_{k1}) \bar{R}\} | p, k1[n_{k,1}]\rangle \\ &+ \sum_{k'} |p, k1[n_{k,1} - 1], k'2[1]\rangle \\ &\langle p, k1[n_{k,1} - 1], k'2[1] | \{1 - 2\pi i \delta(E_{k'2} - E_{k1}) \bar{R}\} | p, k1[n_{k,1}]\rangle \\ \Psi(\infty) &= |p, k1[n_{k,1}]\rangle - 2\pi i \sum_{k'} \delta(E_{k'1} - E_{k1}) R_{k'1 k1}^{(p)} |p, k1[n_{k,1} - 1], k'1[1]\rangle \\ &- 2\pi i \sum_{k'} \delta(E_{k'2} - E_{k1}) R_{k'2 k1}^{(p)} |p, k1[n_{k,1} - 1], k'2[1]\rangle \end{aligned} \quad (57-3)$$

به طوری که

$$\langle p, k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \bar{R} | p, k1[n_{k,1}]\rangle \equiv R_{k'1 k1}^{(p)} \quad (58-3)$$

$$\langle p, k1[n_{k,1} - 1], k'2[1] | \hat{R} | p, k1[n_{k,1}] \rangle \equiv R_{k'2 k1}^{(p)} \quad (59-3)$$

حال می خواهیم نشان دهیم $R_{k'1 k1}^{(p)}$ فقط به ازای $k'1 = k1$ غیر صفر است. به همین منظور با جایگذاری رابطه (۱۴-۳) در رابطه (۵۸-۳) خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} R_{k'1 k1}^{(p)} &\equiv \langle p, k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{H}_{ED} | p, k1[n_{k,1}] \rangle \\ &+ \langle p, k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{H}_{MD} | p, k1[n_{k,1}] \rangle + \sum_m \\ &\left\{ + \frac{\langle p, k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{H}_{ED} + \hat{H}_{MD} | m, k1[n_{k,1}], k'1[1] \rangle \langle m, k1[n_{k,1}], k'1[1] | \hat{H}_{ED} + \hat{H}_{MD} | p, k1[n_{k,1}] \rangle}{E_p - E_m - \hbar\omega + i\epsilon} \right. \\ &+ \frac{\langle p, k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{H}_{ED} + \hat{H}_{MD} | m, k1[n_{k,1} - 2], k'1[1] \rangle \langle m, k1[n_{k,1} - 2], k'1[1] | \hat{H}_{ED} + \hat{H}_{MD} | p, k1[n_{k,1}] \rangle}{E_p - E_m + \hbar\omega + i\epsilon} \\ &+ \frac{\langle p, k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{H}_{ED} + \hat{H}_{MD} | m, k1[n_{k,1} - 1] \rangle \langle m, k1[n_{k,1} - 1] | \hat{H}_{ED} + \hat{H}_{MD} | p, k1[n_{k,1}] \rangle}{E_p - E_m + \hbar\omega + i\epsilon} \\ &\left. + \frac{\langle p, k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{H}_{ED} + \hat{H}_{MD} | m, k1[n_{k,1} + 1] \rangle \langle m, k1[n_{k,1} + 1] | \hat{H}_{ED} + \hat{H}_{MD} | p, k1[n_{k,1}] \rangle}{E_p - E_m - \hbar\omega + i\epsilon} \right\} \quad (60-3) \end{aligned}$$

سپس با جایگذاری روابط (۲۷-۳) و (۴۰-۳) و ساندویچ کردن قسمت مولکولی \hat{H}_{MD} و \hat{H}_{ED} با حالت مولکولی $|p\rangle$ در جملات اول و دوم رابطه بالا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \text{جملات اول و دوم} &\equiv -i \sum_k (\hbar\omega_k / 2\epsilon_0 V)^{1/2} \vec{d}_{pp} \\ &\{ \vec{\epsilon}(k, 1) [\langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\ &- \langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle] + \vec{\epsilon}(k, 2) \\ &[\langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle] \end{aligned}$$

$$-\langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle - i \sum_{\mathbf{k}} (\hbar/2\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}})^{1/2} \hat{m}_{pp}$$

$$\{ \vec{k} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1) [\langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle$$

$$-\langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle + \vec{k} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2)$$

$$[\langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle$$

$$-\langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle] \quad (61-3)$$

طبق روابط (3-32) جملات بالا صفر هستند.

اکنون به طور مشابه به بررسی جمله سوم عنصر ماتریسی $R_{k'1 k1}^{(p)}$ می پردازیم

$$A_1 = -i \sum_{\mathbf{k}} (\hbar \omega_{\mathbf{k}} / 2 \epsilon_0 V)^{1/2} \vec{d}_{pm} \cdot (\vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1)$$

$$[\langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1}], k'1[1] \rangle$$

$$-\langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}], k'1[1] \rangle$$

$$+ \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) [\langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1}], k'1[1] \rangle$$

$$-\langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}], k'1[1] \rangle])$$

$$-i \sum_{\mathbf{k}} (\hbar / 2 \epsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}})^{1/2} \hat{m}_{pm} \cdot (\vec{k} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1)$$

$$[\langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1}], k'1[1] \rangle$$

$$-\langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}], k'1[1] \rangle + \vec{k} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2)$$

$$[\langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1}], k'1[1] \rangle$$

$$-\langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}], k'1[1] \rangle])$$

$$A_2 = -i \sum_{\mathbf{k}} (\hbar \omega_{\mathbf{k}} / 2 \epsilon_0 V)^{1/2} \vec{d}_{mp} \cdot (\vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1)$$

$$[\langle k1[n_{k,1}], k'1[1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle$$

$$-\langle k1[n_{k,1}], k'1[1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle + \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2)$$

$$\begin{aligned}
& [\langle k1[n_{k,1}], k'1[1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\
& - \langle k1[n_{k,1}], k'1[1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle] \\
& -i \sum_{\mathbf{k}} (\hbar/2\epsilon_0 V \omega_k)^{1/2} \hat{m}_{mp} \cdot (\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1) \\
& [\langle k1[n_{k,1}], k'1[1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\
& - \langle k1[n_{k,1}], k'1[1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle] + \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) \\
& [\langle k1[n_{k,1}], k'1[1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\
& - \langle k1[n_{k,1}], k'1[1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle]) \\
A_3 = & -i \sum_{\mathbf{k}} (\hbar \omega_k / 2 \epsilon_0 V)^{1/2} \vec{d}_{pm} \cdot (\vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1) \\
& [\langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1} - 2], k'1[1] \rangle \\
& - \langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1} - 2], k'1[1] \rangle] \\
& + \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) [\langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1} - 2], k'1[1] \rangle \\
& - \langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1} - 2], k'1[1] \rangle]) \\
& -i \sum_{\mathbf{k}} (\hbar/2\epsilon_0 V \omega_k)^{1/2} \hat{m}_{pm} \cdot (\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1) \\
& [\langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1} - 2], k'1[1] \rangle \\
& - \langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1} - 2], k'1[1] \rangle] + \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) \\
& [\langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1} - 2], k'1[1] \rangle \\
& - \langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1} - 2], k'1[1] \rangle]) \\
A_4 = & -i \sum_{\mathbf{k}} (\hbar \omega_k / 2 \epsilon_0 V)^{1/2} \vec{d}_{mp} \cdot (\vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1) \\
& [\langle k1[n_{k,1} - 2], k'1[1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\
& - \langle k1[n_{k,1} - 2], k'1[1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle] + \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) \\
& [\langle k1[n_{k,1} - 2], k'1[1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\langle k1[n_{k,1} - 2], k'1[1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\
& -i \sum_{\mathbf{k}} (\hbar/2\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}})^{1/2} \hat{m}_{mp} \cdot (\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1) \\
& \quad \langle k1[n_{k,1} - 2], k'1[1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\
& \quad -\langle k1[n_{k,1} - 2], k'1[1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle + \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) \\
& \quad \langle k1[n_{k,1} - 2], k'1[1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\
& \quad -\langle k1[n_{k,1} - 2], k'1[1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle) \\
A_5 = & -i \sum_{\mathbf{k}} (\hbar \omega_{\mathbf{k}} / 2\epsilon_0 V)^{1/2} \vec{d}_{pm} \cdot (\vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1) \\
& \quad \langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1} - 1] \rangle \\
& \quad -\langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1} - 1] \rangle \\
& \quad + \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) \langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1} - 1] \rangle \\
& \quad -\langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1} - 1] \rangle) \\
& -i \sum_{\mathbf{k}} (\hbar/2\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}})^{1/2} \hat{m}_{pm} \cdot (\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1) \\
& \quad \langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1} - 1] \rangle \\
& \quad -\langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1} - 1] \rangle + \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) \\
& \quad \langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1} - 1] \rangle \\
& \quad -\langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1} - 1] \rangle) \\
A_6 = & -i \sum_{\mathbf{k}} (\hbar \omega_{\mathbf{k}} / 2\epsilon_0 V)^{1/2} \vec{d}_{mp} \cdot (\vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1) \langle k1[n_{k,1} - 1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\
& \quad -\langle k1[n_{k,1} - 1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle + \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) \langle k1[n_{k,1} - 1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\
& \quad -\langle k1[n_{k,1} - 1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle) - i \sum_{\mathbf{k}} (\hbar/2\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}})^{1/2} \hat{m}_{mp} \cdot (\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1) \\
& \quad \langle k1[n_{k,1} - 1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle - \langle k1[n_{k,1} - 1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\vec{k} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) [\langle k1[n_{k,1} - 1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\
& - \langle k1[n_{k,1} - 1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle] \\
A_7 = & -i \sum_{\mathbf{k}} (\hbar\omega_k/2\epsilon_0 V)^{1/2} \vec{d}_{pm} \cdot (\vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1) \\
& [\langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1} + 1] \rangle \\
& - \langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1} + 1] \rangle] \\
& + \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) [\langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1} + 1] \rangle \\
& - \langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1} + 1] \rangle]) \\
& -i \sum_{\mathbf{k}} (\hbar/2\epsilon_0 V \omega_k)^{1/2} \vec{m}_{pm} \cdot (\vec{k} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1) \\
& [\langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1} + 1] \rangle \\
& - \langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1} + 1] \rangle] + \vec{k} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) \\
& [\langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1} + 1] \rangle \\
& - \langle k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1} + 1] \rangle]) \\
A_8 = & -i \sum_{\mathbf{k}} (\hbar\omega_k/2\epsilon_0 V)^{1/2} \vec{d}_{mp} \cdot (\vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1) [\langle k1[n_{k,1} + 1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\
& - \langle k1[n_{k,1} + 1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle] + \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) [\langle k1[n_{k,1} + 1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\
& - \langle k1[n_{k,1} + 1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle]) - i \sum_{\mathbf{k}} (\hbar/2\epsilon_0 V \omega_k)^{1/2} \vec{m}_{mp} \cdot (\vec{k} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1) \\
& [\langle k1[n_{k,1} + 1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle - \langle k1[n_{k,1} + 1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle] \\
& + \vec{k} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) [\langle k1[n_{k,1} + 1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\
& - \langle k1[n_{k,1} + 1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle])
\end{aligned}$$

سپس با جایگذاری روابط بالا در جمله کسری رابطه (۳-۶۰) داریم:

$$\text{جمله سوم} = \sum_m \left\{ \frac{A_1 A_2}{E_p - E_m - \hbar\omega} + \frac{A_3 A_4}{E_p - E_m + \hbar\omega} + \frac{A_5 A_6}{E_p - E_m + \hbar\omega} + \frac{A_7 A_8}{E_p - E_m - \hbar\omega} \right\} = 0$$

(۶۲-۳)

بنابراین خواهیم داشت:

$$R_{k'1k1}^{(p)} \equiv \langle p, k1[n_{k,1} - 1], k'1[1] | \bar{R} | p, k1[n_{k,1}] \rangle = 0 \quad (۶۳-۳)$$

و چنانچه بعد ها نشان داده خواهد شد به ازای $k'=k$

$$R_{k1k1}^{(p)} \equiv \langle p, k1[n_{k,1}] | \bar{R} | p, k1[n_{k,1}] \rangle \neq 0 \quad (۶۴-۳)$$

به طور مشابه $R_{k'2k1}^{(p)}$ فقط به ازای $k'=k$ غیر صفر است.

$$R_{k2k1}^{(p)} \equiv \langle p, k1[n_{k,1} - 1], k2[1] | \bar{R} | p, k1[n_{k,1}] \rangle \neq 0 \quad (۶۵-۳)$$

طبق رابطه (۴.۱۲۸) مرجع [۱] برای تبدیل جمع به انتگرال روی انرژی فوتون های گسیل

شده در یک جهت دلخواه عمل می کنیم

$$\sum_{k'} \rightarrow \left(\frac{L}{2\pi}\right) \int dk'$$

(۶۶-۳)

با توجه به اینکه انرژی فوتون گسیلی $E_{k'} = \frac{\hbar^2 k'^2}{2m}$ است، پس

$$dE_{k'} = \frac{\hbar^2 k'}{m} dk' \quad (۶۷-۳)$$

آنگاه :

$$\sum_{k'} \rightarrow \left(\frac{L}{2\pi\hbar c}\right) \int dE_{k'}$$

(۶۸-۳)

که $L^3 = V$ است. اکنون رابطه (۵۷-۳) برای $\Psi(\infty)$ را می توان بازنویسی کرد

$$\begin{aligned} \Psi(\infty) &= |p, k1[n_{k,1}] \rangle - \frac{iL}{\hbar c} R_{k1 k1}^{(p)} |p, k1[n_{k,1}] \rangle \int \delta(E_{k1} - E_{k1}) dE_k - \frac{iL}{\hbar c} R_{k2 k1}^{(p)} \\ &|p, k1[n_{k,1} - 1], k2[1] \rangle \int \delta(E_{k2} - E_{k1}) dE_k \\ \Psi(\infty) &= |p, k1[n_{k,1}] \rangle - \frac{iL}{\hbar c} R_{k1 k1}^{(p)} |p, k1[n_{k,1}] \rangle - \frac{iL}{\hbar c} R_{k2 k1}^{(p)} |p, k1[n_{k,1} - 1], k2[1] \rangle \end{aligned} \quad (69-3)$$

همچنین مقدار چشمداشتی عملگر تعداد \hat{n}_θ را می توان با استفاده از روابط (3-51) و (3-69) بصورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}_\theta \rangle &= \langle \Psi(\infty) | \hat{n}_\theta | \Psi(\infty) \rangle \\ &= \left\{ \langle p, k1[n_{k,1}] | + \langle p, k1[n_{k,1}] | R_{k1 k1}^{*(p)} \frac{iL}{\hbar c} + \langle p, k1[n_{k,1} - 1], k2[1] | R_{k1 k1}^{*(p)} \frac{iL}{\hbar c} \right\} \\ &\{ \cos^2 \theta a_{k,1}^\dagger a_{k,1} + \cos \theta \sin \theta (a_{k,1}^\dagger a_{k,2} + a_{k,2}^\dagger a_{k,1}) + \sin^2 \theta a_{k,2}^\dagger a_{k,2} \} \\ &\left\{ |p, k1[n_{k,1}] \rangle - \frac{iL}{\hbar c} R_{k1 k1}^{(p)} |p, k1[n_{k,1}] \rangle - \frac{iL}{\hbar c} R_{k2 k1}^{(p)} |p, k1[n_{k,1} - 1], k2[1] \rangle \right\} \end{aligned} \quad (70-3)$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \cos^2 \theta \langle p, k1[n_{k,1}] | a_{k,1}^\dagger a_{k,1} | p, k1[n_{k,1}] \rangle \\ &= n_{k,1}^{1/2} \cos^2 \theta \langle p, k1[n_{k,1}] | a_{k,1}^\dagger | p, k1[n_{k,1} - 1] \rangle \\ B_2 &= \cos \theta \sin \theta \langle p, k1[n_{k,1}] | a_{k,1}^\dagger a_{k,2} | p, k1[n_{k,1}] \rangle \\ &= n_{k,1}^{1/2} \delta_{k2, k1} \cos \theta \sin \theta \langle p, k1[n_{k,1}] | a_{k,1}^\dagger | p, k1[n_{k,1} - 1] \rangle \\ B_3 &= \cos \theta \sin \theta \langle p, k1[n_{k,1}] | a_{k,2}^\dagger a_{k,1} | p, k1[n_{k,1}] \rangle \\ &= n_{k,1}^{1/2} \cos \theta \sin \theta \langle p, k1[n_{k,1}] | a_{k,2}^\dagger | p, k1[n_{k,1} - 1] \rangle \\ B_4 &= \sin^2 \theta \langle p, k1[n_{k,1}] | a_{k,2}^\dagger a_{k,2} | p, k1[n_{k,1}] \rangle \end{aligned}$$

$$= n_{k,1}^{1/2} \delta_{k2,k1} \sin^2 \theta \langle p, k1[n_{k,1}] | a_{k,2}^\dagger | p, k1[n_{k,1} - 1] \rangle$$

$$B_5 = -\frac{iL}{\hbar c} R_{k1 k1}^{(p)} \cos^2 \theta \langle p, k1[n_{k,1}] | a_{k,1}^\dagger a_{k,1} | p, k1[n_{k,1}] \rangle$$

$$= -\frac{iL}{\hbar c} R_{k1 k1}^{(p)} n_{k,1}^{1/2} \cos^2 \theta \langle p, k1[n_{k,1}] | a_{k,1}^\dagger | p, k1[n_{k,1} - 1] \rangle$$

$$B_6 = -\frac{iL}{\hbar c} R_{k1 k1}^{(p)} \cos \theta \sin \theta \langle p, k1[n_{k,1}] | a_{k,1}^\dagger a_{k,2} | p, k1[n_{k,1}] \rangle$$

$$= -\frac{iL}{\hbar c} R_{k1 k1}^{(p)} n_{k,1}^{1/2} \delta_{k2,k1} \cos \theta \sin \theta \langle p, k1[n_{k,1}] | a_{k,1}^\dagger | p, k1[n_{k,1} - 1] \rangle$$

$$B_7 = -\frac{iL}{\hbar c} R_{k1 k1}^{(p)} \cos \theta \sin \theta \langle p, k1[n_{k,1}] | a_{k,2}^\dagger a_{k,1} | p, k1[n_{k,1}] \rangle$$

$$= -\frac{iL}{\hbar c} R_{k1 k1}^{(p)} n_{k,1}^{1/2} \cos \theta \sin \theta \langle p, k1[n_{k,1}] | a_{k,2}^\dagger | p, k1[n_{k,1} - 1] \rangle$$

$$B_8 = -\frac{iL}{\hbar c} R_{k1 k1}^{(p)} \sin^2 \theta \langle p, k1[n_{k,1}] | a_{k,2}^\dagger a_{k,2} | p, k1[n_{k,1}] \rangle$$

$$= -\frac{iL}{\hbar c} R_{k1 k1}^{(p)} n_{k,1}^{1/2} \delta_{k2,k1} \sin^2 \theta \langle p, k1[n_{k,1}] | a_{k,2}^\dagger | p, k1[n_{k,1} - 1] \rangle$$

$$B_9 = -\frac{iL}{\hbar c} R_{k2 k1}^{(p)} \cos^2 \theta \langle p, k1[n_{k,1}] | a_{k,1}^\dagger a_{k,1} | p, k1[n_{k,1} - 1], k2[1] \rangle$$

$$= -\frac{iL}{\hbar c} R_{k2 k1}^{(p)} (n_{k,1} - 1)^{1/2} \cos^2 \theta \langle p, k1[n_{k,1}] | a_{k,1}^\dagger | p, k1[n_{k,1} - 2], k2[1] \rangle \\ - \frac{iL}{\hbar c} R_{k2 k1}^{(p)} \delta_{k1,k2} \cos^2 \theta \langle p, k1[n_{k,1}] | a_{k,1}^\dagger | p, k1[n_{k,1} - 1], k2[0] \rangle$$

$$B_{10} = -\frac{iL}{\hbar c} R_{k2 k1}^{(p)} \cos \theta \sin \theta \langle p, k1[n_{k,1}] | a_{k,1}^\dagger a_{k,2} | p, k1[n_{k,1} - 1], k2[1] \rangle$$

$$= -\frac{iL}{\hbar c} R_{k2 k1}^{(p)} (n_{k,1} - 1)^{1/2} \delta_{k2,k1} \cos \theta \sin \theta \langle p, k1[n_{k,1}] | a_{k,1}^\dagger | p, k1[n_{k,1} - 2], k2[1] \rangle \\ - \frac{iL}{\hbar c} R_{k2 k1}^{(p)} \cos \theta \sin \theta \langle p, k1[n_{k,1}] | a_{k,1}^\dagger | p, k1[n_{k,1} - 1], k2[0] \rangle$$

$$\begin{aligned}
B_{11} &= -\frac{iL}{\hbar c} R_{k_2 k_1}^{(p)} \cos\theta \sin\theta \langle p, k_1 [n_{k,1}] | a_{k,2}^\dagger a_{k,1} | p, k_1 [n_{k,1} - 1], k_2 [1] \rangle \\
&= -\frac{iL}{\hbar c} R_{k_2 k_1}^{(p)} (n_{k,1} - 1)^{1/2} \cos\theta \sin\theta \langle p, k_1 [n_{k,1}] | a_{k,2}^\dagger | p, k_1 [n_{k,1} - 2], k_2 [1] \rangle \\
&\quad - \frac{iL}{\hbar c} R_{k_2 k_1}^{(p)} \delta_{k_1, k_2} \cos\theta \sin\theta \langle p, k_1 [n_{k,1}] | a_{k,2}^\dagger | p, k_1 [n_{k,1} - 1], k_2 [0] \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{12} &= -\frac{iL}{\hbar c} R_{k_2 k_1}^{(p)} \sin^2\theta \langle p, k_1 [n_{k,1}] | a_{k,2}^\dagger a_{k,2} | p, k_1 [n_{k,1} - 1], k_2 [1] \rangle \\
&= -\frac{iL}{\hbar c} R_{k_2 k_1}^{(p)} (n_{k,1} - 1)^{1/2} \delta_{k_2, k_1} \sin^2\theta \langle p, k_1 [n_{k,1}] | a_{k,2}^\dagger | p, k_1 [n_{k,1} - 2], k_2 [1] \rangle \\
&\quad - \frac{iL}{\hbar c} R_{k_2 k_1}^{(p)} \sin^2\theta \langle p, k_1 [n_{k,1}] | a_{k,2}^\dagger | p, k_1 [n_{k,1} - 1], k_2 [0] \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{13} &= \frac{iL}{\hbar c} R_{k_1 k_1}^{*(p)} \cos^2\theta \langle p, k_1 [n_{k,1}] | a_{k,1}^\dagger a_{k,1} | p, k_1 [n_{k,1}] \rangle \\
&= \frac{iL}{\hbar c} R_{k_1 k_1}^{*(p)} n_{k,1}^{1/2} \cos^2\theta \langle p, k_1 [n_{k,1}] | a_{k,1}^\dagger | p, k_1 [n_{k,1} - 1] \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{14} &= \frac{iL}{\hbar c} R_{k_1 k_1}^{*(p)} \cos\theta \sin\theta \langle p, k_1 [n_{k,1}] | a_{k,1}^\dagger a_{k,2} | p, k_1 [n_{k,1}] \rangle \\
&= \frac{iL}{\hbar c} R_{k_1 k_1}^{*(p)} n_{k,1}^{1/2} \delta_{k_2, k_1} \cos\theta \sin\theta \langle p, k_1 [n_{k,1}] | a_{k,1}^\dagger | p, k_1 [n_{k,1} - 1] \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{15} &= \frac{iL}{\hbar c} R_{k_1 k_1}^{*(p)} \cos\theta \sin\theta \langle p, k_1 [n_{k,1}] | a_{k,2}^\dagger a_{k,1} | p, k_1 [n_{k,1}] \rangle \\
&= \frac{iL}{\hbar c} R_{k_1 k_1}^{*(p)} n_{k,1}^{1/2} \cos\theta \sin\theta \langle p, k_1 [n_{k,1}] | a_{k,2}^\dagger | p, k_1 [n_{k,1} - 1] \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{16} &= \frac{iL}{\hbar c} R_{k_1 k_1}^{*(p)} \sin^2\theta \langle p, k_1 [n_{k,1}] | a_{k,2}^\dagger a_{k,2} | p, k_1 [n_{k,1}] \rangle \\
&= \frac{iL}{\hbar c} R_{k_1 k_1}^{*(p)} n_{k,1}^{1/2} \delta_{k_2, k_1} \sin^2\theta \langle p, k_1 [n_{k,1}] | a_{k,2}^\dagger | p, k_1 [n_{k,1} - 1] \rangle
\end{aligned}$$

$$B_{17} = \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_1 k_1}^{*(p)} R_{k_1 k_1}^{(p)} \cos^2\theta \langle p, k_1 [n_{k,1}] | a_{k,1}^\dagger a_{k,1} | p, k_1 [n_{k,1}] \rangle$$

$$= \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_1 k_1}^{*(p)} R_{k_1 k_1}^{(p)} n_{k_1}^{1/2} \cos^2 \theta \langle p, k_1 [n_{k_1}] | a_{k_1}^\dagger | p, k_1 [n_{k_1} - 1] \rangle$$

$$B_{18} = \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_1 k_1}^{*(p)} R_{k_1 k_1}^{(p)} \cos \theta \sin \theta \langle p, k_1 [n_{k_1}] | a_{k_1}^\dagger a_{k_2} | p, k_1 [n_{k_1}] \rangle$$

$$= \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_1 k_1}^{*(p)} R_{k_1 k_1}^{(p)} n_{k_1}^{1/2} \delta_{k_2, k_1} \cos \theta \sin \theta \langle p, k_1 [n_{k_1}] | a_{k_1}^\dagger | p, k_1 [n_{k_1} - 1] \rangle$$

$$B_{19} = \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_1 k_1}^{*(p)} R_{k_1 k_1}^{(p)} \cos \theta \sin \theta \langle p, k_1 [n_{k_1}] | a_{k_2}^\dagger a_{k_1} | p, k_1 [n_{k_1}] \rangle$$

$$= \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_1 k_1}^{*(p)} R_{k_1 k_1}^{(p)} n_{k_1}^{1/2} \cos \theta \sin \theta \langle p, k_1 [n_{k_1}] | a_{k_2}^\dagger | p, k_1 [n_{k_1} - 1] \rangle$$

$$B_{20} = \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_1 k_1}^{*(p)} R_{k_1 k_1}^{(p)} \sin^2 \theta \langle p, k_1 [n_{k_1}] | a_{k_2}^\dagger a_{k_2} | p, k_1 [n_{k_1}] \rangle$$

$$= \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_1 k_1}^{*(p)} R_{k_1 k_1}^{(p)} n_{k_1}^{1/2} \delta_{k_2, k_1} \sin^2 \theta \langle p, k_1 [n_{k_1}] | a_{k_2}^\dagger | p, k_1 [n_{k_1} - 1] \rangle$$

$$B_{21} = \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_1 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} \cos^2 \theta \langle p, k_1 [n_{k_1}] | a_{k_1}^\dagger a_{k_1} | p, k_1 [n_{k_1} - 1], k_2 [1] \rangle$$

$$= \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_1 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} (n_{k_1} - 1)^{1/2} \cos^2 \theta \langle p, k_1 [n_{k_1}] | a_{k_1}^\dagger | p, k_1 [n_{k_1} - 2], k_2 [1] \rangle \\ + \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_1 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} \delta_{k_1, k_2} \cos^2 \theta \langle p, k_1 [n_{k_1}] | a_{k_1}^\dagger | p, k_1 [n_{k_1} - 1], k_2 [0] \rangle$$

$$B_{22} = \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_1 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} \cos \theta \sin \theta \langle p, k_1 [n_{k_1}] | a_{k_1}^\dagger a_{k_2} | p, k_1 [n_{k_1} - 1], k_2 [1] \rangle$$

$$= \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_1 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} (n_{k_1} - 1)^{1/2} \delta_{k_2, k_1} \cos \theta \sin \theta \langle p, k_1 [n_{k_1}] | a_{k_1}^\dagger | p, k_1 [n_{k_1} - 2], k_2 [1] \rangle \\ + \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_1 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} \cos \theta \sin \theta \langle p, k_1 [n_{k_1}] | a_{k_1}^\dagger | p, k_1 [n_{k_1} - 1], k_2 [0] \rangle$$

$$B_{23} = \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_1 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} \cos \theta \sin \theta \langle p, k_1 [n_{k_1}] | a_{k_2}^\dagger a_{k_1} | p, k_1 [n_{k_1} - 1], k_2 [1] \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_1 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} (n_{k,1} - 1)^{1/2} \cos\theta \sin\theta \langle p, k_1 [n_{k,1}] | a_{k,2}^\dagger | p, k_1 [n_{k,1} - 2], k_2 [1] \rangle \\
&\quad + \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_1 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} \delta_{k_1, k_2} \cos\theta \sin\theta \langle p, k_1 [n_{k,1}] | a_{k,2}^\dagger | p, k_1 [n_{k,1} - 1], k_2 [0] \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{24} &= \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_1 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} \sin^2\theta \langle p, k_1 [n_{k,1}] | a_{k,2}^\dagger a_{k,2} | p, k_1 [n_{k,1} - 1], k_2 [1] \rangle \\
&= \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_1 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} (n_{k,1} - 1)^{1/2} \delta_{k_2, k_1} \sin^2\theta \langle p, k_1 [n_{k,1}] | a_{k,2}^\dagger | p, k_1 [n_{k,1} - 2], k_2 [1] \rangle \\
&\quad + \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_1 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} \sin^2\theta \langle p, k_1 [n_{k,1}] | a_{k,2}^\dagger | p, k_1 [n_{k,1} - 1], k_2 [0] \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{25} &= \frac{iL}{\hbar c} R_{k_2 k_1}^{*(p)} \cos^2\theta \langle p, k_1 [n_{k,1} - 1], k_2 [1] | a_{k,1}^\dagger a_{k,1} | p, k_1 [n_{k,1}] \rangle \\
&= \frac{iL}{\hbar c} R_{k_2 k_1}^{*(p)} n_{k,1}^{1/2} \cos^2\theta \langle p, k_1 [n_{k,1} - 1], k_2 [1] | a_{k,1}^\dagger | p, k_1 [n_{k,1} - 1] \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{26} &= \frac{iL}{\hbar c} R_{k_2 k_1}^{*(p)} \cos\theta \sin\theta \langle p, k_1 [n_{k,1} - 1], k_2 [1] | a_{k,1}^\dagger a_{k,2} | p, k_1 [n_{k,1}] \rangle \\
&= \frac{iL}{\hbar c} R_{k_2 k_1}^{*(p)} n_{k,1}^{1/2} \delta_{k_2, k_1} \cos\theta \sin\theta \langle p, k_1 [n_{k,1} - 1], k_2 [1] | a_{k,1}^\dagger | p, k_1 [n_{k,1} - 1] \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{27} &= \frac{iL}{\hbar c} R_{k_2 k_1}^{*(p)} \cos\theta \sin\theta \langle p, k_1 [n_{k,1} - 1], k_2 [1] | a_{k,2}^\dagger a_{k,1} | p, k_1 [n_{k,1}] \rangle \\
&= \frac{iL}{\hbar c} R_{k_2 k_1}^{*(p)} n_{k,1}^{1/2} \cos\theta \sin\theta \langle p, k_1 [n_{k,1} - 1], k_2 [1] | a_{k,2}^\dagger | p, k_1 [n_{k,1} - 1] \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{28} &= \frac{iL}{\hbar c} R_{k_2 k_1}^{*(p)} \sin^2\theta \langle p, k_1 [n_{k,1} - 1], k_2 [1] | a_{k,2}^\dagger a_{k,2} | p, k_1 [n_{k,1}] \rangle \\
&= \frac{iL}{\hbar c} R_{k_2 k_1}^{*(p)} n_{k,1}^{1/2} \delta_{k_2, k_1} \sin^2\theta \langle p, k_1 [n_{k,1} - 1], k_2 [1] | a_{k,2}^\dagger | p, k_1 [n_{k,1} - 1] \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{29} &= \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_1 k_1}^{(p)} \cos^2\theta \langle p, k_1 [n_{k,1} - 1], k_2 [1] | a_{k,1}^\dagger a_{k,1} | p, k_1 [n_{k,1}] \rangle \\
&= \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_1 k_1}^{(p)} n_{k,1}^{1/2} \cos^2\theta \langle p, k_1 [n_{k,1} - 1], k_2 [1] | a_{k,1}^\dagger | p, k_1 [n_{k,1} - 1] \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{30} &= \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_1 k_1}^{(p)} \cos\theta \sin\theta \langle p, k_1[n_{k_1} - 1], k_2[1] | a_{k_1}^\dagger a_{k_2} | p, k_1[n_{k_1}] \rangle \\
&= \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_1 k_1}^{(p)} n_{k_1}^{1/2} \delta_{k_2, k_1} \cos\theta \sin\theta \langle p, k_1[n_{k_1} - 1], k_2[1] | a_{k_1}^\dagger | p, k_1[n_{k_1} - 1] \rangle \\
B_{31} &= \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_1 k_1}^{(p)} \cos\theta \sin\theta \langle p, k_1[n_{k_1} - 1], k_2[1] | a_{k_2}^\dagger a_{k_1} | p, k_1[n_{k_1}] \rangle \\
&= \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_1 k_1}^{(p)} n_{k_1}^{1/2} \cos\theta \sin\theta \langle p, k_1[n_{k_1} - 1], k_2[1] | a_{k_2}^\dagger | p, k_1[n_{k_1} - 1] \rangle \\
B_{32} &= \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_1 k_1}^{(p)} \sin^2\theta \langle p, k_1[n_{k_1} - 1], k_2[1] | a_{k_2}^\dagger a_{k_2} | p, k_1[n_{k_1}] \rangle \\
&= \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_1 k_1}^{(p)} n_{k_1}^{1/2} \delta_{k_2, k_1} \sin^2\theta \langle p, k_1[n_{k_1} - 1], k_2[1] | a_{k_2}^\dagger | p, k_1[n_{k_1} - 1] \rangle \\
B_{33} &= \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} \cos^2\theta \langle p, k_1[n_{k_1} - 1], k_2[1] | a_{k_1}^\dagger a_{k_1} | p, k_1[n_{k_1} - 1], k_2[1] \rangle \\
&= \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} (n_{k_1} - 1)^{1/2} \cos^2\theta \langle p, k_1[n_{k_1} - 1], k_2[1] | a_{k_1}^\dagger | p, k_1[n_{k_1} - 2], k_2[1] \rangle \\
&\quad + \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} \delta_{k_1, k_2} \cos^2\theta \langle p, k_1[n_{k_1} - 1], k_2[1] | a_{k_1}^\dagger | p, k_1[n_{k_1} - 1], k_2[0] \rangle \\
B_{34} &= \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} \cos\theta \sin\theta \langle p, k_1[n_{k_1} - 1], k_2[1] | a_{k_1}^\dagger a_{k_2} | p, k_1[n_{k_1} - 1], k_2[1] \rangle \\
&= \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} (n_{k_1} - 1)^{1/2} \delta_{k_2, k_1} \cos\theta \sin\theta \\
&\quad \langle p, k_1[n_{k_1} - 1], k_2[1] | a_{k_1}^\dagger | p, k_1[n_{k_1} - 2], k_2[1] \rangle + \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} \\
&\quad \cos\theta \sin\theta \langle p, k_1[n_{k_1} - 1], k_2[1] | a_{k_1}^\dagger | p, k_1[n_{k_1} - 1], k_2[0] \rangle \\
B_{35} &= \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} \cos\theta \sin\theta \langle p, k_1[n_{k_1} - 1], k_2[1] | a_{k_2}^\dagger a_{k_1} | p, k_1[n_{k_1} - 1], k_2[1] \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} (n_{k_1} - 1)^{1/2} \cos\theta \sin\theta \\
&\quad \langle p, k_1 [n_{k_1} - 1], k_2 [1] | a_{k_2}^\dagger | p, k_1 [n_{k_1} - 2], k_2 [1] \rangle + \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} \\
&\quad \delta_{k_1, k_2} \cos\theta \sin\theta \langle p, k_1 [n_{k_1} - 1], k_2 [1] | a_{k_2}^\dagger | p, k_1 [n_{k_1} - 1], k_2 [0] \rangle \\
B_{36} &= \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} \sin^2\theta \langle p, k_1 [n_{k_1} - 1], k_2 [1] | a_{k_2}^\dagger a_{k_2} | p, k_1 [n_{k_1} - 1], k_2 [1] \rangle \\
&= \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} (n_{k_1} - 1)^{1/2} \delta_{k_2, k_1} \sin^2\theta \\
&\quad \langle p, k_1 [n_{k_1} - 1], k_2 [1] | a_{k_2}^\dagger | p, k_1 [n_{k_1} - 2], k_2 [1] \rangle + \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} \\
&\quad \sin^2\theta \langle p, k_1 [n_{k_1} - 1], k_2 [1] | a_{k_2}^\dagger | p, k_1 [n_{k_1} - 1], k_2 [0] \rangle
\end{aligned}$$

به این ترتیب رابطه (۷۰-۳) را می توان بصورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{n}_\theta \rangle &= B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_{36} \\
\langle \hat{n}_\theta \rangle &= n_{k_1} \cos^2\theta - \frac{iL}{\hbar c} R_{k_1 k_1}^{(p)} n_{k_1} \cos^2\theta - \frac{iL}{\hbar c} R_{k_2 k_1}^{(p)} n_{k_1}^{1/2} \cos\theta \sin\theta + \frac{iL}{\hbar c} R_{k_1 k_1}^{*(p)} n_{k_1} \\
&\quad \cos^2\theta + \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_1 k_1}^{*(p)} R_{k_1 k_1}^{(p)} n_{k_1} \cos^2\theta + \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_1 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} n_{k_1}^{1/2} \cos\theta \sin\theta \\
&\quad + \frac{iL}{\hbar c} R_{k_2 k_1}^{*(p)} n_{k_1}^{1/2} \cos\theta \sin\theta + \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_1 k_1}^{(p)} n_{k_1}^{1/2} \cos\theta \sin\theta \\
&\quad + \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} (n_{k_1} - 1) \cos^2\theta + \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} \sin^2\theta \\
\langle \hat{n}_\theta \rangle &= \left[n_{k_1} - \frac{iL}{\hbar c} R_{k_1 k_1}^{(p)} n_{k_1} + \frac{iL}{\hbar c} R_{k_1 k_1}^{*(p)} n_{k_1} + \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_1 k_1}^{*(p)} R_{k_1 k_1}^{(p)} n_{k_1} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} (n_{k,1} - 1) \Big] \cos^2 \theta + \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} \sin^2 \theta \\
& + \left[-\frac{iL}{\hbar c} R_{k_2 k_1}^{(p)} n_{k,1}^{1/2} + \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_1 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} n_{k,1}^{1/2} + \frac{iL}{\hbar c} R_{k_2 k_1}^{*(p)} n_{k,1}^{1/2} \right. \\
& \left. + \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_1 k_1}^{(p)} n_{k,1}^{1/2} \right] \cos \theta \sin \theta \\
\langle \hat{n}_\theta \rangle & = \left\{ n_{k,1} \left[1 - \frac{iL}{\hbar c} (R_{k_1 k_1}^{(p)} - R_{k_1 k_1}^{*(p)}) + \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} (R_{k_1 k_1}^{*(p)} R_{k_1 k_1}^{(p)} + R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)}) \right] \right. \\
& \left. - \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} \right\} \cos^2 \theta + \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} \sin^2 \theta - n_{k,1}^{1/2} \frac{iL}{\hbar c} \\
& \left\{ R_{k_2 k_1}^{(p)} + \frac{iL}{\hbar c} R_{k_1 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} - R_{k_2 k_1}^{*(p)} + \frac{iL}{\hbar c} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_1 k_1}^{(p)} \right\} \cos \theta \sin \theta \\
\langle \hat{n}_\theta \rangle & = \left\{ n_{k,1} \left[1 - \frac{iL}{\hbar c} (R_{k_1 k_1}^{(p)} - R_{k_1 k_1}^{*(p)}) + \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} (R_{k_1 k_1}^{*(p)} R_{k_1 k_1}^{(p)} + R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)}) \right] \right. \\
& \left. - \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} \right\} \cos^2 \theta + \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} \sin^2 \theta - n_{k,1}^{1/2} \frac{iL}{\hbar c} \\
& \left\{ \left[1 + \frac{iL}{\hbar c} R_{k_1 k_1}^{*(p)} \right] R_{k_2 k_1}^{(p)} - \left[1 - \frac{iL}{\hbar c} R_{k_1 k_1}^{(p)} \right] R_{k_2 k_1}^{*(p)} \right\} \cos \theta \sin \theta
\end{aligned} \tag{۷۱-۳}$$

با فرض اینکه در پراکندگی تغییرات شدت فوتون هایی با قطبش $\vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1)$ بسیار جزئی است، رابطه (۳-۷) بصورت زیر ساده می شود.

$$\langle \hat{n}_\theta \rangle = n_{k,1} \cos^2 \theta + \frac{L^2}{\hbar^2 c^2} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} \sin^2 \theta - n_{k,1}^{1/2} \frac{iL}{\hbar c} [R_{k_2 k_1}^{(p)} - R_{k_2 k_1}^{*(p)}] \cos \theta \sin \theta$$

$$\langle \hat{n}_\theta \rangle = n_{k,1} \left\{ \cos^2 \theta + \frac{L^2}{\hbar^2 c^2 n_{k,1}} R_{k_2 k_1}^{*(p)} R_{k_2 k_1}^{(p)} \sin^2 \theta - \frac{iL}{\hbar c n_{k,1}^{1/2}} [R_{k_2 k_1}^{(p)} - R_{k_2 k_1}^{*(p)}] \cos \theta \sin \theta \right\} \quad (72-3)$$

با جدا سازی قسمت حقیقی و موهومی $R_{k_2 k_1}^{(p)}$ خواهیم داشت:

$$\langle \hat{n}_\theta \rangle = n_{k,1} \left\{ \left[\cos \theta + \frac{L}{\hbar c n_{k,1}^{1/2}} (\mathcal{Jm} [R_{k_2 k_1}^{(p)}]) \sin \theta \right]^2 + \frac{L^2}{\hbar^2 c^2 n_{k,1}} (\mathcal{R} [R_{k_2 k_1}^{(p)}])^2 \sin^2 \theta \right\} \quad (73-3)$$

در غیاب اثرات میرایی ناشی از برهم کنش با محیط، $R_{k_2 k_1}^{(p)}$ برای چرخش اپتیکی، عددی کاملاً موهومی است [۴]. به همین دلیل رابطه (۷۳-۳) را میتوان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\langle \hat{n}_\theta \rangle = n_{k,1} \left[\cos \theta + \frac{L}{\hbar c n_{k,1}^{1/2}} (\mathcal{Jm} [R_{k_2 k_1}^{(p)}]) \sin \theta \right]^2 \quad (74-3)$$

بنابراین صفر شدن قسمت حقیقی $R_{k_2 k_1}^{(p)}$ حاکی از آن است که $\langle \hat{n}_\theta \rangle$ از مقدار بیشینه ای برخوردار است. پس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{d\langle \hat{n}_\theta \rangle}{d\theta} &= 0 \\ 2n_{k,1} \left[-\sin \theta + \frac{L}{\hbar c n_{k,1}^{1/2}} (\mathcal{Jm} [R_{k_2 k_1}^{(p)}]) \cos \theta \right] \left[\cos \theta + \frac{L}{\hbar c n_{k,1}^{1/2}} (\mathcal{Jm} [R_{k_2 k_1}^{(p)}]) \sin \theta \right] &= 0 \\ -\sin \theta + \frac{L}{\hbar c n_{k,1}^{1/2}} (\mathcal{Jm} [R_{k_2 k_1}^{(p)}]) \cos \theta &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{L}{\hbar c n_{k,1}^{1/2}} \left(\mathcal{J}m \left[R_{k_2 k_1}^{(p)} \right] \right) \cos \theta = \sin \theta$$

$$\frac{L}{\hbar c n_{k,1}^{1/2}} \left(\mathcal{J}m \left[R_{k_2 k_1}^{(p)} \right] \right) = \tan \theta$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{L}{\hbar c n_{k,1}^{1/2}} \mathcal{J}m \left[R_{k_2 k_1}^{(p)} \right] \right)$$

(۷۵-۳)

اکنون با دانستن اینکه حالت ابتدایی سیستم $|p, k_1 [n_{k,1}] \rangle$ و حالت نهایی آن $|p, k_1 [n_{k,1} - 1], k_2 [1] \rangle$ است، عنصر ماتریس واکنش $R_{k_2 k_1}^{(p)}$ خواهد شد:

$$R_{k_2 k_1}^{(p)} \equiv \langle p, k_1 [n_{k,1} - 1], k_2 [1] | \hat{R} | p, k_1 [n_{k,1}] \rangle \quad (۷۶-۳)$$

طبق رابطه (۱۴-۳)

$$R_{k_2 k_1}^{(p)} = \langle p, k_1 [n_{k,1} - 1], k_2 [1] | \hat{H}_{ED} + \hat{H}_{MD} | p, k_1 [n_{k,1}] \rangle + \sum_m \left\{ \frac{\langle p, k_1 [n_{k,1} - 1], k_2 [1] | \hat{H}_{ED} + \hat{H}_{MD} | m, k_1 [n_{k,1}], k_2 [1] \rangle \langle m, k_1 [n_{k,1}], k_2 [1] | \hat{H}_{ED} + \hat{H}_{MD} | p, k_1 [n_{k,1}] \rangle}{E_p - E_m - \hbar \omega} + \frac{\langle p, k_1 [n_{k,1} - 1], k_2 [1] | \hat{H}_{ED} + \hat{H}_{MD} | m, k_1 [n_{k,1} - 1] \rangle \langle m, k_1 [n_{k,1} - 1] | \hat{H}_{ED} + \hat{H}_{MD} | p, k_1 [n_{k,1}] \rangle}{E_p - E_m + \hbar \omega} \right\} \quad (۷۷-۳)$$

با جایگذاری روابط (۲۷-۳) و (۴۰-۳) در رابطه بالا ابتدا به محاسبه جمله اول $R_{k_2 k_1}^{(p)}$ می پردازیم.

$$\langle p, k_1 [n_{k,1} - 1], k_2 [1] | \hat{H}_{ED} + \hat{H}_{MD} | p, k_1 [n_{k,1}] \rangle = -i \sum_k (\hbar \omega_k / 2 \epsilon_0 V)^{1/2} \vec{d}_{pp}.$$

$$\{ \vec{\epsilon}(k, 1) [\langle k_1 [n_{k,1} - 1], k_2 [1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k_1 [n_{k,1}] \rangle$$

$$\begin{aligned}
& -\langle k1[n_{k,1} - 1], k2[1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle + \vec{\epsilon}(k, 2) \\
& \quad \langle k1[n_{k,1} - 1], k2[1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\
& -\langle k1[n_{k,1} - 1], k2[1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle - i \sum_{\mathbf{k}} (\hbar/2\epsilon_0 V \omega_k)^{1/2} \hat{m}_{pp} \\
& \quad \{ \vec{k} \times \vec{\epsilon}(k, 1) [\langle k1[n_{k,1} - 1], k2[1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\
& -\langle k1[n_{k,1} - 1], k2[1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle + \vec{k} \times \vec{\epsilon}(k, 2) \\
& \quad \langle k1[n_{k,1} - 1], k2[1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\
& \quad -\langle k1[n_{k,1} - 1], k2[1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle] \} \quad (78-3)
\end{aligned}$$

طبق روابط (۳-۳۲) رابطه بالا صفر می شود.

سپس به محاسبه جمله دوم $R_{k2 k1}^{(p)}$ می پردازیم.

$$\begin{aligned}
C_1 &= -i \sum_{\mathbf{k}} (\hbar \omega_k / 2 \epsilon_0 V)^{1/2} \vec{d}_{pm} \cdot (\vec{\epsilon}(k, 1) \\
& \quad \langle k1[n_{k,1} - 1], k2[1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1}], k2[1] \rangle \\
& -\langle k1[n_{k,1} - 1], k2[1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}], k2[1] \rangle \\
& + \vec{\epsilon}(k, 2) [\langle k1[n_{k,1} - 1], k2[1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1}], k2[1] \rangle \\
& -\langle k1[n_{k,1} - 1], k2[1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}], k2[1] \rangle] \\
& -i \sum_{\mathbf{k}} (\hbar / 2 \epsilon_0 V \omega_k)^{1/2} \hat{m}_{pm} \cdot (\vec{k} \times \vec{\epsilon}(k, 1) \\
& \quad \langle k1[n_{k,1} - 1], k2[1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1}], k2[1] \rangle \\
& -\langle k1[n_{k,1} - 1], k2[1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}], k2[1] \rangle + \vec{k} \times \vec{\epsilon}(k, 2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [\langle k1[n_{k,1} - 1], k2[1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1}], k2[1] \rangle \\
& - \langle k1[n_{k,1} - 1], k2[1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}], k2[1] \rangle] \\
C_2 = & -i \sum_{\mathbf{k}} (\hbar \omega_k / 2 \epsilon_0 V)^{1/2} \vec{d}_{mp} \cdot (\vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1) \\
& [\langle k1[n_{k,1}], k2[1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\
& - \langle k1[n_{k,1}], k2[1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle] + \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) \\
& [\langle k1[n_{k,1}], k2[1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\
& - \langle k1[n_{k,1}], k2[1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle]) \\
& -i \sum_{\mathbf{k}} (\hbar / 2 \epsilon_0 V \omega_k)^{1/2} \hat{m}_{mp} \cdot (\vec{k} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1) \\
& [\langle k1[n_{k,1}], k2[1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\
& - \langle k1[n_{k,1}], k2[1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle] + \vec{k} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) \\
& [\langle k1[n_{k,1}], k2[1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\
& - \langle k1[n_{k,1}], k2[1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle]) \\
C_3 = & -i \sum_{\mathbf{k}} (\hbar \omega_k / 2 \epsilon_0 V)^{1/2} \vec{d}_{pm} \cdot (\vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1) \\
& [\langle k1[n_{k,1} - 1], k2[1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1} - 1] \rangle \\
& - \langle k1[n_{k,1} - 1], k2[1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1} - 1] \rangle] \\
& + \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) [\langle k1[n_{k,1} - 1], k2[1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1} - 1] \rangle \\
& - \langle k1[n_{k,1} - 1], k2[1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1} - 1] \rangle])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -i \sum_{\mathbf{k}} (\hbar/2\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}})^{1/2} \hat{m}_{pm} \cdot (\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1)) \\
& \quad [\langle k1[n_{k,1} - 1], k2[1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1} - 1] \rangle \\
& \quad - \langle k1[n_{k,1} - 1], k2[1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1} - 1] \rangle] + \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) \\
& \quad [\langle k1[n_{k,1} - 1], k2[1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1} - 1] \rangle \\
& \quad - \langle k1[n_{k,1} - 1], k2[1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1} - 1] \rangle] \\
C_4 = & -i \sum_{\mathbf{k}} (\hbar \omega_{\mathbf{k}} / 2 \epsilon_0 V)^{1/2} \vec{d}_{mp} \cdot (\vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1)) \\
& \quad [\langle k1[n_{k,1} - 1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle - \langle k1[n_{k,1} - 1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle] + \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) \\
& \quad [\langle k1[n_{k,1} - 1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle - \langle k1[n_{k,1} - 1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle] \\
& -i \sum_{\mathbf{k}} (\hbar/2\epsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}})^{1/2} \hat{m}_{mp} \cdot (\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1)) [\langle k1[n_{k,1} - 1] | \hat{a}_{k,1}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\
& \quad - \langle k1[n_{k,1} - 1] | \hat{a}_{k,1}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle] + \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) [\langle k1[n_{k,1} - 1] | \hat{a}_{k,2}(t) | k1[n_{k,1}] \rangle \\
& \quad - \langle k1[n_{k,1} - 1] | \hat{a}_{k,2}^\dagger(t) | k1[n_{k,1}] \rangle]
\end{aligned}$$

سپس با جایگذاری روابط بالا در عبارت کسری رابطه (۳-۷۷) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\text{جمله دوم} &= \sum_m \left\{ \frac{C_1 C_2}{E_p - E_m - \hbar \omega} + \frac{C_3 C_4}{E_p - E_m + \hbar \omega} \right\} \\
\text{جمله دوم} &= \sum_m \sum_{\mathbf{k}} \left\{ (\hbar \omega_{\mathbf{k}} / 2 \epsilon_0 V)^{1/2} n_{k,1}^{1/2} \vec{d}_{pm} \cdot \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1) + (\hbar / 2 \epsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}})^{1/2} n_{k,1}^{1/2} \hat{m}_{pm} \cdot \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 1) \right\} \\
& \quad \left\{ (\hbar \omega_{\mathbf{k}} / 2 \epsilon_0 V)^{1/2} \vec{d}_{mp} \cdot \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) + (\hbar / 2 \epsilon_0 V \omega_{\mathbf{k}})^{1/2} \hat{m}_{mp} \cdot \vec{\mathbf{k}} \times \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) \right\} / (E_{pm} - \hbar \omega)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_m \sum_k \left\{ (\hbar\omega_k/2\epsilon_0 V)^{1/2} \vec{d}_{pm} \cdot \vec{\epsilon}(k, 2) + (\hbar/2\epsilon_0 V\omega_k)^{1/2} \hat{m}_{pm} \cdot \vec{k} \times \vec{\epsilon}(k, 2) \right\} \\
& \left\{ (\hbar\omega_k/2\epsilon_0 V)^{1/2} n_{k,1}^{1/2} \vec{d}_{mp} \cdot \vec{\epsilon}(k, 1) + (\hbar/2\epsilon_0 V\omega_k)^{1/2} n_{k,1}^{1/2} \hat{m}_{mp} \cdot \vec{k} \times \vec{\epsilon}(k, 1) \right\} / (E_{pm} + \hbar\omega)
\end{aligned} \tag{۷۹-۳}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
R_{k_2 k_1}^{(p)} = & \sum_m \sum_k \left\{ \left[(\hbar\omega_k/2\epsilon_0 V) n_{k,1}^{1/2} \vec{d}_{pm} \cdot \vec{\epsilon}(k, 1) \vec{d}_{mp} \cdot \vec{\epsilon}(k, 2) \right. \right. \\
& + (\hbar\omega_k/2\epsilon_0 V)^{1/2} (\hbar/2\epsilon_0 V\omega_k)^{1/2} n_{k,1}^{1/2} \vec{d}_{pm} \cdot \vec{\epsilon}(k, 1) \hat{m}_{mp} \cdot \vec{k} \times \vec{\epsilon}(k, 2) \\
& + (\hbar/2\epsilon_0 V\omega_k)^{1/2} (\hbar\omega_k/2\epsilon_0 V)^{1/2} n_{k,1}^{1/2} \hat{m}_{pm} \cdot \vec{k} \times \vec{\epsilon}(k, 1) \vec{d}_{mp} \cdot \vec{\epsilon}(k, 2) \\
& \left. \left. + (\hbar/2\epsilon_0 V\omega_k) n_{k,1}^{1/2} \hat{m}_{pm} \cdot \vec{k} \times \vec{\epsilon}(k, 1) \hat{m}_{mp} \cdot \vec{k} \times \vec{\epsilon}(k, 2) \right] / (E_{pm} - \hbar\omega) \right. \\
& + \left[(\hbar\omega_k/2\epsilon_0 V) n_{k,1}^{1/2} \vec{d}_{pm} \cdot \vec{\epsilon}(k, 2) \vec{d}_{mp} \cdot \vec{\epsilon}(k, 1) \right. \\
& + (\hbar\omega_k/2\epsilon_0 V)^{1/2} (\hbar/2\epsilon_0 V\omega_k)^{1/2} n_{k,1}^{1/2} \vec{d}_{pm} \cdot \vec{\epsilon}(k, 2) \hat{m}_{mp} \cdot \vec{k} \times \vec{\epsilon}(k, 1) \\
& + (\hbar/2\epsilon_0 V\omega_k)^{1/2} (\hbar\omega_k/2\epsilon_0 V)^{1/2} n_{k,1}^{1/2} \hat{m}_{pm} \cdot \vec{k} \times \vec{\epsilon}(k, 2) \vec{d}_{mp} \cdot \vec{\epsilon}(k, 1) \\
& \left. \left. + (\hbar/2\epsilon_0 V\omega_k) n_{k,1}^{1/2} \hat{m}_{pm} \cdot \vec{k} \times \vec{\epsilon}(k, 2) \hat{m}_{mp} \cdot \vec{k} \times \vec{\epsilon}(k, 1) \right] / (E_{pm} + \hbar\omega) \right\}
\end{aligned} \tag{۸۰-۳}$$

طبق خاصیت ضرب نقطه ای دو گانه، رابطه (۷۶. ۱) [۵]، جملات اول، چهارم، پنجم و هشتم

رابطه بالا صفر خواهد شد. به این ترتیب طبق روابط (۲-۳)، (۳-۳) و (۳۴-۳)، رابطه بالا

بصورت زیر ساده می شود:

$$R_{k_2 k_1}^{(p)} = \sum_k \left(|\vec{k}| n_{k,1}^{1/2} b_k^2 \omega_k / c^2 \right) \sum_m \left\{ \frac{-\vec{d}_{pm} \cdot \vec{\epsilon}(k, 1) \hat{m}_{mp} \cdot \vec{\epsilon}(k, 1) + \hat{m}_{pm} \cdot \vec{\epsilon}(k, 2) \vec{d}_{mp} \cdot \vec{\epsilon}(k, 2)}{E_{pm} - \hbar\omega} + \frac{\vec{d}_{pm} \cdot \vec{\epsilon}(k, 2) \hat{m}_{mp} \cdot \vec{\epsilon}(k, 2) - \hat{m}_{pm} \cdot \vec{\epsilon}(k, 1) \vec{d}_{mp} \cdot \vec{\epsilon}(k, 1)}{E_{pm} + \hbar\omega} \right\} \quad (81-3)$$

از طرف دیگر رابطه (81-3) را می توان با استفاده از تعریف ضرب نقطه ای دو گانه طبق رابطه (76. 1) [5] به شکل دیگری بیان نمود.

$$R_{k_2 k_1}^{(p)} = \sum_k (b_k \omega / c)^2 \left(n_{k,1}^{1/2} / c \right) \sum_m \left\{ \frac{\hat{m}_{pm} \vec{d}_{mp} \cdot \vec{\epsilon}(k, 1) \vec{\epsilon}(k, 1) - \vec{d}_{pm} \hat{m}_{mp} \cdot \vec{\epsilon}(k, 2) \vec{\epsilon}(k, 2)}{E_{pm} + \hbar\omega} - \frac{\hat{m}_{pm} \vec{d}_{mp} \cdot \vec{\epsilon}(k, 2) \vec{\epsilon}(k, 2) - \vec{d}_{pm} \hat{m}_{mp} \cdot \vec{\epsilon}(k, 1) \vec{\epsilon}(k, 1)}{E_{pm} - \hbar\omega} \right\} \quad (82-3)$$

طبق خاصیت جا به جایی ضرب نقطه ای دو گانه برای دو تانسور T_1 و T_2 یعنی

$$T_1 : T_2 = T_2 : T_1 \text{ داریم:}$$

$$R_{k_2 k_1}^{(p)} = \sum_k (b_k \omega / c)^2 \left(n_{k,1}^{1/2} / c \right) \sum_m \left\{ \frac{\vec{\epsilon}(k, 1) \vec{\epsilon}(k, 1) : \hat{m}_{pm} \vec{d}_{mp} - \vec{\epsilon}(k, 2) \vec{\epsilon}(k, 2) : \vec{d}_{pm} \hat{m}_{mp}}{E_{pm} + \hbar\omega} - \frac{\vec{\epsilon}(k, 2) \vec{\epsilon}(k, 2) : \hat{m}_{pm} \vec{d}_{mp} - \vec{\epsilon}(k, 1) \vec{\epsilon}(k, 1) : \vec{d}_{pm} \hat{m}_{mp}}{E_{pm} - \hbar\omega} \right\} \quad (83-3)$$

نشان می دهیم که در محلولی که مولکول ها به طور نامنظمی در تمام جهات قرار گرفته اند، میانگین های $\vec{\epsilon}(k, 1) \vec{\epsilon}(k, 1) : ab$ و $\vec{\epsilon}(k, 2) \vec{\epsilon}(k, 2) : ab$ را می توان برابر قرار داد. بنابراین در صورتی که $\vec{\epsilon}(k, 1)$ و $\vec{\epsilon}(k, 2)$ طبق روابط (19b-10.2) [6] بصورت زیر تعریف شود، داریم:

$$\vec{\epsilon}(k, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\cos \theta' \cos \varphi' - i \sin \varphi') \hat{i} + (\cos \theta' \sin \varphi' + i \cos \varphi') \hat{j} - \sin \theta' \hat{k}] \quad (84-3)$$

$$\vec{\epsilon}(k, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [(i \cos \theta' \cos \varphi' - \sin \varphi') \hat{i} + (i \cos \theta' \sin \varphi' + \cos \varphi') \hat{j} - i \sin \theta' \hat{k}] \quad (۸۵-۳)$$

$$\overline{\vec{\epsilon}(k, 1) \vec{\epsilon}(k, 1)} =$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \overline{(\cos \theta' \cos \varphi' - i \sin \varphi')^2} & \overline{(\cos \theta' \cos \varphi' - i \sin \varphi')(i \cos \theta' \sin \varphi' + i \cos \varphi')} & \overline{-\sin \theta' (\cos \theta' \cos \varphi' - i \sin \varphi')} \\ \overline{(\cos \theta' \sin \varphi' + i \cos \varphi')(\cos \theta' \cos \varphi' - i \sin \varphi')} & \overline{(\cos \theta' \sin \varphi' + i \cos \varphi')^2} & \overline{-\sin \theta' (i \cos \theta' \sin \varphi' + i \cos \varphi')} \\ \overline{-\sin \theta' (\cos \theta' \cos \varphi' - i \sin \varphi')} & \overline{-\sin \theta' (i \cos \theta' \sin \varphi' + i \cos \varphi')} & \overline{\sin^2 \theta'} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (\cos \theta' \cos \varphi' - i \sin \varphi')^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta' d\theta' d\varphi'} & \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (\cos \theta' \cos \varphi' - i \sin \varphi')(i \cos \theta' \sin \varphi' + i \cos \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta' d\theta' d\varphi'} & \frac{-\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta' (\cos \theta' \cos \varphi' - i \sin \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta' d\theta' d\varphi'} \\ \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (\cos \theta' \sin \varphi' + i \cos \varphi')(\cos \theta' \cos \varphi' - i \sin \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta' d\theta' d\varphi'} & \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (\cos \theta' \sin \varphi' + i \cos \varphi')^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta' d\theta' d\varphi'} & \frac{-\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta' (i \cos \theta' \sin \varphi' + i \cos \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta' d\theta' d\varphi'} \\ \frac{-\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta' (\cos \theta' \cos \varphi' - i \sin \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta' d\theta' d\varphi'} & \frac{-\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta' (i \cos \theta' \sin \varphi' + i \cos \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta' d\theta' d\varphi'} & \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \theta' \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta' d\theta' d\varphi'} \end{pmatrix}$$

$$\overline{\vec{\epsilon}(k, 1) \vec{\epsilon}(k, 1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \mathbf{I} \quad (۸۶-۳)$$

همچنین بطور مشابه داریم:

$$\overline{\vec{\epsilon}(k, 2) \vec{\epsilon}(k, 2)} =$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \overline{(i \cos \theta' \cos \varphi' - \sin \varphi')^2} & \overline{(i \cos \theta' \cos \varphi' - \sin \varphi')(i \cos \theta' \sin \varphi' + \cos \varphi')} & \overline{-i \sin \theta' (i \cos \theta' \cos \varphi' - \sin \varphi')} \\ \overline{(i \cos \theta' \sin \varphi' + \cos \varphi')(i \cos \theta' \cos \varphi' - \sin \varphi')} & \overline{(i \cos \theta' \sin \varphi' + \cos \varphi')^2} & \overline{-i \sin \theta' (i \cos \theta' \sin \varphi' + \cos \varphi')} \\ \overline{-i \sin \theta' (i \cos \theta' \cos \varphi' - \sin \varphi')} & \overline{-i \sin \theta' (i \cos \theta' \sin \varphi' + \cos \varphi')} & \overline{\sin^2 \theta'} \end{pmatrix}$$

$$\overline{\vec{\epsilon}(k, 2) \vec{\epsilon}(k, 2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \mathbf{I} \quad (۸۷-۳)$$

بنابراین با استفاده از ویژگی برابری میانگین های ab $\vec{\epsilon}(k, 1)\vec{\epsilon}(k, 1)$ و $\vec{\epsilon}(k, 2)\vec{\epsilon}(k, 2)$ ، رابطه (۸۳-۳) را بازنویسی می کنیم:

$$R_{k2k1}^{(p)} = \sum_k (b_k \omega / c)^2 \left(n_{k,1}^{1/2} / c \right) \sum_m \left\{ \frac{\vec{\epsilon}(k, 1)\vec{\epsilon}(k, 1) : \hat{m}_{pm} \vec{d}_{mp} - \vec{\epsilon}(k, 1)\vec{\epsilon}(k, 1) : \vec{d}_{pm} \hat{m}_{mp}}{E_{pm} + \hbar\omega} \right. \\ \left. - \frac{\vec{\epsilon}(k, 1)\vec{\epsilon}(k, 1) : \hat{m}_{pm} \vec{d}_{mp} - \vec{\epsilon}(k, 1)\vec{\epsilon}(k, 1) : \vec{d}_{pm} \hat{m}_{mp}}{E_{pm} - \hbar\omega} \right\}$$

$$R_{k2k1}^{(p)} = \sum_k (b_k \omega / c)^2 \left(n_{k,1}^{1/2} / c \right) \vec{\epsilon}(k, 1)\vec{\epsilon}(k, 1) : \sum_m \left\{ \frac{\hat{m}_{pm} \vec{d}_{mp} - \vec{d}_{pm} \hat{m}_{mp}}{E_{pm} + \hbar\omega} \right. \\ \left. - \frac{\hat{m}_{pm} \vec{d}_{mp} - \vec{d}_{pm} \hat{m}_{mp}}{E_{pm} - \hbar\omega} \right\} \quad (88-3)$$

به علت هرمیتی بودن ممان دو قطبی الکتریکی و مغناطیسی نیز داریم:

$$R_{k2k1}^{(p)} = \sum_k (b_k \omega / c)^2 \left(n_{k,1}^{1/2} / c \right) \vec{\epsilon}(k, 1)\vec{\epsilon}(k, 1) : \sum_m \left\{ \frac{\hat{m}_{pm} \vec{d}_{pm}^* - \vec{d}_{pm} \hat{m}_{pm}^*}{E_{pm} + \hbar\omega} \right. \\ \left. - \frac{\hat{m}_{pm} \vec{d}_{pm}^* - \vec{d}_{pm} \hat{m}_{pm}^*}{E_{pm} - \hbar\omega} \right\}$$

$$R_{k2k1}^{(p)} = \sum_k (b_k \omega / c)^2 \left(n_{k,1}^{1/2} / c \right) \vec{\epsilon}(k, 1)\vec{\epsilon}(k, 1) :$$

$$\sum_m \left\{ \frac{(E_{pm} - \hbar\omega) \hat{m}_{pm} \vec{d}_{pm}^* - (E_{pm} - \hbar\omega) \vec{d}_{pm} \hat{m}_{pm}^* - (E_{pm} + \hbar\omega) \hat{m}_{pm} \vec{d}_{pm}^* + (E_{pm} + \hbar\omega) \vec{d}_{pm} \hat{m}_{pm}^*}{E_{pm}^2 - \hbar^2 \omega^2} \right\}$$

$$R_{k2k1}^{(p)} = \sum_k (b_k \omega / c)^2 \left(n_{k,1}^{1/2} / c \right) \vec{\epsilon}(k, 1)\vec{\epsilon}(k, 1) :$$

$$\sum_m \left\{ \frac{\hat{m}_{pm} \vec{d}_{pm}^* (E_{pm} - \hbar\omega - E_{pm} - \hbar\omega) - \vec{d}_{pm} \hat{m}_{pm}^* (E_{pm} - \hbar\omega - E_{pm} - \hbar\omega)}{E_{pm}^2 - \hbar^2 \omega^2} \right\}$$

$$R_{k_2 k_1}^{(p)} = \sum_k 2\hbar\omega (b_k \omega/c)^2 (n_{k,1}^{1/2}/c) \vec{\epsilon}(k, 1) \vec{\epsilon}(k, 1) : \sum_m \left\{ \frac{\vec{d}_{pm} \hat{m}_{pm}^* - \hat{m}_{pm} \vec{d}_{pm}^*}{E_{pm}^2 - \hbar^2 \omega^2} \right\} \quad (۸۹-۳)$$

برای محاسبه قسمت موهومی عنصر $R_{k_2 k_1}^{(p)}$ جهت محاسبه چرخش اپتیکی، براساس تعریف قسمت موهومی یک عملگر خطی بصورت زیر خواهیم داشت:

$$\mathcal{Im} \left[\vec{\epsilon}(k, 1) \vec{\epsilon}(k, 1) : \sum_m \left\{ \vec{d}_{pm} \hat{m}_{pm}^* \right\} \right] \doteq \frac{1}{2i} \vec{\epsilon}(k, 1) \vec{\epsilon}(k, 1) : \sum_m \left\{ \vec{d}_{pm} \hat{m}_{pm}^* - \hat{m}_{pm} \vec{d}_{pm}^* \right\} \quad (۹۰-۳)$$

به این ترتیب طبق تعریف (۹۰-۳) و خاصیت هرمیتی بودن عملگرها رابطه (۸۹-۳) را میتوان به صورت زیر بیان کرد:

$$R_{k_2 k_1}^{(p)} = \sum_k 4i\hbar\omega (b_k \omega/c)^2 (n_{k,1}^{1/2}/c) \mathcal{Im} \left[\vec{\epsilon}(k, 1) \vec{\epsilon}(k, 1) : \sum_m \left\{ \frac{\vec{d}_{pm} \hat{m}_{mp}}{E_{pm}^2 - \hbar^2 \omega^2} \right\} \right] \quad (۹۱-۳)$$

اکنون با جایگذاری روابط (۳۴-۳) و (۸۶-۳)، رابطه بالا خواهد شد:

$$\begin{aligned} R_{k_2 k_1}^{(p)} &= \sum_k 4i\hbar\omega (\hbar c^2/2\epsilon_0 V \omega) (\omega/c)^2 (n_{k,1}^{1/2}/3c) \sum_m \left\{ \frac{\mathcal{Im}[\vec{d}_{pm} \hat{m}_{mp}]}{E_{pm}^2 - \hbar^2 \omega^2} \right\} \\ &= i \sum_k \left(2\hbar^2 \omega^2 n_{k,1}^{1/2}/3\epsilon_0 V c \right) \sum_m \left\{ \frac{\mathcal{Im}[\vec{d}_{pm} \hat{m}_{mp}]}{E_{pm}^2 - \hbar^2 \omega^2} \right\} \end{aligned} \quad (۹۲-۳)$$

چرخش اپتیکی θ با جایگذاری رابطه بالا در رابطه (۷۵-۳) حاصل می شود.

$$\begin{aligned}
\tan \theta \approx \theta &\approx \sum_k \left(L / \hbar c n_{k,1}^{1/2} \right) \left(2 \hbar^2 \omega^2 n_{k,1}^{1/2} / 3 \epsilon_0 V c \right) \sum_m \left\{ \frac{\mathcal{J}_m[\vec{d}_{pm} \hat{m}_{mp}]}{E_{pm}^2 - \hbar^2 \omega^2} \right\} \\
&\approx \sum_k (2L \hbar \omega^2 / 3 \epsilon_0 V c^2) \sum_m \left\{ \frac{\mathcal{J}_m[\vec{d}_{pm} \hat{m}_{mp}]}{E_{pm}^2 - \hbar^2 \omega^2} \right\}
\end{aligned}$$

(93-3)

فصل چهارم

حالت های اتمی جمعی و متغیرهای دینامیکی جمعی

۴-۱. اثرات جمعی

در این فصل به مرور پدیده های اپتیکی وابسته به اثرات اتمی جمعی^۹ پرداخته می شود [۶]. مجموعه ای از N اتم دو ترازوی یکسان در نظر می گیریم. از آنجایی که اتم ها تمیز پذیرند، تمام متغیرهای دینامیکی مرتبط با اتم های مختلف در یک زمان با هم جا به جا می شوند. به همین منظور برای توصیف سیستم، مناسب است که عملگرهای اسپین اتمی جمعی معرفی گردد [۶].

در صورتی که $\hat{R}_1^{(j)}, \hat{R}_2^{(j)}, \hat{R}_3^{(j)}$ ($j=1,2,\dots,N$) معرف عملگرهای اسپینی برای N اتم دو ترازوی یکسان باشند، آنگاه می توان عملگرهای اسپینی یک سیستم اتمی جمعی را به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned}\bar{R}_1 &\equiv \sum_{j=1}^N \hat{R}_1^{(j)} \\ \bar{R}_2 &\equiv \sum_{j=1}^N \hat{R}_2^{(j)} \\ \bar{R}_3 &\equiv \sum_{j=1}^N \hat{R}_3^{(j)}\end{aligned}\tag{۱-۴}$$

همچنین در صورتی که $\hat{b}^{(j)} = |1_j\rangle\langle 2_j|$ و $\hat{b}^{(j)\dagger} = |2_j\rangle\langle 1_j|$ معرف عملگرهای بالا برنده و پایین برنده برای N اتم دو ترازوی یکسان با حالت های $|1_j\rangle$ و $|2_j\rangle$ باشند، آنگاه عملگرهای بالا برنده و پایین برنده سیستم اتمی جمعی عبارتند از:

^۹ Cooperative atomic effects

$$\begin{aligned}\hat{R}^+ &\equiv \sum_{j=1}^N \hat{b}^{(j)\dagger} = \hat{R}_1 + i\hat{R}_2 \\ \hat{R}^- &\equiv \sum_{j=1}^N \hat{b}^{(j)} = \hat{R}_1 - i\hat{R}_2\end{aligned}\tag{۲-۴}$$

سپس با استفاده از رابطه $[\hat{R}_l^{(j)}, \hat{R}_m^{(j)}] = i\epsilon_{lmn} \hat{R}_n^{(j)}$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}[\hat{R}_l, \hat{R}_m] &= \left[\sum_{j=1}^N \hat{R}_l^{(j)}, \sum_{k=1}^N \hat{R}_m^{(k)} \right] = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N [\hat{R}_l^{(j)}, \hat{R}_m^{(k)}] = \sum_{j=1}^N [\hat{R}_l^{(j)}, \hat{R}_m^{(j)}] \\ [\hat{R}_1, \hat{R}_m] &= \sum_{j=1}^N i\epsilon_{lmn} \hat{R}_n^{(j)} = i\epsilon_{lmn} \hat{R}_n\end{aligned}\tag{۳-۴}$$

در اینجا $l, m, n = 1, 2, 3$

برای عملگرهای بالا برنده و پایین برنده اسپینی داریم:

$$\begin{aligned}[\hat{R}^+, \hat{R}^-] &= [\hat{R}_1 + i\hat{R}_2, \hat{R}_1 - i\hat{R}_2] \\ [\hat{R}^+, \hat{R}^-] &= [\hat{R}_1, \hat{R}_1] + i[\hat{R}_2, \hat{R}_1] - i[\hat{R}_1, \hat{R}_2] + [\hat{R}_2, \hat{R}_2]\end{aligned}$$

بنابراین طبق رابطه (۳-۴) داریم

$$[\hat{R}^+, \hat{R}^-] = 0 + \hat{R}_3 + \hat{R}_3 + 0 = 2\hat{R}_3\tag{۴-۴}$$

به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$[\hat{R}_3, \hat{R}^\pm] = [\hat{R}_3, \hat{R}_1 \pm i\hat{R}_2] = [\hat{R}_3, \hat{R}_1] \pm i[\hat{R}_3, \hat{R}_2]$$

براساس رابطه (۳-۴) داریم

$$[\hat{R}_3, \hat{R}^\pm] = i\hat{R}_2 \pm \hat{R}_1 = \pm(\hat{R}_1 \pm i\hat{R}_2) = \pm\hat{R}^\pm\tag{۵-۴}$$

حال فرض کنید هر یک از N اتم در حالت $|1\rangle$ قرار گرفته اند. به این ترتیب حالت سیستم به صورت حالت حاصلضربی زیر نمایش داده می شود.

$$|\{1\}\rangle \equiv \prod_{j=1}^N |1_j\rangle \quad (6-4)$$

سپس با اثر عملگر اسپین بالا برنده روی حالت سیستم خواهیم داشت:

$$\hat{R}^+|\{1\}\rangle \equiv \prod_{j=1}^N \hat{R}^+|1_j\rangle = \prod_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \hat{b}^{(k)\dagger} |1_j\rangle$$

در اینجا عملگر $\hat{b}^{(k)\dagger}$ فقط روی حالت $|1_k\rangle$ اثر کرده و روی حالت های دیگر بی تأثیر است.

بنابراین

$$\hat{R}^+|\{1\}\rangle = \sum_{k=1}^N |2_k\rangle \prod_{j \neq k} |1_j\rangle \quad (7-4)$$

که یک حالت برهم نهی است که در آن یک برانگیختگی با وزن مساوی بین اتم ها توزیع می گردد.

علاوه بر عملگرهای جمعی \hat{R}_1 و \hat{R}_2 و \hat{R}_3 ، عملگر \hat{R}^2 به صورت زیر تعریف می شود:

$$\hat{R}^2 \equiv \hat{R}_1^2 + \hat{R}_2^2 + \hat{R}_3^2 = \frac{3}{4}N + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \left\{ \hat{R}_1^{(j)} \hat{R}_1^{(k)} + \hat{R}_2^{(j)} \hat{R}_2^{(k)} + \hat{R}_3^{(j)} \hat{R}_3^{(k)} \right\} \quad (8-4)$$

برحسب اپراتورهای $\hat{b}^{(j)}$ و $\hat{b}^{(j)\dagger}$ که بر حالت های $|1_j\rangle$ و $|2_j\rangle$ اتم j -ام اثر می کنند داریم:

$$\hat{R}_1^{(j)} = \frac{1}{2} (\hat{b}^{(j)\dagger} + \hat{b}^{(j)})$$

$$\hat{R}_2^{(j)} = \frac{1}{2i}(\hat{b}^{(j)\dagger} - \hat{b}^{(j)})$$

(۹-۴)

$$\hat{R}_3^{(j)} = \frac{1}{2}(\hat{b}^{(j)\dagger}\hat{b}^{(j)} - \hat{b}^{(j)}\hat{b}^{(j)\dagger})$$

در اینصورت

$$\hat{R}^2 = \frac{3}{4}N + \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^N \left\{ \frac{1}{4}(\hat{b}^{(j)\dagger} + \hat{b}^{(j)})(\hat{b}^{(k)\dagger} + \hat{b}^{(k)}) - \frac{1}{4}(\hat{b}^{(j)\dagger} - \hat{b}^{(j)})(\hat{b}^{(k)\dagger} - \hat{b}^{(k)}) + \hat{R}_3^{(j)}\hat{R}_3^{(k)} \right\}$$

$$\hat{R}^2 = \frac{3}{4}N + \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^N \left\{ \frac{1}{4}(\hat{b}^{(j)\dagger}\hat{b}^{(k)\dagger} + \hat{b}^{(j)\dagger}\hat{b}^{(k)} + \hat{b}^{(j)}\hat{b}^{(k)\dagger} + \hat{b}^{(j)}\hat{b}^{(k)}) \right. \\ \left. - \frac{1}{4}(\hat{b}^{(j)\dagger}\hat{b}^{(k)\dagger} - \hat{b}^{(j)\dagger}\hat{b}^{(k)} - \hat{b}^{(j)}\hat{b}^{(k)\dagger} + \hat{b}^{(j)}\hat{b}^{(k)}) + \hat{R}_3^{(j)}\hat{R}_3^{(k)} \right\}$$

$$\hat{R}^2 = \frac{3}{4}N + \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^N \left\{ \frac{1}{2}(\hat{b}^{(j)\dagger}\hat{b}^{(k)} + \hat{b}^{(j)}\hat{b}^{(k)\dagger}) + \hat{R}_3^{(j)}\hat{R}_3^{(k)} \right\}$$

براساس رابطه جا به جایی $[\hat{b}^{(j)}, \hat{b}^{(k)\dagger}] = 0$ برای $j \neq k$ می توان نوشت:

$$\hat{R}^2 = \frac{3}{4}N + \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^N \left\{ \frac{1}{2}(\hat{b}^{(j)}\hat{b}^{(k)\dagger} + \hat{b}^{(j)}\hat{b}^{(k)\dagger}) + \hat{R}_3^{(j)}\hat{R}_3^{(k)} \right\}$$

$$= \frac{3}{4}N + \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^N \left\{ \hat{b}^{(j)}\hat{b}^{(k)\dagger} + \hat{R}_3^{(j)}\hat{R}_3^{(k)} \right\}$$

و برای اینکه به حضور جمله $\frac{3}{4}N$ پی ببریم جملات $j=k$ را که در جمع بندی های رابطه

(۸-۴) حضور ندارند، در نظر می گیریم

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{1}{2} (\hat{b}^{(j)\dagger} \hat{b}^{(j)} + \hat{b}^{(j)} \hat{b}^{(j)\dagger}) + \frac{1}{4} (\hat{b}^{(j)\dagger} \hat{b}^{(j)} - \hat{b}^{(j)} \hat{b}^{(j)\dagger}) (\hat{b}^{(j)\dagger} \hat{b}^{(j)} - \hat{b}^{(j)} \hat{b}^{(j)\dagger}) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{1}{2} (\hat{b}^{(j)\dagger} \hat{b}^{(j)} + \hat{b}^{(j)} \hat{b}^{(j)\dagger}) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4} (\hat{b}^{(j)\dagger} \hat{b}^{(j)} \hat{b}^{(j)\dagger} \hat{b}^{(j)} + \hat{b}^{(j)} \hat{b}^{(j)\dagger} \hat{b}^{(j)} \hat{b}^{(j)\dagger} - \hat{b}^{(j)\dagger} \hat{b}^{(j)} \hat{b}^{(j)\dagger} \hat{b}^{(j)} \right. \\ & \quad \left. - \hat{b}^{(j)} \hat{b}^{(j)\dagger} \hat{b}^{(j)} \hat{b}^{(j)\dagger}) \right\} \end{aligned}$$

اما بر حسب حالت‌های $|1_j\rangle$ و $|2_j\rangle$ اتم j -ام داریم: $\hat{b}^{(j)\dagger} = |2_j\rangle\langle 1_j|$ و $\hat{b}^{(j)} = |1_j\rangle\langle 2_j|$

پس عبارت بالا برابر است با

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{1}{2} (\hat{b}^{(j)\dagger} \hat{b}^{(j)} + \hat{b}^{(j)} \hat{b}^{(j)\dagger}) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4} (|2_j\rangle\langle 2_j|2_j\rangle\langle 2_j| + |1_j\rangle\langle 1_j|1_j\rangle\langle 1_j| - |2_j\rangle\langle 2_j|1_j\rangle\langle 1_j| - |1_j\rangle\langle 1_j|2_j\rangle\langle 2_j|) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{1}{2} (\hat{b}^{(j)\dagger} \hat{b}^{(j)} + \hat{b}^{(j)} \hat{b}^{(j)\dagger}) + \frac{1}{4} (\hat{b}^{(j)\dagger} \hat{b}^{(j)} + \hat{b}^{(j)} \hat{b}^{(j)\dagger}) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{3}{4} (\hat{b}^{(j)\dagger} \hat{b}^{(j)} + \hat{b}^{(j)} \hat{b}^{(j)\dagger}) \right\} = \frac{3}{4} N \end{aligned}$$

مجددا یادآوری می‌کنیم که

$$\hat{R}^2 = \frac{3}{4} N + \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^N \left\{ \hat{b}^{(j)} \hat{b}^{(k)\dagger} + \hat{R}_3^{(j)} \hat{R}_3^{(k)} \right\} \quad (10-4)$$

با استفاده از ویژگی‌های جابه‌جاگرها می‌توان نوشت:

$$[\hat{R}_1, \hat{R}^2] = [\hat{R}_1, \hat{R}_1^2 + \hat{R}_2^2 + \hat{R}_3^2] = [\hat{R}_1, \hat{R}_1^2] + [\hat{R}_1, \hat{R}_2^2] + [\hat{R}_1, \hat{R}_3^2]$$

$$[\hat{R}_1, \hat{R}^2] = \hat{R}_2 [\hat{R}_1, \hat{R}_2] + [\hat{R}_1, \hat{R}_2] \hat{R}_2 + \hat{R}_3 [\hat{R}_1, \hat{R}_3] + [\hat{R}_1, \hat{R}_3] \hat{R}_3$$

حال طبق رابطه (۳-۴) داریم

$$[\hat{R}_1, \hat{R}^2] = i\hat{R}_2\hat{R}_3 + i\hat{R}_3\hat{R}_2 - i\hat{R}_3\hat{R}_2 - i\hat{R}_2\hat{R}_3 = 0 \quad (11-4)$$

به همین ترتیب داریم

$$\begin{aligned} [\hat{R}_2, \hat{R}^2] &= [\hat{R}_2, \hat{R}_1^2 + \hat{R}_2^2 + \hat{R}_3^2] = [\hat{R}_2, \hat{R}_1^2] + [\hat{R}_2, \hat{R}_2^2] + [\hat{R}_2, \hat{R}_3^2] \\ [\hat{R}_2, \hat{R}^2] &= \hat{R}_1[\hat{R}_2, \hat{R}_1] + [\hat{R}_2, \hat{R}_1]\hat{R}_1 + \hat{R}_3[\hat{R}_2, \hat{R}_3] + [\hat{R}_2, \hat{R}_3]\hat{R}_3 \\ [\hat{R}_2, \hat{R}^2] &= -i\hat{R}_1\hat{R}_3 - i\hat{R}_3\hat{R}_1 + i\hat{R}_3\hat{R}_1 + i\hat{R}_1\hat{R}_3 = 0 \end{aligned} \quad (12-4)$$

$$\begin{aligned} [\hat{R}_3, \hat{R}^2] &= [\hat{R}_3, \hat{R}_1^2 + \hat{R}_2^2 + \hat{R}_3^2] = [\hat{R}_3, \hat{R}_1^2] + [\hat{R}_3, \hat{R}_2^2] + [\hat{R}_3, \hat{R}_3^2] \\ [\hat{R}_3, \hat{R}^2] &= \hat{R}_1[\hat{R}_3, \hat{R}_1] + [\hat{R}_3, \hat{R}_1]\hat{R}_1 + \hat{R}_2[\hat{R}_3, \hat{R}_2] + [\hat{R}_3, \hat{R}_2]\hat{R}_2 \\ [\hat{R}_3, \hat{R}^2] &= i\hat{R}_1\hat{R}_2 + i\hat{R}_2\hat{R}_1 - i\hat{R}_2\hat{R}_1 - i\hat{R}_1\hat{R}_2 = 0 \end{aligned} \quad (13-4)$$

بنابراین

$$[\hat{R}_l, \hat{R}^2] = 0, \quad l = 1, 2, 3 \quad (14-4)$$

قبل از بررسی سیستم N اتمی، عملگرهای مربوط به یک اتم منفرد را معرفی می کنیم. هامیلتونی اتم منفرد را می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \hat{H}_A &= \sum_{i=1}^2 \hbar\omega_i |i\rangle\langle i| = \left(E_0 - \frac{1}{2}\hbar\omega_0\right) |1\rangle\langle 1| + \left(E_0 + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\right) |2\rangle\langle 2| \\ \hat{H}_A &= E_0(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) + \frac{1}{2}\hbar\omega_0(|2\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 1|) \\ &= E_0 + \frac{1}{2}\hbar\omega_0(|2\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 1|) \end{aligned} \quad (15-4)$$

مبدأ انرژی را می توان دلخواه تغییر داد. ما $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$ می گیریم در اینصورت برای اتم منفرد داریم

$$\hat{H}_A = \hbar\omega_0 \left(\frac{1}{2} \hat{1} + \hat{R}_3 \right) \quad (16-4)$$

ممان دو قطبی یک اتم منفرد عبارت است از:

$$\hat{\mu} = (|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) \hat{\mu} (|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|)$$

$$\hat{\mu} = |1\rangle\langle 1| \hat{\mu} |1\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 1| \hat{\mu} |2\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 2| \hat{\mu} |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| \hat{\mu} |2\rangle\langle 2|$$

$$= \hat{\mu}_{11} |1\rangle\langle 1| + \hat{\mu}_{12} |1\rangle\langle 2| + \hat{\mu}_{21} |2\rangle\langle 1| + \hat{\mu}_{22} |2\rangle\langle 2|$$

و برحسب اپراتورهای $\hat{b} = |1\rangle\langle 2|$ و $\hat{b}^\dagger = |2\rangle\langle 1|$ داریم:

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_{11} \hat{b} \hat{b}^\dagger + \hat{\mu}_{12} \hat{b} + \hat{\mu}_{21} \hat{b}^\dagger + \hat{\mu}_{22} \hat{b}^\dagger \hat{b}$$

ممان دو قطبی، $\hat{\mu}$ دارای پارته فرد می باشد. پس عناصر ماتریسی آن بین حالت‌هایی با پارته

یکسان صفر خواهند شد، یعنی $\hat{\mu}_{11} = \hat{\mu}_{22} = 0$

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_{12} \hat{b} + \hat{\mu}_{21} \hat{b}^\dagger = \hat{\mu}_{12} \hat{b} + \hat{\mu}_{12}^* \hat{b}^\dagger \quad (17-4)$$

در صورتی که $\hat{\mu}_{12}$ مختلط باشد، با استفاده از روابط (۲-۴) می توان نوشت:

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_{12} (\hat{R}_1 - i\hat{R}_2) + \hat{\mu}_{12}^* (\hat{R}_1 + i\hat{R}_2) \quad (18-4)$$

$$\hat{\mu} = (\hat{\mu}_{12} + \hat{\mu}_{12}^*) \hat{R}_1 + i(\hat{\mu}_{12}^* - \hat{\mu}_{12}) \hat{R}_2$$

به این ترتیب با معرفی نمادهای زیر می توان ممان دو قطبی کل را بازنویسی نمود.

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{R}e(\hat{\mu}_{12}) &:= \frac{1}{2} (\hat{\mu}_{12} + \hat{\mu}_{12}^*) \\ \mathcal{I}m(\hat{\mu}_{12}) &:= \frac{1}{2i} (\hat{\mu}_{12} - \hat{\mu}_{12}^*) \end{aligned} \right\} \quad (19-4)$$

$$\hat{\mu} = 2 \mathcal{R}e(\hat{\mu}_{12}) \hat{R}_1 + 2 \mathcal{I}m(\hat{\mu}_{12}) \hat{R}_2 \quad (20-4)$$

همچنین براساس روابط (۲-۴) و (۱۸-۴) می توان ممان دو قطبی را به صورت زیر بیان کرد:

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_{12} \hat{R}^- + \hat{\mu}_{12}^* \hat{R}^+ \quad (21-4)$$

۴-۱-۱. حالت های دیکی [۶]

یک سیستم N اتمی در نظر بگیرید. اگر N_1 اتم از N اتم در حالت $|1\rangle$ و N_2 اتم از این N اتم در حالت $|2\rangle$ قرار گیرند، آنگاه واضح است که

$$N = N_1 + N_2 \quad (22-4)$$

کمیتی مانند m را می توان تعریف نمود به گونه ای که

$$m \equiv \frac{1}{2}(N_2 - N_1) \quad (23-4)$$

یا به عبارت دیگر می توان نوشت:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2}N - m \\ N_2 &= \frac{1}{2}N + m \end{aligned} \right\} \quad (24-4)$$

m را می توان میزان وارونگی اتمی کل نامید. m می تواند مقادیر صحیح و یا مقادیر نیمه صحیح را به خود گیرد.

$|\Phi\rangle$ ، حالت کل سیستم شامل N_1 اتم در حالت $|1\rangle$ و N_2 اتم در حالت $|2\rangle$ به صورت زیر

تعریف می شود:

$$|\Phi\rangle = |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle |1_4\rangle \dots \dots |2_N\rangle \quad (25-4)$$

طبق روابط (۴-۹) اثر \hat{R}_3 روی حالت $|\Phi\rangle$ عبارت است از

$$\widehat{R}_3 = \sum_{j=1}^N \widehat{R}_3^{(j)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N (\widehat{b}^{(j)\dagger} \widehat{b}^{(j)} - \widehat{b}^{(j)} \widehat{b}^{(j)\dagger}) |\Phi\rangle$$

$$\widehat{R}_3 |\Phi\rangle = \frac{1}{2} (N_2 - N_1) |\Phi\rangle = m |\Phi\rangle \quad (26-4)$$

چون N_1 عدد از N اتم در حالت $|1\rangle$ و N_2 عدد از اتمها در حالت $|2\rangle$ هستند، ویژه مقدار m دارای تبهگنی می باشد. این تبهگنی برابر است با:

$$d_m = \frac{N!}{N_1! N_2!} = \frac{N!}{\left(\frac{1}{2}N - m\right)! \left(\frac{1}{2}N + m\right)!} \quad (27-4)$$

به ازای $m = \pm \frac{1}{2}N$ هیچ تبهگنی وجود ندارد. در این حالت $m = \pm \frac{1}{2}N$ همه اتم ها برانگیخته و یا همه اتم ها در حالت پایه می باشند. همچنین به ازای $m=0$ بیشترین تبهگنی را خواهیم داشت.

حالت هایی را که معرفی کرده ایم ویژه بردار \widehat{R}_3 هستند و با ویژه مقدار متناظر، برچسب زده شده اند. به همین خاطر ویژه حالت ها تبهگن به نظر می رسند. تبهگنی ویژه بردار را می توان اساسا کاهش داد اگر از عملگر دومی هم برای برچسب زدن حالت ها استفاده کنیم. حالت هایی که از رابطه (26-4) پیروی می کنند، ویژه حالات \widehat{R}^2 نیز هستند. طبق رابطه (4-14) دو عملگر \widehat{R}_3 و \widehat{R}^2 با هم جابه جا می شوند، پس این دو عملگر، ویژه حالات همزمان دارند. اگر $|l, m\rangle$ ویژه حالت همزمان \widehat{R}_3 و \widehat{R}^2 باشد خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{R}^2 |l, m\rangle &= l(l+1) |l, m\rangle \\ \widehat{R}_3 |l, m\rangle &= m |l, m\rangle \end{aligned} \right\} \quad (28-4)$$

تاکید می کنیم که ویژه مقدار \widehat{R}^2 در حالت $|l, m\rangle$ برابر $l(l+1)$ فرض شده است. طبق تعریف (۴-۱۰) برای \widehat{R}^2 و شباهت آشکاری که بین عملگرهای \widehat{R}_l ($l = 1, 2, 3$) و اندازه حرکت زاویه ای وجود دارد، می توان وجود قیدی بر l را اثبات کرد

$$|m| \leq l \leq \frac{1}{2}N \quad (۲۹-۴)$$

l می تواند هم مقادیر صحیح و هم مقادیر نیمه صحیح بگیرد.

دیکی^{۱۰} برای اولین بار حالت های $|l, m\rangle$ را در ارتباط با تابش N اتم که به وسیله میدان الکترومغناطیسی جفت شده اند، مطرح کرد [۱۳]. دیکی عدد l را عدد جمعی نامید که در تعیین نرخ تابش جمعی توسط سیستم اتمی نقش مهمی را دارا است.

طبق رابطه جابه جایی (۴-۵) داریم $\widehat{R}_3 \widehat{R}_3^\pm - \widehat{R}^\pm \widehat{R}_3 = \pm \widehat{R}^\pm$ اگر عملگر $\widehat{R}_3 \widehat{R}_3^\pm$ روی حالت دیکی $|l, m\rangle$ اثر داده شود خواهیم داشت:

$$\widehat{R}_3 \widehat{R}_3^\pm |l, m\rangle = (\widehat{R}^\pm \widehat{R}_3 \pm \widehat{R}^\pm) |l, m\rangle = \widehat{R}^\pm (\widehat{R}_3 \pm 1) |l, m\rangle$$

بنابراین طبق رابطه (۴-۲۸) خواهیم داشت:

$$\widehat{R}_3 \widehat{R}_3^\pm |l, m\rangle = (m \pm 1) \widehat{R}^\pm |l, m\rangle \quad (۳۰-۴)$$

این یعنی $\widehat{R}^\pm |l, m\rangle$ ویژه حالت \widehat{R}_3 است با ویژه مقدار $m \pm 1$. مشابه با ویژگی عملگرهای تکانه زاویه ای (روابط (۳.۵.۳۹) و (۳.۵.۴۰) مرجع [۲]) می توان در نهایت اثبات کرد که

$$\left. \begin{aligned} \widehat{R}^- |l, m\rangle &= \sqrt{(l+m)(l-m+1)} |l, m-1\rangle \\ \widehat{R}^+ |l, m\rangle &= \sqrt{(l-m)(l+m+1)} |l, m+1\rangle \end{aligned} \right\} \quad (۳۱-۴)$$

¹⁰ Dicke

بر هم کنش بین سیستم اتمی و میدان از طریق ممان دو قطبی جمعی $\hat{\mu}$ است. $\hat{\mu}$ طبق رابطه (۲۱-۴) بر حسب عملگرهای بالا برنده و پایین برنده \hat{R}^+ و \hat{R}^- بیان می شود. به این ترتیب هر بر هم کنش دو قطبی با سیستم اتمی در حالت دیکی بایستی از قواعد انتخاب زیر تبعیت نماید.

$$\begin{aligned} \Delta m &= \pm 1 \\ \Delta l &= 0 \end{aligned} \quad (۳۲-۴)$$

حالت پایه سیستم اتمی توسط $|l, -l\rangle$ نمایش داده می شود. می توان با تاثیر مکرر عملگر بالا برنده جمعی \hat{R}^+ روی $|l, -l\rangle$ به حالت های برانگیخته دیکی $|l, m\rangle$ با $m > -l$ دست یافت. به این ترتیب طبق رابطه (۳۱-۴) داریم:

$$\begin{aligned} \hat{R}^+ |l, -l\rangle &= \sqrt{2l} |l, -l+1\rangle \\ \hat{R}^+ |l, -l+1\rangle &= \sqrt{2(2l-1)} |l, -l+2\rangle \\ \hat{R}^+ |l, -l+2\rangle &= \sqrt{3(2l-2)} |l, -l+3\rangle \\ &\vdots \\ \hat{R}^+ |l, m-1\rangle &= \sqrt{(l+m)(l-m+1)} |l, m\rangle \end{aligned}$$

بنابراین

$$|l, m\rangle = \left(\frac{(l-m)!}{(l+m)!(2l)!} \right)^{1/2} (\hat{R}^+)^{l+m} |l, -l\rangle \quad (۳۳-۴)$$

برای فهم بهتر رابطه (۳۳-۴)، در ابتدا روی سیستمی متشکل از $N=2$ اتم دو ترازوی تمرکز می کنیم. حالت برانگیخته $|2_1\rangle|2_2\rangle$ دارای $m=1$ و $l=1$ می باشد. به عبارت دیگر حالت کاملاً برانگیخته را می توان توسط حالت دیکی $|l=1, m=1\rangle$ نمایش داد:

$$|1,1\rangle = |2_1\rangle|2_2\rangle \quad (۳۴-۴)$$

به منظور ایجاد حالت های دیکی دیگر از $|1,1\rangle$ کافی است عملگر پایین برنده \widehat{R}^- روی حالت $|1,1\rangle$ اثر داده شود. آنگاه با استفاده از روابط (۴-۳۱) و (۴-۲) خواهیم داشت:

$$\widehat{R}^- |1,1\rangle = \sqrt{2} |1,0\rangle$$

$$\sum_{j=1}^2 \widehat{b}^{(j)} |1,1\rangle = (\widehat{b}^{(1)} + \widehat{b}^{(2)}) |2_1\rangle |2_2\rangle = |1_1\rangle |2_2\rangle + |2_1\rangle |1_2\rangle$$

بنابراین

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1_1\rangle |2_2\rangle + |2_1\rangle |1_2\rangle) \quad (۴-۳۵)$$

سپس با تاثیر مجدد عملگر \widehat{R}^- روی حالت $|1,0\rangle$ نیز خواهیم داشت:

$$\widehat{R}^- |1,0\rangle = \sqrt{2} |1,-1\rangle$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \widehat{b}^{(j)} |1,0\rangle &= (\widehat{b}^{(1)} + \widehat{b}^{(2)}) \frac{1}{\sqrt{2}} (|1_1\rangle |2_2\rangle + |2_1\rangle |1_2\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1_1\rangle |1_2\rangle + |1_1\rangle |1_2\rangle) = \frac{2}{\sqrt{2}} |1_1\rangle |1_2\rangle = \sqrt{2} |1_1\rangle |1_2\rangle \end{aligned}$$

به این ترتیب می توان نوشت

$$|1,-1\rangle = |1_1\rangle |1_2\rangle \quad (۴-۳۶)$$

تمام حالت های بالا متناظر $l = 1$ هستند. اکنون به بیان حالت هایی با $l = 0$ پرداخته می شود. حالت $c_1 |2_1\rangle |1_2\rangle + c_2 |1_1\rangle |2_2\rangle$ را چنان انتخاب می کنیم که ویژه حالت عملگر \widehat{R}^2 با $l = 0$ باشد. ابتدا توجه می کنیم که طبق (۴-۱۰)

$$\begin{aligned} \widehat{R}^2 \{c_1 |2_1\rangle |1_2\rangle + c_2 |1_1\rangle |2_2\rangle\} = \\ \left(\frac{3}{4} \times 2 + \widehat{b}^{(1)} \widehat{b}^{(2)\dagger} + \widehat{R}_3^{(1)} \widehat{R}_3^{(2)} + \widehat{b}^{(2)} \widehat{b}^{(1)\dagger} + \widehat{R}_3^{(2)} \widehat{R}_3^{(1)} \right) [c_1 |2_1\rangle |1_2\rangle + c_2 |1_1\rangle |2_2\rangle] \end{aligned}$$

$$= (c_1 + c_2)\{|2_1\rangle|1_2\rangle + |1_1\rangle|2_2\rangle\} \quad (37-4)$$

بنابراین حالت $c_1|2_1\rangle|1_2\rangle + c_2|1_1\rangle|2_2\rangle$ ویژه حالت \widehat{R}^2 با ویژه مقدار λ خواهد بود اگر

$$c_1 + c_2 = \lambda c_1 = \lambda c_2$$

که مستلزم

$$c_1 = c_2 \quad , \quad \lambda = 2 \quad (38-4)$$

یا

$$c_1 + c_2 = 0 \quad , \quad \lambda = 0 \quad (39-4)$$

می باشد. شرط (38-4) به حالت $|1,0\rangle$ رابطه (35-4) منجر می شود. شرط (39-4) متناظر $l = 0$ می باشد. با استفاده از شرط بهنجارش $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ داریم

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = -c_2 \quad \text{بنابراین}$$

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|2_1\rangle|1_2\rangle - |1_1\rangle|2_2\rangle] \quad (40-4)$$

حالت متناظر $l = 0$ را حالت یگانه و حالت های متناظر $l = 1$ حالت سه گانه می نامند.

اکنون به بررسی سیستمی متشکل از $N=3$ اتم دو تراز می پردازیم. حالت پایه متناظر

$$m = -\frac{3}{2} \text{ و } l = \frac{3}{2} \text{ را می توان به صورت زیر بیان نمود.}$$

$$\left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = |1_1\rangle|1_2\rangle|1_3\rangle \quad (41-4)$$

به منظور ایجاد حالت های دیگر، کافی است عملگر بالا برنده \widehat{R}^+ روی حالت پایه اثر داده شود. آنگاه با استفاده از روابط (۴-۳۱) و (۴-۲) خواهیم داشت:

$$\widehat{R}^+ \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = \widehat{R}^+ |1_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle$$

$$\sqrt{3} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \sum_{j=1}^3 \widehat{b}^{(j)+} |1_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle$$

$$\left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [|2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle + |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle + |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle]$$

(۴۲-۴)

سپس با تاثیر مکرر عملگر \widehat{R}^+ روی حالت های ایجاد شده داریم:

$$\widehat{R}^+ \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \widehat{R}^+ [|2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle + |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle + |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle]$$

$$2 \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{j=1}^3 \widehat{b}^{(j)+} [|2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle + |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle + |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle]$$

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [|2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle + |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle + |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle]$$

(۴۳-۴)

و در نهایت خواهیم داشت:

$$\widehat{R}^+ \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \widehat{R}^+ [|2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle + |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle + |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle]$$

$$\sqrt{3} \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{j=1}^3 \widehat{b}^{(j)+} [|2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle + |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle + |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle]$$

$$\sqrt{3} \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = \frac{3}{\sqrt{3}} |2_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle$$

$$\left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = |2_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle$$

(۴۴-۴)

طبق تعریف حالت های $\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$ و $\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$ ، ویژه حالت های عملگر \widehat{R}^2 با ویژه مقدار $\frac{3}{4}$

می باشند. می بینیم که به شرط $c_1 + c_2 + c_3 = 0$ ، هر حالتی به شکل

$$|\Psi_1\rangle \quad (۴۵-۴)$$

$$= (|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2)^{-\frac{1}{2}} [c_1 |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle + c_2 |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle + c_3 |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle]$$

از جنس حالت $\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$ است. بطور مشابه

$$|\Psi_2\rangle \quad (۴۶-۴)$$

$$= (|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2)^{-\frac{1}{2}} [c_1 |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle + c_2 |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle + c_3 |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle]$$

به شرط $c_1 + c_2 + c_3 = 0$ حالتی از نوع $\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$ است. برای اثبات دو نکته ذکر شده

عملگر \widehat{R}^2 روی حالت (۴۵-۴) اثر داده می شود.

$$\widehat{R}^2 [c_1 |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle + c_2 |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle + c_3 |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle] =$$

$$\left(\frac{3}{4}N + \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^N \{ \widehat{b}^{(j)} \widehat{b}^{(k)\dagger} + \widehat{R}_3^{(j)} \widehat{R}_3^{(k)} \} \right) [c_1 |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle + c_2 |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle + c_3 |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle]$$

(۴۷-۴)

جمله \widehat{R}_3 را با استفاده از رابطه (۹-۴) بر حسب عملگرهای \widehat{b} و \widehat{b}^\dagger می نویسیم. پس

$$\begin{aligned}
& \left\{ \hat{b}^{(1)} \hat{b}^{(2)\dagger} + \frac{1}{4} (\hat{b}^{(1)+} \hat{b}^{(1)} - \hat{b}^{(1)} \hat{b}^{(1)\dagger}) (\hat{b}^{(2)+} \hat{b}^{(2)} - \hat{b}^{(2)} \hat{b}^{(2)\dagger}) \right\} [c_1 |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle + c_2 |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle \\
& \quad + c_3 |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle] = \\
& \quad c_1 |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle - \frac{1}{4} c_1 |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle - \frac{1}{4} c_2 |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle + \frac{1}{4} c_3 |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle \\
& \quad = -\frac{1}{4} c_1 |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle + \left(c_1 - \frac{1}{4} c_2 \right) |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle + \frac{1}{4} c_3 |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle \\
& \left\{ \hat{b}^{(2)} \hat{b}^{(1)\dagger} + \frac{1}{4} (\hat{b}^{(2)+} \hat{b}^{(2)} - \hat{b}^{(2)} \hat{b}^{(2)\dagger}) (\hat{b}^{(1)+} \hat{b}^{(1)} - \hat{b}^{(1)} \hat{b}^{(1)\dagger}) \right\} [c_1 |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle + c_2 |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle \\
& \quad + c_3 |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle] = \\
& \quad c_2 |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle - \frac{1}{4} c_2 |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle - \frac{1}{4} c_1 |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle + \frac{1}{4} c_3 |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle \\
& \quad = \left(c_2 - \frac{1}{4} c_1 \right) |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle - \frac{1}{4} c_2 |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle + \frac{1}{4} c_3 |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle \\
& \left\{ \hat{b}^{(1)} \hat{b}^{(3)\dagger} + \frac{1}{4} (\hat{b}^{(1)+} \hat{b}^{(1)} - \hat{b}^{(1)} \hat{b}^{(1)\dagger}) (\hat{b}^{(3)+} \hat{b}^{(3)} - \hat{b}^{(3)} \hat{b}^{(3)\dagger}) \right\} [c_1 |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle + c_2 |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle \\
& \quad + c_3 |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle] = \\
& \quad c_1 |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle - \frac{1}{4} c_1 |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle - \frac{1}{4} c_3 |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle + \frac{1}{4} c_2 |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle \\
& \quad = -\frac{1}{4} c_1 |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle + \frac{1}{4} c_2 |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle + \left(c_1 - \frac{1}{4} c_3 \right) |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle \\
& \left\{ \hat{b}^{(3)} \hat{b}^{(1)\dagger} + \frac{1}{4} (\hat{b}^{(3)+} \hat{b}^{(3)} - \hat{b}^{(3)} \hat{b}^{(3)\dagger}) (\hat{b}^{(1)+} \hat{b}^{(1)} - \hat{b}^{(1)} \hat{b}^{(1)\dagger}) \right\} [c_1 |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle + c_2 |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle \\
& \quad + c_3 |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle] = \\
& \quad c_3 |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle - \frac{1}{4} c_3 |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle - \frac{1}{4} c_1 |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle + \frac{1}{4} c_2 |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle \\
& \quad = \left(c_3 - \frac{1}{4} c_1 \right) |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle + \frac{1}{4} c_2 |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle - \frac{1}{4} c_3 |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle \\
& \left\{ \hat{b}^{(2)} \hat{b}^{(3)\dagger} + \frac{1}{4} (\hat{b}^{(2)+} \hat{b}^{(2)} - \hat{b}^{(2)} \hat{b}^{(2)\dagger}) (\hat{b}^{(3)+} \hat{b}^{(3)} - \hat{b}^{(3)} \hat{b}^{(3)\dagger}) \right\} [c_1 |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle + c_2 |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle \\
& \quad + c_3 |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle] = \\
& \quad c_2 |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle - \frac{1}{4} c_2 |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle - \frac{1}{4} c_3 |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle + \frac{1}{4} c_1 |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle \\
& \quad = \frac{1}{4} c_1 |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle - \frac{1}{4} c_2 |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle + \left(c_2 - \frac{1}{4} c_3 \right) |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle
\end{aligned}$$

$$\left\{ \hat{b}^{(3)} \hat{b}^{(2)\dagger} + \frac{1}{4} (\hat{b}^{(3)\dagger} \hat{b}^{(3)} - \hat{b}^{(3)} \hat{b}^{(3)\dagger}) (\hat{b}^{(2)} + \hat{b}^{(2)\dagger}) - \hat{b}^{(2)} \hat{b}^{(2)\dagger} \right\} [c_1 |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle + c_2 |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle + c_3 |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle] =$$

$$c_3 |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle - \frac{1}{4} c_3 |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle - \frac{1}{4} c_2 |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle + \frac{1}{4} c_1 |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle$$

$$= \frac{1}{4} c_1 |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle + \left(c_3 - \frac{1}{4} c_2 \right) |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle - \frac{1}{4} c_3 |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle$$

سپس با جایگذاری روابط بالا در رابطه (۴۷-۴) خواهیم داشت:

$$\hat{R}^2 |\Psi_1\rangle = \frac{9}{4} c_1 |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle + \frac{9}{4} c_2 |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle + \frac{9}{4} c_3 |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle - \frac{1}{4} c_1 |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle$$

$$+ \left(c_1 - \frac{1}{4} c_2 \right) |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle + \frac{1}{4} c_3 |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle + \left(c_2 - \frac{1}{4} c_1 \right) |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle$$

$$- \frac{1}{4} c_2 |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle + \frac{1}{4} c_3 |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle - \frac{1}{4} c_1 |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle + \frac{1}{4} c_2 |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle$$

$$+ \left(c_1 - \frac{1}{4} c_3 \right) |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle + \left(c_3 - \frac{1}{4} c_1 \right) |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle + \frac{1}{4} c_2 |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle$$

$$- \frac{1}{4} c_3 |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle + \frac{1}{4} c_1 |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle - \frac{1}{4} c_2 |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle + \left(c_2 - \frac{1}{4} c_3 \right) |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle$$

$$+ \frac{1}{4} c_1 |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle + \left(c_3 - \frac{1}{4} c_2 \right) |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle - \frac{1}{4} c_3 |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle$$

$$= \left(\frac{7}{4} c_1 + c_2 + c_3 \right) |2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle + \left(c_1 + \frac{7}{4} c_2 + c_3 \right) |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle + \left(c_1 + c_2 + \frac{7}{4} c_3 \right) |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle$$

پس $\hat{R}^2 |\Psi_1\rangle$ در صورتی $\frac{3}{4} |\Psi_1\rangle$ است که $\frac{3}{4} c_1 = \frac{7}{4} c_1 + c_2 + c_3$ یا

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0 \quad \text{این گزاره مورد نظر را اثبات می کند. با توجه به شرط بهنجارش}$$

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1 \quad \text{در نهایت دو تابع موج مستقل خطی خواهیم داشت:}$$

$$\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, a \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle - |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle] \quad (۴۸-۴)$$

$$\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, b \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} [|2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle + |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle - 2 |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle] \quad (49-4)$$

به همین ترتیب به طور مشابه برای تعیین حالت هایی از نوع $\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$ کافی است \widehat{R}^2 روی حالت $|\Psi_2\rangle$ اثر داده شود.

$$\begin{aligned} & \widehat{R}^2 [c_1 |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle + c_2 |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle + c_3 |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle] = \\ & \left(\frac{3}{4}N + \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^N \{ \widehat{b}^{(j)} \widehat{b}^{(k)\dagger} + \widehat{R}_3^{(j)} \widehat{R}_3^{(k)} \} \right) [c_1 |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle + c_2 |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle + c_3 |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle] \end{aligned} \quad (50-4)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \widehat{b}^{(1)} \widehat{b}^{(2)\dagger} + \frac{1}{4} (\widehat{b}^{(1)} + \widehat{b}^{(1)}) - \widehat{b}^{(1)} \widehat{b}^{(1)\dagger} \right\} (\widehat{b}^{(2)} + \widehat{b}^{(2)} - \widehat{b}^{(2)} \widehat{b}^{(2)\dagger}) \left[c_1 |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle + c_2 |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle \right. \\ & \left. + c_3 |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle \right] = \end{aligned}$$

$$c_2 |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle + \frac{1}{4} c_3 |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle - \frac{1}{4} c_2 |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle - \frac{1}{4} c_1 |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle$$

$$= \left(c_2 - \frac{1}{4} c_1 \right) |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle - \frac{1}{4} c_2 |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle + \frac{1}{4} c_3 |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \widehat{b}^{(2)} \widehat{b}^{(1)\dagger} + \frac{1}{4} (\widehat{b}^{(2)} + \widehat{b}^{(2)} - \widehat{b}^{(2)} \widehat{b}^{(2)\dagger}) \right\} (\widehat{b}^{(1)} + \widehat{b}^{(1)} - \widehat{b}^{(1)} \widehat{b}^{(1)\dagger}) \left[c_1 |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle + c_2 |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle \right. \\ & \left. + c_3 |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle \right] = \end{aligned}$$

$$c_1 |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle + \frac{1}{4} c_3 |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle - \frac{1}{4} c_1 |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle - \frac{1}{4} c_2 |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle$$

$$= -\frac{1}{4} c_1 |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle + \left(c_1 - \frac{1}{4} c_2 \right) |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle + \frac{1}{4} c_3 |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \widehat{b}^{(1)} \widehat{b}^{(3)\dagger} + \frac{1}{4} (\widehat{b}^{(1)} + \widehat{b}^{(1)} - \widehat{b}^{(1)} \widehat{b}^{(1)\dagger}) \right\} (\widehat{b}^{(3)} + \widehat{b}^{(3)} - \widehat{b}^{(3)} \widehat{b}^{(3)\dagger}) \left[c_1 |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle + c_2 |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle \right. \\ & \left. + c_3 |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle \right] = \end{aligned}$$

$$c_3 |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle + \frac{1}{4} c_2 |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle - \frac{1}{4} c_3 |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle - \frac{1}{4} c_1 |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle$$

$$= \left(c_3 - \frac{1}{4} c_1 \right) |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle + \frac{1}{4} c_2 |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle - \frac{1}{4} c_3 |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \hat{b}^{(3)} \hat{b}^{(1)\dagger} + \frac{1}{4} (\hat{b}^{(3)} + \hat{b}^{(3)} - \hat{b}^{(3)} \hat{b}^{(3)\dagger}) (\hat{b}^{(1)} + \hat{b}^{(1)} - \hat{b}^{(1)} \hat{b}^{(1)\dagger}) \right\} [c_1 |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle + c_2 |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle \\
& \quad + c_3 |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle] = \\
& \quad c_1 |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle + \frac{1}{4} c_2 |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle - \frac{1}{4} c_1 |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle - \frac{1}{4} c_3 |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle \\
& = -\frac{1}{4} c_1 |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle + \frac{1}{4} c_2 |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle + \left(c_1 - \frac{1}{4} c_3 \right) |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle \\
& \left\{ \hat{b}^{(2)} \hat{b}^{(3)\dagger} + \frac{1}{4} (\hat{b}^{(2)} + \hat{b}^{(2)} - \hat{b}^{(2)} \hat{b}^{(2)\dagger}) (\hat{b}^{(3)} + \hat{b}^{(3)} - \hat{b}^{(3)} \hat{b}^{(3)\dagger}) \right\} [c_1 |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle + c_2 |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle \\
& \quad + c_3 |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle] = \\
& \quad c_3 |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle + \frac{1}{4} c_1 |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle - \frac{1}{4} c_3 |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle - \frac{1}{4} c_2 |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle \\
& = \frac{1}{4} c_1 |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle + \left(c_3 - \frac{1}{4} c_2 \right) |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle - \frac{1}{4} c_3 |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle \\
& \left\{ \hat{b}^{(3)} \hat{b}^{(2)\dagger} + \frac{1}{4} (\hat{b}^{(3)} + \hat{b}^{(3)} - \hat{b}^{(3)} \hat{b}^{(3)\dagger}) (\hat{b}^{(2)} + \hat{b}^{(2)} - \hat{b}^{(2)} \hat{b}^{(2)\dagger}) \right\} [c_1 |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle + c_2 |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle \\
& \quad + c_3 |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle] = \\
& \quad c_2 |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle + \frac{1}{4} c_1 |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle - \frac{1}{4} c_2 |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle - \frac{1}{4} c_3 |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle \\
& = \frac{1}{4} c_1 |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle - \frac{1}{4} c_2 |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle + \left(c_2 - \frac{1}{4} c_3 \right) |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle
\end{aligned}$$

سپس با جایگذاری روابط بالا در رابطه (۴-۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
& \frac{9}{4} c_1 |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle + \frac{9}{4} c_2 |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle + \frac{9}{4} c_3 |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle + \left(c_2 - \frac{1}{4} c_1 \right) |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle \\
& - \frac{1}{4} c_2 |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle + \frac{1}{4} c_3 |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle - \frac{1}{4} c_1 |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle + \left(c_1 - \frac{1}{4} c_2 \right) |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle \\
& + \frac{1}{4} c_3 |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle + \left(c_3 - \frac{1}{4} c_1 \right) |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle + \frac{1}{4} c_2 |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle - \frac{1}{4} c_3 |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle \\
& - \frac{1}{4} c_1 |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle + \frac{1}{4} c_2 |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle + \left(c_1 - \frac{1}{4} c_3 \right) |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle + \frac{1}{4} c_1 |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle \\
& + \left(c_3 - \frac{1}{4} c_2 \right) |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle - \frac{1}{4} c_3 |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle + \frac{1}{4} c_1 |1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle - \frac{1}{4} c_2 |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle
\end{aligned}$$

$$+ \left(c_2 - \frac{1}{4}c_3\right) |2_1\rangle|2_2\rangle|1_3\rangle$$

$$= \left(\frac{7}{4}c_1 + c_2 + c_3\right) |1_1\rangle|2_2\rangle|2_3\rangle + \left(c_1 + \frac{7}{4}c_2 + c_3\right) |2_1\rangle|1_2\rangle|2_3\rangle + \left(c_1 + c_2 + \frac{7}{4}c_3\right) |2_1\rangle|2_2\rangle|1_3\rangle$$

بنابراین در صورتی $\hat{R}^2 |\Psi_2\rangle = \frac{3}{4} |\Psi_2\rangle$ است که $\frac{3}{4}c_1 = \frac{7}{4}c_1 + c_2 + c_3$ یا

$c_1 + c_2 + c_3 = 0$ باشد. با در نظر گرفتن شرط بهنجاری

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1$$

دو تابع موج مستقل خطی خواهیم داشت:

$$\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, a\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|1_1\rangle|2_2\rangle|2_3\rangle - |2_1\rangle|1_2\rangle|2_3\rangle] \quad (51-4)$$

$$\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, b\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} [|1_1\rangle|2_2\rangle|2_3\rangle + |2_1\rangle|1_2\rangle|2_3\rangle - 2|2_1\rangle|2_2\rangle|1_3\rangle] \quad (52-4)$$

تحت جایگشت اتم ها، دو حالت بدست آمده از نوع $\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$ و دو حالت بدست آمده از نوع

$\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$ دارای ویژگی های تقارنی متفاوتی هستند. نمادهای a و b در عبارات (48-4)، (49-4)

و (51-4)، (52-4) تقارن متفاوت توابع موج را نشان می دهد.

اگر بخواهیم هر سه برانگیختگی $|2_1\rangle|1_2\rangle|1_3\rangle$ و $|1_1\rangle|2_2\rangle|1_3\rangle$ و $|1_1\rangle|1_2\rangle|2_3\rangle$ سهم

یکسانی در $\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$ داشته باشند، یعنی $|c_1| = |c_2| = |c_3|$. آنگاه حالت های دیکری

ممکن از نوع $\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$ بصورت زیر بیان می شوند:

$$\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \alpha\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [|2_1\rangle|1_2\rangle|1_3\rangle + e^{2\pi i/3} |1_1\rangle|2_2\rangle|1_3\rangle + e^{4\pi i/3} |1_1\rangle|1_2\rangle|2_3\rangle] \quad (53-4)$$

$$\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \beta \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [|2_1\rangle |1_2\rangle |1_3\rangle + e^{-2\pi i/3} |1_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle + e^{-4\pi i/3} |1_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle]$$

(۵۴-۴)

این دو حالت متعامد می باشند و α و β تقارن متفاوت آنها را تحت جایگشت اتم ها نشان می دهد. دو حالت $\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \alpha \right\rangle$ و $\left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \beta \right\rangle$ تحت جایگشت دوره ای اتم ها تغییر نمی کنند، اما در صورت عوض شدن دو اتم، یکی از حالت ها به دیگری تبدیل می شود.

به طور مشابه حالت های دیگری ممکن از نوع $\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$ با $|c_1| = |c_2| = |c_3|$ بصورت زیر بیان می شوند:

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \alpha \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [|1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle + e^{2\pi i/3} |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle + e^{4\pi i/3} |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle]$$

(۵۵-۴)

و

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \beta \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [|1_1\rangle |2_2\rangle |2_3\rangle + e^{-2\pi i/3} |2_1\rangle |1_2\rangle |2_3\rangle + e^{-4\pi i/3} |2_1\rangle |2_2\rangle |1_3\rangle]$$

(۵۶-۴)

۴-۱-۲. تبهگنی حالت های دیکی [۶]

در ادامه به تبهگنی حالت دیکی $|l, m\rangle$ می پردازیم. فرض می کنیم حالت $|l, l\rangle$ دارای تبهگنی D_l است. بخصوص $D_{N/2} = 1$ است. با تاثیر مکرر عملگر پایین برنده \hat{R}^- روی حالت $|l, l\rangle$ می توان تمام حالت هایی از نوع $|l, m\rangle$ با $|m| \leq l$ را تولید نمود. پس هر یک از این حالت ها دارای همان تبهگنی D_l است.

اکنون حالت هایی با $m = l - 1$ را در نظر می گیریم. طبق رابطه (۴-۲۷)، حالت d_{l-1} با $m = l - 1$ داریم. از این حالت مختلف، D_{l-1} آن از نوع $|l - 1, l - 1\rangle$ و بقیه آن ها از نوع $|l, l - 1\rangle, |l + 1, l - 1\rangle, \dots, |\frac{1}{2}N, l - 1\rangle$ خواهند بود. بنابراین داریم:

$$d_{l-1} = D_{l-1} + D_l + \dots + D_{N/2-1} + D_{N/2} \quad (۴-۵۷)$$

با جایگزین شدن $l + 1$ به جای l داریم:

$$d_l = D_l + \dots + D_{N/2} \quad (۴-۵۸)$$

به این ترتیب از تفاضل روابط (۴-۵۷) و (۴-۵۸) خواهیم داشت:

$$d_{l-1} - d_l = D_{l-1} \quad (۴-۵۹)$$

طبق رابطه (۴-۵۹) و با استفاده از معادله (۴-۲۷) می توان D_l را محاسبه نمود.

$$D_l = d_l - d_{l+1}$$

$$D_l = \frac{N!}{\left(\frac{1}{2}N + l\right)! \left(\frac{1}{2}N - l\right)!} - \frac{N!}{\left(\frac{1}{2}N + l + 1\right)! \left(\frac{1}{2}N - l - 1\right)!}$$

$$D_l = \frac{N! \left(\frac{1}{2}N + l + 1\right) - N! \left(\frac{1}{2}N - l\right)}{\left(\frac{1}{2}N + l\right)! \left(\frac{1}{2}N - l - 1\right)! \left(\frac{1}{2}N - l\right) \left(\frac{1}{2}N + l + 1\right)}$$

$$D_l = \frac{(2l + 1)N!}{\left(\frac{1}{2}N + l + 1\right)! \left(\frac{1}{2}N - l\right)!}, \quad l \leq \frac{1}{2}N$$

(۴-۶۰)

به عنوان مثال طبق رابطه (۴-۶۰) به ازای $N=3$ و $l = \frac{1}{2}$ ، $D_{1/2} = 2$ است. توسط ایجاد حالت های

$\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$ و $\left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$ همین نتیجه را قبلا بدست آوردیم.

۴-۲. تابش اتمی دسته جمعی [۶]

دیکی نشان داد به دلیل جفت شدگی اتم ها بواسطه میدان الکترومغناطیسی، میزان تابش یک اتم برانگیخته به طور قابل ملاحظه ای تحت تاثیر حضور اتم های دیگر است. اگر تعدادی از اتم ها در فاصله نسبتا کمی از هم قرار داشته باشند، هر یک از آن ها بایستی در مقابل عکس العمل تابشی^{۱۱} ایجاد شده توسط میدان خودش و میدان همسایگان کار انجام دهد. در نتیجه هر یک از این اتم ها کار بیشتری انجام داده و تابش بیشتری خواهد داشت. این امر بالطبع موجب سریعتر از دست رفتن انرژی آن ها نسبت به حالتی است که اتمها منفرد هستند.

مجموعه ای از N اتم یکسان در ناحیه ای از فضا در نظر می گیریم. فرض می کنیم ابعاد ناحیه فوق الذکر خیلی کوچکتر از طول موج $2\pi c/\omega_0$ باشد (ω_0 ، فرکانس تشدید طبیعی اتم است). تحت چنین شرایطی هر یک از اتم ها با میدان الکترومغناطیسی یکسانی برهم کنش می کنند، به این ترتیب طبق رابطه (۴-۲۱) می توان انرژی برهم کنش کل را بصورت زیر بیان نمود:

$$\bar{H}_1(t) = -\hat{\mu}(t) \cdot \bar{E}(t)$$

$$\bar{H}_1(t) = -\mu_{12} \cdot \bar{E}(t) \bar{R}^-(t) - \mu_{12}^* \cdot \bar{E}(t) \bar{R}^+(t) \quad (۴-۶۱)$$

۴-۲-۱. ابر تابش دیکی

فرض کنید در ابتدا سیستم اتمی در حالت دیکی $|l, m\rangle$ و میدان در حالت خلا $|vac\rangle$ قرار داشته باشد. دامنه احتمال برای گذار از این حالت به حالت نهایی $|\psi\rangle$ خواهد شد:

$$-\langle \psi | \mu_{12} \cdot \bar{E}(t) \bar{R}^-(t) + \mu_{12}^* \cdot \bar{E}(t) \bar{R}^+(t) | l, m \rangle | vac \rangle \quad (۴-۶۲)$$

¹¹ Radiation reaction

اگر به گذارهایی علاقمند باشیم که بقای انرژی را حفظ کرده و در آن یک فوتون تابش می شود، قسمت عمده دامنه احتمال از جمله $\langle \psi | \mu_{12} \cdot \hat{E}^-(t) \hat{R}^-(t) | l, m \rangle | vac \rangle$ حاصل می شود. $\hat{E}^-(t)$ ، قسمت فرکانس منفی میدان الکتریکی $\hat{E}^-(t)$ را نشان می دهد. همچنین این رابطه گویای پایین آورده شدن سیستم اتمی از حالت برانگیختگی توسط عملگر \hat{R}^- و خلق یک فوتون توسط عملگر $\hat{E}^-(t)$ می باشد. برای محاسبه نرخ گسیل فوتون ها لازم است مربع دامنه احتمال روی تمام حالت های نهایی ممکن جمع زده شود. به این ترتیب

$$\begin{aligned} \text{نرخ گسیل فوتون} &\propto \sum_{\text{all } \psi} |\langle \psi | \mu_{12} \cdot \hat{E}^-(t) \hat{R}^-(t) | l, m \rangle | vac \rangle|^2 \\ &\propto \sum_{\text{all } \psi} \langle vac | \langle l, m | \hat{R}^+(t) \hat{E}^+(t) \cdot \mu_{12}^* | \psi \rangle \langle \psi | \mu_{12} \cdot \hat{E}^-(t) \hat{R}^-(t) | l, m \rangle | vac \rangle \end{aligned}$$

با جدا نمودن عناصر ماتریسی سیستم اتمی و میدان خواهیم داشت:

$$\text{نرخ گسیل فوتون} \propto \langle l, m | \hat{R}^+(t) \hat{R}^-(t) | l, m \rangle \langle vac | \hat{E}^+(t) \cdot \mu_{12}^* \mu_{12} \cdot \hat{E}^-(t) | vac \rangle \quad (۶۳-۴)$$

سپس با استفاده از رابطه (۴-۳۱) می توان نوشت

$$\text{نرخ گسیل فوتون} = (l + m)(l - m + 1)A \quad (۶۴-۴)$$

به طوری که $\langle vac | \hat{E}^+(t) \cdot \mu_{12}^* \mu_{12} \cdot \hat{E}^-(t) | vac \rangle \equiv A$ برای تعیین A به راحتی می توان رابطه (۶۴-۴) را برای یک تک اتم برانگیخته به کار برد. اگر $N = 1$ ، طبق تعریف (۴-۲۳) داریم، $m = \frac{1}{2}$ و طبق نامساوی (۴-۲۹)، $l = \frac{1}{2}$ می باشد. به این ترتیب با جایگذاری در رابطه (۶۴-۴) نرخ گسیل فوتون برابر با A خواهد شد. پس مشاهده می شود که ضریب A ، ضریب انیشتین برای تک اتم منفرد می باشد.

به منظور درک جنبه های دیگری از رابطه (۴-۶۴)، فرض می کنیم همه N اتم در حالت پایه قرار داشته باشند. آنگاه طبق تعریف (۴-۲۳)، $m = -\frac{1}{2}N$ و طبق نامساوی (۴-۲۹)، $l = \frac{1}{2}N$ خواهد شد. بنابراین نرخ تابش از رابطه (۴-۶۴) صفر می شود. اما اگر همه N اتم در حالت برانگیخته قرار داشته باشند آنگاه $m = \frac{1}{2}N$ و $l = \frac{1}{2}N$ است، به این ترتیب همان طور که از N اتم تابشی انتظار می رفت نرخ گسیل فوتون NA خواهد شد. اکنون فرض می شود نیمی از اتم ها در حالت برانگیخته و نیمی دیگر در حالت پایه قرار داشته باشند.

$$\text{بنابراین طبق تعریف (۴-۲۳)، } m = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}N - \frac{1}{2}N \right) = 0, \text{ آنگاه}$$

$$\text{نرخ گسیل فوتون} = l(l+1)A \quad (۴-۶۵)$$

و طبق نامساوی (۴-۲۹)، $0 \leq l \leq \frac{1}{2}N$ می باشد. به ازای مقدار بیشینه l ، نرخ جمعی تابش سیستم اتمی نیز بیشینه می شود از این رو دیکه، l را عدد جمعی نامید. به این ترتیب به ازای $l = \frac{1}{2}N$ خواهیم داشت:

$$\text{نرخ گسیل فوتون} = \frac{1}{2}N \left(\frac{1}{2}N + 1 \right) A \quad (۴-۶۶)$$

به ازای N های بزرگ، رابط (۴-۶۶) متناسب با مربع تعداد اتم ها خواهد بود که می تواند عدد خیلی بزرگی باشد. نرخ تابش وابسته به N^2 از ویژگی های فرآیند تابش دسته جمعی محسوب می شود که دیکه آن را ابرتتابش^{۱۲} نامید. اگر چه مقدار چشمداشتی ممان دو قطبی کل حالت دیکه صفر است، اما متوسط مربع ممان دو قطبی بزرگ است. طبق روابط (۴-۲۱) و (۴-۳۱) برای متوسط مربع ممان دو قطبی می توان نوشت:

¹² Superradiance

$$\begin{aligned} \langle l, m | \hat{\mu}^2 | l, m \rangle &= \langle l, m | \mu_{12} \mu_{12} \bar{R}^- \bar{R}^- + \mu_{12} \mu_{12}^* \bar{R}^- \bar{R}^+ + \mu_{12}^* \mu_{12} \bar{R}^+ \bar{R}^- + \mu_{12}^* \mu_{12}^* \bar{R}^+ \bar{R}^+ | l, m \rangle \\ &= |\mu_{12}|^2 (l-m)(l+m+1) + |\mu_{12}|^2 (l+m)(l-m+1) = 2|\mu_{12}|^2 [l(l+1) - m^2] \end{aligned} \quad (67-4)$$

رابطه (67-4) به ازای $m=0$ دارای بیشترین مقدار می باشد و سیستم اتمی نیز در حالت نیمه برانگیخته واقع است.

فرآیندهای جمعی لزوماً به یک نرخ تابش تقویت شده منجر نمی شوند. در صورتی که در رابطه (65-4) $l = 0$ باشد، با وجود نیمه برانگیخته بودن سیستم، نرخ گسیل فوتون از سیستم اتمی صفر خواهد شد. این امر ممکن است غیرمعمول به نظر رسد اما غیرممکن نیز نمی باشد. در حالتی که جفت دو قطبی های اتمی در فاز مخالف قرار داشته باشند، میدان تابش شده توسط یک اتم توسط دیگری جذب می شود. کاهش نرخ گسیل خود به خودی و طولانی شدن طول عمر که از خواص تابشگرهای دو به دو در فاز مخالف است، در آزمایشهای انجام شده بر اتمهای نزدیک سطح آینه مشاهده شده اند [12]. تصویر آینه ای یک اتم به عنوان تابش کننده دوم ولی در فازی مخالف با تابش کننده اول عمل می کند. به عنوان مثالی از این حالت ضد ابرتابش¹³ برای اتم، حالت پادمتقارن زیر است:

$$|l = 0, m = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|2_1\rangle |1_2\rangle - |1_2\rangle |2_1\rangle) \quad (68-4)$$

دامنه احتمالی که این حالت را توسط برهم کنش $\mu_{12} \cdot \hat{E}^-(t) \bar{R}^-(t)$ به حالت پایه اتمی $|1_1\rangle |1_1\rangle$ پیوند می دهد صفر است، چرا که

¹³ Anti-Superradiant

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [\langle 1_1 | \langle 1_1 | \mu_{12} \cdot \hat{E}^-(t) \hat{R}^-(t) | 2_1 \rangle | 1_1 \rangle - \langle 1_1 | \langle 1_1 | \mu_{12} \cdot \hat{E}^-(t) \hat{R}^-(t) | 1_2 \rangle | 2_2 \rangle]$$

مطابق رابطه (۲-۴) عبارت است از:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [\mu_{12} \cdot \hat{E}^-(t) \langle 1_1 | \langle 1_1 | \hat{b}^{(1)}(t) + \hat{b}^{(2)}(t) | 2_1 \rangle | 1_1 \rangle - \mu_{12} \cdot \hat{E}^-(t) \langle 1_1 | \langle 1_1 | \hat{b}^{(1)}(t) + \hat{b}^{(2)}(t) | 1_2 \rangle | 2_2 \rangle] = 0$$

(۶۹-۴)

حالت های دیکی ایده ابرتابش را به خوبی نمایش می دهند ولی حالت های دیکی را در آزمایشگاه به سادگی نمی توان مهیا کرد. بنابراین در ادامه مثالی را بیان می کنیم که تابش اتمی جمعی را با فرض یک حالت حاصلضربی اتمی خاص نشان می دهد.

۲-۲-۴. تابش دسته جمعی در حالت حاصلضربی اتمی [۶]

فرض کنید حالت اولیه سیستمی شامل N اتم به صورت زیر باشد:

$$|\Phi\rangle \equiv \prod_{j=1}^N [c_1 |1_j\rangle + c_2 |2_j\rangle]$$

(۷۰-۴)

که در آن c_1 و c_2 اعداد مختلط دلخواه و برای همه اتم ها یکسان هستند. بعلاوه $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ است.

بنابراین فرض شده است همه اتمها در حالت کوانتومی خالص یکسانی هستند. همچنین حالت ابتدایی میدان الکترومغناطیسی حالت خلا در نظر گرفته می شود. به این ترتیب عملگر چگالی سیستم جفت شده در زمان t به صورت زیر است:

$$\hat{\rho}(t) = |\Phi\rangle\langle\Phi| \otimes |vac\rangle\langle vac| \quad (۷۱-۴)$$

ما به گذارهایی که در زمان کوتاه Δt از این حالت به حالتی که در آن فوتونی با بردار موج k' و قطبش s' گسیل می شود علاقمندیم. احتمال گسیل چنین فوتونی بصورت زیر می باشد:

$$\Delta t \text{ احتمال گسیل فوتون } s', k' \text{ در زمان } \Delta t = \sum_{\text{all } A} \langle \Psi_A | \langle 1_{k's'}, vac | \hat{\rho}(t + \Delta t) | 1_{k's'}, vac \rangle | \Psi_A \rangle \quad (72-4)$$

به طوری که $\hat{\rho}(t + \Delta t)$ عملگر چگالی سیستم جفت شده در زمان $t + \Delta t$ و $|\Psi_A\rangle$ حالت اتمی نهایی است. $|1_{k's'}, vac\rangle$ حالت نهایی میدان با تنها یک فوتون (با بردار موج k' و قطبش s') را نشان می دهد. در رابطه (72-4) جمع روی مجموعه کاملی از حالت های اتمی نهایی است. چون حالت نهایی تک فوتونی بر حالت ابتدایی سیستم متعامد است، می توان با استفاده از رابطه (14-14) [6] احتمال گسیل فوتون را بیان نمود. به این ترتیب پس از جایگذاری رابطه (4-61) برای برهم کنش $\hat{H}_1(t)$ ، احتمال گسیل فوتون در زمان Δt خواهد شد:

$$\begin{aligned} & \Delta t \text{ احتمال گسیل فوتون } s', k' \text{ در زمان } \Delta t \\ &= \sum_{\text{all } A} \frac{1}{\hbar^2} \int_t^{t+\Delta t} dt_1 \int_t^{t_1} dt_2 \langle \Psi_A | [(\mu_{12})_i \hat{E}^-(t_1) \hat{R}^-(t_1) + (\mu_{12}^*)_i \hat{E}^+(t_1) \hat{R}^+(t_1)] | \Phi \rangle \langle \Phi | \otimes | vac \rangle \\ & \quad \langle vac | [(\mu_{12})_j \hat{E}^-(t_2) \hat{R}^-(t_2) + (\mu_{12}^*)_j \hat{E}^+(t_2) \hat{R}^+(t_2)] | \Psi_A \rangle + h.c \end{aligned}$$

با جایگذاری عملگرهای \hat{R}^+ و \hat{R}^- بر حسب \hat{b} و \hat{b}^\dagger داریم:

$$\begin{aligned} &= \sum_{\text{all } A} \frac{1}{\hbar^2} \int_t^{t+\Delta t} dt_1 \int_t^{t_1} dt_2 \left\langle \Psi_A \left| \sum_{m=1}^N [(\mu_{12})_i \hat{b}^{(m)} e^{-i\omega_0 t_1} + (\mu_{12}^*)_i \hat{b}^{(m)\dagger} e^{i\omega_0 t_1}] \right| \Phi \right\rangle \\ & \quad \left\langle \Phi \left| \sum_{n=1}^N [(\mu_{12})_j \hat{b}^{(n)} e^{-i\omega_0 t_2} + (\mu_{12}^*)_j \hat{b}^{(n)\dagger} e^{i\omega_0 t_2}] \right| \Psi_A \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\langle 1_{k's'}, vac \left| \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{k,s} \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0} \right)^{1/2} \left[i(\epsilon_{ks})_i \hat{a}_{ks} e^{-i\omega t_1} - i(\epsilon_{ks}^*)_i \hat{a}_{ks}^\dagger e^{i\omega t_1} \right] \right| vac \right\rangle \\
& \left\langle vac \left| \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{k,s} \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0} \right)^{1/2} \left[i(\epsilon_{ks})_j \hat{a}_{ks} e^{-i\omega t_2} - i(\epsilon_{ks}^*)_j \hat{a}_{ks}^\dagger e^{i\omega t_2} \right] \right| 1_{k's'}, vac \right\rangle + h.c \\
= & \frac{1}{\hbar^2} \int_t^{t+\Delta t} dt_1 \int_t^{t_1} dt_2 \left[\left\langle \Phi \left| \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N (\mu_{12})_j (\mu_{12})_i \hat{b}^{(n)} \hat{b}^{(m)} e^{-i\omega_0(t_1+t_2)} \right| \Phi \right\rangle \right. \\
& + \left\langle \Phi \left| \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N (\mu_{12})_j (\mu_{12}^*)_i \hat{b}^{(n)} \hat{b}^{(m)\dagger} e^{i\omega_0(t_1-t_2)} \right| \Phi \right\rangle \\
& + \left\langle \Phi \left| \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N (\mu_{12}^*)_j (\mu_{12})_i \hat{b}^{(n)\dagger} \hat{b}^{(m)} e^{i\omega_0(t_2-t_1)} \right| \Phi \right\rangle \\
& + \left. \left\langle \Phi \left| \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N (\mu_{12}^*)_j (\mu_{12}^*)_i \hat{b}^{(n)\dagger} \hat{b}^{(m)\dagger} e^{i\omega_0(t_1+t_2)} \right| \Phi \right\rangle \right] \\
& \times \frac{-1}{L^3} \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0} \right) \sum_{k,s} \left[(\epsilon_{ks})_i \langle 1_{k's'}, vac | \hat{a}_{ks} | vac \rangle e^{-i\omega t_1} - (\epsilon_{ks}^*)_i \langle 1_{k's'}, vac | \hat{a}_{ks}^\dagger | vac \rangle e^{i\omega t_1} \right] \\
& \quad \times \left[(\epsilon_{ks})_j \langle vac | \hat{a}_{ks} | 1_{k's'}, vac \rangle e^{-i\omega t_2} - (\epsilon_{ks}^*)_j \langle vac | \hat{a}_{ks}^\dagger | 1_{k's'}, vac \rangle e^{i\omega t_2} \right] \\
& + h.c
\end{aligned} \tag{۷۳-۴}$$

مقدار چشمداشتی جملات اول و چهارم با جایگذاری حالت $|\Phi\rangle$ از رابطه (۷۰-۴) صفر خواهد شد. با استفاده از $\hat{b}\hat{b}^\dagger + \hat{b}^\dagger\hat{b} = 1$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\approx & \frac{1}{L^3} \left(\frac{\omega}{2\epsilon_0\hbar} \right) \int_t^{t+\Delta t} dt_1 \int_t^{t_1} dt_2 |\mu_{12} \cdot \epsilon_{k's'}^*|^2 \left\{ \left\langle \Phi \left| \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \hat{b}^{(n)\dagger} \hat{b}^{(m)} \right| \Phi \right\rangle [e^{-i\omega_0(t_1-t_2)} \right. \\
& \left. - e^{i\omega_0(t_1-t_2)}] + e^{i\omega_0(t_1-t_2)} \right\} e^{i\omega(t_1-t_2)} + h.c
\end{aligned}$$

$$\approx \frac{1}{L^3} \left(\frac{\omega}{2\epsilon_0 \hbar} \right) \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{t_1} dt_2 |\mu_{12} \cdot \epsilon_{k's'}^*|^2 \left\{ \left\langle \Phi \left| \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \hat{b}^{(n)\dagger} \hat{b}^{(m)} \right| \Phi \right\rangle [e^{i(\omega-\omega_0)(t_1-t_2)} - e^{i(\omega+\omega_0)(t_1-t_2)}] + e^{i(\omega+\omega_0)(t_1-t_2)} \right\} + h.c. \quad (74-4)$$

به منظور ساده سازی از جملات شدیداً نوسانی صرف نظر می شود. به این ترتیب داریم:

$$\simeq \frac{1}{L^3} \left(\frac{\omega}{2\epsilon_0 \hbar} \right) \int_t^{t+\Delta t} dt_1 \int_t^{t_1} dt_2 |\mu_{12} \cdot \epsilon_{k's'}^*|^2 \left\langle \Phi \left| \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \hat{b}^{(n)\dagger} \hat{b}^{(m)} \right| \Phi \right\rangle e^{i(\omega-\omega_0)(t_1-t_2)} + h.c.$$

با در نظر گرفتن $t = 0$ داریم:

$$= \frac{\omega}{L^3 \epsilon_0 \hbar} |\mu_{12} \cdot \epsilon_{k's'}^*|^2 \int_0^{\Delta t} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cos[(\omega - \omega_0)(t_1 - t_2)] \left\langle \Phi \left| \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \hat{b}^{(n)\dagger} \hat{b}^{(m)} \right| \Phi \right\rangle$$

با استفاده از رابطه (۷۰-۴) عنصر ماتریسی را محاسبه می کنیم. خواهیم داشت:

$$= \frac{\omega}{L^3 \epsilon_0 \hbar} |\mu_{12} \cdot \epsilon_{k's'}^*|^2 \int_0^{\Delta t} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cos[(\omega - \omega_0)(t_1 - t_2)] \times [N|c_2|^2 + N(N-1)|c_1|^2|c_2|^2] \quad (75-4)$$

در انتهای امر، روی همه k' و s' های متناظر با همه حالت های نهایی ممکن تک فوتونی جمع می زنیم. به این ترتیب احتمال گسیل یک فوتون در زمان $P(t)\Delta t, \Delta t$ را می توان بصورت زیر بیان کرد:

$$P(t)\Delta t = A\Delta t [N|c_2|^2 + N(N-1)|c_1|^2|c_2|^2] \quad (76-4)$$

در اینجا $A = 2\beta$ ضریب انیشتین می باشد.

همان طور که برای تابشگرهای مستقل انتظار می رفت، در رابطه (۷۵-۴) جمله ای متناسب با N ، تعداد اتم ها نیز دیده می شود. اگر حالت ابتدایی سیستم، حالت کاملاً برانگیخته باشد،

$c_1 = 0$ و تنها جمله متناسب با N در $P(t)$ موجود است. جمله دیگر رابطه (۷۵-۴) که متناسب با $N(N-1)$ است، آشکارا با فرآیند تابش دسته جمعی مرتبط می باشد. اگر N عدد بزرگی باشد، این جمله متناسب با N^2 و جمله غالب در احتمال $P(t)$ است مگر اینکه c_1 به سمت صفر میل کرده و همه اتم ها تقریباً برانگیخته باشند. بنابراین نرخ تابش N اتم در یک حالت حاصلضربی خاص (۷۰-۴) می تواند خیلی بیشتر از نرخ تابش برای N اتم مستقل باشد، بشرط آنکه اتمها همه برانگیخته نباشند. بیشترین مقدار نرخ تابش وقتی ایجاد می شود که $|c_1|^2 |c_2|^2$ دارای ماکزیمم مقدار خود باشد، یعنی $|c_1| = 1/\sqrt{2} = |c_2|$. در این حالت نرخ گسیل فوتون تقریباً $\frac{1}{4} N^2 A$ خواهد شد که طبق رابطه (۶۶-۴) مشابه با نرخ تابش در حالت دیکی است. مجدداً یادآوری می کنیم که در حالت (۷۰-۴) همه تابع موجهای اتمی با c_1 و c_2 یکسان فرض شده اند. بنابراین حالت $|\Phi\rangle$ یک حالت ضربی بسیار خاص است.

۳-۲-۴. تحول زمانی ابر تابش

محاسبه اختلالی احتمال گسیل فوتون در مدت زمان کوتاه Δt ، امکان تعیین تحول زمانی سیستم در زمان های دلخواه را نمی دهد. به هر حال با کمک تعادل انرژی می توان اطلاعاتی را درباره نحوه تغییر نرخ تابش با زمان بدست آورد. در صورتی که دو طرف رابطه (۷۶-۴) در انرژی برانگیختگی هر اتم، $\hbar\omega_0$ ضرب شده و سپس بر Δt تقسیم شود، آنگاه می توان نرخ متوسط گسیل انرژی فوتون ها را بدست آورد. از آنجایی که بایستی این نرخ با نرخ متوسط انرژی که سیستم اتمی از دست می دهد برابر باشد، از رابطه (۱۶-۴) خواهیم داشت:

$$\text{نرخ متوسط انرژی از دست رفته سیستم اتمی} = -\frac{d}{dt} \langle \hat{H}_A \rangle = -\frac{d}{dt} \hbar\omega_0 \left[\langle \hat{R}_3(t) \rangle + \frac{1}{2} N \right]$$

به این ترتیب طبق روابط (۹-۴) و (۷۵-۴) داریم:

نرخ متوسط انرژی از دست رفته سیستم اتمی

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{d}{dt} \hbar\omega_0 \left[\frac{1}{2} \left\langle \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \hat{b}^{(m)\dagger}(t) \hat{b}^{(n)}(t) - \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \hat{b}^{(m)}(t) \hat{b}^{(n)\dagger}(t) \right\rangle + \frac{1}{2} N \right] \\
 &= -\frac{d}{dt} \hbar\omega_0 \left[\frac{1}{2} (N|c_2(t)|^2 + N(N-1)|c_1(t)|^2|c_2(t)|^2 - N|c_1(t)|^2 \right. \\
 &\quad \left. - N(N-1)|c_1(t)|^2|c_2(t)|^2) + \frac{1}{2} N \right] \tag{۷۷-۴}
 \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $|c_1(t)|^2 + |c_2(t)|^2 = 1$ خواهیم داشت:

$$= -\frac{d}{dt} \hbar\omega_0 N|c_2(t)|^2 \tag{۷۸-۴}$$

سپس با برابر قرار دادن نرخ تابش انرژی و نرخ انرژی از دست رفته، به معادله حرکت برای

تحول زمانی سیستم خواهیم رسید:

$$-\frac{d}{dt} \hbar\omega_0 N|c_2(t)|^2 = A\hbar\omega_0 [N|c_2(t)|^2 + N(N-1)|c_1(t)|^2|c_2(t)|^2]$$

$$-\frac{d}{dt} |c_2(t)|^2 = A|c_2(t)|^2 [1 + (N-1)|c_1(t)|^2] \tag{۷۹-۴}$$

برای حل رابطه (۷۹-۴)، $|c_2(t)|^2 = y$ و $|c_1(t)|^2 = 1 - y$ در نظر گرفته می شود.

پس معادله دیفرانسیل خواهد شد:

$$\frac{dy}{dt} = -Ay[1 + (N-1)(1-y)] = -ANy \left[1 - \left(1 - \frac{1}{N} \right) y \right] \tag{۸۰-۴}$$

اگر $|c_2(0)|^2 = 1$ ، آنگاه پس از انتگرال گیری از $t_1 = 0$ تا $t_2 = t$ خواهیم داشت:

$$-AN \int_0^t dt = \int_1^y \frac{dy}{y[1 - (1 - 1/N)y]} \tag{۸۱-۴}$$

پس از تجزیه انتگرالده بصورت زیر

$$\frac{1}{y[1 - (1 - 1/N)y]} = \frac{1}{y} + \frac{1 - 1/N}{1 - (1 - 1/N)y} \quad (۸۲-۴)$$

و جایگذاری آن در انتگرال می توان نوشت:

$$\begin{aligned} -ANt &= \int_1^y \frac{dy}{y} + \int_1^y \frac{(1 - 1/N)dy}{1 - (1 - 1/N)y} \\ -ANt &= \ln y - \ln[1 - (1 - 1/N)y] + \ln(1/N) \\ -ANt &= \ln \left[\frac{(1/N)y}{1 - (1 - 1/N)y} \right] = \ln \left[\frac{1}{1 - (1 - 1/y)N} \right] \end{aligned} \quad (۸۳-۴)$$

پس

$$e^{-ANt} = \frac{1}{1 - (1 - 1/y)N}$$

$$e^{ANt} = 1 - (1 - 1/y)N$$

$$|c_2(t)|^2 = y(t) = \frac{N}{N - 1 + e^{ANt}} \quad (۸۴-۴)$$

با توجه به رابطه (۷۶-۴)، نرخ گسیل فوتون ها از سیستم اتمی خواهد شد:

$$\begin{aligned} R(t) &= A \frac{N^2}{N - 1 + e^{ANt}} \left[1 + (N - 1) \left(1 - \frac{N}{N - 1 + e^{ANt}} \right) \right] \\ R(t) &= A \frac{N^2}{N - 1 + e^{ANt}} \left[\frac{Ne^{ANt}}{N - 1 + e^{ANt}} \right] = \frac{AN^3 e^{ANt}}{(N - 1 + e^{ANt})^2} \end{aligned} \quad (۸۵-۴)$$

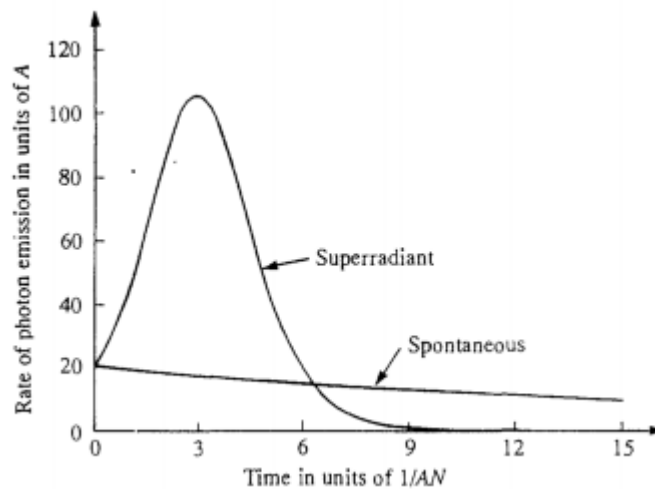
همچنین با استفاده از روابط (۱۶-۴)، (۷۸-۴) و (۸۴-۴)، متوسط انرژی اتمی خواهد شد:

$$\langle \hat{H}_A(t) \rangle = \hbar \omega_0 N |c_2(t)|^2 = \hbar \omega_0 \left(\frac{N^2}{N - 1 + e^{ANt}} \right) \quad (۸۶-۴)$$

به ازای $t = 0$ ، برای نرخ گسیل فوتون‌ها از سیستم اتمی و متوسط انرژی اتمی خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} R(0) &= AN|c_2(0)|^2[1 + (N-1)|c_1(0)|^2] = AN \\ \langle \hat{H}_A(0) \rangle &= \hbar\omega_0 N|c_2(0)|^2 = \hbar\omega_0 N \end{aligned} \right\} \quad (۸۷-۴)$$

این روابط، همان گونه که انتظار می‌رفت مربوط به N اتم غیر برهم کنشی می‌باشد. اما در زمان t در اثر به وجود آمدن اثرات دسته جمعی، نرخ گسیل $R(t)$ می‌تواند خیلی بزرگ شود. شکل (۱-۴) مقایسه بین نرخ گسیل ابرتایش طبق رابطه (۸۵-۴) و گسیل خود بخودی برای سیستمی متشکل از ۲۰ اتم را نشان می‌دهد.



شکل (۱-۴) مقایسه نرخ گسیل ابرتایش با گسیل خود بخودی برای سیستمی شامل $N = 20$ اتم [۶]

جمع بندی و کارهای پیش رو

گفتیم که در بررسی مساله برهم کنش نور و ماده، بررسی کوانتومی ماده و بررسی کوانتومی نور ضروری است. حتی در توجیه فرآیند تابش القایی در یک اتم دوترازه کوانتومی، عدم توجه به ماهیت کوانتومی نور، ما را به شکست می رساند. بنابراین در بررسی پدیده چرخش اپتیکی، ما به بازآفرینی مرجع [۴] پرداختیم که ماهیت کوانتومی نور را کاملا در نظر گرفته بود. آتکینز و همکاران با استفاده از محاسبه مقدار چشمداشتی عملگرهای استوکس کوانتومی، نتایج شناخته شده در مورد فعالیت اپتیکی را توجیه کرده اند. البته به این بررسی چند اشکال را وارد می دانیم. اول اینکه اگرچه پارامترهای استوکس در حوزه اپتیک کلاسیک شناخته شده و کارا هستند، ولی تعمیم آنها به حوزه فیزیک کوانتوم چندان سر راست نیست. مثلا اینکه عملگرهای کوانتومی استوکس با هم جابه جا نمی شوند می رساند که اندازه گیری همزمان آنها میسر نیست. بعلاوه، مقادیر چشمداشتی وقتی معتبر هستند که میزان افت و خیزهای کوانتومی کوچک باشد. در مرجع [۴] به این مساله هیچ توجهی نشده است. بعلاوه نور لیزر را باید با حالت همدوس [۱] مدل کرد. در مرجع [۴] فقط به حالت $|n\rangle$ پرداخته شده است. یک سوال که باید به آن پرداخته شود این است که آیا در حد نورهای با شدت ضعیف (تعداد کم فوتون ها)، آیا نباید اثرات کوانتومی جدیدی ظاهر شوند؟

در محاسبات [۴] فرض شده است که با محلولی رقیق از مولکولها مواجه هستیم. اما وقتی مولکولها به هم نزدیک شوند، انتظار داریم برهمکنشهای دوقطبی-دوقطبی بر فعالیت اپتیکی تاثیر گذارند. حتی پیش از آنکه برهمکنشها مهم شوند، اثرات کوانتومی مهمتری باید در نظر گرفته شوند. به مجموعه ای از اتمها باید یک تابع موج نسبت دهیم. اثرات دسته جمعی در فعالیت اپتیکی تاکنون بررسی نشده اند. مشوق ما به

این بررسی، مساله ابرتابش مجموعه اتمها است که در فصل ۳ به آن پرداختیم. تابش مجموعه ای از N اتم بدون برهمکنش می تواند خیلی بزرگتر از N برابر تابش تک اتم باشد.

مساله وقتی جذابتر می شود که به خوشه های از چندین اتم، نقطه های کوانتومی، و یا حالت چگال ماده فکر کنیم. اکثر بررسی های نظری برهمکنش نور و ماده در این حوزه، ناگفته فرض کرده اند که شدت نور بالا است و توصیف کلاسیک نور کافی است. اما ما می پنداریم در صورت توجه به ماهیت کوانتومی نور، حالت های همدوس، حالت های چگالیده، نور گرمایی ناشی از تابش جسم سیاه، ... پدیده فعالیت اپتیکی رخهای دیگر خود را نمایان خواهد ساخت.

- [1] R. Loudon, The Quantum Theory of Light, Clarendon Press, 1983.
- [2] J. J. Sakurai and J. Napolitano, Modern Quantum Mechanics, Second Edition, Addison-Wesley, 2011.
- [3] E. Merzbacher, Quantum Mechanics, Second Edition, Wiley, 1970.
- [4] P.W. Atkins and L. D. Barron, “*Quantum Field Theory of Optical Birefringence Phenomena. I. Linear and Nonlinear Optical Rotation*”, Proc. R. Soc. Lond. A **304**, 303, 1968.
- [5] T. C. Papanastasiou, G. C. Georgiou and A. N. Alexandrou, Viscous Fluid Flow, CRC Press, 2000.
- [6] L. Mandel and E. Wolf, Optical Coherence and Quantum Optics, Cambridge University Press, 1995.
- [7] L. Barron, Molecular Light Scattering and Optical Activity, Second Edition, Cambridge University Press, 2004.
- [8] G. R. Fowles, Introduction to Modern Optics, Second Edition, Dover, 1975.
- [9] P. Atkins, R. Friedman, Molecular Quantum Mechanics, Forth Edition, Oxford University Press, 2005.
- [10] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, Third Edition, Wiley, 1998.
- [11] W. W. Parson, Modern Optical Spectroscopy, Springer, 2007.
- [12] K. H. Drexhage, J. Luminescence, **1**, 693, 1970.

[13] R. H. Dicke, Phys. Rev. **93**, 99, 1954.

Abstract

Materials that rotate the plane of polarization of a linearly polarized light are called optically active materials. In this thesis, I reproduce the results of Barron and Atkins. The main character of this study is the quantization of both the electromagnetic field and the atom. Moreover, we review the superradiance effect. This cooperative effect, that N atoms radiate more than N times of an atom radiation, maybe extended to the optical activity phenomena.

Keywords: Quantization, Electromagnetic Field, Atom, Superradiance, Optical Activity



Shahrood University of Technology

Faculty of Physics

Master of Science Thesis

**A Quantum approach to Faraday effect and circular dichroism of
nanostructures**

By:

Mona Asfia

Supervisors:

Dr.Hosein Eshghi

Dr.MirFaez Miri

Sep 2014