



دانشکده فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد فیزیک  
گرایش ذرات بنیادی

ابرتقارن در مکانیک کوانتومی

استاد راهنما:

دکتر محمدرضا سرکرده‌ای

نگارش:

مرجان توکلی

اسفند ماه ۱۳۸۶

## تقدیر و تشکر:

سپاس خدای را، سپاسی که بر دیگر سپاسها برتری داشته باشد؛ همانند برتری پروردگار بر مخلوقاتش. آنچه در پیش روی دارید ره‌آورد تمام جستجوهای من است که هر سطر آن تلاش بزرگوارانی است که بودن خویش را با من سرودند و سبزی حضورشان را به زردی انتظارم پیوند زدند و به من آموختند که " اگر نور نبود، منطق زنده پرواز دگرگون می‌شد". هرچند واژه را یارای آن نیست که لطف، محبت و بزرگواری آنانی که جرعه نوش دریای بیکران مهر و محبتشان بوده ام را به تصویر کشم، به رسم ادب و احترام بوسه بر دستانشان زده و به مصداق حدیث " من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق " زحمات اعضای خانواده ام، مخصوصاً پدر و مادر مهربانم، معلمان، اساتید و دوستان دوران تحصیلم را ارج نهاده و مراتب تشکر قلبی و باطنی خویش را از الطاف و مهربانیهای آنها ابراز می‌دارم. این پروژه حاصل کار عزیزانی است که بدون راهنمایی‌های آنها هیچگاه به نتیجه لازم نمی‌رسید و به قول خواجه شیراز:

سعی نابرده در این راه به جایی نرسی      مزد اگر می‌طلبی طاعت استاد ببر

لازم می‌دانم از زحمات فراوان و کارگشای استاد فرزانه و بزرگوارم آقای دکتر محمدرضا سرکرده‌ای که با راهنمایی‌ها و نظرات ارزنده و گهربارشان و صبر و حوصله فراوان، نقش مهمی در به ثمر رسیدن این تحقیق داشته‌اند و روحیه تحقیق و پژوهش را در بین دانشجویان خود زنده کردند، صمیمانه تقدیر و تشکر نمایم. همچنین از راهنمایی‌های جناب آقای دکتر محسن سربیشه‌ای و جناب آقای دکتر احمد کمپانی در دانشگاه فردوسی مشهد و سرکار خانم مریم خلیج کمال تشکر را دارم. از دوست عزیزم خانم عطیه نبوی‌نژاد که همراهی صمیمانه‌ای در این مسیر با من داشته‌اند و جناب آقای روح‌الله امیری که کمک فراوانی در پیشبرد این پایان‌نامه داشته‌اند تشکر می‌نمایم. همچنین از هیئت محترم داوران جناب آقای دکتر حسین موحدیان و جناب آقای دکتر کاظم بی‌تقصیر نیز که بررسی و داوری این پایان‌نامه را بر عهده داشتند، سپاسگزاری می‌نمایم. و در نهایت از تمام دوستان خود در دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود تشکر می‌نمایم. و درود می‌فرستم بر همه‌آنان که ذهن ناتوانم یارای به خاطر آوردن محبت‌هایشان را ندارد. امیدوارم همه‌این عزیزان در تمام مراحل زندگی خود پیروز و سربلند باشند.

## چکیده

ابرتقارن، تقارنی است که فرمیونها و بوزونها را به هم مرتبط می‌سازد. این تقارن در نظریه وحدت نیروها مورد استفاده قرار می‌گیرد و امید می‌رود بتواند چارچوب مناسبی برای نظریه گرانش کوانتومی باشد. هر چند تا کنون شاهد تجربی بر وجود این تقارن مشاهده نشده است. چندی است کاربرد ابرتقارن در شاخه‌های دیگر فیزیک مورد استفاده قرار گرفته است.

در این پایان نامه کوشش شده است که به مفهوم ابرتقارن در مکانیک کوانتومی بپردازیم و کاربرد آن را در بعضی مسائل فیزیکی شامل مسائل مقید مورد بررسی قرار دهیم. در این رابطه به محاسبه انرژی حالت چاههای پتانسیل چندگانه و تعمیم آن براساس ابرتقارن می‌پردازیم.

## مقدمه:

شیمی را می توان با سه ذره بنیادی پروتون، نوترون و الکترون و با استفاده از نیروی الکترومغناطیسی فهمید و مباحث مختلف آن را توضیح داد. فیزیک هسته‌ای را می توان با چهار ذره بنیادی پروتون، نوترون، الکترون و -نوترینو ترپرتو عملکرد نیروهای هسته‌ای قوی، هسته‌ای ضعیف و الکترومغناطیسی فهمید و تشریح کرد. در عین حال باید توجه داشت که مکانیک کوانتوم نظریه ساده‌ای نیست، زیرا رفتار ذرات مانند رفتار اجسام بزرگ نیست. ما برای شناسایی رفتار ذرات در مکانیک کوانتوم به یک بینش جدید نیاز داریم.

برای شکل دادن به پایه بینش خود در مکانیک کوانتوم باید به خصوصیات اتم ها، ملکولها و سایر ذرات زیر اتمی توجه کنیم. این ذرات به سادگی و به سرعت از مکانی به مکان دیگر حرکت می کنند. این امر پایه اصل عدم قطعیت هایزنبرگ را تشکیل می دهد. به طوری که همواره رابطه زیر بین اندازه حرکت، مکان و ثابت پلانک برقرار است:  $\Delta x \cdot \Delta p \geq h$ . مدت زیادی این طور تصور می شد که پروتون-ها و نوترون ها ذرات بنیادی هستند و بنابراین گمان می رفت مثل الکترون دیگر قابل تقسیم نبوده و دارای یک ساختار داخلی نیستند. اما امروزه می دانیم که نوکلئونها یعنی پروتونها و نوترونها خود از ذرات کوچکتری ساخته شده اند که کوارک نامیده می شوند. در دهه های اخیر فیزیکدانان یک مدل تحت عنوان مدل استاندارد ارائه کردند تا یک چارچوب نظری برای فهم ذرات بنیادی و نیروهای طبیعت فراهم آورند.

لذا مدل استاندارد شامل دوازده ذره فرمیون با اسپین نیمه درست که شش تای آن کوارک و شش تای دیگر لپتون و چهار ذره بوزون با اسپین یک هستند و یک هیگز بوزون با اسپین صفر که هنوز مشاهده نشده است.

ابرتقارن در واقع کامل کننده مدل استاندارد است و راهی است که نشان می دهد چگونه می توان مدل استاندارد را بسط داد. ابرتقارن، تقارنی است که فرمیونها و بوزونها را به هم مرتبط می سازد. به بیان دیگر، ابرتقارن در نظریه میدان کوانتومی به عنوان تقارنی بین میدانهای بوزونی و میدانهای فرمیونی مطرح شد؛ و از آنجا که می توانست گامی به سوی یافتن وحدتی بین درجات آزادی درونی و بیرونی باشد بسیار مورد توجه قرار گرفت. این تقارن در نظریه وحدت نیروها مورد استفاده قرار می گیرد و امید می رود بتواند چارچوب مناسبی برای نظریه گرانش کوانتومی باشد، هر چند تاکنون شاهد تجربی بر وجود این تقارن مشاهده نشده است. برطبق نظریه ابرتقارن، بوزونها (یعنی مبادله کننده های برهم-کنشها) به فرمیونها (سازنده های اصلی ماده) توسط یک تبدیل ابرتقارن وابسته اند. شناخت مفهوم ابرتقارن و درک طبیعت با این پدیده به یقین به کشف ناگشوده های موجود بویژه در دست یابی به هدفهای زیر کمک شایانی خواهد کرد:

۱- در یک خانواده قرار دادن دو نوع ذره موجود در عالم یعنی فرمیونها و بوزونها

۲- دست یافتن به یک نظریه میدان وحدت یافته

۳- نشان دادن تناظر بین ذرات پیش‌بینی شده و ذرات موجود در جهان هستی

۴- یافتن چارچوب مناسب نظری و بعداً عملی برای نظریه گرانش کوانتومی

فصل بندی پایان‌نامه به ترتیب زیر است: نخست مروری بر مفهوم تقارن و فرمولبندی ابرتقارن در مکانیک کوانتومی خواهیم داشت. در فصل دوم بطور مختصر گروه‌های توپولوژیکی و لی مطرح می‌شود. در فصل سوم به جبر ابرتقارن در مکانیک کوانتومی ابرتقارن می‌پردازیم. در این فصل کوشش شده است با ارائه مثالهایی، چند کاربرد ابرتقارن بررسی گردد. فصل چهارم که بخش اصلی پایان‌نامه است شامل بررسی چاههای پتانسیل چندگانه است که در آن به محاسبه انرژی حالت چاههای پتانسیل چندگانه و تعمیم آن بر اساس ابرتقارن پرداخته‌ایم.

## فهرست کلی مطالب

### فصل اول

۳	..... مفهوم تقارن
۸	..... قضیه نوتر
۱۳	..... قضیه CPT
۱۷	..... مدل استاندارد
۲۶	..... ابرتقارن

### فصل دوم

۴۰	..... گروههای توپولوژیکی و گروههای لی
----	---------------------------------------

### فصل سوم

۵۱	..... جبر ابرتقارن
۵۴	..... مکانیک کوانتوم ابرتقارنی
۷۶	..... چند مثال از کاربردهای ابرتقارن
۸۹	..... شکست ابرتقارن

### فصل چهارم

۹۹	..... بررسی چاههای پتانسیل چندگانه
----	------------------------------------

## فهرست جداول

صفحه		عنوان
۹	.....تقارن‌ها و قوانین بقا.....	جدول ۱-۱
۱۳	.....رفتار کمیته‌ها تحت تقارن وارونی زمان.....	جدول ۲-۱

## فهرست شکلها

صفحه		عنوان
۱۵	.....تقارن ناپایدار.....	شکل ۱-۱
۱۶	.....توابع موج ذره که روی محورها نشان داده شده است.....	شکل ۲-۱
۲۴	.....قدرت نیروهای موجود در طبیعت.....	شکل ۳-۱
۲۴	.....سه خانواده ماده که در مدل استاندارد شرح داده شده اند.....	شکل ۴-۱
۳۲	.....ذرات ابرتقارنی مانند سایه های ذرات معمولی.....	شکل ۵-۱
۳۳	.....ارتباط فرمیونها و بوزونها با ابرتقارن.....	شکل ۶-۱
۷۵	.....نقش عملگرهای $a, a^+, A, A^+$ .....	شکل ۱-۳
۷۹	.....چاه پتانسیل مربعی.....	شکل ۲-۳
۹۱	.....ابرتقارن شکسته شده.....	شکل ۳-۳
۱۱۰	.....چاه پتانسیل دوگانه.....	شکل ۱-۴
۱۱۲	.....چاه پتانسیل سه گانه.....	شکل ۲-۴
۱۱۴	.....چاه پتانسیل چهارگانه- حالت اول.....	شکل ۳-۴
۱۱۶	.....چاه پتانسیل چهارگانه- حالت دوم.....	شکل ۴-۴
۱۱۸	.....چاه پتانسیل پنجگانه.....	شکل ۵-۴

## فهرست پیوستها

- پیوست ۱- تئوری اختلال لگاریتمی در مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی..... ۱۲۱
- پیوست ۲- محاسبه انرژی حالت چاههای پتانسیل پنجگانه و هفتگانه..... ۱۲۳
- پیوست ۳- ابررسانایی..... ۱۳۳
- پیوست ۴- ماتریس های پائولی و دیراک..... ۱۳۴



## فصل اول

مفهوم تقارن در طبیعت

## فهرست مطالب

صفحه		عنوان
۳	.....مفهوم تقارن	۱-۱
۴	.....تقارن و قوانین بقا	۲-۱
۴	.....همگنی زمان	۱-۲-۱
۶	.....همگنی فضا	۲-۲-۱
۷	.....همسانگردی فضا	۳-۲-۱
۸	.....قضیه نوتر	۳-۱
۹	.....تقارن در جهان میکروسکوپی	۴-۱
۹	.....پاریمت	۱-۴-۱
۱۱	.....تقارن مزدوج بار	۲-۴-۱
۱۲	.....تقارن وارونی زمان	۳-۴-۱
۱۳	.....قضیه CPT	۵-۱
۱۴	.....نظریه پیمانه ای	۶-۱
۱۵	.....شکست خودبخودی تقارن	۷-۱
۱۷	.....مدل استاندارد	۸-۱
۲۵	.....ذره هیگز	۹-۱
۲۶	.....ابرتقارن	۱۰-۱
۳۴	.....منابع	

## ۱-۱ مفهوم تقارن

تقارن ترجمه واژه symmetry است که از دو کلمه یونانی sum به معنی با یکدیگر و metron یعنی اندازه گیری مشتق شده است. در واقع این لغت مترادف با تشابه، تناسب، تقارن، سازگاری، انطباق و توافق معنا شده است. همچنین اقتدار و توانایی این عبارت زمانی آشکار می شود که با جستجو در تاریخ علم مشاهده می کنیم که عملاً تاریخچه علم فیزیک را کسانی ساخته اند که در کنار مفهوم تقارن در پی یافتن هماهنگی در طبیعت اطراف خود بوده اند. چرا که تقارن ایده ایست که راهنمای بشر در سده های اخیر برای فهم هر چه بهتر قوانین آفرینش این جهان زیبا بوده است. همان طور که از مطالب فوق بر می آید تقارن در جهان گستره وسیعی را شامل می شود، ولی در این فصل تنها با ذکر گوشه هایی از اثر تقارن در شاخه های مختلف فیزیک اعم از فیزیک کلاسیک، مکانیک کوانتومی و ... تصویری کلی از خاصیت اعجاب انگیز آن را نشان می دهیم. به واقع ما قصد داریم تا ردپایی از تقارن را در فیزیک طبیعت اطراف خود تا بدانجا دنبال کنیم که بتوانیم به نوعی پایداری و بقای مبتنی بر مفهوم تقارن دست پیدا کنیم [۱].

مسئله همسانی یا تقارن در جهان هستی همواره ذهن متفکران را به خود مشغول داشته است. اصولاً طبیعت تمایل به تقارن دارد و به عبارت دیگر بسیار نزدیک به وضعی متقارن است. این یک اصل مهم طبیعی و فیزیکی است که دو نمود بنیادی انرژی و ماده با تقارنی متقابل تجلی می گردند. وجود الکترون-پوزیترون یا پروتون-ضدپروتون و به طور کلی ذره-ضدذره و به احتمالی گسترده تر ماده-ضدماده نمونه های کامل تقارن در طبیعت هستند و این پرسش را به دنبال خود دارند که "آیا جهان هستی متقارن است؟". تقارن کارکرد یا عملگری است که می توانیم آن را بر روی یک سیستم اجرا کنیم بطوری که آن را به صورت ناوردا باقی گذارد و به شکلی تبدیل کند

که از شکل اصلی آن تمیز ناپذیر باشد. بنابراین یکی از مهمترین مفاهیم تقارن همان ناوردایی است. با یک نگاه دیگر می‌بینیم که تقارن ارتباط خیلی نزدیکی با هماهنگی، زیبایی و یگانگی دارد. بنابراین به طور خلاصه می‌توانیم بگوییم که تقارن نقش خیلی مهمی دارد هم در به وجود آوردن نتایجی که از قوانین طبیعت به دست می‌آید و هم در توسعه علم فیزیک. بهترین یا مهمترین مثال برای ارتباط تقارن با قوانین بقا که در جهان هستی وجود دارند قضیه نوتر است که راجع به آن صحبت می‌کنیم [۲].

## ۱-۲-۲ تقارن و قوانین بقا

هر تقارنی از طبیعت یک قانون بقا (پایستگی) را به بار می‌آورد و برعکس هر قانون بقا نشانگر یک تقارن مشخص است. تقارن‌هایی که قوانین بقا را به دنبال دارند به این صورت خلاصه شده اند: اگر سیستم تحت انتقال در زمان ناوردا باشد انرژی بقا دارد؛ و همگنی فضا بقای اندازه حرکت خطی و همسانگردی فضا بقای اندازه حرکت زاویه ای را می‌دهد [۲].

## ۱-۲-۱ همگنی زمان

$2s$  کمیت  $q_i, \dot{q}_i$  ( $i=1,2,\dots,s$ ) (کمیت  $q_i$  موقعیت سیستم و  $\dot{q}_i$  مشتق آن می‌باشد) که حالت سیستم را در هر لحظه مشخص می‌سازند با حرکت آن نسبت به زمان تغییر می‌کنند. اما توابعی از ترکیب این کمیات وجود دارند که در هنگام حرکت ثابت می‌مانند و تنها بستگی به شرایط اولیه سیستم دارند. این توابع را انتگرالهای حرکت می‌گویند. تعداد انتگرالهای مستقل حرکت سیستم بسته ای که  $s$  درجه آزادی دارد  $2s-1$  است. این قضیه را از بحث ساده زیر نتیجه می‌گیریم: حل کامل معادلات عمومی شامل  $2s$  ثابت اختیاری است. معادلات حرکت سیستم بسته تابع صریحی از زمان نیستند از این رو انتخاب مبدأ زمان کاملاً اختیاری است و یکی از ثابت‌های اختیاری معادلات حرکت همان زمان ثابت  $t_0$  است. با حذف  $t+t_0$  از  $2s$  تابع،

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(t+t_0, c_1, c_2, \dots, c_{2s-1}) \\ \dot{q}_i &= \dot{q}_i(t+t_0, c_1, c_2, \dots, c_{2s-1}) \end{aligned} \quad (1-1)$$

می توان  $2s-1$  ثابت  $c_1, c_2, \dots, c_{2s-1}$  را بر حسب توابعی از  $q, \dot{q}$  نشان داد و این توابع انتگرالهای حرکت خواهند بود. این انتگرالهای حرکت را انتگرالهای بقا می نامند. خاصیت مهم این انتگرالها در جمع پذیری آنهاست. یعنی در سیستم مرکبی که واکنش های داخلی میان ذراتش قابل صرفنظر کردن باشد، انتگرال حرکت کل سیستم برابر مجموع انتگرالهای حرکت هر یک از ذرات است. این خاصیت جمع پذیری اهمیت این کمیات را دو چندان کرده است. مثلاً فرض کنید دو جسم در مدت زمان معینی بر هم اثر می گذارند. چون قبل و بعد از واکنش مجموع انتگرالهای بقای هر یک از دو سیستم برابر مجموع انتگرالهای بقای هر جسم به طور جداگانه است، چنانچه حالت قبل از واکنش معلوم باشد، به کمک قوانین بقا می توان نتایج مهمی را از حالت سیستم پس از انجام واکنش بدست آورد. اکنون اولین قانون بقا را که نتیجه ای از مفهوم همگنی زمان است بدست آوریم. زمان در محدوده یک چارچوب مرجع لخت همگن است. بدین مفهوم که هیچ لحظه ای بر لحظه دیگر برتری ندارد. به علت همگن بودن زمان، تابع لاگرانژ  $L$  در یک سیستم بسته که با هیچ چیز در خارج از خود برهمکنش ندارد تابع صریحی از زمان نیست، یعنی  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

از این رو دیفرانسیل کامل تابع لاگرانژ را نسبت به زمان چنین می توان نوشت :

$$\frac{dL}{dt} = \sum \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \quad (2-1)$$

مطابق معادله حرکت  $(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0)$  به جای  $\frac{\partial L}{\partial q_i}$  مقدار  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  را قرار می دهیم ؛ به

دست می آید :

$$\frac{dL}{dt} = \sum \dot{q}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \sum \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad (3-1)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0$$

$$H = \sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = E = \text{ثابت} \quad (4-1)$$

در هنگام حرکت، هامیلتونی یک سیستم بسته ثابت باقی می ماند. بنابراین رابطه (۴-۱) یک انتگرال حرکت است که با انرژی کل سیستم برابر می شود. خاصیت جمع پذیری انرژی را می توان به سرعت از خاصیت جمع پذیری تابع لاگرانژ نتیجه گرفت. زیرا رابطه (۴-۱) نشان می دهد که

انرژی تابعی است خطی از تابع لاگرانژ. قانون بقای انرژی نه تنها در سیستم بسته بلکه در سیستم بازی که در میدان خارجی ثابتی قرار دارد نیز صادق است. (منظور میدانی است که تابع زمان نباشد) زیرا تنها خاصیتی که در بدست آوردن رابطه فوق مورد استفاده قرار گرفت این بود که تابع لاگرانژ به طور صریح به زمان بستگی نداشته باشد و در این حالت نیز این موضوع صادق است. گاهی سیستم مکانیکی با انرژی ثابت را سیستم پایستار می نامند. همان طور که می دانیم تابع لاگرانژ سیستم بسته (یا سیستمی که در میدان ثابت خارجی قرار دارد) به صورت :

$$L = T(\dot{q}) - U(q)$$

نوشته می شود که در این رابطه  $T$  تابع درجه دومی از سرعت است. با استفاده از قضیه اویلر در معادلات همگن مرتبه  $n$  داریم :

$$\sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = nT \quad (5-1)$$

اگر این رابطه را در رابطه (۴-۱) قرار دهیم نتیجه می شود :

$$E = T(\dot{q}) + U(q) \quad (6-1)$$

و در مختصات دکارتی :

$$E = \frac{1}{2} \sum m_a V_a^2 + U(r_1, r_2, \dots) \quad (7-1)$$

با توجه به این دو رابطه انرژی سیستم بسته به صورت مجموع دو جمله مجزا نوشته می شود: اولی انرژی جنبشی است که تنها به سرعت بستگی دارد و دومی انرژی پتانسیل است که تنها بستگی به مختصات جسم دارد [۳].

## ۲-۲-۱ همگنی فضا

دومین قانون بقا را از همگن بودن فضا نتیجه می گیریم. منظور از همگنی فضا این است که هیچ نقطه ای از فضا بر نقطه دیگر ارجح نیست. اگر فضا همگن باشد خواص مکانیکی سیستم بسته با هر انتقالی در فضا بدون تغییر می ماند. در اینجا فرض می کنیم که سیستم در هر راستا تغییر مکان کوچکی به اندازه  $\epsilon$  پیدا کند، آنگاه شرایطی را که به ازای آنها تابع لاگرانژ بدون تغییر باقی بماند مورد مطالعه قرار می دهیم. تغییر مکان به صورت انتقالی است که در آن همه ذرات

سیستم به یک اندازه حرکت کنند. با افزایش بینهایت کوچک  $\varepsilon$  در مختصات سیستم چون سرعت ذرات ثابت باقی می ماند تابع لاگرانژ به اندازه:

$$\delta L = \sum \frac{\partial L}{\partial r_a} \delta r_a = \varepsilon \sum \frac{\partial L}{\partial r_a} \quad (8-1)$$

تغییر می کند. علامت جمع روی همه ذرات سیستم است. چون مقدار  $\varepsilon$  اختیاری است پس شرط ناوردایی لاگرانژی یعنی  $\delta L = 0$ ، معادل است با  $\sum \frac{\partial L}{\partial r_a} = 0$ . از معادلات لاگرانژ نتیجه می شود:

$$\sum \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_a} = \frac{d}{dt} \sum \frac{\partial L}{\partial v_a} = 0 \quad (9-1)$$

پس در یک سیستم بسته بردار  $P = \sum \frac{\partial L}{\partial v_a}$  در هنگام حرکت ثابت باقی می ماند. این مقدار ثابت را اندازه حرکت سیستم می نامند. اگر از تابع لاگرانژ دیفرانسیل کامل بگیریم اندازه حرکت بر حسب سرعت ذرات سیستم بدست می آید:

$$P = \sum m_a v_a \quad (10-1)$$

قابلیت جمع پذیری اندازه حرکت آشکار است. در این مورد برعکس انرژی چه واکنشهای داخلی قابل صرف نظر کردن باشند و چه نباشند، مقدار اندازه حرکت کل سیستم برابر مجموع اندازه حرکت ذرات  $P_a = m_a v_a$  است. اگر حرکت با مختصات تعمیم یافته  $q_i$  مشخص شده باشد، مشتق تابع لاگرانژ نسبت به سرعتهای تعمیم یافته برابر است با  $P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  که اندازه حرکت تعمیم یافته سیستم نام دارد [۳ و ۲].

### ۳-۲-۱ همسانگردی فضا

اکنون با استفاده از خاصیت همسانگردی در فضا قانون بقای دیگری را نتیجه می گیریم. همسانگردی فضا به این معنی است که خواص مکانیکی سیستم بسته با هر چرخش دلخواهی به دور خود تغییر نکند. از اینرو چرخش بینهایت کوچکی به سیستم مورد نظر می دهیم و شرایطی را که تابع لاگرانژ ناوردا می ماند به دست می آوریم. اندازه حرکت زاویه ای نیز مانند اندازه حرکت

خطی جمع پذیر است. (چه در وجود و چه در عدم وجود واکنشهای داخلی). برای اثبات بقای اندازه حرکت زاویه‌ای به این صورت عمل می‌کنیم:

$$\delta \vec{r} = \delta \vec{\theta} \times \vec{r} \Rightarrow \delta \vec{r} = \delta \vec{\theta} \times \vec{r} + (\delta \dot{\theta}) \times \vec{r} = \delta \vec{\theta} \times \vec{r} \quad (11-1)$$

چون تمام اجزاء سیستم به اندازه  $\delta \theta$  دوران می‌کند،  $\delta \dot{\theta} = 0$  انتخاب می‌شود. تغییر لاگرانژی نسبت به دوران بینهایت کوچک صرفنظر کردنی است [۳ و ۲].

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum \frac{\partial L}{\partial x_j} \delta x_j + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \delta \dot{x}_j = 0 \\ P_j &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_j} - \dot{P}_j = 0 \Rightarrow \dot{P}_j = \frac{\partial L}{\partial x_j} \\ \delta L &= \sum \dot{P}_j \delta x_j + \sum P_j \delta \dot{x}_j = 0 \end{aligned} \quad (12-1)$$

$$\dot{P} \cdot \delta \vec{r} + \vec{P} \cdot \delta \dot{\vec{r}} = 0 \Rightarrow \dot{P} \cdot (\delta \vec{\theta} \times \vec{r}) + \vec{P} \cdot (\delta \vec{\theta} \times \dot{\vec{r}}) = 0$$

$$\delta \vec{\theta} \cdot (\dot{\vec{P}} \times \vec{r}) + \delta \vec{\theta} \cdot (\vec{P} \times \dot{\vec{r}}) = \delta \vec{\theta} \cdot \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{P}) = 0$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{P}) = 0 \Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = \text{const.}$$

$\delta \vec{\theta}$  اختیاری است.

### ۱-۳ قضیه نوتر<sup>۱</sup>

گفتیم که ارتباط بین تقارن و قوانین بقا به وسیله قضیه نوتر فراهم می‌شود. این قضیه منتسب به امی نوتر ریاضیدان (۱۹۳۵-۱۸۸۲) است. وی ارتباط بین تقارن و قوانین بقا را در سال ۱۹۱۷ به این صورت بیان کرد: "چنانچه تقارن در یک سیستم وجود داشته باشد، حتماً یک ثابت حرکت وابسته به این تقارن وجود خواهد داشت." به عنوان مثال در بسیاری موارد قوانین فیزیک نسبت به انتقال در زمان متقارن هستند، یعنی رویداد حوادث از یک لحظه به لحظه دیگر هیچ فرقی نمی‌کند. قضیه نوتر این ناوردایی را به بقای انرژی ارتباط می‌دهد. برخی از تقارن‌ها و قوانین بقای مربوط به آنها در جدول (۱-۱) خلاصه شده است [۴].

<sup>1</sup> Noether theorem



نوع تقارن	قانون بقا
انتقال در زمان (همگنی زمان)	انرژی
انتقال در فضا (همگنی فضا)	اندازه حرکت خطی
چرخش (همسانگردی فضا)	اندازه حرکت زاویه‌ای
تبدیل پیمانه‌ای	بار الکتریکی

جدول ۱-۱- برخی از تقارن‌ها و قوانین بقای مربوط به آنها

## ۴-۱ تقارن در جهان میکروسکوپی

### ۱-۴-۱ پارینه

اگر یک سیستم (مثلاً یک ذره یا گروهی از ذرات) به وسیله تابع موج توصیف شود عمل پارینه موجب تغییر علامت مختصات آن می‌شود:

$$P\psi(x) = \psi(-x)$$

اگر بنا باشد که سیستم تحت عمل پارینه تغییر نپذیرد بماند کمیت قابل مشاهده‌ای که نباید تغییر کند چگالی احتمال است که اساساً توسط مربع تابع موج داده می‌شود:  $\psi^*(-x)\psi(-x) = \psi^*(x)\psi(x)$ .

$$\psi(x) = \pm\psi(-x) \quad \text{بنابراین}$$

$$p\psi(x) = \pm\psi(x) \quad \text{همچنین}$$

اگر سیستم بخواهد تحت عمل پارینه ناوردا بماند تابع موج سیستم می‌تواند یا بدون تغییر بماند:

$$P\psi(x) = +\psi(x)$$

که در این حالت می‌گوییم سیستم یک حالت با پارینه زوج دارد. و یا تغییر علامت دهد:

$$P\psi(x) = -\psi(x)$$

که در این مورد می‌گوییم سیستم دارای یک حالت با پارینه فرد است. اگر نیروهای حاکم بر سیستم پارینه را معتبر بشمارد پارینه زوج نمی‌تواند به پارینه فرد تبدیل شود و بالعکس. اگر

عملگر پاریتته را دوباره اثر دهیم، به  $P^2 = I$  می‌رسیم. (آنگاه گروه پاریتته فقط شامل دو جزء  $P, I$  است.) در آن صورت ویژه مقدارهای  $P$ ،  $\pm 1$  می‌باشند. برای مثال اسکالرهای و شبه بردارها ویژه مقدار  $+1$  دارند، در حالی که بردارها و شبه اسکالرهای ویژه مقدار  $-1$  دارند. هادرونها ویژه حالت های  $P$  هستند و می‌توانند بر حسب ویژه مقدارشان طبقه بندی شود؛ همان گونه که با اسپین، بار، ایزواسپین، شگفتی و غیره طبقه بندی می‌شوند. بنابر نظریه میدان کوانتومی، پاریتته یک فرمیون (اسپین نیمه صحیح) بایستی با پادذره مربوط به آن متضاد باشد. در حالی که پاریتته یک بوزون (اسپین صحیح) با پادذره آن یکسان است. اگر کوارکها را با پاریتته ذاتی مثبت در نظر بگیریم، در نتیجه پاد کوارکها منفی هستند، پاریتته یک سیستم مرکب در حالت پایه اش برابر حاصلضرب پاریتته اجزای تشکیل دهنده آن است [۴ و ۵].

پاریتته یک مفهوم کاملاً کوانتومی است و همتای فیزیک کلاسیک ندارد. عمل پاریتته وقتی به عنوان تبدیلی روی سیستم مختصات اثر کند، سیستم راستگرد (RH) را به سیستم چپگرد (LH) تبدیل می‌کند. در سال ۱۹۲۷ ویگنر توانست نشان دهد که بقای پاریتته بر این واقعیت قرار دارد که تمام نیروهای درگیر در برهمکنشهای ذره‌ای از هر گونه تمایل چپ و راست آزاد هستند. یعنی در واقع هرچه طبیعت به شیوه چپ دستی انجام دهد، درست به همان کیفیت به شیوه راست دستی نیز می‌تواند انجام دهد. عملگرها تحت پاریتته می‌توانند زوج یا فرد باشند. مثلاً  $x$  و  $p$  هر دو تحت پاریتته فرد هستند، یعنی زمانی که پاریتته اثر می‌کند  $x$  را به  $-x$  و  $p$  را به  $-p$  تبدیل می‌کند. ولی پتانسیل برای تابع هامیلتونی تحت پاریتته زوج است یعنی  $V(x) = V(-x)$ . بنابراین پاریتته به طور کلی به این معناست که تصویر آینه‌ای هر فرآیند فیزیکی نیز یک فرآیند فیزیکی کاملاً ممکن را بیان می‌کند. تا قبل از سال ۱۹۵۶ میلادی تصور بر این بود که پاریتته بقا دارد و اصل بقای پاریتته بیان شده بود، ولی آشکارترین نقض در تقارن آینه‌ای زمانی پیدا شد که دانشمندان متوجه شدند که تصویر آینه‌ای یک نوترینو وجود ندارد. وجود تقارن آینه‌ای در برهمکنشهای قوی و الکترومغناطیسی به این معناست که پاریتته در تمام این برهمکنشها حفظ می‌شود. ولی معمای تاو و تا که در دهه ۵۰ مطرح شد نشان داد که پاریتته در برهمکنشهای ضعیف بقا ندارد. دو مزون شگفت که  $\theta$  و  $\tau$  نامیده می‌شوند از همه نظر جرم، اسپین، بار و ... دقیقاً یکسان ظاهر می‌شوند

به جز اینکه یکی از آنها به دو پایون و دیگری به سه پایون واپاشی می‌کند و پاریته آنها عکس یکدیگر است:

$$\begin{aligned} \theta^+ &\Rightarrow \Pi^+ + \Pi^0 & P = +1 \\ \tau^+ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Pi^+ + \Pi^0 + \Pi^0 \\ \Pi^+ + \Pi^+ + \Pi^- \end{array} \right\} & P = -1 \end{aligned} \quad (13-1)$$

نظریه‌ای که بوسیله لی و یانگ در سال ۱۹۵۶ بیان شد این بود که  $\theta$  و  $\tau$  در واقع یک ذره هستند که به  $K^+$  مشهور است و پاریته در یکی از واپاشیها بقا ندارد [۶و۵].

#### ۲-۴-۱ تقارن مزدوج بار

یک تقارن مفید دیگر در فیزیک ذرات تقارن در فرآیند بین تعویض ذرات با پادذرات است که با C نشان داده می‌شود. معنی این تقارن اینست که اگر قوانین فیزیکی رفتار یک مجموعه از ذرات را پیش بینی کنند دقیقاً همان رفتار را نیز برای مجموعه پادذرات متناظر پیش بینی خواهند کرد. مثلاً برخورد بین الکترون و پروتون دقیقاً به همان صورت برخورد پوزیترون و پادپروتون نظاره می‌شود. این تقارن به ذراتی از قبیل نوترون که بار الکتریکی ندارند نیز اعمال می‌شود. برهمکنش یک نوترون و پروتون دقیقاً به همان صورت برهمکنش یک پادپروتون و یک پادنوترون است. همانند آنچه در عمل پاریته داشتیم تابع موج یک سیستم می‌تواند تحت اثر عملگر مزدوج بار نیز زوج یا فرد باشد:

$$C\psi = \pm\psi \quad (14-1)$$

یک نمونه از این تقارن در تلاشی ذره به فوتونها از طریق نیروی الکترومغناطیسی مشاهده می‌شود. یک فوتون منفرد تحت تقارن C فرد است. بنابراین با مشاهده تلاشی یک ذره به دو فوتون می‌توان نشان داد که ذره تحت تقارن مزدوج بار، به صورت زوج عمل می‌کند و این به سادگی از روی ضرب تقارن های دو فوتون بدست می‌آید. به این ترتیب اگر تقارن C بخواهد محفوظ بماند ذره نمی‌تواند به حالت مزدوج بار فرد (مثلاً به سه فوتون) تلاشی یابد. بنابراین با مشاهده تلاشی یک

ذره به دو فوتون می‌توان نشان داد که ذره تحت تقارن مزدوج بار، به صورت زوج عمل می‌کند و این به سادگی از روی ضرب تقارن های دو فوتون  $(-1)^2$  بدست می‌آید [۷].

### ۳-۴-۱ تقارن وارونی زمان

بسیاری از سیستمهای فیزیکی در اثر وارون کردن زمان  $t \rightarrow -t$  تغییر ناپذیر می‌مانند. این امر هم در مورد سیستمهای کلاسیکی و هم در مورد سیستمهای کوانتومی صادق است. تقارن تحت وارون شدن زمان یعنی اینکه اگر سیستم بتواند از یک حالت اولیه به حالت نهایی تحول یابد ممکن است که با وارون کردن جهت حرکت تمام اجزاء سیستم از حالت نهایی تحول یابند و به حالت اولیه برگردند. این موضوع در روابط کلاسیکی همانطور که در جدول نشان داده شده کاملاً برقرار است. این مورد را برای حالت کوانتومی نیز بررسی می‌کنیم. اگر معادله شرودینگر به صورت زیر باشد:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \quad (15-1)$$

در این صورت فرض می‌کنیم  $\psi(x,t)$  یک جواب باشد، می‌توان نشان داد که  $\psi(x,-t)$  جواب این معادله نیست. ولی می‌توان نشان داد که  $\psi^*(x,-t)$  جواب است. بنابراین برای حالت کوانتومی باید با تبدیل  $t \Rightarrow -t$  ،  $\psi$  نیز به  $\psi^*$  تبدیل شود [۷].

رفتار تحت تقارن انعکاس زمانی	رفتار اصلی	کمیت مورد مشاهده
$t \rightarrow -t$	-	زمان
$r(t) \rightarrow r(-t)$	-	مکان
$V(t) \rightarrow V(-t)$	$V = \frac{dr}{dt}$	سرعت
$K(t) \rightarrow K(-t)$	$K = \frac{1}{2}mv^2$	انرژی جنبشی
$\theta(t) \rightarrow \theta(-t)$	-	زاویه
$\omega(t) \rightarrow -\omega(-t)$	$\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v}$	سرعت زاویه ای
$K(t) \rightarrow K(-t)$	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$	انرژی چرخشی

جدول ۱-۲- رفتار کمیتها تحت تقارن وارونی زمان

## ۱-۵ قضیه CPT

ترکیب سه عملگر وارونی زمان T، پاریتته P، و مزدوج بار C نظریه‌ای را به دنبال دارد که به قضیه CPT معروف است. این نظریه بیان می‌دارد که سه عملگر وارونی زمان، بار و پاریتته به هر ترتیب با یکدیگر ترکیب شوند یک تقارن دقیق برهمکنش همواره موجود است. به بیان ساده بنای یک نظریه میدان کوانتومی که در آن حاصلضرب CPT نقض می‌شود ناممکن است. یعنی تحت این تبدیلات CPT همه قوانین فیزیکی باید ناوردا باشد. در واقع این قضیه بیان می‌کند که اگر در فرآیندی CP نقض شود می‌بایست برای جبران آن T نیز نقض شود. نتیجه مهمی که گرفته می‌شود اینست که اگر این قضیه درست باشد هر ذره باید دقیقاً جرم و طول عمری مشابه با پادذره داشته باشد. به عنوان مثال، سیستمی از ذرات در یک سیستم مختصات می‌تواند به طور همزمان تحت اعمال پاریتته و مزدوج بار قرار بگیرد تا به این وسیله سیستمی از پادذرات را در یک سیستم مختصات چپگرد نشان دهد. اگر قوانین حاکم بر سیستم تحت عمل CP تغییر ناپذیر باشند هر دو سیستم دقیقاً به یک شکل رفتار خواهند کرد. همچنین می‌توان یک تقارن زوج یا فرد تحت تقارن کلی CP به هر حالت نسبت داد، با این الزام که سیستم به حالتی با همان تقارن تحول یابد. دلایل

کاملاً استوار بر این فرض که تقارنهای منفرد باید توسط نیروهای مختلف طبیعت محفوظ بمانند وجود ندارد. (یعنی اینکه باید تقارن بین یک فرآیند و تصویر آینه‌ای آن و بین یک فرآیند و پاد فرآیند آن وجود داشته باشد). همانطور که اشاره شد پیامدهای قضیه CPT عبارتست از اینکه ذرات و پادذرات آنها باید دقیقاً جرمها و طول عمرهای برابر داشته باشند و آنچه همواره مشاهده شده نیز چنین بوده است. و نتیجه دیگر اینست که اگر هر تقارن منفرد (یا جفت تقارن) بشکند، همانطور که ذکر شد می‌بایست یک عدم تقارن جبران کننده در بقیه عملها وجود داشته باشد تا آنرا خنثی و به این ترتیب تقارن مطلق تحت CPT را تضمین کند [۵ و ۸].

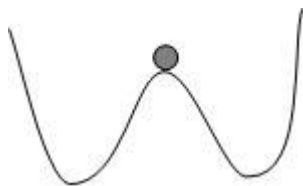
## ۱-۶ نظریه پیمانه‌ای

پیمانه ترجمه واژه Gauge می‌باشد. پیمانه کردن چیزی به جز اندازه گیری نیست. بنابراین برقرار کردن پیمانه به معنی مشخص کردن معیاراندازه گیری است. (که باید اندازه اش ثابت باقی بماند در غیر این صورت کل ایده اندازه گیری بی معنی خواهد شد). البته "وایل" این امکان را در نظر گرفت که طول معیار وقتی آن را از نقطه‌ای به نقطه دیگر ببریم تغییر نکند. چنین تغییر مکانی را تغییر موضعی پیمانه نامید و تغییراتی را که در همه جا یکسان باشد تغییرات عمومی پیمانه معرفی کرد. در نگاه اول چنین به نظر می‌رسد که تغییر موضعی پیمانه اهمیت چندانی در فیزیک ندارد اما نظریه الکترومغناطیس ماکسول دارای چنین خاصیتی است. اگر برهمکنشهای ضعیف را بررسی کنیم مشکلی بوجود می‌آید؛ اینکه این میدان کوتاه برد است. در نتیجه باید ذره تبدالی بر جرمی وجود داشته باشد. از طرفی در نظریه "یانگ میلز" اثبات شده بود که ذرات تبدالی بی جرم هستند که برای رفع آن یا باید عملاً جرمی اضافه می‌کردند یا به طور خلاصه یک جمله وابسته به جرم به معادلات اضافه می‌شد ولی در آن صورت ناوردایی پیمانه‌ای نظریه از بین می‌رفت. سرانجام گلاشو و سلام هر دو به این نتیجه رسیدند که تحول اساسی مورد نیاز است و باید راهی جستجو شود که بدون در هم ریختن ناوردایی پیمانه‌ای ذرات پیمانه‌ای را دارای جرم می‌کرد. این تحول اساسی شکست خودبخودی تقارن بود؛ که موضعی بودن آن باعث بوجود آمدن ذره تبدالی بر جرم (به جرم هیگز) شد [۵، ۹، ۱۰].

## ۱-۷ شکست خودبخودی تقارن

شکست تقارن در واقع به این معنی است که یک سیستم تقارن اجزای داخلی خود را شکسته است. این شکست به این معنا نیست که سیستم کاملاً از حالت تقارن خارج شده است بلکه به این معنی است که به یک زیر گروه متقارن تبدیل شده است. این شکست تقارن در خیلی از مسائل فیزیکی برای ما خیلی مهمتر از زمانی است که سیستم به طور کامل متقارن است.

به طور کلی می‌توان گفت که تقارن آنقدر ارزشمند است که حتی در هنگام شکسته بودن نیز می‌تواند مفید باشد. بدست آوردن پاسخهای نامتقارن (یعنی بوزونهای  $W$  پر جرم) از یک نظریه متقارن (یعنی از نظریه ناوردایی پیمانهای) در بسیاری از شاخه‌های فیزیک متداول است. مثلاً میدان مغناطیسی یک آهنربا بوضوح جهت ارجحی را در فضا تعریف و مشخص می‌کند؛ یعنی دارای تقارن دورانی شکسته است. اما معادلات ناظر بر حرکات اتمهای منفرد تماماً متقارنند. چگونه چنین چیزی اتفاق افتاده است؟ پاسخ در این حقیقت نهفته است که حالت متقارن حالتی با حداقل انرژی نیست و سیستم در فرآیند تحول به سوی حالت حداقل انرژی تقارن داخلی خود را شکسته است. مثلاً شکل زیر را در نظر بگیرید:



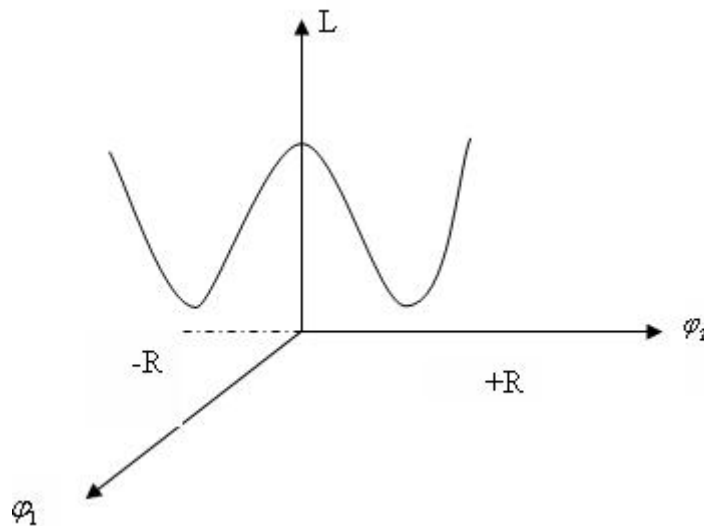
شکل ۱-۱- شکل نشان می‌دهد که گلوله در بالای قسمت برآمده دارای یک تقارن ناپایدار است.

حالت متقارن در بالای قسمت برآمده است. اما این حالت حداقل انرژی نیست. یک اغتشاش کوچک گلوله را به درون گودی خواهد فرستاد که در آنجا سیستم حداقل انرژی را دارد و در عین حال از نظر دورانی نامتقارن است.

اکنون می‌خواهیم این عقاید را در مورد نظریه ذره‌ای به کار ببریم و ببینیم که یک تقارن پیمانه‌ای شکسته چه ربطی به جرم پیدا می‌کند. نخست به بررسی تقارن شکسته همه جایی<sup>۱</sup> می‌پردازیم. تابع موج ذره‌ای فرضی متشکل از دو مولفه را در نظر می‌گیریم. همانطور که تابع موج

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \quad \text{نوکلتون را متشکل از اجزاء پروتون و نوترون در نظر می‌گیریم:}$$

حال شکل ته ظرف مثال قبلی خود را انتخاب می‌کنیم. مطابق مدل زیر محورهای  $\varphi_1$  و  $\varphi_2$  مقادیر توابع موج ذره را نشان می‌دهند. می‌بینیم که انرژی روی دایره  $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = R^2$  حداقل است. منظور از  $L$  لاگرانژی است که انرژی برهمکنش بین  $\varphi_1$  و  $\varphi_2$  را به شیوه فرضی، یکسان مشخص می‌کند.



شکل ۱-۲- توابع موج ذره که روی محورها نشان داده شده است.

در اینجا فعلاً با تبدیلات همه‌جایی سر و کار داریم:

$$GL(\varphi_1, \varphi_2) \Rightarrow L(\varphi'_1, \varphi'_2) \quad (۱۶-۱)$$

حالت حداقل انرژی با توابع موج صفر را در نظر می‌گیریم. در این صورت:

$$\varphi'_1 = \varphi_1$$

$$\varphi'_2 = \varphi_2 + R$$

اگر لاگرانژی را برحسب توابع موج جدید بنویسیم می‌بینیم که تحت گروه  $G$  ناوردا نیست، چون

<sup>۱</sup> global



پتانسیل حول R متقارن نیست و در ضمن  $\varphi'_2$  ذره‌ای با جرم مربوط به R و  $\varphi'_1$  ذره‌ای بی جرم است؛ در نتیجه ناوردایی پیمانهای لاگرانژی شکسته شده به یکی از ذرات جرم نسبت داده می‌شود در حالیکه دیگر ذرات بی‌جرمند. متأسفانه آنچه بدین شکل در مدل توصیف شده بدست می‌آید استفاده چندانی ندارد.

حال به بررسی شکست تقارن موضعی<sup>۱</sup> می‌پردازیم. می‌بینیم که پاسخ خوبی خواهد داد. لاگرانژی اصلی معرف انرژی برهمکنش را در نظر می‌گیریم. با این الزام که در تبدیلات پیمانهای موضعی تغییر ناپذیر باشد یعنی:

$$G(x)L(\varphi_1, \varphi_2, A) \Rightarrow L(\varphi'_1, \varphi'_2, A') \quad (17-1)$$

در اینجا A ذره پیمانهایست که عامل برقراری ارتباط بین  $\varphi_1$  و  $\varphi_2$  است. مانند حالت قبل توابع موج را طوری انتخاب می‌کنیم که محورهایی که تابع موج آنها صفر است از نقطه حداقل انرژی عبور کنند. در این گام نهایی حادثه در خور توجهی رخ می‌دهد. عبارات توصیف کننده ذره پیمانهای بی‌جرم اصلی با عدد R چنان در می‌آمیزد که یک جمله جرمی بوجود می‌آورد در حالیکه بوزون  $\varphi'_1$  گلدستون چنان در ذره پیمانهای جذب می‌شود که مفهوم فیزیکی خود را از دست می‌دهد. اولین قدم در این راه توسط هیگز در سال ۱۹۶۴ برداشته شد و بوزونهای W از یک نظریه تغییر ناپذیری پیمانهای اصلی صاحب جرم شدند. تنها بهایی که برای این موفقیت باید پرداخت شود حضور ذرات پرجرم  $\varphi$  (ذره هیگز) است که مشاهده آن تایید بزرگی بر عقیده شکسته شدن تقارن خواهد بود [۱، ۴، ۵].

## ۸-۱ مدل استاندارد

مدل استاندارد فیزیک ذرات در مرحله مهمی از تاریخچه خود قرار دارد؛ هم در اوج موفقیت و هم در مرز تحول. قرن‌ها بعد از آغاز تحقیق روی بخش‌های بنیادی که زیبایی و پیچیدگی جهان را می‌سازند، امروزه به نتیجه شگفت‌انگیز و ساده‌ای رسیده ایم؛ فقط شش ذره: الکترون، کوارک‌های بالا و پایین، گلوئون<sup>۲</sup>، فوتون و بوزون هیگز. برای توضیح همه پدیده‌هایی که فیزیکدانان می

<sup>1</sup> local

<sup>2</sup> gluon

داند اضافه کردن یازده ذره دیگر به جمع ذرات گفته شده کافی است. اینها تصوراتی شبیه تصورات یونانیان قدیم نیست که می گفتند جهان از چهار عنصر خاک، هوا، آب و آتش تشکیل شده است. بلکه این نتایج از پیچیده ترین نظریه ریاضی در مورد طبیعت در طول تاریخ یعنی مدل استاندارد فیزیک ذرات حاصل شده است. به رغم معنی کلمه مدل، مدل استاندارد یک نظریه کامل برای شرح ذرات پایه و توضیح برهمکنش آنهاست. همه آنچه در دنیای ما رخ می دهد (به جز اثرهای گرانشی) قابل بیان با قوانین و معادلات مدل استاندارد است.

مدل استاندارد در دهه ۱۹۷۰ فرمول بندی شد و در اوایل دهه ۱۹۸۰ آزمایشها به طور نسبی درست بودن آن را نشان دادند. نزدیک به سه دهه آزمایش های دقیق و موشکافانه نظریه را آزموده اند و تایید کرده اند که همه پیش بینی های نظریه درست است. از یک سو این موفقیت ارزشمند است زیرا تایید می کند (در عمیق ترین سطح اش تا کنون) که ما واقعاً چگونگی کارکرد طبیعت را درک می کنیم. از سوی دیگر این موفقیت دلسرد کننده است. قبل از پیدایش مدل استاندارد، فیزیکدانها برای نظریه جدید منتظر کشف ذرات جدید با نشانه های جدید در مشاهدات تجربی بودند، قبل از اینکه نظریه قبلی قدیمی شود، اما برای مدل استاندارد آنها سی سال منتظر ماندند تا مشاهدات نظریه را تایید کنند. انتظارها به زودی به سر می رسد. آزمایشاتی که می توانند برخوردهایی تولید کنند با انرژی های بالاتر از قبل یا با دقت بالاتر برای پدیده های خاص بر لبه پیشرو مدل استاندارد قرار دارند. این نتایج مدل استاندارد را باطل نخواهند کرد. بلکه با کشف ذرات جدید و نیروهای توضیح داده نشده باعث پیشرفت آن خواهند شد. مهم ترین آزمایش توسط برخورد دهنده تواترون<sup>۱</sup> کارا تر شده شتاب دهنده فرمی در باتاویای ایلینویز انجام می شود که ارائه اطلاعات<sup>۲</sup> را از سال ۲۰۰۱ آغاز کرده است. این آزمایش قرار است به طور مستقیم ذرات گریز پایی که مدل استاندارد را کامل می کنند (بوزون هیگز) و آنهایی را که توسط نظریه های تکامل یافته تر پیش بینی می شوند ابر همزادها<sup>۳</sup> یا ذرات شناخته شده تولید کند. اطلاعات قابل ملاحظه ای هم از کارخانجات B می رسد، کارخانجات B برخورد دهنده هایی در کالیفرنیا و ژاپن هستند که برای تولید کوارک های b (یکی از یازده ذره اضافی) و پادذره آنها طراحی شده اند تا برای بررسی

---

<sup>1</sup> Tevatron

<sup>2</sup> Data

<sup>3</sup> SuperPartner

پدیده شکست تقارن CP استفاده شوند. Charge-Parity(CP) تقارنی مربوط به ذرات و پادذرات است و شکست آن به این معنی است که پادذرات دقیقاً منعکس کننده رفتار ذرات نیستند. مقدار شکست تقارن CP که در آزمایشگاه دیده شده است با مدل استاندارد تطبیق دارد، اما دلایلی وجود دارد که مقادیر بیشتری شکست تقارن CP قابل تولید است. فیزیک بعد از مدل استاندارد این مقدار شکست اضافی تقارن CP را می تواند تولید کند [۱۰ و ۹].

فیزیکدانان همچنین خواص دقیق الکتریکی و مغناطیسی ذرات را بررسی می کنند. مدل استاندارد پیشگویی می کند که الکترون ها و کوارک ها مانند آهنرباهای بسیار ریزی با قدرت مشخصی رفتار می کنند و اینکه رفتار آنها در یک میدان الکتریکی از روی بار الکتریکی آنها کاملاً مشخص می شود. اغلب بسط های مدل استاندارد قدرت مغناطیسی و رفتار الکتریکی پیش بینی می کنند که با مدل استاندارد کمی متفاوت است. آزمایش ها جمع آوری اطلاعات را با دقت کافی آغاز کرده اند تا این اثرهای پیش بینی شده خیلی کوچک را ببینند.

خارج از زمین دانشمندان به دنبال پیدا کردن نوترینو های خورشیدی و نوترینوهای امواج کیهانی هستند. اینها ذرات شبیح گونه ای هستند که به ندرت برهمکنش می کنند و به تازگی جرم دار بودن آنها اثبات شده است. این نتیجه ای بود که توسط نظریه بسط یافته مدل استاندارد پیش بینی شده بود. دور بعدی آزمایش ها شکل نظریه ای را که برای توصیف نوترینوهای جرم دار مشاهده شده است، روشن خواهد کرد. به علاوه آزمایش هایی برای مشاهده ذرات مبهم تشکیل دهنده ماده تاریک سرد جهان و بررسی چگونگی واپاشی نوترون با دقت خیلی بالا در راه است. موفقیت در هر یک از برنامه ها نشانه ای برای فیزیک بعد از مدل استاندارد است.

این تحقیق ها فیزیک ذرات را با اطلاعات غنی راهنمایی می کند. حدود سال ۲۰۰۸ برخورد دهنده هادرونی بزرگ<sup>۱</sup> وارد عمل می شود. این برخورد دهنده ابزاری با محیط ۲۷ کیلومتر در سرن<sup>۲</sup> در حال ساخت است ( سرن آزمایشگاه اروپایی برای فیزیک ذرات نزدیک به ژنو است). کامل کننده نتیجه LHC که یک برخورد دهنده پوزیترون - الکترون خطی ۳۰ کیلومتری است هم مراحل طراحی را پشت سر می گذارد. با توجه به اشارات دیده شده برای فیزیک فراتر از مدل

---

<sup>1</sup> LHC  
<sup>2</sup> CERN

استاندارد خبرهایی به گوش می رسد مبنی بر اینکه مدل استاندارد غلط است و باید خود را برای دور ریختنش آماده کنیم، اما این روش درستی نیست [۹ و ۱۰].

مثال معادلات ماکسول را در نظر بگیرید. این معادلات اواخر قرن نوزدهم برای توضیح نیروی الکترومغناطیسی نوشته شدند. در اوایل قرن بیستم فهمیدیم که برای اندازه های اتمی احتیاج به نسخه کوانتومی معادلات ماکسول داریم. بعدها دیدیم که معادلات ماکسول کوانتومی جزئی از معادلات به دست آمده از مدل استاندارد هستند. به هر صورت ما نمی گوئیم معادلات ماکسول غلط هستند، آنها گسترش یافته اند؛ (هنوز هم از آنها برای فناوری های الکترونیکی بی شماری استفاده می شود). مدل استاندارد در تالار افتخاراتش ۱۷ ذره و چند متغیر آزاد - مقادیری مانند جرم ذرات و قدرت برهم کنش ها - دارد. این متغیرها می توانند هر مقداری داشته باشند و ما فقط با آزمایش می توانیم مقدار صحیح آنها را تعیین کنیم. گاهی منتقدان متغیر های زیاد مدل استاندارد را با نظریه های قرون وسطی برای توصیف مدار سیارات، مقایسه می کنند. آنها تصور می کنند مدل استاندارد قدرت پیشگویی محدودی دارد، یا اینکه محتوای دلخواهی دارد و یا اینکه می تواند فقط با میزان کردن چند مقدار هر چیزی را توضیح دهد.

اما عکس این مسئله صحیح است: یک بار که جرم ها و قدرت های برهمکنش در فرایند اندازه گیری شدند مقدار آنها برای همه آزمایش ها و برای همه نظریه مشخص شده است و دیگر هیچ تغییری مجاز نیست. علاوه بر این امروزه شکل دقیق همه معادلات مدل استاندارد توسط نظریه مشخص شده است. همه مقادیر غیر از جرم بوزون هیگز اندازه گیری شده است. قبل از دستیابی به مدل هایی فراتر از مدل استاندارد، تنها چیزی که می تواند تغییر کند، دقت اطلاعات ما از مقادیر با توجه به نتایج جدید است و هر چه در این مسیر بیشتر پیشرفت می کنیم دستیابی به دقت های بیشتر ساده تر که نمی شود؛ مشکل تر هم می شود: برای اینکه همه اطلاعات تجربی همچنان با یکدیگر سازگار باقی بمانند، مقادیر اندازه گیری شده باید تا حد بالاتری از دقت با یکدیگر همخوانی داشته باشند. شاید به نظر برسد اضافه کردن ذرات و برهمکنش های دیگر برای تقویت مدل استاندارد، آزادی های بیشتری ایجاد می کند، اما لزوماً این طور نیست. جذاب ترین گزینه

برای پیشرفت مدل استاندارد؛ مدل استاندارد ابرتقارنی حداقلی<sup>۱</sup> است. ابرتقارن به هر ذره ای یک ذره ابرهمراه<sup>۲</sup> ابرتقارنی نسبت می‌دهد. در مورد جرم این ذرات ابرتقارنی مطالب کمی می‌دانیم، اما برهمکنش‌های آنها توسط ابر تقارن مقید شده‌اند. هنگامی که جرم‌ها اندازه‌گیری شوند، پیش‌بینی‌های MSSM به علت روابط ریاضی ابر تقارن مفیدتر از مدل استاندارد خواهد بود [۱۰ و ۹].

حال این سوال پیش می‌آید که اگر کارکرد مدل استاندارد چنین عالی است، چرا باید آن را بسط داد؟ یک نکته مهم در این باره وقتی خود را نشان می‌دهد که ما به دنبال هدف قدیمی وحدت نیروهای طبیعت بگردیم. در مدل استاندارد می‌توانیم نیروها را برون‌یابی کنیم و بررسییم که رفتار آنها در انرژی‌های بالاتر چگونه است. برای مثال نیروها در دماهای بسیار بالا درست لحظاتی بعد از انفجار بزرگ<sup>۳</sup> چگونه بوده‌اند؟ در انرژی‌های پایین نیروی قوی حدود ۳۰ برابر قوی‌تر از نیروی ضعیف و بیش از ۱۰۰ برابر قوی‌تر از نیروی الکترومغناطیسی است. وقتی برون‌یابی کنیم متوجه می‌شویم که قدرت این نیروها بسیار به هم نزدیک می‌شود، اما هیچ‌گاه دقیقاً برابر نیست. اگر مدل استاندارد را به MSSM بسط دهیم نیروها در انرژی خاصی که بسیار زیاد است دقیقاً یکی می‌شوند. حتی نیروی گرانشی در انرژی‌های باز هم بالاتر به همان قدرت نیروهای دیگر می‌رسد که نشان‌دهنده ارتباط بین نیروهای مدل استاندارد و نیروی گرانشی است. چنین دستاوردهایی سرخ‌های مهمی به دست می‌دهد که از MSSM حمایت می‌کند. دلایل دیگر برای لزوم بسط مدل استاندارد از پدیده‌هایی ناشی می‌شود که نمی‌توان آنها را شرح داد و یا حتی سازگار کرد، از جمله [۱۰ و ۹]:

۱ - همه نظریه‌های امروزی به طور ضمنی بیان می‌کنند که جهان باید حتی در خالی‌ترین مناطق آن شامل تراکم شدید انرژی باشد. اثرات گرانشی این پدیده که آن را انرژی خلأ می‌نامند، یا می‌بایست جهان را مدت‌ها پیش در هم تنیده باشد یا باعث گسترش آن به مقداری بسیار بیش از اندازه کنونی شده باشد. مدل استاندارد نمی‌تواند برای فهمیدن این نکته که مسئله ثابت کیهان‌شناسی نامیده می‌شود، کمکی بکند.

---

<sup>1</sup> Standard Model Minimal Supersymmetry

<sup>2</sup> Superpartner

<sup>3</sup> Big bang

۲ - مدت های دراز بر این گمان بوده‌اند که انبساط عالم بسیار آهسته است، چون مواد تشکیل دهنده جهان تحت جاذبه گرانشی یکدیگر هستند. در حال حاضر ما می دانیم که گسترش جهان شتاب دار است و آنچه باعث این شتاب است ( و انرژی تاریک نام دارد ) در فیزیک مدل استاندارد جایی ندارد.

۳ - دلایل بسیار خوبی وجود دارد که در اولین کسرها ی ثانیه از انفجار بزرگ، جهان در مرحله انبساط بسیار سریعی به نام مرحله تورم قرار داشته است . میدان هایی که می توانسته اند تورم را ایجاد کنند در محدوده مدل استاندارد قرار نمی گیرند.

۴ - اگر جهان با انفجار بزرگ یعنی انفجار مقدار عظیمی انرژی آغاز شده باشد، باید سهم ماده و پاد ماده در آن مساوی می بود، (تقارن CP). اما ستاره ها و سحابی ها از پروتون ها و نوترون ها و الکترونها تشکیل شده اند و نه پاد ذرات آنها ( پادماده متناظرشان ). این نامتقارنی در ماده با مدل استاندارد قابل توجیه نیست.

۵ - حدود یک چهارم جهان ماده تاریک سرد و غیر قابل مشاهده است که خارج از قلمرو ذرات مدل استاندارد قرار دارد.

۶ - در مدل استاندارد برهمکنش با میدان هیگز ( که به بوزون هیگز مربوط می شود ) باعث جرم دار شدن ذرات می شود. مدل استاندارد نمی تواند ساختار بسیار خاص برهمکنش هیگز را توضیح دهد.

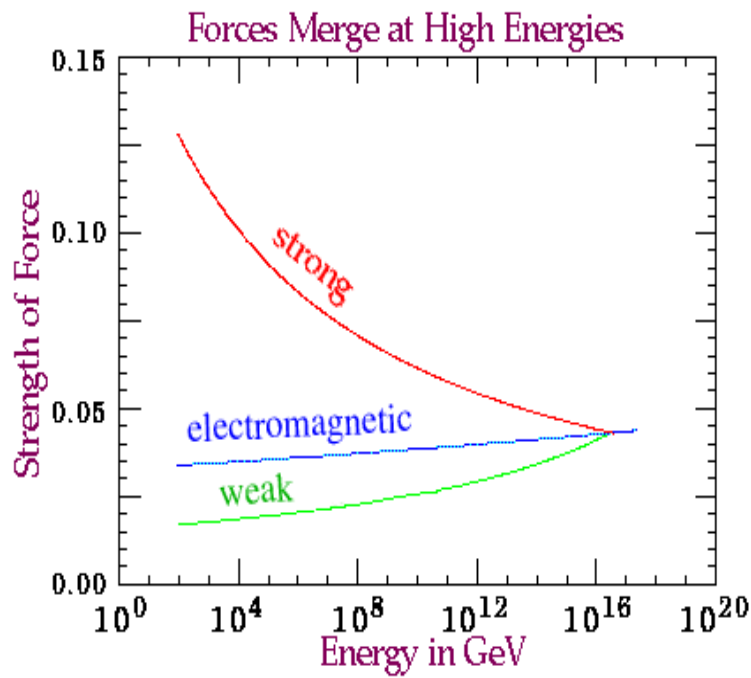
۷ - تصحیحات کوانتومی به وضوح برای بوزون هیگز جرم بزرگی را محاسبه می کنند که نتیجه آن جرم بسیار زیاد برای همه ذرات است . مدل استاندارد نمی تواند از چنین مشکلی اجتناب کند و در نتیجه مشکلات مفهومی مهمی را به وجود می آورد.

۸ - مدل استاندارد نمی تواند گرانش را در بر گیرد، زیرا ساخت این نیرو با سه نیروی دیگر یکسان نیست.

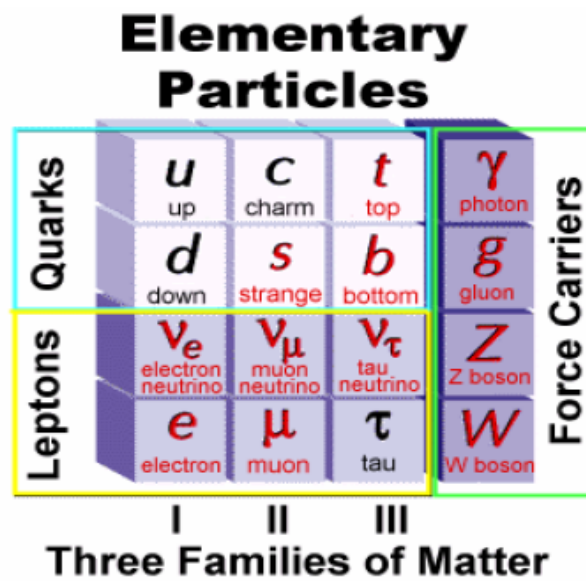
۹ - مقدار جرم کوارک ها و لپتونها ( مثل الکترون نوترینوها) را نمی توان به وسیله مدل استاندارد توجیه کرد.

۱۰- مدل استاندارد دارای سه فرایند تولید ذرات است. جهان پیرامون ما فقط از ذرات فرایند اول پر شده و این فرایند خودش به تنهایی یک نظریه سازگار ایجاد می کند. مدل استاندارد هر سه فرایند را توصیف می کند، اما نمی تواند توضیح دهد که چرا بیشتر از یک فرایند وجود دارد.

در توضیح این مسئله لازم به ذکر است، وقتی می گوییم مدل استاندارد نمی تواند پدیده ای را توجیه کند، منظور این نیست که نظریه تا کنون نتوانسته است آن را توجیه کند، ولی روزی خواهد توانست. بلکه مدل استاندارد بسیار مقید است و هرگز نخواهد توانست پدیده های فهرست شده بالا را توضیح دهد. تفسیرهای احتمالی وجود دارد. یکی از دلایلی که توجه به نظریه ابرتقارن را برای بسیاری از فیزیکدانها جذاب میکند، این است که این نظریه می تواند توضیحی را برای موارد بالا، غیر از مورد دوم و سه تای آخر ارائه دهد. نظریه ریسمان (که در آن ذرات به جای موجودات نقطه ای، موجودات یک بعدی بسیار کوچک هستند) سه تای آخر را توضیح می دهد. اینکه مدل استاندارد نمی تواند به سئوالاتی جواب دهد، چندان عجیب نیست. هر نظریه موفقی در علم تعداد پاسخ به پرسش ها را افزایش می دهد ولی هنوز سئوالات بدون پاسخی هم وجود دارند. بنابراین به طور خلاصه می توان گفت: قبلا این طور تصور می شد که پروتون و نوترون ذرات بنیادی هستند و دارای یک ساختار داخلی نیستند، ولی امروزه می دانیم که نوکلئونها یعنی پروتون ها و نوترون ها خود از ذرات کوچکتری ساخته شده اند که کوارک نامیده می شود. در دهه های اخیر فیزیکدانان یک مدل تحت عنوان مدل استاندارد ارائه کردند که یک چهارچوب نظری برای فهم ذرات بنیادی و نیروهای طبیعت فراهم آوردند. مدل استاندارد شامل دوازده ذره فرمیون با اسپین نیمه صحیح که ۶ تای آنها کوارک و ۶ تا لپتون و چهار ذره بوزون با اسپین یک هستند و یک هیگز بوزون با اسپین صفر که هنوز مشاهده نشده است. ذره هیگز اولین بار در سال ۱۹۶۰ توسط پتر هیگز وارد فیزیک شد و یک ذره فرضی موجود در همه میدان های کوانتومی است که نشان می دهد سایر ذرات چگونه جرم بدست می آورند. ذره هیگز به این دلیل وارد مدل استاندارد می شود تا این مدل از نظر ریاضی سازگار باشد. در واقع مدل استاندارد نظریه ای است که کوارکها، لپتونها و برهمکنش های آنها را توصیف می کند. مدل استاندارد سه تا از چهار تا نیروی اساسی موجود در طبیعت را توضیح می دهد. قدرت این نیروها در نمودار زیر نشان داده شده است [۵، ۶، ۷، ۹، ۱۰، ۱۱].



شکل ۱-۳- قدرت نیروهای موجود در طبیعت



شکل ۱-۴- سه خانواده ماده که در مدل استاندارد شرح داده می شود .



## ۱-۹ ذره هیگز

فیزیکدانها به شدت روی مدل های فراتر از مدل استاندارد کار می کنند تا پاسخ این معماها را بیابند، اما یک مسئله اساسی از خود مدل استاندارد هنوز حل نشده باقی مانده است. این نظریه برای جرم دار کردن لپتونها، کوارکها و بوزون های  $W, Z$  به میدان هیگز وابسته است در حالی که ذره هیگز هنوز به طور مستقیم دیده نشده است. هیگز اساساً شبیه میدان های دیگر نیست. برای فهم این موضوع، میدانهای الکترومغناطیسی را در نظر بگیرید. بارهای الکتریکی باعث میدان های الکترومغناطیسی می شوند. مانند آن میدانهای الکترومغناطیسی در اطراف ما وجود دارد. هر ناحیه ای از فضا وقتی که میدان الکترومغناطیسی در آن صفر باشد کمترین مقدار انرژی خود را دارد. میدان صفر در غیاب ذرات باردار حالت طبیعی است. اما شگفت آور آن است که مدل استاندارد ایجاب می کند حالت کمترین انرژی وقتی اتفاق بیفتد که میدان هیگز مقدار غیر صفر داشته باشد. در نتیجه میدان غیر صفر هیگز دنیا را پر کرده است و ذرات همیشه هنگام عبور از آن با آن برهمکنش می کنند، گذر ذرات از درون آن میدان مانند حرکت انسان درون آب است. برهمکنش به آنها جرم و اینرسی می دهد. بوزون هیگز به موضوع میدان هیگز مربوط می شود. در مدل استاندارد، از روی اصول اولیه نمی توان جرم ذرات و از جمله جرم خود بوزون هیگز را پیش بینی کرد. با وجود این، با اندازه گیری متغیرهای دیگر می توان جرم این ذرات را اندازه گرفت، همچنان که جرم بوزون های  $W, Z$  و کوارک بالا<sup>۱</sup> را به این روش بدست آوردند. آن پیش بینی ها تایید شدند و اطمینان به فیزیک هیگز را افزایش دادند. آزمایشگرها در برخورد دهنده LEP حدود بیست کمیت را که توسط مدل استاندارد به هم مربوط می شوند، اندازه گرفته اند. هم اکنون همه مقادیر مورد نیاز برای محاسبه پیش بینی آن کمیت ها اندازه گیری شده اند، به جزء جرم بوزون هیگز. بنابراین می توان برعکس کار کرد و از روی اطلاعات بدست آمده پرسید که چه جرمی برای هیگز بیشترین سازگاری را با این بیست کمیت دارد. جواب این است: جرم هیگز کمتر از ۲۰۰ گیگا الکترون ولت است. جرم پروتون حدود ۹ گیگا الکترون ولت و کوارک بالا ۱۷۴ گیگا الکترون ولت است که خود دلیل قاطعی برای وجود هیگز است. اگر هیگز وجود نداشته باشد و

---

<sup>1</sup> top

مدل استاندارد اشتباه باشد، ارتباط این بیست کمیت به همراه ذره هیگز با جرم دقیقاً معین اتفاق چشمگیری است. اطمینان ما وقتی بیشتر می‌شود که بدانیم رهیافت مشابهی برای پیش بینی دقیق جرم کوارک بالا قبل از مشاهده مستقیم آن طی شده است [۹،۱۰ و ۱۱].

## ۱-۱۰ ابرتقارن

حدود ۲۵ قرن پیش یونانیان ایونی استدلال می‌کردند که پیچیدگی ظاهری عالم را می‌توان به کمک چند قانون اساسی درک کرد. در جهت تحقق این هدف پیشرفت‌های شایانی صورت گرفته است. به نظر می‌رسد که سازنده‌های اصلی ماده مشخص شده است. تعداد معدودی نیرو را می‌توان مسئول رفتار کلیه اشکال ماده از ذرات ریز اتمی گرفته تا کهکشانها دانست. با وجود این برای تشریح کامل قوانین طبیعت هنوز نیاز به بصیرت بیشتری داریم. در دهه گذشته تعداد زیادی فیزیکدان نظری به صورتی گسترده روشی را بررسی کرده‌اند که ابرتقارن نامیده می‌شود. نظریه‌های ابرتقارنی از کشفیات موفق سالهای گذشته برای ساختن نظریه‌های جدید و جامع‌تر استفاده می‌کنند و آنها را بسط می‌دهند. این نظریه‌ها پیشگوییهای آزمودنی نیز می‌کنند.

شاید مناسبترین نقطه برای ورود به مفهوم ابرتقارن تصویر استاندارد سازنده‌های بنیادی ماده باشد. تمام مواد تشکیل شده‌اند از مولکولها که آنها نیز به نوبه خود متشکل از اتمها هستند. اتم تشکیل شده است از تعدادی پروتون و نوترون که در هسته با یکدیگر پیوند دارند و اطراف هسته را " ابری " از الکترونها احاطه کرده است. هر عنصر را با تعداد پروتون هایش مشخص می‌کنند. تا همین اواخر چنین می‌اندیشیدند که پروتون‌ها و نوترون‌ها ذراتی بنیادی‌اند. آزمایش‌هایی که در دو دهه گذشته با شتابدهنده‌های پر انرژی انجام شده روشن کرده است که چنین نیست؛ به نظر می‌رسد که پروتون‌ها و نوترون‌ها از ذراتی بنیادی‌تر به نام کوارک تشکیل شده‌اند. مشاهده شده است که کوارکها حامل کسری ( $\frac{2}{3}$  یا  $-\frac{1}{3}$ ) از بار الکتریکی پروتون‌ها هستند. شش " طعم " یا شش نوع کوارک وجود دارد. آنها را بالا، پایین، افسون، شگفت، سر و ته نامیده‌اند. انتظار نمی‌رود یک تک کوارک را بشود مجزا کرد یا به تنهایی مشاهده کرد. کوارکها همیشه جزئی از ذرات مرکبی هستند که هادرون نامیده می‌شوند. صدها هادرون شناسایی و فهرست شده‌اند. آنها

شامل پروتون و نوترون و نیز ذرات نا آشناتری نظیر پیون و کائون اند. مثلاً، پروتون ترکیبی است از دو کوارک بالا و یک کوارک پایین و و نوترون ترکیبی است از یک کوارک بالا و دو کوارک پایین. به عنوان یک تشبیه مناسب می توان کوارکها را شبیه به دو انتهای یک ریسمان دانست. هادرونها را کل ریسمان در نظر گرفت که شامل کوارکها نیز هست. فرض کنید بخواهیم با برخورد دادن دو هادرون کوارکی را مجزا کنیم. اگر پس از برخورد یک کوارک بخواهد فرار کند ریسمان را خواهد کشید و آن را پاره خواهد کرد. این امر به تولید ریسمانهای بیشتر یعنی هادرونهای بیشتر می انجامد ( که اکثراً پیون اند، زیرا آنها سبکترین هادرون ها هستند. ) برعکس پروتون و نوترون، به نظر می رسد الکترون ذره بنیادی باشد. در واقع الکترونها جزء خانواده دیگری از به اصطلاح ذرات بنیادی اند که لپتون نامیده می شوند. لپتونها نیز شش طعم دارند: الکترون، میون، ذره تاو، نوترینوی الکترون، نوترینوی میون و نوترینوی تاو. تمام برهمکنش های میان لپتونها و کوارکها را می توان در اثر چهار نوع نیرو دانست: گرانش، الکترومغناطیسی، نیروی قوی و نیروی ضعیف. نیروی الکترومغناطیسی الکترونها و هسته ها را به یکدیگر می پیوندد و اتمها را می سازد. اتمها اگر چه از نظر الکتریکی خنثی هستند، از طریق یک نیروی الکترومغناطیسی باقیمانده بر هم کنش می کنند و مولکولها را تشکیل می دهند. نیروی قوی کوارکها را به هم پیوند می دهد تا پروتونها، نوترونها و تمام هادرونهای دیگر را بسازند، و نیروی قوی باقیمانده میان پروتونها و نوترونها همان نیروی هسته ای است که نوکلئونها را در داخل هسته به هم پیوند می دهد. نیروی ضعیف عامل پدیده هایی است مثل بعضی از واپاشیهای هسته ای و جنبه هایی از فرآیند همجوشی، که این فرایند اخیر عامل رها شدن انرژی از خورشید است. در واقع فقط سه نوع نیروی بنیادی وجود دارد. دستاورد بزرگ دو دهه گذشته این بوده است که نشان داده شد نیروی الکترومغناطیسی و نیروی ضعیف تجلیات نیروی واحدی هستند، که نیروی الکتروضعیف نامیده می شود. قدرت این نیروها خیلی متفاوت است. مثلاً قدرت نیروی الکترومغناطیسی میان دو پروتون  $10^{36}$  برابر بیشتر از قدرت نیروی گرانشی میان آنهاست. این نیروها در اثر مبادله تعدادی ذره منتقل می شوند. فوتون، کوانتوم تابش الکترومغناطیسی، حامل نیروی الکترومغناطیسی است. هشت ذره که گلوئون نامیده می شوند نیروی قوی را منتقل می کنند. فوتون و گلوئون را می توان ذراتی با جرم صفر تعبیر کرد. نیروی ضعیف توسط سه ذره منتقل می شوند: ذره  $W^+$  که بار آن مثبت است، ذره

$W^-$  که بار آن منفی است و ذره  $Z^0$  که خنثی است. این ذرات، برعکس فوتون و گلوئون، جرم دارند: جرم آنها نزدیک به صد برابر جرم پروتون است. تمام این حاملها در آزمایش مشاهده شده اند. عامل انتقال دهنده نیروی گرانشی - که فعلاً گمانی بیش نیست - گراویتون است.

نظریه ای که کوارکها و لپتونها و برهمکنش آنها را توصیف می کند مدل استاندارد نامیده شده است. برای اینکه مدل استاندارد از نظر ریاضی سازگار باشد باید ذره ای موسوم به ذره هیگز وجود داشته باشد. (ساده ترین صورت مدل استاندارد حاوی یک ذره هیگز است که از لحاظ الکتریکی خنثی است. مدلهای کلی تری وجود ذرات هیگز باردار را نیز مجاز می دانند.) تصور می شود که جرم ذرات  $W^+, W^-, Z^0$  کوارکها و لپتونها از برهمکنش با ذره هیگز ناشی می شود. مدل استاندارد چگونگی برهمکنش ذره هیگز با سایر ذرات را پیشگویی می کند، ولی جرم خود ذره هیگز را پیشگویی نمی کند. خواصی که از ذره هیگز انتظار می رود چنان است که تا کنون در هیچ آزمایشی پیدا کردن یک ذره هیگز ممکن نبوده است، و از آنجا که جرم این ذره معلوم نیست، طرح هر آزمایشی به منظور جستجوی آن مشکل است [۱۱۶].

فیزیکدانان چگونه به این ذرات که در مدل استاندارد موجودند پی برده اند؟ اول آنکه، ذرات را می توان به دو دسته اصلی تقسیم کرد: فرمیون ها و بوزون ها، لپتونها و کوارک ها. یعنی سازنده های اصلی ماده، فرمیون اند. ذرات اصلی که چهار نیرو را منتقل می کنند، بوزون اند. فرمیون ها چنان رفتار می کنند که گویی حامل تکانه زاویه ای ذاتی، موسوم به اسپین، برابر با مضارب نیمه درستی از ثابت پلانک اند. ثابت پلانک خود واحد بنیادی تکانه زاویه ای در نظریه کوانتوم است. بوزونها اسپین هایی دارند که مضارب درستی از ثابت پلانک اند. این اختلاف اسپین به میزان مضرب نیمه درست که میان فرمیون ها و بوزونها وجود دارد دارای اثرات بسیار زیادی است؛ فرمیونها "ضد جماعت" اند و میل به اشغال حالت های انرژی مختلف دارند؛ بوزونها "جماعت گرا هستند و به متراکم شدن در یک حالت انرژی واحد گرایش دارند. تمام لپتونها و کوارکها فرمیون هایی با اسپین  $1/2$  اند. فوتون، ذرات  $W^+, W^-, Z^0$  و هشت گلوئون، بوزونهایی با اسپین ۱ اند. انتظار میرود گراویتون بوزونی باشد با اسپین ۲ و ذره هیگز بوزونی باشد با اسپین صفر (یعنی بدون اسپین).

یکی از عناصر مهم وحدت در مدل استاندارد، مفهوم تقارن است. بر هم کنشهای میان ذرات مختلف، در قبال تعدادی مبادلات ظریف، متقارن اند (یعنی ناورد، یا تغییر ناپذیرند). به عنوان مثال، فرض کنید تعدادی پروتون در مجاورت یکدیگر چیده شده باشند. (نظیر آنچه در هسته می‌گذرد) به طوری که نیروی قوی میان آنها خیلی بیشتر از نیروی دافعه الکترومغناطیسی باشد. آنگاه فرض کنید بتوانیم نیروهای قویی را که میان پروتونها عمل می‌کنند اندازه بگیریم. حال اگر به جای هر پروتون یک نوترون بنشانیم این نیروها بلا تغییر می‌مانند. در واقع از نظر ریاضی می‌توان تصور کرد که به جای هر پروتون "مخلوطی" از پروتون و نوترون نشانده شده باشد، که در این مورد هم نیروها بدون تغییر باقی می‌مانند. این مثالی است از تقارنی که در آن در تمام نقاط فضا مبادله یکسانی انجام می‌شود. تقارنهای کلی تر آنهایی هستند که در آنها مبادلات از نقطه ای به نقطه دیگر در فضا و زمان تغییر می‌کند. این تقارنهای عناصر مهم نظریه های پیمانها-ای اند. تمام برهمکنشهایی را که توسط مدل استاندارد تشریح شده اند، می‌توان با موفقیت با استفاده از این تقارنهای تعمیم یافته توجیه کرد [۱۱۶].

حالا زمینه برای مطرح کردن ابرتقارن آماده است. علی‌رغم موفقیتهایی که مدل استاندارد داشته است و از سال ۱۹۸۷ تا کنون از همه آزمایشات موفق بیرون آمده است، ولی اگر فیزیکدانها بخواهند امیدوار به درک کامل خواص ماده باشند، باید به ماورای این مدل بنگرند. بعضی از جنبه های مدل استاندارد اسرار آمیزند و از کشفیات بیشتری در آینده حکایت دارند. اولاً هیچکس نمی‌تواند توضیح دهد که چرا مدل استاندارد به صورتی که هست در می‌آید. ساختار ریاضی این نظریه زیباست و به طور اعجاب آوری ساده است و برهمکنشهای مشاهده شده تقارنهای زیادی نشان می‌دهند. با وجود این از دیدگاه نظری، تعدادی صورتهای دیگر (انتخابهای مختلف از تقارن ها) نیز می‌توانند به همان اندازه معقول و زیبا باشند. ثانیاً هیچ درکی از منشاء فیزیکی جرم های ذرات بنیادی، و نیز قدرت نیروهایی که میان آنها عمل می‌کنند نداریم. چرا آنها این مقادیر را دارند؟ فیزیکدانان ذرات بنیادی اکثراً امیدوارند که سرانجام بتوانند این پارامترها را به جای اندازه گیری صرف محاسبه کنند.

هر چند در حال حاضر هیچ سرنخی در دست نیست که مستقیماً نشان بدهد چگونه می‌توان مدل استاندارد را بسط داد، اما به نظر بسیاری از فیزیکدانان نظری ابرتقارن احتمالاً همان جهتی

است که باید به آن توجه کرد. در یکی دو سال گذشته برای جستجوی نشانه های ابرتقارن در طبیعت کوششهایی به عمل آمده است. جستجو برای یافتن نشانه های تجربی ابرتقارن، بر کشف ذرات جدید متمرکز شده است. دلیلش این است که این نظریه ایجاب می کند برای هر ذره معمولی یک "ابر همراه" وجود داشته باشد. این ابر همراه همان خواص ذره معمولی را دارد، جز اسپین اش که به اندازه نیم واحد متفاوت است. به عبارت دیگر، تفاوت ابرتقارن با نظریه های قبلی در آن است که این نظریه دو دسته اساسی ذرات، یعنی بوزونها و فرمیونها را به یکدیگر مربوط میکند. علاوه بر این، قدرت نیروهای برهمکنشی میان ابرهمراههای پیشنهادی با قدرت نیروهای برهمکنشی میان ذرات مختلف معمولی یکسان است.

از دو برابر کردن تعداد ذرات بنیادی چه مزایایی بدست می آید؟ اولاً، ابرتقارن می تواند یک مشکل اساسی را حل کند: این نظریه سازوکاری را میسر می کند که توسط آن یک نظریه واحد را می توان برای توضیح دو انرژی مهم، یا دو جرم مهم، که چندین مرتبه بزرگی با یکدیگر تفاوت دارند به کار برد. همان طور که می دانیم با توجه به معادله مشهور انشتین،  $E = mc^2$  جرم و انرژی معادل اند و می توان آنها را به جای یکدیگر به کار برد. این انرژی ها عبارتند از جرمهای ذرات  $W^+, W^-, Z^0$  که تقریباً  $10^{11}$  الکترون ولت است و آنچه که آنرا جرم پلانک می نامیم که حدوداً  $10^{28}$  الکترون ولت است. در هر نظریه ای که بخواهد گرانش را در امر وحدت چهار نیروی بنیادی توضیح دهد، جرم پلانک یک کمیت مهم است؛ اگر ذرات بنیادی با جرم  $10^{28}$  الکترون ولت وجود داشته باشند، شدت نیروی گرانش میان آنها بیشتر از شدت هر یک از نیروهای بنیادی دیگر خواهد بود. طبیعتاً می توان انتظار داشت که در یک نظریه بنیادی که شامل جرم پلانک است، اگر جرم های ذرات  $W, Z^0$  قابل محاسبه باشند، باید تقریباً از همان مرتبه بزرگی جرم پلانک باشند، نه آنکه  $10^{17}$  مرتبه کوچکتر. اما در نظریه ابرتقارن، حذف شدنهای ظریفی پیش می آید که امکان می دهد جرم های  $W, Z^0$  چندین مرتبه بزرگی کوچکتر از جرم پلانک باشند، درست همان طور که از مشاهده معلوم شده است. این حذف شدنهای ظریف از سر ناچاری ابداع نشده اند، این ساختار ریاضی نظریه ابرتقارن است که آنها را تضمین می کند. البته باید خاطر نشان کرد که همه انرژی های خیلی متفاوت هم مسئله آفرین نیستند. مثلاً، نظریه های موجود به راحتی می تواند سطوح انرژی مشاهده شده را هم در هادرونها ( نظیر پروتونها و نوترونها ) و هم

در اتمها توضیح دهند ؛ هر چند که سطوح انرژی هادرونها تقریباً  $10^9$  الکترون ولت و سطوح انرژی اتمها حدود 10 الکترون ولت است. دلیل این امر در سلسله مراتب ساختار نهفته است؛ اتمها از هسته ها و الکترونها ساخته شده اند، هسته ها از پروتونها و نوترونها ، و پروتونها و نوترونها از کوارکها. با وجود این اگر کسی بخواهد برای ذرات و برهمکنشهای بنیادی نظریه ای بسازد ، دیگر نمی تواند به چنین سلسله مراتبی متوسل شود.

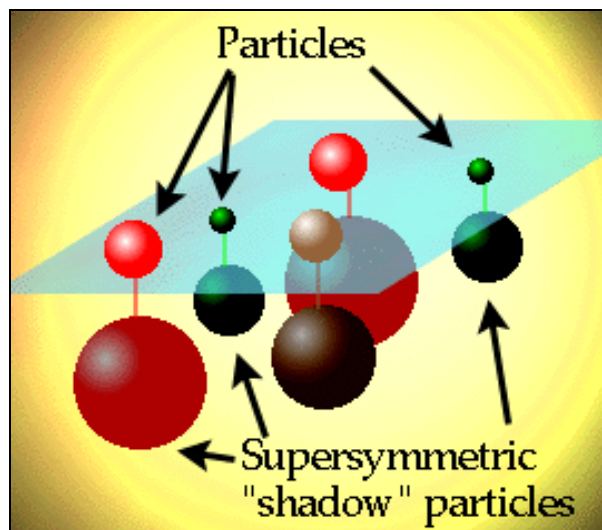
دومین جنبه ابر تقارن رابطهء نزدیک آن با نظریه انیشتین درباره گرانش است. از زمانی که انیشتین نظریهء نسبیت عام را اظهار کرد، فیزیکدانها کوشیده اند گرانش را با مکانیک کوانتومی وحدت بخشند ؛ اما در این امر موفقیت چندانی نداشته اند. اکنون نظریه پردازان عموماً بر این باورند که نظریه کوانتومی گرانش یک نظریه ابرتقارنی خواهد بود.

اگر طبیعت واقعاً ابرمتقارن باشد باید ابر تقارن آن یک " تقارن شکسته" باشد، یعنی تقارنی باشد که به طور تقریبی یا فقط در بخشهایی از نظریه برقرار باشد. تصور کنید اگر طبیعت دقیقاً ابر تقارن می بود چه پیش می آمد. ابر الکترونها جرم مشابهی با الکترونها داشتند و توسط نیروی الکترومغناطیسی به پروتونها مقید می بودند. خواص اتم هایی که به این طریق تشکیل شوند با خواص اتم های معمولی تفاوت بسیار خواهد داشت. هر الکترون، به عنوان یک فرمیون، باید سطح انرژی متفاوتی را در اتم اشغال کند. ابرالکترونها به عنوان بوزون، سطوح انرژی مشابهی را اشغال خواهند کرد. اگر اتمها به جای الکترون حاوی ابر الکترون می بودند، جدول تناوبی عناصر کاملاً با جدول فعلی فرق می کرد. از آنجا که چنین اتمهایی مشاهده نشده اند، جرم ابرالکترونها (اگر ابر الکترونی وجود داشته باشد) باید بیشتر از جرم الکترونها باشد . بنابراین، تقارن شکسته است.

ابرتقارن یک تقارن شکسته است؛ تقارنی است که در آن بوزون ها و فرمیون ها دو حالت متفاوت ذره یکسانی هستند. بوزون ها ذرات تبدالی یا ذرات نیرو هستند؛ ذرات تبدالی ذراتی هستند که مرتباً پس و پیش می روند و نیرویی را به وجود می آورند مثل فوتون که یک بوزون است و ذره تبدالی نیروی الکترومغناطیسی است. فرمیون ها یا ذرات ماده ذراتی با اسپین نیمه صحیح هستند. بنابراین ابرتقارن ذرات حامل نیرو و ذراتی که ماده را می سازند به هم مربوط می- کند. نتایج ابرتقارن در آزمایشات ذرات هنوز مشاهده نشده است، چون نظریه پردازان معتقدند که ذرات ابرتقارن سنگین تر از آن هستند که در شتابدهنده های امروزی بتوان آنها را مشاهده کرد.

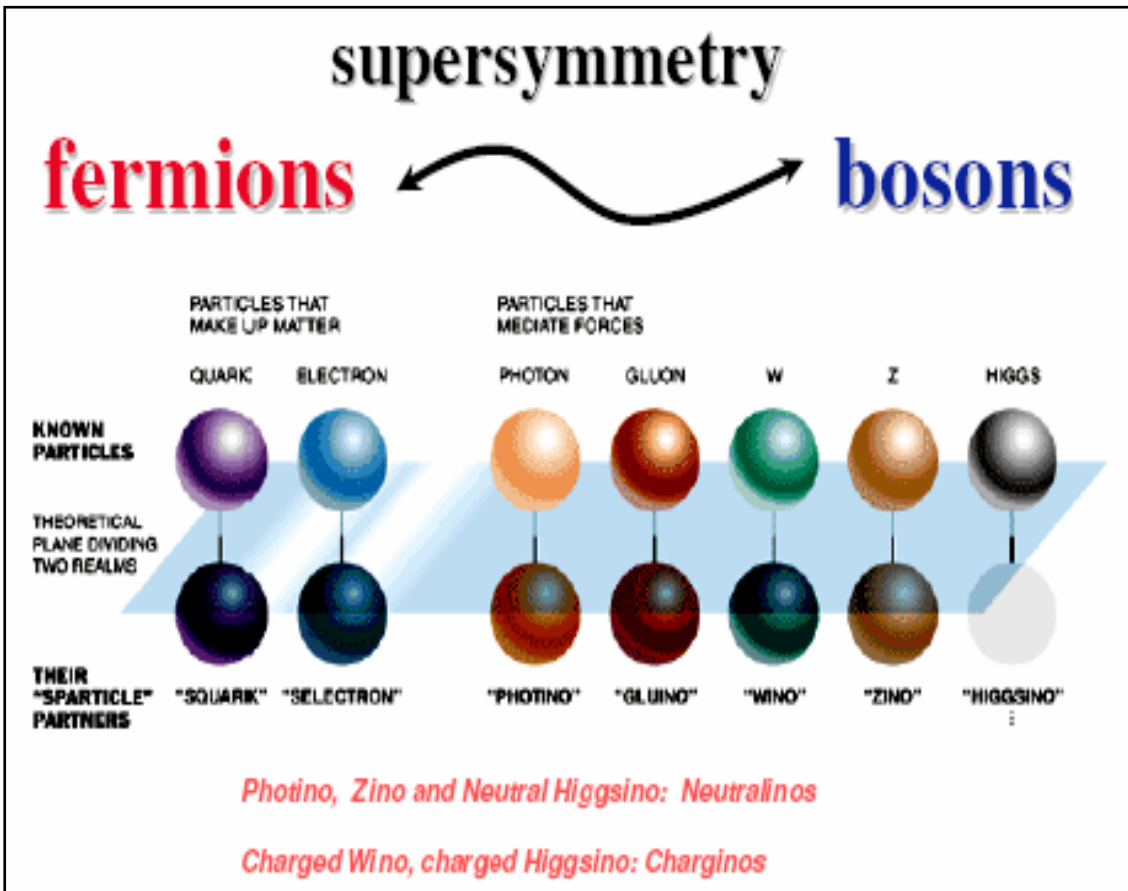
شاید ساده ترین راه برای فهم ابرتقارن این باشد که این مسئله را مشابه مسئله ایزواسپین تصور کنیم ؛ در فضای فرضی ایزواسپین نوترون می تواند به پروتون تبدیل شود . اگر ابر تقارن یک تقارن کامل بود باید جرم همراهها با جرم ذرات شناخته شده یکسان بود ؛ ولی این طور نیست و ذره ابرهمراه می تواند جرم بسیار بیشتری داشته باشد . هنوز هیچ راه قابل اعتمادی هم برای پیشگویی جرم آنها وجود ندارد. ولی دانشمندان انرژی آنها را در حدود تریلیون الکترون ولت (Tev) تخمین می زنند. ابرتقارن بیان می کند که برای هر ذره معمولی یک ابرهمراه باید وجود داشته باشد؛ این ابر همراه همان خواص ذره معمولی را دارد؛ جز اینکه اسپین اش به اندازه نیم واحد متفاوت است.

همان طور که در شکل های زیر آمده ذرات ابر تقارنی به عنوان سایه ای با جرم خیلی بیشتر برای ذرات معمولی عمل می کنند و نیز در شکل بعدی نشان داده شده است که ابر تقارن پل ارتباطی بین فرمیون ها و بوزون ها یعنی دو خانواده اصلی ماده می باشد [۹،۶،۱۰،۱۱].



شکل ۱-۵- ذرات ابر تقارنی مانند سایه های ذرات معمولی می باشند .





شکل ۱-۶ - همان طور که نشان داده شده ابر تقارن فرمیون ها و بوزون ها را به هم ارتباط می دهد .

منابع :

- [۱] Symmetry and Symmetry Breaking, Stanford encyclopedia of philosophy
- [۲] دینامیک کلاسیک ذرات و سیستم ها - جری ماریون - ترجمه جلال الدین پاشایی راد و بهرام معلمی - چاپ اول ۱۳۷۴ - انتشارات مرکز نشر دانشگاهی .
- [۳] مکانیک کلاسیک - ل.د.لاندو - ا.م.لیفشیتز - ترجمه کامیار نیکپور و مهیار نیکپور - چاپ دوم ۱۳۶۱
- [۴] مقدمه ای بر ذرات بنیادی - دیوید جفری گریفیتس - ترجمه نادر قهرمانی - چاپ اول ۱۳۸۴
- [۵] نظریه جهانشمول فیزیکی - باری پارکر - ترجمه پاشایی راد و غفوری فرد و مدرس - چاپ ۱۳۷۴ - انتشارات نشر مرکز .
- [۶] میان دو دنیا ؛ میان دو مسئله - مجله فیزیک ۱۳۶۵ .
- [۷] دیدگاههایی پیرامون ذرات بنیادی - جی.ای.دود . - ترجمه بهزاد قهرمان و علیرضا ابراهیم پور - انتشارات آستان قدس رضوی = سال ۱۳۷۰
- [۸] فیزیک کوانتومی مدرن - جی.جی. ساکورایی - انتشارات دانشگاه تهران - سال ۱۳۸۲ .
- [۹] [www.sharghnewspaper.com](http://www.sharghnewspaper.com)
- [۱۰] [www.sciam.com](http://www.sciam.com)
- [۱۱] آیا طبیعت ابر متقارن است ؟ - مجله فیزیک - بهار ۱۳۶۶

## فصل دوم

مقدمه‌ای بر نظریهٔ گروه‌ها به عنوان  
ریاضیات تقارن و ابرتقارن

## فهرست مطالب

صفحه		عنوان
۳۷	.....مقدمه	
۳۷	.....گروه چیست؟	۱-۲
۴۰	.....گروههای توپولوژیکی و گروههای لی	۲-۲
۴۱	.....گروه دوران محوری $SO(2)$	۱-۲-۲
۴۱	.....گروه دوران محوری $SO(3)$	۲-۲-۲
۴۲	.....گروه $O(n)$	۳-۲-۲
۴۲	.....گروه لورنتز	۴-۲-۲
۴۳	.....گروه یکانی خاص $SU(2)$	۵-۲-۲
۴۶	.....منابع	

## مقدمه

پیدایش نظریه گروهها به بیش از ۱۵۰ سال قبل، در اوایل قرن نوزدهم بر می گردد. پیشرفتهای اولیه نظریه گروهها توسط ریاضیدانان مشهوری از جمله گاوس، کوشی، آبل، هامیلتون و ... انجام شده است. این نظریه تا پیش از ظهور مکانیک کوانتومی جدید در سال ۱۹۲۵، کاربرد زیادی در فیزیک نداشت. اما پس از آن به کاربرد نظریه گروه در فیزیک پی برده شد و این ابزار جدید در محاسبات مربوط به ساختار و طیف های اتمی توسط عده ای از جمله ویگنر و سایرین مورد استفاده قرار گرفت. امروزه استفاده از نظریه گروهها در اغلب شاخه های فیزیک و شیمی فیزیک اجتناب ناپذیر است.

اگر چه ریاضیدانان عموماً به نظریه انتزاعی گروهها بیشتر توجه دارند، برای یک فیزیکدان نظریه نمایشی گروههاست که مورد استفاده مستقیم در فیزیک کوانتومی و سایر شاخه های فیزیک می باشد. در این قسمت تنها جنبه هایی از نظریه انتزاعی گروهها را بررسی خواهیم کرد که برای فهم نظریه نمایشی مورد نیاز است [۱].

## ۲-۱ گروه چیست؟

مجموعه تمام اعداد صحیح  $I = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$  را در نظر بگیرید، برای این مجموعه می توان چهار خاصیت زیر را در نظر گرفت: (الف) مجموع هر دو عضو مجموعه  $I$  خود یک عدد صحیح است و لذا به مجموعه تعلق دارد. (ب) مجموعه شامل یک عنصر  $0$  می باشد که صفر نامیده می شود و دارای این خاصیت است که برای هر عضو  $m$  از  $I$  داریم  $m+0=0+m=m$ ، (ج) برای هر عنصر  $m$  از  $I$ ، یک عنصر منحصر بفرد  $n$  وجود دارد که به  $I$  تعلق داشته و داریم:

$m+n=n+m=0$  ؛ مسلماً  $n=-m$  ، (د) اگر  $n, m, p$  سه عنصر از  $I$  باشند در این صورت  $m+(n+p)=(n+n)+p$  یعنی ، قانون جمع شرکت پذیر است . یک مجموعه دیگر را در نظر بگیرید : مجموعه  $U(n)$  ، تمام ماتریس های یکانی مرتبه  $n$  که در آن یک عدد صحیح مشخص و محدود است. این مجموعه دارای چهار خاصیت زیر است: (الف) اگر  $U, V$  دو ماتریس یکانی مرتبه  $n$  دلخواه باشند، حاصلضرب  $UV$  آنها نیز یک ماتریس یکانی مرتبه  $n$  است و لذا به مجموعه  $U(n)$  تعلق دارد؛ (ب) این مجموعه شامل ماتریس یکه  $I$  است با خاصیت  $UI=IU=U$  ، به ازای هر  $U \in U(n)$  ، (ج) اگر  $U$  یک عنصر از  $U(n)$  باشد ، یک عنصر منحصر بفرد  $V$  متعلق به  $U(n)$  وجود دارد به طوری که  $UV=VU=I$  ، (د) اگر  $U, V, W$  سه عنصر از این مجموعه باشند ،  $U(VW)=(UV)W$  . توجه کنید چهار خاصیتی که اعضای دو مجموعه فوق در آنها صدق می کنند از نظر ماهیت بسیار شبیه به هم می باشد. در واقع ، این خواص یک گروه را تعریف می کنند و هر دو مجموعه ای که در بالا مورد بحث قرار گرفت مثالهایی از یک گروه می باشند [۱، ۲، ۳].

بطور مجرد یک گروه، مجموعه ای از عناصر متمایز  $G=\{E, A, B, C, D, \dots\}$  است که دارای یک قانون ترکیب ( نظیر جمع ، ضرب ، ضرب ماتریس و ...) است، به طوری که خواص زیر برقرار باشد :

(الف) از ترکیب هر دو عنصر  $A, B$  از  $G$  عنصری متعلق به  $G$  به دست می آید . بنابراین ،

$$A \circ B \in G, B \circ A \in G$$

ترکیب دو عنصر از  $G$  را توسط نشانه  $\circ$  نشان داده ایم . بطور نمادی می توان نوشت :

$$A \circ B \in G \quad ; \quad \forall A, B \in G \quad (1-2)$$

این خاصیت به خاصیت بستاری گروه موسوم است و می گوییم که مجموعه تحت قانون ترکیب بسته است .

(ب) یک عنصر همانی  $E \in G$  وجود داشته باشد، بطوری که

$$\forall A \in G \quad \Rightarrow \quad E \circ A = A \circ E = A$$

و بطور نمادی :

$$\exists E \in G \ni E \circ A = A \circ E = A \quad ; \quad \forall A \in G \quad (2-2)$$

$E$  را عنصر همانی  $G$  می نامیم .

(ج) برای هر عنصر  $A$  از  $G$  ،  $(A \in G)$  ، یک عنصر منحصر بفرد  $B$  ،  $(B \in G)$  وجود داشته باشد بطوری که :

$$A \circ B = B \circ A = E$$

بطور نمادی:

$$\forall A \in G \exists B \in G \ni A \circ B = B \circ A = E \quad (3-2)$$

$B$  را معکوس  $A$  می نامیم ، در این صورت  $A$  نیز معکوس  $B$  خواهد بود .

(د) قانون ترکیب عناصر گروه شرکت پذیر است ، یعنی برای هر  $A, B, C$  متعلق به  $G$  :

$$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$$

بطور نمادی:

$$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C \quad ; \quad \forall A, B, C \in G \quad (4-2)$$

تعداد عناصر یک گروه ، مرتبه گروه نامیده می شود [۳، ۲، ۱]. یک گروه که شامل تعداد محدودی عنصر باشد یک گروه محدود نام دارد؛ و گروهی که شامل تعداد بی نهایت عنصر باشد یک گروه نامحدود نامیده می شود. یک گروه نامحدود ممکن است گسسته یا پیوسته باشد: اگر تعداد عناصر در گروه بی نهایت شمارش پذیر باشد ( نظیر تعداد کلیه اعداد صحیح ) گروه گسسته است، اگر تعداد عناصر گروه شمارش پذیر نباشد ( نظیر مجموعه اعداد حقیقی )، گروه پیوسته است [۳ و ۴]. گروههایی که ما در این پایان نامه استفاده خواهیم کرد از نوع گروههای پیوسته هستند. در نظریه گروههای پیوسته اغلب استفاده زیادی از نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی و با مشتق جزئی ، توپولوژی و غیره می شود. یادآوری می کنیم که هدف این نیست که به شرح دقیق ریاضی عناوین ذیل پردازیم بلکه هدف عبارت است از معرفی مفاهیم مقدماتی گروههای پیوسته به طریقی که به سادگی قابل فهم باشد.

بیشتر گروههایی که مورد نظر ما در این مبحث است، گروههایی هستند که ریاضیدانان آنها را گروههای توپولوژیکی و گروههای لی می نامند . در اینجا به توضیح مختصری درباره هر کدام از اینها می پردازیم و سپس به چند نمونه از کاربرد آنها اشاره می شود.

## ۲-۲ گروه‌های توپولوژیکی و گروه‌های لی

گروه توپولوژیکی: گروهی است که قانون ترکیب و قانون وارون در تمام عناصر گروه پیوسته باشد. [قانون ترکیب: یک تغییر کوچک در یکی از عوامل ضرب یک تغییر کوچک در حاصلضرب ایجاد کند. قانون وارون: یک تغییر کوچک در یک عنصر باعث تغییر کوچکی در معکوس آن می‌شود [۳،۴].]

گروه لی: یک گروه توپولوژیکی را یک گروه لی  $\Gamma$  بعدی می‌گوییم اگر یک همسایگی  $N$  عنصر همانی  $e$  وجود داشته باشد به طوری که پارامترهای پیوسته حاصلضرب دو عنصر و پارامترهای پیوسته معکوس یک عنصر در  $N$  توابع پیوسته مشتق پذیر از پارامترهای عناصر باشد، یعنی اگر برای عناصر  $N$ ،  $c_i$  ها و  $d_i$  در رابطه  $c_i \equiv c_i(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_r)$  و  $d_i \equiv d_i(a_1, \dots, a_r)$  توابع تحلیلی از  $a_i$  ها و  $b_i$  ها باشند، مشروط بر آنکه اگر  $X_1$  و  $X_2$  در  $N$  قرار داشته باشند،  $X_3$  و  $X_4$  نیز در  $N$  باشند. به علاوه، قوانینی برای ترکیب  $n$ - $\Gamma$  پارامتر گسسته باقیمانده وجود داشته باشد.

عناصر یک گروه پیوسته می‌توانند توسط یک مجموعه پارامترهای حقیقی  $a_1, a_2, \dots, a_n$  که حداقل یکی از آنها به طور پیوسته در یک بازه معین تغییر کند، مشخص شوند. این مجموعه پارامترها برای مشخص کردن تمام عناصر گروه باید هم لازم و هم کافی باشند. به عبارت دیگر، نایبستی بتوانیم یک مجموعه که تعداد کمتری پارامتر داشته باشد؛ انتخاب کنیم که کلیه عناصر گروه را مشخص کنند. فرض کنید، تعداد پارامترهای پیوسته  $\Gamma$  باشد  $(1 \leq r \leq n)$ . اگر این تعداد محدود باشد گروه پیوسته را گروه محدود می‌گوییم و  $\Gamma$  مرتبه گروه پیوسته نامیده می‌شود [۳ و ۴].

مثال (۱). مجموعه اعداد حقیقی، یک گروه پیوسته از مرتبه یک است، زیرا هر عدد حقیقی می‌تواند به وسیله یک پارامتر، مثلاً  $x$  که مقادیر  $\{-\infty, +\infty\}$  را می‌گیرد، مشخص شود [۱].

مثال (۲). مجموعه تمام جابجاییها در یک فضای برداری حقیقی سه بعدی به شکل زیر:

$$x' = x + a, y' = y + b, z' = z + c$$

یک گروه پیوسته سه پارامتری است. اگر عملگر انتقال را با  $T(a,b,c)$  نمایش دهیم، عنصر همانی

$T(0,0,0)$  است و معکوس  $T(a,b,c)$  عبارت است از:  $T(-a,-b,-c)$ .



بیشتر گروههایی که در فیزیک مورد توجه قرار می‌گیرد گروههای پیوسته ای هستند [۴۳] که در زیر به چند تا از مهمترین این گروهها اشاره می‌کنیم :

### ۲-۲-۱ گروه دوران محوری $SO(2)$

مجموعه دورانهای یک دایره حول محوری که بر صفحه دایره عمود است و از مرکز آن می‌گذرد، را در نظر بگیرید. هر عنصر این مجموعه می‌تواند توسط یک پارامتر مشخص شود، که می‌توان آن را زاویه دوران  $\varphi$  انتخاب کرد که مقادیربازه  $[0, 2\pi]$  را می‌گیرد. واضح است که این یک گروه لی، یک پارامتری، پیوسته، همبند، آبلی و فشرده است که به گروه دوران محوری موسوم است و با  $SO(2)$  نمایش داده می‌شود. چون دوران به اندازه  $\varphi$  و دوران  $\varphi + 2\pi n$  (n یک عدد صحیح است) یکسان است، فضای پارامتر زیر مجموعه  $[0, 2\pi]$  از خط حقیقی است. این گروه را همبند نامتناهی گوئیم، زیرا تعداد بی‌نهایت مسیر وجود دارد که هر دو عنصر از گروه را که نمی‌توان با تغییر شکل پیوسته بدون اینکه از فضا خارج شود، به یکدیگر منطبق کرد، بهم متصل می‌کند [۴، ۳، ۱].

### ۲-۲-۲ گروه دوران سه بعدی $SO(3)$

مجموعه تمام تبدیلات متعامد در فضای برداری حقیقی سه بعدی (یعنی فضائی که روی میدان اعداد حقیقی تعریف شده است) را در نظر بگیرید. این مجموعه یک گروه است که آنرا با  $O(3)$  نمایش می‌دهیم. آن را می‌توان همچنین به عنوان گروه ماتریس های متعامد  $3 \times 3$  نیز تعریف کرد. اگر  $R$  یک ماتریس متعامد باشد، در معادله زیر صدق می‌کند:

$$R\tilde{R} = \tilde{R}R = E \quad (۴-۲)$$

که در آن  $E$  ماتریس یکه و  $\tilde{R}$  ماتریس ترانهاد  $R$  است. با در نظر گرفتن دترمینانهای دو طرف (۴-۲) و توجه به این نکته که  $\det \tilde{R} = \det R$  داریم:

$$(\det R)^2 = 1 \Rightarrow \det R = \pm 1 \quad (۵-۲)$$

بنا بر این ماتریسهای گروه  $O(3)$  به دو دسته تقسیم می شوند: یک مجموعه آنهایی که دترمینان آنها +1 است و مجموعه دیگر ماتریسهایی که دارای دترمینان -1 می باشند. بسادگی می توان تحقیق کرد که مجموعه اول یک گروه تشکیل می دهد. این گروه یعنی، گروه ماتریسهای متعامد حقیقی مرتبه 3 با دترمینان +1 را با  $SO(3)$  نشان می دهیم [4,3,1].

## 2-2-3 گروه $O(n)$

بدیهی است که تمام ماتریسهای متعامد حقیقی مرتبه  $n$  یک گروه تشکیل می دهند. این گروه با  $O(n)$  نمایش داده می شود و یک گروه لی، پیوسته و فشرده است که در عین حال همبند نیست. همچنین می توان آن را به عنوان مجموعه ای از تبدیلات متعامد در یک فضای برداری حقیقی  $n$  بعدی تصور کرد. اگر  $X_i$  ها بردارهای پایه در این فضا باشند، یک تبدیل  $O(n)$  شکل مربعی  $\sum_{i=1}^n X_i^2$  را تغییر ناپذیر می گذارد. فضای پارامتر  $O(n)$  از دو قسمت مجزا تشکیل شده است، یکی متناظر با ماتریس های با دترمینان +1 (دورانهای خاص) و دیگر ماتریس های -1 (انعکاسها). زیر گروهی که شامل دورانهای خاص است یک گروه لی همبند  $\frac{n(n-1)}{2}$  پارامتری است که با  $SO(n)$  نمایش می دهیم.  $O(n)$  علاوه بر  $\frac{n(n-1)}{2}$  پارامتر پیوسته  $SO(n)$ ، دارای یک پارامتر گسسته نیز هست [4,3,1].

## 2-2-4 گروه لورنتز

می خواهیم گروهی از تبدیلات را در نظر بگیریم که شکل مربعی  $X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_p^2 - X_{p+1}^2 - \dots - X_n^2$  را تغییر ناپذیر بگذارد. این گروهها را گروههای شبه دوران می نامیم. با وجودی که تعداد زیادی از ریاضیدانان به تمامی این نوع تبدیلات گروه لورنتز می گویند، ولی معمول است که این عبارت گروه لورنتز را به موردی که در آن  $n=4$  و  $p=3$  یعنی  $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - X_4^2$  اطلاق می کنیم. این به خاطر اهمیتی است که این

مورد در نظریه نسبیت خاص دارد که در آن پیوستار فضا - زمان چهار بعدی توسط متریک زیر توصیف می شود :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \quad (۶-۲)$$

گروه شبه دوران توسط نشانه  $O_{P,n-P}$  نمایش داده می شود و با انتخاب  $P \geq n-P$  هیچ از کلیت مسئله کاسته نمی شود . ساده ترین گروه شبه دوران به ازای  $n=1$  و  $P=1$  واقع می شوند ، یعنی ،  $O_{1,1}$  که شکل مربعی  $x^2 - y^2$  را تغییر ناپذیر می گذارد . یک تبدیل عمومی  $O_{1,1}$  به شکل زیر است :

$$\begin{aligned} x' &= x \cosh \theta + y \sinh \theta \\ y' &= x \sinh \theta + y \cosh \theta \end{aligned} \quad (۷-۲)$$

که در آن  $\theta$  حقیقی است و  $-\infty < \theta < \infty$  ، بنابراین :

$$x'^2 - y'^2 = x^2 - y^2 \quad (۸-۲)$$

هر عنصر گروه را می توان بر حسب یک پارامتر حقیقی  $\theta$  مشخص کرد و مجموعه ماتریس های

$$\begin{bmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad -\infty < \theta < \infty \quad (۹-۲)$$

یک نمایش ۲ بعدی گروه را می دهند . گروه  $O_{1,1}$  ، علاوه بر این، شامل انعکاسی (نظیر  $x \rightarrow -x, y \rightarrow y$ ) نیز می باشند که دترمینان ماتریسهای متناظر با آنها برابر ۱- است . از این رو یک گروه لی، پیوسته ، یک پارامتری است که غیر فشرده است زیرا، فضای پارامتری بی کران است و همبند نمی باشد و این بدان علت است که فضای پارامتر به دو زیر فضای مجزا تقسیم شده است ، همچنین توجه کنید که تبدیلات گروه شبه دوران متعامد نیستند [۱،۳،۴].

## ۵-۲-۲ گروه یکانی خاص $SU(2)$

فرض کنید  $u$  و  $v$  یک زوج بردار در فضای برداری دو بعدی باشند که روی میدان اعداد مختلط تعریف شده است ، باشند . یک دوران در این فضا،  $u$  و  $v$  را به ترکیبات خطی شان تبدیل می کند :

$$u' = au + bv, v' = cu + dv \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = [u, v] \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \quad (۱۰-۲)$$

که در آن  $a, b, c, d$  اعداد مختلط هستند و لذا ماتریس تبدیل شامل ۸ پارامتر است. اگر تنها دورانهایی را در نظر بگیریم که شکل مربعی  $uu^* + vv^* = |u|^2 + |v|^2$  را تغییر نپذیرد بگذارد، ملاحظه می‌کنیم که ماتریس تبدیل در (۱۰-۲) باید یک ماتریس یکانی باشد. به عبارت دیگر اگر بخواهیم که داشته باشیم  $|u'|^2 + |v'|^2 = |u|^2 + |v|^2$  در این صورت از (۱۰-۲) شرایط زیر به دست می‌آید:

$$aa^* + cc^* = 1, bb^* + dd^* = 1, ab^* + cd^* = 0 \quad (11-2)$$

چون اسکالرهای مختلط هستند، معادله آخری در (۱۱-۲) معادل با دو شرط است. بنابراین شرایط تعداد پارامترها در (۱۰-۲) را از ۸ به ۴ کاهش می‌دهد. با استفاده از (۱۱-۲) می‌توان چنین نتیجه‌گیری کرد که کلی‌ترین ماتریس یکانی مرتبه ۲ که شامل چهار پارامتر حقیقی است می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta e^{i\alpha} & \sin \theta e^{i\gamma} \\ -\sin \theta e^{i(\beta-\gamma)} & \cos \theta e^{i(\beta-\alpha)} \end{bmatrix} \quad (12-2)$$

که دترمینان آن  $\exp(i\beta)$  است. در اینجا  $\alpha, \beta, \gamma, \theta$  چهار پارامتر حقیقی هستند.

مجموعه کلیه چنین تبدیلاتی گروه  $U(2)$  را تشکیل می‌دهد، این گروه یک گروه لی، ۴ پارامتری، پیوسته، همبند و فشرده است. زیرگروهی از  $U(2)$  که شامل کلیه ماتریسهای یکانی مرتبه ۲ با دترمینان ۱+ است مورد توجه خاص در فیزیک می‌باشد. این گروه مجموعه ماتریسهایی است که عنصر عمومی آن عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{bmatrix} \Rightarrow aa^* + bb^* = 1 \quad (13-2)$$

و به یک گروه یکانی خاص موسوم است و با  $SU(2)$  نمایش داده می‌شود. به خاطر شرط اضافی روی دترمینان،  $SU(2)$  یک گروه سه پارامتری است [۴، ۳، ۱]. بنابراین به طور خلاصه می‌توان گفت ماتریسهایی که در فیزیک و در این مبحث از آنها استفاده می‌شود به این صورت می‌باشد:

گروه  $U(n)$ : ماتریس‌های یکانی  $n \times n$  (ماتریس یکانی ماتریسی است که معکوس آن با همیوغ ترانهاد آن برابر باشد) [۵ و ۱].

گروه  $SU(n)$ : ماتریس‌های یکانی  $n \times n$  با دترمینان ۱ [۵ و ۱].

گروه  $O(n)$ : ماتریس متعامد و یکانی  $n \times n$  ( ماتریس متعامد ماتریسی است که معکوس آن با ترانپوز آن برابر باشد ) [۵۱].

گروه  $SO(n)$  : ماتریس های یکانی و متعامد با دترمینان ۱ [۵۱].  $SO(n)$  را معمولاً به عنوان گروههای چرخشی در فضایی با ابعاد  $n$  در نظر می گیرند [۶].

منابع:

[۱] ا.و. جوشی - مبانی نظریه گروهها برای فیزیکدانان - ترجمه محسن سربیشه ای - انتشارات آستان قدس رضوی - چاپ ۱۳۷۲

[۲] Bell, D.G. (1954), Revs. Mod. Phys.

[۳] Kahan, T. (1965), Theory of Groups in classical and Quantum physics  
(Oliver and Boyd, Edinborough)

[۴] Hermann, R. (1966), Lie Groups for physicist (Benjamin, New York)

[۵] محمد رضا سرکرده ای - روشهای ریاضی در فیزیک - جلد دوم - انتشارات دانشگاه الزهراء (س) - چاپ ۱۳۸۳.

[۶] دیوید جفری گریفیتس - مقدمه ای بر ذرات بنیادی - ترجمه نادر قهرمانی - انتشارات نوپردازان - چاپ ۱۳۸۴.

## فصل سوم

### ابرتقارن در مکانیک کوانتومی

## فهرست مطالب

صفحه		عنوان
۴۹	.....	مقدمه
۵۱	.....	جبر ابرتقارن ۱-۳
۵۱	.....	جبر گراسمن ۱-۱-۳
۵۴	.....	مکانیک کوانتومی ابرتقارن ۲-۳
۵۴	.....	لاگرانژین کلاسیکی ۱-۲-۳
۶۳	.....	هامیلتونی ابرتقارن ۳-۳
۶۶	.....	هامیلتونی‌های همتا و تابع ابرتانسیل ۴-۳
۶۷	.....	عملگرهای بالابرنده و پایین آورنده ۵-۳
۶۸	.....	هامیلتونی ابرتقارن $N=1, N=2$ ۶-۳
۷۱	.....	چگونگی ساخت هامیلتونی و پتانسیل‌های همتا ۷-۳
۷۵	.....	تجزیه و سلسله مراتب هامیلتونی‌ها ۸-۳
۷۸	.....	کاربردهای ابرتقارن ۹-۳
۷۸	.....	ذره در چاه پتانسیل ۱-۹-۳
۸۰	.....	یک مدل کلاسیکی ابرمتقارن ۲-۹-۳
۸۲	.....	ابرتقارن دینامیکی ۳-۹-۳
۸۵	.....	ابرتقارن و معادله دیراک ۴-۹-۳
۸۷	.....	ابرتقارن و معادله پائولی ۵-۹-۳
۸۹	.....	ابرتقارن شکسته شده ۱۰-۳
۹۳	.....	نماد ویتن ۱۱-۳
۹۵	.....	منابع



اکنون که نظریهٔ گروهها به طور خلاصه بیان شد، می‌توانیم مکانیک کوانتومی ابرتقارن را که بر اساس نظریهٔ گروهها پایه گذاری شده است، آغاز کنیم:

مقدمه

ابرتقارن در سال ۱۹۷۱ توسط Gelfond, Lijhtman [۱] و Ramond, Neveu, Schwartz [۲ و ۳] کشف شد و سپس توسط گروههای دیگری دنبال گردید و گسترش یافت [۴ و ۵]. ابرتقارن درجات آزادی فرمیونی و بوزونی را به هم مربوط می‌سازد. جبری که در ابرتقارن به کار می‌رود، یک جبر لی است که تحت ترکیبی از روابط جابجایی و پادجابجایی بسته است. در ابتدا از ابرتقارن برای وحدت حالت‌های فرمیونی و بوزونی در نظریهٔ ابررسمان استفاده شد.

SUSY امکان وحدت زمان- مکان و تقارنهای داخلی ماتریس  $S$  (ماتریسهای پراکندگی) را فراهم ساخت؛ سپس توسط Zumino, Wess [۵] چگونگی ساخت یک نظریه  $3+1$  بعدی که توسط این تقارن ناوردا بود، بررسی شد. گرانش توسط وحدت ابرتقارن به ابرگرانش تعمیم یافت. یکی از پیشگوییهای مهم نظریه‌های ابرتقارنی وجود تقارن کوارکها - لپتونها با همتهای بوزونی آنها و بوزونهای پیمانهای و همتهای فرمیونی آنها می‌باشد. این نظریه‌ها برای همتهای ابرتقارنی جرم‌های یکسانی را پیشنهاد می‌کند. با وجود همهٔ زیباییهای این نظریه‌ها، تاکنون هیچ تجربه‌ای گواه بر وجود ابرتقارن در طبیعت مشاهده نشده است. همهٔ این مسائل سبب شد ابرتقارن در ساده‌ترین حالتش، ابرتقارن در مکانیک کوانتومی توسط Witten, Freedman, Cooper [۶ و ۷] مورد بررسی قرار گیرد. با استفاده از ابرتقارن در مکانیک کوانتومی<sup>۱</sup>، بسیاری از مسائل و پتانسیلهایی که به طور تحلیلی قابل حل نیستند و یا تحت شرایط خاصی قابل حل باشند، به آسانی حل می‌شوند. با

---

<sup>1</sup> Supersymmetry Quantum Mechanics

تعریف پتانسیلهای همانند<sup>۱</sup> براحتی می‌توان پتانسیل‌هایی مانند پاش-تله، اکارت یا روزن-مورس را بدست آورد. همچنین می‌توان اختلاف انرژی ترازهای مختلف را با استفاده از ابرتقارن در روشهای تقریبی مانند روش وردشی<sup>۲</sup> بدست آورد. علاوه بر آن می‌توان معادلات پائولی و دیراک را با استفاده از آن حل کرد.

ابرتقارن در نظریه میدان کوانتومی به عنوان تقارنی بین میدانهای بوزونی و میدانهای فرمیونی مطرح شد [۸] و از آنجا که می‌توانست گامی به سوی یافتن وحدتی بین درجات آزادی درونی و بیرونی باشد، بسیار مورد توجه قرار گرفت.

ابرتقارن در مکانیک کوانتومی نخست به عنوان مدل ساده شده‌ای از ابرتقارن در نظریه میدان مورد توجه قرار گرفت [۹]. اما به زودی جایگاه ویژه‌ای در مکانیک کوانتومی بدست آورد. اهمیت این نظریه، هم به دلیل ارتباطی است که این نظریه با برخی مباحث ریاضی دارد، مانند قضیه اندیس [۱۰ و ۱۱] و قضیه مورس [۱۲]؛ و هم به دلیل توانایی آن در حل مسائل، مانند حل دقیق معادله شرودینگر از طریق یافتن هامیلتونی‌های هم شکل برای پتانسیل‌های شکل ناوردا [۱۳]. این نظریه همچنین کاربرد وسیعی در بسیاری از شاخه‌های فیزیک همچون فیزیک اتمی [۱۴]، فیزیک آماری [۱۵ و ۱۶]، ابررسانایی [۱۷ و ۱۸]، و نیم رساناها [۱۹ و ۲۰] پیدا کرده است. به دلیل این کاربردهای گسترده و به دلیل اهمیت آن در درک بهتر پدیده‌های فیزیکی و مفاهیم ریاضی، تلاشهای بسیاری در جهت تعمیم آن صورت گرفته است که به عنوان مثال به یافتن پارا ابرتقارن [۲۱]، اورتو ابرتقارن [۲۲]، و ابر تقارن کسری [۲۳، ۲۴، ۲۵] منجر شده است.

اگر چه ایده ابرتقارن جذاب است؛ ولی همان طور که می‌دانیم تا کنون در طبیعت مشاهده نشده است. در محیط اطراف ما فرمیون‌ها کاملاً مجزا از بوزون‌ها هستند و تا کنون ابرهمراه ذرات بوزون و فرمیون مشاهده نشده اند. بنابراین اگر می‌خواهیم نقشی برای ابرتقارن در طبیعت قائل شویم باید فرض کنیم که این تقارن دستخوش شکست خود به خودی شده است. در سال ۱۹۸۱ ویتن برای اینکه یک مدل ساده غیر نسبیتی برای سازوکار شکست خود به خودی ابرتقارن فراهم کند، مکانیک کوانتومی ابرتقارن را بر پایه ساده‌ترین شکل ممکن ابر جبر معرفی کرد [۸]. فرمول

---

<sup>1</sup> Shape invariant

<sup>2</sup> Variational

بندی Witten از مکانیک کوانتومی ابرمتقارن توجه زیادی را در دو دهه گذشته به خود جلب کرده است و هنوز هم به عنوان یک ابزار مفید در فیزیک کوانتومی به کار می رود. علیرغم این واقعیت که مکانیک کوانتومی ابرمتقارن در واقع حد  $(+1)$  بعدی نظریه میدان ابرمتقارن است، تا حد زیادی مستقل از آن است. ابرتقارن در مکانیک کوانتومی آن ابرتقارن اولیه ای نیست که بوزونها و فرمیون ها را به هم تبدیل می کرد. در مکانیک کوانتومی ابرتقارن، ابربارها مولد تبدیل هایی بین فرمیون ها و بوزون ها نیستند، بلکه مولد تبدیل هایی بین دو ویژه حالت متعامد یک هامیلتونی داده شده با ویژه مقادیر واگن یکسان هستند. این دو ویژه حالت متعامد ویژه حالت های عملگری به نام عملگر پاریته ویتن با ویژه مقادیر  $+1$  و  $-1$  هستند. همان طور که گفتیم ابرتقارن در مکانیک کوانتومی در واقع مدل ساده شده ای از ابرتقارن در نظریه میدان است [۸]. اما این نظریه مستقل از نظریه میدان کاربردهای وسیعی یافته است و از جنبه های مختلف مورد بررسی قرار گرفته است [۲۶ و ۲۷]. برای معرفی مفاهیم مورد نیاز در این پایان نامه به طور مختصر به مرور مکانیک کوانتومی ابرتقارن می پردازیم؛ اما قبل از آن جبری که در ابرتقارن از آن استفاده می کنیم مورد بررسی قرار می دهیم:

### ۳-۱- جبر ابرتقارن:

چون ابرتقارن تقارن بین فرمیونها و بوزونها است، می دانیم که فرمیونها از اصل طرد پائولی تبعیت می کنند، بنابراین لازم است ابتدا جبر گراسمن را معرفی کنیم [۲۸].

### ۳-۱-۱ جبر گراسمن<sup>۱</sup>

متغیرهای گراسمن:

این متغیرها در واقع اعداد پادجابجاپذیر می باشند. یعنی اگر  $n$  متغیر گراسمن  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  داشته باشیم، رابطه زیر بین آنها برقرار است:

$$\theta_i \theta_j = -\theta_j \theta_i \quad (3-1)$$

از رابطه فوق نتیجه می شود:

<sup>1</sup> Grassmann Algebra

$$\theta_i^2 = 0 \quad (2-3)$$

بنابراین اگر یک تابع تنها به یک متغیر گراسمن،  $\theta$ ، بستگی داشته باشد، می توان آن را به صورت زیر بسط داد:

$$F(\theta) = a + b\theta \quad (3-3)$$

که در آن  $a, b$  اعداد ثابت حقیقی هستند.

اگر تابع گراسمن شامل  $n$  متغیر باشد،  $\theta \equiv ((\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n))$ ، آنگاه بسط تابع  $F(\theta)$  را به صورت زیر داریم:

$$F(\theta) = F^{(0)} + \sum F_i^{(1)} \theta_i + \sum F_{ij}^{(2)} \theta_i \theta_j + \dots + \sum F_{ij\dots n}^{(n)} \theta_i \theta_j \dots \theta_n \quad (4-3)$$

### مشتق گیری:

مشتق گیری در جبر گراسمن از دو سمت چپ و راست انجام می گیرد. اگر از تابع

$$F(\theta) = \theta_1 \theta_2$$

از سمت راست نسبت به  $\theta_i$  مشتق بگیریم، داریم:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} (\theta_1 \theta_2) = \delta_{i1} \theta_2 - \delta_{i2} \theta_1 \quad (5-3)$$

و هنگامی که تابع  $F(\theta)$ ، حاصلضرب  $m$  متغیر گراسمن باشد، آنگاه داریم:

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} (\theta_1 \theta_2 \dots \theta_m) = \delta_{i1} \theta_2 \theta_3 \dots \theta_m - \delta_{i2} \theta_1 \theta_3 \dots \theta_m + \dots + (-1)^{m-1} \delta_{im} \theta_1 \theta_2 \dots \theta_{m-1}$$

$$(6-3)$$

مشتق از سمت چپ نسبت به  $\theta_i$ ، به صورت زیر تعریف می شود:

$$(\theta_1 \theta_2) \frac{\partial}{\partial \theta_i} = \delta_{i2} \theta_1 - \theta_2 \delta_{i1} \quad (7-3)$$

اگر حاصلضرب  $m$  متغیر گراسمن را داشته باشیم، آنگاه داریم:

$$(\theta_1 \dots \theta_m) \frac{\partial}{\partial \theta_i} = \delta_{mi} \theta_1 \dots \theta_{m-1} - \delta_{(m-1)i} \theta_1 \dots \theta_{m-2} \theta_m + \dots + (-1)^{m-1} \delta_{1i} \theta_2 \theta_3 \dots \theta_m \quad (8-3)$$

چون متغیرهای گراسمن پادجابجاپذیر هستند، مشتق های پاره ای آنها نیز پادجابجاپذیر می باشند:

$$\{d\theta_i, d\theta_j\} = 0 = \{\theta_i, d\theta_j\}$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_i}, \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right\} = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \frac{\partial}{\partial \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_i} = 0 \quad (9-3)$$

برای اثبات این رابطه از اثر تابع  $F(\theta_1, \theta_2)$  برپادجایایی (9-3) استفاده می‌کنیم:

$$F(\theta_1, \theta_2) = a + b\theta_1 + c\theta_2 + d\theta_1\theta_2$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_1}, \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right\} F(\theta_1, \theta_2) = \frac{\partial}{\partial \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_2} F(\theta_1, \theta_2) + \frac{\partial}{\partial \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_1} F(\theta_1, \theta_2) = \quad (10-3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} (c - d\theta_1) + \frac{\partial}{\partial \theta_2} (b + d\theta_1) = -d + d = 0$$

### انتگرال:

می‌دانیم که در انتگرال معمولی هنگامی که بر روی تمام فضا انتگرال می‌گیریم، می‌توان رابطه زیر را نوشت:

$$\int h(x) dx = \int h(x+a) dx \quad (11-3)$$

در مورد انتگرال تابع گراسمن نیز می‌توان همین عمل را انجام داد:

$$\int h(\theta) d\theta = \int h(\theta+c) d\theta \quad (12-3)$$

با جایگذاری  $F(\theta) = a + b\theta$  در انتگرال فوق داریم:

$$\int (a + b\theta) d\theta = \int (a + b\theta + bc) d\theta \quad (13-3)$$

اگر  $I_1 = \int \theta d\theta, I_0 = \int d\theta$  را در رابطه فوق جایگذاری کنیم، بدست می‌آید:

$$aI_0 + bI_1 = (a + bc)I_0 + bI_1 \quad (14-3)$$

ملاحظه می‌شود که جواب  $I_1 = 1, I_0 = 0$  در رابطه فوق صدق می‌کند. بنابراین تعریف می‌کنیم:

$$\int d\theta = 0$$

$$\int \theta d\theta = 1 \quad (15-3)$$

$$\int \theta_j d\theta_i = \delta_{ij}$$

### متغیرهای زوج و فرد گراسمن:

اگر تعداد فردی از متغیرهای گراسمن در هم ضرب شوند، یک متغیر فرد گراسمن (0) و اگر تعداد زوجی از متغیرهای گراسمن در هم ضرب شوند، یک متغیر زوج گراسمن (E) به وجود می آید. می توان ثابت کرد که این متغیرها در رابطه زیر صدق می کنند:

$$\begin{aligned} [0_1, 0_2]_+ &= 0 \\ [E_1, E_2]_- &= 0 \\ [E, 0]_- &= 0 \end{aligned} \quad (۱۶-۳)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} [A, B]_- &= AB - BA \\ [A, B]_+ &= AB + BA \end{aligned} \quad (۱۷-۳)$$

تعریف شده اند [۲۸].

## ۲-۳ مکانیک کوانتومی ابرتقارن

برای ساخت مکانیک کوانتومی ابرتقارن، از روش کوانتیده کردن دیراک استفاده می کنیم بدین منظور ابتدا از یک لاگرانژین کلاسیکی که شامل متغیرهای گراسمن نیز هست، شروع می کنیم. اندازه حرکت‌های تعمیم یافته (کانونی) متناظر با متغیرهای بوزونی (جابجاپذیر) و فرمیونی (گراسمن) را تعریف می کنیم و سپس گروه های پواسون را برای هر دسته متغیر بدست می آوریم [۲۹ و ۳۰ و ۳۱ و ۳۲ و ۳۳]

### ۱-۲-۳ لاگرانژین کلاسیکی

لاگرانژین زیر را در نظر می گیریم:

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, \theta_\alpha, \dot{\theta}_\alpha) \quad (۱۸-۳)$$

که در آن  $q_i$  ها متغیرهای معمولی می باشند و  $\theta_\alpha$  متغیرهای گراسمن هستند. فرض می کنیم  $L$  نسبت به متغیرهای گراسمن زوج باشد، در این صورت یک تغییر کوچک در لاگرانژین به صورت زیر خواهد بود:

$$\delta L = \delta q_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \delta \theta_\alpha \frac{\partial L}{\partial \theta_\alpha} + \delta \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \delta \dot{\theta}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\alpha} \quad (۱۹-۳)$$

اگر اندازه حرکت‌های کنونی را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\pi^\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\alpha} \quad (۲۰-۳)$$

آنگاه تغییرات لاگرانژین را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\delta L = \delta q_i \frac{\partial L}{\partial \theta_\alpha} + \delta \theta_\alpha \frac{\partial L}{\partial \theta_\alpha} + \delta \dot{q}_i p^i + \delta \dot{\theta}_\alpha \pi^\alpha \quad (۲۱-۳)$$

چون  $\theta$  ها، متغیرهای گراسمن هستند، داریم:

$$[\pi^\alpha, \theta_\beta]_+ = \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\alpha}, \theta_\beta \right]_+ = 0 \quad (۲۲-۳)$$

از اکستریم کردن کنش  $S = \int L dt$  معادلات حرکت زیر بدست می‌آید:

$$\dot{p}^\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$$\dot{\pi}^\alpha = \frac{\partial L}{\partial \theta_\alpha} \quad (۲۳-۳)$$

مشابه با مورد کلاسیکی با متغیرهای معمولی می‌توانیم هامیلتونی را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$H = \dot{q}_i p^i + \dot{\theta}_\alpha \pi^\alpha - L \quad (۲۴-۳)$$

هدف ساختن گروه پواسون برای متغیرهاست. برای این کار ابتدا یک تغییر کوچک در  $H$  می-

دهیم:

$$\delta H = \dot{q}_i \delta p^i - \dot{\theta}_\alpha \delta \pi^\alpha - \delta q_i \dot{p}^i - \delta \theta_\alpha \dot{\pi}^\alpha \quad (۲۵-۳)$$

که از روابط فوق می‌توانیم معادلات زیر را بدست آوریم:

$$\begin{aligned}\pi^\alpha &= -\frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha} \\ p^i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \theta_\alpha &= \frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}_\alpha} \\ q_i &= \frac{\partial H}{\partial \dot{p}_i}\end{aligned}\tag{۲۶-۳}$$

ونیز:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t} + \left( \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p^i} - \frac{\partial A}{\partial p^i} \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial \pi^\alpha} \frac{\partial A}{\partial \theta_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha} \frac{\partial A}{\partial \pi^\alpha} \right) = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}\tag{۲۷-۳}$$

که در آن  $\{A, H\}$  عبارتست از:

$$\{A, H\} = \left( \frac{\partial H}{\partial p^i} \frac{\partial A}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p^i} \right) - \left( \frac{\partial H}{\partial \pi^\alpha} \frac{\partial A}{\partial \theta_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial \theta_\alpha} \frac{\partial A}{\partial \pi^\alpha} \right)\tag{۲۸-۳}$$

بنابراین می توان برای دو کمیت A, B کروشۀ پواسون تعمیم یافته را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\{A, B\} = \left( \frac{\partial B}{\partial p^i} \frac{\partial A}{\partial q_i} - \frac{\partial B}{\partial q_i} \frac{\partial A}{\partial p^i} \right) - \left( \frac{\partial B}{\partial \pi^\alpha} \frac{\partial A}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial B}{\partial \theta_\alpha} \frac{\partial A}{\partial \pi^\alpha} \right)\tag{۲۹-۳}$$

در معادله (۲۸-۳)، H به گونه‌ای نوشته شده است که نسبت به  $\theta$  زوج باشد بنابراین رابطه (۳-۲۹) نیز به شرطی که B زوج باشد، صحیح است. می‌دانیم که متغیرهای گراسمن به دو دسته زوج (E) و فرد (O) تقسیم می شوند که در روابط (۳-۱۶) صدق می کنند و به عنوان تعریف کروشۀ پواسون هنگامی که  $\varepsilon$  یک عدد ثابت فرد باشد، داریم:

$$\varepsilon \{E, O\} = \{\varepsilon E, O\} = \{E, \varepsilon O\}\tag{۳۰-۳}$$

با استفاده از این دانسته‌ها، می‌توانیم کروشۀ پواسون را برای حالت‌های مختلف زوج و فرد بررسی کنیم:

**الف) کروشۀ پواسون با متغیرهای زوج و زوج:** با استفاده از رابطه (۳-۲۹) داریم:

$$\{E_1, E_2\} = \left( \frac{\partial E_1}{\partial q_i} \frac{\partial E_2}{\partial p^i} - \frac{\partial E_2}{\partial \theta_i} \frac{\partial E_1}{\partial p^i} \right) + \left( \frac{\partial E_1}{\partial \theta_i} \frac{\partial E_2}{\partial \pi^\alpha} - \frac{\partial E_2}{\partial \theta_\alpha} \frac{\partial E_1}{\partial \pi^\alpha} \right)\tag{۳۱-۳}$$



که در آن،  $\frac{\partial E}{\partial \pi^\alpha}, \frac{\partial E}{\partial \theta_\alpha}$  متغیرهای فرد هستند. می توانیم روابط زیر را برای این گروه ثابت کنیم:

$$\begin{aligned} \{E_1, E_2\} &= -\{E_2, E_1\} \\ \{E_1, E_2 E_3\} &= E_2 \{E_1, E_3\} + \{E_1, E_2\} E_3 \\ \{E_1, \{E_2, E_3\}\} + \{E_2, \{E_1, E_3\}\} + \{E_3, \{E_1, E_2\}\} &= 0 \end{aligned} \quad (32-3)$$

(ب) گروه پواسون با متغیرهای فرد-زوج: از رابطه (29-3) بدست می آید:

$$\{O, E\} = \left( \frac{\partial O}{\partial q_i} \frac{\partial E}{\partial p^i} - \frac{\partial E}{\partial q^i} \frac{\partial O}{\partial p^i} \right) - \left( \frac{\partial O}{\partial \theta_\alpha} \frac{\partial E}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial E}{\partial \theta_\alpha} \frac{\partial O}{\partial \pi^\alpha} \right) \quad (33-3)$$

که از آن می توان روابط زیر را اثبات کرد:

$$\begin{aligned} \{O, E_1 E_2\} &= E_1 \{O, E_2\} + \{O, E_1\} E_2 \\ \{O_1 O_2, E\} &= O_1 \{O_2, E\} + \{O_1, E\} O_2 \\ \{O E_1, E_2\} &= O \{E_1, E_2\} + \{O, E_2\} E_1 \end{aligned} \quad (34-3)$$

(ج) گروه پواسون متغیرهای زوج-فرد: از رابطه (30-3) استفاده می کنیم، بنابراین داریم:

$$\varepsilon \{E, O\} = \{E, \varepsilon O\} = \left( \frac{\partial E}{\partial q_i} \frac{\partial (\varepsilon O)}{\partial p^i} - \frac{\partial (\varepsilon O)}{\partial q_i} \frac{\partial E}{\partial p^i} \right) + \left( \frac{\partial E}{\partial \theta_\alpha} \frac{\partial (\varepsilon O)}{\partial \pi^\alpha} - \frac{\partial (\varepsilon O)}{\partial \theta_\alpha} \frac{\partial E}{\partial \pi^\alpha} \right) \quad (35-3)$$

روابط این گروه عبارتند از:

$$\begin{aligned} \{E, O\} &= -\{O, E\} \\ \{E_1 E_2, O\} &= E_1 \{E_2, O\} + \{E_1, O\} E_2 \\ \{E_1, O E_2\} &= O \{E_1, E_2\} + \{E_1, O\} E_2 \\ \{E_1, \{E_2, O\}\} + \{E_2, \{O, E_1\}\} &= 0 \end{aligned} \quad (36-3)$$

(د) گروه پواسون با متغیرهای فرد-فرد: با استفاده از رابطه (30-3) داریم:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon E, O\} = \varepsilon \{E, O\} &= \varepsilon \left( \frac{\partial E}{\partial q_i} \frac{\partial O}{\partial p^i} - \frac{\partial O}{\partial q_i} \frac{\partial E}{\partial p^i} \right) + \varepsilon \left( \frac{\partial E}{\partial \theta_\alpha} \frac{\partial O}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial O}{\partial \theta_\alpha} \frac{\partial E}{\partial \pi^\alpha} \right) \\ &= \left( \frac{\partial (\varepsilon E)}{\partial q_i} \frac{\partial O}{\partial p^i} + \frac{\partial O}{\partial q_i} \frac{\partial (\varepsilon E)}{\partial p^i} \right) - \left( \frac{\partial (\varepsilon E)}{\partial \theta_\alpha} \frac{\partial O}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial O}{\partial \theta_\alpha} \frac{\partial (\varepsilon E)}{\partial \pi^\alpha} \right) \end{aligned} \quad (37-3)$$

بنابراین برای حالت فرد-فرد گروه پواسون را به این صورت داریم:

$$\{O_1, O_2\} = \left( \frac{\partial O_1}{\partial q_i} \frac{\partial O_2}{\partial p^i} + \frac{\partial O_2}{\partial q_i} \frac{\partial O_1}{\partial p^i} \right) - \left( \frac{\partial O_1}{\partial \theta_\alpha} \frac{\partial O_2}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial O_2}{\partial \theta_\alpha} \frac{\partial O_1}{\partial \pi^\alpha} \right) \quad (38-3)$$

از حالت تقارنی رابطه بالا می بینیم که رابطه  $\{O_1, O_2\} = \{O_2, O_1\}$  برقرار است و روابط دیگر عبارتند از:

$$\begin{aligned} \{O_1 O_2 O_3\} &= O_1 \{O_2, O_3\} - \{O_1, O_3\} O_2 \\ \{EO_1, O_2\} &= E\{O_1, O_2\} - \{E, O_2\} O_1 \\ \{E, \{O_1, O_2\}\} + \{O_1, \{O_2, E\}\} + \{O_2, \{E, O_1\}\} &= 0 \end{aligned} \quad (39-3)$$

و برای هر سه متغیر رابطه زیر را داریم:

$$\{A, B + C\} = \{A, B\} + \{A, C\} \quad (40-3)$$

حال در موقعیتی هستیم که بتوانیم سیستم را کوانتایی کنیم. ابتدا گروه دیراک تعمیم یافته را تعریف می کنیم. سپس می بینیم که در حد کلاسیکی، گروه دیراک تعمیم یافته به گروه پواسون تعمیم یافته تبدیل می شود.

اگر  $A$  یک عملگر مکانیک کوانتومی باشد، تحت عملگر تبدیل پاریته،  $P$ ، بدین صورت در می آید:

$$p^{-1} \hat{A} p = (-1)^{\pi(A)} \hat{A}$$

$$\begin{aligned} \pi(\hat{A}) &= 0 \\ or \\ \pi(\hat{A}) &= 1 \end{aligned} \quad (41-3)$$

یک عملگر زوج، عملگری است که یک حالت زوج (فرد) را به یک حالت زوج (فرد) تبدیل کند. در حالی که یک عملگر فرد، یک حالت زوج (فرد) را به یک حالت فرد (زوج) تبدیل می کند. در اینجا یک سیستم دینامیکی را در نظر گرفته ایم که ویژه مقادیر  $P$  به دو دسته زوج و فرد تقسیم شده اند و  $P$  با هامیلتونی جابجاپذیر است:

$$[P, H] = 0 \quad (42-3)$$

گروه دیراک تعمیم یافته  $[\hat{A}, \hat{B}]$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} [\hat{A}, \hat{B}] &= -(-1)^{ab} [\hat{A}, \hat{B}] \\ [\hat{A}, \hat{B}] &= -(-1)^{ab} [\hat{B}, \hat{A}] \end{aligned} \quad (43-3)$$

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + (-1)^{ab} \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] \quad (44-3)$$

$$[\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}] \quad (45-3)$$

$$[\hat{A}[\hat{B}\hat{C}]] + (-1)^{a(b+c)}[\hat{B}[\hat{C}\hat{A}]] + (-1)^{c(a+b)}[\hat{C}[\hat{A}\hat{B}]] = 0 \quad \text{اصل ژاکوبی} \quad (۴۶-۳)$$

که در آن  $\hat{D}, \hat{C}, \hat{B}, \hat{A}$  عملگرهای دلخواه هستند و  $d, c, b, a$  به ترتیب جانشین  $\pi(\hat{D}), \pi(\hat{C}), \pi(\hat{B}), \pi(\hat{A})$  شده اند.

از رابطه (۴۳-۳) می توانیم نتایج زیر را بدست آوریم:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{A}, \hat{B}]_+ \quad \hat{B}, \hat{A} \text{ فرد هستند} \quad (۴۷-۳)$$

$$[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{A}, \hat{B}]_- \quad \hat{B}, \hat{A} \text{ زوج هستند} \quad (۴۸-۳)$$

مقدار  $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\hat{D}]$  را می توان با استفاده از (۴۴-۳) و سپس با استفاده از (۴۳-۳) بدست آورد.

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\hat{D}] = [\hat{A}, \hat{C}](\hat{B}\hat{D} - (-1)^b \hat{D}\hat{B}) = (\hat{A}\hat{C} - (-1)^{ac} \hat{C}\hat{A})[\hat{B}, \hat{D}] \quad (۴۹-۳)$$

با استفاده از قاعده جابجایی در مکانیک کوانتومی، می توان قوانین زیر را برای گروه دیراک بدست آورد:

$$\begin{aligned} [\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_j] &= [\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j] = 0 \\ [\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_j] &= i\hbar \delta_{ij} \end{aligned} \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (۵۰-۳)$$

که در آن باید عملگرهای مختصات تعمیم یافته ( $\alpha$ ) و اندازه حرکت کانونی ( $\beta$ ) به صورت عملگرهای زوج و فرد مطابق با (۴۷-۳) و (۴۸-۳) مشخص شوند. در حد کلاسیکی (هنگامی که  $\hbar$  به سمت صفر میل می کند). معادله (۴۹-۳) به صورت زیر در می آید:

$$\frac{\hat{B}\hat{D} - (-1)^{bd} \hat{D}\hat{B}}{\{B, D\}} = \frac{\hat{A}\hat{C} - (-1)^{ac} \hat{C}\hat{A}}{\{A, C\}} \quad (۵۱-۳)$$

اگر عملگرهای  $A, B$  را زوج در نظر بگیریم، به روابط زیر خواهیم رسید:

$$\lim_{\hbar} \frac{[\hat{A}, \hat{B}]}{\hbar} = \{A, B\} \quad (۵۲-۳)$$

و رابطه (۴۳-۴) به صورت زیر در می آید:

$$\hat{A}\hat{B} - (-1)^{ab} \hat{B}\hat{A} = i\hbar \{A, B\} \quad (۵۳-۳)$$

و روابط جابجایی عملگرها را با استفاده از قاعده (۵۲-۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} [\hat{E}_1, \hat{E}_2]_- &= i\hbar \{E_1, E_2\} \\ [\hat{O}, \hat{E}]_- &= i\hbar \{O, E\} \\ [\hat{O}_1, \hat{O}_2]_+ &= i\hbar \{O_1, O_2\} \end{aligned} \quad (۵۴-۳)$$

بنابراین عملگرهای فرد به صورت پادجابجاگرها و بقیه با جابجاگرها کوانتیده شده اند.

با استفاده از نتیجه (۳-۵۲) می توانیم کروشه پواسون تعمیم یافته را با روابط کروشه دیراک تعمیم یافته (۳-۴۳) و (۳-۴۴) و (۳-۴۵) و (۳-۴۶) به صورت زیر پیوند دهیم:

$$\begin{aligned} \{A, B\} &= -(-1)^{ab} \{B, A\} \\ \{A, B+C\} &= \{A, B\}C + (-1)^{ab} B\{A, C\} \\ \{A, B+C\} &= \{A, B\} + \{A, C\} \\ \{A, \{B, C\}\} + (-1)^{a+(b+c)} \{B, \{C, A\}\} + (-1)^{c(a+b)} \{C, \{A, B\}\} &= 0 \end{aligned} \quad (۳-۵۵)$$

که در آن  $a = \pi(A) = \pi(\hat{A})$  و  $c = \pi(C) = \pi(\hat{C})$ .

برای اثبات (۳-۵۵) می توان از روابط کروشه های پواسون تعمیم یافته استفاده کرد. روابط کروشه پواسون تعمیم یافته با استفاده از روابط (۳-۵۰) به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} \{\alpha_i, \alpha_j\} &= \{\beta_i, \beta_j\} = 0 \\ \{\alpha_i, \beta_j\} &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (۳-۵۶)$$

ریاضیات ابر تقارن را با تعریف عملگرهای  $A, A^+$  به این صورت ادامه می دهیم [۳۴ و ۳۵]:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \\ A^+ &= -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \end{aligned} \quad (۳-۵۷)$$

در این صورت عملگرهای هامیلتونی  $H_1, H_2$  به این صورت نوشته می شوند:

$$\begin{aligned} H_1 &= A^+ A \\ H_2 &= A A^+ \end{aligned} \quad (۳-۵۸)$$

$$\begin{aligned} H_1 &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) & V_1(x) &= W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \\ H_2 &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) & V_2(x) &= W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \end{aligned} \quad (۳-۵۹)$$

در همین راستا روابط جابجاپذیری به این صورت برقرار است:

$$\begin{aligned} [H_1, A] &= [A^+ A, A] = 0 \\ [H_1, A^+] &= [A^+ A, A^+] = 0 \end{aligned} \quad (۳-۶۰)$$

$$\begin{aligned}
[H_2, A] &= [AA^+, A] = 0 \\
[H_2, A^+] &= [AA^+, A^+] = 0 \\
[A, Q_1] &= [A^+, Q_1] = 0 \\
[A, Q_2] &= [A^+, Q_2] = 0
\end{aligned}
\tag{۶۱-۳}$$

کمیت  $W(x)$  به ابرپتانسیل در مکانیک کوانتومی ابرتقارن اشاره دارد و  $V_{1,2}(x)$  به عنوان پتانسیل های همراه ابرمتقارن شناخته می شوند. ویژه مقادیر انرژی، توابع موج و ماتریس های  $S$  هامیلتونی  $H_1, H_2$  به هم وابسته هستند. اگر  $E$  یک ویژه مقدار  $H_1$  باشد، ویژه مقدار  $H_2$  نیز خواهد بود و در نتیجه ویژه مقادیر  $H_1, H_2$  مقادیر مثبت و متناهی هستند ( $E_n^{(1,2)} \geq 0$ ). و معادله شرودینگر برای  $H_1$  به این صورت است :

$$H_1 \psi_n^{(1)} = A^+ A \psi_n^{(1)} = E_n^{(1)} \psi_n^{(1)} \tag{۶۲-۳}$$

اگر عملگر  $A$  را بر طرفین رابطه اثر دهیم :

$$H_2 (A \psi_n^{(1)}) = AA^+ \psi_n^{(1)} = E_n^{(1)} (A \psi_n^{(1)}) \tag{۶۳-۳}$$

و به طور مشابه برای  $H_2$  معادله به این صورت در می آید:

$$H_2 \psi_n^{(2)} = AA^+ \psi_n^{(2)} = E_n^{(2)} \psi_n^{(2)} \tag{۶۴-۳}$$

$$H_1 (A^+ \psi_n^{(2)}) = A^+ AA^+ \psi_n^{(2)} = E_n^{(2)} (A^+ \psi_n^{(2)}) \tag{۶۵-۳}$$

با توجه به روابط بالا مشخص می شود که اگر  $E$  یک ویژه مقدار هامیلتونین  $(H_2)H_1$  با ویژه تابع  $\psi$  باشد، در این صورت  $E$  نیز ویژه مقدار هامیلتونین  $(H_1)H_2$  و ویژه تابع به صورت  $A\psi(A^+\psi)$  می باشد. زمانی که  $n=0$  باشد  $A\psi_0^1 = 0$  یعنی حالت پایه به وسیله عملگر  $A$  به حداقل می رسد. با توجه به این مسئله رابطه بین ویژه حالت های هر دو هامیلتونی به این وابسته خواهد بود که  $A\psi_0^1$  مقدار صفر داشته باشد یا اینکه مخالف صفر باشد و به عبارت دیگر  $E_0^1$  صفر باشد یا اینکه مقداری مخالف صفر داشته باشد.

توجه بالا در حالت  $A\psi_0^{(1)} = 0$  شکسته می شود، یعنی هنگامی که حالت پایه با عملگر  $A$  از بین می رود. بنابراین ارتباط دقیقی بین ویژه حالت های دو هامیلتونی زمانی که  $A\psi_0^{(1)}$  صفر باشد یا نباشد وجود دارد، یعنی اگر حالت پایه  $E_0^{(1)}$  صفر باشد یا صفر نباشد [۳۴ و ۳۵] :

حالت اول  $A\psi_0^{(1)} \neq 0$ : این حالت همهٔ مورد‌ها شامل حالت پایه و همهٔ ویژه حالت‌های هر دو هامیلتونی که جفت شده اند را نتیجه می‌دهد.

$$\begin{aligned} \psi_n^{(2)} &= \{E_{n-1}^{(1)}\}^{-\frac{1}{2}} A \psi_{n+1}^{(1)} & E_n^{(2)} &= E_{n+1}^{(1)} \\ \psi_{n+1}^{(1)} &= \{E_n^{(2)}\}^{-\frac{1}{2}} A^+ \psi_n^{(2)} & E_0^{(1)} &= 0 \end{aligned} \quad (۶۶-۳)$$

حالت دوم  $A\psi_0^1 = 0$ : در این حالت  $E_0^1 = 0$  و این یک حالت غیرجفت شده است، زمانی که بقیهٔ حالت‌های هر دو هامیلتونی جفت شده باشند. کاملاً مشخص است که ویژه مقادیر و ویژه توابع برای هر دو هامیلتونی  $H_1, H_2$  به این وسیله به هم مرتبط می‌شوند:

معادله  $A\psi_0^{(1)} = 0$  را به دو روش مختلف می‌توان توضیح داد: یا با ابرپتانسیل  $W(x)$  یا تابع موج حالت پایه  $\psi_0^{(1)}$  که شناخته شده است. در حالت  $W(x)$  می‌توانیم معادله  $A\psi_0^{(1)} = 0$  را با استفاده از معادله (۵۷-۳) حل کرده و تابع موج حالت پایه  $H_1$  را با عبارتهایی شامل ابرپتانسیل بدست آورد:

$$\psi_0^{(1)} = N \exp\left[-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int W(y) dy\right] \quad (۶۷-۳)$$

چنانچه  $\psi_0^{(1)}$  شناخته شده باشد، آنگاه این معادله به ما ابرپتانسیل  $W$  را به این صورت می‌دهد:

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\psi_0'^{(1)}(x)}{\psi_0^{(1)}(x)} \quad (۶۸-۳)$$

چندین نکته از این حالت برداشت می‌شود:

(۱) توجه کنید که اگر  $\psi_{n+1}^{(1)}(\psi_n^2)$  برای  $H_1(H_2)$  بهنجار شده باشد، در این صورت تابع موج  $\psi_{n+1}^{(1)}(\psi_n^2)$  نیز بهنجار شده است.

(۲) عملگر  $A(A^+)$  نه تنها یک ویژه تابع  $H_2(H_1)$  را به یک ویژه تابع دیگر  $H_1(H_2)$  با انرژی مشابه تبدیل می‌کند همچنین یک گره اضافی را در ویژه تابع ایجاد می‌کند (از بین می‌برد).

(۳) توابع موج حالت پایه در  $X = \pm\infty$  به حداقل مقدار خود می‌رسد، در این صورت با توجه به معادله (۶۷-۳) کاملاً واضح است، که  $A\psi_0^1 = 0$  و  $A^+\psi_0^{(2)} = 0$  نمی‌توانند به طور همزمان برقرار باشند. در این هنگام یکی از انرژی‌های حالت پایه می‌تواند صفر باشد. در تمام این رابطه‌ها  $W$  به گونه‌ای انتخاب می‌شود که  $\psi_0^1$  بهنجار شده باشد، به طوری که  $E_0^2 > 0$ .

(۴) در حالتی که  $A\psi_0^1 = 0$  است، زمانی که تابع موج حالت پایه  $H_1$  به وسیله عملگر  $A$  به حداقل مقدار خود می‌رسد، در این حالت هیچ همراه ابرتقارنی وجود نخواهد داشت. بنابراین با دانستن همه ویژه توابع  $H_1$  با استفاده از عملگر  $A$  ویژه توابع  $H_2$  را می‌توان مشخص کرد و بر عکس با استفاده از عملگر  $A^+$ ، با دانستن ویژه توابع  $H_2$  می‌توان ویژه توابع  $H_1$  را بدست آورد (تمام این حالات بدون در نظر گرفتن حالت پایه اتفاق می‌افتد).

برای بررسی تبهگنی  $H_1, H_2$  از جبر ابرتقارن به این صورت می‌توانیم کمک بگیریم: اگر ماتریس هامیلتونی برای ابرتقارن را چنان در نظر بگیریم، که هر دو هامیلتونی  $H_1, H_2$  را در بر می‌گیرد [۳۵].

$$H = \begin{vmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{vmatrix} \quad (۶۹-۳)$$

این ماتریس همه عملگرهای فرمیونی و بوزونی و رابطه‌های جابه‌جاپذیری و پادجابه‌جاپذیری بین آنها را شامل می‌شود. آنگاه با انتخاب عملگرها به شکل:

$$Q = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{vmatrix}, Q^+ = \begin{vmatrix} 0 & A^+ \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (۷۰-۳)$$

رابطه‌های جابه‌جایی و پادجابه‌جایی به این صورت نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} [H, Q] &= [H, Q^+] = 0 \\ \{Q, Q^+\} &= H \\ \{Q, Q\} &= \{Q^+, Q^+\} = 0 \end{aligned} \quad (۷۱-۳)$$

### ۳-۳ هامیلتونی ابرتقارن

همان طور که بیان شد، لاگرانژین فرمیونها و بوزونها در دو فضای زمان-مکان مختلف بیان می‌شود. بنابراین حالت‌های بوزونی و فرمیونی نیز به دو فضای جداگانه تعلق دارند. ابرتقارن به عنوان تقارنی بین حالت‌های بوزونی و فرمیونی به کار می‌رود. به این صورت که به وسیله ابرتقارن می‌توان حالت‌های فرمیونی و بوزونی را در یک فضای بزرگتر (اجتماع دو فضای فرمیونی و بوزونی) بیان کرد و حالت‌های فرمیونی (بوزونی) را به حالت‌های بوزونی (فرمیونی) تبدیل کرد. برای توضیح چگونگی این

عمل در مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی، هامیلتونی یک نوسانگر هارمونیک بوزونی را در دستگاه مختصات تعمیم یافته  $q, p$  به صورت زیر می نویسیم [۲۸ و ۲۹ و ۳۱ و ۳۳]:

$$H_B = p^2 + \frac{1}{4} \omega_B q^2 \quad (۷۲-۳)$$

که در آن  $[q, p] = i$  و  $\hbar = 1$  است. عملگرهای بالابرنده و پایین آورنده زیر را تعریف می کنیم:

$$b^+ = (\omega_B)^{-\frac{1}{2}} \left( ip - \frac{\omega_B}{2} q \right) \quad (۷۳-۳)$$

$$b = (\omega_B)^{\frac{1}{2}} \left( ip + \frac{\omega_B}{2} q \right)$$

می توان نشان داد که روابط جابجایی این عملگرها به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} [b, b^+] &= 1 \\ [b, b] &= [b^+, b^+] = 0 \end{aligned} \quad (۷۴-۳)$$

هامیلتونی بر حسب این عملگرها به صورت زیر در می آید:

$$H_B = \omega_B [b^+, b]_+ \quad (۷۵-۳)$$

اگر  $n_B$  ترازهای انرژی بوزونی را نشان دهد، طیف انرژی این نوسانگرها عبارت خواهد بود از:

$$E_B = \omega_B \left( n_B + \frac{1}{2} \right) \quad (۷۶-۳)$$

حال عملگرهای  $a^+, a$  را که از قوانین پادجابجایی فرمیونی تبعیت می کنند تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} [a, a^+]_+ &= 1 \\ [a, a] &= [a^+, a^+] = 0 \end{aligned} \quad (۷۷-۳)$$

اگر هامیلتونی سیستم فرمیونی را به صورت زیر بنویسیم:

$$H_F = \omega_F [a^+, a] \quad (۷۸-۳)$$

طیف انرژی، در صورتی که  $n_F$ ، نشاندهنده ترازهای انرژی فرمیونی باشد، عبارتند از:

$$E_F = \omega_F \left( n_F - \frac{1}{2} \right) \quad (۷۹-۳)$$

چون فرمیونها با توابع موج پادمقارن بیان می شوند، بنابراین از آمار فرمی دیراک پیروی می کنند. بنابراین برای تعداد ذرات در یک تراز داریم:  $n_F = n_F^2$ . بدیهی است که  $n_F$  تنها می تواند، ۰ و ۱ باشد یک سیستم متشکل از یک فرمیون و یک بوزون دارای هامیلتونی زیر است:



$$H_S = H_B + H_F = \omega_F a^+ a + \omega_B b^+ b \quad (۸۰-۳)$$

و ویژه مقدارهای آن چنین می شود:

$$E = E_B + E_F = \omega_B n_B + \omega_F n_F + \frac{1}{2}(\omega_B - \omega_F) \quad (۸۱-۳)$$

از معادلهٔ اخیر دیده می شود که اگر  $\omega_B = \omega_F$  باشد، به ازای یک انرژی ثابت با نابود شدن یک بوزون ( $n_B \rightarrow n_B - 1$ ) باید یک فرمیون خلق ( $n_F \rightarrow n_F + 1$ ) شود و بالعکس. پس برای اینکه بتوانیم یک طیف متقارن داشته باشیم، می توانیم  $\omega_B = \omega_F = \omega$  در نظر بگیریم. در این صورت هامیلتونی و انرژی سیستم عبارت خواهد بود از:

$$H = \omega(a^+ a + b^+ b) \quad (۸۲-۳)$$

$$E = \omega(n_B + n_F)$$

چون  $n_F$  تنها دو مقدار ۰ و ۱ را می تواند اختیار کند، بنابراین هر انرژی تبهگن دوگانه است، به جز در حالت پایه که تنها یک حالت غیر تبهگن داریم. ( $n_B = n_F = 0$ ) که دارای انرژی صفر است. صفر بودن انرژی حالت پایه و غیر تبهگنی آن کمک می کند تا SUSY غیر شکسته داشته باشیم. چون تبهگنی SUSY این نتیجه را می دهد که همزمان با خلق (نابودی) یک بوزون، یک فرمیون نابود(خلق) شود. بنابراین عملگری می سازیم که چنین خاصیتی داشته باشد:

$$Q = \omega^{\frac{1}{2}} b a^+ \quad (۸۳-۳)$$

$$Q^+ = \omega^{\frac{1}{2}} b^+ a$$

دیده می شود که  $Q$  یک فرمیون خلق و یک بوزون نابود می کند و بالعکس  $Q^+$  یک فرمیون نابود و یک بوزون خلق می کند. بنابراین اثر این عملگرها را بر حالت‌های فرمیونی و بوزونی می توان دید:

$$Q|B\rangle = |F\rangle \quad (۸۴-۳)$$

$$Q^+|F\rangle = |B\rangle$$

به طوری که برای یک حالت متشکل از  $n_F$  فرمیون و  $n_B$  بوزون ( $|n_B, n_F\rangle$ ) داریم:

$$Q|n_B, n_F\rangle = |n_B - 1, n_F + 1\rangle \quad (۸۵-۳)$$

$$Q^+|n_B, n_F\rangle = |n_B + 1, n_F - 1\rangle$$

با استفاده از عملگرهای هامیلتونی را به صورت زیر داریم:

$$H_S = \{Q^+, Q\} \quad (۸۶-۳)$$

می توان نشان داد که روابط زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} \{Q, Q\} &= \{Q^+, Q^+\} = 0 \\ [Q, H_S] &= [Q^+, H_S] = 0 \end{aligned} \quad (۸۷-۳)$$

می توان عملگرهای فرمیونی را به صورت ماتریس‌های پائولی نمایش داد. بنابراین می‌توانیم  $a, a^+$  را به صورت عملگرهای بالابرنده و پایین آورنده پائولی نمایش دهیم:

$$\begin{aligned} a &= \sigma = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ a^+ &= \sigma_+ = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (۸۸-۳)$$

که از روابط پادجابجایی تبعیت می‌کنند. هامیلتونی (۶۱-۳) و (۶۳-۳) را می‌توان با استفاده از نمایش (۸۸-۳) به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} H_S &= \omega [b^+, b]_+ + \frac{\omega}{2} \sigma_3 = (-p^2 + \frac{1}{4} \omega^2 q^2) I + \frac{1}{2} \omega \sigma_3 \\ &= \omega \begin{vmatrix} bb^+ & 0 \\ 0 & b^+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H_2 & 0 \\ 0 & H_1 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (۸۹-۳)$$

که در آن  $I$  ماتریس یکه و  $\sigma_3 = [\sigma_+, \sigma_-]$  است. ملاحظه می‌شود که این هامیلتونی ابرتقارنی به طور ساده‌ای، نشاندهنده یک نوسانگر بوزونی است که با یک ذره با اسپین  $\frac{1}{2}$  در یک میدان مغناطیسی جفت شده است.

### ۳-۴ هامیلتونی‌های همتا و تابع ابرپتانسیل

برای تعمیم هامیلتونی SUSY اگر در معادله (۸۹-۳) به جای مختصات  $\frac{1}{2} \omega q$  تابع معمولی

$$W(x) \text{ قرار دهیم، داریم } [۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳]:$$

$$\begin{aligned} A &= (W(x) + \frac{d}{dx}) \\ A^+ &= (W(x) - \frac{d}{dx}) \end{aligned} \quad (۹۰-۳)$$

که در آن،  $i \frac{d}{dx}$  جانشین  $p$  و  $A^+, A$  جانشین  $b, b^+$  شده اند و با جایگذاری (۷۷-۳) و (۸۸-۳) در (۸۳-۳) داریم:

$$Q = (ip - W(x))\sigma_+ = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ A^+ & 0 \end{vmatrix} \quad (۹۱-۳)$$

$$Q^+ = (ip + W(x))\sigma_- = \begin{vmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

که در آن  $Q, Q^+$  ابربار<sup>۱</sup> نامیده می شود. با قرار دادن (۹۰-۳) و (۹۱-۳) در هامیلتونی (۸۶-۳) داریم:

$$H_S = \{Q^+, Q\} = (p^2 + W^2)I + \sigma_3 W' = \{A, A^+\} + \sigma_3 [A, A^+] =$$

$$= \begin{vmatrix} AA^+ & 0 \\ 0 & AA^+ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H_2 & 0 \\ 0 & H_1 \end{vmatrix} \quad (۹۲-۳)$$

که در این روابط  $W(x)$  ابرپتانسیل<sup>۲</sup> نامیده می شود و  $W'$  مشتق  $W$  به  $x$  می باشد و  $H_1, H_2$  به هامیلتونی های همتا<sup>۳</sup> معروفند.

### ۳-۵ عملگرهای بالابرنده و پایین آورنده

طیف انرژی هامیلتونی  $H$ ، در حالت گسسته به صورت زیر می باشد [۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲ و ۳۳]:

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle \quad (۹۳-۳)$$

که در آن،  $|n\rangle$  ویژه حالت های هامیلتونی و  $E_n$  ویژه مقدارهای آن می باشد. همیشه می توان یک عملگر پایین آورنده  $R$  و یک عملگر بالابرنده  $R^+$  بسازیم که به این صورت باشد:

$$R = \sum C_{n-1}^* |n-1\rangle\langle n| \quad (۹۴-۳)$$

$$R^+ = \sum C_n |n+1\rangle\langle n|$$

بنابراین اثر آنها بر یک ویژه حالت  $H$ ،  $|k\rangle$  چنین است:

$$R|k\rangle = C_{k-1}^* |k-1\rangle \quad (۹۵-۳)$$

$$R^+|k\rangle = C_k |k+1\rangle$$

<sup>1</sup> Supercharge

<sup>2</sup> Super Potential

<sup>3</sup> partener

که در آن ضرایب  $C_n$  به طور دلخواه انتخاب شده اند. به ترتیب با ضرب  $R, R^+$  در (۳-۹۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} RR^+|k\rangle &= |C_k|^2|k\rangle \\ R^+R|k\rangle &= |C_{k-1}|^2|k\rangle \end{aligned} \quad (۳-۹۶)$$

دسته روابط بالا، این نکته را بیان می کند که ویژه حالت‌های عملگرهای  $RR^+$  و  $R^+R$  همان ویژه حالت‌های  $H$  هستند. بنابراین با ترکیب  $RR^+$  و  $R^+R$  می توان  $H$  را به صورت زیر ساخت:

$$H = \sum a_{mn} (R^+R)^m (RR^+)^n \quad (۳-۹۷)$$

ساده ترین صورت هامیلتونی از ترکیب خطی  $RR^+$  و  $R^+R$  بدست می آید:

$$H = a_{00} + a_{10}RR^+ \quad (۳-۹۸)$$

اگر  $R = A, R^+ = A^+, a_0 = \varepsilon_0, a_{01} = \sigma_- \sigma_+, a_{10} = \sigma_+ \sigma_-$  انتخاب شوند، هامیلتونی فوق به صورت ابرتقارن زیر خواهد بود که با معادله (۳-۹۲) مطابقت دارد:

$$H = \varepsilon_0 I + \begin{vmatrix} AA^+ & 0 \\ 0 & A^+A \end{vmatrix} = \varepsilon_0 I + \begin{vmatrix} H_2 & 0 \\ 0 & H_1 \end{vmatrix} \quad (۳-۹۹)$$

که در آن  $\varepsilon_0$  انرژی حالت پایه  $H$  است. در بخش‌های آینده چگونگی ساخت هامیلتونی‌های همتای  $H_1, H_2$  و طریقه استفاده از  $A, A^+$  را به عنوان عملگرهای بالابرنده و پایین برنده خواهیم دید.

### ۳-۶ هامیلتونی ابرتقارن $N=1$ و $N=2$

برای بدست آوردن ساختار کلی نظریه SUSY لازم است که فضا-زمان معمولی را به یک فضا-زمان تعمیم دهیم که شامل مجموعه‌ای از درجات آزادی اسپین است [۳۰ و ۳۱ و ۳۳].

به عبارت دیگر برای وحدت بوزون ها و فرمیونها در یک ابرچندگانه منفرد، لازم است که فضای مینکوفسکی<sup>۱</sup> معمولی را به ابرفضا که هم شامل میدانهای فرمیونی و هم میدانهای بوزونی است تعمیم دهیم. برای سادگی ابرفضایی را در نظر می گیریم که به وسیله  $t, \theta$  ایجاد شده باشد که  $\theta$  یک متغیر پادجابجایی است ( $\theta^2 = 0$ ) برای بررسی تقارنهای وابسته به این فضا، انتقالهای زیر را در نظر می گیریم:

<sup>1</sup> Minkowskian

$$\begin{aligned}\theta &\rightarrow \theta' = \theta + \varepsilon \\ t &\rightarrow t' = t + i\varepsilon\theta\end{aligned}\quad (100-3)$$

که در آن  $\varepsilon$  یک متغیر گراسمن است. ابرمیدان زیر را در نظر بگیرید:

$$\varphi(t, \theta) = q(t) + i\theta\psi(t) \quad (101-3)$$

میدان به گونه ای نوشته شده که ناوردایی لاگرانژین تحت انتقال زمانی، بقای انرژی سیستم را نتیجه می دهد. در رابطه (101-3) میدانهای  $q(t)$  و  $\psi(t)$  به ترتیب متغیرهای بوزونی و فرمیونی هستند و ضریب  $i$  ثابت می شود که مختصه زمان حقیقی باشد. با یک تغییر کوچک در ابرمیدان  $\varphi(t, \theta)$  و استفاده از انتقالات (100-3) و جبر گراسمن داریم:

$$\begin{aligned}\delta\varphi &= \varphi(t', \theta') - \varphi(t, \theta) = q(t + i\theta\varepsilon) + i(\theta + \varepsilon)\psi(t + i\theta\varepsilon) - q(t) - i\theta\psi(t) \\ &= q(t) + i\varepsilon\theta\dot{q}(t) + i(\theta + \varepsilon)(\psi(t) + i\theta\varepsilon\dot{\psi}(t)) - q(t) - i\theta\psi(t) = i\varepsilon\theta\dot{q}(t) + i\varepsilon\psi(t)\end{aligned}\quad (102-3)$$

از طرفی داریم:

$$\delta\varphi(t, \theta) = \delta q \frac{\partial\varphi}{\partial q} + \delta\psi \frac{\partial\varphi}{\partial\psi} = \delta q(t) + i\theta\delta\psi \quad (103-3)$$

بنابراین بدست می آید:

$$\begin{aligned}\delta q &= i\varepsilon\psi \\ \delta\psi &= +\varepsilon\dot{q}\end{aligned}\quad (104-3)$$

و یا به صورت کلی تر داریم:

$$\delta\varphi = \varepsilon Q\varphi \quad (105-3)$$

که در آن  $Q$  به صورت زیر تعریف شده است:

$$Q = \frac{\partial}{\partial\theta} + i\theta \frac{\partial}{\partial t} \quad (106-3)$$

اگر یک بار دیگر  $Q$  را بر  $\varphi$  اثر دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}Q^2\varphi &= Q[i\psi(t) + i\theta\dot{q}] \\ \{Q, Q\}\varphi &= i\dot{\varphi}\end{aligned}\quad (107-3)$$

اگر  $\varphi$  را به صورت  $\frac{\partial}{\partial t}\varphi$  نشان دهیم، داریم:

$$i \frac{\partial}{\partial t}\varphi = \{Q, Q\}\varphi \quad (108-3)$$

که از آن می توان هامیلتونی  $H$  را به صورت زیر نتیجه گیری کرد:

$$H = \{Q, Q\} \quad (109-3)$$

مطالب فوق را که برای مکانیک کوانتومی ابرتقارنی با یک متغیر گراسمن ( $N=1$ ) بود، به سادگی به مورد  $N=2$  (با دو متغیر گراسمن) تعمیم دهیم. حالتی را در نظر می گیریم که دو متغیر پادجابجایی  $\theta_1, \theta_2$  را داشته باشیم.

مشابه با حالت  $N=1$ ، انتقالات  $N=2$  را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \theta_1 &\rightarrow \theta'_1 = \theta_1 + \varepsilon_1 \\ \theta_2 &\rightarrow \theta'_2 = \theta_2 + \varepsilon_2 \\ t' &\rightarrow t' = t + i\varepsilon_1\theta_1 + i\varepsilon_2\theta_2 \end{aligned} \quad (110-3)$$

که در آن مقدار  $dt - i\theta_1 d\theta_1 - i\theta_2 d\theta_2$  ناوردا می باشد. اگر به جای مختصات  $\theta_1, \theta_2$ ، مختصات  $\theta, \bar{\theta}$  را جایگزین کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2}(\theta_1 - i\theta_2) \\ \bar{\theta} &= \frac{1}{2}(\theta_1 + i\theta_2) \end{aligned} \quad (111-3)$$

معادلات انتقالی (110-3) به صورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned} \theta &\rightarrow \theta' = \theta + \varepsilon \\ \bar{\theta} &\rightarrow \bar{\theta}' = \theta + \varepsilon \\ t &\rightarrow t' = t + i\varepsilon\bar{\theta} + i\varepsilon\bar{\theta} \end{aligned} \quad (112-3)$$

که در آن :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{(\varepsilon_1 - i\varepsilon_2)}{\sqrt{2}} \\ \bar{\varepsilon} &= \frac{(\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (113-3)$$

می باشد. به طور کلی ابرمیدان در حالت  $N=2$  (مشابه با حالت  $N=1$ ) به صورت زیر بسط داده می شود:

$$\varphi(t, \theta, \bar{\theta}) = q(t) + i\theta\psi(t) + i\theta\bar{\psi}(t) + \theta\bar{\theta}A(t) \quad (114-3)$$

که در آن  $\psi, \bar{\psi}$  متغیرهای گراسمن هستند. برای بدست آوردن انتقالات توابع  $q(t), \psi(t), \bar{\psi}(t), A(t)$  تغییر کوچکی در  $\varphi$  ایجاد می کنیم:

$$\delta\varphi = \varphi(t, \theta, \bar{\theta}') - \varphi(t, \theta, \bar{\theta}) = (i\varepsilon\bar{\psi} + i\bar{\varepsilon}\psi) + i\theta\{-\bar{\varepsilon}(\dot{q} + iA)\} + i\theta\{-\bar{\varepsilon}(\dot{q} - iA)\} + i\theta\bar{\theta}\{\varepsilon\dot{\bar{\psi}} - \bar{\varepsilon}\dot{\psi}\} \quad (115-3)$$

و نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \delta q &= i\varepsilon\bar{\psi} + i\bar{\varepsilon}\psi \\ \delta A &= \varepsilon\dot{\bar{\psi}} - \bar{\varepsilon}\dot{\psi} \\ \delta\psi &= -\bar{\varepsilon}(\dot{q} + iA) \\ \sigma\psi &= \varepsilon(\dot{q} - iA) \end{aligned} \quad (116-3)$$

اگر مولدهای SUSY، یعنی  $Q, \bar{Q}$  را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\partial}{\partial\theta} + i\theta\frac{\partial}{\partial t} \\ \bar{Q} &= \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + i\bar{\theta}\frac{\partial}{\partial t} \end{aligned} \quad (117-3)$$

همیلتونی به صورت زیر در می‌آید:

$$H = \{Q, \bar{Q}\} \quad (118-3)$$

### ۷-۳ چگونگی ساخت همیلتونی و پتانسیل‌های همتا

یکی از کاربردهای ابرتقارن در مکانیک کوانتومی، حل پتانسیل‌ها می‌باشد. به این ترتیب که می‌توان با استفاده از پتانسیل‌های ساده شده پتانسیل‌های مشکل را ساخت و ویژه توابع و ویژه مقادیر پتانسیل حل شده را با روش عملگری به ویژه توابع و ویژه مقادیر حل نشده تبدیل کرد. این روش کم و بیش حل نوسانگر هارمونیک یک بعدی است. در نوسانگر هارمونیک یک بعدی با استفاده از عملگرهای نردبانی  $a, a^+$  و با داشتن یک تابع موج می‌توان بقیه توابع موج را ساخت. در همیلتونی ابرتقارن، با معرفی عملگرهای  $A, A^+$  می‌توان توابع موج یک پتانسیل را به توابع موج پتانسیل دیگر تبدیل کرد. در این قسمت همیلتونی‌های ابرتقارن و چگونگی کاربرد آنها را ذکر می‌کنیم [۲۸ و ۲۹ و ۳۰ و ۳۱ و ۳۲ و ۳۳ و ۳۴].

همیلتونی زیر را در نظر بگیرید:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad (119-3)$$

که ویژه توابع را با  $\psi_n^{(1)}(x)$  و ویژه مقادیر آن را با  $E_n$  نمایش می‌دهیم. برای حالت پایه داریم:

$$H\psi_0(x) = E_0\psi_0(x) \quad (120-3)$$

که در آن انرژی حالت پایه است. حال  $V_1(x)$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$V_1(x) = V(x) - E_0 \quad (121-3)$$

در این صورت هامیلتونی متناظر با پتانسیل  $V_1(x)$  عبارتست از:

$$H_1(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \quad (122-3)$$

واضح است که مقدار انرژی حالت پایه این هامیلتونی صفر است و انرژی ترازهای دیگر نسبت به انرژی  $H$  به اندازه  $E_0$  کاهش یافته است و چون  $V(x)$  و  $V_1(x)$  به جز در یک مقدار ثابت با یکدیگر یکسانند، بنابراین ویژه توابع آنها یکسان می‌باشند. اگر ویژه مقدار انرژی متناظر با پتانسیل  $V_1$  و  $E_n^{(1)}$  و ویژه توابع آن  $\psi_n^{(1)}(x)$  باشد داریم:

$$\begin{aligned} E_n^{(1)} &= E_n - E_0 \\ \psi_n^{(1)} &= \psi_n(x) \end{aligned} \quad (123-3)$$

هامیلتونی  $H_1$  را به صورت حاصلضرب دو عملگر می‌نویسیم:

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \left[ -\frac{d}{dx} + W(x) \right] \left[ \frac{d}{dx} + W(x) \right] \quad (124-3)$$

که در آن  $W(x)$  ابرپتانسیل است که در رابطه (۹۲-۳) معرفی کرده ایم. اگر دو عملگر  $A, A^+$  را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\begin{aligned} A^+ &= -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \\ A &= \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \end{aligned} \quad (125-3)$$

هامیلتونی  $H_1$  به صورت زیر در می‌آید:

$$H_1 = A^+ A = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \quad (126-3)$$

با جایگذاری تعاریف (۱۲۵-۳) در معادله (۱۲۶-۳)،  $V_1(x)$  بر حسب  $W(x)$  بدست می‌آید:



$$\begin{aligned}
H &= \left(-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x)\right) \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x)\right) = \\
&= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} W(x) + W(x) \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W^2(x) = \\
&= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \\
V_1(x) &= W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x)
\end{aligned} \tag{۱۲۷-۳}$$

چون انرژی حالت پایه صفر است  $(H\psi_0^{(1)}(x) = A^+ A\psi_0^{(1)}(x) = 0)$  داریم:

$$A\psi_0^{(1)}(x) = \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x)\right)\psi_0^{(1)}(x) = 0 \tag{۱۲۸-۳}$$

از رابطهٔ اخیر می توان  $W(x)$  را بر حسب  $\psi_0^{(1)}(x)$  و بالعکس بدست آورد:

$$W(x) = \frac{\hbar^2 \psi_0^{(1)'}(x)}{2m \psi_0^{(1)}(x)} \tag{۱۲۹-۳}$$

$$\psi_0^{(1)}(x) = N \exp\left[-\int W(x)dx\right]$$

در این معادلات علامت "پریم" معرف مشتق نسبت به  $x$  است و  $N$  ضریب بهنجارش می باشد. هامیلتونی دیگری به صورت زیر می سازیم:

$$H_2 = AA^+ = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) \tag{۱۳۰-۳}$$

با قرار دادن تعاریف (۱۲۵-۳) در معادلهٔ (۱۳۰-۳)  $V_2(x)$  بر حسب  $W(x)$  بدست می آید:

$$V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \tag{۱۳۱-۳}$$

پتانسیلهای  $V_1(x), V_2(x)$  را پتانسیلهای همتا و  $H_1, H_2$  را هامیلتونیهای همتا می نامند. حال می خواهیم به وسیلهٔ عملگرهای  $A, A^+$  ویژه توابع و ویژه مقادیر دو هامیلتونی همتا را به یکدیگر تبدیل کنیم. در حالت کلی داریم:

$$H_1\psi_n^{(1)} = A^+ A\psi_n^{(1)} = E_n^{(1)}\psi_n^{(1)} \tag{۱۳۲-۳}$$

اگر دو طرف رابطه را از سمت چپ در  $A$  ضرب کنیم، داریم:

$$H_2(A\psi_n^{(1)}) = AA^+(A\psi_n^{(1)}) = E_n^{(1)}(A\psi_n^{(1)}) \tag{۱۳۳-۳}$$

ملاحظه می شود که  $E_n^{(1)}$  ها ویژه مقادیر انرژی  $H_2$  نیز می باشند. بنابراین به جز در حالت پایه مقادیر انرژی  $H_1, H_2$  یکسان است. و همچنین با اثر  $A$  بر  $\psi_n^{(1)}$  (ویژه تابع  $H_1$ ) ویژه تابع  $H_2$  بدست می آید. به طور مشابه اگر  $\psi_n^{(1)}(x)$  و  $E_n^{(2)}$  به ترتیب ویژه توابع و ویژه مقادیر انرژی  $H_2$  باشند، داریم:

$$H_2 \psi_n^{(2)} = AA^+ \psi_n^{(2)} = E_n^{(2)} \psi_n^{(2)} \quad (134-3)$$

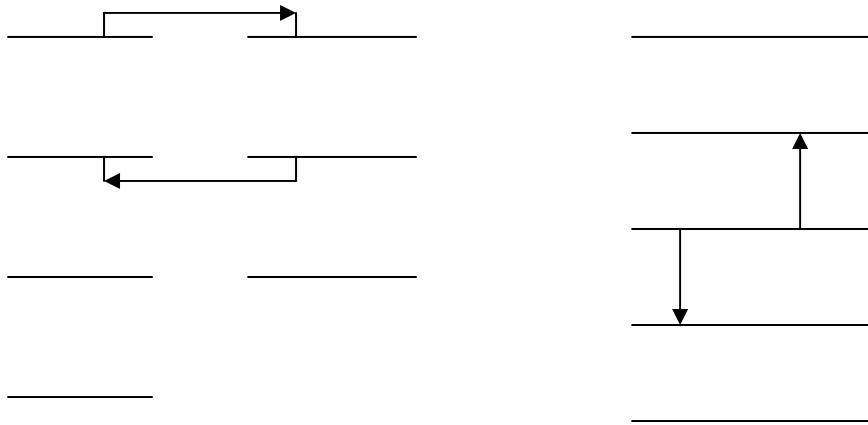
با ضرب  $A^+$  از سمت چپ در دو طرف رابطه فوق داریم:

$$H_1(A^+ \psi_n^{(2)}) = A^+ A(A \psi_n^{(2)}) = E_n^{(2)}(A^+ \psi_n^{(2)}) \quad (135-3)$$

معادله فوق نیز نشانگر آن است که  $E_n^{(2)}$  ویژه مقدار  $H_1$  می باشد و با اثر  $A^+$  بر توابع ویژه  $H_2$ ،  $\psi_n^{(2)}$  توابع ویژه  $H_1$  بدست می آید. اگر  $A \psi_n^{(1)}$  را متناسب با  $A^+ \psi_n^{(2)}(x), \psi_{n-1}^{(2)}(x)$  متناسب با  $\psi_n^{(1)}(x)$  در نظر بگیریم، با بهنجار کردن آنها بدست می آید:

$$\begin{aligned} E_0^{(1)} &= 0 \\ E_n^{(2)} &= E_{n+1}^{(1)} \\ \psi_n^{(2)} &= [E_{n+1}^{(1)}]^{-\frac{1}{2}} A \psi_{n+1}^{(1)} \\ \psi_{n+1}^{(1)} &= [E_{n+1}^{(2)}]^{-\frac{1}{2}} A^+ \psi_{n+1}^{(2)} \end{aligned} \quad (136-3)$$

البته اگر  $\psi_n^{(1)}(x)$  بهنجار باشند، با اثر  $A$  بر آنها  $\psi_n^{(2)}(x)$  ها نیز بهنجار خواهند بود و بالعکس. می بینیم که با داشتن ویژه توابع هامیلتونی  $(H_2)H_1$  می توان ویژه توابع  $(H_1)H_2$  را با اثر  $A(A^+)$  بر آنها بدست آورد. به جز در حالت پایه که همتای ابرتقارنی ندارد. در شکل (3-1) ترازهای انرژی  $H_2, H_1$  و نقش  $A, A^+$  نشان داده شده و با نقش عملگرهای  $a, a^+$  در نوسانگر هارمونیک مقایسه شده است.



شکل ۳-۱- نقش عملگرهای  $a^+, a, A^+, A$

### ۳-۸ تجزیه و سلسله مراتب هامیلتونی ها

در بخشهای گذشته دیدیم که چگونه می توان با استفاده از عملگر  $A$  ویژه توابع  $H_1$  را به ویژه توابع  $H_2$  تبدیل کرد. در مرحله بعدی می توانیم  $W_2$  را چنان بدست آوریم که پتانسیل همتای دیگری به نام  $V_3$  برای  $V_2$  پیدا کنیم. اگر به همین ترتیب  $V_4, V_5$  را بدست آوریم، یک دسته پتانسیل و همراه با آن یک دسته هامیلتونی  $H_1, H_2$  بدست می آوریم که ویژه مقادیر یکسانی دارند. با این تفاوت که هر هامیلتونی یک تراز انرژی از هامیلتونی قبلی کمتر دارد. در این بخش طریقه بدست آوردن دسته هامیلتونی های ابرتقارن را بیان می کنیم [۳۳]:

هامیلتونی  $H_1$  را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$H_1 = A_1^+ A_1 + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \quad (۳-۱۳۷)$$

که در آن  $E_0^{(1)}$  انرژی حالت پایه  $H_1$  و  $A_1, A_1^+$  به صورت زیر تعریف شده اند:

$$A_1 = \frac{d}{dx} + W_1(x) \quad (۳-۱۳۸)$$

$$A_1^+ = -\frac{d}{dx} + W_1(x)$$

در این صورت هامیلتونی SUSY و پتانسیل همتای  $V_2$  به صورت زیر در می آید:

$$H_2 = A_1 A_1^+ + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) \quad (139-3)$$

$$V_2(x) = W_1^2 + W_1' + E_0^{(1)} = V_1(x) + 2W_1' = V_1(x) - \frac{d^2}{dx^2} \text{Ln}(\psi_0^{(1)})$$

که در آن  $W_1 = -\frac{d}{dx} \text{Ln}(\psi_0^{(1)})$  می باشد. از معادلات (۱۳۶-۳) می دانیم:

$$E_{n+1}^{(1)} = E_n^{(2)} \quad (140-3)$$

$$\psi_n^{(2)} = (E_{n+1}^{(2)} - E_0^{(1)})^{-\frac{1}{2}} A_1 \psi_{n+1}^{(1)}$$

از رابطه فوق واضح است که انرژی حالت پایه  $H_2$  برابر  $E_0^{(2)} = E_1^{(1)}$  و تابع موج حالت پایه آن  $\psi_0^{(2)}$  می باشد. بنابراین با داشتن  $\psi_0^{(2)}$  می توانیم  $W_2, A_2, A_2^+$  را بسازیم:

$$W_2 = -\frac{d}{dx} \text{Ln}(\psi_0^{(2)})$$

$$A_2 = \frac{d}{dx} + W_2(x) \quad (141-3)$$

$$A_2^+ = \frac{d}{dx} + W_2(x)$$

همیلتونی  $H_2$  را می توان به صورت زیر برحسب  $A, A^+$  نوشت:

$$H_2 = A_1 A_1^+ + E_0^{(1)} = A_2^+ A_2 + E_1^{(1)} \quad (142-3)$$

بنابراین می توانیم همیلتونی همتهای  $(H_3)H_2$  را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$H_3 = A_2 A_2^+ + E_1^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_3(x) \quad (143-3)$$

که در آن  $V_3$  عبارتست از:

$$V_3(x) = W_2^2 + W_2' + E_1^{(1)} = V_2(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \text{Ln}(\psi_0^{(2)}) = \quad (144-3)$$

$$= V_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \text{Ln}(\psi_0^{(1)} \psi_0^{(2)})$$

بین ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع همیلتونی های  $H_3, H_2, H_1$  روابط زیر برقرار است:

$$E_n^{(3)} = E_{n+1}^{(2)} = E_{n+2}^{(1)} \quad (145-3)$$

$$\psi_n^{(3)} = (E_{n+1}^{(2)} - E_0^{(1)})^{-\frac{1}{2}} A_2 \psi_{n+1}^{(2)} = (E_{n+1}^{(1)} - E_1^{(1)})^{-\frac{1}{2}} (E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)})^{-\frac{1}{2}} A_2 A_1 \psi_{n+2}^{(1)}$$

بدیهی است که اگر  $H_1$  دارای  $(p)1$  حالت مقید باشد آنگاه می توان P هامیلتونی دیگر بدست آوریم که هامیلتونی m ام به جز m-1 تراز انرژی اولیه  $H_1$  مقادیر انرژی آن را دارا می باشد. برای هامیلتونی m ام داریم:

$$H_m = A_m^+ A_m + E_{m-1}^{(1)} = -\frac{d}{dx} + V_m(x) \quad m=2,3,\dots \quad (146-3)$$

$$A_m = \frac{d}{dx} + W_m(x)$$

$$A_m^+ = -\frac{d}{dx} + W_m(x) \quad (147-3)$$

$$W_m(x) = -\frac{d}{dx} \text{Ln}(\psi_0^{(m)})$$

$$E_n^{(m)} = E_{n+1}^{(m-1)} = \dots = E_{n+m+1}^{(1)} \quad (148-3)$$

$$\psi_n^{(m)} = (E_{n+m+1}^{(1)} - E_{m-2}^{(1)})^{-\frac{1}{2}} \dots (E_{n+m-1}^{(1)} - E_0^{(1)})^{-\frac{1}{2}} A_{m-1} \dots A_1 \psi_{n+m-1}^{(1)} \quad (149-3)$$

$$V_m(x) = V_1(x) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \text{Ln}(\psi_0^{(1)} \dots \psi_0^{m-1}) \quad (150-3)$$

در معادله (148-3)  $E_n^{(m)}$ ، تراز n ام انرژی از هامیلتونی m ام را نشان می دهد. با استفاده از روابط (132-4) می توان ضرایب انعکاس و انتقال موج را برای هامیلتونی m ام بدست آورد:

$$R_m(k) = \left(\frac{W_-^{(1)} - ik}{W_-^{(1)} + ik}\right) \dots \left(\frac{W_-^{(m-1)} - ik}{W_-^{(m+1)} + ik}\right) R_1(k) \quad (151-3)$$

$$T_m(k) = \left(\frac{W_-^{(1)} - ik}{W_-^{(1)} - ik'}\right) \dots \left(\frac{W_-^{(1)} - ik}{W_-^{(1)} - ik'}\right) T_1(k)$$

که در آن به جای  $W_m^{(m)}$ ، جایگذاری شده است و  $k', k$  توسط رابطه های زیر داده می شود:

$$k = [E - (W_-^{(1)})^2]^{\frac{1}{2}} \quad (152-3)$$

$$k' = [E - (W_+^{(1)})^2]^{\frac{1}{2}}$$

### ۳-۹ کاربردهای ابرتقارن

#### ۳-۹-۱ ذره در چاه پتانسیل

به عنوان اولین مثال از کاربردهای ابرتقارن ذره ای به جرم  $m$  را در نظر می گیریم که در یک چاه پتانسیل به عرض  $L$  محدود شده است و پتانسیل به این صورت بیان می شود [۳۴ و ۳۵]:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq L \\ \infty & -\infty < x < 0, x > L \end{cases} \quad (۱۵۳-۳)$$

تابع موج حالت پایه بهنجار شده:

$$\psi_0^1 = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \Rightarrow 0 \leq x \leq L \quad (۱۵۴-۳)$$

$$E_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \quad \text{وانرژی حالت پایه:}$$

اگر انرژی حالت پایه را از هامیلتونی کم کنیم ، یعنی  $H_1 = H - E_0$  ویژه مقادیر انرژی به این صورت بدست می آید:

$$E_n^1 = \frac{n(n+2)}{2mL^2} \hbar^2 \pi^2, n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (۱۵۵-۳)$$

و ویژه توابع بهنجار شده برای  $H_1$ :

$$\Psi_n^1 = \left(\frac{2}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \sin \frac{(n+1)x}{L} \Rightarrow 0 \leq x \leq L \quad (۱۵۶-۳)$$

با توجه به قسمت قبل ابرپتانسیل برای این مسئله به این صورت نوشته می شود:

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\pi}{L} \cot\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (۱۵۷-۳)$$

و پتانسیل همراه ابرتقارن:

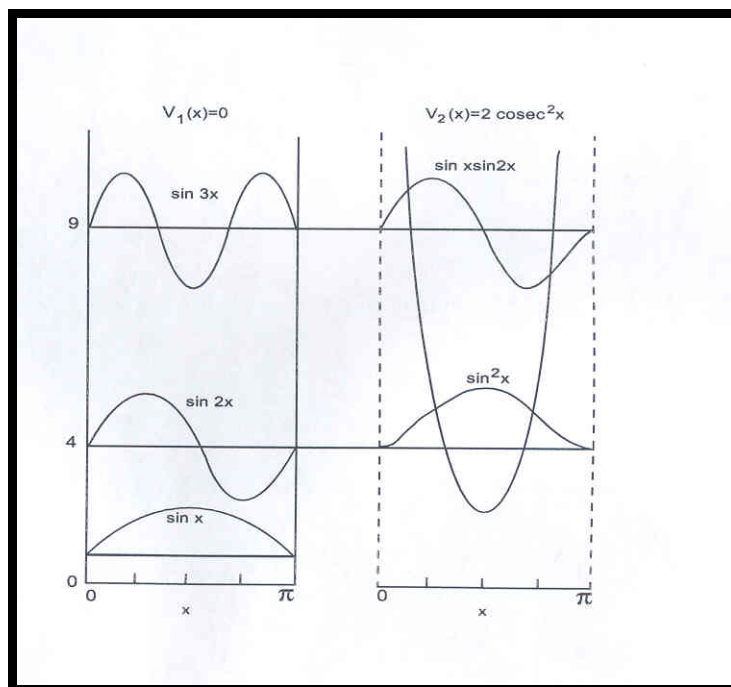
$$V_2(x) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} [2 \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) - 1] \quad (۱۵۸-۳)$$

همان طور که توضیح داده شد با عمل کردن عملگر  $A$  بر روی توابع موج  $H_1$ ، می توان توابع موج  $H_2$  را بدست آورد. توابع موج حالت پایه و اولین حالت برانگیخته به این صورت داده می شود:

$$\psi_0^2 = -2\sqrt{\frac{2}{3L}} \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (159-3)$$

$$\psi_1^2 = -\frac{2}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

بنابراین با استفاده از ابرتقارن نشان داده شد که دو نوع تقریباً متفاوت پتانسیل منطبق با  $H_1, H_2$  طیف های کاملاً مشابهی دارند. به جز برای حالتی که  $H_2$  شرط مرزی کمتری دارد. در شکل زیر پتانسیل های همراه ابرتقارن  $V_1, V_2$  نشان داده شده اند که ویژه توابع کوچکی دارند. برای راحتی کار  $L = \pi, \hbar = 2m = 1$  انتخاب شده اند.



شکل ۳-۲-چاه پتانسیل مربعی با عرض  $\pi$  و پتانسیل  $v=0$  و پتانسیل همراه  $V = 2 \operatorname{cosec}^2 x$

اکنون با استفاده از  $H_2$  و تابع موج حالت پایه که در معادله (۱۶۳-۳) داده شده است ابرپتانسیل  $W_2$  به این صورت بدست می آید :

$$W_2(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{2\pi}{L} \cot\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (160-3)$$

و پتانسیل مشترک  $V_3(x)$ :

$$V_3(x) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \left[ 6 \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) - 4 \right] \quad (161-3)$$

با استفاده از ابرپتانسیل  $W_2$  تابع موج حالت پایه  $V_3(x)$  با قرار دادن در معادله (۳-۱۵۶) بدست می آید :

$$\psi_0^3(x) \propto \sin^3\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (۳-۱۶۲)$$

بنابراین در حالت کلی می توانیم بگوییم که پتانسیل های همراه ابرتقارن از این رابطه تبعیت می کنند که می توان مقادیر مختلف پتانسیل های همراه را با قرار دادن مقادیر P بدست آورد:

$$V_{p+1}(x) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} [p(p+1) \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) - p^2] \quad (۳-۱۶۳)$$

و به همین ترتیب طیف های انرژی:

$$E_n^{(p+1)} = n(n+2p+2), n = 0, 1, 2, \dots \quad (۳-۱۶۴)$$

و نیز توابع موج حالت پایه :

$$\psi_0^{(p+1)} \propto \sin^{(p+1)}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (۳-۱۶۵)$$

دیدیم که با شروع از یک مسئله ساده به یافتن راه حل های جدید در حالت کلی دست پیدا کردیم. [۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵].

### ۳-۹-۲ یک مدل کلاسیکی ابرمتقارن

اگر هامیلتونی کلاسیکی ابرمتقارن را به این صورت در نظر بگیریم [۳۴ و ۳۶]:  $H_{Scl} = \{Q, Q^+\}$  و این رابطه نیز برقرار باشد:  $\{Q, Q\} = \{Q^+, Q^+\} = 0$  با استفاده از معادله حرکت هامیلتونی در براکت پواسون این روابط را بدست می آوریم:

$$\dot{Q} = \{Q, H_{Scl}\} = \{Q, \{Q, Q^+\}\} = -\{Q, \{Q, Q^+\}\} = -\dot{Q} \quad (۳-۱۶۶)$$

که شناسه ژاکوبی نیز مورد استفاده قرار گرفته است. بنابراین  $\dot{Q} = 0$  و متشابهاً  $\dot{Q}^+ = 0$ . اینها را می توان در این روابط نوشت:  $\{Q, H_{Scl}\} = \{Q^+, H_{Scl}\} = 0$ ،  $Q, Q^+$  را می توانیم به این صورت بنویسیم که:  $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} A \theta, Q^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} A^* \pi, A = W + ip$  که  $\{\theta, \pi\} = 1$  عبارتهای نوشته شده فقط مقیاسهای کلاسیکی منطبق با کمیت های کوانتومی می باشند. از رابطه های بالا به این نتیجه میرسیم که :



$$H_{Scl} = \frac{1}{2} \{A, A^*\} \theta \pi + \frac{1}{2} AA^* \{\theta, \pi\} = \frac{1}{2} P^2 + \frac{1}{2} W^2 - iW'\theta\pi \quad (۱۶۷-۳)$$

پتانسیل مکانیک کلاسیکی ابر تقارن به این صورت است:  $V_{Scl} = \frac{1}{2} W^2 - iW'\theta\pi$ ، اگر این پتانسیل را با آنچه که از حد کلاسیکی لاگرانژین مکانیک کوانتومی ابرتقارنی بدست می آید مقایسه کنیم، در این صورت لاگرانژین در مکانیک کلاسیکی ابر تقارنی به این صورت نوشته می شود:

$$L_{Scl} = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \frac{1}{2} u'^2 - \psi^+ \psi U'' + \frac{i}{2} (\psi^+ \dot{\psi} - \dot{\psi}^+ \psi) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{i}{2} (\psi^+ \dot{\psi} - \dot{\psi}^+ \psi) - V \quad (۱۶۸-۳)$$

و پتانسیل به این صورت نوشته می شود:  $V = \frac{1}{2} U'^2 + \psi^+ \psi U''$ . برای کامل کردن بحث لاگرانژین ابرتقارن مکانیک کلاسیکی معادلات حرکت را از (۳-۹۵) و جایگذاری  $V$  به این صورت نتیجه می گیریم:  $L_{Scl} = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \frac{1}{2} U'^2(x) + \frac{i}{2} (\psi \dot{\psi} - \dot{\psi} \psi) - U''(x) \psi \psi$ ، در این صورت به این رابطه ها می رسیم:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -iU''\psi \\ \dot{\bar{\psi}} &= iU''\bar{\psi} \\ \ddot{x} &= -(U'U'') - (U''')\bar{\psi}\psi \end{aligned} \quad (۱۶۹-۳)$$

با جایگذاری  $\bar{\psi}_0 = \bar{\psi}(0), \psi_0 = \psi(0)$  و جستجو برای یک حل کامل  $x(t)$  به صورت  $x(t) = \bar{x}(t) + c(t)\bar{\psi}_0\psi_0$  جوابهای  $\bar{\psi}(t), \psi(t), c(t)$  به این صورت بدست می آید:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \psi_0 \exp\left[-\int_0^t U''(\bar{x}(\tau)) d\tau\right] \\ \bar{\psi}(t) &= \bar{\psi}_0 \exp\left[i\int_0^t U''(\bar{x}(\tau)) d\tau\right] \\ c(t) &= \frac{\dot{\bar{x}}(t)}{\dot{\bar{x}}(0)} \left[ c(0) + \frac{\dot{\bar{x}}(0)}{2} \int \frac{\lambda - U''(\bar{x}(\tau))}{\mu - \frac{1}{2} U'^2(\bar{x}(\tau))} d\tau \right] \end{aligned} \quad (۱۷۰-۳)$$

در عبارت  $(t), \mu, \lambda, c(t)$  به عنوان ثابت های دلخواه انتگرال گیری به گونه ای وارد می شوند که با قانون بقای انرژی در تعامل باشند. به عبارت دیگر عبارت  $\bar{x}(t)$  ممکن است به عنوان یک کمیت شبه کلاسیکی برای  $x(t)$  مطرح شود [۴۱ و ۴۲].

### ۳-۹-۳ ابرتقارن دینامیکی

در مطالعه نظریه های ابرتقارن متداول این است که نخست بررسی خود را با یک نظریه آزاد که تحت تبدیلات ابرتقارن ناورداست شروع کنیم. (تبدیلات ابرتقارن تبدیلاتی که بوزون ها و فرمیون ها را به یکدیگر تبدیل می کند). این مسئله ایجاب می کند که بوزون ها و فرمیون ها در این نظریه جرم ها (فرکانس ها) برابری داشته باشند. تساوی جرم ها برای ابر همراهها یک موضوع نگران کننده است، چون بوزون ها و فرمیون ها با جرم های تبهگن در طبیعت مشاهده نشده- اند. شرط معادل بودن جرم ها می تواند در برخی از نظریه های ابرمتقارنی کاهش پیدا کند. در این قسمت ما نشان خواهیم داد که چگونه با مفهوم یک مدل مکانیک کوانتومی این نتیجه بدست می- آید. ابتدا با یک نظریه آزاد بوزونی و یک نوسانگر فرمیونی با فرکانس های نامساوی که ابرتقارن نیستند شروع می کنیم و نشان می دهیم که در حضور برهمکنش ها این نظریه ابرتقارن می شود. این همان موضوعی است که ما آن را ابرتقارن دینامیکی می نامیم [۳۴ و ۳۷ و ۳۸].

هامیلتونی برای یک نظریه کوانتوم مکانیکی که نوسانگر بوزونی و فرمیونی را در بر می گیرد به این وسیله شرح داده می شود:  $H_0 = \omega a^+ a + \epsilon c^+ c$ ، که در این رابطه ها  $a, c$  عملگر پایین آورنده به ترتیب برای بوزون و فرمیون می باشند و  $\omega, \epsilon$  فرکانس هر کدام می باشند. عملگر آفریننده و نابود کننده برای بوزون ها ( فرمیون ها ) در رابطه های جابه جایی (پادجابه جایی) صدق می کنند. زمانی که  $\omega = \epsilon$  نوسانگر ابرمتقارن تعریف می شود که این نوسانگر تحت تبدیلات ابر تقارن به وسیله ابر بارها ناورداست [۳۸ و ۳۹ و ۴۰].

$$Q = a^+ a, \bar{Q} = c^+ a \quad (۱۷۱-۳)$$

ولی در این بحث فرض می کنیم که  $\omega \neq \epsilon$  می باشد. بنابراین طبق موضوعی که در ابتدا عنوان شد اگر فرکانس ها (جرم ها) معادل نباشند ابر تقارنی وجود نخواهد داشت. هامیلتونی برهمکنش به این صورت تعریف می شود [۴۱ و ۴۲].

$$H = \omega a^+ a + \epsilon c^+ c + g(a^+ + a)c^+ c \quad (۱۷۲-۳)$$

$g$  قدرت برهمکنش را نشان می دهد. در این صورت نشان خواهیم داد که با انتخاب پارامتر جفت شدگی به صورت:

$$\varepsilon - \omega = \frac{g^2}{\omega} \quad (173-3)$$

همیلتونی در معادله (۱۷۲-۳) ابرمتقارن می شود. برای نشان دادن این موضوع بارهای فرمیونی را به این صورت در نظر می گیریم:

$$Q = a^+ c \exp\left(\frac{g}{\omega}(a^+ - a)\right) \quad (174-3)$$

$$\bar{Q} = \exp\left(-\frac{g}{\omega}(a^+ - a)\right) c^+ a$$

رابطه های جابه جایی پذیر  $Q, \bar{Q}$  با H به این صورت نشان داده می شود:

$$[Q, H] = \left(\varepsilon - \omega - \frac{g^2}{\omega}\right) Q \quad (175-3)$$

$$[\bar{Q}, H] = -\left(\varepsilon - \omega - \frac{g^2}{\omega}\right) \bar{Q}$$

مشخص است هنگامی که شرط معادله (۱۷۳-۳) برقرار باشد این بارهای فرمیونی ثابت هستند و تبدیلات ابرتقارن تحت همیلتونی برهمکنش در معادله (۱۷۲-۳) ناورداست. و نیز می توان نشان داد که:

$$[Q, \bar{Q}]_+ = \frac{1}{\omega} \left[ H - \left(\varepsilon - \omega - \frac{g^2}{\omega}\right) c^+ c \right] \quad (176-3)$$

این رابطه نشان می دهد که بارهای ثابت  $Q, \bar{Q}$  جبر ابرتقارنی را زمانی که شرایط معادله (۳-۱۷۳) برقرار باشد به وجود می آورند. همیلتونی در معادله (۳-۱۷۳) می تواند به راحتی با ناوردایی تحت تبدیلات ابرتقارن تطبیق داده شود :

$$\delta a = -\lambda \left(1 + \frac{g}{\omega} a^+\right) \exp\left(\frac{g}{\omega}(a^+ - a)\right) c$$

$$\delta a^+ = -\frac{g}{\omega} \lambda a^+ c \exp\left(\frac{g}{\omega}(a^+ - a)\right) \quad (177-3)$$

$$\delta c = 0$$

$$\delta c^+ = \lambda a^+ \exp\left(\frac{g}{\omega}(a^+ - a)\right)$$

و نیز این رابطه برقرار است :

$$\begin{aligned}\bar{\delta}a &= \frac{g}{\omega} \bar{\lambda} \exp\left(-\frac{g}{\omega}(a^+ - a)\right)c^+ a \\ \bar{\delta}a^+ &= \bar{\lambda} \exp\left(-\frac{g}{\omega}(a^+ - a)\right)c^+ \left(1 + \frac{g}{\omega}a\right) \\ \bar{\delta}c &= \bar{\lambda} \exp\left(-\frac{g}{\omega}(a^+ - a)\right)a \\ \bar{\delta}c^+ &= 0\end{aligned}\tag{۱۷۸-۳}$$

که در این رابطه ها  $\bar{\lambda}, \lambda$  پارامترهای گراسمن برای تبدیلات ابرمتقارن می باشند.

بنابراین دیدیم که اگر چه در آغاز نظریه ابرمتقارن نبود و نوسانگرهای بوزونی و فرمیونی فرکانس ها (جرم ها) متفاوتی دارند، برای یک مقدار خاص قدرت برهمکنش هامیلتونی برهمکنش ابرمتقارن می شود. در این صورت نظریه به صورت دینامیکی به ابرتقارن تبدیل شده است. هنگامی که بوزون ها و فرمیون ها فرکانس های متفاوتی دارند می توانیم ساختار طیف ابرتقارن حالت ها را در این نظریه بررسی کنیم. اگر رابطه های زیر برقرار باشد:

$$\begin{aligned}Q \left| n_a, n_c = 1 \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n_a!}} a^+ \left(a^+ - \frac{g}{\omega}\right)^{n_a} \left| \frac{g}{\omega}, n_c = 0 \right\rangle \\ \bar{Q} \left| n_a + 1, n_c = 0 \right\rangle &= \sqrt{\frac{n_a + 1}{n_a!}} \left(a^+ + \frac{g}{\omega}\right)^{n_a} \left| -\frac{g}{\omega}, n_c = 1 \right\rangle\end{aligned}\tag{۱۷۹-۳}$$

و حالت های مرتبط به این صورت تعریف می شوند:

$$\left| \alpha, n_c \right\rangle = \exp(\alpha(a^+ - a)) \left| n_a = 0, n_c \right\rangle\tag{۱۸۰-۳}$$

مشاهده می شود که در این حالت رابطه بین حالت های مشترک ابرتقارن اختلال به سادگی نظریه های معمول ابرتقارن نیست. اگر این تبدیلات تعمیم یافته را به وسیله عملگر توصیف کنیم:

$$U = \exp\left(-\frac{g}{\omega}(a^+ - a)c^+ c\right)\tag{۱۸۱-۳}$$

منجر به تبدیلات یکانی به این صورت می شود:

$$b = UaU^+ = (a + \frac{g}{\omega}c^+c)$$

$$b^+ = Ua^+U^+ = (a^+ + \frac{g}{\omega}c^+c)$$

(۱۸۲-۳)

$$f = UcU^+ = \exp(\frac{g}{\omega}(a^+ - a))c$$

$$f^+ = c^+ \exp(-\frac{g}{\omega}(a^+ - a))$$

این متغیرهای جدید در رابطه های جابجاپذیر کانونی مانند میدانهای واقعی در حالتی که تبدیل یکانی است صدق می کنند . اکنون مستقیماً می توانیم هامیلتونی برهمکنش در معادله (۱۷۲-۳) را بر حسب متغیرهای جدید به این صورت بنویسیم:

$$H = \omega b^+b + (\varepsilon - \frac{g^2}{\omega})f^+f \quad (۱۸۳-۳)$$

ویژه حالت های انرژی و ویژه مقادیر به این صورت نوشته می شوند:

$$H|n_b, n_f\rangle = E_{n_b, n_f}|n_b, n_f\rangle$$

(۱۸۴-۳)

$$E_{n_b, n_f} = \omega n_b + (\varepsilon - \frac{g^2}{\omega})n_f$$

در حالتی که  $n_b = 0, 1, 2, \dots$  و  $n_f = 0, 1$  .

زمانی که  $\varepsilon - \frac{g^2}{\omega} < 0$  حالت پایه نظریه ، فرمیونی می شود [۴۱] ، در حالی که اگر  $\varepsilon - \frac{g^2}{\omega} = 0$

فرمیون ها کاملاً از نظریه خارج می شوند و این موضوع از شکل هامیلتونی در معادله (۱۸۳-۳) و تبدیلات یکانی در معادله (۱۸۲-۳) کاملاً مشهود است [۳۸ و ۳۹ و ۴۰].

### ۳-۹-۴ ابر تقارن و معادله دیراک

یکی از مهمترین خصوصیات مکانیک کوانتومی ابرتقارنی این است که به طور طبیعی در عملگر دیراک بدون جرم کوانتیده ظاهر می شود [۴۳ و ۴۴ و ۴۵]. معادله دیراک را در (2+1) بعدی با جفت شدگی الکترومغناطیسی در نظر می گیریم:

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0 \quad (۱۸۵-۳)$$

که  $D_\mu = \mathfrak{R}_\mu + iqA_\mu$  و  $q = -|e|$ . ماتریس های  $\gamma$  به عنوان ماتریس های پائولی  $2 \times 2$  به این صورت در نظر گرفته می شوند:

$$\gamma_0 = \sigma_3, \gamma_1 = i\sigma_1, \gamma_2 = i\sigma_2 \quad (۱۸۶-۳)$$

با معرفی مشتقات هموردایی:

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{\partial}{\partial x} - ieA_1 \quad (۱۸۷-۳)$$

$$\mathfrak{R}_2 = \frac{\partial}{\partial y} - ieA_2$$

رابطه (۱۸۵-۳) در حالت بدن جرم به این صورت تبدیل می شود:

$$-(\sigma_1 \mathfrak{R}_1 + \sigma_2 \mathfrak{R}_2)\psi = \sigma_3 E \psi \quad (۱۸۸-۳)$$

این رابطه نمایشی به این صورت نیز دارد:

$$\begin{vmatrix} 0 & A \\ A^+ & 0 \end{vmatrix} \psi = -\sigma_3 E \psi \quad (۱۸۹-۳)$$

که  $A^+ = \mathfrak{R}_1 + i\mathfrak{R}_2$  و  $A = \mathfrak{R}_1 - i\mathfrak{R}_2$ . از رابطه های قبلی به این نتیجه می رسیم که :

$$2H_s \psi = E^2 \psi \quad (۱۹۰-۳)$$

همیلتونی ابرتقارن با اثر کردن روی تابع  $\psi$  مجذور انرژی را برای معادله بدون جرم اصلی می دهد. در حالتی که فرمیون جرم زیادی دارد ویژه مقدار در معادله (۱۹۰-۳) با  $E^2 \rightarrow E^2 - m^2$  جایگزین می شود. در ارتباط با رابطه بین بی هنجاری تک دستی و مدهای صفر فرمیونی jackiw سالها پیش همیلتونی را برای رابطه (۱۸۵-۳) به این صورت بدست آورد:

$$H = \vec{\alpha} \cdot (\vec{p} + e\vec{A}) \quad (۱۹۱-۳)$$

که  $\vec{\alpha} = (-\sigma^2, \sigma^1)$  نقش یک طیف متقارن با مدهای صفر را بازی می کند. این نوع تقارن در صورت ظاهر شدن یک عبارت جرمی شکسته می شود. در واقع در یک میدان مغناطیسی یکنواخت مجذور H با همیلتونی پائولی منطبق است.

همیلتونی دیراک به صورت حاصل جمع قسمت های زوج و فرد به این صورت نوشته می شود :

$$H_D = Q_1 + \beta m \quad (۱۹۲-۳)$$

که  $Q_1$  فرد است و عبارت جرمی که زوج است یک ضریب  $\beta$  دارد که با  $Q_1$  پادجایبپذیر است.

$$\{Q_1, \beta\} = 0 \quad (193-3)$$

اگر طرفین رابطه را به توان دو برسانیم :

$$H_D^2 = Q_1^2 + m^2 = H_s + m^2 \quad (194-3)$$

بنابراین H در حالت کلی به این صورت نوشته می شود :

$$H = UH_D U^{-1} = \beta(H_s + m^2)^{\frac{1}{2}} \quad (195-3)$$

مجذور H متناسب است با طرف راست معادله (3-194). اگر U یکانی باشد به این صورت نوشته می شود :

$$S = S^+ : U = \exp(iS)$$

$$S = -\frac{i}{2} \beta Q_1 K^{-1} \theta \quad (196-3)$$

$$\tan \theta = \frac{K}{m}$$

$$[\theta, \beta] = 0, \{H_D, S\} = 0$$

که K زوج است و با  $\sqrt{H_s}$  با علامت مثبت داده می شود و نیز :

$$U = \frac{E + \beta Q_1 + m}{[2e(E + m)]^{\frac{1}{2}}} \quad (197-3)$$

در حالی که  $E = (H_s + m^2)^{\frac{1}{2}}$ . ابرتقارن عملگر دیراک بدون جرم برای دو میدان خیلی مهم در نظریه کوانتوم ادامه پیدا می کند : نظریه های شاخص شناخته شده و بی هنجاری. در عوض یک حالت پایه دیراک پادمتقارن است که به این پدیده ها منجر می شود [43 و 44 و 45].

### ۳-۹-۵ ابرتقارن و معادله پائولی

در اینجا می خواهیم نشان دهیم که مفهوم ابرتقارن برای مسائل دو بعدی نیز می تواند به کار گرفته شود [43]. در حالت خاص می توان نشان داد که هامیلتونی پائولی که با مسئله ذره باردار در یک میدان مغناطیسی خارجی سروکار دارد ، اگر ضریب ژیرومغناطیس برابر ۲ باشد، همیشه می تواند در فرم ابرتقارن باشد. برای این موضوع ابرتقارن میدان مغناطیسی هم می تواند یکنواخت باشد و هم غیر یکنواخت.

همیلتونی پائولی برای حرکت ذره باردار در یک میدان مغناطیسی خارجی در دو بعد با در نظر گرفتن  $\hbar = 2m = e = 1$  به این صورت داده می شود:

$$H = (p_x + A_x)^2 + (p_y + A_y)^2 + \frac{g}{2} (\nabla \times A)_z \sigma_z \quad (198-3)$$

اگر برای  $Q^1$  و  $Q^2$  برای این  $H$  به این صورت نوشته می شود:

$$Q^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} [-(p_y + A_y)\sigma_x + (p_x + A_x)\sigma_y] \quad (199-3)$$

$$Q^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} [(p_x + A_x)\sigma_x + (p_y + A_y)\sigma_y]$$

زمانی که  $N=1$  باشد و ضریب ژیرومغناطیسی  $g=2$  باشد:

$$\{Q^\alpha, Q^\beta\} = H\delta^{\alpha\beta}, [H, Q^\alpha] = 0, \alpha, \beta = 1, 2 \quad (200-3)$$

اگر مقدار  $g$  را ثابت در نظر می گیریم. همیلتونی بالا یک تقارن به صورت  $o(2) \otimes o(2)$  دارد که از  $\sigma_z$  نتیجه می شود و یک چرخش در صفحه  $A^1, A^2$ ، که  $(A^1 \equiv p_x + A_x, A^2 \equiv p_y + A_y)$  اگر در ابتدا مسئله را در یک پیمانه پادمقارن بررسی کنیم، یعنی:

$$A_y(x, y) = 0, A_x(x, y) = W(y) \quad (201-3)$$

$W(y)$  یک تابع اختیاری برای  $y$  است. در این حالت همیلتونی پائولی به این صورت بدست می آید:

$$H = (p_x + W(y))^2 + p_y^2 = W'(y)\sigma_z \quad (202-3)$$

$H$  به  $x$  وابسته است. ویژه تابع  $\bar{\psi}$  به این صورت نوشته می شود:

$$\bar{\psi}(x, y) = e^{ikx}\psi(y) \quad (203-3)$$

که  $K$  ویژه مقدار عملگر  $p_x$  است  $(-\infty \leq k \leq \infty)$  معادله شرودینگر برای  $\psi(y)$  به این صورت نوشته می شود:

$$\left[-\frac{d^2}{dy^2} + (W(y) + k)^2 - W'(y)\sigma\right]\psi(y) = E\psi(y) \quad (204-3)$$

که  $\sigma = \pm 1$  ویژه مقدار عملگر  $\sigma_z$  است. بنابراین به این موضوع می رسیم که ابرتقارن در یک بعد با ابرپتانسیل  $W(y) + k$  بیان می شود که  $W(y)$  باید از  $k$  مستقل باشد. در حالت کلی می توان گفت که  $W(y)$  این شکلها را می تواند داشته باشد:



- 1)  $W(y) = \omega_c y + c_1$
  - 2)  $W(y) = a \tanh y + c_1$
  - 3)  $W(y) = a \tan y + c_1$
  - 4)  $W(y) = c_1 - c_2 \exp(-y)$
- (۲۰۵-۳)

در حالت خاص زمانی که  $W(y) = \omega_c y + c_1$  میدان مغناطیسی غیریکنواخت است، در این صورت ویژه مقادیر به صورت ترازهای لاندائو شناخته می شود و به این صورت داده می شوند :

$$E_n = (2n + 1 + \sigma)\omega_c, n = 0, 1, 2, \dots \quad (۲۰۶-۳)$$

در حالتی که  $E_n$  به  $k$  وابسته نیست و  $k$  در محدوده  $-\infty \leq k \leq \infty$  قرار می گیرد، حالت پایه و همه حالت‌های برانگیخته تبهگنی نامحدودی دارد. برای سایر انتخاب های  $W$  میدان مغناطیسی به این صورت در نظر گرفته می شود:

- 2)  $B = -a \operatorname{sech}^2 y$
  - 3)  $B = -a \sec^2 y \left( \frac{-\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right)$
  - 4)  $B = +c_2 \exp(-y)$
- (۲۰۷-۳)

حالا یک مسئله مشابه را در پیمانه متقارن بررسی می کنیم:

$$A_x = \omega_c y f(\rho), A_y = -\omega_c x f(\rho) \quad (۲۰۸-۳)$$

که  $\rho^2 = x^2 + y^2$  و  $\omega_c$  ثابت است. در این صورت میدان مغناطیسی  $B_z$  به این صورت داده می شود :

$$B_z(x, y) \equiv \partial_x A_y - \partial_y A_x = -2\omega_c f(\rho) - \omega_c \rho f'(\rho) \quad (۲۰۹-۳)$$

در این صورت هامیلتونی رابطه (۱۵۶-۳) به این صورت نوشته می شود :

$$H = -\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right) + \omega_c^2 \rho^2 f^2 - 2\omega_c f L_z - (2\omega_c f + \omega_c \rho f') \sigma_z \quad (۲۱۰-۳)$$

### ۳-۱۰ ابرتقارن شکسته شده

همان طور که در بخش‌های قبل ذکر شده برای هر  $H_1$ ، که انرژی حالت پایه آن را صفر فرض کنیم، یک هامیلتونی هم‌تای SUSY،  $H_2$ ، را می توانیم بیابیم. در این صورت ویژه مقادیر انرژی  $H_2$  برابر ویژه مقادیر انرژی  $H_1$  می باشد. به استثنای انرژی حالت پایه  $H_1$  که از طیف انرژی

$H_2$  حذف می شود بعلاوه، ویژه توابع هامیلتونی  $H_1$  با استفاده از روابط (۳-۱۴۰) قابل تبدیل به ویژه توابع  $H_2$  هستند و بالعکس. از روابط (۳-۱۴۰) بدیهی است که همتای ابرتقارنی ویژه حالت پایه  $H_1$  برابر صفر باشد. این گونه ابرتقارن را ابرتقارن غیرشکسته<sup>۱</sup> می گویند [۳۹ و ۴۷ و ۲۸ و ۴۶].

حال حالت دیگری را در نظر می گیریم. فرض کنید یک ابرتانسیل  $W(x)$  داده شده است. در این حالت بسته به اینکه انرژی حالت پایه  $H_1$  را صفر بگیریم و یا انرژی حالت پایه  $H_2$  را صفر بگیریم، دو حالت به وجود می آید. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A\psi_0^{(1)}(x) &= 0 & \psi_0^{(1)}(x) &= N \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{h} \int W(y) dy\right) \\ A^+\psi_0^{(2)}(x) &= 0 & \psi_0^{(2)}(x) &= N \exp\left(\frac{\sqrt{2m}}{h} \int W(y) dy\right) \end{aligned} \quad (۲۱۱-۳)$$

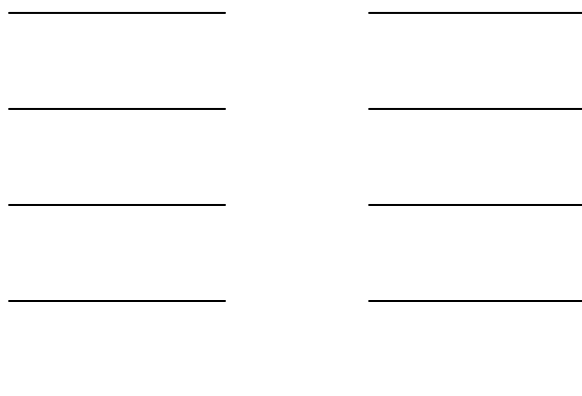
معمولاً  $W(x)$  را چنان انتخاب می کنیم که  $H_1$  دارای حالت پایه قابل بهنجار با انرژی صفر باشد، چنانچه  $W(x)$  مثبت(منفی) باشد، برای  $x$  های بزرگ مثبت(منفی) مطلب فوق صادق است. اگر هیچکدام از هامیلتونی های  $H_2, H_1$  دارای ویژه تابعی که در روابط (۳-۲۱۱) صدق کنند، نبودند و یا به عبارتی دیگر این دو هامیلتونی ویژه تابع حالت پایه قابل بهنجار با انرژی صفر نداشته باشند، آنگاه هامیلتونی های همتای  $H_2, H_1$  یک ابرتقارن شکسته را تشکیل می دهند. به طور کلی، هامیلتونی های همتای  $H_2, H_1$  شکسته هستند، اگر پایین ترین ویژه مقدار آنها تقارن داشته باشد(شکل ۳-۳) در این حالت می توانیم حالت پایه سیستم را با یک بردار ستونی دو مولفه ای نشان دهیم:

$$|0\rangle = \psi_0(x) = \begin{bmatrix} \psi_0^{(2)}(x) \\ \psi_0^{(1)}(x) \end{bmatrix} \quad (۲۱۲-۳)$$

توضیحات فوق نتیجه می دهند که تابع حالت پایه ابرتقارن غیرشکسته به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} |0\rangle = \psi_0(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_0^{(1)}(x) \end{bmatrix} \\ |0\rangle = \psi_0(x) &= \begin{bmatrix} \psi_0^{(2)}(x) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (۲۱۳-۳)$$

<sup>1</sup> Unbroken Supersymmetry



شکل (۳-۳) طیف انرژی  $V_2, V_1$  در ابرتقارن شکسته تبهگن می باشند.

که در این حالت لازم است که  $Q|0\rangle = 0$  یا  $Q^+|0\rangle = 0$  باشد.

در ابرتقارن شکسته،  $Q, Q^+$  نمی توانند با اثر بر تابع موج حالت پایه، آن را صفر کنند، زیرا بنا به تعریف در ابرتقارن شکسته ویژه تابع با انرژی صفر نداریم و ویژه مقادیر انرژی هامیلتونی های  $H_2, H_1$ ، تبهگن و مثبت هستند. در B-SUSY عملگرهای  $A, A^+$  با اثر بر ویژه توابع  $H_2, H_1$  تعداد گره ها (n) را تغییر دهند و در همه ویژه حالتها، یک تناظر یک به یک خواهیم داشت. در مجموع روابط در ابرتقارن شکسته به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
 E_n^{(1)} &= E_n^{(2)} \rangle 0 \\
 \psi_n^{(2)} &= [E_n^{(1)}]^{-\frac{1}{2}} A \psi_n^{(1)} \\
 \psi_n^{(1)} &= [E_n^{(2)}]^{-\frac{1}{2}} A^+ \psi_n^{(2)}
 \end{aligned}
 \tag{۲۱۴-۳}$$

همان طور که قبلاً گفته شد، زمانی که هامیلتونی نوسانگر هارمونیک تحت تبدیل عملگرهای بالابرنده و پایین برنده ناورداست، خلاصه که قبلاً به عنوان پایین ترین حالت مطرح شده بود حالا دیگر پایین ترین حالت نیست. به عبارت دیگر زمانی که درباره وجود یک ابرتقارن یا یک تقارن شکسته شده صحبت می کنیم، هامیلتونی ابرتقارن  $H_s$  مشابه حالت های پایه اش تحت تبدیل عملگرهای ابربار  $Q$  و  $Q^+$  ناوردا باقی می ماند. این به علت مختصر کردن رابطه بین سهم بوزونی و فرمیونی

برای انرژی حالت پایه است که در این صورت یک حالت حداقل انرژی صفر برای هامیلتونی ابرتقارن وجود دارد. در این قسمت شکست خودبه خودی ابرتقارن را بررسی می کنیم [۳۴]. از رابطه ها قبلی می دانیم که:

$$E_0 = \langle 0 | H_s | 0 \rangle = [ \langle Q_1 | 0 \rangle ]^2 > 0 \quad (۲۱۵-۳)$$

حالت  $Q_1 | 0 \rangle \neq 0$  وجود یک تبهگنی وابسته به عملگر ابربار را معنی می دهد و با این رابطه مشخص می شود :

$$Q | 0 \rangle = \lambda | 0 \rangle' \neq 0 \quad (۲۱۶-۳)$$

که  $Q$  طبق رابطه

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & W + ip \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (۲۱۷-۳)$$

تعریف شده است. زمانی که  $Q$  با  $H_s$  پادجابجاپذیر باشد:

$$H_s Q | 0 \rangle = Q H_s | 0 \rangle = Q \mu | 0 \rangle = \lambda \mu | 0 \rangle' \quad (۲۱۸-۳)$$

که  $\mu$  ویژه مقدار حالت پایه  $H_s$  است. همچنین از (۲۱۷-۳) می توانیم بنویسیم:

$$H_s Q | 0 \rangle = \lambda H_s | 0 \rangle' \quad (۲۱۹-۳)$$

از دو رابطه (۲۱۸-۳) و (۲۱۹-۳) نتیجه می گیریم که :

$$H_s | 0 \rangle' = \mu | 0 \rangle' \quad (۲۲۰-۳)$$

که  $| 0 \rangle$  و  $| 0 \rangle'$  حالت های تبهگن می باشند. برای اینکه شکست خودبه خودی ابرتقارن وجود داشته باشد شرط  $E_0 > 0$  لازم است. رابطه های قبلی را می توان برای ساختار ابرپتانسیل فرمول بندی کرد.

برای زمانی که ابرتقارن شکسته نباشد از رابطه های قبلی می فهمیم که برای بهنجار کردن تابع موج حالت پایه نیاز است که  $W(x)$  علامت های متفاوتی داشته باشد  $x \rightarrow \pm\infty$  و یا به عبارتی دیگر  $W(x)$  تعدادی صفر در  $(-\infty, \infty)$  دارد، این چنین موقعیتی مطابق است با شکست خودبه خودی ابر تقارن. برای مثال اگر بگیریم  $W(x) = \frac{1}{2} gx^2$  ،  $g$  یک ثابت است، تابع موج حالت پایه رفتاری به صورت نمایی دارد:  $\exp(\pm \frac{1}{2} \int_{x_0}^x gx^2 dx)$ ، که در مقادیر نامحدود مثبت و منفی بسیار

بزرگ می شود. بنابراین شکست خودبه خودی تقارن برای همه سطوح انرژی با  $E > 0$  بررسی می شود. با توجه به رابطه های قبلی می بینیم که  $H_+$  و  $H_-$  به این صورت به کار می روند:

$$\begin{aligned} (W + \frac{d}{dx})\psi_+^n &= \sqrt{2E_n}\psi_-^n \\ (W - \frac{d}{dx})\psi_-^n &= \sqrt{2E_n}\psi_+^n \end{aligned} \quad (221-3)$$

که  $n = 1, 2, \dots$  و مقدار واقعی ابرپتانسیل  $W(x)$  فرض می شود به طور پیوسته تغییر می کند. با جایگذاری از رابطه (221-3) به این نتیجه می رسیم :

$$\begin{aligned} (-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V_+)\psi_+^n &= E_n\psi_+^n \\ (-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V_-)\psi_-^n &= E_n\psi_-^n \end{aligned} \quad (222-3)$$

و  $V_+$  و  $V_-$  به وسیله رابطه های زیر داده می شوند [34].

$$\begin{aligned} V_+ &= W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W'(x) \\ V_- &= W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W'(x) \end{aligned} \quad (223-3)$$

### ۳-۱۱ نماد ویتن

برای مقیاس شکستگی SUSY از آنچه به عنوان نماد ویتن<sup>۱</sup> موسوم است، استفاده می کنیم. اگر تعداد گره های حالت های هم تالی هامیلتونی های  $H_2, H_1$  را به ترتیب با  $n^-$  و  $n^+$  نشان دهیم، در این صورت نماد ویتن را به صورت زیر تعریف می کنیم [28 و 29 و 31]:

$$\Delta = n^- - n^+ \quad (224-4)$$

برای بررسی شکستگی SUSY کافی است که ببینیم آیا  $\Delta$  صفر است یا نه به بیان دیگر:

$$\Delta = n^+ - n^- = \begin{cases} \neq 0 \\ = 0 \end{cases} \quad (225-4)$$

برای بدست آوردن انگیزه این تعریف، هامیلتونی ابرتقارن را در نظر می گیریم. ویژه حالت های  $H_S$  را  $\psi_n$  می نامیم و می دانیم :

<sup>1</sup> Witten's Index

$$\left(\frac{d}{dx} + W\right)\psi_n^{(2)} = [E_n]^{-\frac{1}{2}}\psi_n^{(1)} \quad (226-4)$$

$$\left(-\frac{d}{dx} + W\right)\psi_n^{(1)} = [E]^{-\frac{1}{2}}\psi_n^{(2)}$$

اگر SUSY کامل باشد (غیر شکسته) بنابراین انرژی حالت پایه نیز تبهگن است و داریم  $E_0^{(1)} = 0$  در نتیجه داریم  $A\psi_n^{(1)} = 0$ . بنابراین برای حالت پایه همتایی وجود ندارد و بین تعداد گره ها حالت های  $H_2, H_1$  اختلاف به وجود می آید. در صورتی که اگر SUSY شکسته داشته باشیم، انرژی حالت پایه بزرگتر از صفر خواهد بود و طبق معادلات (3-92) حالت پایه هامیلتونی های  $H_2, H_1$  همتای یکدیگر هستند و دارای تعداد گره های یکسان می باشند. بنابراین در حالت ابرتقارن شکسته  $\Delta = 0$  خواهد بود.

- [١] Y.A.Gel'fand and E.P.likhtman JETP lett 13(1971)323
- [٢] P.Ramond , Phys.Rev.D3(1971)2415
- [٣] A.Neveu and J.Schwars ;Nucl.Phys.B31(1971)86
- [٤] D.Vokovand and B.Zumino; Nucl.Phys.B70(1974)39
- [٥] M.F.Schnivs ;Phys.Rep128(1985)39
- [٦] E.Witten;Nucl.Phys.B188(1981)513
- [٧] F.Cooper and B.Freedman;Am.Phys146(1983)262
- [٨] j.wess and B.zumino Nucl.phys.B 70 (1974),39-50
- [٩] E.Witten.Nucl.phys. B185(1981),513-554
- [١٠] L.Alvarez,Supersymmetry and The Atiyah-Singer Index Theorem, Berlin , 1996
- [١١] I. Brackets, Green's Function and a Proof Supersymmetry and the Atiyah –  
Singer Index Theorem. ...j.Math.phys.35 (1994), 1095-1124
- [١٢] E.Witten, j.Differential Supersymmetry and Morse Theory ,Geometry 17 (1982),  
661-692
- [١٣] F.Cooper,A.Khare and U. Sukhatme, Supersymmetry and Quantum Mechanics,  
phys. Rep .251(1995), 267-385
- [١٤] V.A.Andreev Parasupersymmetry in Quantum Optics, Phys. Lett. A 194 (1994),  
272-278
- [١٥] P.Ilg,I.V.Karlin and S.Succi, Supersymmetry Solution for Finitely Extensible  
Dumbbell Model, cond – mat/0006113
- [١٦] H.Nicolia , Supersymmetry and Spin Systems, j.phys A 9 (1976), 1497-1506
- [١٧] P.Roy Magnetic Point Vortex and Parasupersymmetry,phys.Lett. B 305 (1993),  
353-356
- [١٨] I.Adagideli,P.M.Goldbart,A.Shnirman and A.Yazdani, Cond-mat 9907245
- [١٩] O.A.Pankratov,Phys.Lett.A 121 (1987),360-366
- [٢٠] O.A.Pankratov , S.V.Pakhomov and B.A.Volkov, Solid State Comm. 61 (1987),  
2323-2334
- [٢١] V.A.Rubakov and V.P.Spiridonov, Mod.Phys.Lett.A3(1988),1337-1347
- [٢٢] A.Khare,A.K.Mishra and G.Rajasekaran, Int.J.Mod . phys.A8(1993),1245-1257
- [٢٣] S.Durand,phys.Lett.B312(1993),115-120
- [٢٤] S.Durand , Mod.Phys.Lett.A8(1993),2323-2334

- [۲۵] N.Mohammedi , hep-th/9412133
- [۲۶] M.De Crombrugghe and V.Rittenberg, Ann.Phys.151(1983),99-126
- [۲۷] F.Cooper and B.Freedman, Ann.Phys.146(1983),262-288
- [۲۸] مریم خلج- پایان نامه کارشناسی ارشد فیزیک-سال ۱۳۷۵- دانشگاه فردوسی مشهد
- [۲۹] a)E.Casal bouni; Nuovo.Cim.A33(1976)115,389  
b) J.L.Martin; proc.poySec .A251(1959)536  
c)A.Barducci , R.Casal bouni and L.Lusana;Nucl.Phys.B124(1977)93,521
- [۳۰]R.Marnelius ; Acta.Phys.Pol.B13(1982)669
- [۳۱] S.N.Bswas and S.K.Soni pramana;J.phys27(1986)117
- [۳۲] J.Barcelos-Neto,A.Das and W.Scherer ;Acta.phys.pol.D18(1987)269
- [۳۳] A.Lahiri,P.Kumar Roy,B.Bagchi ;Int.Jou.Mpd.phys5(1990)1383
- [۳۴] Bijan Kumar bagchi , Supersymmetry in Quantum and Classical Mechanics.
- [۳۵] Avinash Khare , Supersymmetry in Quantum Mechanics, math-ph/0409003
- [۳۶] G.Junker and S.Matthiesen , J.Phys.A:Math.Gen.,28,1467,1995
- [۳۷] Ashok Das and Marcelo Hott,Dynamical Supersymmetry,Hep-th)9504059
- [۳۸] A.Das,"Field theory:A path Integral Approach ",World Scientific,Singapore 1994
- [۳۹] E.Witten,Nucl.phys.B188(1981)513
- [۴۰] P.Salomonsen and J.W.van holten,Nucl,phys.196(1982)509
- [۴۱] S.P.Mirsa,Indian J.phys.61B(1987)287
- [۴۲] Pijush k.Ghosh,hep-th/0403083
- [۴۳] F.Cooper,A.Khare and U.Sukhatme,phys.Rep.251(1995)267,hep-th/9405029
- [۴۴] Phys.Lett.,B150,159,1985
- [۴۵] Nucl.phys.,B270,651,1986
- [۴۶] Phys.Lett.,B276,95,1992
- [۴۷] Nucl.Phys.,B202,253,1982



## فصل چهارم

بررسی چاه‌های پتانسیل دوگانه، سه گانه، چهارگانه و پنجگانه در حالت‌های متقارن و نامتقارن با استفاده از ابرتقارن

## فهرست مطالب

صفحه		عنوان
۹۹	.....	۱-۴ ابرتقارن و چاه پتانسیل دوگانه
۱۰۳	.....	۲-۴ ابرتقارن و چاه پتانسیل سه گانه
۱۰۶	.....	۳-۴ ابرتقارن و چاه پتانسیل چهارگانه
۱۰۶	.....	۱-۳-۴ چاه پتانسیل چهارگانه- حالت اول
۱۰۷	.....	۲-۳-۴ چاه پتانسیل چهارگانه- حالت دوم
۱۰۸	.....	۴-۴ ابرتقارن و چاه پتانسیل پنجگانه
۱۰۹	.....	۵-۴ بدست آوردن یک رابطه کلی برای چاههای پتانسیل فرد
۱۱۹	.....	منابع

## ۴-۱ ابرتقارن و چاه پتانسیل دوگانه

یکی از مسائل مهم در فیزیک و شیمی چاههای پتانسیل دوگانه می باشد. در این بخش با استفاده از ابرتقارن در مکانیک کوانتومی به حل این پتانسیلها می پردازیم.

در این مسائل کمیت قابل توجه اختلاف انرژی  $\Delta E$  (اختلاف انرژی دو حالت پایه و اولیه) پتانسیل دوگانه می باشد. کمیت  $\Delta E$  معمولاً کوچک و محاسبه آن به صورت عددی مشکل می باشد. به ویژه وقتی سد پتانسیل بین دو چاه بزرگ باشد در اینجا چگونگی محاسبه  $\Delta E$  را از طریق ابرتقارن نشان می دهیم. در حقیقت با استفاده از پتانسیل  $V_1$  همتای ابرتقارن  $V_2$  یک سیستم با جملات اختلالی برای بدست آوردن شکاف  $\Delta E$  می سازیم. با توجه به این موضوع که  $x = \pm x_0$  نقاط مینیمم پتانسیل  $x$  است، با استفاده از تقریب WKB،  $\Delta E$  به این صورت نوشته می شود:

$$\Delta E_{WKB} = \left\{ \frac{[2V_1''(x)]^{\frac{1}{2}}}{\pi} \right\} \exp \left[ -2 \int_0^{x_0} [V_1(x) - V_1(x_0)]^{\frac{1}{2}} dx \right] \quad (1-4)$$

که همان نتیجه ای است که در روشهای معمولی بدست می آید.

اکنون چاه پتانسیل دوگانه را مرور می کنیم [۲۱]. دو چاه پتانسیل را در نظر می گیریم، این چاهها مربوط به نوسانگرهایی هستند که حول  $x_0, -x_0$  نوسان می کنند. احتیاج داریم که ویژه تابع حالت پایه  $\psi_0^{(1)}(x)$  را بدانیم. برای این کار ویژه تابع حالت پایه هر یک از چاهها را بدست آورده و با جمع آنها ویژه تابع حالت پایه چاه پتانسیل دوگانه نامتقارن را بدست می آوریم:

$$\psi_0^{(1)}(x) = e^{-(x+x_0)^2} + e^{-a(x-x_0)^2} \quad (2-4)$$

که در آن  $a$  میزان نامتقارن بودن چاه را تنظیم می کند و اگر  $a=1$  باشد، چاه متقارن خواهد بود.

همان طور که گفته شد تابع ابرپتانسیل  $W(x)$  به این صورت نوشته می شود، برای راحتی محاسبات ضریب  $\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} = 1$  در نظر گرفته شده است.

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\psi_0^{(1)'}(x)}{\psi_0^{(1)}(x)} = -\frac{\psi_0^{(1)'}(x)}{\psi_0^{(1)}(x)} \quad (3-4)$$

$$W(x) = -\frac{(-2x - 2x_0)e^{-(x+x_0)^2} - 2a(x-x_0)e^{-a(x-x_0)^2}}{e^{-(x+x_0)^2} + e^{-a(x-x_0)^2}}$$

و پتانسیل‌های همتای  $V_1(x)$  و  $V_2(x)$  به این صورت بدست می آیند:

$$V_1(x) = W^2(x) - W'(x) =$$

$$\frac{1}{e^{-(x+x_0)^2} + e^{-a(x-x_0)^2}} \left[ -2e^{-(x+x_0)^2} + (-2x - 2x_0)^2 e^{-(x+x_0)^2} - 2ae^{-a(x-x_0)^2} + 4a^2(x-x_0)^2 e^{-a(x-x_0)^2} \right]$$

(4-4)

$$V_2(x) = W^2(x) + W'(x) =$$

$$\frac{1}{(e^{-(x+x_0)^2} + e^{-a(x-x_0)^2})^2} \left[ 2((-2x - 2x_0)e^{-(x+x_0)^2} - 2a(x-x_0)e^{-a(x-x_0)^2})^2 \right]$$

$$- \frac{1}{e^{-(x+x_0)^2} + e^{-a(x-x_0)^2}} \left[ -2e^{-(x+x_0)^2} + (-2x - 2x_0)^2 e^{-(x+x_0)^2} - 2ae^{-a(x-x_0)^2} + 4a^2(x-x_0)^2 e^{-a(x-x_0)^2} \right]$$

(5-4)

نمودارهای  $V_1(x)$  و  $V_2(x)$  به ازای مقادیر مختلف  $a$  و  $x_0$  رسم شده است. (شکل ۱)

ساده‌تر است که به جای بدست آوردن انرژی حالت برانگیخته  $H_1$  انرژی حالت پایه  $H_2$  را بدست آوریم. اگر  $\psi_0^{(1)}$  تابع موج حالت پایه  $H_1$  باشد آنگاه می‌توانیم ثابت کنیم که با اثر تابع

$\frac{1}{\psi_0^{(1)}}$  روی  $H_2$  انرژی صفر خواهیم داشت، ولی  $\frac{1}{\psi_0^{(1)}}$  قابل بهنجار کردن نیست. زیرا اگر  $x \rightarrow \infty$  آنگاه  $\frac{1}{\psi_0^{(1)}} \rightarrow \infty$  می‌باشد. اما از این تابع می‌توانیم یک تابع قابل بهنجار به صورت زیر

بسازیم [۳]:

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^\infty [\psi_0^{(1)}(y)]^2 dy}{2I_+ \psi_0^{(1)}(x)} \quad x > 0 \quad (6-4)$$

$$\varphi(x) = \frac{\int_{-\infty}^x [\psi_0^{(1)}(y)]^2 dy}{2I_- \psi_0^{(1)}(x)} \quad x < 0 \quad (7-4)$$

که در آن  $I_+, I_-$  به صورت زیر تعریف شده اند:

$$I_+ = \int_0^{\infty} [\psi_0^{(1)}(y)]^2 dy \quad (8-4)$$

$$I_- = \int_{-\infty}^0 [\psi_0^{(1)}(y)]^2 dy$$

مقادیر  $I_+, I_-$  به این صورت محاسبه شده اند:

$$I_+ = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{4 \sqrt{a} \sqrt{a+1}} \left( e^{\frac{-4ax_0^2}{a+1}} \sqrt{\pi} \left( e^{\frac{4ax_0^2}{a+1}} \sqrt{2} \operatorname{erf}(\sqrt{2}x + \sqrt{2}x_0) \sqrt{a+1} \sqrt{a} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 4e^{\frac{4ax_0^2}{a+1}} e^{-\frac{4ax_0^2}{a+1}} \operatorname{erf}\left(\frac{-xa - x - x_0 + ax_0}{\sqrt{a+1}}\right) \sqrt{a} - e^{\frac{4ax_0^2}{a+1}} \sqrt{2} \operatorname{erf}(-\sqrt{2}ax + \sqrt{2}ax_0) \sqrt{a+1} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \sqrt{2} \operatorname{erf}(\sqrt{2}x_0) \sqrt{a+1} e^{\frac{4ax_0^2}{a+1}} \sqrt{a} + 4 \operatorname{erf}\left(\frac{(a-1)x_0}{\sqrt{a+1}}\right) \sqrt{a} + \sqrt{2} \operatorname{erf}(\sqrt{2}ax_0) \sqrt{a+1} e^{\frac{4ax_0^2}{a+1}} \right) \right) \right) \quad (9-4)$$

$$I_+ = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{4 \sqrt{a} \sqrt{a+1}} \left( e^{\frac{4ax_0^2}{a+1}} \sqrt{\pi} \left( -e^{\frac{4ax_0^2}{a+1}} \sqrt{2} \operatorname{erf}(\sqrt{2}x + \sqrt{2}x_0) \sqrt{a} \sqrt{a+1} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + 4e^{\frac{4ax_0^2}{a+1}} e^{-\frac{4ax_0^2}{a+1}} \operatorname{erf}\left(\frac{-ax - x - x_0 + ax_0}{\sqrt{a+1}}\right) \sqrt{a} + e^{\frac{4ax_0^2}{a+1}} \sqrt{2} \operatorname{erf}(-\sqrt{2}ax + \sqrt{2}ax_0) \sqrt{a+1} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \sqrt{2} \operatorname{erf}(\sqrt{2}x_0) \sqrt{a(a+1)} e^{\frac{4ax_0^2}{a+1}} - 4 \operatorname{erf}\left(\frac{(a-1)x_0}{\sqrt{a+1}}\right) \sqrt{a} - \sqrt{2} \operatorname{erf}(\sqrt{2}ax_0) \sqrt{a+1} e^{\frac{4ax_0^2}{a+1}} \right) \right) \right) \quad (10-4)$$

$\varphi(x)$  برای همه مقادیر  $x$  تعریف شده است و در نقطه  $x=0$  مقدار  $\varphi(0) = \frac{1}{2\psi_0^{(1)}(0)}$  دارد. ولی

می توان نشان داد که برای  $x \neq 0$  رابطه  $H_2 \varphi(x) = 0$  برقرار است. چون مشتق  $\varphi(x)$  در  $x=0$

ناپیوسته است :

$$\varphi'|_{\varepsilon} - \varphi'|_{-\varepsilon} = -\frac{\psi_0^{(1)}(x)}{2} \left[ \frac{1}{I_+} + \frac{1}{I_-} \right] \quad (11-4)$$

بنابراین  $\varphi(x)$  تابع موج  $H_2$  نمی باشد. بلکه با استفاده از رابطه فوق می توانیم یک هامیلتونی تکین دیگر مانند  $H_0$  بسازیم که تابع موج حالت پایه اش  $\varphi$  باشد.

$$H_0 = H_2 - [\psi_0^{(1)}(0)]^2 \left[ \frac{1}{I_+} + \frac{1}{I_-} \right] \delta(x) \quad (12-4)$$

که در آن ناپیوستگی را با  $\delta(x)$  بیان کرده ایم. در این صورت  $H_2$  را داریم:

$$H_2 = H_0 + [\psi_0^{(1)}(0)]^2 \left[ \frac{1}{I_+} - \frac{1}{I_-} \right] \delta(x) \quad (13-4)$$

همان طور که ملاحظه می شود ویژه مقدار حالت پایه و تابع موج هامیلتونی  $H_2$  می توانند از

طریق وارد کردن اختلال  $[\psi_0^{(1)}(0)]^2 \left[ \frac{1}{I_+} + \frac{1}{I_-} \right] \delta(x)$  در هامیلتونی  $H_0$  محاسبه شود. در رابطه

(12-4)  $\psi_0^{(1)}(0)$  نقش ثابت برهمکنش را دارد. این تعریف برای چاه پتانسیل متقارن با سد بلند

بسیار مناسب است، زیرا مقدار  $\psi_0(0)$  بسیار کوچک است. در حالت نامتقارن نیز جایی که چاه

بلند داریم مقدار  $\psi_0(0)$  کوچک است. اولین تصحیح انرژی از طریق بسط اختلالی Rayleigh-

Schrodinger بدست می آید:

$$E^{(1)} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) (\delta H) \delta(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) dx} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) [\psi_0^{(1)}(0)]^2 \left[ \frac{1}{I_+} - \frac{1}{I_-} \right] \delta(x) \varphi(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) dx} \quad (14-4)$$

$$= \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{I_+} + \frac{1}{I_-} \right] \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) dx}$$

به علت آنکه تابع ویژه حالت‌های برانگیخته را نداریم لازم است برای بدست آوردن تقریب دوم از

نظریه اختلال لگاریتمی [پیوست ۱] و [۳] استفاده کنیم:

$$E^{(2)} = \left\{ \int_{-\infty}^0 dx \left[ \frac{E^{(1)} \int_{-\infty}^x \varphi^2(y) dy}{\varphi(x)} \right]^2 + \int_0^{\infty} dx \left[ \frac{E^{(1)} \int_x^{\infty} \varphi^2(y) dy}{\varphi(x)} \right]^2 \right\} \quad (15-4)$$

بنابراین تا تقریب دوم شکاف انرژی  $\Delta E$  برای  $E^{(2)} + E^{(1)}$  است

## ۲-۴ ابرتقارن و چاه پتانسیل سه گانه

در بخش گذشته حل چاه پتانسیل دوگانه متقارن و نامتقارن را مورد بررسی قرار دادیم. در این بخش به حل چاه پتانسیل سه گانه می پردازیم که می توان برای حالت متقارن و نامتقارن به کار برد. مشابه با حل چاه پتانسیل دوگانه یک تابع موج که حالت پایه  $V_1(x)$  را نشان دهد انتخاب می کنیم.

تابع موج حالت پایه چاه پتانسیل سه گانه  $V_1$  شکل را به صورت مجموعی از توابع گاوسی هر چاه انتخاب می کنیم:

$$\psi_0^{(1)}(x) = e^{-(x-x_0)} + e^{-x^2} + e^{-a(x+x_0)^2} \quad (16-4)$$

ضریب  $a$  حالت تقارنی و غیرتقارنی را در چاه ایجاد می کند. اگر  $a=1$  باشد حالت متقارن خواهیم داشت و در غیر این صورت چاه پتانسیل نامتقارن خواهد بود. با استفاده از معادله (۱۶-۴) و روابط ابرتقارن ابرتقارن  $W(x)$  و سپس  $V_1(x)$  و  $V_2(x)$  بدست خواهد آمد:

$$W(x) = -\frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)} = \frac{-2(x-x_0)e^{-(x-x_0)^2} - 2xe^{-x^2} - 2a(x+x_0)e^{-a(x+x_0)^2}}{e^{-(x-x_0)^2} + e^{-x^2} + e^{-a(x+x_0)^2}} \quad (17-4)$$

$$V_{2,1}(x) = W^2(x) \pm W'(x)$$

$$V_1(x) = \frac{(-2e^{-(x-x_0)^2} + (-2x+2x_0)^2 e^{-(x-x_0)^2} - 2ae^{-a(x+x_0)^2} + 4a^2(x+x_0)^2 e^{-a(x+x_0)^2} - 2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2})}{e^{-(x-x_0)^2} + e^{-a(x+x_0)^2} + e^{-x^2}} \quad (18-4)$$

$$V_2(x) = \frac{(2((-2x+2x_0)e^{-(x-x_0)^2} - 2a(x+x_0)e^{-a(x+x_0)^2} - 2xe^{-x^2})^2)}{(e^{-(x-x_0)^2} + e^{-a(x+x_0)^2} + e^{-x^2})^2} - \frac{(-2e^{-(x-x_0)^2} + (-2x+2x_0)^2 e^{-(x-x_0)^2} - 2ae^{-a(x+x_0)^2} + 4a^2(x+x_0)^2 e^{-a(x+x_0)^2} - 2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2})}{e^{-(x-x_0)^2} + e^{-a(x+x_0)^2} + e^{-x^2}} \quad (19-4)$$

نمودارهای  $V_1(x)$  و  $V_2(x)$  به ازای مقادیر مختلف  $a$  و  $x_0$  رسم شده است. (شکل ۲)

با توجه به بخشهای گذشته ملاحظه می شود که با اثر  $H_2$  (هامیلتونی همتای  $H_1$ ) بر  $\frac{1}{\psi_0^{(1)}}$

مقدار صفر خواهیم داشت.  $(H_2 \frac{1}{\psi_0^{(1)}} = 0)$  اثبات آن به این صورت است:

$$\begin{aligned}
H_2 \frac{1}{\psi_0^{(1)}} &= H_2 \frac{1}{e^{-\int W(x) dx}} = H_2 e^{+\int W(x) dx} = \left(-\frac{d^2}{dx^2} + V_2\right) e^{+\int W(x) dx} = \\
&= -\frac{d}{dx} \left( e^{\int W(x) dx} W(x) \right) + V_2 e^{\int W(x) dx} = -\left[ W' e^{\int W(x) dx} + W^2 e^{\int W(x) dx} \right] + V_2 e^{\int W(x) dx} = (20-4) \\
&= -[W' + W^2] e^{\int W(x) dx} + [W^2 + W'] e^{\int W(x) dx} = 0 = E \frac{1}{\psi_0^{(1)}} \Rightarrow E = 0
\end{aligned}$$

ولی چون در  $x \rightarrow \pm\infty$  مقدار  $\frac{1}{\psi_0^{(1)}}$  به سمت بینهایت میل می کند قابل بهنجار کردن نیست. بنابراین باید تابع موجی معرفی کنیم که در  $x$  بی نهایت مقداری محدود باشد. بنابراین تابع موج مورد نظر را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^{\infty} [\psi_0^{(1)}(y)]^2 dy}{2I_1 \psi_0^{(1)}(x)} \quad x > 0 \quad (21-4)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\psi_0(x)} \quad -x_0 < x < x_0 \quad (22-4)$$

$$\varphi(x) = \frac{\int_{-\infty}^{xx} [\psi_0^{(1)}(y)]^2 dy}{2I_2 \psi_0^{(1)}(x)} \quad x < x_0 \quad (23-4)$$

که در آن  $I_2, I_1$  را به صورت زیر داریم:

$$I_1 = \int_{x_0}^{\infty} [\psi^{(1)}(y)]^2 dy \quad (24-4)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{x_0} [\psi^{(1)}(y)]^2 dy$$

مقادیر  $I_1$  و  $I_2$  به این صورت محاسبه شده اند:



$$\begin{aligned}
I_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} & \left( -\frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{a(a+1)}} \right) \left( e^{-\frac{4ax_0^2}{a+1}} \sqrt{\pi} (\mp e^{\frac{4ax_0^2}{a+1}} \sqrt{2} \operatorname{erf}(\sqrt{2}x + \sqrt{2}x_0)) \sqrt{a} \sqrt{a+1} \pm \right. \right. \\
& \pm 4e^{\frac{4ax_0^2}{a+1}} e^{-\frac{4ax_0^2}{a+1}} \operatorname{erf}\left(\frac{-ax - x + ax_0 - x_0}{\sqrt{a+1}}\right) \sqrt{a} \mp 2e^{\frac{4ax_0^2}{a+1}} e^{-\frac{1}{2}x_0^2} \sqrt{2} \operatorname{erf}\left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}x_0\right) \sqrt{a+1} \sqrt{a} \pm \\
& \pm e^{\frac{4ax_0^2}{a+1}} \sqrt{2} \operatorname{erf}(-\sqrt{2}ax + \sqrt{2}ax_0) \sqrt{a+1} \pm 4e^{\frac{4ax_0^2}{a+1}} e^{-\frac{ax_0^2}{a+1}} \operatorname{erf}\left(\frac{-xa - x + ax_0}{\sqrt{a+1}}\right) \sqrt{a} \mp e^{\frac{4ax_0^2}{a+1}} \sqrt{2} \\
& \operatorname{erf}(\sqrt{2}x) \sqrt{a+1} \sqrt{a} \pm \sqrt{2} \operatorname{erf}(\sqrt{2}x_0) \sqrt{a+1} e^{\frac{4ax_0^2}{a+1}} \sqrt{a} \mp 4 \operatorname{erf}\left(\frac{(a-1)x_0}{\sqrt{a+1}}\right) \sqrt{a} \pm 2\sqrt{2} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_0\right) \\
& \left. \left. \sqrt{a+1} \sqrt{a} e^{\frac{1(7a-1)x_0^2}{2(a+1)}} \mp \sqrt{2} \operatorname{erf}(\sqrt{2}ax_0) \sqrt{a+1} e^{\frac{4ax_0^2}{a+1}} \mp 4 \operatorname{erf}\left(\frac{ax_0}{\sqrt{a+1}}\right) e^{\frac{3ax_0^2}{a+1}} \sqrt{a} \right) \right)
\end{aligned}$$

(۲۵-۴)

ملاحظه می شود که  $\varphi(x)$  در بینهایت مقداری محدود و در نقاط  $x = \pm x_0$  پیوسته و مقدار آن به ترتیب :

$$\begin{aligned}
\varphi(x_0) &= \frac{1}{2\psi_0^{(1)}(x_0)} \\
\varphi(-x_0) &= \frac{1}{2\psi_0^{(1)}(-x_0)}
\end{aligned}$$

(۲۶-۴)

می باشد. چون در  $x = \pm x_0$  مشتق  $\varphi(x)$  ناپیوسته است بنابراین  $\varphi(x)$  ویژه تابع  $H_2$  نیست. این ناپیوستگی را می توان توسط تابع دلتا از بین برد. با محاسبه ناپیوستگی داریم:

$$\begin{aligned}
\varphi' \Big|_{x_0+\varepsilon} - \varphi' \Big|_{x_0-\varepsilon} &= -\frac{\psi_0^{(1)}(x_0)}{2I_1} \\
\varphi' \Big|_{-x_0+\varepsilon} - \varphi' \Big|_{-x_0-\varepsilon} &= -\frac{\psi_0^{(1)}(-x_0)}{2I_2}
\end{aligned}$$

(۲۷-۴)

بنابراین می توانیم  $\varphi(x)$  را تابع موج هامیلتونی  $H_0$  بدانیم که به صورت زیر ساخته می شود:

$$H_0 = H_2 - \frac{[\psi_0^{(1)}(x_0)]^2}{I_1} \delta(x-x_0) - \frac{[\psi_0^{(1)}(-x_0)]^2}{I_2} \delta(x+x_0)$$

(۲۸-۴)

که در آن به وسیله وارد کردن تابع دلتا پیوستگی مشتق را به وجود آورده ایم. حال هامیلتونی  $H_2$  را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$H_2 = H_0 + \delta H = H_0 + \frac{[\psi_0^{(1)}(x_0)]^2}{I_1} \delta(x-x_0) + \frac{[\psi_0^{(1)}(-x_0)]^2}{I_1} \delta(x+x_0)$$

(۲۹-۴)

که در آن  $\psi_0^{(1)}(\pm x_0)$  نقش ثابت برهمکنش را دارند و  $\varphi(x)$  جواب بدون اختلال مسئله است. برای محاسبه مقدار انرژی حالت پایه از نظریه اختلال استفاده می کنیم که تقریب اول آن به صورت زیر است:

$$E^{(1)} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)(\delta H)\varphi(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x)dx} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \left[ \frac{[\psi_0^{(1)}(x_0)]^2}{I_1} \right] \delta(x-x_0)\varphi(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x)dx} +$$

$$+ \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \left[ \frac{[\psi_0^{(1)}(-x_0)]^2}{I_1} \right] \delta(x+x_0)\varphi(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x)dx} = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right] \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x)dx} \quad (30-4)$$

برای بدست آوردن تقریب دوم انرژی از نظریه اختلال لگاریتمی [۳] استفاده می کنیم. در آن صورت داریم:

$$E^{(2)} = - \left\{ \int_{-\infty}^{-x_0} dx \left[ \frac{E^{(1)} \int_{-\infty}^x \varphi^2(x)dx}{\varphi(x)} \right]^2 + \int_{-x_0}^{x_0} dx \left[ \frac{E^{(1)} \int_{-x_0}^x \varphi^2(x)dx}{\varphi(x)} \right]^2 + \int_{x_0}^{+\infty} dx \left[ \frac{E^{(1)} \int_x^{+\infty} \varphi^2(x)dx}{\varphi(x)} \right]^2 \right\} \quad (31-4)$$

شکاف انرژی تا تقریب مرتبه دوم اختلال برابر است با:

$$\Delta E = E^{(1)} + E^{(2)}$$

### ۳-۴ چاه پتانسیل چهارگانه

برای بدست آوردن اولین شکاف انرژی در چاه پتانسیل چهارگانه ویژه تابع حالت پایه  $V_1(x)$  را به صورت زیر انتخاب می کنیم (با توجه به این نکته که دو حالت را در بر می گیرد):

### ۱-۳-۴ چاه پتانسیل چهارگانه: حالت اول

$$\psi_0^{(1)}(x) = e^{-(x-x_0)^2} + e^{-a(x+x_0)^2} + e^{-x^2} + e^{-a(x+2x_0)^2} \quad (32-4)$$

برپتانسیل  $W(x)$  و سپس  $V_2(x)$  و  $V_1(x)$  را بدست می آوریم:

$$W(x) = -\frac{((-2x+2x_0)e^{-(x-x_0)^2} - 2a(x+x_0)e^{-a(x+x_0)^2} - 2xe^{-x^2} - 2a(x+2x_0)e^{-a(x+2x_0)^2})}{e^{-(x-x_0)^2} + e^{-a(x+x_0)^2} + e^{-x^2} + e^{-a(x+2x_0)^2}}$$

(۳۳-۴)

$$V_1(x) = (-2e^{-(x-x_0)^2} + (-2x+2x_0)^2 e^{-(x-x_0)^2} - 2ae^{-a(x+x_0)^2} + 4a^2(x+x_0)^2 e^{-a(x+x_0)^2} - 2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} - 2ae^{-a(x+2x_0)^2} + 4a^2(x+2x_0)^2 e^{-a(x+2x_0)^2}) \times \frac{1}{e^{-(x-x_0)^2} + e^{-a(x+x_0)^2} + e^{-x^2} + e^{-a(x+2x_0)^2}}$$

(۳۴-۴)

$$V_2(x) = \left[ 2((-2x+2x_0)e^{-(x-x_0)^2} - 2a(x+x_0)e^{-a(x+x_0)^2} - 2xe^{-x^2} - 2a(x+2x_0)e^{-a(x+2x_0)^2})^2 \right] \times \left[ \frac{1}{(e^{-(x-x_0)^2} + e^{-a(x+x_0)^2} - e^{-x^2} + e^{-a(x+2x_0)^2})^2} \right] - \left[ -2e^{-(x-x_0)^2} + (-2x+2x_0)^2 e^{-(x-x_0)^2} - 2ae^{-a(x+x_0)^2} \right] + \left[ 4a^2(x+x_0)^2 e^{-a(x+x_0)^2} - 2e^{-a(x+x_0)^2} + 4x^2 e^{-x^2} - 2ae^{-a(x+2x_0)^2} + 4a^2(x+2x_0)^2 e^{-a(x+2x_0)^2} \right] \times \left[ \frac{1}{e^{-(x-x_0)^2} + e^{-a(x+x_0)^2} + e^{-x^2} + e^{-a(x+2x_0)^2}} \right]$$

(۳۵-۴)

پتانسیلهای  $V_1(x)$  و  $V_2(x)$  برای این حالت رسم شده است (شکل ۳).

### ۲-۳-۴ چاه پتانسیل چهارگانه در حالت دوم

در این حالت ویژه تابع حالت پایه را به این صورت انتخاب می کنیم:

$$\psi_0^{(1)}(x) = e^{-(x-2x_0)^2} + e^{-(x-x_0)^2} + e^{-x^2} + e^{-(x+x_0)^2}$$

(۳۶-۴)

مانند حالت‌های قبلی ابرپتانسیل و پتانسیلهای همراه را بدست می آوریم:

$$W(x) = -\left[ (-2x+4x_0)e^{-(x-2x_0)^2} + (-2x+2x_0)e^{-(x-x_0)^2} - 2xe^{-x^2} + (-2x-2x_0)e^{-(x+x_0)^2} \right] \times \left[ \frac{1}{e^{-(x-2x_0)^2} + e^{-(x-x_0)^2} + e^{-x^2} + e^{-(x+x_0)^2}} \right]$$

(۳۷-۴)

$$V_1(x) = (-2e^{-(x-2x_0)^2} + (-2x+4x_0)^2 e^{-(x-2x_0)^2} - 2e^{-(x-x_0)^2} + (-2x+2x_0)^2 e^{-(x-x_0)^2} - 2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} - 2e^{-(x+x_0)^2} + (-2x-2x_0)^2 e^{-(x+x_0)^2}) \times \left( \frac{1}{e^{-(x-2x_0)^2} + e^{-(x-x_0)^2} + e^{-x^2} + e^{-(x+x_0)^2}} \right)$$

(۳۸-۴)

$$\begin{aligned}
V_2(x) &= (2((-2x + 4x_0)e^{-(x-2x_0)^2} + (-2x + 2x_0)e^{-(x-x_0)^2} - 2xe^{-x^2} + (-2x - 2x_0)e^{-(x+x_0)^2})^2) \times \\
&\times \left( \frac{1}{(e^{-(x-2x_0)^2} + e^{-(x-x_0)^2} + e^{-x^2} + e^{-(x+x_0)^2})^2} \right) - (-2e^{-(x-2x_0)^2} + (-2x + 4x_0)^2 e^{-(x-2x_0)^2} - 2e^{-(x-x_0)^2} + \\
&+ (-2x + 2x_0)^2 e^{-(x-x_0)^2} - 2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} - 2e^{-(x+x_0)^2} + (-2x - 2x_0)^2 e^{-(x+x_0)^2}) \times \\
&\times \left( \frac{1}{e^{-(x-2x_0)^2} + e^{-(x-x_0)^2} + e^{-x^2} + e^{-(x+x_0)^2}} \right)
\end{aligned}$$

(۳۹-۴)

پتانسیلها در شکل ۴ نشان داده شده است.

#### ۴-۴ چاه پتانسیل پنجگانه

برای چاه پتانسیل پنجگانه ویژه تابع حالت پایه را به این صورت در نظر می گیریم:

$$\psi_0^{(1)}(x) = e^{-(x-2x_0)^2} + e^{-(x-x_0)^2} + e^{-x^2} + e^{-(x+2x_0)^2} + e^{-(x+x_0)^2}$$

(۴۰-۴)

ابرتانسیل و پتانسیلهای همتا را به صورت زیر بدست آورده ایم:

$$\begin{aligned}
W(x) &= -((-2x + 4x_0)e^{-(x-2x_0)^2} + (-2x + 2x_0)e^{-(x-x_0)^2} - 2xe^{-x^2} + (-2x - 4x_0)e^{-(x+2x_0)^2} + \\
&+ (-2x - 2x_0)e^{-(x+x_0)^2}) \times \left( \frac{1}{e^{-(x-2x_0)^2} + e^{-(x-x_0)^2} + e^{-x^2} + e^{-(x+2x_0)^2} + e^{-(x+x_0)^2}} \right)
\end{aligned}$$

(۴۱-۴)

$$\begin{aligned}
V_1(x) &= (-2e^{-(x-2x_0)^2} + (-2x + 4x_0)^2 e^{-(x-2x_0)^2} - 2e^{-(x-x_0)^2} + (-2x + 2x_0)^2 e^{-(x-x_0)^2} - \\
&- 2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} - 2e^{-(x+2x_0)^2} + (-2x - 4x_0)^2 e^{-(x+2x_0)^2} - 2e^{-(x+x_0)^2} + (-2x - 2x_0)^2 e^{-(x+x_0)^2}) \times \\
&\times \left( \frac{1}{e^{-(x-2x_0)^2} + e^{-(x-x_0)^2} + e^{-x^2} + e^{-(x+2x_0)^2} + e^{-(x+x_0)^2}} \right)
\end{aligned}$$

(۴۲-۴)

$$\begin{aligned}
V_2(x) &= (2((-2x + 4x_0)e^{-(x-2x_0)^2} + (-2x + 2x_0)e^{-(x-x_0)^2} - 2xe^{-x^2} + (-2x - 4x_0)e^{-(x+2x_0)^2} + \\
&+ (-2x - 2x_0)e^{-(x+x_0)^2})^2) \times \left( \frac{1}{(e^{-(x-2x_0)^2} + e^{-(x-x_0)^2} + e^{-x^2} + e^{-(x+2x_0)^2} + e^{-(x+x_0)^2})^2} \right) - (-2e^{-(x-2x_0)^2} + \\
&+ (-2x + 4x_0)^2 e^{-(x-2x_0)^2} - 2e^{-(x-x_0)^2} + (-2x + 2x_0)^2 e^{-(x-x_0)^2} - 2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} - 2e^{-(x+2x_0)^2} + \\
&+ (-2x - 4x_0)^2 e^{-(x+2x_0)^2} - 2e^{-(x+x_0)^2} + (-2x - 2x_0)^2 e^{-(x+x_0)^2}) \times \\
&\times \left( \frac{1}{e^{-(x-2x_0)^2} + e^{-(x-x_0)^2} + e^{-x^2} + e^{-(x+2x_0)^2} + e^{-(x+x_0)^2}} \right)
\end{aligned}$$

(۴۳-۴)

نمودارهای پتانسیل در شکل ۵ نشان داده شده است.

به همین ترتیب می توان روابط مشابهی را برای چاه پتانسیل هفتگانه بدست آورد. [۴].

#### ۴-۵ بدست آوردن یک رابطه کلی برای چاههای پتانسیل فرد

بدین می توان روابطی کلی برای چاههای پتانسیل  $(2n+1)$  گانه،  $(n=1,2,3,\dots)$  به صورت زیر نوشت [۴]:

$$E^{(1)} = \frac{n}{4} \left[ \frac{1}{I_+} + \frac{1}{I_-} \right] \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x)}$$

$$E^{(2)} = - \int_{-\infty}^{-nx_0} dx \left[ E^{(1)} \int_{-\infty}^{-nx} \varphi^2(y) dy \times \frac{1}{\varphi(x)} \right]^2 - \quad (4-44)$$

$$- \int_{-nx_0}^{nx_0} dx \left[ E^{(1)} \int_{-nx}^{nx} \varphi^2(y) dy \times \frac{1}{\varphi(x)} \right]^2 - \int_{nx_0}^{\infty} dx \left[ E^{(1)} \int_{nx}^{\infty} \varphi^2(y) dy \times \frac{1}{\varphi(x)} \right]^2$$

همچنین:

$$I_+ = \int_{nx_0}^{\infty} [\psi_0^{(1)}(y)]^2 dy \quad (4-45)$$

$$I_- = \int_{-\infty}^{-nx_0} [\psi_0^{(1)}(y)]^2 dy$$

در مورد پتانسیلهای زوج مانند چاه پتانسیل چهارگانه به دلیل تنوع انتخاب در توزیع چاههای پتانسیل امکان نوشتن رابطه در حد کلی وجود ندارد.

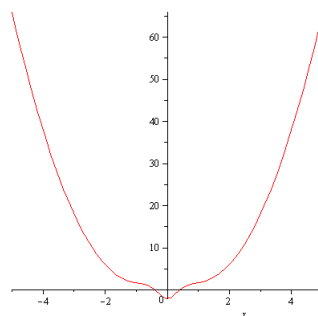
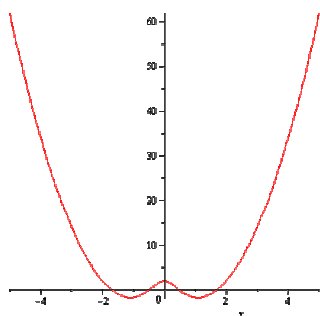
شکلهای مربوط به چاههای پتانسیل:

شکل ۱-۴ چاه پتانسیل دو گانه

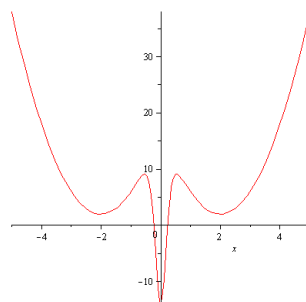
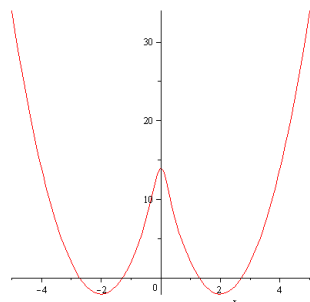
$V_1(x)$

$a = 1, x_0 = 1$

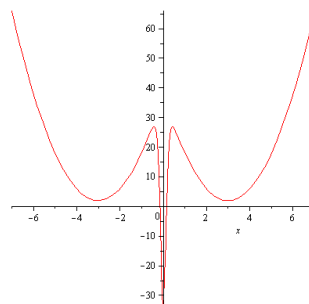
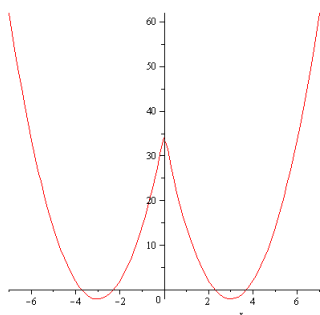
$V_2(x)$



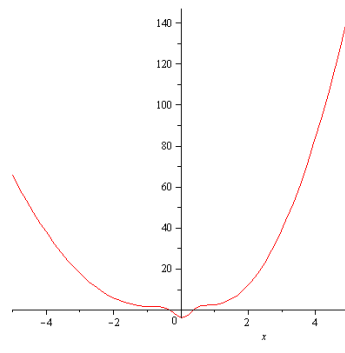
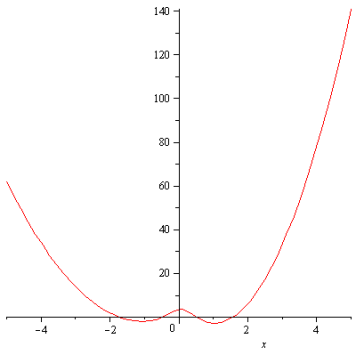
$a = 1, x_0 = 2$



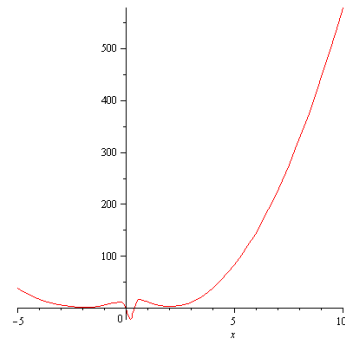
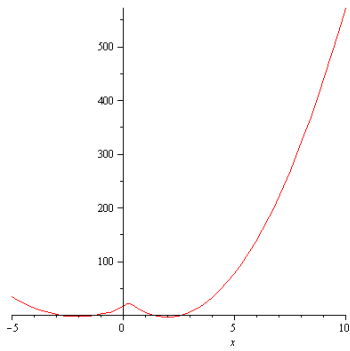
$a = 1, x_0 = 3$



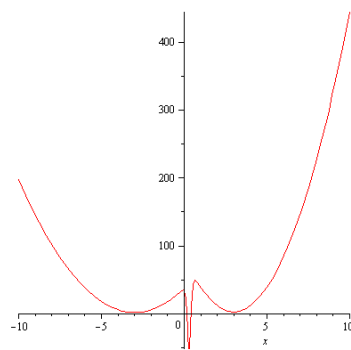
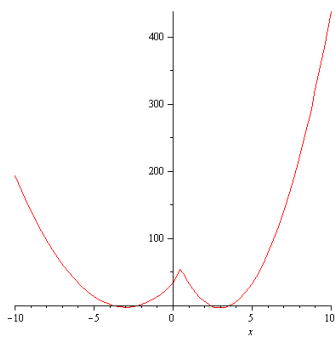
$$a = 1.5, x_0 = 1$$



$$a = 1.5, x_0 = 2$$

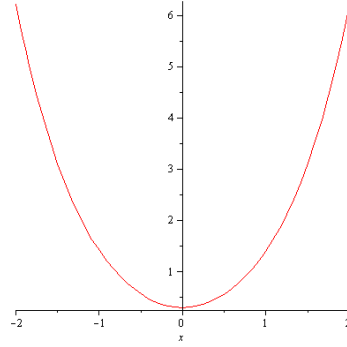
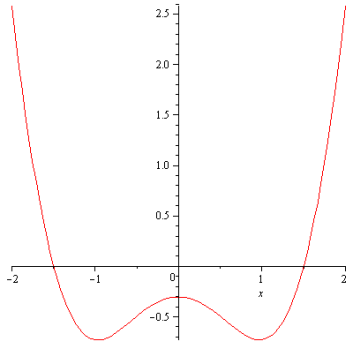


$$a = 1.5, x_0 = 3$$

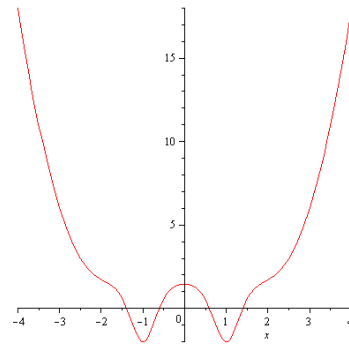
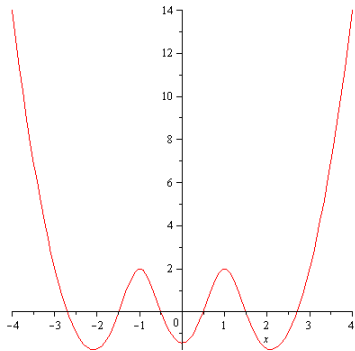


شکل ۲-۴ چاه پتانسیل سه گانه

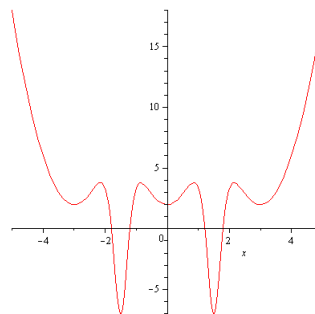
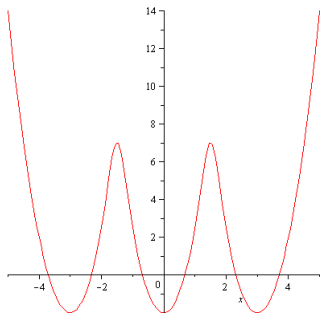
$$a = 1, x_0 = 1$$



$$a = 1, x_0 = 2$$

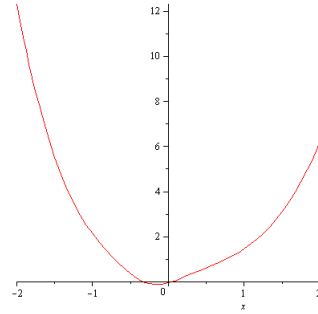
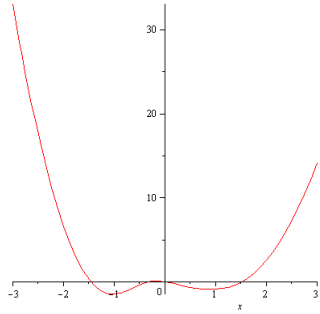


$$a = 1, x_0 = 3$$

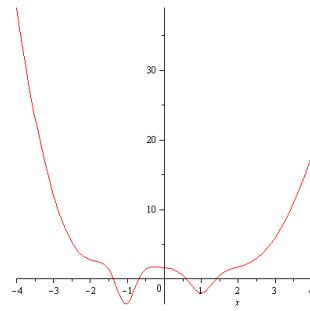
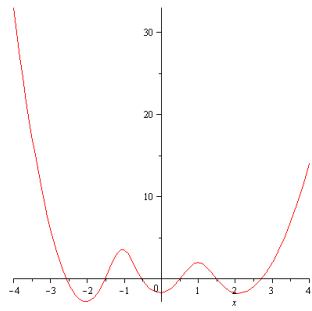




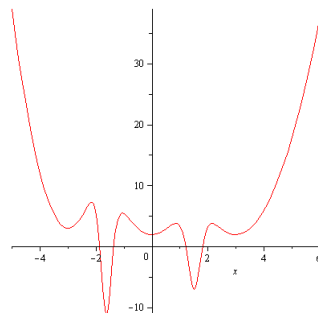
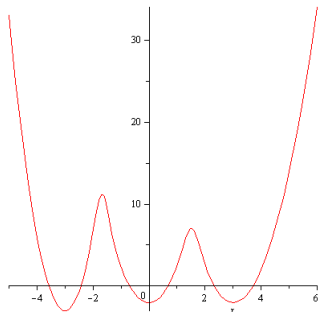
$$a = 1.5, x_0 = 1$$



$$a = 1.5, x_0 = 2$$

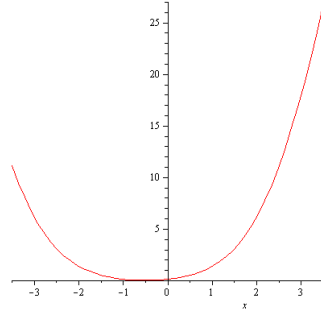
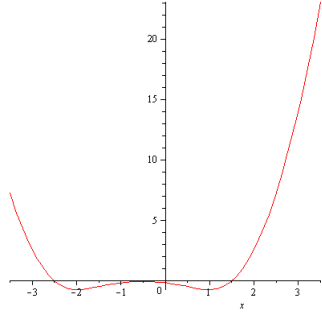


$$a = 1.5, x_0 = 3$$

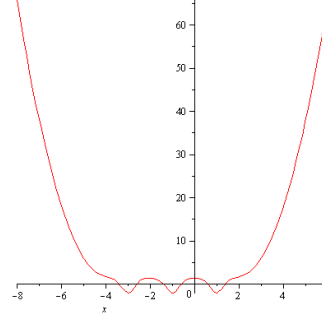
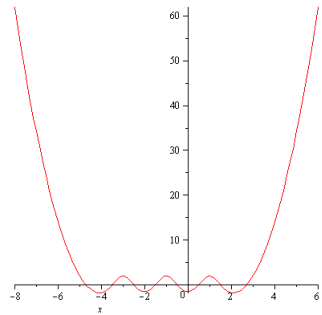


شکل ۳-۴ چاه پتانسیل چهارگانه - حالت اول

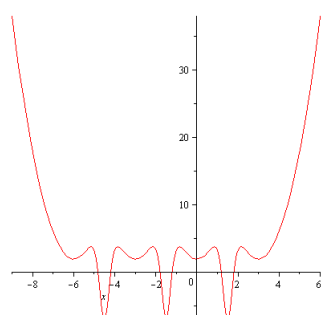
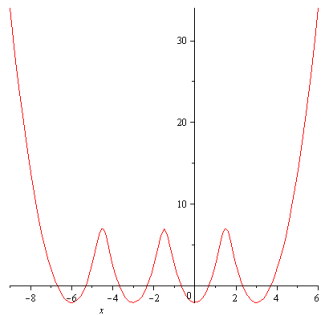
$$a = 1, x_0 = 1$$



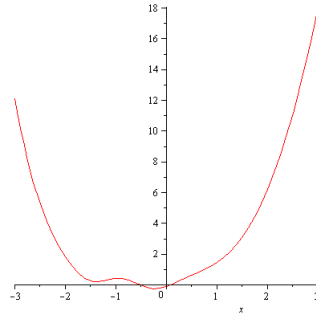
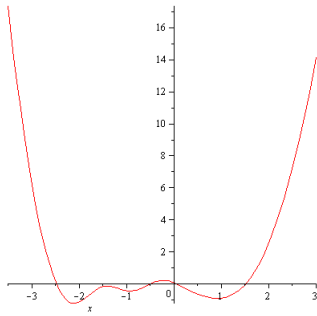
$$a = 1, x_0 = 2$$



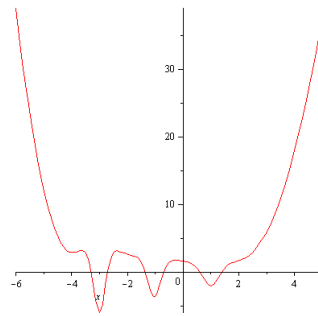
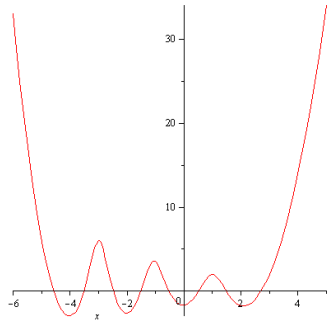
$$a = 1, x_0 = 3$$



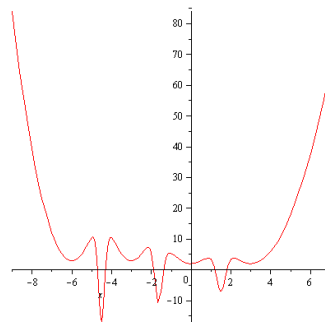
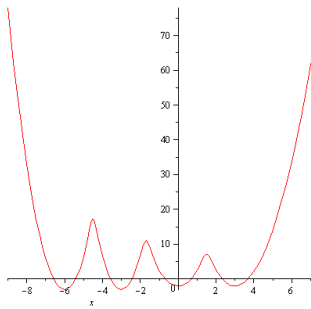
$$a = 1.5, x_0 = 1$$



$$a = 1.5, x_0 = 2$$



$$a = 1.5, x_0 = 3$$

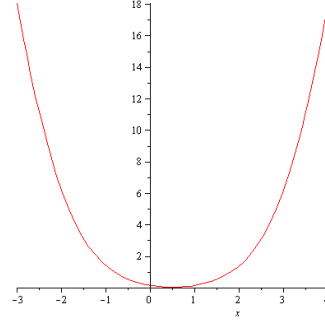
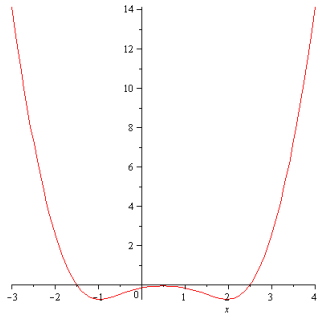


شکل ۴-۴ چاه پتانسیل چهارگانه - حالت دوم

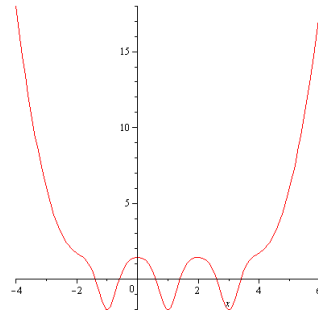
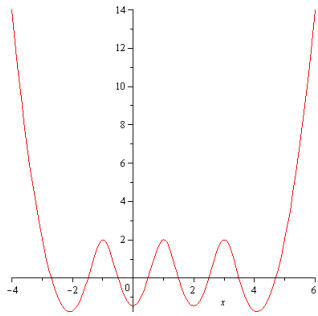
$V_1(x)$

$a = 1, x_0 = 1$

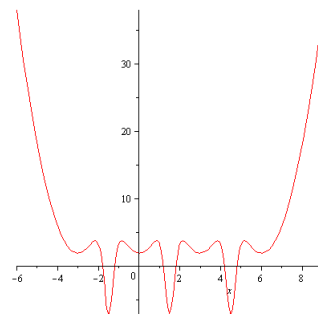
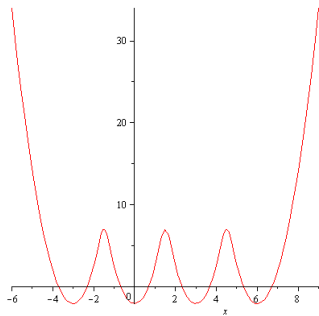
$V_2(x)$



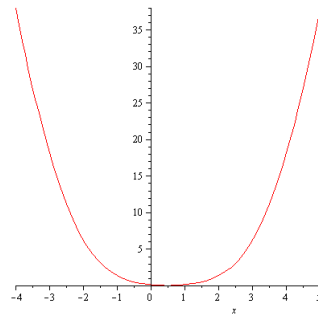
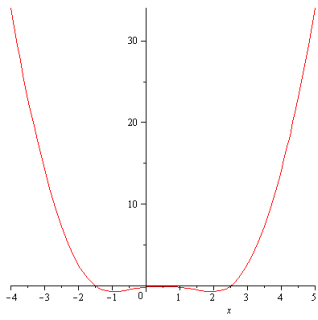
$a = 1, x_0 = 2$



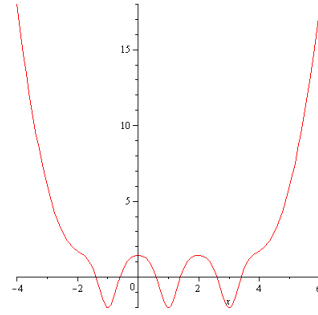
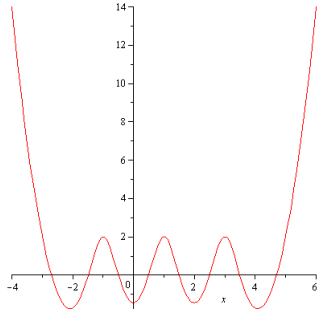
$a = 1, x_0 = 3$



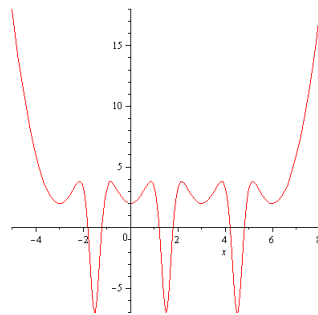
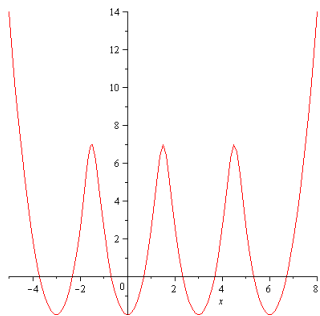
$$a = 1.5, x_0 = 1$$



$$a = 1.5, x_0 = 2$$



$$a = 1.5, x_0 = 3$$

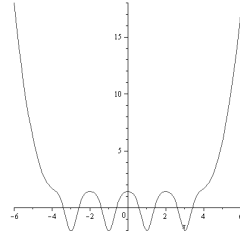
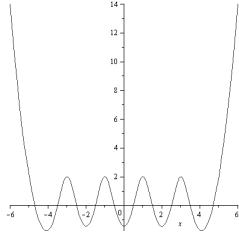


شکل ۴-۵ چاه پتانسیل پنجگانه

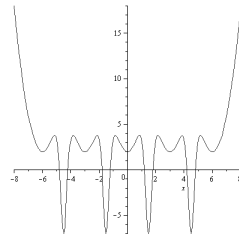
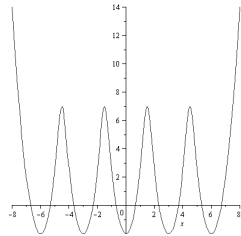
$V_1(x)$

$a = 1, x_0 = 2$

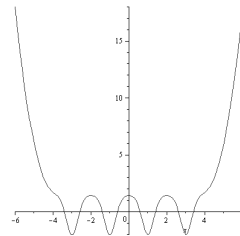
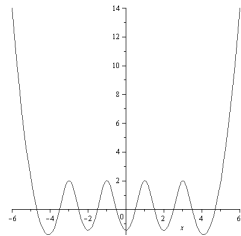
$V_2(x)$



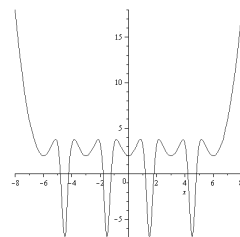
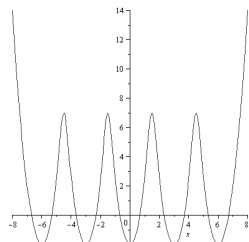
$a = 1, x_0 = 3$



$a = 1.5, x_0 = 2$



$a = 1.5, x_0 = 3$



- [۱] W.Y.Keung , E.Kavacs and V.P.Sukhatme, Phys.Rev.Lett 60,41,1988
- [۲] A.Gangopadhyaya , P.K.Panigrahi and V.P.Sukhatme Phys.Rev.A47,2720,1993
- [۳] مریم خلج- پایان نامه کارشناسی ارشد فیزیک- دانشگاه فردوسی مشهد- سال ۱۳۷۵
- [۴] پیوست ۲





## پیوست ۱

### نظریه اختلال لگاریتمی در مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی

نظریه اختلال لگاریتمی زمانی به کار می رود که تنها حالت پایه  $\psi(x)$  را داشته باشیم و حالت‌های برانگیخته ناشناخته و یا بدست آوردن آنها دشوار باشد. در این قسمت چگونگی بدست آوردن انرژی تقریبی را با این استفاده از این روش شرح می دهیم:

معادله شرودینگر زیر را در نظر بگیرید:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} [V_0(x) + gV_1(x)]\psi(x) = E\psi(x) \quad (1)$$

که در آن  $V_1(x)$  پتانسیل اختلالی و  $g$  ثابت برهمکنش است. اگر  $\psi(x)$  را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\psi(x) = e^{S(x)} \quad (2)$$

معادله شرودینگر (۱) به صورت زیر در می آید:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} [S''(x) + S'(x)^2] + V_0(x) + gV_1(x) - E = 0 \quad (3)$$

اگر  $S'(x)$  و  $E$  را به صورت زیر بسط دهیم:

$$S'(x) = C_0(x) + gC_1(x) + g^2C_2(x) + \dots \quad (4)$$

$$E = E_0 + gE_1 + g^2E_2 + \dots$$

با جایگذاری معادلات (۴) در (۳) و مسازی قرار دادن ضرایب درجات یکسان  $g$  معادلات زیر بدست می آید:

$$C_0'(x) + C_0^2(x) = \frac{2m}{\hbar^2} [V_0(x) - E] \quad (5)$$

$$C_1'(x) + 2C_0(x)C_1(x) = \frac{2m}{\hbar^2} [V_1(x) - E_1] \quad (6)$$

$$C_2'(x) + 2C_0(x)C_2(x) = -\frac{2m}{\hbar^2} E_2 - C_1^2(x) \quad (7)$$

$$C_n'(x) + 2C_0(x)C_n(x) = -\frac{2m}{\hbar^2} E_n - \sum_{s=1}^{n-1} C_s(x)C_{n-s}(x) \quad (8)$$

هر یک از این معادلات معادله دیفرانسیل خطی هستند که به راحتی قابل حل می باشند. معادله (۵) مسئله بدون اختلال است و جواب آن متناظر با تابع موج بدون اختلال  $\psi_0(x)$  است که همیشه قابل بهنجار می باشد و انتگرال مربع آن ۱ است. با ضرب مربع تابع موج حالت پایه بدون اختلال  $|\psi_0(x)|^2 = \exp \int 2C_0 dx$  در معادله (۶) و انجام مقاداری محاسبات می توان معادله (۶) را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{d}{dx} [C_1(x)|\psi_0(x)|^2] = \frac{2m}{\hbar^2} [V_1(x) - E_1] |\psi_0(x)|^2 \quad (9)$$

هنگامی که  $x \rightarrow 0$  و  $\psi_0 \rightarrow -\infty$  میل می کند بنابراین داریم:

$$C_1(x)|\psi_0(x)|^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \int_{-\infty}^x [V_1(x) - E_1] |\psi_0(x)|^2 dx \quad (10)$$

چون در  $x \rightarrow \infty$  سمت چپ معادله فوق صفر می شود، بنابراین می توانیم اولین تقریب انرژی را در نظریه اختلال بدست آوریم که به صورت زیر می باشد:

$$E_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} V_1(x) |\psi_0(x)|^2 dx \quad (11)$$

برای محاسبه دومین تقریب انرژی در معادله (۷) ضرب کرده و سپس انتگرال می گیریم. در این صورت خواهیم داشت:

$$E_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} C_1^2(x) |\psi_0(x)|^2 dx \quad (12)$$

ملاحظه می شود که  $E_2$  همیشه مقدار منفی دارد. با استفاده از معادله (۱۰) می توان مقدار  $E_2$  را به صورت زیر بدست آورد:

$$E_2 = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_0(x)|^{-2} \left[ \int_{-\infty}^x |\psi_0(x)|^2 [V_1(y) - E_1] dy \right]^2 dx \quad (13)$$

با همین روش نتایج زیر را برای  $E_n$  و  $C_n$  ( $n \leq 2$ ) بدست می آوریم:

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{s=1}^{n-1} C_s(x) C_{n-s}(x) \right) |\psi_0(x)|^2 dx \quad (14)$$

$$\frac{d}{dx} [C_n(x)|\psi_0(x)|^2] = -\left( \frac{2m}{\hbar^2} E_n + \sum_{s=1}^{n-1} C_s(x) C_{n-s}(x) \right) |\psi_0(x)|^2 \quad (15)$$

$$C_n(x)|\psi_0(x)|^2 = -\int_{-\infty}^x \left( \frac{2m}{\hbar^2} E_n + \sum_{s=1}^{n-1} C_s(x) C_{n-s}(x) \right) |\psi_0(x)|^2 dx \quad (16)$$

از مطالب بیان شده می توان نتیجه گرفت که انرژی کل  $E = E_0 + E_1 + \dots$  می تواند از رابطه زیر محاسبه شود:

$$E = E_0 + E_1 - \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} [C_1(x) + C_2(x) + \dots]^2 |\psi_0(x)|^2 dx \quad (17)$$

این انرژی کمتر از انرژی  $E_0 + E_1$  است.

### محاسبه انرژی حالت چاههای پتانسیل پنجگانه و هفتگانه و تعمیم آن به چاههای پتانسیل $(2n+1)$ گانه با استفاده از ابرتقارن

مرجان توکلی<sup>۱</sup> - محمدرضا سرکرده‌ای<sup>۲</sup>

۱- دانشکده فیزیک- دانشگاه صنعتی شاهرود- شاهرود

۲- گروه فیزیک- دانشگاه الزهراء- تهران

چکیده:

یکی از مسائلی که در بسیاری از فرآیندهای فیزیکی مورد توجه است، اختلاف انرژی حالت پایه و اولین حالت برانگیخته برای چاههای پتانسیل است که عمدتاً برای حل آنها باید به روشهای عددی متوسل شد. در این مقاله با معرفی هامیلتونیهای ابرتقارن در مکانیک کوانتومی به محاسبه اختلاف انرژی حالت پایه و اولین حالت برانگیخته یک چاه پتانسیل پنجگانه و یک چاه پتانسیل هفتگانه می پردازیم و در نهایت یک رابطه کلی برای چاههای پتانسیل  $(2n+1)$  گانه بدست می آوریم.

مقدمه:

اختلاف انرژی حالت پایه و اولین حالت برانگیخته چاههای پتانسیل چندگانه معمولاً کوچک و محاسبه آن به روشهای معمول عددی مشکل می باشد. این اختلاف انرژی وقتی که ارتفاع سد پتانسیل بین چاهها بزرگ باشد، کوچکتر هم می شود. از اینرو قبلاً با استفاده از مکانیک کوانتومی ابرتقارن این اختلاف انرژی در چاه پتانسیل دوگانه محاسبه شده است [۲ و ۱]. اخیراً نیز این اختلاف انرژی برای چاه پتانسیل سه گانه محاسبه شده است [۳ و ۴]. در این مقاله مسئله چاههای پتانسیل پنجگانه و هفتگانه را با استفاده از ابرتقارن در مکانیک کوانتومی حل می کنیم.

## ۱- مکانیک کوانتومی ابرتقارن

همیلتونیهای ابرتقارن  $H_1$  و  $H_2$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x)$$

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x)$$

که در  $V_1(x)$  و  $V_2(x)$  عبارتند از:

$$V_1(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x)$$

$$V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x)$$

در روابط فوق  $W(x)$  ابرتانسیل نامیده می‌شود، پتانسیلهای  $V_1(x)$  و  $V_2(x)$  را پتانسیلهای همتا (partener) و  $H_1$  و  $H_2$  را همیلتونیهای همتا می‌نامند. (برای سادگی در محاسبات

ضریب  $\frac{\hbar^2}{2m} = 1$  انتخاب شده است).

تابع ابرتانسیل  $W(x)$  به این صورت بدست می‌آید:

$$W(x) = -\frac{\psi_0^{(1)'}}{\psi_0^{(1)}}(x)$$

که در آن  $\psi_0^{(1)}(x)$  ویژه تابع  $H_1$  در حالت پایه است و می‌توان آنرا به این صورت نوشت:

$$\psi_0^{(1)}(x) = N \exp\left(-\int W(x) dx\right)$$

که در آن  $N$  ضریب بهنجارش است [۷۶، ۵].

## ۲- حل چاه پتانسیل پنجگانه

برای بدست آوردن اختلاف انرژی حالت پایه و اولین حالت برانگیخته یک چاه پتانسیل

چندگانه یعنی شکاف انرژی  $\Delta E$  ابتدا یک ویژه تابع به عنوان ویژه تابع حالت پایه  $H_1$

انتخاب می‌کنیم، به طوری که چاه پتانسیل چندگانه مورد نظر را نتیجه دهد.

پنج چاه پتانسیل را در نظر می‌گیریم، این چاهها مربوط به نوسانگرهایی هستند که حول

$(-2x_0, 2x_0)$  و  $(-x_0, x_0)$  نوسان می‌کنند. احتیاج داریم که ویژه تابع حالت پایه  $\psi_0^{(1)}(x)$  را

بدانیم. برای این کار ویژه تابع حالت پایه هر یک از چاهها را بدست آورده و با جمع آنها ویژه

تابع حالت پایه چاه پتانسیل پنجگانه نامتقارن را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\psi_0^{(1)}(x) = e^{-(x-2x_0)^2} + e^{-(x-x_0)^2} + e^{-x^2} + e^{-a(x+x_0)^2} + e^{-a(x+2x_0)^2}$$

که در آن  $a$  میزان نامتقارن بودن چاه را تنظیم می کند و اگر  $a=1$  باشد، چاه متقارن خواهد بود. می توانیم به جای آنکه انرژی اولین حالت برانگیخته  $H_1$  را بدست آوریم، انرژی حالت پایه،  $H_2$  را بدست آوریم.

اگر  $\psi_0^{(1)}$  ویژه تابع حالت پایه  $H_1$  باشد آنگاه می توانیم ثابت کنیم که  $H_2(\frac{1}{\psi_0^{(1)}})$  باید صفر باشد [۴]، ولی  $\frac{1}{\psi_0^{(1)}}$  هنجار پذیر نیست. زیرا در حد اگر  $x \rightarrow \infty$  میل کند آنگاه  $\frac{1}{\psi_0^{(1)}} \rightarrow \infty$  میل خواهد کرد، اما از این تابع می توانیم یک تابع بهنجار به صورت زیر بسازیم:

$$\varphi(x) = \frac{\int_x^\infty [\psi_0^{(1)}(y)]^2 dy}{2I_+ \psi_0^{(1)}(x)} \quad x > 2x_0$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\psi_0^{(1)}(x)} \quad x_0 < x < 2x_0$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\psi_0^{(1)}(x)} \quad -x_0 < x < x_0$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\psi_0^{(1)}(x)} \quad -2x_0 < x < -x_0$$

$$\varphi(x) = \frac{\int_{-\infty}^x [\psi_0^{(1)}(y)]^2 dy}{2I_- \psi_0^{(1)}(x)} \quad x < -2x_0$$

که در آن  $I_+$  و  $I_-$  به صورت زیر تعریف شده اند:

$$I_+ = \int_{2x_0}^\infty [\psi_0^{(1)}(y)]^2 dy$$

$$I_- = \int_{-\infty}^{-2x_0} [\psi_0^{(1)}(y)]^2 dy$$

$\varphi(x)$  برای همه مقادیر  $x$  تعریف شده است و  $\varphi(0) = \frac{1}{2\psi_0^{(1)}(0)}$  می باشد.  $\varphi(x)$  در بینهایت صفر و در نقاط  $x = \pm 2x_0$  پیوسته است، اما مشتق آن پیوسته نیست. پس ویژه تابع  $H_2$  نمی تواند باشد. اما می توان با وارد کردن تابع  $\delta$  در هامیلتونی  $H_2$ ، هامیلتونی  $H_0$  را چنان ساخت به طوری که  $\varphi(x)$  ویژه تابع آن باشد، به طوری که  $H_0 = H_2 - \delta H$ :

$$\delta H = \frac{[\psi_0^{(1)}(+2x_0)]^2}{I_+} \delta(x - 2x_0) + \frac{[\psi_0^{(1)}(-2x_0)]^2}{I_-} \delta(x + 2x_0) + \frac{[\psi_0^{(1)}(x_0)]^2}{I_+} \delta(x - x_0) + \frac{[\psi_0^{(1)}(-x_0)]^2}{I_-} \delta(x + x_0)$$

اولین تصحیح انرژی از طریق بسط اختلالی رایلی-شرویدینگر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E^{(1)} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \frac{[\psi_0^{(1)}(2x_0)]^2}{I_+} \delta(x-2x_0) \varphi(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) dx} + \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \frac{[\psi_0^{(1)}(-2x_0)]^2}{I_-} \delta(x+2x_0) \varphi(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) dx}$$

$$+ \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \frac{[\psi_0^{(1)}(x_0)]^2}{I_+} \delta(x-x_0) \varphi(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) dx} + \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \frac{[\psi_0^{(1)}(-x_0)]^2}{I_-} \delta(x+x_0) \varphi(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) dx}$$

با جایگذاری  $I_+$  و  $I_-$  مقدار  $E^{(1)}$  بدست می‌آید:

$$E^{(1)} = \frac{2}{4} \left[ \frac{1}{I_+} + \frac{1}{I_-} \right] \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) dx}$$

به علت آنکه ویژه تابع حالت‌های برانگیخته را نداریم لازم است برای بدست آوردن تقریب دوم از نظریه اختلال لگاریتمی [۸] استفاده کنیم.

$$E^{(2)} = - \left\{ \int_{-\infty}^{-2x_0} dx \left[ \frac{E^{(1)} \int_{-\infty}^{-2x} \varphi^2(y) dy}{\varphi(x)} \right]^2 + \int_{-2x_0}^{-x_0} dx \left[ \frac{E^{(1)} \int_{-2x}^{-x} \varphi^2(y) dy}{\varphi(x)} \right]^2 + \int_{-x_0}^{x_0} dx \left[ \frac{E^{(1)} \int_{-x}^x \varphi^2(y) dy}{\varphi(x)} \right]^2 \right\}$$

$$- \left\{ \int_{x_0}^{2x_0} dx \left[ \frac{E^{(1)} \int_x^{2x} \varphi^2(y) dy}{\varphi(x)} \right]^2 + \int_{2x_0}^{\infty} dx \left[ \frac{E^{(1)} \int_{2x}^{\infty} \varphi^2(y) dy}{\varphi(x)} \right]^2 \right\}$$

بنابراین تا تقریب مرتبه دوم شکاف انرژی  $\Delta E$  برابر  $\Delta E = E^{(1)} + E^{(2)}$  می‌باشد.

پتانسیلهای هم‌تای  $V_1(x)$  و  $V_2(x)$  برای مقادیر مختلف  $a$  و  $x_0$  رسم شده‌اند. (شکل ۱)

### ۳- حل چاه پتانسیل هفتگانه

در این حالت نیز مانند قبل ویژه تابع حالت پایه  $\psi_0^{(1)}(x)$  را نوشته و ابرپتانسیل  $w(x)$  و

پتانسیلهای هم‌تای  $V_1(x)$  و  $V_2(x)$  را با در نظر گرفتن  $\frac{\hbar^2}{2m} = 1$  پیدا می‌کنیم.

$$\psi_0^{(1)}(x) = e^{-(x-3x_0)^2} + e^{-(x-2x_0)^2} + e^{-(x-x_0)^2} + e^{-x^2} + e^{-a(x+x_0)^2} +$$

$$+ e^{-a(x+2x_0)^2} + e^{-a(x+3x_0)^2}$$

حال اگر ویژه تابع حالت پایه  $H_2$  را داشته باشیم با محاسبه انرژی این تابع، شکاف انرژی  $\Delta E$  بدست خواهد آمد. می توان نشان داد که با اثر  $H_2$  بر  $\frac{1}{\psi_0^{(1)}}$  مقدار صفر بدست خواهد آمد. یعنی به نظر می رسد که  $\frac{1}{\psi_0^{(1)}}$  ویژه تابع  $H_2$  با ویژه مقدار صفر است. ولی چون تابع  $\frac{1}{\psi_0^{(1)}}$  وقتی که  $x \rightarrow \pm\infty$  به سمت بینهایت میل می کند، لذا این تابع هنجارپذیر نیست و نمی تواند یک تابع قابل قبول فیزیکی باشد. بنابراین باید ویژه تابعی معرفی کنیم که در بینهایت به سمت صفر میل کند. برای این منظور تابع زیر را معرفی می کنیم:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{\int_x^\infty [\psi_0^{(1)}(y)]^2 dy}{2I_+ \psi_0^{(1)}(x)} && x > 3x_0 \\ \varphi(x) &= \frac{1}{2\psi_0^{(1)}(x)} && 2x_0 < x < 3x_0 \\ \varphi(x) &= \frac{1}{2\psi_0^{(1)}(x)} && x_0 < x < 2x_0 \\ \varphi(x) &= \frac{1}{2\psi_0^{(1)}(x)} && -x_0 < x < x_0 \\ \varphi(x) &= \frac{1}{2\psi_0^{(1)}(x)} && -2x_0 < x < -x_0 \\ \varphi(x) &= \frac{1}{2\psi_0^{(1)}(x)} && -3x_0 < x < -2x_0 \\ \varphi(x) &= \frac{\int_{-\infty}^x [\psi_0^{(1)}(y)]^2 dy}{2I_- \psi_0^{(1)}(x)} && x < -3x_0 \end{aligned}$$

همانند آنچه در مورد چاه پنجگانه عمل کردیم، در این مورد اولین تصحیح انرژی به این صورت نوشته می شود:

$$E^{(1)} = \frac{3}{4} \left[ \frac{1}{I_+} + \frac{1}{I_-} \right] \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) dx}$$

که در آن

$$\begin{aligned} I_+ &= \int_{3x_0}^{\infty} [\psi_0^{(1)}(y)]^2 dy \\ I_- &= \int_{-\infty}^{-3x_0} [\psi_0^{(1)}(y)]^2 dy \end{aligned}$$

و تقریب دوم به این صورت نوشته می شود:

$$E^{(2)} = - \int_{-\infty}^{-3x_0} dx \left[ \frac{E^{(1)} \int_{-\infty}^{-3x} \varphi^2(y) dy}{\varphi(x)} \right]^2 - \int_{-3x_0}^{-2x_0} dx \left[ \frac{E^{(1)} \int_{-\infty}^{-2x} \varphi^2(y) dy}{\varphi(x)} \right]^2 - \int_{-2x_0}^{-x_0} dx \left[ \frac{E^{(1)} \int_{-\infty}^{-x} \varphi^2(y) dy}{\varphi(x)} \right]^2 -$$

$$- \int_{-x_0}^{x_0} dx \left[ \frac{E^{(1)} \int_{-\infty}^x \varphi^2(y) dy}{\varphi(x)} \right]^2 - \int_{x_0}^{2x_0} dx \left[ \frac{E^{(1)} \int_{-\infty}^{2x} \varphi^2(y) dy}{\varphi(x)} \right]^2 - \int_{2x_0}^{3x_0} dx \left[ \frac{E^{(1)} \int_{-\infty}^{3x} \varphi^2(y) dy}{\varphi(x)} \right]^2 -$$

$$- \int_{3x_0}^{\infty} dx \left[ \frac{E^{(1)} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(y) dy}{\varphi(x)} \right]^2$$

و شکاف انرژی  $\Delta E$  برابر  $E^{(1)} + E^{(2)}$  خواهد بود.  
 در شکل ۲ پتانسیلهای همتهای  $V_1(x)$  و  $V_2(x)$  رسم شده‌اند.  
 بدین ترتیب می توان روابط کلی برای چاههای پتانسیل  $(2n+1)$  گانه  $(n=1,2,3,\dots)$  به صورت زیر نوشت:

$$E^{(1)} = \frac{n}{4} \left[ \frac{1}{I_+} + \frac{1}{I_-} \right] \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x) dx}$$

$$E^{(2)} = - \int_{-\infty}^{-nx_0} dx \left[ E^{(1)} \int_{-\infty}^{-nx} \varphi^2(y) dy \times \frac{1}{\varphi(x)} \right]^2 - \int_{-nx_0}^{nx_0} dx \left[ E^{(1)} \int_{-nx}^{nx} \varphi^2(y) dy \times \frac{1}{\varphi(x)} \right]^2 -$$

$$- \int_{nx_0}^{\infty} dx \left[ E^{(1)} \int_{nx}^{\infty} \varphi^2(y) dy \times \frac{1}{\varphi(x)} \right]^2$$

همچنین:

$$I_+ = \int_{nx_0}^{\infty} [\psi_0^{(1)}(y)]^2 dy$$

$$I_- = \int_{-\infty}^{-nx_0} [\psi_0^{(1)}(y)]^2 dy$$

در مورد پتانسیلهای زوج به دلیل تنوع انتخاب در توزیع چاههای پتانسیل امکان نوشتن رابطه کلی وجود ندارد. مثلاً برای یک چاه پتانسیل چهارگانه ویژه تابع حالت پایه  $V_1(x)$  به دو شکل زیر می تواند باشد:

$$\psi_0^{(1)}(x) = e^{-(x-x_0)^2} + e^{-x^2} + e^{-a(x+x_0)^2} + e^{-a(x+2x_0)^2}$$

$$\psi_0^{(1)}(x) = e^{-(x-2x_0)^2} + e^{-(x-x_0)^2} + e^{-x^2} + e^{-a(x+x_0)^2}$$



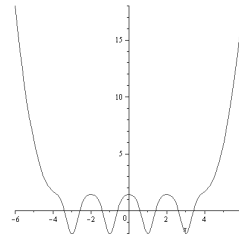
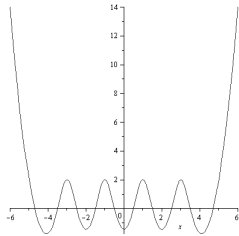
و به همین ترتیب برای چاههای پتانسیل ششگانه ، هشتگانه و  $2n$  گانه ( $n=1,2,3,\dots$ ) تعداد توابع موج افزایش پیدا می کند و از یک روند کلی تبعیت نمی کنند. شکل پتانسیلها در زیر نشان داده شده اند.

شکل ۱- چاه پتانسیل پنجگانه

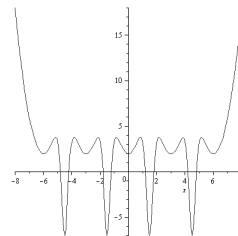
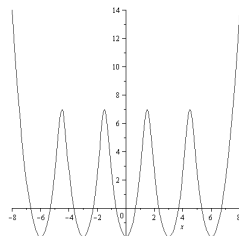
$V_1(x)$

$a = 1, x_0 = 2$

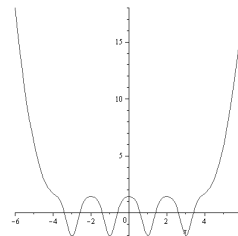
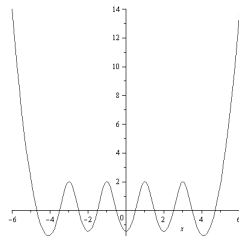
$V_2(x)$



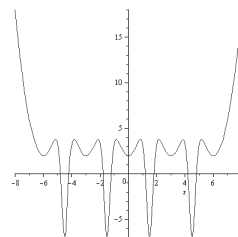
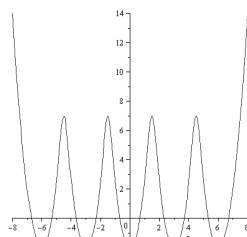
$a = 1, x_0 = 3$



$a = 1.5, x_0 = 2$



$a = 1.5, x_0 = 3$

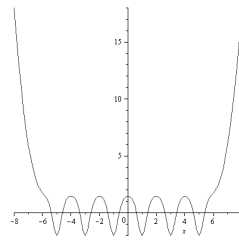
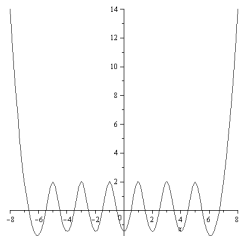


شکل ۲- چاه پتانسیل هفتگانه

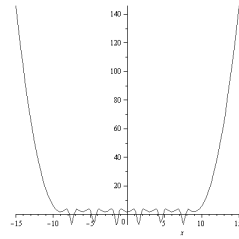
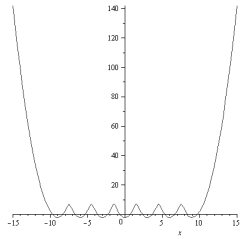
$V_1(x)$

$a = 1, x_0 = 2$

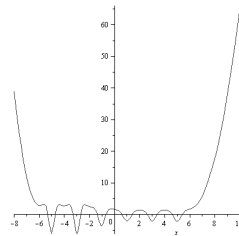
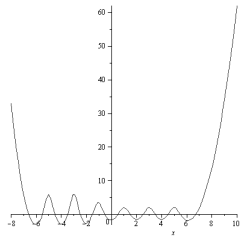
$V_2(x)$



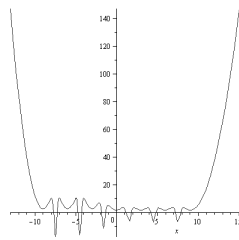
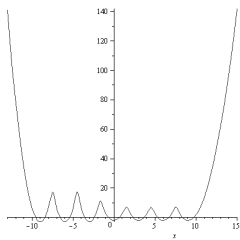
$a = 1, x_0 = 3$



$a = 1.5, x_0 = 2$



$a = 1.5, x_0 = 3$



## منابع:

- W.Y.Keung , E.Kavacs and V.P.Sukhatme, Phys.Rev.Lett 60,41,1988[<sup>۱</sup>]  
A.Gangopadhyaya , P.K.Panigrahi and V.P.Sukhatme, [<sup>۲</sup>]  
Phys.Rev.A47,2720,1993  
[<sup>۳</sup>] مریم خلج- پایان نامه کارشناسی ارشد فیزیک- دانشگاه فردوسی مشهد- سال ۱۳۷۵  
[<sup>۴</sup>] مرجان توکلی- پایان نامه کارشناسی ارشد فیزیک- دانشگاه صنعتی شاهرود- سال ۱۳۸۶  
E.Witten , Nucl.Phys.B 188,513,1981[<sup>۵</sup>]  
F.Cooper and B.Freedman , Am Phys146,262,1983[<sup>۶</sup>]  
R.Dutt , A.Khare and V.P.Sukhatme, Ann Phys56,163,1988[<sup>۷</sup>]  
T.Imbo and U.Sukhatme , Ann Phys 52,140,1984[<sup>۸</sup>]

## پیوست ۳

### ابرسانایی

در سال ۱۹۱۱ یعنی هنگامی که کامرلینگ اونز (H.Kamerlingh Onnes) و دستیارش ژیل هولست (Gilles Holst) در دانشگاه لیدن هلند مقداری جیوه را تا دمای پایین تر از آنچه تا آن زمان به دست آمده بود، سرد کردند نمی توانستند باور کنند که جیوه در این شرایط فاقد مقاومت الکتریکی شده باشد. به نظر آنها می رسید که بعضی حالت‌های مدار کوتاه تصادفی مانع اندازه گیری‌های دقیق شده اند. اما آنها پس از آنکه آزمایش را تکرار کردند و عملاً دیدند که هنگام گرم و سرد کردن جیوه نسبت به دمای گذار مقاومت آن زیاد و کم می شود، پذیرفتند که باید حادثه ای کاملاً غیر منتظره روی داده باشد. این نخستین مورد از شگفتی‌های گوناگون ابرسانایی بود که از آن هنگام تا کنون ظاهر شده است.

پژوهشگران در یافته اند که کاهش مقاومت تنها بخشی از ویژگی‌های جالب ابرساناهاست. ابرساناها از نظر خواص مغناطیسی نیز با مواد دیگر تفاوت دارند. آنها می توانند، از یک طرف میدان‌های مغناطیسی بسیار قوی تولید کنند و از طرف دیگر امکان اندازه گیری، کنترل، و کاربرد میدان‌های مغناطیسی ضعیفتر از آنچه را که تصور می شود فراهم آورند. باید گفت علت آنکه خواص حیرت آور ابرساناها به طور کامل شناخته نشده بود، این بود که تا سال ۱۹۸۶ تصور می شد که خاصیت ابرسانایی فقط در دماهای پایین حدود ۲۰ کلوین یا ۲۰ درجه بالای صفر مطلق ظاهر می شود.

با وجود هزینه های بالا و پیچیدگی روش‌های سرد کردن کاربردهای ابرسانایی برای میدان‌های قوی و میدان‌های ضعیف حتی پیش از پی بردن به وجود خاصیت ابرسانایی در دماهای بسیار بالا نیز روز به روز در حال گسترش است. درباره گستره کاربرد خاصیت ابرسانایی می توان گفت که در یک طرف آهنرباهای ابرسانای شتابدهنده آزمایشگاه ملی فرمی که ذرات بنیادی را تا انرژی های بالا شتاب می دهد، قرار دارند و در طرف دیگر "اسکوییدها" (وسیله ابرسانای تداخل کوانتومی) هستند، که میدان‌های مغناطیسی تولید شده توسط مغز انسان را ثبت می کنند. در اوایل سال ۱۹۸۷ علم ابرسانایی با کشف موادی که در دمای بالاتر از ۹۰ کلوین ابرسانا می شوند، دگرگون شد.

## پیوست ۴

### ماتریس های پائولی و دیراک

(۱) ماتریس های پائولی: ماتریس های پائولی شامل سه ماتریس هرمیتی، یکانی و بدون رد(تریس)  $2 \times 2$  می باشند و عبارتند از:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \sigma_y &= \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} \\ \sigma_z &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\end{aligned}\quad (1)$$

معمولاً از اندیس های عددی استفاده می کنیم یعنی  $\sigma_1 = \sigma_x$  و  $\sigma_2 = \sigma_y$  و  $\sigma_3 = \sigma_z$   
الف) قوانین ضرب:

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \quad (2)$$

(یک ماتریس واحد در عبارت اول و جمع روی  $k$  در عبارت دوم به طور تلویحی وجود دارد).  
بنابراین به طور مشخص داریم:

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1 \quad (3)$$

$$\sigma_x \sigma_y = i \sigma_z$$

$$\sigma_y \sigma_z = i \sigma_x \quad (4)$$

$$\sigma_z \sigma_x = i \sigma_y$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \quad (5) \quad \text{جابجاگر}$$

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \quad (6) \quad \text{پادجابجاگر}$$

و برای دو بردار  $a, b$  داریم:

$$(a \cdot \sigma)(b \cdot \sigma) = a \cdot b + i \sigma \cdot (a \times b) \quad (7)$$

ب) نمایی ها

$$e^{i\theta \cdot \sigma} = \cos \theta + i \hat{\theta} \cdot \sigma \sin \theta \quad (8)$$

(۲) ماتریس های دیراک: ماتریس های دیراک شامل چهار ماتریس یکانی بدون رد  $4 \times 4$  می باشد.  
یعنی:

$$\begin{aligned}\gamma^0 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \gamma^i &= \begin{vmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{vmatrix}\end{aligned}\quad (9)$$

در فرمول بالا ۱ ماتریس واحد  $2 \times 2$  صفرها می باشد.  $\sigma^i$  ماتریس های پائولی هستند. با پایین آوردن اندیس علامت مولفه های فضایی را تغییر می دهد:  $\gamma_0 = \gamma^0, \gamma_i = -\gamma^i$ . همچنین ماتریس های کمکی نیز تعریف می شوند:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (10)$$

$$\Sigma = \begin{vmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{vmatrix} \quad (11)$$

$$\gamma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) \quad (12)$$

برای هر چهار بردار  $a^\mu$  یک ماتریس  $4 \times 4$  به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\not{a} \equiv a_\mu \gamma^\mu \quad (13)$$

الف) قوانین ضرب: برحسب متریک

$$g^{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (14)$$

داریم (توجه داشته باشید که  $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4$ ).

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad \not{a}\not{b} + \not{b}\not{a} = 2a.b \quad (15)$$

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = 4 \quad (16)$$

$$\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu = -2\gamma^\nu, \quad \gamma_\mu\not{a}\gamma^\mu = -2\not{a} \quad (17)$$

$$\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\mu = -4g^{\nu\lambda}, \quad \gamma_\mu\not{a}\not{b}\gamma^\mu = 4a.b \quad (18)$$

$$\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma\gamma^\mu = -2\gamma^\sigma\gamma^\lambda\gamma^\nu, \quad \gamma_\mu\not{a}\not{b}\not{c}\gamma^\mu = -2\not{c}\not{b}\not{a} \quad (19)$$

ب) قضیه های رد: رد حاصل ضرب تعداد فرد از ماتریس گاما صفر است.

$$Tr(1) = 4 \quad (20)$$

$$Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}, \quad Tr(\not{a}\not{b}) = 4a.b \quad (21)$$

$$Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma) = -4(g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda}) \quad (22)$$

$$Tr(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4(a.b.c.d - a.c.b.d + a.d.b.c) \quad (23)$$

چون  $\gamma^5$  یک حاصل ضرب تعداد زوج از ماتریس های گاما هست نتیجه می گیریم که  $Tr(\gamma^5\gamma^\mu) = 0$  و همچنین  $Tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda) = 0$  در تعداد زوجی از ماتریس های  $\gamma$  ضرب شود داریم:

$$Tr(\gamma^5) = 0 \quad (24)$$

$$Tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu) = 0, \quad Tr(\gamma^5\not{a}\not{b}) = 0 \quad (25)$$

$$Tr(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma) = 4i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \quad (26)$$

$$Tr(\gamma^5\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4i\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}a_\mu b_\nu c_\lambda d_\sigma$$

که  $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} = -1$  است. اگر جایگشت زوج از  $0123$  باشد و برابر است با  $+1$  برای جایگشت فرد و برابر است صفر اگر هر کدام از اندیس ها برابر باشند. توجه کنید که

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} = \varepsilon_{\mu\nu\kappa\tau} = -2(\delta_{\kappa}^{\lambda}\delta_{\tau}^{\sigma} - \delta_{\tau}^{\lambda}\delta_{\kappa}^{\sigma}) \quad (27)$$



## *Abstract*

Supersymmetry is a concept which connects the Fermions and Bosons to each other. This phenomenon is used in unified theory of forces, and there is hope to be a suitable frame for quantum gravity, though there is no experimental evidence to observe this symmetry

In this thesis, we try to review the concept of supersymmetry in quantum mechanics, and then to mention some of its applications in physical world including constrained and bounded systems. In this relation we discuss and calculate the state energy of many-fold quantum potential wells and its generalization on the basis of supersymmetry.