



دانشکده فیزیک
گروه ذرات بنیادی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
فیزیک، گرایش ذرات بنیادی

عنوان

ولگشت‌های کوانتومی روی دایره و خواص آن

استادان راهنما

دکتر حسین موحدیان و دکتر مصطفی عنابستانی

دانشجو

مجید مرادی

۱۳۹۳

همان را بلندی و پستی تویی
ندانم چه ای، هر چه هستی تویی

تقدیم بہ کسانی کہ اگرچہ دوزند اما مستند،

وچہ چیز از این بہتر؟؟؟

پاس‌گزاری...

اگرچه برای پاس زحماتشان کلام و سخن را کافی نمی‌بینم اما شروع مطلب بی ذکر نامشان، نه بی‌کفایتی سخن، بلکه غفلت است. آنچه از نظر می‌گذرانید، حاصل راهنمایی، کمک و تلاش بی دریغ دو تن از بهترین کسانی است که اگر جسارت به جایگاه رفیع معلم و آموزگار نباشد، بیش و پیش از آن‌که استاد خود بدانمشان، دوستانی دلسوز یافتمشان. آنچه در این نوشتار شایسته و درخور یافتید حاصل تلاش ایشان، و آنچه ناپخته و نارسا دیدید از من است.

اساتید گرامی؛

دکتر حسین موحدیان؛ از این‌که در این مدت از محضر جنابعالی بهره‌مند گشتم، بسیار به خود می‌بالم. دکتر مصطفی عنابستانی؛ در جای‌جای این نوشتار می‌توان آثار تلاش و راهنمایی شما را دید. به دور از هرگونه تعارف و لفاظی، آنچه که بیش از هرچیز برای من مهم است، رضایت قلبی شماست. امیدوارم آنچه گردآوری شده، شایسته نام شما باشد.

همچنین لازم می‌دانم از اساتید دیگری که در این مدت از تدریس و مصاحبتشان بهره‌مند شدم، تشکر و قدردانی کنم. اساتیدی چون آقایان دکتر کاظم بی‌تقصیر، مرتضی رفیعی، محمدرضا سرکرده‌ای، حسن حسن‌آبادی، محمدرضا شجاعی، حسین توکلی، علی‌اکبر رجبی، مهدی مومنی و ریاست محترم دانشکده فیزیک دکتر سعید حسامی.

دوستان عزیز، از این‌که در این دوره در کنار شما بودم بسیار خوشحالم؛

آقایان:

حمید گیاه، مهدی کمالی، روح‌ا... اکبری، محسن حیدری، صمد امامی، محمد رنجبران، حسین بروژ، فرشید عنایتی، مصطفی شعبانی، مهدی افشاری، احمد کاوه و خالد امیرپور.

خانم‌ها:

مهناز رضازاده، هستی زاهدی، زینب مرادی، سمیه قدیری، مریم صادقی، کوثر تفاح، شکوفه فرضی، شیما ابراهیمی، شیوا محمودی، فاطمه عدالتخواه، مهسا قزوینی و نرگس جلیلی.

محمد مرادی

۱۳۹۳

تعمیر نامه

اینجانب مجید مرادی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته فیزیک دانشکده فیزیک دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان ولگشت‌های کوانتومی روی دایره و خواص آن، تحت راهنمایی دکتر حسین موحدیان و دکتر مصطفی عنابستانی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مجید مرادی

۱۳۹۳

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

در این نوشتار، ابتدا به معرفی و بررسی اجمالی ولگشت کلاسیکی روی خط می‌پردازیم. توزیع احتمال، انحراف معیار و ضریب پخش را برای آن محاسبه می‌کنیم و با کمک شبیه‌سازی بعضی از این خواص را بررسی می‌کنیم. سپس به ولگشت کوانتومی روی خط می‌پردازیم. عملگر تحول را معرفی می‌کنیم و اثر آن را بر حالت ولگشت بررسی می‌کنیم. نمودار توزیع احتمال را برای این ولگشت محاسبه کرده و تفاوت آن را با ولگشت کلاسیکی نشان خواهیم داد. همین‌طور، برای مقایسه با ولگشت کلاسیکی نمودار واریانس را برای ولگشت کوانتومی رسم می‌کنیم. نشان خواهیم داد که چگونه با داشتن هر حالت و استفاده از عملگر تحول می‌توانیم حالت بعد را بسازیم. با استفاده از تبدیل فوریه، عملگر تحول را به فضای k برده و در آن جا ویژه‌مقادیر و ویژه‌بردارهای ولگشت کوانتومی روی خط را تعیین می‌کنیم.

در فصل ۲ مدلی دیگر از ولگشت کوانتومی به نام ولگشت کوانتومی روی دایره (چرخه) را معرفی می‌کنیم. روابط تحول را برای این ولگشت نیز تعیین کرده و عملگر تحول ولگشت کوانتومی رو خط را به گونه‌ای تغییر می‌دهیم که روی ولگشتی با تعداد متناهی جایگاه همچون ولگشت روی دایره، قابل استفاده باشد. برای عملگری که به این شکل تعریف کرده‌ایم، ویژه‌مقادیر و ویژه‌بردارها را به دست می‌آوریم. سپس مفهوم توزیع حدی را معرفی می‌کنیم و تلاش می‌کنیم تا با استفاده از ویژه‌مقادیر و ویژه‌بردارهایی که پیش‌تر به دست آوردیم، یک توزیع حدی را برای ولگشت کوانتومی روی دایره به دست آورده و تحت شرایط مختلف آن را بررسی کنیم. زمان آمیختگی مفهوم دیگری است که در این فصل تعریف کرده و در ولگشت کوانتومی روی دایره برای آن حد بالایی را به دست می‌آوریم.

در فصل آخر، مدل خود را از ولگشت کوانتومی با نام ولگشت کوانتومی موبیوسی ارائه می‌دهیم. این مدل در واقع نوع بهبود یافته ولگشت کوانتومی روی دایره است. در این مدل از طریق وارد کردن پارامتری به نام α و معرفی فضای هیلبرت جدیدی به مدل، تغییراتی در مدل ولگشت کوانتومی روی دایره ایجاد می‌کنیم که منجر به بهبود بعضی از پارامترهای مد نظر، از جمله توزیع حدی و زمان آمیختگی می‌شود. نشان می‌دهیم که چگونه α باعث بهبود این پارامترها می‌شود. تغییرات ایجاد شده توسط α را در ویژه‌مقادیر و ویژه‌بردارها بررسی می‌کنیم. شکل ورود و نحوه تاثیر آن را بر تبهگنی‌های ایجاد شده برای ویژه‌مقادیر بررسی می‌کنیم و به این ترتیب می‌توانیم ببینیم که چگونه بر پارامتری چون توزیع حدی تاثیر می‌گذارد. همین روال را در مورد زمان آمیختگی نیز تکرار می‌کنیم. در پایان فضای افزوده شده به مدل و قسمت اسپینی را به صورت درهم‌تنیده در نظر می‌گیریم و تاثیر درهم‌تنیدگی بر پارامترهای مهم را در ولگشت کوانتومی موبیوسی بررسی می‌کنیم.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. ولگشت کوانتومی موبیوس: بررسی عددی ویژگی‌های حدی؛ مرادی، مجید؛ عنابستانی، مصطفی؛
کنفرانس اطلاعات کوانتومی، دانشگاه شاهرود، شاهرود، ۱۳۹۲.

فهرست مطالب

ر	لیست تصاویر
۱	لیست جداول
۲	۱ پیش‌گفتار
۶	۲ انواع ولگشت
۶	۱.۲ ولگشت تصادفی کلاسیکی
۶	۱.۱.۲ ولگشت تصادفی کلاسیکی روی خط
۱۰	۲.۱.۲ انحراف معیار
۱۳	۳.۱.۲ ضریب پخش
۱۶	۲.۲ ولگشت کوانتومی
۱۶	۱.۲.۲ ولگشت کوانتومی
۲۲	۲.۲.۲ محاسبات تحلیلی ولگشت کوانتومی روی خط
۳۳	۳ ولگشت کوانتومی روی چرخه
۳۳	۱.۳ رابطه تحول ولگشت کوانتومی روی چرخه
۳۴	۲.۳ عملگر تحول در ولگشت کوانتومی روی چرخه
۳۶	۳.۳ تعیین ویژه‌بردارهای ولگشت کوانتومی روی چرخه
۴۴	۴.۳ توزیع حدی
۵۷	۵.۳ زمان آمیختگی
۷۱	۴ ولگشت کوانتومی موبیوس‌وار
۷۱	۱.۴ روابط بازگشتی تحول ولگشت
۷۵	۲.۴ ویژه‌بردارها و ویژه‌مقادیر ولگشت موبیوسی
۸۶	۳.۴ توزیع حدی
۱۰۳	۴.۴ درهم‌تنیدگی در حالت اولیه
۱۰۸	۵.۴ نتیجه‌گیری

۱۱۱

مراجع

۱۱۶

نمایه

لیست تصاویر

۷	۱۰۲	نمودار تابع توزیع احتمال حاصل از ولگشت تصادفی کلاسیکی با ۱۰۰ گام و ۱۰۰۰۰ تکرار.
۷	۲۰۲	واریانس ولگشت تصادفی کلاسیکی در بازه ۱۰۰ گام. (تعداد تکرار: ۱۰۰۰۰ بار).
۸	۳۰۲	ضریب پخش برای ولگشت تصادفی کلاسیکی در بازه ۱۰۰ گام. جامعه آماری دارای ۱۰۰ عضو بوده است.
۹	۴۰۲	توزیع احتمال برای ولگشت تصادفی کلاسیکی. برای هر نمودار t یک مقدار ثابت در نظر گرفته شده و نتیجه برای n رسم شده است.
۱۳	۵۰۲	پهنای توزیع نرمال که برابر با انحراف معیار است.
۱۵	۶۰۲	خط ممتد: نمودار ضریب پخش بر حسب تعداد گام‌ها در ولگشت تصادفی کلاسیکی تا ۱۰۰ گام. خط چین: نمودار ضریب پخش بر حسب تعداد گام‌ها بر اساس شبیه‌سازی ولگشت تصادفی کلاسیکی با ۱۰۰ گام. (جامعه آماری شامل ۱۰۰۰ عضو بوده است.)
۲۰	۷۰۲	توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی هادامارد پس از ۱۰۰ گام با حالت اولیه $ \psi\rangle = 0\rangle 0\rangle$.
۲۰	۸۰۲	توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی هادامارد پس از ۱۰۰ گام با حالت اولیه $ \psi\rangle = 1\rangle 0\rangle$.
۲۱	۹۰۲	توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی هادامارد پس از ۱۰۰ گام با حالت اولیه $ \psi\rangle = \frac{ 0\rangle - i 1\rangle}{\sqrt{2}}$.
۲۱	۱۰۰۲	انحراف معیار ولگشت کوانتومی (خط ممتد) در مقایسه با ولگشت کلاسیکی به ازای $t = 100$.
۳۲	۱۱۰۲	توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی هادامارد پس از ۱۰۰ گام با حالت اولیه $ \psi\rangle = 0\rangle 0\rangle$.
۴۴	۱۰۳	توزیع احتمال ولگشت کوانتومی روی دایره با ۱۵۰ جایگاه و ۱۰۰ گام.
۴۷	۲۰۳	توزیع حدی ولگشت کوانتومی روی چرخه با ۲۵ جایگاه و ۱۰۰ گام؛ حالت اولیه $ \psi(0)\rangle$.
		۱۵ ۰ ۵ ۱۰ ۱۵ ۲۰ ۲۵ ۳۰ ۳۵ ۴۰ ۴۵ ۵۰ ۵۵ ۶۰ ۶۵ ۷۰ ۷۵ ۸۰ ۸۵ ۹۰ ۹۵ ۱۰۰ ۱۰۵ ۱۱۰ ۱۱۵ ۱۲۰ ۱۲۵ ۱۳۰ ۱۳۵ ۱۴۰ ۱۴۵ ۱۵۰ ۱۵۵ ۱۶۰ ۱۶۵ ۱۷۰ ۱۷۵ ۱۸۰ ۱۸۵ ۱۹۰ ۱۹۵ ۲۰۰

- ۳.۳ توزیع حدی ولگشت کوانتومی روی چرخه با ۲۵ جایگاه و ۱۰۰۰ گام؛ حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |0\rangle|5\rangle$ بوده است. خط رسم شده، فاصله از توزیع یکنواخت را نشان می‌دهد. ۴۷
- ۴.۳ توزیع حدی ولگشت کوانتومی روی چرخه با ۲۴ جایگاه و ۱۰۰۰ گام؛ حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |0\rangle|5\rangle$ بوده است. خط رسم شده، فاصله از توزیع یکنواخت را نشان می‌دهد. ۴۷
- ۵.۳ ناحیه‌هایی از دایره مثلثاتی که ویژه‌مقادیر در آن قرار می‌گیرند ۵۰
- ۶.۳ تبه‌گنی در ویژه‌مقادیر ولگشت کوانتومی روی دایره برای تعداد جایگاه‌های زوج ۵۱
- ۷.۳ توزیع حدی ولگشت کوانتومی روی چرخه با ۲۶ جایگاه و ۱۰۰۰ گام؛ حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |0\rangle|5\rangle$ بوده است. خط رسم شده، فاصله از توزیع یکنواخت را نشان می‌دهد. ۵۷
- ۸.۳ نمودار مقایسه‌ای: همانطور که دیده می‌شود $\sin\left(\frac{\delta\pi}{4}\right)$ (خط ممتد) همیشه بزرگ‌تر یا مساوی δ (خط چین) است. ۶۴
- ۹.۳ مقایسه کمان L_{ij} با $|\lambda_i - \lambda_j|$ ۶۶
- ۱۰.۳ مقایسه $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ و $\ln(n) + 1$ ۶۸
- ۱.۴ آگوست فردیناند موبیوس ۷۲
- ۲.۴ نوار موبیوس ۷۲
- ۳.۴ نمودار شبیه‌سازی توزیع حدی برای ولگشت کوانتومی روی چرخه با ۲۵ جایگاه و ۲۰۰ گام. با حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |0\rangle|5\rangle$ ۸۸
- ۴.۴ توزیع حدی برای ولگشت موبیوسی روی چرخه با ۲۵ جایگاه و ۲۰۰ گام. حالت اولیه با $|\psi(0)\rangle = |0\rangle|0\rangle|5\rangle$ و $\alpha = 0.2$ ۸۸
- ۵.۴ زمان آمیختگی بر حسب α برای ولگشت موبیوسی روی چرخه با ۲۵ جایگاه. با حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |0\rangle|0\rangle|5\rangle$ و $\alpha = 0.5$ ۸۹
- ۶.۴ توزیع حدی برای ولگشت موبیوسی روی چرخه با ۲۵ جایگاه و ۲۰۰ گام با حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |0\rangle|0\rangle|5\rangle$ و $\alpha = 0.5$ ۸۹
- ۷.۴ نمودار زمان آمیختگی بر حسب ϵ روی چرخه‌ای با ۲۵ جایگاه و ۲۰۰ گام برای ولگشت کوانتومی روی چرخه (نمودار پیوسته) با حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |0\rangle|5\rangle$ و ولگشت کوانتومی موبیوسی (نمودار نقطه-خط) با حالت اولیه به صورت $|\psi(0)\rangle = |0\rangle|0\rangle|5\rangle$ ۹۰
- ۸.۴ توزیع حدی برای ولگشت کوانتومی روی چرخه با ۲۴ جایگاه و ۵۰۰ گام با حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |0\rangle|5\rangle$ ۹۱
- ۹.۴ توزیع حدی برای ولگشت کوانتومی روی چرخه با ۲۶ جایگاه و ۵۰۰ گام با حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |0\rangle|5\rangle$ بوده است. ۹۱

- ۱۰۰۴ توزیع حدی برای ولگشت موبیوسی روی چرخه با ۲۴ جایگاه و ۵۰۰ گام با حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |0\rangle|0\rangle|5\rangle$ و $\alpha = 0/5$ ۹۲
- ۱۱۰۴ نمودار توزیع حدی برای ولگشت موبیوسی روی چرخه با ۲۶ جایگاه و ۵۰۰ گام. حالت اولیه به صورت $|\psi(0)\rangle = |0\rangle|0\rangle|5\rangle$ بوده است و $\alpha = 0/5$ ؛ $\delta = 0/0087$. ۹۲
- ۱۲۰۴ شرط تبهگنی برای ولگشت کوانتومی موبیوسی در یک چهارم اول و دوم؛ خط چین ویژه مقدار ولگشت کوانتومی روی دایره را نشان می دهد که به اندازه $\frac{\alpha\pi}{d}$ از ولگشت موبیوسی پیش است. ۹۵
- ۱۳۰۴ شرط تبهگنی برای ولگشت کوانتومی موبیوسی در یک چهارم سوم و چهارم؛ خط چین ویژه مقدار ولگشت کوانتومی روی دایره را نشان می دهد که به اندازه $\frac{\alpha\pi}{d}$ از ولگشت موبیوسی پیش است. ۹۵
- ۱۴۰۴ شرط تبهگنی برای ولگشت کوانتومی موبیوسی در یک چهارم اول و دوم؛ خط چین ویژه مقدار ولگشت کوانتومی روی دایره را نشان می دهد که به اندازه $\frac{\alpha\pi}{d}$ از ولگشت موبیوسی عقب است. ۹۶
- ۱۵۰۴ شرط تبهگنی برای ولگشت کوانتومی موبیوسی در یک چهارم سوم و چهارم؛ خط چین ویژه مقدار ولگشت کوانتومی روی دایره را نشان می دهد که به اندازه $\frac{\alpha\pi}{d}$ از ولگشت موبیوسی عقب است. ۹۷
- ۱۶۰۴ شرط تبهگنی برای ولگشت کوانتومی موبیوسی در یک چهارم اول و دوم؛ خط چین ویژه مقدار ولگشت کوانتومی روی دایره را نشان می دهد که به اندازه $\frac{\alpha\pi}{d}$ با ولگشت موبیوسی اختلاف دارد. ویژه مقادیر ولگشت موبیوسی در دو طرف ولگشت روی چرخه افتاده اند. ۹۸
- ۱۷۰۴ شرط تبهگنی برای ولگشت کوانتومی موبیوسی در یک چهارم سوم و چهارم؛ خط چین ویژه مقدار ولگشت کوانتومی روی دایره را نشان می دهد که به اندازه $\frac{\alpha\pi}{d}$ با ولگشت موبیوسی اختلاف دارد. ویژه مقادیر ولگشت موبیوسی در دو طرف ویژه مقادیر ولگشت کوانتومی روی چرخه افتاده اند. ۹۸
- ۱۸۰۴ شرط تبهگنی برای ولگشت کوانتومی موبیوسی در یک چهارم اول و دوم؛ خط چین ویژه مقدار ولگشت کوانتومی روی دایره است که به اندازه $\frac{\alpha\pi}{d}$ در دو سوی ولگشت موبیوسی افتاده اند. ۹۹
- ۱۹۰۴ شرط تبهگنی برای ولگشت کوانتومی موبیوسی در یک چهارم سوم و چهارم؛ خط چین ویژه مقدار ولگشت کوانتومی روی دایره است که به اندازه $\frac{\alpha\pi}{d}$ در دو سوی ولگشت موبیوسی افتاده اند. ۱۰۰
- ۲۰۰۴ ولگشت کوانتومی با ۲۴ جایگاه و ۱۰۰ گام؛ بالا: $\alpha = 2$. پایین: $\alpha = 0/3$ ۱۰۱
- ۲۱۰۴ ولگشت کوانتومی با ۲۴ جایگاه و ۱۰۰۰ گام؛ بالا: $\alpha = 2$. پایین: $\alpha = 0/3$ ۱۰۲
- ۲۲۰۴ ولگشت کوانتومی با ۲۵ جایگاه و ۱۰۰ گام؛ بالا: $\alpha = 0/5$. پایین: $\alpha = 0/2$ ۱۰۲
- ۲۳۰۴ ولگشت کوانتومی با ۲۵ جایگاه و ۱۰۰۰ گام؛ بالا: $\alpha = 0/5$. پایین: $\alpha = 0/2$ ۱۰۳

- ۲۴.۴ ولگشت موبیوسی با ۲۵ جایگاه، ۳۰۰ گام و حالت اولیه جدایی پذیر $|\psi\rangle = |\chi R\rangle \otimes |x\rangle$ ($\gamma = 0$) و $\alpha = 0/2$. خط رسم شده فاصله از توزیع یکنواخت را در هر جایگاه نشان می‌دهد. $\delta \simeq 0/014$ ۱۰۴
- ۲۵.۴ ولگشت موبیوسی با ۲۵ جایگاه، ۳۰۰ گام و حالت اولیه جدایی پذیر $|\psi\rangle = |\chi R\rangle \otimes |x\rangle$ ($\gamma = \frac{\pi}{4}$) و $\alpha = 0/2$. خط رسم شده فاصله از توزیع یکنواخت را در هر جایگاه نشان می‌دهد. $\delta \simeq 0/007$ ۱۰۵
- ۲۶.۴ ولگشت موبیوسی با ۲۴ جایگاه، ۳۰۰ گام و حالت اولیه جدایی پذیر $|\psi\rangle = |\chi R\rangle \otimes |x\rangle$ ($\gamma = 0$) و $\alpha = 0/2$. خط رسم شده فاصله از توزیع یکنواخت را در هر جایگاه نشان می‌دهد. $\delta \simeq 0/014$ ۱۰۵
- ۲۷.۴ ولگشت موبیوسی با ۲۴ جایگاه، ۳۰۰ گام و حالت اولیه جدایی پذیر $|\psi\rangle = |R\rangle \otimes |x\rangle$ ($\gamma = \frac{\pi}{4}$) و $\alpha = 0/2$. خط رسم شده فاصله از توزیع یکنواخت را در هر جایگاه نشان می‌دهد. $\delta \simeq 0/009$ ۱۰۶
- ۲۸.۴ نمودار ممتد: فاصله از توزیع یکنواخت بر حسب γ در ولگشت موبیوسی با ۲۵ جایگاه و ۳۰۰ گام و $\alpha = 0$. نمودار خط چین: درهم‌تنیدگی بر حسب γ ۱۰۶
- ۲۹.۴ نمودار زمان آمیختگی برای سه ولگشت با ۲۴، ۲۵ و ۲۶ جایگاه، ۳۰۰ گام و $\alpha = 0/2$ ، $\epsilon = 0/001$ و درهم‌تنیدگی بر حسب γ ۱۰۷
- ۳۰.۴ مقایسه زمان آمیختگی برای ولگشت با ۲۵ جایگاه و $\epsilon = 0/0005$ با $\gamma = 0$ (خط ممتد) و $\gamma = \frac{\pi}{4}$ (خط چین). ۱۰۷
- ۳۱.۴ مقایسه زمان آمیختگی برای ولگشت با ۲۶ جایگاه و $\epsilon = 0/0005$ با $\gamma = 0$ (خط ممتد) و $\gamma = \frac{\pi}{4}$ (خط چین). ۱۰۷
- ۳۲.۴ بهبود در زمان آمیختگی برای سه ولگشت با ۲۴، ۲۵ و ۲۶ جایگاه و $\epsilon = 0/0005$. در این نمودار تفاوت میان دو حالت درهم‌تنیده که یکی از آنها از $\gamma = 0$ و دیگری از $\gamma = \frac{\pi}{4}$ آغاز می‌کند، نشان داده شده است. ۱۰۸

لیست جداول

- ۱۰۲ احتمال وجود ولگشت در مکان n در زمان t . نمودار برای ذره‌ای رسم شده است که حرکت خود را از مبدا آغاز کرده است. ۸
- ۲۰۲ احتمال وجود ولگشت در مکان n در زمان t . محاسبات برای ذره‌ای انجام شده است که حرکت خود را از مبدا آغاز کرده است. ۱۹

فصل ۱

پیش‌گفتار

تحقیقات نظری و شواهد تجربی از اوایل و اواسط قرن بیستم ما را به این نتیجه رساند که جهان فیزیکی زیر فرمان قوانین مکانیک کوانتومی است (می‌توانید به هر کدام از کتاب‌های مقدماتی در مورد مکانیک کوانتومی مراجعه کنید: [۱] ۱۹۷۰) و [۲] ۱۹۹۴). در نتیجه یوری مانین^۱ (۱۹۸۰ [۳]) و فاینمن^۲ (۱۹۸۲ [۴]) به طور مستقل دریافتند که جهان فیزیکی می‌تواند به وسیله کامپیوترهای کوانتومی به صورت ایده‌آل شبیه‌سازی شود. یک دهه پس از آن، مطالعات نظری و امکان ساخت کامپیوترهای کوانتومی بر اساس قوانین کوانتومی مانند برهم‌نهی و تداخل میان دامنه‌های کوانتومی به یکی از حوزه‌های فعال تحقیقاتی بدل شد. الگوریتم دویچ^۳ (۱۹۸۵ [۵]) و الگوریتم دویچ-جوژا^۴ [۶] از اولین الگوریتم‌هایی بودند که نشان دادند کامپیوترهای کوانتومی می‌توانند مسائل محاسباتی خاصی را، بسیار کارآمدتر از کامپیوترهای *Deterministic* کلاسیکی حل کنند. الگوریتم سایمون^۵ (۱۹۹۴) یکی از اولین مثال‌هایی بود که نشان داد که یک الگوریتم کوانتومی می‌تواند مساله محاسبه یک تابع ناشناخته را بسیار سریع‌تر از یک الگوریتم کلاسیکی حل کند [۷] [۸]. در ۱۹۹۴، شور^۶ یک الگوریتم کوانتومی را ابداع کرد که اعداد صحیح دلخواه را با سرعتی نمایی بیش از بهترین هم‌تای کلاسیکی‌اش به اعداد اول تجزیه می‌کرد [۹] [۱۰]. در ۱۹۹۶، گروور^۷ الگوریتمی را ابداع کرد که در اصول می‌توانست یک بانک داده طبقه‌بندی نشده را با سرعتی که به صورت توان دوم از سرعت هر نوع الگوریتم کلاسیکی بزرگتر است جستجو کند [۱۱]. الگوریتم شور منجر به آغاز تحقیقات فعالی در حوزه اطلاعات کوانتومی و محاسبات کوانتومی در گستره‌ای وسیع از شاخه‌ها شامل فیزیک کوانتومی علوم کامپیوتر، ریاضیات و مهندسی شد. این تحقیق تأثیرات جدید زیادی را آشکار کرد که کاملاً با هم‌تاهای کلاسیک خود فرق

^۱Yuri Manin

^۲Feynman

^۳Deutsch

^۴Deutsch-Jozsa

^۵Simon

^۶Shor

^۷Grover

دارند. طراحی و تحلیل الگوریتم‌های کوانتومی برای حل کارآمدتر مسائل گوناگون نسبت به الگوریتم‌های کلاسیکی به حوزه تحقیقاتی پر جنب و جوشی بدل شده است [۱۲] [۱۳].

بسیاری از الگوریتم‌های کلاسیک مبتنی بر ولگشت تصادفی هستند. شبیه‌سازی زنجیره مارکوف^۸ که به عنوان یک ابزار الگوریتمی قوی ظهور کرده است [۱۴]، یکی از این مثال‌ها است. همانند ولگشت تصادفی کلاسیکی، نسخه کوانتومی هم به جزئی مهم از الگوریتم‌ها و محاسبات کوانتومی تبدیل شده است.

ولگشت کوانتومی، آن گونه که امروز شناخته شده است، شکل تعمیم یافته ولگشت تصادفی کلاسیکی است که با استفاده از جنبه‌هایی از مکانیک کوانتومی از قبیل برهم‌نهی و تداخل دامنه‌های کوانتومی توسعه یافته است. در ولگشت تصادفی کلاسیکی، ذره با احتمالی مشخص در فضای مکان حرکت می‌کند، در حالی که در ولگشت کوانتومی که با یک برهم‌نهی از حالت‌ها^۹ سروکار داریم، ذره با پویش همزمان مسیرهای ممکن چندگانه حرکت می‌کند. این باعث می‌شود تا واریانس ولگشت کوانتومی روی یک خط با توان دوم با تعداد گام‌ها (زمان) بزرگ شود، در مقایسه با رشد خطی ولگشت تصادفی کلاسیکی [۱۵] [۱۶]. در ولگشت کوانتومی پس از اندازه‌گیری یک نتیجه احتمالی به دست می‌آید.

همانند هم‌تای کلاسیکی‌اش که تقریباً در تمام شاخه‌های دانش کاربردهایی پیدا کرده است [۱۷] [۱۸]، ثابت شده است که ولگشت کوانتومی هم ابزاری سودمند برای الگوریتم‌های کوانتومی به منظور مطالعه، کنترل و توصیف دینامیک بسیاری از سیستم‌های فیزیکی است. در ادامه، تاریخچه ولگشت کوانتومی و پیشرفتی را که در به کارگیری آن برای الگوریتم‌های کوانتومی و مطالعه دینامیک سیستم‌های فیزیکی صورت گرفته است را خلاصه می‌کنیم.

اگرچه ولگشت تصادفی کوانتومی^{۱۰} نخستین بار توسط آهارونوف^{۱۱} و دیگران (۱۹۹۳ [۱۹]) معرفی شد، ایده جستجوی مسیرهای چندگانه به صورت همزمان با استفاده از انتگرال مسیر، باز می‌گردد به ریازانوف^{۱۲} (۱۹۵۸ [۲۰]) و فاینمن و هیبز^{۱۳} (۱۹۶۵ [۲۱]). میر^{۱۴} (۱۹۶۶) دینامیک ذره کوانتومی را در یک فرمول‌بندی گاز شبکه‌ای کوانتومی مطالعه کرد. این دینامیک در رابطه با تداخل اجزای در حال حرکت به چپ و راست دامنه در جایگاه^{۱۵} های مشخص بود [۲۲] [۲۳]. بر اساس این ایده‌ها، مفهوم ولگشت کوانتومی توسعه یافت و اکنون به دو شکل استاندارد مورد مطالعه قرار می‌گیرد: ولگشت کوانتومی زمان-پیوسته و ولگشت کوانتومی زمان-گسسته. ولگشت کوانتومی زمان-پیوسته توسط فرهی^{۱۶} و

^۸Markov

^۹States

^{۱۰}برخلاف هم‌تای کلاسیکی‌اش، تحول نسخه کوانتومی یکانی و معکوس‌پذیر است و هیچ‌گونه حالت تصادفی در طول زمان تحول ندارد. بنابراین، با کنار گذاشتن عبارت "تصادفی"، ولگشت کوانتومی کاربرد مرجح یافت.

^{۱۱}Aharonov

^{۱۲}Riazanov

^{۱۳}Hibbs

^{۱۴}Meyer

^{۱۵}Node

^{۱۶}Farhi

گوتمن^{۱۷} ([۲۴]) و ولگشت کوانتومی زمان-گسسته توسط واتروس^{۱۸} (۲۰۰۱ [۲۵]) معرفی شدند. نوعی خاص از ولگشت کوانتومی زمان-گسسته که به عنوان ولگشت هادامارد^{۱۹} شناخته می‌شود، توسط آمباینس^{۲۰} و دیگران (۲۰۰۱ [۱۵]) معرفی شد. یک مقاله مروری توسط کمپه^{۲۱} [۲۶] به تفصیل به همراه بعضی کاربردهای الگوریتمی، درباره این دو نوع بحث می‌کند.

هم ولگشت تصادفی زمان-پیوسته و هم زمان-گسسته به طور گسترده برای بسیاری از مسائل به کار رفته‌اند. چندین الگوریتم جستجوی کوانتومی طرح شده‌اند (مثلاً نگاه کنید به شنوی^{۲۲} و دیگران (۲۰۰۳ [۲۷])؛ چایلدز^{۲۳} و گلدستون^{۲۴} (۲۰۰۴ [۲۸])؛ [۲۹]؛ آمباینس و دیگران (۲۰۰۵ [۳۰])؛ آرانسن^{۲۵} و آمباینس (۲۰۰۵ [۳۱])؛ ماگنیز^{۲۶} و دیگران (۲۰۰۷ [۳۲]). مقاله مروری آمباینس (۲۰۰۴ [۳۳]) درباره بعضی از این الگوریتم‌ها به تفصیل بحث می‌کند. آمباینس (۲۰۰۷ [۳۴]) ولگشت کوانتومی را در یک الگوریتم کوانتومی بهینه برای تشخیص عناصر به کار برد. ولگشت کوانتومی در مورد بسیاری از مسائل دیگر درباره مدل جستجو، مانند کاوش مثالی توسط ماگنیز و دیگران (۲۰۰۵ [۳۵])، آزمون ضرب ماتریس توسط بورمان^{۲۷} و اشپالک^{۲۸} (۲۰۰۶ [۳۶])، آزمون جابه‌جایی گروه توسط ماگنیز و نایاک^{۲۹} (۲۰۰۷ [۳۷])، فرمول‌های بولین^{۳۰} توسط آمباینس و دیگران (۲۰۰۷ [۳۸]) و ریچارد^{۳۱} و اشپالک [۳۹] به کار رفته است.

گذشته از کاربرد در الگوریتم‌های کوانتومی، ولگشت کوانتومی به عنوان یک ابزار بالقوه در درک پدیده‌های گوناگون در سیستم‌های فیزیکی ظاهر شده است و برای نشان دادن کنترل ارتباط در سیستم‌های کوانتومی بس ذره‌ای به کار گرفته شده است. انگل^{۳۲} و دیگران (۲۰۰۷ [۴۰]) و محسنی^{۳۳} و دیگران (۲۰۰۸ [۴۱]) انتقال موج‌گونه انرژی در سیستم‌های فوتوسینتتیک^{۳۴} را توضیح دادند، سوما^{۳۵} و دیگران (۲۰۰۸ [۴۱])

^{۱۷}Gutmann

^{۱۸}Watrous

^{۱۹}Hadamard

^{۲۰}Ambainis

^{۲۱}Kempe2003

^{۲۲}Shenvi

^{۲۳}Childs

^{۲۴}Goldstone

^{۲۵}AAronson

^{۲۶}Magniez

^{۲۷}Buhrman

^{۲۸}Spalek

^{۲۹}Nayak

^{۳۰}Boolean

^{۳۱}Reichardt

^{۳۲}Engel

^{۳۳}Mohseni

^{۳۴}Photosynthetic

^{۳۵}Somma

[۴۲] شبیه‌سازی کوانتومی فرآیندهای پخت کلاسیکی را توصیف کردند و چاندراشکار^{۳۶} و لافللام^{۳۷} (۲۰۰۸ [۴۳]) کنترل کوانتومی همدوس^{۳۸} مرتبط در بازتوزیع اتم‌ها در شبکه اپتیکی را نشان دادند. بعضی پیشرفت‌های تجربی در به‌کارگیری ولگشت کوانتومی گزارش شده‌اند. دو^{۳۹} و دیگران (۲۰۰۳ [۴۴]) و رایان^{۴۰} و دیگران (۲۰۰۵ [۴۵]) ولگشت کوانتومی زمان-پیوسته و ولگشت کوانتومی زمان-گسسته را به ترتیب برای سیستم تشدید مغناطیسی هسته‌ای^{۴۱} دو کیوبیتی و سه کیوبیتی به کار بردند. ولگشت تصادفی زمان-گسسته را گراسمن^{۴۲} و دیگران (۲۰۰۴ [۴۶]) با چگالش بوز-اینشتین سدیم و اخیراً پرتز^{۴۳} و دیگران (۲۰۰۸ [۴۷]) با استفاده از انتشار فوتون در شبکه‌های موجبر به کار گرفته‌اند. سایر طرح‌های به‌کارگیری نیز ارائه شده‌اند: تراوگلیون^{۴۴} و میلبرن^{۴۵} (۲۰۰۲ [۴۸]) در یک تله یونی، دور^{۴۷} و دیگران (۲۰۰۲ [۴۹]) و اکرت^{۴۸} و دیگران (۲۰۰۵ [۵۰]) در مورد اتم‌های سرد خنثی در تله‌های اپتیکی، چاندراشکار (۲۰۰۶ [۵۱]) با استفاده از چگالش بوز-اینشتین، ما^{۴۹} و دیگران (۲۰۰۶ [۵۲]) با استفاده از مُد شتاب‌دهنده کوانتومی، منوچهری^{۵۰} و وانگ^{۵۱} (۲۰۰۸ [۵۳]) در یک آرایه از نقطه‌های کوانتومی.

^{۳۶}Chandrashekar

^{۳۷}Laflamme

^{۳۸}Coherent

^{۳۹}Du

^{۴۰}Ryan

^{۴۱}Nuclear Magnetic Resonance (NMR)

^{۴۲}Grossman

^{۴۳}Perets

^{۴۴}Travaglione

^{۴۵}Milburn

^{۴۶}Milburn

^{۴۷}Dur

^{۴۸}Eckert

^{۴۹}Ma

^{۵۰}Manochehri

^{۵۱}Wang

۲

فصل

انواع ولگشت

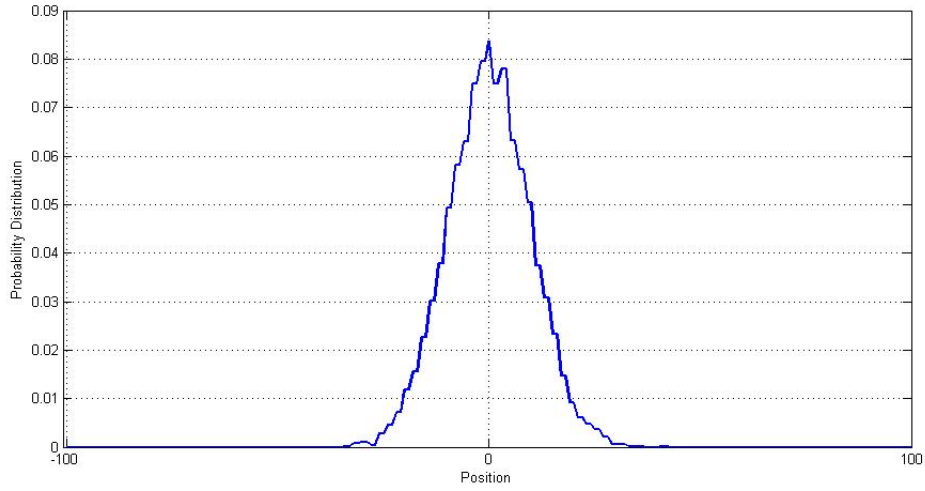
۱.۲ ولگشت تصادفی کلاسیکی

۱.۱.۲ ولگشت تصادفی کلاسیکی روی خط

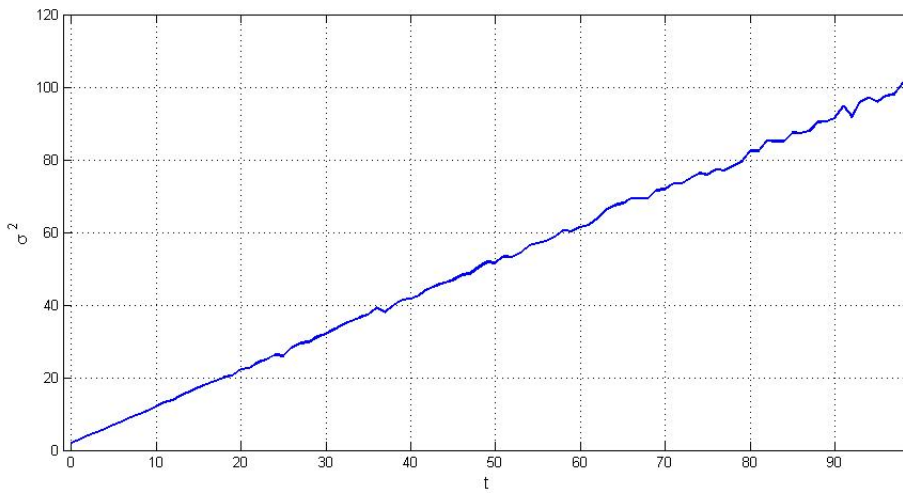
در ساده‌ترین مثال از ولگشت تصادفی، ولگشت مقید به حرکت روی یک خط راست است. به این نوع از ولگشت، ولگشت یک بعدی گفته می‌شود. در این مورد، گام‌ها در یکی از دو سو، ولگشت را به پیش می‌برند. ما این دو سو را «راست» و «چپ» می‌نامیم. چنین کاری همه چیز را آسان می‌کند، زیرا اکنون می‌توانیم با کشیدن یک خط افقی روی یک برگه و نشان دادن این که ولگشت کجا خواهد بود، مکان ولگشت را توصیف کنیم. بیایید در نظر بگیریم که ولگشت با پرتاب یک سکه مشخص می‌کند که گام بعدی به کدام سو خواهد بود. اگر سکه خط بیاید، ولگشت گامی به راست برخواهد داشت و اگر شیر بیاید، گامی به چپ بر می‌دارد. نتیجه پرتاب یک سکه با احتمال مساوی شیر یا خط خواهد بود، بنابراین ولگشت به روشنی متقارن خواهد بود، زیرا هیچ ترجیحی برای حرکت به چپ یا راست وجود ندارد. به این ترتیب می‌توان نشان داد که توزیع احتمال برای چنین ولگشتی به صورت یک نمودار گاوسی خواهد بود، چنان که نتایج حاصل از شبیه‌سازی در شکل ۱.۲ نیز نشان دهنده همین مطلب هستند. همچنین در ادامه این موضوع به صورت تحلیلی نشان داده خواهد شد.

همچنین می‌توان با استفاده از شبیه‌سازی، واریانس (شکل ۲.۲) و ضریب پخش (شکل ۳.۲) را نیز در ولگشت تصادفی کلاسیکی به دست آورد.

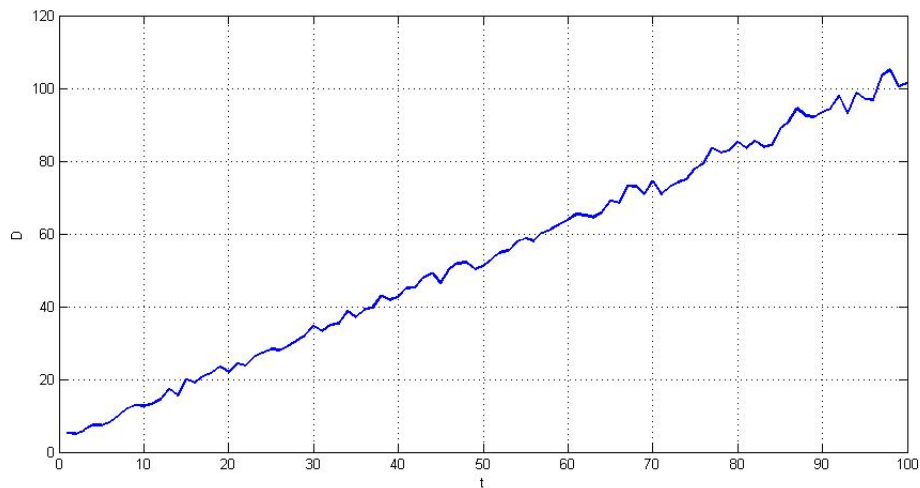
اگر ذره در $t = 0$ با احتمال $p = 1$ در مکان $n = 0$ حضور داشته باشد، پس از گام اول یعنی $t = 1$ با احتمال $\frac{1}{2}$ در $n = 1$ یا $n = -1$ خواهد بود. توجه به این نکته مهم است که چون ولگشت باید حتماً یک گام بردارد، پس جابه‌جایی آن قطعی خواهد بود. تنها نکته‌ای که وجود دارد در مورد جهت این جابه‌جایی خواهد بود. بنابراین پس از گام اول احتمال حضور ذره در مبدا صفر خواهد بود.



شکل ۱.۲: نمودار تابع توزیع احتمال حاصل از ولگشت تصادفی کلاسیکی با ۱۰۰ گام و ۱۰۰۰۰ تکرار.



شکل ۲.۲: واریانس ولگشت تصادفی کلاسیکی در بازه ۱۰۰ گام. (تعداد تکرار: ۱۰۰۰۰ بار)



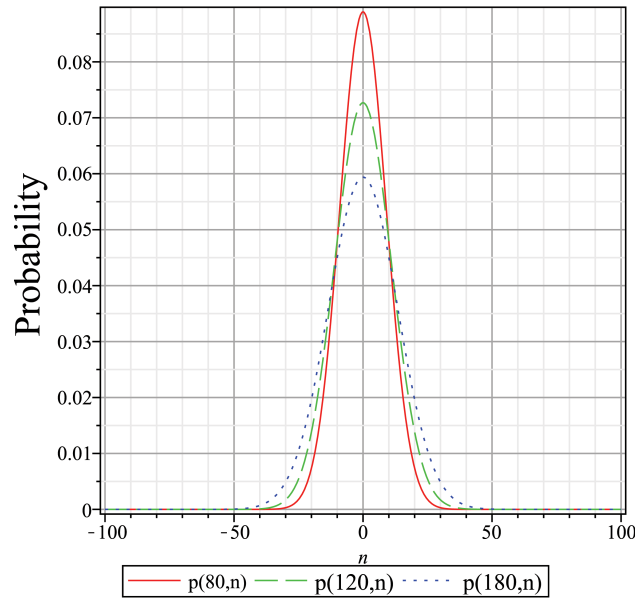
شکل ۰.۲: ضریب پخش برای ولگشت تصادفی کلاسیکی در بازه ۱۰۰ گام. جامعه آماری دارای ۱۰۰ عضو بوده است.

$$p(t = 1, n = 0) = 0 \tag{1.2}$$

از جدول ۱.۲ مشاهده می‌شود که احتمال حضور ذره در مکان‌های زوج فقط به ازای تعداد گام‌های زوج و احتمال حضور ذره در مکان‌های فرد تنها به ازای تعداد گام‌های فرد، غیر صفر است. این واقعیت را می‌توان به صورت تحلیلی هم ثابت کرد [۱۶].

جدول ۱.۲: احتمال وجود ولگشت در مکان n در زمان t . نمودار برای ذره‌ای رسم شده است که حرکت خود را از مبدا آغاز کرده است.

گام	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	$\frac{1}{2}$	۰	۰	۰	۰	۰
۲	۰	۰	$\frac{1}{4}$	۰	۰	۰	۰
۳	۰	$\frac{3}{8}$	۰	$\frac{1}{8}$	۰	۰	۰
۴	۰	۰	$\frac{1}{4}$	۰	$\frac{1}{16}$	۰	۰
۵	۰	$\frac{5}{16}$	۰	$\frac{5}{32}$	۰	$\frac{1}{32}$	۰
۶	۰	۰	$\frac{15}{64}$	۰	$\frac{3}{32}$	۰	$\frac{1}{64}$



شکل ۴.۲: توزیع احتمال برای ولگشت تصادفی کلاسیکی. برای هر نمودار t یک مقدار ثابت در نظر گرفته شده و نتیجه برای n رسم شده است.

می‌توان نشان داد احتمال حضور ذره در مکان‌های مختلف n به ازای تعداد گام‌های t را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد [۵۴، ۵۵].

$$p(t, n) = \frac{1}{\sqrt{t}} \binom{t}{\frac{t+n}{2}} \quad (۲.۲)$$

که در آن: $\binom{a}{b} = \frac{a!}{(a-b)!b!}$ ، که عبارت $\frac{t+n}{2}$ در رابطه ۲.۲ باید صحیح باشد و از آنجایی n و t هر دو صحیح هستند، باید یا هر دو زوج باشند و یا هر دو فرد.

با رسم نمودار می‌توان دریافت که این توزیع دو جمله‌ای به صورت یک منحنی گاوسی است. در مورد شکل نمودار باید گفت که منحنی(های) به دست آمده پوش توزیع نقاط است. زیرا همان‌طور که پیش‌تر گفته شد، اگر t زوج باشد، احتمال حضور ولگشت در مکان‌های با n فرد صفر خواهد بود. می‌توان دید که با افزایش تعداد گام‌ها (t) نمودار شکل تیز خود را از دست می‌دهد. در نتیجه از آنجا که سطح زیر نمودار باید برابر با یک باشد و از شکل هم مشخص است، نمودار پهن‌تر خواهد شد.

فرض کنید ولگشت t گام برداشته است. یعنی سکه را t بار پرتاب کرده است. اگر u خط و $t - u$ شیر آمده باشد، ولگشت u گام به راست و $t - u$ گام به چپ برداشته است. فرض کنید هر گام ذره را به اندازه l جابه‌جا کند. بنابراین ولگشت فاصله

$$n = ul - (t - u)l = l(2u - t) \quad (۳.۲)$$

را طی می‌کند. اما از آنجا که استفاده از یک سکه سالم در ولگشت تصادفی کلاسیکی منجر به تساوی

احتمال شیر یا خط آمدن سکه می‌شود، می‌توان گفت که برای t های بزرگ، تعداد برآیندهای با نتیجه شیر و خط برابر خواهد بود. با در نظر گرفتن این نکته می‌توان گفت که $\langle u \rangle = \frac{t}{\sqrt{t}}$ ، که خود باعث می‌شود تا به $\langle n \rangle = 0$ برسیم.

۲.۱.۲ انحراف معیار

برای محاسبه انحراف معیار، با استفاده از تقریب استرلینگ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} t! &\approx \sqrt{2\pi t} t^t e^{-t} \\ \Rightarrow \ln t! &= t \ln t - t + \frac{1}{2} \ln(2\pi t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

اکنون از توزیع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم:

$$p(t, n) = \frac{1}{\sqrt{t}} \binom{t}{\frac{t+n}{2}} \quad (5.2)$$

با گرفتن \ln از دو طرف رابطه داریم:

$$\begin{aligned} \ln P(t, n) &= -t \ln 2 + t \ln t - t + \frac{1}{2} \ln(2\pi t) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2}(t+n) \ln \frac{1}{2}(t+n) - \frac{1}{2}(t+n) + \frac{1}{2} \ln(\pi(t+n)) \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2}(t-n) \ln \frac{1}{2}(t-n) - \frac{1}{2}(t-n) + \frac{1}{2} \ln(\pi(t-n)) \right) \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned}
 \ln P(t, n) &= -t \ln \Psi + t \ln t - t + \frac{1}{\Psi} \ln(\Psi \pi t) - \frac{1}{\Psi}(t+n) \ln \frac{1}{\Psi}(t+n) + \frac{1}{\Psi}(t+n) \\
 &\quad - \frac{1}{\Psi} \ln(\pi(t+n)) - \frac{1}{\Psi}(t-n) \ln \frac{1}{\Psi}(t-n) + \frac{1}{\Psi}(t-n) - \frac{1}{\Psi} \ln(\pi(t-n)) \\
 &= -t \ln \Psi + t \ln t + \frac{1}{\Psi} \ln(\Psi \pi t) - \frac{1}{\Psi}(t+n) \ln \frac{1}{\Psi}(t+n) - \frac{1}{\Psi} \ln(\pi(t+n)) \\
 &\quad - \frac{1}{\Psi}(t-n) \ln \frac{1}{\Psi}(t-n) - \frac{1}{\Psi} \ln(\pi(t-n)) \\
 &= -t \ln \Psi + t \ln t + \frac{1}{\Psi} \ln(\Psi \pi t) - \frac{1}{\Psi}(t+n)(-\ln \Psi + \ln(t+n)) \\
 &\quad - \frac{1}{\Psi}(t-n)(-\ln \Psi + \ln(t-n)) - \frac{1}{\Psi} \ln(\pi(t+n)) - \frac{1}{\Psi} \ln(\pi(t-n)) \\
 &= -t \ln \Psi + t \ln t + \frac{1}{\Psi} \ln(\Psi \pi t) + \frac{t}{\Psi} \ln \Psi - \frac{t}{\Psi} \ln(t+n) + \frac{n}{\Psi} \ln \Psi - \frac{n}{\Psi} \ln(t+n) \\
 &\quad + \frac{t}{\Psi} \ln \Psi - \frac{t}{\Psi} \ln(t-n) - \frac{n}{\Psi} \ln \Psi + \frac{n}{\Psi} \ln(t-n) - \frac{1}{\Psi} \ln(\pi(t+n)) - \frac{1}{\Psi} \ln(\pi(t-n)) \\
 &= t \ln t + \frac{1}{\Psi} \ln(\Psi \pi t) - \frac{1}{\Psi}(t+n) \ln(t+n) - \frac{1}{\Psi}(t-n) \ln(t-n) - \frac{1}{\Psi} \ln(\pi(t+n)) \\
 &\quad - \frac{1}{\Psi} \ln(\pi(t-n)) \\
 &= t \ln t + \frac{1}{\Psi} \ln(\Psi \pi t) - \frac{1}{\Psi}(t+n) \ln(t(1 + \frac{n}{t})) - \frac{1}{\Psi}(t-n) \ln(t(1 - \frac{n}{t})) \\
 &\quad - \frac{1}{\Psi} \ln(\pi(t+n)) - \frac{1}{\Psi} \ln(\pi(t-n)) \\
 &= t \ln t + \frac{1}{\Psi} \ln(\Psi \pi t) - \frac{1}{\Psi}(t+n)(\ln t + \ln(1 + \frac{n}{t})) - \frac{1}{\Psi}(t-n)(\ln t + \ln(1 - \frac{n}{t})) \\
 &\quad - \frac{1}{\Psi} \ln(\pi(t+n)) - \frac{1}{\Psi} \ln(\pi(t-n))
 \end{aligned}$$

(۷.۲)

اکنون برای $\ln(1 + \frac{n}{t})$ و $\ln(1 - \frac{n}{t})$ از دو جمله اول بسط دو جمله ای به صورت:

$$\ln(x + 1) = x - x^2/2 \tag{۸.۲}$$

استفاده می‌کنیم. با بازنویسی معادله (۷.۱) داریم:

$$\begin{aligned}
 \ln P(t, n) &= t \ln t + \frac{1}{\nu} \ln(\nu \pi t) - \frac{1}{\nu} (t+n) \left(\ln t + \frac{n}{t} - \frac{1}{\nu} \left(\frac{n}{t}\right)^\nu \right) \\
 &\quad - \frac{1}{\nu} (t-n) \left(\ln t - \frac{n}{t} - \frac{1}{\nu} \left(\frac{n}{t}\right)^\nu \right) - \frac{1}{\nu} \ln(\pi(t+n)) - \frac{1}{\nu} \ln(\pi(t-n)) \\
 &= t \ln t + \frac{1}{\nu} \ln(\nu \pi t) - \frac{t}{\nu} \ln t - \frac{n}{\nu} + \frac{t}{\nu} \left(\frac{n}{t}\right)^\nu - \frac{n}{\nu} \ln t - \frac{n^\nu}{\nu t} + \frac{n}{\nu} \left(\frac{n}{t}\right)^\nu - \frac{t}{\nu} \ln t + \frac{n}{\nu} \\
 &\quad + \frac{t}{\nu} \left(\frac{n}{t}\right)^\nu + \frac{n}{\nu} \ln t - \frac{n^\nu}{\nu t} - \frac{n}{\nu} \left(\frac{n}{t}\right)^\nu - \frac{1}{\nu} \ln(\pi t (1 + \frac{n}{t})) - \frac{1}{\nu} \ln(\pi t (1 - \frac{n}{t})) \\
 &= \frac{1}{\nu} \ln(\nu \pi t) + \frac{t}{\nu} \left(\frac{n}{t}\right)^\nu - \frac{n^\nu}{t} - \ln \pi t - \frac{1}{\nu} \left(\frac{n}{t} - \frac{1}{\nu} \left(\frac{n}{t}\right)^\nu\right) - \frac{1}{\nu} \left(-\frac{n}{t} - \frac{1}{\nu} \left(\frac{n}{t}\right)^\nu\right) \\
 &= \frac{1}{\nu} \ln(\nu \pi t) - \ln \pi t + \frac{t}{\nu} \left(\frac{n}{t}\right)^\nu - \frac{n^\nu}{t} - \frac{n}{\nu t} + \frac{1}{\nu} \left(\frac{n}{t}\right)^\nu + \frac{n}{\nu t} + \frac{1}{\nu} \left(\frac{n}{t}\right)^\nu \\
 &= \frac{1}{\nu} \ln(\nu \pi t) - \ln \pi t - \frac{n^\nu}{\nu t} - \frac{n^\nu}{\nu t} = \ln \frac{\sqrt{\nu \pi t}}{\pi t} - \frac{n^\nu}{\nu t} - \frac{n^\nu}{\nu t}
 \end{aligned} \tag{۹.۲}$$

در اینجا به دلیل کوچک بودن $\frac{n^\nu}{\nu t}$ در مقابل سایر جملات، می‌توان از آن چشمپوشی کرد:

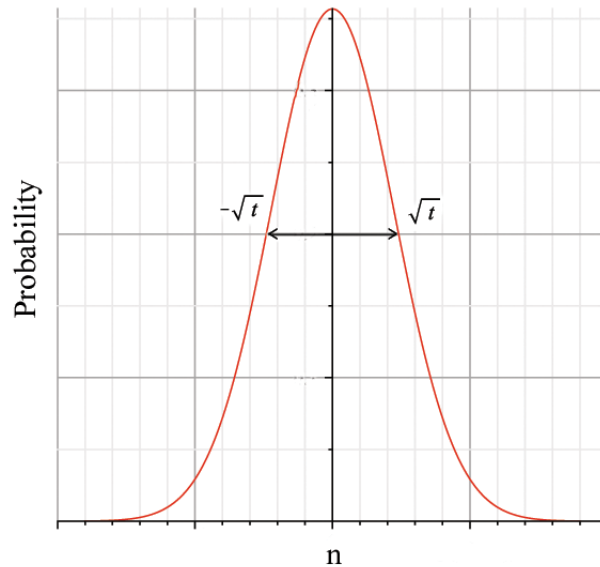
$$\begin{aligned}
 \ln P(t, n) &= \ln \frac{\sqrt{\nu \pi t}}{\pi t} - \frac{n^\nu}{\nu t} \Rightarrow \ln P(t, n) = \ln \frac{\sqrt{\nu \pi t}}{\pi t} + \ln \left(e^{-\frac{n^\nu}{\nu t}} \right) \\
 \Rightarrow \ln P(t, n) &= \ln \left(\frac{\sqrt{\nu \pi t}}{\pi t} \left(e^{-\frac{n^\nu}{\nu t}} \right) \right) \Rightarrow P(t, n) = \frac{\sqrt{\nu \pi t}}{\pi t} \left(e^{-\frac{n^\nu}{\nu t}} \right) \tag{۱۰.۲} \\
 \Rightarrow P(t, n) &= \frac{\nu}{\sqrt{\nu \pi t}} e^{-\frac{n^\nu}{\nu t}}
 \end{aligned}$$

معادله به دست آمده بسیار شبیه توزیع گاوسی یا نرمال است.

$$P_{Gaussian} = \frac{1}{\sqrt{\nu \pi t}} e^{-\frac{n^\nu}{\nu t}} \tag{۱۱.۲}$$

البته در توزیع گاوسی t یک عدد ثابت است. پهنای توزیع نرمال به صورت نصف فاصله میان دو نقطه عطف توزیع نرمال تعریف می‌شود و از طرفی انحراف معیار برابر است با پهنای توزیع نرمال [۵۶]. بنابراین ابتدا دو بار از توزیع نرمال نسبت به n مشتق می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^\nu P(t, n)}{\partial n^\nu} &= \frac{\partial^\nu}{\partial n^\nu} \left(\frac{\nu}{\sqrt{\nu \pi t}} e^{-\frac{n^\nu}{\nu t}} \right) \\
 \Rightarrow \frac{\partial^\nu P(t, n)}{\partial n^\nu} &= -e^{-1/2 \frac{n^\nu}{t}} \sqrt{\nu} t^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + n^\nu e^{-1/2 \frac{n^\nu}{t}} \sqrt{\nu} t^{-2} \frac{1}{\sqrt{\pi t}}
 \end{aligned} \tag{۱۲.۲}$$



شکل ۵.۲: پهنای توزیع نرمال که برابر با انحراف معیار است.

حال رابطه به دست آمده را برابر با صفر قرار می‌دهیم و آن را برای n - مکان ولگشت - حل می‌کنیم تا مکان نقاط عطف به دست آید:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P(t,n)}{\partial n^2} &= 0 \\ \Rightarrow -e^{-1/2 \frac{n^2}{t}} \sqrt{2} t^{-1} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + n^2 e^{-1/2 \frac{n^2}{t}} \sqrt{2} t^{-2} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} &= 0 \\ \Rightarrow e^{-1/2 \frac{n^2}{t}} \sqrt{2} t^{-1} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} &= n^2 e^{-1/2 \frac{n^2}{t}} \sqrt{2} t^{-2} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \\ \Rightarrow n &= \pm \sqrt{t} \end{aligned} \quad (13.2)$$

بنابراین فاصله میان دو نقطه عطف برابر است با $2\sqrt{t}$ و در نتیجه انحراف معیار نصف این مقدار یعنی \sqrt{t} است.

۳.۱.۲ ضریب پخش

راه دیگر تعیین انحراف معیار استفاده از تعریف آن است:

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (14.2)$$

اگر ولگشت در هرگام به اندازه L جابه‌جا شود و احتمال آن که به سمت راست برود را با p نشان دهیم، می‌توان گفت که مقدار چشمداشتی جابه‌جایی پس از نخستین تکرار^۱ به صورت زیر تعیین می‌شود:

^۱iteration

$$\langle x \rangle = p(+L) + (1-p)(-L) = pL - L + pL = (2p-1)L \quad (15.2)$$

میانگین مربع جابه‌جایی هم برابر خواهد بود با:

$$\langle x^2 \rangle = p(+L)^2 + (1-p)(-L)^2 \quad (16.2)$$

بعد از T تکرار مقدار چشمداشتی جابه‌جایی و میانگین مربع جابه‌جایی به این شکل خواهند بود:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= Tp(+L) + T(1-p)(-L) = TpL - TL + TpL = (2p-1)TL \\ \langle x^2 \rangle &= Tp(+L)^2 + T(1-p)(-L)^2 = TpL^2 + TL^2 - TpL^2 = TL^2 \end{aligned} \quad (17.2)$$

برای ولگشتی که به صورت متقارن با احتمال مساوی $\frac{1}{2}$ به چپ یا راست جابه‌جا می‌شود، $\langle x \rangle = 0$ است. بنابراین می‌توان واریانس و انحراف معیار را به شکل زیر حساب کرد.

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \\ \Rightarrow \sigma^2 &= TL^2 \\ \Rightarrow \sigma &= \sqrt{TL} \end{aligned} \quad (18.2)$$

که اگر $L = 1$ مشابه همان نتایجی است که پیش‌تر در به دست آوردیم. با توجه به تعریف ضریب پخش [57]:

$$D = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial \sigma^2}{\partial t} \quad (19.2)$$

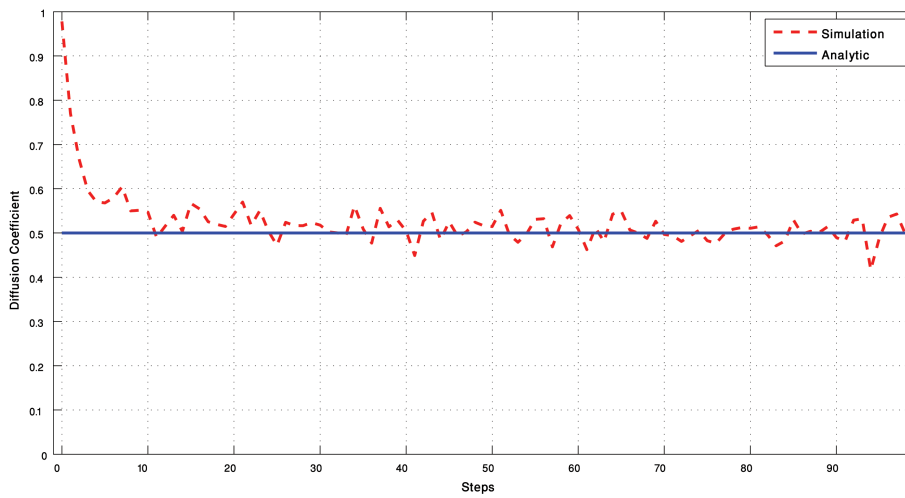
که در آن $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ است [57]. (هنگامی که $\langle x \rangle = 0$) یعنی:

$$D = \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle x^2 \rangle}{T} \quad (20.2)$$

ضریب پخش را برای ولگشت تصادفی کلاسیکی به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$D_{CRW}(T) = \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle x^2 \rangle}{T} \sim \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{T} = \frac{1}{2} \quad (21.2)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، ضریب پخش متناسب با یک عدد ثابت است. نمودار رابطه به دست آمده برای ضریب پخش ولگشت کلاسیکی در شکل ۶.۲ رسم شده است که قابل مقایسه با نتایجی است



شکل ۶.۲: خط ممتد: نمودار ضریب پخش بر حسب تعداد گام‌ها در ولگشت تصادفی کلاسیکی تا ۱۰۰ گام. خط چین: نمودار ضریب پخش بر حسب تعداد گام‌ها بر اساس شبیه‌سازی ولگشت تصادفی کلاسیکی با ۱۰۰ گام. (جامعه آماری شامل ۱۰۰۰ عضو بوده است.)

که از شبیه‌سازی به دست آمده است (شکل ۳.۲). در شکل ۶.۲ شبیه‌سازی برای جامعه‌ای از ۱۰۰۰۰ ولگشت کلاسیکی که هرکدام ۱۰۰ گام برداشته‌اند، انجام گرفته است.

۲.۲ ولگشت کوانتومی

۱.۲.۲ ولگشت کوانتومی

مدل‌های کوانتومی پدیده‌ها معمولا تحت فرآیندی با عنوان کوانتش از روی فرآیندهای کلاسیکی ساخته می‌شوند [۵۶]. مثلا متغیرهایی همچون تکانه و انرژی با عملگرهایی جایگزین می‌شوند که بر فضای هیلبرتی که اندازه آن بستگی به درجه آزادی سیستم دارد، عمل می‌کنند. حالت سیستم توسط یک بردار در این فضای هیلبرت معرفی می‌شود. برای سیستم‌هایی که از بیش از یک جز تشکیل شده‌اند، فضای هیلبرت کلی از ضرب تانسوری فضای هیلبرت هر یک از اجزا تشکیل می‌شود. اگر سیستم یک سیستم ایزوله باشد، تحول سیستم از یک عملگر یکانی پیروی می‌کند. ایزوله بودن سیستم از جهان خارج و یکانی بودن عملگر تحول آن منجر می‌شود تا این فرآیند یک فرآیند غیر تصادفی باشد. به همین دلیل است که اغلب ولگشت تصادفی کوانتومی را تنها ولگشت کوانتومی می‌نامند.

به طور کلی دو نوع ولگشت کوانتومی داریم: ولگشت کوانتومی پیوسته [۲۴] [۵۸] که در آن می‌توان ولگشت را مستقیما روی فضای مکان تعریف کرد و ولگشت کوانتومی گسسته [۲۱] [۲۲] [۲۳] [۵۹] [۱۵]. هر دو نوع، عموما به نتایج مشابهی منتهی می‌شوند، اما ولگشت کوانتومی گسسته به دلیل وجود درجه آزادی مربوط به سکه، که بعدا به آن می‌پردازیم، از ولگشت کوانتومی پیوسته کارآمدتر است. در این نوشتار تنها به ولگشت کوانتومی گسسته می‌پردازیم.

در ولگشت کوانتومی گسسته، مکان ولگشت، $|n\rangle$ برداری در فضای هیلبرت مکان H_p است. پایه‌های محاسباتی این فضا به صورت $\{|n\rangle | n \in Z\}$ هستند. همچنین جهت حرکت در فضای مکان توسط فضای دیگری تعیین می‌شود که به آن فضای سکه H_c می‌گویند. مثلا الکترونی که روی یک شبکه یک بعدی در حال حرکت است. الکترون یک ذره اسپین $\frac{1}{2}$ است یعنی $\{|s, m_s\rangle | s = \frac{1}{2}, m_s = \pm \frac{1}{2}\}$. بنابراین می‌توان از این فضای دو بعدی اسپین الکترون به عنوان فضای سکه استفاده کرد و قرار داد کرد: $|R\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ و $|L\rangle = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$. یعنی اگر اسپین الکترون $\frac{1}{2}$ باشد، الکترون یک گام به سوی راست و اگر اسپین الکترون $-\frac{1}{2}$ باشد، الکترون یک گام به سمت چپ جابه‌جا شود. بنابراین فضای هیلبرت الکترون شامل یک فضای مکان n بعدی و یک فضای اسپین ۲ بعدی است. ولگشت کوانتومی یک بعدی نیز فضای هیلبرت مشابهی دارد که از دو قسمت مکانی و سکه تشکیل شده است:

$$H = H_c \otimes H_p \quad (22.2)$$

در ولگشت کوانتومی یک عملگر یکانی [۲۶] (عملگر سکه \hat{C}) بر فضای دو بعدی سکه عمل می‌کند و بر اساس نتیجه آن ولگشت در یکی از دو سو پیش می‌رود. این تغییر در مکان ولگشت به وسیله عملگر جابه‌جایی شرطی اعمال می‌شود. عملگر جابه‌جایی شرطی از دو قسمت تشکیل شده است که یکی بر فضای سکه اثر می‌کند و دیگری بر فضای مکان. در این مثال خاص می‌توان عملگر جابه‌جایی شرطی را به صورت زیر تعریف کرد:

^۲Coin Operator

$$S = |0\rangle\langle 0| \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n+1\rangle\langle n| + |1\rangle\langle 1| \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n-1\rangle\langle n| \quad (23.2)$$

با داشتن عملگر جابه‌جایی شرطی و عملگر سکه تمام ابزارهای لازم را برای تعریف فرآیند ولگشت کوانتومی در اختیار داریم. آن‌چه که در ولگشت کوانتومی روی می‌دهد از نظر ساختاری بسیار شبیه ولگشت کلاسیکی است. در ابتدا عملگر سکه را بر قسمت اسپینی اثر می‌دهیم که نتیجه آن چرخشی در حالت اسپینی ولگشت است. با این کار اگر سکه در ابتدا در یکی از پایه‌های محاسباتی ($|1\rangle$ یا $|0\rangle$) باشد، پس از اعمال عملگر سکه به یک برهم‌نهی از این دو حالت خواهد رفت. تفاوت با حالت کلاسیکی در این است که هر جزء از این برهم‌نهی به دست آمده موجب جابه‌جایی در یک جهت خواهد شد. بنابراین می‌توان گفت ذره همزمان در هر دو جهت به پیش خواهد رفت. در ادامه خواهیم دید که وجود برهم‌نهی کوانتومی باعث ایجاد برهم‌نهی میان این دو سوی حرکت شده و اثرات تداخلی ناشی از آن باعث شکلی متفاوت از توزیع احتمال، نسبت به ولگشت کلاسیکی خواهد شد. بنابراین در ولگشت کوانتومی ابتدا عملگر سکه اثر می‌کند و سپس عملگر جابه‌جایی بر اساس حالت سکه، ذره کوانتومی را جابه‌جا می‌کند.

$$U = S(C \otimes I) \quad (24.2)$$

که C عملگر سکه است. عملگر C می‌تواند هر عملگر یکانی باشد، اما یکی از پرکاربردترین عملگرها، عملگر هادامارد است که در این پایان‌نامه از آن استفاده خواهیم کرد:

$$C \equiv H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (25.2)$$

که:

$$HH^\dagger = \mathbb{I} \quad (26.2)$$

به عنوان مثال، با در نظر گرفتن حالت اولیه به صورت $|\psi(0)\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$ برای پنج گام اول کت حالت را به دست می‌آوریم و پس از آن احتمال حضور ولگشت در هر مکان را محاسبه می‌کنیم. برای

گام اول:

$$\begin{aligned} |\psi(1)\rangle &= U|\psi(0)\rangle = U(|0\rangle \otimes |0\rangle) = S(H \otimes I)(|0\rangle \otimes |0\rangle) = S(H|0\rangle \otimes I|0\rangle) \\ \Rightarrow |\psi(1)\rangle &= S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}S(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\psi(1)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle\langle 0| \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n+1\rangle\langle n| + |1\rangle\langle 1| \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n-1\rangle\langle n|\right) \\ &\quad (|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\psi(1)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle\langle 0|0\rangle \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n+1\rangle\langle n|0\rangle + |0\rangle\langle 0|1\rangle \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n+1\rangle\langle n|0\rangle \right. \\ &\quad \left. + |1\rangle\langle 1|0\rangle \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n-1\rangle\langle n|0\rangle + |1\rangle\langle 1|1\rangle \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n-1\rangle\langle n|0\rangle\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\psi(1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |-1\rangle)$$

(۲۷.۲)

گام دوم:

$$|\psi(2)\rangle = U|\psi(1)\rangle = S(H \otimes I)|\psi(1)\rangle = S\left(H \otimes I\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |-1\rangle)\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\psi(2)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}S(H|0\rangle \otimes I|1\rangle + (H|0\rangle \otimes I|-1\rangle)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right) \otimes |-1\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}S(|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle + |0\rangle \otimes |-1\rangle - |1\rangle \otimes |-1\rangle) \\ &= \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0| \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n+1\rangle\langle n| + |1\rangle\langle 1| \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n-1\rangle\langle n|\right) \\ &\quad (|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle + |0\rangle \otimes |-1\rangle - |1\rangle \otimes |-1\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(|0\rangle \otimes |2\rangle + |0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |-2\rangle) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\psi(2)\rangle = \frac{1}{2}(|1\rangle \otimes |2\rangle + (|0\rangle + |1\rangle) - |1\rangle \otimes |-2\rangle)$$

(۲۸.۲)

و گام سوم، چهارم و پنجم:

$$|\psi(3)\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |3\rangle + (2|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle - |0\rangle \otimes |-1\rangle + |1\rangle \otimes |-3\rangle) \quad (۲۹.۲)$$

$$|\psi(4)\rangle = \frac{1}{4}(|0\rangle|4\rangle + (3|0\rangle + |1\rangle)|2\rangle + (-|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle - (|0\rangle - |1\rangle)|-2\rangle - |1\rangle|-4\rangle) \quad (۳۰.۲)$$

$$\begin{aligned} |\psi(5)\rangle &= \frac{1}{4\sqrt{2}}(|0\rangle|5\rangle + (4|0\rangle + |1\rangle)|3\rangle + |1\rangle|1\rangle - |1\rangle|-1\rangle \\ &\quad - (|0\rangle - 2|1\rangle)|-3\rangle + |1\rangle|-5\rangle) \end{aligned} \quad (۳۱.۲)$$

احتمال حضور ذره در هر مکان بعد از هر گام جدول ۲.۲ خلاصه شده است.

جدول ۲.۲: احتمال وجود ولگشت در مکان n در زمان t . محاسبات برای ذره‌ای انجام شده است که حرکت خود را از مبدا آغاز کرده است.

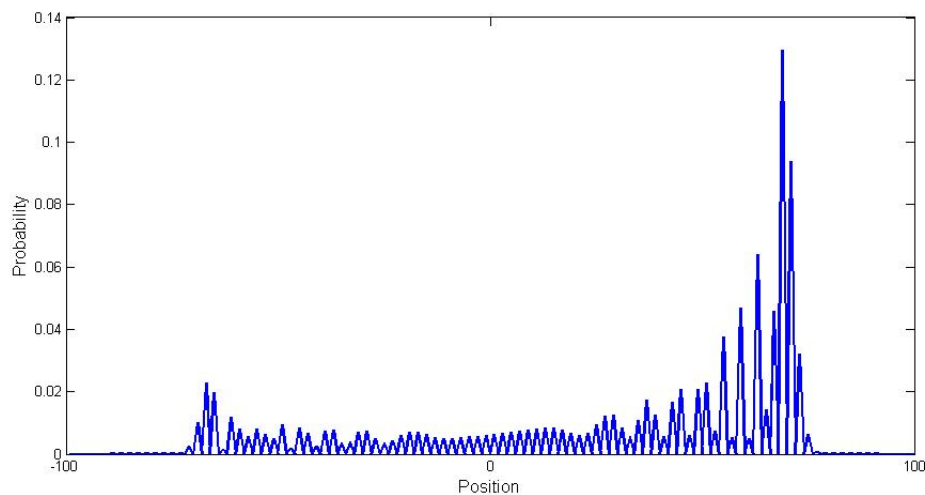
گام	۵	۴	۳	۲	۱	۰	-۱	-۲	-۳	-۴	-۵
۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۰	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	۰	۰	۰	۰	۰
۲	۰	۰	۰	$\frac{1}{4}$	۰	$\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{4}$	۰	۰	۰
۳	۰	۰	$\frac{1}{8}$	۰	$\frac{5}{8}$	۰	$\frac{1}{8}$	۰	$\frac{1}{8}$	۰	۰
۴	۰	$\frac{1}{16}$	۰	$\frac{1}{8}$	۰	$\frac{1}{8}$	۰	$\frac{5}{8}$	۰	$\frac{1}{16}$	۰
۵	$\frac{1}{32}$	۰	$\frac{17}{32}$	۰	$\frac{1}{8}$	۰	$\frac{1}{8}$	۰	$\frac{5}{32}$	۰	$\frac{1}{32}$

از گام سوم به بعد مشخص است که نتایج با نتایج ولگشت کلاسیکی متفاوت است. می‌توان دید ولگشت تمایل دارد تا به یکی از دو سوی راستای حرکت خود متمایل شود. برای بررسی بهتر این قضیه اقدام به رسم نمودار توزیع احتمالی ولگشت تصادفی برای تعداد گام‌های بیشتر می‌کنیم. شکل ۷.۲ برای ولگشت کوانتومی با حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |0\rangle|0\rangle$ به ازای 100 گام رسم شده است. از مقایسه نمودارهای ولگشت کلاسیکی و ولگشت کوانتومی در می‌یابیم که در ولگشت کوانتومی نمودار توزیع احتمال بر خلاف ولگشت کلاسیکی یک نمودار نامتقارن است. از سوی دیگر بیشینه احتمال در نقاط مرکزی قرار نگرفته است. به عبارت دیگر ولگشت تمایل به دور شدن از مبدا حرکت دارد و احتمال یافتن ذره برای n های نزدیک به $\frac{t}{\sqrt{4}}$ بیشینه است [۱۶].

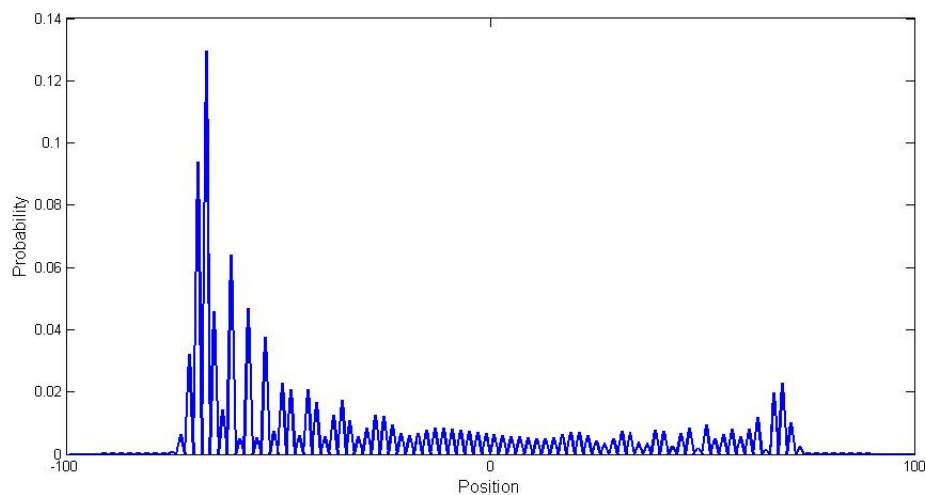
این تمایل به سمت راست به دلیل استفاده از عملگر هادامارد به عنوان سکه است زیرا اثر این عملگر روی حالت $|0\rangle$ و $|1\rangle$ متفاوت است:

$$\begin{aligned} H|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \\ H|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \end{aligned} \quad (32.2)$$

وجود فاز منفی در حالات $|1\rangle$ باعث آثار تداخلی شده و احتمال حضور را تغییر خواهد داد. از آنجایی که وجود این فاز منفی به حالت اولیه بستگی دارد، تابع توزیع احتمال به حالت اولیه وابسته خواهد بود. می‌توان نشان داد حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |1\rangle|0\rangle$ نمودار را به سمت چپ منتقل خواهد کرد (شکل ۸.۲).



شکل ۷.۲: توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی هادامارد پس از ۱۰۰ گام با حالت اولیه $|\psi\rangle = |0\rangle|0\rangle$

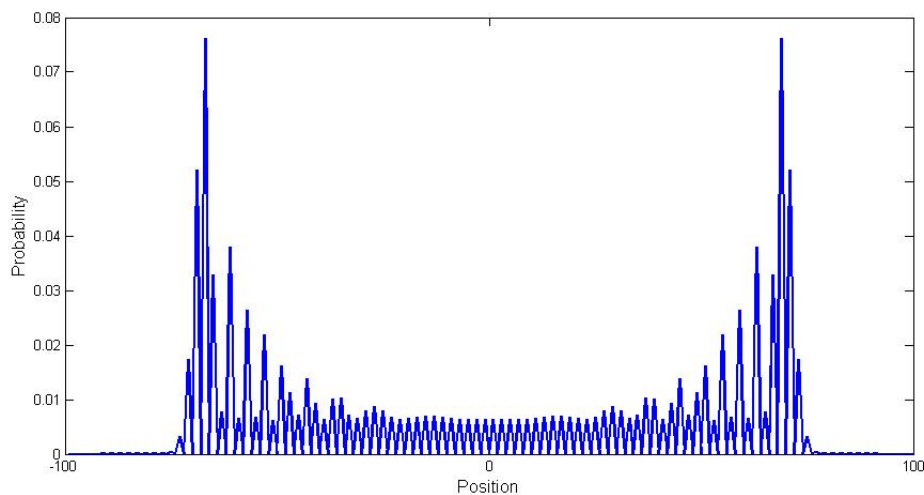


شکل ۸.۲: توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی هادامارد پس از ۱۰۰ گام با حالت اولیه $|\psi\rangle = |1\rangle|0\rangle$

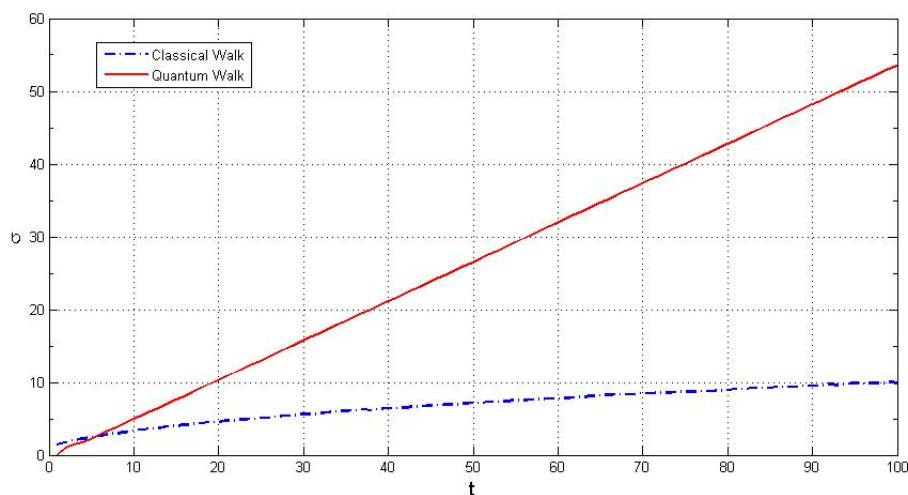
اما می‌توان شکلی از ولگشت کوانتومی را نیز به وجود آورد که در آن توزیع احتمال به صورت متقارن باشد. برای این کار باید از تاثیر ویرانگر نتایج حاصل از عمل هادامارد بر $|0\rangle$ و یا $|1\rangle$ جلوگیری کرد.

یک راه استفاده از یک عملگر سکه متفاوت می‌باشد [۲۶]، مانند $Y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$. راه دیگر استفاده از یک حالت اولیه متفاوت است، برای مثال اگر حالت اولیه به صورت $|\psi(0)\rangle = \frac{|0\rangle - i|1\rangle}{\sqrt{2}}$ در نظر گرفته شود، مشاهده می‌شود که توزیع احتمال به صورت متقارن در می‌آید (شکل ۹.۲).

عناصر عملگر هادامارد همگی حقیقی هستند، بنابراین هنگامی که این عملگر بر قسمت اسپینی اثر می‌کند



شکل ۹.۲: توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی هادامارد پس از 100 گام با حالت اولیه $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle - i|1\rangle}{\sqrt{2}}$



شکل ۱۰.۲: انحراف معیار ولگشت کوانتومی (خط ممتد) در مقایسه با ولگشت کلاسیکی به ازای $t = 100$.

تغییر در حقیقی یا مجازی بودن عناصر کت اسپینی نمی‌دهد، در نتیجه هیچ خنثی‌سازی بین جملاتی که منجر به حرکت ولگشت به سمت چپ می‌شوند با جملات منجر به حرکت به سمت راست، وجود نخواهد داشت. در این حالت که توزیع احتمال متقارن است، مقدار چشمداشتی مکان ولگشت صفر خواهد بود، $\langle n \rangle = 0$. می‌توان نشان داد که در ولگشت کوانتومی $\sigma = t$ که در مقایسه با ولگشت کلاسیکی $(\sigma = \sqrt{t})$ به صورت توانی بیشتر است [۲۶]، این سرعت انتشار توانی یکی از خواص برجسته ولگشت کوانتومی است که بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته است، زیرا امید می‌رود الگوریتم‌هایی که بر پایه ولگشت کوانتومی بنا شده‌اند به صورت توانی از الگوریتم‌های ولگشت کلاسیکی سریع‌تر باشند (شکل ۱۰.۲). به همین دلیل محققان بر این امیدند که الگوریتم‌های کوانتومی که بر پایه ولگشت‌های کوانتومی بنا شده‌اند، از هم‌تاهای کلاسیکی خود بسیار سریع‌تر باشند.

۲.۲.۲ محاسبات تحلیلی ولگشت کوانتومی روی خط

ولگشت کوانتومی روی خط را به صورت حرکت یک ذره بر یک فضای گسسته یک بعدی H_P متناهی در نظر می‌گیریم که پایه‌های محاسباتی آن $\{|n\rangle : n \in Z\}$ هستند. از طرفی یک فضای دوبعدی H_C با پایه‌های $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ نیز برای قسمت اسپینی در نظر گرفته می‌شود که عناصر آن متناظر با حرکت به چپ یا راست هستند. به این ترتیب می‌توان گفت که فضای هیلبرت کلی سیستم به صورت $H_C \otimes H_P$ است و پایه‌های محاسباتی آن را نیز می‌توان به صورت $\{|s, n\rangle, -\infty \leq n \leq \infty, s \in \{0, 1\}\}$ در نظر گرفت. قرارداد می‌کنیم که $s = 0$ متناظر با حرکت به راست و $s = 1$ متناظر با حرکت به سمت چپ است. به این ترتیب عملگر تحول به صورت زیر خواهد بود:

$$S = \sum_{s=0}^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n + (-1)^s, s\rangle \langle n, s| \quad (33.2)$$

که می‌توان آن را به صورت زیر باز کرد:

$$S = \sum_n |n+1\rangle \langle n| \otimes |0\rangle \langle 0| + |n-1\rangle \langle n| \otimes |1\rangle \langle 1| \quad (34.2)$$

حالت ولگشت در هرگام توسط این رابطه داده می‌شود:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{s=0}^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_{n,s}(t) |n, s\rangle \quad (35.2)$$

که در آن $\psi_{n,s}(t)$ ها دامنه‌های احتمال نام دارند که باید در شرط بهنجارش زیر صدق کنند:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\psi_{n,0}(t)|^2 + |\psi_{n,1}(t)|^2 = 1 \quad (36.2)$$

برای تعداد گام t در یک مکان مشخص n احتمال حضور ذره عبارت است از:

$$p_n(t) = |\psi_{n,0}|^2 + |\psi_{n,1}|^2 \quad (37.2)$$

این بار هم از عملگر هادامارد به عنوان سکه استفاده می‌کنیم. به این ترتیب عملگر تحول به این صورت نوشته خواهد شد:

$$U = S(I \otimes H) \quad (38.2)$$

و نتیجه اعمال آن بر حالت t م برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned}
 |\psi(t+1)\rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\psi_{n,\circ}(t)|n\rangle H|\circ\rangle + \psi_{n,1}(t)|n\rangle H|1\rangle) \Rightarrow \\
 |\psi(t+1)\rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(\psi_{n,\circ}(t)|n\rangle\left(\frac{|\circ\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) + \psi_{n,1}(t)|n\rangle\left(\frac{|\circ\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\right) \Rightarrow \\
 |\psi(t+1)\rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{S}{\sqrt{2}}(\psi_{n,\circ}(t)|n\rangle|\circ\rangle + \psi_{n,\circ}(t)|n\rangle|1\rangle + \psi_{n,1}(t)|n\rangle|\circ\rangle - \psi_{n,1}(t)|n\rangle|1\rangle) \Rightarrow \\
 |\psi(t+1)\rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{n,\circ}(t)|n+1\rangle|\circ\rangle + \psi_{n,\circ}(t)|n-1\rangle|1\rangle + \psi_{n,1}(t)|n+1\rangle|\circ\rangle \\
 &\quad - \psi_{n,1}(t)|n-1\rangle|1\rangle) \Rightarrow \\
 |\psi(t+1)\rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\psi_{n,\circ}(t)+\psi_{n,1}(t)}{\sqrt{2}}|n+1\rangle|\circ\rangle + \frac{\psi_{n,\circ}(t)-\psi_{n,1}(t)}{\sqrt{2}}|n-1\rangle|1\rangle\right)
 \end{aligned} \tag{۳۹.۲}$$

اکنون می‌توان با استفاده از رابطه به دست آمده و رابطه ۳۵.۲ روابط تحول را به دست آورد:

$$\begin{aligned}
 \psi_{n,\circ}(t+1) &= \frac{\psi_{n-1,\circ}(t)+\psi_{n-1,1}(t)}{\sqrt{2}} \\
 \psi_{n,1}(t+1) &= \frac{\psi_{n+1,\circ}(t)-\psi_{n+1,1}(t)}{\sqrt{2}}
 \end{aligned} \tag{۴۰.۲}$$

با استفاده از این روابط می‌توان دامنه‌های احتمال حضور ذره در مکان n م در گام $t+1$ م را با استفاده از دامنه‌های احتمال حضور ذره در مکان $n-1$ م و $n+1$ م در گام t م به دست آورد. این روابط بازگشتی اگرچه مفید و دقیق هستند، اما شکل تابع توزیع احتمال را نشان نمی‌دهند. خوشبختانه می‌توان با استفاده از روش تبدیل فوریه به صورت تحلیلی روابطی برای تابع توزیع احتمال به دست آورد. در تبدیل فوریه تابع موج می‌دانیم:

$$\begin{aligned}
 \psi_{\alpha}(n) &= \langle n|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dk e^{ikn} \langle k|\alpha\rangle \\
 \Rightarrow \langle n| &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dk e^{ikn} \langle k| \\
 \Rightarrow |n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dk e^{-ikn} |k\rangle
 \end{aligned} \tag{۴۱.۲}$$

اکنون با استفاده از رابطه ۳۳.۲ رابطه عملگر تحول را بازنویسی می‌کنیم:

$$\Rightarrow U = \sum_n |n+1\rangle \langle n| \otimes |\circ\rangle \langle \circ| H + \sum_n |n-1\rangle \langle n| \otimes |1\rangle \langle 1| H \tag{۴۲.۲}$$

با جاگذاری رابطه به دست آمده برای تبدیل فوریه در این رابطه، می‌رسیم به:

$$\begin{aligned}
 U &= \sum_x \frac{1}{\sqrt{\pi^2}} \left(\int dk e^{-ik(n+1)} |k\rangle \int dk' e^{ik'n} \langle k'| \right) \otimes |\circ\rangle \langle \circ| H \\
 &\quad + \sum_x \frac{1}{\sqrt{\pi^2}} \left(\int dk e^{-ik(n-1)} |k\rangle \int dk' e^{ik'n} \langle k'| \right) \otimes |1\rangle \langle 1| H
 \end{aligned} \tag{۴۳.۲}$$

و با مرتب‌سازی:

$$U = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(\int \int dk dk' \sum_n e^{-i(k-k')n} e^{-ik} |k\rangle \langle k'| \otimes |\circ\rangle \langle \circ| H \right. \\ \left. + \int \int dk dk' \sum_n e^{-i(k-k')n} e^{ik} |k\rangle \langle k'| \otimes |\uparrow\rangle \langle \uparrow| H \right) \quad (44.2)$$

از تعریف تابع دلتای دیراک می‌دانیم $\delta(k - k') = \frac{1}{2\pi} \sum_n e^{i(k-k')n}$. پس:

$$U = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \int dk dk' e^{-ik} |k\rangle \langle k'| \delta(k - k') \otimes |\circ\rangle \langle \circ| H \\ + \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \int dk dk' e^{ik} |k\rangle \langle k'| \delta(k - k') \otimes |\uparrow\rangle \langle \uparrow| H \quad (45.2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int dk |k\rangle \langle k| \otimes (e^{-ik} |\circ\rangle \langle \circ| H + e^{ik} |\uparrow\rangle \langle \uparrow| H)$$

با استفاده از $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$U = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int dk |k\rangle \langle k| \otimes \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{e^{-ik}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-ik}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{ik}}{\sqrt{2}} & -\frac{e^{ik}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}_{M_k} \quad (46.2)$$

اکنون ماتریس M_k در پایه‌های k نوشته شده است و می‌توانیم اقدام به قطری‌سازی آن کنیم. ابتدا برای تعیین ویژه‌مقادیر، معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix} \frac{e^{-ik}}{\sqrt{2}} - \lambda & \frac{e^{-ik}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{ik}}{\sqrt{2}} & -\left(\frac{e^{ik}}{\sqrt{2}} + \lambda\right) \end{vmatrix} = 0 \quad (47.2)$$

و معادله مشخصه:

$$-\left(\frac{e^{ik}}{\sqrt{2}} - \lambda\right) \left(\frac{e^{ik}}{\sqrt{2}} + \lambda\right) - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} (e^{-ik} - e^{ik}) - \lambda^2\right) - \frac{1}{2} = 0 \quad (48.2)$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} (e^{ik} - e^{-ik}) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} (2i \sin k) - 1 = 0$$

که ویژه‌مقادیر به صورت زیر خواهند بود:

$$\lambda = \frac{-\sqrt{2}i \sin k \pm \sqrt{2} \cos \alpha}{\sqrt{2}} = \pm \cos \alpha - \frac{i \sin k}{\sqrt{2}} = \pm \cos \alpha - i \sin \alpha \quad (49.2)$$

$$\Rightarrow \lambda_0 = \cos \alpha - i \sin \alpha ; \quad \lambda_1 = -(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

که می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\lambda_k^0 = e^{i\alpha} ; \quad \lambda_k^1 = e^{i(\pi+\alpha)} \quad (50.2)$$

برای به دست آوردن ویژه‌حالات داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{-ik} & e^{-ik} \\ e^{ik} & -e^{ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = e^{-i\alpha} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (a+b)e^{-ik} = \sqrt{2}ae^{-i\alpha} \quad (51.2)$$

$$\Rightarrow b = a(\sqrt{2}e^{-i(\alpha-k)} - 1)$$

می‌دانیم که $|a|^2 + |b|^2 = 1$. با جاگذاری مقدار به دست آمده برای b در این شرط:

$$|a|^2 + |a|^2(\sqrt{2}e^{-i(\alpha-k)} - 1)^2 = 1$$

$$\Rightarrow |a|^2 + |a|^2(\sqrt{2}e^{-i(\alpha-k)} - 1)(\sqrt{2}e^{i(\alpha-k)} - 1) = 1$$

$$\Rightarrow |a|^2(1 + 2 - \sqrt{2}(e^{i(\alpha-k)} + e^{-i(\alpha-k)}) + 1) = 1 \quad (52.2)$$

$$\Rightarrow |a|^2(4 - 2\sqrt{2}\cos(\alpha - k)) = 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}\cos(\alpha - k)}}$$

با کمی عملیات جبری:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}\cos(\alpha-k)}} = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}(\cos\alpha\cos k+\sin\alpha\sin k)}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4-2(\sqrt{2-\sin^2 k}\cos k+\sin^2 k)}} = \frac{1}{\sqrt{4-2(\sqrt{1+\cos^2 k}\cos k+\sin^2 k)}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4-2\sin^2 k-2\cos k\sqrt{1+\cos^2 k}}} = \frac{1}{\sqrt{2(2-\sin^2 k)-2\cos k\sqrt{1+\cos^2 k}}} \\
 \Rightarrow a &= \frac{1}{\sqrt{2(1+\cos^2 k)-2\cos k\sqrt{1+\cos^2 k}}}
 \end{aligned} \tag{۵۳.۲}$$

حال می‌توان b را با استفاده از رابطه ۵۱.۲ به دست آوریم و به این ترتیب ویژه بردار متناظر با ویژه مقدار $\lambda_k^\circ = e^{-i\alpha}$ را به دست آوریم:

$$\phi_k^\circ = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2(1+\cos^2 k)-2\cos k\sqrt{1+\cos^2 k}}} \\ \frac{(\sqrt{2}e^{-i(\alpha-k)}-1)}{\sqrt{2(1+\cos^2 k)-2\cos k\sqrt{1+\cos^2 k}}} \end{bmatrix} \tag{۵۴.۲}$$

$$\Rightarrow \phi_k^\circ = \frac{1}{\sqrt{2(1+\cos^2 k)-2\cos k\sqrt{1+\cos^2 k}}} \begin{bmatrix} e^{-ik} \\ \sqrt{2}e^{-i\alpha} - e^{-ik} \end{bmatrix} \times e^{ik}$$

از آنجایی که e^{ik} یک فاز کلی است، می‌توان از آن صرف نظر کرد. ویژه بردار دوم را نیز با روشی تقریباً مشابه به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{-ik} & e^{-ik} \\ e^{ik} & -e^{ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = e^{i(\pi+\alpha)} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (a+b)e^{-ik} = \sqrt{2}ae^{i(\pi+\alpha)} \tag{۵۵.۲}$$

$$\Rightarrow b = a(\sqrt{2}e^{i(\pi+\alpha+k)} - 1)$$

با استفاده از $|a|^2 + |b|^2 = 1$:

$$\begin{aligned}
 & |a|^2 + |a|^2 (\sqrt{2}e^{i(\pi+\alpha+k)} - 1)^2 = 1 \\
 \Rightarrow & |a|^2 (1 + (\sqrt{2}e^{i(\pi+\alpha+k)} - 1)(\sqrt{2}e^{-i(\pi+\alpha+k)} - 1)) = 1 \\
 \Rightarrow & |a|^2 (1 + 2 - \sqrt{2}(e^{i(\pi+\alpha+k)} - e^{-i(\pi+\alpha+k)}) - 1) = 1 \\
 \Rightarrow & |a|^2 (4 - 2\sqrt{2} \cos(\pi + \alpha + k)) = 1 \\
 \Rightarrow & |a|^2 (4 + 2\sqrt{2} \cos(\alpha + k)) = 1
 \end{aligned} \tag{۵۶.۲}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow a &= \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}\cos(\alpha+k)}} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}(\cos\alpha\cos k - \sin\alpha\sin k)}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}\left(\sqrt{1-\sin^2\alpha}\cos k - \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{4+2\left(\sqrt{2-\sin^2\alpha}\cos k - \sin\alpha\right)}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{4-2\sin^2\alpha+2\sqrt{1+\cos^2\alpha}\cos k}} \\
 \Rightarrow a &= \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos^2\alpha)+2\sqrt{1+\cos^2\alpha}\cos k}}
 \end{aligned}$$

و ویژه بردار متناظر با $\lambda_k^1 = e^{i(\pi+\alpha)}$ به شکل زیر است:

$$\phi_k^1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2(1+\cos^2\alpha)+2\cos k\sqrt{1+\cos^2\alpha}}} \\ \frac{(\sqrt{2}e^{i(\pi+\alpha+k)}-1)}{\sqrt{2(1+\cos^2\alpha)+2\cos k\sqrt{1+\cos^2\alpha}}} \end{bmatrix} \tag{۵۷.۲}$$

$$\Rightarrow \phi_k^1 = \frac{1}{\sqrt{2(1+\cos^2\alpha)+2\cos k\sqrt{1+\cos^2\alpha}}} \begin{bmatrix} e^{-ik} \\ -\sqrt{2}e^{i\alpha} - e^{-ik} \end{bmatrix} \times e^{ik}$$

و شکل عمومی ویژه مقادیر و ویژه بردارها را می توان به صورت زیر در نظر گرفت که در آن $m = 0, 1$ است:

$$\lambda_k^m = (-1)^m e^{(-1)^{m+1}i\alpha} ; \quad \phi_k^m = \frac{1}{\sqrt{2(1+\cos^2\alpha)+(-1)^{m+1}2\cos k\sqrt{1+\cos^2\alpha}}} \begin{bmatrix} e^{-ik} \\ (-1)^m \sqrt{2}e^{(-1)^m i\alpha} - e^{-ik} \end{bmatrix} \tag{۵۸.۲}$$

در این مرحله می توانیم عملگر تحول را برحسب ویژه مقادیر و ویژه بردارهایش بنویسیم. ابتدا M_k را

می‌نویسیم:

$$M_k = \lambda_k^0 |\phi_k^0\rangle \langle \phi_k^0| + \lambda_k^1 |\phi_k^1\rangle \langle \phi_k^1| \quad (59.2)$$

با جاگذاری M_k در عملگر تحول ۴۶.۲ به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dk |k\rangle \langle k| (\lambda_k^0 |\phi_k^0\rangle \langle \phi_k^0| + \lambda_k^1 |\phi_k^1\rangle \langle \phi_k^1|) \\ \Rightarrow U &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dk (e^{-i\alpha} |k, \phi_k^0\rangle \langle k, \phi_k^0| + e^{i(\pi+\alpha)} |k, \phi_k^1\rangle \langle k, \phi_k^1|) \end{aligned} \quad (60.2)$$

و برای t گام:

$$U^t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dk (e^{-i\alpha t} |k, \phi_k^0\rangle \langle k, \phi_k^0| + e^{i(\pi+\alpha)t} |k, \phi_k^1\rangle \langle k, \phi_k^1|) \quad (61.2)$$

حالت اولیه ذره را با اسپین $|\circ\rangle$ و در مبدأ می‌گیریم:

$$|\psi(\circ)\rangle = |\circ\rangle |\circ\rangle \quad (62.2)$$

بنابراین حالت ذره در گام $t^{\text{ام}}$:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= U^t |\psi(\circ)\rangle \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dk (e^{-i\alpha t} |k, \phi_k^0\rangle \langle k, \phi_k^0| + e^{i(\alpha+\pi)t} |k, \phi_k^1\rangle \langle k, \phi_k^1|) \right) |\circ, \circ\rangle \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dk (e^{-i\alpha t} |k\rangle |\phi_k^0\rangle \langle k| \langle \phi_k^0| + e^{i(\alpha+\pi)t} |k\rangle |\phi_k^1\rangle \langle k| \langle \phi_k^1|) \right) |\circ, \circ\rangle \end{aligned} \quad (63.2)$$

با استفاده از تبدیل فوریه:

$$|k\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ikn} |n\rangle \Rightarrow \langle k| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ikn} \langle n| \quad (64.2)$$

$$\Rightarrow \langle k|\circ\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-ikn} \langle n|\circ\rangle$$

با جاگذاری رابطه به دست آمده در ۶۳.۲:

$$\begin{aligned}
 |\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dk \left(e^{-i\alpha t} |k\rangle |\phi_k^\circ\rangle \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ikn} \langle n | \circ \rangle \langle \phi_k^\circ | \circ \rangle}_{\text{}} \right. \\
 &\quad \left. + e^{i(\alpha+\pi)t} |k\rangle |\phi_k^{\prime}\rangle \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ikn} \langle n | \circ \rangle \langle \phi_k^{\prime} | \circ \rangle}_{\text{}} \right) \tag{۶۵.۲} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dk \left(e^{-i\alpha t} |k\rangle |\phi_k^\circ\rangle \langle \phi_k^\circ | \circ \rangle + e^{i(\alpha+\pi)t} |k\rangle |\phi_k^{\prime}\rangle \langle \phi_k^{\prime} | \circ \rangle \right)
 \end{aligned}$$

با استفاده از شکل صریح ویژه‌بردارها:

$$\begin{aligned}
 \langle \phi_k^\circ | \circ \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2(1+\cos^{\prime}k) - \cos k \sqrt{1+\cos^{\prime}k}}} \left[e^{ik} \sqrt{2} e^{i\alpha} - e^{ik} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{e^{ik}}{\sqrt{2(1+\cos^{\prime}k) - \cos k \sqrt{1+\cos^{\prime}k}}}
 \end{aligned} \tag{۶۶.۲}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \phi_k^{\prime} | \circ \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2(1+\cos^{\prime}k) + \cos k \sqrt{1+\cos^{\prime}k}}} \left[e^{ik} - \sqrt{2} e^{-i\alpha} - e^{ik} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{e^{ik}}{\sqrt{2(1+\cos^{\prime}k) + \cos k \sqrt{1+\cos^{\prime}k}}}
 \end{aligned}$$

و در نتیجه:

$$\begin{aligned}
 |\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dk |k\rangle \left(\frac{e^{-i\alpha t + ik}}{\sqrt{\gamma(1+\cos^{\gamma}k) - \gamma \cos k \sqrt{1+\cos^{\gamma}k}}} |\phi_k^{\circ}\rangle \right. \\
 &\quad \left. + \frac{e^{i(\alpha+\pi)t + ik}}{\sqrt{\gamma(1+\cos^{\gamma}k) + \gamma \cos k \sqrt{1+\cos^{\gamma}k}}} |\phi_k^{\prime}\rangle \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dk |k\rangle \left(\frac{e^{-i\alpha t + ik}}{\sqrt{\gamma(1+\cos^{\gamma}k) - \gamma \cos k \sqrt{1+\cos^{\gamma}k}}} \left[\begin{array}{c} e^{-ik} \\ \sqrt{\gamma} e^{-i\alpha} - e^{-ik} \end{array} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{e^{-i(\pi+\alpha)t + ik}}{\sqrt{\gamma(1+\cos^{\gamma}k) + \gamma \cos k \sqrt{1+\cos^{\gamma}k}}} \left[\begin{array}{c} e^{-ik} \\ -\sqrt{\gamma} e^{i\alpha} - e^{-ik} \end{array} \right] \right)
 \end{aligned} \tag{۶۷.۲}$$

و:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dk |k\rangle \left[\begin{array}{c} \frac{e^{-i\alpha t}}{\gamma(1+\cos^{\gamma}k) - \gamma \cos k \sqrt{1+\cos^{\gamma}k}} + \frac{e^{i(\pi+\alpha)t}}{\gamma(1+\cos^{\gamma}k) + \gamma \cos k \sqrt{1+\cos^{\gamma}k}} \\ \frac{e^{-i\alpha t + ik} (\sqrt{\gamma} e^{-i\alpha} - e^{-ik})}{\gamma(1+\cos^{\gamma}k) - \gamma \cos k \sqrt{1+\cos^{\gamma}k}} - \frac{e^{i(\pi+\alpha)t + ik} (\sqrt{\gamma} e^{i\alpha} + e^{-ik})}{\gamma(1+\cos^{\gamma}k) + \gamma \cos k \sqrt{1+\cos^{\gamma}k}} \end{array} \right] \tag{۶۸.۲}$$

در این مرحله ساده‌سازی‌های زیر را در این معادلات انجام می‌دهیم تا روابط ساده‌تر شده و کار با آنها آسان‌تر شود:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\gamma(1+\cos^{\gamma}k) \pm \gamma \cos k \sqrt{1+\cos^{\gamma}k}} \\
 &= \frac{1}{\gamma} \frac{1}{(1+\cos^{\gamma}k) \pm \cos k \sqrt{1+\cos^{\gamma}k}} \times \frac{(1+\cos^{\gamma}k) \mp \cos k \sqrt{1+\cos^{\gamma}k}}{(1+\cos^{\gamma}k) \mp \cos k \sqrt{1+\cos^{\gamma}k}} \\
 &= \frac{1}{\gamma} \frac{1+\cos^{\gamma}k \mp \cos k \sqrt{1+\cos^{\gamma}k}}{(1+\cos^{\gamma}k) \mp \cos^{\gamma}k (1+\cos^{\gamma}k)} = \frac{1}{\gamma} \frac{1+\cos^{\gamma}k \mp \cos k \sqrt{1+\cos^{\gamma}k}}{1+\gamma \cos^{\gamma}k + \cos^{\gamma}k - \cos^{\gamma}k - \cos^{\gamma}k} \\
 &= \frac{1}{\gamma} \frac{(1+\cos^{\gamma}k) \left(1 \mp \frac{\cos k}{\sqrt{1+\cos^{\gamma}k}} \right)}{1+\cos^{\gamma}k} = \frac{1}{\gamma} \left(1 \mp \frac{\cos k}{\sqrt{1+\cos^{\gamma}k}} \right)
 \end{aligned} \tag{۶۹.۲}$$

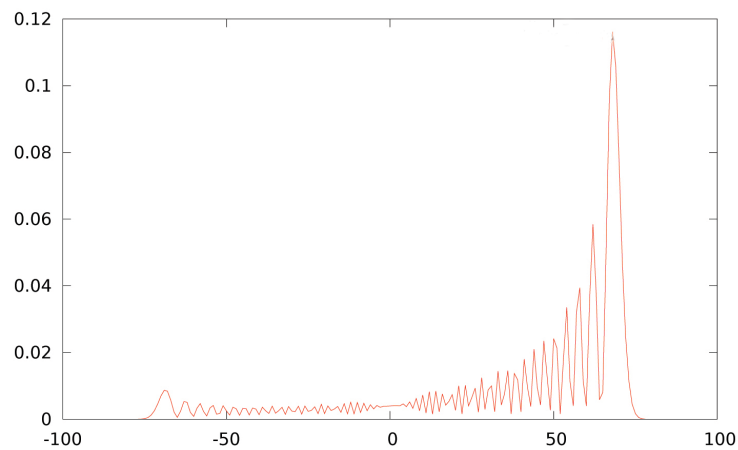
$$\begin{aligned}
 \sqrt{2}e^{i\alpha} + e^{-ik} &= \sqrt{2}(\cos \alpha + i \sin \alpha) + \cos k - i \sin k = \sqrt{2} \cos \alpha + \cos k \\
 &= \sqrt{2}\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} + \cos k = \sqrt{2 - \sin^2 k} + \cos k \\
 &= \sqrt{1 + \cos^2 k} + \cos k \times \frac{\sqrt{1 + \cos^2 k}}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \\
 &= \frac{2(1 + \cos^2 k) + 2 \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}}{2\sqrt{1 + \cos^2 k}}
 \end{aligned} \tag{۷۰.۲}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2}e^{-i\alpha} - e^{-ik} &= \sqrt{2}(\cos \alpha - i \sin \alpha) - \cos k + i \sin k = \sqrt{2} \cos \alpha - \cos k \\
 &= \sqrt{2}\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} - \cos k = \sqrt{2 - \sin^2 k} - \cos k \\
 &= \sqrt{1 + \cos^2 k} - \cos k \times \frac{\sqrt{1 + \cos^2 k}}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \\
 &= \frac{2(1 + \cos^2 k) - 2 \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}}{2\sqrt{1 + \cos^2 k}}
 \end{aligned} \tag{۷۱.۲}$$

با جاگذاری روابط ۶۹.۲ تا ۷۱.۲ در رابطه ۶۸.۲ می‌رسیم به:

$$\begin{aligned}
 |\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dk |k\rangle \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{-iat} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{i(\pi + \alpha)t} \right] \\
 &\quad \frac{e^{-iat + ik}}{2\sqrt{1 + \cos^2 k}} - \frac{e^{i(\pi + \alpha)t + ik}}{2\sqrt{1 + \cos^2 k}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dk |k\rangle \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{-iat} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{i(\pi + \alpha)t} \right]}_{\tilde{\psi}_s(k,t)} \\
 &\quad \frac{e^{ik}}{2\sqrt{1 + \cos^2 k}} (e^{-iat} - (-1)^t e^{iat}) \\
 \Rightarrow |\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dk |k\rangle \tilde{\psi}_s(k,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dk |k\rangle \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_0(k,t) \\ \tilde{\psi}_1(k,t) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{۷۲.۲}$$

همان طور که این روابط نشان می‌دهند و از تعریف ولگشت کوانتومی هم می‌توان استنباط کرد،



شکل ۱۱.۲: توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی هادامارد پس از ۱۰۰ گام با حالت اولیه $|\psi\rangle = |0\rangle|0\rangle$

توزیع احتمال در مکان‌های فرد برای تعداد گام‌های زوج (و در مکان‌های زوج برای تعداد گام‌های فرد) صفر است [۱۶].

اگر نمودار توزیع احتمال حالت به دست آمده یعنی $\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle$ رسم شود، نمودار به دست آمده باید قابل مقایسه با نمودار توزیع احتمال در شکل ۷.۲ باشد، شکل ۱۱.۲.

فصل ۳

ولگشت کوانتومی روی چرخه

ولگشت کوانتومی روی چرخه، نوع متفاوتی از ولگشت کوانتومی است که در آن ولگشت پس از رسیدن به مکان انتهایی به نقطه آغاز حرکت خود بازمی‌گردد. از این رو به آن ولگشت کوانتومی روی دایره هم گفته می‌شود. این نوع ولگشت ویژگی‌های جالبی دارد که آن را از ولگشت روی خط متمایز می‌کند. برای مثال تابع توزیع احتمال به یک توزیع مشخص میل نمی‌کند، در عوض تابع حدی آن (که در ادامه معرفی خواهد شد) به شکل مشخصی میل می‌کند [۵۹] [۲۶] [۶۰]. زمان آمیختگی در این ولگشت در مقایسه با ولگشت کلاسیکی خود، به صورت توانی کوچک‌تر است که باعث شده است این نوع ولگشت مورد توجه محققان قرار گیرد [۵۹] [۲۶].

۱.۳ رابطه تحول ولگشت کوانتومی روی چرخه

ولگشت کوانتومی روی چرخه را به صورت حرکت یک ذره روی دایره‌ای با N جایگاه مشخص در نظر می‌گیریم. ذره با حرکت ساعتگرد (پادساعتگرد) بعد از N گام به نقطه آغاز می‌رسد. فضای هیلبرت مکان یک فضای N بعدی با پایه‌های محاسباتی $\{|j\rangle; 0 \leq j \leq N-1\}$ است. همچنین فضای سکه، یک فضای ۲ بعدی است که برای آن: $\{|s\rangle; s = 0, 1\}$. بنابراین فضای هیلبرت کلی به صورت زیر است:

$$H = H^2 \otimes H^N \quad (1.3)$$

$$\{|s, j\rangle : 0 \leq s \leq 1, 0 \leq j \leq N\}$$

در این جا هم عملگر جابه‌جایی شرطی وجود دارد، به گونه‌ای که:

$$S|s, j\rangle = |s, (j + (-1)^s) \bmod N\rangle \quad (2.3)$$

۲.۳ عملگر تحول در ولگشت کوانتومی روی چرخه

از آنجایی که با رسیدن n به انتهای دایره یعنی $n = N$ ولگشت باید به ابتدای مسیر $n = 0$ بازگردد، از تبدیل فوریه به شکل زیر استفاده می‌کنیم:

$$|\kappa_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{\gamma i \pi k n}{N}} |n\rangle \quad (۳.۳)$$

که یک مجموعه پایه‌های راست‌هنجار جدید را تشکیل می‌دهد: $\{|\kappa_k\rangle : 0 \leq k \leq N-1\}$. به این ترتیب با افزایش n وقتی $n = N$ باشد، جمله فاز $e^{\frac{\gamma i \pi k n}{N}} = 1$ می‌شود و فرقی با $n = 0$ ندارد و به همین ترتیب این انتخاب هوشمندانه تبدیل فوریه باعث می‌شود که جمله $\text{mod} N$ در رابطه ۲.۳ به صورت خودکار در رابطه‌ها منظور می‌شود. بنابراین با اطمینان می‌توانیم عملگر S را مشابه قبل در نظر بگیریم و $\text{mod} N$ را به عهده تبدیل فوریه ۲.۳ بگذاریم، بنابراین:

$$S |s, n\rangle = |s, n + (-1)^s\rangle \quad (۴.۳)$$

اگر عملگر جابه‌جایی شرطی را بر پایه‌های فوریه اثر دهیم، داریم:

$$S |s\rangle |\kappa_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{\gamma i \pi k n}{N}} S |s, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{\gamma i \pi k n}{N}} |s\rangle |n + (-1)^s\rangle \quad (۵.۳)$$

در این رابطه از تغییر متغیر $n' = n + (-1)^s$ استفاده می‌کنیم:

$$S |s\rangle |\kappa_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{\gamma i \pi k (n' - (-1)^s)}{N}} |s\rangle |n'\rangle = e^{\frac{-(-1)^s \gamma i \pi k}{N}} |s\rangle |\kappa_k\rangle \quad (۶.۳)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که اعمال عملگر جابه‌جایی شرطی تنها فاز حالت را تغییر می‌دهد. اما برای قطری کردن عملگر تحول باید عملگر سکه را هم در نظر گرفت. اگر U را بر بردار حالت $|s'\rangle |\kappa_k\rangle$ اثر دهیم، خواهیم داشت:

$$U |s'\rangle |\kappa_k\rangle = S \left(\sum_{s=0}^1 H_{s,s'} |s\rangle |\kappa_k\rangle \right) = \sum_{s=0}^1 e^{\frac{-(-1)^s \gamma i \pi k}{N}} H_{s,s'} |s\rangle |\kappa_k\rangle \quad (۷.۳)$$

که $H_{s,s'} = \langle s | H | s' \rangle$. بنابراین درآیه‌های U در پایه‌های فوریه برابرند با:

$$\langle s, \kappa_k | U | s', \kappa_{k'} \rangle = \underbrace{e^{\frac{-(-1)^s \gamma i \pi k}{N}} H_{s,s'}}_{\tilde{H}_{s,s'}^{(k)}} \delta_{k,k'} \quad (۸.۳)$$

هر عضو این ماتریس را با $\tilde{H}_{s,s'}^{(k)} = e^{\frac{-(-1)^s \gamma i \pi k}{N}} H_{s,s'}$ نمایش می‌دهیم، در نتیجه برای قطری کردن U باید ماتریس زیر را قطری کنیم:

$$\tilde{H}^{(k)} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{\gamma i \pi k}{N}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\gamma i \pi k}{N}} \end{bmatrix} \times H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{-\frac{\gamma i \pi k}{N}} & e^{-\frac{\gamma i \pi k}{N}} \\ e^{\frac{\gamma i \pi k}{N}} & -e^{\frac{\gamma i \pi k}{N}} \end{bmatrix} \quad (۹.۳)$$

برای تعیین ویژه‌مقادیر ماتریس $\tilde{H}^{(k)}$ معادله مشخصه را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} e^{-\frac{\gamma i \pi k}{N}} - \lambda & \frac{e^{-\frac{\gamma i \pi k}{N}}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{\frac{\gamma i \pi k}{N}}}{\sqrt{2}} & -\left(e^{\frac{\gamma i \pi k}{N}} + \lambda \right) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\left(\frac{e^{-\frac{\gamma i \pi k}{N}}}{\sqrt{2}} - \lambda \right) \left(\frac{e^{\frac{\gamma i \pi k}{N}}}{\sqrt{2}} + \lambda \right) - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{e^{-\frac{\gamma i \pi k}{N}}}{\sqrt{2}} - \lambda \right) \left(\frac{e^{\frac{\gamma i \pi k}{N}}}{\sqrt{2}} + \lambda \right) + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow -\lambda^2 + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \left(e^{-\frac{\gamma i \pi k}{N}} - e^{\frac{\gamma i \pi k}{N}} \right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \left(e^{\frac{\gamma i \pi k}{N}} - e^{-\frac{\gamma i \pi k}{N}} \right) - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \sqrt{2} i \lambda \sin \left(\frac{\gamma \pi k}{N} \right) - 1 = 0$$

(۱۰.۳)

با تغییر متغیر $\frac{\sin \left(\frac{\gamma \pi k}{N} \right)}{\sqrt{2}} = \sin \alpha$

$$\lambda^2 + \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \left(e^{\frac{\gamma i \pi k}{N}} - e^{-\frac{\gamma i \pi k}{N}} \right) - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \sqrt{2} i \lambda \sin \left(\frac{\gamma \pi k}{N} \right) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -i \sin \alpha \pm \cos \alpha \Rightarrow \lambda = \cos \alpha - i \sin \alpha, \quad -(\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad (۱۱.۳)$$

$$\Rightarrow \lambda = e^{-i\alpha}, \quad e^{i(\pi+\alpha)}$$

۳.۳ تعیین ویژه‌بردارهای ولگشت کوانتومی روی چرخه

می‌توانیم ویژه‌بردار متناظر با هر یک از ویژه‌مقادیر را تعیین کنیم. برای سادگی در نمایش معادلات از $e^{\frac{Yi\pi k}{N}} = e^{i\beta}$ استفاده می‌کنیم. به این ترتیب ویژه‌بردارهای $\tilde{H}^{(k)}$ به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{-i\beta} & e^{-i\beta} \\ e^{i\beta} & -e^{i\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix} = e^{-i\alpha} \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + b) e^{-i\beta} = e^{-i\alpha} \Rightarrow 1 + b = \sqrt{2} e^{-i\alpha} e^{i\beta} \Rightarrow b = \sqrt{2} e^{-i\alpha} e^{i\beta} - 1$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{2} (\cos \alpha - i \sin \alpha) (\cos \beta - i \sin \beta) - 1$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{2} (\cos \alpha \cos \beta + i \cos \alpha \sin \beta - i \sin \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) - 1$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{2} \left(\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \cos \beta + i \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \sin \beta - \frac{i}{\sqrt{2}} \sin \beta \cos \beta + \frac{\sin^2 \beta}{\sqrt{2}} \right) - 1$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \cos^2 \beta} \cos \beta + \frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \cos^2 \beta} \sin \beta - \frac{i}{\sqrt{2}} \sin \beta \cos \beta + \frac{\sin^2 \beta}{\sqrt{2}} \right) - 1$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{1 + \cos^2 \beta} \cos \beta + i \sqrt{1 + \cos^2 \beta} \sin \beta - i \sin \beta \cos \beta + \sin^2 \beta - 1$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{1 + \cos^2 \beta} (\cos \beta + i \sin \beta) - i \sin \beta \cos \beta - \cos^2 \beta$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{1 + \cos^2 \beta} (\cos \beta + i \sin \beta) - \cos \beta (\cos \beta + i \sin \beta)$$

$$\Rightarrow b = e^{i\beta} \left(\sqrt{1 + \cos^2 \beta} - \cos \beta \right)$$

(۱۲.۳)

که در این رابطه از این واقعیت استفاده شده است که $\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}}{\sqrt{2}}$. برای تعیین ضریب بهنجارش از $C_k^{\circ} = \langle \phi_k^{\circ} | \phi_k^{\circ} \rangle$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \langle \phi_k^\circ | \phi_k^\circ \rangle &= \begin{bmatrix} 1 & e^{-i\beta} (\sqrt{1 + \cos^2 \beta} - \cos \beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-i\beta} (\sqrt{1 + \cos^2 \beta} - \cos \beta) \end{bmatrix} = C_k^\circ \\ \Rightarrow \frac{1}{C_k^\circ} \left(1 + 1 + \cos^2 \beta + \cos^2 \beta - 2\sqrt{1 + \cos^2 \beta} \cos \beta \right) &= 1 \\ \Rightarrow \frac{2}{C_k^\circ} \left(1 + \cos^2 \beta - \sqrt{1 + \cos^2 \beta} \cos \beta \right) = 1 &\Rightarrow \frac{2}{C_k^\circ} \sqrt{1 + \cos^2 \beta} \left(\sqrt{1 + \cos^2 \beta} - \cos \beta \right) = 1 \\ \Rightarrow C_k^\circ = 2\sqrt{1 + \cos^2 \beta} \left(\sqrt{1 + \cos^2 \beta} - \cos \beta \right) & \quad (13.3) \end{aligned}$$

و ویژه‌بردار متناظر با ویژه‌مقدار دیگر:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e^{-i\beta} & e^{-i\beta} \\ e^{i\beta} & -e^{i\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix} &= e^{i(\pi+\alpha)} \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (1+b) e^{-i\beta} = e^{i(\pi+\alpha)} &\Rightarrow 1+b = \sqrt{2} e^{i\pi} e^{i\alpha} e^{i\beta} \Rightarrow b = -\sqrt{2} e^{i\alpha} e^{i\beta} - 1 \\ \Rightarrow b = -\sqrt{2} (\cos \alpha + i \sin \alpha) (\cos \beta - i \sin \beta) - 1 & \\ \Rightarrow b = -\sqrt{2} (\cos \alpha \cos \beta + i \cos \alpha \sin \beta + i \sin \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) - 1 & \\ \Rightarrow b = -\sqrt{2} \left(\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \cos \beta + i \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \sin \beta + \frac{i}{\sqrt{2}} \sin \beta \cos \beta - \frac{\sin^2 \beta}{\sqrt{2}} \right) - 1 & \\ \Rightarrow b = -\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \cos^2 \beta} \cos \beta + \frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \cos^2 \beta} \sin \beta + \frac{i}{\sqrt{2}} \sin \beta \cos \beta - \frac{\sin^2 \beta}{\sqrt{2}} \right) - 1 & \\ \Rightarrow b = - \left(\sqrt{1 + \cos^2 \beta} \cos \beta + i \sqrt{1 + \cos^2 \beta} \sin \beta + i \sin \beta \cos \beta - \sin^2 \beta + 1 \right) & \\ \Rightarrow b = - \left(\sqrt{1 + \cos^2 \beta} (\cos \beta + i \sin \beta) + i \sin \beta \cos \beta + \cos^2 \beta \right) & \\ \Rightarrow b = -\sqrt{1 + \cos^2 \beta} (\cos \beta + i \sin \beta) - \cos \beta (\cos \beta + i \sin \beta) & \\ \Rightarrow b = e^{i\beta} \left(-\sqrt{1 + \cos^2 \beta} - \cos \beta \right) & \quad (14.3) \end{aligned}$$

در این جا هم برای تعیین ضریب بهنجارش از $C_k^1 = \langle \phi_k^1 | \phi_k^1 \rangle$ استفاده می‌کنیم:

$$\langle \phi_k^1 | \phi_k^1 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & -e^{-i\beta} (\sqrt{1 + \cos^2 \beta} + \cos \beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -e^{i\beta} (\sqrt{1 + \cos^2 \beta} + \cos \beta) \end{bmatrix} = C_k^1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C_k^1} (1 + 1 + \cos^2 \beta + \cos^2 \beta + 2\sqrt{1 + \cos^2 \beta} \cos \beta) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{C_k^1} (1 + \cos^2 \beta + \sqrt{1 + \cos^2 \beta} \cos \beta) = 1 \Rightarrow \frac{2}{C_k^1} \sqrt{1 + \cos^2 \beta} (\sqrt{1 + \cos^2 \beta} + \cos \beta) = 1$$

$$\Rightarrow C_k^1 = 2\sqrt{1 + \cos^2 \beta} (\sqrt{1 + \cos^2 \beta} + \cos \beta) \quad (15.3)$$

بنابراین ویژه‌مقادیر و ویژه‌بردارهای متناظر با آن‌ها عبارتند از:

$$\lambda_k^0 = e^{-i\alpha} \quad ; \quad |\phi_k^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{1+\cos^2\beta}(\sqrt{1+\cos^2\beta}-\cos\beta)}} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i\beta} (\sqrt{1 + \cos^2 \beta} - \cos \beta) \end{bmatrix}$$

$$\lambda_k^1 = e^{i(\pi+\alpha)} \quad ; \quad |\phi_k^1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{1+\cos^2\beta}(\sqrt{1+\cos^2\beta}+\cos\beta)}} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i\beta} (\sqrt{1 + \cos^2 \beta} + \cos \beta) \end{bmatrix} \quad (16.3)$$

با به دست آمدن ویژه‌بردارها و ویژه‌مقادیر، می‌توانیم بسط عملگر تحول را به شکل زیر بنویسیم:

$$U = \sum_{k=0}^{N-1} (e^{-i\alpha} |k\rangle |\phi_k^0\rangle \langle k| \langle \phi_k^0| + e^{i(\pi+\alpha)} |k\rangle |\phi_k^1\rangle \langle k| \langle \phi_k^1|) \quad (17.3)$$

حالت ولگشت پس از گام t م از t بار اعمال عملگر U به دست می‌آید، بنابراین:

$$U^t = \sum_{k=0}^{N-1} (e^{-iat} |k\rangle |\phi_k^0\rangle \langle k| \langle \phi_k^0| + e^{i(\pi+\alpha)t} |k\rangle |\phi_k^1\rangle \langle k| \langle \phi_k^1|) \quad (18.3)$$

حالت اولیه را به صورت $|\psi(0)\rangle = |0\rangle |0\rangle$ در نظر می‌گیریم و در گام t م، حالت این ولگشت عبارت

است از:

$$|\psi(t)\rangle = U^t |\psi(0)\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} (e^{-i\alpha t} |k, \phi_k^\circ\rangle \langle k, \phi_k^\circ | 0, 0\rangle + e^{i(\pi+\alpha)t} |k, \phi_k^1\rangle \langle k, \phi_k^1 | 0, 0\rangle) \quad (19.3)$$

در این رابطه، $\langle k, \phi_k^\circ | 0, 0\rangle$ و $\langle k, \phi_k^1 | 0, 0\rangle$ را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$\langle k, \phi_k^\circ | 0, 0\rangle = \langle k | 0\rangle \langle \phi_k^\circ | 0\rangle \quad (20.3)$$

با توجه به شکل صریح $|\phi_k^\circ\rangle$ که به دست آوردیم:

$$\langle \phi_k^\circ | 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{C_k^\circ}} \left[\begin{array}{c} 1 \\ e^{i\beta} (\sqrt{1 + \cos^2 \beta} - \cos \beta) \end{array} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21.3)$$

$$\Rightarrow \langle \phi_k^\circ | 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{C_k^\circ}}$$

با استفاده از تبدیل فوریه $|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{yi\pi nk}{N}} |n\rangle$:

$$\langle k | 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{yi\pi nk}{N}} \langle n | 0\rangle \quad (22.3)$$

$$\Rightarrow \langle k | 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

بنابراین:

$$\langle k, \phi_k^\circ | 0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{NC_k^\circ}} \quad (23.3)$$

برای $\langle k, \phi_k^1 | 0, 0\rangle$ نیز:

$$\langle \phi_k^1 | \circ \rangle = \frac{1}{\sqrt{C_k^1}} \left[1 \quad e^{i\beta} \left(\sqrt{1 + \cos^2 \beta} + \cos \beta \right) \right] \begin{bmatrix} 1 \\ \circ \end{bmatrix} \quad (24.3)$$

$$\Rightarrow \langle \phi_k^1 | \circ \rangle = \frac{1}{\sqrt{C_k^1}}$$

$$\Rightarrow \langle k, \phi_k^1 | \circ, \circ \rangle = \frac{1}{\sqrt{NC_k^1}}$$

با جاگذاری روابط به دست آمده در ۱۹.۳:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{e^{-i\alpha t}}{\sqrt{C_k^0}} |k, \phi_k^0\rangle + \frac{(-1)^t e^{i\alpha t}}{\sqrt{C_k^1}} |k, \phi_k^1\rangle \right) \quad (25.3)$$

برای به دست آوردن C_k^0 و C_k^1 به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_k^0} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta} (\sqrt{1 + \cos^2 \beta} - \cos \beta)} \times \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \beta} + \cos \beta}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta} + \cos \beta} \\ \Rightarrow \frac{1}{C_k^0} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta} (1 + \cos^2 \beta - \cos^2 \beta)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} \\ \Rightarrow \frac{1}{C_k^0} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} \left(1 + \frac{\cos \beta}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} \right) \end{aligned} \quad (26.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_k^1} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta} (\sqrt{1 + \cos^2 \beta} + \cos \beta)} \times \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \beta} - \cos \beta}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta} - \cos \beta} \\ \Rightarrow \frac{1}{C_k^1} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta} (1 + \cos^2 \beta - \cos^2 \beta)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} \\ \Rightarrow \frac{1}{C_k^1} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} \left(1 - \frac{\cos \beta}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} \right) \end{aligned} \quad (27.3)$$

اگر رابطه ۲۵.۳ را به شکل زیر بازنویسی کنیم:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} |k\rangle \underbrace{\left(\frac{e^{-i\alpha t}}{\sqrt{C_k^0}} |\phi_k^0\rangle + \frac{(-1)^t e^{i\alpha t}}{\sqrt{C_k^1}} |\phi_k^1\rangle \right)}_{\begin{bmatrix} A_k(t) \\ B_k(t) \end{bmatrix}} \quad (28.3)$$

قسمت داخل پرانتز یک بردار دو مولفه‌ای با مولفه‌های $A_k(t)$ و $B_k(t)$ است. برای به دست آوردن این مولفه‌ها جملات داخل پرانتز در ۲۸.۳ را باز می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{e^{-i\alpha t}}{\sqrt{C_k^0}} |\phi_k^0\rangle &= \frac{e^{-i\alpha t}}{C_k^0} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i\beta} (\sqrt{1 + \cos^2 \beta} - \cos \beta) \end{bmatrix} \\ &= \frac{e^{-i\alpha t}}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} \left(1 + \frac{\cos \beta}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i\beta} (\sqrt{1 + \cos^2 \beta} - \cos \beta) \end{bmatrix} \\ &= \frac{e^{-i\alpha t}}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} \left(\frac{\sqrt{1 + \cos^2 \beta} + \cos \beta}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i\beta} (\sqrt{1 + \cos^2 \beta} - \cos \beta) \end{bmatrix} \quad (29.3) \\ &= \frac{e^{-i\alpha t}}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \beta} + \cos \beta}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} \\ e^{i\beta} \frac{1 + \cos^2 \beta - \cos^2 \beta}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} \begin{bmatrix} \cos(\alpha t) \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \beta} + \cos \beta}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} - i \sin(\alpha t) \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \beta} + \cos \beta}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} \\ e^{i\beta} \frac{\cos(\alpha t) - \sin(\alpha t)}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{(-1)^t e^{i\alpha t}}{\sqrt{C_k^1}} |\phi_k^1\rangle &= \frac{(-1)^t e^{i\alpha t}}{C_k^1} \begin{bmatrix} 1 \\ -e^{i\beta} (\sqrt{1 + \cos^2 \beta} + \cos \beta) \end{bmatrix} \\
 &= \frac{(-1)^t e^{i\alpha t}}{2} \left(1 - \frac{\cos \beta}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ -e^{i\beta} (\sqrt{1 + \cos^2 \beta} + \cos \beta) \end{bmatrix} \\
 &= \frac{(-1)^t e^{i\alpha t}}{2} \left(\frac{\sqrt{1 + \cos^2 \beta} - \cos \beta}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ -e^{i\beta} (\sqrt{1 + \cos^2 \beta} + \cos \beta) \end{bmatrix} \\
 &= \frac{(-1)^t e^{i\alpha t}}{2} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \beta} - \cos \beta}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} \\ -e^{i\beta} \frac{1 + \cos^2 \beta - \cos^2 \beta}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} \end{bmatrix} \\
 &= \frac{(-1)^t}{2} \begin{bmatrix} \cos(\alpha t) \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \beta} - \cos \beta}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} + i \sin(\alpha t) \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \beta} - \cos \beta}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} \\ -e^{i\beta} \frac{\cos(\alpha t) + i \sin(\alpha t)}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} \end{bmatrix} \quad (30.3)
 \end{aligned}$$

اگر t زوج باشد، با جمع ۲۹.۳ و ۳۰.۳، $A_k(t)$ به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
 A_k(t) &= \frac{1}{2} \left(\cos(\alpha t) \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \beta} + \cos \beta}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} - i \sin(\alpha t) \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \beta} + \cos \beta}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} \right. \\
 &\quad \left. + \cos(\alpha t) \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \beta} - \cos \beta}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} + i \sin(\alpha t) \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \beta} - \cos \beta}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\cos(\alpha t) \left(\frac{\sqrt{1 + \cos^2 \beta} + \cos \beta}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} + \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \beta} - \cos \beta}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + i \sin(\alpha t) \left(\frac{-\sqrt{1 + \cos^2 \beta} - \cos \beta}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} + \frac{\sqrt{1 + \cos^2 \beta} - \cos \beta}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}} \right) \right) \quad (31.3) \\
 \Rightarrow A_k(t) &= \cos(\alpha t) - \frac{i \cos \beta \sin(\alpha t)}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}}
 \end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$B_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\beta \frac{\cos(\alpha t) - i \sin(\alpha t)}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}}} - e^{i\beta \frac{\cos(\alpha t) + i \sin(\alpha t)}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}}} \right) \quad (32.3)$$

$$\Rightarrow B_k(t) = \frac{-ie^{i\beta} \sin(\alpha t)}{\sqrt{1 + \cos^2 \beta}}$$

کت حالتی را که از این طریق به دست می‌آید، می‌توان با یک تبدیل فوری به فضای مکان بازگرداند:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} |k\rangle \begin{bmatrix} A_k(t) \\ B_k(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} |n\rangle \begin{bmatrix} A_k(t) e^{\frac{i\pi nk}{N}} \\ B_k(t) e^{\frac{i\pi nk}{N}} \end{bmatrix} \quad (33.3)$$

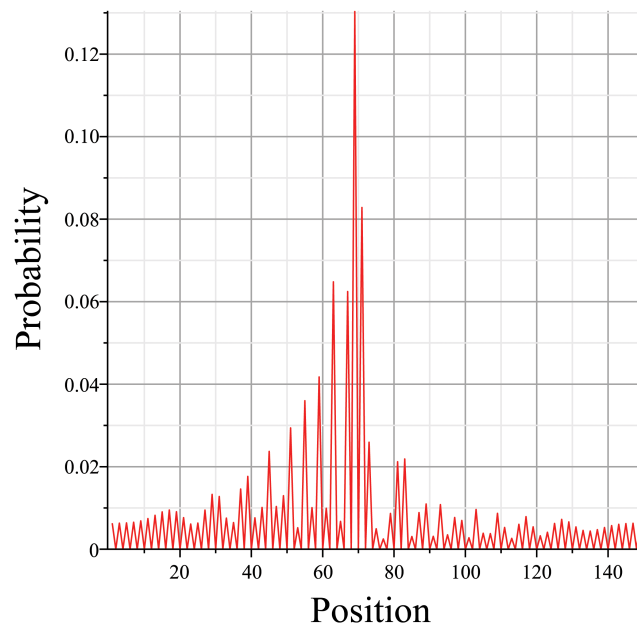
$$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |n\rangle \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{N-1} A_k(t) e^{in\beta} \\ \sum_{k=0}^{N-1} B_k(t) e^{in\beta} \end{bmatrix}$$

به این ترتیب می‌توان توزیع احتمال را هم به دست آورد. برای ولگشت هادامارد روی دایره با N جایگاه مشخص و t گام با حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |0, 0\rangle$:

$$P_n(t) = \frac{1}{N^2} \left| \sum_{k=0}^{N-1} A_k(t) e^{in\beta} \right|^2 + \frac{1}{N^2} \left| \sum_{k=0}^{N-1} B_k(t) e^{in\beta} \right|^2 \quad (34.3)$$

این رابطه برای هر مقدار N و هر مقدار مثبت t درست است. هنگامی که N زوج است، در جایگاه‌هایی که $n+t$ فرد باشد، توزیع احتمال صفر است و اگر N فرد باشد، توزیع احتمال برای تمام جایگاه‌ها غیر صفر خواهد بود.

اگر تعداد گام‌ها از تعداد جایگاه‌ها کم‌تر باشد، نمودار توزیع احتمال ولگشت روی دایره باید شبیه توزیع احتمال ولگشت روی خط باشد. شکل ۱.۳ نمودار توزیع احتمال را برای ولگشتی با $N = 150$ نشان می‌دهد که ۱۰۰ گام برداشته است. همان‌طور که دیده می‌شود، با یک انتقال به اندازه $\frac{N}{4}$ نمودار توزیع احتمال مشابه نمودار توزیع احتمال ولگشت روی خط می‌شود که ۱۰۰ گام برداشته است ۱.۳.



شکل ۱۰۳: توزیع احتمال ولگشت کوانتومی روی دایره با 150° جایگاه و 100 گام

۴.۳ توزیع حدی

در ولگشت تصادفی کلاسیکی هنگامی که تعداد گام‌ها زیاد می‌شود، توزیع احتمال به یک توزیع ثابت^۱ یا توزیع حدی^۲ میل می‌کند که به شرایط اولیه وابستگی ندارد [۵۶]. ممکن است این سوال مطرح شود که آیا این موضوع در مورد ولگشت کوانتومی نیز صدق می‌کند یا خیر؟

برای بررسی این موضوع حالت اولیه $|\psi(0)\rangle$ را در نظر می‌گیریم. بعد از t گام، $|\psi(t)\rangle = U^t |\psi(0)\rangle$ که در آن U همان عملگر تحول است. اگر ویژه‌بردارهای U را $\{|\lambda_{k,s}\rangle : 0 \leq k \leq N-1, s=0,1\}$ در نظر بگیریم که ویژه‌مقادیر متناظر آن‌ها، $e^{i\pi\lambda_{k,s}}$ هستند، می‌توانیم U را برحسب آن‌ها بنویسیم:

$$U = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{s=0}^1 e^{i\pi\lambda_{k,s}} |\lambda_{k,s}\rangle \langle \lambda_{k,s}| \quad (35.3)$$

که در آن $0 \leq \lambda_{k,s} \leq 1$ با بسط حالت اولیه در این پایه‌ها:

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{s=0}^1 C_{k,s} |\lambda_{k,s}\rangle ; C_{k,s} = \langle \lambda_{k,s} | \psi(0) \rangle \quad (36.3)$$

^۱Stationary Distribution

^۲Limiting Distribution

بنابراین در گام t ام:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{s=0}^1 C_{k,s} e^{i\pi\lambda_{k,s}t} |\lambda_{k,s}\rangle \quad (37.3)$$

اکنون می‌توان این سوال را مطرح کرد که آیا $|\psi(t)\rangle$ به کت مشخصی میل می‌کند یا خیر؟ می‌توان نشان داد که این حد در واقع وجود ندارد، چون نرم $\|\psi(t+1)\rangle - |\psi(t)\rangle\|$ برای تمام گام‌ها ثابت است [۵۶]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\psi(t+1)\rangle - |\psi(t)\rangle\|^2 &= \frac{1}{2} \|U^t(U-I)|\psi(0)\rangle\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\langle\psi(0)| (U^t(U-I)^t)^\dagger \right) \left((U^t(U-I)^t) |\psi(0)\rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} \langle\psi(0)| \left((U-I)^\dagger (U^t)^\dagger U^t (U-I) \right) |\psi(0)\rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle\psi(0)| (U-I)^\dagger (U-I) |\psi(0)\rangle = \frac{1}{2} \langle\psi(0)| U^\dagger U - U^\dagger I - UI + I |\psi(0)\rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle\psi(0)| 2I - (U^\dagger + U) |\psi(0)\rangle = \langle\psi(0)| \psi(0)\rangle - \frac{1}{2} \left(\langle\psi(0)| U^\dagger |\psi(0)\rangle - \langle\psi(0)| U |\psi(0)\rangle \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(\left(\langle\psi(0)| U^\dagger |\psi(0)\rangle + \langle\psi(0)| U |\psi(0)\rangle \right) \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(\left(\langle\psi(0)| U |\psi(0)\rangle \right)^\dagger + \langle\psi(0)| U |\psi(0)\rangle \right) \\ &= 1 - \text{Re}(\langle\psi(0)| U |\psi(0)\rangle) \end{aligned} \quad (38.3)$$

پراتور سکه برای تمام گام‌ها ثابت است، در نتیجه قسمت حقیقی $\langle\psi(0)| U |\psi(0)\rangle$ برای تمام t ها ثابت است. اگر $U \neq I$ ، آنگاه برای یک عملگر تحول و کت حالت اولیه مشخص، این نرم غیر صفر و ثابت خواهد بود. در صورتی که اگر $|\psi(t)\rangle$ به یک کت مشخص میل می‌کرد، این نرم باید صفر می‌شد [۵۶]. دلیل دیگری که می‌توان در این جا آورد این است که ویژه‌مقادیر U به صورت $e^{i\theta}$ هستند. بنابراین همیشه امکان‌پذیر است که پس از t' گام مشخص، $e^{i\theta t'}$ به ازای تمام ویژه‌مقادیر به صورت $e^{i\pi m} = 1$ در آید $\left\{ \forall t' | m = \frac{\theta_i t'}{\pi} \in \mathbb{Z} \text{ for } i = 1, 2, \dots \right\}$ که نشان می‌دهد ولگشت بعد از t' گام مشخص به حالت اولیه می‌رسد. بنابراین این چرخه مدام تکرار شده و حالت ولگشت به کت مشخصی میل نمی‌کند [۵۹]. با وجود این که توزیع حدی همگرا نمی‌شود، اما متوسط زمانی آن به یک توزیع ثابت همگرا می‌شود [۵۹]:

^۲Norm

$$\bar{p}_v(T) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} p_v(t) \quad (39.3)$$

که در آن $p_v(t)$ احتمال یافتن ولگشت در جایگاه v در زمان t است:

$$p_v(T) = \sum_{s=0}^1 |\langle s, v | \psi(t) \rangle|^2 \quad (40.3)$$

در حقیقت کمیت $\bar{P}_v(T)$ نشان دهنده این است که ولگشت بعد از T گام به طور متوسط چه مدت در مکان v حضور داشته است [۵۶]. لازم به ذکر است که کمیتی که به این شکل به دست می‌آید، در رابطه زیر صدق می‌کند:

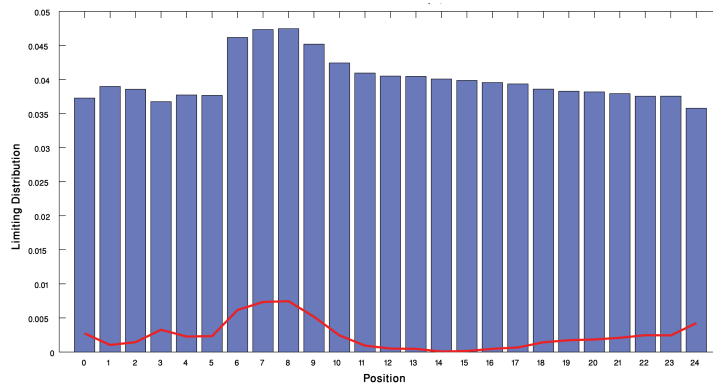
$$\sum_{v=0}^{N-1} p_v(T) = 1 \quad (41.3)$$

این تابع توزیع احتمال میانگین با بیشتر شدن گام‌ها به یک تابع توزیع مشخص میل می‌کند. بنابراین π_v را به عنوان تابع توزیع میانگین حدی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

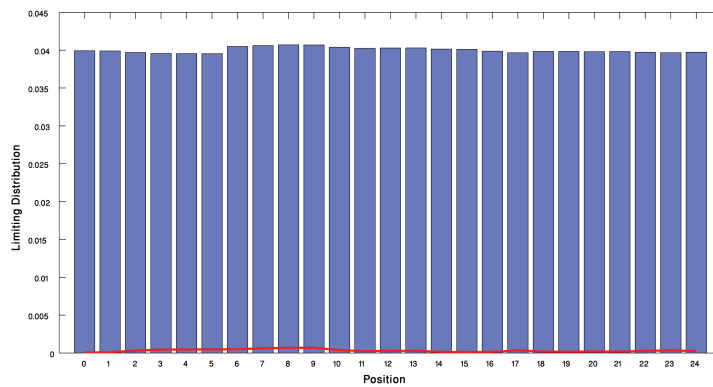
$$\pi(v) = \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{p}_v(T) \quad (42.3)$$

انتظار داریم با افزایش تعداد گام‌ها تابع توزیع میانگین ۳۹.۳ به تابع توزیع میانگین حدی ۴۲.۳ نزدیک و نزدیک‌تر شود. سرعت نزدیک شدن به تابع توزیع میانگین حدی با کمیتی به نام زمان آمیختگی اندازه‌گیری می‌شود که در قسمت‌های بعدی به آن اشاره خواهیم کرد. برای نشان دادن میل کردن تابع توزیع میانگین به یک توزیع مشخص، دو تابع توزیع با تعداد گام‌های متفاوت، در شکل ۲.۳ و ۳.۳ رسم شده‌اند.

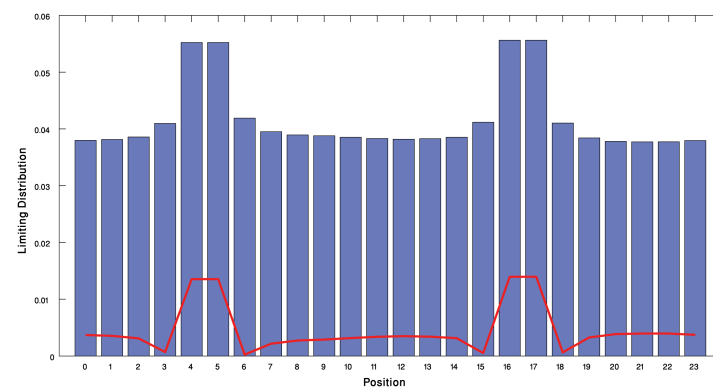
شکل ۴.۳ نمودار توزیع حدی را برای ولگشتی با ۲۴ جایگاه نشان می‌دهد. این نمودار نشان می‌دهد که توزیع حدی همیشه یک توزیع یکنواخت نیست، با این وجود همچنان همگرایی به یک شکل توزیع خاص را تایید می‌کند. برای به دست آوردن شکل صریح $\pi(v)$ ابتدا $p_v(T)$ را محاسبه می‌کنیم:



شکل ۲.۳: توزیع حدی ولگشت کوانتومی روی چرخه با ۲۵ جایگاه و ۱۰۰ گام؛ حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$ بوده است. خط رسم شده، فاصله از توزیع یکنواخت را نشان می‌دهد.



شکل ۳.۳: توزیع حدی ولگشت کوانتومی روی چرخه با ۲۵ جایگاه و ۱۰۰۰ گام؛ حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$ بوده است. خط رسم شده، فاصله از توزیع یکنواخت را نشان می‌دهد.



شکل ۴.۳: توزیع حدی ولگشت کوانتومی روی چرخه با ۲۴ جایگاه و ۱۰۰۰ گام؛ حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$ بوده است. خط رسم شده، فاصله از توزیع یکنواخت را نشان می‌دهد.

$$\begin{aligned} \bar{p}_v(T) &= \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} p_v(t) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{b=0}^{N-1} |\langle v, b | \psi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{b=0}^{N-1} \left| \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{s=0}^{N-1} C_{k,s} e^{i\pi\lambda_{k,s}t} \langle b, v | \lambda_{k,s} \rangle \right|^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{p}_v(T) = \sum_{k,k'=0}^{N-1} \sum_{s,s',b=0}^1 C_{k,s} C_{k',s'}^* \langle b, v | \lambda_{k,s} \rangle \langle \lambda_{k',s'} | b, v \rangle \times \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} e^{i\pi(\lambda_{k,s} - \lambda_{k',s'})t} \quad (43.3)$$

تنها جمله آخر است که به زمان (T) وابسته است. با استفاده از تصاعد هندسی:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} e^{i\pi(\lambda_{k,s} - \lambda_{k',s'})t} = \begin{cases} \frac{e^{i\pi(\lambda_{k,s} - \lambda_{k',s'})T} - 1}{T(e^{i\pi(\lambda_{k,s} - \lambda_{k',s'})} - 1)} & \lambda_{k,s} \neq \lambda_{k',s'} \\ 1 & \lambda_{k,s} = \lambda_{k',s'} \end{cases} \quad (44.3)$$

بنابراین اگر $\lambda_{k,s} \neq \lambda_{k',s'}$ پاسخ یک عدد مختلط خواهد بود که اندازه آن برابر است با:

$$\left| \frac{e^{i\lambda T} - 1}{T(e^{i\lambda} - 1)} \right|^2 = \frac{1}{T^2} \frac{1 - \cos \lambda T}{1 - \cos \lambda} = \frac{1}{T^2} \left(\frac{1}{1 - \cos \lambda} - \frac{\cos \lambda T}{1 - \cos \lambda} \right) \leq \frac{1}{T^2} \frac{1}{1 - \cos \lambda} \quad (45.3)$$

به این ترتیب درمی یابیم که برای T های بزرگ و هنگامی که $\lambda_{k,s} \neq \lambda_{k',s'}$:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^2} \frac{1}{1 - \cos(i\pi(\lambda_{k,s} - \lambda_{k',s'}))} = 0 \quad (46.3)$$

در نتیجه:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \left(e^{i\pi(\lambda_{k,s} - \lambda_{k',s'})t} \right) = \begin{cases} 0 & (\lambda_{k,s} \neq \lambda_{k',s'}) \\ 1 & (\lambda_{k,s} = \lambda_{k',s'}) \end{cases} \quad (47.3)$$

با جاگذاری رابطه ۴۷.۳ در $\bar{p}_v(T)$ (۴۳.۳) و استفاده از این نتیجه در ۴۲.۳ داریم:

$$\pi(v) = \sum_{\substack{k,k'=0 \\ \lambda_{k,s} = \lambda_{k',s'}}}^{N-1} \sum_{s,s'=0}^1 C_{k,s} C_{k',s'}^* \sum_{b=0}^1 \langle v, b | \lambda_{k,s} \rangle \langle \lambda_{k',s'} | v, b \rangle \quad (48.3)$$

اگر تبهگنی نداشته باشیم، یعنی $\lambda_{k,s} = \lambda_{k',s'}$ فقط وقتی برقرار باشد که $k = k'$ و $s = s'$ ، در این صورت:

$$\pi(v) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{s=0}^1 |C_{k,s}|^2 \underbrace{\sum_{b=0}^1 |\langle v, b | \lambda_{k,s} \rangle|^2}_{p_{k,s}(v)} \quad (49.3)$$

بنابراین توزیع حدی به $C_{k,s}$ ها که ضرایب حالت اولیه در پایه ویژه بردارهای U هستند، بستگی دارد. پایه های فوریه فضای هیلبرت مرتبط با جایگاه ها را با $\{|\kappa_k\rangle\}$ نمایش می دهیم، پس عملگر تحول را می توان با یک عملگر کاهش یافته که به k بستگی دارد و در فضای سکه عمل می کند، نوشت. اگر $\{|\chi_{k,s}\rangle; s=0, 1\}$ پایه های متعامد بهنجار فضای کاهش یافته با ویژه مقادیر $\lambda_{k,s}$ باشند، عملگر تحول دارای بردارهای پایه $\{|\chi_{k,s}, \kappa_k\rangle; s=0, 1; 0 \leq k \leq N-1\}$ خواهد بود که می توان آن را جایگزین $|\lambda_{k,s}\rangle$ کرد:

$$p_{k,s}(v) = \sum_{b=0}^1 |\langle v, b | \lambda_{k,s} \rangle|^2 = \sum_{b=0}^1 |\langle v | \kappa_k \rangle|^2 |\langle b | \chi_{k,s} \rangle|^2 \quad (50.3)$$

با استفاده از ۳.۳ و در نتیجه $|\langle v | \kappa_k \rangle|^2 = \frac{1}{N}$ و از طرفی با توجه به این که اندازه $|\chi_{k,s}\rangle$ واحد است، بنابراین:

$$\sum_{b=0}^1 |\langle b | \chi_{k,s} \rangle|^2 = 1 \quad (51.3)$$

در نتیجه رابطه ۴۹.۳ به شکل زیر خواهد شد:

$$\pi(v) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{s=0}^1 |C_{k,s}|^2 \quad (52.3)$$

از طرفی با توجه به بهنجار بودن حالت اولیه:

$$\sum_{s=0}^1 |C_{k,s}|^2 = 1 \quad (53.3)$$

به این ترتیب، با جاگذاری نتایج به دست آمده در $\pi(v)$:

$$\pi(v) = \frac{1}{N} \quad (54.3)$$

این رابطه با شرط ناتبهگن بودن ویژه مقادیر به دست آمده است. با توضیحاتی که در ادامه می آید، در می یابیم که تنها برای چرخه هایی که تعداد فردی جایگاه دارند، ویژه مقادیر متمایز بوده و در نتیجه

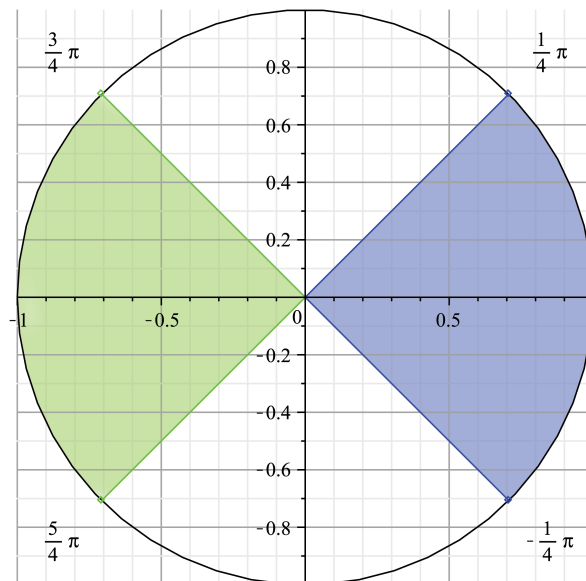
توزیع حدی صرف نظر از حالت اولیه یکنواخت است. در ولگشت کوانتومی روی چرخه، ویژه‌مقادیر عبارتند از $\chi_{k,0} = e^{-i\alpha}$ و $\chi_{k,1} = e^{i(\pi+\alpha)}$ که در آن‌ها:

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{2\pi k}{N} \quad (55.3)$$

چون $1 \geq |\sin \frac{2\pi k}{N}|$ ، می‌توان دریافت:

$$|\sin \alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha \in \left(\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right] \right) \quad (56.3)$$

و تمام ویژه‌مقادیر همان‌طور که شکل ۵.۳ نشان می‌دهد، در این بازه جای می‌گیرند.



شکل ۵.۳: ناحیه‌هایی از دایره مثلثاتی که ویژه‌مقادیر در آن قرار می‌گیرند

به این ترتیب هر ویژه‌مقدار در بخش اول به شکل $\lambda_{0,k} = e^{-i\alpha}$ ، متناظر با ویژه‌مقدار دیگری به شکل $\lambda_{1,k} = e^{i(\pi+\alpha)}$ در بخش دیگر است. از طرفی شرط برابری دو ویژه‌مقدار آن است که:

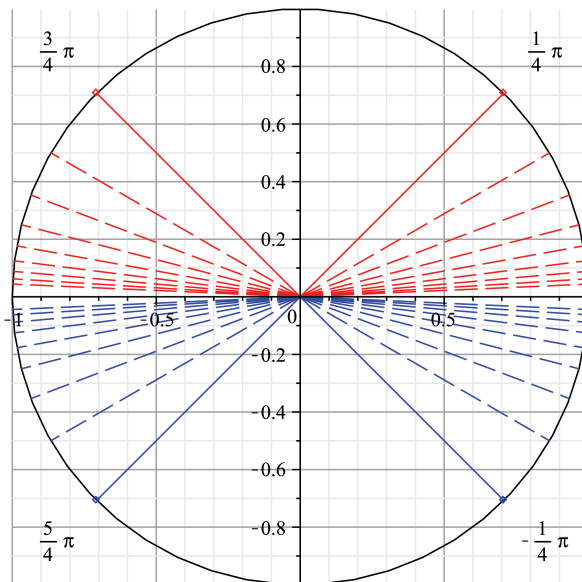
$$\sin \frac{2\pi k}{N} = \sin \frac{2\pi k'}{N} \quad (57.3)$$

که منجر به سه نتیجه زیر می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} k = k' \\ \frac{\gamma\pi k}{N} = \pi - \frac{\gamma\pi k'}{N} \Rightarrow k = \frac{N}{\gamma} - k' \Rightarrow k + k' = \frac{N}{\gamma} \\ \frac{\gamma\pi k}{N} - \pi = \gamma\pi - \frac{\gamma\pi k'}{N} \Rightarrow k - \frac{N}{\gamma} = N - k' \Rightarrow k + k' = \frac{3N}{\gamma} \end{array} \right. \quad (58.3)$$

در این جا می‌توان دید که برای تعداد جایگاه‌های فرد تنها تساوی اول برقرار است، چون k و k' اعداد طبیعی هستند. در نتیجه ویژه‌مقادیر متمایز بوده (تبهگنی نداریم) و توزیع حدی یک توزیع یکنواخت است.

اما اگر N زوج باشد، دو ویژه‌مقدار برابر برای دو k متفاوت وجود خواهد داشت؛ البته به جز $k = \frac{N}{\gamma}, \frac{3N}{\gamma}$.



شکل ۶.۳: تبهگنی در ویژه‌مقادیر ولگشت کوانتومی روی دایره برای تعداد جایگاه‌های زوج

یعنی به ازای یک ویژه مقدار در ناحیه اول دایره مثلثاتی، ویژه مقدار دیگری در ناحیه دوم و به ازای یک ویژه مقدار در ناحیه سوم، ویژه مقدار دیگری در ناحیه چهارم وجود دارد که $\sin \frac{\gamma\pi k}{N} = \sin \frac{\gamma\pi k'}{N}$ با بازنویسی رابطه ۴۸.۳:

$$\begin{aligned} \pi(v) &= \sum_{\substack{k,k'=0 \\ \chi_{k,s}=\chi_{k',s'}}}^{N-1} \sum_{s,s'=0}^1 C_{k,s} C_{s',k'}^* \sum_{b=0}^1 \langle b | \chi_{k,s} \rangle \langle \chi_{k',s'} | b \rangle \langle v | \kappa_k \rangle \langle \kappa_{k'} | v \rangle \\ &= \sum_{\substack{k,k'=0 \\ \chi_{k,s}=\chi_{k',s'}}}^{N-1} \sum_{s,s'=0}^1 C_{k,s} C_{s',k'}^* \sum_{b=0}^1 \langle \chi_{k',s'} | b \rangle \langle b | \chi_{k,s} \rangle \langle v | \kappa_k \rangle \langle \kappa_{k'} | v \rangle \end{aligned} \quad (59.3)$$

با استفاده از اصل تمامیت:

$$\begin{aligned} \pi(v) &= \sum_{\substack{k,k'=0 \\ \chi_{k,s}=\chi_{k',s'}}}^{N-1} \sum_{s,s'=0}^1 C_{k,s} C_{k',s'}^* \langle \chi_{k',s'} | \chi_{k,s} \rangle \langle v | \kappa_k \rangle \langle \kappa_{k'} | v \rangle \\ &= \sum_{\substack{k,k'=0 \\ e^{-i\alpha}=e^{-i\alpha'}}}^{N-1} C_{k,0} C_{k',0}^* \langle \chi_{k',0} | \chi_{k,0} \rangle \langle v | \kappa_k \rangle \langle \kappa_{k'} | v \rangle \\ &+ \sum_{\substack{k,k'=0 \\ e^{i(\pi+\alpha)}=e^{i(\pi+\alpha')}}}^{N-1} C_{k,1} C_{k',1}^* \langle \chi_{k',1} | \chi_{k,1} \rangle \langle v | \kappa_k \rangle \langle \kappa_{k'} | v \rangle \end{aligned} \quad (۶۰.۳)$$

این نتیجه به این دلیل به دست آمده است که هیچ جمله $s=0$ و $s=1$ یا $s'=1$ و $s'=0$ در رابطه $\pi(v)$ تاثیری نخواهند داشت، زیرا که $e^{-i\alpha}$ و $e^{i(\pi+\alpha)}$ هیچ وقت با هم برابر نمی شوند (چون $e^{-i\alpha}$ در ربع اول و چهارم دایره وجود دارد و $e^{i(\pi+\alpha)}$ در ربع دوم و سوم). با استفاده از تبدیل فوریه

$$|\kappa_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{\gamma i \pi k n}{N}} |n\rangle \Rightarrow \langle \kappa_k | = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{\gamma i \pi k n}{N}} \langle n | \quad (۶۱.۳)$$

با محاسبه $\langle v | \kappa_k \rangle$ و $\langle \kappa_{k'} | v \rangle$:

$$\left. \begin{aligned} \langle v | \kappa_k \rangle &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{\gamma i \pi k n}{N}} \langle v | n \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{\gamma i \pi k n}{N}} \\ \langle \kappa_{k'} | v \rangle &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{\gamma i \pi k' n}{N}} \langle n | v \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-\frac{\gamma i \pi k' n}{N}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \langle v | \kappa_k \rangle \langle \kappa_{k'} | v \rangle = e^{-\frac{\gamma i \pi v (k-k')}{N}} \quad (۶۲.۳)$$

پس:

$$\begin{aligned} \pi(v) &= \frac{1}{N} \left(\sum_{\substack{k,k'=0 \\ e^{-i\alpha}=e^{-i\alpha'}}}^{N-1} C_{k,0} C_{k',0}^* \langle \chi_{k',0} | \chi_{k,0} \rangle e^{-\frac{\gamma i \pi v (k-k')}{N}} \right. \\ &+ \left. \sum_{\substack{k,k'=0 \\ e^{i(\pi+\alpha)}=e^{i(\pi+\alpha')}}}^{N-1} C_{k,1} C_{k',1}^* \langle \chi_{k',1} | \chi_{k,1} \rangle e^{-\frac{\gamma i \pi v (k-k')}{N}} \right) \end{aligned} \quad (۶۳.۳)$$

جمع دوگانه موجود در رابطه ۶۳.۳ را می توان به سه جمله باز کرد که هرکدام به ترتیب روی ویژه مقادیر $k = k'$ و $k' = \frac{N}{\gamma} \bmod N$ و $k = \frac{N}{\gamma} \bmod N$ جمع می زنند. جمع روی جملات شامل $k = k'$ برابر خواهد شد با $\frac{1}{N}$ (همان توزیع یکنواخت در ولگشت دارای تعداد فردی جایگاه):

$$\begin{aligned}
 \pi(v) &= \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \operatorname{Re} \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \frac{N}{\gamma}, \frac{\gamma N}{\gamma}}}^{N-1} C_{k,0} C_{\frac{N}{\gamma}-k,0}^* \langle \chi_{\frac{N}{\gamma}-k,0} | \chi_{k,0} \rangle e^{-\frac{\gamma i \pi v (\frac{\gamma k - N}{N})}{N}} \right) \\
 &+ \frac{1}{N} \operatorname{Re} \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \frac{N}{\gamma}, \frac{\gamma N}{\gamma}}}^{N-1} C_{k,1} C_{\frac{N}{\gamma}-k,1}^* \langle \chi_{\frac{N}{\gamma}-k,1} | \chi_{k,1} \rangle e^{-\frac{\gamma i \pi v (\frac{\gamma k - N}{N})}{N}} \right) \\
 &= \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \operatorname{Re} \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \frac{N}{\gamma}, \frac{\gamma N}{\gamma}}}^{N-1} C_{k,0} C_{\frac{N}{\gamma}-k,0}^* \langle \chi_{\frac{N}{\gamma}-k,0} | \chi_{k,0} \rangle e^{\frac{\gamma i \pi v k}{N} - i \pi} \right) \\
 &+ \frac{1}{N} \operatorname{Re} \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \frac{N}{\gamma}, \frac{\gamma N}{\gamma}}}^{N-1} C_{k,1} C_{\frac{N}{\gamma}-k,1}^* \langle \chi_{\frac{N}{\gamma}-k,1} | \chi_{k,1} \rangle e^{\frac{\gamma i \pi v k}{N} - i \pi} \right)
 \end{aligned} \tag{۶۴.۳}$$

با استفاده از $t = 0$ در رابطه ۲۵.۳، $C_{s,k}$ را به دست می‌آوریم:

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\sqrt{N} C_k^0} |k\rangle |\phi_k^0\rangle + \frac{1}{\sqrt{N} C_k^1} |k\rangle |\phi_k^1\rangle \right) \tag{۶۵.۳}$$

$$\begin{aligned}
 C_{\frac{N}{\gamma}-k}^0 &= \gamma \sqrt{1 + \cos^2 \left(\left(\frac{N}{\gamma} - k \right) \frac{\gamma \pi}{N} \right)} \left(\sqrt{1 + \cos^2 \left(\left(\frac{N}{\gamma} - k \right) \frac{\gamma \pi}{N} \right)} - \cos \left(\left(\frac{N}{\gamma} - k \right) \frac{\gamma \pi}{N} \right) \right) \\
 &= \gamma \sqrt{1 + \cos^2 \left(\pi - \frac{\gamma \pi k}{N} \right)} \left(\sqrt{1 + \cos^2 \left(\pi - \frac{\gamma \pi k}{N} \right)} - \cos \left(\pi - \frac{\gamma \pi k}{N} \right) \right) \\
 \Rightarrow C_{\frac{N}{\gamma}-k}^0 &= \gamma \sqrt{1 + \cos^2 \left(\frac{\gamma \pi k}{N} \right)} \left(\sqrt{1 + \cos^2 \left(\frac{\gamma \pi k}{N} \right)} + \cos \left(\frac{\gamma \pi k}{N} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{۶۶.۳}$$

و در نتیجه:

$$C_k^0 C_{\frac{N}{\gamma}-k}^0 = \gamma \left(1 + \cos^2 \left(\frac{\gamma \pi k}{N} \right) \right) \tag{۶۷.۳}$$

همچنین برای $C_k^1 C_{\frac{N}{\gamma}-k}^1$:

$$C_{\frac{N}{\gamma}-k}^{\backslash} = \gamma \sqrt{1 + \cos^{\gamma} \left(\left(\frac{N}{\gamma} - k \right) \frac{\gamma \pi}{N} \right)} \left(\sqrt{1 + \cos^{\gamma} \left(\left(\frac{N}{\gamma} - k \right) \frac{\gamma \pi}{N} \right)} + \cos \left(\left(\frac{N}{\gamma} - k \right) \frac{\gamma \pi}{N} \right) \right)$$

$$C_{\frac{N}{\gamma}-k}^{\backslash} = \gamma \sqrt{1 + \cos^{\gamma} \left(\frac{\gamma k \pi}{N} \right)} \left(\sqrt{1 + \cos^{\gamma} \left(\frac{\gamma k \pi}{N} \right)} - \cos \left(\frac{\gamma k \pi}{N} \right) \right)$$

$$C_k^{\backslash} C_{\frac{N}{\gamma}-k}^{\backslash} = \gamma \left(1 + \cos^{\gamma} \left(\frac{\gamma k \pi}{N} \right) \right) \tag{۶۸.۳}$$

همچنین:

$$\begin{aligned} \langle \chi_{\frac{N}{\gamma}-k, \circ}^{\backslash} | \chi_{k, \circ} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{C_k^{\circ} C_{\frac{N}{\gamma}-k}^{\circ}}} \left(1 + \left(\sqrt{1 + \cos^{\gamma} \frac{\gamma \pi k}{N}} - \cos \frac{\gamma \pi k}{N} \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left(\sqrt{1 + \cos^{\gamma} \frac{\gamma \pi k}{N}} + \cos \frac{\gamma \pi k}{N} \right) e^{\frac{\gamma i \pi k}{N}} e^{-\frac{\gamma i \pi}{N} \left(\frac{N}{\gamma} - k \right)} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{C_k^{\circ} C_{\frac{N}{\gamma}-k}^{\circ}}} \left(1 + e^{\frac{\gamma i \pi}{N} \left(k + k - \frac{N}{\gamma} \right)} \right) = \frac{1}{\sqrt{C_k^{\circ} C_{\frac{N}{\gamma}-k}^{\circ}}} \left(1 + e^{-\frac{\gamma i \pi k}{N} - i \pi} \right) \end{aligned} \tag{۶۹.۳}$$

که با استفاده از ۶۷.۳:

$$\langle \chi_{\frac{N}{\gamma}-k, \circ}^{\backslash} | \chi_{k, \circ} \rangle = \frac{1 - e^{\frac{\gamma i \pi k}{N}}}{\gamma \sqrt{1 + \cos^{\gamma} \left(\frac{\gamma \pi k}{N} \right)}} \tag{۷۰.۳}$$

و:

$$\begin{aligned} \langle \chi_{\frac{N}{\gamma}-k, \backslash} | \chi_{k, \backslash} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{C_k^{\backslash} C_{\frac{N}{\gamma}-k}^{\backslash}}} \left(1 + \left(\sqrt{1 + \cos^{\gamma} \frac{\gamma \pi k}{N}} + \cos \frac{\gamma \pi k}{N} \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left(\sqrt{1 + \cos^{\gamma} \frac{\gamma \pi k}{N}} - \cos \frac{\gamma \pi k}{N} \right) e^{\frac{\gamma i \pi k}{N}} e^{-\frac{\gamma i \pi}{N} \left(\frac{N}{\gamma} - k \right)} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{C_k^{\backslash} C_{\frac{N}{\gamma}-k}^{\backslash}}} \left(1 + e^{\frac{\gamma i \pi}{N} \left(k + k - \frac{N}{\gamma} \right)} \right) = \frac{1}{\sqrt{C_k^{\backslash} C_{\frac{N}{\gamma}-k}^{\backslash}}} \left(1 + e^{\frac{\gamma i \pi k}{N} - i \pi} \right) \end{aligned} \tag{۷۱.۳}$$

و با استفاده از ۶۸.۳:

$$\langle \chi_{\frac{N}{\nu}-k, 1} \mid \chi_{k, 1} \rangle = \frac{1 - e^{\frac{\nu i \pi k}{N}}}{\sqrt{1 + \cos^2 \left(\frac{\nu \pi k}{N} \right)}} \quad (۷۲.۳)$$

با استفاده از روابط ۷۰.۳ و ۷۲.۳ در رابطه ۶۴.۳:

$$\begin{aligned} \pi(v) &= \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \operatorname{Re} \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \frac{N}{\nu}, \frac{2N}{\nu}}}^{N-1} C_{0,k} C_{0, \frac{N}{\nu}-k} \left(\frac{1 - e^{\frac{\nu i \pi k}{N}}}{\sqrt{1 + \cos^2 \left(\frac{\nu \pi k}{N} \right)}} (-1)^v e^{\frac{\nu i \pi k v}{N}} \right) \right) \\ &+ \frac{1}{N} \operatorname{Re} \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \frac{N}{\nu}, \frac{2N}{\nu}}}^{N-1} C_{1,k} C_{1, \frac{N}{\nu}-k} \left(\frac{1 - e^{\frac{\nu i \pi k}{N}}}{\sqrt{1 + \cos^2 \left(\frac{\nu \pi k}{N} \right)}} (-1)^v e^{\frac{\nu i \pi k v}{N}} \right) \right) \\ &= \frac{1}{N} + \frac{(-1)^v}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \frac{N}{\nu}, \frac{2N}{\nu}}}^N \left(C_{0,k} C_{0, \frac{N}{\nu}-k} + C_{1,k} C_{1, \frac{N}{\nu}-k} \right) \times \operatorname{Re} \left(\frac{e^{\frac{\nu i \pi k v}{N}} - e^{\frac{\nu i \pi k (v+1)}{N}}}{\sqrt{1 + \cos^2 \left(\frac{\nu \pi k}{N} \right)}} \right) \Rightarrow \\ \pi(v) &= \frac{1}{N} + \frac{(-1)^v}{\sqrt{N}} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \frac{N}{\nu}, \frac{2N}{\nu}}}^N \left(C_{0,k} C_{0, \frac{N}{\nu}-k} + C_{1,k} C_{1, \frac{N}{\nu}-k} \right) \left(\frac{\cos \left(\frac{\nu \pi k v}{N} \right) - \cos \left(\frac{\nu \pi k (v+1)}{N} \right)}{\sqrt{1 + \cos^2 \left(\frac{\nu \pi k}{N} \right)}} \right) \end{aligned} \quad (۷۳.۳)$$

رابطه ۷۳.۳ از این نظر یک رابطه عمومی است که می‌تواند توزیع حدی هر نوع ولگشت کوانتومی روی چرخه با عملگر سکه هادامارد را مشخص کند.

حال ضریب $C_{0,k} C_{0, \frac{N}{\nu}-k} + C_{1,k} C_{1, \frac{N}{\nu}-k}$ را تعیین می‌کنیم. از رابطه ۶۵.۳ داریم:

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\sqrt{N C_k^0}} |\chi_{0,k}\rangle |\kappa_k\rangle + \frac{1}{\sqrt{N C_k^1}} |\chi_{1,k}\rangle |\kappa_k\rangle \right) \quad (۷۴.۳)$$

پس:

$$C_{0,k} = \frac{1}{\sqrt{N C_k^0}} ; C_{1,k} = \frac{1}{\sqrt{N C_k^1}} \quad (۷۵.۳)$$

بنابراین:

$$C_{\circ, \frac{N}{\Upsilon} - k} = \frac{1}{\sqrt{NC_k^{\circ}}} = \frac{1}{\sqrt{N} \sqrt{\Upsilon} \sqrt{\sqrt{1 + \cos^{\Upsilon} \left(\frac{\Upsilon \pi k}{N} \right)} \left(\sqrt{1 + \cos^{\Upsilon} \left(\frac{\Upsilon \pi k}{N} \right)} + \cos \left(\frac{\Upsilon \pi k}{N} \right) \right)}}$$

$$\Rightarrow C_{\circ, k} C_{\circ, \frac{N}{\Upsilon} - k} = \frac{1}{\Upsilon N \sqrt{\sqrt{1 + \cos^{\Upsilon} \left(\frac{\Upsilon \pi k}{N} \right)} \left(\sqrt{1 + \cos^{\Upsilon} \left(\frac{\Upsilon \pi k}{N} \right)} - \cos \left(\frac{\Upsilon \pi k}{N} \right) \right)}}$$
(۷۶.۳)

$$\times \frac{1}{\sqrt{\sqrt{1 + \cos^{\Upsilon} \left(\frac{\Upsilon \pi k}{N} \right)} \left(\sqrt{1 + \cos^{\Upsilon} \left(\frac{\Upsilon \pi k}{N} \right)} + \cos \left(\frac{\Upsilon \pi k}{N} \right) \right)}}$$

$$\Rightarrow C_{\circ, k} C_{\circ, \frac{N}{\Upsilon} - k} = \frac{1}{\Upsilon N \sqrt{1 + \cos^{\Upsilon} \left(\frac{\Upsilon \pi k}{N} \right)}}$$

و:

$$C_{\mathbb{1}, \frac{N}{\Upsilon} - k} = \frac{1}{\sqrt{NC_k^{\mathbb{1}}}} = \frac{1}{\sqrt{N} \sqrt{\Upsilon} \sqrt{\sqrt{1 + \cos^{\Upsilon} \left(\frac{\Upsilon \pi k}{N} \right)} \left(\sqrt{1 + \cos^{\Upsilon} \left(\frac{\Upsilon \pi k}{N} \right)} - \cos \left(\frac{\Upsilon \pi k}{N} \right) \right)}}$$

$$\Rightarrow C_{\mathbb{1}, k} C_{\mathbb{1}, \frac{N}{\Upsilon} - k} = \frac{1}{\Upsilon N \sqrt{\sqrt{1 + \cos^{\Upsilon} \left(\frac{\Upsilon \pi k}{N} \right)} \left(\sqrt{1 + \cos^{\Upsilon} \left(\frac{\Upsilon \pi k}{N} \right)} + \cos \left(\frac{\Upsilon \pi k}{N} \right) \right)}}$$
(۷۷.۳)

$$\times \frac{1}{\sqrt{\sqrt{1 + \cos^{\Upsilon} \left(\frac{\Upsilon \pi k}{N} \right)} \left(\sqrt{1 + \cos^{\Upsilon} \left(\frac{\Upsilon \pi k}{N} \right)} - \cos \left(\frac{\Upsilon \pi k}{N} \right) \right)}}$$

$$\Rightarrow C_{\mathbb{1}, k} C_{\mathbb{1}, \frac{N}{\Upsilon} - k} = \frac{1}{\Upsilon N \sqrt{1 + \cos^{\Upsilon} \left(\frac{\Upsilon \pi k}{N} \right)}}$$

که:

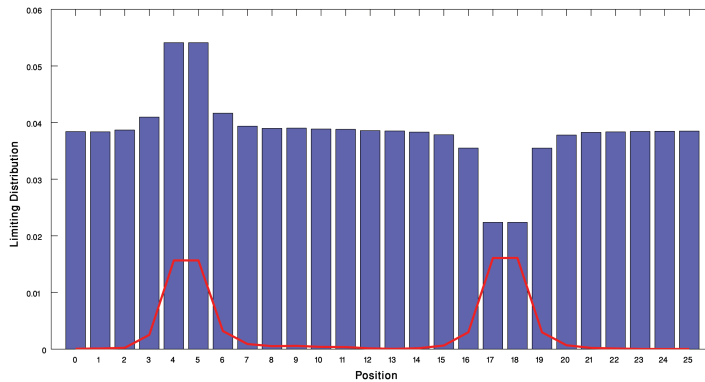
$$C_{\circ, k} C_{\circ, \frac{N}{\Upsilon} - k} + C_{\mathbb{1}, k} C_{\mathbb{1}, \frac{N}{\Upsilon} - k} = \frac{1}{N \sqrt{1 + \cos^{\Upsilon} \left(\frac{\Upsilon \pi k}{N} \right)}}$$
(۷۸.۳)

با جاگذاری این رابطه در ۶۴.۳:

$$\pi(v) = \frac{1}{N} + \frac{(-1)^v}{\Upsilon N^{\Upsilon}} \sum_{\substack{k=\circ \\ k \neq \frac{\Upsilon N}{\Upsilon}, \frac{\Upsilon N}{\Upsilon}}}^N \frac{\cos \left(\frac{\Upsilon \pi k v}{N} \right) - \cos \left(\frac{\Upsilon \pi k (v+1)}{N} \right)}{1 + \cos^{\Upsilon} \left(\frac{\Upsilon \pi k}{N} \right)}$$
(۷۹.۳)

رابطه ۷۹.۳ که توزیع حدی ولگشت کوانتومی روی دایره را نشان می‌دهد، حاصل جمع دو قسمت متفاوت است. قسمت اول که $\frac{1}{N}$ است، همان توزیع یکنواخت است. همان‌طور که پیش‌تر در رابطه ۵۴.۳ نشان دادیم، در توزیع حدی ولگشت کوانتومی روی دایره با تعداد جایگاه فرد، تنها این جمله وجود دارد. قسمت دوم که تنها در ولگشت‌های دارای تعداد زوج جایگاه وجود دارد، عامل نایکنواختی توزیع حدی در این

نوع ولگشت‌ها است. این قسمت نشان می‌دهد که اگر تعداد جایگاه (که عددی زوج است) بر چهار قابل تقسیم باشد، نایکنواختی در توزیع حدی به صورت دو برآمدگی (تپه) است، شکل ۴.۳. اما اگر تعداد جایگاه‌ها قابل تقسیم بر چهار نباشد، نایکنواختی به صورت یک برآمدگی در مبدا حرکت (p) و یک فرورفتگی (دره) در نقطه قرینه حرکت $((p + \frac{N}{4}) \bmod N)$ است، شکل ۷.۳.



شکل ۷.۳: توزیع حدی ولگشت کوانتومی روی چرخه با ۲۶ جایگاه و ۱۰۰۰ گام؛ حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |0\rangle|5\rangle$ بوده است. خط رسم شده، فاصله از توزیع یکنواخت را نشان می‌دهد.

۵.۳ زمان آمیختگی

زمان آمیختگی^۴، زمانی است که طول می‌کشد تا توزیع احتمال متوسط ولگشت به توزیع حدی نزدیک شود [۵۹]. زمان آمیختگی از آن جایی که آهنگ همگرایی به توزیع حدی است دارای اهمیت بسیاری است [۵۹].

همان‌طور که پیش‌تر دیدیم توزیع متوسط (برای تعداد گام‌های زیاد) به یک توزیع حدی میل می‌کند [۵۶]. معمولاً، این روند یکسان نیست، اما زمانی وجود دارد (M_ϵ) که در آن فاصله میان توزیع متوسط و توزیع حدی به مقداری مساوی یا کمتر از ϵ می‌رسد و پس از آن دیگر از آن بزرگتر نمی‌شود [۵۶]. بنابراین تعریف زمان آمیختگی به این صورت خواهد بود [۵۶]:

$$M_\epsilon = \min \{ T \mid \forall t \geq T, D(\bar{p}_v(t), \pi_v) \leq \epsilon \} \quad (۸۰.۳)$$

همان‌طور که گفته شد، تعداد گام‌هایی است که ولگشت بر می‌دارد تا در همسایگی ϵ توزیع حدی قرار گیرد. در حالت کلی، زمان آمیختگی در ولگشت‌های کوانتومی به حالت اولیه بستگی دارد [۵۶]. زمان

^۴Mixing Time

آمیختگی به نوعی دربردارنده مفهوم سرعت است. هرچه زمان آمیختگی کمتر باشد، به معنای آن است که توزیع حدی زودتر به دست می‌آید. در تعیین زمان آمیختگی، پارامتر ϵ بسیار تعیین کننده است. اما ϵ تنها عامل تعیین کننده نیست، بلکه در ولگشت کوانتومی روی دایره، تعداد جایگاه‌های نیز عاملی مهم به شمار می‌آیند. در حالت کلی، امکان این که بتوان یک عبارت تحلیلی بر حسب تعداد رئوس برای ولگشت کوانتومی روی دایره به دست آورد، ناممکن است [۵۶]. اما این امکان وجود دارد که یک حد بالا [۵۹] [۵۶] یا پایین [۵۶] برای آن تعیین کنیم. همچنین این امکان وجود دارد که از روش‌های عددی استفاده کنیم [۵۶].

چنان که در [۵۹] به دست آمده است، حد بالای زمان آمیختگی برای ولگشت کوانتومی روی دایره $M_\epsilon \leq O\left(\frac{n \log n}{\epsilon}\right)$ است. برای تعیین این مقدار ابتدا از تعریف توزیع متوسط احتمال آغاز می‌کنیم. برای توزیع متوسط احتمال داشتیم:

$$\bar{P}_T(V) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T P_t(v) \quad (۸۱.۳)$$

که در آن $P_t(v)$ توزیع احتمال در گام t ام در جایگاه v ام است. می‌دانیم که توزیع احتمال ولگشت برابر است با:

$$P_t(v) = \sum_a |\langle a, v | \alpha_t \rangle|^2 \quad (۸۲.۳)$$

اگر عملگر تحول را U بنامیم که ویژه مقادیر و ویژه بردارهای آن به ترتیب λ_j و $|\phi_j\rangle$ باشند و ولگشت حرکت خود را از حالت اولیه $|\alpha_0\rangle = \sum_j a_j |\phi_j\rangle$ شروع کرده باشد، برای توزیع احتمال خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} P_t(v) &= \sum_a |\langle a, v | \alpha_t \rangle|^2 = \sum_a |\langle a, v | U^t |\alpha_0\rangle|^2 = \sum_j \sum_a |\langle a, v | a_j U^t |\phi_j\rangle|^2 \\ &= \sum_j \sum_a |a_j \lambda_j^t \langle a, v | \phi_j \rangle|^2 \end{aligned} \quad (۸۳.۳)$$

و برای توزیع متوسط احتمال از رابطه ۸۱.۳:

$$\bar{P}_T(v) = \frac{1}{T} \sum_{a,i,j} a_i a_j^* \sum_{t=0}^{T-1} (\lambda_i \lambda_j^*)^t |\langle a, v | \phi_i \rangle \langle \phi_j | a, v \rangle| \quad (۸۴.۳)$$

مشخص است که تنها جمله وابسته به زمان در این رابطه $(\lambda_i \lambda_j^*)^t$ است. بنابراین در این مرحله توجه خود را به $\frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} (\lambda_i \lambda_j^*)^t$ معطوف می‌کنیم. دو حالت جداگانه را در نظر می‌گیریم که در یکی $\lambda_i \lambda_j^* = 1$ که همان $\lambda_i = \lambda_j$ هستند (عامل ایجاد توزیع یکنواخت در توزیع حدی) و نتیجه قسمت وابسته به زمان را برابر ۱ خواهند کرد. در تمام حالات دیگر می‌توانیم از جمع تصاعد هندسی برای به دست آوردن مجموع T جمله از این دنباله استفاده کنیم:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} (\lambda_i \lambda_j^*)^t = \frac{|1 - (\lambda_i \lambda_j^*)^T|}{T |1 - \lambda_i \lambda_j^*|} \quad (۸۵.۳)$$

برای آن که حد بالایی برای این عبارت به دست آوریم، باید به صورت جداگانه صورت و مخرج را به شکلی تعیین کنیم که این رابطه حداکثر شود. به این ترتیب می‌توان اظهار کرد که رابطه ۸۵.۳ همیشه کمتر یا مساوی عبارت به دست آمده خواهد بود. برای این کار در نظر می‌گیریم که صورت $(1 - (\lambda_i \lambda_j^*)^T)$ در بیشترین حالت می‌تواند برابر با ۲ باشد، زیرا می‌دانیم که $|\lambda_i| \leq 1$ و در نتیجه $|1 - (\lambda_i \lambda_j^*)^T|$ به ازای $\lambda_i \lambda_j^* = -1$ اتفاق می‌افتد که برای آن:

$$1 - |\lambda_i \lambda_j^*|^T \leq 2 \quad (۸۶.۳)$$

در عین حال برای بیشینه بودن ۸۵.۳ باید مخرج کمینه شود. اما برای کمینه کردن مخرج به شکلی متفاوت از صورت عمل می‌کنیم. عبارت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} (1 - \lambda_i)(1 + \lambda_j^*) &= 1 + \lambda_j^* - \lambda_i - \lambda_i \lambda_j^* = 1 - \lambda_i \lambda_j^* - (\lambda_i - \lambda_j^*) \\ \Rightarrow (1 - \lambda_i)(1 - \lambda_j^*) + (\lambda_i - \lambda_j^*) &= 1 - \lambda_i \lambda_j^* \end{aligned} \quad (۸۷.۳)$$

اما در این جا هم باز با استفاده از این نکته که برای ویژه‌مقادیر عملگر تحول داریم $|\lambda_i| \leq 1$ می‌توانیم بگوییم که $|1 - \lambda_i| |1 + \lambda_j^*|$ همیشه مثبت یا صفر است و این دلیل این است که می‌توانیم اظهار کنیم:

$$|\lambda_i - \lambda_j^*| \leq 1 - \lambda_i \lambda_j^* \quad (۸۸.۳)$$

همچنین از نامساوی مثلثی می‌توانیم بنویسیم $|a + b| \leq |a| + |b|$ ، بنابراین برای λ_i و λ_j^* می‌توان نوشت $|\lambda_i - \lambda_j^*| \leq |\lambda_i| + |\lambda_j^*|$. ولی چون می‌دانیم $|\lambda_j| = |\lambda_j^*|$ به رابطه زیر می‌رسیم:

$$|\lambda_i - \lambda_j^*| \leq |\lambda_i| + |\lambda_j| \quad (۸۹.۳)$$

و باز هم از نامساوی مثلثی:

$$|\lambda_i - \lambda_j| \leq |\lambda_i| + |\lambda_j| \quad (۹۰.۳)$$

بنابراین $|\lambda_i| + |\lambda_j|$ که یک حد بالای $|\lambda_i - \lambda_j^*|$ است، یک حد بالای $|\lambda_i - \lambda_j|$ هم هست و می‌توانیم

از رابطه ۸۸.۳ استفاده کرده و بنویسیم:

$$|\lambda_i - \lambda_j| \leq |1 - \lambda_i \lambda_j^*| \quad (91.3)$$

اکنون با داشتن روابط ۸۶.۳ و ۹۱.۳ و جاگذاری آن‌ها در رابطه ۸۵.۳ در می‌یابیم که:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} (\lambda_i \lambda_j^*)^t \leq \frac{2}{T |\lambda_i - \lambda_j|} \quad (92.3)$$

در این جا حالت اولیه ولگشت را $|\beta\rangle = \sum_i a_i |\phi_i\rangle$ در نظر می‌گیریم، بنابراین از رابطه ۸۴.۳ داریم:

$$|\bar{P}_v^\beta(T) - \pi^\beta(v)| \leq \sum_{a,i,j,\lambda_i \neq \lambda_j} |a_i| \cdot |a_j^*| \cdot |\langle a, v | \phi_i \rangle| \cdot |\langle \phi_j | a, v \rangle| \frac{2}{T |\lambda_i - \lambda_j|} \quad (93.3)$$

که $\pi^\beta(v)$ در حقیقت قسمتی از جملات طرف راست رابطه است که $\lambda_i = \lambda_j$ شده‌اند که همان توزیع حدی است.

برای دو عدد a و b می‌دانیم که:

$$\begin{aligned} |a - b|^2 \geq 0 &\Rightarrow |a|^2 + |b|^2 - 2|ab| \geq 0 \Rightarrow |a|^2 + |b|^2 \geq 2|ab| \\ \Rightarrow |ab| &\leq \frac{|a|^2 + |b|^2}{2} \end{aligned} \quad (94.3)$$

با استفاده از این رابطه می‌توانیم برای دو قسمت $|a_i| \cdot |a_j^*|$ و $|\langle a, v | \phi_i \rangle| |\langle \phi_j | a, v \rangle|$ روابط زیر را بنویسیم:

$$|a_i a_j^*| \leq \frac{|a_i|^2 + |a_j^*|^2}{2} \quad (95.3)$$

$$|\langle a, v | \phi_i \rangle \langle \phi_j | a, v \rangle| \leq \frac{|\langle a, v | \phi_i \rangle|^2 + |\langle \phi_j | a, v \rangle|^2}{2} \quad (96.3)$$

و با جاگذاری در ۹۳.۳ می‌رسیم به:

$$\|\bar{P}_v^\beta(T) - \pi^\beta(v)\| \leq \sum_{v,a,i,j,\lambda_i \neq \lambda_j} \left(\frac{|a_i|^2 + |a_j^*|^2}{2} \right) \cdot \left(\frac{|\langle a, v | \phi_i \rangle|^2 + |\langle \phi_j | a, v \rangle|^2}{2} \right) \frac{2}{T |\lambda_i - \lambda_j|} \quad (97.3)$$

که نماد $\|\cdot\|$ را برای فاصله کلی تغییرات^۵ به کار برده‌ایم. در رابطه‌ای که به این شکل به دست آوردیم فاصله $|\lambda_i - \lambda_j|$ بسیار مهم است و در واقع برای این که زمان آمیختگی کم باشد، این فاصله باید بزرگ باشد. از ۵۶.۳ می‌دانیم که ویژه‌مقادیر در دو رژیم $R = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ و $R' = [\frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}]$ از دایره اعداد مختلط قرار گرفته‌اند. اکنون δ را به عنوان عددی بین 0 و 1 در نظر می‌گیریم (δ بعداً به ϵ ربط داده می‌شود) و دو رژیم را به این صورت در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} R_\delta &= [0, (1 - \delta)\frac{\pi}{4}] \cup [(1 + \delta)\frac{3\pi}{4}, 2\pi] \\ R'_\delta &= [(1 + \delta)\frac{\pi}{4}, (1 - \delta)\frac{3\pi}{4}] \end{aligned} \quad (98.3)$$

این دو بازه تمام فاصله $[0, 2\pi]$ را به جز یک قسمت 2δ در بالا و در پایین را می‌پوشانند. هر k که برای آن $\frac{2\pi k}{d}$ در یکی از این دو بازه بیفتد را به عنوان k با δ خوب و سایر k 'ها را به عنوان k 'های با δ بد می‌شناسیم. همچنین هر ویژه‌مقدار یا ویژه‌برداری را که با k 'های با δ خوب در ارتباط باشد را ویژه‌بردار (ویژه‌مقدار) با δ خوب می‌نامیم و بالعکس. بعداً نشان خواهیم داد که نقش ویژه‌بردارهای با δ بد به دلیل آن که تصویر بردارهای حالت پایه بر آن‌ها کوچک است، کم است. اکنون تمرکز خود را تنها معطوف به حالت اولیه‌ای می‌کنیم که فقط برهم‌نهی ویژه‌مقادیر خوب تشکیل شده است. به این ترتیب باید حد پایین فاصله میان ویژه‌مقادیر خوب را تعیین کنیم و متغیر Δ را به شکل زیر معرفی می‌کنیم:

$$\Delta_\delta = \min_{i,j} \{|\lambda_i - \lambda_j|; i \neq j\} \quad (99.3)$$

ابتدا فرض می‌کنیم که λ_i و λ_j از یک k به دست می‌آیند، بنابراین باید در دو رژیم متفاوت R و R' وجود داشته باشند، پس برای فاصله میان آن‌ها داریم:

$$\begin{aligned} |\lambda_i - \lambda_j| &= |e^{i\theta_{ki}} - e^{i\theta_{kj}}| = \left| e^{i\theta_{ki}} (1 - e^{i(\theta_{kj} - \theta_{ki})}) \right| = |e^{i\theta_{ki}}| \left| (1 - e^{i(\theta_{kj} - \theta_{ki})}) \right| \\ &= \left((1 - e^{i(\theta_{kj} - \theta_{ki})}) (1 - e^{-i(\theta_{kj} - \theta_{ki})}) \right)^{\frac{1}{2}} = (1 - 2 \cos(\theta_{kj} - \theta_{ki}) + 1)^{\frac{1}{2}} \\ &= (2 - 2 \cos(\theta_{kj} - \theta_{ki}))^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (100.3)$$

کمترین فاصله میان دو ویژه‌مقدار هنگامی که در دو رژیم متفاوت قرار می‌گیرند برابر است با $\frac{\pi}{4}$ همان‌طور که مشاهده می‌شود و چون $\cos(\frac{\pi}{4}) = 0$ ، در حالت کلی برای دو ویژه‌مقدار که از یک k ناشی شده و در دو رژیم مختلف قرار می‌گیرند، خواهیم داشت:

^۵Total Variation Distance

$$|\lambda_i - \lambda_j| \leq \sqrt{2} \quad (10.1.3)$$

بنابراین می‌توانیم توجه خود را به ویژه مقادیری معطوف کنیم که از k های نایکسانی می‌آیند. ثابت می‌کنیم که:

$$|\lambda_i - \lambda_j| \geq |\sin \theta_i - \sin \theta_j| \quad (10.2.3)$$

برای اثبات رابطه ۱۰۲.۳ به شکل زیر آغاز می‌کنیم:

$$\begin{aligned} |\lambda_i - \lambda_j| &= |e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}| \Rightarrow |\lambda_i - \lambda_j|^2 = (e^{-i\theta_i} - e^{-i\theta_j})(e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}) \\ \Rightarrow |\lambda_i - \lambda_j|^2 &= (\cos \theta_i - i \sin \theta_i - \cos \theta_j + i \sin \theta_j)(\cos \theta_i + i \sin \theta_i - \cos \theta_j - i \sin \theta_j) \\ &= \cos^2 \theta_i + i \cos \theta_i \sin \theta_i - \cos \theta_i \cos \theta_j - i \cos \theta_i \sin \theta_j \\ &\quad - i \cos \theta_i \sin \theta_i + \sin^2 \theta_i + i \cos \theta_j \sin \theta_i - \sin \theta_i \sin \theta_j \\ &\quad - \cos \theta_i \cos \theta_j - i \cos \theta_j \sin \theta_i + \cos^2 \theta_j + i \cos \theta_j \sin \theta_i \\ &\quad + i \cos \theta_i \sin \theta_j - \sin \theta_i \sin \theta_j - i \cos \theta_j \sin \theta_j + \sin^2 \theta_j \\ \Rightarrow |\lambda_i - \lambda_j|^2 &= 2 - 2 \cos \theta_i \cos \theta_j - 2 \sin \theta_i \sin \theta_j \end{aligned} \quad (10.3.3)$$

همچنین:

$$\begin{aligned} (\sin \theta_i - \sin \theta_j)^2 &= \sin^2 \theta_i + \sin^2 \theta_j - 2 \sin \theta_i \sin \theta_j \\ \Rightarrow -2 \sin \theta_i \sin \theta_j &= (\sin \theta_i - \sin \theta_j)^2 - \sin^2 \theta_i - \sin^2 \theta_j \end{aligned} \quad (10.4.3)$$

با جاگذاری رابطه ۱۰۴.۳ در ۱۰۳.۳ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |\lambda_i - \lambda_j|^2 &= 2 - 2 \cos \theta_i \cos \theta_j + (\sin \theta_i - \sin \theta_j)^2 - \sin^2 \theta_i - \sin^2 \theta_j \\ &= 1 - \sin^2 \theta_i + 1 - \sin^2 \theta_j - 2 \cos \theta_i \cos \theta_j + (\sin \theta_i - \sin \theta_j)^2 \\ &= \cos^2 \theta_i + \cos^2 \theta_j - 2 \cos \theta_i \cos \theta_j + (\sin \theta_i - \sin \theta_j)^2 \\ &= (\cos \theta_i - \cos \theta_j)^2 + (\sin \theta_i - \sin \theta_j)^2 \\ \Rightarrow |\lambda_i - \lambda_j|^2 &\geq (\sin \theta_i - \sin \theta_j)^2 \\ \Rightarrow |\lambda_i - \lambda_j| &\geq |\sin \theta_i - \sin \theta_j| \end{aligned} \quad (10.5.3)$$

که همان رابطه ۱۰۲.۳ است که به دنبال اثبات آن بودیم. اکنون از رابطه ۱۰۲.۳ آغاز می‌کنیم و با استفاده از رابطه ۵۵.۳ می‌رسیم به:

$$\Rightarrow |\lambda_i - \lambda_j| \geq |\sin \theta_i - \sin \theta_j| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \sin \left(\frac{2\pi k}{N} \right) - \sin \left(\frac{2\pi k'}{N} \right) \right| \quad (106.3)$$

چون k و k' در یک رژیم هستند، با استفاده از قضیه مقدار میانگین:

$$f'(z) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \quad ; \quad x \leq z \leq y \quad (107.3)$$

خواهیم داشت:

$$\left| \sin \left(\frac{2\pi k}{N} \right) - \sin \left(\frac{2\pi k'}{N} \right) \right| = \left| \cos(\gamma) \frac{2\pi(k - k')}{N} \right| \quad (108.3)$$

که کمترین مقدار آن به ازای کمترین مقدار $\frac{2\pi(k-k')}{N}$ خواهد بود. در نتیجه اگر $k - k' = 1$:

$$\left| \sin \left(\frac{2\pi k}{N} \right) - \sin \left(\frac{2\pi k'}{N} \right) \right| \geq \left| \cos(\gamma) \frac{2\pi}{N} \right| \quad (109.3)$$

چون k و k' در یک بازه هستند، در نتیجه γ یا در R است و یا در R' و با توجه به یکنواخت بودن تابع \cos ، کمترین مقدار این تابع در بازه $[\frac{(1-\delta)\pi}{2}, \frac{(1-\delta)\pi}{4}]$ به ازای $\frac{(1-\delta)\pi}{4}$ به دست می‌آید، یعنی:

$$\begin{aligned} |\cos(\gamma)| &\geq \left| \cos \left(\frac{(1-\delta)\pi}{4} \right) \right| = \left| \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta\pi}{4} \right) \right| \\ \Rightarrow |\cos(\gamma)| &\geq \left| \sin \left(\frac{\delta\pi}{4} \right) \right| \end{aligned} \quad (110.3)$$

به خاطر می‌آوریم که $0 \leq \delta \leq 1$ و $f(\delta) = \sin \left(\frac{\delta\pi}{4} \right)$ و $g(\delta) = \delta$ را رسم می‌کنیم شکل ۸.۳.

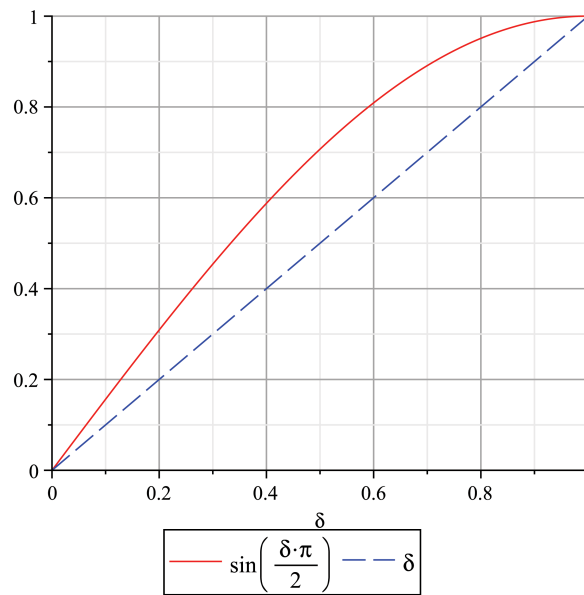
با توجه به نمودار مشخص است که همیشه داریم:

$$\sin \left(\frac{\delta\pi}{4} \right) \geq \delta \quad (111.3)$$

از ۱۱۰.۳ و ۱۱۱.۳ خواهیم داشت:

$$|\cos(\gamma)| \geq \delta \quad (112.3)$$

باز هم به عقب‌تر برگشته و نتیجه ۱۱۲.۳ را در رابطه ۱۰۶.۳ قرار می‌دهیم:



شکل ۸.۳: نمودار مقایسه‌ای: همانطور که دیده می‌شود $\sin(\frac{\delta\pi}{2})$ (خط ممتد) همیشه بزرگ‌تر یا مساوی δ (خط چین) است.

$$|\lambda_i - \lambda_j| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) - \sin\left(\frac{2\pi k'}{N}\right) \right| \geq \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2\pi}{N} \cos(\gamma) \right| \geq \frac{\sqrt{2}\pi\delta}{N} \quad (113.3)$$

نتیجه به دست آمده برای k و k' است که در یک رژیم قرار بگیرند. اگر k و k' به دو رژیم متفاوت تعلق داشته باشند، آن‌گاه از ۱۰۶.۳ خواهیم داشت:

$$\left| \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) - \sin\left(\frac{2\pi k'}{N}\right) \right| = \left| \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) - \sin\left(\pi - \frac{2\pi k'}{N}\right) \right| \geq \left| \cos(\gamma) \left(\frac{2\pi(k+k')}{N} - \pi \right) \right| \quad (114.3)$$

که در آن بار دیگر از قضیه مقدار میانگین ۱۰۷.۳ استفاده شده است. اکنون k و k' در یک رژیم قرار گرفته‌اند و با انجام روال قبل خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |\cos(\gamma)| &\geq \left| \cos\left(\frac{(1-\delta)\pi}{2}\right) \right| = \left| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta\pi}{2}\right) \right| \\ \Rightarrow |\cos(\gamma)| &\geq \left| \sin\left(\frac{\delta\pi}{2}\right) \right| \geq \delta \end{aligned} \quad (115.3)$$

با استفاده از روابط ۱۱۵.۳، ۱۱۴.۳ و ۱۰۶.۳ داریم:

$$|\lambda_i - \lambda_j| \geq \frac{\pi\delta}{\sqrt{2}N} \quad (116.3)$$

در نتیجه از حد به دست آمده برای $|\lambda_i - \lambda_j|$ در ۱۱۶.۳ و ۱۱۳.۳ برای کمترین فاصله میان ویژه‌مقادیر

ولگشت کوانتومی هادامارد خواهیم داشت:

$$\Delta_\delta \geq \frac{\pi\delta}{\sqrt{2}N} \quad (117.3)$$

در این جا می‌خواهیم نشان دهیم اگر λ_i و λ_j در یک رژیم باشند و برای ویژه‌مقادیر داشته باشیم $0 \leq \text{Arg}(\lambda_1) \leq \text{Arg}(\lambda_2) \leq \dots \leq \text{Arg}(\lambda_{2n}) \leq 2\pi$ به دست می‌آید:

$$|\lambda_i - \lambda_j| \geq \frac{2\sqrt{2}}{\pi} |i - j| \Delta_\delta \quad (118.3)$$

از رابطه ۱۰۰.۳ داریم:

$$|\lambda_i - \lambda_j| = \sqrt{2 - 2 \cos(\theta_i - \theta_j)} \quad (119.3)$$

اگر $(\theta_i - \theta_j) \in [0, \frac{\pi}{4}]$ ، کمترین مقدار \cos به ازای $\theta_i - \theta_j = \frac{\pi}{4}$ به دست می‌آید، در نتیجه حد پایین برای $|\lambda_i - \lambda_j|$ برابر است با $\sqrt{2}$. اگر L_{ij} طول کمان روبروی $\theta_i - \theta_j$ باشد، یعنی $L_{ij} = |\theta_i - \theta_j|$ و $(\theta_i - \theta_j) \in [0, \frac{\pi}{4}]$ باشد، خواهیم داشت $\frac{1}{L_{ij}} \leq \frac{2}{\pi}$ و یک حد پایین $\frac{1}{L_{ij}}$ خواهد بود:

$$\frac{1}{L_{ij}} = \frac{2}{\pi} \quad (120.3)$$

بنابراین از بحث انجام شده می‌توانیم یک حد پایین برای $\frac{|\lambda_i - \lambda_j|}{L_{ij}}$ تعیین کنیم و خواهیم داشت:

$$|\lambda_i - \lambda_j| \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi} L_{ij} \quad (121.3)$$

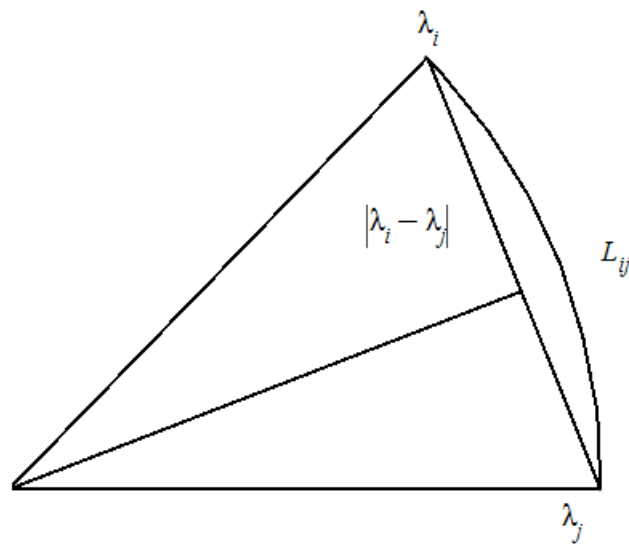
اما با استفاده از این نکته که $\theta \geq \sin(\theta)$ و با توجه به شکل ۹.۳:

می‌توانیم به این نتیجه برسیم که:

$$L_{ij} = \frac{2L_{ij}}{2} \geq 2 \left| \sin \frac{L_{ij}}{2} \right| \simeq |\lambda_i - \lambda_j| \geq \Delta_\delta \quad (122.3)$$

زیرا از پیش تعریف کرده بودیم (۹۹.۳) که Δ_δ کمینه فاصله بین ویژه‌مقادیر است. به این ترتیب این را هم خواهیم داشت که $L_{i,i+1} \geq \Delta_\delta$ و در نتیجه:

$$L_{ij} = |i - j| L_{i,i+1} \Rightarrow L_{ij} \geq |i - j| \Delta_\delta \quad (123.3)$$



شکل ۹.۳: مقایسه کمان L_{ij} با $|\lambda_i - \lambda_j|$

بنابراین از ۱۲۱.۳ خواهیم داشت:

$$|\lambda_i - \lambda_j| \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi} |i - j| \Delta_\delta \quad (124.3)$$

اکنون اگر از رابطه ۹۷.۳ استفاده کنیم، پس از جمع بستن روی v و a و جدا کردن i و j هایی که در دو رژیم متفاوت قرار دارند از آنهایی که در یک رژیم قرار دارند، خواهیم داشت:

$$\left\| \bar{P}_T^\beta - \pi^\beta \right\| \leq \sum_k \left(\sum'_{i,j,|i-j|=k} \frac{|a_i|^2 + |a_j|^2}{2} \frac{\pi}{Tk\sqrt{2}\Delta_\delta} + \sum''_{i,j} \frac{|a_i|^2 + |a_j|^2}{2} \frac{2}{\sqrt{2}T} \right) \quad (125.3)$$

که نماد جمع دارای پریم، نشان دهنده آن است که جمع روی i و j زده می‌شود که در یک رژیم (R_δ) یا قرار دارند. در این صورت باید $\lambda_i \neq \lambda_j$. نماد جمع دارای دو پریم، نشان می‌دهد که دو i و j از دو رژیم متفاوت می‌آیند. همچنین در رابطه جمع دارای پریم از رابطه ۱۲۴.۳ استفاده شده است و قرار داده‌ایم $|i - j| = k$. در جمع دارای دو پریم، از رابطه ۱۰۱.۳ استفاده کرده‌ایم. از آنجایی که ۱۲۵.۳ دو جمع یکسان با اندیس‌های متفاوت است، می‌توانیم آن را به صورت زیر بنویسیم:

$$\left\| \bar{P}_T^\beta - \pi^\beta \right\| \leq \sum_k \left(\sum'_{i,|i-j|=k} |a_i|^2 \frac{\pi}{Tk\sqrt{2}\Delta_\delta} + \sum''_i |a_i|^2 \frac{\sqrt{2}}{T} \right) \quad (126.3)$$

برای جمع دارای پریم از رابطه ۱۱۷.۳ می‌توانیم بنویسیم:

$$\sum_{i, |i-j|=k} |a_i|^2 \frac{\pi}{Tk\sqrt{2}\Delta_\delta} = \sum_{i, |i-j|=k} |a_i|^2 \frac{N}{Tk\delta} \quad (127.3)$$

و اگر این را در نظر بگیریم که برای هر i حداکثر دو j وجود دارد که شرط $|i-j|$ برقرار باشد:

$$\sum_{i, |i-j|=k} |a_i|^2 \frac{N}{Tk\delta} \leq \frac{2N}{Tk\delta} \quad (128.3)$$

حال اگر از روابط ۱۲۷.۳ و ۱۲۸.۳ و رابطه بدیهی زیر استفاده کنیم:

$$\sum_i'' |a_i|^2 \frac{\sqrt{2}}{T} \leq \frac{\sqrt{2}}{T} \quad (129.3)$$

و در رابطه ۱۲۶.۳ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\left\| \bar{P}_T^\beta - \pi^\beta \right\| \leq \sum_k \left(\frac{2N}{Tk\delta} + \frac{\sqrt{2}}{T} \right) \quad (130.3)$$

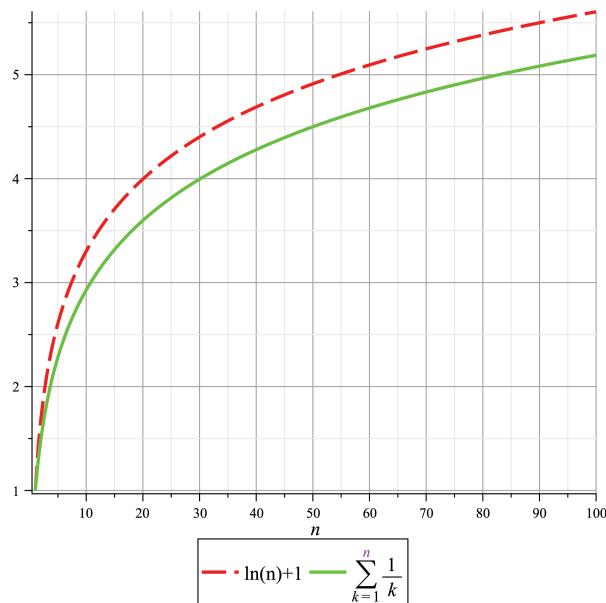
اما برای مجموع N جمله از یک سری هندسی، از آزمون همگرایی مکولورن-کوشی می‌دانیم: (شکل ۱۰.۳):

$$\begin{aligned} \int_n^\infty f(x) dx &\leq \sum_{k=n}^\infty f(n) \leq f(n) + \int_n^\infty f(x) dx \\ \Rightarrow \int_1^N \frac{1}{k} dk &\leq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \leq f(1) + \int_1^N \frac{1}{k} dk \\ \Rightarrow \ln N &\leq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \leq 1 + \ln N \end{aligned} \quad (131.3)$$

بنابراین:

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \leq \ln(N) + 1 \quad (132.3)$$

با جاگذاری این رابطه در ۱۳۰.۳ و استفاده از این نکته که $0 \leq \delta \leq 1$ و $N \geq 1$:



شکل ۰۳.۱۰: مقایسه $\ln(n) + 1$ و $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

$$\left\| \bar{P}_T^\beta - \pi^\beta \right\| \leq \frac{2N(\ln(N)+1)}{T\delta} + \frac{\sqrt{\gamma}}{T} \leq \frac{2N(\ln(N)+1)}{T\delta} + \frac{2N}{T\delta}$$

(۱۳۳.۳)

$$\Rightarrow \left\| \bar{P}_T^\beta - \pi^\beta \right\| \leq \frac{2N(\ln(N)+2)}{T\delta}$$

اکنون باید نشان دهیم که نقش بردارهای با δ بد کم است. برای این کار در نظر می‌گیریم:

قضیه ۱: مربع اندازه تصویر هر حالت پایه روی بردارهای بد، حداکثر به اندازه 2δ است.

فضای هیلبرت $2n$ بعدی ولگشت کوانتومی را می‌توان جمع مستقیم زیرفضاهای دو بعدی L_k در نظر گرفت که L_k توسط دو ویژه‌بردار که از k به دست می‌آیند، پوشش داده می‌شود. بنابراین تصویر بردار حالت پایه روی L_k دقیقاً دارای مربع اندازه $\frac{1}{N}$ است. با در نظر گرفتن این نکته که تعداد k های با δ بد، $2\delta n$ است، مشخص می‌شود که تصویر k های بد حداکثر 2δ است.

قضیه ۲: اگر دو حالت اولیه $|\alpha_0\rangle$ و $|\beta_0\rangle$ را در نظر بگیریم که برای آن‌ها توزیع احتمال میانگین به ترتیب \bar{P}_T^β و \bar{P}_T^α هستند، برای تمام T ها حد بالای فاصله میان توزیع میانگین دو ولگشت برابر است با دو برابر فاصله میان حالت‌های اولیه:

$$\left\| \bar{P}_T^\alpha - \bar{P}_T^\beta \right\| \leq 2 \left\| |\alpha_0\rangle - |\beta_0\rangle \right\| \quad (134.3)$$

حالت‌های اولیه را $|\alpha_0\rangle$ و $|\beta_0\rangle$ می‌گیریم و پس از زمان t حالت ولگشت‌ها را با $|\alpha_t\rangle$ و $|\beta_t\rangle$

نشان می‌دهیم. بنابراین P_T^α و P_T^β توزیع احتمال دو ولگشت خواهند بود. در این صورت، روشن است که $\|P_T^\alpha - P_T^\beta\| \leq \max_{t \leq T} \|\bar{P}_T^\alpha - \bar{P}_T^\beta\|$. چون عملگرهای یکانی نرم سیستم را حفظ می‌کنند، پس $\|\alpha_t\rangle - |\beta_t\rangle\| = \|\alpha_0\rangle - |\beta_0\rangle\|$. با استفاده از لم ۱۱ در [۶۱]، رابطه ۱۳۴.۳ اثبات می‌شود.

حال اگر $|\alpha_0\rangle$ حالت پایه اولیه باشد و $|\beta_0\rangle$ حالت پایه اولیه باشد که روی ویژه‌بردارهای با δ خوب تصویر و بهنجار شده باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$$\|\bar{P}_T^\alpha - \pi^\alpha\| \leq \|\bar{P}_T^\alpha - \bar{P}_T^\beta\| + \|\bar{P}_T^\alpha - \pi^\beta\| + \|\pi^\beta - \pi^\alpha\| \quad (135.3)$$

با استفاده از ۱۳۴.۳ می‌دانیم که جمله اول سمت راست از $\|\alpha_0\rangle - |\beta_0\rangle\|$ کوچک‌تر است. جمله آخر نیز به دلیل آن که حد فاصله‌ها است، از $\|\alpha_0\rangle - |\beta_0\rangle\|$ کوچک‌تر است. اما در مورد $\|\bar{P}_T^\alpha - \bar{P}_T^\beta\|$ از ۱۳۳.۳ می‌دانیم که $\|\bar{P}_T^\alpha - \bar{P}_T^\beta\| \leq 2\|\alpha_0\rangle - |\beta_0\rangle\|$. اگر در نظر بگیریم $|\alpha_0\rangle = a|\beta_0\rangle + |v\rangle$ که در آن $|v\rangle$ یک ویژه‌بردار با δ بد است (که حداکثر اندازه آن، همان‌طور که قضیه ۲ نشان می‌دهد $\sqrt{2\delta}$ است) و $a \geq \sqrt{1-2\delta}$. بنابراین $a \geq \sqrt{1-2\delta} \leq 1 - a + \sqrt{2\delta} \leq 2\sqrt{2\delta}$ و در نتیجه:

$$\|\bar{P}_T^\alpha - \pi^\alpha\| \leq 8\sqrt{2\delta} + \|\bar{P}_T^\beta - \pi^\beta\| \quad (136.3)$$

و با استفاده از ۱۳۳.۳ داریم:

$$\|\bar{P}_T^\alpha - \pi^\alpha\| \leq 8\sqrt{2\delta} + \frac{2N(\ln(N) + 2)}{T\delta} \quad (137.3)$$

$$:T \geq \frac{4n(\ln(n) + 2)}{\epsilon\delta} \text{ و } \delta = \frac{1}{4} \left(\frac{\epsilon}{16}\right)^2$$

$$\begin{aligned} \|\bar{P}_T^\alpha - \pi^\alpha\| &\leq 8\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{4}} \left(\frac{\epsilon}{16}\right) + \frac{2N(\ln(N)+2)}{4n(\ln(n)+2)\delta} \leq \epsilon \\ \Rightarrow \|\bar{P}_T^\alpha - \pi^\alpha\| \leq \epsilon &\Rightarrow \frac{1}{\|\bar{P}_T^\alpha - \pi^\alpha\|} \geq \frac{1}{\epsilon} \end{aligned} \quad (138.3)$$

حال با استفاده از ۱۳۲.۳:

$$T \leq \frac{2N(\ln(N) + 2)}{\delta \|\bar{P}_T - \pi\|} \leq \frac{2N(\ln(N) + 2)}{\delta \epsilon} \quad (139.3)$$

و چون داریم $\delta = \frac{1}{4} \left(\frac{\epsilon}{16}\right)^2$ ، پس:

$$T \leq \frac{2N(\ln(N) + 2)}{\epsilon} \times 2 \left(\frac{16}{\epsilon}\right)^2 = 4(16)^2 \frac{N(\ln(N) + 2)}{\epsilon^3} \quad (140.3)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$T \leq O\left(\frac{N \log(N)}{\varepsilon^3}\right) \quad (۱۴۱.۳)$$

به این ترتیب حد بالایی برای ولگشت کوانتومی روی چرخه به دست آوردیم.

فصل ۴

ولگشت کوانتومی موبیوس وار

نوار موبیوس را می‌توان نواری در نظر گرفت که ابتدا و انتهای آن با یک نیم‌تاب به هم وصل شده است. ۲.۴. این نوار هندسه کاملاً متفاوتی با یک نوار عادی دارد. برای روشن شدن این موضوع فرض کنید شروع به رنگ آمیزی نوار کنیم. پس از یک دور به پشت نقطه آغاز می‌رسیم. حال اگر به رنگ آمیزی نوار ادامه دهیم، در پایان دور دوم دقیقاً به نقطه آغاز خواهیم رسید. بنابراین بدون این‌که از مرز پشت و روی نوار عبور کنیم، پشت و روی نوار را رنگ کرده‌ایم و این یعنی این‌که نوار موبیوس یک سطح و یک مرز دارد، بر خلاف این‌که نوار عادی دو سطح و دو مرز دارد.

همچنین می‌توان نوارهایی در نظر گرفت که نیم‌تاب‌های بیشتری داشته باشند. به طور کلی نوارهای دارای تعداد نیم‌تاب‌های فرد (از جمله نوار موبیوس)، تنها دارای یک سطح و یک مرز هستند. اما در مورد نوارهای با تعداد زوج نیم‌تاب، می‌توان گفت که دو سطح و دو مرز وجود دارد.

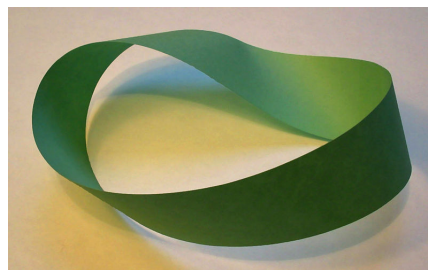
۱.۴ روابط بازگشتی تحول ولگشت

در ولگشت کوانتومی موبیوس وار یک درجه آزادی دیگر به ولگشت کوانتومی روی چرخه می‌دهیم و به این ترتیب ولگشت این امکان را می‌یابد تا حول مسیر حرکت خود نیز به دوران بپردازد. با این سازوکار ممکن است ولگشت در هر چرخه با فازی متفاوت و یا حتی مخالف به نقطه آغاز برسد. اثرات تداخلی این اختلاف فاز برای مطالعه جالب است و ممکن است موجب بهبود در بعضی از پارامترهای مورد علاقه برای مطالعه شوند. پارامترهایی از قبیل توزیع حدی و زمان آمیختگی از این جمله هستند.

ولگشت موبیوسی را می‌توان به صورت حرکت ذره‌ای روی یک دایره با N جایگاه مشخص در نظر گرفت. ذره همانند ولگشت کوانتومی روی دایره بعد از N گام ساعتگرد (یا پادساعتگرد) به نقطه آغاز



شکل ۱.۴: آگوست فردیناند موبیوس



شکل ۲.۴: نوار موبیوس

می‌رسد. بنابراین فضای مکان یک فضای N بعدی با پایه‌های محاسباتی $\{|j\rangle, 0 \leq j \leq N-1\}$ است. فضای سکه هم یک فضای دو بعدی است که برای آن: $\{|s\rangle, s = 0, 1\}$. همچنین این ذره می‌تواند در حین حرکت خود روی دایره، به دور راستای حرکت خود نیز دوران کند. این فضای دوبعدی را فضای چرخش می‌نامیم. عملگری را که بر روی این فضا عمل می‌کند نیز عملگر چرخش می‌نامیم. طرز عمل عملگر چرخش به این صورت است که مثلاً اگر راستای حرکت ولگشت را روی محور x در نظر بگیریم، به ازای هر گامی که ولگشت در راستای x به پیش می‌رود، عملگر چرخش ولگشت را به اندازه θ درجهت ساعتگرد حول محور x دوران می‌دهد. همچنین به ازای هر گامی که ولگشت در راستای x به عقب برمی‌دارد، عملگر چرخش ولگشت را به اندازه θ در جهت پادساعتگرد حول محور x دوران می‌دهد. بنابراین برای تعریف این عملگر شرطی چرخش (R_{cond}) از مفهوم دوران کوانتومی در فرمول‌بندی دو مولفه‌ای استفاده می‌کنیم. با استفاده از این مفهوم برای عملگر شرطی چرخش داریم:

$$\begin{aligned}
 R_{cond} |r\rangle |s\rangle &= e^{-\frac{i}{\hbar}(\theta S_x \otimes \sigma_z)} |r\rangle |s\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}(\theta S_x \otimes (-1)^s I)} |r\rangle |s\rangle = e^{-\frac{i\theta}{\hbar}(\sigma_x \otimes (-1)^s I)} |r\rangle |s\rangle \\
 &= \left((I_R \otimes I_C) \cos\left(\frac{\theta}{\hbar}(-1)^s\right) - (\sigma_x \otimes I_C) i \sin\left(\frac{\theta}{\hbar}(-1)^s\right) \right) |r\rangle |s\rangle \\
 &= \left((I_R \otimes I_C) \cos\left(\frac{\theta}{\hbar}\right) - (\sigma_x \otimes I_C) i(-1)^s \sin\left(\frac{\theta}{\hbar}\right) \right) |r\rangle |s\rangle \\
 &= \left(\underbrace{I_R \cos\left(\frac{\theta}{\hbar}\right) - \sigma_x i(-1)^s \sin\left(\frac{\theta}{\hbar}\right)}_{R(s)} \right) \otimes I_C |r\rangle |s\rangle
 \end{aligned} \tag{۱.۴}$$

بنابراین می‌توان عمل چرخش شرطی را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$R_{cond} \equiv R(s) |r\rangle |s\rangle \tag{۲.۴}$$

پس در ولگشت موبیوسی عملگر جابه‌جایی شرطی را که از سه قسمت سکه، عملگر شرطی چرخش و قسمت مکانی تشکیل شده است، می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$S|r, s, j\rangle = R(s)|r\rangle |s\rangle |j + (-1)^s\rangle \tag{۳.۴}$$

که در آن

$$\{|r, s, j\rangle : r = 0, 1; s = 0, 1; 0 \leq j \leq N - 1\} \tag{۴.۴}$$

کت حالت کلی ولگشت موبیوسی است که در فضای هیلبرت کلی $H = H^2 \otimes H^2 \otimes H^N$ وجود دارد. مقدار کل دوران در یک چرخه کامل ممکن است هر مقداری بیشتر یا کمتر از 2π باشد. برای مشخص کردن کمیت θ که مقدار دوران در هر گام است، کمیت دیگری را به نام α معرفی می‌کنیم که تعداد دوران‌ها را در هر چرخه کامل مشخص می‌کند:

$$\theta = \frac{\alpha}{N} 2\pi \tag{۵.۴}$$

واضح است که به ازای $\alpha = 0$ ولگشت موبیوسی همان ولگشت کوانتومی روی دایره است. در واقع به ازای هر مقدار صحیح α ولگشت موبیوسی تبدیل خواهد شد به ولگشت روی دایره.

در ولگشت موبیوسی هم همانند ولگشت کوانتومی روی چرخه، حالت ولگشت در گام $t + 1$ از روی حالت ولگشت در گام t ساخته می‌شود. کت حالت ولگشت در گام t را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \sum_{r=0}^1 \sum_{s=0}^1 \sum_{j=0}^{N-1} \psi_{r,s,j}(t) |r, s, j\rangle \\ &= \sum_{r=0}^1 \sum_{j=0}^{N-1} \psi_{r,0,j}(t) |r, 0, j\rangle + \sum_{r=0}^1 \sum_{j=0}^{N-1} \psi_{r,1,j}(t) |r, 1, j\rangle \end{aligned} \quad (6.4)$$

که در آن:

$$\sum_{r=0}^1 \sum_{j=0}^{N-1} \left(|\psi_{r,0,j}(t)|^2 + |\psi_{r,1,j}(t)|^2 \right) = 1 \quad (7.4)$$

در مدلی از ولگشت موبیوسی که از عملگر هادامارد به عنوان عملگر سکه استفاده می‌کنیم، عملگر تحول به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$U = S.(I_R \otimes H \otimes I_P) \quad (8.4)$$

اکنون می‌توان حالت $t + 1$ را با استفاده از حالت t به دست آورد:

$$U|\psi(t)\rangle = |\psi(t + 1)\rangle \quad (9.4)$$

با جاگذاری $|\psi(t)\rangle$ از معادله ۶.۴ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
 U|\psi(t)\rangle &= U \sum_{r=\circ}^1 \sum_{j=\circ}^{N-1} (\psi_{r,\circ,j}(t) |r, \circ, j\rangle + \psi_{r,1,j}(t) |r, 1, j\rangle) \\
 &= \sum_{r=\circ}^1 \sum_{j=\circ}^{N-1} (\psi_{r,\circ,j}(t) U |r, \circ, j\rangle + \psi_{r,1,j}(t) U |r, 1, j\rangle) \\
 &= \sum_{r=\circ}^1 \sum_{j=\circ}^{N-1} (\psi_{r,\circ,j}(t) S(R(s) |r\rangle H |\circ\rangle |j + (-1)^s\rangle) \\
 &\quad + \psi_{r,1,j}(t) S(R(s) |r\rangle H |1\rangle |j + (-1)^s\rangle)) \\
 &= \sum_{r=\circ}^1 \sum_{j=\circ}^{N-1} (\frac{\psi_{r,\circ,j}(t)}{\sqrt{r}} S(R(s) |r\rangle (|\circ\rangle + |1\rangle) |j + (-1)^s\rangle) \\
 &\quad + \frac{\psi_{r,1,j}(t)}{\sqrt{r}} S(R(s) |r\rangle (|\circ\rangle - |1\rangle) |j + (-1)^s\rangle)) \tag{۱۰.۴} \\
 &= \sum_{r=\circ}^1 \sum_{j=\circ}^{N-1} (\frac{\psi_{r,\circ,j}(t)}{\sqrt{r}} R(\circ) |r\rangle |\circ\rangle |j + 1\rangle + \frac{\psi_{r,\circ,j}(t)}{\sqrt{r}} R(1) |r\rangle |1\rangle |j - 1\rangle) \\
 &\quad + \frac{\psi_{r,1,j}(t)}{\sqrt{r}} R(\circ) |r\rangle |\circ\rangle |j + 1\rangle - R(1) |r\rangle |1\rangle |j - 1\rangle) \\
 &= \sum_{r=\circ}^1 \sum_{j=\circ}^{N-1} (\frac{\psi_{r,\circ,j}(t) + \psi_{r,1,j}(t)}{\sqrt{r}} R(\circ) |r\rangle |\circ\rangle |j + 1\rangle \\
 &\quad + \frac{\psi_{r,\circ,j}(t) - \psi_{r,1,j}(t)}{\sqrt{r}} R(1) |r\rangle |1\rangle |j - 1\rangle) \\
 \Rightarrow U|\psi(t)\rangle &= \sum_{r=\circ}^1 \sum_{j=\circ}^{N-1} (\frac{\psi_{r,\circ,j}(t) + \psi_{r,1,j}(t)}{\sqrt{r}} R(\circ) |r\rangle |\circ\rangle |j + 1\rangle \\
 &\quad + \frac{\psi_{r,\circ,j}(t) - \psi_{r,1,j}(t)}{\sqrt{r}} R(1) |r\rangle |1\rangle |j - 1\rangle)
 \end{aligned}$$

این رابطه نشان می‌دهد که می‌توان حالت ولگشت را در گام $t + 1$ در جایگاه z ام از دامنه احتمال حضور ولگشت در جایگاه $1 - z$ ام و جایگاه $1 + z$ ام در گام t به دست آورد.

۲.۴ ویژه‌بردارها و ویژه‌مقادیر ولگشت موبیوسی

معادله ۱۰.۴ یک رابطه بازگشتی را مشخص می‌کند که اگرچه مفید است ولی شکل تابع توزیع احتمال را مشخص نمی‌کند. برای به دست آوردن شکل کلی تابع توزیع احتمال، عملگر S را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$S = R(\circ) \otimes |\circ\rangle \langle \circ| \otimes \sum_x |x + 1\rangle \langle x| + R(1) \otimes |1\rangle \langle 1| \otimes \sum_x |x - 1\rangle \langle x| \tag{۱۱.۴}$$

که در آن $R(0)$ و $R(1)$ عملگرهای دوران ساعتگرد و پادساعتگرد هستند. در رابطه ۱۱.۴ که واضح است قسمت جابه‌جایی در فضای مکان غیر قطری است که این کار محاسبات در پایه مکان را بسیار پیچیده می‌کند. اما می‌توان با استفاده از تبدیل فوریه پایه مکان را به پایه k تبدیل کرد که در آن عمل جابه‌جایی در فضای k قطری است.

در نتیجه با توجه به رابطه ۸.۴ عملگر تحول ولگشت موبیوسی هادامارد به شکل زیر خواهد بود:

$$U = S(I_R \otimes H \otimes I_x) \quad (12.4)$$

$$= R(0) \otimes |0\rangle\langle 0| H \otimes \sum_x |x+1\rangle\langle x| + R(1) \otimes |1\rangle\langle 1| H \otimes \sum_x |x-1\rangle\langle x|$$

با استفاده از تبدیل فوریه گسسته $|\kappa_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{d-1} e^{\frac{\gamma i \pi k j}{d}} |j\rangle$ که در آن $\{|\kappa_k\rangle : 0 \leq k \leq d-1\}$ می‌توان حالت کلی ولگشت را به صورت زیر نوشت:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{r=0}^1 \sum_{s=0}^1 \sum_{k=0}^{d-1} \tilde{\psi}_{r,s,k}(t) |r\rangle |s\rangle |\kappa_k\rangle \quad (13.4)$$

که در آن ضرایب از $\tilde{\psi}_{r,s,k} = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{d-1} e^{-\frac{\gamma i \pi k j}{d}} \psi_{r,s,j}$ تعیین می‌شوند. عملگر جابه‌جایی شرطی در ولگشت موبیوسی به صورت زیر عمل می‌کند:

$$S|r, s, j\rangle = R(s) |r\rangle |s\rangle |j + (-1)^s\rangle \quad (14.4)$$

اگر عملگر جابه‌جایی شرطی ۱۴.۴ را بر پایه‌های فوریه اثر دهیم:

$$S|r\rangle |s\rangle |\kappa_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{d-1} e^{\frac{\gamma i \pi k j}{d}} S|r, s, j\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{d-1} e^{\frac{\gamma i \pi k j}{d}} R(s) |r\rangle |s\rangle |j + (-1)^s\rangle$$

$$S|r\rangle |s\rangle |\kappa_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{j=0}^{d-1} e^{\frac{\gamma i \pi k (j - (-1)^s)}{d}} R(s) |r\rangle |s\rangle |j\rangle = e^{\frac{-(-1)^s \gamma i \pi k}{d}} R(s) |r\rangle |s\rangle |\kappa_k\rangle \quad (15.4)$$

که در آن از تغییر متغیر $j' = j + (-1)^s$ استفاده شده است. برای قطری کردن عملگر تحول، U را بر بردار حالت $|r'\rangle |s'\rangle |\kappa_k\rangle$ اثر می‌دهیم:

$$U|r'\rangle |s'\rangle |\kappa_k\rangle = S \left(\sum_{s=0}^1 |r'\rangle H_{s,s'} |s\rangle |\kappa_k\rangle \right) = \sum_{s=0}^1 e^{\frac{-(-1)^s \gamma i \pi k}{d}} R(s) |r'\rangle H_{s,s'} |s\rangle |\kappa_k\rangle \quad (16.4)$$

بنابراین درآیه‌های U در پایه‌های فوریه عبارتند از:

$$\langle r, s, \kappa_k | U | r', s', \kappa_{k'} \rangle = \underbrace{\left(e^{-\frac{\gamma i \pi k}{d}} R(\circ) H_{\circ, s'} + e^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} R(\lambda) H_{\lambda, s'} \right)}_M \delta_{k, k'} \quad (17.4)$$

که $H_{s, s'} = \langle s | H | s' \rangle$. رابطه ۱۷.۴ نشان می‌دهد که عملگر تحول در فضای k قطری است و برای به دست آوردن آن، تنها باید ویژه‌مقادیر و ویژه‌بردارهای ماتریس M را به دست آوریم و با استفاده از آن بسط عملگر تحول را بنویسیم:

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} & -i \sin \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} \\ -i \sin \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} & \cos \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{e^{-\frac{\gamma i \pi k}{d}}}{\sqrt{\gamma}} & \frac{e^{-\frac{\gamma i \pi k}{d}}}{\sqrt{\gamma}} \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} & i \sin \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} \\ i \sin \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} & \cos \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \frac{e^{\frac{\gamma i \pi k}{d}}}{\sqrt{\gamma}} & -\frac{e^{\frac{\gamma i \pi k}{d}}}{\sqrt{\gamma}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{e^{-\frac{\gamma i \pi k}{d}}}{\sqrt{\gamma}} \cos \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} & \frac{e^{-\frac{\gamma i \pi k}{d}}}{\sqrt{\gamma}} \cos \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} & -ie \frac{-\gamma i \pi k}{d} \sin \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} & -ie \frac{-\gamma i \pi k}{d} \sin \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ -ie \frac{-\gamma i \pi k}{d} \sin \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} & -ie \frac{-\gamma i \pi k}{d} \sin \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} & \frac{e^{-\frac{\gamma i \pi k}{d}}}{\sqrt{\gamma}} \cos \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} & \frac{e^{-\frac{\gamma i \pi k}{d}}}{\sqrt{\gamma}} \cos \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix} \quad (18.4) \\ &+ \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ \\ \frac{e^{\frac{\gamma i \pi k}{d}}}{\sqrt{\gamma}} \cos \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} & -e \frac{\gamma i \pi k}{d} \cos \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} & \frac{e^{\frac{\gamma i \pi k}{d}}}{\sqrt{\gamma}} \sin \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} & -ie \frac{\gamma i \pi k}{d} \sin \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \frac{e^{\frac{\gamma i \pi k}{d}}}{\sqrt{\gamma}} \sin \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} & -ie \frac{\gamma i \pi k}{d} \sin \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} & \frac{e^{\frac{\gamma i \pi k}{d}}}{\sqrt{\gamma}} \cos \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} & -e \frac{\gamma i \pi k}{d} \cos \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} \end{bmatrix} \Rightarrow \\ M &= \begin{bmatrix} \frac{e^{-\frac{\gamma i \pi k}{d}}}{\sqrt{\gamma}} \cos \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} & \frac{e^{-\frac{\gamma i \pi k}{d}}}{\sqrt{\gamma}} \cos \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} & -ie \frac{-\gamma i \pi k}{d} \sin \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} & -ie \frac{-\gamma i \pi k}{d} \sin \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} \\ \frac{e^{\frac{\gamma i \pi k}{d}}}{\sqrt{\gamma}} \cos \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} & -e \frac{\gamma i \pi k}{d} \cos \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} & \frac{e^{\frac{\gamma i \pi k}{d}}}{\sqrt{\gamma}} \sin \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} & -ie \frac{\gamma i \pi k}{d} \sin \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} \\ -ie \frac{-\gamma i \pi k}{d} \sin \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} & -ie \frac{-\gamma i \pi k}{d} \sin \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} & \frac{e^{-\frac{\gamma i \pi k}{d}}}{\sqrt{\gamma}} \cos \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} & \frac{e^{-\frac{\gamma i \pi k}{d}}}{\sqrt{\gamma}} \cos \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} \\ \frac{e^{\frac{\gamma i \pi k}{d}}}{\sqrt{\gamma}} \sin \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} & -ie \frac{\gamma i \pi k}{d} \sin \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} & \frac{e^{\frac{\gamma i \pi k}{d}}}{\sqrt{\gamma}} \cos \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} & -e \frac{\gamma i \pi k}{d} \cos \frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

اکنون معادله مشخصه ماتریس M را محاسبه می‌کنیم و با ساده‌سازی و جمع‌آوری λ ها خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \lambda^4 + 2\sqrt{\gamma} i \sin \left(\frac{\gamma \pi k}{d} \right) \cos \left(\frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} \right) \lambda^3 + \left(\cos \left(\frac{\gamma \pi k}{d} \right) - 2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} \right) - 1 \right) \lambda^2 \\ - 2\sqrt{\gamma} i \sin \left(\frac{\gamma \pi k}{d} \right) \cos \left(\frac{\theta}{\sqrt{\gamma}} \right) \lambda + 1 = 0 \end{aligned} \quad (19.4)$$

برای حل این معادله درجه چهار، ضرایب را به شکل زیر نامگذاری می‌کنیم:

$$\underbrace{1}_{a} \lambda^4 + \underbrace{2\sqrt{2}i \sin\left(\frac{2\pi k}{d}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}_{b} \lambda^3 + \underbrace{\left(\cos\left(\frac{4\pi k}{d}\right) - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right)}_{c} \lambda^2 - \underbrace{2\sqrt{2}i \sin\left(\frac{2\pi k}{d}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}_{d} \lambda + \underbrace{1}_{e} = 0 \quad (20.4)$$

و از تغییر متغیر $\lambda = i\lambda'$ استفاده می‌کنیم:

$$a' = 1$$

$$b\lambda^3 = 2\sqrt{2}i(i\lambda')^3 (i\lambda') \sin\left(\frac{2\pi k}{d}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \underbrace{2\sqrt{2} \sin\left(\frac{2\pi k}{d}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}_{b'} \lambda'^3 \Rightarrow$$

$$b' = 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{2\pi k}{d}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$c\lambda^2 = (i\lambda')^2 \left(\cos\left(\frac{4\pi k}{d}\right) - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right) = - \underbrace{\left(\cos\left(\frac{4\pi k}{d}\right) - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right)}_{c'} \lambda'^2 \Rightarrow$$

$$c' = - \left(\cos\left(\frac{4\pi k}{d}\right) - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right)$$

$$d\lambda = -2\sqrt{2}i(i\lambda') \sin\left(\frac{2\pi k}{d}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \underbrace{2\sqrt{2} \sin\left(\frac{2\pi k}{d}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}_{d'} \lambda' \Rightarrow$$

$$d' = 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{2\pi k}{d}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$e' = 1$$

(21.4)

بنابراین معادله مشخصه به شکل زیر خواهد شد:

$$\lambda'^4 + 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{2\pi k}{d}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \lambda'^3 - \left(\cos\left(\frac{4\pi k}{d}\right) - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right) \lambda'^2 + 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{2\pi k}{d}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \lambda' + 1 = 0 \quad (22.4)$$

با حل این معادله را حل کنیم به چهار جواب به شکل زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned}
 \lambda'_1 &= -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sin\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) \cos\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) + \frac{1}{\gamma} \sqrt{\gamma \sin^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) - \gamma \sin^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) - \gamma \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) + \gamma} \\
 &+ \frac{1}{\gamma} \left(\gamma \sin^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) - \gamma \sqrt{\gamma \sin^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) - \gamma \sin^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) - \gamma \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) + \gamma} \right. \\
 &\left. - \gamma \sin^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) - \gamma \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) - \gamma \right)^{\frac{1}{\gamma}} \\
 \lambda'_2 &= -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sin\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) \cos\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) + \frac{1}{\gamma} \sqrt{\gamma \sin^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) - \gamma \sin^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) - \gamma \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) + \gamma} \\
 &- \frac{1}{\gamma} \left(\gamma \sin^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) - \gamma \sqrt{\gamma \sin^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) - \gamma \sin^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) - \gamma \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) + \gamma} \right. \\
 &\left. - \gamma \sin^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) - \gamma \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) - \gamma \right)^{\frac{1}{\gamma}} \\
 \lambda'_3 &= -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sin\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) \cos\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) - \frac{1}{\gamma} \sqrt{\gamma \sin^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) - \gamma \sin^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) - \gamma \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) + \gamma} \\
 &+ \frac{1}{\gamma} \left(\gamma \sin^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) + \gamma \sqrt{\gamma \sin^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) - \gamma \sin^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) - \gamma \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) + \gamma} \right. \\
 &\left. - \gamma \sin^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) - \gamma \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) - \gamma \right)^{\frac{1}{\gamma}} \\
 \lambda'_4 &= -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sin\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) \cos\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) - \frac{1}{\gamma} \sqrt{\gamma \sin^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) - \gamma \sin^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) - \gamma \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) + \gamma} \\
 &- \frac{1}{\gamma} \left(\gamma \sin^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) + \gamma \sqrt{\gamma \sin^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) - \gamma \sin^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) - \gamma \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) + \gamma} \right. \\
 &\left. - \gamma \sin^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) - \gamma \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) - \gamma \right)^{\frac{1}{\gamma}}
 \end{aligned} \tag{۲۳.۴}$$

با توجه به شکل صریح ویژه‌مقادیر می‌توان دید که هر چهار ویژه‌مقدار از دو قسمت تشکیل شده‌اند که هرکدام از این قسمت‌ها در هر ویژه‌مقدار، به اندازه یک علامت منفی با هم تفاوت دارند. با استفاده از این نکته، برای راحتی محاسبات بعدی، هرکدام از دو قسمت را به صورت جداگانه ساده‌سازی می‌کنیم. قسمت اول را با A نام‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 A &= -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sin\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) \cos\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) \pm \frac{1}{\gamma} \sqrt{\gamma \sin^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) - \gamma \sin^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) - \gamma \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) + \gamma} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sin\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) \cos\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) \pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{\sin^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) - \sin^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) - \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) + 1} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sin\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) \cos\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) \pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{\sin^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) + \cos^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) - \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right)} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sin\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) \cos\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) \pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{\cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) \left(\sin^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) - 1\right) + \cos^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right)} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sin\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) \cos\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) \pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{\cos^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) \left(1 - \cos^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right)\right)} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sin\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) \cos\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) \pm \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{\cos^2\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) \sin^2\left(\frac{\theta}{\gamma}\right)} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(\sin\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) \cos\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) \pm \cos\left(\frac{\gamma\pi k}{d}\right) \sin\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) \right) \Rightarrow
 \end{aligned} \tag{۲۴.۴}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left(\mp \cos \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \sin \left(\frac{\theta}{\nu} \right) - \sin \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \cos \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_+ = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \sin \left(\frac{\theta}{\nu} - \frac{\nu \pi k}{d} \right) \\ A_- = \frac{-1}{\sqrt{\nu}} \sin \left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{\nu \pi k}{d} \right) \end{cases} \quad (۲۵.۴)$$

برای قسمت دوم ویژه مقادیر از نماد B استفاده می‌کنیم:

$$B = \frac{1}{\nu} \left(\nu \sin^{\nu} \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \cos^{\nu} \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \pm \nu \sqrt{\nu} \sin \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \cos \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \sqrt{\nu \sin^{\nu} \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \cos^{\nu} \left(\frac{\theta}{\nu} \right) - \nu \sin^{\nu} \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) - \nu \cos^{\nu} \left(\frac{\theta}{\nu} \right) + \nu} \right. \\ \left. - \nu \sin^{\nu} \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) - \nu \cos^{\nu} \left(\frac{\theta}{\nu} \right) - \nu \right)^{\frac{1}{\nu}}$$

$$= \frac{1}{\nu} \left(\nu \sin^{\nu} \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \cos^{\nu} \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \pm \nu \sin \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \cos \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \sqrt{\sin^{\nu} \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \cos^{\nu} \left(\frac{\theta}{\nu} \right) - \sin^{\nu} \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) - \cos^{\nu} \left(\frac{\theta}{\nu} \right) + 1} \right. \\ \left. - \nu \sin^{\nu} \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) - \nu \cos^{\nu} \left(\frac{\theta}{\nu} \right) - \nu \right)^{\frac{1}{\nu}}$$

$$= \frac{1}{\nu} \left(\nu \sin^{\nu} \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \cos^{\nu} \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \pm \nu \sin \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \cos \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \sqrt{\cos^{\nu} \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \left(\sin^{\nu} \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) - 1 \right) + \cos^{\nu} \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right)} \right. \\ \left. - \nu \sin^{\nu} \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) - \nu \cos^{\nu} \left(\frac{\theta}{\nu} \right) - \nu \right)^{\frac{1}{\nu}}$$

$$= \frac{1}{\nu} \left(\nu \sin^{\nu} \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \cos^{\nu} \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \pm \nu \sin \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \cos \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \sqrt{-\cos^{\nu} \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \cos^{\nu} \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) + \cos^{\nu} \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right)} \right. \\ \left. - \nu \sin^{\nu} \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) - \nu \cos^{\nu} \left(\frac{\theta}{\nu} \right) - \nu \right)^{\frac{1}{\nu}}$$

$$= \frac{1}{\nu} \left(\nu \sin^{\nu} \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \cos^{\nu} \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \pm \nu \sin \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \cos \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \sqrt{\cos^{\nu} \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \left(1 - \cos^{\nu} \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \right) - \nu \sin^{\nu} \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) - \nu \cos^{\nu} \left(\frac{\theta}{\nu} \right) - \nu} \right)^{\frac{1}{\nu}}$$

$$= \frac{1}{\nu} \left(\nu \sin^{\nu} \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \cos^{\nu} \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \pm \nu \sin \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \cos \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \sqrt{\sin^{\nu} \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \cos^{\nu} \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) - \nu \sin^{\nu} \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) - \nu \cos^{\nu} \left(\frac{\theta}{\nu} \right) - \nu} \right)^{\frac{1}{\nu}}$$

$$= \frac{1}{\nu} \left(\nu \sin^{\nu} \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \cos^{\nu} \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \pm \nu \sin \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \cos \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \sin \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \cos \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) - \nu \sin^{\nu} \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) - \nu \cos^{\nu} \left(\frac{\theta}{\nu} \right) - \nu \right)^{\frac{1}{\nu}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left(\left(\nu \sin \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \cos \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \right) \left(\sin \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \cos \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \right) \pm \nu \sin \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \cos \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \sin \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \cos \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \right. \\ \left. - \sin^{\nu} \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) - \cos^{\nu} \left(\frac{\theta}{\nu} \right) - \nu \right)^{\frac{1}{\nu}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left(\nu \sin \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \cos \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \left(\sin \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \cos \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \pm \sin \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \cos \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \right) - \sin^{\nu} \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) - \cos^{\nu} \left(\frac{\theta}{\nu} \right) - \nu \right)^{\frac{1}{\nu}}$$

$$= \frac{1}{\nu} \left(\nu \sin \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \cos \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \left(\sin \left(\frac{\nu \pi k}{d} \pm \frac{\theta}{\nu} \right) \right) - \sin^{\nu} \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) - \cos^{\nu} \left(\frac{\theta}{\nu} \right) - \nu \right)^{\frac{1}{\nu}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B_+ = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left(\nu \sin \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \cos \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \left(\sin \left(\frac{\nu \pi k}{d} + \frac{\theta}{\nu} \right) \right) - \sin^{\nu} \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) - \cos^{\nu} \left(\frac{\theta}{\nu} \right) - \nu \right)^{\frac{1}{\nu}} \\ B_- = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left(\nu \sin \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \cos \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \left(\sin \left(\frac{\nu \pi k}{d} - \frac{\theta}{\nu} \right) \right) - \sin^{\nu} \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) - \cos^{\nu} \left(\frac{\theta}{\nu} \right) - \nu \right)^{\frac{1}{\nu}} \end{cases} \quad (۲۶.۴)$$

با توجه به روابطی که برای A_{\pm} و B_{\pm} به دست آوردیم و روابط ویژه مقادیر پیش تر به دست آمده، می‌توانیم ویژه مقادیر را بر حسب A_{\pm} و B_{\pm} به دست آوریم:

$$\begin{aligned}
 \lambda'_1 &= A_+ + B_- \\
 \lambda'_2 &= A_+ - B_- \\
 \lambda'_3 &= A_- + B_+ \\
 \lambda'_4 &= A_- - B_+
 \end{aligned}
 \tag{۲۷.۴}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
 \lambda'_1 &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(\sin \left(\frac{\theta}{\gamma} - \frac{\gamma\pi k}{d} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{\gamma} \sin \left(\frac{\gamma\pi k}{d} \right) \cos \left(\frac{\theta}{\gamma} \right) \left(\sin \left(\frac{\gamma\pi k}{d} - \frac{\theta}{\gamma} \right) \right) - \sin^2 \left(\frac{\gamma\pi k}{d} \right) - \cos^2 \left(\frac{\theta}{\gamma} \right) - 1 \right) \\
 \lambda'_2 &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(\sin \left(\frac{\theta}{\gamma} - \frac{\gamma\pi k}{d} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{\gamma} \sin \left(\frac{\gamma\pi k}{d} \right) \cos \left(\frac{\theta}{\gamma} \right) \left(\sin \left(\frac{\gamma\pi k}{d} - \frac{\theta}{\gamma} \right) \right) - \sin^2 \left(\frac{\gamma\pi k}{d} \right) - \cos^2 \left(\frac{\theta}{\gamma} \right) - 1 \right)
 \end{aligned}
 \tag{۲۸.۴}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda'_3 &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(-\sin \left(\frac{\theta}{\gamma} + \frac{\gamma\pi k}{d} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{\gamma} \sin \left(\frac{\gamma\pi k}{d} \right) \cos \left(\frac{\theta}{\gamma} \right) \left(\sin \left(\frac{\gamma\pi k}{d} + \frac{\theta}{\gamma} \right) \right) - \sin^2 \left(\frac{\gamma\pi k}{d} \right) - \cos^2 \left(\frac{\theta}{\gamma} \right) - 1 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda'_4 &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(-\sin \left(\frac{\theta}{\gamma} + \frac{\gamma\pi k}{d} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{\gamma} \sin \left(\frac{\gamma\pi k}{d} \right) \cos \left(\frac{\theta}{\gamma} \right) \left(\sin \left(\frac{\gamma\pi k}{d} + \frac{\theta}{\gamma} \right) \right) - \sin^2 \left(\frac{\gamma\pi k}{d} \right) - \cos^2 \left(\frac{\theta}{\gamma} \right) - 1 \right)
 \end{aligned}$$

طرفین روابط بالا را در i ضرب کرده و این بار λ را به جای λ' باز می‌گردانیم (معکوس تغییر متغیری را که پیش‌تر به کار برده بودیم، اعمال می‌کنیم):

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(\sqrt{\gamma} \sin \left(\frac{\gamma\pi k}{d} \right) \cos \left(\frac{\theta}{\gamma} \right) \sin \left(\frac{\theta}{\gamma} - \sin \left(\frac{\gamma\pi k}{d} \right) \right) + \sin^2 \left(\frac{\gamma\pi k}{d} \right) + \cos^2 \left(\frac{\theta}{\gamma} \right) + 1 \right. \\
 &\quad \left. + i \sin \left(\frac{\theta}{\gamma} - \frac{\gamma\pi k}{d} \right) \right) \\
 \lambda_2 &= \frac{-1}{\sqrt{\gamma}} \left(\sqrt{\gamma} \sin \left(\frac{\gamma\pi k}{d} \right) \cos \left(\frac{\theta}{\gamma} \right) \sin \left(\frac{\theta}{\gamma} - \sin \left(\frac{\gamma\pi k}{d} \right) \right) + \sin^2 \left(\frac{\gamma\pi k}{d} \right) + \cos^2 \left(\frac{\theta}{\gamma} \right) + 1 \right. \\
 &\quad \left. - i \sin \left(\frac{\theta}{\gamma} - \frac{\gamma\pi k}{d} \right) \right) \\
 \lambda_3 &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(\sqrt{-\gamma} \sin \left(\frac{\gamma\pi k}{d} \right) \cos \left(\frac{\theta}{\gamma} \right) \sin \left(\frac{\theta}{\gamma} + \sin \left(\frac{\gamma\pi k}{d} \right) \right) + \sin^2 \left(\frac{\gamma\pi k}{d} \right) + \cos^2 \left(\frac{\theta}{\gamma} \right) + 1 \right. \\
 &\quad \left. - i \sin \left(\frac{\theta}{\gamma} + \frac{\gamma\pi k}{d} \right) \right) \\
 \lambda_4 &= \frac{-1}{\sqrt{\gamma}} \left(\sqrt{-\gamma} \sin \left(\frac{\gamma\pi k}{d} \right) \cos \left(\frac{\theta}{\gamma} \right) \sin \left(\frac{\theta}{\gamma} + \sin \left(\frac{\gamma\pi k}{d} \right) \right) + \sin^2 \left(\frac{\gamma\pi k}{d} \right) + \cos^2 \left(\frac{\theta}{\gamma} \right) + 1 \right. \\
 &\quad \left. + i \sin \left(\frac{\theta}{\gamma} + \frac{\gamma\pi k}{d} \right) \right)
 \end{aligned}
 \tag{۲۹.۴}$$

به دلیل شباهت عبارت زیر رادیکال به چند جمله‌ای درجه دوم، ویژه مقادیر را به شکل مفیدتر زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left(\sqrt{\sin^2 \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) + \cos^2 \left(\frac{\theta}{\nu} \right) + 2 \sin \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \cos \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \sin \left(\frac{\theta}{\nu} - \frac{\nu \pi k}{d} \right) + 1} \right. \\ &\quad \left. + i \sin \left(\frac{\theta}{\nu} - \frac{\nu \pi k}{d} \right) \right) \\ \lambda_2 &= \frac{-1}{\sqrt{\nu}} \left(\sqrt{\sin^2 \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) + \cos^2 \left(\frac{\theta}{\nu} \right) + 2 \sin \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \cos \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \sin \left(\frac{\theta}{\nu} - \frac{\nu \pi k}{d} \right) + 1} \right. \\ &\quad \left. - i \sin \left(\frac{\theta}{\nu} - \frac{\nu \pi k}{d} \right) \right) \\ \lambda_3 &= \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left(\sqrt{\sin^2 \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) + \cos^2 \left(\frac{\theta}{\nu} \right) - 2 \sin \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \cos \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \sin \left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{\nu \pi k}{d} \right) + 1} \right. \\ &\quad \left. - i \sin \left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{\nu \pi k}{d} \right) \right) \\ \lambda_4 &= \frac{-1}{\sqrt{\nu}} \left(\sqrt{\sin^2 \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) + \cos^2 \left(\frac{\theta}{\nu} \right) - 2 \sin \left(\frac{\nu \pi k}{d} \right) \cos \left(\frac{\theta}{\nu} \right) \sin \left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{\nu \pi k}{d} \right) + 1} \right. \\ &\quad \left. + i \sin \left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{\nu \pi k}{d} \right) \right) \end{aligned} \tag{۳۰.۴}$$

که با ساده‌سازی بیشتر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{\nu} \sqrt{3 + \cos \left(\frac{\nu \pi k}{d} - \theta \right)} + \frac{i}{\sqrt{\nu}} \sin \left(\frac{\theta}{\nu} - \frac{\nu \pi k}{d} \right) \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{\nu} \sqrt{3 + \cos \left(\frac{\nu \pi k}{d} - \theta \right)} - \frac{i}{\sqrt{\nu}} \sin \left(\frac{\theta}{\nu} - \frac{\nu \pi k}{d} \right) \\ \lambda_3 &= \frac{1}{\nu} \sqrt{3 + \cos \left(\frac{\nu \pi k}{d} + \theta \right)} - \frac{i}{\sqrt{\nu}} \sin \left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{\nu \pi k}{d} \right) \\ \lambda_4 &= -\frac{1}{\nu} \sqrt{3 + \cos \left(\frac{\nu \pi k}{d} + \theta \right)} - \frac{i}{\sqrt{\nu}} \sin \left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{\nu \pi k}{d} \right) \end{aligned} \tag{۳۱.۴}$$

و در نهایت:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left(\sqrt{1 + \cos^2 \left(\frac{\nu \pi k}{d} - \frac{\theta}{\nu} \right)} - i \sin \left(\frac{\nu \pi k}{d} - \frac{\theta}{\nu} \right) \right) \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{\sqrt{\nu}} \left(\sqrt{1 + \cos^2 \left(\frac{\nu \pi k}{d} - \frac{\theta}{\nu} \right)} + i \sin \left(\frac{\nu \pi k}{d} - \frac{\theta}{\nu} \right) \right) \\ \lambda_3 &= \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left(\sqrt{1 + \cos^2 \left(\frac{\nu \pi k}{d} + \frac{\theta}{\nu} \right)} - i \sin \left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{\nu \pi k}{d} \right) \right) \\ \lambda_4 &= -\frac{1}{\sqrt{\nu}} \left(\sqrt{1 + \cos^2 \left(\frac{\nu \pi k}{d} + \frac{\theta}{\nu} \right)} + i \sin \left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{\nu \pi k}{d} \right) \right) \end{aligned} \tag{۳۲.۴}$$

که قابل مقایسه با نتیجه‌ای است که در فصل پیش برای ولگشت کوانتومی روی دایره به دست آمد. برای حالت خاص $\theta = 0$ ولگشت کوانتومی موبیوسی باید به صورت ولگشت کوانتومی روی چرخه در آید، زیرا در این حالت ولگشت دیگر به دور راستای حرکت خود چرخش نخواهد داشت. با صفر قرار دادن θ ویژه‌مقادیر به روابط زیر کاهش می‌یابند:

$$\lambda_1 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{r}} \left(\sqrt{1 + \cos^2 \left(\frac{r\pi k}{d} \right)} - i \sin \left(\frac{r\pi k}{d} \right) \right)$$

$$\lambda_2 = \lambda_4 = \frac{1}{\sqrt{r}} \left(-\sqrt{1 + \cos^2 \left(\frac{r\pi k}{d} \right)} - i \sin \left(\frac{r\pi k}{d} \right) \right)$$

(۳۳.۴)

که همان ویژه‌مقادیر مربوط به ولگشت کوانتومی روی چرخه است. اکنون ویژه‌بردارهای ولگشت موبیوسی را تعیین می‌کنیم. از آنجایی که M یک ماتریس یکانی است ویژه‌مقادیر آن به شکل $\lambda = e^{is}$ هستند که از رابطه ۳۲.۴ می‌توان آن‌ها را به شکل $\lambda = e^{-io}, e^{i(o+\pi)}$ نوشت که o دو مقدار o_1 و o_2 به شکل زیر خواهد داشت:

$$o_1 = \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{r}} \sin \left(\frac{r\pi k}{d} + \frac{\theta}{r} \right) \right)$$

$$o_2 = \arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{r}} \sin \left(\frac{r\pi k}{d} - \frac{\theta}{r} \right) \right)$$

(۳۴.۴)

$V = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ را به صورت

در نظر می‌گیریم و بنابراین:

$$MV = \lambda V \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \frac{e^{-\frac{r\pi k}{d}}}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{r} & \frac{e^{-\frac{r\pi k}{d}}}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{r} & \frac{-ie^{-\frac{r\pi k}{d}}}{\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{r} & \frac{-ie^{-\frac{r\pi k}{d}}}{\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{r} \\ \frac{e^{\frac{r\pi k}{d}}}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{r} & \frac{-e^{\frac{r\pi k}{d}}}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{r} & \frac{ie^{\frac{r\pi k}{d}}}{\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{r} & \frac{-ie^{\frac{r\pi k}{d}}}{\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{r} \\ \frac{-ie^{-\frac{r\pi k}{d}}}{\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{r} & \frac{-ie^{-\frac{r\pi k}{d}}}{\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{r} & \frac{e^{-\frac{r\pi k}{d}}}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{r} & \frac{e^{-\frac{r\pi k}{d}}}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{r} \\ \frac{ie^{\frac{r\pi k}{d}}}{\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{r} & \frac{-ie^{\frac{r\pi k}{d}}}{\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{r} & \frac{e^{\frac{r\pi k}{d}}}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{r} & \frac{-e^{\frac{r\pi k}{d}}}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

(۳۵.۴)

$$\begin{bmatrix} \frac{ae^{-\frac{\gamma i \pi k}{d}} \cos(\frac{\theta}{\gamma})}{ae^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \cos(\frac{\theta}{\gamma})} + \frac{be^{-\frac{\gamma i \pi k}{d}} \cos(\frac{\theta}{\gamma})}{be^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \cos(\frac{\theta}{\gamma})} - \frac{ice^{-\frac{\gamma i \pi k}{d}} \sin(\frac{\theta}{\gamma})}{ice^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \sin(\frac{\theta}{\gamma})} - \frac{ide^{-\frac{\gamma i \pi k}{d}} \sin(\frac{\theta}{\gamma})}{ide^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \sin(\frac{\theta}{\gamma})} \\ - \frac{iae^{-\frac{\gamma i \pi k}{d}} \sin(\frac{\theta}{\gamma})}{iae^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \sin(\frac{\theta}{\gamma})} - \frac{ibe^{-\frac{\gamma i \pi k}{d}} \sin(\frac{\theta}{\gamma})}{ibe^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \sin(\frac{\theta}{\gamma})} + \frac{ce^{-\frac{\gamma i \pi k}{d}} \cos(\frac{\theta}{\gamma})}{ce^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \cos(\frac{\theta}{\gamma})} + \frac{de^{-\frac{\gamma i \pi k}{d}} \cos(\frac{\theta}{\gamma})}{de^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \cos(\frac{\theta}{\gamma})} \\ \frac{iae^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \sin(\frac{\theta}{\gamma})}{\sqrt{\gamma}} - \frac{ibe^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \sin(\frac{\theta}{\gamma})}{\sqrt{\gamma}} + \frac{ce^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \cos(\frac{\theta}{\gamma})}{\sqrt{\gamma}} - \frac{de^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \cos(\frac{\theta}{\gamma})}{\sqrt{\gamma}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \\ \lambda d \end{bmatrix} \quad (۳۶.۴)$$

به چهار معادله زیر می‌رسیم که باید برای رسیدن به ویژه‌دارها به صورت همزمان حل شوند:

$$\begin{aligned} \frac{ae^{-\frac{\gamma i \pi k}{d}} \cos(\frac{\theta}{\gamma})}{ae^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \cos(\frac{\theta}{\gamma})} + \frac{be^{-\frac{\gamma i \pi k}{d}} \cos(\frac{\theta}{\gamma})}{be^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \cos(\frac{\theta}{\gamma})} - \frac{ice^{-\frac{\gamma i \pi k}{d}} \sin(\frac{\theta}{\gamma})}{ice^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \sin(\frac{\theta}{\gamma})} - \frac{ide^{-\frac{\gamma i \pi k}{d}} \sin(\frac{\theta}{\gamma})}{ide^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \sin(\frac{\theta}{\gamma})} - ae^{is} &= 0 \\ \frac{ae^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \cos(\frac{\theta}{\gamma})}{ae^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \cos(\frac{\theta}{\gamma})} - \frac{be^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \cos(\frac{\theta}{\gamma})}{be^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \cos(\frac{\theta}{\gamma})} + \frac{ice^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \sin(\frac{\theta}{\gamma})}{ice^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \sin(\frac{\theta}{\gamma})} - \frac{ide^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \sin(\frac{\theta}{\gamma})}{ide^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \sin(\frac{\theta}{\gamma})} - be^{is} &= 0 \\ - \frac{iae^{-\frac{\gamma i \pi k}{d}} \sin(\frac{\theta}{\gamma})}{iae^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \sin(\frac{\theta}{\gamma})} - \frac{ibe^{-\frac{\gamma i \pi k}{d}} \sin(\frac{\theta}{\gamma})}{ibe^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \sin(\frac{\theta}{\gamma})} + \frac{ce^{-\frac{\gamma i \pi k}{d}} \cos(\frac{\theta}{\gamma})}{ce^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \cos(\frac{\theta}{\gamma})} + \frac{de^{-\frac{\gamma i \pi k}{d}} \cos(\frac{\theta}{\gamma})}{de^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \cos(\frac{\theta}{\gamma})} - ce^{is} &= 0 \\ \frac{iae^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \sin(\frac{\theta}{\gamma})}{\sqrt{\gamma}} - \frac{ibe^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \sin(\frac{\theta}{\gamma})}{\sqrt{\gamma}} + \frac{ce^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \cos(\frac{\theta}{\gamma})}{\sqrt{\gamma}} - \frac{de^{\frac{\gamma i \pi k}{d}} \cos(\frac{\theta}{\gamma})}{\sqrt{\gamma}} - de^{is} &= 0 \end{aligned} \quad (۳۷.۴)$$

با دقت در جواب‌ها در می‌یابیم که اگر در نظر بگیریم که $c \rightarrow a$ و $d \rightarrow b$ این چهار رابطه، دو به دو مشابه خواهند شد و در نتیجه:

$$\begin{aligned} a \cos\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) + c \cos\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) - a i \sin\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) - c i \sin\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) - \sqrt{\gamma} a e^{i\left(s + \frac{\gamma \pi k}{d}\right)} &= 0 \\ a \cos\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) - c \cos\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) + a i \sin\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) - c i \sin\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) - \sqrt{\gamma} c e^{i\left(s - \frac{\gamma \pi k}{d}\right)} &= 0 \end{aligned} \quad (۳۸.۴)$$

از جمع دو رابطه داریم:

$$\left(\sqrt{\gamma} \cos\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) - e^{i\left(s + \frac{\gamma \pi k}{d}\right)}\right) a - \left(\sqrt{\gamma} i \sin\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) + e^{i\left(s - \frac{\gamma \pi k}{d}\right)}\right) c = 0 \quad (۳۹.۴)$$

این معادله هنگامی برقرار است که:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\gamma} i \sin\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) + e^{i\left(s - \frac{\gamma \pi k}{d}\right)} \\ b &= \sqrt{\gamma} \cos\left(\frac{\theta}{\gamma}\right) - e^{i\left(s + \frac{\gamma \pi k}{d}\right)} \end{aligned} \quad (۴۰.۴)$$

اگر a و b را که به دست آورده‌ایم در V قرار دهیم به دو ویژه‌ت، یکی برای $s = -o_1$ و دیگری برای $s = o_1 + \pi$ می‌رسیم:

$$|V_s^1\rangle = \begin{bmatrix} \sqrt{2}i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + e^{i\left(s-\frac{\gamma\pi k}{d}\right)} \\ \sqrt{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - e^{i\left(s+\frac{\gamma\pi k}{d}\right)} \\ \sqrt{2}i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + e^{i\left(s-\frac{\gamma\pi k}{d}\right)} \\ \sqrt{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - e^{i\left(s+\frac{\gamma\pi k}{d}\right)} \end{bmatrix} \quad (41.4)$$

اما اگر در رابطه ۳۷.۴ قرار دهیم $a \rightarrow -a$ ، $c \rightarrow a$ و $d \rightarrow -b$ به روابط زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} -a \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + b \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - a i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + b i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sqrt{2} a e^{i\left(s+\frac{\gamma\pi k}{d}\right)} &= 0 \\ -a \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - b \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + a i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + b i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sqrt{2} b e^{i\left(s-\frac{\gamma\pi k}{d}\right)} &= 0 \\ +i a \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - i b \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + a \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - b \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sqrt{2} a e^{i\left(s+\frac{\gamma\pi k}{d}\right)} &= 0 \\ -i a \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - i b \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + a \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + b \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sqrt{2} b e^{i\left(s-\frac{\gamma\pi k}{d}\right)} &= 0 \end{aligned} \quad (42.4)$$

رابطه اول (دوم) و سوم (چهارم) در واقع یکی هستند و تنها در یک ضریب -1 با هم تفاوت دارند. از جمع روابط دوم و سوم داریم:

$$\left(\sqrt{2}i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - e^{i\left(s+\frac{\gamma\pi k}{d}\right)}\right) a - \left(\sqrt{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + e^{i\left(s-\frac{\gamma\pi k}{d}\right)}\right) b = 0 \quad (43.4)$$

که با حل این دستگاه دو معادله و دو مجهول، a و b تعیین می‌شوند:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + e^{i\left(s-\frac{\gamma\pi k}{d}\right)} \\ b &= \sqrt{2}i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - e^{i\left(s+\frac{\gamma\pi k}{d}\right)} \end{aligned} \quad (44.4)$$

در نتیجه دو ویژه‌بردار دیگر به دست می‌آیند که یک مربوط به $s = -o_2$ و دیگر مربوط به $s = o_2 + \pi$ است:

$$|V_s^2\rangle = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - e^{i\left(s-\frac{\gamma\pi k}{d}\right)} \\ \sqrt{2}i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - e^{i\left(s+\frac{\gamma\pi k}{d}\right)} \\ \sqrt{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + e^{i\left(s-\frac{\gamma\pi k}{d}\right)} \\ -\sqrt{2}i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + e^{i\left(s+\frac{\gamma\pi k}{d}\right)} \end{bmatrix} \quad (45.4)$$

تعامد ویژه‌بردارهای به دست آمده بررسی شده و مشخص شده است که برهم عمود هستند، یعنی $|V_s^j\rangle$ ها مجموعه کامل ویژهکت‌های ماتریس M را تشکیل می‌دهند و می‌توان M را در پایه‌های خودش به صورت قطری نوشت:

$$M = \sum_{j=1}^2 \sum_{s=-o_j, o_j+\pi} e^{is} |V_s^j\rangle \langle V_s^j| \quad (46.4)$$

با توجه به شکل قطری ماتریس M و رابطه ۱۷.۴ می‌توانیم عملگر تحول را قطری کنیم:

$$U = \sum_{k=0}^{d-1} \sum_{j=1}^2 \sum_{s=-o_j, o_j+\pi} e^{is} |k, V_s^j\rangle \langle k, V_s^j| \quad (47.4)$$

قطری‌سازی عملگر تحول از آن رو مهم است که حجم محاسبات مربوط به تحول ولگشت را بسیار کاهش می‌دهد، زیرا برای t بار اعمال عملگر تحول تنها کافی است که ویژه‌مقادیر را به توان t برسانیم. همچنین با قطری‌سازی (داشتن ویژه‌مقادیر و ویژه‌بردارها) عملگر تحول می‌توان روابط تحلیلی برای توزیع احتمال ولگشت به دست آورد یا آن‌که برآوردهایی برای زمان آمیختگی در ولگشت موبیوسی انجام داد.

۳.۴ توزیع حدی

چنان که پیش‌تر دیدیم، در مورد ولگشت کوانتومی رو چرخه، توزیع مشخصی وجود ندارد، اما می‌توان توزیع معادلی [۵۹] را معرفی کرد که به ازای تعداد گام‌های زیاد به یک توزیع حدی میل کند. در این صورت دو حالت متفاوت به وجود خواهد آمد:

حالتی که تعداد جایگاه‌ها فرد است

در این حالت توزیع حدی یک توزیع یکنواخت خواهد بود [۵۹].

حالتی که تعداد جایگاه‌ها زوج است

۱. اگر تعداد جایگاه‌ها بر چهار تقسیم پذیر باشد، یک توزیع حدی وجود دارد که یکنواخت نبوده و دارای دو قله در مبدا حرکت و نقطه قرینه آن می‌باشد [۶۰].

۲. اگر تعداد جایگاه‌ها بر چهار تقسیم‌پذیر نباشد، یک توزیع حدی وجود دارد که یکنواخت نبوده و دارای یک قله در مبدا حرکت و یک دره در نقطه قرینه آن است [۶۰].

این نایکنواختی (یکنواختی) در تعداد جایگاه‌های زوج (فرد) به دلیل وجود داشتن (نداشتن) تبهگنی است. در این بخش بررسی می‌کنیم که آیا برای ولگشت موبیوسی یک توزیع حدی وجود دارد یا خیر

و در صورت وجود چنین توزیع حدی، تحت چه شرایطی این توزیع یکنواخت است. همچنین تفاوت توزیع میانگین احتمال با توزیع یکنواخت در ولگشت موبیوسی و ولگشت کوانتومی روی دایره با هم مقایسه می‌شوند. از آنجایی که نایکنواختی در توزیع حدی رابطه مستقیم با تبهگنی ویژه‌مقادیر عملگر تحول سیستم دارد، بررسی شرایط تبهگنی ویژه‌مقادیر اطلاعات کاملی در مورد شرایط وجود یکنواختی در توزیع حدی احتمال در اختیار ما خواهد گذاشت. محاسبات ما و بررسی ویژه‌مقادیر نشان می‌دهند که به ازای تمام مقادیر غیر صحیح α تمام ولگشت‌های موبیوسی با هر تعداد جایگاه، توزیع حدی یکنواخت خواهند داشت. تنها یک مورد استثنا وجود دارد و آن در مورد α ‌های نیمه صحیح است که در این مورد یک نایکنواختی در مورد ولگشت‌های موبیوسی با تعداد جایگاه فرد وجود دارد، که در ادامه فصل به طور مفصل به بررسی آن خواهیم پرداخت.

بنابراین به ازای تمام α ‌هایی که $\alpha \neq \frac{N}{d}, N$ همیشه توزیع حدی یکنواخت خواهیم داشت. می‌توانیم فاصله توزیع حدی (δ) را به عنوان کمیتی در نظر بگیریم که مشخص می‌کند تغییر پارامترهای مسئله چگونه بر سرعت نزدیک شدن به توزیع حدی تاثیر می‌گذارد. δ را می‌توان به شکل زیر تعریف کرد [۶۰]:

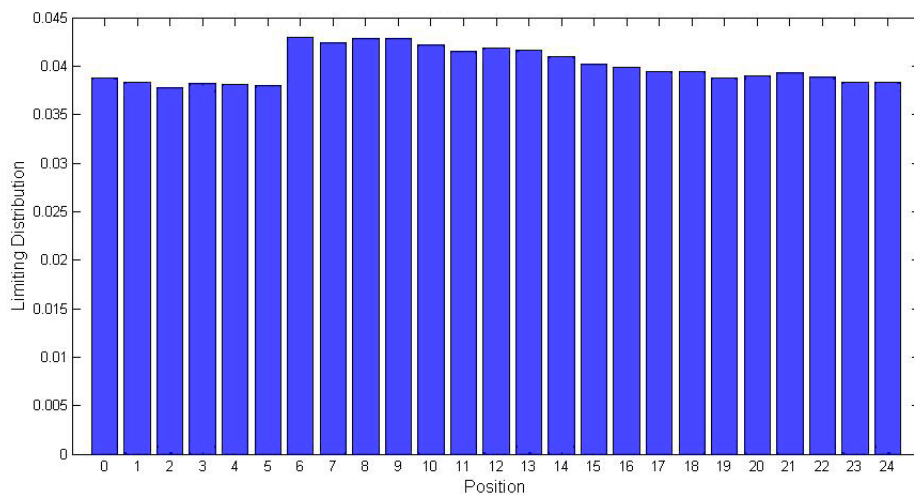
$$\delta = \frac{1}{d} \sum_{v=0}^{d-1} \left| p(v) - \frac{1}{d} \right| \quad (۴۸.۴)$$

δ فاصله کلی توزیع میانگین از توزیع یکنواخت نامیده می‌شود و برابر است با مجموع تفاوت توزیع میانگین احتمال در هر جایگاه با توزیع احتمال یکنواخت.

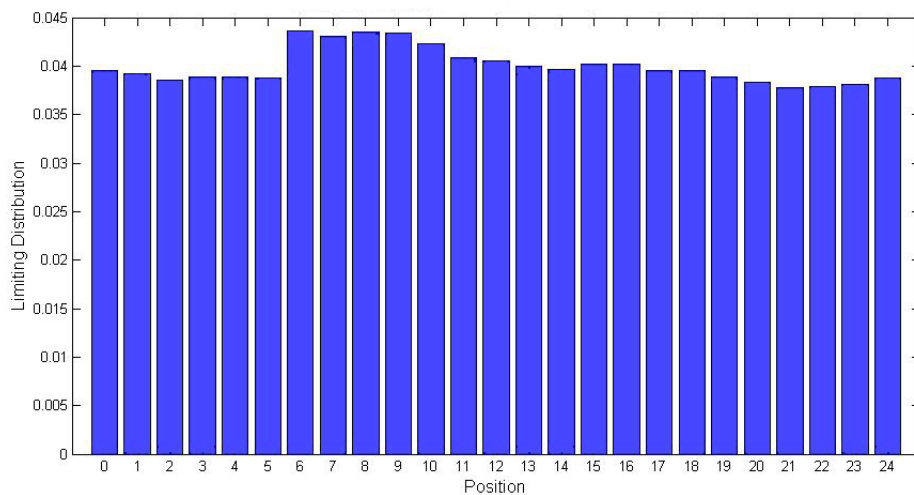
برای مقایسه میان توزیع حدی دایره و توزیع حدی موبیوسی، توزیع حدی را برای تعداد جایگاه‌های فرد ($d = ۲۵$) و $\alpha = ۰/۲$ در شکل‌های ۳.۴ و ۴.۴ رسم کرده‌ایم. تعداد جایگاه‌های فرد تضمین‌کننده این است که ولگشت دایره‌ای دارای توزیع حدی یکنواخت باشد و $\alpha = ۰/۲$ نیز یکنواختی ولگشت موبیوسی را تضمین می‌کند. نتیجه شبیه‌سازی ما نشان می‌دهد که در شرایط یکسان ($t = ۲۰۰$ و $\psi(0) = |0\rangle\langle 0|$) ولگشت روی دایره دارای $\delta = ۰/۰۲۰۸$ و ولگشت موبیوسی دارای $\delta = ۰/۰۱۷۷$ است. بنابراین تغییر پارامتر α نزدیک شدن به تابع توزیع یکنواخت را در مورد ولگشت موبیوسی تسریع می‌کند یا به عبارتی زمان آمیختگی را کاهش می‌دهد.

همان‌طور که گفته شد زمان آمیختگی تعداد گام‌هایی است که ولگشت باید بردارد تا δ در فاصله ϵ توزیع یکنواخت قرار گیرد. برای بررسی این که α چگونه بر زمان آمیختگی اثر می‌گذارد، نمودار زمان آمیختگی را برای ولگشت موبیوسی با ۲۵ جایگاه برحسب α برای $\epsilon = ۰/۵$ رسم کرده‌ایم. شکل ۵.۴

در نمودار شکل ۵.۴، ولگشت با $\alpha = ۰$ و $\alpha = ۱$ همان ولگشت کوانتومی روی چرخه هستند. مشاهده می‌شود که مدل ارائه شده برای ولگشت موبیوسی به ازای تمام مقادیر α زمان آمیختگی را بهبود بخشیده است، به جز برای $\alpha = ۰/۵$. نمودار توزیع میانگین احتمال ولگشتی با $\alpha = ۰/۵$ در شکل ۶.۴ رسم شده است. مشاهده می‌شود نمودار دارای یک قله در مبدا حرکت ولگشت است، دلیل این نایکنواختی

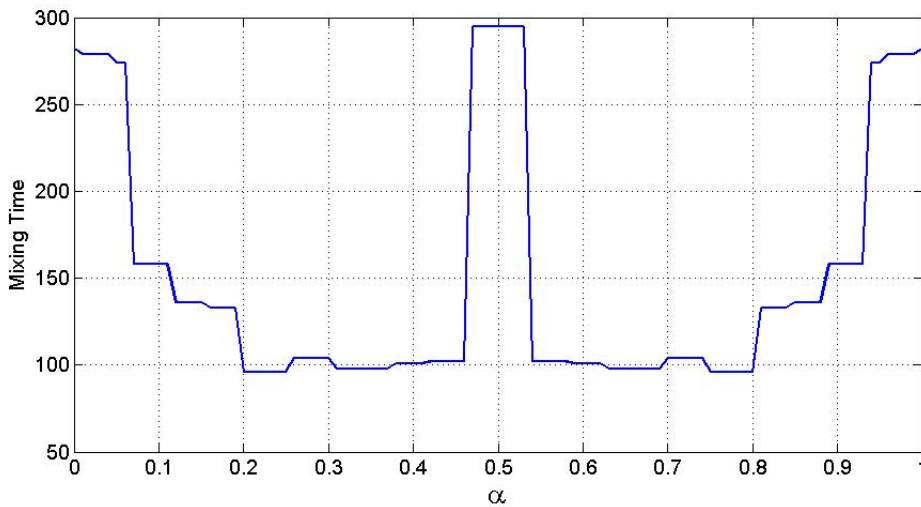


شکل ۳.۴: نمودار شبیه‌سازی توزیع حدی برای ولگشت کوانتومی روی چرخه با ۲۵ جایگاه و ۲۰۰ گام. با حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |0\rangle|5\rangle$.

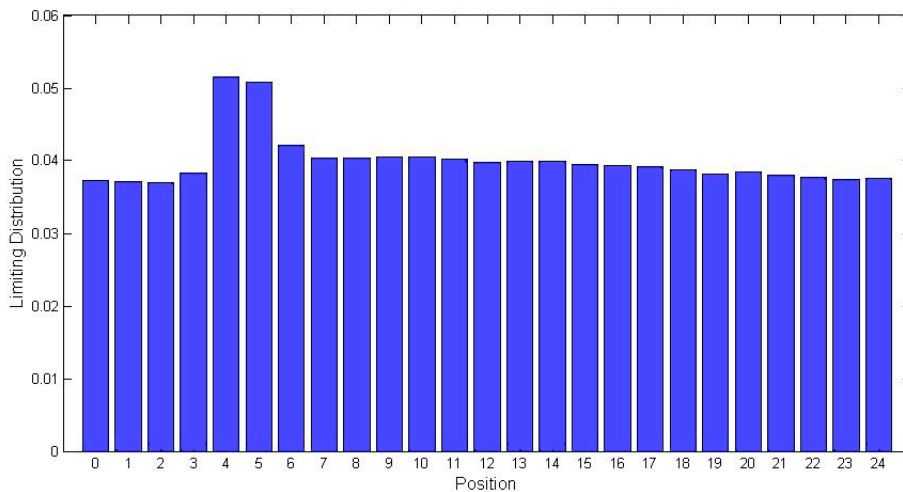


شکل ۴.۴: توزیع حدی برای ولگشت موبیوسی روی چرخه با ۲۵ جایگاه و ۲۰۰ گام. حالت اولیه با $|\psi(0)\rangle = |0\rangle|0\rangle|5\rangle$ و $\alpha = 0.2$.

شدن (همانند ولگشت کوانتومی روی دایره) به وجود آمدن تبهگنی در ویژه‌مقادیر عملگر تحول است. بعداً نشان خواهیم داد که با $\alpha = 0.5$ توزیع میانگین احتمال در تعداد جایگاه‌های فرد به یک توزیع یکنواخت میل نخواهد کرد. بنابراین محاسبه زمان آمیختگی با سنجش فاصله از توزیع یکنواخت بی‌معنی است و این افزایش در شکل ۵.۴ از این واقعیت ناشی می‌شود. نمودار توزیع میانگین احتمال ولگشتی با $\alpha = 0.5$ در شکل ۶.۴ رسم شده است. مشاهده می‌شود نمودار دارای یک قله در مبدا حرکت ولگشت است. دلیل این نایکنواخت شدن (همانند ولگشت کوانتومی روی دایره) به وجود آمدن تبهگنی در ویژه‌مقادیر عملگر تحول است.

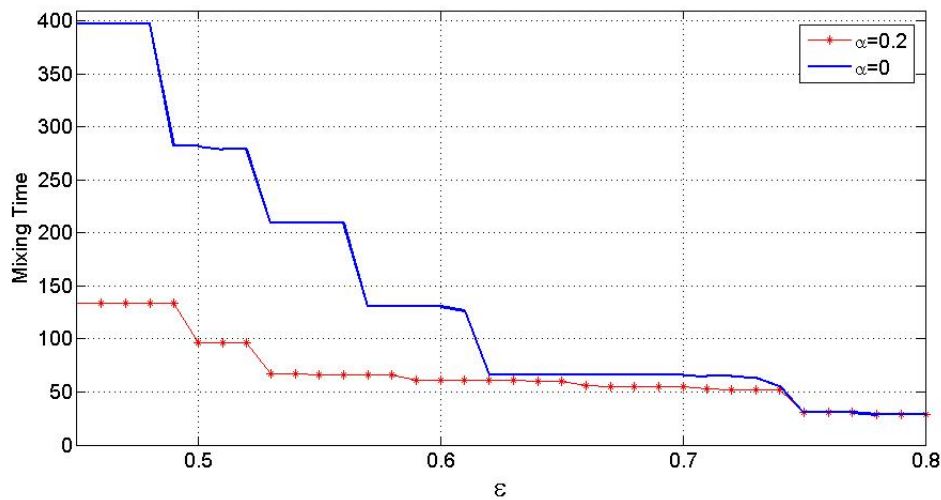


شکل ۵.۴: زمان آمیختگی بر حسب α برای ولگشت موبیوسی روی چرخه با ۲۵ جایگاه. با حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |0\rangle|0\rangle|5\rangle$ و $\epsilon = 0.5$.



شکل ۶.۴: توزیع حدی برای ولگشت موبیوسی روی چرخه با ۲۵ جایگاه و ۲۰۰ گام با حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |0\rangle|0\rangle|5\rangle$ و $\alpha = 0.5$.

شکل ۵.۴ نشان می‌دهد که $\alpha = 0.2$ بیشترین کاهش در زمان آمیختگی را ایجاد می‌کند. برای مشاهده بهتر این تاثیر زمان آمیختگی را بر حسب فاصله از توزیع یکنواخت (ϵ) برای ولگشت روی دایره ($\alpha = 0$) و ولگشت موبیوسی ($\alpha = 0.2$) رسم شده‌اند (شکل ۷.۴). این نمودار نشان می‌دهد که فاصله میان زمان آمیختگی ولگشت کوانتومی روی دایره و ولگشت موبیوسی با کاهش (ϵ) بیشتر می‌شود و این نشان‌دهنده این واقعیت است که هرچه بخواهیم با دقت بیشتری توزیع یکنواخت داشته باشیم، ولگشت موبیوسی در مقایسه با ولگشت روی دایره کاندیدای بهتری است.



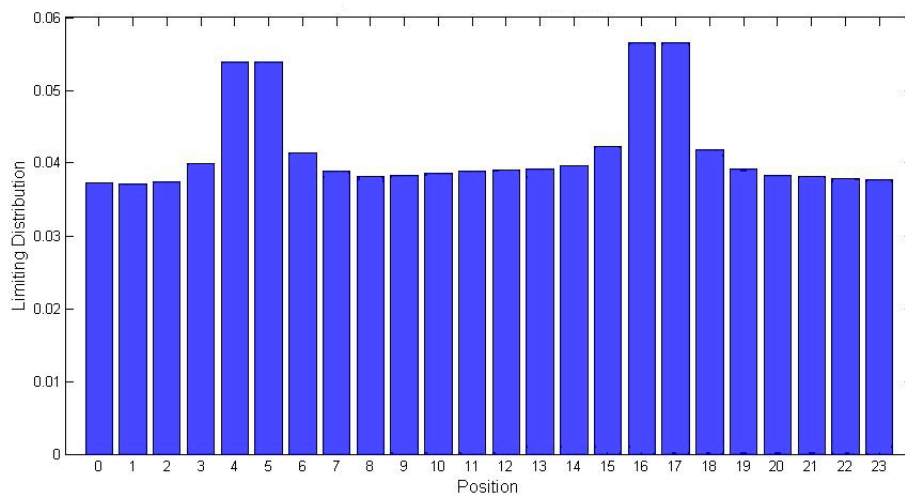
شکل ۷.۴: نمودار زمان آمیختگی بر حسب ϵ روی چرخه‌ای با ۲۵ جایگاه و ۲۰۰ گام برای ولگشت کوانتومی روی چرخه (نمودار پیوسته) با حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |0\rangle|5\rangle$ و ولگشت کوانتومی موبیوسی (نمودار نقطه-خط) با حالت اولیه به صورت $|\psi(0)\rangle = |0\rangle|0\rangle|5\rangle$.

شکل ۷.۴، زمان آمیختگی در ولگشت کوانتومی موبیوسی می‌تواند به طرز چشمگیری از ولگشت کوانتومی روی دایره بهتر باشد. البته چنین چیزی بستگی مستقیم به مقدار α انتخابی دارد، اما همان‌طور که در نمودار شکل ۵.۴ نشان داده شده است، تقریباً به ازای تمامی α ها می‌توان انتظار بهبود در این پارامتر (زمان آمیختگی) را داشت.

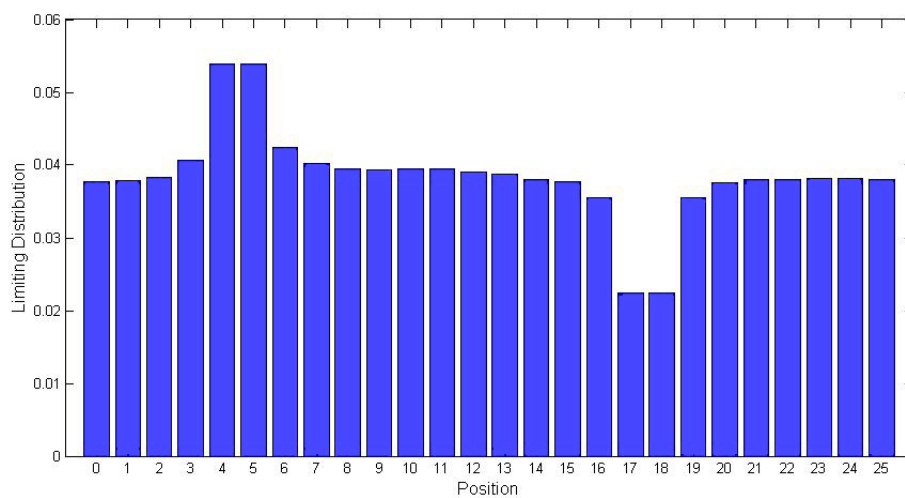
تا اینجا تنها به بررسی تعداد جایگاه‌های فرد پرداختیم. اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن‌ها تعداد جایگاه‌ها زوج است. همان‌طور که در فصل پیش اشاره شد، برای تعداد جایگاه‌های زوج، امکان دارد دو حالت پیش بیاید [۶۰]. نخست آن‌که $\frac{d}{4} = n$ که در آن، $n, d \in \mathbb{N}$ (تعداد جایگاه‌ها است) و دوم آن‌که $\frac{d}{4} = \frac{(2n+1)}{4}$. در هر دو حالت نمودار توزیع احتمال دارای دو ناهمواری است. برای حالت نخست، این ناهمواری به صورت دو تپه در مکان v و $(v + \frac{d}{4}) \bmod d$ است. اما برای حالت دوم این دو ناهمواری به صورت یک تپه در ابتدا حرکت v و یک دره در $(v + \frac{d}{4}) \bmod d$ است، شکل ۸.۴ و ۹.۴.

برای آن‌که بتوانیم تاثیر استفاده از مدل موبیوسی و تفاوت آن با ولگشت کوانتومی روی دایره را ببینیم، نمودار توزیع حدی ولگشت کوانتومی موبیوسی را هم برای دو مورد $d = 24$ و $d = 26$ رسم می‌کنیم، شکل ۱۰.۴ و ۱۱.۴.

در این شکل‌ها $\alpha = 0.5$ در نظر گرفته شده است و فرآیند برای ۵۰۰ گام تکرار شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، مدل موبیوسی ولگشت کوانتومی، نمودار توزیع حدی را یکنواخت‌تر کرده است و دو ناهمواری را که در v و $(v + \frac{d}{4}) \bmod d$ از بین برده است.

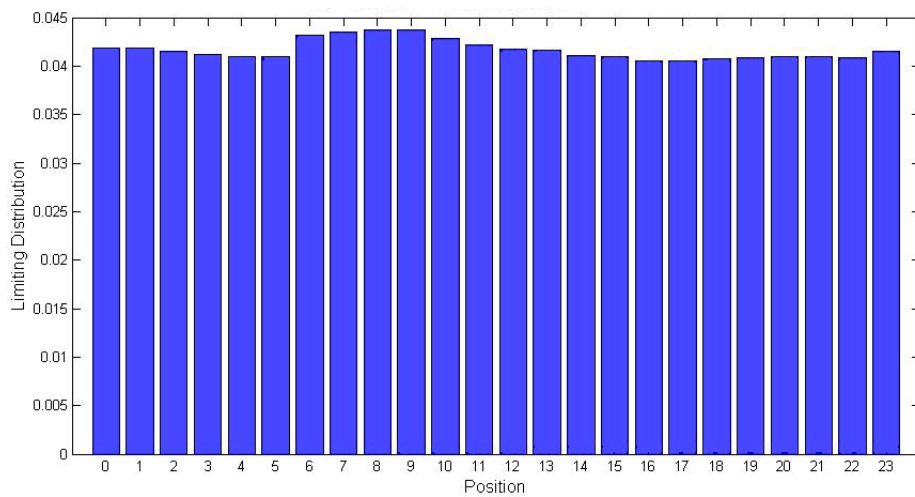


شکل ۸.۴: توزیع حدی برای ولگشت کوانتومی روی چرخه با ۲۴ جایگاه و ۵۰۰ گام با حالت اولیه $|\psi(0)\rangle$.

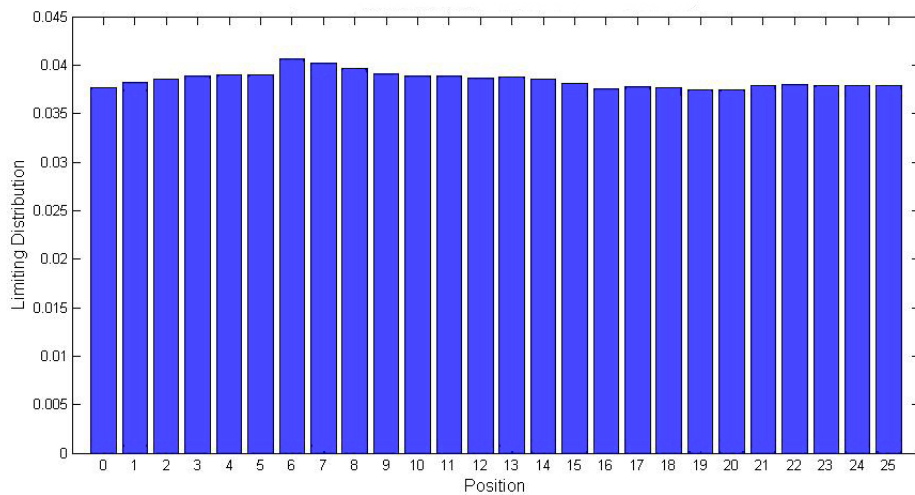


شکل ۹.۴: توزیع حدی برای ولگشت کوانتومی روی چرخه با ۲۶ جایگاه و ۵۰۰ گام با حالت اولیه $|\psi(0)\rangle$ بوده است.

نتایج شبیه‌سازی‌های ارائه شده در نمودارهای ۱۰.۴ تا ۱۱.۴، تاثیر ورود عامل تداخلی (α) را در پارامترهای مورد بررسی نشان می‌دهد. انتظار می‌رود که در ولگشت موبیوسی با ورود α ، بتوان ولگشت را طوری تعریف کرد که حالات تبهگن مشابه ولگشت کوانتومی روی چرخه ظاهر نشوند. یعنی ممکن است با انتخاب یک α مشخص حالتی پیش آید که ولگشت موبیوسی برای حالت‌های فرد به یک توزیع یکنواخت میل نکند. برای بررسی این قضیه، ابتدا توزیع میانگین احتمال را برای این ولگشت محاسبه می‌کنیم:



شکل ۱۰.۴: توزیع حدی برای ولگشت موبیوسی روی چرخه با ۲۴ جایگاه و ۵۰۰ گام با حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |5\rangle|0\rangle|0\rangle$ و $\alpha = 0.5$.



شکل ۱۱.۴: نمودار توزیع حدی برای ولگشت موبیوسی روی چرخه با ۲۶ جایگاه و ۵۰۰ گام. حالت اولیه به صورت $|\psi(0)\rangle = |5\rangle|0\rangle|0\rangle$ بوده است و $\alpha = 0.5$; $\delta = 0.087$.

$$\bar{p}_v(T) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{\rho=0}^1 \sum_{b=0}^1 |\langle \rho, b, v | \psi(t) \rangle|^2 \quad (49.4)$$

که در آن:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{r=0}^1 \sum_{s=0}^1 \sum_{k=0}^{N-1} C_{r,s,k} e^{i\pi\lambda_{r,s,k}t} |\lambda_{r,s,k}\rangle \quad (50.4)$$

$C_{r,s,k}$ ها ضرایب بسط کت حالت اولیه ولگشت در پایه‌ها عملگر تحول هستند. با استفاده از ۴۹.۴ و ۵۰.۴:

$$\begin{aligned} \bar{p}_v(T) &= \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{b=0}^1 \sum_{\rho=0}^1 \left| \sum_{r=0}^1 \sum_{s=0}^1 \sum_k^{N-1} C_{r,s,k} e^{i\pi \lambda_{r,s,k} t} \langle \rho, b, v \mid \lambda_{r,s,k} \rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{\rho=0}^1 \sum_{b=0}^1 \sum_{r=0}^1 \sum_{s=0}^1 \sum_k^{N-1} \sum_{r'=0}^1 \sum_{s'=0}^1 \sum_{k'}^{N-1} C_{r,s,k} C_{r',s',k'} \\ &\quad \times \langle \rho, b, v \mid \lambda_{r,k,s} \rangle \langle \lambda_{r',s',k'} \mid r, b, v \rangle e^{i\pi(\lambda_{r,s,k} - \lambda_{r',s',k'})t} \quad (51.4) \\ &= \sum_{\rho,r,r'}^1 \sum_{b,s,s'=0}^1 \sum_{k,k'=0}^{N-1} C_{r,s,k} C_{r',s',k'} \langle \rho, b, v \mid \lambda_{r,s,k} \rangle \langle \lambda_{r',s',k'} \mid \rho, b, v \rangle \\ &\quad \times \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} e^{i\pi(\lambda_{r,s,k} - \lambda_{r',s',k'})t} \end{aligned}$$

با توجه به این که توزیع حدی به شکل زیر تعریف می‌شود [۵۹]:

$$\pi(v) = \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{p}_v(T) \quad (52.4)$$

و تنها جمله وابسته به زمان در ۵۱.۴ $\frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} e^{i\pi(\lambda_{r,s,k} - \lambda_{r',s',k'})t}$ است، با محاسباتی نظیر آن چه در ۴۴.۳ تا ۵۴.۳ انجام گرفت، می‌توان نتیجه گرفت در ولگشت موبیوسی همانند ولگشت روی چرخه، اگر ویژه‌مقادیر متمایز باشند، توزیع حدی یکنواخت خواهد بود:

$$\pi(v) = \frac{1}{N} \quad (53.4)$$

بنابراین در ولگشت موبیوسی هم زمانی که ویژه‌مقادیر متمایز هستند، توزیع حدی یکنواخت خواهد بود. همان‌طور که در مورد ولگشت کوانتومی روی دایره دیدیم، توزیع حدی هنگامی که ویژه‌مقادیر غیرتبهگن بودند به صورت یکنواخت بود. از طرفی در ولگشت کوانتومی روی دایره، ویژه‌مقادیر برای تعداد جایگاه‌های فرد متمایز و نابرابر هستند و برای تعداد جایگاه‌های زوج، برابری ویژه‌مقادیر و در نتیجه تبهگنی خواهیم داشت که نتیجه آن یک توزیع نایکنواخت (علی‌رغم وجود توزیع حدی) خواهد بود. اما در ولگشت موبیوسی (همان‌طور که در ادامه خواهیم دید)، شرط یکنواختی (نایکنواختی) توزیع حدی فرد (زوج) بودن تعداد جایگاه‌ها نیست و دلیل آن، همان‌طور که پیش‌تر گفته شد، وجود عامل α است. اکنون به بررسی ویژه‌مقادیر ولگشت موبیوسی می‌پردازیم تا ببینیم تبهگنی در چه شرایطی بروز می‌کند.

از ۳۴.۴ درمی یابیم که ویژه مقادیر در چهار حالت مختلف می توانند با هم برابر باشند:

$$\text{۱ یکی از شرایطی که تبهگنی در آن بروز می کند، شرط زیر است:} \\ \sin\left(\frac{2\pi k}{d} - \frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{2\pi k'}{d} - \frac{\theta}{2}\right) \quad (۵۴.۴)$$

این شرط به دو صورت ممکن است ارضا شود که هر کدام نمایانگر تبهگنی خاص خود می باشد. حالت اول هنگامی که $\frac{2\pi k}{d}$ در ربع اول و $\frac{2\pi k'}{d}$ در ربع دوم باشد، شکل ۱۲.۴.

$$\frac{2\pi k}{d} - \frac{\theta}{2} = \pi - \left(\frac{2\pi k'}{d} - \frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \frac{2\pi k}{d} = \pi - \frac{2\pi k'}{d} + \theta \Rightarrow \\ k = \frac{d}{2} + \frac{\theta d}{2\pi} - k' \xrightarrow{\theta = \frac{2\pi\alpha}{d}} k = \left(\frac{d}{2} + \alpha\right) - k'$$

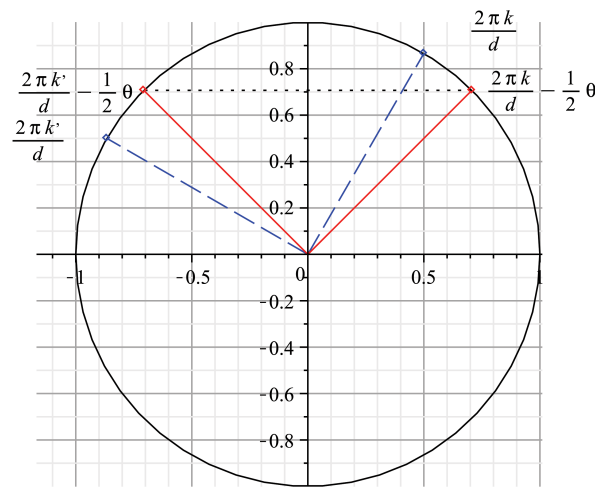
حالت دوم هنگامی که $\frac{2\pi k}{d}$ در ربع سوم و $\frac{2\pi k'}{d}$ در ربع چهارم باشد. شکل ۱۳.۴:

$$\frac{2\pi k}{d} - \frac{\theta}{2} - \pi = 2\pi - \left(\frac{2\pi k'}{d} - \frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \frac{2\pi k}{d} = 3\pi - \frac{2\pi k'}{d} + \theta \Rightarrow \\ k = \frac{3d}{2} + \frac{\theta d}{2\pi} - k' \xrightarrow{\theta = \frac{2\pi\alpha}{d}} k = \left(\frac{3d}{2} + \alpha\right) - k'$$

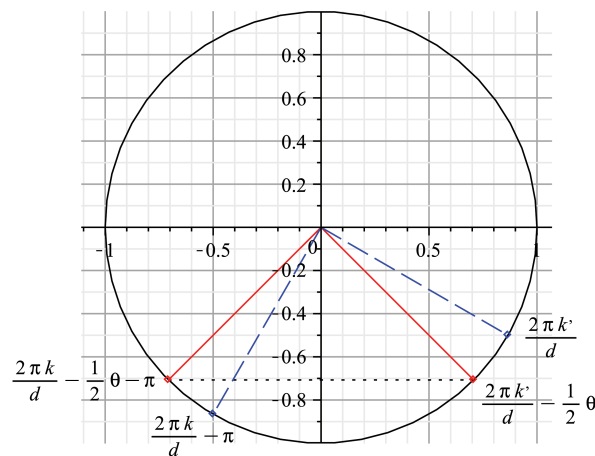
با توجه به روابط به دست آمده و شکل های ۱۲.۴ و ۱۳.۴، بر خلاف ولگشت روی دایره، در ولگشت موبیوسی k نمی تواند به تنهایی مکان وقوع تبهگنی را نشان دهد و برای تعیین مکان تبهگنی روی دایره مثلثاتی، به α هم نیاز داریم.

$$\text{۲ دومین شرطی که تبهگنی در آن بروز می کند} \\ \sin\left(\frac{2\pi k}{d} + \frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{2\pi k'}{d} + \frac{\theta}{2}\right) \quad (۵۵.۴)$$

است. برای این شرط هم دو صورت ممکن قابل تصور است. حالت اول هنگامی که $\frac{2\pi k}{d}$ در ربع اول و $\frac{2\pi k'}{d}$ در ربع دوم باشد، شکل ۱۴.۴:



شکل ۱۲.۴: شرط تبهگنی برای ولگشت کوانتومی موبیوسی در یک چهارم اول و دوم؛ خط چین ویژه مقدار ولگشت کوانتومی روی دایره را نشان می‌دهد که به اندازه $\frac{\alpha\pi}{d}$ از ولگشت موبیوسی پیش است.



شکل ۱۳.۴: شرط تبهگنی برای ولگشت کوانتومی موبیوسی در یک چهارم سوم و چهارم؛ خط چین ویژه مقدار ولگشت کوانتومی روی دایره را نشان می‌دهد که به اندازه $\frac{\alpha\pi}{d}$ از ولگشت موبیوسی پیش است.

$$\frac{2\pi k}{d} + \frac{\theta}{2} = \pi - \left(\frac{2\pi k'}{d} + \frac{\theta}{2} \right) \Rightarrow \frac{2\pi k}{d} = \pi - \frac{2\pi k'}{d} - \theta \Rightarrow$$

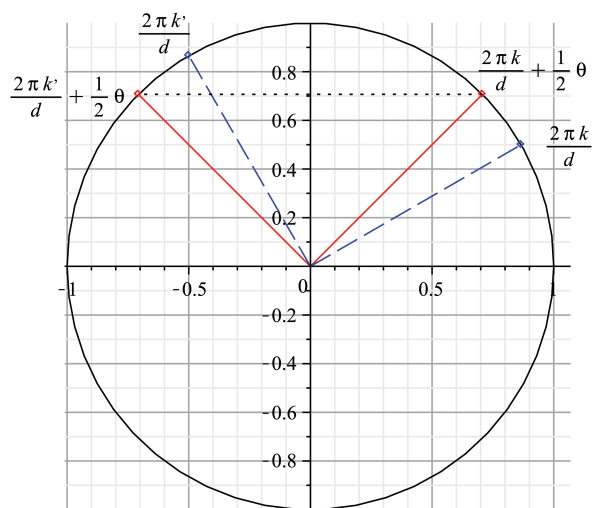
$$k = \frac{d}{2} - \frac{\theta d}{4\pi} - k' \xrightarrow{\theta = \frac{2\pi\alpha}{d}} k = \left(\frac{d}{2} - \alpha \right) - k'$$

حالت دوم هنگامی که $\frac{2\pi k}{d}$ در ربع سوم و $\frac{2\pi k'}{d}$ در ربع چهارم باشد، شکل ۱۵.۴:

$$\frac{\gamma \pi k}{d} + \frac{\theta}{\gamma} - \pi = 2\pi - \left(\frac{\gamma \pi k'}{d} + \frac{\theta}{\gamma} \right) \Rightarrow \frac{\gamma \pi k}{d} = 3\pi - \frac{\gamma \pi k'}{d} - \theta \Rightarrow$$

$$k = \frac{\gamma d}{\gamma} - \frac{\theta d}{\gamma \pi} - k' \xrightarrow{\theta = \frac{\gamma \pi \alpha}{d}} k = \left(\frac{\gamma d}{\gamma} - \alpha \right) - k'$$

آنچه برای این نوع از شرایط تبهگنی به دست آمده، به جز یک علامت منفی برای α ، مشابه نوع اول شرایط تبهگنی است.

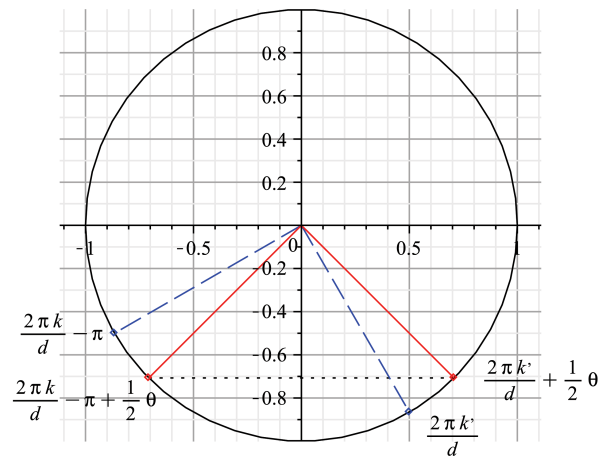


شکل ۱۴.۴: شرط تبهگنی برای ولگشت کوانتومی موبیوسی در یک چهارم اول و دوم؛ خط چین ویژه مقدار ولگشت کوانتومی روی دایره را نشان می‌دهد که به اندازه $\frac{\alpha \pi}{d}$ از ولگشت موبیوسی عقب است.

۳ یکی دیگر از شرایطی که می‌توان برای بروز تبهگنی در نظر گرفت، عبارت است از:

$$\sin \left(\frac{\gamma \pi k}{d} - \frac{\theta}{\gamma} \right) = \sin \left(\frac{\gamma \pi k'}{d} + \frac{\theta}{\gamma} \right) \quad (۵۶.۴)$$

حالت اول هنگامی است که $\frac{\gamma \pi k}{d}$ در ربع اول و $\frac{\gamma \pi k'}{d}$ در ربع دوم باشد، شکل ۱۶.۴:



شکل ۱۵.۴: شرط تبهگنی برای ولگشت کوانتومی موبیوسی در یک چهارم سوم و چهارم؛ خط چین ویژه مقدار ولگشت کوانتومی روی دایره را نشان می‌دهد که به اندازه $\frac{\alpha\pi}{d}$ از ولگشت موبیوسی عقب است.

$$\frac{2\pi k}{d} - \frac{\theta}{2} = \pi - \left(\frac{2\pi k'}{d} + \frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \frac{2\pi k}{d} = \pi - \frac{2\pi k'}{d} \Rightarrow k = \frac{d}{2} - k'$$

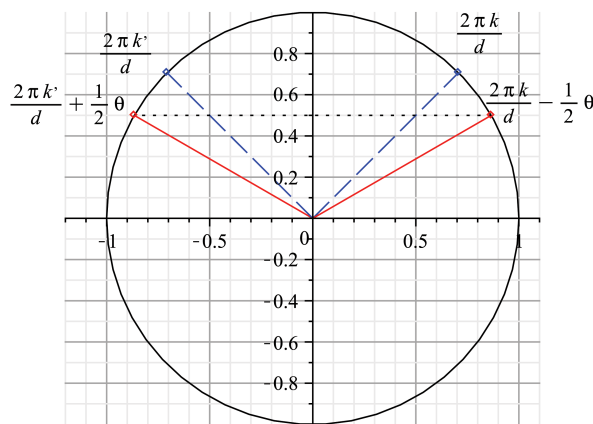
حالت دوم هنگامی که $\frac{2\pi k}{d}$ در ربع سوم و $\frac{2\pi k'}{d}$ در ربع چهارم باشد، شکل ۱۷.۴:

$$\frac{2\pi k}{d} - \frac{\theta}{2} - \pi = 2\pi - \left(\frac{2\pi k'}{d} + \frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \frac{2\pi k}{d} = 3\pi - \frac{2\pi k'}{d} \Rightarrow k = \frac{3d}{2} - k'$$

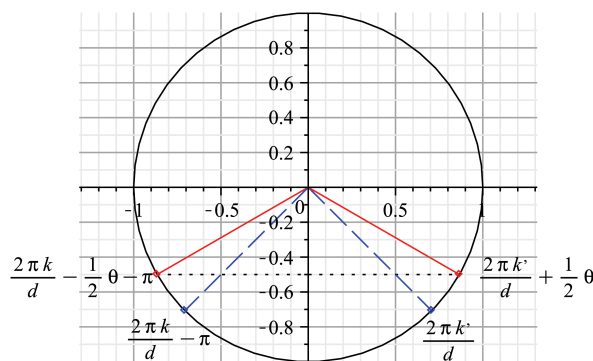
آنچه از این شرط به دست می‌آید همان نتیجه‌ای است که برای تبهگنی ولگشت کوانتومی روی چرخه (۵۸.۳) به دست آمد.

۴ آخرین شرط از این نوع برای تعیین تبهگنی ویژه‌مقادیر ولگشت موبیوسی را می‌توان به این صورت در نظر گرفت:

$$\sin\left(\frac{2\pi k}{d} + \frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{2\pi k'}{d} - \frac{\theta}{2}\right) \quad (۵۷.۴)$$



شکل ۱۶.۴: شرط تبهگنی برای ولگشت کوانتومی موبیوسی در یک چهارم اول و دوم؛ خطچین ویژه مقدار ولگشت کوانتومی روی دایره را نشان می‌دهد که به اندازه $\frac{\alpha\pi}{d}$ با ولگشت موبیوسی اختلاف دارد. ویژه‌مقادیر ولگشت موبیوسی در دو طرف ولگشت روی چرخه افتاده‌اند.



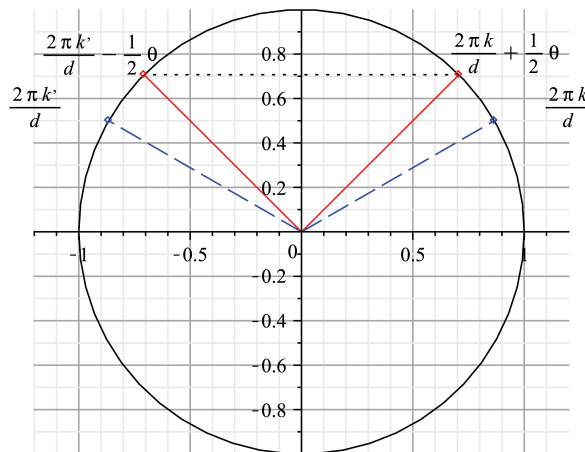
شکل ۱۷.۴: شرط تبهگنی برای ولگشت کوانتومی موبیوسی در یک چهارم سوم و چهارم؛ خطچین ویژه مقدار ولگشت کوانتومی روی دایره را نشان می‌دهد که به اندازه $\frac{\alpha\pi}{d}$ با ولگشت موبیوسی اختلاف دارد. ویژه‌مقادیر ولگشت موبیوسی در دو طرف ویژه مقادیر ولگشت کوانتومی روی چرخه افتاده‌اند.

حالت اول هنگامی است که $\frac{2\pi k}{d}$ در ربع اول و $\frac{2\pi k'}{d}$ در ربع دوم باشد، شکل ۱۸.۴:

$$\frac{\sqrt{2}\pi k}{d} + \frac{\theta}{\sqrt{2}} = \pi - \left(\frac{\sqrt{2}\pi k'}{d} - \frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}\pi k}{d} = \pi - \frac{\sqrt{2}\pi k'}{d} \Rightarrow k = \frac{d}{\sqrt{2}} - k'$$

حالت دوم هنگامی که $\frac{\sqrt{2}\pi k}{d}$ در ربع سوم و $\frac{\sqrt{2}\pi k'}{d}$ در ربع چهارم باشد، شکل ۱۹.۴:

$$\frac{\sqrt{2}\pi k}{d} + \frac{\theta}{\sqrt{2}} - \pi = \sqrt{2}\pi - \left(\frac{\sqrt{2}\pi k'}{d} - \frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{2}\pi k}{d} = \sqrt{2}\pi - \frac{\sqrt{2}\pi k'}{d} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{2}d}{\sqrt{2}} - k'$$

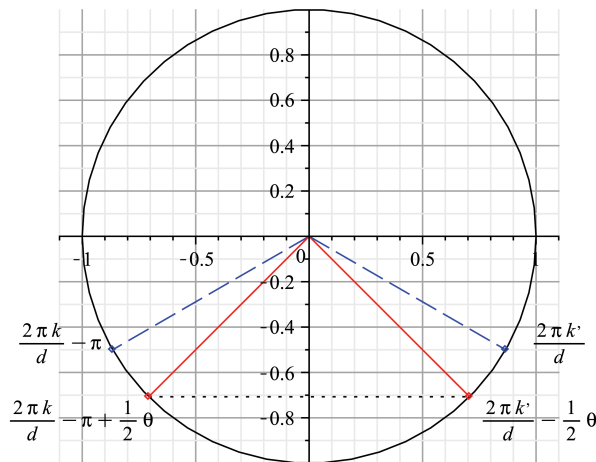


شکل ۱۸.۴: شرط تبهگنی برای ولگشت کوانتومی موبیوسی در یک چهارم اول و دوم؛ خط چین ویژه مقدار ولگشت کوانتومی روی دایره است که به اندازه $\frac{\alpha\pi}{d}$ در دو سوی ولگشت موبیوسی افتاده‌اند.

شرایط تبهگنی را در ولگشت موبیوسی می‌توانیم به صورت زیر فشرده کنیم:

$$\begin{cases} k = \left(\frac{d}{\sqrt{2}} \pm \alpha\right) - k' \\ k = \left(\frac{\sqrt{2}d}{\sqrt{2}} \pm \alpha\right) - k' \end{cases} \quad \alpha \in R \quad (58.4)$$

از آن جا که k و k' اعداد صحیح هستند، شرط برقراری معادلات ۵۸.۴ آن است که $\frac{d}{\sqrt{2}} \pm \alpha$ و $\frac{\sqrt{2}d}{\sqrt{2}} \pm \alpha$ برابر با یک عدد صحیح شوند. به بیان دیگر در ولگشت موبیوسی، زمانی تبهگنی وجود دارد که $\frac{d}{\sqrt{2}} \pm \alpha$ و $\frac{\sqrt{2}d}{\sqrt{2}} \pm \alpha$ برابر با اعداد صحیح شوند. و نتیجه چنین تبهگنی، نایکنواختی توزیع حدی خواهد بود. پس به این نتیجه می‌رسیم که برخلاف ولگشت روی چرخه، در ولگشت موبیوسی، زوج یا



شکل ۱۹.۴: شرط تبهگنی برای ولگشت کوانتومی موبیوسی در یک چهارم سوم و چهارم؛ خط چین ویژه مقدار ولگشت کوانتومی روی دایره است که به اندازه $\frac{\alpha\pi}{d}$ در دو سوی ولگشت موبیوسی افتاده‌اند.

فرد بودن تعداد جایگاه‌ها، به تنهایی در یکنواختی یا نایکنواختی توزیع تعیین کننده نخواهد بود و باید عاملی چون α را هم در این زمینه به حساب آورد. اکنون به بررسی α پرداخته و اثر آن را بر تبهگنی بررسی می‌کنیم. از روابطی که برای تبهگنی به دست آوردیم (۵۸.۴)، می‌رسیم به:

$$\left. \begin{aligned} \underbrace{k + k'}_{\Lambda} &= \left(\frac{d}{\psi} \pm \alpha\right) \\ \underbrace{\Lambda}_{k + k'} &= \left(\frac{\psi d}{\psi} \pm \alpha\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \Lambda = \frac{d}{\psi} \pm \alpha \\ \Lambda = \frac{\psi d}{\psi} \pm \alpha \end{cases} \quad (59.4)$$

برای آن که تبهگنی نداشته باشیم، باید Λ وجود نداشته باشد. k و k' اعداد طبیعی هستند، بنابراین Λ هم یک عدد صحیح است. اکنون بر d تمرکز می‌کنیم. برای d (که خود یک عدد طبیعی است) دو حالت می‌توان در نظر گرفت. یکی آن‌که زوج باشد و دیگری آن‌که فرد باشد. اگر d زوج باشد، $\frac{d}{\psi}$ یک عدد صحیح خواهد بود، پس حتماً $\frac{\psi d}{\psi}$ نیز یک عدد صحیح است. پس تنها کافی است که α یک عدد غیر صحیح باشد تا هیچ یک از روابط ۵۹.۴ برقرار نباشند و تبهگنی نداشته باشیم:

$$\begin{cases} \Lambda = \frac{d}{\psi} \pm \alpha \\ \Lambda = \frac{\psi d}{\psi} \pm \alpha \end{cases} \quad d = 2n; \alpha \notin R \quad (60.4)$$

اما اگر d فرد باشد، آن‌گاه می‌توانیم روابط ۵۹.۴ را به این صورت بنویسیم:

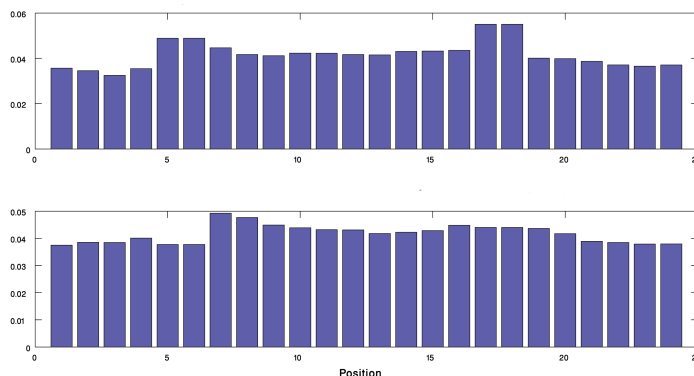
$$\begin{cases} \Lambda = \frac{d \pm 1}{p} \mp \frac{1}{p} \pm \alpha \\ \Lambda = \frac{3d \pm 1}{p} \mp \frac{1}{p} \pm \alpha \end{cases} \quad (۶۱.۴)$$

در رابطه ۶۱.۴ $\frac{d \pm 1}{p}$ و $\frac{3d \pm 1}{p}$ (به دلیل آن که d فرد است) اعدادی صحیح خواهند بود. بنابراین می‌توانیم تنها قسمت $\mp \frac{1}{p} \pm \alpha$ را در نظر بگیریم. روشن است که اگر α ضریب فرد $\frac{1}{p}$ باشد این بخش نیز عددی صحیح خواهد بود. پس می‌توان گفت که تنها شرط لازم برای آن که به ازای d های فرد تبهگنی داشته باشیم آن است که α ضریب فرد $\frac{1}{p}$ باشد. بنابراین نتیجه آن می‌شود که: برای آن که در ولگشت موبیوسی تبهگنی نداشته باشیم و در نتیجه توزیع حدی یکنواخت باشد:

اگر تعداد جایگاه‌ها d زوج باشد: α نباید یک عدد صحیح باشد ($\alpha \notin R$)

اگر تعداد جایگاه‌ها d فرد باشد: α نباید ضریب فرد $\frac{1}{p}$ باشد.

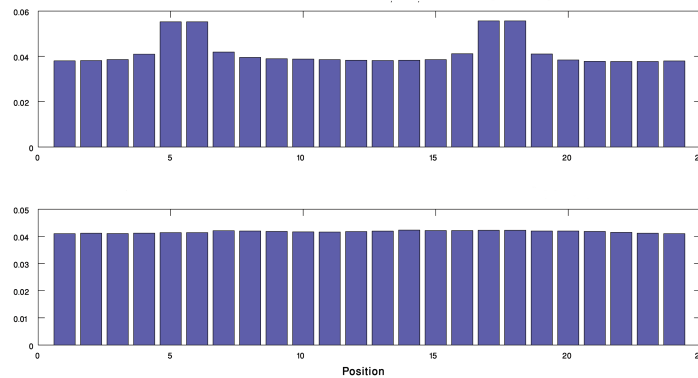
می‌توانیم نتایج به دست آمده را از طریق شبیه‌سازی بسنجیم. شکل ۲۰.۴ نمودار توزیع حدی را برای دو ولگشت با ۲۴ (تعداد زوج) جایگاه نشان می‌دهد که ۱۰۰ گام را برداشته‌اند. مقدار α برای یکی از ولگشت‌ها ۲ و برای دیگری $\frac{1}{3}$ بوده است.



شکل ۲۰.۴: ولگشت کوانتومی با ۲۴ جایگاه و ۱۰۰ گام؛ بالا: $\alpha = 2$. پایین: $\alpha = \frac{1}{3}$.

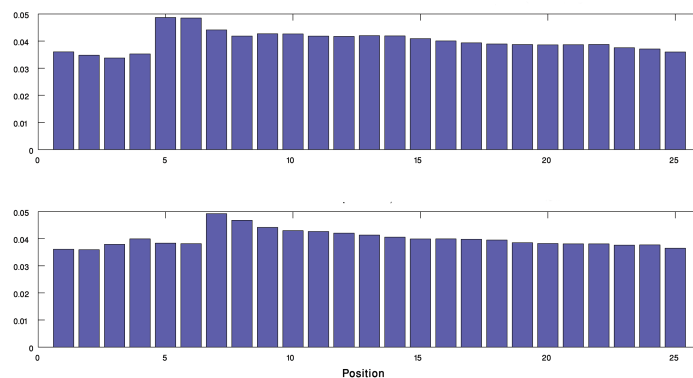
همان‌طور که روابط به دست آمده نشان داده بودند، نمودار توزیع حدی برای ولگشتی که در آن $\alpha \notin R$ یکنواخت تر است. علاوه بر این که در ولگشت با $\alpha = \frac{1}{3}$ توزیع یکنواخت تر شده است، دو تپه‌ای که در ولگشت با $\alpha = 2$ ظاهر شده بودند نیز صاف شده‌اند. البته همان‌طور که پیش‌تر در تعریف توزیع حدی گفته شد، نمودار توزیع میانگین احتمال هرچقدر تعداد گام‌ها بیشتر باشد، بیشتر به توزیع حدی نزدیک

می‌شود. این یعنی برای تعداد گام‌های بیشتر، نمودار توزیع حدی برای ولگشت با مقدار α غیرصحیح ($\alpha \notin R$) توزیع میانگین احتمال یکنواخت‌تری ایجاد می‌کند و تفاوت این یکنواختی با حالت دارای تبهگنی ($\alpha \in R$) چشمگیرتر خواهد بود. در شکل ۲۱.۴ دو نمودار توزیع حدی برای دو ولگشت با ۲۴ جایگاه و ۱۰۰۰ گام و $\alpha = ۲$ و $\alpha = ۰/۳$ برای مقایسه با شکل ۲۰.۴ رسم شده است. یکنواخت تر بودن نمودار توزیع حدی برای ولگشت‌های دارای α غیرصحیح، آشکار است.



شکل ۲۱.۴: ولگشت کوانتومی با ۲۴ جایگاه و ۱۰۰۰ گام؛ بالا: $\alpha = ۲$. پایین: $\alpha = ۰/۳$.

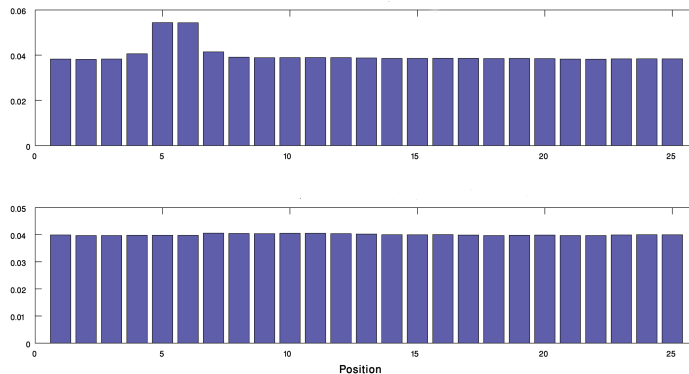
شکل نمودار توزیع حدی برای ولگشت‌های با تعداد فرد جایگاه هم بررسی شده است. در شکل ۲۲.۴ نمودار توزیع حدی برای دو ولگشت موبیوسی با ۲۵ (تعداد فرد) جایگاه، و $\alpha = ۰/۵$ و $\alpha = ۰/۲$ رسم شده است.



شکل ۲۲.۴: ولگشت کوانتومی با ۲۵ جایگاه و ۱۰۰ گام؛ بالا: $\alpha = ۰/۵$. پایین: $\alpha = ۰/۲$.

همان‌طور که از شروط به دست آمده داریم، نمودار توزیع حدی برای ولگشت با $\alpha = ۰/۲$ (α ضریب فرد $\frac{1}{2}$ نیست) باید نسبت به ولگشت با $\alpha = ۰/۵$ (که ضریب فرد $\frac{1}{5}$ است) یکنواخت‌تر باشد. شکل ۲۲.۴ این واقعیت را تایید می‌کند.

می‌توان دید که در تعداد گام‌های زیاد، تفاوت میان انتخاب دو α چشمگیرتر خواهد شد، شکل ۲۳.۴. همان‌طور که دیده می‌شود، انتخاب یک α که از وقوع تبهگنی پیشگیری کند، می‌تواند منجر به رسیدن به یک توزیع یکنواخت شود. در شکل ۲۳.۴ دیده می‌شود که به ازای $\alpha = 0.5$ در مبدا حرکت یک تپه ایجاد شده است. وجود این تپه باعث می‌شود تا توزیع حدی این ولگشت یکنواخت نباشد. بنابراین هرچقدر هم که تعداد گام‌ها را افزایش دهیم به توزیع یکنواخت نخواهیم رسید.



شکل ۲۳.۴: ولگشت کوانتومی با ۲۵ جایگاه و ۱۰۰۰ گام؛ بالا: $\alpha = 0.5$. پایین: $\alpha = 0.2$.

ارائه این دو شبیه‌سازی تایید عملی شروطی هستند که از روی ویژه‌مقادیر ولگشت موبیوسی، برای عدم تبهگنی و ایجاد توزیع یکنواخت تعیین کرده بودیم. اکنون می‌توان از شروط به دست آمده برای ایجاد توزیع‌های یکنواخت بهره برد و بسته به مورد مساله، مدلی از ولگشت موبیوسی را ارائه کرد که رسیدن به توزیع یکنواخت و از این طریق، پوشش یکنواخت‌تر جایگاه‌ها را امکان‌پذیر سازد.

۴.۴ درهم‌تنیدگی در حالت اولیه

تا کنون در ولگشت موبیوسی تنها با حالت‌های جدایی‌پذیر سروکار داشتیم، اما می‌توانیم حالت‌هایی را هم در نظر بگیریم که میان فضای اسپینی (χ) و چرخشی (R) درهم‌تنیدگی^۱ داشته باشیم. از آنجایی که چرخش در فضای R متاثر از فضای سکه است، درهم‌تنیدگی میان این دو فضا، چرخش و تغییر در فضای سکه را به هم مرتبط می‌سازد. بنابراین بررسی تاثیر درهم‌تنیدگی بین این دو زیرفضا می‌تواند مفید و نتایج آن پر اهمیت باشد. در این بخش، تاثیر درهم‌تنیدگی را بر توزیع حدی مورد بررسی قرار می‌دهیم. نتایج شبیه‌سازی ما نشان داده‌اند که وجود درهم‌تنیدگی در حالت اولیه (میان سکه و چرخش) موجب یکنواخت‌تر شدن توزیع حدی می‌شود.

برای بررسی کمی این تاثیر حالت درهم‌تنیده زیر را در نظر می‌گیریم:

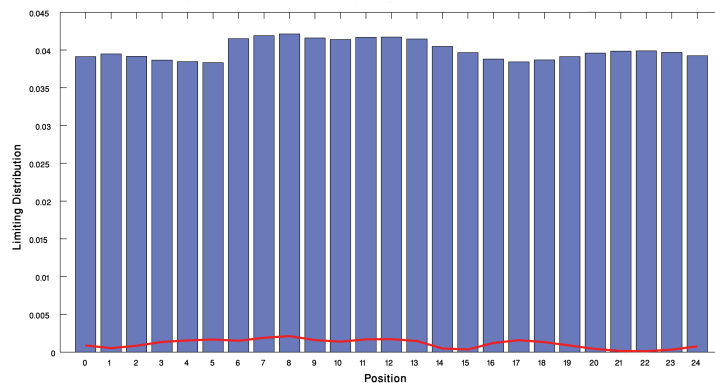
$$|\chi R\rangle = \cos \gamma |00\rangle + \sin \gamma |11\rangle \quad (۶۲.۴)$$

^۱Entanglement

که قدرت درهم‌تنیدگی با پارامتر γ مشخص می‌شود. برای مثال بیشینه در هم‌تنیدگی در آن به ازای $\gamma = \frac{\pi}{4}$ روی می‌دهد ($\beta_{00} = \frac{00+11}{\sqrt{2}}$). بنابراین حالت اولیه را می‌توانیم به این شکل بنویسیم:

$$|\psi\rangle = |\chi R\rangle \otimes |x\rangle \quad (۶۳.۴)$$

که درهم‌تنیدگی (جدایی‌ناپذیر بودن) حالت اسپینی و چرخشی را نشان می‌دهد. اکنون نمودار توزیع حدی را برای ولگشت موبیوسی به ازای $\gamma = 0$ (که همان حالت جدایی‌پذیر است) و $\gamma = \frac{\pi}{4}$ (یعنی بیشینه درهم‌تنیدگی) رسم می‌کنیم. در ولگشتی که برای رسم این نمودارها انتخاب می‌کنیم، $\alpha = 0.2$ در نظر می‌گیریم. زیرا می‌دانیم که برای $\alpha = 0.2$ نمودار توزیع حدی یکنواخت است (زمان آمیختگی کمینه است) و به این ترتیب می‌توانیم میزان بهبود در یکنواخت شدن توزیع حدی را بررسی کنیم. شکل ۲۴.۴ نمودار توزیع حدی را برای ولگشت موبیوسی با $\gamma = 0$ و 300 گام نشان می‌دهد.

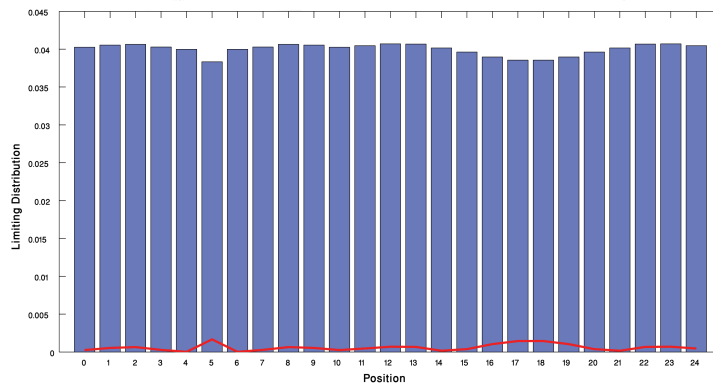


شکل ۲۴.۴: ولگشت موبیوسی با ۲۵ جایگاه، 300 گام و حالت اولیه جدایی‌پذیر $|\psi\rangle = |\chi R\rangle \otimes |x\rangle$ ($\gamma = 0$) و $\alpha = 0.2$. خط رسم شده فاصله از توزیع یکنواخت را در هر جایگاه نشان می‌دهد. $\delta \simeq 0.14$.

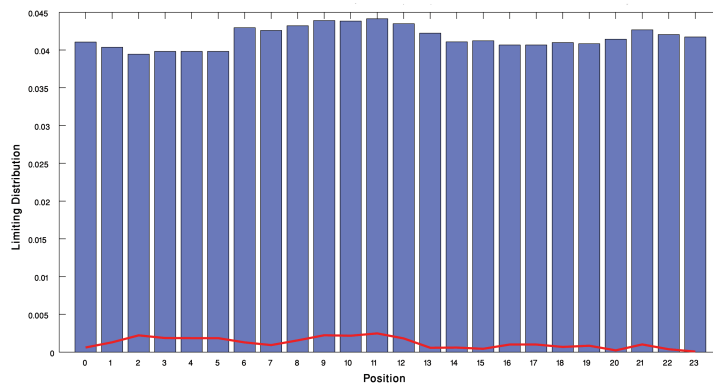
اگر نمودار توزیع حدی را برای ولگشت موبیوسی (که شرایط آن دقیقاً همانند همین ولگشت است و تنها برای آن $\gamma = \frac{\pi}{4}$ است) رسم کنیم، می‌توانیم میزان بهبود در فاصله کل از توزیع یکنواخت (δ) را بررسی کنیم، شکل ۲۵.۴.

از مقایسه شکل‌های ۲۴.۴ و ۲۵.۴ می‌توان نتیجه گرفت که وجود درهم‌تنیدگی موجب بهبودی 50% درصدی در فاصله کلی از توزیع یکنواخت شده است.

برای یک حالت زوج هم می‌توان تاثیر درهم‌تنیدگی را بررسی کرد. از بخش پیش می‌دانیم که نمودار توزیع حدی برای ولگشت موبیوسی با تعداد زوج جایگاه، به ازای α های غیر صحیح یکنواخت است. شکل ۲۶.۴ و ۲۷.۴ توزیع حدی یک ولگشت موبیوسی با ۲۴ جایگاه، 300 گام و $\alpha = 0.2$ را برای $\gamma = 0$ و $\gamma = \frac{\pi}{4}$ نشان می‌دهند.

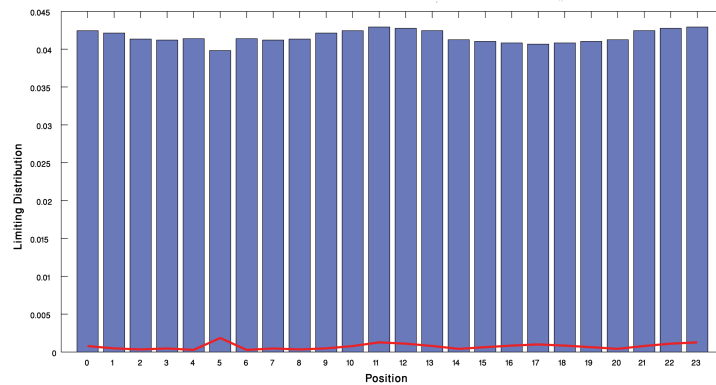


شکل ۲۵.۴: ولگشت موبیوسی با ۲۵ جایگاه، 30° گام و حالت اولیه جدایی‌پذیر $|\psi\rangle = |\chi R\rangle \otimes |x\rangle$ ($\gamma = \frac{\pi}{4}$) و $\alpha = \frac{\pi}{2}$. خط رسم شده فاصله از توزیع یکنواخت را در هر جایگاه نشان می‌دهد. $\delta \simeq 0.007$.

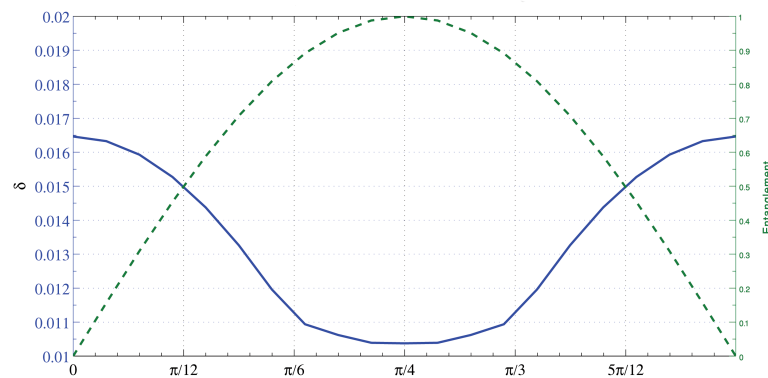


شکل ۲۶.۴: ولگشت موبیوسی با ۲۴ جایگاه، 30° گام و حالت اولیه جدایی‌پذیر $|\psi\rangle = |\chi R\rangle \otimes |x\rangle$ ($\gamma = 0$) و $\alpha = \frac{\pi}{2}$. خط رسم شده فاصله از توزیع یکنواخت را در هر جایگاه نشان می‌دهد. $\delta \simeq 0.014$.

همان‌طور که دیده می‌شود، وجود درهم‌تنیدگی در حالت اولیه در این جا هم باعث بهبود در فاصله کلی توزیع میانگین از توزیع یکنواخت شده است. برای بررسی میزان تاثیر درهم‌تنیدگی در کاهش فاصله از توزیع یکنواخت باید وابستگی میان پارامتر γ و فاصله کلی از توزیع یکنواخت δ را بررسی کرد. شکل ۲۸.۴ فاصله کلی از توزیع یکنواخت را برای ولگشتی با $N = 25$ نشان می‌دهد. در این نمودار، $\alpha = 0$ در نظر گرفته شده است تا بتوانیم تنها اثر درهم‌تنیدگی را بررسی کنیم. همان‌طور که دیده می‌شود، هرچقدر درهم‌تنیدگی در حالت اولیه ولگشت افزایش یابد (یعنی $\frac{\pi}{4} \rightarrow \gamma$)، فاصله از توزیع یکنواخت برای ولگشت کاهش می‌یابد. این بدان معناست که برای تعداد گام‌های مشخص، ولگشتی که درهم‌تنیدگی در حالت اولیه آن بیشتر باشد، در فاصله کمتری از توزیع یکنواخت قرار خواهد گرفت، به عبارتی زودتر به توزیع یکنواخت میل خواهد کرد.



شکل ۲۷.۴: ولگشت موبیوسی با ۲۴ جایگاه، 30° گام و حالت اولیه جدایی پذیر $|\psi\rangle = |R\rangle \otimes |x\rangle$ ($\gamma = \frac{\pi}{4}$) و $\alpha = 2^\circ$. خط رسم شده فاصله از توزیع یکنواخت را در هر جایگاه نشان می‌دهد. $\delta \simeq 0.009$.

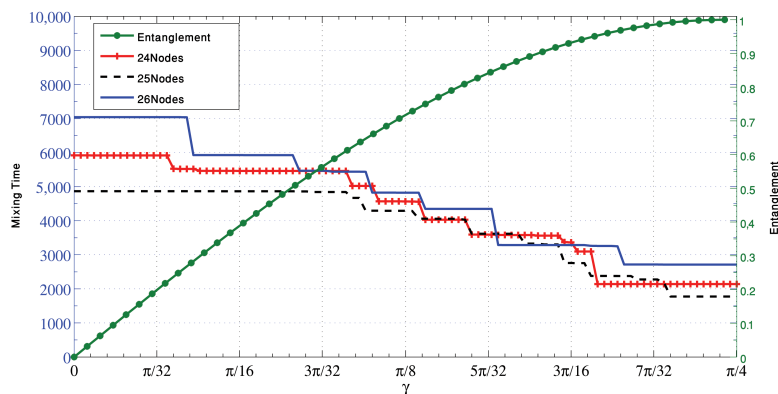


شکل ۲۸.۴: نمودار ممتد: فاصله از توزیع یکنواخت بر حسب γ در ولگشت موبیوسی با ۲۵ جایگاه و 30° گام و $\alpha = 0^\circ$. نمودار خط چین: درهم‌تنیدگی بر حسب γ .

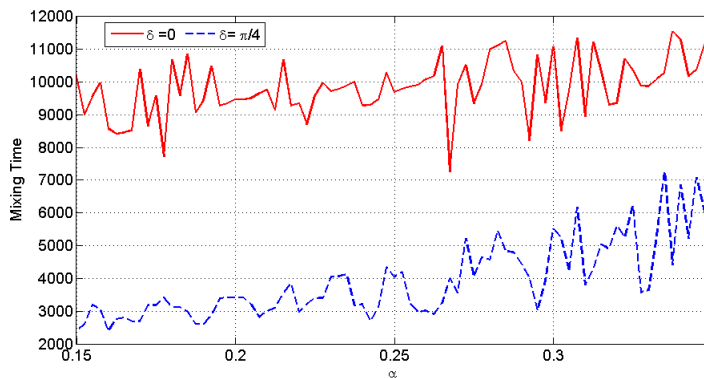
می‌توان بررسی کرد که وجود درهم‌تنیدگی چگونه بر زمان آمیختگی اثر می‌گذارد. به نظر می‌رسد که انتخاب یک حالت اولیه درهم‌تنیده باید سرعت رسیدن به یک توزیع یکنواخت را افزایش دهد، برای مقایسه کاهش زمان آمیختگی با وجود درهم‌تنیدگی، زمان آمیختگی برای ولگشت موبیوس با جایگاه‌های مختلف توسط شبیه‌سازی کامپیوتری به دست آمده است، شکل ۲۹.۴.

شکل ۲۹.۴ نشان می‌دهد که وجود درهم‌تنیدگی باعث کاهش زمان آمیختگی می‌شود. از طرفی در بخش‌های پیشین مشاهده کردیم که تغییرات α نیز می‌تواند باعث کاهش زمان آمیختگی شود. سوالی که ممکن است در اینجا مطرح شود این است که در چه α ‌هایی درهم‌تنیدگی تاثیر بیشتری در کاهش زمان آمیختگی دارد. برای پاسخ دادن به این سوال زمان آمیختگی ولگشت موبیوسی برای تعداد جایگاه‌های متفاوت (۲۴، ۲۵ و ۲۶) بر حسب α رسم شده‌اند، شکل ۳۰.۴ و ۳۱.۴. محدوده α بین 15° تا 35° انتخاب شده است تا از یکنواخت بودن تابع توزیع حدی برای تمام جایگاه‌ها مطمئن باشیم.

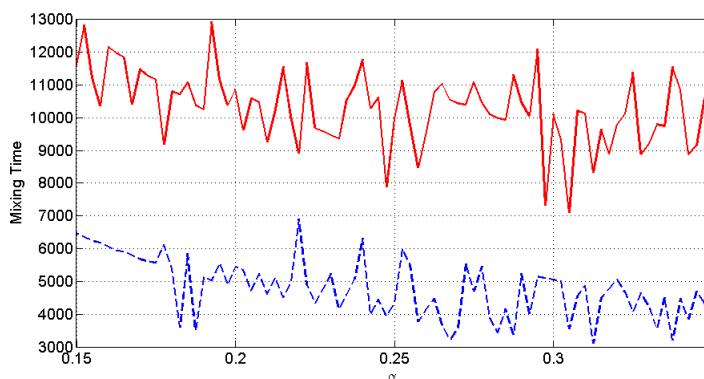
همان‌طور که از شکل‌های ۳۰.۴ و ۳۱.۴ مشخص است، وجود درهم‌تنیدگی در تمام α ‌ها باعث



شکل ۲۹.۴: نمودار زمان آمیختگی برای سه ولگشت با ۲۴، ۲۵ و ۲۶ جایگاه، ۳۰۰ گام و $\alpha = 0.2$ ، $\epsilon = 0.001$ و درهم‌تنیدگی برحسب γ .



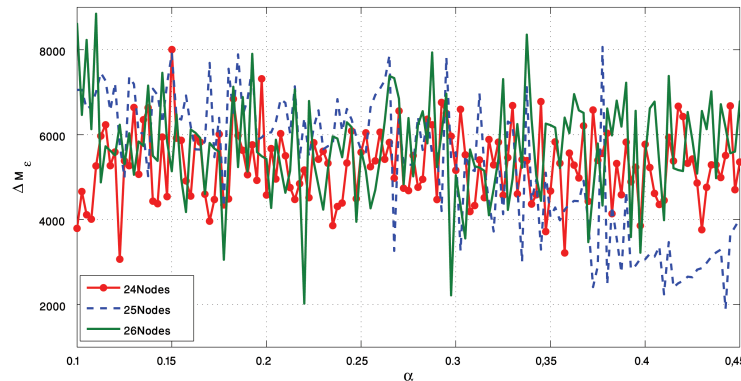
شکل ۳۰.۴: مقایسه زمان آمیختگی برای ولگشت با ۲۵ جایگاه و $\epsilon = 0.0005$ با $\gamma = 0$ (خط ممتد) و $\gamma = \frac{\pi}{4}$ (خط چین).



شکل ۳۱.۴: مقایسه زمان آمیختگی برای ولگشت با ۲۶ جایگاه و $\epsilon = 0.0005$ با $\gamma = 0$ (خط ممتد) و $\gamma = \frac{\pi}{4}$ (خط چین).

کاهش چشمگیر زمان آمیختگی می‌شود، چه برای تعداد جایگاه‌های زوج و چه برای تعداد جایگاه‌های فرد. نکته دیگری که از این نمودارها مشخص است این است که میزان تاثیر درهم‌تنیدگی رابطه مستقیم با

میزان تاثیر α ندارد. به عبارتی α هایی وجود دارد که کاهش کمتری در زمان آمیختگی ایجاد کرده اند، در حالی که در همان α وجود درهم تنیدگی تاثیر بیشتری در کاهش زمان آمیختگی داشته است (و برعکس).



شکل ۳۲.۴: بهبود در زمان آمیختگی برای سه ولگشت با ۲۴، ۲۵ و ۲۶ جایگاه و $\epsilon = 0.0005$. در این نمودار تفاوت میان دو حالت درهم تنیده که یکی از آنها از $\gamma = 0$ و دیگری از $\gamma = \frac{\pi}{4}$ آغاز می کند، نشان داده شده است.

سوال دیگری که ممکن است در این جا مطرح شود این است که میزان بهبود در زمان آمیختگی به تعداد جایگاهها بستگی دارد یا خیر. برای روشن شدن این مطلب تفاوت میان زمان آمیختگی برای دو حالت بدون درهم تنیدگی ($\gamma = 0$) و بیشینه درهم تنیدگی ($\gamma = \frac{\pi}{4}$) در شکل ۳۲.۴ رسم شده است. از این شکل مشخص است که تفاوت میزان بهبود در زمان آمیختگی برای تمام حالات با جایگاههای مختلف به صورت نمودارهایی نوسانی بین حداقل ۲۰۰۰ گام و حداکثر ۸۰۰۰ گام بهبود دیده می شود که به ازای α های مختلف نوسان می کند.

می توان این مطلب را این گونه خلاصه کرد که وجود درهم تنیدگی برای هر تعداد جایگاه به طور متوسط ۶۰۰۰ گام بهبود ایجاد کرده است (متوسط نمودارهای نوسانی شکل ۳۲.۴). در حالی که این ۶۰۰۰ گام بهبود برای حالتی رخ داده است که متوسط زمان آمیختگی آن ۱۰۰۰۰ گام است (شکل ۳۰.۴، بنابراین در مورد این شبیه سازی ۶۰٪ بهبود در زمان آمیختگی رخ داده است. مشاهدات ما نشان می دهد که این مقدار بهبود در زمان آمیختگی با کاهش ϵ بیشتر هم می شود. نکته دیگری که از این نتایج مشخص می شود (شکل ۳۲.۴) این است که بهبود در زمان آمیختگی به طور متوسط به تعداد جایگاه بستگی ندارد و برای هر تعداد جایگاه این بهبود را خواهیم دید.

۵.۴ نتیجه گیری

در ولگشت کوانتومی روی چرخه همیشه امکان رسیدن به یک توزیع یکنواخت در توزیع میانگین احتمال وجود ندارد. دلیل آن تبهگن شدن طیف ویژه مقادیر عملگر تحول در این نوع از ولگشت به ازای تعداد جایگاههای زوج است. البته کارهای انجام شده [۵۹] نشان داده اند که به ازای تعداد جایگاه فرد همیشه می توان به یک توزیع یکنواخت رسید. بنابراین در مدل ولگشت کوانتومی روی دایره به ازای نیمی از

موارد (تعداد جایگاه‌های زوج) رسیدن به یک توزیع یکنواخت ناممکن و به ازای نیمی از موارد (تعداد جایگاه‌های فرد) امکان رسیدن به یک توزیع یکنواخت قطعی است. اگر این واقعیت را به عنوان یک نارسایی برای ولگشت کوانتومی روی دایره در نظر بگیریم، ولگشت موبیوسی می‌تواند تا حد بسیار خوبی این نارسایی را برطرف کند.

مدل ولگشت موبیوسی که در این فصل ارائه کردیم نوعی بهینه‌سازی روی ولگشت کوانتومی روی دایره است. این کار از طریق وارد کردن یک جزء تداخلی دیگر به ولگشت کوانتومی روی دایره انجام شده است. فضای هیلبرت دو بعدی و در نتیجه پارامتر α که از این طریق وارد مدل می‌شوند و موجب اثرات تداخلی گفته شده می‌شوند، در نهایت این امکان را می‌دهند که بتوان به ازای حالت‌های زوج هم به یک توزیع یکنواخت رسید. در واقع در ولگشت موبیوسی (برخلاف ولگشت کوانتومی روی دایره که در نیمی از موارد امکان دستیابی به یک توزیع یکنواخت وجود ندارد) تقریباً همیشه امکان رسیدن به یک توزیع یکنواخت وجود دارد. اگرچه، در ولگشت موبیوسی هم مواردی وجود دارد که در آن‌ها نمی‌توان به توزیع یکنواخت دست یافت و این موارد تا حدودی به زوج یا فرد بودن تعداد جایگاه‌ها هم مربوط است اما نقش اصلی به عهده α است. برای توضیح نقش α انواع ولگشت موبیوسی را به دو دسته زوج و فرد (همانند ولگشت کوانتومی روی دایره) تقسیم می‌کنیم. برای مواردی که تعداد جایگاه‌ها زوج است (همان‌طور که در متن فصل به دست آوردیم) به ازای هر $\alpha \notin R$ قطعاً به یک توزیع یکنواخت خواهیم رسید. بنابراین در ولگشت موبیوسی انتخاب‌های بسیار زیادی برای فراهم کردن امکان رسیدن به یک توزیع یکنواخت برای تعداد جایگاه‌های زوج وجود دارد. اما در مورد تعداد جایگاه‌های فرد باید گفت که تنها در موارد بسیار محدودی که α انتخاب شده ضریب فرد $\frac{1}{2}$ باشد، توزیع یکنواخت به دست نخواهد آمد (در ولگشت کوانتومی روی دایره برای تعداد جایگاه‌های فرد همیشه به یک توزیع یکنواخت می‌رسیم).

اما به ازای تمامی α ‌های دیگر همیشه توزیع حدی احتمال ولگشت یک توزیع یکنواخت خواهد بود. در این فصل همچنین تاثیر انتخاب مدل موبیوسی را بر کاهش زمان آمیختگی بررسی کردیم. مشاهدات نشان دادند که در ولگشت موبیوسی زمان آمیختگی عموماً به شکل قابل توجهی کاهش می‌یابد. تنها در مواردی زمان آمیختگی افزایش می‌یابد که α انتخابی موجب ایجاد تبهگنی در طیف ویژه‌مقادیر عملگر تحول شود. البته ذکر این نکته حائز اهمیت است که محاسبه زمان آمیختگی کار بسیار مشکلی است، زیرا تا کنون رابطه مشخص و ساده‌ای برای توزیع‌های حدی نایکنواخت به دست نیامده است.

به خاطر وجود دو زیرفضای هیلبرت دو بعدی χ و R این امکان در ولگشت موبیوسی وجود دارد که بتوان با درهم‌تنیده گرفتن این دو زیرفضا خواص جدید را در مدل به وجود آورد. ما در این پایان‌نامه تاثیر این درهم‌تنیدگی را بر توزیع حدی و زمان آمیختگی بررسی کردیم. مشاهدات ما نشان دادند که درهم‌تنیدگی فاصله توزیع حدی از توزیع یکنواخت را باز هم کاهش داده (در ولگشت موبیوسی انتخاب مناسب α خود فاصله از توزیع یکنواخت را کاهش می‌دهد) و همچنین زمان آمیختگی را هم بیشتر کاهش می‌دهد. کاهش زمان آمیختگی به معنای افزایش سرعت رسیدن به توزیع یکنواخت است. بررسی‌ها همچنین نشان دادند که به کارگیری درهم‌تنیدگی در مدل موبیوسی زمان آمیختگی را برای ولگشت‌های با تعداد جایگاه‌های زوج و فرد تقریباً به یک میزان کاهش می‌دهد. در موردی که در این پایان‌نامه شبیه‌سازی گردیده است با $\epsilon = 0.0005$ این بهبود تقریباً ۶۰ درصد بوده است. در حالی که مشاهدات ما نشان

می دهد که با کاهش بیشتر ϵ مقدار این بهبود بیشتر هم می شود.

بنابراین می توان گفت که ولگشت موبیوسی حالت عمومی تر ولگشت کوانتومی روی چرخه است که با در اختیار داشتن پارامترهایی نظیر α و γ (درهم تنیدگی) همیشه این امکان را برای ما فراهم می کند تا با تنظیم این پارامترها ویژگی های مهمی از قبیل یکنواختی تابع توزیع فراهم و زمان آمیختگی کاهش یابد.

مراجع

- [1] Feynman, R.P. Lectures on Physics III. *Addison Wesley Longman*, 1970.
- [2] R.Shankar. Principles of Quantum Mechanics. *Springer, 2nd Edition*, 1994.
- [3] Manin, Yuri. Computable and Uncomputable. *Sovetskoye Radio (Moscow)*, 1980.
- [4] Feynman, Richard. Simulating physics with computers. *Int. J. Theor. Phys* 21:467, 1982.
- [5] D.Deutsch. Quantum theory, The Church-Turing principle, and the univesal quantum computer. *Proceeding the Royal Society of London, Series A*, 1985.
- [6] D.Deutsch and R.Jozsa. Rapid solution of problems by quantum computa-tion. *Proceeding the Royal Society of London, Mathematical and Physical Sciences, 439(1907): 553-558*, 1992.
- [7] D.Simon. On the power of quantum computation. *Proceeding of the 35th IEEE Symposium on the Foundations of Computer Science (FOCS)*, 1994.
- [8] D.Simon. On the power of quantum computation. *SIAM J. Computing*, 26:1474-1483, 1997.
- [9] P.shor. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and fac-toring. *Proceeding of the 35th Annual Symposium on the Foundations of Computer Science, Edited by S.Goldwasser, (Los Alamitos, CA: IEEE Com-puter Society Press)*, 1994.

- [10] P.shor. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on quantum computer. *SIAM J. Computing*, 26:1484-1509, 1997.
- [11] L.K.Grover. Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack. *Phys. Rev. Lett.*, 79:325, 1997.
- [12] Mosca, Michele. Quantum algorithms. *Springer Encyclopedia of Complexity and Systems*, 2008.
- [13] A.M.Childs and van Dam, W. Quantum algorithms for algebraic problems. *arXiv:0812.0380*, 2008.
- [14] S.P.Meyn and R.L.Tweedie. Markov chains and stochastic stability.
- [15] Ambainis, Andris, Eric, Bach, Ashwin, Nayak, Ashvin, Vishwanath, and John, Watrous. One-Dimensional Quantum Walks.
- [16] Nayak, Ashwin and Vishwanath, Ashvin. Quantum Walk on the Line (Extended Abstract). pp. 1–20.
- [17] M.N.Barber and B.W.Ninham. Random and restricted walks: Theory and application. *Gordon and Breach, New York*, 1970.
- [18] Chandrashekar, C M, Srikanth, R, and Laflamme, Raymond. Optimizing the discrete time quantum walk using a SU(2) coin. (2):1–6.
- [19] Y.Aharonov, L.Davidovich, and N.Zagury. Quantum random walks. *Phys. Rev. A*, 48:1687, 1993.
- [20] G.V.Riazanov. The Feynman path integral for the Dirac equation. *Sov. Phys. JTEP*, 6:1107, 1958, 1958.
- [21] Feynman, R.P. and Hibbs, A.R. *Quantum mechanics and path integral*.
- [22] D.Meyer. From quantum cellular automata to quantum lattice gases. *J. Stat. Phys*, 1996.

-
- [23] D.Meyer. On the absence of homogeneous scalar unitary cellular automata. *Phys. Lett. A*, 1996.
- [24] Farhi, Edward and Gutmann, Sam. Quantum Computation and Decision Trees. 1998.
- [25] J.Watrous. Quantum simulation of classical random walks and undirected graph connectivity. *Journal of Computer and System Sciences*, 62:376-391, 2001.
- [26] J.Kempe. Quantum random walk- an introductory overview. *Contemporary Physics*, 44:307, 2003.
- [27] Shenvi, Neil, Kempe, Julia, and Whaley, K. Quantum random-walk search algorithm. *Physical Review A*, 67(5):052307, May 2003.
- [28] A.M.Childs and J.Goldstone. Spatial search by quantum walks. *Phys. Rev. A*, 70:022314, 2004.
- [29] A.M.Childs and J.Goldstone. Spatial search and the Dirac equation. *Phys. Rev. A*, 70:042312, 2004.
- [30] A.Ambainis, J.Kempe, and A.Rivosh. Coins make quantum walks faster. *Proceeding of ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA)*, ACM Press, New York:1099-1108, 2005.
- [31] S.Aaronson and A.Ambainis. Quantum search of spatial regions. *Theory of Computing*, 1:47-79, 2005.
- [32] F.Magniez, A.Nayak, J.Roland, and M.Santha. Search via quantum walk. *Proceeding of 29th ACM Symposium on Theory of Computing pages 575-584*, 2007.
- [33] A.Ambainis. Quantum walks and their algorithmic applications.
- [34] A.Ambainis. Quantum walk algorithms for element distinctness. *Siam Journal on Computing*, 37(1):210-239, 2007.

- [35] F.Magniez, M.Santha, and M.Szegedy. Quantum walk algorithms for element distinctness. *Proceeding of the 16th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, pages 1109-1117*, 2005.
- [36] H.Buhrman and R.Spalek. Quantum verification of matrix products. *Proceeding of the 17th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, pages 880-889*, 2006.
- [37] F.Magniez and A.Nayak. Quantum complexity of testing group commutativity.
- [38] A.Ambainis, A.M.Childs, B.W.Reichardt, R.Spalek, and S.Zhang. Any AND-OR formula of size N can be evaluated in time $N^{\frac{1}{\sqrt{r}}+O(\frac{1}{r})}$ on a quantum computer. *Proceeding of the 48th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, pages 363-372*, 2007.
- [39] B.W.Reichardt and R.Spalek. Span-program-based quantum algorithms for evaluating formulas. *Proceeding of the 40th ACM Symposium on Theory of Computing, pages 103-112*, 2008.
- [40] G.S.Engel, T.R.Calhoun, E.L.Read, T.K.Ahn and T.C.Mancaroni, Y.C.Cheng, R.Blankenship, and G.R.Fleming. Evidence for wavelike energy transfer through quantum coherence in photosynthetic energy transfer. *Nature (London)*, 446:782-786, 2007.
- [41] Masoud Mohseni, P. Rebentrost, S.Lloyd and A.Asperu-Guzik. Environment-assisted quantum walks in photosynthetic energy transfer. *J. Chem. Phys.*, 129:174106, 2008.
- [42] R.D.Somma, S.Boxio, H.Barnum, and E.Knill. Quantum stimulations of classical annealing processes. *Phys. Rev. Lett.*, 101:130504, 2008.
- [43] C.M.Chandrashekar and R.Laflamme. Quantum phase transition using quantum walks in an optical lattice. *Phys. Rev. A*, 78:022314, 2008.

- [44] Du, Jiangfeng, Li, Hui, Xu, Xiaodong, Shi, Mingjun, Wu, Jihui, Zhou, Xi-anyi, and Han, Rongdian. Experimental Implementation of Quantum Random Walk Algorithm. pp. 1–5.
- [45] C.A.Ryan, M.Laforest, J.C.Boileau, and R.Laflamme. Experimental implementation of discrete time quantum random walk on an NMR quantum information processor. *Phys. Rev. A*, 70:062317, 2005.
- [46] J.M.Grossman, and M.D’Arcy, D.Ciampini, Helmerson, K., P.Lett, W.D.Philips, A.Vaziri, and S.L.Rolston. Implementation of a quantum random walk with a sodium Bose Einstein condensate. *The 35th Meeting of Division of Atomic, Molecular and Optical Physics, Tuscon, AZ (DAMOP04)*, 2004.
- [47] H.B.Perets, Y.Lahini, F.Pozzi, M.Sorel, R.Morandotti, and Y.Silberberg. Realization of quantum walks with negligible decoherence in waveguide lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 100:170506, 2008.
- [48] Travaglione, B C and Milburn, G J. Implementing the quantum random walk. *Phys. Rev. A*, 65:032310, (1):1–5, 2002.
- [49] W.Dur, R.Raussendorf, V.M.Kendon, and H.J.Briegel. Quantum Walks in optical lattice. *Phys. Rev. A*, 66:052319, 2002.
- [50] E.Eckert, J.Mompart, and and M.Lewenstein, G.Birkl. One- and two-dimensional walks in arrays of optical traps. *Phys. Rev. A*, 72:012327, 2005.
- [51] C.M.Chandrashekar. Implementing the one-dimensional quantum (Hadamard) walk using Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A*, 74:032307, 2006.
- [52] Z.Y.Ma, K.Burnett, d’Arcy, M.A., and S.A.Gardiner. Quantum random walk using quantum accelerator modes. *Phys. Rev. A*, 73:013401, 2006.
- [53] k.Manouchehri and J.B.Wang. Quantum walks in an array of quantum dots. *J. Phys. A:Math. Theor.*, 41:65304, 2008.

-
- [54] Venegas-Andraca, S.E. DPhil Thesis:Discrete Quantum Walk and Quantum Image Processing. *Centre for Quantum Computaion, University of Oxford*, 2006.
- [55] R.Coleman. Stochastic Processes. *George Allean Unwin, Ltd*, 1974.
- [56] Portugal, Renato. *Quantum Walks and Search Algorithms*. 2013.
- [57] Annabestani, Mostafa, Akhtarshenas, Seyed Javad, and Abolhassani, Mohamad Reza. Decoherence in a one-dimensional quantum walk. *10.1103/PhysRevA.81.032321*, pp. 1–9, 2010.
- [58] A.M.Childs. An example of the difference between quantum and classical random walks. *Quantum Information Processing, Vol.1, Nos.1*, April 2002.
- [59] Aharonov, Dorit, Ambainis, Andris, and Kempe, Julia. Quantum Walks on Graphs. *Proceedings of Symposium on the Theory of Computing, 1999*.
- [60] Bednarska, Małgorzata, Grudka, Andrzej, and Kurzy, Paweł. Quantum walks on cycles. *Physics Letters A*, 317:21–25, 2003.
- [61] Aharonov, Dorit, Kitaev, Alexei, and Nisan, Noam. Quantum Circuits with Mixed States. *Proceedings of STOC'98*, 1998.

Abstract

In the first chapter we introduce Classical Random Walk (CRW). Probability distribution, standard deviation and diffusion factor are some parameters of CRW will be studied in the same chapter. Then the chapter will continue with Quantum Walk on Line (QWL) and introduce evolution operator for QWL and studying its effect on the walker's state. It is useful to compare probability distribution and variance of QWL with the classical one. Fourier transform would be an appropriate tool to map the evolution operator into k space to calculate eigenvalues and eigenvectors of the evolution operator of quantum walk on line.

Chapter 2 introduces another model of quantum walk known as Quantum Walk on a Cycle. We introduce necessary modifications to 1DQW operators to be used in Quantum Walk on a Cycle. The chapter will describe how to solve eigenvalue problems for the operator. Limiting Distribution is an important concept which is introduced and investigated in different situations in this chapter. Mixing Time is another concept to be defined in the chapter and we are going to find an upper bound for it.

In the last chapter, we will present our model of quantum walk on a cycle, namely Mobius Quantum Walk. Indeed this is a modification to the previous model, i.e. quantum walk on a cycle. In our model, quantum walk on a cycle has been modified by introducing some kind of rotation around the track on the cycle, characterized by the parameter α . The chapter shows that α and the extended space for the rotation improve the parameters including limiting distribution and mixing time. We also study the changes made by α in eigenvalues and eigenvectors and the way it affects degeneracy, so we find out how it affects different parameters such as limiting distribution or mixing time. Finally, it is possible to assume that the space for rotation and the spin space are entangled, which is shown to improve limiting distribution.



Shahrood University
Faculty Of Physics

Dissertation Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Master of Science in
Particle Physics

Quantum Walk on Circles and its properties

Supervisors

**Dr. Hossein Movahedian and Dr. Mostafa
Annabestani**

by

Majid Moradi Klardeh

2014