



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده فیزیک  
گروه فیزیک

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته  
فیزیک اتمی و مولکولی، گرایش پلاسما

عنوان

# مطالعه اثرات اسپین الکترون روی خواص دینامیکی پلاسماهای مغناطیده کوانتومی

استاد راهنما

دکتر مهدی مؤمنی

دانشجو

زرگس نصیری

۱۳۹۲ بهمن ماه

به نام دانای بزرگ مرتبه

اساس ہمہ پروزی ہا از خود انسان شروع می شود و باور انسان اساس تمام امور  
است.

امام خمینی (رہ).

تقدیم بہ مادر م کہ...

از نگاہش صلابت  
از رفتارش محبت  
و از صبرش ایستادگی را آموختم.

# سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بیکران خود، آدمی رازیور عقل آراست.

سپاس می‌گویم خدای مهربانم را که زیباترین راه زندگی را به من آموخت و با گرفتن دستان ناتوانم قدم‌های مرا در این راه محکم کرد، مشکلات و سختی‌ها را برایم آسان نمود و درهای بسته دانش را با نور وجودش به رویم گشود.

بر خود لازم می‌دانم از زحمات استاد راهنمای بزرگووارم جناب آقای دکتر مهدی مؤمنی که با دقت تمام پاسخ‌گوی سوالات من بودند کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم.

هم‌چنین تشکر می‌کنم از خانواده‌ام به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان من بودند.

در پایان از دکتر محمود صابونی (دانشجوی فوق دکتری فیزیک-آلمان) که در راستای پایان‌نامه مرا کمک نمودند و از دوستانم هدی، سهیلا، مریم، سیما، که تجربه بودن با آن‌ها خاطراتی شیرین را برایم رقم زد، سپاسگزارم.

زرکس نصیری  
۱۳۹۲ بهمن‌ماه

## تعمدنامه

اینجانب نرگس نصیری دانشجوی کارشناسی ارشد رشته فیزیک اتمی و مولکولی دانشکده فیزیک دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان مطالعه اثرات اسپین الکترون روی خواص دینامیکی پلاسماهای مغناطیده کوانتومی، تحت راهنمایی دکتر مهدی مؤمنی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه شاهرود” یا “Shahrood University of technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

نرگس نصیری  
۱۳۹۲، بهمن‌ماه

## مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

## چکیده

در این پایان‌نامه پس از معرفی و تعریف پلاسما و پارامترهای آن، تفاوت پلاسمای کلاسیکی و کوانتومی را بررسی نمودیم. در فصل‌های بعد با توجه به مدل‌هایی که برای پلاسمای کوانتومی توصیف کردیم از مدل سیالی ( $MHD$ ) جهت حل و نتیجه‌گیری مطلوب معادلات، در محدوده خطی بهره‌جسته و در نهایت با توجه به مجموعه معادلات ( $QMHD$ ) به بررسی رفتار اسپین الکترون بر پلاسمای مغناطیده کوانتومی در محدوده خطی و غیرخطی پرداخته‌ایم. در محدوده غیرخطی با کمک روش ( $RPM$ ) معادله حاکم بر این نوع سیستم را بدست آورده و از روش ( $\tanh$ ) جهت یافتن جواب‌های دقیق معادله استفاده نموده‌ایم.

## کلمات کلیدی:

پلاسمای کوانتومی، تابع توزیع ویگنر، تقریب هارتری، مدل سیالی، موج مغناطوسوتی، نیروی کوانتومی الکترون، تابع بریلیئون، معادله پائولی، مدل مگنتوهیدرودینامیک کوانتومی، روش  $(RPM)$ ، روش  $(tanh)$ ، امواج سالیونی، امواج ضربه‌ای



# فهرست مطالب

۱	مقدمه و مفاهیم اولیه	۱
۲	..... ۱.۱ مقدمه	۱.۱
۲	..... ۱.۱.۱ تعریف پلاسما	۱.۱.۱
۲	..... ۲.۱.۱ معیارهای پلاسما	۲.۱.۱
۲	..... ۳.۱.۱ حفاظ دبای	۳.۱.۱
۴	..... ۴.۱.۱ وجود پلاسما در طبیعت	۴.۱.۱
۴	..... ۵.۱.۱ دما و چگالی	۵.۱.۱
۴	..... ۶.۱.۱ پلاسمای کلاسیکی و کوانتومی	۶.۱.۱
۴	..... ۲.۱ پلاسمای کوانتومی	۲.۱
۵	..... ۱.۲.۱ کاربردهای پلاسمای کوانتومی	۱.۲.۱
۵	..... ۲.۲.۱ لیزر- جامد	۲.۲.۱
۵	..... ۳.۲.۱ اسپینترونیک	۳.۲.۱
۶	..... ۴.۲.۱ نانو ساختارهای نیمه رسانا	۴.۲.۱
۶	..... ۳.۱ پارامترها و مشخصه های انواع پلاسماها	۳.۱
۶	..... ۱.۳.۱ رژیم کلاسیکی	۱.۳.۱
۷	..... ۲.۳.۱ پارامتر جفت شده کلاسیکی	۲.۳.۱
۷	..... ۳.۳.۱ رژیم کوانتومی	۳.۳.۱
۸	..... ۴.۳.۱ پارامتر جفت شده کوانتومی	۴.۳.۱
۹	..... ۵.۳.۱ پارامترهای بدون بعد و نقش آنها در پلاسمای کوانتومی	۵.۳.۱
۱۰	..... ۴.۱ اسپین	۴.۱
۱۰	..... ۵.۱ هدف پایان نامه	۵.۱
۱۳	مدل های توصیف پلاسما و معادلات حاکم بر آن	۲
۱۴	..... ۱.۲ مقدمه	۱.۲
۱۴	..... ۲.۲ مدل های توصیف پلاسما	۲.۲
۱۴	..... ۱.۲.۲ مدل ذره ای	۱.۲.۲

۱۴	مدل سیالی	۲.۲.۲
۱۵	مدل جنبشی	۳.۲.۲
۱۵	مدل‌های توصیف پلاسمای کلاسیکی	۳.۲
۱۵	مدل سیالی و معادلات حاکم بر آن برای پلاسماهای کلاسیکی	۱.۳.۲
۱۶	مدل نظریه جنبشی برای پلاسماهای کلاسیکی	۲.۳.۲
۱۶	تابع توزیع ماکسول-بولتزمن	۳.۳.۲
۱۷	مدل‌های توصیف پلاسمای کوانتومی	۴.۲
۱۸	تقریب هارتری	۱.۴.۲
۱۹	تقریب هارتری-فوک-اسلیتر	۲.۴.۲
۱۹	مدل سیالی و معادلات حاکم بر آن برای پلاسمای کوانتومی	۳.۴.۲
۲۰	روش مادلانگ در مدل سیالی	۴.۴.۲
۲۲	مدل نظریه جنبشی برای پلاسمای کوانتومی	۵.۴.۲
۲۲	تابع توزیع ویگنر	۶.۴.۲
۲۳	معادلات نظریه جنبشی برای پلاسماهای کوانتومی	۷.۴.۲
۲۳	معادله ویگنر-پواسون	۸.۴.۲
۲۵	بدست آوردن رابطه پاشندگی با استفاده از معادله ویگنر-پواسون	۹.۴.۲
۲۸	بدست آوردن رابطه پاشندگی با استفاده از تقریب هارتری	۱۰.۴.۲
۳۱	بررسی معادله ویگنر-پواسون در محدوده کلاسیکی	۱۱.۴.۲
۳۲	معادله ویگنر-ماکسول	۱۲.۴.۲
۳۸	جمع‌بندی	۵.۲

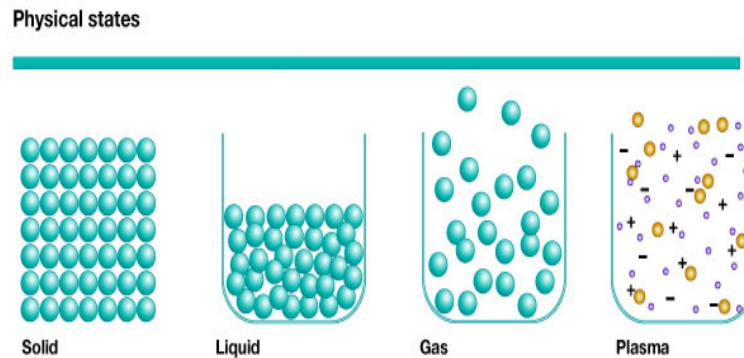
### ۳ مطالعه‌ی امواج هیدرومغناطیسی با حضور اسپین الکترون در سیستم‌های پلاسمای

۴۱	مغناطیده کوانتومی	
۴۲	مقدمه	۱.۳
۴۳	معادله پائولی	۲.۳
۴۴	نیروی کوانتومی الکترون	۱.۲.۳
۴۴	تابع بریلیون	۲.۲.۳
۴۷	بررسی امواج هیدرومغناطیسی در مدل مگنتوهیدرودینامیک کوانتومی	۳.۳
۴۷	معادلات اساسی مدل $QMHD$	۴.۳
۵۲	بدست آوردن رابطه‌ی پاشندگی خطی با استفاده از معادلات $QMHD$	۱.۴.۳
۶۱	انواع انتشار	۵.۳
۶۲	انتشار از نوع موازی	۱.۵.۳
۶۳	انتشار از نوع عمودی	۲.۵.۳
۶۴	بررسی رابطه پراکندگی خطی در غیاب پارامتر اتلاف	۶.۳
۶۷	جمع‌بندی	۷.۳

۶۹	۴	بررسی رفتارهای غیرخطی و اثرات اسپین الکترون بر پلاسمای مغناطیده کوانتومی
۷۰	۱.۴	مقدمه
۷۱	۲.۴	معادلات فیزیک پلاسمای غیرخطی
۷۱	۱.۲.۴	معادله‌ی شرودینگر غیرخطی
۷۲	۲.۲.۴	معادله‌ی کورته‌وگ- دووری
۷۴	۳.۲.۴	سالیتون
۷۵	۴.۲.۴	معادله‌ی $KP$
۷۵	۵.۲.۴	معادله $Burger$
۷۶	۳.۴	به‌دست آوردن معادله‌ی تحول غیرخطی با توجه به معادله‌ی $KPB$
۸۱	۱.۳.۴	نتایج برای پایین‌ترین مرتبه‌ی آشفتگی، یعنی $\epsilon^{3/2}$
۸۳	۲.۳.۴	نتایج برای دومین مرتبه‌ی آشفتگی، یعنی $\epsilon^{5/2}$
۸۴	۳.۳.۴	نتایج برای آخرین مرتبه‌ی آشفتگی، یعنی $\epsilon^2$
۸۵	۴.۴	روش - $\tanh$
۸۶	۱.۴.۴	یافتن جواب‌های دقیق معادله $KPB$ به روش - $\tanh$
۸۷	۲.۴.۴	امواج ضربه‌ای
۸۸	۵.۴	بررسی جواب‌های معادله $KPB$ و مشتقات آن
۸۸	۶.۴	بررسی جواب‌های عددی $KPB$ معادله از دیدگاه عددی
۹۰	۷.۴	جمع‌بندی
۹۳	۵	نتیجه‌گیری و پیشنهادات
۹۴	۱.۵	مقدمه
۹۴	۲.۵	نتیجه‌گیری
۹۵	۳.۵	پیشنهادات
۹۶		مراجع
۹۹		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۱۰۲		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

# فصل ۱

مقدمه و مفاهیم اولیه



شکل ۱.۱: پلاسما حالت چهارم ماده

## ۱.۱ مقدمه

### ۱.۱.۱ تعریف پلاسما

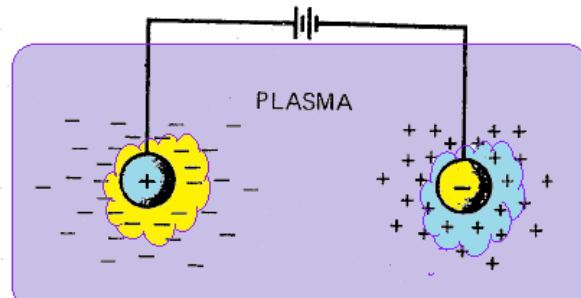
پلاسما گاز شبه خنثایی از ذرات باردار و خنثی است که رفتار جمعی از خود نشان می‌دهد. اخیراً در مباحث علمی حالت چهارم ماده را پلاسما می‌نامند همانند (شکل ۱.۱). شبه خنثی بودن و رفتار جمعی، دو ویژگی بارز پلاسماهاست که آنها را از گازها متمایز می‌کند. شبه خنثی بودن به این معناست که پلاسما می‌کوشد از لحاظ الکتریکی به اندازه کافی خنثی بماند. ولی آنقدر خنثی نیست که همه نیروهای الکترومغناطیسی مورد توجه صفر باشند. [۱] پلاسما به علت یونیزه بودن انواع رفتارهای جمعی، متفاوت از گازهای خنثی را از خود نشان می‌دهد که ناشی از نیروهای بلند برد الکتریکی و مغناطیسی می‌باشد. در یک سیستم پلاسمایی حرکت بارها در مسیرهای متنوع باعث وجود میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی می‌شود که از قبل در سیستم وجود نداشته اند، به طور کلی در یک توده پلاسمایی (به دلیل حضور نیروهای الکتریکی و مغناطیسی که بسیار قوی‌تر از نیروهای گرانشی‌اند) ذرات از یکدیگر تاثیر می‌پذیرند، تا آنجا که حرکت بخشی از این توده باعث تغییر در وضعیت حرکت و انرژی سایر بخش‌های سیستم می‌شود. لذا پلاسما سیستمی خودسازگار است که تمایلی به پیروی از نیروهای خارجی ندارد.

### ۲.۱.۱ معیارهای پلاسما

برای اینکه یک گاز یونیده را بتوان پلاسما نامید شرایطی لازم است که در ادامه بیان می‌نماییم. قبل از هر چیز حفاظ دبای را توضیح می‌دهیم.

### ۳.۱.۱ حفاظ دبای

یکی از مشخصات اساسی رفتار پلاسما، توانایی آن برای دفع پتانسیل‌های الکتریکی است که به آن اعمال می‌شود. با وارد نمودن دو گلوله باردار متصل به باتری، در درون پلاسما میدان الکتریکی را به



شکل ۲.۱: حفاظ دبای

وجود می‌آوریم. این گلوله‌ها ذره‌های با بارهای مخالف را جذب می‌کنند، و بلافاصله ابری از یون‌ها اطراف گلوله منفی و ابری از الکترون‌ها دور گلوله مثبت را می‌گیرند (شکل ۲.۱). در نهایت ضخامت تقریبی چنین ابری را می‌توان محاسبه نمود. اندازه‌ای از فاصله حفاظ یا غلاف را طول دبای<sup>۱</sup> گویند که با  $\lambda$  نشان می‌دهیم.

$$\lambda_D = \left( \frac{\epsilon_0 K T_e}{n e^2} \right)^{1/2} \quad (۱.۱)$$

که  $K$  ثابت بولتزمن می‌باشد. اولین ملاک پلاسما بودن یک گاز یونیده این است که به قدر کافی چگال باشد. و  $\lambda_D$  خیلی کوچکتر از ابعاد  $L$  سیستم شود. لذا به اختصار می‌توان نوشت:

$$\lambda_D \ll L \quad (۲.۱)$$

توصیف حفاظ دبای زمانی معتبر است که ذرات در ابر بار به تعداد کافی وجود داشته باشند. واضح است که اگر در ناحیه‌ی غلاف فقط یک یا دو ذره موجود باشد، حفاظ دبای به طور آماری مفهوم معتبری نخواهد داشت. لذا تعداد ذرات درون کره دبای را به دست می‌آوریم

$$N_D = n \frac{4}{3} \pi \lambda_D^3 \quad (۳.۱)$$

رفتار جمعی ذرات پلاسما، ایجاب می‌کند که  $N_D \gg 1$  باشد تا دومین ملاک پلاسما بودن را بیان کند.

سومین شرط مربوط به برخوردها می‌باشد. اگر  $\omega$  بسامد نوعی نوسان‌های پلاسما و  $\tau$  زمان متوسط بین برخوردها با اتم‌های خنثی باشد، برای آنکه گاز مانند پلاسما، ونه یک گاز خنثی، رفتار کند لازم است بنویسیم:

$$\omega \tau > 1$$

<sup>۱</sup>Debye length

## ۴.۱.۱ وجود پلازما در طبیعت

حالت چهارم ماده را می‌توان به طور طبیعی در سازوکار گازنتون، پدیده رعد و برق، تابش شفق قطبی، یونسفر زمین، بستر کهکشانیها (شامل هسته ستارگان، هیدروژن میان سیاره‌ای، ستارگان کوتوله سفید) و سطح خورشید (بادهای خورشیدی، تاج خورشید، هسته خورشید) یافت.

## ۵.۱.۱ دما و چگالی

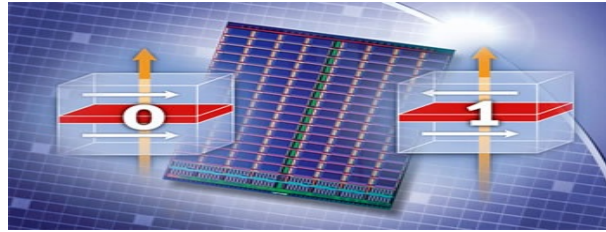
پارامترهای مهم پلازما عبارتند از دما و چگالی. به‌طور معمول، دما و چگالی بالا را به پلازما اختصاص می‌دهند. در حالت‌های جامد، مایع، گاز، دما را می‌توان از روی دامنه حرکت (سرعت نوسان) ذرات سازنده ماده تعریف کرد اما در حالت پلازما دما را از روی میزان جدایش یون‌های مثبت از الکترون‌ها تعریف می‌کنند. آنچه که مهم است اینکه در پلازما دو پارامتر دما و چگالی نسبت به هم سنجیده می‌شوند. بیشتر پلازماها دمایی در حدود  $10^2 k$  (مانند پدیده‌ی رعدوبرق) تا  $10^8 k$  (مانند فرآیند همجوشی) و چگالی در حدود  $10^3 m^{-3}$  (مانند پلازماهای آزمایشگاهی) تا  $10^{36} m^{-3}$  (مانند هسته‌ی ستارگان) دارند.

## ۶.۱.۱ پلاسمای کلاسیکی و کوانتومی

اصولاً پلازماها را با توجه به خاصیت ماکروسکوپیکی و میکروسکوپیکی به دو دسته کلاسیکی و کوانتومی تقسیم‌بندی می‌نمایند. پلازماهای کلاسیکی در محدوده دماهای بالا و چگالی‌های پایین و پلازماهای کوانتومی در محدوده دماهای پایین و چگالی‌های بالا بررسی می‌شوند. اکثر پلازماها در محدوده فشار معمولی فوق‌العاده داغ بوده و در محدوده پلازماهای کلاسیکی قرار می‌گیرند. معمولاً پلازماهای کوانتومی به‌طور انبوه در موارد اختر فیزیکی (ستارگان کوتوله سفید) که چگالی چندین برابر جامدات دارند، در نیمه‌هادی‌ها و سیستم‌های میکروکانونی، در نسل بعدی پلازماهای لیزر-جامد، در برهم‌کنش لیزرهای الکترون آزاد با پرتو  $x$  می‌توان یافت.

## ۲.۱ پلاسمای کوانتومی

پلازما را کوانتومی گوئیم زمانی که طبیعت کوانتومی ذرات اثر قابل توجهی بر روی خواص ماکروسکوپیکی گزارند. در این نوع پلازما ذرات سبکتر مانند الکترون‌ها و پوزیترون‌ها (دارای جرمی برابر با الکترون اما با بار مخالف) در چگالی‌های بالا و دماهای نسبتاً پایین تبهگن می‌شوند. پلازماهای کوانتومی متشکل از الکترون‌ها، پوزیترون‌ها و حفره‌های تبهگن اند. از طرفی ذرات باردار تبهگن از دیدگاه مکانیک آماری از آمار فرمی-دیراک پیروی می‌کنند. در این نوع از پلازماها نیروهای جدیدی مانند اثر تونل‌زنی (الکترون و پوزیترون به‌وسیله پتانسیل بوهم و...) در سیستم مطرح می‌شوند. مطالعه‌ی این‌گونه از پلازماها به دلیل اینکه چگالی قابل مقایسه با چگالی جامدات دارند و دمایی در حدود چند الکترون ولت، می‌توان



شکل ۳.۱: اسپینترونیک

آنها را در زیر مجموعه ای از ماده چگال در نظر گرفت و پدیده‌هایی مانند تونل‌زنی دیوهای کوانتومی، لیزرهای حالت جامد، را با استفاده از پلاسمای کوانتومی توصیف کرد.

### ۱.۲.۱ کاربردهای پلاسمای کوانتومی

در سال‌های اخیر با تغییر در نانوساختارهای فلزی (خوشه‌های فلزی، ذرات نانو، فیلم‌های فلزی نازک) پیشرفت عظیمی در حوزه پلاسمای کوانتومی صورت گرفته است. با استفاده از نانوساختارهای فلزی می‌توان ویژگی‌های دینامیکی پلاسمای کوانتومی را مورد بررسی قرار داد. از کاربردهای پلاسمای کوانتومی می‌توان در لیزر-جامدها، اسپینترونیک، نانوساختارهای نیمه‌رسانا (شامل فیلم‌های نازک، نانوتیوپ‌ها، نقاط کوانتومی، وسایل نانو پلاسمونیک) نام برد. [۲، ۳، ۴، ۵]

#### ۲.۲.۱ لیزر-جامد

به عنوان مثال لیزر نئودیم را می‌توان نام برد. سازوکار این نوع لیزر برای عمل کردن بستگی به پلاسمای دارد. لامپ‌های درخش‌زن موجود در آن برای دمیدن به کار برده می‌شوند که حاوی تخلیه الکتریکی‌اند. این نوع از لیزرها مستقیماً با تخلیه الکتریکی تحریک می‌شوند و به‌منظور مطالعه در ناحیه فرو سرخ طیف‌های الکترومغناطیس به کار می‌روند. [۱]

#### ۳.۲.۱ اسپینترونیک

علمی است که جایگزین الکترونیک شده و در آن از اسپین الکترون افزون بر بار الکتریکی آن برای ذخیره و پردازش اطلاعات استفاده می‌کنند. با برهم‌کنش بین نور و نوسان جمعی الکترون‌ها روی سطح فلزات (پلاسمون) برای پردازش و انتقال داده‌ها به‌کار می‌رود. در واقع حالت بالا و پایین اسپین به جای صفر و یک در ذخیره اطلاعات استفاده می‌شود و در آینده تحولی در دستگاه‌های میکروالکترونیک به‌وجود خواهد آمد (شکل ۳.۱). از طبیعت کوانتومی چنین برمی‌آید که اسپین غیر از حالت بالا و پایین می‌تواند حالت بینابینی هم داشته باشد و با استفاده از این خاصیت در پردازش موازی، سرعت بالاتری را به کامپیوترهای کوانتومی ببخشد. قبلاً در حالت نسبی انتقال بار بر مبنای انتقال الکترون‌ها در



یک نیمه‌هادی مانند سیلیکون صورت می‌گرفت، در حال حاضر فیزیکدان‌ها سعی دارند نسل جدیدی از وسایل اسپینترونیکی خلق کنند که در آن به جای بار الکترون، از اسپین آن برای پردازش و ذخیره اطلاعات استفاده کنند.

### ۴.۲.۱ نانو ساختارهای نیمه‌رسانا

یکی از انواع نانو ساختارهای نیمه‌رسانا پلاسمونیک‌ها می‌باشند که در رایانه‌های ابرسرّیع و میکروسکوپ‌های نوری فوق‌العاده قوی کاربرد دارند. تاکنون خواص پلاسمونیک‌ها تنها به نانو ساختارهای با فصل مشترک فلزات نجیب و دی‌الکتریک‌ها محدود می‌شدند، اما اخیراً محققان نشان دادند که چنین ویژگی نیز در نانوبلورهای نیمه‌رسانا (یا همان نقاط کوانتومی) نیز وجود دارد. پلاسمونیک نقاط کوانتومی، قابلیت جالب توجهی در ارتباطات کوانتومی و ابزارهای محاسباتی کوانتومی دارند.

## ۳.۱ پارامترها و مشخصه‌های انواع پلاسماها

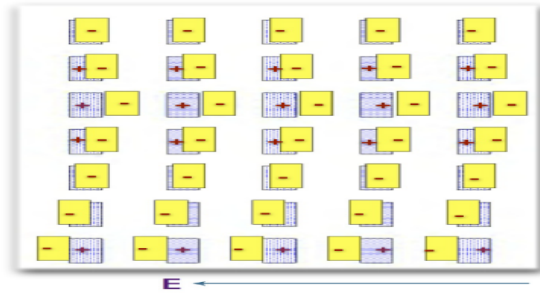
در این بخش پارامترهایی را معرفی می‌کنیم که موضوعاتی مانند طول، زمان، مقیاس‌های سرعت در پلاسماهای کوانتومی یا کلاسیکی را در بر می‌گیرند. پارامترها را بدون بعد در نظر می‌گیریم. در نهایت با کمک پارامترها می‌توان تعیین نمود آیا پلاسما کلاسیکی هست یا کوانتومی، یا این‌که برخوردی هست (در نظر گرفتن اثرات انفرادی تک تک ذرات) و یا غیر برخوردی (در نظر گرفتن اثرات جمعی).

### ۱.۳.۱ رژیم کلاسیکی

با معرفی چهار پارامتر این نوع از پلاسما را مورد بررسی قرار می‌دهیم. پارامترها عبارتند از: چگالی تعداد ذرات (الکترون‌ها)  $n$ ، جرم الکتریکی  $m$ ، بار الکتریکی  $e$ ، برهم‌کنش با نیروهای کولنی (گذردگی الکتریکی  $\varepsilon_0$ ) با کمک چهار کمیت مذکور قادر خواهیم بود کمیتی بسازیم که دارای بعد معکوس زمان باشد که فرکانس نوعی پلاسما نامیده می‌شود.

$$w_p = \left( \frac{e^2 n}{m \varepsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.1)$$

معمولاً فرکانس پلاسما را به الکترون‌ها نسبت می‌دهیم در حالیکه در زمینه‌ای از یون‌های مثبت (یون‌ها به دلیل جرم زیاد فاقد حرکتند) قرار دارند. این نوع از نوسانات پلاسما از این حقیقت نشأت می‌گیرد که با ترک بعضی از الکترون‌ها از قسمتی از پلاسما (خلق بار الکتریکی مثبت) نیروی کولنی تمایل دارد الکترون‌ها را به مکان اولیه (به سوی تجمع بار مثبت) بکشاند. الکترون‌ها به دلیل اینرسی کمی که دارند پر کردن مجدد آنها در ناحیه مثبت آسان نخواهد بود. از طرفی الکترون‌ها به دلیل تحرک بیشتر قدرت این را دارند که مسافت طولانی‌تری طی کنند، بنابراین بار مثبت اضافی را دوباره تولید



شکل ۴.۱: نوسانات پلاسما

می‌کنند (شکل ۴.۱). توجه کنیم که فرکانس پلاسما به دمای سیستم وابسته نیست. اگر دمای محدود  $T$  را مطرح نماییم به رابطه‌ای می‌رسیم که بیانگر سرعت گرمایی در گازهای معمولی می‌باشد.

$$v_T = \left( \frac{K_B T}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (۵.۱)$$

که  $K_B$  ثابت بولتزمن می‌باشد. با ترکیب کمیات (۵.۱) و (۶.۱) می‌توان نوعی مقیاس طول را تعریف نمود که طول دمای نامیده می‌شود.

$$\lambda_D = \frac{v_T}{w_p} = \left( \frac{\epsilon_0 K_B T}{n e^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (۶.۱)$$

### ۲.۳.۱ پارامتر جفت شده کلاسیکی

اکنون به معرفی کمیتی بدون بعد می‌پردازیم که کمیات ذکر شده در مبحث قبل مانند:  $m$  و  $e$  و  $\epsilon_0$  و  $n$  و  $T$  در آن قابل رؤیت باشند.

$$g_c = \frac{e^2 n^{\frac{1}{2}}}{\epsilon_0 K_B T} \quad (۷.۱)$$

که به پارامتر جفت شده کلاسیکی<sup>۲</sup> معروف است. به عبارت دیگر  $g_c$  را به عنوان نسبت برهم کنش (الکتریکی) انرژی  $E_{int}$  به میانگین انرژی جنبشی  $E_{kin}$  معرفی می‌نماییم. که برای ذرات واقع در فاصله بین ذره‌ای  $d = n^{-1/3}$  چنین تعریف می‌شود:  $E_{int} = \frac{e^2}{\epsilon_0 d}$  و  $E_{kin} = K_B T$ .

### ۳.۳.۱ رژیم کوانتومی

می‌دانیم که معمولاً از دیدگاه فیزیکی، به هر ذره دارای حرکت یک طول موج نسبت می‌دهیم، که در ابعاد کوانتومی به طول موج دو بروی  $\lambda_B$  معروف است. در حقیقت اثرات کوانتومی ذرات موجود در پلاسما بوسیله طول موج گرمایی دو بروی تعریف می‌شود که تقریباً گستردگی فضایی تابع موج ذرات را نشان

<sup>۲</sup>graininess parameters

می‌دهد. البته این نکته را یادآور می‌شویم برای رژیم‌های کلاسیکی طول موج دوبروی آنقدر کوچک هست که می‌توان ذرات را به عنوان شبه‌نقطه‌ای در نظر گرفت. می‌دانیم چنانچه طول موج دوبروی بزرگتر از میانگین فاصله متوسط بین ذرات باشد اثرات کوانتومی مطرح شده و نقش مهمی را در سیستم ایفا می‌کنند. این ویژگی را به صورت رابطه‌ای بیان می‌کنیم که جزء یکی از شروط اساسی و بنیادی برای پلاسماهای کوانتومی می‌باشد.

$$n\lambda_B^3 \geq 1 \quad (۸.۱)$$

در مکانیک آماری برای گازهای معمولی زمانی اثرات کوانتومی مطرح می‌شوند که دما پایین‌تر از دمای فرمی  $T_F$  باشد. به عنوان نمونه رابطه زیر را تعریف می‌کنیم

$$K_B T_F = E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3} \quad (۹.۱)$$

که  $E_F$  را انرژی فرمی سیستم می‌نامیم. وقتی که الکترون‌ها به سمت تبهگنی پیش روند، اثرات کوانتومی مطرح می‌شوند. این تبهگنی به کمک نسبت دمای فرمی به دمای پلاسما (پارامتر تبهگنی) سنجیده می‌شود.

$$\chi = \frac{T_F}{T} \quad (۱۰.۱)$$

( $\chi \geq 1$ ) ما با دومین شرط اساسی پلاسماهای کوانتومی روبرو شده ایم. از آنجایی که در محدوده دماهای پایین سرعت گرمایی بی‌معنا می‌شود، لذا سرعت فرمی-دیراک (فرمی) را جایگزین می‌نماییم

$$v_F = \left(\frac{2E_F}{m}\right)^{1/2} = \frac{\hbar}{m} (3\pi^2 n)^{1/3} \quad (۱۱.۱)$$

که با فرکانس پلاسما و سرعت فرمی می‌توان نوعی مقیاس طول را تعریف نمود

$$\lambda_F = \frac{v_F}{\omega_p} \quad (۱۲.۱)$$

که  $\lambda_F$  طول مقیاس پوشش الکتروستاتیک در پلاسماهای کوانتومی را توصیف می‌کند.

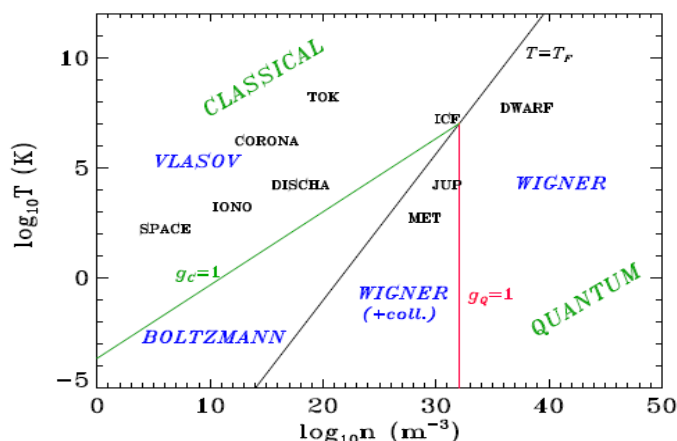
### ۴.۳.۱ پارامتر جفت شده کوانتومی

اکنون پارامتر جفت شده کوانتومی<sup>۳</sup> را به عنوان سومین شرط اساسی پلاسماهای کوانتومی بیان می‌کنیم. که به صورت نسبت برهم‌کنش  $E_{int}$  به میانگین انرژی جنبشی  $E_{kin}$  تعریف می‌نماییم. در اینجا انرژی جنبشی را به صورت انرژی فرمی تعریف می‌کنیم  $E_{kin} = E_F$  و با این فرضیات خواهیم داشت:

$$g_Q = \frac{E_{int}}{E_F} = \frac{2}{(3\pi^2)^2} \frac{e^2 m}{\hbar \epsilon_0 n^{1/3}} \sim \left(\frac{1}{n\lambda_F^3}\right)^{2/3} \sim \left(\frac{\hbar\omega_p}{E_F}\right)^2 \quad (۱۳.۱)$$

زمانی که  $g_Q \geq 1$  اثرات کوانتومی مهم می‌شوند. از رابطه (۱۳.۱) چنین برمی‌آید که پلاسماهای کوانتومی در چگالی‌های بالا در مقایسه با پلاسماهای کلاسیکی بهم‌پیوستگی بیشتری دارند.

<sup>۳</sup>quantum coupling parameters



شکل ۵.۱: [۱۲] نمودار لگاریتمی دما بر حسب چگالی و تعیین محدوده پلاسماهای کلاسیکی و کوانتومی

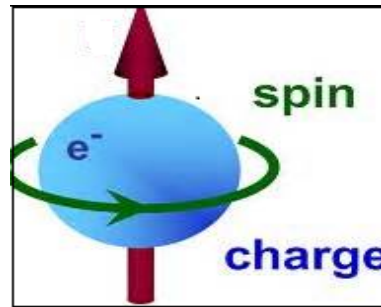
### ۵.۳.۱ پارامترهای بدون بعد و نقش آنها در پلاسمای کوانتومی

تا اینجا سه پارامتر بدون بعد برای پلاسماهای کوانتومی را توصیف نمودیم که عبارتند از پارامتر جفت شده کلاسیکی، پارامتر جفت شده کوانتومی و پارامتر تبهگنی که به ترتیب با  $g_c$  و  $g_Q$  و  $\chi$  نشان می‌دهیم. این پارامترها تابع دما و چگالی سیستم‌اند که در شکل (۵.۱) بر حسب نمودار لگاریتمی  $T - n$  رژیم‌های گوناگون پلاسما را توصیف می‌نماییم.

نمودار به چهار ناحیه تقسیم شده که دو ناحیه کلاسیکی (در بالای خط  $T = T_F$ ) و دو ناحیه دیگر کوانتومی‌اند. هر ناحیه کوانتوم/کلاسیکی، به دو زیر ناحیه برخوردی/غیربرخوردی، محدود شده است. همانطور که در شکل بالا دیده می‌شود، خط  $T = T_F$  ( $\chi = 1$ ) نمودار را به دو ناحیه تقسیم‌بندی کرده است. ناحیه  $\chi \leq 1$  ناحیه کلاسیکی و ناحیه‌ای که  $\chi \geq 1$  باشد وارد ناحیه کوانتومی خواهیم شد. در ناحیه کلاسیکی با توجه به اثرات گرمایی و پدیده برخورد بین ذرات پلاسما، دو ناحیه ولاسف و بولتزمن را داریم. در ناحیه ولاسف به دلیل غالب شدن اثرات گرمایی، از برخوردهای بین ذرات پلاسما صرف‌نظر می‌کنیم و اصطلاحاً این محدوده را ناحیه کلاسیکی-غیر برخوردی می‌نامیم. خط  $g_c = 1$  مرز بین دو ناحیه کلاسیکی بوده و شرط  $g_c \leq 1$  مربوط به ناحیه کلاسیکی-غیر برخوردی می‌باشد. پدیده‌های طبیعی مربوط به این ناحیه عبارتند از: پلاسماهای فضایی، بادهای خورشیدی، تاج خورشید، همجوشی با توکامک، یونسفر زمین و تخلیه الکتریکی.

ناحیه کلاسیکی دیگر که با شرط  $g_c \geq 1$  همراه است، ناحیه بولتزمن می‌باشد. اگر در یک پلاسمای کلاسیکی پارامتر جفت شده کلاسیکی بزرگتر از یک شود، یعنی انرژی داخلی در قیاس با انرژی جنبشی بزرگتر باشد، برخوردها را در نظر می‌گیریم. لذا در این ناحیه برخوردهای بین ذرات را نمی‌توان نادیده گرفت و این ناحیه به شدت جفت شده را محدوده کلاسیکی-برخوردی بولتزمن می‌نامیم.

با شرط  $\chi \geq 1$  وارد ناحیه کوانتومی می‌شویم. می‌بینیم که در این ناحیه چگالی تعداد ذرات به شدت بالاست و دمای نسبتاً پایین دارند (از آنجا که در پلاسما دما نسبت به چگالی سنجیده می‌شود، به دلیل گستره بالای چگالی، ذرات درون این محدوده دمای به نسبت پایینی را احساس می‌کنند). ناحیه



شکل ۶.۱: اسپین الکترون

کوانتومی با خط  $g_Q = 1$  به دو زیر ناحیه برخوردی و غیر برخوردی تقسیم می‌شود. جاییکه برخوردهای کولنی بین ذرات همنام و غیر همنام را در نظر بگیریم وارد ناحیه  $wigner(+coll)$  خواهیم شد که با شرط  $g_Q \geq 1$  همراه بوده و الکترون‌های فلزی و همچنین هسته سیاره مشتری از پدیده‌های طبیعی این محدوده محسوب می‌شوند.

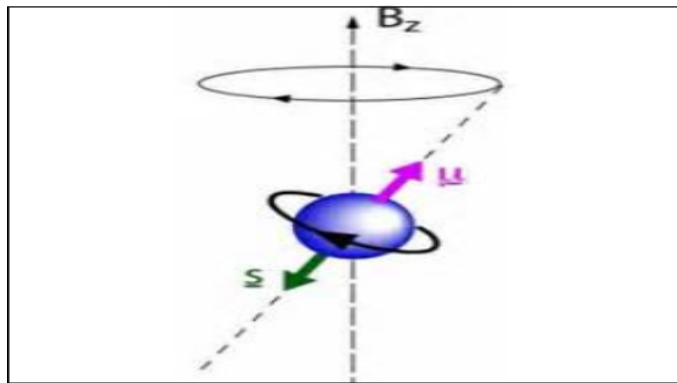
در انتها شرط  $g_Q \leq 1$  ما را به سمت ناحیه کوانتومی- غیربرخوردی سوق می‌دهد. از آنجاییکه برای پلاسمای کاملاً تپه‌گن تمام ذرات در سطح فرمی هستند و دارای انرژی فرمی می‌باشند. پلاسمای کوانتومی را بدون برخورد گوییم زمانیکه انرژی جنبشی (انرژی فرمی) بر انرژی داخلی سیستم غلبه کند. ستارگان کوتوله سفید از پدیده‌های طبیعی این ناحیه می‌باشند.

## ۴.۱ اسپین

اسپین از خاصیت‌های بنیادی ذرات زیر اتمی است که معادل کلاسیک ندارد و یک خاصیت کوانتومی به شمار می‌رود. نزدیکترین خاصیت کلاسیکی به اسپین، اندازه حرکت زاویه‌ای آن است (شکل ۶.۱). ذراتی که اسپین نیم‌صحیح دارند اصطلاحاً فرمیون گویند، که از قوانین آماری فرمی-دیراک تبعیت می‌کنند. حرکت چرخشی الکترون (با بار منفی) مانند حلقه جریانی است که گشتاور مغناطیسی خاص خود را به دنبال دارد. گشتاور مغناطیسی هم‌راستا با اسپین بوده ولی در جهت مخالف آن است. این امر را می‌توان با این تصویر کلاسیک درک کرد که اگر گشتاور زاویه‌ای ناشی از اسپین حول یک محور ایجاد شود، به دلیل بار منفی الکترون، جریان الکتریکی که این دوران را ایجاد می‌کند در جهتی مخالف جاری می‌شود، این حلقه‌های جریان گشتاور مغناطیسی ایجاد می‌کنند که در راستای اسپین اما در جهت مخالف آن خواهد بود (شکل ۷.۱).

## ۵.۱ هدف پایان‌نامه

پلاسماهای کوانتومی امروزه یک موضوع تحقیقاتی مدرن و گسترده‌ای را تشکیل می‌دهد. اخیراً همچنین پلاسماهای کوانتومی که در آن خواص کوانتومی ذرات پلازما قابل ملاحظه است مورد توجه بسیاری از



شکل ۷.۱: راستای گشتاور مغناطیسی و اسپین الکترون

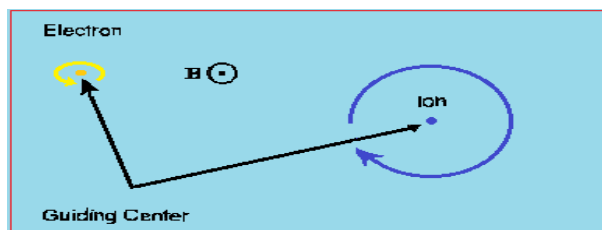
محققان قرار گرفته است. [۲، ۳، ۶] رفتار جمعی ذرات کوانتومی در یک میدان مغناطیسی می‌تواند جزیی از تئوری کلاسیکی مگنتوهیدرودینامیک باشد که مگنتو پلاسمای کوانتومی نامیده می‌شود. بحث پلاسمای کوانتومی نشان می‌دهد که رفتار جمعی ذرات کوانتومی یک موضوع جالب و کاربردی در آزمایشگاه و در محیط‌های ستاره‌ای می‌باشد. حرکت ذرات با اسپین کوانتومی در یک میدان مغناطیسی قوی همانند لیزرهای پر توان نمونه ای از پدیده‌های کوانتومی فیزیکی می‌باشد. این مطالعات بیشتر بر روی خواص تک ذره تمرکز دارد. اخیراً همچنین خواص جنبشی پلاسمای اسپینی مورد مطالعه قرار گرفته است [۲، ۳، ۴، ۵، ۶]. میدان‌های قوی ظاهر شده در تب اختری و محیط‌های مغناطیده باعث می‌شود این نوع پلاسمای کوانتومی مغناطیده را با استفاده از نظریه جنبشی مطالعه کرد. در این پروژه ابتدا معادلات مگنتوهیدرودینامیک را با مدل سیالی در حضور اثرات کوانتومی و اسپین الکترون بازنویسی می‌کنیم. امواج غیر خطی سالی تونی و ضربه‌ای در چنین پلاسمای در حضور اسپین بررسی خواهند شد. و در پایان با استخراج معادله‌ی غیرخطی (KPB) به روش (RPM) و یافتن جواب‌های دقیق آن با کمک روش ( $\tanh$ ) ساختارهای این امواج را با استفاده از نتایج مربوطه مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم.



## فصل ۲

مدل‌های توصیف پلاسما و معادلات حاکم بر آن





شکل ۱.۰۲: مدل ذره‌ای

## ۱.۰۲ مقدمه

در سال‌های اخیر مطالعه پلاسماهای چگال مورد توجه محققین قرار گرفته است، پلاسماهای چگال در برخی از موارد می‌تواند چگالی در حدود چند برابر چگالی یک فلز داشته باشد. لذا گستره بسیار وسیع چگالی، تحلیل پلاسما را دشوار می‌سازد. از آنجاییکه پلاسما یک سیستم خودسازگار است، روش‌هایی که به کار می‌بریم جهت حل مسأله، را یک مدل توصیف پلاسما گویند. در حقیقت مدل توصیف‌کننده پلاسما باید این توانایی را داشته باشد که بتواند رفتار این سیستم پلاسمایی را به طور کامل شرح دهد. سه مدل ذره‌ای، سیالی، جنبشی جهت توصیف رفتارهای این سیستم پلاسمایی تحت شرایط مختلف، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

## ۲.۰۲ مدل‌های توصیف پلاسما

### ۱.۲.۰۲ مدل ذره‌ای

گاهی پلاسما می‌تواند بسیار رقیق باشد، تا آنجا که مسیرهای حرکت هر ذره را به تنهایی مورد مطالعه قرار دهیم. ساده‌ترین مدلی که برای توصیف پلاسما به کار می‌رود بررسی رفتار تک تک ذرات در میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی با استفاده از نیروی لورنتس می‌باشد. با این مدل ساده بسیاری از رفتارهای ذرات پلاسما مانند بسامد سیکلوترونی، شعاع لارمور و بسیاری از سرعت‌های سوق ذرات تشکیل‌دهنده پلاسما را می‌توان بدست آورد. این مدل خام بوده و در بسیاری از موارد قابل استفاده نیست. [۱]

### ۲.۲.۰۲ مدل سیالی

در پلاسما میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی از قبل معین نشده‌اند، بلکه با حرکت مکان‌های خود ذرات باردار، تعیین می‌شوند. در واقع ما باید یک مسأله خود سازگار را حل نمایم، یعنی یافتن مجموعه‌ای از مسیرهای ذره و نقش‌های میدان، به طوریکه ذرات حین حرکت در مدارهای خود میدان‌ها را به وجود می‌آورند و میدان‌ها باعث حرکت ذرات در آن مدارهای دقیق می‌شوند و این باید در یک وضعیت متغیر زمانی انجام شود. برای رفع این مشکل هویت ذره منفرد نادیده گرفته می‌شود و تنها حرکت جزءهای

سیال به حساب آورده می‌شود. البته در مورد پلاسمای سیال حاوی بارهای الکتریکی است. در حالیکه در سیال معمولی، برخوردهای فراوان بین ذرات آن‌ها را در یک جزء سیال نگه می‌دارد که با هم حرکت کنند. روابط مدل سیالی برای پلاسمای کلاسیکی از معادلات هیدرودینامیک کلاسیکی به همراه معادلات الکترومغناطیس و برای پلاسمای کوانتومی از مفاهیم کوانتومی و تابع موج کوانتومی به دست می‌آیند.

### ۳.۲.۲ مدل جنبشی

مدل دیگری که برای توصیف پلاسمای مورد استفاده قرار می‌گیرد، به مدل نظریه جنبشی مشهور است، در این مدل از تابع توزیع حرکت ذرات پلاسمای برای توصیف رفتار آن استفاده می‌شود.

## ۳.۲ مدل‌های توصیف پلاسمای کلاسیکی

### ۱.۳.۲ مدل سیالی و معادلات حاکم بر آن برای پلاسمای کلاسیکی

در ابتدا معادله ناویر-استوکس را معرفی می‌نماییم. این معادله سیالی را توصیف می‌کند که در آن برخوردهای فراوان بین ذرات وجود دارد

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right] = -\nabla p + \rho \nu \nabla^2 u \quad (1.2)$$

که در آن  $\rho = nm$  چگالی بار در واحد حجم،  $u$  سرعت سیالی،  $p$  فشار سیال و  $\nu$  فرکانس برخورد می‌باشد. رابطه (۵۱.۴) را معادله حرکت برای پلاسمای کلاسیکی می‌نامند. که اولین معادله از سری معادلات سیالی می‌باشد. دومین رابطه از مدل سیالی معادله پیوستگی می‌باشد.

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(nu) = 0 \quad (2.2)$$

معادلات ماکسول عبارتند از:

$$\varepsilon \nabla \cdot E = \sigma \quad (3.2)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (4.2)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (5.2)$$

$$\nabla \times B = \mu \left( j + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \right) \quad (6.2)$$

در نهایت معادله حرکت و معادله پیوستگی به همراه معادلات ماکسول، دسته معادلات مدل سیالی کلاسیکی را تشکیل می‌دهند.

### ۲.۳.۲ مدل نظریه جنبشی برای پلاسماهای کلاسیکی

در این مدل برای بررسی سازوکار پلاسما از تابع توزیع سرعت استفاده می‌شود. سرعت ذرات در پلاسما کلاسیکی از تابع توزیع ماکسول-بولتزمن پیروی می‌کند. از آنجا که دمای بالا و چگالی کم از مشخصه‌های بارز پلاسماهای کلاسیکی است، برخوردها در آن به ندرت رخ می‌دهند و انحراف از تعادل گرمایی می‌تواند در مدت زمان‌های نسبتاً طولانی باقی بماند. لذا انحراف تابع توزیع ذرات از توزیع ماکسولی، موجب ناپایداری در سیستم پلاسما خواهد شد. در نتیجه جهت بررسی عملکرد چنین سیستمی از مدل نظریه جنبشی بهره می‌جوییم. [۱]

### ۳.۳.۲ تابع توزیع ماکسول-بولتزمن

تابع سرعت ماکسولی، شامل هفت متغیر مستقل می‌باشد که به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$f = f(\vec{r}, \vec{v}, t) = f(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t) \quad (7.2)$$

تعداد ذرات در  $m^3$  در نقطه  $r$  و زمان  $t$  را با  $f = f(\vec{r}, \vec{v}, t)$  نشان می‌دهیم که مؤلفه‌های سرعت بین  $v$  و  $dv$  را توصیف می‌کند.

$$n(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = \int f(r, v, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (8.2)$$

گازی حاوی ذرات متحرک با انرژی جنبشی  $\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$  توزیع سرعت ماکسول-بولتزمن متناسب با  $\exp(-\frac{m\mathbf{v}^2}{2kT})$  را اختیار می‌کند و برای آن خواهیم داشت:

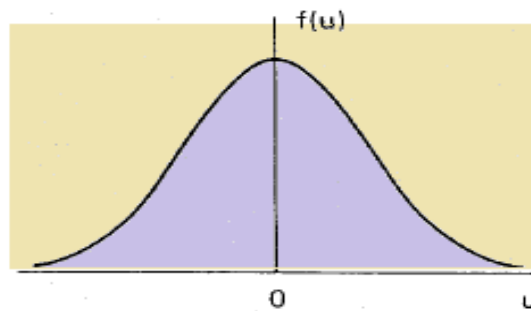
$$f(v_x, v_y, v_z) = A \exp[-\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/kT] \quad (9.2)$$

$$n(r, v, t) = A \int \exp(-\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/kT) d^3v \quad (10.2)$$

با فرض  $a = \frac{m}{2kT}$  و با توجه به  $\int e^{-ax^2} dx = (\frac{\pi}{a})^{\frac{1}{2}}$  انتگرال بالا را حل می‌نماییم.

$$n(\mathbf{r}, t) = A \left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{3/2} \quad (11.2)$$

$$A = n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \quad (12.2)$$



شکل ۲.۲: تابع توزیع ماکسولی

اگر تابع توزیع ماکسولی بهنجار باشد، یعنی داشته باشیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} = 1 \quad (13.2)$$

آنگاه این یک تابع احتمال است که آن را با  $\hat{f}$  نشان می‌دهیم. بنابراین می‌توان نوشت:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \quad (14.2)$$

باید توجه کرد که  $\hat{f}$  باز هم تابعی از هفت متغیر است که توزیع و چگالی آن می‌تواند نسبت به فضا و زمان تغییر کند. که این تابع توزیع با اهمیت، تابع ماکسول-بولتزمن است.

$$\hat{f}_m = \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{v^2}{v_{th}^2}\right) \quad (15.2)$$

که در آن  $v \equiv (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2}$  و  $v_{th} \equiv \left(\frac{2KT}{m}\right)^{1/2}$  داریم و  $K$  ثابت بولتزمن،  $T$  دمای پلازما،  $v_{th}$  سرعت گرمایی ذرات می‌باشد (شکل ۲.۲) این تابع توزیع را نشان می‌دهد.

## ۴.۲ مدل‌های توصیف پلاسمای کوانتومی

کلیه‌ی مدل‌های توصیف پلاسمای کوانتومی از یک یا چند طریق، بر مبنای معادله شرودینگر برای توابع موج ذرات تشکیل دهنده پلازما بدست آمده‌اند. از آنجاییکه در تمام مدل‌ها سرعت فاز خیلی کوچکتر از سرعت نور می‌باشد بنابراین مدل‌ها غیر نسبیتی خواهند بود، و اثرات نسبیتی را نادیده خواهیم گرفت. در ارائه مدل‌های پلاسمای کوانتومی باید تمام ذرات را کوانتومی فرض کنیم. یعنی ذرات تشکیل دهنده پلازما را متشکل از فرمیون‌ها و بوزون‌ها که توابع توزیع کوانتومی دارند، در نظر بگیریم. در مکانیک کوانتومی از مفاهیم احتمال استفاده می‌کنیم، بنابراین باید در بدست آوردن شکل جدید معادلات، احتمال حضور ذره را در نظر بگیریم. مدل اساسی برای توصیف مسأله  $N$  جسمی کوانتومی که با  $N$  تابع موج

$\psi(x_1, x_2, \dots, x_N, t)$  تعریف شده و هر یک به طور جداگانه در معادله شرودینگر صدق می‌کنند اندکی کار غیر واقعی به نظر می‌رسد. بنابراین قابل قبول است که فرض کنیم تابع موج  $N$  جسمی به صورت حاصل ضرب  $N$  تابع تک-جسمی است.

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_N, t) = \psi_1(x_1, t)\psi_2(x_2, t)\dots\psi_N(x_N, t) \quad (۱۶.۲)$$

زمانیکه پارامتر جفت شده کوانتومی  $g_Q$  کوچک باشد آنگاه مجموعه  $N$  جسمی تابع موج، مخلوط کوانتومی (یا حالت آمیخته کوانتومی) نامیده می‌شود که معمولاً با ماتریس چگالی نشان داده می‌شود.

$$\rho(x, y, t) = \sum_{\alpha=1}^N p_{\alpha} \psi_{\alpha}(x, t) \psi_{\alpha}^*(y, t) \quad (۱۷.۲)$$

فرض می‌کنیم همه توابع موج به طور یکسان بهنجار شده‌اند به  $\int |\psi_{\alpha}|^2 dx = 1$  یکی دیگر از محدودیت‌هایی که به ذرات کوانتومی وارد می‌شود اصل عدم قطعیت است که امکان اندازه‌گیری مکان و تکانه ذره را در یک لحظه خاص غیر ممکن سازد. لذا تقریب هارتری و هارتری-فوک را معرفی می‌نماییم.

## ۱.۴.۲ تقریب هارتری

یکی از روشهایی که به حل دستگاه‌های بس الکترونی می‌پردازد و متغیر اصلی در آن تابع موج می‌باشد روش هارتری است. جمله مربوط به هسته‌ها را، به دلیل جرم زیاد و سرعت کم آن‌ها در مقایسه با الکترون‌ها، به صورت کلاسیکی حل کرده و در پایان به نتیجه الکترون‌ها که به صورت کوانتومی حل می‌شود، اضافه می‌کنند.

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 - \sum_{i \neq j} z \frac{e^2}{|r_i - r_j|} + \frac{e^2}{2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{|r_i - r_j|}\right) \psi_i = \varepsilon_i \psi_i \quad (۱۸.۲)$$

هارتری فرض کرد که الکترون‌ها ذرات مستقلی از یکدیگرند و تحت پتانسیل کولنی ناشی از سایر الکترون‌ها حرکت می‌کنند. روش هارتری معایبی دارد که یکی از آن پادمتقارن نبودن توابع است که سبب می‌شود برای دستگاه‌های فرمیونی مناسب نباشد. به عبارت دیگر اصل طرد پاولی در نظریه هارتری صدق نمی‌کند و این نقایص توسط فوک و اسلیتر اصلاح شدند.

### ۲.۴.۲ تقریب هارتری-فوک-اسلیتر

در این تقریب اصل طرد پاؤلی و اسپین الکترون‌ها در نظر گرفته شده و تابع موج سیستم که تابعی از مکان الکترون‌هاست به صورت دترمینان اسلاتر نمایش داده می‌شود.

$$\psi_{HF}(r_1\sigma_1, r_2\sigma_2, \dots, r_N\sigma_N) = \frac{1}{N!} \begin{vmatrix} \psi_1(r_1\sigma_1) & \psi_1(r_2\sigma_2) & \dots & \psi_1(r_N\sigma_N) \\ \psi_2(r_1\sigma_1) & \psi_2(r_2\sigma_2) & \dots & \psi_2(r_N\sigma_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi_N(r_1\sigma_1) & \psi_N(r_2\sigma_2) & \dots & \psi_N(r_N\sigma_N) \end{vmatrix} \quad (19.2)$$

در این رابطه‌ها  $\psi_i$  ویژه توابع تک ذره‌اند و تابعی از مختصات فضایی  $r_i$  و  $\sigma_i$  در این تقریب فرض شده است که می‌توان بر هم کنش اسپینی را از مختصات فضایی جدا کرد. در این انتخاب تابع موج نسبت به تعویض ذرات پاد متقارن است. معادله هارتری و فوک همان معادله هارتری است با این تفاوت که با آن یک جمله تبدالی که ناشی از برهم‌کنش اسپین الکترون‌هاست اضافه شده است. با در نظر گرفتن تبادل، انرژی‌های تک ذره ای کاهش پیدا می‌کنند.

### ۳.۴.۲ مدل سیالی و معادلات حاکم بر آن برای پلاسمای کوانتومی

در پلاسمای کوانتومی، معادلات مگنتوهیدرودینامیک کوانتومی  $QMHD$  از معادلات پایستگی الکترون، تکانه الکترون، و معادله پواسون به وسیله مدولاسیون تابع موج الکترون در معادله شرودینگر بدست می‌آیند. بنابراین همانطور که اشاره کردیم یک رویکرد کاملاً معادل با سیستم ویگنر-پواسون، حل معادله پواسون به همراه  $N$  معادله شرودینگر می‌باشد.  $N$  معادله شرودینگر مستقل از یکدیگر بوده و  $N$  تابع موج  $\psi_{\alpha}(x,t)$  به صورت مستقیم در آن‌ها صدق می‌کنند.

$$i\hbar \frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_{\alpha}}{\partial x^2} - e\phi \psi_{\alpha} \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (20.2)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{e}{\epsilon_0} \left( \sum_{\alpha=1}^N p_{\alpha} |\psi_{\alpha}|^2 - n_0 \right) \quad (21.2)$$

با هدف مطالعه‌ی اثر خودسازگار الکترون‌های اتمی تحت تاثیر پتانسیل کولنی هسته، این نوع مدل که از مدل هارتری بدست می‌آید در زمینه فیزیک اتمی ابتدایی به نظر می‌رسید. پس از آن فوک برای گروه فرمیون‌ها تابع موج  $N$  ذره ای را معرفی کرد (مدل فوک) و آن را توسعه داد که در اینجا این توسعه در نظر گرفته نمی‌شود. در عوض مفید است معادلات شرودینگر-پواسون (به عنوان مقایسه مکانیک کوانتومی با مدل چند جریانی داوسون) در نظر بگیریم. داوسون فرض کرد روابط پراکندگی فیزیکی به

عنوان جمع جریان‌های  $N$  تایی می‌توان نمایش داد که هر مؤلفه بوسیله تابع احتمال  $P_\alpha$ ، چگالی  $n_\alpha$ ، سرعت  $u_\alpha$  بدست می‌آید.

$$f(x, v, t) = \sum_{\alpha=1}^N p_\alpha n_\alpha(x, t) \delta(v - u_\alpha(x, t)) \quad (22.2)$$

که  $\delta$  نمایشگر تابع دلتای دیراک است و جریان‌های نامحدود، رشته‌های باریکی در فضای فاز را نشان می‌دهند. اگر  $f$  از معادله ولاسف تبعیت کند، پس توابع  $n_\alpha$  و  $u_\alpha$  به‌طور رضایت‌بخشی از معادلات پایستگی تکانه و پیوستگی پیروی می‌کنند.

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_\alpha u_\alpha) = 0 \quad (23.2)$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} = \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (24.2)$$

این رابطه را به طریق زیر اثبات می‌نماییم. در ابتدا از معادله کلی حرکت ذره شروع می‌کنیم

$$mn \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right] = qn(E + v \times B) \quad (25.2)$$

وقتی پلاسما سرد باشد  $KT_i = KT_e = 0$  و در غیاب میدان مغناطیسی  $B = 0$  معادله حرکت خطی شده عبارت است از:

$$mn_0 \left[ \frac{\partial u_{e1}}{\partial t} + (u_0 \cdot \nabla) u_{e1} \right] = en_0 E_1$$

با توجه به اینکه  $E = -\nabla\phi$  داریم:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \right] u = -\frac{e}{m} (-\nabla\phi)$$

## ۴.۴.۲ روش مادلانگ در مدل سیالی

ذرات تشکیل‌دهنده‌ی یک پلاسما کوانتومی مقید نیستند و از خود رفتاری شبیه به سیال نشان می‌دهند، به همین دلیل پلاسما کوانتومی را شبه‌سیال می‌نامند. بنابراین از تابع موجی که خاصیت سیالی پلاسما را داشته باشد استفاده می‌کنیم. تابع موج به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi_\alpha = A_\alpha \exp\left(\frac{is_\alpha}{\hbar}\right) \quad (26.2)$$

دامنه حقیقی  $A_\alpha(x, t)$  و فضای فاز  $s_\alpha(x, t)$  وابسته به حالت خاص  $\psi_\alpha$  را معرفی می‌کنیم چگالی  $n_\alpha$  و سرعت  $u_\alpha$  هر جریان با رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$n_\alpha = |\psi_\alpha|^2 = A_\alpha^2$$

$$u_\alpha = \frac{1}{m} \frac{\partial s}{\partial x} \quad (27.2)$$

یک رویکرد نسبتاً عمومی به شاره‌های کوانتومی تجزیه تابع موج سیستم با روش مادلانگ می‌باشد. *Bohm* و *Broglie* با قرار دادن تابع موج الکترون در معادله شرودینگر و تجزیه آن دینامیک بسته موج الکترون را در حالت کلاسیکی بررسی کردند.

$$i\hbar \left[ \frac{\partial A}{\partial t} \exp\left(\frac{is_\alpha}{\hbar}\right) + A \left( \frac{i}{\hbar} \frac{\partial s}{\partial t} \exp\left(\frac{is_\alpha}{\hbar}\right) \right) \right] = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial A}{\partial x} \exp\left(\frac{is_\alpha}{\hbar}\right) + A \frac{i}{\hbar} \frac{\partial s}{\partial x} \exp\left(\frac{is_\alpha}{\hbar}\right) \right] - e\phi A \exp\left(\frac{is_\alpha}{\hbar}\right)$$

رابطه بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$i\hbar \frac{\partial A}{\partial t} \exp\left(\frac{is_\alpha}{\hbar}\right) - A \frac{\partial s}{\partial t} \exp\left(\frac{is_\alpha}{\hbar}\right) = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \exp\left(\frac{is_\alpha}{\hbar}\right) + \frac{\partial A}{\partial x} \frac{i}{\hbar} \frac{\partial s}{\partial x} \exp\left(\frac{is_\alpha}{\hbar}\right) \right] + \frac{i}{\hbar} \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} \exp\left(\frac{is_\alpha}{\hbar}\right) + \frac{i}{\hbar} A \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \exp\left(\frac{is_\alpha}{\hbar}\right) + A \frac{i^2}{\hbar^2} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \exp\left(\frac{is_\alpha}{\hbar}\right) \exp\left(\frac{is_\alpha}{\hbar}\right) - e\phi A \exp\left(\frac{is_\alpha}{\hbar}\right)$$

سپس قسمت‌های حقیقی و موهومی را جدا می‌نماییم.

در ابتدا برای قسمت حقیقی خواهیم داشت:

$$A \frac{\partial s}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{A}{\hbar^2} \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} - e\phi A$$

$$\frac{1}{m} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m^2} \left[ \frac{\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}}{A} \right] + \frac{1}{2m} \frac{\partial s}{\partial x} \left( \frac{1}{m} \frac{\partial s}{\partial x} \right) + \frac{e}{m} \phi = 0$$

$$\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial s}{\partial t} \right) + \frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}}{A} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{1}{m} \frac{\partial s}{\partial x} \right) \left( \frac{1}{m} \frac{\partial s}{\partial x} \right) \right] + \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{m} \frac{\partial s}{\partial x} \right) + \frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}}{A} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right) \right] + \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$$

جمله  $\frac{1}{m} \frac{\partial s}{\partial x}$  همان  $u_\alpha$  است پس برای معادله بالا میتوان نوشت:

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} = \frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}}{A} \right] + \frac{e}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (28.2)$$

اثرات کوانتومی دارای ترم  $\hbar$  هستند. اگر  $\hbar = 0$  باشد به مدل چند جریانی کلاسیکی می‌رسیم. عبارت

$$\frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}}{A} \right)$$

پتانسیل بوهم نامیده می‌شود.

و همچنین برای قسمت موهومی داریم

$$i\hbar \frac{\partial A}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{i}{\hbar} \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{i}{\hbar} \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{i}{\hbar} A \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

که برابر است با:

$$i\hbar \frac{\partial A}{\partial t} = - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial A}{\partial x} \left( \frac{1}{m} \frac{\partial s}{\partial x} \right) - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial A}{\partial x} \left( \frac{1}{m} \frac{\partial s}{\partial x} \right) - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial A}{\partial x} \left( \frac{1}{m} \frac{\partial s}{\partial x} \right) - \frac{i\hbar}{2} A \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{m} \frac{\partial s}{\partial x} \right)$$

پس از ساده نمودن عبارات از طرفین معادله و با توجه به رابطه خواهیم داشت:

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_\alpha u_\alpha) = 0 \quad (29.2)$$



### ۵.۴.۲ مدل نظریه جنبشی برای پلاسمای کوانتومی

در بخش‌های قبل تابع توزیع سرعت (ماکسول-بولتزمن) برای پلاسمای کلاسیکی را معرفی نمودیم که در آن ذرات در زمان و مکان دارای سرعت‌های متفاوتی می‌باشد. این تعریف برای ذرات کوانتومی کاملاً تبهگن بی‌معنی می‌باشد. به همین دلیل مدل نظریه جنبشی در کوانتوم با مشابه کلاسیکی خود از نظر فیزیکی کاملاً تفاوت دارد. طبق اصل عدم قطعیت امکان داشتن دقیق تکانه و مکان به‌طور همزمان برای ذرات در یک لحظه وجود ندارد. لذا این امر ما را به سوی معرفی تابع توزیع جدید سوق می‌دهد. این تابع توزیع باید بر اساس احتمال مکان ذرات و سرعت آن‌ها تعریف شود. همانطور که در بخش قبل اشاره کردیم در تقریب هارتری، هر الکترون به وسیله یک تابع موج تک‌ذره ای که از معادله شرودینگر تبعیت می‌کند توصیف می‌شود و نیروی الکتروستاتیکی که بر آن وارد می‌شود از معادله پواسون نشأت می‌گیرد. بنابراین با استفاده از تقریب هارتری می‌توانیم تابع توزیع جدیدی را معرفی نماییم، این تابع توزیع در پلاسمای کوانتومی، تابع توزیع ویگنر نامیده می‌شود.

### ۶.۴.۲ تابع توزیع ویگنر

تصویر ویگنر ابزار مفیدی برای مباحث مکانیک کوانتومی در فضای فاز می‌باشد. تابع ویگنر در فضای فاز برحسب متغیرهای  $(x, v)$  وزمان می‌باشد که برای تابع موج تک ذره به صورت رابطه زیر تعریف می‌کنیم.

$$f(x, v, t) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{m}{\sqrt{\pi\hbar}} p_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\alpha}^*(x + \frac{\lambda}{\sqrt{\pi\hbar}}, t) \psi_{\alpha}(x - \frac{\lambda}{\sqrt{\pi\hbar}}, t) \exp(\frac{imv\lambda}{\hbar}) d\lambda \quad (30.2)$$

توزیع کوانتوم- مکانیکی چگالی فضایی را با استفاده از تابع ویگنر به صورت زیر تعریف می‌نمائیم

$$n(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v, t) dv = \sum_{\alpha=1}^N p_{\alpha} |\psi_{\alpha}|^2 \quad (31.2)$$

همچنین به این نکته توجه داشته باشیم که همه توابع فضای فاز لزوماً از تابع ویگنر حاصل نمی‌شوند. به طور کلی با وجود اینکه یافتن تابع ویگنری که  $N$  تابع موج را تعریف نماید امری بدیهی است، اما عملیات معکوس آن امکان‌پذیر نمی‌باشد. معمولاً از تابع ویگنر برای بدست آوردن معادلات نظریه جنبشی پلاسمای کوانتومی استفاده می‌نماییم در پایان می‌توان گفت تابع ویگنر از معادله تحول زیر تبعیت می‌نماید

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{em}{\sqrt{\pi\hbar}} \iint d\lambda dv' \exp \frac{im(v-v')\lambda}{\hbar} [\phi(x + \frac{\lambda}{\sqrt{\pi\hbar}}) - \phi(x - \frac{\lambda}{\sqrt{\pi\hbar}})] f(x, v', t) = 0 \quad (32.2)$$

### ۷.۴.۲ معادلات نظریه‌ی جنبشی برای پلاسماهای کوانتومی

برای بررسی پلاسمای کوانتومی با این مدل، تغییرات تابع ویگنر نسبت به زمان منجر به معادلات نظریه‌ی جنبشی کوانتومی می‌شود. تحولات تابع ویگنر با معادلات پواسون و ماکسول جفت می‌شود و معادلات ویگنر- پواسون و ویگنر- ماکسول که معادلات نظریه جنبشی برای پلاسمای کوانتومی‌اند را نتیجه می‌دهد. اگر در یک پلازما تنها اثرات الکتروستاتیک خودسازگار را در نظر بگیریم، از معادله ویگنر- پواسون استفاده می‌کنیم. اما چنانچه هدف ما بررسی اثرات الکترومغناطیسی خودسازگار در یک پلازما باشد، معادله‌ی ویگنر- ماکسول را به کار می‌بریم. روش بدست آوردن هر دو رابطه یکسان است. برای این منظور از تغییرات تابع ویگنر نسبت به زمان شروع می‌نماییم. اکنون به اثبات معادله تحولی (۳۲.۲) می‌پردازیم. در ابتدا می‌دانیم تحول یک عملگر مانند  $A$  در مکانیک کلاسیک را چنین تعریف می‌کنیم

$$\frac{dA}{dt} = \frac{i}{\hbar}[A, H]$$

که در مکانیک کوانتوم به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\frac{df_w}{dt} = \{ \{ f_w(x, p, t), H(x, p) \} \}$$

عبارت سمت راست به گروه مایول معروف است. رابطه‌ی ای که برای گروه مایول تعریف می‌کنیم عبارت است از

$$\{ \{ F, H \} \}(x, p) = \left[ \frac{1}{\pi \hbar} \int dp' dp'' dx' dx'' F(x + x', p + p', t) H(x + x', p + p') \right. \quad (33.2)$$

$$\left. \times \sin\left(\frac{1}{\hbar}(x' p'' - x'' p')\right) \right] \quad (34.2)$$

این رابطه را با اعمال تغییر متغیرهایی به ترتیب برای مکان و تکانه  $x' \rightarrow \lambda x' \rightarrow q$  و  $p' \rightarrow \eta$  و  $p'' \rightarrow \xi$  همچنین اینکه  $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$  به صورت رابطه زیر می‌نویسیم

$$\frac{dF_w}{dt} = \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi} \hbar} \int d\lambda d\xi dq d\eta \left[ H\left(q - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \hbar \lambda, \eta + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \hbar \xi\right) - H\left(q + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \hbar \lambda, \eta - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \hbar \xi\right) \right] \right. \quad (35.2)$$

$$\left. \times F(q, \eta, t) \exp i[\lambda(\eta - \xi) + \xi(q - \lambda)] \right]$$

رابطه فوق با معادلات پواسون و ماکسول جفت شده و نتیجه آن رسیدن به معادلات ویگنر- پواسون و ویگنر- ماکسول می‌باشند که معادلات اساسی نظریه‌ی جنبشی پلاسمای کوانتومی خواهند بود.

### ۸.۴.۲ معادله ویگنر- پواسون

به منظور بدست آوردن معادله‌ی ویگنر- پواسون تابع هامیلتونی رابطه (۳۵.۲) را بسط می‌دهیم. هامیلتونی در یک سیستم از ذرات باردار و بدون در نظر گرفتن اسپین که با میدان الکتروستاتیک خود در اندرکنش باشد با رابطه‌ی زیر داده می‌شود.

$$H = \frac{p^2}{2m} - eU(r)$$

هامیلتونی را حول نقطه مکانی  $q$  و  $\lambda$  بسط می‌دهیم

$$H(\eta \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \hbar \xi, q \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \hbar \lambda) = H(\eta, q \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \hbar \lambda) + \frac{1}{\sqrt{2}} \hbar (\xi \cdot \nabla) \eta + (\eta, q \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \hbar \lambda) + \dots$$

$$H(\eta, q \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \hbar \lambda) = \frac{p^2(\eta)}{2m} - e\varphi(q \pm \hbar \frac{\lambda}{\sqrt{2}})$$

نتیجه حاصل از بسط هامیلتونی را در رابطه (۷.۲) جاگذاری می‌نمائیم

$$\begin{aligned} \frac{dF_W}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda d\xi dq d\eta [e\varphi(q - \frac{1}{\sqrt{2}} \hbar \lambda) - e\varphi(q + \frac{1}{\sqrt{2}} \hbar \lambda)] \\ &\times F(q, \eta, t) \exp i[\lambda(\eta - p) + \xi(q - r)] \end{aligned}$$

اولین انتگرال نسبت به متغیر تکانه  $\xi$  گرفته می‌شود. البته به نکته زیر نیز توجه داریم

$$\int d\xi \exp[\xi(q - \lambda)] = \delta(q - \lambda)$$

$$\begin{aligned} \frac{dF_W}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda dq d\eta [e\varphi(q - \frac{1}{\sqrt{2}} \hbar \lambda) - e\varphi(q + \frac{1}{\sqrt{2}} \hbar \lambda)] \\ &\times F_W(q, \eta, t) \exp[i\lambda(\eta - \xi)] \delta(q - \lambda) \end{aligned}$$

با در نظرگیری نکته زیر انتگرال بعدی نسبت به متغیر مکانی  $q$  گرفته می‌شود.

$$\int dq \delta(q - \lambda) = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{dF_W}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda d\eta [e\varphi(q - \frac{1}{\sqrt{2}} \hbar \lambda) - e\varphi(q + \frac{1}{\sqrt{2}} \hbar \lambda)] \\ &\times F(q, \eta, t) \exp[i\lambda(\eta - \xi)] \end{aligned}$$

برای مشتق‌گیری جزئی داشتیم

$$\frac{dF(r, v, t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t}$$

جمله  $\frac{\partial r}{\partial t}$  معادل است با  $v = \frac{p}{m}$  همچنین در حالت کلاسیکی به دلیل عدم نیروی لورنتس ( $F = 0$ )

جمله  $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{F}{m}$  صفر می‌شود و در نهایت داریم

$$\frac{df(r, v, t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial f}{\partial r}$$

به عنوان نتیجه نهایی داریم

$$\begin{aligned} \frac{dF_W}{dt} + \frac{p}{m} \frac{\partial F_W}{\partial r} &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \frac{ie}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda d\eta [\varphi(q - \frac{1}{\sqrt{2}} \hbar \lambda) - \varphi(q + \frac{1}{\sqrt{2}} \hbar \lambda)] \\ &\times F(q, \eta, t) \exp[i\lambda(\eta - \xi)] \end{aligned} \quad (۳۶.۲)$$

این رابطه در واقع همان معادله تحولی (۳۵.۲) است با این تفاوت که متغیرهای مکانی و تکانه تغییر کرده‌اند. رابطه‌ی فوق، معادله‌ی ویگنر-پواسون را نشان می‌دهد و برای بررسی پلاسماهای کوانتومی با استفاده از نظریه‌ی جنبشی کوانتومی، هنگامیکه اثرات مغناطیسی خودسازگار در سیستم نادیده گرفته می‌شود، استفاده می‌گردد. این معادله به دلیل سادگی نسبی کاربرد بیشتری نسبت به معادله‌ی ویگنر-ماکسول در بررسی رفتارهای پلاسمای کوانتومی دارد. البته برای توجیه برخی از رفتارهای پلاسمای کوانتومی از اثرات مغناطیسی صرف‌نظر کرد و باید از معادله‌ی ویگنر-ماکسول استفاده نمود.

### ۹.۴.۲ بدست‌آوردن رابطه پاشندگی با استفاده از معادله‌ی ویگنر-پواسون

نتایج حاصل از خطی‌سازی معادلات تحول تابع ویگنر و پواسون حول نقطه تعادل همگن فضایی  $f_0(v)$  منجر به رابطه پاشندگی به شکل  $\varepsilon(w, k) = 0$  می‌شود که ثابت دی‌الکتریک  $\varepsilon$  نامیده می‌شود. برای رسیدن به رابطه مربوط به ثابت دی‌الکتریک ابتدا معادله پواسون را خطی‌سازی می‌نمائیم

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} [\phi_0 + \phi_1] \right) = \frac{e}{\varepsilon_0} [(n_0 + n_1)_i - (n_0 + n_1)_e]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} \phi_1 \right) = \frac{e}{\varepsilon_0} (-n_{1e})$$

فرض می‌کنیم  $\phi_0 = \text{constant}$  در نتیجه  $\frac{\partial}{\partial x} \phi_0 = 0$  از طرفی در حالت تعادل و با فرض ساکن بودن یون‌ها می‌توان نوشت  $n_{0i} = n_{0e}$  و  $n_{1i} = 0$  سپس با استفاده از تبدیل فوریه داریم:

$$ik(ik\phi_1) = -\frac{e}{\varepsilon_0} n_{1e}$$

$$k^2 \phi_1 = \frac{e}{\varepsilon_0} n_{1e}$$

از آنجا که برای چگالی ذرات  $n = \int f dv$  را می‌توان تعریف کرد بنابراین با استفاده از همین نکته در رابطه بالا خواهیم داشت:

$$k^2 \phi_1 = \frac{e}{\varepsilon_0} \int f_1 dv \quad (37.2)$$

رابطه‌ی (۳۶.۲) را در نظر گرفته و با تغییر متغیر  $\hbar\lambda = \Delta$  میتوان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_w}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial f_w}{\partial x} + \frac{i}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \phi(x - \frac{\Delta}{\sqrt{2}}, t) - \phi(x + \frac{\Delta}{\sqrt{2}}, t) \right] \\ \times \exp(i\frac{p-p'}{\hbar}\Delta) f_w(x, p', t) dp' d\Delta = 0 \end{aligned} \quad (38.2)$$

جمله درون کروشه در عبارت بالا شدیداً نوسانی است و در محدوده خیلی کوچک اطراف  $\Delta = 0$  با اهمیت می‌شود. در نتیجه از تقریب زیر می‌توان استفاده کرد

$$\phi(x - \frac{\Delta}{\sqrt{2}}, t) - \phi(x + \frac{\Delta}{\sqrt{2}}, t) \simeq -\Delta \frac{\partial \phi}{\partial x} = \Delta E(x, t) = -\Delta(ik)\phi \quad (39.2)$$

با توجه به نکته بالا و استفاده از بسط، عبارت درون کروشه را می‌توان بر حسب تابع نمایی نوشت:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\exp\left(ik\frac{\Delta}{\nu}\right) = 1 + ik\frac{\Delta}{\nu} + \frac{1}{2!}\left(\frac{ik\Delta}{\nu}\right)^2 + \dots$$

$$\exp\left(-ik\frac{\Delta}{\nu}\right) = 1 - ik\frac{\Delta}{\nu} + \frac{1}{2!}\left(\frac{ik\Delta}{\nu}\right)^2 - \dots$$

$$\exp\left(ik\frac{\Delta}{\nu}\right) - \exp\left(-ik\frac{\Delta}{\nu}\right) = 1 - 1 + ik\frac{\Delta}{\nu} + ik\frac{\Delta}{\nu} + \frac{1}{2!}\left(\frac{ik\Delta}{\nu}\right)^2 - \frac{1}{2!}\left(\frac{ik\Delta}{\nu}\right)^2 + \dots \simeq ik\Delta$$

پس خواهیم داشت:

$$[\exp\left(ik\frac{\Delta}{\nu}\right) - \exp\left(-ik\frac{\Delta}{\nu}\right)]\phi(k) = ik\Delta\phi$$

با خطی‌سازی رابطه (۳۸.۲) و قرار دادن  $f_w = f(v) + f_1(x, v, t)$  که  $f_1$  به عنوان تابع پراکندگی کوچک اطراف نقطه همگن  $f(v)$  در نظر گرفته می‌شود. همچنین با تبدیل فوریه حول نقطه  $x$  خواهیم داشت:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - ikvf_1 + \frac{i}{2\pi\hbar^2} \iint \exp\left(i\frac{p-p'}{\hbar}\Delta\right) [\exp\left(ik\frac{\Delta}{\nu}\right) - \exp\left(-ik\frac{\Delta}{\nu}\right)] \phi(k) F(p') dp' d\Delta$$

(۴۰.۲)

که  $k$  تبدیل فوریه  $x$  است. انتگرال اول را حول  $\Delta$  محاسبه می‌نماییم

$$\exp\left(i\frac{p-p'}{\hbar}\Delta\right) \exp\left(ik\frac{\Delta}{\nu}\right) d\Delta - \int \exp\left(i\frac{p-p'}{\hbar}\Delta\right) \exp\left(-ik\frac{\Delta}{\nu}\right) d\Delta$$

با توجه به اینکه:

$$\int e^{i(k-k')x} dx = 2\pi\delta(k - k')$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\int \exp\left[i\left(\frac{p-p'}{\hbar} + \frac{k}{\nu}\right)\Delta\right] d\Delta = \int \exp\left[i\Delta\left(\frac{2p-2p'+\hbar k}{2\hbar}\right)\right] d\Delta = \int \exp\left[\frac{i\Delta}{\hbar}\left(p-p' + \frac{\hbar k}{\nu}\right)\right] d\Delta$$

می‌بینیم که با حل یکی از انتگرال‌ها به تابع دلتا می‌رسیم یعنی:

$$\int \exp\left[\frac{i\Delta}{\hbar}\left(p-p' + \frac{\hbar k}{\nu}\right)\right] d\Delta = 2\pi\hbar\delta\left(p + \frac{\hbar k}{\nu} - p'\right)$$

با کم کردن انتگرال‌ها از یکدیگر خواهیم داشت

$$\int \exp\left(i\frac{p-p'}{\hbar}\Delta\right) \exp\left(ik\frac{\Delta}{\nu}\right) - \int \exp\left(i\frac{p-p'}{\hbar}\Delta\right) \exp\left(-ik\frac{\Delta}{\nu}\right) =$$

$$2\pi\hbar\delta\left(p + \frac{\hbar k}{\nu} - p'\right) - 2\pi\hbar\delta\left(p - \frac{\hbar k}{\nu} - p'\right) = 2\pi\hbar\left[\delta\left(p + \frac{\hbar k}{\nu} - p'\right) - \delta\left(p - \frac{\hbar k}{\nu} - p'\right)\right]$$

(۴۱.۲)

سپس انتگرال دوم را در رابطه (۴۰.۲) بر حسب  $p'$  محاسبه می‌نماییم

$$\frac{i}{2\pi\hbar^2} (2\pi\hbar) \int [\delta(p + \frac{\hbar k}{2} - p') - \delta(p - \frac{\hbar k}{2} - p')] \phi(k) F(p') dp' \quad (42.2)$$

با توجه به اینکه

$$\int \delta(k - k') F(k') dk' = F(k)$$

معادل (۴۲.۲) عبارت است از

$$\frac{i}{\hbar} \hbar F(p + \frac{\hbar k}{2}) - F(p - \frac{\hbar k}{2}) \phi(k) \quad (43.2)$$

از نکته (۳۹.۲) داشتیم

$$-\Delta \frac{\partial}{\partial x} (\phi) = E(k, t) \Delta$$

با تبدیل فوریه

$$-\Delta (ik) \phi = E(k, t) \Delta \rightarrow \phi(k) = -\frac{E(k, t)}{ik} \quad (44.2)$$

با جاگذاری در (۴۳.۲)

$$\frac{i}{\hbar} \left( -\frac{E(k, t)}{ik} \right) \left[ F(p + \frac{\hbar k}{2}) - F(p - \frac{\hbar k}{2}) \right]$$

در نهایت برای (۴۰.۲) داریم:

$$\frac{\partial f_{\uparrow}}{\partial t} + v \frac{\partial f_{\uparrow}}{\partial x} + \frac{E(k, t)}{\hbar k} \left[ F(p + \frac{\hbar k}{2}) - F(p - \frac{\hbar k}{2}) \right] = 0$$

که با تبدیل فوریه خواهیم داشت:

$$-i\omega f_{\uparrow} + ikv f_{\uparrow} + E(k, t) \frac{F(p + \frac{\hbar k}{2}) - F(p - \frac{\hbar k}{2})}{\hbar k} = 0$$

که معادل است با

$$-if_{\uparrow}(\omega - kv) - ik\phi(k) \frac{F(p + \frac{\hbar k}{2}) - F(p - \frac{\hbar k}{2})}{\hbar k} = 0 \quad (45.2)$$

با توجه به (۳۷.۲) عبارت معادل با  $\phi(k)$  را می‌نویسیم

$$-if_{\uparrow} - ik \left( \frac{e}{k^2 \epsilon_0} \int f_{\uparrow} dv \right) \frac{F(p + \frac{\hbar k}{2}) - F(p - \frac{\hbar k}{2})}{\hbar k (\omega - kv)} = 0$$

که برابر است با

$$-if_{\uparrow} \left( 1 + \frac{e}{k\epsilon_0} \int dv \right) \frac{F(p + \frac{\hbar k}{2}) - F(p - \frac{\hbar k}{2})}{\hbar k (\omega - kv)} = 0$$

همچنین با فرض اینکه  $\epsilon_0 = n_0 = e = 1$  خواهیم داشت

$$\epsilon_{wp}(\omega, k) = 1 + \frac{m\omega_p^2}{k} \int \frac{f_0(v + \frac{\hbar k}{2m}) - f_0(v - \frac{\hbar k}{2m})}{\hbar k (\omega - kv)} dv \quad (46.2)$$

رابطه پاشندگی به دست آمده را با ثابت دی‌الکتریک نشان می‌دهیم. که با استفاده از آن می‌توان قطبش

پذیری، جریان پلاریزاسیون و... در سیستم پلاسمایی را بررسی نمود.

همچنین چنانچه  $\hbar \rightarrow 0$  به رابطه پاشندگی شبه‌کلاسیکی ولاسف-پواسون می‌رسیم که در آن از اثرات برخوردی صرف‌نظر شده است.

### ۱۰.۴.۲ بدست‌آوردن رابطه پاشندگی با استفاده از تقریب هارتری

در مباحث قبلی با استفاده از جاگذاری رابطه‌ی (۲۶.۲) در معادله‌ی شرودینگر و معادله‌ی پواسون، به رابطه‌های (۲۸.۲) و (۲۹.۲) رسیدیم. اکنون می‌توان با خطی‌سازی این دو معادله که به نحوی مکمل رابطه پواسون حول نقطه تعادل فضایی می‌باشد، شکل دیگری از رابطه پاشندگی را بدست آورد. در ابتدا از خطی‌سازی روابط شروع می‌نماییم:

$$\frac{\partial}{\partial t}[(n_0 + n_1) + \frac{\partial}{\partial x}[(n_0 + n_1)(u_0 + u_1)] = 0$$

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + \frac{\partial n_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_0 u_0) + \frac{\partial}{\partial x}(n_0 u_1) + \frac{\partial}{\partial x}(n_1 u_0) + \frac{\partial}{\partial x}(n_1 u_1) = 0$$

فرضیات  $u_0 = 0 \rightarrow \nabla u_0 = 0$  و  $n_0 = \text{constant} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} n_0 = 0$  را در نظر می‌گیریم بنابراین داریم

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_1 u_0) = \frac{\partial n_1}{\partial t} + \frac{\partial n_1}{\partial x} u_0 + \frac{\partial u_0}{\partial x} n_1$$

جمله دوم در طرف راست به دلیل عدم وجود جریان اولیه ( $u_0 = 0$ ) صفر می‌شود. پس عبارت نهایی خطی شده معادله پیوستگی عبارت خواهد بود از

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = -\nabla(n_0 u_1)$$

$$\nabla \rightarrow ik \text{ و } \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -iw \text{ یعنی تبدیل فوریه می‌زنیم}$$

$$-iwn_1 = -ikn_0 u_1$$

که معادل است با

$$n_1 = \frac{k}{w} n_0 u_1 \quad (۴۷.۲)$$

اکنون معادله (۲۸.۲) را خطی‌سازی می‌نماییم

$$\frac{\partial(v_0 + v_1)}{\partial t} + (v_0 + v_1) \frac{\partial}{\partial x}(v_0 + v_1) = \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial x}(\phi_0 + \phi_1) + \frac{\hbar^2}{2m^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \sqrt{n_0 + n_1}}{\partial x^2} \right) \quad (۴۸.۲)$$

ابتدا عبارت معادل با پتانسیل بوهم را خطی‌سازی می‌نماییم

$$\frac{\hbar^2}{2m^2} \nabla \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \nabla^2 \sqrt{n} \right) = \frac{\hbar^2}{2m^2} \nabla \left( \frac{1}{\sqrt{n_0 + n_1}} \nabla^2 \sqrt{n_0 + n_1} \right) \cong \frac{\hbar^2}{4m^2} \left[ \frac{1}{n_0} \nabla (\nabla^2 n_1) \right]$$

$$\begin{aligned} \nabla \left( \frac{1}{\sqrt{n_0 + n_1}} \nabla^2 \sqrt{n_0 + n_1} \right) &= \frac{1}{n_0} \left( 1 - \frac{n_1}{n_0} \right) \left( \frac{1}{2} \nabla \nabla^2 n_1 \right) - \frac{1}{2n_0} \nabla n_1 \nabla^2 n_0 - \frac{1}{2n_0} \nabla n_0 \nabla^2 n_1 \\ &+ \frac{n_1}{2n_0^2} \nabla n_0 \nabla^2 n_0 - \frac{1}{4n_0} \nabla (2 \nabla n_0 \cdot \nabla n_1) + \frac{1}{4n_0^2} n_1 \nabla (\nabla n_0)^2 \\ &+ \frac{1}{2n_0} (\nabla n_0)^2 \nabla n_1 + \frac{1}{n_0^2} (\nabla n_0 \cdot \nabla n_1) \nabla n_0 - \frac{1}{n_0^2} (\nabla n_0)^2 n_1 \nabla n_0 \end{aligned}$$

از آنجا که  $n_0 = constant$  بنابراین خطی سازی را حول نقطه  $n_0$  در نظر می‌گیریم، لذا  $\nabla n_0 = 0$  و  $\nabla^2 n_0 = 0$  برای رابطه بالا پس از حذف عبارات نتیجه بدست آمده عبارت است از

$$\nabla \left( \frac{1}{\sqrt{n_0 + n_1}} \nabla^2 \sqrt{n_0 + n_1} \right) = \frac{1}{n_0} \frac{1}{2} \nabla \nabla^2 n_1 - \frac{n_1}{n_0} \frac{1}{2} \nabla \nabla^2 n_1 = \frac{1}{2n_0} \nabla \nabla^2 n_1 \quad (49.2)$$

ادامه روند خطی‌سازی رابطه (۲۸.۲)

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} v_1 = -\frac{e}{m} m v + \frac{\hbar^2}{2m^2} \left( \frac{1}{2n_0} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} n_1 \right) \quad (50.2)$$

البته به این نکته توجه داریم که فرض  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = m v$  را در طرف راست رابطه اعمال نمودیم. اکنون با استفاده از تبدیل فوریه خواهیم داشت

$$-i\omega v_1 + ik v_0 v_1 = -\frac{e}{m} m v_1 + ik^3 \frac{\hbar^2}{4m^2 n_0} n_1 \quad (51.2)$$

اکنون برای رسیدن به رابطه پاشندگی کافی است با استفاده از ترکیب معادلات خطی‌سازی پواسون و پیوستگی و معادله حرکت، با در نظر گرفتن سرعت اولیه برای پلاسمای  $v_0 \neq 0$  معادله نهایی را بدست آوریم. خطی سازی معادله پیوستگی با توجه به  $v_0 = constant$  عبارت است از

$$\frac{\partial(n_0 + n_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(n_0 + n_1)(v_0 + v_1)]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_0}{\partial t} + \frac{\partial n_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} [n_0 v_0 + n_0 v_1 + n_1 v_0 + n_1 v_1] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (n_0 v_1 + n_1 v_0) \\ &= \frac{\partial n_0}{\partial x} v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x} n_0 + \frac{\partial n_1}{\partial x} v_0 + \frac{\partial v_0}{\partial x} n_1 \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x} n_0 + \frac{\partial n_1}{\partial x} v_0 \end{aligned}$$

$$-i\omega n_1 = ik v_1 n_0 + ik n_1 v_0$$

$$n_1 = n_0 \frac{k}{\omega - k v_0} v_1 \quad (52.2)$$

برای خطی‌سازی معادله پواسون میتوان نوشت:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{e}{\epsilon_0} \left( \int f dv - n_0 \right) \quad (53.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} [\phi_0 + \phi_1] \right) = \frac{e}{\epsilon_0} [(n_0 + n_1)_i - (n_0 + n_1)_e]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} \varphi_1 \right) = \frac{e}{\epsilon_0} (-n_1)_e$$



فرض می‌کنیم  $\varphi_0 = constant$  در نتیجه  $\frac{\partial}{\partial x}\varphi_0 = 0$  از طرفی در حالت تعادل و با فرض ساکن بودن یون‌ها می‌توان نوشت  $n_{\alpha i} = 0$  و  $n_{\alpha e} = n_{\alpha 0}$  سپس با استفاده از تبدیل فوریه داریم

$$ik(ik\varphi_1) = -\frac{e}{\varepsilon_0}n_{1e}$$

$$k^2\varphi_1 = \frac{e}{\varepsilon_0}n_{1e} \quad (54.2)$$

از طرفی با توجه به تعریف دیگری برای چگالی الکترون‌ها داریم:

$$n(x, t) = \int f(x, v, t)dv = \sum_{\alpha=1}^N p_{\alpha} |\psi_{\alpha}|^2$$

لذا با جاگذاری عبارت معادل با چگالی الکترون‌ها عبارت خطی شده چنین خواهد بود:

$$k^2\phi_1 = \frac{e}{\varepsilon_0} (\sum_{\alpha=1}^N p_{\alpha}) |\psi_{\alpha}|^2$$

این عبارت را در رابطه خطی سازی شده (۳۴.۲) جاگذاری می‌نماییم

$$-i\omega v_1 + ikv_0 v_1 = \frac{e}{m} ik\phi_1 - ik^3 \frac{\hbar^2}{4m^2 n_0} n_1 \quad (55.2)$$

$$-i\omega v_1 + ikv_0 v_1 = \frac{e}{m} i \left[ \frac{e}{\varepsilon_0 k} (\sum_{\alpha=1}^N p_{\alpha} (\frac{kn_0}{w - kv_0} v_1)) \right] - ik^3 \frac{\hbar^2}{4m^2 n_0} (\frac{kn_0}{w - kv_0} v_1) \quad (56.2)$$

با حذف  $i$  و  $v_1$  از طرفین خواهیم داشت

$$-(w - kv_0) = w_p^2 \sum_{\alpha=1}^N p_{\alpha} \frac{1}{(w - kv_0)} - \frac{\hbar^2}{4m^2 (w - kv_0)} k^4 \quad (57.2)$$

عبارت  $w - kv_0$  را در طرفین ضرب می‌نماییم

$$-(w - kv_0)^2 - \frac{\hbar^2 k^4}{4m^2} = w_p^2 \sum_{\alpha=1}^N p_{\alpha} \quad (58.2)$$

طرفین را بر  $(w - kv_0)^2 - \frac{\hbar^2 k^4}{4m^2}$  تقسیم می‌نماییم

$$1 = \sum_{\alpha=1}^N p_{\alpha} \frac{w_p^2}{(w - kv_0)^2 - \frac{\hbar^2 k^4}{4m^2}} \quad (59.2)$$

رابطه‌ی پاشندگی بدست آمده برابر با

$$\varepsilon = 1 - \sum_{\alpha=1}^N p_{\alpha} \frac{w_p^2}{(w - kv_0)^2 - \frac{\hbar^2 k^4}{4m^2}} \quad (60.2)$$

که در آن  $\varepsilon$  ثابت دی‌الکتریک می‌باشد.

### ۱۱.۴.۲ بررسی معادله ویگنر- پواسون در محدوده کلاسیکی

یکی از شرایط اعتبار مدل‌هایی که برای یک پلاسمای کوانتومی می‌نویسیم، این است که در شرایط حدی به مورد کلاسیکی‌اش میل کند. بنابراین می‌توان نشان داد که هنگامیکه اثرات کوانتومی در سیستم قابل صرف نظر کردن باشد، یعنی هنگامیکه  $\hbar \rightarrow 0$  میل کند، معادله ویگنر- پواسون به معادله ولاسف تبدیل خواهد شد. به همین دلیل پس از اعمال یک تغییر متغیر در تابع پتانسیل رابطه (۳۶.۲) خواهیم داشت:

البته توجه داریم که عبارت درون کروشه رابطه (۳۶.۲) را برحسب متغیرهای مکانی  $\lambda$  و  $q$  و همچنین با در نظر گرفتن تغییر متغیر  $\lambda = \frac{\xi}{m}$  بسط می‌دهیم

$$\varphi\left(x + \frac{\lambda\hbar}{\gamma}\right) \rightarrow \varphi\left(x + \frac{\hbar\xi}{\gamma m}\right)$$

به طور کلی عبارت بسط حول نقطه متغیر مکانی  $\xi$  را چنین تعریف می‌نمائیم

$$\varphi\left(x \pm \frac{\hbar\xi}{\gamma m}, t\right) \simeq \varphi(x, t) \pm \frac{\hbar}{\gamma m}(\xi \cdot \nabla)\varphi(x, t) + \frac{1}{\gamma!}\left(\frac{\hbar}{\gamma m}\right)^{\gamma}(\xi \cdot \nabla)^{\gamma}\varphi(x, t) \pm \dots \quad (۶۱.۲)$$

همچنین داریم:

$$\varphi\left(x \pm \frac{\hbar\xi}{\gamma m}\right) \simeq \varphi(x) \pm \frac{\hbar}{\gamma m}(\xi \cdot \nabla)\varphi(x) + \frac{1}{\gamma!}\left(\frac{\hbar\xi}{\gamma m}\right)^{\gamma}(\xi \cdot \nabla)^{\gamma}\varphi(x) \pm \frac{1}{\gamma!}\left(\frac{\hbar}{\gamma m}\right)^{\gamma}(\xi \cdot \nabla)^{\gamma}\varphi(x) + \dots \quad (۶۲.۲)$$

عبارت معادل با جمله درون کروشه رابطه (۳۶.۲) را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \varphi\left(x + \frac{\hbar\lambda}{\gamma}\right) - \varphi\left(x - \frac{\hbar\lambda}{\gamma}\right) &= \varphi(x) - \varphi(x) + \frac{\hbar}{\gamma m}[(\xi \cdot \nabla) + (\xi \cdot \nabla)]\varphi(x) \\ &+ \frac{1}{\gamma!}\left(\frac{\hbar}{\gamma m}\right)^{\gamma}(\xi \cdot \nabla)^{\gamma}\varphi(x) - \frac{1}{\gamma!}\left(\frac{\hbar}{\gamma m}\right)^{\gamma}(\xi \cdot \nabla)^{\gamma}\varphi(x) \\ &+ \frac{\gamma}{\gamma!}\left[\left(\frac{\hbar}{\gamma m}\right)^{\gamma}(\xi \cdot \nabla)^{\gamma}\right]\varphi(x) \end{aligned}$$

نتیجه بدست آمده را در رابطه (۳۵.۲) جاگذاری می‌نمائیم

$$\frac{em}{\gamma\pi i\hbar^{\gamma}} \int \int d\lambda dv' e^{[im(v-v')\frac{\lambda}{\hbar}]} \left[ \frac{\gamma\hbar}{\gamma m}(\xi \cdot \nabla) + \frac{\hbar^{\gamma}}{\gamma m^{\gamma}}(\xi \cdot \nabla)^{\gamma} \right] \varphi(x) f(x, v', t) \quad (۶۳.۲)$$

از طرفی داریم

$$\exp[i\xi(v-v')] = \frac{i}{\xi} \frac{\partial}{\partial v'} \exp(i\xi \cdot (v-v')) dv' \quad (۶۴.۲)$$

$$\frac{1}{\gamma\pi} \int \exp[iw(t-x)] dw = \delta(t-x)$$

انتگرال اول را نسبت به  $\xi$  با کمک نکته (۶۴.۲) و تغییر متغیرهای  $p = mv$  و  $\eta = mv'$  حل می‌نمائیم.

$$\frac{e\gamma\pi}{\gamma\pi i m^{\gamma}} \int dv' \delta(v-v') \left[ (\nabla_{v'} \cdot \nabla) + \frac{\hbar^{\gamma}}{\gamma m^{\gamma}} (\nabla_{v'} \cdot \nabla)^{\gamma} \right] \varphi(x) f(x, v, t)$$

با حل انتگرال نسبت به  $v'$  داریم

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{e}{m} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\hbar^2}{24m^2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \frac{\partial^3 F}{\partial v^3} \right]$$

که معادل است با

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{-e\hbar^2}{24m^3} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \frac{\partial^3 f}{\partial v^3}$$

در حد  $\hbar \rightarrow 0$  معادله جمله‌ای شبه کلاسیکی را نشان می‌دهد که به معادله ولاسف معروف است.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{e}{m} E \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{e\hbar^2}{24m^3} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \frac{\partial^3 f}{\partial v^3} + O(\hbar^4) \quad (65.2)$$

در معادله ولاسف به دلیل اینکه از برخوردها صرف نظر می‌شود سمت راست معادله همواره برابر با صفر می‌باشد.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{e}{m} E \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{e}{\epsilon_0} \left( \int f dv - n_0 \right) \quad (66.2)$$

رابطه اخیر معادله پواسون می‌باشد. از جفت‌شدگی معادله پواسون با معادله ویگنر سیستم ویگنر پواسون (WP) را خواهیم داشت که در مطالعه حامل‌های کوانتومی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

## ۱۲.۴.۲ معادله ویگنر-ماکسول

چنانچه در پلاسما برهم‌کنش ذرات با میدان‌های خودسازگار را در نظر بگیریم از معادله ویگنر-ماکسول استفاده می‌کنیم. هامیلتونی چنین سیستمی عبارت است از:

$$H = \frac{\Pi^2}{2m} - eU \quad (67.2)$$

که در رابطه‌ی فوق  $U$  پتانسیل الکتروستاتیکی،  $\Pi$  عملگر تکانه کانونیک می‌باشد.

$$\Pi = p - \frac{e}{c} A(r) \quad (68.2)$$

معادله شرودینگر یک ذره در میدان مغناطیسی عبارت است از:

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = H\rho - H^* \rho \quad (69.2)$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{(p - \frac{e}{c}A)^2}{2m} + eU \\ &= \frac{p^2}{2m} - \frac{e}{2mc}(pA + Ap) + \frac{e^2}{2mc^2}A^2 + eU \end{aligned} \quad (70.2)$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{ie\hbar}{2mc}(\nabla A + A\nabla) + \frac{e^2}{2mc^2}A^2 + eU \quad (۷۱.۲)$$

$$H^* = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{ie\hbar}{2mc}(\nabla A + A\nabla) + \frac{e^2}{2mc^2}A^2 + eU$$

$$H\rho = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\rho + \frac{ie\hbar}{2mc}(\rho\nabla A + A\nabla\rho) + \frac{e^2}{2mc^2}A^2\rho + eU\rho \quad (۷۲.۲)$$

$$H^*\rho = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta'\rho - \frac{ie\hbar}{2mc}(\rho\nabla' A + A'\nabla'\rho) + \frac{e^2}{2mc^2}A'^2\rho + eU'\rho \quad (۷۳.۲)$$

اختلاف بین روابط بالا را بدست می آوریم

$$\begin{aligned} H\rho - H^*\rho = & \left[-\frac{\hbar^2}{2m}[(\Delta - \Delta')\rho + \rho(\nabla A + \nabla' A)]\right. \\ & + \frac{ie\hbar}{2mc}[(A\nabla\rho + A'\nabla'\rho) + (\rho\nabla A + \rho'\nabla' A)] \\ & \left. + \frac{e^2}{2mc^2}[A^2(R, t) - A'^2(R', t)\rho] + e[U(R, t) - U(R', t)]\rho\right] \quad (۷۴.۲) \end{aligned}$$

روابط بین ماتریس چگالی و تابع توزیع ویگنر با استفاده از تبدیلات فوریه عبارت است از:

$$\begin{aligned} f(r, p, t) &= \int \rho\left(r + \frac{a}{2}, r - \frac{a}{2}, t\right) \exp\left(\frac{-ipa}{\hbar}\right) d^3a \\ \rho(R, R', t) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int f\left(\frac{R+R'}{2}, P, t\right) \exp\left(\frac{ip' \cdot (R-R')}{\hbar}\right) d^3p \quad (۷۵.۲) \end{aligned}$$

همچنین می توان نوشت

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\rho}{\partial t} = & H\left\{\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int f\left(\frac{R+R'}{2}, P', t'\right) \exp\left(\frac{ip' \cdot (R-R')}{\hbar}\right) d^3p'\right\} \\ & - H^*\left\{\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int f\left(\frac{R+R'}{2}, P', t\right) \exp\left(\frac{ip' \cdot (R-R')}{\hbar}\right) d^3p'\right\} \end{aligned}$$

اولین جمله سمت راست (۷۵.۲) را بدست می آوریم:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla \cdot (\nabla_{R'})\rho - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla \cdot (\nabla_R)\rho = \frac{\hbar^2}{2m}[\nabla \cdot (\nabla_{R'})\rho - \nabla \cdot (\nabla_R)\rho] \quad (۷۶.۲)$$

با جاگذاری عبارت معادل با ماتریس چگالی در رابطه بالا داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \left[ \nabla \cdot \nabla_{R'} \int f\left(\frac{R+R'}{2}, p, t\right) \exp\left(\frac{ip' \cdot (R-R')}{\hbar}\right) d^3p' \right. \\ \left. - \nabla \cdot \nabla_R \int f\left(\frac{R+R'}{2}, p', t\right) \exp\left(\frac{ip' \cdot (R-R')}{\hbar}\right) d^3p' \right] \end{aligned}$$

به منظور ساده سازی روابط از تابع  $f$  به جای تابع  $f(\frac{R+R'}{2}, p', t)$  استفاده می کنیم.

$$\frac{\hbar^3}{2m(2\pi\hbar)^3} \left[ \nabla \cdot \int \nabla_{R'} f \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) d^3 p' + \int f \nabla_{R'} \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) d^3 p' \right. \\ \left. - \nabla \cdot \int \nabla_R f \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) d^3 p' + \int f \nabla_R \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) d^3 p' \right]$$

به نکته زیر توجه داریم:

$$\nabla \cdot (a \vec{A}) = \nabla_R a \cdot \vec{A} + a \nabla_R \cdot \vec{A} \\ \nabla' \cdot (a \vec{A}) = \nabla_{R'} a \cdot \vec{A} + a \nabla_{R'} \cdot \vec{A}$$

با در نظرگیری نکته ذکر شده، رابطه اخیر که شامل چهار عبارت می باشد را یکی یکی حل می کنیم. برای عبارت اول داریم:

$$\frac{\hbar^3}{2m(2\pi\hbar)^3} \left[ \int (\nabla_{R'} \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) \cdot \nabla_{R'} f + \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) \nabla_{R'} \cdot \nabla_{R'} f) d^3 p' \right]$$

که معادل است با:

$$\frac{\hbar^3}{2m(2\pi\hbar)^3} \left[ \int \left(-\frac{ip'}{\hbar} \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) \nabla_{R'} \cdot \nabla_{R'} f\right) d^3 p' + \int \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) \Delta f d^3 p' \right]$$

برای دومین عبارت خواهیم داشت:

$$\frac{\hbar^3}{2m(2\pi\hbar)^3} \left[ \int (\nabla_{R'} f \cdot \nabla_{R'} \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) + f \nabla_{R'} \cdot \nabla_{R'} \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right)) d^3 p' \right]$$

که معادل است با:

$$\frac{\hbar^3}{2m(2\pi\hbar)^3} \left[ \int \nabla_{R'} f \cdot \left(-\frac{ip'}{\hbar} \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right)\right) d^3 p' + \int f \Delta \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) d^3 p' \right]$$

همچنین برای سومین عبارت داریم:

$$-\frac{\hbar^3}{2m(2\pi\hbar)^3} \left[ \int \nabla_R \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) \cdot \nabla_R f d^3 p' + \int \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) \nabla_R \cdot \nabla_R f d^3 p' \right]$$

که معادل است با:

$$-\frac{\hbar^3}{2m(2\pi\hbar)^3} \left[ \int \frac{ip'}{\hbar} \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) \cdot \nabla_R f d^3 p' + \int \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) \Delta f d^3 p' \right]$$

و در نهایت برای عبارت چهارم خواهیم داشت:

$$-\frac{\hbar^3}{2m(2\pi\hbar)^3} \left[ \int \nabla_R f \cdot \nabla_R \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) d^3 p' + \int f \nabla_R \cdot \nabla_R \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) d^3 p' \right]$$

$$-\frac{\hbar^3}{2m(2\pi\hbar)^3} \left[ \int \nabla_R f \cdot \left(\frac{ip'}{\hbar} \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right)\right) d^3 p' + \int f \Delta \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) d^3 p' \right]$$

در نهایت پس از جمع بندی هر چهار عبارت بدست آمده خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \left[ \int -\frac{ip'}{\hbar} \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) \cdot \nabla_{R'} f d^3p' \right] + \left[ \int \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) \Delta f d^3p' \right] \\ & - \left[ \int \nabla_{R'} f \cdot \left(\frac{ip'}{\hbar} \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right)\right) d^3p' \right] + \left[ \int f \Delta \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) d^3p' \right] \\ & - \left[ \int \left(\frac{ip'}{\hbar} \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right)\right) \cdot \nabla_{R'} f d^3p' \right] + \left[ \int \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) \Delta f d^3p' \right] \\ & - \left[ \int \nabla_{R'} f \cdot \left(\frac{ip'}{\hbar} \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right)\right) d^3p' \right] - \left[ \int f \Delta \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) d^3p' \right] \end{aligned}$$

برخی عبارات مشابه بالا به ترتیب یکی در میان همدیگر را حذف می کنند، چیزی که باقی می ماند عبارت است از:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \left[ \int -\frac{2ip'}{\hbar} \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) \nabla f\left(\frac{R + R'}{2}, p', t\right) d^3p' \right]$$

اکنون دومین جمله سمت راست (۷۵.۲) را محاسبه می کنیم:

$$\frac{ie\hbar}{2mc} [(A\nabla\rho + A'\nabla'\rho) + \rho(\nabla A + \nabla' A)]$$

با توجه به رابطه‌ی (۷۶.۲) ماتریس چگالی را جاگذاری می کنیم.

$$\begin{aligned} & \frac{ie\hbar}{2mc} \left[ A\nabla_R \left[ \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int f\left(\frac{R + R'}{2}, p', t\right) \cdot \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) d^3p' \right] \right. \\ & + A'\nabla_{R'} \left[ \left(\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int f\left(\frac{R + R'}{2}, p', t\right) \cdot \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) d^3p' \right) \right] \\ & \left. + \left[ \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int f\left(\frac{R + R'}{2}, p', t\right) \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) d^3p' \right] (\nabla_R A + \nabla_{R'} A') \right] \end{aligned}$$

عبارت بالا معادل است با:

$$\begin{aligned} & \frac{ie\hbar}{2mc} \left[ \frac{A}{(2\pi\hbar)^3} \left[ \int \nabla_{R'} f \cdot \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) + f \nabla_R \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) d^3p' \right] \right. \\ & + \frac{A'}{(2\pi\hbar)^3} \left[ \int \nabla_{R'} f \cdot \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) + f \nabla_{R'} \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) d^3p' \right] \\ & \left. + \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \left[ \int f \cdot \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) d^3p' (\nabla_R A + \nabla_{R'} A) \right] \right] \end{aligned}$$

برای چهار جمله اول عبارت بالا میتوان نوشت:

$$\begin{aligned} & \frac{ie\hbar}{2mc} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \left[ \int (A + A') \nabla_{R'} f \cdot \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) d^3p' \right] \\ & + \frac{i}{\hbar} \left[ \int (A - A') p' f \cdot \exp\left(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}\right) d^3p' \right] \end{aligned}$$

با فرض اینکه  $A' \cong A(R', t)$  و  $A \cong A(R, t)$  می توان نوشت:

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi\hbar})^3} \left[ \frac{ie\hbar}{\sqrt{2}mc} \left[ \int A(R, t) + A(R', t) \nabla f\left(\frac{R+R'}{\sqrt{2}}, p', t\right) d^3 p' \right] \right. \\ \left. - \frac{e}{\sqrt{2}mc} \left[ \int A(R, t) - A(R', t) p' f\left(\frac{R+R'}{\sqrt{2}}, p', t\right) \exp\left(\frac{ip' \cdot (R-R')}{\hbar}\right) d^3 p' \right] \right. \\ \left. + \frac{ie\hbar}{\sqrt{2}mc} \left[ \int f\left(\frac{R+R'}{\sqrt{2}}, p', t\right) \cdot \exp\left(\frac{ip' \cdot (R-R')}{\hbar}\right) [\nabla A(R, t) + \nabla A(R', t)] d^3 p' \right] \right]$$

اکنون سومین جمله سمت راست رابطه‌ی (۷۵.۲) را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{e^2}{\sqrt{2}mc^2} \left[ A^2(R, t) - A^2(R', t) \rho + e[U(R, t) - U(R', t)] \rho \right]$$

ماتریس چگالی را از رابطه‌ی (۷۶.۲) جاگذاری می‌کنیم.

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi\hbar})^3} \left[ \left[ \int \frac{e^2}{\sqrt{2}mc^2} [A^2(R, t) - A^2(R', t)] \cdot f \exp\left(\frac{ip' \cdot (R-R')}{\hbar}\right) d^3 p' \right] \right. \\ \left. + \left[ \int e[U(R, t) - U(R', t)] f \cdot \exp\left(\frac{ip' \cdot (R-R')}{\hbar}\right) d^3 p' \right] \right]$$

در نهایت پس از جمع بندی نهایی روابط بدست آمده، به معادله زیر می‌رسیم:

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\hbar})^3} \int \left\{ \frac{-\sqrt{2}i\hbar}{m} p' \nabla f + \frac{ie\hbar}{\sqrt{2}mc} [\nabla A(R, t) + \nabla A(R', t)] f + \right. \\ \left. + \frac{ie\hbar}{\sqrt{2}mc} [A(R, t) + A(R', t)] \nabla f - \frac{e}{\sqrt{2}mc} [A(R, t) - A(R', t)] p' f + \right. \\ \left. + \frac{e^2}{\sqrt{2}mc^2} [A^2(R, t) - A^2(R', t)] f + \right. \\ \left. + e[U(R, t) - U(R', t)] \right\} \exp\left(\frac{ip' \cdot (R-R')}{\hbar}\right) d^3 p' \quad (77.2)$$

در معادله اخیر از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم  $R = r + \frac{a}{\sqrt{2}}$  و  $R' = r - \frac{a}{\sqrt{2}}$  که خواهیم داشت:

$$f\left(\frac{R+R'}{\sqrt{2}}, p', t\right) \exp\left(\frac{ip' \cdot (R-R')}{\hbar}\right) = f\left(r, p', t\right) \exp\left(\frac{ip' \cdot a}{\hbar}\right)$$

با تبدیلات فوریه روابط زیر را می‌نویسیم

$$f(r, p', t) = \int \rho\left(r + \frac{a}{\sqrt{2}}, r - \frac{a}{\sqrt{2}}, t\right) \exp\left(\frac{ip' \cdot a}{\hbar}\right)$$

$$\rho(R, R', t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\hbar})^3} \int f\left(\frac{R+R'}{\sqrt{2}}, p, t\right) \exp\left(\frac{ip \cdot (R-R')}{\hbar}\right) d^3 p$$

با توجه به تبدیلات فوریه سمت راست معادله‌ی اخیر که بدست آورده بودیم در  $\exp(-\frac{ipa}{\hbar})$  ضرب کرده و نسبت به  $a$  انتگرال می‌گیریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = & \frac{1}{(\sqrt{\pi}\hbar)^3} \int \int \left[ -\frac{\sqrt{p'}}{m} \nabla f + \frac{e}{\sqrt{2}mc} [\nabla A(r + \frac{a}{\sqrt{2}}, t) + \nabla A(r - \frac{a}{\sqrt{2}}, t)] f \right. \\ & + \frac{e}{\sqrt{2}mc} [A(r + \frac{a}{\sqrt{2}}, t) + A(r - \frac{a}{\sqrt{2}}, t)] \nabla f + \frac{ie}{mc\hbar} [A(r + \frac{a}{\sqrt{2}}, t) - A(r - \frac{a}{\sqrt{2}}, t)] p' f \\ & - \frac{ie^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}mc^{\sqrt{2}}\hbar} [A^{\sqrt{2}}(r + \frac{a}{\sqrt{2}}, t) - A^{\sqrt{2}}(r - \frac{a}{\sqrt{2}}, t)] f \\ & \left. - \frac{ie}{\hbar} [U(r + \frac{a}{\sqrt{2}}, t) - U(r - \frac{a}{\sqrt{2}}, t)] f \right] \exp(\frac{ip'a}{\hbar}) \exp(\frac{-ipa}{\hbar}) d^3 a' d^3 p' \end{aligned}$$

دقت شود که در سمت چپ رابطه اخیر تابع  $f$  به صورت  $f = f(r, p, t)$  بوده در صورتیکه تابع  $f$  درون انتگرال در طرف راست به صورت  $f = f(r, p', t)$  می‌باشد. لذا برای رفع این مشکل رابطه انتگرالی زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} \int \int P' (\nabla f) \exp(\frac{i(p' - p)a}{\hbar}) \frac{d^3 a d^3 p'}{(\sqrt{\pi}\hbar)^3} \\ = \nabla \int \int P' f \exp(\frac{i(p' - p)a}{\hbar}) \frac{d^3 a d^3 p'}{(\sqrt{\pi}\hbar)^3} = \nabla \int P' f \delta(P' - P) dP' = P \nabla f(r, P, t) \end{aligned}$$

همچنین دو رابطه انتگرالی دیگر داریم که عبارت است از:

$$\begin{aligned} \int \int \frac{e}{mc} A(r, t) [\nabla f(r, p', t)] \exp(\frac{i(p' - p)a}{\hbar}) \frac{d^3 a d^3 p'}{(\sqrt{\pi}\hbar)^3} \\ = \frac{e}{mc} A(r, t) \nabla f(r, p, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \int \frac{e}{mc} [\nabla A(r, t)] f(r, p', t) \exp(\frac{i(p' - p)a}{\hbar}) \frac{d^3 a d^3 p'}{(\sqrt{\pi}\hbar)^3} \\ = \frac{e}{mc} [\nabla A(r, t)] f(r, p, t) \end{aligned}$$

$R' = r - \frac{a}{\sqrt{2}}$  که خواهیم داشت:

$$f(\frac{R + R'}{\sqrt{2}}, p', t) \exp(\frac{ip' \cdot (R - R')}{\hbar}) = f(r, p', t) \exp(\frac{ip'a}{\hbar})$$

با تبدیلات فوریه روابط زیر را می‌نویسیم

$$f(r, p', t) = \int \rho(r + \frac{a}{\sqrt{2}}, r - \frac{a}{\sqrt{2}}, t) \exp(\frac{ip'a}{\hbar})$$

$$\rho(R, R', t) = \frac{1}{(\sqrt{\pi}\hbar)^3} \int f(\frac{R + R'}{\sqrt{2}}, p, t) \exp(\frac{ip \cdot (R - R')}{\hbar}) d^3 p$$



طرف راست رابطه نهایی (۷۸.۲) را دو جمله  $\Psi A(r, t)$  و  $\Psi \nabla A(r, t)$  را اضافه و کم می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = & \int \int \left[ -\frac{p}{m} \nabla f + \frac{e}{\Psi mc} [A(r + \frac{a}{\Psi}, t) + A(r - \frac{a}{\Psi}, t) + \Psi A(r, t) - \Psi A(r, t)] \nabla f \right. \\ & + \frac{ie}{mch} [A(r + \frac{a}{\Psi}, t) - A(r - \frac{a}{\Psi}, t)] p' f + \frac{e}{\Psi mc} [\nabla A(r + \frac{a}{\Psi}, t) + \nabla A(r - \frac{a}{\Psi}, t)] \\ & + [\Psi \nabla A(r, t) - \Psi \nabla A(r, t)] f - \frac{ie^\Psi}{\Psi mc^\Psi h} [A^\Psi(r + \frac{a}{\Psi}, t) - A^\Psi(r - \frac{a}{\Psi}, t)] f \\ & \left. - \frac{ie}{h} [U(r + \frac{a}{\Psi}, t) - U(r - \frac{a}{\Psi}, t)] f \right] \exp \frac{i(p-p')}{h} \frac{d^\Psi a}{(\Psi \pi h)^\Psi} \end{aligned}$$

پس از مرتب سازی رابطه داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{m} (p - \frac{e}{c} A) \nabla f - \frac{e}{mc} (\nabla A(r, t)) f(r, p, t) = w[f] \quad (78.2)$$

که در رابطه بالا  $w[f]$  دلالت به انتگرال ویگنر-ماکسول دارد. در واقع سمت راست معادله اخیر بیانگر قسمت مربوط به مدل جنبشی می‌باشد، در صورتیکه سمت چپ آن توصیف‌کننده سهم کلاسیکی می‌باشد.

$$\begin{aligned} W[f] = & \int \int \left[ \frac{e}{\Psi mc} [A(r + \frac{a}{\Psi}, t) + A(r - \frac{a}{\Psi}, t) - \Psi A(r, t)] \nabla f \right. \\ & + \frac{ie}{mch} [A(r + \frac{a}{\Psi}, t) - A(r - \frac{a}{\Psi}, t)] P' f \\ & + \frac{e}{\Psi mc} [\nabla A(r + \frac{a}{\Psi}, t) + \nabla A(r - \frac{a}{\Psi}, t) - \Psi \nabla A(r, t)] f \\ & - \frac{ie^\Psi}{\Psi mc^\Psi h} [A^\Psi(r + \frac{a}{\Psi}, t) - A^\Psi(r - \frac{a}{\Psi}, t)] f \\ & \left. - \frac{ie}{h} [U(r + \frac{a}{\Psi}, t) - U(r - \frac{a}{\Psi}, t)] f \right] \exp \frac{i(p' - p)a}{h} \frac{d^\Psi a d^\Psi p'}{(\Psi \pi h)^\Psi} \end{aligned}$$

## ۵.۲ جمع‌بندی

در این فصل مدل‌های توصیف پلاسما یعنی مدل ذره‌ای، مدل سیالی و مدل جنبشی را ارائه دادیم. همچنین به توصیف هر یک از مدل‌ها در پلاسمای کلاسیکی و کوانتومی پرداختیم. سپس معادلات ویگنر-پواسون و ویگنر-ماکسول را به ترتیب در مدل‌های سیالی و نظریه‌ی جنبشی به‌دست آوردیم. در ادامه نتایجی که حاصل شد را شرح می‌دهیم:

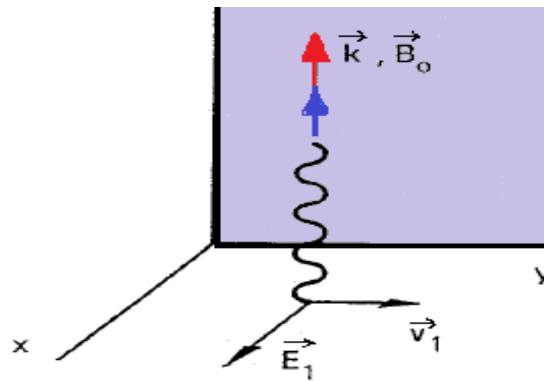
- از آنجاییکه در پلاسمای کوانتومی با آنسامبلی از ذرات و  $N$  تابع موج سروکار داریم، بنابراین برای توصیف مدل‌های پلاسما از تقریب هارتری و هارتری-فوک استفاده می‌نماییم.
- تقریب هارتری-فوک کامل‌تر از تقریب هارتری می‌باشد. در این تقریب به جای در نظر گرفتن تابع موج هر یک از ذرات، تابع موج کلی را برای سیستم پلاسما در نظر می‌گیرند.
- تمام مدل‌های توصیف پلاسمای کوانتومی از تقریب هارتری-فوک سرچشمه می‌گیرد.

- از آنجاییکه تابع توزیع ذرات پلاسمای کوانتومی از مفهوم احتمال و عدم قطعیت پیروی می‌کند بنابراین تابع توزیع ویگنر را برای آن تعریف نمودیم.
- تابع توزیع ویگنر ابزار مفیدی برای مباحث مکانیک کوانتومی در فضای فاز می‌باشد.
- با استفاده از تحولات تابع توزیع ویگنر نسبت به زمان و استفاده از معادلات ماکسول و پواسون به معادلات ویگنر-پواسون و ویگنر-ماکسول می‌رسیم.
- معادلات ویگنر-پواسون و ویگنر-ماکسول اساس توصیف پلازما بر مبنای مدل نظریه‌ی جنبشی‌اند.



## فصل ۳

مطالعه‌ی امواج هیدرومغناطیسی با حضور  
اسپین الکترون در سیستم‌های پلاسمای  
مغناطیده کوانتومی



شکل ۱.۳: هندسه موج آلفون

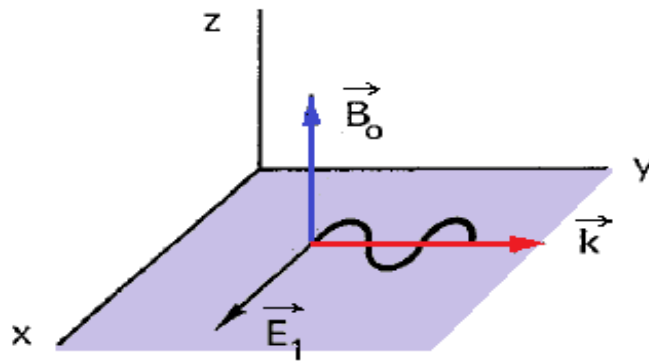
### ۱.۳ مقدمه

امواج بنیادی پلازما به نوسان‌های یونی با بسامد کم در حضور میدان مغناطیسی مربوط می‌شود. که دو تا از مشهورترین مدهای ممکن موج هیدرومغناطیسی در امتداد  $B_0$  یا موج آلفون و دیگری موج مگنتو صوتی می‌باشد. موج آلفون اولین بار به طور همزمان در برکلی کالیفرنیا و انگلستان در سال ۱۹۵۹ تولید و آشکارسازی شد. این موج در هندسه‌ی تخت دارای  $k$  در امتداد  $B_0$  است که  $E_1$  بر  $B_0$  عمودند (شکل ۳.۱). موج آلفون ماهیت مغناطیسی داشته و حرکت‌های گرمایی در آن از اهمیت پایینی برخوردار است. همچنین این موج هیدرومغناطیسی با سرعت ثابت  $v_A$  در امتداد  $B_0$  حرکت می‌کند که آن را سرعت آلفون می‌نامند. سرعت آلفون را با رابطه‌ی روبرو تعریف می‌کنیم.

$$v_A = \frac{B_0}{(\mu_0 n_0 m_0)^{1/2}}$$

از طرف دیگر امواج الکترومغناطیسی کم بسامد که در عرض  $B_0$  منتشر می‌شوند، را موج مگنتو صوتی می‌نامیم. در تصویر فیزیکی موج مگنتو صوتی دارای راستای انتشار  $k$  در عرض  $B_0$  بوده و  $E_1$  هم بر  $k$  و هم بر  $B_0$  عمود می‌باشد (شکل ۳.۲). این موج یک موج صوتی است که در آن تراکم و انبساط توسط سوق‌های  $E \times B$  در عرض  $B_0$  به وجود می‌آید. سرعت فاز مد مگنتو صوتی تقریباً همیشه بزرگتر از سرعت آلفون بوده و به همین دلیل آن را موج هیدرومغناطیسی تند می‌نامند.

در این فصل ابتدا با روش سیالی برای پلاسمای کوانتومی، معادلات مگنتو هیدرو دینامیک را در حضور اثر اسپین الکترون به دست آورده و آن‌ها را بهنجار می‌نماییم، سپس با استفاده از این معادلات و معادلات ماکسول رابطه‌ی پاشندگی امواج مگنتو صوتی را استخراج نموده، و در نهایت از رابطه‌ی پاشندگی مذکور، به بررسی و توصیف انواع انتشار می‌پردازیم.



شکل ۲.۳: هندسه موج مگنتوصوتی

## ۲.۳ معادله پائولی

در محدوده‌ی غیر نسبیتی دینامیک یک ذره‌ی کوانتومی در حضور میدان مغناطیسی با معادله‌ی پائولی بیان می‌گردد. که این معادله عبارت است از:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_e}{\partial t} = H_e \psi_e$$

برای هامیلتونین می‌نویسیم

$$H_e = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 + \frac{ie\hbar}{2m_e c} (\vec{A} \cdot \nabla + \nabla \cdot \vec{A}) - \frac{e^2 \vec{A}^2}{2m_e c^2} + e\phi + \mu_e \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \quad (1.3)$$

که  $\psi_e(r, t, \sigma)$  تابع موج یک ذره کوانتومی با اسپین  $\vec{s} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}$  و عملگر اسپین ذره‌ی کوانتومی می‌باشد. آخرین جمله در رابطه‌ی (۱.۳) بیانگر انرژی دوقطبی مغناطیسی در میدان مغناطیسی خواهد بود.  $\vec{A}$  و  $\phi$  به ترتیب پتانسیل برداری و پتانسیل اسکالر را نشان می‌دهند. اکنون تابع موج مادلانگ را تعریف می‌نماییم.

$$\psi(r, t, \sigma) = s \sqrt{n_e(r, t, \sigma)} \exp\left[\frac{iS_e(r, t, \sigma)}{\hbar}\right] \quad (2.3)$$

$n_e(r, t, \sigma) = \psi \psi^*$  چگالی احتمال یک الکترون با اسپین  $\vec{s}$  را نشان می‌دهد. به منظور رسیدن به معادلات مگنتوهیدرودینامیک کوانتومی ابتدا  $\psi$  را در معادله پائولی جاگذاری نموده سپس  $\psi^*$  را در کل عبارت ضرب می‌نماییم. معادله به دست آمده به دو قسمت حقیقی و موهومی تبدیل می‌نماییم. از قسمت حقیقی به معادله تحولی فاز می‌رسیم. با حل قسمت موهومی نیز به معادله پیوستگی خواهیم رسید. [۶]

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \frac{n_e \vec{p}_e}{m_e} \right) = 0 \quad (3.3)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m} \vec{p}_e \cdot \nabla \right) \vec{p}_e = e \left[ \nabla \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{c} \vec{v}_e \times (\nabla \times \vec{A}) \right] + F_Q + F_s \quad (4.3)$$

عملگر تعمیم‌یافته اندازه حرکت  $(\vec{p}_e = \nabla S_e - i\hbar s^* \nabla s + \frac{e}{c} \vec{A})$  و سرعت کوانتومی  $v_e$  می‌باشند.

$$v_e = \frac{\hbar}{2m_e} \frac{(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)}{n_e} + i \frac{\hbar}{m_e} S^* \nabla S - \frac{e}{m_e c} A$$

### ۱.۲.۳ نیروی کوانتومی الکترون

در مبحث قبل با توجه به معادله تحولی فاز، دو عبارت  $F_Q$  و  $F_s$  به عنوان نیروی کوانتومی الکترون معرفی می‌نماییم.

$$F = F_Q + F_s \quad (۵.۳)$$

رابطه‌ی بالا را می‌توان چنین نوشت:

$$F = \frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{n_e}}{\sqrt{n_e}} \right) + \mu_B \nabla (\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) \quad (۶.۳)$$

این رابطه نیروی کوانتومی الکترون می‌باشد که اولین عبارت در طرف راست گرادیان پتانسیل بوهم (معادل با اثر تونل زنی) و دومین عبارت مربوط به انرژی مغناطیسی الکترون به علت اثر اسپین الکترون با  $B = |\vec{B}|$  بوده که در آن  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$  به مگنتون بوهر معروف است.

### ۲.۲.۳ تابع بریلیون

الکترون یک خاصیت فطری دارد (اسپین) و یک گشتاور مغناطیسی ذاتی که به این بار در حال چرخش تعلق می‌گیرد. از طرفی حرکت مداری هر یک از الکترون‌ها در اتم یا مولکول تولید گشتاور مغناطیسی می‌کند. در نتیجه هر مولکول یک گشتاور مغناطیسی دارد که از جمع برداری گشتاورهای مغناطیسی اسپینی و مداری الکترون‌ها بوجود می‌آید.

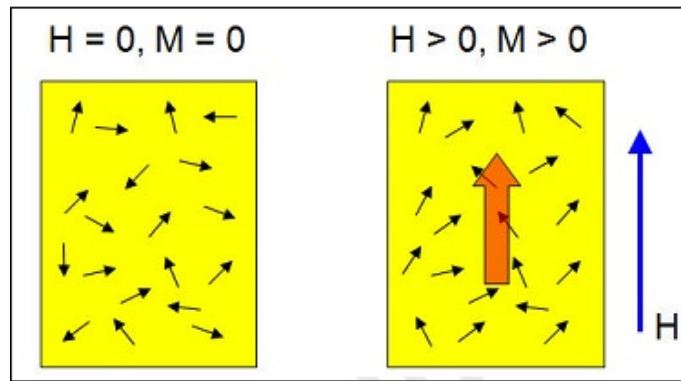
$$\vec{j} = \vec{S} + \vec{L} \quad (۷.۳)$$

گشتاور مغناطیسی را برای ذرات بارداری که در حال حرکت هستند چنین نشان می‌دهیم:

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2mc} \vec{L}$$

البته برای ذرات بدون بار مانند نوترون، گشتاور مغناطیسی به دلیل اثر اسپین وجود دارد. لذا در حالت کلی چنین می‌نویسیم:

$$\vec{\mu} = \frac{eg}{2mc} \vec{j} \quad (۸.۳)$$



شکل ۳.۳: سیستمی با  $N$  دو قطبی

که در آن  $g$  ضریب ژيرو مغناطیسی نام دارد. در مکانیک کوانتوم  $g$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2j(j+1)} \quad (9.3)$$

$$\vec{j} = \vec{L} \quad \rightarrow \quad g = \frac{3}{2} + \frac{0 - L(L+1)}{2j(j+1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

$$\vec{j} = \vec{S} \quad \rightarrow \quad g = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - 0}{2j(j+1)} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

اکنون سیستمی از  $N$  ذره در نظر می‌گیریم، که مانند  $N$  تا دو قطبی مغناطیسی عمل می‌کنند (شکل ۳.۳). حالت‌های این سیستم را با  $m$  و  $j$  برچسب می‌زنیم. حال اگر به این سیستم یک میدان خارجی  $H$  در جهت محور  $z$  اثر دهیم، انرژی که برای سیستم خواهیم داشت عبارت است از:

$$E = -\vec{\mu} \cdot \vec{H} = -\left(\frac{eg}{2mc} \vec{j}_z\right) \cdot \vec{H} = -\frac{eg\hbar}{2mc} \frac{\vec{H}}{\hbar} j_z$$

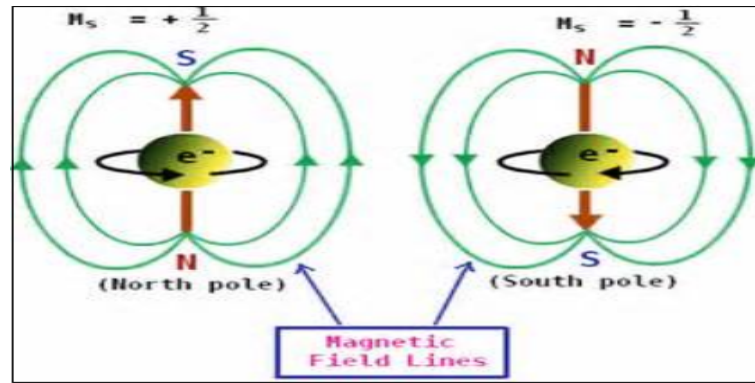
مقدار قابل حصولی که برای  $\frac{j_z}{\hbar}$  وجود دارد  $m$  هایی هستند که به  $j$  بستگی دارند. و  $j$  مشخص می‌کند که  $m$  از کجا تا کجا تغییر می‌کند.

$$-j \leq m \leq j \quad (10.3)$$

پس  $\frac{j_z}{\hbar}$  را وقتی روی یک حالت اثر می‌کند فقط با  $m_j$  مشخص می‌کنیم. از طرفی  $\frac{e\hbar}{2mc}$  از جنس  $\mu$  می‌باشد، و چون بر اساس ثابت‌های بنیادی نوشته می‌شود به مگنتون بوهر معروف است. بنابراین برای انرژی سیستم داریم:

$$E = -g\mu_B m_j H \quad (11.3)$$





شکل ۴.۳: برهم‌کنش اسپین الکترون با میدان مغناطیسی

تابع همپاری برای چنین سیستمی به صورت تابع همپاری هر کدام از ذرات سیستم به توان  $N$  تعریف می‌کنیم. البته برهم‌کنش‌ها را نادیده می‌گیریم [۱۱]. لذا خواهیم داشت:

$$Q_N = (Q_1)^N$$

$$Q_1 = \sum_{m_j=-j}^j e^{-\beta g \mu_B m_j H} = e^{-\beta g \mu_B m_j H} + \dots + e^{\beta g \mu_B m_j H} \quad (12.3)$$

رابطه‌ی بالا یک سری هندسی است که تعداد جملات آن  $2j + 1$  می‌باشد. با فرض  $\beta g \mu_B H = \varepsilon$  می‌توان نوشت:

$$Q_N = \frac{\sinh\left(1 + \frac{1}{2j}\right)\varepsilon}{\sinh\left(\frac{\varepsilon}{2j}\right)}$$

از دیدگاه مکانیک آماری مغناطش کل عبارت است از:

$$\begin{aligned} M_z &= \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial H} \ln Q_N \\ &= (Ng\mu_B j) \left[ \left(1 + \frac{1}{2j}\right) \coth\left(1 + \frac{1}{2j}\right)\varepsilon - \frac{1}{2j} \coth \frac{\varepsilon}{2j} \right] \end{aligned} \quad (13.3)$$

$$B_j(\varepsilon) = \left(1 + \frac{1}{2j}\right) \coth\left(1 + \frac{1}{2j}\right)\varepsilon - \frac{1}{2j} \coth \frac{\varepsilon}{2j} \quad (14.3)$$

که  $B_j(\varepsilon)$  به تابع بریلیون معروف است. بیشترین مقدار مغناطیدگی که سیستم می‌تواند داشته باشد به صورت روبرو می‌نویسیم:

$$\mu' = g\mu_B j$$

$$M_z = N\mu' B_j(\varepsilon)$$

در عبارت تابع بریلیون به ازای  $\infty \rightarrow j$  به مقدار کلاسیکی نزدیک می‌شویم. از طرف دیگر اگر  $j < 1$  باشد به خصوص اینکه  $j = 1/2$  باشد یعنی سیستمی از اسپین‌های  $1/2$  داریم و تابع بریلیون به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$B_{1/2}(x) = 2 \coth(2\varepsilon) - \coth(\varepsilon) \quad (15.3)$$

$$\coth(2\varepsilon) = \frac{1 + \tanh^2 \varepsilon}{2 \tanh \varepsilon}$$

$$B_{1/2}(x) = \frac{1 + \tanh^2 \varepsilon}{\tanh \varepsilon} - \frac{1}{\tanh \varepsilon}, \quad \rightarrow B_{1/2}(x) = \tanh(\varepsilon)$$

$$M \nabla B = \mu_B n_e \tanh(\varepsilon) \nabla B \quad (16.3)$$

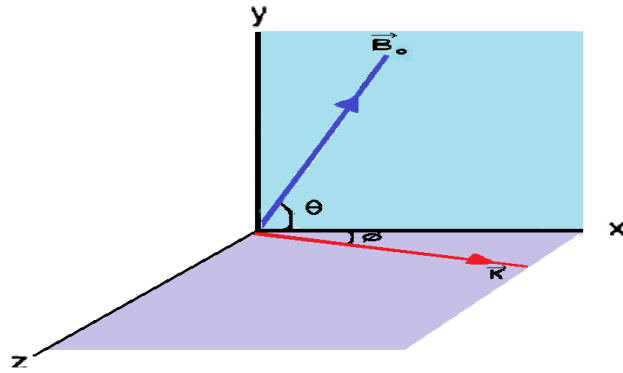
که به انرژی مغناطیسی الکترون در حضور اثر اسپین از دیدگاه مکانیک آماری رسیدیم [۱۱].

## ۳.۳ بررسی امواج هیدرومغناطیسی در مدل مگنتوهیدرودینامیک کوانتومی

### ۴.۳ معادلات اساسی مدل QMHD

از مدل QMHD شروع می‌کنیم و از مجموعه معادلات کوانتومی هیدرودینامیکی تک سیالی برای الکترونها و یونها با تصحیحات کوانتومی، جهت استخراج روابط بهره می‌گیریم. در ابتدا سیستم مختصات سه بعدی در نظر می‌گیریم که در آن میدان مغناطیسی  $B_0$  در صفحه  $(x, y)$  قرار داشته و با محور  $x$  زاویه  $\theta$  می‌سازد. یعنی  $B_0 = (B_{0x}, B_{0y}, 0) = (B_0 \cos\theta, B_0 \sin\theta, 0)$  و پراکنندگی موج در صفحه  $(x, z)$  و با فرکانس پایین خواهد بود. (شکل ۵.۳) از آنجا که فرکانس نوسانات پایین است لذا جریان جابجایی و اینرسی الکترون را نادیده گرفته و همچنین از اثرات کوانتومی یونها به دلیل بزرگ بودن اینرسی‌شان، در مقایسه با الکترون‌ها چشم پوشی می‌نماییم. معادلات حاکم مؤثر در مدل QMHD از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = eE + e(v_i \times B) + \frac{R_i}{n} \quad (17.3)$$



شکل ۵.۳: هندسه امواج MHD

$$\circ = -n_e e E - n_e e (v_e \times B) - \nabla p_e + F_Q + R_e \quad (18.3)$$

در معادلات بالا به ترتیب  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (v_i \cdot \nabla)$  مشتق هیدرودینامیکی و  $J_p = \sum_{s=e,i} q_s n_s v_s$  چگالی جریان پلازما، که  $R_e = -R_i \approx en\eta J_p$  می‌باشد و  $\eta = \frac{m_e \nu_{ei}}{n_e e^2}$  مقاومت پلازما که  $\nu_{ei}$  فرکانس برخورد الکترون-یون،  $n \simeq n_i \simeq n_e$  چگالی تعداد ذرات (با استفاده از شرط شبه خنثائیت)،  $q_s = \pm |e|$  بار ذرات، معادله حالت هم-دمای فشار  $\nabla p_e = m_i c_s^2 \nabla n_e$  که در آن  $c_s = (\frac{T_e}{m_i})^2$  سرعت صوتی یون را نشان می‌دهد.

$$F_Q = \frac{n_e \hbar^2}{2m_e} \nabla \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{n_e}}{\sqrt{n_e}} \right) + \mu_B n_e \tanh\left(\frac{\mu_B B}{T_e}\right) \nabla B \quad (19.3)$$

این رابطه بیانگر نیروی کوانتومی الکترون می‌باشد. از معادلات ماکسول می‌نویسیم:  
قانون آمپر:

$$\nabla \times B = \mu_0 (J_p - J_m) \quad (20.3)$$

که  $J_M = \nabla \times M$  چگالی جریان مغناطش الکترون می‌باشد. البته جریان جابجایی، که در اثر پاسخ پلازما به وجود می‌آید و در مقایسه با جریان رسانش کوچک است را نادیده می‌گیریم.  
قانون فارادی:

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (21.3)$$

سرانجام با اولین معادله مگنتوهیدرودینامیک یعنی معادله پیوستگی، معادلات ماکسول را کامل می‌کنیم

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n v_i) = \circ \quad (22.3)$$

حال با کمک روابط بالا، معادلات اساسی حاکم بر مدل QMHD بدست می‌آوریم. با جاگذاری  $v_e$  از رابطه‌ی (۴.۳) در (۲۰.۳) می‌توان نوشت:

$$\nabla \times B = \mu_0 [n e (v_i - v_e) + J_m]$$

$$\mu_0 n e v_e = \mu_0 n e v_i + \mu_0 J_m - \nabla \times B$$

از (۱۸.۳) داریم:

$$v_e = v_i + \frac{J_m}{ne} - \frac{\nabla \times B}{\mu_0 ne} \quad (23.3)$$

با جاگذاری (۲۳.۳) در (۱۸.۳) داریم:

$$E = -(v_e \times B) - \frac{\nabla p_e}{ne} + \frac{F_Q}{ne} + \frac{R_e}{ne}$$

$$E = -\left(v_i + \frac{J_m}{ne} - \frac{\nabla \times B}{\mu_0 ne}\right) \times B - \frac{\nabla p_e}{ne} + \frac{F_Q}{ne} + \frac{R_e}{ne} \quad (24.3)$$

که  $E$  را از رابطه‌ی (۱۷.۳) و (۲۱.۳) با استفاده از رابطه‌ی (۲۴.۳) حذف نموده و معادله‌ی نرمالیزه‌شده تکانه میدان را بدست می‌آوریم از معادله‌ی (۳۰.۱) داریم:

$$E = \frac{1}{e} \left( m_i \frac{dv_i}{dt} - e(v_i \times B) - \frac{R_i}{n_i} \right)$$

طرفین روابط (۱۷.۳) و (۲۴.۳) را برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{m_i}{e} \frac{dv_i}{dt} - \frac{e}{e} (v_i \times B) - \frac{R_i}{en_i} = -v_i \times B - \frac{J_m \times B}{en} + \frac{1}{en\mu_0} \nabla \times B \times B - \frac{\nabla p_e}{en} + \frac{F_Q}{en} + \frac{R_e}{en}$$

معادل است با

$$\begin{aligned} \frac{dv_i}{dt} = & + \frac{e}{m_i} (v_i \times B) - \frac{R_i}{m_i n} - \frac{e}{m_i} v_i \times B + \frac{R_e}{m_i n} - \frac{1}{m_i} \frac{J_m \times B}{n} \\ & + \frac{1}{m_i n \mu_0} \nabla \times B \times B - \frac{1}{m_i n} \nabla p_e + \frac{F_Q}{m_i n} \end{aligned}$$

در نهایت برای معادله‌ی حرکت یون خواهیم داشت:

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = -\frac{1}{n} J_m \times B + \frac{1}{n\mu_0} (\nabla \times B) \times B - \frac{\nabla p_e}{n} + \frac{F_Q}{n} \quad (25.3)$$

اکنون معادله‌ی حرکتی که قبلاً به دست آورده بودیم را بهنجار می‌کنیم. اصولاً بهنجار سازی به معنی بی‌بعد نمودن برخی از پارامترهای معادلات می‌باشد که از روابط زیر تبعیت می‌نماید.

$$t' = \Omega_i t \longrightarrow \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \Omega_i \frac{d}{dt'}$$

$$r' = r \frac{\Omega_i}{v_A} \longrightarrow \frac{d}{dr} = \frac{d}{dr'} \frac{dr'}{dr} = \frac{\Omega_i}{v_A} \frac{d}{dr'} = \frac{\Omega_i}{v_A} \nabla'$$

$$n' = \frac{n}{n_0} \quad B' = \frac{B}{B_0} \quad M' = \frac{\mu_0}{B_0} M \quad v'_i = \frac{v_i}{v_A}$$

از رابطه‌های (۱۷.۳) و (۲۱.۳) و (۲۴.۳) داریم:

$$\begin{aligned} m_i \frac{dv_i}{dt} &= e \left[ (-v_i - \frac{J_m}{en} + \frac{1}{en\mu_0} \nabla \times B) \times B - \frac{\nabla p_e}{en} + \frac{F_Q}{en} + \frac{R_e}{en} \right] + e(v_i \times B) + \frac{R_i}{n_i} \\ &= -ev_i \times B - \frac{J_m}{n} \times B + \frac{1}{n\mu_0} [(\nabla \times B) \times B] - \frac{\nabla p_e}{n} + \frac{F_Q}{n} \\ &\quad + \frac{R_e}{n} + e(v_i \times B) - \frac{R_i}{n_i} \end{aligned}$$

پس از ساده‌سازی داریم:

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = -\frac{1}{n} J_m \times B + \frac{1}{n\mu_0} (\nabla \times B) \times B - \frac{\nabla p_e}{n} + \frac{F_Q}{n}$$

اکنون عبارت بالا را به روابط مربوطه بهنجار می‌نمائیم.

$$\begin{aligned} m_i \Omega_i v_i \frac{d}{dt'} v'_i &= -\frac{1}{n' n_0} \frac{\Omega_i B_0}{v_A \mu_0} (\nabla' \times M') \times B' + \frac{1}{n' n_0 \mu_0} \frac{\Omega_i}{v_A} B_0 (\nabla' \times B') \times B' \\ &\quad - \frac{m_i}{n' n_0} c_s^2 \frac{\Omega_i}{v_A} \nabla' n' n_0 + \frac{n' n_0 \hbar^2}{2 m_e n' n_0 v_A} \frac{\Omega_i}{v_A} \nabla' \left( \frac{\Omega_i^2}{v_A^2} \nabla'^2 \frac{\sqrt{n' n_0}}{\sqrt{n' n_0}} \right) \\ &\quad + \frac{\mu_B n' n_0}{n' n_0} \tanh\left(\frac{\mu_B B' B_0}{T_e}\right) \frac{\Omega_i}{v_A} \nabla' B' B_0. \end{aligned}$$

با توجه به  $\frac{\mu_B B_0}{T_e} = \varepsilon_0$  و تقسیم طرفین بر عبارت  $m_i \Omega_i v_i$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'} v'_i &= -\frac{1}{n' n_0} \frac{1}{v_A} \frac{1}{\mu_0} \frac{B_0}{m_i v_A} (\nabla' \times M') \times B' \\ &\quad + \frac{1}{n' n_0} \frac{1}{v_A} \frac{1}{\mu_0} \frac{B_0}{m_i v_A} (\nabla' \times B') \times B' - \frac{1}{n_0 n'} c_s^2 \frac{1}{v_A} \frac{1}{v_A} \nabla' n' n_0 \\ &\quad + \frac{\hbar^2}{2 m_e v_A m_i v_A} \frac{1}{v_A} \frac{\Omega_i^2}{v_A} \nabla' \left( \nabla'^2 \frac{\sqrt{n' n_0}}{\sqrt{n' n_0}} \right) + \mu_B \frac{1}{m_i v_A} \tanh(\varepsilon_0 B') \frac{B_0}{v_A} \nabla' B' \end{aligned}$$

در طرف راست رابطه‌ی بالا پنج جمله بدست آمده است که برای ضرائب دو جمله‌ی اول رابطه زیر را در نظر می‌گیریم

$$\frac{B_0}{n_0 \mu_0 m_i} = v_A^2$$

همچنین برای ضریب جمله‌ی پنجم می‌توان نوشت:

$$\frac{\mu_B B_0}{m_i v_A^2} = \frac{\mu_B B_0 T_e}{m_i v_A^2 T_e} = \frac{\mu_B B_0}{T_e} \frac{T_e}{m_i v_A^2} = \varepsilon \beta$$

در نهایت به معادله سیالی تکانه بهنجار شده می‌رسیم که بیانگر دومین معادله مگنتوهیدرودینامیکی خواهد بود.

$$\frac{d\vec{V}_i}{dt} = \frac{1}{n}(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \frac{\beta}{n}\nabla n + \frac{H_e^\gamma}{2}\nabla\left(\frac{\nabla^\gamma\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right) + \varepsilon\beta\tanh(\varepsilon B)\nabla B - \frac{1}{n}(\nabla \times \vec{M}) \times \vec{B} \quad (26.3)$$

که  $\beta$  را فاکتور بتای پلاسما گوئیم که عبارت است از نسبت انرژی گرمایی به انرژی مغناطیسی و  $H_e = \frac{\hbar\Omega_i}{\sqrt{m_e m_i} v_A}$  پارامتر تونل‌زنی نامیم که اثر تونل‌زنی بین پتانسیل بوهم، با الکترون‌های تجمعی انجام می‌شود.  $\Omega_i = \frac{eB_0}{m_i}$  فرکانس ژيرو یون  $V_A$ ، سرعت آلفون و  $\vec{M} = \frac{\mu_0 M}{B_0} = \varepsilon_0 \beta n \tanh(\varepsilon) \vec{B}$  انرژی مغناطیسی بهنجار شده با  $\varepsilon_0 = \frac{\mu_0 B_0}{T_e}$  نامیده می‌شود. با استفاده از تعریف قانون اهم در پلاسماهای کوانتومی با اسپین داریم:

$$\vec{J}_p = \frac{1}{\eta} \left[ \vec{E} + \left( v_i + \frac{\vec{J}_m}{en} - \frac{1}{en\mu_0} \nabla \times \vec{B} \right) \times \vec{B} + \frac{\nabla P_e}{en} - \frac{\vec{F}_Q}{en} \right] \quad (27.3)$$

اکنون دوباره  $E$  را از معادلات (۲۱.۳) و (۲۶.۳) حذف می‌نماییم. ابتدا از طرفین رابطه‌ی بالا کرل می‌گیریم:

$$\eta \nabla \times J_p = \nabla \times E + \nabla \times (v_i \times B) + \frac{1}{en} \nabla \times (J_m \times B) - \frac{1}{en\mu_0} \nabla \times (\nabla \times B) \times B \quad (28.3)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۲۰.۳) داریم:

$$J_p = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times B - J_m$$

عبارت بالا را در رابطه‌ی (۲۸.۳) جاگذاری می‌کنیم

$$\frac{\eta}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times B - \eta \nabla \times J_m = -\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times v_i \times B - \frac{1}{en\mu_0} \left[ \nabla \times (\nabla \times B) \right] \times B$$

سپس با بهره‌گیری از تقریب‌های ذکر شده، متغیرها را بهنجار می‌نماییم

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{\mu_0} \left( \frac{\Omega_i}{v_A} \nabla' \right) \times \left( \frac{\Omega_i}{v_A} \nabla' \right) \times B' B_0 - \eta \left( \frac{\Omega_i}{v_A} \nabla' \right) \times J_m = \\ - \left( \Omega_i \frac{d}{dt'} \right) B' B_0 + \left( \frac{\Omega_i}{v_A} \nabla' \right) \times (v_i' v_A) \times B' B_0 - \frac{1}{en\mu_0} \left( \frac{\Omega_i}{v_A} \nabla' \right) \times \left[ \left( \frac{\Omega_i}{v_A} \nabla' \right) \times B' B_0 \right] \times B' B_0. \end{aligned}$$

با تقسیم طرفین بر  $\Omega_i B_0$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\eta}{\mu_0} \frac{\Omega_i}{v_A} \right) \nabla' \times \nabla' \times B' = \eta \frac{\Omega_i}{v_A} \frac{1}{\Omega_i B_0} \nabla' \times J_m - \frac{\Omega_i}{\Omega_i B_0} \frac{d}{dt'} B' B_0 + \frac{\Omega_i}{v_A} \frac{B_0}{\Omega_i B_0} \nabla' v_i' \times B' \\ - \frac{1}{en\mu_0} \left( \frac{\Omega_i}{v_A} \right) \left( \frac{\Omega_i}{v_A} \right) \frac{B_0 B_0}{\Omega_i B_0} \nabla' \times (\nabla' \times B') \times B' \quad (29.3) \end{aligned}$$

برای ضریب جمله سمت چپ رابطه‌ی بالا می‌توان نوشت:

$$\frac{\eta \Omega_i}{\mu_0 v_A} = \gamma$$

همچنین با استفاده از رابطه‌ی (۲۰.۳) برای آخرین عبارت رابطه (۳.۲۹) داریم:

$$\nabla' \times (\nabla' \times B') \times B' = \mu_0 \nabla' \times [(J_p \times B') + (J_m \times B')]$$

در نهایت با در نظر گرفتن سیستم فاقد اثر هال ( $J \times B$  به جریان هال معروف است) یعنی صفر شدن جریال هال، به معادله‌ی القاء میدان مغناطیسی بهنجار شده به عنوان سومین معادله مگنتوهیدرودینامیکی به فرم زیر می‌رسیم

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v}_i \times B) - \gamma [\nabla \times (\nabla \times \vec{B})] \quad (۳۰.۳)$$

که در معادله بدست آمده  $\gamma$  جمله‌ی بدون بعد پراکنده‌ساز پلازما نامیده می‌شود. همچنین عدم حضور اثر هال بیانگر این است که اثرات سیکلوترونی یون در مدل *QMHD* وجود ندارد به عبارت دیگر یعنی فرض می‌شود فرکانس ژيرو یون در مقایسه با فرکانس موج خیلی بالاتر باشد. در حالیکه در مدل *Hall - QMHD* فرکانس موج با فرکانس ژيرو یون قابل مقایسه می‌باشد. مجموعه معادلات (۲۲.۳) و (۲۶.۳) و (۳۰.۳) معادلات اساسی حاکم مؤثر بر مدل کوانتومی تک-میدانی برای پلاسماهای الکترون-یون می‌باشند.

### ۱.۴.۳ بدست آوردن رابطه‌ی پاشندگی خطی با استفاده از معادلات *QMHD*

در بخش قبل معادلات مگنتوهیدرودینامیکی را به دست آوردیم. در این قسمت با استفاده از این معادلات سعی می‌نماییم که رابطه‌ی پاشندگی را به دست آوریم. در ابتدا فرض می‌کنیم نوسانات در راستای محور  $x$  صورت گیرد. بنابراین با فرض اینکه نوسانات از مرتبه‌ی  $\exp[ikx - \omega t] \propto$  باشند، معادلات مگنتوهیدرودینامیک را خطی سازی نموده و رابطه‌ی پاشندگی را استخراج می‌نماییم. به عنوان نکته اساسی فرضیات زیر را در حین خطی‌سازی در نظر می‌گیریم

$$B_0 = \text{constant} \rightarrow \nabla B_0 = 0, \nabla \times B_0 = 0$$

$$n_0 = \text{constant} = 1 \rightarrow \frac{\partial n_0}{\partial t} = 0$$

$$|B_0| = \sqrt{B_{0x}^2 + B_{0y}^2} = 1$$

$$v_0 = 0 \quad (۳۱.۳)$$

همچنین متغیرهایی مانند  $B$  و  $n$  و  $v$  و ... را به صورت دو بخش تعادلی با اندیس ۰ و اختلالی با اندیس ۱ در نظر می‌گیریم. و اینکه چون دامنه‌ی نوسانات کوچک است از جملات مرتبه‌ی دوم به بالاتر به دلیل وجود اثر غیر خطی صرف نظر می‌نماییم. ابتدا خطی‌سازی را از معادله‌ی پیوستگی شروع می‌نماییم.

$$\frac{\partial(n_0 + n_1)}{\partial t} + \nabla \cdot [(n_0 + n_1)(v_0 + v_1)] = 0$$

که معادل است با

$$\frac{\partial n_o}{\partial t} + \frac{\partial n_1}{\partial t} + \nabla \cdot [n_o v_o + n_o v_1 + n_1 v_o + n_1 v_1] = 0$$

از جمله های غیرخطی صرف نظر می نماییم

$$\frac{\partial n_o}{\partial t} + \frac{\partial n_1}{\partial t} + v_1 \nabla n_o + n_o \nabla v_1 = 0$$

با توجه به فرضیاتی که به منظور خطی سازی عبارات ذکر نمودیم، خواهیم داشت

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_o \nabla v_1 = 0$$

با استفاده از تبدیل فوریه داریم

$$-i\omega n_1 + n_o i k v_1 = 0$$

در نهایت برای چگالی ذرات با استفاده از معادله پیوستگی خواهیم داشت

$$n_1 = \frac{k_x}{\omega} v_{1x} \quad (32.3)$$

در این مرحله دومین معادله ی مگنتوهیدرودینامیک یعنی (۲۶.۳) را خطی سازی می نماییم. سمت راست این معادله شامل پنج جمله می باشد که به ترتیب هر کدام را جداگانه بررسی می کنیم. برای اولین جمله ی سمت راست رابطه (۲۶.۳) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_o + n_1} [\nabla \times (B_o + B_1)] \times (B_o + B_1) &= \frac{1}{n_o + n_1} [(\nabla \times B_o + \nabla \times B_1) \times (B_o + B_1)] \\ &= \frac{1}{n_o + n_1} [(\nabla \times B_o) \times B_o + (\nabla \times B_1) \times B_o \\ &\quad + (\nabla \times B_o) \times B_1 + (\nabla \times B_1) \times B_1] \\ &\simeq \frac{1}{n_o} (\nabla \times B_1) \times B_o \end{aligned} \quad (33.3)$$

برای جمله دوم سمت راست رابطه (۲۶.۳) داریم:

$$\frac{\beta}{n_o + n_1} \nabla (n_o + n_1) = \frac{\beta}{n_o + n_1} [\nabla n_o + \nabla n_1] \simeq \frac{\beta}{n_o} \nabla n_1 \quad (34.3)$$

برای جمله سوم سمت راست رابطه (۲۶.۳) داریم:

$$\frac{H_e^2}{2} \nabla \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{n_o + n_1}}{\sqrt{n_o + n_1}} \right) \simeq \frac{H_e^2}{2} \left[ \frac{1}{2n_o} \nabla^2 \nabla^2 n_1 \right] \quad (35.3)$$



برای جمله‌ی چهارم سمت راست رابطه (۲۶.۳) داریم:

$$|B_{\parallel}| = B_{\parallel y} \left[ 1 + \frac{B_{\parallel z}^2}{B_{\parallel y}^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

با فرض اینکه  $\frac{B_{\parallel z}^2}{B_{\parallel y}^2} \ll 1$  باشد و استفاده از بسط داریم

$$B_{\parallel y} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{B_{\parallel z}^2}{B_{\parallel y}^2} + \dots \right]$$

اگر اثر اسپین را با  $\phi$  نشان دهیم، می‌توان فرض کرد:

$$\varepsilon_0 \beta_0 \tanh(\varepsilon_0) = \phi$$

در نهایت با فرضیات ذکر شده می‌توان نوشت:

$$i\varepsilon_0 \beta_0 n_0 \tanh(\varepsilon_0 B_0) \vec{k} |B_{\parallel}| \rightarrow i\phi \vec{k} B_{\parallel y} \quad (36.3)$$

در نهایت برای جمله‌ی پنجم رابطه (۲۶.۳) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} (\nabla \times M) \times B &= \frac{1}{n} \left[ \nabla \times \left( \varepsilon_0 \beta_0 n \tanh(\varepsilon) \frac{\vec{B}}{|B|} \right) \right] \times \vec{B} = \frac{\phi}{n} \left[ \nabla \times \frac{n \vec{B}}{|B|} \right] \times \vec{B} \\ &= \frac{\phi}{n} \left[ \nabla \times \left( \frac{n}{|B|} \right) \times \vec{B} + \frac{n}{|B|} \nabla \times \vec{B} \right] \times \vec{B} \\ &= \frac{\phi}{n} \left( \nabla \left( \frac{n}{|B|} \right) \times B \right) \times B + \frac{\phi}{n |B|} (\nabla \times B) \times B \\ &= \frac{\phi}{n} \left[ n \nabla \left( \frac{1}{|B|} \right) + \frac{1}{|B|} \nabla n \right] \times B \times B + \frac{\phi}{|B|} (\nabla \times B) \times B \end{aligned}$$

رابطه بالا را خطی‌سازی می‌نماییم

$$\frac{\phi}{n_0} \left[ \left( \frac{1}{|B_0|} \nabla n_{\parallel} \right) \times B_0 \right] \times B_0 + \frac{\phi}{|B_0|} (\nabla \times B_{\parallel}) \times B_0 \quad (37.3)$$

در نهایت پس از جمع‌بندی تمام جملات رابطه (۲۶.۳) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_i}{dt} &= \frac{1}{n_0} (\nabla \times B_{\parallel}) \times B_0 - \frac{\beta}{n_0} \nabla n_{\parallel} + \frac{H_e^2}{4n_0} \vec{\nabla} \nabla^2 n_{\parallel} + \phi \nabla |B| \\ &\quad - \frac{\phi}{n_0} \left( \frac{\nabla n_{\parallel}}{|B_0|} \times B_0 \right) \times B_0 - \frac{\phi}{|B_0|} (\nabla \times B_{\parallel}) \times \vec{B}_0 \end{aligned}$$

با استفاده از تبدیل فوریه برای عبارت بالا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_i}{dt} &= \frac{i}{n_0} (\vec{k} \times B_{\parallel}) \times B_0 - \frac{\beta}{n_0} i \vec{k} n_{\parallel} - \frac{H_e^2}{4n_0} k_x^2 i k n_{\parallel} + \phi i \vec{k} B_{\parallel y} \\ &\quad + \frac{\phi}{n_0} \frac{i n_{\parallel}}{|B_0|} \times \vec{B}_0 \times (\vec{k} \times \vec{B}_0) + \frac{i\phi}{|B_0|} \vec{B}_0 \times (\vec{k} \times \vec{B}_{\parallel}) \end{aligned}$$

با دستور بک-کب می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_i}{dt} = & -\frac{i}{n_o} \left[ \vec{k} (B_o \cdot B_\parallel) - \vec{B}_\parallel (\vec{k} \cdot B_o) \right] - \frac{\beta}{n_o} i \vec{k} n_\parallel - \frac{He^\nu}{4n_o} k_x^\nu i k n_\parallel + \phi i \vec{k} B_{\parallel y} \\ & + \frac{i\phi n_\parallel}{n_o |B_o|} \left[ \vec{k} (B_o \cdot B_o) - \vec{B}_o (B_o \cdot k) \right] + \frac{i\phi}{|B_o|} \left[ \vec{k} (B_o \cdot B_\parallel) - \vec{B}_\parallel (B_o \cdot k) \right] \quad (38.3) \end{aligned}$$

اکنون معادله خطی‌سازی شده (۳۸.۳) را پس از تبدیل فوریه در جهت محورهای مختصات تفکیک می‌نماییم. برای محور  $x$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} -i\omega v_{\parallel x} = & -\frac{i}{n_o} \left[ (k_x B_{o,x} B_{\parallel x} + k_x B_{o,y} B_{\parallel y}) - B_{\parallel x} k_x B_{o,x} \right] - \frac{\beta}{n_o} i k_x n_\parallel - \frac{H_e^\nu}{4n_o} i k_x^\nu n_\parallel \\ & + \phi i k_x B_{\parallel y} + \frac{i\phi}{n_o |B_o|} n_\parallel \left[ k_x |B_o|^\nu - B_{o,x} k_x B_{o,x} \right] \\ & + \frac{i\phi}{|B_o|} \left[ k_x (B_{o,x} B_{\parallel x} + B_{o,y} B_{\parallel y}) - B_{\parallel x} B_{o,x} k_x \right] \quad (39.3) \end{aligned}$$

همچنین برای محور  $y$  می‌توان نوشت:

$$-i\omega v_{\parallel y} = -\frac{i}{n_o} [-B_{\parallel y} k_x B_{o,x}] - \frac{i\phi}{n_o |B_o|} n_\parallel B_{o,y} k_x B_{o,x} - \frac{i\phi}{|B_o|} B_{\parallel y} B_{o,x} k_x \quad (40.3)$$

و در نهایت برای محور  $z$  خواهیم داشت:

$$-i\omega v_{\parallel z} = -\frac{i}{n_o} (-B_{\parallel z} k_x B_{o,x}) - \frac{i\phi}{|B_o|} B_{\parallel z} B_{o,x} k_x \quad (41.3)$$

در این مرحله سومین معادله‌ی مگنتوهیدرودینامیک را خطی‌سازی می‌نماییم.

$$\frac{\partial(B_o + B_\parallel)}{\partial t} = \nabla \times (v_\parallel \times (B_o + B_\parallel)) - \gamma [\nabla \times \nabla \times (B_o + B_\parallel)]$$

که معادل است با

$$\frac{\partial B_o}{\partial t} + \frac{\partial B_\parallel}{\partial t} = \nabla \times [(v_\parallel \times B_o) + (v_\parallel \times B_\parallel)] - \gamma [\nabla \times (\nabla \times B_o + \nabla \times B_\parallel)]$$

که با توجه به فرض‌های روابط (۳۱.۳) داریم:

$$\frac{\partial B_\parallel}{\partial t} = \nabla \times (v_\parallel \times B_o) - \gamma [\nabla \times (\nabla \times B_\parallel)]$$

با استفاده از تبدیل فوریه خواهیم داشت:

$$-i\omega B_\parallel = ik \times (v_\parallel \times B_o) - \gamma [ik \times (ik \times B_\parallel)]$$

با استفاده از دستور بک-کب می‌توان نوشت:

$$-\omega B_\parallel = [v_\parallel (k \cdot B_o) - B_o (k \cdot v_\parallel)] - \gamma [ik (k \cdot B_\parallel) - B_\parallel (k \cdot ik)]$$

که معادل است با:

$$-w\vec{B}_x = [\vec{v}_x k_x B_{\circ x} - \vec{B}_{\circ} k_x v_{\backslash x}] + \gamma [\vec{k}_x k_x B_{\backslash x} - \vec{B}_{\backslash} k_x^2]$$

بنابراین خطی‌سازی معادله‌ی القاء میدان مغناطیسی عبارت خواهد بود از:

$$\vec{B}_x(w + i\gamma k_x^2) = \vec{v}_x k_x B_{\circ x} - \vec{B}_{\circ} k_x v_{\backslash x} + \gamma \vec{k}_x k_x B_{\backslash x} \quad (42.3)$$

پس از اینکه معادله‌ی کلی برای القاء میدان مغناطیسی به‌دست آوردیم آن را در راستای محورهای مختصات به‌طور جداگانه تفکیک می‌نماییم. در ابتدا برای راستای محور  $x$  داریم:

$$B_{\backslash x}(w + i\gamma k_x^2) = B_{\circ x} k_x v_{\backslash x} - B_{\circ x} k_x v_{\backslash x} + \gamma k_x^2 B_{\backslash x}$$

که معادل است با

$$wB_{\backslash x} = 0 \rightarrow B_{\backslash x} = 0 \quad (43.3)$$

برای راستای محور  $y$  داریم:

$$B_{\backslash y}(w + i\gamma k_x^2) = +B_{\circ y} k_x v_{\backslash x} - B_{\circ x} k_x v_{\backslash y} + \gamma k_y k_x B_{\backslash x}$$

که معادل است با

$$B_{\backslash y} = \frac{k_x [B_{\circ y} v_{\backslash x} - B_{\circ x} v_{\backslash y} k_x]}{w + i\gamma k_x^2} \quad (44.3)$$

همچنین برای راستای محور  $z$  داریم:

$$B_{\backslash z}(w + i\gamma k_x^2) = B_{\circ z} k_x v_{\backslash x} - v_{\backslash z} k_x B_{\circ x} + \gamma k_z k_x B_{\backslash x}$$

که معادل است با

$$B_{\backslash z} = -\frac{k_x B_{\circ x} v_{\backslash z}}{w + i\gamma k_x^2} \quad (45.3)$$

اکنون معادل متغیرهای  $n_1$  و  $B_{\backslash x}$  و  $B_{\backslash y}$  و  $B_{\backslash z}$  که از معادله‌ی القاء میدان مغناطیسی به‌دست آورده ایم را در رابطه‌های (۳۹.۳) و (۴۰.۳) و (۴۱.۳) قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} -i\omega v_{\backslash x} = & +\frac{i}{n_{\circ}} k_x B_{\circ y} \left( \frac{v_{\backslash y} k_x B_{\circ x} - v_{\backslash x} k_x B_{\circ y}}{w + i\gamma k_x^2} \right) - \frac{\beta}{n_{\circ}} \frac{i k_x^2}{w} n_{\circ} v_{\backslash x} \\ & - \frac{H_e^{\backslash} i k_x^2}{4w} v_{\backslash x} - \phi i k_x \left( \frac{v_{\backslash y} k_x B_{\circ x} - v_{\backslash x} k_x B_{\circ y}}{w + i\gamma k_x^2} \right) + \frac{i\phi k_x}{|B_{\circ}| w} v_{\backslash x} k_x |B_{\circ}|^2 \\ & - \frac{i\phi k_x}{|B_{\circ}| w} v_{\backslash x} B_{\circ x} k_x - \frac{i\phi}{|B_{\circ}|} k_x B_{\circ y} \left( \frac{v_{\backslash y} k_x B_{\circ x} - v_{\backslash x} k_x B_{\circ y}}{w + i\gamma k_x^2} \right) \end{aligned} \quad (46.3)$$

$$\begin{aligned} -i\omega v_{\backslash y} = & -\frac{i}{n_{\circ}} k_x B_{\circ x} \left( \frac{v_{\backslash y} k_x B_{\circ x} - v_{\backslash x} k_x B_{\circ y}}{w + i\gamma k_x^2} \right) - \frac{i\phi}{w} k_x^2 B_{\circ y} B_{\circ x} v_{\backslash x} \\ & + \frac{i\phi}{|B_{\circ}|} B_{\circ x} k_x \left( \frac{v_{\backslash y} k_x B_{\circ x} - v_{\backslash x} k_x B_{\circ y}}{w + i\gamma k_x^2} \right) \end{aligned} \quad (47.3)$$

$$-i\omega v_z = -\frac{i}{n_0} k_x B_{\circ x} \left( \frac{v_z k_x B_{\circ x}}{w + i\gamma k^2} \right) + \frac{i\phi}{|B_{\circ}|} k_x B_{\circ x} \left( \frac{v_z k_x B_{\circ x}}{w + i\gamma k^2} \right) \quad (۴۸.۳)$$

اکنون مجموعه معادلات بالا را برحسب مؤلفه‌های  $v_x$  و  $v_y$  و  $v_z$  مرتب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} v_x \left[ -i\omega + \frac{i}{n_0} \frac{k_x^2 B_{\circ y}}{w + i\gamma k^2} + \frac{\beta}{w} i k_x^2 + \frac{He^2}{4w} i k_x^2 - i\phi \frac{k_x^2 B_{\circ y}}{w + i\gamma k^2} \right. \\ \left. - \frac{i\phi}{w} k_x^2 + i\phi \frac{k_x^2}{w} B_{\circ x} - \frac{i\phi k_x^2 B_{\circ y}}{w + i\gamma k^2} \right] \\ + v_y \left[ -\frac{i}{n_0} k_x^2 \frac{B_{\circ y} B_{\circ x}}{w + i\gamma k^2} + i\phi \frac{k_x^2 B_{\circ x}}{w + i\gamma k^2} + i\phi \frac{k_x^2 B_{\circ y} B_{\circ x}}{w + i\gamma k^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (۴۹.۳)$$

$$\begin{aligned} v_x \left[ -\frac{i}{n_0} k_x^2 \frac{B_{\circ x} B_{\circ y}}{w + i\gamma k^2} + \frac{i\phi}{w} k_x^2 B_{\circ y} B_{\circ x} + \frac{i\phi}{|B_{\circ}|} \frac{k_x^2 B_{\circ x} B_{\circ y}}{w + i\gamma k^2} \right] \\ + v_y \left[ -i\omega + \frac{i}{n_0} \frac{k_x^2 B_{\circ x}}{w + i\gamma k^2} - \frac{i\phi}{|B_{\circ}|} \frac{B_{\circ x} k_x^2}{w + i\gamma k^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (۵۰.۳)$$

$$v_z \left( -i\omega + \frac{i}{n_0} \frac{k_x^2 B_{\circ x}}{w + i\gamma k^2} - \frac{i\phi}{|B_{\circ}|} \frac{k_x^2 B_{\circ x}}{w + i\gamma k^2} \right) = 0 \quad (۵۱.۳)$$

با توجه به معادله‌های به دست آمده، دترمینان ضرائب را می‌سازیم. که برای ضرائب  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  داریم:

$$\begin{aligned} A = -i\omega + \frac{i}{n_0} \frac{k_x^2 B_{\circ y}}{w + i\gamma k^2} + \frac{\beta}{w} i k_x^2 + \frac{He^2}{4w} i k_x^2 - i\phi \frac{k_x^2 B_{\circ y}}{w + i\gamma k^2} \\ - \frac{i\phi}{w} k_x^2 + i\phi \frac{k_x^2}{w} B_{\circ x} - \frac{i\phi k_x^2 B_{\circ y}}{w + i\gamma k^2} \end{aligned} \quad (۵۲.۳)$$

$$B = -\frac{i}{n_0} k_x^2 \frac{B_{\circ y} B_{\circ x}}{w + i\gamma k^2} + i\phi \frac{k_x^2 B_{\circ x}}{w + i\gamma k^2} + i\phi \frac{k_x^2 B_{\circ y} B_{\circ x}}{w + i\gamma k^2} \quad (۵۳.۳)$$

$$C = -\frac{i}{n_0} k_x^2 \frac{B_{\circ x} B_{\circ y}}{w + i\gamma k^2} + \frac{i\phi}{w} k_x^2 B_{\circ y} B_{\circ x} + \frac{i\phi}{|B_{\circ}|} \frac{k_x^2 B_{\circ x} B_{\circ y}}{w + i\gamma k^2} \quad (۵۴.۳)$$

$$D = -i\omega + \frac{i}{n_0} \frac{k_x^2 B_{\circ x}}{w + i\gamma k^2} - \frac{i\phi}{|B_{\circ}|} \frac{B_{\circ x} k_x^2}{w + i\gamma k^2} \quad (۵۵.۳)$$

$$E = -i\omega + \frac{i}{n_o} \frac{k_x^2 B_{o,x}}{\omega + i\gamma k^2} - \frac{i\phi}{|B_o|} \frac{k_x^2 B_{o,x}}{\omega + i\gamma k^2} \quad (56.3)$$

ضرائب به دست آمده را با استفاده از فرض‌هایی که بیان می‌کنیم، ساده‌تر می‌نماییم. فرضیات عبارتند از:

$$\begin{aligned} n_o &= 1 \\ B_{o,y} &= B_o \sin \theta, |B_o| = 1 \rightarrow B_{o,y} = \sin \theta \\ B_{o,x} &= B_o \cos \theta, |B_o| = 1 \rightarrow B_{o,x} = \cos \theta \\ z_2 &= \beta + \frac{k^2 He^2}{\epsilon} \\ z_1 &= \phi \sin \theta (1 + \sin \theta) \end{aligned} \quad (57.3)$$

$$\begin{aligned} A = -i\omega + \frac{ik_x^2 \sin^2 \theta}{\omega + i\gamma k^2} + \frac{ik_x^2}{\omega} \left( \beta + \frac{k^2 He^2}{\epsilon} \right) - i\phi \frac{k_x^2 \sin \theta}{\omega + i\gamma k^2} - i\phi \frac{k_x^2}{\omega} \\ + i\phi \frac{k_x^2 \cos^2 \theta}{\omega} - i\phi \frac{k_x^2 \sin^2 \theta}{\omega + i\gamma k^2} \end{aligned}$$

که معادل است با:

$$A = -i\omega + \frac{ik_x^2 \sin^2 \theta}{\omega + i\gamma k^2} + \frac{ik_x^2}{\omega} (z_2 - \phi) - \frac{ik_x^2}{\omega + i\gamma k^2} z_1 + i\phi \frac{k_x^2 \cos^2 \theta}{\omega}$$

عبارت بالا را مرتب می‌نماییم که برابر خواهد بود با:

$$A = -i\omega + \frac{ik_x^2}{\omega + i\gamma k^2} [\sin^2 \theta - z_1] + \frac{ik_x^2}{\omega} [z_2 - \phi + \phi \cos^2 \theta] \quad (58.3)$$

$$B = -i \frac{k_x^2 \sin \theta \cos \theta}{\omega + i\gamma k^2} + i\phi \frac{k_x^2 \cos \theta}{\omega + i\gamma k^2} + i\phi \frac{k_x^2 \sin \theta \cos \theta}{\omega + i\gamma k^2} \quad (59.3)$$

$$C = -ik_x^2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{\omega + i\gamma k^2} + i\phi \frac{k_x^2 \sin \theta \cos \theta}{\omega} + i\phi \frac{k_x^2 \sin \theta \cos \theta}{\omega + i\gamma k^2} \quad (60.3)$$

$$D = -i\omega + i \frac{k_x^2 \cos^2 \theta}{\omega + i\gamma k^2} - i\phi \frac{k_x^2 \cos^2 \theta}{\omega + i\gamma k^2} \quad (61.3)$$

اکنون دترمینان ضرائب رامی نویسیم که برابر است با  $AD - BC = 0 \rightarrow A(DE) - B(CE) = 0$  و ضرایبی که به دست آوردیم را جاگذاری می‌کنیم. پس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \left[ -i\omega + \frac{ik_x^\gamma}{\omega + i\gamma k^\gamma} [\sin^\gamma \theta - z_1] + \frac{ik_x^\gamma}{\omega} [z_2 - \phi + \phi \cos^\gamma \theta] \right] \\ & \times \left[ -i\omega + i \frac{k_x^\gamma \cos^\gamma \theta}{\omega + i\gamma k^\gamma} - i\phi \frac{k_x^\gamma \cos^\gamma \theta}{\omega + i\gamma k^\gamma} \right] - \left[ -i \frac{k_x^\gamma \sin \theta \cos \theta}{\omega + i\gamma k^\gamma} + i\phi \frac{k_x^\gamma \cos \theta}{\omega + i\gamma k^\gamma} + i\phi \frac{k_x^\gamma \sin \theta \cos \theta}{\omega + i\gamma k^\gamma} \right] \\ & \times \left[ (-ik_x^\gamma \frac{\sin \theta \cos \theta}{\omega + i\gamma k^\gamma} + i\phi \frac{k_x^\gamma \sin \theta \cos \theta}{\omega} + i\phi \frac{k_x^\gamma \sin \theta \cos \theta}{\omega + i\gamma k^\gamma}) \right] = 0 \end{aligned}$$

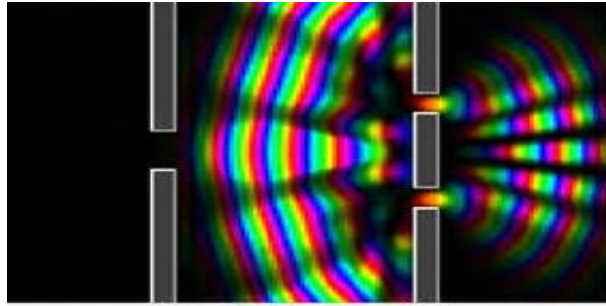
عبارتی که به دست آوردیم معادل است با:

$$\begin{aligned} & -\omega^2 + \frac{\omega k_x^\gamma}{\omega + i\gamma k^\gamma} \sin^\gamma \theta - \frac{\omega k_x^\gamma}{\omega + i\gamma k^\gamma} z_1 + \frac{\omega k_x^\gamma}{\omega} z_2 - \frac{k_x^\gamma}{\omega} \omega \phi + \frac{k_x^\gamma}{\omega} \omega \phi \cos^\gamma \theta \\ & + \frac{\omega k_x^\gamma \cos^\gamma \theta}{\omega + i\gamma k^\gamma} - \frac{k_x^\gamma \cos^\gamma \theta \sin^\gamma \theta}{(\omega + i\gamma k^\gamma)^2} + \frac{k_x^\gamma \cos^\gamma \theta}{(\omega + i\gamma k^\gamma)^2} \phi \sin \theta + \frac{k_x^\gamma \cos^\gamma \theta \phi \sin^\gamma \theta}{(\omega + i\gamma k^\gamma)^2} \\ & - \frac{k_x^\gamma \cos^\gamma \theta}{\omega(\omega + i\gamma k^\gamma)} z_2 + \frac{k_x^\gamma \cos^\gamma \theta \phi}{\omega(\omega + i\gamma k^\gamma)} - \frac{k_x^\gamma \cos^\gamma \theta \phi \cos^\gamma \theta}{\omega(\omega + i\gamma k^\gamma)} - \frac{\omega \phi k_x^\gamma \cos^\gamma \theta}{\omega + i\gamma k^\gamma} \\ & + \frac{\phi k_x^\gamma \cos^\gamma \theta}{(\omega + i\gamma k^\gamma)^2} \sin^\gamma \theta - \frac{\phi k_x^\gamma \cos^\gamma \theta}{(\omega + i\gamma k^\gamma)^2} \sin \theta - \frac{\phi k_x^\gamma \cos^\gamma \theta \phi \sin^\gamma \theta}{(\omega + i\gamma k^\gamma)^2} + \frac{\phi k_x^\gamma \cos^\gamma \theta}{\omega(\omega + i\gamma k^\gamma)} z_2 \\ & - \frac{\phi k_x^\gamma \cos^\gamma \theta}{\omega(\omega + i\gamma k^\gamma)} \phi + \frac{\phi k_x^\gamma \cos^\gamma \theta}{\omega(\omega + i\gamma k^\gamma)} \phi \cos^\gamma \theta - \frac{\phi k_x^\gamma \cos^\gamma \theta \sin^\gamma \theta}{(\omega + i\gamma k^\gamma)^2} + \frac{\phi^2 k_x^\gamma \cos^\gamma \theta \sin^\gamma \theta}{\omega(\omega + i\gamma k^\gamma)} \\ & + \frac{\phi^2 k_x^\gamma \cos^\gamma \theta \sin^\gamma \theta}{(\omega + i\gamma k^\gamma)^2} + \frac{k_x^\gamma \cos^\gamma \theta \sin^\gamma \theta}{(\omega + i\gamma k^\gamma)^2} - \frac{\phi k_x^\gamma \cos^\gamma \theta \sin^\gamma \theta}{\omega(\omega + i\gamma k^\gamma)} - \frac{\phi k_x^\gamma \cos^\gamma \theta \sin^\gamma \theta}{(\omega + i\gamma k^\gamma)^2} \\ & - \frac{\phi k_x^\gamma \cos^\gamma \theta \sin \theta}{(\omega + i\gamma k^\gamma)^2} + \frac{\phi^2 k_x^\gamma \cos^\gamma \theta \sin \theta}{\omega(\omega + i\gamma k^\gamma)} + \frac{\phi^2 k_x^\gamma \cos^\gamma \theta \sin \theta}{(\omega + i\gamma k^\gamma)^2} = 0 \end{aligned}$$

همانطور که مشاهده می‌شود، در عبارت بالا بیست و نه جمله مجزا داریم که برخی از جمله‌ها دو به دو با یکدیگر ساده می‌شوند.

اگر اولین جمله را با برجسب ۱ و آخرین جمله را با برجسب ۲۹ علامت‌گذاری نماییم، شماره‌ی جمله‌هایی که حذف می‌گردند عبارت است از (۱۵ و ۲۱)، (۱۰ و ۲۶)، (۱۶ و ۲۹)، (۹ و ۲۷)، (۸ و ۲۴)، (۱۷ و ۲۳) که به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} & -\omega^2 + \frac{\omega k_x^\gamma}{\omega + i\gamma k_x^\gamma} \sin^\gamma \theta - \frac{\omega k_x^\gamma}{\omega + i\gamma k_x^\gamma} z_1 + k_x^\gamma z_2 - k_x^\gamma \phi + k_x^\gamma \phi \cos^\gamma \theta \\ & + \frac{\omega k_x^\gamma \cos^\gamma \theta}{\omega + i\gamma k^\gamma} - \frac{k_x^\gamma \cos^\gamma \theta}{\omega(\omega + i\gamma k^\gamma)} z_2 + \frac{k_x^\gamma \cos^\gamma \theta \phi}{\omega(\omega + i\gamma k^\gamma)} - \frac{k_x^\gamma \cos^\gamma \theta \phi \cos^\gamma \theta}{\omega(\omega + i\gamma k^\gamma)} - \frac{\omega \phi k_x^\gamma \cos^\gamma \theta}{\omega + i\gamma k_x^\gamma} \\ & + \frac{k_x^\gamma \cos^\gamma \theta \phi}{\omega(\omega + i\gamma k^\gamma)} z_2 - \frac{k_x^\gamma \cos^\gamma \theta \phi^2}{\omega(\omega + i\gamma k^\gamma)} + \frac{k_x^\gamma \cos^\gamma \theta \phi^2}{\omega(\omega + i\gamma k^\gamma)} + \frac{k_x^\gamma \cos^\gamma \theta \phi^2 \sin^\gamma \theta}{\omega(\omega + i\gamma k^\gamma)} \\ & - \frac{k_x^\gamma \cos^\gamma \theta \phi \sin^\gamma \theta}{\omega(\omega + i\gamma k^\gamma)} + \frac{k_x^\gamma \cos^\gamma \theta \phi^2 \sin \theta}{\omega(\omega + i\gamma k^\gamma)} + \frac{k_x^\gamma \cos^\gamma \theta \phi^2 \sin^\gamma \theta}{\omega(\omega + i\gamma k^\gamma)} = 0 \end{aligned}$$



شکل ۶.۳: نمونه‌ای از پراش (*diffraction*)

در عبارت بالا هجده جمله داریم که می‌توان بعضی از جمله‌ها را حذف نمود. اگر جمله‌ی اول را با برچسب ۱ و جمله‌ی آخر را با برچسب ۱۸ مشخص نماییم، جمله‌های (۱۳ و ۱۴) و (۱۵ و ۱۸) دوه‌دو یکدیگر را حذف می‌کنند. سپس طرفین عبارت بالا را در  $\omega(\omega + i\gamma k^2)$  ضرب می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & -\omega^4 - i\gamma k^2 \omega^3 + \omega^2 k_x^2 \sin^2 \theta - \omega^2 k_x^2 z_1 + k_x^2 z_2 \omega^2 + k_x^2 z_1 i\gamma k^2 \omega - k_x^4 \phi \omega^2 \\ & - k_x^2 \phi i\gamma k^2 \omega + k_x^2 \phi \cos^2 \theta \omega^2 + k_x^2 \phi \cos^2 \theta i\gamma k^2 \omega + \omega^2 k_x^2 \cos^2 \theta \\ & - k_x^4 \cos^2 \theta z_2 + k_x^4 \cos^2 \theta \phi - k_x^4 \phi \cos^4 \theta - \omega^2 \phi k_x^2 \cos^2 \theta \\ & + k_x^4 \phi \cos^2 \theta z_2 - \phi k_x^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \phi^2 k_x^4 \sin \theta \cos^2 \theta = 0 \end{aligned}$$

که معادل است با

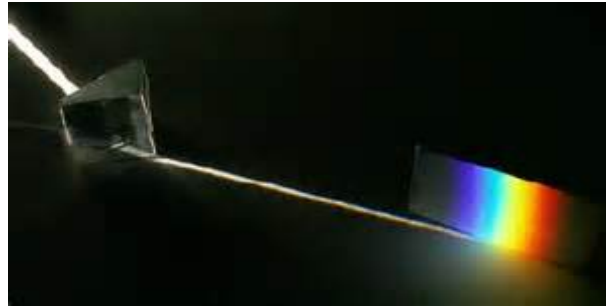
$$\begin{aligned} & \omega^4 - \omega^2 k^2 \left[ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \phi \cos^2 \theta - \phi \cos^2 \theta - z_1 + z_2 - \phi \right] \\ & + i\gamma k^2 \omega \left[ \omega^2 - k^2 z_2 + k^2 \phi - k^2 \phi \cos^2 \theta \right] \\ & + k^4 \cos^2 \theta \left[ z_2 - \phi + \cos^2 \phi + \phi z_2 + \phi \sin^2 \theta - \phi^2 \sin \theta \right] = 0 \end{aligned}$$

در نهایت به رابطه‌ی روبرو می‌رسیم:

$$\begin{aligned} & \omega^4 - \omega^2 k^2 \left[ 1 + z_2 - z_1 - \phi \right] + i\gamma k^2 \omega \left[ \omega^2 - k^2 (z_2 - \phi \sin^2 \theta) \right] \\ & + k^4 \cos^2 \theta \left[ z_2 - \phi^2 \sin \theta + \phi z_2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (62.3)$$

در نهایت عبارتی که به دست آوردیم، به رابطه‌ی پاشندگی برای امواج مگنتوهیدرودینامیک پلازما با اسپین ۱/۲ معروف است. لازم به ذکر است که وجود پارامترهای  $\phi$  و  $z_1$  به دلیل حضور اسپین الکترون می‌باشند.

اگر در رابطه‌ی پاشندگی مربوطه، فاکتور پراکندگی یعنی  $\gamma$  را برابر با صفر در نظر بگیریم به رابطه‌ی



شکل ۷.۳: نمونه‌ای از پراکندگی نور (*dispersion*)

دیگری برای امواج مغناطوسوتی با دو مد پراکندگی خواهیم رسید.

$$\omega^4 - \omega^2 k^2 [1 + z_2 - z_1 - \phi] + k^4 \cos^2 \theta [z_2 - \phi^2 \sin \theta + \phi z_2] = 0 \quad (63.3)$$

با تغییر متغیر  $\omega^2 = x$  رابطه تبدیل به یک عبارت دو جمله‌ای می‌شود.

$$x^2 - k^2 (1 + z_2 - z_1 - \phi)x + k^4 \cos^2 \theta [z_2 - \phi^2 \sin \theta + \phi z_2] = 0$$

$$\Delta = k^4 (1 + z_2 - z_1 - \phi)^2 - 4 (k^4 \cos^2 \theta [z_2 - \phi^2 \sin \theta + \phi z_2])$$

$$: x_1, x_2 = \frac{k^2 (1 + z_2 - z_1 - \phi) \pm k^2 \sqrt{(1 + z_2 + z_1 - \phi)^2 - 4 \cos^2 \theta (z_2 - \phi^2 \sin \theta + \phi z_2)}}{2}$$

در واقع جواب‌های دو جمله‌ای به دست آمده همان مدهای رابطه‌ی پراکندگی امواج مغناطوسوتی می‌باشند.

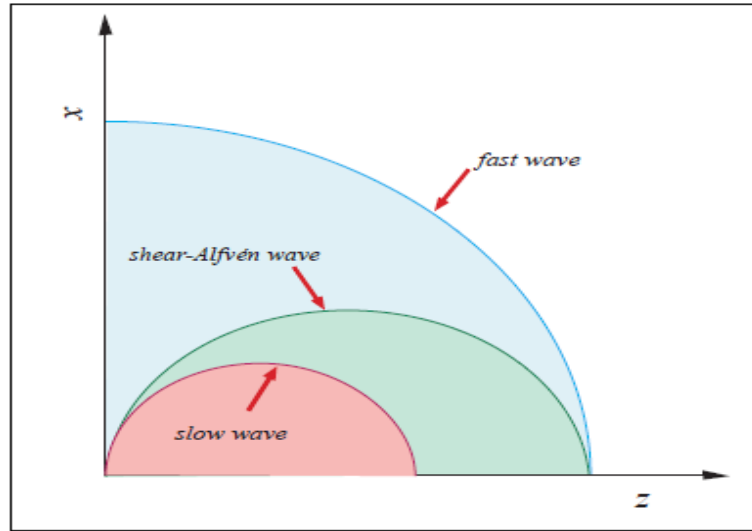
$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{2} (1 + z_2 - z_1 - \phi) \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 \cos^2 \theta [z_2 - \phi^2 \sin \theta + \phi z_2]}{(1 + z_2 - z_1 - \phi)^2}} \right) \quad (64.3)$$

در عبارت بالا علامت مثبت بیانگر مدهای با حرکت تند و سریع یا (*FM*) و علامت منفی بیانگر مدهای با حرکت آهسته و کند یا (*SM*) برای رابطه‌ی پاشندگی امواج (*QMHD*) پلاسمای کوانتومی با اسپین ۱/۲ خواهند بود (شکل ۸.۳). که فاکتورهای پراکندگی به ترتیب عبارتند از *He* فاکتور پراکندگی کوانتومی،  $\phi$  اثر اسپین الکترون،  $\beta$  فاکتور استاتیکی و  $\theta$  زاویه‌ی انحراف

## ۵.۳ انواع انتشار

در قسمت قبل مدهای پراکندگی امواج مغناطوسوتی پلاسمای کوانتومی تحت اثر اسپین ۱/۲ را به دست آوردیم. اکنون به منظور بررسی برخی از محدودیت‌های این رابطه به مطالعه‌ی انواع انتشار می‌پردازیم. که فقط انتشارهای از نوع راستای موازی و عمودی را بررسی می‌نماییم. در واقع راستای موازی و عمود نشان‌دهنده‌ی راستای انتشار  $k$  نسبت به میدان مغناطیسی ناآشفته‌ی  $B_0$  می‌باشد.





شکل ۸.۳: سرعت فاز در امواج MHD

### ۱.۵.۳ انتشار از نوع موازی

با توجه به رابطه‌ی (۶۲.۳) به منظور بررسی پراکندگی موازی، زاویه‌ی پراکندگی را برابر با صفر در نظر می‌گیریم یعنی  $\theta = 0$ . در ابتدا پارامترهای  $z_1$  و  $z_2$  را بر حسب شرایط جدید بازنویسی می‌نماییم.

$$z_1 = \phi \sin(0)(1 + \sin(0)) = 0$$

$$z_2 = \beta + \frac{k^2}{4} He^2 = \frac{c_s^2}{v_A^2} + \frac{k^2}{4} \frac{\hbar^2 e^2 B_0^2}{(m_e m_i^2) v_A^4} \quad (۶۵.۳)$$

مقدار جدید برای پارامترهای ذکرشده را در رابطه‌ی پراکندگی قرار می‌دهیم.

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{4}(1 + z_2) \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4z_2 \cos(0)}{(1 + z_2)^2}} \right]$$

این عبارت معادل است با

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{4}(1 + z_2) \left[ 1 \pm \sqrt{\frac{(1 + z_2)^2 - 4z_2}{(1 + z_2)^2}} \right] = \frac{1}{4}(1 + z_2) \left[ 1 \pm \sqrt{\frac{(1 - z_2)^2}{(1 + z_2)^2}} \right]$$

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{4} \left[ (1 + z_2) \pm (1 - z_2) \right] = \frac{1}{4} \left[ (1 + \beta + \frac{k^2}{4} He^2) \pm (1 - \beta - \frac{k^2}{4} He^2) \right] \quad (۶۶.۳)$$

رابطه‌ی به‌دست آمده را برای مدهای با حرکت سریع و تند (یعنی در نظر گرفتن علامت مثبت از رابطه‌ی پراکندگی) بازنویسی می‌کنیم

$$\begin{aligned} \frac{\omega_+^2}{k^2} &= \frac{1}{4} \left[ (1 + \beta + \frac{k^2}{4} He^2) + (1 - \beta - \frac{k^2}{4} He^2) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ (1 + \frac{c_s^2}{v_A^2} + \frac{k^2}{4} He^2) + (1 - \frac{c_s^2}{v_A^2} - \frac{k^2}{4} He^2) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\omega_{\pm}^2}{k^2} = \frac{1}{2} \left[ (v_A^2 + c_s^2 + \frac{k^2 He^2 v_A^2}{4}) + (v_A^2 - c_s^2 - \frac{k^2 He^2 v_A^2}{4}) \right]$$

$$\frac{\omega_{+}^2}{k^2} = \frac{1}{2} (2v_A^2) = v_A^2 \quad (67.3)$$

همانطور که مشاهده می‌شود در پراکندگی با مد سریع موج خالص آلفونی داریم. حال اگر با همین شرایط مشابه، روابط بالا را برای مد با حرکت کند و آهسته بازنویسی نماییم خواهیم داشت:

$$\frac{\omega_{\pm}^2}{k^2} = \frac{1}{2} [(1 + z_2) - (1 - z_2)] = \frac{1}{2} [(1 + \beta + \frac{k^2}{4} He^2) - (1 - \beta - \frac{k^2}{4} He^2)] \quad (68.3)$$

که معادل است با

$$\frac{\omega_{\pm}^2}{k^2} = \frac{1}{2} (2z_2) = \beta + \frac{k^2}{4} He^2 = \frac{c_s^2}{v_A^2} + \frac{k^2}{4} He^2$$

همچنین می‌توان نوشت

$$\frac{\omega_{\pm}^2}{k^2} = c_s^2 + \frac{k^2}{4} He^2 v_A^2 \quad (69.3)$$

برای محاسبه‌ی جمله‌ی آخر عبارت بالا، از توضیحات مربوط به رابطه‌ی (۴.۳) کمک می‌گیریم. البته فرض می‌کنیم که  $e^2$  و  $\mu_0$  و  $n_0$  همگی برابر با واحد باشند.

$$He^2 v_A^2 = \frac{\hbar^2}{m_e m_i} \frac{e^2 B_0^2 / m_i^2}{v_A^2} = \frac{\hbar^2}{m_e m_i} \frac{e^2 B_0^2 / m_i^2}{B_0^2 / \mu_0 n_0 m_i} = \frac{\hbar^2}{m_e m_i}$$

$$\frac{\omega_{\pm}^2}{k^2} = c_s^2 + \frac{k^2}{4} \frac{\hbar^2}{m_e m_i} \quad (70.3)$$

در نهایت این رابطه را برای پراکندگی با مد کند برای موج مغناطوسوتی می‌پذیریم. در هر دو مورد مد  $FM$  و  $SM$  همانطور که عبارات به‌دست آمده نشان دادند، پراکندگی‌ها تحت تاثیر اثر اسپین الکترون قرار نگرفته بودند.

### ۲.۵.۳ انتشار از نوع عمودی

دوباره به رابطه‌ی (۶۲.۳) باز می‌گردیم. اکنون اگر زاویه‌ی پراکندگی را برابر با  $\theta = 90^\circ$  در نظر بگیریم، وارد مبحث پراکندگی از نوع عمودی برای امواج مغناطوسوتی خواهیم شد. همانند قبل ابتدا عبارت معادل با پارامترهای مذکور تحت شرایط جدید می‌نویسیم.

$$z_1 = \phi \sin(90^\circ) (1 + \sin(90^\circ)) = 2\phi \quad (71.3)$$

$$z_2 = \beta + \frac{k^2}{4} He^2 = \frac{c_s^2}{v_A^2} + \frac{k^2}{4} \frac{\hbar^2 e^2 B_0^2}{(m_e m_i) v_A^2} \quad (72.3)$$

با جاگذاری عبارت معادل با پارامترها در رابطه‌ی پراکندگی خواهیم داشت

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{2} (1 + z_2 - 2\phi - \phi) \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(z_2 - \phi^2 \sin(90^\circ) - z_2 \phi) \cos^2(90^\circ)}{(1 + z_2 - z_1 - \phi)^2}} \right]$$

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{2}{2} [1 + z_2 - 2\phi - \phi] = v_A^2 + c_s^2 + \frac{k^2}{4} \frac{\hbar^2}{m_e m_i} - 3(\varepsilon_0 c_s^2 \tanh(\varepsilon_0))$$

$$\frac{\omega^2}{k^2} = v_A^2 + \tilde{c}_s^2 + \frac{k^2}{4} \frac{\hbar^2}{m_e m_i} \quad (73.3)$$

که  $\tilde{c}_s = c_s [1 - 3\varepsilon_0 \tanh(\varepsilon_0)]$  نشان‌دهنده‌ی سرعت آکوستیکی یون می‌باشد که به دلیل اثر اسپین الکترون تغییر کرده است. اگر  $\varepsilon_0 \sim 0$  آنگاه معمولاً موج مغناطوصوتی با حرکت سریع در پلاسمای تبهگن بدون اثر اسپین به‌دست خواهد آمد.

باید توجه نمود که در انتشار عمودی به دلیل اینکه راستای انتشار این امواج بر میدان مغناطیسی عمود می‌باشد، وجود میدان مغناطیسی بر پارامترهای کوانتومی اثر می‌گذارد. در این نوع از انتشار تنها یک حالت از مدهای پراکندگی وجود دارد یعنی مد  $FM$ . در حالیکه مد  $SM$  متوقف شده است. از طرف دیگر در حالت انتشار موازی چون راستای انتشار امواج در جهت راستای میدان مغناطیسی می‌باشد، لذا وجود میدان تأثیری بر آن‌ها نداشته و هر دو مد  $SM$  و  $FM$  حضور دارند و بر اساس نتایجی که به‌دست آوردیم یعنی روابط (۶۷.۳) و (۶۹.۳) پراکندگی‌ها تحت تأثیر اثر اسپین الکترون قرار نمی‌گیرند.

### ۶.۳ بررسی رابطه پراکندگی خطی در غیاب پارامتر اتلاف

در بخش قبل با در نظر گرفتن معادلات مگنتوهیدرودینامیک کوانتومی  $QMHD$  و اثرات اسپین الکترون رابطه پاشندگی برای امواج مغناطوصوتی را به دست آوردیم (۶۲.۳). با توجه به اینکه اضافه نمودن اثرات جدید به پلازما باعث تغییر اساسی در رفتار دینامیکی سیستم می‌شود، رابطه پاشندگی خطی حاصل‌شده این تغییرات را نشان می‌دهد. میدان مغناطیسی، چگالی ذرات، پارامترهایی هستند که دامنه ناپایداری سیستم به آنها وابسته می‌باشد و قدرت اثرات کوانتومی و اسپینی در سیستم را تغییر می‌دهد. در همین راستا رابطه پاشندگی خطی (۶۲.۳) در غیاب پارامتر اتلاف ( $\gamma = 0$ ) مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم. در ابتدا با فرض اینکه  $a = k^2(1 + z_2 - z_1 - \phi)$  و  $c = k^2 \cos^2 \theta (z_2 - \phi^2 \sin \theta + \phi z_2)$  رابطه پاشندگی خطی را می‌توان به صورت کلی‌تر زیر نوشت:

$$\omega^4 - a\omega^2 + c = 0 \quad (74.3)$$

به منظور بررسی آهنگ نرخ اتلاف و فرکانس نوسانات از تغییر متغیر  $w = \omega_r + I\omega_i$  استفاده نموده و معادله جدید را به دو معادله با جزء حقیقی و موهومی تفکیک می‌نماییم.

$$(\omega_r + I\omega_i)^4 - a(\omega_r + I\omega_i)^2 + c$$

این رابطه را می‌توان به صورت روبرو نوشت:

$$\omega_r^4 + 4I\omega_r^3\omega_i - 6\omega_r^2\omega_i^2 - 4I\omega_r\omega_i^3 + \omega_i^4 - a\omega_r^2 - 2Ia\omega_r\omega_i + a\omega_i^2 + c = 0$$

که برابر است با

$$\omega_r^4 - 6\omega_r^2\omega_i^2 + \omega_i^4 - a\omega_r^2 + a\omega_i^2 + c + I(4\omega_r^3\omega_i - 4\omega_r\omega_i^3 - 2a\omega_r\omega_i) = 0$$

برای قسمت حقیقی می‌توان نوشت:

$$\omega_r^4 - 6\omega_r^2\omega_i^2 + \omega_i^4 - a\omega_r^2 + a\omega_i^2 + c = 0 \quad (75.3)$$

همچنین برای قسمت موهومی داریم:

$$4\omega_r^3\omega_i - 4\omega_r\omega_i^3 - 2a\omega_r\omega_i = 0 \quad (76.3)$$

جواب‌های قسمت موهومی عبارتند از:

$$\omega_i = 0, \quad \omega_i = \pm \sqrt{\frac{4\omega_r^2 - 2a}{2}} \quad (77.3)$$

با جاگذاری یکی از جواب‌های بدست آمده روابط بالا در معادله مربوط به قسمت حقیقی داریم:

$$\omega_r^4 - \frac{3\omega_r^2(4\omega_r^2 - 2a)}{2} + \frac{(4\omega_r^2 - 2a)^2}{16} - a\omega_r^2 + \frac{a(4\omega_r^2 - 2a)}{4} + c = 0 \quad (78.3)$$

که معادل است با:

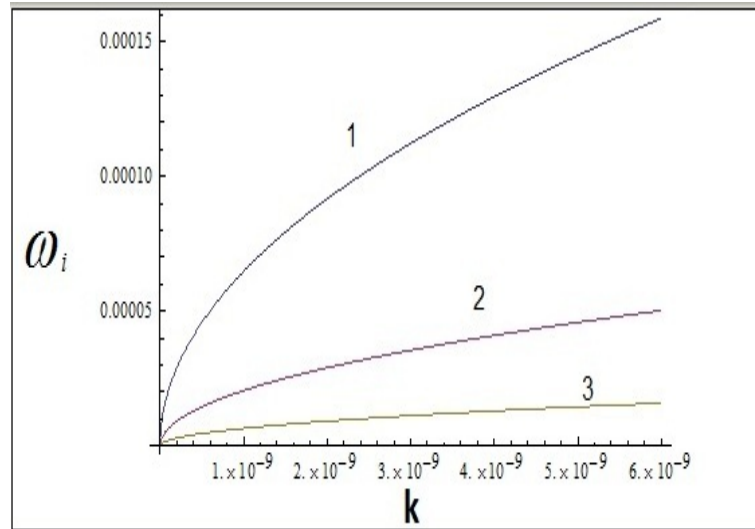
$$-4\omega_r^4 + 2a\omega_r^2 - \frac{1}{4}a^2 + c = 0$$

و جواب‌های قسمت حقیقی عبارتند از:

$$\omega_r = \pm \sqrt{\frac{a + 2\sqrt{c}}{2}}, \quad \omega_r = \pm \sqrt{\frac{a - 2\sqrt{c}}{2}} \quad (79.3)$$

اکنون مقدار پارامترهای  $a$  و  $c$  را در یکی از جواب‌های بدست آمده بالا قرار می‌دهیم:

$$\omega_r = \frac{1}{2} \sqrt{k^2(1 + z_2 - z_1 - \phi) + 2\sqrt{k^2 \cos^2 \theta (z_2 - \phi^2 \sin \theta - \phi z_2)}} \quad (80.3)$$



شکل ۹.۳: اثر انرژی زمین بر روی دامنه ناپایداری‌ها

با جاگذاری  $\omega_r$  در معادله (۷۶.۳) به این نتیجه می‌رسیم که برای داشتن یک مقدار معین  $\omega_i$  باید شرط  $c > 0$  و  $\phi^2 \sin^2 \theta > z_2 + \phi z_2$  برقرار باشد. این در حالی است که در سیستم‌های کلاسیکی ( $\phi = 0, H_e = 0$ ) به ازاء تمام طول موج‌ها یک دامنه ناپایدار در سیستم ظاهر خواهد شد. همچنین در حالت انتشار موازی امواج آلفونی (۶۵.۳) و امواج مغناطوسوتی کوانتومی (۶۸.۳) حاصل می‌شود که اثرات اسپینی در آن دیده نمی‌شود و سیستم مانند حالت کلاسیکی رفتار می‌کند. در حالت انتشار عمودی امواج مغناطوسوتی کوانتومی خواهیم داشت که در سیستم ترکیبی از اثرات اسپینی و مدهای کوانتومی داریم و می‌توان نوشت:

$$\frac{\omega_i^2}{k^2} = v_A^2 + c_s^2 - 2c_s^2 \varepsilon_0 \tanh(\varepsilon_0) + \frac{k^2 \hbar^2}{4m_e m_i} \quad (۸۱.۳)$$

شکل (۹.۳) انرژی زمین بر روی دامنه ناپایداری را نشان می‌دهد. انرژی زمین پیامد مغناطش سیستم ناشی از اثر اسپین الکترون می‌باشد که با میدان مغناطیسی رابطه مستقیم دارد. همانطور که از شکل مشخص است با افزایش  $\varepsilon_0$  دامنه ناپایداری موج کاهش می‌یابد.

منحنی ۱ برای  $T_e = 10^7 K$  و  $n_0 = 10^{23} m^{-3}$  و  $B_0 = 10^5 T$

منحنی ۲ برای  $T_e = 10^7 K$  و  $n_0 = 10^{23} m^{-3}$  و  $B_0 = 10^5 T$

منحنی ۳ برای  $T_e = 10^7 K$  و  $n_0 = 10^{23} m^{-3}$  و  $B_0 = 10^5 T$

همانطور که از شکل پیداست با افزایش انرژی زمین دامنه ناپایداری‌های مگنتوهیدرودینامیکی کم می‌شود. به بیان ساده‌تر وجود اثرات اسپین کوانتومی ناپایداری‌های سیستم را کم‌رنگتر می‌کند. لازم به ذکر است که چگالی و دمای انتخاب شده در محدوده اختریفیزیکی چگال قرار دارد.

## ۷.۳ جمع‌بندی

در این فصل با استفاده از معادلات حرکت یون و الکترون با تصحیحات کوانتومی، و همچنین معادلات ماکسول، معادلات اساسی در مدل مگنتوهیدرودینامیک کوانتومی را در حضور اثر اسپین الکترون ( $1/2$ ) به دست آوردیم. سپس با کمک روش خطی‌سازی و بهنجار نمودن معادلات اساسی رابطه‌ی پاشندگی خطی تحت اثر اسپین الکترون برای مدل  $QMHD$  استخراج نمودیم. برخی از مهمترین نتایجی که در این فصل حاصل شد عبارتند از:

- از امواج بنیادی پلاسما که به نوسان‌های یونی با بسامد کم در حضور میدان مغناطیسی مربوط می‌شود موج مغناطوسوتی می‌باشد. این موج در عرض میدان ناآشفته‌ی  $B$  منتشر می‌شود.
- موج آلفون نوع دیگری از امواج بنیادی پلاسماست که از نوع هیدرومغناطیسی بوده و راستای انتشار آن موازی با میدان ناآشفته‌ی  $B$  می‌باشد.
- معادله‌ی حرکت الکترون و یون، معادله‌ی پیوستگی و همچنین معادله‌ی القاء میدان مغناطیسی از معادلات اساسی مدل مگنتوهیدرودینامیک کوانتومی ( $QMHD$ ) هستند.
- در یک پلاسمای کوانتومی کاملاً تبهگن الکترون‌ها به دلیل وجود اثر اسپین ( $1/2$ ) تحت تأثیر نیروی کوانتومی قرار می‌گیرند. این نیرو ترکیبی از گرادیان پتانسیل بوهم و انرژی مغناطیسی الکترون می‌باشد.
- با استفاده از معادلات اساسی مدل مگنتوهیدرودینامیک کوانتومی، رابطه‌ی پاشندگی خطی برای امواج مغناطوسوتی در یک پلاسمای کوانتومی تبهگن با حضور اثر اسپین الکترون، به دست می‌آید.
- در غیاب فاکتور پراکندگی  $\gamma = 0$ ، رابطه‌ی پاشندگی به دو مد  $SM$  و  $FM$  برای امواج مغناطوسوتی در یک پلاسمای کوانتومی تبهگن تبدیل می‌گردد.
- چنانچه زاویه‌ی انحراف پراکندگی را  $\theta = 0$  و  $\theta = 90$  فرض نماییم به ترتیب وارد مباحث پراکندگی موازی و پراکندگی عمودی برای امواج  $QMHD$  خواهیم شد.
- در  $\theta = 0$  هر دو مد پراکندگی یعنی  $SM$  و  $FM$  آشکار می‌شوند. با این تفاوت که  $FM$  از نوع موج آلفون خواهد بود. همچنین نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که اسپین الکترون تأثیری بر این دو نوع مد در شرایط جدید نخواهد داشت.
- در  $\theta = 90$  فقط یک نوع مد ظاهر می‌شود در حالیکه تحت تأثیر اثر اسپین الکترون قرار گرفته است.



## فصل ۴

بررسی رفتارهای غیرخطی و اثرات اسپین  
الکترون بر پلاسمای مغناطیده کوانتومی

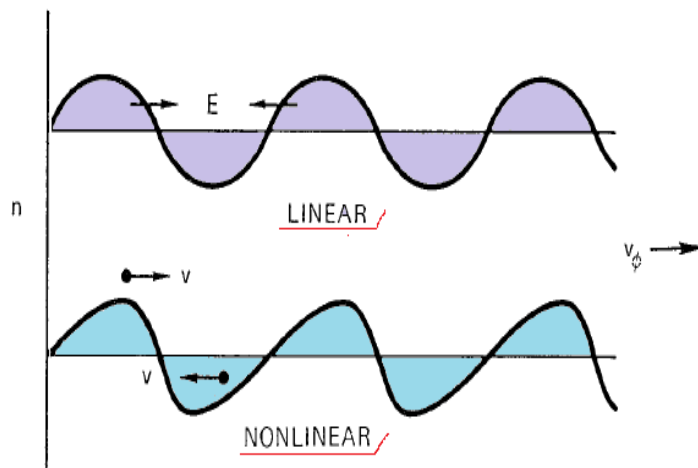




شکل ۱.۴: پدیده غیر خطی مانند شکستن امواج اقیانوس در برخورد با ساحل

## ۱.۴ مقدمه

در فصل‌های قبل به بررسی پدیده‌های خطی در پلاسمای کوانتومی پرداختیم. پدیده‌های خطی، معادلات توصیف‌کننده‌ی آن‌ها فقط شامل توان اول متغیرهای وابسته می‌باشد. در خطی‌سازی عبارات مرتبه‌ی اول پارامترها در نظر گرفته می‌شود. و از عبارات مرتبه‌های بالاتر و مشتقات پارامترها که بسیار کوچک‌اند، صرف نظر می‌گردد. در واقع این روش این امکان را به ما می‌دهد که فقط یک مؤلفه‌ی فوریه در نظر بگیریم. امواج معمولاً وقتی به یک دامنه‌ی بزرگ و پابرجا می‌رسند مشاهده می‌شوند، از آنجا که در نظریه‌ی خطی زمان شروع مشاهدات معلوم نیست، روند تغییر و رشد دامنه‌ی امواج ناپایدار قابل مشاهده نخواهد بود. لذا نظریه‌ی خطی اعتبار خود را از دست می‌دهد و اثرات غیر خطی مهم شده و مورد بررسی قرار می‌گیرند. همچنین وقتی دامنه‌ی یک موج بزرگ گردید آن موج می‌تواند تغییرات چندی را تحمل کند. به عنوان مثال شکل موج می‌تواند از سینوسی به مثلی تغییر یابد، نهایتاً موج می‌تواند مثل شکستن امواج اقیانوس توسط ساحل بشکند (شکل ۱.۴) و انرژی را به انرژی حرارتی ذرات مبدل سازد. یا اینکه ذرات را در دره‌های پتانسیل خود گرفتار ساخته و بدین ترتیب مشخصات محیطی را که در آن منتشر می‌شود تغییر دهد. اثرات غیرخطی می‌توانند باعث شیب‌دار شدن دامنه‌ی موج گردند. به عنوان مثال موج یونی را در نظر می‌گیریم که با افزایش دامنه، سرعت می‌گیرد و شکل آن از سینوسی به دندان‌اره‌ای با شیب تندتری در لبه‌ی جلویی تغییر می‌یابد. (شکل ۱.۴) علت این است که میدان الکتریکی موج به یون‌ها شتاب می‌دهد. یون‌های واقع در قله‌ی توزیع پتانسیل نسبت به یون‌های واقع در گودی آن دارای سرعت بیشتری در راستای  $v_0$  هستند. در نظریه‌ی غیرخطی، به آسانی مشاهده می‌شود که یون‌های واقع در قله به سمت راست انتقال می‌یابند اما آن‌هایی که در گودی هستند به سمت چپ انتقال می‌یابند و بدین ترتیب شکل موج تغییر شکل پیدا می‌کند. اثرات غیرخطی در پلازما موجب ایجاد مدهای جدیدی از امواج جایگزیده مانند امواج سالیوتونی، امواج ضربه‌ای، امواج شوک آکوستیکی و... می‌شود. در این فصل با استفاده از مدل سیالی کوانتومی و روش‌های حل غیرخطی، معادلات اساسی را برای پلاسمای کوانتومی کاملاً تبهگن در حضور اثر اسپین الکترون به دست آورده و برخی از نتایج آن به بحث گذاشته می‌شود.



شکل ۲.۴: هندسه‌ی موج خطی و غیرخطی

## ۲.۴ معادلات فیزیک پلاسمای غیرخطی

دو معادله‌ی غیرخطی وجود دارند که در ارتباط با امواج پلاسمای غیرخطی به طور گسترده‌ای بررسی شده‌اند. معادله‌ی کورته‌وگ- دووری و معادله‌ی شرودینگر غیرخطی که هر یک به نحو متفاوتی با پدیده‌ی غیرخطی سروکار دارد. هرگاه یک موج آکوستیکی یونی دامنه‌ای بزرگ پیدا کند، اثر غیرخطی آن شیبدار شدن موج است. علت این پدیده حضور جمله‌ی  $v \cdot \nabla v$  در معادله‌ی حرکت یون می‌باشد که از نظر ریاضی با معادله‌ی کورته‌وگ- دووری بیان می‌شود.

### ۱.۲.۴ معادله‌ی شرودینگر غیرخطی

این معادله به صورت متعارف بی‌بعد زیر است

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + p \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + q |\psi|^2 \psi = 0 \quad (1.4)$$

که در آن  $\psi$  دامنه‌ی موج است و  $p$  و  $q$  پارامترهایی هستند که توسط شرایط حاکم بر پلازما تعیین می‌شوند. این معادله با معادله‌ی شرودینگر معمولی یعنی

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - V(x, t) \psi = 0 \quad (2.4)$$

از این لحاظ تفاوت دارد که در آن پتانسیل  $V(x, t)$  به خود  $\psi$  وابسته است و در نتیجه جمله‌ی آخر را غیرخطی می‌کند. البته  $V$  تنها به بزرگی  $|\psi|^2$  بستگی دارد، و مستقل از فاز  $\psi$  می‌باشد. به منظور بررسی تعادل و پایداری امواج برانگیخته در مرتبه‌ی غیرخطی از معادله‌ی شرودینگر غیرخطی استفاده می‌نماییم. همچنین اگر  $pq > 0$  باشد، سالیتون‌های موج برانگیخته ناپایدار خواهند بود. یعنی یک موجک بر روی پوش سالیتونی تمایل به رشد و نمو دارد.

### ۲.۲.۴ معادله‌ی کورته‌وگ- دووری

یک موج پلاسمای الکترونی هرگاه غیرخطی شود، اثر غالب آن است که نیروی محرکه‌ی وزنی با به عقب راندن زمینه‌ی پلازما موجب کاهش موضعی چگالی موسوم به کاویتون می‌شود. سپس امواج پلاسمایی به دام افتاده در این کاواک یک ساختار منزوی تشکیل می‌دهند که سالیتون یا پوش نامیده می‌شود. در میان پدیده‌های غیرخطی سالیتون‌ها به دلیل کاربرد وسیع در فیزیک اهمیت ویژه‌ای پیدا کرده‌اند. این امواج برای اولین بار در سطح آب مشاهده شدند. در سال ۱۹۸۵ کورته‌وگ و دووری به معادله‌ی دست یافتند که رفتار انتشار یک بعدی امواجی که در سطح آب کم عمق منتشر می‌شدند را توصیف می‌کرد. در واقع سولیوتون‌ها همان جواب‌های معادله‌ی کورته‌وگ- دووری هستند. که امروزه آن را به اختصار  $KdV$  می‌نامند.<sup>۱</sup> این معادله در بسیاری از وضعیت‌های فیزیکی، از جمله موج غیرخطی ضعیف، ظاهر می‌شود و عبارت است از:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} = 0 \quad (3.4)$$

که در آن  $U$  دامنه امواج است، و  $\tau$  و  $\xi$  به ترتیب متغیرهای زمان‌گونه و فضاگونه هستند. جمله‌ی دوم به جمله‌ی همرفتی مشهور است و  $v \cdot \nabla v$  به شیبدار شدن موج منجر می‌شود. و جمله‌ی سوم از پاشیدگی موج ناشی می‌شود. اصولاً امواج یونی به ازای  $T_i = 0$  از رابطه‌ی زیر تبعیت می‌کنند.

$$\omega^2 = k^2 c_s^2 (1 + k^2 \lambda_D^2)^{-1} \quad (4.4)$$

اگر این عبارت را بسط تیلور دهیم، خواهیم دید که جمله‌ی پاشیدگی با  $k^3 \lambda_D^2$  متناسب است.

$$\omega = kc_s (1 + k^2 \lambda_D^2)^{-1/2} = kc_s (1 - 1/2 k^2 \lambda_D^2) = kc_s - \frac{1}{4} k^3 c_s \lambda_D^2$$

این امر دلیل جمله‌ی مشتق سوم در معادله‌ی کورته‌وگ- دووری می‌باشد. در ادامه جواب این معادله، که سالیتون‌ها هستند، را به دست می‌آوریم. می‌دانیم که تپ موج منفرد به هنگام انتشار با سرعتی مانند  $c$  (اما نه سرعت نور) شکل خود را حفظ می‌کند. این نشان می‌دهد که دامنه‌ی موج به جای وابستگی جداگانه به متغیرهای زمان‌گونه یا فضاگونه فقط به متغیر  $\xi - c\tau$  بستگی دارد. لذا از تغییر متغیرهای روبرو استفاده می‌نماییم.

$$\eta = \xi - ut \quad \tau = \tau$$

که  $\eta$  و  $\xi$  متغیرهای مکان‌گونه و  $\tau$  متغیر زمان‌گونه و  $u$  سرعت موج می‌باشند.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - A \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + D \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \xi^3} = 0 \quad (5.4)$$

<sup>۱</sup>Korteweg-deVries

که در آن  $\varphi$  دامنه‌ی موج می‌باشد. و ضرائب  $A$  و  $D$  با توجه به شرایط حاکم بر پلاسما به دست می‌آید، که ارتفاع و دامنه‌ی جواب‌های سالی‌تونی را تعیین می‌کند.

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial \eta}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \eta} = -u \frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}$$

عبارات به دست آمده از تغییر متغیرها را در معادله قرار می‌دهیم

$$-u \frac{\partial}{\partial \eta} \varphi d\eta - \frac{1}{4} A \varphi \frac{\partial}{\partial \eta} \varphi^2 d\eta + D \frac{\partial^3}{\partial \eta^3} \varphi = 0$$

از عبارت بالا انتگرال می‌گیریم

$$-u \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\varphi}{d\eta} - \frac{1}{4} A \int_{\eta}^{\infty} \frac{d}{d\eta} \varphi^2 d\eta + D \int_{\eta}^{\infty} \frac{d}{d\eta} \left( \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} \right) d\eta = 0$$

با فرض اینکه هنگامیکه  $\eta \rightarrow \pm\infty$  مشتق‌هایش نیز صفر می‌شوند، بنابراین خواهیم داشت:

$$-u\varphi|_{\eta}^{\infty} - \frac{1}{4} A \varphi^2|_{\eta}^{\infty} + D \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2}|_{\eta}^{\infty} = 0$$

طرفین عبارت بالا را در  $\frac{d\varphi}{d\eta}$  ضرب می‌کنیم

$$-u\varphi \frac{d\varphi}{d\eta} - \frac{1}{4} A \varphi^2 \frac{d\varphi}{d\eta} + D \frac{d^3 \varphi}{d\eta^3} = 0$$

اکنون با انتگرال‌گیری داریم

$$-u \frac{1}{4} \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\varphi^2}{d\eta} d\eta - \frac{1}{4} \frac{1}{3} A \int_{\eta}^{\infty} \frac{d\varphi^3}{d\eta} d\eta + D \int_{\eta}^{\infty} \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} d\eta = 0$$

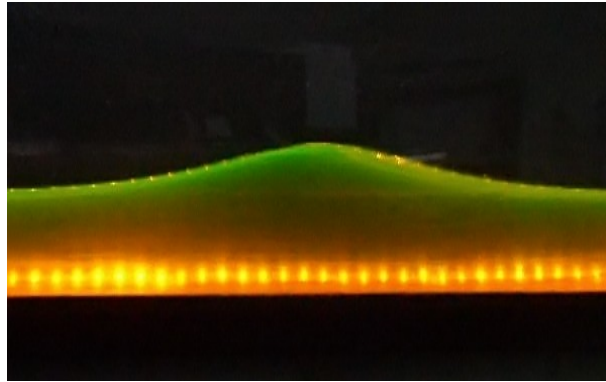
که جواب آن عبارت خواهد بود از

$$\frac{1}{4} u \varphi^2|_{\eta}^{\infty} - \frac{1}{6} A \varphi^3|_{\eta}^{\infty} + \frac{1}{4} D \left( \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} \right)^2|_{\eta}^{\infty} = 0 \quad (6.4)$$

برای اینکه جمله‌ی  $\left( \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} \right)^2$  را محاسبه کنیم به نکات زیر توجه داریم

$$\frac{1}{4} D \left( \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} \right)^2 = \frac{2}{3} \varphi^2 \left( u - \frac{1}{3} A \varphi \right)$$

$$\left( \frac{dU}{d\eta} \right)^2 = \frac{2}{3} U^2 (3c - U) \quad , \quad U(\eta) = 3c \operatorname{sech}^2 \left( \left( \frac{c}{4} \right)^{1/2} \eta \right)$$



شکل ۳.۴: موج سالیتون

بنابراین با توجه به نکاتی که بیان کردیم، جمله‌ی آخر رابطه‌ی (۴.۴) را به دست می‌آوریم.

$$\left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)^2 = \frac{4}{\epsilon D} \varphi^2 \left(\frac{3u}{A} - \varphi\right)$$

$$\varphi = \frac{3u}{A} \operatorname{sech}^2 \left[ \left(\frac{u}{4D}\right)^{1/2} (\xi - u\tau) \right]$$

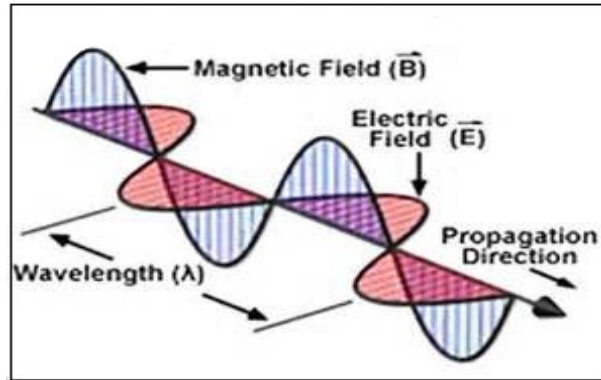
فرض می‌کنیم  $\varphi_m = \frac{3u}{A}$  و  $\delta = \left(\frac{u}{4D}\right)^{1/2}$ . بنابراین جواب نهایی معادله‌ی  $KdV$  را به صورت عبارت روبرو می‌نویسیم:

$$\varphi = -\varphi_m \operatorname{sech}^2 \left[ \left(\frac{\xi - u\tau}{\delta}\right) \right] \quad (7.4)$$

معادله‌ای که به عنوان جواب نهایی معادله‌ی کورته‌وگ-دووری به صورت یک موج سالیتونی به دست آوردیم.

### ۳.۲.۴ سالیتون

یک موج منزوی خود-تقویت کننده (یک پالس یا بسته موج) است که وقتی با سرعت ثابت حرکت کند شکلش را حفظ می‌کند (شکل ۳.۴). سالیتون‌ها در نتیجه خنثی‌سازی آثار غیرخطی و پاشندگی در محیط حاصل می‌شوند. پدیده سالیتونی اولین بار توسط جان اسکات راسل (۱۹۶۰) توصیف شد. سالیتون‌ها به بسته خاصی از جواب‌های موضعی یک معادله غیرخطی موج گفته می‌شود که با شکل ارتفاع و سرعت ثابت به پیشروی و انتشار در محیط ادامه می‌دهند. از طرف دیگر هرگاه یک موج پلاسمای الکترونی غیرخطی شود نیروی محرکه وزنی به وجود می‌آورد که با به عقب راندن زمینه پلاسمای موجب یک کاهش چگالی موضعی موسوم به کاویتون می‌شود سپس امواج پلاسمای به دام افتاده در کاواک ساختار منزوی تشکیل می‌دهند که سالیتون یا پوش یا موج انفرادی نامیده می‌شود.



شکل ۴.۴: انتشار امواج الکترومغناطیس

### ۴.۲.۴ معادله $KP$

جواب‌های سالیتمونی که برای معادله  $KdV$  به دست آوردیم معمولاً در یک بعد مکان (مثلاً جهت محور  $x$ ) پایداری خود را حفظ می‌کنند. حال چنانچه فرض کنیم دامنه و فاز موج در راستای محور  $y$  خیلی آهسته تغییر کند، به جهت انتشار سالیتمون انحراف ضعیفی عمود می‌شود که پایداری سالیتمون را زیر سؤال می‌برد. این مشکل در سال ۱۹۷۰ اولین بار با حل معادله  $KP$  برطرف شد.<sup>۲</sup> معادله  $KP$  به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial U}{\partial \tau} + AU \frac{\partial U}{\partial \xi} + B \frac{\partial^3 U}{\partial \xi^3} \right) + C \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0 \quad (۸.۴)$$

که مشتقات مکان‌گونه به ترتیب  $\xi$  و  $\eta$  و مشتق زمان‌گونه  $\tau$  بوده و  $U$  دامنه موج می‌باشد. ضرایب  $A$  و  $B$  و  $C$  با توجه به شرایط مسأله بدست می‌آیند.

### ۵.۲.۴ معادله $Burger$

این معادله<sup>۳</sup> یکی از مشهورترین معادله پخش غیرخطی می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} - a \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (۹.۴)$$

پارامتر مثبت  $a$  اثرات اتلاف در سیستم را نشان می‌دهد.<sup>[۲۱]</sup>

<sup>۲</sup>Kadomtsev-Petviashvili

<sup>۳</sup>Burgers equation

### ۳.۴ به دست آوردن معادله‌ی تحول غیرخطی با توجه به معادله‌ی

#### KPB

در ابتدا یک پلاسمای کوانتومی را در نظر می‌گیریم. و اثرات میدان مغناطیسی خودسازگار و اسپین را در نظر می‌گیریم. بنابراین مانند فصل‌های قبل جهت حل معادلات و بررسی آن‌ها از مدل سیالی کوانتومی بهره می‌جویم. لذا با استفاده از مجموعه معادلات مگنتوهیدرودینامیک یعنی معادلات (۲۲.۳) و (۲۶.۳) و (۳۰.۳)، معادله حرکت یون و معادله حرکت الکترون یعنی روابط (۱۷.۳) و (۱۸.۳)، قانون فارادی و قانون آمپر نیز اضافه می‌نماییم. به عنوان یادآوری معادلات را بازنویسی می‌نماییم:

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = eE + e(v_i \times B) + \frac{R_i}{n}$$

$$\circ = -n_e e E - n_e e (v_e \times B) - \nabla p_e + F_Q + R_e$$

$$\nabla \times B = \mu_0 (J_p - J_m)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (nv_i) = \circ$$

$$\frac{d\vec{V}_i}{dt} = \frac{1}{n} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \frac{\beta}{n} \nabla n + \frac{H_e^\gamma}{2} \nabla \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \right) + \varepsilon \beta \tanh(\varepsilon B) \nabla B - \frac{1}{n} (\nabla \times \vec{M}) \times \vec{B}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v}_i \times B) - \gamma [\nabla \times (\nabla \times \vec{B})]$$

همچنین راستای انتشار امواج در جهت محور  $x$  فرض می‌کنیم. از آنجاییکه برای انتشار امواج الکترومغناطیس راستای انتشار میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی باید بر یکدیگر عمود باشند (شکل ۴.۴)، پس میدان مغناطیسی را در جهت محور  $z$  در نظر گرفته و برای رسیدن به معادله‌ی KPB باید مجموعه معادلات مگنتوهیدرودینامیک را بی‌بعد (بهنجار) نماییم. که این کار را در فصل قبل انجام داده‌ایم. اکنون با استفاده از روش اختلال تقلیل یافته RPM، [۲۲] به منظور یافتن جواب ایستا یک مختصه متحرک به صورت زیر تعریف می‌نماییم:

$$\xi = \varepsilon^{1/2} (x - \lambda t) \quad , \quad \eta = \varepsilon z \quad , \quad \tau = \varepsilon^{3/2} t \quad (۱۰.۴)$$

که در آن  $\epsilon$  پارامتر بسط ( $0 < \epsilon < 1$ ) نامیده می‌شود و  $\lambda$  سرعت فاز موج می‌باشد. پس از تغییر متغیر عملگرهای مشتقی به صورت روبرو نوشته می‌شوند.

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \epsilon^{3/2} \frac{\partial}{\partial \tau} - \lambda \epsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (11.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \epsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (12.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (13.4)$$

فرض می‌کنیم که پراکندگی موج در صفحه‌ی  $(x, z)$  باشد. بنابراین مشتق مکان‌گونه در راستای محور  $y$  برابر با صفر خواهد بود. آنگاه چگالی یون  $u$ ، سرعت  $v$  و میدان مغناطیسی  $B$  را بر حسب توان‌های  $\epsilon$  حول مقدار تعادلی‌شان بسط می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} n \\ v_{ix} \\ v_{iy} \\ B_x \\ B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} + \epsilon \begin{bmatrix} n_1 \\ u_1 \\ v_1 \\ 0 \\ B_{y1} \end{bmatrix} + \epsilon^2 \begin{bmatrix} n_2 \\ u_2 \\ v_2 \\ 0 \\ B_{y2} \end{bmatrix} + \dots \quad (14.4)$$

$$\begin{pmatrix} v_{iz} \\ B_z \end{pmatrix} = \epsilon^{3/2} \begin{pmatrix} w_1 \\ B_{z1} \end{pmatrix} + \epsilon^{5/2} \begin{pmatrix} w_2 \\ B_{z2} \end{pmatrix} \quad (15.4)$$

اکنون عملگرهای مشتقی و بسط‌های (۱۴.۴) و (۱۵.۴) را در مجموعه معادلات مگنتوهیدرودینامیک جاگذاری می‌نماییم. در ابتدا از معادله‌ی پیوستگی شروع می‌کنیم:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)v_x + \left(\frac{\partial n}{\partial z}\right)v_z + n\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = 0 \quad (16.4)$$

با جاگذاری جملات بسط متغیرها در معادله پیوستگی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \epsilon^{5/2} \frac{\partial n_1}{\partial \tau} - \epsilon^{3/2} \lambda \frac{\partial n_1}{\partial \xi} + \epsilon^{7/2} \frac{\partial n_2}{\partial \tau} - \epsilon^{5/2} \lambda \frac{\partial n_2}{\partial \xi} + \epsilon^{5/2} u_1 \frac{\partial n_1}{\partial \xi} + \epsilon^{7/2} u_2 \frac{\partial n_1}{\partial \xi} + \epsilon^{7/2} u_1 \frac{\partial n_2}{\partial \xi} \\ & + \epsilon^{9/2} u_2 \frac{\partial n_2}{\partial \xi} + \epsilon^{7/2} w_1 \frac{\partial n_1}{\partial \eta} + \epsilon^{9/2} w_2 \frac{\partial n_1}{\partial \eta} + \epsilon^{9/2} w_1 \frac{\partial n_2}{\partial \eta} + \epsilon^{11/2} w_2 \frac{\partial n_2}{\partial \eta} + \epsilon^{3/2} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \\ & + \epsilon^{5/2} \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \epsilon^{5/2} \frac{\partial w_1}{\partial \eta} + \epsilon^{7/2} \frac{\partial w_2}{\partial \eta} + \epsilon^{5/2} n_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \epsilon^{7/2} n_1 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} \\ & + \epsilon^{7/2} n_1 \frac{\partial w_1}{\partial \eta} + \epsilon^{9/2} n_1 \frac{\partial w_2}{\partial \eta} + \epsilon^{7/2} n_2 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \epsilon^{9/2} n_2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \epsilon^{9/2} n_2 \frac{\partial w_1}{\partial \eta} + \epsilon^{11/2} n_2 \frac{\partial w_2}{\partial \eta} = 0 \end{aligned} \quad (17.4)$$



در حین بسط معادلات توان‌های مختلفی از مرتبه‌های آشفتگی ظاهر خواهند شد. اما ذکر این نکته ضروری است که، در روند حل معادلات ما فقط سه نوع از مرتبه‌های آشفتگی پارامتر بسط را در نظر می‌گیریم که به ترتیب عبارتند از:  $\epsilon^{3/2}$  و  $\epsilon^{5/2}$  و  $\epsilon^2$  و در نهایت هر یک از معادلات مگنتوهیدرودینامیک را براساس همین سه پارامتر مرتب نموده و با معادل قرار دادن ضرائب توان‌های یکسان  $\epsilon$  مجموعه معادلات بدست‌آمده را باز نویسی می‌نماییم.

دومین معادله‌ی مگنتوهیدرودینامیک به صورت زیر می‌باشد

$$\frac{d\vec{V}_i}{dt} = \frac{1}{n}(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \frac{\beta}{n}\nabla n + \frac{H_e^2}{2}\nabla\left(\frac{\nabla^2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right) + \epsilon\beta\tanh(\epsilon B)\nabla B - \frac{1}{n}(\nabla \times \vec{M}) \times \vec{B} \quad (18.4)$$

اکنون این معادله را بسط می‌دهیم. همچنین برای  $n^{-1}$  از بسط تیلور، و برای مشتق زمان‌گونه از مشتق همرفتی  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (v_i \cdot \nabla)$  استفاده می‌نماییم. به عنوان نکته‌ی ضروری در ابتدا مراحل بسط جمله‌ی چهارم در طرف راست معادله‌ی بالا را به صورت مختصر می‌نویسیم که عبارت است از:

$$\begin{aligned} \epsilon\beta\tanh(\epsilon B)\nabla B &\approx \epsilon\beta\epsilon_0|B|\nabla B \\ &= \epsilon\beta\epsilon_0(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)^{1/2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)^{1/2} \\ &= \epsilon\beta\epsilon_0\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(|B|)^2\vec{i} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}(|B|)^2\vec{k} \end{aligned}$$

بنابراین بسط دومین معادله‌ی مگنتوهیدرودینامیک با توجه به ذکر نکته‌ی بالا عبارت خواهد بود از:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\vec{k} \\ &= n^{-1}\left(\left[-B_z\frac{\partial B_z}{\partial x} + B_z\frac{\partial B_x}{\partial z} - B_y\frac{\partial B_y}{\partial x}\right]\vec{i} + \left[B_x\frac{\partial B_y}{\partial x} + B_z\frac{\partial B_y}{\partial z}\right]\vec{j}\right. \\ &\quad \left.+ \left[B_x\frac{\partial B_x}{\partial z} - B_y\frac{\partial B_y}{\partial z} - B_x\frac{\partial B_z}{\partial x}\right]\vec{k}\right) - \beta n^{-1}\left[\frac{\partial n}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial n}{\partial z}\vec{k}\right] \\ &\quad + \frac{H_e^2}{2}\left[\left(\frac{\epsilon}{2}\frac{\partial^3 n_1}{\partial x^3} - \frac{\epsilon^2}{4}\frac{\partial^3 n_1}{\partial x^3}\right)\vec{i} + \left(\frac{\epsilon}{2}\frac{\partial^3 n_1}{\partial z^3} - \frac{\epsilon^2}{4}\frac{\partial^3 n_1}{\partial z^3}\right)\vec{k}\right] + \frac{1}{2}\epsilon\epsilon_0\beta\left[\frac{\partial}{\partial x}|B|^2\vec{i}\right. \\ &\quad \left.+ \frac{\partial}{\partial z}|B|^2\vec{k}\right] - n^{-1}\left(\left[B_z\frac{\partial M_x}{\partial z} - B_z\frac{\partial M_z}{\partial x} - B_y\frac{\partial M_y}{\partial x}\right]\vec{i} + \left[B_x\frac{\partial M_y}{\partial x} + B_z\frac{\partial M_y}{\partial z}\right]\vec{j}\right. \\ &\quad \left.+ \left[-B_y\frac{\partial M_y}{\partial z} - B_x\frac{\partial M_x}{\partial z} + B_x\frac{\partial M_z}{\partial x}\right]\vec{k}\right) \quad (19.4) \end{aligned}$$

معادله‌ی بدست‌آمده را بر حسب جهت‌های محور مختصات تفکیک می‌کنیم. در ابتدا معادله را در حالی برای جهت محور  $x$  می‌نویسیم که متغیرها را بر طبق روابط (۱۴.۴) و (۱۵.۴) بسط می‌دهیم. لازم به

ذکر است که جمله‌ی  $\epsilon\epsilon_0\beta$  را برابر با  $\chi$  فرض کرده‌ایم.

$$\begin{aligned}
& \epsilon^{\delta/2} \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + \epsilon^{\gamma/2} \frac{\partial u_2}{\partial \tau} - \lambda \epsilon^{\gamma/2} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \lambda \epsilon^{\delta/2} \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \epsilon^{\delta/2} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \epsilon^{\gamma/2} u_1 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \epsilon^{\gamma/2} u_2 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \\
& + \epsilon^{\gamma/2} u_2 \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \epsilon^{\gamma/2} w_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \epsilon^{\gamma/2} w_1 \frac{\partial u_2}{\partial \eta} + \epsilon^{\gamma/2} w_2 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \epsilon^{\gamma/2} w_2 \frac{\partial u_2}{\partial \eta} = \epsilon^{\gamma/2} n_1 B_{1z} \frac{\partial B_{1z}}{\partial \eta} \\
& + \epsilon^{\gamma/2} n_1 B_{1z} \frac{\partial B_{2z}}{\partial \xi} + \epsilon^{\gamma/2} n_1 B_{2z} \frac{\partial B_{1z}}{\partial \xi} + \epsilon^{\gamma/2} n_1 B_{2z} \frac{\partial B_{2z}}{\partial \xi} - \epsilon^{\gamma/2} B_{1z} \frac{\partial B_{1z}}{\partial \xi} \\
& - \epsilon^{\gamma/2} B_{2z} \frac{\partial B_{2z}}{\partial \xi} - \epsilon^{\gamma/2} \sin\theta \frac{\partial B_{1y}}{\partial \xi} - \epsilon^{\delta/2} \sin\theta \frac{\partial B_{2y}}{\partial \xi} - \epsilon^{\delta/2} B_{1y} \frac{\partial B_{1y}}{\partial \xi} - \epsilon^{\gamma/2} B_{2y} \frac{\partial B_{2y}}{\partial \xi} \\
& + \epsilon^{\delta/2} n_1 \sin\theta \frac{\partial B_{1y}}{\partial \xi} + \epsilon^{\gamma/2} n_1 \sin\theta \frac{\partial B_{2y}}{\partial \xi} + \epsilon^{\gamma/2} n_1 B_{1y} \frac{\partial B_{1y}}{\partial \xi} + \epsilon^{\gamma/2} n_1 B_{2y} \frac{\partial B_{2y}}{\partial \xi} \\
& - \beta [\epsilon^{\gamma/2} \frac{\partial n_1}{\partial \xi} + \epsilon^{\delta/2} \frac{\partial n_2}{\partial \xi} - \epsilon^{\delta/2} n_1 \frac{\partial n_1}{\partial \xi} - \epsilon^{\gamma/2} n_1 \frac{\partial n_2}{\partial \xi}] + \epsilon^{\delta/2} \frac{He^{\gamma} \partial^{\gamma} n_1}{\gamma \partial \xi^{\gamma}} + \epsilon^{\gamma/2} \frac{He^{\gamma} \partial^{\gamma} n_1}{\gamma \partial \xi^{\gamma}} \\
& + \frac{1}{\gamma} \chi [\epsilon^{\delta/2} \frac{\partial B_{1y}}{\partial \xi} + \epsilon^{\gamma/2} \frac{\partial B_{2y}}{\partial \xi} + \gamma \epsilon^{\gamma/2} \sin\theta \frac{\partial B_{1y}}{\partial \xi} + \gamma \epsilon^{\delta/2} \sin\theta \frac{\partial B_{2y}}{\partial \xi} + \dots + \gamma \epsilon^{\gamma/2} \frac{\partial}{\partial \xi} (B_{1y} B_{2y}) \\
& + \epsilon^{\gamma/2} \frac{\partial B_{1z}}{\partial \xi}] + \chi (\epsilon^{\gamma/2} B_{1z} \frac{\partial B_{1z}}{\partial \xi} + \epsilon^{\gamma/2} B_{1z} \frac{\partial B_{2z}}{\partial \xi} + \epsilon^{\gamma/2} B_{1z} \frac{\partial}{\partial \xi} (n_1 B_{1z}) + \epsilon^{\gamma/2} B_{1z} \frac{\partial}{\partial \xi} (n_1 B_{2z}) \\
& + \epsilon^{\gamma/2} B_{1z} \frac{\partial}{\partial \xi} (n_2 B_{1z}) + \epsilon^{\gamma/2} B_{1z} \frac{\partial}{\partial \xi} (n_2 B_{2z}) + \epsilon^{\gamma/2} B_{2z} \frac{\partial B_{1z}}{\partial \xi} + \epsilon^{\gamma/2} B_{2z} \frac{\partial B_{2z}}{\partial \xi} \\
& + \epsilon^{\gamma/2} B_{2z} \frac{\partial}{\partial \xi} (n_1 B_{1z}) + \epsilon^{\gamma/2} B_{2z} \frac{\partial}{\partial \xi} (n_1 B_{2z}) + \epsilon^{\gamma/2} B_{2z} \frac{\partial}{\partial \xi} (n_2 B_{1z}) + \epsilon^{\gamma/2} B_{2z} \frac{\partial}{\partial \xi} (n_2 B_{2z}) \\
& + \epsilon^{\gamma/2} n_1 B_{1z} \frac{\partial B_{1z}}{\partial \xi} + \epsilon^{\gamma/2} n_1 B_{1z} \frac{\partial B_{2z}}{\partial \xi} + \epsilon^{\gamma/2} n_1 B_{1z} \frac{\partial}{\partial \xi} (n_1 B_{1z}) + \epsilon^{\gamma/2} n_1 B_{1z} \frac{\partial}{\partial \xi} (n_1 B_{2z}) \\
& + \epsilon^{\gamma/2} n_1 B_{1z} \frac{\partial}{\partial \xi} (n_2 B_{1z}) + \epsilon^{\gamma/2} n_1 B_{1z} \frac{\partial}{\partial \xi} (n_2 B_{2z}) - \epsilon^{\gamma/2} n_1 B_{1z} \frac{\partial B_{1z}}{\partial \xi} - \epsilon^{\gamma/2} n_1 B_{2z} \frac{\partial B_{2z}}{\partial \xi} \\
& - \epsilon^{\gamma/2} n_1 B_{2z} \frac{\partial}{\partial \xi} (n_1 B_{1z}) - \epsilon^{\gamma/2} n_1 B_{2z} \frac{\partial}{\partial \xi} (n_1 B_{2z}) - \epsilon^{\gamma/2} n_1 B_{2z} \frac{\partial}{\partial \xi} (n_2 B_{1z}) \\
& + [\epsilon^{\gamma/2} \sin\theta \chi \frac{\partial B_{1y}}{\partial \xi} + \dots + \epsilon^{\delta/2} \sin\theta \chi \frac{\partial B_{2y}}{\partial \xi} + \epsilon^{\gamma/2} \sin^{\gamma} \theta \chi \frac{\partial n_1}{\partial \xi} + \epsilon^{\delta/2} \sin\theta \chi n_1 \frac{\partial B_{1y}}{\partial \xi} \\
& + \epsilon^{\delta/2} \sin\theta \chi B_{1y} \frac{\partial n_1}{\partial \xi} + \epsilon^{\delta/2} \sin^{\gamma} \theta \chi \frac{\partial n_2}{\partial \xi} + \dots + \epsilon^{\delta/2} \chi B_{1y} \frac{\partial B_{1y}}{\partial \xi} + \epsilon^{\delta/2} \sin\theta \chi B_{1y} \frac{\partial n_1}{\partial \xi} \\
& - \epsilon^{\delta/2} \sin\theta \chi n_1 \frac{\partial B_{1y}}{\partial \xi} - \dots)
\end{aligned}$$

معادله‌ی حرکت یون در راستای محور  $y$  عبارت است از:

$$\begin{aligned} & \epsilon^{\delta/2} \frac{\partial v_1}{\partial \tau} + \epsilon^{\gamma/2} \frac{\partial v_2}{\partial \tau} - \lambda \epsilon^{\beta/2} \frac{\partial v_1}{\partial \tau} - \lambda \epsilon^{\delta/2} \frac{\partial v_2}{\partial \tau} + \epsilon^{\delta/2} u_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \epsilon^{\gamma/2} u_1 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \epsilon^{\gamma/2} u_2 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} \\ & + \epsilon^{\alpha/2} u_2 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + \epsilon^{\gamma/2} w_1 \frac{\partial v_1}{\partial \eta} + \epsilon^{\alpha/2} w_1 \frac{\partial v_2}{\partial \eta} + \epsilon^{\alpha/2} w_2 \frac{\partial v_1}{\partial \eta} + \epsilon^{\beta/2} w_2 \frac{\partial v_2}{\partial \eta} = \epsilon^{\beta/2} \cos\theta \frac{\partial B_{1y}}{\partial \xi} \\ & + \epsilon^{\delta/2} \cos\theta \frac{\partial B_{2y}}{\partial \xi} - \epsilon^{\delta/2} n_1 \cos\theta \frac{\partial B_{1y}}{\partial \xi} + \epsilon^{\gamma/2} B_{1z} \frac{\partial B_{1y}}{\partial \eta} + \dots - \epsilon^{\beta/2} n_1 B_{2z} \frac{\partial B_{2y}}{\partial \eta} \\ & - \cos\theta \chi \left( \epsilon^{\beta/2} \frac{\partial B_{1y}}{\partial \xi} + \epsilon^{\delta/2} \frac{\partial B_{2y}}{\partial \xi} + \epsilon^{\beta/2} \sin\theta \frac{\partial n_1}{\partial \xi} + \epsilon^{\delta/2} n_1 \frac{\partial B_{1y}}{\partial \xi} + \epsilon^{\delta/2} B_{1y} \frac{\partial n_1}{\partial \xi} \right. \\ & + \epsilon^{\gamma/2} \frac{\partial}{\partial \xi} (n_1 B_{2y}) + \epsilon^{\delta/2} \sin\theta \frac{\partial n_2}{\partial \xi} + \epsilon^{\gamma/2} \frac{\partial}{\partial \xi} (n_2 B_{1y}) + \epsilon^{\alpha/2} \frac{\partial}{\partial \xi} (n_2 B_{2y}) \left. \right) \\ & + \epsilon^{\gamma/2} B_{1z} \chi \frac{\partial B_{1y}}{\partial \eta} + \dots + \epsilon^{\beta/2} B_{2z} \frac{\partial}{\partial \eta} (n_2 B_{2y}) - \epsilon^{\delta/2} n_1 \frac{\partial B_{1y}}{\partial \xi} - \epsilon^{\delta/2} \sin\theta n_1 \frac{\partial n_1}{\partial \xi} \end{aligned}$$

معادله‌ی حرکت یون در راستای محور  $z$  به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} & \epsilon^{\beta/2} \frac{\partial w_1}{\partial \tau} + \epsilon^{\alpha/2} \frac{\partial w_2}{\partial \tau} - \lambda \epsilon^{\beta/2} \frac{\partial w_1}{\partial \tau} - \lambda \epsilon^{\alpha/2} \frac{\partial w_2}{\partial \tau} + \epsilon^{\delta/2} u_1 \frac{\partial w_1}{\partial \xi} + \epsilon^{\gamma/2} u_1 \frac{\partial w_2}{\partial \xi} + \epsilon^{\gamma/2} u_2 \frac{\partial w_1}{\partial \xi} + \epsilon^{\alpha/2} u_2 \frac{\partial w_2}{\partial \xi} \\ & + \epsilon^{\beta/2} w_1 \frac{\partial w_1}{\partial \eta} + \epsilon^{\delta/2} w_1 \frac{\partial w_2}{\partial \eta} + \epsilon^{\delta/2} w_2 \frac{\partial w_1}{\partial \eta} + \epsilon^{\alpha/2} w_2 \frac{\partial w_2}{\partial \eta} = [-\epsilon^{\beta/2} \sin\theta \frac{\partial B_{1y}}{\partial \eta} - \epsilon^{\beta/2} \sin\theta \frac{\partial B_{2y}}{\partial \eta} + \dots \\ & + \epsilon^{\delta/2} n_1 B_{2y} \frac{\partial B_{1y}}{\partial \eta}] - \epsilon^{\beta/2} \cos\theta \frac{\partial B_{1z}}{\partial \xi} - \epsilon^{\beta/2} \cos\theta \frac{\partial B_{2z}}{\partial \xi} + \epsilon^{\beta/2} n_1 \cos\theta \frac{\partial B_{1z}}{\partial \xi} + \epsilon^{\beta/2} n_1 \cos\theta \frac{\partial B_{2z}}{\partial \xi} \\ & - \beta [\epsilon^{\beta/2} \frac{\partial n_1}{\partial \eta} + \epsilon^{\beta/2} \frac{\partial n_2}{\partial \eta} - \epsilon^{\beta/2} n_1 \frac{\partial n_1}{\partial \eta} - \epsilon^{\beta/2} n_1 \frac{\partial n_2}{\partial \eta}] + \epsilon^{\beta/2} \frac{He^{\beta/2}}{\mathcal{F}} \frac{\partial^3 n_1}{\partial \eta^3} - \epsilon^{\delta/2} \frac{He^{\beta/2}}{\mathcal{F}} \frac{\partial^3 n_1}{\partial \eta^3} \\ & + \frac{1}{\mathcal{F}} \chi [\epsilon^{\beta/2} \frac{\partial B_{1y}}{\partial \eta} + \epsilon^{\delta/2} \frac{\partial B_{2y}}{\partial \eta} + \dots + \mathcal{F} \epsilon^{\delta/2} \frac{\partial}{\partial \eta} (B_{1z} B_{2z})] + [\epsilon^{\beta/2} \sin\theta \chi \frac{\partial B_{1y}}{\partial \eta} + \epsilon^{\beta/2} \sin\theta \chi \frac{\partial B_{2y}}{\partial \eta} + \dots \\ & + \epsilon^{\beta/2} \sin\theta \chi \frac{\partial n_1}{\partial \eta}] + \cos\theta \chi [\epsilon^{\beta/2} \frac{\partial B_{1z}}{\partial \xi} + \epsilon^{\beta/2} \frac{\partial B_{2z}}{\partial \xi} + \dots + \epsilon^{\delta/2} \frac{\partial}{\partial \xi} (n_2) B_{2z}] \quad (20.4) \end{aligned}$$

سومین معادله‌ی مگنتوهیدرودینامیک، یعنی معادله‌ی القاء میدان مغناطیسی عبارت است از:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v}_i \times B) - \gamma [\nabla \times (\nabla \times \vec{B})] \quad (21.4)$$

این معادله را بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial B_x}{\partial t} \vec{i} + \frac{\partial B_y}{\partial t} \vec{j} + \frac{\partial B_z}{\partial t} \vec{k} \right) &= \left( \left[ -\frac{\partial}{\partial z} B_x v_z - \gamma \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} \right] \vec{i} + \left[ \frac{\partial}{\partial x} B_x v_y - \frac{\partial}{\partial x} B_y v_x \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\partial}{\partial z} B_y v_z - \gamma \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} \right] \vec{j} \right. \\ & \quad \left. + \left[ \frac{\partial}{\partial x} B_x v_z + \gamma \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} B_x \right] \vec{k} \right) \quad (22.4) \end{aligned}$$

این معادله را بر طبق رابطه‌های بسط (۱۴.۴) و (۱۵.۴) بازنویسی می‌نماییم. در ابتدا معادله را در راستای محور  $z$  می‌نویسیم:

$$-\lambda \epsilon^{\beta/2} \frac{\partial B_{1z}}{\partial \xi} - \lambda \epsilon^{\beta/2} \frac{\partial B_{2z}}{\partial \xi} + \epsilon^{\beta/2} \frac{\partial B_{1z}}{\partial \eta} + \epsilon^{\beta/2} \frac{\partial B_{2z}}{\partial \eta} = \epsilon^{\beta/2} \cos\theta \frac{\partial w_1}{\partial \xi} + \epsilon^{\beta/2} \cos\theta \frac{\partial w_2}{\partial \xi} \quad (23.4)$$

همچنین برای راستای محور  $y$  داریم

$$\begin{aligned} & -\epsilon^{3/2}\lambda\frac{\partial B_{1y}}{\partial\xi} - \epsilon^{5/2}\lambda\frac{\partial B_{2y}}{\partial\xi} + \epsilon^{5/2}\frac{\partial B_{1y}}{\partial\tau} + \epsilon^{7/2}\frac{\partial B_{2y}}{\partial\tau} = \epsilon^{3/2}\cos\theta\frac{\partial v_1}{\partial\xi} + \epsilon^{5/2}\cos\theta\frac{\partial v_2}{\partial\xi} \\ & - \epsilon^{3/2}\sin\theta\frac{\partial u_1}{\partial\xi} - \epsilon^{5/2}u_1\frac{\partial B_{1y}}{\partial\xi} + \epsilon^{5/2}B_{1y}\frac{\partial u_1}{\partial\xi} - \epsilon^{5/2}\sin\theta\frac{\partial u_2}{\partial\xi} + \epsilon^{7/2}\frac{\partial}{\partial\xi}(u_2B_{1y}) \\ & - \epsilon^{7/2}\frac{\partial}{\partial\xi}(u_1B_{2y}) + \epsilon^{9/2}\frac{\partial}{\partial\xi}(u_2B_{2y}) - [\epsilon^{5/2}\sin\theta\frac{\partial w_1}{\partial\eta} - \epsilon^{7/2}w_1\frac{\partial B_{1y}}{\partial\eta} + \dots \\ & - \epsilon^{11/2}\frac{\partial}{\partial\eta}(w_1B_{2y})] - \epsilon^2\gamma\frac{\partial^2 B_{1y}}{\partial\xi^2} - \epsilon^3\gamma\frac{\partial^2 B_{2y}}{\partial\xi^2} + \epsilon^2\frac{\partial^2 B_{1y}}{\partial\eta^2} + \epsilon^2\frac{\partial^2 B_{2y}}{\partial\eta^2} \end{aligned} \quad (24.4)$$

و برای راستای محور  $x$  خواهیم داشت:

$$\circ = -\epsilon^{5/2}\cos\theta\frac{\partial w_1}{\partial\eta} - \epsilon^{7/2}\cos\theta\frac{\partial w_2}{\partial\eta} \quad (25.4)$$

اکنون که معادلات مگنتوهیدرودینامیک را بر حسب پارامتر بسط در راستای محورهای مختصات، به طور جداگانه بازنویسی نمودیم. در مرحله‌ی بعد معادلات را با توجه به سه پارامتر از پارامترهای مرتبه‌ی آشفستگی، یعنی  $\epsilon^{3/2}$  و  $\epsilon^{5/2}$  و  $\epsilon^2$  مرتب می‌نماییم.

### ۱.۳.۴ نتایج برای پایین‌ترین مرتبه‌ی آشفستگی، یعنی $\epsilon^{3/2}$

از معادله‌ی پیوستگی داریم:

$$\lambda\frac{\partial n_1}{\partial\xi} = \frac{\partial u_1}{\partial\xi} \quad (26.4)$$

با توجه به مؤلفه‌ی  $x$  معادله‌ی حرکت یون می‌توان نوشت:

$$\lambda\frac{\partial u_1}{\partial\xi} = (1 - 2\chi)\sin\theta\frac{\partial B_{1y}}{\partial\xi} + (\beta - \chi\sin^2\theta)\frac{\partial n_1}{\partial\xi} \quad (27.4)$$

همچنین از مؤلفه‌ی  $y$  معادله‌ی حرکت یون می‌نویسیم:

$$\lambda\frac{\partial v_1}{\partial\xi} = -(1 - \chi)\cos\theta\frac{\partial B_{1y}}{\partial\xi} + \chi\cos\theta\sin\theta\frac{\partial n_1}{\partial\xi} \quad (28.4)$$

از مؤلفه‌ی  $y$  معادله‌ی القاء میدان مغناطیسی خواهیم داشت:

$$\lambda\frac{\partial B_{1y}}{\partial\xi} = \sin\theta\frac{\partial u_1}{\partial\xi} - \cos\theta\frac{\partial v_1}{\partial\xi} \quad (29.4)$$

اکنون در چهار معادله‌ی بالا متغیرهای نوسانی  $u_1$  و  $v_1$  و  $n_1$  را با انتگرالگیری نسبت به  $\xi$  بر حسب  $B_{1y}$  می‌نویسیم.

$$\lambda\int\frac{\partial n_1}{\partial\xi}d\xi = \int\frac{\partial u_1}{\partial\xi}d\xi$$

$$n_1 = \frac{u_1}{\lambda}$$

$$\lambda \int \frac{\partial u_1}{\partial \xi} d\xi = (1 - \chi) \sin \theta \int \frac{\partial B_{1y}}{\partial \xi} d\xi + (\beta - \chi \sin^2 \theta) \int \frac{\partial n_1}{\partial \xi} d\xi$$

$$\lambda u_1 = (1 - \chi) \sin \theta B_{1y} + (\beta - \chi \sin^2 \theta) \frac{u_1}{\lambda}$$

$$\lambda^2 u_1 = \lambda(1 - \chi) \sin \theta B_{1y} + (\beta - \chi \sin^2 \theta) u_1$$

$$u_1 = \frac{\lambda(1 - \chi) \sin \theta}{\lambda^2 - \beta + \chi \sin^2 \theta} B_{1y} \quad (30.4)$$

$$n_1 = \frac{u_1}{\lambda} = \frac{(1 - \chi) \sin \theta}{\lambda^2 - \beta + \chi \sin^2 \theta} B_{1y} \quad (31.4)$$

$$\lambda \int \frac{\partial v_1}{\partial \xi} d\xi = -(1 - \chi) \cos \theta \int \frac{\partial B_{1y}}{\partial \xi} d\xi + \chi \cos \theta \sin \theta \int \frac{\partial n_1}{\partial \xi} d\xi$$

$$\lambda v_1 = -(1 - \chi) \cos \theta B_{1y} + \chi \cos \theta \sin \theta \left[ \frac{(1 - \chi) \sin \theta}{\lambda^2 - \beta + \chi \sin^2 \theta} B_{1y} \right]$$

$$\lambda v_1 = -\cos \theta \left[ (1 - \chi) - \frac{\chi \sin \theta - \chi^2 \sin^2 \theta}{\lambda^2 - \beta + \chi \sin^2 \theta} \right] B_{1y}$$

$$v_1 = -\cos \theta \left[ \frac{(\lambda^2 - \beta)(1 - \chi) + \chi^2 \sin^2 \theta}{\lambda(\lambda^2 - \beta + \chi \sin^2 \theta)} \right] B_{1y} \quad (32.4)$$

اکنون متغیرهای نوسانی  $u_1$  و  $v_1$  را در رابطه‌ی زیر قرار می‌دهیم.

$$\lambda \int \frac{\partial B_{1y}}{\partial \xi} d\xi = \sin \theta \int \frac{\partial u_1}{\partial \xi} d\xi - \cos \theta \int \frac{\partial v_1}{\partial \xi} d\xi$$

$$\lambda B_{1y} = \frac{\lambda(1 - \chi) \sin^2 \theta}{\lambda^2 - \beta + \chi \sin^2 \theta} B_{1y} + \cos^2 \theta \left[ \frac{(\lambda^2 - \beta)(1 - \chi) + \chi^2 \sin^2 \theta}{\lambda(\lambda^2 - \beta + \chi \sin^2 \theta)} \right] B_{1y}$$

$$\lambda^2 = \frac{\lambda^2(1 - \chi) \sin^2 \theta}{\lambda^2 - \beta + \chi \sin^2 \theta} + \cos^2 \theta \left[ \frac{(\lambda^2 - \beta)(1 - \chi) + \chi^2 \sin^2 \theta}{\lambda^2 - \beta + \chi \sin^2 \theta} \right]$$

$$\lambda^2(\lambda^2 - \beta + \chi \sin^2 \theta) = \lambda^2(1 - 2\chi) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta [(\lambda^2 - \beta)(1 - \chi) + \chi^2 \sin^2 \theta]$$

$$\lambda^4 + \lambda^2 \left[ -\beta + \chi \sin^2 \theta - \sin^2 \theta + 2\chi \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \chi \cos^2 \theta \right] + \cos^2 \theta (-\beta + \chi + \chi^2 \sin^2 \theta) = 0$$

$$(\lambda^2)^2 = \lambda^2 [1 + \beta - \chi(1 + 2\sin^2 \theta)] + \cos^2 \theta [\beta - \chi(1 + \chi \sin^2 \theta)]$$

$$\Delta = [1 + \beta - \chi(1 + 2\sin^2 \theta)]^2 - 4(1) (\cos^2 \theta [\beta - \chi(1 + \chi \sin^2 \theta)])$$

$$\lambda^2 = \frac{1 + \beta - \chi(1 + 2\sin^2 \theta)}{2} \times \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4[\beta - \chi(1 + \chi \sin^2 \theta) \cos^2 \theta]}{[1 + \beta - \chi(1 + 2\sin^2 \theta)]^2}} \right) \quad (33.4)$$

### ۲.۳.۴ نتایج برای دومین مرتبه‌ی آشفتگی، یعنی $\epsilon^{5/2}$

مانند قبل از معادله‌ی پیوستگی داریم:

$$\lambda \frac{\partial n_2}{\partial \xi} - \frac{\partial u_2}{\partial \xi} = \frac{\partial n_1}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} (n_1 u_1) + \frac{\partial w_1}{\partial \eta} \quad (34.4)$$

از مؤلفه‌ی  $y$  معادله‌ی حرکت یون داریم:

$$\lambda \frac{\partial v_2}{\partial \xi} + (1 - \chi) \cos \theta \frac{\partial B_{y2}}{\partial \xi} - \chi \sin \theta \cos \theta \frac{\partial n_2}{\partial \xi} = \frac{\partial v_1}{\partial \tau} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + n_1 \cos \theta \frac{\partial B_{1y}}{\partial \xi} + \chi \cos \theta B_{1y} \frac{\partial n_1}{\partial \xi} - \chi \sin \theta \cos \theta n_1 \frac{\partial n_1}{\partial \xi} \quad (35.4)$$

همچنین از مؤلفه‌ی  $y$  معادله‌ی القاء میدان مغناطیسی خواهیم داشت:

$$\lambda \frac{\partial B_{y2}}{\partial \xi} - \sin \theta \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + \cos \theta \frac{\partial v_2}{\partial \xi} = \frac{\partial B_1}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} (u_1 B_{y1}) + \sin \theta \frac{\partial w_1}{\partial \eta} - \gamma_0 \frac{\partial^2 B_{y1}}{\partial \xi^2} \quad (36.4)$$

و با توجه به مؤلفه‌ی  $x$  معادله‌ی حرکت یون خواهیم داشت:

$$\lambda \frac{\partial u_2}{\partial \xi} - (1 - 2\chi) \sin \theta \frac{\partial B_{y2}}{\partial \xi} - (\beta - \chi \sin^2 \theta) \frac{\partial n_2}{\partial \xi} = \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - (\beta - \chi \sin^2 \theta) n_1 \frac{\partial n_1}{\partial \xi} + (1 - 2\chi) B_{y1} \frac{\partial B_{y1}}{\partial \xi} - 2\chi \sin \theta B_{y1} \frac{\partial n_1}{\partial \xi} - n_1 \sin \theta \left( \frac{\partial B_{y1}}{\partial \xi} \right) - \frac{He^2}{4} \frac{\partial^3 n_1}{\partial \xi^3} \quad (37.4)$$

۳.۳.۴ نتایج برای آخرین مرتبه‌ی آشفتگی، یعنی  $\epsilon^2$ 

از مؤلفه‌ی  $z$  معادله‌ی القاء میدان مغناطیسی داریم:

$$\frac{\partial B_{z1}}{\partial \xi} = \frac{\cos\theta}{\lambda} \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \quad (38.4)$$

همچنین از مؤلفه‌ی  $z$  معادله‌ی حرکت یون می‌توان نوشت:

$$-\lambda \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = -\sin\theta \frac{\partial B_{1y}}{\partial \eta} - \cos\theta \frac{\partial B_{1z}}{\partial \xi} - \chi \sin\theta \frac{\partial B_{1y}}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial n_1}{\partial \eta} - \chi \sin\theta \frac{\partial B_{1y}}{\partial \eta} \\ + \cos^2\theta \chi \frac{\partial n_1}{\partial \eta} + \sin^2\theta \chi \frac{\partial n_1}{\partial \eta} + \chi \cos\theta \frac{\partial B_{1z}}{\partial \xi}$$

$$\lambda^2 \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = \lambda \left[ \sin\theta \frac{\partial B_{1y}}{\partial \eta} + \cos\theta \frac{\partial B_{1z}}{\partial \xi} + \sin\theta \chi \frac{\partial B_{1y}}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial n_1}{\partial \eta} + \chi \sin\theta \frac{\partial B_{1y}}{\partial \eta} \right. \\ \left. + \cos^2\theta \chi \frac{\partial n_1}{\partial \eta} - \sin^2\theta \chi \frac{\partial n_1}{\partial \eta} - \chi \cos\theta \frac{\partial B_{1z}}{\partial \xi} \right]$$

از رابطه‌ی (۳۹.۴) در ادامه‌ی روند حل معادله استفاده می‌نماییم.

$$\lambda^2 \frac{\partial w_1}{\partial \xi} - \cos^2\theta \frac{\partial w_1}{\partial \xi} + \cos^2\theta \chi \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = \lambda \left[ \sin\theta \frac{\partial B_{1y}}{\partial \eta} + \beta \frac{\partial n_1}{\partial \eta} - \chi \sin\theta \frac{\partial B_{1y}}{\partial \eta} \right. \\ \left. - \sin\theta \chi \frac{\partial B_{1y}}{\partial \eta} - \chi \frac{\partial n_1}{\partial \eta} \right]$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial \xi} (\lambda^2 - (1 - \chi) \cos^2\theta) = \lambda [(1 - 2\chi) \sin\theta \frac{\partial B_{1y}}{\partial \eta} + (\beta - \chi) \frac{\partial n_1}{\partial \eta}]$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial \xi} = \frac{\lambda}{\lambda^2 - (1 - \chi) \cos^2\theta} \times [(1 - 2\chi) \sin\theta \frac{\partial B_{1y}}{\partial \eta} + (\beta - \chi) \frac{\partial n_1}{\partial \eta}] \quad (39.4)$$

اکنون با استفاده از جاگذاری مرتبه‌های آشفتگی پایین‌تر در مرتبه‌های بالاتر آشفتگی و حذف اندیس ۲ متغیرها، بعد از کمی محاسبات جبری به معادله‌ی تحول غیرخطی  $KPB$  می‌رسیم:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial B_{y1}}{\partial \tau} + Q B_{y1} \frac{\partial B_{y1}}{\partial \xi} + R \frac{\partial^3 B_{y1}}{\partial \xi^3} - S \frac{\partial^2 B_{y1}}{\partial \xi^2} \right) + T \frac{\partial^2 B_{y1}}{\partial \eta^2} = 0 \quad (40.4)$$

تحول غیرخطی معادله  $KPB$  انتشار هر دو موج ضربه‌ای مگنتو صوتی آهسته و سریع در یک سیستم پلاسمای کوانتومی را نشان می‌دهد. جمله چهارم در این معادله بیان‌گر اثر مقاومتی سیستم پلاسمایی می‌باشد. باید توجه کرد که نیروی اسپینی و جریان مغناطش به علت حضور اثر اسپین الکترون مشخصات دینامیکی موج ضربه‌ای مگنتو صوتی را تغییر داده است. به بیان کلی ویژگی‌های ذکر شده در ضرائب

$R$  و  $S$  و  $T$  ظاهر می‌شوند. که ضرائب معادله را چنین تعریف می‌نمایم:  $Q = \frac{R}{A}$  و  $R = \frac{C}{A}$  و  $T = \frac{E}{A}$  و  $S = -\frac{D}{A}$

$$A = \frac{[(\lambda^2 - \beta)(\chi - 1) + \chi^2 \sin^2 \theta] \cos \theta}{\lambda} + \frac{(1 - \gamma \chi)[\lambda \chi \cos^2 \theta \sin \theta - \beta(\chi - \sin^2 \theta) \sin \theta]}{\lambda^2 - \beta \chi + \beta \sin^2 \theta} + \frac{\lambda(\gamma \chi - 1)(\lambda^2 - \chi \cos^2 \theta) \sin^2 \theta}{\lambda^2 - \beta \chi + \beta \sin^2 \theta} - \lambda(\lambda^2 - \beta \chi + \beta \sin^2 \theta) \quad (41.4)$$

$$B = \Lambda \{ \Pi^2 (\beta - \chi \sin^2 \theta) - \lambda^2 \Pi^2 - (1 - \gamma \chi) + \gamma \chi \Pi \sin \theta + \Pi \sin \theta \} - \Pi \Phi \cos \theta (\lambda \Lambda - \gamma \cos \theta + \Pi \cos \theta) \cos \theta - \frac{\lambda \Pi}{\gamma} (\lambda \Phi - \Theta \Pi) \quad (42.4)$$

$$C = \frac{H_e^2}{\gamma} \left[ \frac{(1 - \gamma \chi)(\lambda^2 - \chi \cos^2 \theta) \sin^2 \theta}{\lambda^2 - \beta \chi + \beta \sin^2 \theta} \right] \quad (43.4)$$

$$D = \gamma \cdot \lambda^2 (\lambda^2 - \beta \chi + \beta \sin^2 \theta) \quad (44.4)$$

$$E = \frac{\lambda \Theta [(1 - \gamma \chi) \sin \theta + \Pi (\beta - \chi)]}{\lambda^2 - (1 - \chi) \cos^2 \theta} \frac{\lambda^2 \sin \theta \Theta [(1 - \gamma \chi) \sin \theta + \Pi (\beta - \chi)]}{\lambda^2 - \beta \chi + \beta \sin^2 \theta} \quad (45.4)$$

$$\Theta = \lambda^2 - \beta \chi + \beta \sin^2 \theta \quad , \quad \Lambda \lambda = (\lambda^2 - \chi \cos^2 \theta) \sin \theta$$

$$\Lambda = \frac{(\lambda^2 - \beta)(1 - \chi) + \chi^2 \sin^2 \theta}{\lambda \Phi} \quad , \quad \Pi = \frac{(1 - \gamma \chi) \sin \theta}{\Phi}$$

$$\Theta = \beta \sin^2 \theta + \chi (\lambda \cos^2 \theta \sin \theta - \beta)$$

## ۴.۴ روش - $\tanh$

این تکنیک طرحی کلی به منظور یافتن جواب‌های دقیق معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی (PDE) و معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) می‌باشد. [۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴] این روش در حالت خاص در حل مسائلی مانند پراکندگی، امواج متحرک غیرخطی، همرفتی و انتشار نقش مهمی بازی می‌کند.



#### ۱.۴.۴ یافتن جواب‌های دقیق معادله $KPB$ به روش $\tanh$

در گام اول متغیرهای  $\tau$  و  $\eta$  و  $\xi$  با تعریف  $\psi = K(\xi + \eta - U\tau)$  به متغیرهای جدید تبدیل می‌نماییم.  $K$  و  $U$  دو پارامتر نامعین‌اند که به ترتیب عدد موج و سرعت موج در چارچوب مرجع متحرک نشان می‌دهند و  $K > 0$ . به منظور تبدیل معادله (PDE) به یک معادله از نوع (ODE) کافی است که

$B_{y1}(\psi)$  جایگزین  $B_{y1}(\xi, \eta, \tau)$  نماییم. لذا می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = K \frac{\partial}{\partial \psi} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = (-KU) \frac{\partial}{\partial \psi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = (K) \frac{\partial}{\partial \psi}\end{aligned}$$

مشتقات را در معادله تحول غیر خطی جاگذاری می‌نماییم.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \psi} K \frac{\partial}{\partial \psi} (-KU) B_{y1}(\psi) + \frac{\partial}{\partial \psi} K \left[ Q \frac{1}{\psi} \left( \frac{\partial}{\partial \psi} K \right) B_{y1}^{\psi} \right] + \frac{\partial}{\partial \psi} K \left[ R \frac{\partial^3}{\partial \psi^3} K^{\psi} B_{y1} \right] \\ - \frac{\partial}{\partial \psi} K \left[ S \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} K^{\psi} B_{y1} \right] + T \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} K^{\psi} B_{y1} = 0\end{aligned}\quad (۴۶.۴)$$

با تقسیم طرفین بر  $\frac{1}{Q} K^{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \psi}$  می‌توان نوشت:

$$-\left(\frac{U}{Q}\right) B_{y1}(\psi) + \frac{1}{\psi} B_{y1}^{\psi}(\psi) + \left(\frac{R}{Q}\right) K^{\psi} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} B_{y1}(\psi) - \left(\frac{S}{Q}\right) K \frac{\partial}{\partial \psi} B_{y1}(\psi) + \left(\frac{T}{Q}\right) B_{y1}(\psi) = 0\quad (۴۷.۴)$$

در گام دوم با تغییر متغیر  $Y = \tanh[K(\xi + \eta - U\tau)]$  فرض می‌کنیم که جواب را می‌توان به صورت سری و به شکل زیر نوشت

$$B_{y1}(\xi, \eta, \tau) = B_{y1}(\psi) = F(Y) = \sum_{n=0}^N a^n Y^n\quad (۴۸.۴)$$

که  $N$  عددی صحیح می‌باشد. با ایجاد تعادل در بالاترین مرتبه عبارت خطی و غیرخطی بدست آمده، یعنی  $N + 3 = 2N + 1$  مقدار  $N = 2$  برای رابطه اخیر می‌پذیریم و معادله (۴۹.۴) در (۴۸.۴) قرار می‌دهیم. در ابتدا مشتقات را با توجه به تغییر متغیر جدید بازنویسی می‌نماییم:

$$\frac{d}{d\psi} = (1 - Y^2) \frac{d}{dY}$$

$$\frac{d^{\psi}}{d\psi^2} = -2Y(1 - Y^2) \frac{d}{dY} + (1 - Y^2)^2 \frac{d^{\psi}}{dY^2}$$

$$\begin{aligned}-\left(\frac{U - T}{Q}\right) F(Y) + \frac{1}{\psi} F(Y)^{\psi} + \left(\frac{R}{Q}\right) K^{\psi} \\ \times \left[ -2Y(1 - Y^2) \frac{dF(Y)}{dY} + (1 - Y^2)^2 \frac{d^{\psi} F(Y)}{dY^2} \right] = \left(\frac{S}{Q}\right) K(1 - Y^2) \frac{dF(Y)}{dY}\end{aligned}\quad (۴۹.۴)$$



شکل ۵.۴: نمونه‌ای از موج ضربه‌ای

در ادامه از معادل قرار دادن ضرایب  $Y$  در طرفین تساوی معادله زیر بدست می‌آید:

$$F(Y) = \frac{9S^2}{25QR}(1 - Y)(1 + \delta Y)$$

در نهایت با جانشانی  $\tanh(\psi)$  به جای  $Y$  خواهیم داشت:

$$B_{y1}(\xi, \eta, \tau) = \frac{9S^2}{25QR}(1 - \tanh(\psi))(1 + \delta \tanh(\psi)) \quad (50.4)$$

این رابطه نوعی جواب دولایه‌ای برای معادله (۵۰.۴) می‌باشد که  $U = \frac{\xi S^2}{25R} + T$  و  $k = S/10R$  و  $\delta = 1/3$  تعریف می‌شوند.

## ۲.۴.۴ امواج ضربه‌ای

موج ضربه‌ای یا شوکی نوعی موج غیرخطی است که آشوب‌ها را انتشار می‌دهد. این موج از طریق یک رسانه (جامد مایع گاز و پلاسما) و در برخی موارد در صورت عدم وجود یک محیط مادی از طریق میدان مغناطیسی منتشر می‌شود. امواج ضربه‌ای معمولاً توسط یک تغییر ناگهانی در شکل موج شناخته می‌شوند و به دلیل وجود شک افزایش سریعی در فشار دما و چگالی جریان وجود دارد. بر خلاف سالیتون‌ها انرژی یک موج شوکی به نسبت فاصله پراکنده می‌شود. در طبیعت موج شوکی را می‌تون به آسانی مشاهده نمود. به عنوان مثال هرگاه یک هواپیمای جت سریع‌تر از صوت حرکت کند یک موج شوک ایجاد خواهد کرد (شکل ۵.۴).

## ۵.۴ بررسی جواب‌های معادله $KPB$ و مشتقات آن

به عنوان نتیجه کلی در غیاب اثرات اتلاف خواهیم دید که معادله  $KPB$  به معادله  $KP$  برای پلاسمای کوانتومی اسپینی تبدیل می‌شود که جواب‌های آن همان سالیتون‌ها هستند. و خواهیم داشت:

$$B_{y1} = B_{ym} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{l_x \xi + 2 \sqrt{\frac{2R}{T}} l_z \eta - RU\tau}{\Delta} \right) \quad (51.4)$$

که  $l_x = \frac{k_\xi}{k} (= \cos\vartheta)$  و  $l_z = \frac{k_\eta}{k} (= \sin\vartheta)$  جهت‌های کسینوسی‌اند و  $U$  سرعت سالیتون را نشان می‌دهد. در معادله اخیر  $B_{ym}$  و  $\Delta$  به ترتیب ماکزیمم دامنه و ماکزیمم پهنای سالیتون مغناطوصوتی را نشان می‌دهند.

$$B_{ym} = \left( \frac{12R}{Q} \right) \left( U - \frac{144R(1-l_x^2)}{Tl_x^2} \right)$$

$$\Delta = \frac{2l_x^2}{\sqrt{l_x^2 U - \frac{144R(1-l_x^2)}{T}}}$$

از طرف دیگر در غیاب پراکندگی‌ها از معادله  $KPB$  به معادله برگرد-دو-بعدی برای پلاسمای کوانتومی اسپینی می‌رسیم که می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial B_{y1}}{\partial \tau} + QB_{y1} \frac{\partial B_{y1}}{\partial \xi} - S \frac{\partial^2 B_{y1}}{\partial \xi^2} \right) + T \frac{\partial^2 B_{y1}}{\partial \eta^2} = 0 \quad (52.4)$$

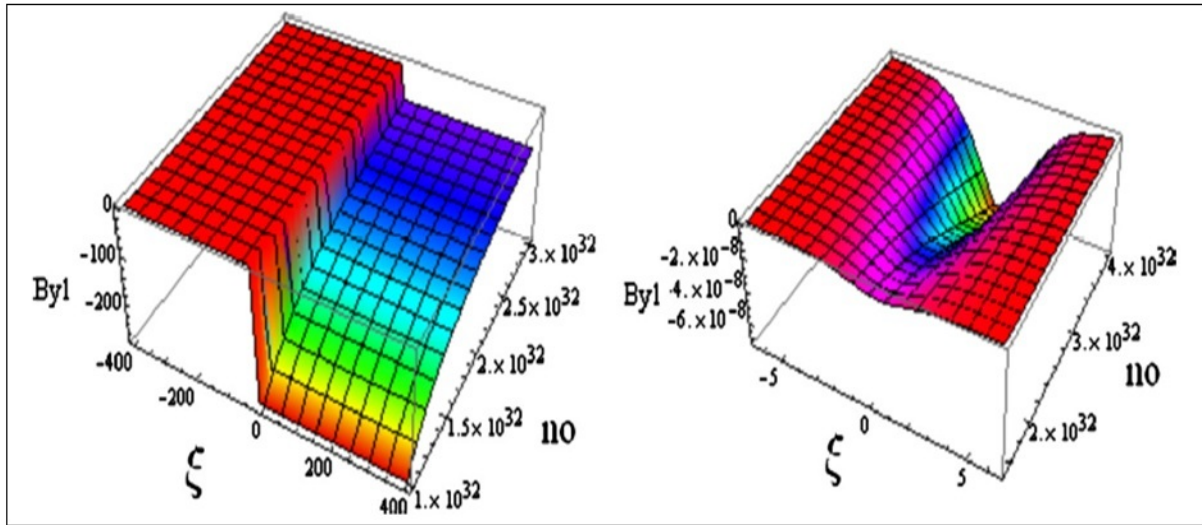
## ۶.۴ بررسی جواب‌های عددی $KPB$ معادله از دیدگاه عددی

معمولاً در چنین پلاسمای کوانتومی، اثرات کوانتومی (مانند: اثر تونل‌زنی، انرژی مغناطش و ...) توابعی از چگالی، دامنه و میدان مغناطیسی‌اند که در سیستم واحدهای بین المللی ( $SI$ ) از نظر عددی تعریف مشخصی دارند.

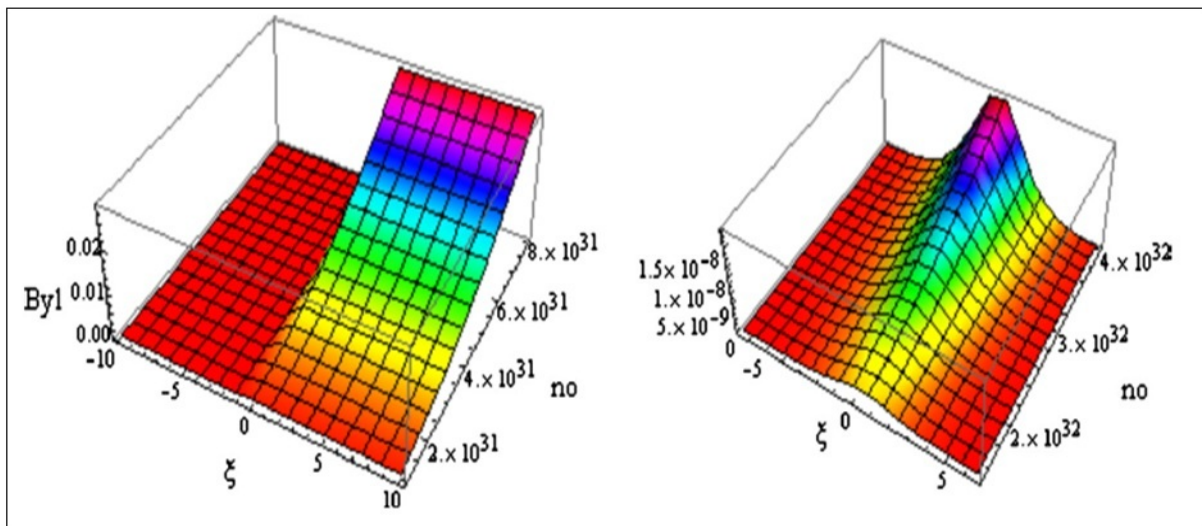
پارامتر پراش کوانتومی، فاکتور بتای پلاسمای، انرژی زیمان در اثر مغناطش اسپین، به ترتیب چنین تعریف شده‌اند:

$$H_e \sim 10^{-31} \left( \frac{n_0}{B_0} \right), \quad \beta \sim 10^{-28} \left( \frac{T_e n_0}{B_0^2} \right), \quad \varepsilon_0 \sim 0.7 \left( \frac{B_0}{T_e} \right) \quad (53.4)$$

که تغییر در هر یک از پارامترها، دینامیک موج را تحت تأثیر قرار می‌دهد. با توجه به معادله (۵۱.۴) و روابط (۵۲.۴) تغییرات چگالی عددی برای مد  $FM$  در شکل (۴.۴) نشان داده شده است. همانطور که دیده می‌شود با افزایش چگالی عددی انتشار کوانتومی از طریق  $H_e$  و  $\beta$  افزایش و انرژی مغناطش اسپین به ازاء  $T_e$  ( $\sim 10^7 K$ ) و  $B_0$  ( $\sim 10^5 T$ ) کاهش می‌یابد. و در نتیجه به‌طور مؤثر دامنه موج



شکل ۶.۴: تغییرات موج مغناطوسوتی با مد  $FM$  بر حسب پارامتر چگالی



شکل ۷.۴: تغییرات موج مغناطوسوتی با مد  $SM$  بر حسب تغییرات چگالی

ضربه‌ای-دولایه‌ای کاهش پیدا می‌کند. چنانچه بخواهیم این نتایج را از دیدگاه متضاد بررسی کنیم شکل (۵.۴) بدست می‌آید که برای مد  $SM$  موج ضربه-دولایه‌ای با کاهش چگالی، دامنه موج کاهش می‌یابد. در شکل (۶.۴) مد موج ضربه‌ای-دولایه‌ای به ازاء مقادیر مختلف میدان مغناطیسی بررسی شده است. که در مقادیر ثابت  $n_e (\sim 10^{23} m^{-3})$  و  $T_e (\sim 10^7 T)$  انرژی مغناطش اسپین افزایش می‌یابد. از طرفی این افزایش انرژی دیگر اثرات کوانتومی مانند  $H_e$  و  $\beta$  را تغییر می‌دهد. به عبارت دیگر اسپین الکترون از طریق میدان مغناطیسی دینامیک موج را تحت تأثیر قرار می‌دهد. در نتیجه ارتفاع موج با انرژی مغناطش اسپین افزایش می‌یابد.

همچنین برای بررسی مد  $SM$  موج ضربه‌ای دو-لایه‌ای بر حسب تغییرات میدان مغناطیسی شکل (۷.۴) را داریم که در آن با افزایش مغناطش اسپین دامنه موج ضربه‌ای-دولایه‌ای کاهش می‌یابد. از طرف دیگر چنانچه نمودارها را در غیاب پارامتر اتلاف یا مقاومت بررسی نماییم به جای موج ضربه‌ای-دولایه‌ای در چنین حالتی فقط موج سالیوتونی را خواهیم داشت. همانطور که می‌بینیم با افزایش چگالی، دامنه موج سالیوتونی (شکل سمت راست در ۶.۴) کاهش یافته و به تبع آن پهنای موج افزایش می‌یابد. در واقع یک نقطه فرورفته در موج دیده می‌شود. نتیج متضاد این حالت را می‌توان در (شکل سمت راست در ۷.۴) مشاهده نمود. یعنی با افزایش پارامتر چگالی در مد  $SM$  موج مغناطو صوتی در غیاب پارامتر اتلاف، دامنه موج سالیوتونی افزایش و تبع آن پهنای موج سالیوتونی کاهش می‌یابد. به طور کلی از مقایسه شکل (۶.۴) و (۷.۴) می‌توان گفت که اثرات اتلاف نسبت به پراکندگی نقش مهم‌تری را در سیستم بازی می‌کنند.

همچنین به منظور بررسی نقش مغناطش و انرژی زمین، تغییرات میدان مغناطیسی را بر امواج مغناطو صوتی در غیاب پارامتر اتلاف بررسی می‌نماییم. همانطور که در (شکل سمت راست در ۸.۴) می‌بینیم، با افزایش میدان مغناطیسی برای مد  $FM$  موج مغناطو صوتی دامنه سالیوتون افزایش و برای مد  $SM$  موج مغناطو صوتی دامنه سالیوتون کاهش می‌یابد.

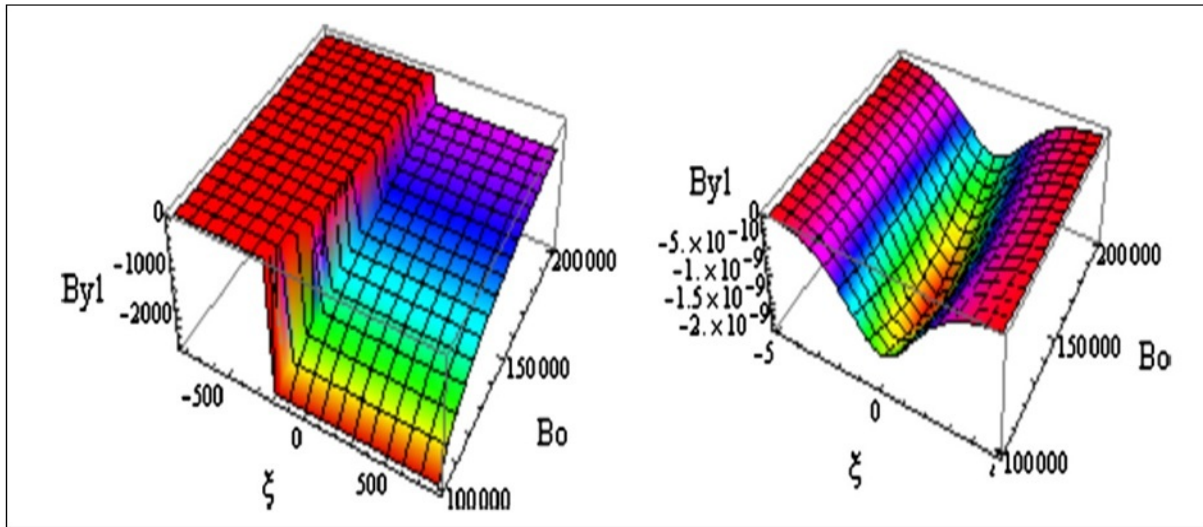
## ۷.۴ جمع‌بندی

در این فصل با استفاده از مدل سیالی و روش‌های حل غیرخطی، معادلات اساسی را برای پلاسمای کوانتومی کاملاً تبهگن در حضور اسپین الکترون به دست آوردیم که برخی از نتایج عبارتند از:  
- معادلات فیزیک پلاسمای غیرخطی اصولاً شامل دو معادله کورته وگ-دووری و شرودینگر غیرخطی می‌باشند.

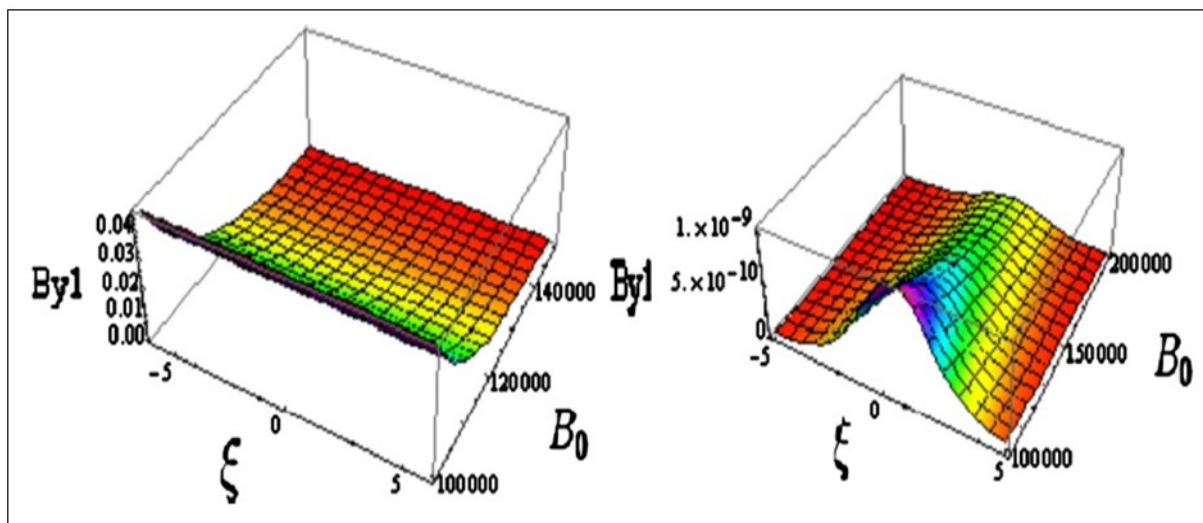
- امواج سالیوتونی جواب معادلات غیرخطی کورته وگ-دووری هستند.

- چنانچه به جهت انتشار سالیوتون انحراف ضعیفی وارد شود پایداری سالیوتون زیر سؤال رفته و شکل اصلی معادله به معادله  $KP$  تغییر می‌کند.

- یکی از مشهورترین معادله پخش غیرخطی که در آن پارامتر اتلاف به خوبی ظاهر می‌شود معادله  $Burger$  می‌باشد.



شکل ۸.۴: تغییرات موج مغناطوسوتی با مد  $FM$  بر حسب تغییرات میدان مغناطیسی



شکل ۹.۴: تغییرات موج مغناطوسوتی با مد  $SM$  بر حسب تغییرات میدان مغناطیسی

- با ترکیب معادلات  $kp$  و Burger به معادله حاکم بر دینامیک سیستم پلاسمای مغناطیده کوانتومی در حضور اثر اسپین الکترون می‌رسیم.
- تحول غیر خطی معادله KPB انتشار هر دو موج ضربه‌ای مغناطی صوتی آهسته و سریع در یک سیستم پلاسمای کوانتومی در حضور پارامتر مقاومت توصیف می‌کند.
- به منظور یافتن جواب‌های دقیق معادله غیرخطی KPB از تکنیک حل معادلات دیفرانسیل جزئی غیر خطی به روش  $\tanh$  بهره می‌جوییم.
- جواب‌های دقیق معادله KPB در سیستم پلاسمای مغناطیده با توجه به اثر اسپین الکترون و اثرات کوانتومی به شکل امواج ضربه‌ای ظاهر می‌شود.

# فصل ۵

## نتیجه‌گیری و پیشنهادات



## ۱.۵ مقدمه

هدف این تحقیق بررسی اثر اسپین الکترون بر دینامیک پلاسمای مغناطیده کوانتومی بوده است. بدین منظور پس از معرفی پلاسمای کوانتومی مدل‌های جدیدی برای مطالعه این نوع پلازما ارائه دادیم. هر یک از این مدل‌ها دارای ویژگی‌ها و محدودیت‌های خاص خود می‌باشند. سپس با استفاده از این مدل‌ها در تئوری خطی و غیرخطی به بررسی رفتار پلاسمای کوانتومی در حضور اثر اسپین الکترون پرداختیم. سپس مهمترین معادله حاکم بر رفتار سیستم مذکور یعنی معادله غیرخطی  $KPB$  را بدست آورده و جواب‌های آن را به دو روش استخراج نموده و روی جواب‌های آن که همان امواج ضربه‌ای-دولایه‌ای و سالیتون‌ها هستند بحث نمودیم. به طور خلاصه آنچه در این پایان‌نامه حاصل گردید به عنوان نتیجه‌گیری بیان می‌کنیم.

## ۲.۵ نتیجه‌گیری

- پلاسمای کوانتومی از ذرات تبهگن (الکترون‌های تبهگن پوزیترون‌های تبهگن حفره‌های تبهگن) با چگالی تعداد ذرات به شدت بالا و دماهای تقریباً پایین تشکیل شده‌اند. سرانجام تابع توزیع فرمی-دیراک، که نوعی تابع توزیع ذرات کوانتومی است بر سیستم حاکم می‌شود.
- زمانی پلازما کوانتومی خواهد بود که سه شرط  $n\lambda_B \geq 1$  و  $\chi \geq 1$  و  $g_Q \leq 1$  برقرار باشد.
- از آنجاییکه در پلاسمای کوانتومی با آنسامبلی از ذرات و  $N$  تابع موج سروکار داریم، بنابراین برای توصیف مدل‌های پلازما از تقریب هارتری و هارتری-فوک استفاده می‌نماییم.
- تمام مدل‌های توصیف پلاسمای کوانتومی از تقریب هارتری-فوک سرچشمه می‌گیرد.
- از آنجاییکه تابع توزیع ذرات پلاسمای کوانتومی از مفهوم احتمال و عدم قطعیت پیروی می‌کند بنابراین تابع توزیع ویگنر را برای آن تعریف نمودیم.
- تابع توزیع ویگنر ابزار مفیدی برای مباحث مکانیک کوانتومی در فضای فاز می‌باشد.
- با استفاده از تحولات تابع توزیع ویگنر نسبت به زمان و استفاده از معادلات ماکسول و پواسون به معادلات ویگنر-پواسون و ویگنر-ماکسول می‌رسیم.
- معادلات ویگنر-پواسون و ویگنر-ماکسول اساس توصیف پلازما بر مبنای مدل نظریه‌ی جنبشی‌اند.
- از امواج بنیادی پلازما که به نوسان‌های یونی با بسامد کم در حضور میدان مغناطیسی مربوط می‌شود موج مغناطوسوتی می‌باشد. این موج در عرض میدان ناآشفته‌ی  $B$  منتشر می‌شود.
- موج آلفون نوع دیگری از امواج بنیادی پلازماست که از نوع هیدرومغناطیسی بوده و راستای انتشار آن موازی با میدان ناآشفته‌ی  $B$  می‌باشد.
- در یک پلاسمای کوانتومی کاملاً تبهگن الکترون‌ها به دلیل وجود اثر اسپین  $(1/2)$  تحت تأثیر نیروی کوانتومی قرار می‌گیرند. این نیرو ترکیبی از گرادیان پتانسیل بوهم و انرژی مغناطیسی الکترون می‌باشد.
- با استفاده از معادلات اساسی مدل مگنتوهیدرودینامیک کوانتومی، رابطه‌ی پاشندگی خطی برای امواج مغناطوسوتی در یک پلاسمای کوانتومی تبهگن با حضور اثر اسپین الکترون، به دست می‌آید.

- در غیاب فاکتور پراکندگی  $\gamma = 0$ ، رابطه‌ی پاشندگی به دو مد  $SM$  و  $FM$  برای امواج مغناطیصوتی در یک پلاسمای کوانتومی تبهگن تبدیل می‌گردد.
- معادلات فیزیک پلاسمای غیرخطی اصولاً شامل دو معادله کورته وگ-دووری و شرودینگر غیرخطی می‌باشند.
- امواج سالیوتونی جواب معادلات غیرخطی  $KdV$  هستند.
- چنانچه به جهت انتشار سالیوتون انحراف ضعیفی وارد شود پایداری سالیوتون نقض شده و شکل اصلی معادله  $KPB$  به معادله  $KP$  تغییر می‌کند.
- یکی از مشهورترین معادله پخش غیرخطی که در آن پارامتر اتلاف به خوبی ظاهر می‌شود معادله برگر می‌باشد.
- با ترکیب معادلات کی.پی و برگر به معادله حاکم بر دینامیک سیستم پلاسمای مغناطیده کوانتومی در حضور اثر اسپین الکترون می‌رسیم.
- تحول غیر خطی معادله  $KPB$  انتشار هر دو موج ضربه‌ای مغناطیصوتی آهسته و سریع در یک سیستم پلاسمای کوانتومی در حضور پارامتر اتلاف توصیف می‌کند.
- به منظور یافتن جواب‌های دقیق معادله غیرخطی  $KPB$  از تکنیک حل معادلات دیفرانسیل جزئی غیر خطی به روش  $\tanh$  بهره می‌جوییم.
- جواب‌های دقیق معادله  $KPB$  در سیستم پلاسمای مغناطیده با توجه به اثر اسپین الکترون و اثرات کوانتومی به شکل امواج ضربه‌ای-دولایه‌ای ظاهر می‌شود.

## ۳.۵ پیشنهادات

در این تحقیق رفتار پلاسمای کوانتومی در حضور اثر اسپین الکترون در محدوده فرکانس پایین (پلاسمای سرد) بررسی شده است. در فرکانس‌ها پایین برخی از رفتارهای مهم پلاسمای در تئوری خطی و غیرخطی نظیر رابطه پاشندگی خطی و سالیوتون‌های غیرخطی امواج آلفونی و مغناطیده صوتی ظاهر می‌شوند. با توجه به اینکه مسأله را از دیدگاه غیرنسبیتی بررسی نمودیم در ادامه این کار پیشنهاد می‌شود که با در نظر گرفتن پلاسمایی با الکترون‌های تبهگن و یون‌های غیر تبهگن موارد زیر بررسی شود:

بررسی اثر اسپین الکترون بر دینامیک پلاسمای مغناطیده کوانتومی از دیدگاه نسبیتی

بررسی اثر اسپین الکترون در سیستم پلاسمای الکترون-پوزیترون از دیدگاه کوانتومی

بررسی اثر اسپین الکترون بر رفتار نانو ساختارهای فلزی در پلاسمای کوانتومی

## مراجع

- [1] FrancisF.chen, 1974, *introduction to plasma physics and controlled fusion*, plasma physics, second edition, V1
- [2] F.Hass, 2012, *An introduction to quantum plasmas*, physics.plasma.ph, V1, 1206.1079
- [3] A.Bret, F.Hass, 2012, *Quantum effects in beam-plasma instabilities*, physics.plasma.ph, V1, 1206.2299
- [4] P.K.Shukla, B.Eliasson, 2011, *Nonlinear collective interaction in quantum plasma with degenerate electron fluids* , Reviews of Modern Physics, V2, 1009.5215
- [5] S.Hussain, S.Mahmood, 2011, *kortewege-deVries Burgers equation for magnetosonic wave in plasma*, phys.plasmas, V18, 052308
- [6] S.Hussain, S.Mahmood, 2011, *Magnetoacoustic soliton in quantum plasmas* , phys. plasma, V18, 082109
- [7] G.Brodin, M.Marklund, J.Zamanian, M.Stefan, 2011, *spin and magnetization effects in plasmas*, plasmaphys.control.fusion, V53, 074013
- [8] P.K.Shukla, B.Eliasson, 2010, *Nonlinear aspects of quantum plasma physics*, physics.Uspekhi, V53
- [9] A.Mushtaq, S.V.Vladimirov, 2010, *Fast and Slow magnetosonic waves in two-dimensional spin-1/2 quantum plasma*, phys.plasmas, V17, 102310
- [10] A.V.Latyshev, A.A.Yushkanov, 2010, *transverse electron conductivity of quantum collisional plasmas*, physics.plasma.ph, V3, 1002.1017

- [11] A.Mushtaq, A.Qamar, 2009, *parametric studies of nonlinear magnetosonic wave in tow-dimensional quantum magnetoplasma*, phy.plasma, V16, 022301
- [12] P.K.Pathria, 1972, 82-84, *statistical mechanics, oxford. New york and Toronto Sydney. Braunschweig*
- [13] F.Hass, P.K.Shukla, 2008, *Nonlinear stationary solutions of the Wigner and Wigner-Poisson equations* , phys.plasmas, V15, 112302
- [14] A.P.Misra, P.K.Shukla, 2008, *Modulational instability of magnetosonic waves in a spin 1/2 quantum plasma*, phys.plasma, V15,052105
- [15] Giovanni Manfredi, 2005, *How to model quantum plasma* , V1, 05005004
- [16] V.Yu.Belashov, S.V.Vladimirov, 2004, *Solitary waves in dispersive complex Media*, 137-146, Kazan.sydne
- [17] G.Manfredi, F.Hass, 2002, *self-consistant fluid model for a quantum gas*, V1, 0203394
- [18] Moyal.J.E, 1949, *Quantum mechanics as a statistical theory*, proceeding of the cambridge philosophical society, V45, p.99-124
- [19] Ashcroft.N.w, 1975, *solid state ohysics*, Butterworth-Heinemann, oxford.second edition, V1
- [20] D.G.Swanson, 1983, *plasms a wave*, second Edition.USA, Aburt University press, V1
- [21] W.Malfliet, W.Hereman, 1996, *the tanh method:I.Exact solutions of nonlinear evolution and wave equation* phys. scr, V54, 563
- [22] H.Washimi, T.Taniuti, (1966), phys.rev, V17.996
- [23] W.Malfliet, J.Compute, Apple.Math, 164-165 (2004), Am. J. Phys, V60, 650 (1992)
- [24] W.Malfliet, W.Hereman,(1996), Phy.scr ,V54, 569, A.Jeffery, M.N.B.Mohamad,(1991), *wave motion*, V14, 369
- [25] F.Hass, M.Marklund, G.Brodin, J.Zamanian, (2010), phys.lett.A 374, 481

- 
- [26] M.Marklund, P.K.Shukla, (2006), Rev. Mod. Phys. V78,591
- [27] F.Hass, G.Manfredi, M.R.Feix, (2000), Phys. Rev. E V62, 2763
- [28] F.Hass, Phys. (2005), Plasmas V12, 062117
- [29] M.Marklund, G.Brodin, (2007), Phys. Rev. Lett. V98, 025001
- [30] [www.britanni.com](http://www.britanni.com)

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

perturbation	آشفتگی
tokamak experiment	آزمایش همجوشی
interaction energy	انرژی برهم‌کنشی
tunneling effect	اثر تونل‌زنی
astrophysic	اخترفیزیک
saturation	اشباع
dissipation	اتلاف
thermal energy	انرژی گرمایی
magnetic energy	انرژی مغناطش
collective effect	به‌هم‌پیوسته و تجمعی
strangly coupled	به‌شدت جفت‌شده
critical	بحرانی
quantum plasma	پلاسمای کوانتومی
dissipation	پراکندگی
propagation	پاشندگی و انتشار
perpendicular propagation	پراکندگی عمودی
obliquely propagating	پراکندگی مایل
graininess parameters	پارامتر جفت‌شده‌ی کلاسیکی
electrostatic potential	پتانسیل الکتروستاتیکی

diffraction	پراش
dispersion	پراکندگی
degenerate parameter	پارامتر تبهگنی
coupling parameter	پارامتر جفت‌شدگی
Bohm potential	پتانسیل بوهم
Brillouin function	تابع بریلیون
equilibrium	تعدادل
degenerate	تبهگن
Fermi-Dirac distribution	توزیع فرمی-دیراک
Maxwellian distribution	توزیع ماکسولی
magnetization current density	چگالی جریان مغناطیسی
current density	چگالی جریان
self consistent	خودسازگار
temperature	دما
collisional regime	رژیم برخوردی
collisionless regime	رژیم بی‌برخورد
Vlasov-Poisson(VP) system	سیستم ولاسف-پواسون
ion sound speed	سرعت صوتی یون
fermi velocity	سرعت فرمی
Alfven speed	سرعت آلفون
quasineutrality condition	شرط شبه‌خنثائیت
de-Broglie wavelength	طول موج دو بروی
debay length	طول دبای
plasma frequency	فرکانس پلاسما
dip	فرورفتگی

interparticle distence	فاصله‌ی بین ذره ای
interstellar space	فضای میان ستاره‌ای
gyrofrequency	فرکانس ژیرو
electric discharg	فرآیند تخلیه ی الکتریکی
Paulis exclusion principle	قانون دافعه‌ی پاؤلی
hump	برآمدگی
Vlasov equation	معادله‌ی ولاسف
slow mode(SM)	مد با حرکت کند
fast mode(FM)	مد با حرکت تند
shock wave	موج شوکی
scal length	مقیاس طول
resistive	مقاومتی
poissons equation	معادله‌ی پواسون
nonlinear evolution equation	معادله‌ی تحول غیرخطی
Navier-stokes equation	معادله‌ی ناور-استوکس
momentum conservation equation	معادله‌ی پایستگی تکانه
density matrix	ماتریس چگالی
magnetohydrodynamics(MHD)	مگنتوهیدرودینامیک
fluid equations	معادلات سیالی
Bohr magneton	مگنتون بوهر
kinetic theory	نظریه‌ی جنبشی
fluctuations	نوسانات
spin force	نیروی اسپینی
homogeneous	همگن



# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

astrophysic	اخترفیزیک
Alfven speed	سرعت آلفون
Bohr magneton	مگنتون بوهر
Bohm potential	پتانسیل بوهم
Brillioun function	تابع بریلیون
Boltzmanns constant	ثابت بولتزمن
collisional regime	رژیم برخوردی
collisionless regime	رژیم بی‌برخورد
collective effect	به‌هم‌پیوسته و تجمعی
coupling parameter	پارامتر جفت‌شدگی
current density	چگالی جریان
debay length	طول دبای
degenerate	تبهگن
degenerate paramiter	پارامتر تبهگنی
density matrix	ماتریس چگالی
de-Broglie wavelength	طول موج دوبروی
dielectric costant	ثابت دی‌الکتریک
dispersion	پراکندگی مغناطیسی
dissipation	اتلاف

diffraction	پراش
electrostatic potential	پتانسیل الکتروستاتیکی
electric discharge	فرآیند تخلیه ی الکتریکی
equilibrium	تعدادل
fermi velocity	سرعت فرمی
Fermi-Dirac distribution	توزیع فرمی-دیراک
fluctuations	نوسانات
fluid equations	معادلات سیالی
graininess parameters	پارامتر جفت‌شده‌ی کلاسیکی
gyrofrequency	فرکانس ژیرو
homogeneous	همگن
inertia	اینرسی
ion sound speed	سرعت صوتی یون
interaction energy	انرژی برهم‌کنشی
interparticle distance	فاصله‌ی بین ذره ای
interstellar space	فضای میان‌ستاره‌ای
kinetic theory	نظریه‌ی جنبشی
magnetohydrodynamics(MHD)	مگنتوهیدرودینامیک
Maxwellian distribution	توزیع ماکسولی
momentum conservation equation	معادله‌ی پایستگی تکانه
magnetization current density	چگالی جریان مغناطیسی
Navier-stokes equation	معادله‌ی ناور-استوکس
nonlinear evolution equation	معادله‌ی تحول غیرخطی
Paulis exclusion principle	قانون دافعه‌ی پاؤلی
parallel propagation	انتشار موازی

perpendicular propagation	انتشار عمودی
perturbation	آشفتگی
plasma frequency	فرکانس پلاسما
poissons equation	معادله‌ی پواسون
propagation	پاشندگی و انتشار
quantum force	نیروی کوانتومی
quasineutrality condition	شرط شبه‌خنثائیت
resistive	مقاومتی
scal length	مقیاس طول
self consistent	خودسازگار
shock wave	موج شوکی
slow mode(SM)	مد با حرکت کند
spin force	نیروی اسپینی
strangly coupled	به‌شدت جفت‌شده
temperature	دما
thermal velocity	سرعت گرمایی
tokamak experiment	آزمایش همجوشی
tunneling effect	اثر تونل‌زنی
Vlasov equation	معادله‌ی ولاسف
Vlasov-Poisson(VP) system	سیستم ولاسف-پواسون

نمايه

## **Aabstract**

In this thesis we have introduced the new version of plasma environment classical and quantum plasma. we obtained the magnetohydrodynamic (MHD) equations for quantum plasma system. and studied the linear and nonlinear spin effects in quantum magnetohydrodynamic system. In the nonlinear limit by using (RPM) method the governing equations for spin-1/2 quantum magnetohydrodynamic system was obtained. The solution of (KPB) was analyzed by (tanh) method.

keyword:

quantum plasma, Wigner distribution function, Hartree, fluid model, magnetosonic wave, electron quantum force, Brillouin function, Pauli equation, magnetohydrodynamics model, RPM method, tanh method, soliton waves, shock waves



Shahrood University Of Technology

Technology University of Shahrood  
Faculty Of Physics Sciences

Dissertation Submitted in Partial  
Fulfillment of The Requirements For The  
Degree of Master of Science in  
atomic and molucular Physics

**study of the spin dynemics in a magnetized  
quantum plasma**

Supervisor

**Dr.M.Momeni**

by

**Narges Nasiri**

**January 2014**