بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده فیزیک

رساله دکتری

تقارنهای کروی هامیلتونی دیراک
در مدل لایه‌ای هسته‌ای

مجید حمزوی

استاد راهنما: پروفسور علی اکبر رجبی

تیر ۱۳۹۲

تقدیم به همسر عزیزم،
به پاس قدردانی از قلبی آکنده از عشق و محبت که محیطی سرشار از آرامش و آسایش برای من فراهم آورده است.

تقدیم به پدر بزرگوار و مادر مهربانم،
آن دو فرشته‌ای که همواره دعای خیرشان را بدرقه‌ام کرده‌اند تا من به جایگاهی که اکنون در آن ایستاده‌ام برسم.

تقدیم به او که آموخت مرا تا بیاموزم، استاد گرامی جناب آقای پروفسور علی اکبر رجبی که وجودم جز هدیه وجودش نیست...

همچنین وظیفه خود میدانم از جناب آقای دکتر حسین موحدیان بعنوان استادی دلسوز که راهنمایی‌هایشان همیشه راهگشای بنده بوده است، تشکر نمایم.

چکیده:

کشف تقارنهای نسبیتی هامیلتونی دیراک به محاسبه جرم مزونها با استفاده از معادله دیراک با پتانسیلهای خارجی برای توصیف دینامیک میان یک کوارک و آنتی کوارک باز می گردد که توسط Tassie و Smith (۱۹۷۱) معرفی شده اند. نویسندگان در این مقاله ذکر کرده اند که اگر پتانسیلهای خارجی به یک اسکالر لورنتس و جزء زمانی یک بردار لورنتس محدود شود و اگر این دو پتانسیل تا یک ثابت مساوی باشند، نتایج جرمها مستقل از سمتگیری اسپینی هستند. چهار سال بعد Bell و Ruegg مولدهای اسپین نسبیتی را برای این تقارن استنتاج کردند. آنها شکل کلی تری از هامیلتونی دیراک را در نظر گرفته بودند و نشان دادند که اگر پتانسیلهای برداری لورنتس با هر چها جزء غیر صفر، به یک روش ویژه با پتانسیل اسکالر مرتبط شوند، یک تقارن شبه-اسپینی نیز وجود خواهد داشت.

اخیرا، تقارن اسپینی معادله دیراک بطور موفقیت آمیزی برای مزونهایی که در آنها کوارک (آنتی کوارک) سبک و آنتی کوارک (کوارک) سنگین باشند، بکار بسته شده است. تقارن اسپینی به آسانی و بطور تجربی قابل مشاهده اند؛ زیرا طیف جرم (یا انرژی) مستقل از سمت گیری اسپین با درجات آزادی فضایی خواهد بود. برای مثال حالت $p_{1/2}$ ، l و s در خلاف جهت هم هستند $l-\frac{1}{2}$ ($l=1$)، با حالت $p_{3/2}$ ($l+s=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$) تبهگن است.

همچنین اسپین در راستای حالت $s_{1/2}$ جفت خلاف راستا ندارد، زیرا جفت شدگی اسپین با اندازه حرکت زاویه ای مداری صفر فقط می تواند اندازه حرکت زاویه ای $\frac{1}{2}$ تولید کند.

از طرف دیگر تقارنهای دیگر هامیلتونی دیراک که توسط Bell و Ruegg کشف شده اند، شفاف نیستند. برای مثال، هامیلتونی دیراک با یک پتانسیل اسکالر لورنتس و یک پتانسیل برداری لورنتس (فقط با یک جزء زمانی) مساوی در اندازه ولی مخالف در علامت، یک تقارن شبه اسپینی تولید خواهد کرد. در این مورد حالت $p_{1/2}$ و $p_{3/2}$ دیگر تبهگن نخواهند بود. در حقیقت $p_{1/2}$ جفت تبهگن نخواهد داشت و حالت $f_{5/2}$ با $p_{3/2}$ تبهگن خواهد بود. حالت $d_{3/2}$ با یک حالت $s_{1/2}$ تبهگن خواهد بود و بهمین ترتیب. بعبارت دیگر حالتهای تبهگن در اندازه حرکت زاویه ای به اندازه ۲ واحد اختلاف دارند. بهمین علت مبدا یک شبه تبهگنی میان حالتها با این اعداد کوانتومی مشاهده شده در هسته، سالها مخفی ماندند.

بنابراین، با توجه به اهمیت فراوان تقارنهای نسبیتی در فیزیک هسته ای، در اینجا قصد داریم علاوه بر یک مطالعه مروری بر روی این تقارنها، آنها را در هسته ها بررسی می‌کنیم. همچنین با در نظر گرفتن پتانسیلهای مختلف و رایج در فیزیک هسته‌ای نظیر Mie، Woods-Saxon، Eckart، Harmonic Oscillator و ...، پس از حل تحلیلی معادله دیراک در حالتهای تقارنی ذکر شده، حالتهای تبهگن را مشاهده کرده و با تجربه مقایسه می‌کنیم و نیز با یک پتانسیل تانسوری تبهگنی موجود در این ترازها را از بین می‌بریم.

شایان ذکر است که در حل تحلیلی معادله دیراک می توان از روشهای مختلفی استفاده نمود که از روشهای متداول، روشهایی هستند که در کتب مراجع ذکر شده اند. همچنین روشهایی مانند SUSY، Nikiforov-Uvarov، Asymptotic Iteration Method، PCT، Ansatz، ... وجود دارند. در اینجا قصد داریم از روش قدرتمند و مفید Nikiforov-Uvarov برای حل معادلات درجه دوم استفاده کنیم.

کلمات کلیدی: معادله دیراک، تقارن اسپینی، تقارن شبه اسپینی، پتانسیل‌های هسته‌ای، پتانسیل تانسـوری، روش Nikiforov-Uvarov

فهرست

فهرست اشکال

فهرست جداول

فصل اول

مقدمه‌ای بر مدل لایه‌ای در فیزیک هسته‌ای

۱-۱ مقدمه

در بررسی هسته‌های سنگین چند مشکل بنیادی پیش روی ما وجود دارد. یکی از مشکلات این است که از لحاظ ریاضی در حل مسئله چند جسمی با کار دشورای روبرو هستیم. اگر در این مورد برای پتانسیل هسته‌ای شکل ساده‌ای مانند پتانسیل چاه مربعی یا پتانسیل نوسانگر ساده را در نظر بگیریم، برای توصیف بر هم کنش متقابل A نوکلئون می توانیم یک دستگاه معادلات مرتبط به دست آوریم. این دستگاه معادلات را نمی توان به طور تحلیلی حل کرد، بلکه با استفاده از روشهای عددی باید به حل آن پرداخت.

مشکل دوم به ماهیت نیروی هسته ای مربوط می شود. شواهد موجود نشان می دهد که بر هم کنش نوکلئونها نه تنها از طریق نیروهای متقابل دو جسمی بلکه از طریق نیروهای سه جسمی نیز صورت می گیرد؛ یعنی نیروی وارد بر نوکلئون ۱ نه فقط به مواضع هر یک از نوکلئونهای ۲ و۳ بستگی دارد، بلکه شامل یک جمله اضافی است که از همبستگی بین مواضع نوکلئونهای ۲و ۳ ناشی می‌شود که برای این نوع نیرو در فیزیک کلاسیک نیروی مشابهی سراغ نداریم. بنابراین برای بررسی هسته‌ها، یک نظریه فوق العاده ساده را که از لحاظ ریاضی بدون مشکل و از لحاظ فیزیکی غنی باشد انتخاب می‌کنیم. اگر این نظریه در توصیف دست کم چند خاصیت هسته ای نسبتا موفق باشد، آنگاه با افزودن جمله‌های اضافی آن را تکمیل می‌کنیم و بدین ترتیب یک مدل هسته‌ای می سازیم. معیار موفقیت هر مدلی را باید در دو نکته دانست: ۱- مدل باید بتواند خواص هسته‌ای تاکنون اندازه گیری شده را به طور قابل قبولی توضیح دهد و همچنین ۲- مدل باید خواص دیگری را پیش بینی کند که در آزمایشهای جدید قابل اندازه گیری هستند.

۱-۲ مدل پوسته‌ای

نظریه اتمی با استفاده از مدل پوسته‌ای توانسته است به طور کاملا روشن جزئیات پیچیده ساختار اتمها را توضیح دهد. به همین دلیل متخصصان فیزیک هسته‌ای به امید آنکه بتوانند به توصیف روشنی از خواص هسته‌ها دست یابند سعی کردند در بررسی ساختار هسته‌ای از نظریه مشابهی استفاده کنند. در مدل پوسته‌ای اتمها، پوسته ها را با الکترونها یی که انرژی‌شان به ترتیب افزایش یابد پر می کنیم و این آرایش الکترونی به گونه‌ای است که اصل طرد پاولی در آن رعایت می‌شود. بدین ترتیب هر اتمی متشکل است از یک ناحیه مرکزی خنثی که پوسته‌های پر دارد و چند الکترون ظرفیت که در پوسته‌ای خارج از این ناحیه مرکزی قرار می‌گیرند. در این مدل فرض بر این است که عمدتاً همین الکترونهای ظرفیت هستند که خواص اتمها را تعیین می کنند که هنگامی که پیش بینیهای این مدل را با بعضی از خواص اندازه‌گیری شده سیستمهای اتمی مقایسه می‌کنیم آنها را بخوبی با هم سازگار می‌یابیم. بویژه

مشاهده می‌کنیم که تغییرات خواص اتمی در محدوده هر زیر پوسته تدریجی و کم است در حالیکه وقتی از یک زیر پوسته به زیر پوسته دیگر می‌رویم تغییرات خواص ناگهانی و زیاد است.

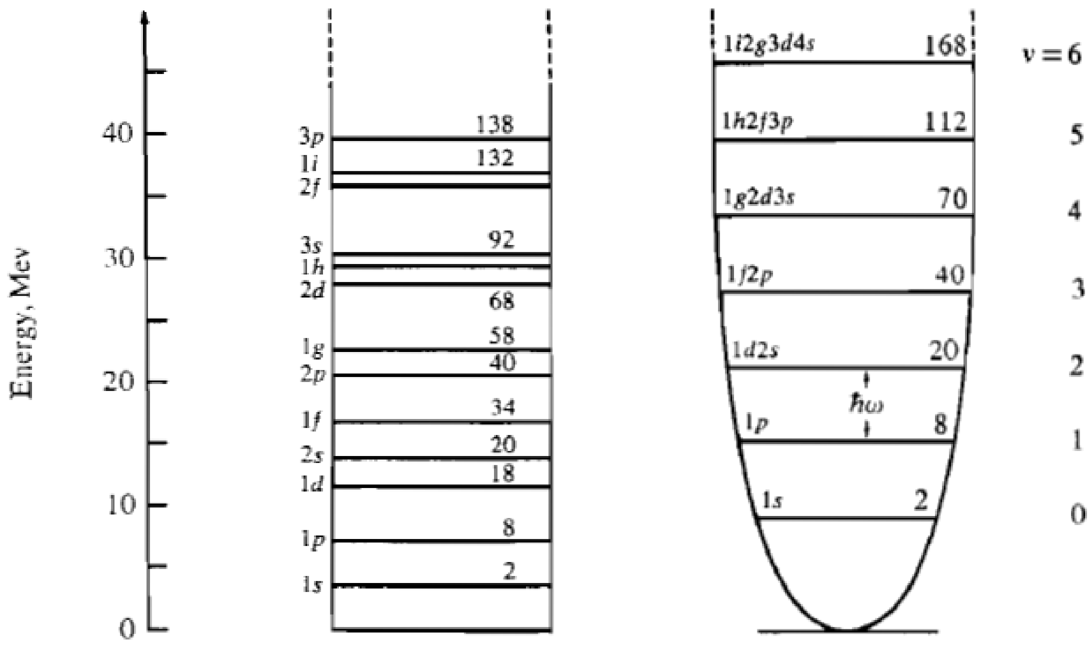
هنگامی که سعی می‌کنیم تا این مدل را به قلمرو و هسته‌ای هم گسترش دهیم، از همان آغاز کار با چند مانع روبرو می‌شویم. در مورد اتمها، پتانسیل حاکم را میدان کولنی هسته تامین می‌کند، یعنی یک عامل خارجی زیر پوسته‌ها یا مدارها را سازمان می دهد. در این حالت معادله شرودینگر را با همین پتانسیل می‌توان حل کرد و انرژی زیر پوسته هایی را که الکترونها باید درآنها قرار گیرند محاسبه کرد. اما در مورد هسته هیچ عامل خارجی وجود ندارد و نوکلئونها در پتانسیلی که خودشان به وجود می آورند در حرکت اند. یکی دیگر از جنبه های جالب توجه نظریه پوسته‌ای اتمها، وجود مدارهای فضایی است که خواص اتمها را اغلب بر حسب مدارهای فضایی الکترونها توصیف می‌کنیم. اکترونها می‌توانند نسبتا آزدانه در این مدارها حرکت کنند، بدون اینکه برخوردی با الکترونهای دیگر داشته باشند. قطر نوکلئونها در مقایسه با اندازه هسته نسبتاً بزرگ است، در حالی که هر نوکلئون منفرد در خلال حرکتش در هر مدار می تواند برخورهای متعددی با نوکلئونهای دیگر داشته باشد[۱،۲].

طرز رفتار ناگهانی و ناپیوسته هسته ها در این موارد هم در مقابل همان اعداد پروتونی یا نوترونی هسته هایی که Z یا N آنها برابر ۲، ۸، ۲۰، ۲۸، ۵۰، ۸۲، ۱۲۶ است و معرف اثرات پوسته‌های اصلی پر شده هستند را «اعداد جادویی»می گویند. هر نظریه موفقی باید بتواند برای وجود این پوسته‌های پر اعداد اشغالی که بر شمرده ایم، توضیحی قابل قبولی فراهم کند. در مدل پوسته‌ای، مسئله پتانسیل هسته‌ای را با این فرض بنیادی حل می‌کنیم: حرکت هر نوکلئون منفرد را تحت تاثیر پتانسیل واحدی که نوکلئونهای دیگر همه در تولید آن شرکت دارند در نظر می‌گیریم. اگر هر یک از نوکلئونها را به این نحو مورد بررسی قرار دهیم، آنگاه برای تمامی نوکلئونهای موجود در هسته می‌توانیم ترازهای انرژی متناظر به زیر پوسته ها را به دست آوریم.

وجود مدارهای فضایی مشخص را اصل پاولی تعیین می کند. فرض می‌کنیم که در یک هسته تقریبا در ته چاه پتانسیل برخوردی بین دو نوکلئون صورت می‌گیرد و نوکلئونها هنگام برخورد با هم انرژی مبادله می‌کنند، اما اگر تمامی ترازهای انرژی تا تراز نوکلئونهای ظرفیت پر شده باشد، هیچ راهی برای کسب انرژی نوکلئون نمی‌ماند، مگر آنکه مقدار انرژی به اندازه‌ای باشد که نوکلئون را به تراز ظرفیت برساند. سایر ترازهای نزدیکتر به تراز اولیه نوکلئون همگی پر هستند و نمی توانند یک نوکلئون اضافی را بپذیرند. انرژی لازم برای این انتقال، که از ترازی نزدیک به تراز پایه به نوار ظرفیت انجام می شود بیشتر از مقداری است که معمولا در برخورد بین دو نوکلئون از یکی از آنها به دیگری منتقل می شود. از این رو چنین برخوردی بین نوکلئونها نمی‌تواند صورت گیرد و گویی نوکلئونها در حرکت مداری‌شان با هیچ گونه ممانعتی از طرف نوکلئونهای درون هسته رو برو نمی‌شوند .

۱-۲-۱ پتانسیل مدل پوسته‌ای

نخستین گام در ارائه مدل پوسته‌ای انتخاب پتانسیل هسته‌ای مناسب است. در آغاز دو نوع پتانسیل چاه نامتناهی و نوسانگر هماهنگ را در نظر می گیریم که حل ترازهای انرژی حاصل را در شکل ۱-۱ نشان داده ایم. همچنانکه از نظریه فیزیک اتمی می‌دانیم واگنی هر تراز را تعداد نوکلئونهایی که می توانند در آن قرار بگیرند تعیین می کنند. بعبارت دیگر واگنی هر تراز برابر $2(2l+1)$ می شود که در آن عامل $(2l+1)$ از طریق واگنی m_l و عامل ۲ از طریق واگنی m_s حاصل شده است. برای نامگذاری این ترازها مثل مورد فیزیک اتمی از نمادهای طیف نگاری استفاده می‌کنیم. اما این نمادگذاری از یک نظر با فیزیک اتمی تفاوت دارد. در اینجا N عدد کوانتومی اصلی نیست، بلکه صرفاً شماره تراز مربوط به l مشخص را نشان می دهد بنابراین 1d به معنی اولین (یا پایینترین)حالت d، $2d$ به معنی دومین حالت d است و همین طور .....(در نماد گذاری فیزیک اتمی هیچ حالتی به صورت 1d یا 2d نداریم). در شکل ۱-۱ عدد اشغال هر تراز از $1s$ علاوه بر ۲ نوترون ۲ پروتون هم می تواند قرار گیرد. ظهور اعداد جادویی ۲، ۸ و ۲۰ در هر نوع پتانسیل دلگرم کننده است، ولی در ترازهای انرژی بالاتر هیچ گونه ارتباطی با اعداد جادویی تجربی به چشم نمی‌خورد .

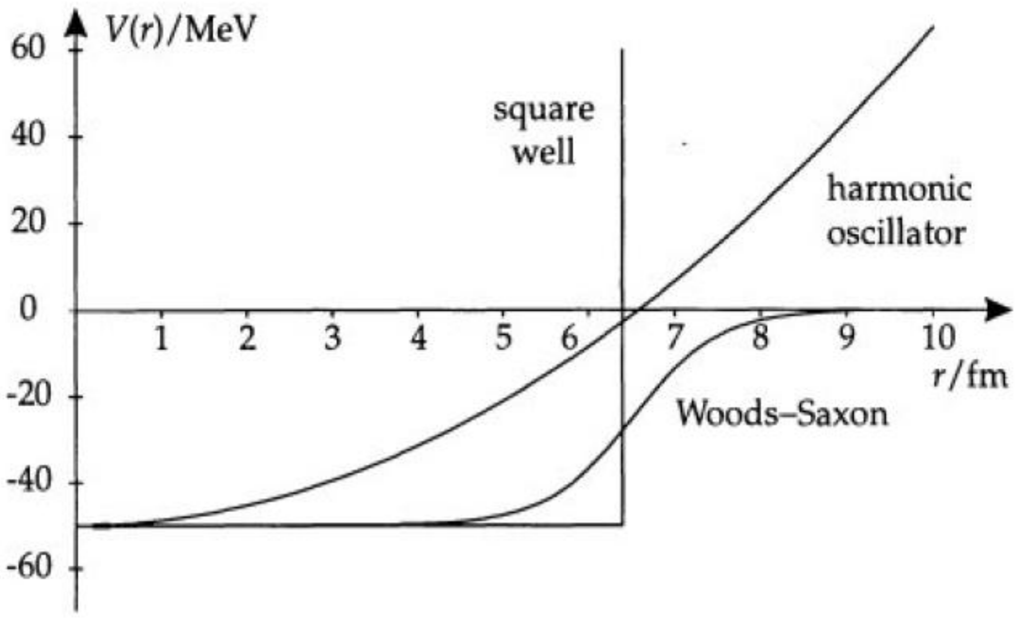


شکل ۱-۱ ترازهای انرژی حاصل از پتانسیلهای چاه نامتناهی (سمت چپ) و نوسانگر هماهنگ (سمت راست)

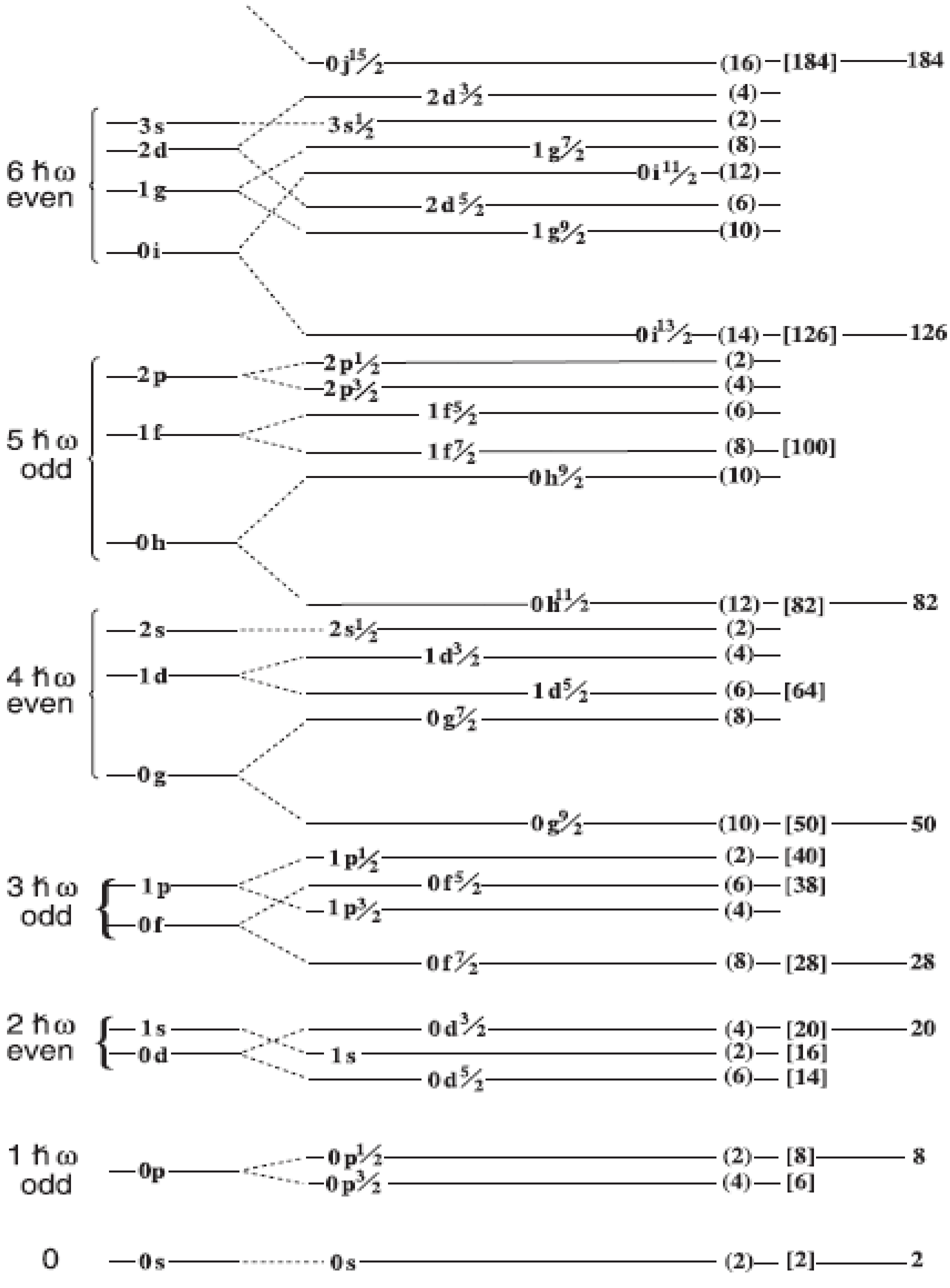
به عنوان اولین گام در اصلاح مدل سعی می‌کنیم پتانسیل واقع بینانه‌تری را انتخاب کنیم. چاه نامتناهی تقریب خوبی برای پتانسیل هسته‌ای نیست؛ برای جدا کردن یک نوترون یا پروتون از هسته با صرف انرژی کافی باید بتوانیم آن را از چاه خارج کنیم. در این صورت عمق چاه نمی‌تواند بی‌نهایت باشد. بعلاوه لبه پتانسیل هسته‌ای نباید تیز باش، بلکه مثل توزیع بار و جرم هسته‌ای مقدار پتانسیل بعد از شعاع میانگین R باید به آهستگی به سوی صفر میل کند. از طرف دیگر پتانسیل نوسانگر هماهنگ هم لبه اش به قدر کافی تیز نیست و انرژی جدایی آن نیزبی نهایت می شود. از این رو شکل واقع بینانه‌تر پتانسیل را به صورت بینابینی

$$V(r) = \frac{-V_0}{1+\exp\left[\left(r-R\right)\right]/a} \qquad (۱)$$

انتخاب می کنیم که منحنی نمایش آن در شکل ۱-۲ به همراه چاه پتانسیل و نوسانگر هماهنگ رسم شده است[۱،۲]. پارامتر های a, Rبه ترتیب شعاع میانگین و ضخامت پوسته هستند که مقادیرشان: $a = 0.524fm, R = 125A^{1/3}FM$ و عمق چاه V_0 چنان تنظیم می‌شود که برای انرژیهای جدایی که از مرتبه $50MeV$ است مقادیر مناسبی بدست آید. ترازهای انرژی حاصل را در شکل ۱-۳ نشان داده‌ایم.



شکل ۱-۲ نمودار پتانسیل معادله (۱) به همراه چاه پتانسیل و نوسانگر هماهنگ



شکل ۱-۳ نمای طیف نوکلئونی و شکافتگی حاصل از پتانسیل اسپین-مدار

نتیجه پتانسیل جدید در مقایسه با نوسانگر هماهنگ شکل ۱-۱ این است که واگنی l را در پوسته‌های اصلی برطرف می‌کند. هر چه به طرف انرژیهای بالاتر پیش می رویم، فاصله ایجاد شده در این مورد بیشتر و بیشتر می شود به طوری که سرانجام این فاصله با فاصله بین ترازهای نوسانگر هماهنگ قابل مقایسه خواهد شد. وقتی پوسته-های حاصل را به ترتیب با $2(2l+1)$ نوکلئون پر می کنیم بازهم اعداد جادویی ۲، ۸ و ۲۰ را بدست می‌آوریم، ولی اعداد جادویی بالاتر را نمی‌توان با این محاسبات پیدا کرد .

۱-۲-۲ پتانسیل اسپین – مدار

برای بهبود محاسبات لازم است که جمله‌های مختلفی به معادله (۱) افزوده شود. در دهه ۱۹۴۰ تلاشهای نافرجام زیادی برای یافتن این جمله تصحیحی صورت گرفت و سرانجام مایر هاکسل سوئس و جنسن در سال ۱۹۴۹ موفق شدند که با افزودن یک پتانسیل اسپین مدار، فاصله های مناسبی بین زیر پوسته ها بدست آوردند. در اینجا بار دیگر به فیزیک اتمی روی می آوردیم و یکی دیگر از مفاهیم آن را به کار می گیریم. بر هم‌کنش اسپین مدار در فیزیک اتمی که مولد ساختار ریز مشاهده شده در خطوط طیفی است، از بر هم‌کنش الکترومغناطیسی بین گشتاور مغناطیسی الکترون و میدان مغناطیسی ناشی از حرکت الکترون به دور هسته حاصل می شود. اثر این بر هم‌کنش نوعاً خیلی کوچک و شاید از مرتبه یک قسمت از 10^5 قسمت فاصله بین ترازهای اتمی است. هیچ بر هم‌کنش الکترومغناطیسی از این نوع نخواهد توانست تغییرات محسوسی را در فواصل تراز هسته ای ایجاد و اعداد جادویی تجربی را باز تولید کند. با وجود این در اینجا مفهوم نیروی اسپین-مدار هسته‌ای را به همان صورت نیروی اسپین مدار اتمی از نوع الکترومغناطیسی در نظر می‌گیریم.

بر هم کنش اسپین-مدار را به صورت $V_{so}(r)\vec{L}.\vec{S}$ در نظر می‌گیریم، ولی شکل $V_{SO}(r)$ خیلی مهم نیست. این عامل $\vec{L}.\vec{S}$ است که باعث تجدید سازمان ترازها می شود. همچنانکه از فیزیک اتمی می‌دانیم حالتها را در حضور بر هم‌کنش اسپین-مدار باید با تکانه زاویه‌ای کل $\vec{J}=\vec{L}+\vec{S}$ نشانه‌گذاری کنیم. عدد کوانتومی اسپین هر نوکلئون برابر $S=1/2$ است. پس مقادیر ممکن برای عدد کوانتومی تکانه زاویه‌ای کل عبارت‌اند از: $j=l-1/2, j=l+1/2$ (البته به استثنای مورد $l=0$ که در آن فقط مقدار $j=1/2$ مجاز است). مقدار انتظاری $\vec{L}.\vec{S}$ را با استفاده از یک شگرد متداول می‌توان محاسبه کرد. نخست مقدار $\vec{J}^2=(\vec{L}+\vec{S})^2$ را بدست می‌آوریم

$$J^2=L^2+2\vec{L}.\vec{S}+S^2 \quad (\text{۲الف})$$

$$\vec{L}.\vec{S}=\frac{1}{2}\left(J^2-L^2-S^2\right) \quad (\text{۲ب})$$

سپس با قرار دادن مقادیر انتظاری در این معادله حاصل می شود

$$<\vec{L}.\vec{S}>=\frac{1}{2}\left[J\left(J+1\right)-l\left(l+1\right)-s\left(s+1\right)\right]h^2 \quad (۳)$$

اکنون تراز $1f\ (l=3)$ را که دارای واگنی $2(2l+1)=14$ است در نظر می‌گیریم. مقادیر ممکن برای j در این تراز عبارت اند از: $l\pm1/2=5/2,7/2$. بنابراین ترازهای مورد نظر به صورت $1f_{7/2},1f_{5/2}$ خواهند بود. واگنی هر تراز برابر $(2j+1)$ است که از مقادیر m_j حاصل می‌شود. در این صورت ظرفیت نوکلئونی تراز $1f_{7/2}$ برابر ۸ می شود که از جمع آنها مجدداً تعداد ۱۴ حالت به دست می‌آید. فاصله انرژی بین حالتهای $1f_{7/2},1f_{5/2}$ که زوج اسپین – مدار یا دو تایه نامیده می‌شوند متناسب با مقدار $\langle\vec{L}.\vec{S}\rangle$ است. در واقع می‌توان اختلاف انـرژی هـر زوج حالتی را که در آن $l>0$ باشد به کمک معادله (۳) محاسبه کرد

$$<\vec{L}.\vec{S}>_{j=l+1/2}-<\vec{L}.\vec{S}>_{j=l-1/2}=\frac{1}{2}(2l+1)\hbar^2 \qquad (۴)$$

شکافتگی (یا فاصله) انرژی بین حالتها با افزایش l افزایش می‌یابد. حال اگر اثر $V_{SO}(r)$ رابه صورت منفی در نظر بگیریم، عضوی از زوج که مقدار j در آن بزرگتر است در سطح پایینتر خواهد گرفت. اثر این شکافتگی را در نمودار شکل ۱-۳ نشان داده ایم. در اینجا تراز $1f_{7/2}$ در فاصله (یا گاف) بین پوسته های دوم و سوم قرار می گیرد. ظرفیت این تراز برابر ۸ نوکلئون است و بدین ترتیب عدد جادویی ۲۸ از آرایـش جدیـد حاصـل خواهـد شـد (شـکافتگیهای p,d به اندازه ای نیستند که تغییرات مهمی در دسته بندی ترازها به وجود آوردند). اثر مهم بعدی ناشی از جملـه تصحیحی اسپین – مدار را در تراز از $1g$ می‌بینیم. حالت $1g_{9/2}$ آنقدر به پایین رانده می شود کـه در پوسـته ۴۰ نوکلئونی قبلی افزوده می شود، عدد جادویی ۵۰ به دست می‌آید. این اثر روی پوسته های اصلی دیگر نیز تکرار مـی شود. در هر یک از این موارد عضو کم انرژی‌تر زوج اسپین – مدار از پوسته بعدی به پوسته قبلـی تنـزل مـی‌کنـد و بدین ترتیب باقیمانده اعداد جادویی هم طبق انتظار به دست می آید (حتی یک عدد جادویی جدید ۱۸۴ هم پـیش بینی می شود که هنوز در عمل مشاهده نشده است).

فصل دوم

مقدمه‌ای بر مکانیک کوانتومی نسبیتی

۲-۱ مقدمه

رفتار نوکلئونهای درون هسته شباهتی به رفتار ذرات کلاسیک و یا برخورد گلوله‌های بیلیارد ندارد. خواص هسته را رفتار موجی نوکلئونها تعیین می‌کند و تحلیل این رفتار مستلزم کاربرد تکنیک‌های ریاضی مکانیک کوانتومی است. خصوصیات ریاضی مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی از حل معادله شرودینگر بدست می‌آید. معادله مستقل از زمان و یک بعدی شرودینگر برای ذره‌ای به جرم m و با انرژی پتانسیل $V(x)$ بصورت زیر است

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{d^2x}+V(x)\psi(x)=E\psi(x) \qquad (۱)$$

که در آن $\psi(x)$ تابع موج شرودینگر است. این معادله، که تحت تبدیلات گالیله ناوردا است، پدیده‌ای را توصیف می‌کند که در آن سرعت‌های ذرات نسبت به سرعت نور خیلی کوچک باشند. همچنین معادله شرودینگر تحت تبدیلات لورنتس ناوردا نمی‌باشد. در این بخش قصد داریم تئوری معادلات موج نسبیتی را بسط دهیم. دو مورد مورد بررسی قرار خواهند گرفت: معادله شرودینگر نسبیتی یا کلین-گوردون برای ذرات بدون اسپین و معادله دیراک برای ذرات اسپین $1/2$.

۲-۲ معادله کلین-گوردون

در سال ۱۹۲۹، معادله شرودینگر نسبیتی یا کلین-گوردون، توسط شرودینگر هنگام مطالعه برروی معادله غیر نسبیتی خود ارائه شد. این معادله برای دینامیک ذرات بدون اسپین مانند مزون π مناسب است.

۲-۲-۱ ذره آزاد

کا را با توجه به ذره آزاد با اسپین صفر آغاز می‌کنیم. رابطه نسبیتی بین انرژی E و اندازه حرکت $\vec{p}$ یک ذره با جرم سکون m بصورت زیر است

$$E = (m^2c^4 + \vec{p}^2c^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (۲)$$

با استفاده از عملگرهای مکانیک کوانتومی انرژی و تکانه، یعنی

$$E \to E_{op} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \vec{p} \to \vec{p}_{op} = -i\hbar \vec{\nabla} \qquad (۳)$$

و با اعمال بر روی دو طرف معادله (۲) با یک تابع موج $\psi(\vec{r},t)$، بدست می‌آوریم

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) = (m^2c^4 - \hbar^2c^2\nabla^2)^{\frac{1}{2}}\psi(\vec{r},t) \qquad (۴)$$

این معادله اشکالات اساسی دارد. اولا، باید اپراتور زیر رادیکال در سمت راست را تفسیر کنیم. اگر آن را بصورت سری توانی بسط دهیم، حل آن بسیار مشکل خواهد شد. ثانیا، ناوردایی نسبیتی آن بطور وضوح نمایش داده نمی-شود. برای جلوگیری از این سختی‌ها، جمله رادیکالی را توسط رابطه زیر از بین می‌بریم

$$E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2c^2 \qquad (۵)$$

که از مربع کردن رابطه انرژی (۲) بدست می‌آید. با جایگذاری (۳) و اعمال برروی دو طرف (۵) با تابع موج ψ، معادله موج شرودینگر نسبیتی یا معادله کلین-گوردون برای یک ذره آزاد بدست می‌آید؛

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 t}\psi = m^2c^4\psi - \hbar^2c^2\nabla^2\psi \qquad (۶)$$

این معادله در مقایسه با معادله شرودینگر (غیرنسبیتی) که در آن مشتق زمانی از مرتبه اول است، یک معادله درجه دوم نسبت به زمان است.

۲-۲-۲ ذره باردار در یک میدان الکترومغناطیسی

اگر یک ذره بدون اسپین با بار الکتریکی q در یک میدان الکترومغناطیسی، که توسط پتانسیل برداری $\vec{A}(\vec{r},t)$ و پتانسیل اسکالر $\phi(\vec{r},t)$ توصیف می‌شود، در حرکت باشد، تغییرات زیر را اعمال می‌کنیم

$$E \to E - q\phi, \qquad \vec{p} \to \vec{p} - q\vec{A} \tag{۷}$$

بطوریکه (۵) تبدیل می‌شود به؛

$$(E - q\phi)^2 = m^2c^4 + c^2(\vec{p} - q\vec{A})^2 \tag{۸}$$

با جایگذاری (۳) و اعمال برروی دو طرف (۸) با تابع موج ψ می‌توانیم معادله کلین-گوردون بـرای یـک ذره بـدون اسپین با بار q را در یک میدان الکترومغناطیسی بدست آوریم

$$(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi)^2\psi = m^2c^4\psi + c^2(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A})^2\psi \tag{۹}$$

۲-۲-۳ جواب‌های حالت مانا

در معادله (۹) فرض می‌کنیم که $\vec{A}$ و ϕ مستقل از زمان باشند و جوابهای حالت مانا را بصورت زیـر در نظـر مـی-گیریم

$$\psi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r})e^{-iEt/\hbar} \tag{۱۰}$$

که با جایگذاری در (۹) بدست می‌آوریم

$$c^2(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A})\psi = \left[(E - q\phi)^2 - m^2c^4\right]\psi \tag{۱۱}$$

در حالت خاص اگر $\vec{A} = 0$ و ϕ متقارن کروی باشد، داریم

$$-c^2\hbar^2\nabla^2\psi = \left[(E - q\phi(r))^2 - m^2c^4\right]\psi \tag{۱۲}$$

با نوشتن تابع موج ψ در مختصات کروی بصورت

$$\psi_{Elm}(r) = R_{El}(r) Y_{lm}(\theta,\varphi) \qquad (۱۳)$$

معادله موج شعاعی را بصورت زیر بدست می‌آوریم

$$-c^2\hbar^2\left[\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R_{El}(r) = \left[(E-q\phi)^2 - m^2c^4\right]R_{El}(r) \qquad (۱۴)$$

۲-۲-۴ تفسیر معادله کلین-گوردون؛ معادله پیوستگی

از آنجاییکه معادله کلین-گوردن یک معادله درجه دوم نسبت به زمان است، پس تفسیری متفاوت با حالت غیرنسبیتی دارد. به منظور ساده سازی بحث، معادله کلین-گوردون برای ذره آزاد در معادله (۱۴) را در نظر می‌گیریم. برای تفسیر تابع موج، سعی می‌کنیم که چگالی احتمال $P(\vec{r},t)$ و چگالی جریان $\vec{j}(\vec{r},t)$ را که در معادله پیوستگی زیر صدق می‌کنند، تشکیل دهیم

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{j} = 0 \qquad (۱۵)$$

با ضرب طرف چپ (۶) در ψ^* و ضرب معادله همیوغ مختلط (۶) از طرف چپ در ψ و با تفریق دو معادله بدست آمده، می‌توانیم معادله پیوستگی فوق را بدست آوریم، بطوریکه

$$P(\vec{r},t) = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right) \qquad (۱۶)$$

و

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*(\nabla\psi) - (\nabla\psi^*)\psi\right] \qquad (۱۷)$$

با توجه به معادله (۱۶) در می‌یابیم $P(\vec{r},t)$ مثبت نمی‌باشد، بطوریکه نمی‌تواند بعنوان چگالی احتمال تفسیر شود. این یکی از مشکلاتی است که در مواجه با معادله کلین-گوردون با آن روبرو می‌شویم. مشکل دیگر در ادامه شرح داده می‌شود. جوابهای موج تخت معادله کلین-گوردون برای ذره آزاد معادله (۶) به شکل زیر می‌باشند

$$\psi(\vec{r},t) = Ae^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} \qquad (۱۸)$$

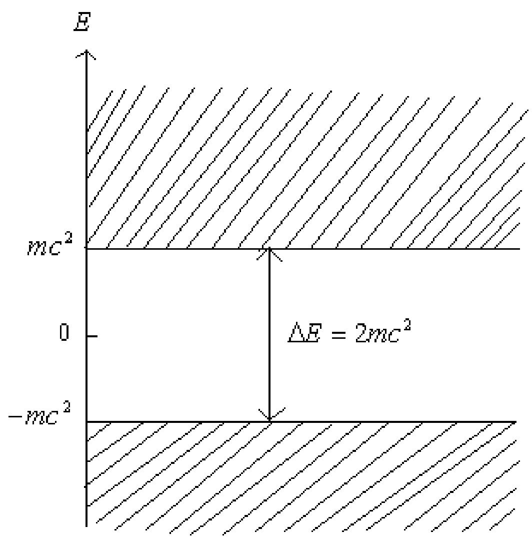
که A یک ثابت است. همچنین معادله (۱۸) ویژه توابع اپراتورهای $E_{op} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ و $\vec{p}_{op} = -i\hbar\vec{\nabla}$ با ویژه مقادیر $E = \hbar\omega$ و $\vec{p} = \hbar\vec{k}$، به ترتیب، می‌باشد. با جایگذاری (۱۸) در (۶) بدست می‌آوریم

$$\hbar\omega = \pm\left(m^2c^4 + \hbar^2c^2\vec{k}^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۱۹)$$

ریشه‌های مثبت و منفی در (۱۹) باعث وجود ابهام در علامت انرژی می‌شود که در رابطه (۵) نشان داده شده است. همچنین، این رابطه با (۲) متناسب نیست، اما با رابطه کلی

$$E = \pm\left(m^2c^4 + \vec{p}^2c^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۲۰)$$

متناسب است که یک ریشه انرژی-منفی اضافی را شامل می‌شود. در نتیجه، طیف انرژی از پایین محدود نیست. برای یک ذره آزاد که از ابتدا در حال سکون می‌باشد، یک اختلال خارجی به اندازه $\Delta E = 2mc^2$، اجازه پرش ذرات بین انرژی پیوسته مثبت منفی را می‌دهد.



شکل ۲-۱ طیف انرژی ذره آزاد

سرانجام در سال ۱۹۳۴، W. Pauli و V. Weisskopf معادله کلین-گوردون را بعنوان معادله میدان توصیف و آن را توسط نظریه کوانتومی میدان، کوانتیزه کردند. سپس معادله کلین-گوردون یک معادله نسبیتی برای ذرات بدون اسپین شد.

۲-۳ معادله دیراک

در سال ۱۹۲۸، P. A. M. Dirac معادله موج نسبیتیی را کشف کرد که می‌توانست چگالی احتمال مثبت را تضمین کند. برای چندین سال بعد ازکشف او، معادله دیراک تنها معادله موج نسبیتی معتبر برای ذرات جرم‌دار بود.

همچنین معادله دیراک بطور خاص مهم است، زیرا ذرات با اسپین $1/2$ مانند الکترون را توصیف می‌کند[۳].

در نظریه مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی، ذرات اسپین $1/2$ توسط دو تابع موج اسپینور که حالت اسپینی را شامل می‌شود و مولفه- z اندازه حرکت زاویه‌ای اسپینی S_z که مقادیر $m_s\hbar$ به خود می‌گیرد و $m_s = \pm 1/2$، توصیف می‌شوند. بطور مشابه، انتظار داریم که ذرات اسپین $1/2$ در تئوری نسبیتی بتوانند توسط توابع موج که حداقل دو مولفه دارند نمایش داده شوند. از آنجاییکه ذرات اسپین $1/2$ با پادذرات، دارای جرم واسپین مساوی اما بار مختلف، مرتبط هستند به یک تابع موج چهار-مولفه‌ای نیاز داریم. این مساله هنگامیکه دیراک معادله‌اش را بدست آورد، ناشناخته بود و این یکی از دستاودرهای بزرگ فیزیک نظری بود که دیراک توانست وجود پوزیترون (پاد ذره الکترون) را از نظریه‌اش پیش بینی کند.

دیراک برای پیدا کردن تابع موج، کارش را مشابه با مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی آغاز کرد. یعنی

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi \tag{۲۱}$$

که شبیه معادله شرودینگر نسبت به $\partial/\partial t$ خطی است و مانند معادله کلین-گوردون توان ۲ نیست. در معادله فوق فرض می‌شود تابع موج $\psi(\vec{r},t)$ دارای N مولفه $\psi_i(\vec{r},t)$ باشد که $i=1,2,...,N$ و از اینرو می‌تواند به فرم یک بردار ستونی نوشته شود

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ . \\ . \\ . \\ \psi_N \end{pmatrix} \tag{۲۲}$$

۲-۳-۱ ذره آزاد

در ابتدا حالت ذره آزاد را بررسی می‌کنیم. در نتیجه هامیلتونی باید مستقل از $\vec{r}$ و t باشد (چون نیرویی وجود ندارد) و ساده ترین حالت را که نسبت به جملات جرم و تکانه، خطی است، به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned} H &= c\vec{\alpha}.\vec{p}_{op} + \beta mc^2 \\ &= c\sum_{k=1}^{3}\alpha_k\,(p_{op})_k + \beta mc^2 \end{aligned} \tag{۲۳}$$

که $\vec{p}_{op} = -i\hbar\vec{\nabla}$ و $(p_{op})_k$ ($k=1,2,3$) مولفه‌های کارتزین $\vec{p}_{op}$ می‌باشند. سه مولفه $\vec{\alpha}$ ($\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$) و همچنین β مستقل از $\vec{r}$، t، $\vec{p}$ و E هستند، اما نیازی نیست که با یکدیگر جابجا شوند. با جایگذاری (۲۳) در (۲۱)، تابع موج دیراک را برای یک ذره آزاد بصورت زیر بدست می‌آوریم

$$\left(E_{op} - c\vec{\alpha}.\vec{p}_{op} - \beta mc^2\right)\psi = 0 \tag{۲۴الف}$$

یا

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -i\hbar c\vec{\alpha}.\vec{\nabla}\psi + \beta mc^2\psi \qquad \text{(۲۴ب)}$$

از آنجاییکه ψ یک بردار ستونی با N مولفه است، این معادله یک معادله ماتریسی است که می‌تواند بصـورت یـک دستگاه از N معادله کوپل شده نوشته شود

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_i &= -i\hbar c\sum_{j=1}^{N}\left(\alpha_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\alpha_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\alpha_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)_{ij}\psi_j + \sum_{j=1}^{N}\beta_{ij}mc^2\psi_j \\ &= \sum_{j=1}^{N}H_{ij}\psi_{ij} \qquad\qquad i=1,2,\dots,N \end{aligned} \qquad \text{(۲۵)}$$

به منظور تعیین مقادیر α_k ($k=1,2,3$) و β که در معادلات فوق ظاهر می‌شوند، در ابتدا نیاز داریم که هر حل از معادله موج ذره آزاد دیراک یک حل از ذره آزاد کلین-گـوردون باشـد کـه بـرای ایـن منظـور آن را بصـورت زیـر بازنویسی می‌کنیم

$$\left(E_{op}^2 - \vec{p}_{op}^{\,2}c^2 - m^2c^4\right)\psi = 0 \qquad \text{(۲۶)}$$

با ضرب (۲۴-الف) از طرف چپ در اپراتور $E_{op}+c\vec{\alpha}.\vec{p}_{op}-\beta mc^2$، معادله دیفرانسـل درجـه دوم بـه فـرم زیـر بدست می‌آید

$$\begin{aligned} \Bigg\{E_{op}^2 - c^2\left(\sum_{k=1}^{3}(\alpha_k)^2(p_{op})_k^2 + \sum_{k\prec l=1}^{N}(\alpha_k\alpha_l+\alpha_l\alpha_k)(p_{op})_k(p_{op})_l\right) \\ -mc^3\left(\sum_{k=1}^{3}(\alpha_k\beta+\beta\alpha_k)(p_{op})_k\right) - m^2c^2\beta^2\Bigg\}\psi = 0 \end{aligned} \qquad \text{(۲۷)}$$

با مقایسه (۲۶) و (۲۷)، مشاهده می‌کنیم که هر مولفه ψ_i از تابع موج دیراک در معادله کلین-گوردون صدق مـی-کند و همچنین

$$\begin{aligned} &(\alpha_1)^2 = (\alpha_2)^2 = (\alpha_3)^2 = \beta^2 = 1 \\ &\{\alpha_1,\alpha_2\} = \{\alpha_2,\alpha_3\} = \{\alpha_3,\alpha_2\} = 0 \\ &\{\alpha_1,\beta\} = \{\alpha_2,\beta\} = \{\alpha_3,\beta\} = 0 \end{aligned} \qquad \text{(۲۸)}$$

که $\{A,B\}$ پادجابجایی A و B را نشان می‌دهد. از آنجاییکه α_k ($k=1,2,3$) و β جابجا نمی‌شوند، نمی-توانند عدد باشند. پس ماتریسهای $N \times N$ را بدین منظور در نظر می‌گیریم. از آنجاییکه هامیلتونی عملگر هرمیتی می‌باشد، ماتریسهای α_k و β نیز باید هرمیتی باشند؛

$$\alpha=\alpha^{\dagger}, \qquad \beta=\beta^{\dagger} \tag{۲۹}$$

۲-۳-۲ نمایش دیراک برای ماتریسهای α_k و β

اکنون از روابط (۲۸) و (۲۹) برای ساختن فرم صریح ماتریسهای $\vec{\alpha}$ و β استفاده خواهیم کرد. از آنجاییکه $\alpha_k^2=\beta^2=1$، ویژه مقادیر α_k و β، ± 1 هستند. همچنین از روابط پادجابجایی‌شان در می‌یابیم که α_k و β بدون تریس هستند. در عوض، چون $\{\alpha_k,\beta\}=0$ و $\beta^2=1$، داریم

$$\alpha_k=-\beta\alpha_k\beta \tag{۳۰}$$

و بنابراین

$$Tr\alpha_k=Tr(-\beta\alpha_k\beta) \tag{۳۱}$$

از طرف دیگر، با استفاده از (۳۰) و اینکه $\alpha_k\beta=-\beta\alpha_k$، داریم

$$\alpha_k=\beta^2\alpha_k \tag{۳۲}$$

و نیز بدست می‌آوریم

$$Tr\alpha_k=Tr(\beta^2\alpha_k)=Tr(\beta\alpha_k\beta) \tag{۳۳}$$

در اینجا از این حقیقت که تریس ماتریسها به نظم در عوامل ضرب بستگی ندارد، استفاده کردیم. با مقایسه رابطه فوق و (۳۱) می‌بینیم که $Tr\alpha_k=0$. بطور مشابه، از آنجاییکه

$$\beta=-\alpha_k\beta\alpha_k \tag{۳۴}$$

داریم $Tr\beta=Tr(-\alpha_k\beta\alpha_k)$. همچنین داریم

$$Tr\,\beta = Tr\,(-(\alpha_k)^2\beta) = Tr\,(\alpha_k\,\beta\alpha_k) \qquad (۳۵)$$

بنابراین $Tr\,\beta = 0$. از آنجاییکه تریس جمع ویژه مقادیر می‌باشد و ویـژه مقـادیر α_k و β، ± 1 هسـتند، نتیجـه می‌گیریم که آنها از تعدادی مساوی ویژه مقادیر $+1$ و -1 تشکیل شده اند. در نتیجه α_k و β باید از مرتبه زوج باشند.

ابتدا ساده‌ترین حالت یعنی $N = 2$ را بررسی می‌کنیم. در می‌یابیم که ماتریسهای α_k و β خواص جبری شـبیه ماتریسهای اسپین 2×2 پاولی σ_x، σ_y و σ_z را دارند. اما ماتریس چهارمی پیدا نمـی‌شـود کـه بـا ماتریسـهای پاولی جابجا شود. درنتیجه مجبوریم که حالت $N = 4$ را بررسـی کنـیم. بـا پیـروی از دیـراک، نمـایش α_k و β بصورت زیر خواهند بود

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & \end{pmatrix} \qquad (۳۶)$$

که I ماتریس یکه 2×2 می‌باشد و این ماتریسها در تمام شرایط (۲۸) صدق مـی‌کننـد. نمـایش ویـژه فـوق، کـه نمایش دیراک نامیده می‌شود، یکه و منحصر به فرد نیست. هر چهار ماتریسی که در روابط (۲۸) صدق کننـد، مـی-توانند یک نمایش دیگر برای هامیلتونی دیراک باشند.

درنتیجه تابع موج ψ معادله (۲۲) باید شامل چهار جزء باشد که اسپینور چهار مولفـه‌ای نامیـده مـی‌شـود و بـرای ذرات اسپین $1/2$ متناسب است. نمایش‌هایی که دارای ماتریس‌های با مرتبه بالاتر می‌باشـند، متناسـب بـا ذرات بـا اسپین بزرگتر از $1/2$ می‌باشند.

۲-۳-۳ ذره باردار دیراک در یک میدان الکترومغناطیسی

برای بدت آوردن معادله دیراک برای یک ذره با اسپین $1/2$ و بار q در یک میـدان الکترومغناطیسـی، کـه توسـط پتانسیل برداری $\vec{A}(\vec{r},t)$ و پتانسیل اسکالر $\phi(\vec{r},t)$ توصیف می‌شود، تبدیلات معمول (۷) را در (۲۴) انجام می-دهیم

$$\left((E_{op}-q\phi)-c\vec{\alpha}.(\vec{p}_{op}-q\vec{A})-\beta mc^2\right)\psi=0 \qquad (۳۷)$$

یا

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=\left[-i\hbar c\vec{\alpha}.\vec{\nabla}-cq\vec{\alpha}.\vec{p}+q\phi+\beta mc^2\right]\psi \qquad (۳۸)$$

و با مقایسه با (۲۱) مشاهده می‌کنیم که هامیلتونی دیراک برای یک ذره با اسپین $1/2$ و بار q در یک میدان الکترومغناطیسی توسط رابطه زیر داده می‌شود

$$H=c\vec{\alpha}.(\vec{p}_{op}-q\vec{A})+q\phi+\beta mc^2 \qquad (۳۹)$$

۲-۳-۴ معادله همیوغ؛ معادله پیوستگی؛ چگالی‌های جریان و احتمال

در بخش قبل مشاهده کردیم که تابع موج ψ یک ماتریس ستونی به شکل (۲۲)، با چهار جزء ψ_i ($i=1,2,3,4$) است. می‌توانیم $\psi^{\dagger}$ را بصورت یک بردار سطری با اجزای ψ_i^* تعریف کنیم، یعنی

$$\psi^{\dagger}=(\psi_1^*,\psi_2^*,\psi_3^*,\psi_4^*) \qquad (۴۰)$$

با استفاده از (۳۸) و (۳۹) و اینکه $\vec{\alpha}$، β و $\vec{p}_{op}$ هرمیتی هستند، مشاهده می‌کنیم $\psi^{\dagger}$ در معادله زیر صدق می‌کند

$$\begin{aligned}-i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi^{\dagger}&=\psi^{\dagger}H\\&=(-i\hbar c\vec{\nabla}-qc\vec{A})\psi^{\dagger}.\vec{\alpha}+q\phi\psi^{\dagger}+mc^2\psi^{\dagger}\beta\end{aligned} \qquad (۴۱)$$

کمیت

$$P(\vec{r},t)=\psi^{\dagger}\psi=\sum_{i=1}^{4}\left|\psi_i\right|^2 \qquad (۴۲)$$

بطور واضح مثبت است و می‌تواند بعنوان چگالی احتمال توصیف شود که شبیه چگالی احتمـال $|\psi|^2$ بـرای معادلـه شرودینگر غیرنسبیتی می‌باشد. با ضرب (۳۸) از طرف چپ در $\psi^\dagger$ و (۴۱) از طرف راست در ψ و از تفاضـل ایـن دو بدست می‌آوریم

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\vec{\nabla}.(\psi^\dagger c\alpha\psi)=0 \qquad (۴۳)$$

اگر بردار

$$\vec{j}(\vec{r},t)=\psi^\dagger c\vec{\alpha}\psi \qquad (۴۴)$$

را بعنوان چگالی جریان توصیف کنیم، معادله (۴۳) شکل معادله پیوستگی را به خود می‌گیرد

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\vec{\nabla}.\vec{j}=0 \qquad (۴۵)$$

و $c\vec{\alpha}$ می‌تواند بعنوان عملگر سرعت توصیف شود.

۲-۳-۵ جوابهای حالت مانا

دراینجا فرض می‌کنیم که $\vec{A}$ و ϕ مستقل از زمان باشند. سپس جواب را بصورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\psi(\vec{r},t)=\psi(\vec{r})e^{-iEt/\hbar} \qquad (۴۶)$$

که $\psi(\vec{r})$ یک اسپینور چهار مولفه‌ای مستقل از زمان می‌باشد

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix} \qquad (۴۷)$$

از (۳۸) و (۴۶)، برای $\psi(\vec{r})$ معادله زیر را بدست می‌آوریم

$$\left[-i\hbar c\vec{\alpha}.\vec{\nabla}-cq\vec{\alpha}.\vec{p}+q\phi+\beta mc^2\right]\psi=E\psi \qquad (۴۸)$$

اسپینور چهار مولفه‌ای ψ را بصورت اسپینورهای دو مولفه‌ای زیر می‌نویسیم

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \qquad (۴۹)$$

که

$$\psi_A = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \qquad \psi_B = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \qquad (۵۰)$$

با استفاده از نمایش (۳۶) برای ماتریسهای $\vec{\alpha}$ و β، اسپینورهای دو مولفه‌ای ψ_A و ψ_B در دو معادله کوپل شده زیر صدق می‌کنند

$$(q\phi + mc^2)\psi_A + c\vec{\sigma}.(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A})\psi_B = E\psi_A \qquad (\text{۵۱الف})$$

$$c\vec{\sigma}.(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A})\psi_A + (q\phi - mc^2)\psi_B = E\psi_B \qquad (\text{۵۱ب})$$

۲-۳-۶ جوابهای موج تخت معادله دیراک

حال دوباره به معادله دیراک (۲۴) برای ذره اسپین $1/2$ برمی‌گردیم. از آنجاییکه هـامیلتونی (۲۳) مسـتقل از $\vec{r}$ و t می‌باشد، به دنبال ویژه توابع مشترک عملگرهای انرژی و تکانه هستیم، یعنی امواج تخت به شکل

$$\psi(\vec{r},t) = Aue^{i(\vec{p}.\vec{r} - Et)/\hbar} \qquad (۵۲)$$

که A یک ثابت و u یک اسپینور چهار مولفه‌ای مستقل از مختصات فضا-زمان x_μ می‌باشـد. امـواج تخـت (۵۲) ویژه توابع عملگرهای $E_{op} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ و $\vec{p}_{op} = -i\hbar\vec{\nabla}$ با ویژه مقادیر $E = \hbar\omega$ و $\vec{p} = \hbar\vec{k}$، به ترتیـب، مـی-باشند. با جایگذاری (۵۲) در (۲۴ب)، یک معادله ماتریسی برای u بدست می‌آوریم

$$(c\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta mc^2)u = Eu \qquad (۵۳)$$

در حالت اول فرض می کنیم که ذره در حال سکون باشـد، یعنـی $\vec{p} = 0$ و اسـپینور چهـار مولفـه‌ای را بـا $u(0)$ نمایش می‌دهیم و با استفاده از (۳۶)، رابطه فوق بصورت زیر درمی‌آید

$$\begin{pmatrix} mc^2 I & 0 \\ 0 & -mc^2 I \end{pmatrix} u(0) = Eu(0) \qquad (۵۴)$$

این معادله ویژه مقادیر $E_+ = mc^2$ (دو بار)، $E_- = -mc^2$ (دو بار) و چهار ویـژه تـابع مسـتقل خطـی دارد کـه عبارتند از

$$u^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(3)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(4)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (۵۵)$$

دو جواب اول ذره اسپین $1/2$ با انرژی مثبت $E_+ = mc^2$ را توصیف می‌کنند و دوتای بعـدی متناسـب بـا انـرژی منفی $E_- = -mc^2$ هستند.

حال مورد $\vec{p} \neq 0$ را بررسی می‌کنیم. بهتر است اسپینور چهار مولفه‌ای u را بصورت اسپینورهای دو مولفه‌ای u_A و u_B بنویسیم

$$u = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \qquad (۵۶)$$

که

$$u_A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad u_B = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \qquad (۵۷)$$

سپس از (۳۶) و (۵۳) داریم

$$\begin{pmatrix} mc^2 I & c\vec{\sigma}.\vec{p} \\ c\vec{\sigma}.\vec{p} & -mc^2 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \qquad (۵۸)$$

بنابراین u_A و u_B توسط روابط زیر بهم مرتبط می‌شوند

$$u_A = \frac{c\vec{\sigma}.\vec{p}}{E - mc^2} u_B, \quad u_B = \frac{c\vec{\sigma}.\vec{p}}{E + mc^2} u_A \qquad (۵۹)$$

با حذف u_B از دو معادله فوق و اینکه $(\vec{\sigma}.\vec{p})^2=\vec{p}^2$، بدست می‌آوریم

$$c^2(\vec{\sigma}.\vec{p})^2u_A=\vec{p}^2c^2u_A=(E^2-m^2c^4)u_A \qquad \text{(۶۰الف)}$$

بطور مشابه با حذف u_A، داریم

$$c^2(\vec{\sigma}.\vec{p})^2u_B=\vec{p}^2c^2u_B=(E^2-m^2c^4)u_B \qquad \text{(۶۰ب)}$$

بنابراین چهار ویژه مقدار معادله (۵۸) بصورت زیر بدست می‌آیند

$$E_+=+(m^2c^4+\vec{p}^2c^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(دوبار)} \qquad \text{(۶۱الف)}$$

و

$$E_-=-(m^2c^4+\vec{p}^2c^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(دوبار)} \qquad \text{(۶۱ب)}$$

با استفاده از خواص ماتریس‌های پاولی، یک دستگاه جبری معادلات برای u_iها بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
&(mc^2-E)u_1+cp_zu_3+c(p_x-ip_y)u_4=0\\
&(mc^2-E)u_2+c(p_x+ip_y)u_3-cp_zu_4=0\\
&cp_zu_1+c(p_x-ip_y)u_2-(mc^2+E)u_3=0\\
&c(p_x+ip_y)u_1-cp_zu_2-(mc^2+E)u_4=0
\end{aligned} \qquad \text{(۶۲)}$$

این دسته معادلات جواب ندارند مگر اینکه دترمینان ضرائب صفر شود. این دترمینان مقدار $(E^2-m^2c^4-\vec{p}^2c^4)^2$ دارد. بنابراین باید داشته باشیم

$$(E^2-m^2c^4-\vec{p}^2c^4)^2=0 \qquad \text{(۶۳)}$$

که جوابهای E_+ و E_- معادله (۶۱) را می‌دهد. در نتیجه دو جواب مستقل خطی از معادله (۵۸) مرتبط با انرژی مثبت $E_+=+(m^2c^4+\vec{p}^2c^2)$ وجو دارند که ذرات اسپین $1/2$ را با انرژی مثبت و ممنتوم $\vec{p}$ توصیف می‌کنند که می‌توانند بصورت زیر نوشته شوند

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} \alpha \\ \dfrac{c\vec{\sigma}.\vec{p}}{E_+ + mc^2}\alpha \end{pmatrix}, \qquad u^{(2)} = N \begin{pmatrix} \beta \\ \dfrac{c\vec{\sigma}.\vec{p}}{E_+ + mc^2}\beta \end{pmatrix} \qquad (۶۴)$$

که N ثابت نرمالیزاسیون می‌باشد. حال جوابهای مرتبط با انرژی منفـی $E_- = -(m^2c^4 + \vec{p}^2c^2)$ و تکانـه $\vec{p}$ را بررسی می‌کنیم. دو جواب مستقل خطی عبارتند از

$$u^{(3)} = N \begin{pmatrix} -\dfrac{c\vec{\sigma}.\vec{p}}{-E_- + mc^2}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \qquad u^{(4)} = N \begin{pmatrix} -\dfrac{c\vec{\sigma}.\vec{p}}{-E_- + mc^2}\beta \\ \beta \end{pmatrix} \qquad (۶۵)$$

همچنین یادآور می‌شویم که چها جواب $u^{(r)}$ ($r = 1,2,3,4$) که توسط (۶۴) و (۶۵) داده شده‌اند، برهم عمودند

$$u^{(r)\dagger}u^{(s)} = 0, \qquad r \neq s \qquad (۶۶)$$

که $r,s = 1,2,3,4$ و هر $u^{(r)\dagger}$ یک بردار سطری از چهار مولفه $u_i^{(r)*}$ می‌باشد، یعنی

$$u^{(r)\dagger} = (u_1^{(r)*} \;\; u_2^{(r)*} \;\; u_3^{(r)*} \;\; u_4^{(r)*}) \qquad (۶۷)$$

۷-۳-۲ عملگرهای اسپین و helicity

تبهگنی‌های ذکر شده در بخش قبل، بر این نکته دلالت دارند که عملگـر دیگـری بایـد وجـود داشـته باشـد کـه بـا هامیلتونی (۲۳) و عملگر ممنتوم $\vec{p}_{op} = -i\hbar\vec{\nabla}$ جابجا شود، بطوریکه ویژه مقادیرش بتوانند بعنوان یـک برچسـب حالت استفاده شوند. برای ساختن این عملگر، ابتدا عملگر اسپین دیراک را معرفی می‌کنیم

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma} \qquad (۶۸)$$

که $\vec{\Sigma}=(\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3)$ و Σ_k ماتریس اسپین دیراک 4×4 می‌باشد

$$\Sigma_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \tag{69}$$

بعلاوه برای هر حالت ψ داریم

$$\vec{S}^2\psi = s(s+1)\hbar^2\psi, \qquad s=\frac{1}{2} \tag{۷۰}$$

و دو ویژه مقدار ممکن برای S_x، S_y و S_z، $\pm\hbar/2$ هستند. با استفاده از خواص ماتریس‌های اسپین پـاولی، بـه سادگی می‌توان نشان داد که جابجایی هامیلتونی ذره آزاد با $\vec{S}$ بصورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned}[H,\vec{S}] &= \frac{\hbar}{2}\left[c\vec{\alpha}.\vec{p}_{op}+\beta mc^2,\vec{\Sigma}\right] \\ &= i\hbar c(\vec{\alpha}\times\vec{p}_{op})\end{aligned} \tag{۷۱}$$

پس بطور کلی عملگر اسپین (۶۸) یک ثابت حرکت نیست. همچنین برای هر بردار یکه $\hat{n}$ داریم

$$[H,\hat{n}\vec{S}] = -i\hbar c\vec{\alpha}.(\hat{n}\times\vec{p}_{op}) \tag{۷۲}$$

درنتیجه رابطه فوق نشان می‌دهد که ویژه توابع هامیلتونی H ویژه توابع $S_n=\hat{n}.\vec{S}$ نیستند. حـال بجـای $\hat{n}$ در (۷۲)، $\hat{p}$، بردار یکه در راستای اندازه حرکت را در نظر می‌گیریم و خواهیم داشت

$$[H,\hat{p}.\vec{S}]=0 \tag{۷۳}$$

عملگر $\hat{p}.\vec{S}$، که مولفه‌ای از عملگر اسپین در راستای حرکت $\hat{p}$، عملگر helicity نامیده می‌شود. ایـن عملگـر بـا هامیلتونی ذره آزاد جابجا می‌شود. بعلاوه، عملگر $\hat{p}.\vec{S}$ بـا عملگـر $\vec{p}_{op}=-i\hbar\vec{\nabla}$ جابجـا مـی‌شـود. پـس از (۷۲) درمی‌یابیم که عملگـر $\hat{p}.\vec{S}$ یـک ثابـت حرکـت اسـت. ویـژه مقـادیرش $\lambda\hbar$ و $\lambda=+1/2$ (helicity مثبـت) و $\lambda=+1/2$ (helicity منفی) می‌باشند..

یک مورد خاص جالب اینست که محور z را در امتداد ممنتوم ذره درنظر بگیریم؛ بنابراین $\vec{p}=(0,0,p)$. حال جوابهای انرژی مثبت (۶۴) بصورت زیر درمی‌آیند

$$u^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{cp}{E_{+}+mc^{2}} \\ 0 \end{pmatrix},\qquad u^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\dfrac{cp}{E_{+}+mc^{2}} \end{pmatrix} \tag{۷۴}$$

درحالیکه جوابهای انرژی منفی بصورت زیر خواهند بود

$$u^{(3)}=\begin{pmatrix} -\dfrac{cp}{-E_{-}+mc^{2}} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\qquad u^{(4)}=\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{cp}{-E_{-}+mc^{2}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{۷۵}$$

بعلاوه اکنون خواهیم داشت

$$\hat{p}.\vec{S}u^{(r)}=S_{z}u^{(r)}=\lambda\hbar u^{(r)} \tag{۷۶}$$

با $\lambda=+1/2$ هنگامی که $r=1,3$ و $\lambda=-1/2$ هنگامی که $r=2,4$. این بحث نتیجه مستقیم از (۷۳) می‌باشد.

۲-۳-۸ جواب‌های نرمال شده

هر یک از چهار جوا داده شده در (۶۴) و (۶۵) به یک نرمال می‌شوند

$$u^{(r)\dagger}u^{(r)}=1,\qquad r=1,2,3,4 \tag{۷۷}$$

و ثابت نرمالیزاسیون N را بصورت زیر بدست می‌آوریم

$$N=\left[1+\frac{c^{2}\vec{p}}{(E_{+}+mc^{2})^{2}}\right]^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{E_{+}+mc^{2}}{2E_{+}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{۷۸}$$

با مقایسه شرط نرمالیزاسیون (۷۷) و شرط تعامد (۶۶)، درمی‌یابیم که جوابهای $u^{(r)}$ در شرط اورتونرمال زیر صدق می‌کنند

$$u^{(r)\dagger}u^{(s)}=\delta_{rs}\,,\qquad r,s=1,2,3,4 \tag{۷۹}$$

هر چهار جواب اسپینور چهار مولفه‌ای $u^{(r)}$ با یک جواب موج تخت چهار مولفه‌ای ذره آزاد دیراک بصورت زیر مرتبط می‌باشند

$$\psi^{(r)}(\vec{r},t)=Au^{(r)}e^{i(\vec{p}.\vec{r}-Et)/\hbar} \tag{۸۰}$$

این جوابها به روشهای متفاوت نرمال می‌شوند. فرض می‌کنیم که ذره در یک حجم بزرگ V جایگزیده باشد. سپس

$$\int_V\left|\psi^{(r)}\right|^2d\vec{r}=\left|A\right|^2V\,,\qquad r=1,2,3,4 \tag{۸۱}$$

درصورتیکه بخواهیم جوابها به یک نرمال شوند، بدست می‌آوریم

$$A=V^{-1/2} \tag{۸۲}$$

۲-۳-۹ جواب‌های معادله دیراک برای یک پتانسیل مرکزی

یک ذره اسپین $1/2$ با جرم m و بار q را در یک میدان مرکزی بررسی می‌کنیم، بطوریکه $\vec{A}=0$ و $V(r)=q\phi(r)$ انرژی پتانسل است.

در این شرایط هامیلتونی دیراک (۳۹) بصورت زیر درمی‌آید

$$H=c\vec{\alpha}.\vec{p}+\beta mc^2+V(r) \tag{۸۳}$$

و معادله دیراکی که باید حل شود به شکل زیر است

$$[c\vec{\alpha}.\vec{p}+\beta mc^2+V(r)]\psi(\vec{r})=E\psi(\vec{r}) \tag{۸۴}$$

که $\psi(\vec{r})$ یک اسپینور چهار مولفه‌ای است.

به منظور جداسازی متغیرها در این معادله، به دنبال عملگرهایی هستیم که با هامیلتونی (۸۳) جابجا شوند تـا اعـداد کوانتـومی خـوب را نتیجـه دهنـد. همـانطور کـه از نظریـه شـرودینگر غیرنسـبیتی مـی‌دانـیم هـامیلتونی $H = \vec{p}_{op}^2 \big/ 2m + V(r)$ یک ذره بدون اسپین با جرم m در یک میدان مرکزی با هر یک از مولفه‌های دکـارتی عملگر اندازه حرکت زاویه‌ای $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ و همچنین با $\vec{L}^2$ جابجا می‌شود. در نتیجه، عملگرهـای H، $\vec{L}^2$ و L_z ویژه توابع همزمان دارند و ویژه مقادیرشان به ترتیب عبارتند از: E، $l(l+1)\hbar^2$ و $m_l\hbar$. در نظریـه دیـراک، نـه مولفه‌های دکارتی $\vec{L}$ و نه $\vec{L}^2$ با هامیلتونی (۸۳) جابجا نمی‌شوند و جابجایی H با $\vec{L}$ بصورت زیر است

$$[H, \vec{L}] = -i\hbar c(\vec{\alpha} \times \vec{p}_{op}) \qquad (۸۵)$$

یادآور می‌شویم که هامیلتونی با عملگر اسپین دیرا ک بصورت زیر جابجا می‌شود

$$[H, \vec{S}] = i\hbar c(\vec{\alpha} \times \vec{p}_{op}) \qquad (۸۶)$$

همچنین متذکر می‌شویم که مولفه‌های دکارتی $\vec{S}$ با هر یک از مولفه‌های دکارتی $\vec{L}$ جابجا می‌شود. اکنون عملگـر اندازه حرکت زاویه‌ای کل $\vec{J}$ را که مجموع عملگرهای اندازه حرکت زاویه‌ای مداری و اسپینی است، تعریف می‌کنیم

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \qquad (۸۷)$$

همچنین $[\vec{J}^2, \vec{J}] = 0$، یعنی ویژه توابع همزمان $\vec{J}^2$ و یکی از مولفه‌هایش (که J_z را انتخاب مـی‌کنـیم) وجـود دارند که ویژه مقادیرشان به ترتیب عبارتند از: $j(j+1)\hbar^2$ و $m_j\hbar$. پس می‌توانیم بنویسیم

$$[H, \vec{J}] = 0 \qquad (۸۸)$$

بنابراین هر مولفه دکارتی از $\vec{J}$ با هامیلتونی دیراک (۸۳) جابجا می‌شود. همچنین $\vec{J}^2$ با هامیلتونی جابجا می‌شود

$$[H, \vec{J}^2] = 0 \qquad (۸۹)$$

از آنجاییکه $[H, \vec{J}^2] = 0$، $[H, \vec{J}] = 0$ و $[H, J_z] = 0$، نتیجه می‌گیریم که هامیلتونی و عملگرهـای $\vec{J}^2$ و J_z با ویژه مقادیر E، $j(j+1)$ و $m_j \hbar$، به ترتیب، ویژه توابع مشترک دارند. همچنین عملگر زیر با هامیلتونی جابجا می‌شود

$$\mathrm{K} = \beta\left(\frac{\vec{\Sigma}.\vec{L}}{\hbar} + 1\right) \qquad (۹۰)$$

برای اثبات، ابتدا عملگر اندازه حرکت شعاعی زیر،

$$p_r = -i\hbar \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r = \frac{1}{r}(\vec{r}.\vec{p}_{op} - i\hbar) \qquad (۹۱)$$

و سپس عملگر سرعت شعاعی را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\alpha_r = \frac{1}{r}(\vec{\alpha}.\vec{r}) \qquad (۹۲)$$

که هردو عملگر هرمیتی هستند. با استفاده از (۳۶) و(۶۹)، داریم

$$\begin{aligned}(\vec{\alpha}.\vec{r})(\vec{\alpha}.\vec{p}_{op}) &= (\vec{\Sigma}.\vec{r})(\vec{\Sigma}.\vec{p}) \\ &= \vec{r}.\vec{p}_{op} + i\,\vec{\Sigma}.\vec{L} \\ &= rp_r + i\,(\vec{\Sigma}.\vec{L} + \hbar)\end{aligned} \qquad (۹۳)$$

با ضرب رابطه فوق در $r^{-1}\alpha_r$ و با استفاده از اینکه $\alpha_r^2 = 1$، بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}.\vec{p}_{op} &= \alpha_r\left[p_r + \frac{i}{r}(\vec{\Sigma}.\vec{L} + \hbar)\right] \\ &= \alpha_r p_r + i\hbar\frac{\alpha_r}{r}\beta\mathrm{K}\end{aligned} \qquad (۹۴)$$

این نتیجه به ما اجازه می‌دهد که هامیلتونی (۸۳) را بصورت زیر بنویسیم

$$H = c\alpha_r p_r + i\hbar\frac{c}{r}\alpha_r\beta\mathrm{K} + \beta mc^2 + V(r) \qquad (۹۵)$$

عملگر K با p_r، α_r و β جابجا می‌شود، بنابراین با هامیلتونی نیز جابجا می‌شود. بعلاوه، از آنجاییکه $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ و $\vec{S} = (\hbar/2)\vec{\Sigma}$، خواهیم داشت

$$\hbar\vec{\Sigma}.\vec{L} = 2\vec{S}.\vec{L} = \vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2 = \vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \frac{3}{4}\hbar^2 \tag{۹۶}$$

و می‌توانیم بنویسیم

$$\hbar^2\mathrm{K} = \beta\left(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 + \frac{\hbar^2}{4}\right) \tag{۹۷}$$

با جایگذاری (۹۵) در (۸۴)، معادله دیراک به فرم زیر درمی‌آید

$$H\psi = \left[c\alpha_r p_r + i\hbar\frac{c}{r}\alpha_r\beta\kappa + \beta mc^2 + V(r)\right]\psi = E\psi \tag{۹۸}$$

حال اگر اسپینور چهار مولفه‌ای دیراک را بر اساس اسپینورهای دو مولفه‌ای ψ_A و ψ_B بیان می‌کنیم، روابط زیر را می‌توانیم استنتاج کنیم

$$\begin{aligned}
&H\begin{pmatrix}\psi_A\\ \psi_B\end{pmatrix} = E\begin{pmatrix}\psi_A\\ \psi_B\end{pmatrix}, && P\begin{pmatrix}\psi_A\\ \psi_B\end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix}\psi_A\\ \psi_B\end{pmatrix}\\
&\vec{J}^2\begin{pmatrix}\psi_A\\ \psi_B\end{pmatrix} = j(j+1)\hbar^2\begin{pmatrix}\psi_A\\ \psi_B\end{pmatrix}, && J_z\begin{pmatrix}\psi_A\\ \psi_B\end{pmatrix} = m_j\hbar\begin{pmatrix}\psi_A\\ \psi_B\end{pmatrix}\\
&\mathrm{K}\begin{pmatrix}\psi_A\\ \psi_B\end{pmatrix} = \kappa\begin{pmatrix}\psi_A\\ \psi_B\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{۹۹}$$

همانطور که می‌دانیم ویژه توابع همزمان $\vec{L}^2$، $\vec{S}^2$، $\vec{J}^2$ و J_z توابع $Y_{l,s}^{j,m_j}$ با پاریته $(-1)^l$ می‌باشند، برای ذره اسپین $1/2$، $s = 1/2$ و $l = j \pm 1/2$ با $j = 1/2, 3/2, \ldots$، بنابراین ψ_A متناسب است با $Y_{l,\frac{1}{2}}^{j,m_j}$. بطو مشابه، ψ_B متناسب است با $Y_{l',s}^{j,m_j}$ که دارای پاریته $(-1)^{l'}$ می‌باشد. یادآوری می‌کنیم که l' فقط می‌تواند مقادیر $j \pm 1/2$ به خود بگیرد و $l' = l \pm 1$. بنابراین، اگر $l = j - 1/2$ داریم $l' = l + 1 = j + 1/2$ و اگر $l = j + 1/2$ خواهیم داشت $l' = l - 1 = j - 1/2$. بعلاوه از (۹۷) و (۹۹) بدست می‌آوریم

$$\left(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 + \frac{\hbar^2}{4}\right)\psi_A = \kappa\hbar^2\psi_A, \quad \left(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 + \frac{\hbar^2}{4}\right)\psi_B = -\kappa\hbar^2\psi_B \tag{۱۰۰}$$

درنتیجه، ψ_A و ψ_B ویژه توابع $\vec{J}^2 - \vec{L}^2 + \frac{\hbar^2}{4}$ با ویژه مقادیر $\kappa\hbar^2$ و $-\kappa\hbar^2$ هستند که

$$\kappa = j(j+1) - l(l+1) + \frac{1}{4} = \left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - l(l+1) \tag{۱۰۱}$$

از اینرو

$$\kappa = \begin{cases} l+1, & j = l + \frac{1}{2} \\ -l, & j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \tag{۱۰۲}$$

و مشاهده می‌کنیم که κ تمام مقادیر مثبت و منفی صحیح بجز صفر را بخود می‌گیرد. همینطـور مقـدار κ، j و l را مشخص می‌کند؛

$$j = |\kappa| - \frac{1}{2} \tag{۱۰۳}$$

و

$$l = \begin{cases} \kappa - 1, & \kappa \succ 0 \\ \kappa, & \kappa \prec 0 \end{cases} \tag{۱۰۴}$$

با توجه به نامگذاری معمول اسپکتروسکوپی، حالتها توسط $\kappa = +1, -1, +2, -2, \ldots$ متناسـب بـا حالتهـای $s_{1/2}$، $p_{1/2}$، $p_{3/2}$، $d_{3/2}$ و ... برچسب می‌خورند.

بنابراین جوابهای معادله (۹۸) را به شکل زیر می‌نویسیم

$$\psi_{E\kappa m_j} = r^{-1}\begin{pmatrix} P_{E\kappa}(r) \mathcal{Y}_{l,\frac{1}{2}}^{j,m_j} \\ iQ_{E\kappa}(r) \mathcal{Y}_{l',\frac{1}{2}}^{j,m_j} \end{pmatrix} \tag{۱۰۵}$$

در این معادله $P_{E\kappa}(r)$ و $Q_{E\kappa}(r)$ توابع شعاعی هستند و عامل i در مقابل $Q_{E\kappa}(r)$ بدین منظور ظاهر شده تا توابع شعاعی حقیقی برای $P_{E\kappa}(r)$ و $Q_{E\kappa}(r)$ بدست آیند. با جایگذاری (۱۰۵) در (۹۸) و با داشتن کمیتهای زیر؛

$$(\vec{\sigma}.\hat{r})Y_{l,\frac{1}{2}}^{j,m_j} = -Y_{l',\frac{1}{2}}^{j,m_j} \qquad \text{(۱۰۶الف)}$$

$$(\vec{\sigma}.\hat{r})Y_{l',\frac{1}{2}}^{j,m_j} = -Y_{l,\frac{1}{2}}^{j,m_j} \qquad \text{(۱۰۶ب)}$$

توابع شعاعی $P_{E\kappa}(r)$ و $Q_{E\kappa}(r)$ را طوری می‌یابیم که در معادلات دیفرانسیل مرتبه اول کوپل شده زیر صدق می‌کنند

$$\left[\frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r}\right]P_{E\kappa}(r) = \frac{E + mc^2 - V(r)}{\hbar c}Q_{E\kappa}(r) \qquad \text{(۱۰۷الف)}$$

$$\left[\frac{d}{dr} + \frac{\kappa}{r}\right]Q_{E\kappa}(r) = \frac{E - mc^2 - V(r)}{\hbar c}P_{E\kappa}(r) \qquad \text{(۱۰۷ب)}$$

این معادلات کوپل شده نقش معادله شعاعی شرودینگر را ایفا می‌کنند. با حذف $Q_{E\kappa}(r)$، به یک معادله درجه دوم برای $P_{E\kappa}(r)$ به شکل زیر می‌رسیم

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{A'}{A}\frac{d}{dr} + \left(AB + \frac{A'}{A}\frac{\kappa}{r} - \frac{\kappa(\kappa-1)}{r^2}\right)\right]P_{E\kappa}(r) = 0 \qquad \text{(۱۰۸)}$$

که

$$A(r) = \frac{E + mc^2 - V(r)}{\hbar c}, \qquad A' = \frac{dA}{dr} \qquad \text{(۱۰۹الف)}$$

$$B(r) = \frac{E - mc^2 - V(r)}{\hbar c} \qquad \text{(۱۰۹ب)}$$

فصل سوم

تقارنهای کروی هامیلتونی دیراک

در مدل لایه‌ای هسته‌ای

۳-۱ مقدمه

کشف تقارنهای نسبیتی هامیلتونی دیراک به محاسبه جرم مزونها با استفاده از معادله دیراک با پتانسیلهای خارجی برای توصیف دینامیک میان یک کوارک و آنتی کوارک باز می گردد که توسط Smith و Tassie (۱۹۷۱) معرفی شده اند [۴]. نویسندگان در این مقاله ذکر کرده اند که اگر پتانسیلهای خارجی به یک اسکالر لورنتس و جزء زمانی یک بردار لورنتس محدود شوند و اگر این دو پتانسیل تا یک ثابت مساوی باشند، نتایج جرمها مستقل از سمتگیری اسپینی هستند. چهار سال بعد Bell و Ruegg مولدهای اسپین نسبیتی را برای این تقارن استنتاج کردند [۵]. آنها شکل کلی‌تری از هامیلتونی دیراک را در نظر گرفته بودند و نشان دادند که اگر پتانسیلهای برداری لورنتس با هر چها جزء غیر صفر با پتانسیل اسکالر مرتبط شوند، یک تقارن شبه-اسپینی نیز وجود خواهد داشت. اخیرا، تقارن اسپینی معادله دیراک بطور موفقیت آمیز برای مزونهایی که از کوارک (یا آنتی کوارک) سبک و آنتی کوارک (یاکوارک) سنگین تشکیل باشند، بکار رفته است [۶].

تقارن اسپینی به آسانی و بطور تجربی قابل مشاهده است؛ زیرا طیف جرم (یا انرژی) مستقل از سمت گیری اسپین با درجات آزادی فضایی خواهد بود. برای مثال حالت $p_{1/2}$، l و s در خلاف جهت هم هستند $l-\frac{1}{2}$ ($l=1$)، با حالت $p_{3/2}$ ($l+s=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$) تبهگن است. همچنین اسپین در راستای حالت $s_{1/2}$ جفت خلاف راستا ندارد، زیرا جفت شدگی اسپین با اندازه حرکت زاویه ای مداری صفر فقط می تواند اندازه حرکت زاویه ای $\frac{1}{2}$ تولید کند [۶].

از طرف دیگر تقارنهای دیگر هامیلتونی دیراک که توسط Bell و Ruegg کشف شده اند، شفاف نیستند. برای مثال، یک هامیلتونی دیراک با یک پتانسیل اسکالر لورنتس و یک پتانسیل برداری لورنتس (فقط با یک جزء زمانی)

مساوی در اندازه ولی مخالف در علامت، یک تقارن شبه اسپینی تولید خواهد کرد. در این مورد حالت $p_{1/2}$ و $p_{3/2}$ دیگر تبهگن نخواهند بود. در حقیقت $p_{1/2}$ جفت تبهگن نخواهد داشت و حالت $f_{5/2}$ با $p_{3/2}$ تبهگن خواهد بود. حالت $d_{3/2}$ با یک حالت $s_{1/2}$ تبهگن خواهد بود و بهمین ترتیب. بعبارت دیگر حالتهای تبهگن در اندازه حرکت زاویه ای به اندازه ۲ واحد اختلاف دارند. بهمین علت مبدا یک شبه تبهگنی میان حالتها با این اعداد کوانتومی مشاهده شده در هسته، سالها مخفی ماندند.

هامیلتونی دیراک، دینامیک تک ذره نسبیتی را توصیف می‌کند. برای یک کوارک سبک برهمکنش کننده با کوارک-های سنگین یا برای نوکلئون‌های در حال حرکت در میدان میانگین نوکلئون‌های زیاد در یک هسته، هامیلتونی دیراک شاید یک تقریب خوب باشد.

۲-۳ تقارنهای هامیلتونی دیراک

معادله دیراک برای یک ذره به جرم M بصورت زیر است [۳]

$$\left[\gamma^{\mu}[cp_{\mu}+g_V A_{\mu}(x_{\mu})]+Mc^2+V_s(x_{\mu})\right]\psi(x_{\mu})=0 \qquad (۱)$$

که x_{μ} چهار بردار $(ct,\vec{r})$، $\vec{r}$ بردار سه بعدی (x,y,z)، $p_{\mu}=-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x_{\mu}}$، $A_{\mu}(x_{\mu})$ پتانسیل برداری $\left(A_0(x_{\mu}),\vec{A}(x_{\mu})\right)$ است، c سرعت نور و $V_s(x_{\mu})$ پتانسیل اسکالر می‌باشد. ماتریس‌های دیراک با چهار ماتریس زیر شناخته می‌شوند

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\qquad \vec{\gamma}=\begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ -\vec{\sigma} & 0\end{pmatrix}=\beta\vec{\alpha} \qquad (۲)$$

که 1 ماتریس یکه 2×2 می‌باشد و $\vec{\sigma}$ ماتریس‌های پاولی 2×2 می‌باشند. با فرض اینکه پتانسیل‌ها مستقل از زمان باشند، تابع موج دیراک می‌تواند بصورت $\psi(x_{\mu})=e^{-iEt/\hbar}\phi(\vec{r})$ نوشته شود. بعد از ضرب در β، معادله دیراک به یک معادله ویژه مقداری تبدیل می‌شود

$$H\,\phi(\vec{r}) = E\,\phi(\vec{r}) \qquad (۳)$$

که

$$H = \vec{\alpha}.[c\vec{p} + g_V\,\vec{A}(\vec{r})] + V_V\,(\vec{r}) + \beta[Mc^2 + V_s\,(\vec{r})] \qquad (۴)$$

هامیلتونی دیراک است و $V_V\,(\vec{r}) = g_V\,A_0(\vec{r})$. اگر یک ثابت دلخواه به پتانسیل‌های برداری و اسکالر بصورت زیر اضافه کنیم، نتایج بدون تغییر باقی می‌مانند[۷-۱۴]؛

$$V_V\,(\vec{r}) \to V_V\,(\vec{r}) + c_V\,, \qquad V_s\,(\vec{r}) \to V_s\,(\vec{r}) + c_s \qquad (۵)$$

زیرا می‌توانیم انرژی و جرم را توسط ثابت‌های یکسان تغییر دهیم بطوریکه معادله دیراک بدون تغییر بماند

$$E \to E + c_V\,, \qquad Mc^2 \to Mc^2 - c_s \qquad (۶)$$

بنابراین هر ویژه حالت از هامیلتونی دیراک یک جفت با همان انرژی دارد

$$H_{BR}\,\phi^{BR}_{k,\mu'}(\vec{r}) = E_k\,\phi^{BR}_{k,\mu'}(\vec{r}) \qquad (۷)$$

که k یک عدد کوانتومی می‌باشد و $\mu' = \pm 1/2$ ویژه مقدار S'_z است

$$S'_z\,\phi^{BR}_{k,\mu'}(\vec{r}) = \mu'\,\phi^{BR}_{k,\mu'}(\vec{r}) \qquad (۸)$$

و ویژه حالت‌ها در جفت‌ها توسط مولدهای $S'_\pm$ بهم مرتبط خواهند شد

$$S'_\pm\,\phi^{BR}_{k,\mu'}(\vec{r}) = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \mp \mu'\right)\left(\frac{3}{2} \pm \mu'\right)}\,\phi^{BR}_{k,\mu'\pm 1}(\vec{r}) \qquad (۹)$$

در ادامه مساله را به تقارن‌های با $\vec{A}(\vec{r}) = 0$ محدود می‌کنیم.

۳-۳ تقارن اسپینی

تقارن اسپینی هنگامی در معادله دیراک ظاهر می‌شود که $V_V(\vec{r}) = V_S(\vec{r}) + c_s$ و c_s یک ثابت است[۷-۱۴].

در نتیجه معادله دیراک با تقارن اسپینی بصورت زیر است

$$H_s = \vec{\alpha}.c\vec{p} + V_V(\vec{r})(1+\beta) + \beta(Mc^2 + c_s) \tag{۱۰}$$

و مولدهای اسپینی بصورت زیر هستند

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} \vec{s} & 0 \\ 0 & \tilde{\vec{s}} \end{pmatrix} \tag{۱۱}$$

که $\vec{s} = \vec{\sigma}/2$ و $\tilde{\vec{s}} = U_p \vec{s} U_p$ که $U_p = \vec{\sigma}.\vec{p}$ تبدیل یونیتاری helicity می‌باشد. می‌توانیم ویژه حالتهای

هامیلتونی دیراک $\phi^s_{k,\mu}(\vec{r})$

$$H_s \phi^s_{k,\mu}(\vec{r}) = E_k \phi^s_{k,\mu}(\vec{r}) \tag{۱۲}$$

را بصورت بردار چهار مولفه‌ای زیر بنویسیم

$$\phi^s_{k,\mu}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} g^+_{k,\mu}(\vec{r}) \\ g^-_{k,\mu}(\vec{r}) \\ if^+_{k,\mu}(\vec{r}) \\ if^-_{k,\mu}(\vec{r}) \end{pmatrix} \tag{۱۳}$$

که $g^{\pm}_{k,\mu}$ مولفه‌های بالایی دیراک و $f^{\pm}_{k,\mu}$ مولفه‌های پایینی دیراک هستند ، + اسپین بالا و − اسپین پایین را

نشان می‌دهد و $\mu = \pm 1/2$. سپس از (۸) و (۹) داریم

$$S_z \phi^s_{k,\mu}(\vec{r}) = \mu \phi^s_{k,\mu}(\vec{r}) \qquad (۱۴)$$

و ویژه حالت‌ها در جفت توسط $S_\pm$ بهم مرتبط خواهند شد

$$S_\pm \phi^s_{k,\mu}(\vec{r}) = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \mp \mu\right)\left(\frac{3}{2} \pm \mu\right)} \phi^s_{k,\mu\pm1}(\vec{r}) \qquad (۱۵)$$

از آنجاییکه مولفه بالایی مولدهای اسپین در معادله (۱۱) $\vec{s}$ است، از معادله (۱۴) نتیجه می‌گیریم

$$g^+_{k,-1/2}(\vec{r}) = g^-_{k,1/2}(\vec{r}) = 0 \qquad (۱۶)$$

درحالیکه از معادله (۱۵) خواهیم داشت

$$g^+_{k,1/2}(\vec{r}) = g^-_{k,-1/2}(\vec{r}) = g_k(\vec{r}) \qquad (۱۷)$$

برای مولفه‌های پایینی روابط کمی پیچیده‌ترند، زیرا مولفه پایینی مولدهای اسپین در معادلـه (۱۱) $\tilde{\vec{s}}$ اسـت. بـرای ساده سازی شرایط روی مولفه پایینی، توابع $\tilde{f}^{\pm}_{k,\mu}(\vec{r})$ را بصورت زیر معرفی می‌کنیم

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}^+_{k,\mu}(\vec{r}) \\ \tilde{f}^-_{k,\mu}(\vec{r}) \end{pmatrix} = U_p \begin{pmatrix} f^+_{k,\mu}(\vec{r}) \\ f^-_{k,\mu}(\vec{r}) \end{pmatrix} \qquad (۱۸)$$

که معکوس آن بصورت زیر است

$$\begin{pmatrix} f^+_{k,\mu}(\vec{r}) \\ f^-_{k,\mu}(\vec{r}) \end{pmatrix} = U_p \begin{pmatrix} \tilde{f}^+_{k,\mu}(\vec{r}) \\ \tilde{f}^-_{k,\mu}(\vec{r}) \end{pmatrix} \qquad (۱۹)$$

سپس از معادلات (۱۴)، (۱۵)، (۱۸) و

$$U_p = \begin{pmatrix} p_z & p_- \\ p_+ & -p_z \end{pmatrix} \tag{۲۰}$$

که $p_\pm = p_x \pm ip_y$، نتیجه می‌گیریم $p_i \tilde{f}^{-}_{k,1/2}(\vec{r}) = p_i \tilde{f}^{+}_{k,1/2}(\vec{r}) = 0$ که منجر می‌شود به

$$\tilde{f}^{-}_{k,1/2}(\vec{r}) = \tilde{f}^{-}_{k,1/2}, \qquad \tilde{f}^{+}_{k,-1/2}(\vec{r}) = \tilde{f}^{+}_{k,-1/2} \tag{۲۱}$$

یعنی این اندازه‌ها ثابت هستند. برای دیگر اندازه‌ها بدست می‌آوریم

$$\tilde{f}^{+}_{k,+1/2}(\vec{r}) = \frac{p_z}{p} \tilde{f}^{\pm}_{k,\pm 1/2}(\vec{r}) = -\tilde{f}^{-}_{k,-1/2}(\vec{r}) \tag{۲۲}$$

و

$$\tilde{f}^{+}_{k,-1/2}(\vec{r}) = \frac{p_-}{p} \tilde{f}^{\pm}_{k,\pm 1/2}(\vec{r}), \qquad \tilde{f}^{-}_{k,-1/2}(\vec{r}) = \frac{p_+}{p} \tilde{f}^{\pm}_{k,\pm 1/2}(\vec{r}), \tag{۲۳}$$

از معادلات (۲۲) و (۲۳) بدست می‌آوریم

$$f^{+}_{k,1/2}(\vec{r}) = -f^{-}_{k,-1/2}(\vec{r}) = f_k(\vec{r}) \tag{۲۴}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right) f^{+}_{k,-1/2}(\vec{r}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right) f^{-}_{k,1/2}(\vec{r}) \tag{۲۵الف}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f^{\pm}_{k,\mp 1/2}(\vec{r}) = \pm\left(\frac{\partial}{\partial x} \mp i\,\frac{\partial}{\partial y}\right) f^{\pm}_{k,\pm 1/2}(\vec{r}) \tag{۲۵ب}$$

بنابراین توابع موج دیراک در جفت‌ها در حضور تقارن اسپینی بصورت زیر می‌شود

$$\phi^{s}_{k,1/2}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} g_k(\vec{r}) \\ 0 \\ if_k(\vec{r}) \\ if^{-}_{k,1/2}(\vec{r}) \end{pmatrix}, \qquad \phi^{s}_{k,-1/2}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ g_k(\vec{r}) \\ if^{+}_{k,-1/2}(\vec{r}) \\ -if_k(\vec{r}) \end{pmatrix} \tag{۲۶}$$

بنابراین، بجای ۸ دامنه غیرمستقل برای دو حالت در جفت، ۴ دامنه وجود دارد. یکی بالا و سه تا پایینی و سه‌تای پایینی توسط معادلات دیفرانسیل در (۲۵) بهم مرتبط می‌شوند.

۳-۳-۱ پتانسیل‌های متقارن کروی

تقارن کروی به این معناست که $V_S(\vec{r})=V_S(r)$ ،$V_V(\vec{r})=V_V(r)$ که $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. هامیلتونی دیراک نسبت به چرخش حول سه محور ناورداست، $[L_i, H_s]=0$ که

$$\vec{L}=\begin{pmatrix} \vec{l} & 0 \\ 0 & \vec{\tilde{l}} \end{pmatrix} \tag{۲۷}$$

و $\vec{\tilde{l}}=U_p\vec{l}U_p$. بنابراین ویژه توابع دیراک یک ویژه تابع از $\vec{L}.\vec{L}$ ،L_z و J_z خواهند بود

$$\vec{L}.\vec{L}\phi^{s}_{n_r,l,m,\mu}(\vec{r})=l(l+1)\phi^{s}_{n_r,l,m,\mu}(\vec{r}) \tag{۲۸الف}$$

$$L_z\phi^{s}_{n_r,l,m,\mu}(\vec{r})=m\phi^{s}_{n_r,l,m,\mu}(\vec{r}) \tag{۲۸ب}$$

$$J_z\phi^{s}_{n_r,l,m,\mu}(\vec{r})=M\,\phi^{s}_{n_r,l,m,\mu}(\vec{r}), \qquad M=m+\mu \tag{۲۸ج}$$

که عدد کوانتومی شعاعی n_r تعداد صفرهای مولفه بالایی به غیر از صفرهای در 0 و ∞ می‌باشد. l اندازه حرکت زاویه‌ای مداری و مولدهای (۲۷) حالتهای با l یکسان و m متفاوت را بصورت زیر بهم مرتبط می‌کنند

$$L_{\pm}\phi^{s}_{n_r,l,m,\mu}(\vec{r})=\sqrt{(l\mp m)(l\pm m+1)}\phi^{s}_{n_r,l,m\pm1,\mu}(\vec{r}) \tag{۲۹}$$

درنتیجه دامنه‌های داده شده در (۲۶) به فرم زیر در می‌آیند

$$\phi^{s}_{n_r,l,m,1/2}(\vec{r})=\begin{pmatrix} g_{n_r,l}(r)Y^{\,l}_{m}(\theta,\varphi) \\ 0 \\ i\sum_{j=l-1/2}^{l+1/2}A^{j}_{m}f_{n_r,l,j}(r)Y^{\,l_j}_{m}(\theta,\varphi) \\ -i\sum_{j=l-1/2}^{l+1/2}B^{j}_{m,1}f_{n_r,l,j}(r)Y^{\,l_j}_{m+1}(\theta,\varphi)\end{pmatrix},\qquad M=m+\frac{1}{2} \tag{۳۰الف}$$

$$\phi^{s}_{n_r,l,m,-1/2}(\vec{r})=\begin{pmatrix} 0 \\ g_{n_r,l}(r)Y^{\,l}_{m}(\theta,\varphi) \\ i\sum_{j=l-1/2}^{l+1/2}B^{j}_{m,-1}f_{n_r,l,j}(r)Y^{\,l_j}_{m-1}(\theta,\varphi) \\ -i\sum_{j=l-1/2}^{l+1/2}A^{j}_{m}f_{n_r,l,j}(r)Y^{\,l_j}_{m}(\theta,\varphi)\end{pmatrix},\qquad M=m-\frac{1}{2} \tag{۳۰ب}$$

که $Y^{\,l}_{m}(\theta,\varphi)$ هارمونیک کروی می‌باشد و l_j بصورت زیر است

$$l_{l+1/2}=l+1 \tag{۳۱الف}$$

$$l_{l-1/2}=l-1 \tag{۳۱ب}$$

و

$$A^{j}_{m}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(j+\frac{1}{2}+m)(j+\frac{1}{2}-m)}{j(j+1)}} \tag{۳۲الف}$$

$$B^{j}_{m,\pm1}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(j+1\pm(l_j-l)(m\pm\frac{1}{2}))(j\pm(l_j-l)(m\pm\frac{1}{2}))}{j(j+1)}} \tag{۳۲ب}$$

دلیل اینکه $l\pm1$ در دامنه پایینی ظاهر می‌شود اینست که تبدیل یکانی U_p بر روی اندازه حرکت زاویه‌ای مداری مولفه پایینی، هم پاریته و هم اندازه حرکت زاویه‌ای مداری را حداکثر یک واحد تغییر می‌دهد. بنابراین تقارن کروی تعداد دامنه‌ها در جفت را از چهارتا به سه‌تا کاهش می‌دهد و دوتا از این دامنه‌ها توسط معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر بهم مرتبط می‌شوند

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{l+2}{r}\right)f_{n_r,l,l+1/2}(r)=\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{l-1}{r}\right)f_{n_r,l,l-1/2}(r) \tag{۳۳}$$

از آنجاییکه اندازه حرکت زاویه‌ای کل، $\vec{J}=\vec{L}+\vec{S}$، همیشه پایسته می‌ماند، بهتر است از جمع زیر برای تابع موج استفاده کنیم

$$\psi^{s}_{n_r,l,j,M}(\vec{r})=\sum_{m,\mu} C^{\,l\,(1/2)\,j}_{m\,\mu\,M}\,\phi^{s}_{n_r,l,m,\mu}(\vec{r}) \qquad (۳۴)$$

که ویژه تابع $\vec{J}.\vec{J}$ می‌باشد، اما ویژه تابع L_z نیست؛

$$\vec{J}.\vec{J}\psi^{s}_{n_r,l,j,M}(\vec{r})=j(j+1)\psi^{s}_{n_r,l,j,M}(\vec{r}) \qquad (\text{۳۵الف})$$

$$\vec{L}.\vec{L}\psi^{s}_{n_r,l,j,M}(\vec{r})=l(l+1)\psi^{s}_{n_r,l,j,M}(\vec{r}) \qquad (\text{۳۵ب})$$

$$J_z\psi^{s}_{n_r,l,j,M}(\vec{r})=M\,\psi^{s}_{n_r,l,j,M}(\vec{r}) \qquad (\text{۳۵ج})$$

بجای استفاده از اسپینورهای چهار مولفه‌ای، بهتر است که تابع اسپین χ_μ را معرفی کنیم. حالتهایی که یک جفت تبهگن هستند، حالتهای با $j=l\pm 1/2$ هستند که بصورت اسپینور دو مولفه‌ای زیر نمایش داده می‌شوند

$$\psi^{s}_{n_r,l,j,M}(\vec{r})=\begin{pmatrix} g_{n_r,l}(r)\left[Y^{(l)}(\theta,\varphi)\chi\right]^{(j)}_{M} \\ i f_{n_r,l,j}(r)\left[Y^{(l_j)}(\theta,\varphi)\chi\right]^{(j)}_{M}\end{pmatrix} \qquad (۳۶)$$

که n_r تعداد صفرهای دامنه بالایی ویژه حالتها در جفت اسپینی می‌باشد.

۳-۴ تقارن شبه اسپینی

تقارن شبه اسپینی هنگامی در معادله دیراک ظاهر می‌شود که $V_V(\vec{r})=-V_S(\vec{r})+c_{ps}$ و c_{ps} یک ثابت است. در نتیجه معادله دیراک با تقارن شبه اسپینی بصورت زیر است

$$H_{ps}=\vec{\alpha}c\vec{p}+V_V(\vec{r})(1-\beta)+\beta(Mc^2+c_s) \qquad (۳۷)$$

و مولدهای شبه اسپینی بصورت زیر هستند

$$\tilde{\vec{S}}=\begin{pmatrix}\tilde{\vec{s}} & 0\\ 0 & \vec{s}\end{pmatrix} \qquad (۳۸)$$

و $\tilde{\vec{S}}=\gamma_5\vec{S}\gamma_5$ که $\gamma_5=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. روابط زیر همانند بخش قبل قابل به راحتی استنتاج هستند

$$f^{+}_{\tilde{k},-1/2}(\vec{r})=f^{-}_{k,1/2}=0 \tag{۳۹الف}$$

$$f^{+}_{\tilde{k},1/2}(\vec{r})=f^{-}_{\tilde{k},-1/2}(\vec{r})=f_{\tilde{k}}(\vec{r}) \tag{۳۹ب}$$

$$g^{+}_{\tilde{k},1/2}(\vec{r})=-g^{-}_{\tilde{k},-1/2}(\vec{r})=g_{\tilde{k}}(\vec{r}) \tag{۳۹ج}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\,\frac{\partial}{\partial y}\right)g^{+}_{\tilde{k},-1/2}(\vec{r})=\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\,\frac{\partial}{\partial y}\right)g^{-}_{\tilde{k},1/2}(\vec{r}) \tag{۳۹د}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\,g^{\pm}_{\tilde{k},\mp 1/2}(\vec{r})=\pm\left(\frac{\partial}{\partial x}\mp i\,\frac{\partial}{\partial y}\right)g^{\pm}_{\tilde{k},\pm 1/2}(\vec{r}) \tag{۳۹ح}$$

در نتیجه، برای تقارن شبه اسپینی، مولفه‌های پایینی تابع موج فضایی یکسان دارنـد، درحالیکـه مولفـه‌هـای بـالایی توابع موج خیلی متفاوت از هم دارند. مولفه‌های بالایی مولفه‌های بزرگ هستند و بیشترین کاوشهای تجربی هسته را در برمی‌گیرند؛ بهمین دلیل است که کشف مبدا تقارن شبه اسپینی ۳۰ سال به طول انجامید.

ویژه توابع در جفت به شکل زیر می‌باشند

$$\phi^{ps}_{\tilde{k},1/2}(\vec{r})=\begin{pmatrix}g_{\tilde{k}}(\vec{r})\\ g^{-}_{\tilde{k},1/2}(\vec{r})\\ if_{\tilde{k}}(\vec{r})\\ 0\end{pmatrix},\qquad \phi^{ps}_{\tilde{k},-1/2}(\vec{r})=\begin{pmatrix}g^{+}_{\tilde{k},-1/2}(\vec{r})\\ -g_{\tilde{k}}(\vec{r})\\ 0\\ if_{\tilde{k}}(\vec{r})\end{pmatrix} \tag{۴۰}$$

بنابراین، بجای ۸ دامنه غیرمستقل برای دو حالت در جفت، ۴ دامنه وجود دارد. یکی بالا و سه تا پـایینی و سـه‌تـای پایینی که توسط معادلات دیفرانسیل (۳۹) بهم مرتبط می‌شوند.

۳-۴-۱ پتانسیل‌های متقارن کروی

در این حالت، هامیلتونی دیراک نسبت به چرخش حول سه محور ناورداست، $[\tilde{L}_i, H_s]=0$ که

$$\tilde{\vec{L}} = \begin{pmatrix} \tilde{\vec{l}} & 0 \\ 0 & \vec{l} \end{pmatrix} \qquad (۴۱)$$

ویژه توابع دیراک یک ویژه تابع از $\tilde{\vec{L}}.\tilde{\vec{L}}$، $\tilde{L}_z$ و J_z خواهند بود

$$\tilde{\vec{L}}.\tilde{\vec{L}}\phi^{ps}_{\tilde{n}_r,\tilde{l},\tilde{m},\tilde{\mu}}(\vec{r}) = \tilde{l}(\tilde{l}+1)\phi^{ps}_{\tilde{n}_r,\tilde{l},\tilde{m},\tilde{\mu}}(\vec{r}) \qquad (\text{۴۲الف})$$

$$L_z\phi^{ps}_{\tilde{n}_r,\tilde{l},\tilde{m},\tilde{\mu}}(\vec{r}) = \tilde{m}\phi^{ps}_{\tilde{n}_r,\tilde{l},\tilde{m},\tilde{\mu}}(\vec{r}) \qquad (\text{۴۲ب})$$

$$J_z\phi^{ps}_{\tilde{n}_r,\tilde{l},\tilde{m},\tilde{\mu}}(\vec{r}) = M\,\phi^{ps}_{\tilde{n}_r,\tilde{l},\tilde{m},\tilde{\mu}}(\vec{r}) \qquad (\text{۴۲ج})$$

که عدد کوانتومی شعاعی $\tilde{n}_r$ تعداد صفرهای مولفه پایینی به غیر از صفرهای در 0 و ∞ می‌باشد، $M = \tilde{m} + \tilde{\mu}$ و مولدهای (۴۱) حالتهای با $\tilde{l}$ یکسان و $\tilde{m}$ متفاوت را بصورت زیر بهم مرتبط می‌کنند

$$L_{\pm}\phi^{ps}_{\tilde{n}_r,\tilde{l},\tilde{m},\tilde{\mu}}(\vec{r}) = \sqrt{(\tilde{l} \mp \tilde{m})(\tilde{l} \pm \tilde{m}+1)}\,\phi^{ps}_{\tilde{n}_r,\tilde{l},\tilde{m},\tilde{\mu}}(\vec{r}) \qquad (۴۳)$$

که تحت این شرایط خواهیم داشت

$$\phi^{ps}_{\tilde{n}_r,\tilde{l},\tilde{m},1/2}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \sum_{j=\tilde{l}-1/2}^{\tilde{l}+1/2} A^{\tilde{l}\tilde{l}_j}_{\tilde{m}\tilde{m}}\, g_{\tilde{n}_r,\tilde{l},\tilde{j}}(r) Y^{\tilde{l}_j}_{\tilde{m}}(\theta,\varphi) \\ \sum_{j=\tilde{l}-1/2}^{\tilde{l}+1/2} A^{\tilde{l}\tilde{l}_j}_{\tilde{m}\tilde{m}+1} f_{\tilde{n}_r,\tilde{l},j}(r) Y^{\tilde{l}_j}_{\tilde{m}+1}(\theta,\varphi) \\ i f_{\tilde{n}_r,\tilde{l}}(r) Y^{\tilde{l}}_{\tilde{m}}(\theta,\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad M = \tilde{m} + \frac{1}{2} \qquad (\text{۴۴الف})$$

$$\phi^{ps}_{\tilde{n}_r,\tilde{l},\tilde{m},-1/2}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \sum_{j=\tilde{l}-1/2}^{\tilde{l}+1/2} A^{\tilde{l}\tilde{l}_j}_{\tilde{m}\tilde{m}-1}\, g_{\tilde{n}_r,\tilde{l},\tilde{j}}(r) Y^{\tilde{l}_j}_{\tilde{m}-1}(\theta,\varphi) \\ -\sum_{j=\tilde{l}-1/2}^{\tilde{l}+1/2} A^{\tilde{l}\tilde{l}_j}_{\tilde{m}\tilde{m}} f_{\tilde{n}_r,\tilde{l},j}(r) Y^{\tilde{l}_j}_{\tilde{m}}(\theta,\varphi) \\ 0 \\ i f_{\tilde{n}_r,\tilde{l}}(r) Y^{\tilde{l}}_{\tilde{m}}(\theta,\varphi) \end{pmatrix}, \qquad M = \tilde{m} - \frac{1}{2} \qquad (\text{۴۴ب})$$

درست مانند تقارن اسپینی، تقارن کروی تعداد دامنه‌ها در جفت را از چهارتا به سه‌تا کاهش می‌دهد و دوتا از این دامنه‌ها توسط معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر بهم مرتبط می‌شوند

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\tilde{l}+2}{r}\right)f_{\tilde{n}_r,\tilde{l},\tilde{l}+1/2}(r)=\left(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\tilde{l}-1}{r}\right)f_{\tilde{n}_r,\tilde{l},\tilde{l}-1/2}(r) \qquad (۴۵)$$

و بهتر است از جمع زیر برای تابع موج استفاده کنیم

$$\psi^{ps}_{\tilde{n}_r,\tilde{l},j,M}(\vec{r})=\sum_{\tilde{m},\tilde{\mu}}C^{\tilde{l}\,(1/2)\,j}_{\tilde{m}\,\tilde{\mu}M}\,\phi^{ps}_{\tilde{n}_r,\tilde{l},\tilde{m},\tilde{\mu}}(\vec{r}) \qquad (۴۶)$$

که ویژه تابع $\vec{\tilde{J}}.\vec{\tilde{J}}$ می‌باشد، اما ویژه تابع $\tilde{L}_z$ نیست؛

$$\vec{\tilde{J}}.\vec{\tilde{J}}\psi^{ps}_{\tilde{n}_r,\tilde{l},j,M}(\vec{r})=j(j+1)\psi^{ps}_{\tilde{n}_r,\tilde{l},j,M}(\vec{r}) \qquad (\text{۴۷الف})$$

$$\vec{\tilde{L}}.\vec{\tilde{L}}\psi^{ps}_{\tilde{n}_r,\tilde{l},j,M}(\vec{r})=\tilde{l}(\tilde{l}+1)\psi^{ps}_{\tilde{n}_r,\tilde{l},j,M}(\vec{r}) \qquad (\text{۴۷ب})$$

$$J_z\psi^{ps}_{\tilde{n}_r,\tilde{l},j,M}(\vec{r})=M\psi^{ps}_{\tilde{n}_r,\tilde{l},j,M}(\vec{r}) \qquad (\text{۴۷ج})$$

بجای استفاده از اسپینورهای چهار مولفه‌ای، بهتر است که تابع اسپین $\chi_{\tilde{\mu}}$ را معرفی کنیم. حالتهایی که یک جفت تبهگن هستند، حالتهای با $j=\tilde{l}\pm 1/2$ هستند که بصورت اسپینور دو مولفه‌ای زیر نمایش داده می‌شوند

$$\psi^{ps}_{\tilde{n}_r,\tilde{l},j,M}(\vec{r})=\begin{pmatrix} g_{\tilde{n}_r,\tilde{l},j}(r)\left[Y^{(\tilde{l}_j)}(\theta,\varphi)\chi\right]^{(j)}_M \\ if_{\tilde{n}_r,\tilde{l},j}(r)\left[Y^{(\tilde{l})}(\theta,\varphi)\chi\right]^{(j)}_M \end{pmatrix} \qquad (۴۸)$$

که $\tilde{n}_r$ تعداد صفرهای دامنه پایینی ویژه حالتها در جفت شبه اسپینی می‌باشد. از آنجاییکه ویژه توابع تجربی توسط عدد کوانتومی شعاعی و اندازه حرکت زاویه‌ای مداری مولفه بالایی نامگذاری می‌شوند، بهتر است از برچسب‌های زیر برای حالت شبه اسپینی استفاده شود

$$l=\tilde{l}-1 \qquad for \qquad j=\tilde{l}-\frac{1}{2}=l+\frac{1}{2} \qquad (\text{۴۹الف})$$

$$l'=\tilde{l}+1=l+2 \qquad for \qquad j=\tilde{l}+\frac{1}{2}=l'-\frac{1}{2} \qquad (\text{۴۹ب})$$

که با آنچه در مقدمه گفته شده مطابقت دارد. برای صفرهای شعاعی هم روابط زیر برقرار هستند

$$n_r = \tilde{n}_r \qquad for \qquad j = \tilde{l} - \frac{1}{2}$$ (۵۰الف)

$$n'_r = \tilde{n}_r - 1 \qquad for \qquad j = \tilde{l} - \frac{1}{2}$$ (۵۰ب)

۳-۵ قوانین جمع QCD

قوانین جمع QCD برای نشان دادن $V_S \approx -V_V$ در هسته بکار برده می‌شوند[۱۵]. پتانسیل برداری با چگالی هسته‌ای متناسب است، $V_V \approx \rho_N$. مقدار ρ_n از چگالی مرکزی هسته بدست می‌آید که در پراکندگی الکترون از هسته اندازه‌گیری می‌شود. اندازه‌گیری مستقیمی برای چگالی اسکالر هسته‌ای وجود ندارد، اما چگالی اسکالر کوارک‌ها در یک نوکلئون بطور تجربی قابل اندازه‌گیری هستند. این چگالی اسکالر کوارک‌ها بصورت زیر داده می-شوند

$$\sigma_N = 2m_q \left(\langle N | \bar{q}q | N \rangle\right) - \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle$$ (۵۱)

که q عملگر میدان کوارک، $\bar{q} = q^\dagger \gamma_0$، m_q جرم کوارک، $\langle N|$ حالت نوکلئون و $|0\rangle$ حالت خلا می‌باشد. جمله فوق در پراکندگی پایون-نوکلئون اندازه‌گیری می‌شود [۱۶-۱۷] که اندازه آن $\sigma_N \approx 45 \pm 8 MeV$ بدست آمده است. با متوسط گیری روی تمام نوکلئون‌های در هسته و چشم‌پوشی از برهم‌کنش‌های هسته‌ای،

$$\sigma_N \rho_N = 2m_q \left(\langle \bar{q}q \rangle_{\rho_N} - \langle \bar{q}q \rangle_{vac}\right)$$ (۵۲)

چگالی اسکالر کوارک‌ها در هسته نسبت به خلا بصورت زیر بدست می‌آید

$$\frac{\langle \bar{q}q \rangle_{\rho_N}}{\langle \bar{q}q \rangle_{vac}} = 1 + \frac{\sigma_N \rho_N}{2m_q \langle \bar{q}q \rangle_{vac}} = 1 - \frac{\sigma_N \rho_N}{m_\pi^2 f_\pi^2}$$ (۵۳)

که جمله آخر از رابطه Gell-Mann-Oakes-Renner تبعیت می‌کند [۱۸]

$$2m_q \langle \bar{q}q \rangle_{vac} = -m_\pi^2 f_\pi^2$$ (۵۴)

درنهایت قوانین جمع QCD روابط زیر را بدست می‌دهد

$$V_S = -\frac{4\pi^2 \sigma_N \rho_N}{M^2 m_q}, \qquad V_V = \frac{32\pi^2 \rho_N}{M^2} \tag{۵۵}$$

از آنجاییکه تمام مقادیر در سمت راست (۵۵) مثبت هستند، پتانسیل اسکالر جاذب و پتانسیل برداری دافع می‌باشد.

همچنین برای نسبت‌هایشان خواهیم داشت

$$\frac{V_S}{V_V} = -\frac{\sigma_N}{8m_q} \approx -1.1 \tag{۵۶}$$

که پیشنهاد می‌کند تقارن شبه اسپینی اساس پایه‌ای‌تری در فیزیک هسته‌ها داشته باشد.

فصل چهارم

روشهای حل معادلات دیفرانسیل شرودینگرگونه

۴-۱ مقدمه

شایان ذکر است که در حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل درجه دوم شرودینگرگونه، می توان از روشهای مختلفی استفاده نمود که از روشهای متداول، روشهایی هستند که در کتب مراجع ذکر شده اند. همچنین روشهایی مانند SUSY، Nikiforov-Uvarov، Asymptotic Iteration Method، PCT، Ansatz، ... وجود دارند. در اینجا قصد داریم از روش قدرتمند و مفید Nikiforov-Uvarov برای حل معادلات درجه دوم استفاده کنیم [6]. همچنین در ادامه روش Asymptotic Iteration Method نیز ذکر شده است.

۴-۲ روش Nikiforov-Uvarov (NU)

روش NU برای حل معادلات دیفرانسیل درجه دوم با یک تغییر متغیر مناسب بصورت $s = s(r)$ بکار برده می-شود [۱۹]

$$\psi_n''(s)+\frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\psi_n'(s)+\frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}\psi_n(s)=0 \qquad (۱)$$

که $\sigma(s)$ و $\tilde{\sigma}(s)$ چند جمله‌ای و حداکثر از درجه دو و چند جمله‌ای $\tilde{\tau}(s)$ حداکثر از درجه یک می باشند.

برای پیدا کردن جواب معادله فوق، از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم

$$\psi_n(s)=\phi(s)\,y_n(s) \qquad (۲)$$

و معادله (۱) به یک معادله دیفرانسیل فوق هندسی به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$\sigma(s)y_n''(s)+\tau(s)y_n'(s)+\lambda y_n(s)=0 \qquad (۳)$$

همچنین $\phi(s)$ بصورت مشتق لگاریتمی زیر تعریف می‌شود

$$\frac{\phi'(s)}{\phi(s)}=\frac{\pi(s)}{\sigma(s)} \qquad (۴)$$

و $y_n(s)$ تابعی از جنس تابع فوق هندسی می‌باشد که جواب‌های آن توسط فرمول رودریگز داده می‌شوند

$$y_n(s)=\frac{B_n}{\rho(s)}\frac{d^n}{ds^n}\left[\sigma^n(s)\rho(s)\right] \qquad (۵)$$

B_n ثابت نرمالیزاسیون است و تابع وزن $\rho(s)$ باید در شرط زیر صدق کند

$$\frac{d}{ds}w(s)=\frac{\tau(s)}{\sigma(s)}w(s), \qquad w(s)=\sigma(s)\rho(s) \qquad (۶)$$

تابع $\pi(s)$ و پارامتر λ مورد نیاز برای این روش بصورت زیر تعریف می‌شوند

$$\pi(s)=\frac{\sigma'-\tilde{\tau}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma'-\tilde{\tau}}{2}\right)^2-\tilde{\sigma}+k\sigma} \qquad (۷)$$

$$\lambda=k+\pi'(s) \qquad (۸)$$

برای پیدا کردن مقدار k، عبارت زیر رادیکال باید مربع کامل باشد. بنابراین یک معادله جدید ویژه مقداری بصورت زیر بدست می‌آید

$$\lambda=\lambda_n=-n\tau'(s)-\frac{n(n-1)}{2}\sigma''(s) \qquad (۹)$$

که

$$\tau(s)=\tilde{\tau}(s)+2\pi(s) \qquad (۱۰)$$

و مشتق $\tau(s)$ باید منفی باشد. معادله زیر یک شکل کلی از معادله شرودینگرگونه برای هر پتانسیلی می‌باشد

$$\left[\frac{d^2}{ds^2}+\frac{\alpha_1-\alpha_2 s}{s(1-\alpha_3 s)}\frac{d}{ds}+\frac{-\xi_1 s^2+\xi_2 s-\xi_3}{\left[s(1-\alpha_3 s)\right]^2}\right]\psi_n(s)=0 \qquad (۱۱)$$

که آنرا به روش زیر حل می‌کنیم [۲۰]. هنگامی که معادله (۱۱) با معادله (۱) مقایسه شود، بدست می‌آوریم

$$\tilde{\tau}(s)=\alpha_1-\alpha_2 s \qquad (۱۲)$$

و

$$\sigma(s)=s(1-\alpha_3 s) \qquad (۱۳)$$

همچنین

$$\tilde{\sigma}(s) = -\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3 \qquad (۱۴)$$

با جایگذاری روابط (۱۲-۱۴) در معادله (۷) خواهیم داشت

$$\pi(s) = \alpha_4 + \alpha_5 s \pm \left[(\alpha_6 - k\alpha_3) s^2 + (\alpha_7 + k) s + \alpha_8 \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۱۵)$$

که

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= \frac{1}{2}(1 - \alpha_1) \\ \alpha_5 &= \frac{1}{2}(\alpha_2 - 2\alpha_3) \\ \alpha_6 &= \alpha_5^2 + \xi_1 \\ \alpha_7 &= 2\alpha_4\alpha_5 - \xi_2 \\ \alpha_8 &= \alpha_4^2 + \xi_3 \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

در معادله (۱۶)، بر طبق روش NU جمله زیر رادیکال باید مربع کامل باشد، بطوریکه

$$k_{1,2} = -(\alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8) \pm 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9} \qquad (۱۷)$$

که تعریف می‌کنیم

$$\alpha_9 = \alpha_3\alpha_7 + \alpha_3^2\alpha_8 + \alpha_6 \qquad (۱۸)$$

برای هر k یک تابع π بدست آورده می‌شود. برای

$$k = -(\alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8) - 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9} \qquad (۱۹)$$

π می‌شود

$$\pi(s) = \alpha_4 + \alpha_5 s - \left[\left(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8} \right) s - \sqrt{\alpha_8} \right] \qquad (۲۰)$$

برای k یکسان، از معادلات (۱۰)، (۱۲) و (۱۵) داریم

$$\tau(s) = \alpha_1 + 2\alpha_4 - (\alpha_2 - 2\alpha_5) s - 2\left[\left(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8} \right) s - \sqrt{\alpha_8} \right] \qquad (۲۱)$$

و بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \tau'(s) &= -(\alpha_2 - 2\alpha_5) - 2\left(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8} \right) \\ &= -2\alpha_3 - 2\left(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8} \right) \langle 0 \end{aligned} \qquad (۲۲)$$

هنگامیکه معادله (۸) با معادلات (۲۲) و (۲۳) بکار برده شود، رابطه زیر استنتاج می‌شود

$$\alpha_2 n-(2n+1)\alpha_5+(2n+1)\left(\sqrt{\alpha_9}+\alpha_3\sqrt{\alpha_8}\right)+n(n+1)\alpha_3 +\alpha_7+2\alpha_3\alpha_8+2\sqrt{\alpha_8\alpha_9}=0 \quad (۲۳)$$

این معادله طیف انرژی مساله داده شده را بدست می‌دهد. از معادله (۶) خواهیم داشت

$$\rho(s)=s^{\alpha_{10}-1}(1-\alpha_3 s)^{\frac{\alpha_{11}}{\alpha_3}-\alpha_{10}-1} \quad (۲۴)$$

و هنگامیکه این معادله در معادله (۵) استفاده شود، بدست می‌آوریم

$$y_n(s)=P_n^{(\alpha_{10}-1,\frac{\alpha_{11}}{\alpha_3}-\alpha_{10}-1)}(1-2\alpha_3 s) \quad (۲۵)$$

که

$$\alpha_{10}=\alpha_1+2\alpha_4+2\sqrt{\alpha_8} \quad (۲۶)$$

و

$$\alpha_{11}=\alpha_2-2\alpha_5+2\left(\sqrt{\alpha_9}+\alpha_3\sqrt{\alpha_8}\right) \quad (۲۷)$$

و $P_n^{(\alpha,\beta)}$ چند جمله‌ایهای ژاکوبی هستند. از معادله (۴)

$$\phi(s)=s^{\alpha_{12}}(1-\alpha_3 s)^{-\alpha_{12}-\frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} \quad (۲۸)$$

بدست آورده می‌شود و در نهایت، جواب کلی به شکل زیر بدست می‌آید

$$\psi_n(s)=\phi(s)y_n(s) \quad (۲۹)$$

$$\psi(s)=s^{\alpha_{12}}(1-\alpha_3 s)^{-\alpha_{12}-\frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}}P_n^{(\alpha_{10}-1,\frac{\alpha_{11}}{\alpha_3}-\alpha_{10}-1)}(1-2\alpha_3 s) \quad (۳۰)$$

که

$$\alpha_{12}=\alpha_4+\sqrt{\alpha_8} \quad (۳۱)$$

و

$$\alpha_{13}=\alpha_5-\left(\sqrt{\alpha_9}+\alpha_3\sqrt{\alpha_8}\right) \quad (۳۲)$$

در بعضی مسائل $\alpha_3=0$. برای این نوع مسائل هنگامیکه

$$\lim_{\alpha_3\to 0}P_n^{(\alpha_{10}-1,\frac{\alpha_{11}}{\alpha_3}-\alpha_{10}-1)}(1-\alpha_3)s=L_n^{\alpha_{10}-1}(\alpha_{11}s) \quad (۳۳)$$

و

$$\lim_{\alpha_3\to 0}\left(1-\alpha_3 s\right)^{-\alpha_{12}-\frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}}=e^{\alpha_{13}s} \qquad (۳۴)$$

جواب داده شده در (۳۰) بصورت زیر می‌شود

$$\psi(s)=s^{\alpha_{12}}e^{\alpha_{13}s}L_n^{\alpha_{10}-1}\left(\alpha_{11}s\right) \qquad (۳۵)$$

در بعضی موارد، نیاز داریم که جواب دوم معادله (۱۱) را استفاده کنیم. در این مورد، روش کار مشابه خواهیم داشت با استفاده از

$$k=-\left(\alpha_7+2\alpha_3\alpha_8\right)+2\sqrt{\alpha_8\alpha_9} \qquad (۳۶)$$

جواب بصورت زیر می‌شود

$$\psi(s)=s^{\alpha_{12}^*}\left(1-\alpha_3 s\right)^{-\alpha_{12}^*-\frac{\alpha_{13}^*}{\alpha_3}}P_n^{(\alpha_{10}^*-1,\frac{\alpha_{11}^*}{\alpha_3}-\alpha_{10}^*-1)}\left(1-2\alpha_3 s\right) \qquad (۳۷)$$

و برای طیف انرژی نیز خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\alpha_2 n-(2n-1)\alpha_5+(2n+1)\left(\sqrt{\alpha_9}+\alpha_3\sqrt{\alpha_8}\right)+n(n-1)\alpha_3&\\+\alpha_7+2\alpha_3\alpha_8-2\sqrt{\alpha_8\alpha_9}=0&\end{aligned} \qquad (۳۸)$$

که اینبار ضرایب بصورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned}\alpha_{10}^*&=\alpha_1+2\alpha_4-2\sqrt{\alpha_8}\\\alpha_{11}^*&=\alpha_2-2\alpha_5+2\left(\sqrt{\alpha_9}-\alpha_3\sqrt{\alpha_8}\right)\\\alpha_{12}^*&=\alpha_4-\sqrt{\alpha_8}\\\alpha_{13}^*&=\alpha_5-\left(\sqrt{\alpha_9}-\alpha_3\sqrt{\alpha_8}\right)\end{aligned} \qquad (۳۹)$$

۳-۴ روش تکرار حدی (**Asymptotic iteration method** (**AIM**))

روش AIM برای حل معادلات دیفرانسیل درجه دوم بصورت زیر بکار برده می‌شوند [۲۱-۲۵]

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}=\lambda_0(x)\frac{dy(x)}{dx}+S_0(x)y(x) \qquad (۴۰)$$

که $\lambda_0(x)$ و $S_0(x)$ پیوسته و انتگرال‌پذیرند و $\lambda_0(x)$ مخاف صفر می‌باشد. جواب معادله (۴۰) بصورت زیر می‌باشد

$$y_n^{k+1}(x)=N\,\exp\left(\int^x\frac{S_n(x')}{\lambda_n(x')}dx'\right) \qquad (۴۱)$$

که N ثابت انتگرال می‌باشد و

$$\lambda_n(x)=\frac{d\lambda_{n-1}(x)}{dx}+S_{n-1}(x)+\lambda_0(x)\lambda_{n-1}(x) \tag{۴۲}$$

$$S_n(x)=\frac{dS_{n-1}(x)}{dx}+S_0(x)\lambda_{n-1}(x) \tag{۴۳}$$

برای $k>0$ داریم

$$\frac{S_k(x)}{\lambda_k(x)}=\frac{S_{k-1}(x)}{\lambda_{k-1}(x)}=\alpha(x) \tag{۴۴}$$

در این روش، ویژه مقادیر از دترمینان زیر بدست می‌آیند

$$\Delta_k(x)=\begin{vmatrix}\lambda_k(x) & \lambda_{k-1}(x)\\ S_k(x) & S_{k-1}(x)\end{vmatrix}=0 \tag{۴۵}$$

که k تعداد تکرار می‌باشد. با استفاده از معادلات (۴۵) و (۴۱) می‌توانیم ویژه مقادیر و ویژه توابع مربوطه را بدست آوریم.

فصل پنجم

معادله دیراک در حضور پتانسیل‌های هسته‌ای

با تقارنهای کروی اسپینی و شبه اسپینی

۵-۱ مقدمه

در این فصل قصد داریم تقارن‌های کروی دیراک را با پتانسیل‌های مختلف بررسی نماییم و وجود ترازهای تـبهگن را مشاهده نماییم. همچنین می‌خواهیم با استفاده از پتانسیل تانسوری، شکافتگی این ترازها را نشان دهیم.

۵-۲ پتانسیل Mie

پتانسیل Mie که که پتانسیل مهم در مولکول‌های دو اتمی می‌باشد [۲۶-۳۴]، بطور کلی بصورت زیر تعریـف مـی-شود

$$V(r) = D_e\left(\frac{a}{b-a}\left(\frac{r_e}{r}\right)^b - \frac{b}{b-a}\left(\frac{r_e}{r}\right)^a\right) \qquad (۱)$$

که a و b ضرائب ثابت می‌باشند، D_e انرژی برهمکنش بین اتمهای مولکول در فاصله r_e می‌باشد. بـرای مثـال، هنگامیکه $a = 2$ و $b = 1$، پتانسیل فوق به پتانسیل استاندارد Morse یا همان Kratzer-Fues تبدیل می‌شود

$$V_{KF} = -D_e \left(\frac{2r_e}{r} - \frac{r_e^2}{r^2} \right) \qquad (۲)$$

و یا به فرم پتانسیل Modified Kratzer بصورت زیر در می‌آید

$$V_{MK} = D_e \left(\frac{r - r_e}{r} \right)^2 \qquad (۳)$$

پتانسیل Mie را می‌توان به شکل کلی زیر نوشت

$$V_{MT} = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r} + c \qquad (۴)$$

۵-۲-۱ حل دقیق معادله دیراک با پتانسیل Mie تحت تقارن‌های اسپینی و شبه اسپینی

همانطوریکه قبلا ذکر شد، معادله دیراک در حضور پتانسیل‌های اسکالر $S(r)$ و بـرداری $V(r)$ بصـورت زیـر مـی-باشد($\hbar = c = 1$)

$$[\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta(m + S(r))]\psi(r) = [E - V(r)]\psi(r) \qquad (۵)$$

که E انرژی نسبیتی سیستم و $\vec{p} = -i\vec{\nabla}$ عملگر سه بعدی اندازه حرکت زاویه‌ای مـی‌باشـد. $\vec{\alpha}$ و β مـاتریس-های 4×4 دیراک می‌باشند

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad (۶)$$

که $\vec{\sigma}$ ماتریس پاولی و I ماتریس یکه 2×2 هستند. عملگرهای اندازه حرکت زاویـه‌ای کـل $\vec{J}$ و اسـپین-مـدار $K = (\vec{\sigma}.\vec{L} + 1)$، که $\vec{L}$ اندازه حرکت زاویه‌ای مداری می‌باشد، با هامیلتونی دیراک جابجا می‌شـوند. ویـژه مقـادیر

عملگر اسپین-مدار $\kappa=\left(j+\frac{1}{2}\right)\rangle 0$ و $\kappa=-\left(j+\frac{1}{2}\right)\langle 0$ به ترتیب برای $j=l-\frac{1}{2}$ و $j=l+\frac{1}{2}$ هستند. بنابراین $\left(H^2,\ K, J^2, J_z\right)$ دارای ویژه توابع همزمان می‌باشند. پس اسپینورهای دیراک را می‌توانیم بصورت زیر بنویسیم

$$\psi_{n\kappa}(\vec{r})=\begin{pmatrix} f_{n\kappa}(\vec{r}) \\ g_{n\kappa}(\vec{r}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{F_{n\kappa}(r)}{r}Y_{jm}^{l}(\theta,\varphi) \\ i\dfrac{G_{n\kappa}(r)}{r}Y_{jm}^{\tilde{l}}(\theta,\varphi) \end{pmatrix} \tag{۷}$$

که $f_{n\kappa}(\vec{r})$ مولفه بالایی (بزرگ) و $g_{n\kappa}(\vec{r})$ مولفه پایینی (کوچک) دیراک هستند. $Y_{jm}^{l}(\theta,\varphi)$ و $Y_{jm}^{\tilde{l}}(\theta,\varphi)$ هماهنگ‌های کروی اسپینی و شبه اسپینی می‌باشند و m تصویر اندازه حرکت زاویه‌ای کل روی محور z می‌باشد.

با جایگذاری معادله (۷) در معادله (۵) به دو معادله دیفرانسیل جفت شده برای $F_{n\kappa}(r)$ و $G_{n\kappa}(r)$ به شکل زیر می‌رسیم

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{\kappa}{r}\right)F_{n\kappa}(r)=\left[M+E_{n\kappa}-\Delta(r)\right]G_{n\kappa}(r) \tag{۸الف}$$

$$\left(\frac{d}{dr}-\frac{\kappa}{r}\right)G_{n\kappa}(r)=\left[M-E_{n\kappa}+\Sigma(r)\right]F_{n\kappa}(r) \tag{۸ب}$$

که

$$\Delta(r)=V(r)-S(r) \tag{۹الف}$$

$$\Sigma(r)=V(r)+S(r) \tag{۹ب}$$

با حذف $F_{n\kappa}(r)$ و $G_{n\kappa}(r)$ در معادلات (۸)، به ترتیب، به معادله دیفرانسیل مرتبه دوم شبه شرودینگر برای مولفه بالایی و پایینی می‌رسیم

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\kappa(\kappa-1)}{r^2}\right]G_{n\kappa}(r)$$
$$+\left[-(M+E_{n\kappa}-\Delta(r))(M-E_{n\kappa}+\Sigma(r))-\frac{\frac{d\Sigma(r)}{dr}\left(\frac{d}{dr}-\frac{\kappa}{r}\right)}{M-E_{n\kappa}+\Sigma(r)}\right]G_{n\kappa}(r)=0 \qquad \text{(۱۰الف)}$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\kappa(\kappa+1)}{r^2}\right]F_{n\kappa}(r)$$
$$+\left[-(M+E_{n\kappa}-\Delta(r))(M-E_{n\kappa}+\Sigma(r))+\frac{\frac{d\Delta(r)}{dr}\left(\frac{d}{dr}+\frac{\kappa}{r}\right)}{M+E_{n\kappa}-\Delta(r)}\right]F_{n\kappa}(r)=0 \qquad \text{(۱۰ب)}$$

که $\kappa(\kappa-1)=\tilde{l}\left(\tilde{l}+1\right)$ و $\kappa(\kappa+1)=l(l+1)$.

۵-۲-۲ تقارن شبه اسپینی

تقارن شبه اسپینی هنگامی در معادله دیراک رخ می‌دهد که $\frac{d\Sigma(r)}{dr}=0$ یا $\Sigma(r)=C_{ps}=\text{Constant}$ [۳۵-۳۶]. درنتیجه از معادله (۱۰الف) داریم

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\kappa(\kappa-1)}{r^2}-(M+E_{n\kappa}-\Delta(r))(M-E_{n\kappa}+C_{ps})\right]G_{n\kappa}(r)=0 \qquad (۱۱)$$

که $\kappa=-\tilde{l}$ برای $\kappa<0$ و $\kappa=\tilde{l}+1$ برای $\kappa>0$. حال در اینجا فرض می‌کنیم $\Delta(r)$ بعنوان پتانسیل Mie در نظر گرفته شود و معادله فوق به فرم زیر در می‌آید

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\kappa(\kappa-1)}{r^2}-\gamma\left(\frac{A}{r^2}-\frac{B}{r}+C\right)-\beta^2\right]G_{n\kappa}(r)=0 \qquad (۱۲)$$

که

$$\gamma=E_{n\kappa}-M-C_{ps} \qquad \text{(۱۳الف)}$$

$$\beta^2=(M+E_{n\kappa})(M-E_{n\kappa}+C_{ps}) \qquad \text{(۱۳ب)}$$

برای بدست آوردن جواب معادله (۱۲) از روش NU که در فصل قبل ذکـر شـده اسـتفاده مـی‌کنـیم. تغییـر متغیـر مناسب بصورت $s=r$ می‌باشد و معادله (۱۲) بصورت زیر در می‌آید

$$\left[\frac{d^2}{ds^2}-\frac{\kappa(\kappa-1)}{s^2}-\gamma\left(\frac{A}{s^2}-\frac{B}{s}+C\right)-\beta^2\right]G_{n\kappa}(s)=0 \qquad (۱۴)$$

یا

$$\frac{d^2G_{n\kappa}(s)}{ds^2}+\left[\frac{\alpha-B_1s-C_1s^2}{s^2}\right]G_{n\kappa}(s)=0 \qquad (۱۵)$$

که

$$\begin{aligned}\alpha&=-\kappa(\kappa-1)-\gamma A\\ B_1&=-\gamma B\\ C_1&=\gamma C+\beta^2\end{aligned} \qquad (۱۶)$$

با مقایسه معادله فوق و معادله (۴-۱)، چند جمله‌ایهای مرتبط با روش را بصورت زیر بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}&\tilde{\tau}(s)=0\\ &\sigma(s)=s\\ &\sigma^2(s)=s^2\\ &\tilde{\sigma}(s)=\alpha-B_1s-C_1s^2\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

با استفاده از معادله (۴-۷)، $\pi(s)$ بصورت زیر پیدا می‌شود

$$\pi(s)=\begin{cases}\frac{1}{2}\pm\left(\sqrt{C_1}s+\sqrt{\frac{1}{4}-\alpha}\right) & for \quad k=-B_1+\sqrt{C_1(1-4\alpha)}\\ \frac{1}{2}\pm\left(\sqrt{C_1}s-\sqrt{\frac{1}{4}-\alpha}\right) & for \quad k=-B_1-\sqrt{C_1(1-4\alpha)}\end{cases} \qquad (۱۸)$$

تابع $\tau(s)$ را هنگامی که مشتق آن منفی است بصورت زیر بدست می‌آوریم

$$\tau(s)=1-2\left(\sqrt{C_1}s-\sqrt{\frac{1}{4}-\alpha}\right) \qquad for \qquad k=-B_1-\sqrt{C_1(1-4\alpha)}$$

(۱۹)

از معادلات (۴-۸) و (۴-۹) رابطه انرژی بصورت زیر بدست می‌آید

$$\sqrt{(E_{n\kappa}-M-C_{ps})C+(M+E_{n\kappa})(M-E_{n\kappa}+C_{ps})} = \frac{(E_{n\kappa}-M-C_{ps})B}{2n+1+2\sqrt{\left(\kappa-\frac{1}{2}\right)^2+(E_{n\kappa}-M-C_{ps})A}} \qquad (۲۰)$$

در حالت خاص، هنگامی که $A=C=0$ و $C_{ps}=0$، ویژه مقادیر انرژی برای پتانسیل کولنی بدست می‌آیند

$$E_{n\kappa}=-M\,\frac{(2n+2\kappa)^2-B^2}{(2n+2\kappa)^2+B^2} \qquad (۲۱)$$

برای پیدا کردن تابع موج، ابتدا تابع وزن را از معادله (۴-۶) پیدا می‌کنیم

$$\rho(s)=s^{\sqrt{\frac{1}{4}-\alpha}}e^{-2\sqrt{\gamma C+\beta^2}\,s} \qquad (۲۲)$$

با جایگذاری (۲۲) در معادله (۴-۵)، قسمت اول تابع موج را به فرم زیر بدست می‌آوریم

$$y_n(s)=C_nL_n^{\delta}(2\varepsilon s) \qquad (۲۳)$$

که $L_n(r)$ چند جمله‌ایهای لاگر، C_n ضریب نرمالیزاسیون، $\varepsilon=\sqrt{\gamma C+\beta^2}$ و $\delta=\sqrt{\frac{1}{4}-\alpha}$ می‌باشند. با استفاده از معادله (۴-۴)، قسمت دیگر تابع موج بصورت زیر بدست می‌آید

$$\phi(s)=e^{-\varepsilon s}s^{\frac{1}{2}(1+\delta)} \qquad (۲۴)$$

در نتیجه تابع موج دیراک برای $G_{n\kappa}(r)$ به فرم زیر خواهد شد

$$G_{n\kappa}(r)=C_{n\kappa}e^{-\varepsilon r}r^{\frac{1}{2}(1+\delta)}L_n^{\delta}(2\varepsilon r) \qquad (۲۵)$$

و مولفه بالایی در حالت تقارن شبه اسپینی از رابطه زیر بدست می‌آید

$$F_{n\kappa}(r)=\frac{1}{M-E_{n\kappa}+C_{ps}}\left(\frac{d}{dr}-\frac{\kappa}{r}\right)G_{n\kappa}(r) \qquad (۲۶)$$

که $E \neq M + C_{ps}$ و فقط ویژه مقادیر منفی در این تقارن بدست می‌آیند [۱۴، ۳۰].

۵-۲-۳ تقارن اسپینی

تقارن اسپینی هنگامی در معادله دیراک رخ می‌دهد که $\frac{d\Delta(r)}{dr}=0$ یا $\Delta(r)=C_s=\text{Constant}$ [۳۵-۳۶].

درنتیجه از معادله (۱۰ب) داریم

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\kappa(\kappa+1)}{r^2}-(M+E_{n\kappa}-C_s)(M-E_{n\kappa}+\Sigma(r))\right]F_{n\kappa}(r)=0 \qquad (۲۷)$$

که $\kappa=l$ برای $\kappa>0$ و $\kappa=-l-1$ برای $\kappa<0$. حال در اینجا فرض می‌کنیم $\Sigma(r)$ بعنوان پتانسیل Mie در نظر گرفته شود و معادله فوق به فرم زیر در می‌آید

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\kappa(\kappa+1)}{r^2}-\tilde{\gamma}\left(\frac{A}{r^2}-\frac{B}{r}+C\right)-\tilde{\beta}^2\right]F_{n\kappa}(r)=0 \qquad (۲۸)$$

که

$$\tilde{\gamma}=E_{n\kappa}+M-C_s \qquad (\text{۲۹الف})$$

$$\tilde{\beta}^2=(M-E_{n\kappa})(M+E_{n\kappa}-C_s) \qquad (\text{۲۹ب})$$

برای بدست آوردن جواب معادله (۲۸) از روش NU که در فصل قبل ذکر شده استفاده می‌کنیم. تغییر متغیر مناسب بصورت $s=r$ می‌باشد و معادله (۲۸) بصورت زیر در می‌آید

$$\frac{d^2F_{n\kappa}(s)}{ds^2}+\frac{-\kappa(\kappa+1)-\tilde{\gamma}A+\tilde{\gamma}Bs-(\tilde{\gamma}C+\tilde{\beta}^2)s^2}{s^2}F_{n\kappa}(s)=0 \qquad (۳۰)$$

همانند بخش قبل، ویژه مقادیر انرژی در حالت اسپینی بصورت زیر بدست می‌آیند

$$\sqrt{\left(M+E_{n\kappa}-C_s\right)C+\left(M-E_{n\kappa}\right)\left(M+E_{n\kappa}-C_s\right)} = \frac{\left(M+E_{n\kappa}-C_s\right)B}{2n+1+2\sqrt{\left(\kappa+\frac{1}{2}\right)^2+\left(M+E_{n\kappa}-C_s\right)A}} \tag{۳۱}$$

در حالت خاص، هنگامی که $A=C=0$ و $C_s=0$، ویژه مقادیر انرژی برای پتانسیل کولنی در حد این تقارن بدست می‌آیند

$$E_{n\kappa}=M\,\frac{\left(2n+2\kappa+2\right)^2-B^2}{\left(2n+2\kappa+2\right)^2+B^2} \tag{۳۲}$$

و تابع موج اسپینی را به فرم زیر بدست می‌آوریم

$$F_{n\kappa}\left(r\right)=\tilde{C}_{n\kappa}e^{-\tilde{\varepsilon}r}r^{\frac{1}{2}\left(1+\tilde{\delta}\right)}L_n^{\tilde{\delta}}\left(2\tilde{\varepsilon}r\right) \tag{۳۳}$$

که $\tilde{C}_{n\kappa}$ ضریب نرمالیزاسیون، $\tilde{\varepsilon}=\sqrt{\tilde{\gamma}C+\tilde{\beta}^2}$ و $\tilde{\delta}=2\sqrt{(\kappa+\frac{1}{2})^2+\tilde{\gamma}A}$ می‌باشند. مولفه پایینی در حالت تقارن اسپینی از رابطه زیر بدست می‌آید

$$G_{n\kappa}(r)=\frac{1}{M+E_{n\kappa}-C_s}\left(\frac{d}{dr}+\frac{\kappa}{r}\right)F_{n\kappa}(r) \tag{۳۴}$$

که $E\neq -M+C_s$ و فقط ویژه مقادیر مثبت در این تقارن بدست می‌آیند [۱۴، ۳۰].

جفت‌های $\left(1s_{1/2},0d_{3/2}\right)$، $\left(1p_{3/2},0f_{5/2}\right)$، $\left(1d_{5/2},0g_{7/2}\right)$، $\left(1f_{7/2},0h_{9/2}\right)$، ... تبهگن هستند و اینها را بعنوان جفت شبه اسپینی می‌شناسم. در مقابل، جفت‌های $\left(np_{1/2},np_{3/2}\right)$، $\left(nd_{3/2},nd_{5/2}\right)$، $\left(nf_{5/2},nf_{7/2}\right)$، $\left(ng_{7/2},ng_{9/2}\right)$، ... تبهگن هستند و اینها را بعنوان جفت‌های اسپینی می‌شناسم. در جدول ۵-۱، ویژه مقادیر انرژی را در حالت شبه اسپینی برای پتانسیل Kratzer-Fues ($A=D_er_e^2$ ، $B=2r_eD_e$ و $C=0$)بدست

آوردیـــم. همچنـــین پارامترهـــا را اینگونـــه گـــرفتیم: $M = 5fm^{-1}$، $D_e = 1.25fm^{-1}$، $r_e = 0.35fm$ و $C_s = C_{ps} = 0$.

جدول۵-۱ ویژه مقادیر انرژی پتانسیل Kratzer-Fues در حالت تقارن شبه اسپینی

$\tilde{l}$	$n,\kappa\langle 0$	(l,j)	$E_{n,\kappa\langle 0}$ Present method	$E_{n,\kappa\langle 0}$ Ref. [۳۰]	$n-1,\kappa\rangle 0$	$(l+2,j+1)$	$E_{n-1,\kappa\rangle 0}$ Present method	$E_{n-1,\kappa\rangle 0}$ Ref. [۳۰]
1	1, -1	$1s_{1/2}$	-4.67230519	-4.672305	0, 2	$0d_{3/2}$	-4.67230519	-4.672305
2	1, -2	$1p_{3/2}$	-4.86042063	-4.860421	0, 3	$0f_{5/2}$	-4.86042063	-4.860421
3	1, -3	$1d_{5/2}$	-4.91678201	-4.916782	0, 4	$0g_{7/2}$	-4.91678201	-4.916782
4	1, -4	$1f_{7/2}$	-4.94395339	-4.943953	0, 5	$0h_{9/2}$	-4.94395339	-4.983077
1	2, -1	$2s_{1/2}$	-4.83354685	-4.833547	1, 2	$1d_{3/2}$	-4.83354685	-4.833547
2	2, -2	$2p_{3/2}$	-4.91359475	-4.913595	1, 3	$1d_{3/2}$	-4.91359475	-4.913595
3	2, -3	$2d_{5/2}$	-4.94294099	-4.942941	1, 4	$1g_{7/2}$	-4.94294099	-4.942941
4	2, -4	$2f_{7/2}$	-4.95910352	-4.959104	1, 5	$1h_{9/2}$	-4.95910352	-4.959104

در جدول ۵-۲، ویژه مقادیر انرژی را برای همین پتانسیل در حالت اسپینی محاسبه کردیم.

جدول۵-۲ ویژه مقادیر انرژی پتانسیل Kratzer-Fues در حالت تقارن اسپینی

l	$n,\kappa<0$	$(l,j=l+1/2)$	$E_{n,\kappa<0}$ Present method	$E_{n,\kappa<0}$ Ref. [۳۰]	$n,\kappa>0$	$(l,j=l-1/2)$	$E_{n,\kappa>0}$ Present method	$E_{n,\kappa>0}$ Ref. [۳۰]
1	0, -2	$0p_{3/2}$	4.68656999	4.686570	0, 1	$0p_{1/2}$	4.68656999	4.686570

2	0, -3	$0d_{5/2}$	4.82568793	4.825688	0, 2	$0d_{3/2}$	4.82568793	4.825688
3	0, -4	$0f_{7/2}$	4.89316704	4.893167	0, 3	$0f_{5/2}$	4.89316704	4.893167
4	0, -5	$0g_{9/2}$	4.92878602	4.928786	0, 4	$0g_{7/2}$	4.92878602	4.928786
1	1, -2	$1p_{3/2}$	4.84066792	4.840668	1, 1	$1p_{1/2}$	4.84066792	4.840668
2	1, -3	$1d_{5/2}$	4.89690965	4.896810	1, 2	$1d_{3/2}$	4.89690965	4.896810
3	1, -4	$1f_{7/2}$	4.93000202	4.930002	1, 3	$1f_{5/2}$	4.93000202	4.930002
4	1, -5	$1g_{9/2}$	4.94991153	4.949911	1, 4	$1g_{7/2}$	4.94991153	4.949911

در جـدول ۵-۳ و ۵-۴، ویـژه مقـادیر حالـت اسـپینی و شـبه اسـپینی را بـرای پتانسـیل Modified Kratzer ($A = D_e r_e^2$، $B = 2r_e D_e$ و $C = D_e$) بدست آوردیم[۳۷]. شایان ذکر است کـه تمـامی محاسـبات بـا کارهـای دیگران مقایسه شده است و نشان از صحت محاسبات دارد [۳۰].

جدول۵-۳ ویژه مقادیر انرژی پتانسیل Modified-Kratzer در حالت تقارن شبه اسپینی

$\tilde{l}$	$n,\kappa<0$	(l,j)	$E_{n,\kappa<0}$ Present method	$E_{n,\kappa<0}$ Ref. [۳۰]	$n-1,\kappa>0$	$(l+2, j+1)$	$E_{n-1,\kappa>0}$ Present method	$E_{n-1,\kappa>0}$ Ref. [۳۰]
1	1, -1	$1s_{1/2}$	-3.48488819	-3.484888	0, 2	$0d_{3/2}$	-3.48488819	-3.484888
2	1, -2	$1p_{3/2}$	-3.63062575	-3.630626	0, 3	$0f_{5/2}$	-3.63062575	-3.630626
3	1, -3	$1d_{5/2}$	-3.67804814	-3.678048	0, 4	$0g_{7/2}$	-3.67804814	-3.678048
4	1, -4	$1f_{7/2}$	-3.70132419	-3.701324	0, 5	$0h_{9/2}$	-3.70132419	-3.701324

1	2, -1	$2s_{1/2}$	-3.61269251	-3.612693	1, 2	$1d_{3/2}$	-3.61269251	-3.612693
2	2, -2	$2p_{3/2}$	-3.67541605	-3.675416	1, 3	$1d_{3/2}$	-3.67541605	-3.675416
3	2, -3	$2d_{5/2}$	-3.70056675	-3.700567	1, 4	$1g_{7/2}$	-3.70056675	-3.700567
4	2, -4	$2f_{7/2}$	-3.71444381	-3.714444	1, 5	$1h_{9/2}$	-3.71444381	-3.714444

جدول۵-۴ ویژه مقادیر انرژی پتانسیل Modified-Kratzer در حالت تقارن اسپینی

l	$n,\kappa<0$	$(l, j=l+1/2)$	$E_{n,\kappa<0}$ Present method	$E_{n,\kappa<0}$ Ref. [۳۰]	$n,\kappa>0$	$(l, j=l-1/2)$	$E_{n,\kappa>0}$ Present method	$E_{n,\kappa>0}$ Ref. [۳۰]
1	0, -2	$0p_{3/2}$	5.91047417	5.910474	0, 1	$0p_{1/2}$	5.91047417	5.910474
2	0, -3	$0d_{5/2}$	6.05779079	6.057791	0, 2	$0d_{3/2}$	6.05779079	6.057791
3	0, -4	$0f_{7/2}$	6.13123835	6.131238	0, 3	$0f_{5/2}$	6.13123835	6.131238
4	0, -5	$0g_{9/2}$	6.17050675	6.170507	0, 4	$0g_{7/2}$	6.17050675	6.170507
1	1, -2	$1p_{3/2}$	6.07559522	6.075595	1, 1	$1p_{1/2}$	6.07559522	6.075595
2	1, -3	$1d_{5/2}$	6.13581428	6.135814	1, 2	$1d_{3/2}$	6.13581428	6.135814
3	1, -4	$1f_{7/2}$	6.17201317	6.172013	1, 3	$1f_{5/2}$	6.17201317	6.172013
4	1, -5	$1g_{9/2}$	6.19401907	6.194019	1, 4	$1g_{7/2}$	6.19401907	6.194019

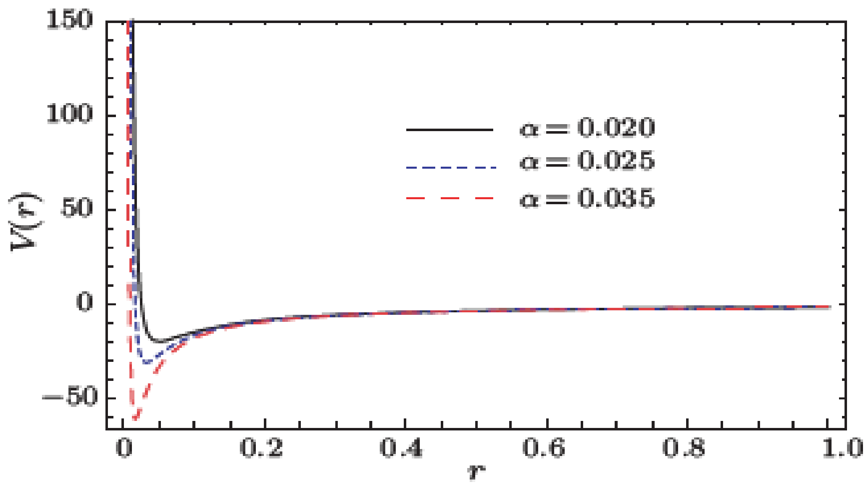
در ادامه پتانسیل‌هایی را بررسی خواهیم کرد که کاربرد بیشتری در فیزیک هسته‌ای دارد. شایان ذکر است که نویسندگان زیادی معادلات دیفرانسیل تحلیلی و یا تقریبی شرودینگرگونه را تحقیق کرده‌اند [۳۹-۹۷].

۵-۳ پتانسیل Eckart

یکی از پتانسیل‌هایی که شکل واقعی‌تری در فیزیک هسته‌ای دارد پتانسیل Eckart می‌باشد [۴۴، ۹۸]. شکل این پتانسیل در سه بعد بصورت زیر می‌باشد

$$V(r) = V_1 \operatorname{cosech}^2 \alpha r - V_2 \coth \alpha r \tag{۳۵}$$

که V_1 و V_2 عمق چاه و α محدوده پتانسیل را تعیین می‌کنند. این پتانسیل فقط در حالت موج s (یعنی $l=0$) حل دقیق دارد. بنابراین برای حل حالت‌های $l \neq 0$، باید از حل تقریبی کمک بگیریم. همچنین در شکل ۵-۱ این پتانسیل را بر حسب r رسم نموده‌ایم.



شکل ۵-۱ پتانسیل Eckart

۵-۳-۱ حل تقریبی معادله دیراک با پتانسیل Eckart تحت تقارن شبه اسپینی در حضور پتانسیل تانسوری

معادله دیراک در حضور پتانسیل‌های اسکالر $S(r)$، برداری $V(r)$ و تانسوری $U(r)$ بصورت زیر می‌باشد ($\hbar = c = 1$)

$$\left[\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{p}+\beta\left(M+S(r)\right)-i\beta\boldsymbol{\alpha}.\hat{\boldsymbol{r}}U(r)\right]\psi(\boldsymbol{r})=\left[E-V(r)\right]\psi(\boldsymbol{r}) \qquad (۳۶)$$

با استفاده از روابط

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}+i\boldsymbol{\sigma}.(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \qquad (۳۷الف)$$

$$(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{P})=\boldsymbol{\sigma}.\hat{\boldsymbol{r}}\left(\hat{\boldsymbol{r}}.\boldsymbol{P}+i\frac{\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{L}}{r}\right) \qquad (۳۷ب)$$

و همچنین روابط

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{L})Y_{jm}^{\tilde{l}}(\theta,\phi)&=(\kappa-1)Y_{jm}^{\tilde{l}}(\theta,\phi)\\
(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{L})Y_{jm}^{l}(\theta,\phi)&=-(\kappa-1)Y_{jm}^{l}(\theta,\phi)\\
(\boldsymbol{\sigma}.\hat{\boldsymbol{r}})Y_{jm}^{\tilde{l}}(\theta,\phi)&=-Y_{jm}^{l}(\theta,\phi)\\
(\boldsymbol{\sigma}.\hat{\boldsymbol{r}})Y_{jm}^{l}(\theta,\phi)&=-Y_{jm}^{\tilde{l}}(\theta,\phi)
\end{aligned} \qquad (۳۸)$$

به معادلات دیفرانسیل کوپل شده مرتبه اول می‌رسیم [۹۹-۱۰۹]

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{\kappa}{r}-U(r)\right)F_{n\kappa}(r)=\left(M+E_{n\kappa}-\Delta(r)\right)G_{n\kappa}(r) \qquad (۳۹الف)$$

$$\left(\frac{d}{dr}-\frac{\kappa}{r}+U(r)\right)G_{n\kappa}(r)=\left(M-E_{n\kappa}+\Sigma(r)\right)F_{n\kappa}(r) \qquad (۳۹ب)$$

که

$$\Delta(r)=V(r)-S(r) \qquad (۴۰الف)$$

$$\Sigma(r)=V(r)+S(r) \qquad (۴۰ب)$$

با حذف $F_{n\kappa}(r)$ و $G_{n\kappa}(r)$ در معادلات (۳۹)، به ترتیب، به معادله دیفرانسیل مرتبه دوم شبه شرودینگر برای مولفه بالایی و پایینی می‌رسیم

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\kappa(\kappa+1)}{r^2}+\frac{2\kappa}{r}U(r)-\frac{dU(r)}{dr}-U^2(r)+\frac{\frac{d\Delta(r)}{dr}}{M+E_{n\kappa}-\Delta(r)}\left(\frac{d}{dr}+\frac{\kappa}{r}-U(r)\right)\right]F_{n\kappa}(r)$$
$$=\left[\left(M+E_{n\kappa}-\Delta(r)\right)\left(M-E_{n\kappa}+\Sigma(r)\right)\right]F_{n\kappa}(r) \qquad (۴۱)$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\kappa(\kappa-1)}{r^2}+\frac{2\kappa}{r}U(r)+\frac{dU(r)}{dr}-U^2(r)+\frac{\frac{d\Sigma(r)}{dr}}{M-E_{n\kappa}+\Sigma(r)}\left(\frac{d}{dr}-\frac{\kappa}{r}+U(r)\right)\right]G_{n\kappa}(r)$$
$$=\left[\left(M+E_{n\kappa}-\Delta(r)\right)\left(M-E_{n\kappa}+\Sigma(r)\right)\right]G_{n\kappa}(r) \qquad (۴۲)$$

که $\kappa(\kappa-1)=\tilde{l}\left(\tilde{l}+1\right)$ و $\kappa(\kappa+1)=l(l+1)$.

۵-۳-۲ تقارن شبه اسپینی

در اینجا فرض می‌کنیم که $\Delta(r)$، پتانسیل Eckart و پتانسیل تانسوری از جنس کولنی باشد

$$\Delta(r)=V_1\operatorname{cosech}^2\alpha r-V_2\coth\alpha r \qquad (۴۳)$$

$$U(r)=-\frac{H}{r} \qquad (۴۴)$$

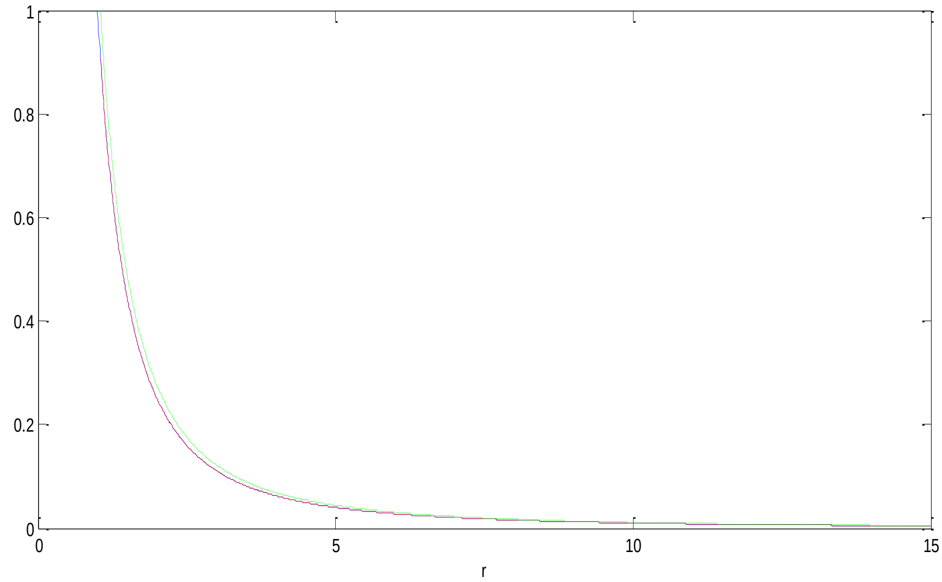
که H یک ثابت بدون بعد می‌باشد. در نتیجه معادله (۴۲) بصورت زیر تبدیل می‌شود

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\kappa(\kappa-1)}{r^2}-\frac{2\kappa H}{r^2}+\frac{H}{r^2}-\frac{H^2}{r^2}\right]G_{n\kappa}(r)$$
$$-\left[\tilde{\gamma}\left(V_1\operatorname{cosech}^2\alpha r+V_2\coth\alpha r\right)-\tilde{\beta}^2\right]G_{n\kappa}(r)=0 \qquad (۴۵)$$

که $\tilde{\gamma}=E_{n\kappa}-M-C_{ps}$ و $\tilde{\beta}^2=\left(M+E_{n\kappa}\right)\left(M-E_{n\kappa}+C_{ps}\right)$. معادله دیفرانسیل فوق بعلت وجود جمله اسپین-مدار دارای حل تحلیلی و دقیق نمی‌باشد. بهمین علت از تقریب زیر استفاده می‌کنیم

$$\frac{1}{r^2}\approx 4\alpha^2\frac{e^{-2\alpha r}}{\left(1-e^{-2\alpha r}\right)^2} \qquad (۴۶)$$

در شکل ۵-۲، تقریب فوق را رسم نموده تا درستی استفاده از آن نشان داده شود.



شکل۵-۲ جمله $1/r^2$ (خط ممتد) و تقریب آن با $\alpha = 0.015$ (خط نقطه) و $\alpha = 0.01$ (خط فاصله).

بنابراین معادله (۴۵) تبدیل می‌شود به

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - 4\Lambda_\kappa\left(\Lambda_\kappa - 1\right)\frac{e^{-2\alpha r}}{\left(1-e^{-2\alpha r}\right)^2} - 4V_1\tilde{\gamma}\frac{e^{-2\alpha r}}{\left(1-e^{-2\alpha r}\right)^2} + V_2\frac{1+e^{-2\alpha r}}{1-e^{-2\alpha r}} - \tilde{\beta}^2\right]G_{n\kappa}(r) = 0 \qquad (۴۷)$$

که $\Lambda_\kappa = \kappa + H$. برای حل معادله دیفرانسیل فوق از روش پارامتری NU استفاده خواهیم کرد که در فصل قبل شرح داده شده است. با تغییر متغیر $s = 1 - e^{-2\alpha r}$، معادله (۴۷) بصورت زیر درمی‌آید

$$\left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{-s}{s(1-s)}\frac{d}{ds}\right]G_{n\kappa}(r) + \frac{1}{\left(s(1-s)\right)^2}\left[-\frac{\tilde{\gamma}V_2}{4}s^2 + \frac{1}{4}\left(2\tilde{\gamma}V_2 - \tilde{V}_1\right)s - \tilde{V}_1 - \frac{\tilde{\beta}^2}{4}\right]G_{n\kappa}(r) = 0 \qquad (۴۸)$$

که

$$\tilde{V}_1 = \tilde{\gamma}V_1 + \alpha^2\Lambda_\kappa\left(\Lambda_\kappa - 1\right) \qquad (۴۹)$$

با مقایسه معادله (۴۸) و معادله (۴-۱۱) ضرائب زیر را بدست می‌آوریم

$$\alpha_1 = 0, \qquad \xi_1 = \frac{\tilde{\gamma} V_2}{4}$$
$$\alpha_2 = 1, \qquad \xi_2 = \frac{1}{4}\left(2\tilde{\gamma} V_2 - \tilde{V}_1\right) \tag{۵۰}$$
$$\alpha_3 = 1, \qquad \xi_3 = \tilde{V}_1 + \frac{\tilde{\beta}^2}{4}$$

و

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}, \qquad \alpha_5 = -\frac{1}{2}$$
$$\alpha_6 = \frac{1}{4}\left(1+\tilde{\gamma} V_2\right), \qquad \alpha_7 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(2\tilde{\gamma} V_2 - \tilde{V}_1\right) \tag{۵۱}$$
$$\alpha_8 = \frac{1}{4} + \tilde{V}_1 + \frac{\tilde{\beta}^2}{4}, \qquad \alpha_9 = \frac{1}{4}\left(5\tilde{V}_1 + \tilde{\beta}^2 - \tilde{\gamma} V_2\right)$$

در نتیجه با جایگذاری روابط فوق در معادله (۴-۲۳)، شکل بسته انرژی بصورت زیر بدست می‌آید [۱۱۰]

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} + \frac{9}{2}\tilde{V}_1 + \frac{\tilde{\beta}^2}{2} - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{5\tilde{V}_1 + \tilde{\beta}^2 - \tilde{\gamma} V_2} - \sqrt{1+4\tilde{V} + \tilde{\beta}^2}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{\left(5\tilde{V}_1 + \tilde{\beta}^2 - \tilde{\gamma} V_2\right)\left(1+4\tilde{V} + \tilde{\beta}^2\right)} = 0 \tag{۵۲}$$

و برای تابع موج نیز از روابط فوق و معادله (۴-۳۰) داریم

$$G_{n\kappa}(s) = s^{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1+4\tilde{V}+\tilde{\beta}^2}\right)} (1-s)^{\frac{1}{2}\sqrt{5\tilde{V}_1+\tilde{\beta}^2-\tilde{\gamma} V_2}}\, P_n^{\left(-\sqrt{1+4\tilde{V}+\tilde{\beta}^2},\, \sqrt{5\tilde{V}_1+\tilde{\beta}^2-\tilde{\gamma} V_2}\right)}(1-2s) \tag{۵۳}$$

مولفه بالایی دیراک نیز از معادله (۳۹ب) بصورت زیر بدست می‌آید

$$F_{n\kappa}(r) = \frac{1}{M - E_{n\kappa} + C_{ps}}\left(\frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r} + U(r)\right) G_{n\kappa}(r) \tag{۵۴}$$

که $E \neq M + C_{ps}$ و فقط ویژه مقادیر منفی بدست می‌آیند. در جدول ۵-۵ و ۵-۶، برخی محاسبات عددی ویـژه مقادیر انرژی رابطه (۵۲) محاسبه شده‌اند. ضرایب پتانسیل عبارتنـد از: $\alpha = 0.015$، $V_1 = 0.001$، $V_2 = 0.01$ و همچنین $M = 1$ و $C_{ps} = -4$. در جدول ۵-۵ ضـریب پتانسـیل تانسـوری را $H = 1$ و در جـدول ۵-۶ ایـن ضریب را $H = 5$ درنظر گرفتیم و با حالتی که پتانسیل تانسوری وجود ندارد ($H = 0$)، مقایسه کردیم.

جدول۵-۵ ویژه مقادیر انرژی پتانسیل Eckart در حالت تقارن شبه اسپینی

$\tilde{l}$	$n,\kappa \prec 0$	(l,j)	$E_{n,\kappa \prec 0}$ Present work	$E_{n,\kappa \prec 0}$ Ref. [۴۴] $H=0$	$n-1,\kappa \succ 0$	$(l+2,j+1)$	$E_{n-1,\kappa \succ 0}$ Present work	$E_{n-1,\kappa \succ 0}$ Ref. [۴۴] $H=0$
1	1, -1	$1s_{1/2}$	-2.999746	-2.999369	0, 2	$0d_{3/2}$	-2.998416	-2.999369
2	1, -2	$1p_{3/2}$	-2.999199	-2.999102	0, 3	$0f_{5/2}$	-2.997405	-2.999102
3	1, -3	$1d_{5/2}$	-2.998416	-2.998771	0, 4	$0g_{7/2}$	-2.996165	-2.998771
4	1, -4	$1f_{7/2}$	-2.997405	-2.998380	0, 5	$0h_{9/2}$	-2.994698	-2.998380
1	2, -1	$2s_{1/2}$	-2.999193	-2.992722	1, 2	$1d_{3/2}$	-2.997401799	-2.992722
2	2, -2	$2p_{3/2}$	-2.998413	-2.998352	1, 3	$1d_{3/2}$	-2.996162	-2.998352
3	2, -3	$2d_{5/2}$	-2.997402	-2.997103	1, 4	$1g_{7/2}$	-2.994695	-2.997103
4	2, -4	$2f_{7/2}$	-2.996162	-2.997411	1, 5	$1h_{9/2}$	-2.992999	-2.997411

جدول ۵-۶ ویژه مقادیر انرژی پتانسیل Eckart در حالت تقارن شبه اسپینی

$\tilde{l}$	$n,\kappa \prec 0$	(l,j)	$E_{n,\kappa\prec 0}$ Present work	$E_{n,\kappa\prec 0}$ Ref. [۴۴] $H=0$	$n-1,\kappa \succ 0$	$(l+2, j+1)$	$E_{n-1,\kappa\succ 0}$ Present work	$E_{n-1,\kappa\succ 0}$ Ref. [۴۴] $H=0$
1	1, -1	$1s_{1/2}$	−2.997405	-2.999369	0, 2	$0d_{3/2}$	−2.993002	-2.999369
2	1, -2	$1p_{3/2}$	−2.998416	-2.999102	0, 3	$0f_{5/2}$	−2.991076	-2.999102
3	1, -3	$1d_{5/2}$	−2.999198	-2.998771	0, 4	$0g_{7/2}$	−2.988919	-2.998771
4	1, -4	$1f_{7/2}$	−2.999746	-2.998380	0, 5	$0h_{9/2}$	−2.986529	-2.998380
1	2, -1	$2s_{1/2}$	−2.996162	-2.992722	1, 2	$1d_{3/2}$	−2.991072	-2.992722
2	2, -2	$2p_{3/2}$	−2.997402	-2.998352	1, 3	$1d_{3/2}$	−2.988915	-2.998352
3	2, -3	$2d_{5/2}$	−2.998413	-2.997103	1, 4	$1g_{7/2}$	−2.986525	-2.997103
4	2, -4	$2f_{7/2}$	−2.999193	-2.997411	1, 5	$1h_{9/2}$	−2.983901	-2.997411

همانطوریکـه از جـدول‌هـای فـوق مشـاهده مـی‌کنـیم، تبهگنـی بـین جفـت‌هـای شـبه اسـپینی $\left(1s_{1/2}, 0d_{3/2}\right)$، $\left(1p_{3/2}, 0f_{5/2}\right)$، $\left(1d_{5/2}, 0g_{7/2}\right)$، ... در حضور پتانسیل تانسوری از بین رفته است [۱۱۰].

۴-۵ پتانسیل Killingbeck

یکی دیگر از پتانسیل‌های پرکاربرد در فیزیـک هسـته‌ای و ذرات بنیـادی پتانسـیل Killingbeck مـی‌باشـد. ایـن پتانسیل از سه جمله کولنی، خطی و نوسانگر هماهنگ به فرم زیر تشکیل شده است

$$V\left(r\right)=ar^2+br-\frac{c}{r} \tag{۵۵}$$

با جایگذاری پتانسیل فوق در معادله دیراک در حالت تقارن اسپینی خواهیم داشت

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\kappa(\kappa+1)}{r^2}-\left(M^2-E^2-\left(M-E\right)\left(ar^2+br-\frac{c}{r}\right)\right)\right]F_{n\kappa}\left(r\right)=0 \tag{۵۶}$$

معادله فوق برای مولفه بالایی دیراک دارای حل دقیق نمی‌باشد. برای حل این گونه معادلات از روش حدسی استفاده می‌کنیم. در ابتدا تابع موج را بصورت زیر در نظر می‌گیریم

$$F_{n\kappa}(r)=p_n(r)\exp\left[g(r)\right] \tag{۵۷}$$

که در آن

$$p_n(r)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\left(r-\alpha_i^n\right) & n=1,2,3,\ldots\\ 1 & n=0\end{cases} \tag{۵۸}$$
$$g(r)=-\frac{1}{2}\alpha r^2+\beta r+\delta\ln r$$

α و δ ضرایب ثابت و مثبت هستند. از معادله (۵۷) خواهیم داشت

$$\frac{d^2F_{n\kappa}}{dr^2}=F''_{n\kappa}(r)=\left(g''(r)+g'^2(r)+\frac{p''_n(r)+2p'_n(r)g'(r)}{p_n(r)}\right)F_{n\kappa}(r) \tag{۵۹}$$

برای حالت $n=0$ بدست می‌آوریم

$$\frac{d^2F_{0\kappa}}{dr^2}=-\alpha-\frac{\delta}{r^2}+\alpha^2r^2+\beta^2+\frac{\delta^2}{r^2}-2\alpha\delta-2\alpha\beta r+\frac{2\delta\beta}{r} \tag{۶۰}$$

با جایگذاری معادله فوق در معادله (۵۶) و مساوی قرار دادن ضرایب r خواهیم داشت [۱۱۱]

$$\alpha=\sqrt{a(E-M)} \tag{۶۱الف}$$

$$(M-E)c=2\delta\beta \tag{۶۱ب}$$

$$(M-E)b=2\alpha\beta \tag{۶۱ج}$$

$$\delta^2-\delta-\kappa(\kappa+1)=0\Rightarrow\begin{cases}\delta=-\kappa\\ \delta=\kappa+1\end{cases} \tag{۶۱د}$$

$$E^2-M^2=\alpha(1+2\delta)-\beta^2 \tag{۶۱ه}$$

با توجه به شرایط مرزی در مبدا و بی‌نهایت، $\delta=\kappa+1$ را انتخاب می‌کنیم. بنابراین شرط محدود کننده روی ضرائب پتانسیل را بصورت زیر پیدا می‌کنیم

$$c=\frac{(\kappa+1)b}{\sqrt{(E-M)a}} \tag{۶۲}$$

از معادله فوق و معادلات (۶۱)،به ویژه مقادیر انرژی را برای حالت پایه $n=0$ بصورت زیر می‌رسیم[۱۱۱]

$$\sqrt{E_{0\kappa}-M}\left(E_{0\kappa}+M\right)=\sqrt{a}\left(2\kappa+3\right)-\frac{c}{2\kappa+1} \qquad (۶۳)$$

همچنین، ویژه توابع در حالت پایه برای مولفه بالایی بصورت زیر داده می‌شود [۱۱۱]

$$F_{0\kappa}\left(r\right)=N_{0\kappa}r^{\kappa+1}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{E_{0\kappa}-M}{a}}\left(ar^{2}+br\right)} \qquad (۶۴)$$

که $N_{0\kappa}$ ثابت نرمالیزاسیون می‌باشد و مولفه پایینی $G_{0\kappa}$ در حالت پایه از رابطه زیر بدست می‌آید

$$G_{0\kappa}=\frac{1}{M+E_{0\kappa}}\left(\frac{d}{dr}+\frac{\kappa}{r}\right)F_{0k} \qquad (۶۵)$$

۵-۵ پتانسیل شبه هارمونیک در حضور پتانسیل‌های تانسوری خطی و کولنی

پتانسیل شبه هارمونیک بصورت زیر تعریف می‌شود

$$V\left(r\right)=D_e\left(\frac{r}{r_e}-\frac{r_e}{r}\right)^2, \qquad (۶۶)$$

که در آن D_e و r_e ضرائب جایی انرژی و نقطه تعادل بترتیب می‌باشند. شکل ساده این پتانسیل بصورت زیر مـی-باشد

$$V\left(r\right)=Ar^2+\frac{B}{r^2}+C, \qquad (۶۷)$$

که در آن

$$A=\frac{D_e}{r_e^2}, \quad B=D_e r_e^2, \quad C=-2D_e. \qquad (۶۸)$$

۵-۵-۱ تقارن شبه اسپینی

در این بخش، اختلاف پتانسیل‌های اسکالر و برداری را بعنوان پتانسیل شبه هارمونیک و همچنین قســمت تانسـوری را مجموع پتانسیل‌های خطی و کولنی در نظر می‌گیریم

$$\Delta\left(r\right)=Ar^2+\frac{B}{r^2}+C, \qquad (۶۹)$$

$$U\left(r\right)=-\frac{H}{r}+\sigma r, \qquad (۷۰)$$

که در آن H و σ ضرائب ثابت می‌باشند. با جایگذاری پتانسیل‌های فوق در معادله شرودینگرگونه برای مولفه پایینی خواهیم داشت

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\kappa(\kappa-1)}{r^2}-\frac{2\kappa H}{r^2}+\frac{H}{r^2}-\frac{H^2}{r^2}-\sigma r^2+\sigma(2\kappa+2H+1)\right]G_{n\kappa}(r) = \left[\tilde{\gamma}\left(Ar^2+\frac{B}{r^2}+C\right)+\tilde{\beta}^2\right]G_{n\kappa}(r), \tag{۷۱}$$

که $\tilde{\gamma}=E_{n\kappa}-M-C_{ps}$ و $\tilde{\beta}^2=\left(M+E_{n\kappa}\right)\left(M-E_{n\kappa}+C_{ps}\right)$. با تغییر متغیر $s=r^2$، رابطه فوق بصورت زیر بازنویسی می‌شود

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{2s}\frac{d}{ds}-\frac{1}{4s^2}\left(\tilde{p}^2s^2+\tilde{q}s+\tilde{\delta}\right)\right]G_{n\kappa}=0, \tag{۷۲}$$

که

$$\begin{aligned}
&\tilde{p}^2=\sigma^2+\tilde{\gamma}A,\\
&\tilde{q}=\tilde{\beta}^2+\tilde{\gamma}C-\sigma(2\kappa+2H+1),\\
&\tilde{\delta}=\Lambda_\kappa(\Lambda_\kappa-1)+\tilde{\gamma}B,\ \ \Lambda_\kappa=\kappa+H\ .
\end{aligned} \tag{۷۳}$$

چند جمله‌ای های زیر طبق روش NU تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned}
&\tilde{\tau}(s)=1,\\
&\sigma(s)=2s,\\
&\tilde{\sigma}(s)=-\left(\tilde{p}^2s^2+\tilde{q}s+\tilde{\delta}\right).
\end{aligned} \tag{۷۴}$$

و تابع $\pi(s)$ بصورت زیر بدست می‌آید

$$\pi(s)=\begin{cases}\frac{1}{2}\pm\left(\tilde{p}s+\sqrt{\tilde{\delta}+\frac{1}{4}}\right) & for \quad k=-\frac{\tilde{q}}{2}+\frac{\tilde{p}}{2}\sqrt{4\tilde{\delta}+1}\\ \frac{1}{2}\pm\left(\tilde{p}s-\sqrt{\tilde{\delta}+\frac{1}{4}}\right) & for \quad k=-\frac{\tilde{q}}{2}-\frac{\tilde{p}}{2}\sqrt{4\tilde{\delta}+1}\end{cases}, \tag{۷۵}$$

از آنجایی که مشتق $\tau(s)$ منفی باید باشد، $\pi(s)$ را بصورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$\pi(s)=\frac{1}{2}\pm\left(\tilde{p}s-\sqrt{\tilde{\delta}+\frac{1}{4}}\right) \quad for \quad k=-\frac{\tilde{q}}{2}-\frac{\tilde{p}}{2}\sqrt{4\tilde{\delta}+1}. \tag{۷۶}$$

و $\tau(s)$ بصورت زیر بدست می‌آید

$$\tau(s)=2-2\tilde{p}s+\sqrt{\tilde{\delta}+\frac{1}{4}}, \tag{۷۷}$$

برای محاسبه ویژه مقادیر، ضرائب λ را بصورت زیر بدست می‌آوریم

$$\lambda=\lambda_n=-n\tau'(s)-\frac{n(n-1)}{2}\sigma''(s)=2\tilde{p}n, \tag{۷۸الف}$$

$$\lambda=k+\pi'(s)=-\frac{\tilde{q}}{2}-\frac{\tilde{p}}{2}\sqrt{4\tilde{\delta}+1}-\tilde{p}. \tag{۷۸ب}$$

درنتیجه، شکل بسته تابع ویژه مقادیر انرژی بصورت زیر بدست می‌آید [۱۱۲]

$$\tilde{p}\left(4n+2+\sqrt{4\tilde{\delta}+1}\right)+\tilde{q}=0. \tag{۷۹}$$

برای بدست آوردن ویژه توابع در حالت تقارن شبه اسپینی، ابتدا تابع وزن را پیدا می‌کنیم

$$\rho(s)=e^{-\tilde{p}s}s^{\sqrt{\tilde{\delta}+1/4}} \tag{۸۰}$$

سپس با جایگذاری تابع وزن در رابطه رودریگوز، قسمت اول تابع موج را بصورت زیر بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} y_n(s)&=\frac{B_n}{\rho(s)}\frac{d^n}{ds^n}\left[\sigma^n(s)\rho(s)\right]\\ &=\frac{B_n}{e^{-\tilde{p}s}s^{\sqrt{\tilde{\delta}+1/4}}}\frac{d^n}{ds^n}\left[(2s)^n e^{-\tilde{p}s}s^{\sqrt{\tilde{\delta}+1/4}}\right]=B_nL_n^{\sqrt{\tilde{\delta}+1/4}}(\tilde{p}s), \end{aligned} \tag{۸۱}$$

که در آن B_n ثابت نرمالیزاسیون و $L_n^k(x)$ چندجمله‌ای لاگر وابسته می‌باشند. برای قسمت دوم تابع موج بدست می‌آوریم

$$\phi(s)=e^{-\frac{\tilde{p}}{2}s}s^{\frac{1}{4}(1+\sqrt{4\tilde{\delta}+1})}, \tag{۸۲}$$

سرانجام، مولفه کوچک اسپینور دیراک بصورت زیر بدست می‌آید که از $s=r^2$ استفاده کردیم

$$G_{n\kappa}=\phi(r)y_n(r)=\tilde{D}_{n\kappa}e^{-\frac{\tilde{p}}{2}r^2}r^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{4\tilde{\delta}+1})}L_n^{\sqrt{\tilde{\delta}+\frac{1}{4}}}(\tilde{p}r^2), \tag{۸۳}$$

که در آن $\tilde{D}_{nk}$ ثابت نرمالیزاسیون جدید می‌باشد و بصورت زیر تعیین می‌شود

$$\tilde{D}_{nk} = \sqrt{\frac{2\tilde{p}^{\left(1+\frac{1}{4}\sqrt{4\tilde{\delta}+1}\right)} n!}{\left(n+\frac{1}{4}\sqrt{4\tilde{\delta}+1}\right)!}}, \tag{۸۴}$$

مولفه بزرگ اسپینور دیراک بصورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} F_{n\kappa}(r) &= \frac{1}{M - E_{n\kappa} + C_{ps}}\left(\frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r} + U(r)\right)G_{n\kappa}(r) = \frac{\tilde{D}_{n\kappa}}{M - E_{n\kappa} + C_{ps}} \\ &\times\left(-\tilde{p}r + \frac{1/2(1+\sqrt{4\tilde{\delta}+1}) - \kappa - H}{r} + \sigma r\right)e^{-\frac{\tilde{p}}{2}r^2} r^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{4\tilde{\delta}+1})} L_n^{\sqrt{\tilde{\delta}+\frac{1}{4}}}(\tilde{p}r^2) \\ &- \frac{2\tilde{D}_{n\kappa}\tilde{p}r}{M - E_{n\kappa} + C_{ps}} e^{-\frac{\tilde{p}}{2}r^2} r^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{4\tilde{\delta}+1})} L_{n-1}^{\sqrt{\tilde{\delta}+\frac{1}{4}}}(\tilde{p}r^2), \end{aligned} \tag{۸۵}$$

که در آن $E_{n\kappa} \neq M + C_{ps}$.

۵-۵-۲ تقارن اسپینی

در حد تقار اسپینی، معادله شرودینگرگونه برای مولفه بالایی دیراک با پتانسیل شبه هارمونیک و پتانسیل‌های تانسوری خطی و کولنی بصورت زید در می‌آید

$$\begin{aligned} &\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\kappa(\kappa+1)}{r^2} - \frac{2\kappa H}{r^2} - \frac{H}{r^2} - \frac{H^2}{r^2} + \sigma(2\kappa + 2H - 1)\right]F_{n\kappa}(r) \\ &\qquad = \left[\gamma\left(Ar^2 + \frac{B}{r^2} + C\right) + \beta^2\right]F_{n\kappa}(r), \end{aligned} \tag{۸۶}$$

که در آن $\gamma = M + E_{n\kappa} - C_s$ و $\beta^2 = (M - E_{n\kappa})(M + E_{n\kappa} - C_s)$. برای حل معادله فوق و همچنین برای جلو گیری از تکرار، شکل بسته رابطه انرژی در حالت اسپینی بصورت زیر بدست می‌آید [۱۱۲]

$$p\left(4n + 2 + \sqrt{4\delta+1}\right) + q = 0, \tag{۸۷}$$

و ویژه توابع مولفه بالایی بصورت زیر خواهند شد

$$F_{n\kappa} = D_{n\kappa} e^{-\frac{p}{2}r^2} r^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{4\delta+1})} L_n^{\sqrt{\delta+\frac{1}{4}}}(pr^2), \tag{۸۸}$$

که در آن

$$\begin{aligned} p^2 &= \sigma^2 + \gamma A, \\ q &= \beta^2 + \gamma C - \sigma(2\kappa + 2H - 1), \\ \delta &= \eta_\kappa(\eta_\kappa - 1) + \gamma B,\ \ \eta_\kappa = \kappa + H + 1, \end{aligned} \tag{۸۹}$$

و ثابت نرمالیزاسیون D_{nk} طبق رابطه زیر داده می‌شود

$$D_{nk}=\sqrt{\frac{2p^{\left(1+\frac{1}{4}\sqrt{4\delta+1}\right)}n!}{\left(n+\frac{1}{4}\sqrt{4\delta+1}\right)!}}. \qquad (۹۰)$$

مولفه پایینی اسپینور دیراک نیز از رابطه زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned}G_{n\kappa}(r)&=\frac{1}{M+E_{n\kappa}-C_s}\left(\frac{d}{dr}+\frac{\kappa}{r}-U(r)\right)F_{n\kappa}(r)=\frac{D_{nk}}{M+E_{n\kappa}-C_s}\\&\times\left(-pr+\frac{1/2(1+\sqrt{4\delta+1})+\kappa+H}{r}-\sigma r\right)e^{-\frac{p}{2}r^2}r^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{4\delta+1})}L_n^{\sqrt{\delta+\frac{1}{4}}}(pr^2) \qquad (۹۱)\\&-\frac{2D_{nk}pr}{M+E_{n\kappa}-C_s}e^{-\frac{p}{2}r^2}r^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{4\delta+1})}L_{n-1}^{\sqrt{\tilde{\delta}+\frac{1}{4}}}(pr^2),\end{aligned}$$

که $E_{n\kappa}\neq -M-C_s$.

پتانسیل تانسوری یک جمله اسپین-مدار جدید $\Lambda(\Lambda\pm 1)$ تولید می کند که $\Lambda=\Lambda_\kappa$ یا η_κ. نتایج ما در این بخش در غیاب پتانسیل تانسوری کولنی $H=0$، به نتایج مراجع [17, 44] تبدیل می‌شوند

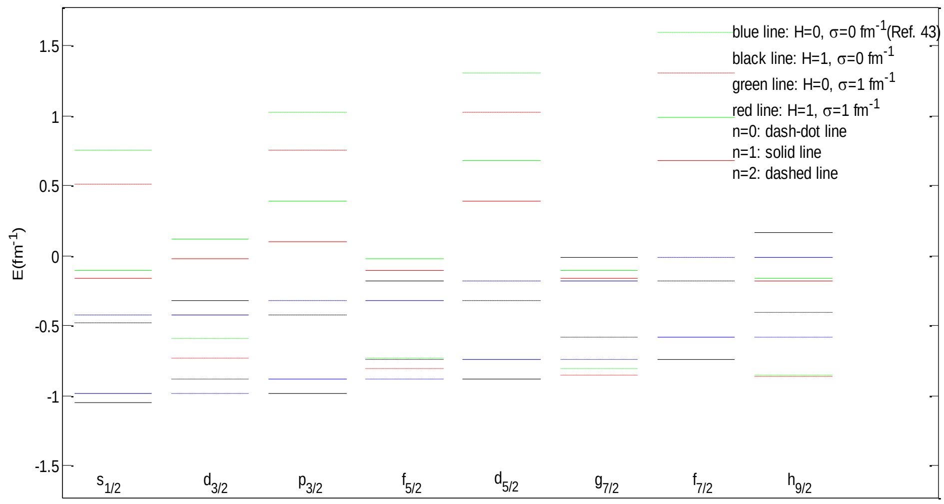
$$\sqrt{\sigma^2+\tilde{\gamma}A}\left(4n+2+\sqrt{(2\kappa-1)^2+4\tilde{\gamma}B}\right)-\tilde{\gamma}\left(E_{n\kappa}+M-C\right)-2\kappa\sigma-\sigma=0, \qquad (۹۲)$$

در غیاب پتانسیل‌های تانسوری $H=\sigma=0$، نتایج معادله دیراک برای پتانسیل شبه هارمونیک را خواهیم داشت که با نتایج دیگران یکسان می‌باشند [۱۱۳]

$$\begin{aligned}&A\left(2+4n+\sqrt{(2\kappa-1)^2+4(E_{n\kappa}-M-C_{ps})B}\right)^2\\&\quad-(E_{n\kappa}-M-C_{ps})(E_{n\kappa}+M-C)^2=0\end{aligned} \qquad (\text{۹۳الف})$$

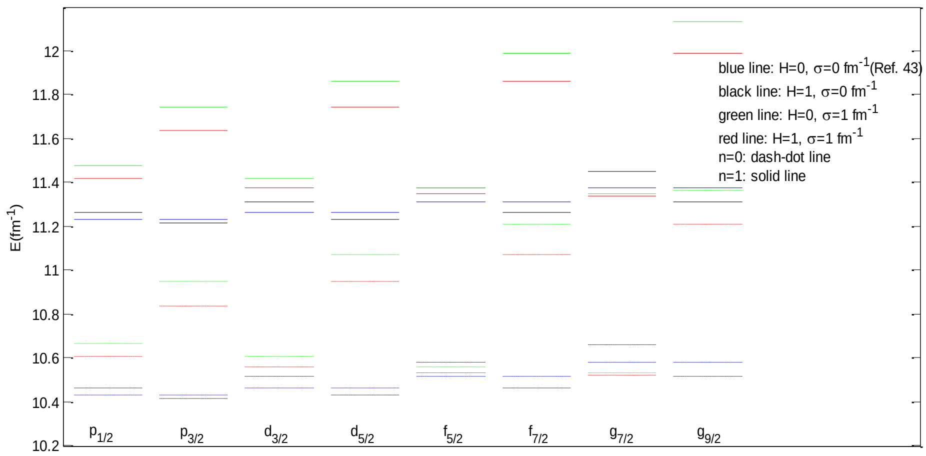
$$\begin{aligned}&A\left(2+4n+\sqrt{(2\kappa+1)^2+4(E_{n\kappa}+M-C_{ps})B}\right)^2\\&\quad-(E_{n\kappa}+M-C_{ps})(E_{n\kappa}-M+C)^2=0.\end{aligned} \qquad (\text{۹۳ب})$$

نتایج عددی این بخش در شکل‌های ۵-۳ و ۵-۴ نمایش داده شده‌اند که از ضرائب $M=10fm^{-1}$، $D_e=5fm^{-1}$، $r_e=2.4fm$، $C_{ps}=-11.45fm^{-1}$ و $C_s=0fm^{-1}$ استفاده کردیم [۱۱۳]. در شکل ۵-۳، جفت‌های شبه اسپینی $\left(1s_{1/2},0d_{3/2}\right)$، $\left(1p_{3/2},0f_{5/2}\right)$، $\left(1d_{5/2},0g_{7/2}\right)$، $\left(1f_{7/2},0h_{9/2}\right)$، ... را بررسی نمودیم [۱۱۲].



شکل ۵-۳ ویژه مقادیر انرژی پتانسیل شبه هارمونیک در حالت تقارن شبه اسپینی برای مقادیر مختلف n و κ .

در شکل ۵-۴، جفت های اسپینی $(0p_{1/2},0p_{3/2})$، $(0d_{3/2},0d_{5/2})$، $(0f_{5/2},0f_{7/2})$، $(0g_{7/2},0g_{9/2})$، ... را بررسی نمودیم. همانطو که در شکل‌ها قابل مشاهده است، پتانسیل تانسوری تبهگنی را از بین می‌برد. همچنین، در غیاب پتانسیل تانسوری خطی، یعنی $\sigma=0$ و $H\neq 0$، سطوح انرژی در خلاف جهت اسپین رانده می‌شوند. برای مثال، در جفت شبه اسپینی $(1s_{1/2},0d_{3/2})$، هنگامیکه $H=\sigma=0$، داریم $E_{1,-1}=E_{1,2}=-0.985845fm^{-1}$، ولی هنگامیکه $H=1$ و $\sigma=0$، داریم $E_{1,-1}=-1.050263fm^{-1}$ برای $\kappa<0$ و $E_{1,2}=-0.876620fm^{-1}$ برای $\kappa>0$ [112].



شکل ۵-۴ ویژه مقادیر انرژی پتانسیل شبه هارمونیک در حالت تقارن اسپینی برای مقادیر مختلف n و κ .

۶-۵ پتانسیل Hartmann

پتانسیل Hartmann یک پتانسیل فیزیکی غیرمرکزی می‌باشد که در مختصات کروی (r,θ,ϕ) بصورت زیر داده می‌شود

$$V_q(r,\theta)=\eta\sigma^2\left(\frac{2a_0}{r}-q\eta\frac{a_0^2}{r^2\sin^2\theta}\right)\varepsilon_0 \qquad (۹۴)$$

که در آن $a_0=\frac{\hbar^2}{Me^2}$ و $\varepsilon_0=-\frac{Me^4}{2\hbar^2}$ شعاع بوهر و انرژی پایه اتم هیدروژن بترتیب می‌باشند. η و σ ضرائب ثابت حقیقی مثبت و q ضریب حقیقی می‌باشند. هنگامیکه $q=0$ و $\eta\sigma^2=Z$، پتانسیل مذکور به پتانسیل کولنی تبدیل می‌شود.

معادله دیراک با پتانسیل Hartmann برای مولفه بالایی در مختصات کروی بصورت زیر نوشته می‌شود

$$\left[-\nabla^2-2(M+E)\eta\sigma^2|\varepsilon_0|\left(\frac{2a_0}{r}-\frac{q\eta a_0^2}{r^2\sin^2\theta}\right)\right]\varphi(r,\theta,\phi)=\left[E^2-M^2\right]\varphi(r,\theta,\phi) \qquad (۹۵)$$

و مولفه پایینی نیز بصورت بدست می‌آید

$$\chi(\vec{r})=\frac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{E+M}\varphi(\vec{r}) \qquad (۹۶)$$

ابتدا، تغییر متغیر زیر را در نظر می‌گیریم

$$\varphi(r,\theta,\phi)=\frac{u(r)}{r}H(\theta)\Phi(\phi) \qquad (۹۷)$$

و با جداسازی متغیرها در معادله (۹۵) خواهیم داشت

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2}+\left\{\left(E^2-M^2\right)+\frac{2(M+E)\eta\sigma^2}{Ma_0}\frac{1}{r}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right\}u(r)=0 \qquad (\text{الف}۹۸)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dH(\theta)}{d\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{\frac{(M+E)q\eta^2\sigma^2}{M}+m^2}{\sin^2\theta}\right]H(\theta)=0 \qquad (\text{ب}۹۸)$$

$$\frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2}+m^2\Phi(\phi)=0 \qquad (\text{ج}۹۸)$$

که $l=0,1,2,\ldots$. حل معادله (۹۸ج) بصورت زیر می‌باشد

$$\Phi_m(\phi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\phi}\qquad m=0,\pm1,\pm2,\ldots \tag{۹۹}$$

۵-۶-۱ حل قسمت شعاعی

برای حل قسمت شعاعی، معادله (۹۸الف)، ابتدا پارامترهای زیر را معرفی می‌کنیم

$$\begin{aligned}
A&=-\frac{2(M+E)\eta\sigma^2}{Ma_0}\\
B&=\frac{(M+E)q\eta^2\sigma^2}{M}\\
m'^2&=m^2+B\\
\varepsilon^2&=M^2-E^2
\end{aligned} \tag{۱۰۰}$$

بنابراین معادله (۹۸الف) به فرم زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2}+\left(-\varepsilon^2-\frac{A}{r}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)u(r)=0 \tag{۱۰۱}$$

و یا بطور معادل

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2}-\left(\frac{\varepsilon^2r^2+Ar+l(l+1)}{r^2}\right)u(r)=0 \tag{۱۰۲}$$

با استفاده از شباهت رابطه فوق با معادله اتم هیدروژن، ویژه مقادیر انرژی بصورت زیر داده می‌شوند [۱۱۴]

$$\begin{aligned}
E_{nl}&=M\,\frac{M^2a_0^2(n+l+1)^2-\eta^2\sigma^4}{M^2a_0^2(n+l+1)^2+\eta^2\sigma^4}\\
&=M\,\frac{(n+l+1)^2-2\eta^2\sigma^4\frac{|\varepsilon_0|}{M}}{(n+l+1)^2-2\eta^2\sigma^4\frac{|\varepsilon_0|}{M}}=M\,\frac{M(n+l+1)^2-2Z^2|\varepsilon_0|}{M(n+l+1)^2+2Z^2|\varepsilon_0|}
\end{aligned} \tag{۱۰۳}$$

که در آن $a_0=\frac{1}{Me^2}$، $Z=\eta\sigma^2$ و $|\varepsilon_0|=\frac{Me^4}{2}$. همچنین، تابع موج $u(r)$ بصورت زیر داده می‌شود

$$u(r)=C_{nl}r^{l+1}e^{-\sqrt{M^2-E^2}r}L_n^{2l+1}\left(2\sqrt{M^2-E^2}r\right) \tag{۱۰۴}$$

و ثابت نرمالیزاسیون C_{nl} بصورت زیر می‌باشد

$$C_{nl}=\left(\frac{\sqrt{M^2-E^2}}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{(n-l-1)!}{n\Gamma(n+l+1)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2\sqrt{M^2-E^2}}{n}\right)^{l+1} \tag{۱۰۵}$$

۵-۶-۲ حل قسمت زاویه‌ای

برای بدست آوردن حل قسمت زاویه‌ای از تغییر متغیر $s=\cos\theta$ استفاده می‌کنیم و معادله (۹۸ب) بـه فـرم زیـر تبدیل می‌شود

$$\frac{d^2H(s)}{ds^2}+\frac{-2s}{1-s^2}\frac{dH(s)}{ds}+\frac{1}{(1-s^2)^2}\left(-l(l+1)s^2+l(l+1)-m'^2\right)H(s)=0 \qquad (۱۰۶)$$

در مقایسه با روش NU، چندجمله‌ایهای زیر قابل استنتاج هستند

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}(s)&=-2s\\ \sigma(s)&=1-s^2\\ \tilde{\sigma}(s)&=-l(l+1)s^2+l(l+1)-m'^2\end{aligned} \qquad (۱۰۷)$$

و تابع $\pi(s)$ بصورت زیر بدست می‌آید

$$\pi(s)=\begin{cases}\pm m's & for \quad k=l(l+1)-m'^2\\ \pm m' & for \quad k=l(l+1)\end{cases} \qquad (۱۰۸)$$

و همچنین تابع $\tau(s)=\tilde{\tau}(s)+2\pi(s)$

$$\tau(s)=-2(1+m')s \qquad (۱۰۹)$$

در نهایت ثابت‌های λ برای محاسبه ویژه مقادیر شعاعی بصورت زیر محاسبه می‌شوند

$$\lambda=k+\pi'(s)=l(l+1)-m'(m'+1) \qquad (۱۱۰الف)$$

$$\lambda_{\tilde{n}}=-\tilde{n}\tau'(s)-\frac{\tilde{n}(\tilde{n}-1)}{2}\sigma''(s)=2\tilde{n}(1+m')+\tilde{n}(\tilde{n}-1) \qquad (۱۱۰ب)$$

که $\tilde{n}$ عدد صحیح غیر منفی می‌باشد. با تساوی دو رابطه فوق بدست می‌آوریم

$$l(l+1)=m'(m'+1)+2\tilde{n}m'+\tilde{n}(\tilde{n}+1) \qquad (۱۱۱)$$

یا

$$l=\tilde{n}+m'=\tilde{n}+\sqrt{m^2+B} \qquad (۱۱۲)$$

اگر رابطه فوق را در معادله (۱۰۳) جایگذاری کنیم، ویژه مقادیر انرژی پتانسیل Hartmann را بصورت زیـر بدسـت می‌آوریم[۱۱۴]

$$E_{n\tilde{n}m}=M\frac{M^2a_0^2\left(n+\sqrt{m^2+B}+\tilde{n}+1\right)^2-Z^2}{M^2a_0^2\left(n+\sqrt{m^2+B}+\tilde{n}+1\right)^2+Z^2} \tag{۱۱۳}$$

هنگامیکه $q=0$، یا بطور معادل $B=0$، $m'=m$، $l=\tilde{n}+m$ و $n'=n+l+1=1,2,3,...$، پتانسیل Hartmann به پتانسیل کولنی تبدیل می‌شود و ویژه مقادیر آن نیز به رابطه زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{aligned}E_{(Coulomb)}&=M\frac{M^2a_0^2n'^2-Z^2}{M^2a_0^2n'^2+Z^2}\\&=M\frac{n'^2-Z^2\alpha^2}{n'^2+Z^2\alpha^2}\end{aligned} \tag{۱۱۴}$$

که در آن $\alpha=e^2$ (در واحد $\hbar=c=1$) ثابت ساختار ریز می‌باشد. همچنین برای ویژه توابع شعاعی بدست می-آوریم

$$H_{nm'}(s)=N_{nm'}\left(1-s^2\right)^{m'}P_n^{(m',m')}(s) \tag{۱۱۵}$$

که $N_{nm'}$ ثابت نرمالیزاسیون توسط رابطه زیر بدست می‌آید

$$\int_{-1}^{+1}\left[H_{nm'}(s)\right]^2ds=1 \tag{۱۱۷}$$

بطوریکه خواهیم داشت

$$N_{nm'}=\sqrt{\frac{(2n+2m')\Gamma(n+1)\Gamma(n+2m'+1)}{2^{2m'+1}\Gamma(n+m'+1)\Gamma(n+m'+1)}} \tag{۱۱۸}$$

در انتها، تابع بصورت زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r})&=\frac{u(r)}{r}H(\theta)\Phi(\phi)\\&=\frac{C}{\sqrt{2\pi}}r^le^{-\sqrt{M^2-E^2}r}L_n^{2l+1}\left(2\sqrt{M^2-E^2}r\right)(\sin\theta)^{m'}P_n^{(m',m')}(\cos\theta)e^{im\phi}\end{aligned} \tag{۱۱۹}$$

سرانجام، اسپینور دیراک برای پتانسیل Hartmann بصورت زیر نوشته می‌شود [۱۱۴]

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{r})=\begin{pmatrix}\varphi(\vec{r})\\ \chi(\vec{r})\end{pmatrix}&=\frac{C_{nm'}}{\sqrt{2\pi}}\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{E+M}\end{pmatrix}r^le^{-\sqrt{M^2-E^2}r}\\&\times L_n^{2l+1}\left(2\sqrt{M^2-E^2}r\right)(\sin\theta)^{m'}P_n^{(m',m')}(\cos\theta)e^{im\phi}\end{aligned} \tag{۱۲۰}$$

همچنین شرایط مرزی $u(0)=u(\infty)=0$، $H(0)=H(\pi)=0$ و $\Phi(\phi+2\pi)=\Phi(\phi)$ قابل مشاهده می‌باشند.

۷-۵ پتانسیل کولنی با جرم وابسته به مکان و پتانسیل تانسوری

معادلات شرودینگر گونه دیراک در حضور پتانسیل‌های تانسوری و جرم متغیر بصورت زیر در می‌آیند [۱۱۴]

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\kappa(\kappa+1)}{r^2}+\frac{2\kappa}{r}U(r)-\frac{dU(r)}{dr}-U^2(r)-\frac{\left(\frac{dm(r)}{dr}-\frac{d\Delta(r)}{dr}\right)}{m(r)+E_{n\kappa}-\Delta(r)}\left(\frac{d}{dr}+\frac{\kappa}{r}-U(r)\right)\right]F_{n\kappa}(r)$$
$$=\left[\left(m(r)+E_{n\kappa}-\Delta(r)\right)\left(m(r)-E_{n\kappa}+\Sigma(r)\right)\right]F_{n\kappa}(r) \qquad (۱۲۱)$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\kappa(\kappa-1)}{r^2}+\frac{2\kappa}{r}U(r)+\frac{dU(r)}{dr}-U^2(r)-\frac{\left(\frac{dm(r)}{dr}+\frac{d\Sigma(r)}{dr}\right)}{m(r)-E_{n\kappa}+\Sigma(r)}\left(\frac{d}{dr}-\frac{\kappa}{r}+U(r)\right)\right]G_{n\kappa}(r)$$
$$=\left[\left(m(r)+E_{n\kappa}-\Delta(r)\right)\left(m(r)-E_{n\kappa}+\Sigma(r)\right)\right]G_{n\kappa}(r) \qquad (۱۲۲)$$

در این بخش برای حل معادلات فوق از رابطه ریاضی $\frac{dm(r)}{dr}=-\frac{d\Sigma(r)}{dr}=-\frac{dV(r)}{dr}$ استفاده می‌کنیم. همچنین وابستگی جرم را بصورت زیر در نظر می‌گیریم

$$m(r)=m_0+\frac{m_1}{r} \qquad (۱۲۳)$$

که در آن m_0 جرم سکون ذره و m_1 جرم اختلالی می‌باشد. اگر پتانسیل تانسوری را بصورت $U(r)=-\frac{H}{r},$ در نظر بگیریم، معادله (۱۲۳) برای مولفه پایینی دیراک بصورت زیر دز می‌آید

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\Lambda_\kappa(\Lambda_\kappa-1)+m_1(m_1+C)}{r^2}+\frac{\tilde{\gamma}(m_1+C)-m_1(m_0+E_{n\kappa})}{r}-\tilde{\beta}^2\right]G_{n\kappa}(r)=0 \quad (۱۲۴)$$

که

$$\begin{aligned}\Lambda_\kappa&=\kappa+H\\ \tilde{\gamma}&=E_{n\kappa}-m_0-C_{ps}\\ \tilde{\beta}^2&=(E_{n\kappa}+m_0)(m_0-E_{n\kappa}+C_{ps})\end{aligned} \qquad (۱۲۵)$$

با تغییر متغیر $G_{n\kappa}(r)=r^{\varepsilon+\frac{1}{2}}e^{-\tilde{\beta}r}g_{nk}(r)$، رابطه فوق به فرم زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{d^2 g_{n\kappa}(r)}{dr^2}=\left(\frac{2\tilde{\beta}-2\varepsilon-1}{r}\right)\frac{dg_{n\kappa}(r)}{dr}+\left(\frac{2\varepsilon\tilde{\beta}+\tilde{\beta}-\Gamma^2}{r}\right)g_{n\kappa}(r) \qquad (۱۲۶)$$

که در آن

$$\begin{aligned}\varepsilon^2&=\Lambda_\kappa(\Lambda_\kappa-1)+m_1(m_1+C)+\frac{1}{4}\\ \Gamma^2&=\tilde{\gamma}(m_1+C)-m_1(m_0+C)\end{aligned} \qquad (۱۲۷)$$

در این بخش می‌خواهیم معادله (۱۲۶) را با روش AIM حل نماییم. بنابراین در مقایسه با این روش، جملات زیر را بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\lambda_0(r)&=\frac{2\tilde{\beta}-2\varepsilon-1}{r}\\ S_0(r)&=\frac{2\varepsilon\tilde{\beta}+\tilde{\beta}-\Gamma^2}{r}\end{aligned} \qquad (۱۲۸)$$

همچنین جملات مراتب بالاتر بصورت زیر بدست می‌آیند

$$\begin{aligned}\lambda_1(r)&=4\tilde{\beta}^2-\frac{6\tilde{\beta}\varepsilon+3\tilde{\beta}+\Gamma^2}{r}+\frac{4\varepsilon^2+6\varepsilon+2}{r^2}\\ S_1(r)&=\frac{4\varepsilon\tilde{\beta}^2+2\tilde{\beta}^2-2\tilde{\beta}\Gamma^2}{r}+\frac{2\Gamma^2+2\varepsilon\Gamma^2-4\varepsilon\tilde{\beta}-2\tilde{\beta}-4\varepsilon^2\tilde{\beta}}{r}\\ &.\\ &.\\ &.\end{aligned} \qquad (۱۲۹)$$

برای بدست آوردن ویژه مقادیر انرژی، از روابط زیر استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned}k&=1\Rightarrow\Delta_1(r)=0\Rightarrow\lambda_1(r)S_0(r)-\lambda_0(r)S_1(r)=0\Rightarrow\varepsilon_0=\frac{\Gamma^2}{2\tilde{\beta}}-\frac{1}{2}\\ k&=2\Rightarrow\Delta_2(r)=0\Rightarrow\lambda_2(r)S_1(r)-\lambda_1(r)S_2(r)=0\Rightarrow\varepsilon_1=\frac{\Gamma^2}{2\tilde{\beta}}-\frac{3}{2}\\ &.\\ &.\\ &.\end{aligned} \qquad (۱۳۰)$$

و در حالت کلی برای k دلخواه بدست می‌آوریم

$$\varepsilon_n=\frac{\Gamma^2}{2\tilde{\beta}}-\left(n+\frac{1}{2}\right) \qquad (۱۳۱)$$

و در نهایت با جایگذاری ثابت‌ها، فرم بسته ویژه مقادیر انرژی بصورت زیر بدس می‌آید[۱۱۵]

$$\begin{aligned}&\left(E_{n\kappa}+m_0\right)\left(m_0-E_{n\kappa}+C_{ps}\right)\left[2n+1+\sqrt{4(\kappa+H)(\kappa+H-1)+4m_1(m_1+C)+1}\right]^2\\&=\left[\left(E_{n\kappa}-m_0-C_{ps}\right)\left(m_1+C\right)-m_1\left(m_0+E_{n\kappa}\right)\right]^2\end{aligned} \quad (۱۳۲)$$

هنگامیکه $H=m_1=C_{ps}=0$، مساله مذکور به پتانسیل کولنی تبدیل می‌شود و ویژه مقادیر انرژی بصورت زیر بدست می‌آیند

$$E_{n\kappa(Coulomb)}=-m_0\frac{(n+\kappa)^2-C^2}{(n+\kappa)^2+C^2}=-m_0\frac{(n+\kappa)^2-Z^2\alpha^2}{(n+\kappa)^2+Z^2\alpha^2} \quad (۱۳۳)$$

نتایج عددی این بخش در جداول ۵-۷ و ۵-۸ نشان داده شده اند. در جدول ۵-۷ نتایج را در حضور جرم اختلالـی و پتانسیل تانسوری بدست آوردیم و در جـدول ۵-۸، نتـایج را فقـط در حضـور پتانسـیل تانسـوری محاسـبه نمـودیم [۱۱۵].

جدول ۵-۷ ویژه مقادیر انرژی پتانسیل کولنی در حالت تقارن شبه اسـپینی در حضـور جـرم اختلالـی و پتانسـیل تانسوری با $m_0=5fm^{-1}$، $C=0.5$ و $C_{ps}=0$.

$\tilde{l}$	$n,\kappa\prec 0$	(l,j)	$E_{n,\kappa\prec0}$ $H=1$ $m_1=0.5$	$n-1,\kappa\succ 0$	$(l+2,j+1)$	$E_{n-1,\kappa\succ0}$ $H=1$ $m_1=0.5$
1	1, -1	$1s_{1/2}$	−4.553184694	0, 2	$0d_{3/2}$	−4.851130965
2	1, -2	$1p_{3/2}$	−4.749331473	0, 3	$0f_{5/2}$	−4.902767354
3	1, -3	$1d_{5/2}$	−4.851130965	0, 4	$0g_{7/2}$	−4.931815494
4	1, -4	$1f_{7/2}$	−4.902767354	0, 5	$0h_{9/2}$	−4.949632811
1	2, -1	$2s_{1/2}$	−4.779321871	1, 2	$1d_{3/2}$	−4.903808321
2	2, -2	$2p_{3/2}$	−4.855413144	1, 3	$1d_{3/2}$	−4.932163183
3	2, -3	$2d_{5/2}$	−4.903808321	1, 4	$1g_{7/2}$	−4.949774758
4	2, -4	$2f_{7/2}$	−4.932163183	1, 5	$1h_{9/2}$	−4.961375704

جدول ۵-۸ ویژه مقادیر انرژی پتانسیل کـولنی در حالـت تقـارن شـبه اسـپینی در حضـور پتانسـیل تانسـوری بـا $m_0 = 5fm^{-1}$، $C = 0.5$ و $C_{ps} = 0$.

$\tilde{l}$	$n, \kappa \prec 0$	(l, j)	$E_{n,\kappa\prec 0}$ $H = 1$ $m_1 = 0$	$n-1, \kappa \succ 0$	$(l+2, j+1)$	$E_{n-1,\kappa\succ 0}$ $H = 1$ $m_1 = 0$
1	1, -1	$1s_{1/2}$	-4.846153846	0, 2	$0d_{3/2}$	-4.961089494
2	1, -2	$1p_{3/2}$	-4.931034483	0, 3	$0f_{5/2}$	-4.975062344
3	1, -3	$1d_{5/2}$	-4.961089494	0, 4	$0g_{7/2}$	-4.982668977
4	1, -4	$1f_{7/2}$	-4.975062344	0, 5	$0h_{9/2}$	-4.987261146
1	2, -1	$2s_{1/2}$	-4.931034483	1, 2	$1d_{3/2}$	-4.97506234
2	2, -2	$2p_{3/2}$	-4.961089494	1, 3	$1d_{3/2}$	-4.982668977
3	2, -3	$2d_{5/2}$	-4.975062344	1, 4	$1g_{7/2}$	-4.987261146
4	2, -4	$2f_{7/2}$	-4.982668977	1, 5	$1h_{9/2}$	-4.990243902

از جداول فوق نتیجه می‌گیریم که پتانسیل تانسوری تبهگنی بین جفت‌ها را از بین می‌برد در حالیکه جـرم اختلالـی این کار را نمی‌تواند انجام دهد. برای بدست آوردن ویژه توابع خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
g_0(r) &= N \\
g_1(r) &= N\,(\Gamma^2 - 2\tilde{\beta})\left(1 - \frac{2\tilde{\beta}^2}{\Gamma^2 - 2\tilde{\beta}}\right) \\
&. \\
&. \\
&.
\end{aligned}
\tag{۱۳۴}
$$

که منجر می‌شود به[۱۱۵]

$$G_{n\kappa}(r) = B_n r^{\varepsilon_n + \frac{1}{2}} e^{-\tilde{\beta} r} (-1)^n \left(\prod_{k=n}^{2n-1} (\Gamma^2 - (k+1)\tilde{\beta}) \right) {}_1F_1(-n, 2\varepsilon_n + 1; 2\tilde{\beta} r) \tag{۱۳۵}$$

که B_n ثابت نرمالیزاسیون می‌باشد. همچنین ویژه توابع فوق هندسی ${}_1F_1$ را می‌توان بر اساس توابع لاگر بصورت زیر نوشت

$$G_{n\kappa}(r) = D_{n\kappa} r^{\varepsilon_n + \frac{1}{2}} e^{-\tilde{\beta} r} L_n^{2\varepsilon_n}(2\tilde{\beta} r) \tag{۱۳۶}$$

که در آن $D_{n\kappa}$ ثابت نرمالیزاسیون جدید می‌باشد و با رابطه زیر داده می‌شود

$$D_{n\kappa} = \frac{1}{n!}(2\tilde{\beta})^{\varepsilon_n + 1/2} \sqrt{\frac{(n-2\varepsilon_n)!}{n!}} \tag{۱۳۷}$$

همچنین مولفه بالایی دیراک بصورت زیر در می‌آید

$$F_{n\kappa}(r) = \frac{1}{m(r) - E_{n\kappa} + C_{ps}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r} + U(r) \right) G_{n\kappa}(r) \tag{۱۳۸}$$

۸-۵ پتانسیل مورس در حضور پتانسیل تانسوری

پتانسیل مورس بصورت زیر تعریف می‌شود

$$V(r) = D\left(e^{-2a(r-r_0)} - e^{-a(r-r_0)}\right), \qquad (D \succ 0, a \succ 0) \tag{۱۳۹}$$

که D انرژی جدایی، r_0 فاصله تعادل و a پارامتری برای کنترل عرض چاه پتانسیل می‌باشد.

۵-۸-۱ تقارن شبه اسپینی

اگر در تقارن شبه اسپینی اختلاف دو پتانسیل از جنس پتانسیل مورس و پتانسیل تانسوری نیز از جنس پتانسیل کولنی باشد، معادله شرودینگرگونه دیراک برای مولفه پایینی بصورت زیر درمی‌آید

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\Lambda_\kappa(\Lambda_\kappa - 1)}{r^2} - \tilde{\gamma} D\left(e^{-2a(r-r_0)} - e^{-a(r-r_0)}\right) - \tilde{\beta}^2 \right] G_{n\kappa}(r) = 0, \tag{۱۴۰}$$

که $\tilde{\gamma} = E_{n\kappa} - M - C_{ps}$، $\tilde{\beta}^2 = (M + E_{n\kappa})(M - E_{n\kappa} + C_{ps})$ و $\Lambda_\kappa = \kappa + H$. معادله فوق در حضور جمله اسپین-مدار بطور تحلیلی قابل حل نمی‌باشد مگر برای حالت $\Lambda_\kappa = 0$. بنابراین از تقریب پکریس استفاده خواهیم نمود. در این تقریب، جمله اسپین-مدار را اطراف $r = r_0$ بر حسب سری توانی $x = (r - r_0)/r_0$ بسط می‌دهیم

$$V_{so}(r)=\frac{\Lambda_\kappa(\Lambda_\kappa-1)}{r^2}=\frac{\Lambda_\kappa(\Lambda_\kappa-1)}{r_0^2(1+x)^2}=\frac{\Lambda_\kappa(\Lambda_\kappa-1)}{r_0^2}(1-2x+3x^2-4x^3+\ldots) \tag{۱۴۱}$$

همچنین از تقریب زیر برای جمله اسپین-مدار استفاده می‌کنیم

$$\tilde{V}_{so}(r)=\frac{\lambda(\lambda-1)}{r_0^2}(c_0+c_1e^{-\alpha x}+c_2e^{-2\alpha x}) \tag{۱۴۲}$$

که در آن $\alpha=a\,r_0$ و c_i ضرائب ثابت می‌باشند. با بسط رابطه فوق تا جمله x^3 خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{so}(r)=\frac{\lambda(\lambda-1)}{r_0^2}\Big[&c_0+c_1(1-\alpha x+\frac{\alpha^2x^2}{2!}-\frac{\alpha^3x^3}{3!}+\ldots)\\ &+c_2(1-2\alpha x+\frac{4\alpha^2x^2}{2!}-\frac{8\alpha^3x^3}{3!}+\ldots)\Big]\end{aligned} \tag{۱۴۳}$$

بعد از مرتب سازی رابطه فوق خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{so}(r)=\frac{\lambda(\lambda-1)}{r_0^2}\Big[&c_0+c_1+c_2-x\,(c_1\alpha+2c_2\alpha)\\ &+x^2(c_1\frac{\alpha^2}{2}+2c_2\alpha^2)-x^3(c_1\frac{\alpha^3}{6}+c_2\frac{4\alpha^2}{3})+\ldots\Big]\end{aligned} \tag{۱۴۴}$$

با مساوی قرار دادن ضرائب توان‌های برابر در رابطه فوق و معادله (۱۴۱)، ضرائب ثابت را بر اساس پارامتر x^3

بصورت زیر بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}c_0&=1-\frac{3}{\alpha}+\frac{3}{\alpha^2},\\ c_1&=\frac{4}{\alpha}-\frac{6}{\alpha^2},\\ c_2&=\frac{1}{\alpha}+\frac{3}{\alpha^2}.\end{aligned} \tag{۱۴۵}$$

اکنون می‌توانیم پتانسیل $\tilde{V}_{so}$ را جایگزین پتانسیل اسپین-مدار نماییم. بنابراین، معادله به فرم زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{aligned}\Big[\frac{1}{r_0^2}\frac{d^2}{dx^2}-\frac{\Lambda_\kappa\left(\Lambda_\kappa-1\right)}{r_0^2}&(c_0+c_1e^{-\alpha x}+c_2e^{-2\alpha x})\\ &-\tilde{\gamma}D\left(e^{-2\alpha x}-e^{-\alpha x}\right)-\tilde{\beta}^2\Big]G_{n\kappa}\left(x\right)=0,\end{aligned} \tag{۱۴۶}$$

با تغییر متغیر $s=e^{-\alpha x}$، معادله فوق به شکل زیر در می‌آید

$$\frac{d^2G_{n\kappa}(s)}{ds^2}+\frac{1}{s}\frac{dG_{n\kappa}(s)}{ds}+\frac{1}{s^2}\left[-\left(\frac{\Lambda_\kappa(\Lambda_\kappa-1)}{\alpha^2}c_2+\frac{\tilde{\gamma}r_0^2}{\alpha^2}D\right)s^2 +\left(-\frac{\Lambda_\kappa(\Lambda_\kappa-1)}{\alpha^2}c_1+\frac{\tilde{\gamma}r_0^2}{\alpha^2}D\right)s-\left(\frac{\Lambda_\kappa(\Lambda_\kappa-1)}{\alpha^2}c_0+\frac{\tilde{\beta}r_0^2}{\alpha^2}\right)\right]G_{n\kappa}(s)=0 \quad (۱۴۷)$$

با مقایسه معادله فوق و معادله پارامتری NU، ضراوب چند جمله‌ای زیر را بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
&\alpha_1=1, && \xi_1=\frac{\Lambda_\kappa(\Lambda_\kappa-1)}{\alpha^2}c_2+\frac{\tilde{\gamma}r_0^2}{\alpha^2}D\\
&\alpha_2=0, && \xi_2=-\frac{\Lambda_\kappa(\Lambda_\kappa-1)}{\alpha^2}c_1+\frac{\tilde{\gamma}r_0^2}{\alpha^2}D\\
&\alpha_3=0, && \xi_3=\frac{\Lambda_\kappa(\Lambda_\kappa-1)}{\alpha^2}c_0+\frac{\tilde{\beta}r_0^2}{\alpha^2}
\end{aligned} \quad (۱۴۸)$$

دیگر ضرائب این روش در جدول ۵-۹ نشان داده شده‌اند.

جدول ۵-۹ ضرائب NU برای پتانسیل مورس در حالت شبه اسپینی

constant	Analytic value
α_4	0
α_5	0
α_6	$\frac{\Lambda_\kappa(\Lambda_\kappa-1)}{\alpha^2}c_2+\frac{\tilde{\gamma}r_0^2}{\alpha^2}D$
α_7	$\frac{\Lambda_\kappa(\Lambda_\kappa-1)}{\alpha^2}c_1-\frac{\tilde{\gamma}r_0^2}{\alpha^2}D$
α_8	$\frac{\Lambda_\kappa(\Lambda_\kappa-1)}{\alpha^2}c_0+\frac{\tilde{\beta}r_0^2}{\alpha^2}$
α_9	$\frac{\Lambda_\kappa(\Lambda_\kappa-1)}{\alpha^2}c_2+\frac{\tilde{\gamma}r_0^2}{\alpha^2}D$
α_{10}	$1+2\sqrt{\frac{\Lambda_\kappa(\Lambda_\kappa-1)}{\alpha^2}c_0+\frac{\tilde{\beta}r_0^2}{\alpha^2}}$
α_{11}	$2\sqrt{\frac{\Lambda_\kappa(\Lambda_\kappa-1)}{\alpha^2}c_2+\frac{\tilde{\gamma}r_0^2}{\alpha^2}D}$
α_{12}	$\sqrt{\frac{\Lambda_\kappa(\Lambda_\kappa-1)}{\alpha^2}c_0+\frac{\tilde{\beta}r_0^2}{\alpha^2}}$
α_{13}	$-\sqrt{\frac{\Lambda_\kappa(\Lambda_\kappa-1)}{\alpha^2}c_2+\frac{\tilde{\gamma}r_0^2}{\alpha^2}D}$

با استفاده از ضرائب در جدول فوق، فرم بسته معادله انرژی برای پتانسیل مورس در حالت شبه اسپینی بصورت زیر

بدست می‌آید[۱۱۶]

$$(2n+1)\sqrt{\frac{\Lambda_\kappa(\Lambda_\kappa-1)}{\alpha^2}c_2+\frac{\tilde{\gamma}r_0^2}{\alpha^2}D}+\frac{\Lambda_\kappa(\Lambda_\kappa-1)}{\alpha^2}c_1-\frac{\tilde{\gamma}r_0^2}{\alpha^2}D \\ +2\sqrt{\left(\frac{\Lambda_\kappa(\Lambda_\kappa-1)}{\alpha^2}c_2+\frac{\tilde{\gamma}r_0^2}{\alpha^2}D\right)\left(\frac{\Lambda_\kappa(\Lambda_\kappa-1)}{\alpha^2}c_0+\frac{\tilde{\beta}r_0^2}{\alpha^2}\right)}=0 \qquad (۱۴۹)$$

نتایج عددی برای پتانسیل مورس در حالت شبه اسپینی در جدول زیر نشان داده شده‌اند که از ضرائب $M=10fm^{-1}$ ،$D=5fm^{-1}$ ،$r_0=2.4087fm$ و $a=0.988879fm$ استفاده کردیم.

جدول ۵-۱۰ ویژه مقادیر انرژی پتانسیل مورس در حالت تقارن شبه اسپینی در حضور پتانسیل تانسوری.

$\tilde{l}$	$n,\kappa\langle 0$	(l,j)	$E_{n,\kappa\langle 0}$ Present work	$E_{n,\kappa\langle 0}$ Ref. [۱۱۷] $H=0$	$n-1,\kappa\rangle 0$	$(l+2,j+1)$	$E_{n-1,\kappa\rangle 0}$ Present work	$E_{n-1,\kappa\rangle 0}$ Ref. [۱۱۷] $H=0$
1	1, -1	$1s_{1/2}$	−0.0285438	−0.0064123	0, 2	$0d_{3/2}$	0.0287476	−0.0064123
2	1, -2	$1p_{3/2}$	−0.0323811	−0.0155771	0, 3	$0f_{5/2}$	0.0669859	−0.0155771
3	1, -3	$1d_{5/2}$	−0.0305324	−0.0243659	0, 4	$0g_{7/2}$	0.1171055	−0.0243659
4	1, -4	$1f_{7/2}$	−0.0243675	−0.0305297	0, 5	$0h_{9/2}$	0.6488355	−0.0305297
1	2, -1	$2s_{1/2}$	−0.0760362	−0.0070204	1, 2	$1d_{3/2}$	−0.0890169	−0.0070204
2	2, -2	$2p_{3/2}$	−0.0637502	−0.0190441	1, 3	$1f_{5/2}$	−0.0825473	−0.0190441
3	2, -3	$2d_{5/2}$	−0.0492179	−0.0337719	1, 4	$1g_{7/2}$	−0.0694496	−0.0337719
4	2, -4	$2f_{7/2}$	−0.0337736	−0.0492150	1, 5	$1h_{9/2}$	−0.0490407	−0.0492150

در جدول فوق جفت‌های $(ns_{1/2},(n-1)d_{3/2})$ با $\tilde{l}=1$، $(np_{3/2},\ (n-1)f_{5/2})$ با $\tilde{l}=2$ و $(nd_{5/2},\ (n-1)g_{7/2})$ با $\tilde{l}=3$ در غیاب پتانسیل تانسوری انرژی یکسان دارند. همچنین حضور پتانسیل تانسوری این تبهگنی‌ها را از بین می‌برد و نتایج با کار دیگران در غیاب پتانسیل تانسوری مقایسه شده است.

با رجوع به جدول ۵-۹ و روش NU توابع موج مولفه پایینی دیراک بصورت زیر بدست می‌آیند

$$G_{n\kappa}(s)=\tilde{N}_{n\kappa}s^{\alpha^{-1}\sqrt{\Lambda_\kappa(\Lambda_\kappa-1)c_0+\tilde{\beta}r_0^2}}e^{-\alpha^{-1}s\sqrt{\Lambda_\kappa(\Lambda_\kappa-1)c_2+\tilde{\gamma}r_0^2D}} \times L_n^{\alpha^{-1}\sqrt{\Lambda_\kappa(\Lambda_\kappa-1)c_0+\tilde{\beta}r_0^2}}(2\alpha^{-1}\sqrt{\Lambda_\kappa(\Lambda_\kappa-1)c_2+\tilde{\gamma}r_0^2D}s) \quad (۱۵۰)$$

که $\tilde{N}_{n\kappa}$ ثابت نرمالیزاسیون می‌باشد. همچنین مولفه بالایی اسپینور دیراک از رابطه زیر بدست می‌آید

$$F_{n\kappa}(r)=\frac{1}{M-E_{n\kappa}+C_{ps}}\left(\frac{d}{dr}-\frac{\kappa}{r}+U(r)\right)G_{n\kappa}(r) \quad (۱۵۱)$$

که در آن $E\neq M+C_{ps}$.

۵-۸-۲ تقارن اسپینی

معادله شرودینگرگونه برای پتانسیل مورس با پتانسیل تانسوری کولنی در حالت اسپینی بصورت زیر در می‌آید

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\eta_\kappa(\eta_\kappa-1)}{r^2}-\gamma D\left(e^{-2a(r-r_0)}-e^{-a(r-r_0)}\right)-\beta^2\right]F_{n\kappa}(r)=0, \quad (۱۵۲)$$

که $\gamma=M+E_{n\kappa}-C_s$، $\beta^2=(M-E_{n\kappa})(M+E_{n\kappa}-C_s)$ و $\eta_\kappa=\kappa+H+1$.

همانند بخش و برای جلوگیری از تکرار، تابع ویژه مقادیر انرژی بصورت زیر بدست آورده می‌شود[۱۱۶]

$$(2n+1)\sqrt{\frac{\eta_\kappa(\eta_\kappa-1)}{\alpha^2}c_2+\frac{\gamma r_0^2}{\alpha^2}D}+\frac{\eta_\kappa(\eta_\kappa-1)}{\alpha^2}c_1-\frac{\gamma r_0^2}{\alpha^2}D +2\sqrt{\left(\frac{\eta_\kappa(\eta_\kappa-1)}{\alpha^2}c_2+\frac{\gamma r_0^2}{\alpha^2}D\right)\left(\frac{\eta_\kappa(\eta_\kappa-1)}{\alpha^2}c_0+\frac{\beta r_0^2}{\alpha^2}\right)}=0 \quad (۱۵۳)$$

نتایج عددی این قسمت در جدول ۵-۱۱ نشان داده شده‌اند که از ضرائب یکسان در بخش قبل استفاده نمودیم.

جدول ۵-۱۱ ویژه مقادیر انرژی پتانسیل مورس در حالت تقارن اسپینی در حضور پتانسیل تانسوری.

l	$n,\kappa\langle 0$	$(l, j=l+1/2)$	$E_{n,\kappa\langle 0}$ Present work	$E_{n,\kappa\langle 0}$ $H=0$	$n,\kappa\rangle 0$	$(l, j=l-1/2)$	$E_{n,\kappa\rangle 0}$ Present work	$E_{n,\kappa\rangle 0}$ $H=0$
1	0, -2	$0p_{3/2}$	0.0083930	0.0273238	0, 1	$0p_{1/2}$	0.0578865	0.0273238
2	0, -3	$0d_{5/2}$	0.0273237	0.0578864	0, 2	$0d_{3/2}$	0.1003089	0.0578864
3	0, -4	$0f_{7/2}$	0.0578865	0.1003089	0, 3	$0f_{5/2}$	0.1548177	0.1003089
4	0, -5	$0g_{9/2}$	0.1003089	0.1548177	0, 4	$0g_{7/2}$	0.2216764	0.1548177
1	1, -2	$1p_{3/2}$	0.0758372	0.1000348	1, 1	$1p_{1/2}$	0.1415506	0.1000348
2	1, -3	$1d_{5/2}$	0.1000348	0.1415506	1, 2	$1d_{3/2}$	0.1970213	0.1415506
3	1, -4	$1f_{7/2}$	0.1415506 552	0.1970213	1, 3	$1f_{5/2}$	0.2655445	0.1970213
4	1, -5	$1g_{9/2}$	0.1970213	0.2655445	1, 4	$1g_{7/2}$	0.3470327	0.2655445

از جدول فوق مشاهده می‌شود جفت‌های $(np_{1/2}, np_{3/2})$، $(nd_{3/2}, nd_{5/2})$ و $(nf_{5/2}, nf_{7/2})$ در غیاب پتانسیل تانسوری دارای انرژی یکسان هستند که در حضور بخش تانسوری این تبهگنی‌ها از بین می‌روند. ویژه توابع متناظر برای مولفه بالایی در حضور پتانسیل‌های مورس و تانسوری کولنی بصورت زیر بدست می‌آیند

$$F_{n\kappa}(s) = N_{n\kappa} s^{\alpha^{-1}\sqrt{\eta_\kappa(\eta_\kappa-1)c_0+\beta r_0^2}} e^{-\alpha^{-1}s\sqrt{\eta_\kappa(\eta_\kappa-1)c_2+\gamma r_0^2 D}} \times L_n^{\alpha^{-1}\sqrt{\eta_\kappa(\eta_\kappa-1)c_0+\beta r_0^2}}\left(2\alpha^{-1}\sqrt{\eta_\kappa(\eta_\kappa-1)c_2+\gamma r_0^2 D}\,s\right) \tag{۱۵۴}$$

که $N_{n\kappa}$ ثابت نرمالیزاسیون می‌باشد. همچنین مولفه پایینی اسپینور دیراک از رابطه زیر بدست می‌آید

$$G_{n\kappa}(r) = \frac{1}{M + E_{n\kappa} - C_s}\left(\frac{d}{dr} + \frac{\kappa}{r} - U(r)\right) F_{n\kappa}(r) \tag{۱۵۵}$$

که $E \neq -M + C_s$.

۹-۵ پتانسیل trigonometric Pöschl-Teller (tPT)

پتانسیل tPT به فرم زیر می‌باشد [۱۱۸]

$$V_{tPT}(r)=\frac{V_1}{\sin^2(\alpha r)}+\frac{V_2}{\cos^2(\alpha r)},\quad V_1>0,\quad V_2>0 \tag{۱۵۶}$$

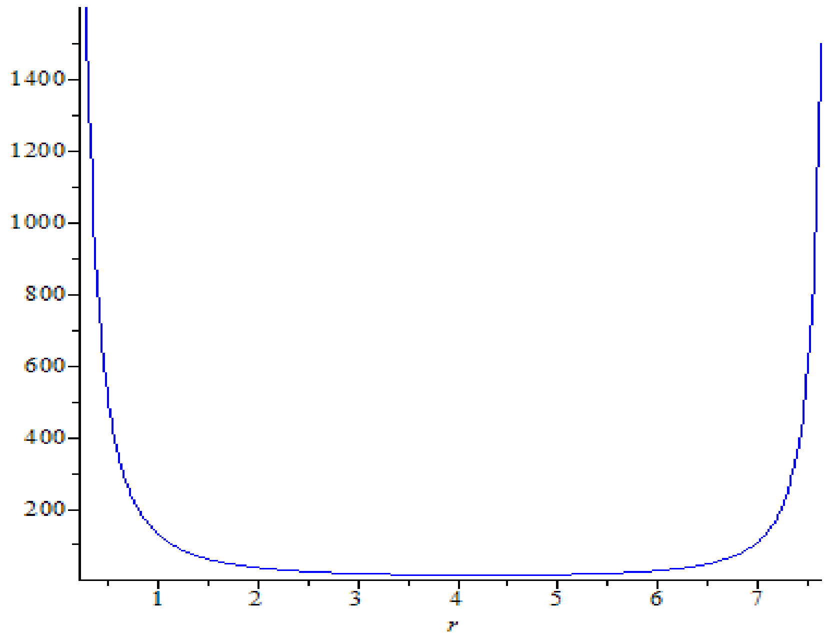
که پارامترهای V_1 و V_2 عمق چاه پتانسیل و پارامتر α پهنای چاه پتانسیل را تعیین می‌کنند. این پتانسیل دارای مینیمم در نقطه $r_0=\frac{1}{\alpha}\tan^{-1}\left(\sqrt[4]{\frac{V_1}{V_2}}\right).$ می‌باشد و هنگامیکه $V_1=V_2,$ ، مقدار مینیمم $r_0=\frac{\pi}{4\alpha}\in(0,\infty)$ برای $\alpha>0$ است. مشتق دوم در $r=r_0$ با رابطه زیر داده می‌شود

$$\left.\frac{d^2V}{dr^2}\right|_{r=r_0}=\frac{8\alpha^2\left(V_2+\sqrt{V_1V_2}\right)}{\cos^2\left[\tan^{-1}\left(\sqrt[4]{\frac{V_1}{V_2}}\right)\right]}, \tag{۱۵۷}$$

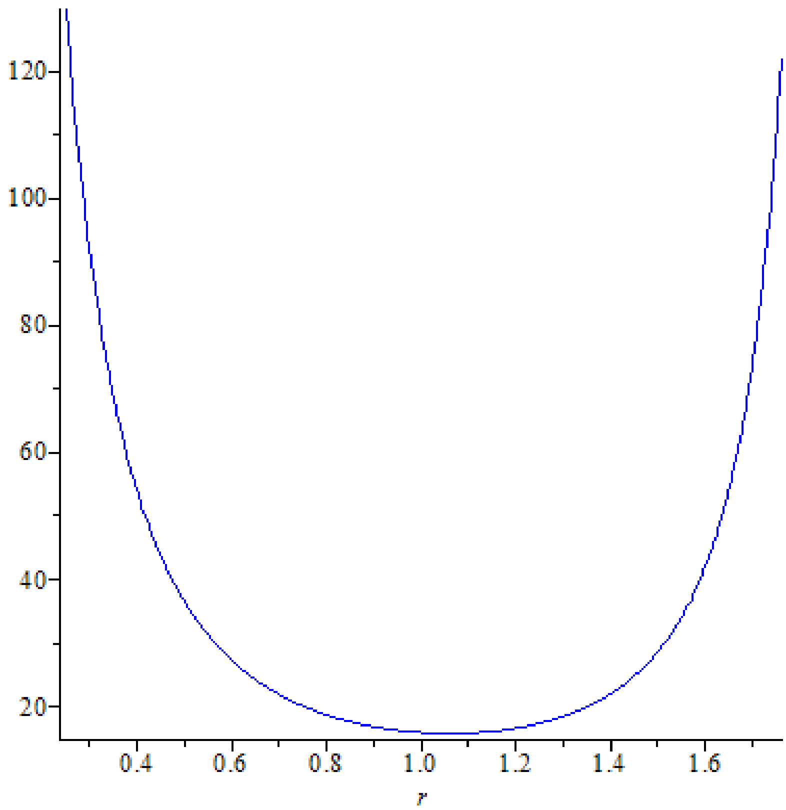
و همچنین

$$V(r_0)=\frac{\sqrt{V_1V_2}+V_2}{\cos^2\left[\tan^{-1}\left(\sqrt[4]{\frac{V_1}{V_2}}\right)\right]}, \tag{۱۵۸}$$

هنگامیکه $V_1=V_2=V$ ، مینیمم پتانسیل $V(r_0)=4V$ و همچنین $\left.\frac{d^2V}{dr^2}\right|_{r=r_0}=32\alpha^2V.$ می‌باشد. در شکل ۵-۵الف و ۵-۵ب پتانسیل tPT را با مقادیر $V_1=5.0\ \text{fm}^{-1}$ ، $V_2=3.0\ \text{fm}^{-1}$ ، $\alpha=0.02\ \text{fm}^{-1}$ و $\alpha=0.30\ \text{fm}^{-1}$ رسم نمودیم.



شکل ۵-۵الف پتانسیل tPT با $\alpha = 0.2\ \mathrm{fm}^{-1}$.



شکل ۵-۵ب پتانسیل tPT با $\alpha = 0.8\ \mathrm{fm}^{-1}$.

هنگامیکه $\alpha \to 0,$، پتانسیل tPT به پتانسیل Kratzer با فرم $+\eta,$ $V(r) = D_e\left(\frac{r-r_e}{r}\right)^2$ تبدیل می‌شود که r_e نقطه تعادل و D_e انرژی جدایی می‌باشد. همچنین در مقایسه با پتانسیل tPT ضرائب بشکل $D_e = V_1,\ \eta = V_2$ و $r_e = 1/\alpha$ تغییر می‌یابند.

معادله شرودینگرگونه دیراک برای مولفه بالایی دیراک با پتانسیل تانسوری کولنی به فرم زیر تبدیل می‌شود

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\eta_\kappa(\eta_\kappa+1)}{r^2} - \gamma\left(\frac{V_1}{\sin^2(\alpha r)} + \frac{V_2}{\cos^2(\alpha r)}\right) - \beta^2\right]F_{n\kappa}(r) = 0, \quad (\text{۱۵۹الف})$$

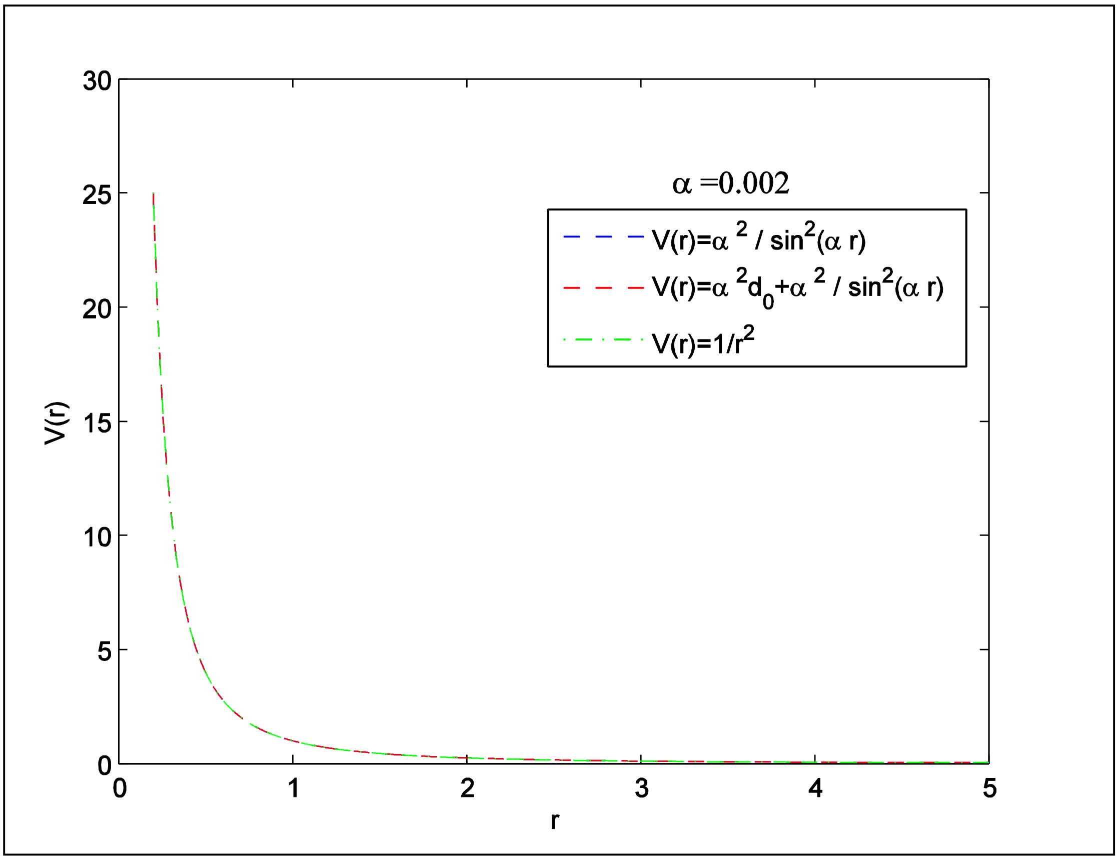
$$\gamma = M + E_{n\kappa} - C_s \text{ و } \beta^2 = (M - E_{n\kappa})(M + E_{n\kappa} - C_s). \quad (\text{۱۵۸ب})$$

که $\eta_\kappa = \kappa + H + 1$ جمله اسپین-مدار جدید می‌باشد. معادله فوق با وجود جمله اسپین-مدار دارای حل دقیق نمی‌باشد مگر برای حالت $\kappa = -1$ در غیاب پتانسیل تانسوری. بنابراین یک تقریب جدید به فرم زیر معرفی می-کنیم [۱۱۸]

$$\frac{1}{r^2} = \lim_{\alpha\to 0}\alpha^2\left(d_0 + \frac{1}{\sin^2(\alpha r)}\right),\ 0 < \alpha r < \pi/2 \quad (\text{۱۶۰})$$

که $d_0 = 1/12$ پارامتر بدون بعد و $\alpha r << 1$. در تقریب فوق از بسط $\sin(z) = z - z^3/3! + z^5/5! - z^7/7! + \cdots,$ کمک گرفتیم و همچنین هنگامیکه $z \to 0$، $\sin(z) \approx z$.

برای نشان دادن اعتبار تقریب فوق، جملات $1/r^2$ و تقریب‌هایش $\alpha^2/\sin^2(\alpha r)$ و $\alpha^2\left(d_0 + 1/\sin^2(\alpha r)\right)$ را در شکل ۵-۶ رسم نمودیم. همانطوریکه از شکل پیداست، تقریب فوق جایگزین مناسبی برای جمله اسپین-مدار می‌باشد.



شکل۵-۶ جمله $1/r^2$ و تقریب‌های آن در معادله (۱۶۰).

بنابراین معادله (۱۵۹الف) با تقریب (۱۶۰) بصورت زیر درمی‌آید

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\eta_\kappa(\eta_\kappa+1)\alpha^2\left(d_0+\frac{1}{\sin^2(\alpha r)}\right)-\gamma\left(\frac{V_1}{\sin^2(\alpha r)}+\frac{V_2}{\cos^2(\alpha r)}\right)-\beta^2\right]F_{n\kappa}(r)=0.\text{(۱۶۱)}$$

با تغییر متغیر $s(r)=\sin^2(\alpha r)$ معادله فوق بفرم زیر تبدیل می‌شود

$$\left\{\frac{d^2}{ds^2}+\frac{\frac{1}{2}-s}{s(1-s)}\frac{d}{ds}-\frac{1}{s^2(1-s)^2}\left[-As^2+Bs-C\right]\right\}F_{n,\kappa}(s)=0,$$

$$A=-\frac{1}{4\alpha^2}\left[\eta_\kappa(\eta_\kappa-1)\alpha^2 d_0+\beta^2\right],$$

$$B=\frac{1}{4\alpha^2}\left[\eta_\kappa(\eta_\kappa-1)\alpha^2(1-d_0)+\gamma(V_1-V_2)-\beta^2\right],$$

$$C=\frac{1}{4\alpha^2}\left[\eta_\kappa(\eta_\kappa-1)\alpha^2+\gamma V_1\right].\qquad\text{(۱۶۲)}$$

در نهایت رابطه بسته انرژی را بصورت زیر بدست می‌آوریم [۱۱۸]

$$\left(n+\frac{1}{2}+\sqrt{A-B+C+\frac{1}{16}}+\sqrt{C+\frac{1}{16}}\right)^2=A, \qquad (۱۶۳)$$

و یا بطور معادل

$$\left(2n+1+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{4V_2\left(M+E_{n\kappa}-C_s\right)}{\alpha^2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(2\eta_\kappa-1\right)^2+\frac{4V_1\left(M+E_{n\kappa}-C_s\right)}{\alpha^2}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{\alpha^2}\left(E_{n\kappa}-M\right)\left(M+E_{n\kappa}-C_s\right)-\eta_\kappa(\eta_\kappa-1)d_0. \qquad (۱۶۴)$$

در جـدول و نتـایج عـددی ایـن بخـش را بـا پارامترهـای $M=10\,\mathrm{fm}^{-1}$، $V_1=5.0\ \mathrm{fm}^{-1}$، $V_2=3.0\ \mathrm{fm}^{-1}$، $C_s=0\,\mathrm{fm}^{-1}$ و $\alpha=0.8,\ 0.6,\ 0.4,\ 0.2,\ 0.04,\ 0.02$ در حضور پتانسیل تانسوری و عدم حضور آن نشان دادیم.

جدول ۵-۱۲ ویژه مقادیر انرژی پتانسیل tPT در حالت تقارن اسپینی در حضور پتانسیل تانسوری با $\alpha=0.8$.

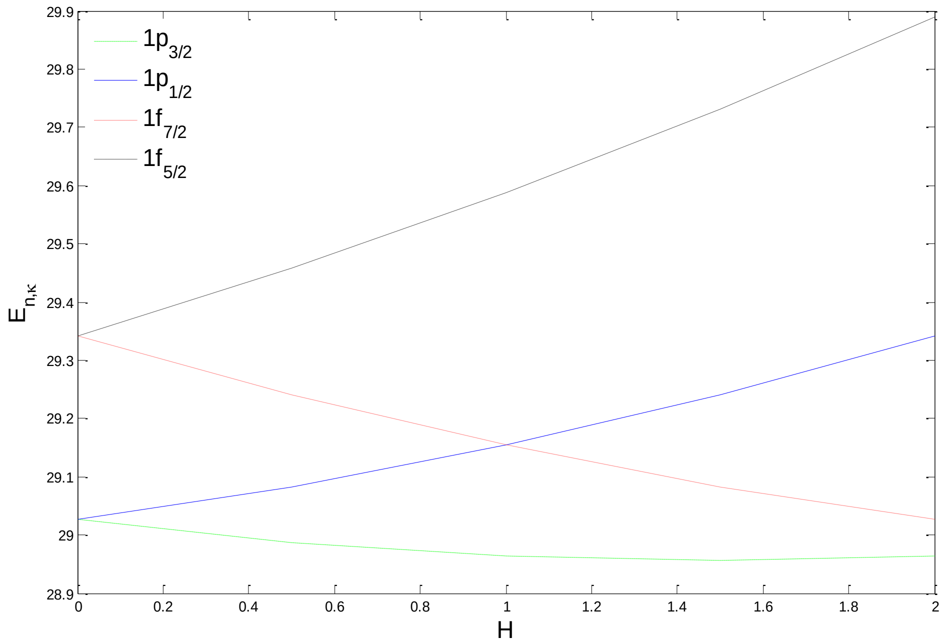
l	$n,\kappa\langle 0$	$(l,j=l+1/2)$	$E_{n,\kappa\langle 0}$ $H\neq 0$	$E_{n,\kappa\langle 0}$ $H=0$	$n,\kappa\rangle 0$	$(l,j=l-1/2)$	$E_{n,\kappa\rangle 0}$ $H\neq 0$	$E_{n,\kappa\rangle 0}$ $H=0$
1	0, -2	$0p_{3/2}$	26.82780	26.89327	0, 1	$0p_{1/2}$	27.02322	26.89327
2	0, -3	$0d_{5/2}$	26.89327	27.02322	0, 2	$0d_{3/2}$	27.21577	27.02322
3	0, -4	$0f_{7/2}$	27.02322	27.21577	0, 3	$0f_{5/2}$	27.46825	27.21577
4	0, -5	$0g_{9/2}$	27.21577	27.46825	0, 4	$0g_{7/2}$	27.77739	27.46825
1	1, -2	$1p_{3/2}$	28.96349	29.02725	1, 1	$1p_{1/2}$	29.15386	29.02725
2	1, -3	$1d_{5/2}$	29.02725	29.15386	1, 2	$1d_{3/2}$	29.34155	29.15386
3	1, -4	$1f_{7/2}$	29.15386	29.34155	1, 3	$1f_{5/2}$	29.58785	29.34155
4	1, -5	$1g_{9/2}$	29.34155	29.58785	1, 4	$1g_{7/2}$	29.88968	29.58785

جدول ۵-۱۳ ویژه مقادیر انرژی پتانسیل tPT در حالت تقارن اسپینی در غیاب پتانسیل تانسوری.

l	n,κ	$(l, j=l\pm 1/2)$	$\alpha=0.8$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.2$	$\alpha=0.04$	$\alpha=0.02$
1	1, -2,1	$1p_{3/2}, 1p_{1/2}$	29.02725	27.36375	26.54876	25.90551	25.82567
2	1, -3,2	$1d_{5/2}, 1d_{3/2}$	29.15386	27.39629	26.55699	25.90584	25.82575
3	1, -4,3	$1f_{7/2}, 1f_{5/2}$	29.34155	27.44495	26.56933	25.90634	25.82588
4	1, -5,4	$1g_{9/2}, 1g_{7/2}$	29.58785	27.50956	26.585773	25.90701	25.82605
1	2, -2,1	$2p_{3/2}, 2p_{1/2}$	31.16696	28.43165	27.08151	26.01179	25.87879
2	2, -3,2	$2d_{5/2}, 2d_{3/2}$	31.29020	28.46376	27.08969	26.01212	25.87887
3	2, -4,3	$2f_{7/2}, 2f_{5/2}$	31.47301	28.51179	27.10195	26.01262	25.878100
4	2, -5,4	$2g_{9/2}, 2g_{7/2}$	31.71308	28.57555	27.11828	26.01328	25.87916

همانطوریکه از جدول فوق نمایان است، هنگامیکه α به سمت صفر میل می‌کند،انرژی به سمت مقدار ثابت $M+V_1+V_2+2\sqrt{V_1V_2}$ میل می‌کند؛ یعنی $\lim_{\alpha\to 0} E_{n,\kappa}=M+V_1+V_2+2\sqrt{V_1V_2}$ [۱۱۸] .

در شکل ۵-۷ اثر پتانسیل تانسوری را روی دو جفت اسپینی $\left(1f_{7/2}, 1f_{5/2}\right)$ و $\left(1p_{3/2}, 1p_{1/2}\right)$ نشان دادیم. هنگامیکه $H=0$ می‌توانیم تبهگنی را مشاهده کنیم. همچنین هنگامیکه پتانسیل تانسوری افزایش می‌یابد، تبهگنی از بین می‌رود و ترازها از هم فاصله می‌گیریند، زیرا جمله $2\kappa H$ باعث تفاوت انرژی در دو تراز تبهگن می-شود.



شکل۵-۷ تاثیر پتانسیل تانسوری روی جفت‌های اسپینی در حضور پتانسیل tPT.

و تابع موج مولفه بالایی دیراک بصورت زیر بدست می‌آید

$$F_{n\kappa}(r)=N_{n\kappa}(\sin(\alpha r))^{\frac{1}{2}(1+\xi_\kappa)}(\cos(\alpha r))^{\frac{1}{2}(1+\delta)}P_n^{\left(\frac{1}{2}\xi_\kappa,\frac{1}{2}\delta\right)}(\cos(2\alpha r)), \qquad (۱۶۵)$$

که در آن

$$\xi_\kappa=\sqrt{1+\frac{4}{\alpha^2}\left[\eta_\kappa(\eta_\kappa-1)\alpha^2+\gamma V_1\right]}, \qquad \delta=\sqrt{1+\frac{4\gamma V_2}{\alpha^2}}, \qquad (۱۶۶)$$

در حالت شبه اسپینی، معادله شرودینگرگونه با تقریب ذکر شده برای مولفه پایینی دیراک بصورت زیر نوشته می‌شود

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\lambda_\kappa(\lambda_\kappa-1)\alpha^2\left(d_0+\frac{1}{\sin^2(\alpha r)}\right)-\tilde{\gamma}\left(\frac{V_1}{\sin^2(\alpha r)}+\frac{V_2}{\cos^2(\alpha r)}\right)-\tilde{\beta}^2\right]G_{n\kappa}(r)=0. \qquad (۱۶۷)$$

که $\lambda_\kappa=\kappa+H$. برای بدست آوردن ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع متناظر از تبدیلات زیر در حالت اسپینی استفاده کرده و نتایج قسمت شبه اسپینی را بدست آورد

$$F_{n\kappa}(r)\leftrightarrow G_{n\kappa}(r),\ \kappa\to\kappa-1,\ V(r)\to -V(r)(\text{ i.e., } V_1\to -V_1,\ V_2\to -V_2),$$

$$\mathrm{E}_{n\kappa} \to -E_{n\kappa},\ C_s \to -C_{ps}. \qquad (۱۶۸)$$

بنابراین ویژه مقادیر انرژی بصورت زیر بدست آورده می‌شوند

$$-\left(2n+1+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{4V_2\left(E_{n\kappa}-M-C_{ps}\right)}{\alpha^2}}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(2\lambda_\kappa-1\right)^2+\frac{4V_1\left(E_{n\kappa}-M-C_{ps}\right)}{\alpha^2}}\right)^2$$
$$=\frac{1}{\alpha^2}\left(M+E_{n\kappa}\right)\left(M-E_{n\kappa}+C_{ps}\right)+\lambda_\kappa(\lambda_\kappa-1)d_0. \qquad (۱۶۹)$$

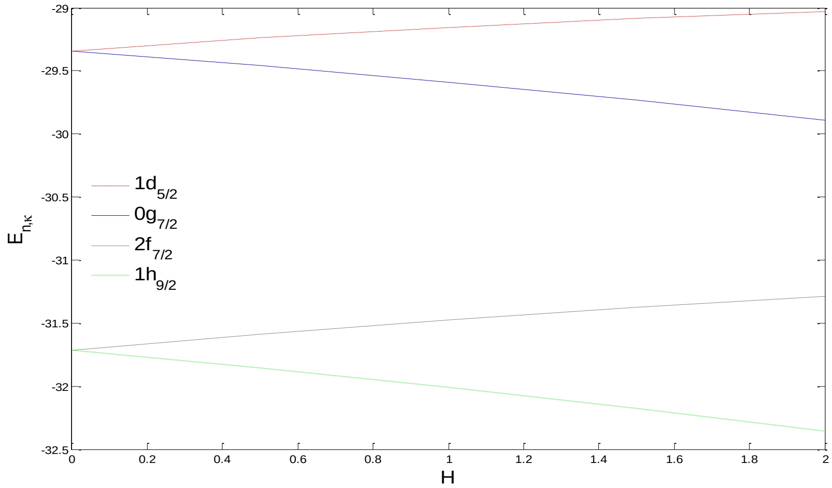
همچنین تابع موج مولفه پایینی دیراک بصورت زیر داده می‌شوند

$$G_{n\kappa}(r)=\tilde{N}_{n,\kappa}(\sin(\alpha r))^{\frac{1}{2}\left(1+\tilde{\xi}_\kappa\right)}(\cos(\alpha r))^{\frac{1}{2}\left(1+\tilde{\delta}\right)}P_n^{\left(\frac{1}{2}\tilde{\xi},\frac{1}{2}\tilde{\delta}\right)}(\cos(2\alpha r)), \qquad (۱۷۰)$$

با

$$\tilde{\xi}_\kappa=\sqrt{\left(2\lambda_\kappa-1\right)^2+\frac{4V_1\left(E_{n\kappa}-M-C_{ps}\right)}{\alpha^2}},\quad \tilde{\delta}=\sqrt{1+\frac{4V_2\left(E_{n\kappa}-M-C_{ps}\right)}{\alpha^2}}, \qquad (۱۷۱)$$

در شکل ۵-۸ اثر پتانسیل تانسوری را روی دو جفت شبه اسپینی $\left(1d_{5/2},0g_{7/2}\right)$ و $\left(2f_{7/2},1h_{9/2}\right)$ نشان دادیم. هنگامیکه $H=0$ می‌توانیم تبهگنی را مشاهده کنیم. همچنین هنگامیکه پتانسیل تانسوری افزایش می‌یابد، تبهگنی از بین می‌رود و ترازها از هم فاصله می‌گیرند، زیرا جمله $2\kappa H$ باعث تفاوت انرژی در دو تراز تبهگن می‌شود.



شکل۵-۸ تاثیر پتانسیل تانسوری روی جفت‌های شبه اسپینی در حضور پتانسیل tPT.

۵-۹-۱ حد غیرنسبیتی پتانسیل tPT

در این قسمت ویژه مقادیر و ویژه توابع پتانسیل tPT را در حالت غیرنسبیتی از مولفه بـالایی در حالـت اسـپینی بـا تبدیلات $C_S = 0,$ ، $\kappa \to l,$ ، $E_{n\kappa} - M \approx E_{nl}$ و $M + E_{n\kappa} \approx 2m.$ بدست می‌آوریم. بنـابراین ویـژه مقـادیر انرژی بصورت بدست می‌آیند [۱۱۸]

$$E_{nl} = \frac{\hbar^2\alpha^2 l(l+1)d_0}{2m} + \frac{2\hbar^2\alpha^2}{m}\left[n + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\sqrt{(2l+1)^2 + \frac{8mV_1}{\hbar^2\alpha^2}} + \sqrt{1 + \frac{8mV_2}{\hbar^2\alpha^2}}\right)\right]^2. \qquad (۱۷۲)$$

و هنگامیکه $\alpha \to 0$، انرژی فوق بفرم زیر تبدیل می‌شود

$$\lim_{\alpha\to 0} E_{nl} = \left(\sqrt{V_1} + \sqrt{V_2}\right)^2. \qquad (۱۷۳)$$

نتایج بخش غیرنسبیتی پتانسیل tPT را در جدول ۵-۱۴ نشان دادیم و حد فوق در جدول زیر قابل مشاهده است.

جدول ۵-۱۴ ویژه مقادیر انرژی پتانسیل tPT در حالت غیرنسبیتی.

State (n,l)	E_{nl}: $M = 10.0\,\text{fm}^{-1}, V_1 = 5\,\text{fm}^{-1}, V_2 = 3\,\text{fm}^{-1}$					
	$\alpha = 1.2$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.02$	$\alpha = 0.002$
1s	22.87051710	20.32991862	17.95616357	16.83082621	15.85264289	15.75661628
2s	28.29143398	23.68420415	19.50420742	17.57271070	15.92394680	15.76371786
2p	28.64395419	23.82847894	19.53712286	17.58054181	15.92402153	15.76371860
3s	34.28835086	27.2944896	21.11625126	18.33059518	15.99541071	15.77082105
3p	34.67512504	27.44896381	21.15044543	18.33858626	15.99548560	15.77082179
3d	35.43921159	27.75631556	21.21875330	18.35456399	15.99563534	15.77082328
4s	40.86126774	31.16077522	22.79229510	19.10447967	16.06703463	15.77792584
4p	41.28229584	31.32544868	22.82776800	19.11263070	16.06710967	15.77792658
4d	42.11348590	31.65300783	22.89862721	19.12892817	16.06725974	15.77792806
4f	43.33519178	32.14003977	23.00470171	19.15336297	16.06748485	15.77793030

در نهایت ویژه توابع غیرنسبیتی بصورت زیر بدست می‌آیند

$$R_{n,l}(r)=N_{nl}(\sin(\alpha r))^{(1+\eta_l)/2}(\cos(\alpha r))^{(1+\delta)/2}P_n^{(\eta_l/2,\delta/2)}(\cos(2\alpha r)),$$ (۱۷۴الف)

$$\eta_l=\sqrt{(2l+1)^2+\frac{8mV_1}{\hbar^2\alpha^2}},\quad \delta=\sqrt{1+\frac{8mV_2}{\hbar^2\alpha^2}}$$ (۱۷۴ب)

که N_{nl} ثابت نرمالیزاسیون می‌باشد.

۵-۱۰ پتانسیل هلمن

مجموع پتانسیل‌های کولنی و یوکاوا که توسط هلمن پیشنهاد شده است، توسط رابطه زیر داده می‌شود [۱۱۹]

$$V(r)=-\frac{a}{r}+b\frac{e^{-\delta r}}{r},$$ (۱۷۵)

که a و b شدت پتانسیل‌های کولنی و یوکاوا بترتیب هستند. معادله شرودینگرگونه مولفه بالایی دیراک در حضور پتانسیل تانسوری و پتانسیل هلمن بصورت زیر نوشته می شود

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\eta_\kappa(\eta_\kappa-1)}{r^2}-\gamma\left(-\frac{a}{r}+b\frac{e^{-\delta r}}{r}\right)-\beta^2\right]F_{n\kappa}(r)=0,$$ (۱۷۶الف)

$$\eta_\kappa=\kappa+H+1,\ \gamma=M+E_{n\kappa}-C_s \text{ و } \beta^2=(M-E_{n\kappa})(M+E_{n\kappa}-C_s).$$ (۱۷۶ب)

معادله فوق با وجود جمله اسپین-مدار دارای حل دقیق نمی‌باشد، مگر برای حالت $\kappa=-1$ در غیاب پتانسیل تانسوری. بنابراین یک تقریب جدید به فرم زیر معرفی می‌کنیم

$$\frac{1}{r^2}\approx\frac{\delta^2}{(1-e^{-\delta r})^2},$$ (۱۷۷)

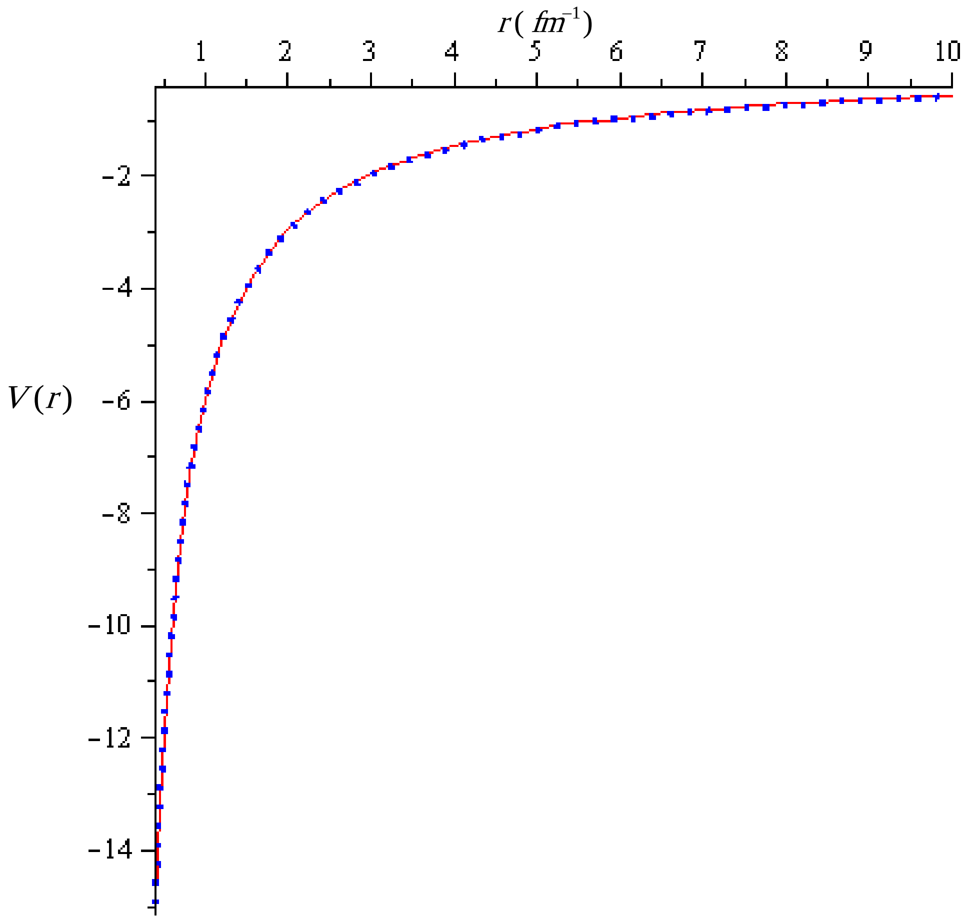
یا

$$\frac{1}{r}\approx\frac{\delta}{1-e^{-\delta r}},$$ (۱۷۸)

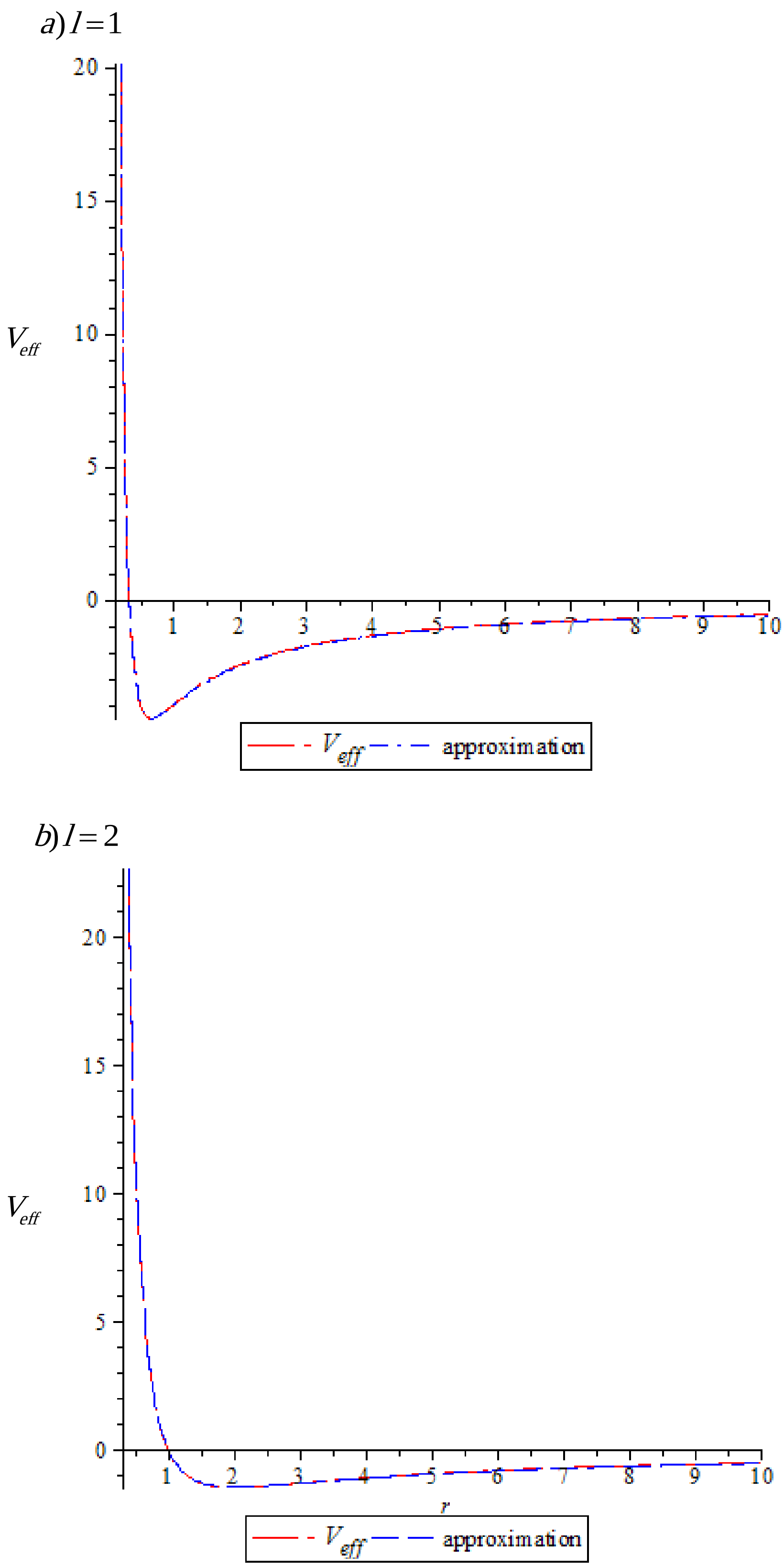
که برای $\delta r<<1$ معتبر می‌باشد. در نتیجه پتانسیل هلمن بصورت تقریبی بصورت زیر نوشته می‌شود

$$V(r) \approx -\frac{\delta a}{1-e^{-\delta r}} + \frac{\delta b e^{-\delta r}}{1-e^{-\delta r}}. \qquad (۱۷۹)$$

برای تست دقت این تقریب، در شکل‌های ۵-۹ و ۵-۱۰ پتانسیل هلمن و تقریب (۱۷۹) و همچنین پتانسیل موثر هلمن و تقریب آن را رسم نمودیم.



شکل۵-۹ پتانسیل هلمن (خط ممتد) و تقریب آن (نقاط توپر).



شکل۵-۱۰ پتانسیل موثر هلمن و تقریب‌های آن.

بنابراین معادله (۱۷۶الف) با تقریب فوق بصورت زیر در می‌آید

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\eta_\kappa\left(\eta_\kappa-1\right)\frac{\delta^2}{(1-e^{-\delta r})^2}-\gamma\left(-\frac{\delta a}{1-e^{-\delta r}}+\frac{\delta b e^{-\delta r}}{1-e^{-\delta r}}\right)-\beta^2\right]F_{n\kappa}\left(r\right)=0. \qquad (۱۸۰)$$

با تغییر متغیر $s=e^{-\delta r}$ معادله فوق بفرم زیر تبدیل می‌شود

$$\left\{\frac{d^2}{ds^2}+\frac{1-s}{s(1-s)}\frac{d}{ds}+\frac{1}{s^2(1-s)^2}\left[-As^2+Bs-C\right]\right\}F_{n,\kappa}(s)=0,$$

$$A=-\frac{\gamma b}{\delta}+\frac{\beta^2}{\delta^2},$$

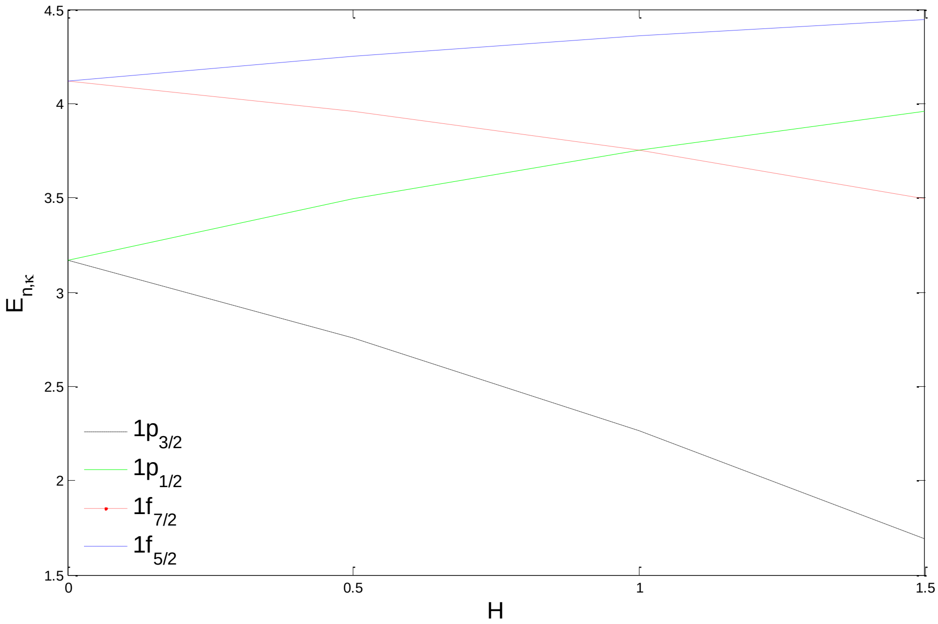
$$B=-\frac{\gamma a}{\delta}-\frac{\gamma b}{\delta}+\frac{2\beta^2}{\delta^2},$$

$$C=\eta_\kappa(\eta_\kappa-1)-\frac{\gamma a}{\delta}+\frac{\beta^2}{\delta^2}. \qquad (۱۸۱)$$

شکل بسته ویژه معادله انرژی در حالت اسپینی برای پتانسیل هلمن بصورت زیر بدست می‌آید [۱۱۹]

$$\eta_\kappa(\eta_\kappa+1)+(n+\eta_\kappa+1)^2+(2n+\eta_\kappa+1/2)\sqrt{\eta_\kappa(\eta_\kappa-1)-\frac{\gamma a}{\delta}+\frac{\beta^2}{\delta^2}}-\frac{\gamma}{\delta}(b-a)=0 \qquad (۱۸۲)$$

شکل ۵-۱۱، نتایج عددی را برای دو جفت اسپینی $\left(1p_{3/2},1p_{1/2}\right)$ و $\left(1f_{7/2},1f_{5/2}\right)$ نشان می‌دهد که از ضـرائب $M=5\,\mathrm{fm}^{-1}$ ،$a=1$ ،$C_s=5.5\,\mathrm{fm}^{-1}$ و $\delta=0.01$ استفاده نمودیم. هنگامیکه $H=0$ می‌تـوانیم تبهگنــی را مشاهده کنیم. همچنین هنگامیکه پتانسیل تانسوری افزایش می‌یابد، تبهگنی از بین می‌رود و ترازها از هم فاصـله می‌گیرند.



شکل۵-۱۱ تاثیر پتانسیل تانسوری روی جفت‌های اسپینی در حضور پتانسیل هلمن.

همچنین تابع موج مولفه بالایی اسپینور دیراک بصورت زیر بدست می‌آید

$$F_{n\kappa}(r)=N_{n\kappa}e^{-\delta\sqrt{C}\,r}\left(1-e^{-\delta r}\right)^{\eta_\kappa}P_n^{(2\sqrt{C},2\eta_\kappa-1)}\left(1-2e^{-\delta r}\right), \qquad (۱۸۳)$$

که $N_{n\kappa}$ ثابت نرمالیزاسیون می‌باشد. در حالت شبه اسپینی، معادله شرودینگرگونه برای مولفه پایینی بصورت زیر نوشته می‌شود

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{\lambda_\kappa(\lambda_\kappa-1)}{r^2}-\tilde{\gamma}\left(-\frac{a}{r}+b\,\frac{e^{-\delta r}}{r}\right)-\tilde{\beta}^2\right]G_{n\kappa}(r)=0, \qquad (\text{الف}۱۸۴)$$

$$\lambda_\kappa=\kappa+H\;\;\tilde{\gamma}=E_{n\kappa}-M-C_{ps}\;\text{و}\;\tilde{\beta}^2=\left(M+E_{n\kappa}\right)\left(M-E_{n\kappa}+C_{ps}\right), \qquad (\text{ب}۱۸۴)$$

با استفاده از تقریب معادلات ۱۷۷-۱۷۹ ، معادله فوق بفرم زیر تبدیل می‌شود

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\lambda_\kappa(\lambda_\kappa-1)\frac{\delta^2}{(1-e^{-\delta r})^2}-\tilde{\gamma}\left(-\frac{\delta a}{1-e^{-\delta r}}+\frac{\delta b e^{-\delta r}}{1-e^{-\delta r}}\right)-\tilde{\beta}^2\right]G_{n\kappa}(r)=0. \qquad (۱۸۵)$$

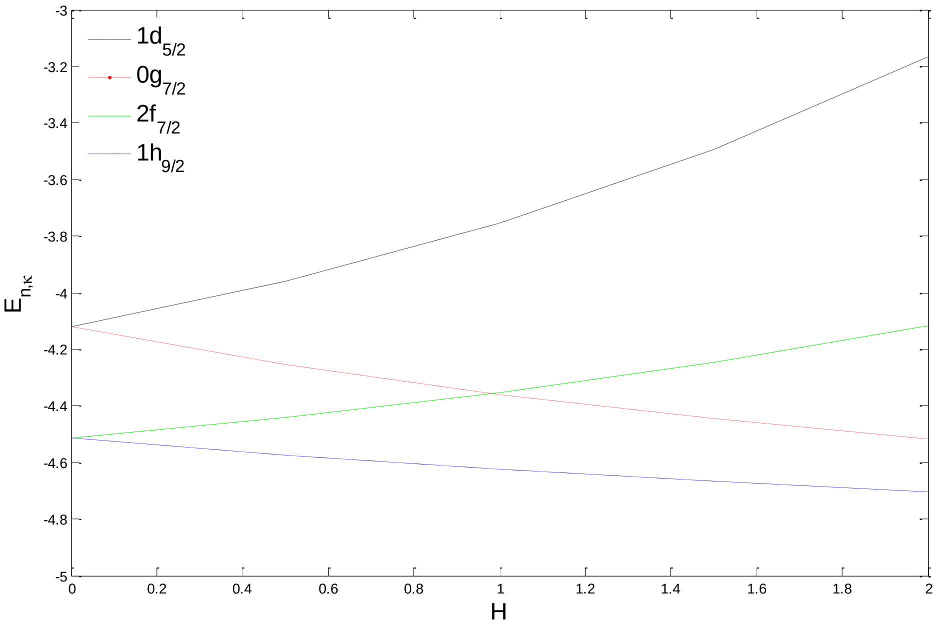
برای جلوگیری از تکرار، با استفاده از تبدیل زیر در حالت اسپینی، نتایج بخش شبه اسپینی قابل استنتاج می‌باشند

$$F_{n\kappa}(r)\leftrightarrow G_{n\kappa}(r),\;\kappa\to\kappa-1,\;V(r)\to -V(r)(\text{ i.e., }V_1\to -V_1,\;V_2\to -V_2),$$
$$\mathrm{E}_{n\kappa}\to -E_{n\kappa},\;C_s\to -C_{ps}. \qquad (۱۸۶)$$

پس، شکل بسته ویژه معادله انرژی در حالت شبه اسپینی برای پتانسیل هلمن بصورت زیر بدست می‌آید [۱۱۹]

$$\lambda_\kappa(\lambda_\kappa-1)+(n+\lambda_\kappa-1)^2+(2n+\lambda_\kappa+1/2)\sqrt{\lambda_\kappa(\lambda_\kappa-1)-\frac{\tilde{\gamma}a}{\delta}+\frac{\tilde{\beta}^2}{\delta^2}}-\frac{\tilde{\gamma}}{\delta}(b-a)=0 \qquad (۱۸۷)$$

شکل ۵-۱۲، نتایج عددی را برای دو جفت شبه اسپینی $\left(1d_{5/2},0g_{7/2}\right)$ و $\left(2f_{7/2},1h_{9/2}\right)$ نشان می‌دهد که از ضرائب $M=5\,\mathrm{fm}^{-1}$ ،$a=1$ ،$C_s=5.5\,\mathrm{fm}^{-1}$ و $\delta=0.01$ استفاده نمودیم. هنگامیکه $H=0$ می‌توانیم تبهگنی را مشاهده کنیم. همچنین هنگامیکه پتانسیل تانسوری افزایش می‌یابد، تبهگنی از بین می‌رود و ترازها از هم فاصله می‌گیرند.



شکل۵-۱۲ تاثیر پتانسیل تانسوری روی جفت‌های شبه اسپینی در حضور پتانسیل هلمن.

ویژه مقادیر و ویژه توابع پتانسیل هلمن را در حالت غیرنسبیتی از مولفه بالایی در حالت اسپینی با تبدیلات $C_S=0,$ ،$\kappa\to l,$ ،$E_{n\kappa}-M\approx E_{nl}$ و $M+E_{n\kappa}\approx 2m.$ بدست می‌آوریم. بنابراین ویژه مقادیر انرژی بصورت بدست می‌آیند

$$E_{nl}=-\frac{\delta^2}{2m}\left[\left(\frac{\frac{2m}{\delta}(a-b)-(n+l+1)^2-l(l+1)}{2(n+l+1)}\right)^2-l(l+1)+\frac{2ma}{\delta}\right] \qquad (۱۸۸)$$

در جدول ۵-۱۵ نتایج عددی پتانسیل هلمن غیرنسبیتی در واحد $\hbar=c=1$ نشان داده شده و با نتایج دیگران مقایسه شده‌اند

جدول ۵-۱۵ ویژه مقادیر انرژی پتانسیل هلمن در حالت غیرنسبیتی.

State	δ	$b=+1$		$b=-1$	
		NU	Ref. [۹۲]	NU	Ref. [۹۲]
1s	0.001	-0.251500	-0.250999	-2.250500	-2.24900
	0.005	-0.257506	-0.254963	-2.252506	-2.24501
	0.01	-0.265025	-0.259852	-2.255025	-2.24005
2s	0.001	-0.064001	-0.063494	-0.563001	-0.561502
	0.005	-0.070025	-0.067353	-0.565025	-0.557550
	0.01	-0.077600	-0.071928	-0.567600	-0.552697
2p	0.001	-0.064000	-0.063495	-0.563000	-0.561502
	0.005	-0.070000	-0.067377	-0.565000	-0.557541
	0.01	-0.077500	-0.072020	-0.567500	-0.552664
3s	0.001	-0.029280	-0.028764	-0.250502	-0.249004
	0.005	-0.035334	-0.032457	-0.252556	-0.245111
	0.01	-0.043003	-0.036557	-0.255225	-0.240435
3p	0.001	-0.029279	-0.028765	-0.250501	-0.249004
	0.005	-0.035309	-0.032480	-0.252531	-0.245103
	0.01	-0.042903	-0.036644	-0.255125	-0.240404
3d	0.001	-0.029388	-0.028767	-0.250833	-0.249003
	0.005	-0.035817	-0.032526	-0.254151	-0.245086
	0.01	-0.043825	-0.036813	-0.258269	-0.240341
4s	0.001	-0.029280	-0.016601	-0.141129	-0.139633
	0.005	-0.035334	-0.020077	-0.143225	-0.135819
	0.01	-0.043003	-0.023551	-0.146025	-0.131381
4p	0.001	-0.017128	-0.016602	-0.141128	-0.139633
	0.005	-0.023200	-0.020098	-0.143200	-0.135811
	0.01	-0.030925	-0.023641	-0.145925	-0.131351
4d	0.001	-0.017189	-0.016604	-0.141314	-0.139632
	0.005	-0.023464	-0.020142	-0.144089	-0.135796
	0.01	-0.031356	-0.023814	-0.147606	-0.131290
4f	0.001	-0.017311	-0.016607	-0.141686	-0.139631
	0.005	-0.024027	-0.020206	-0.145902	-0.135772
	0.01	-0.032356	-0.024056	-0.151106	-0.131200

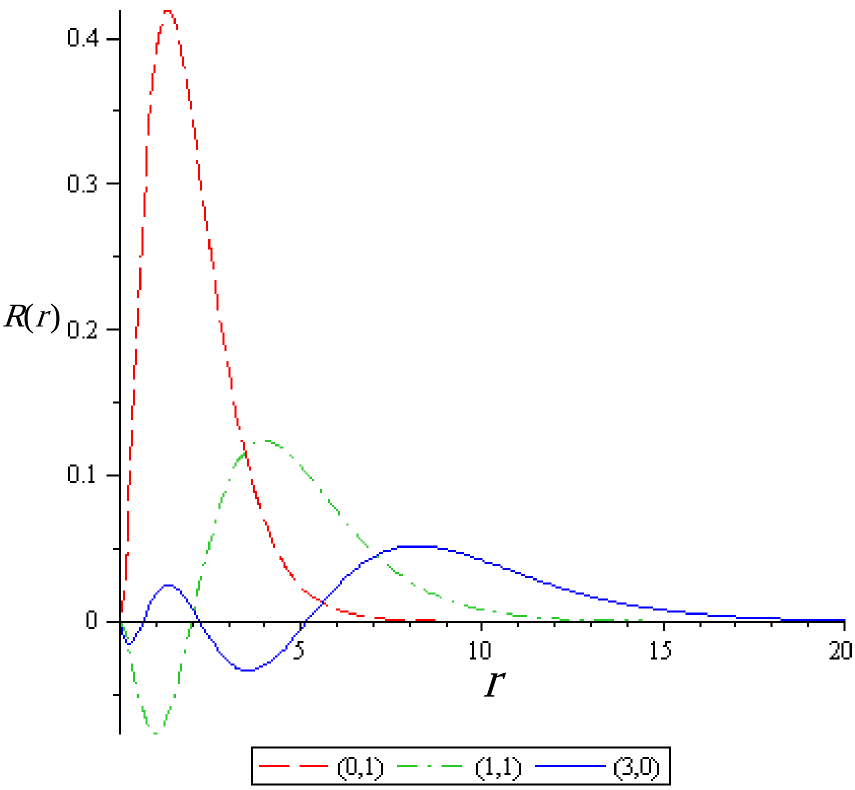
جدول ۵-۱۵ ادامه

State	δ	$b=-2$		$b=-4$	
		NU	Ref. [۹۲]	NU	Ref. [۹۲]
1s	0.001	-4.000000	-3.998000	-8.999000	-8.996000
	0.005	-4.000006	-3.990020	-8.995006	-8.980020
	0.01	-4.000025	-3.980070	-8.990025	-8.960100
2s	0.001	-1.000001	-0.998000	-2.249001	-2.246000
	0.005	-1.000025	-0.990075	-2.245025	-2.230100
	0.01	-1.000100	-0.980297	-2.240100	-2.210400
2p	0.001	-1.000000	-0.998002	-2.249000	-2.246000
	0.005	-1.000000	-0.990062	-2.245000	-2.230080
	0.01	-1.000000	-0.980248	-2.240000	-2.210330
3s	0.001	-0.444447	-0.442451	-0.999002	-0.996009
	0.005	-0.444501	-0.434611	-0.995056	-0.980220
	0.01	-0.444669	-0.425103	-0.990225	-0.960885
3p	0.001	-0.444446	-0.442451	-0.999001	-0.996008
	0.005	-0.444476	-0.434599	-0.995031	-0.980207
	0.01	-0.444569	-0.425055	-0.990125	-0.960820
3d	0.001	-0.444888	-0.442450	-0.999666	-0.996007
	0.005	-0.446651	-0.434574	-0.998317	-0.980174
	0.01	-0.448825	-0.424959	-0.996603	-0.960691
4s	0.001	-0.250004	-0.248012	-0.561504	-0.558516
	0.005	-0.250100	-0.240294	-0.557600	-0.542894
	0.01	-0.250400	-0.231150	-0.552900	-0.524055
4p	0.001	-0.250003	-0.248011	-0.561503	-0.558515
	0.005	-0.250075	-0.240281	-0.557575	-0.542878
	0.01	-0.250300	-0.231103	-0.552800	-0.523991
4d	0.001	-0.250251	-0.248010	-0.561876	-0.558514
	0.005	-0.251277	-0.240257	-0.559402	-0.542845
	0.01	-0.252606	-0.231011	-0.556356	-0.523865
4f	0.001	-0.250749	-0.248009	-0.562624	-0.558512
	0.005	-0.253714	-0.240221	-0.563089	-0.542797
	0.01	-0.257356	-0.230872	-0.563606	-0.523674

همچنین تابع موج در حالت غیرنسبیتی به فرم زیر تبدیل می‌شود

$$R_{nl}(r)=N_{nl}e^{-\sqrt{-2m(E+\delta a)+l(l+1)\delta^2}\,r}\left(1-e^{-\delta r}\right)^{l+1}P_n^{\left(2\sqrt{\frac{-2m}{\delta^2}(E+\delta a)+l(l+1)},\,2l+1\right)}\left(1-2e^{-\delta r}\right). \qquad (۱۸۹)$$

در شکل ۵-۱۳، تابع موج نرمالیزه را برای چند حالت مختلف رسم نمودیم.



شکل۵-۱۳تابع موج نرمال شده برای پتانسیل هلمن در حد غیر نسبیتی.

سرانجام، هنگامیکه δ بسمت صفر میل می‌کند و همچنین $b=0$، پتانسیل هلمن به پتانسیل کولنی تبدیل می‌شود و ویژه مقادیر پتانسیل کولنی از معادله (۱۸۸) بصورت زیر قابل استنتاج می‌باشد

$$E_{n,l_{Coulomb}} = -\frac{1}{2} m \frac{a^2}{n'^2} \qquad (۱۹۰)$$

که $n' = n + l + 1$ [۱۲۰].

۵-۱۱ معادله دیراک در حضور پتانسیل‌های اسکالر، برداری و شبه اسکالر کولنی در ابعاد ۱+۱

معادله دیراک در ابعاد ۱+۱ برای یک ذره اسپین- با جرم تحت پتانسیل‌های اسکالر V_S، برداری V_V و شبه اسکالر V_P در واحد $\hbar = c = 1$ بصورت زیر نوشته می‌شود[۱۲۱-۱۲۵]

$$H\psi = E\psi,$$

$$H = \sigma_1 p + \sigma_3 m + \frac{1+\sigma_3}{2}\Sigma + \frac{1-\sigma_3}{2}\Delta + \sigma_2 V_p \qquad (۱۹۱)$$

که در آن $\Sigma = V_V + V_S$ و $\Delta = V_V - V_S$. ارتباط رابطه فوق با معادله دیراک در چهار بعد بصورت زیر می‌باشد

$$\sigma_1 \to \vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma}, \qquad \sigma_2 \to \gamma^5, \qquad \sigma_3 \to \beta = \gamma^0 \tag{۱۹۲}$$

که $\gamma^5 = i\,\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. اگر تابع موج را بصورت $\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}$ فرض کنیم، دو معادله درجه اول برای مولفـه بـالایی ψ_+ و مولفه پایینی ψ_- اسپینورهای دیراک بصورت زیر در می‌آیند

$$-i\,\frac{d\psi_-}{dx} + m\psi_+ + \Sigma\psi_+ - iV_p\psi_- = E\psi_+ \tag{۱۹۳}$$

$$-i\,\frac{d\psi_+}{dx} - m\psi_- + \Delta\psi_- + iV_p\psi_+ = E\psi_- \tag{۱۹۴}$$

همچنین اسـپینورها توسـط رابطـه $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(|\psi_+|^2 + |\psi_+|^2\right)dx = 1$ نرمـالیزه مـی‌شـوند. در حالـت شـبه اسـپینی، هنگامیکه $\Delta = 0$ و $E \neq -m$، معادلات فوق بفرم زیر تبدیل می‌شوند

$$\psi_-(x) = -i\,\frac{\left(\dfrac{d\psi_+(x)}{dx} - V_p\psi_+(x)\right)}{E+m} \tag{۱۹۵الف}$$

$$-\frac{d^2\psi_+(x)}{dx^2} + \left[(E+m)\Sigma + V_p^2 + \frac{dV_p}{dx}\right]\psi_+(x) = (E^2 - m^2)\psi_+(x) \tag{۱۹۵ب}$$

و در حالت شبه اسپینی، $\Sigma = 0$ و $E \neq m$ ، معادله دیـراک مـی‌توانـد بـا تبـدیلات $\psi_+ \leftrightarrow \psi_-$، $m \to -m$، $\Sigma \to \Delta$ و $V_p \to -V_p$ بدست آید. اگر در معادلات فوق $C_s = 0$ و همچنین پتانسیل‌های اسکالر-برداری-شبه برداری را بصورت پتانسیل کولنی یک بعدی در نظر بگیریم

$$\Sigma = -\frac{a_s}{|x|} \tag{۱۹۶الف}$$

$$V_p = -\frac{a_p}{|x|} \tag{۱۹۶ب}$$

و همینطور برای جرم داشته باشیم

$$m(x) = m_0 + \frac{m_1}{|x|} \tag{۱۹۷}$$

معادله دیفرانسیل شرودینگرگونه برای مولفه بالایی بصورت ψ_+ زیر در می‌آید [۱۲۶]

$$\frac{d^2\psi_+(x)}{dx^2} + \left[-\varepsilon^2 + \frac{A_s}{|x|} - \frac{A_p^2}{|x|^2}\right]\psi_+(x) = 0 \tag{۱۹۸}$$

کـــه $\varepsilon^2 = m_0^2 - E^2$ ، $A_s = a_s(E+m_0) - 2m_0 m_1$ و $A_p^2 = a_p(a_p+1) + m_1^2 - m_1 a_s$. توابـــع مـــوج معادله فوق می‌توانند بذ اساس چند جمله‌ایهای Whittaker بیان شوند. امـا بـا در نظـر گـرفتن نـیم خـط مثبـت $x \geq 0$ و تغییر متغیر $\psi_+(x) = x^{1/2}\varphi_+(x)$ معادله فوق بصورت زیر تبدیل می‌شود

$$\left\{\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} + \frac{1}{x^2}\left[-\varepsilon^2 x^2 + A_s x - \nu_p^2\right]\right\}\varphi_+(x) = 0, \tag{۱۹۹}$$

که

$$\nu_p^2 = A_p^2 + \frac{1}{4} = \left(a_p + \frac{1}{2}\right)^2 + m_1^2 - m_1 a_s. \tag{۲۰۰}$$

با پیروی از مرجع[۲۰] ، ویژه مقادیر انرژی معادله فوق بصورت زیر بدست می‌آیند [۱۲۶]

$$\varepsilon = \frac{A_s}{\left(1+2n+2\nu\right)}, \tag{۲۰۱}$$

و یا بطور واضح

$$(E-m_0)(E+m_0) = -\frac{\left(a_s(E+m_0) - 2m_0 m_1\right)^2}{4\left[n + \sqrt{\left(a_p + \frac{1}{2}\right)^2 + m_1^2 - m_1 a_s} + \frac{1}{2}\right]^2} \tag{۲۰۲}$$

همچنین ویژه توابع بصورت زیر بیان می‌شوند

$$\varphi_+(x) = x^{\nu_p} e^{-\varepsilon x} L_n^{2\nu_p}(2\varepsilon x), \tag{۲۰۳}$$

ازاینرو، ویژه توابع اسپینور بالایی دیراک بصورت زیر می‌توانند نوشته شوند [۱۲۶]

$$\begin{aligned}\psi_+(x) &= \mathbf{N} e^{-\varepsilon x} x^{\nu_p + 1/2} L_n^{2\nu_p}(2\varepsilon x) \\ &= \mathbf{N}\frac{\Gamma(n+2\nu_p+1)}{n!\,\Gamma(2\nu_p+1)} e^{-\varepsilon x} x^{\nu_p+1/2}\, {}_1F_1\left(-n, 2\nu_p+1, 2\varepsilon x\right),\end{aligned} \tag{۲۰۴}$$

کــه $\mathbf{N}$ ثابــت نرمالیزاســیون مــی‌باشــد و از رابطــه بــین چنــد جملــه‌ایهــای لاگــر و فــوق هندســی بصــورت $L_n^p(x) = \frac{\Gamma(n+p+1)}{n!\,\Gamma(p+1)}\, {}_1F_1(-n, p+1, x)$ استفاده نمودیم. توابع مـوج فـوق در شـرایط مـرزی $x \to 0$ و $x \to \infty$ با شرط $\nu_p > -1/2$ نیز صادق می‌باشند. توابع موج اسپینور پایینی دیزاک نیز از رابطه زیر بدست می-آیند

$$\psi_-(x)=-i\,\frac{\left(\frac{d\psi_+(x)}{dx}+\frac{a_p}{x}\psi_+(x)\right)}{E+m} \qquad (۲۰۵)$$

۵-۱۲ معادله دیراک در حضور پتانسیل‌های اسکالر، برداری و شبه اسکالر کرنل در ابعاد ۱+۱

پتانسیل کرنل به فرم $V(x)=-\frac{a}{x}+bx$، که از مجموع پتانسیل‌های کولنی و خطی تشکیل شده است، مورد توجه بسیاری از فیزیکدادنان در شاخ‌های فیزیک ذرات بنیادی و هسته‌ای می‌باشد [۱۲۷-۱۳۰]. در این قسمت، پتانسیل‌های مورد نظر را بصورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\Sigma=-\frac{a_s}{x}+b_s x \qquad (۲۰۶الف)$$

$$V_p=-\frac{a_p}{x}+b_p x \qquad (۲۰۶ب)$$

با استفاده از معادله ، معادله دیراک برای اسپینور بالایی بصورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{d^2\psi_+}{dx^2}+\left[\varepsilon^2+b_p(2a_p-1)+\frac{\eta a_s}{x}-b_p^2x^2-\frac{a_p(a_p+1)}{x^2}-\eta b_s x\right]\psi_+=0 \qquad (۲۰۷)$$

که در آن $C_s=0$، $\varepsilon^2=E^2-m^2$ و $\eta=E+m$. معادله فوق برحسب توابع biconfluent Heun بیان می شود [۱۳۱]. با تعریف تغییر متغیر

$$z=\sqrt{b_p}\,x \qquad (۲۰۸)$$

معادله شعاعی فوق به رابطه زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{d^2\psi_+(z)}{dz^2}+\left(\frac{\xi}{b_p}+\frac{\gamma}{z^2}+\frac{\delta}{z}+\frac{\lambda z}{b_p}-z^2\right)\psi_+(z)=0 \qquad (۲۰۹)$$

که

$$\xi=\varepsilon^2+b_p(2a_p-1)$$

$$\gamma=-a_p(a_p+1)$$

$$\delta = \frac{\eta a_s}{\sqrt{b_p}}$$

$$\lambda = -\frac{\eta b_s}{\sqrt{b_p}} \tag{۲۱۰}$$

بمنظور بدست آوردن ویژه مقادیر انرژی، حالات حدی رابطه فـوق را در $z \to 0$ و $z \to \infty$ در نظـر مـی‌گیـریم. بنابراین، تابع $\psi_+(z)$ را می‌توانیم بصورت زیر در نظر بگیریم [۱۳۲]

$$\psi_+(z) = z^{\beta} e^{-\frac{1}{2}z\left(z-\frac{\lambda}{b_p}\right)} H(z) \tag{۲۱۱}$$

با

$$\beta = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma} = a_p + 1 \tag{۲۱۲}$$

بعد از جایگذاری تابع فوق در معادله (۲۰۹)، بدست می‌آوریم

$$z\frac{d^2H(z)}{dz^2} + \left[2\beta + \frac{\lambda}{b_p} - 2z^2\right]\frac{dH(z)}{dz}$$
$$+\left(\beta\frac{\lambda}{b_p} + \delta + \left(\frac{\xi}{b_p} + \frac{\lambda^2}{4b_p^2} - 2\beta - 1\right)z\right)H(z) = 0 \tag{۲۱۳}$$

معادلـه فـوق معادلـه دیفرانسـیل biconfluent Heun مـی‌باشـد کـه جـواب آن توابـع biconfluent Heun (BCH)، H_B، نامیده می‌شود [۱۳۱]. با استفاده از روش فروبنیوس بصورت

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{۲۱۴}$$

رابطه بازگشتی برای ضرائب بصورت زیر بدست می‌آید [۱۳۲]

$$c_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(2\beta+n+1)}\left[\left(-\frac{\lambda}{b_p}(n+1) - B\right)c_{n+1} + (2n - C)c_n\right] \tag{۲۱۵}$$

و همچنین

$$c_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{b_p} + \frac{\delta}{\beta}\right)c_0 \qquad (۲۱۶)$$

که

$$B = \beta\frac{\lambda}{b_p} + \delta$$

$$C = \frac{\xi}{b_p} - 2\beta - 1 + \frac{\lambda}{4b_p^2} \qquad (۲۱۷)$$

با توجه به دو شرط

$$C = 2n, \qquad (۲۱۸)$$

و

$$c_{n+1} = 0. \qquad (۲۱۹)$$

و همچنین با در نظر گرفتن $c_0 = 1$، با استفاده از رابطه بازگشتی (۲۱۵) ، دو ضریب دیگر را بصورت زیر بدست می‌آوریم [۱۳۲]

$$c_2 = \frac{1}{2(2\beta+1)}\left[\left(\frac{\lambda}{b_p} + B\right)\left(\frac{\lambda}{2b_p} + \frac{\delta}{2\beta}\right) - C\right],$$

$$c_3 = \frac{1}{6(\beta+1)}\left\{\frac{1}{2(2\beta+1)}\left(-\frac{2\lambda}{b_p} - B\right)\left[\left(\frac{\lambda}{b_p} + B\right)\left(\frac{\lambda}{2b_p} + \frac{\delta}{2\beta}\right) - C\right]\right.$$
$$\left. + (C-2)\left(\frac{\lambda}{2b_p} + \frac{\delta}{2\beta}\right)\right\}. \qquad (۲۲۰)$$

شرط $C = 2n$ طیف انرژی را بصورت زیر بدست می‌دهد

$$E^2 - m^2 - (E+m)b_s\sqrt{b_p} - 2b_p(n + a_p + 3/2) = 0 \qquad (۲۲۱)$$

برای حالتی تابع $H(z)$ که چند جمله‌ای Heun از درجه اول شود، خواهیم داشت

$$H(z)=1+c_1 z=1-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{b_p}+\frac{\delta}{\beta}\right)z \qquad (۲۲۲)$$

و همچنین برای طیف انرژی خواهیم داشت [۱۳۲]

$$E^2-m^2-(E+m)b_s\sqrt{b_p}-2b_p(a_p+5/2)=0 \qquad (۲۲۳)$$

سرانجام برای حالت شبه اسپینی، $\Sigma=0$ و $E\neq m$، معادله دیراک برای اسپینور پایینی دیراک با تبدیل $\psi_+\leftrightarrow\psi_-$، $m\to -m$، $\Sigma\to\Delta$ و $V_p\to -V_p$ بدست می‌آید. شایان ذکر است نتایج فوق هنگامی برای معادله دیراک در ۳+۱ بعد قابل تعمیم می‌باشد که پتانسیل تانسوری جایگزین پتانسیل شبه اسکالر شود.

نتیجه‌گیری

در هامیلتونی دیراک، هنگامیکه یک پتانسیل اسکالر لورنتس و یک پتانسیل برداری لورنتس (فقط با یک جزء زمانی) مساوی در اندازه و علامت باشند، تقارن اسپینی در هسته تولید خواهد شد که حالت‌های $np_{1/2}$ و $np_{3/2}$ و همچنین حالت‌های $nd_{3/2}$ و $nd_{5/2}$ تبهگن خواهند بود که بعنوان جفت اسپینی شناخته می‌شوند. اما هنگامیکه یک پتانسیل اسکالر لورنتس و یک پتانسیل برداری لورنتس (فقط با یک جزء زمانی) مساوی در اندازه ولی مخالف در علامت، یک تقارن شبه اسپینی تولید خواهد شد. در این تقارن، حالت‌های $1s_{1/2}$ و $0d_{3/2}$ و همچنین حالت‌های $1p_{3/2}$ و $0f_{5/2}$ تبهگن خواهند بود، که جفت شبه اسپینی می‌باشند؛ یعنی حالتهای تبهگن در اندازه حرکت زاویه ای به اندازه ۲ واحد اختلاف دارند. با توجه به مشاهده تقارن شبه اسپینی در طیف هسته‌ها، بررسی تحلیلی آنها می‌تواند خیلی مفید واقع شود. در این رساله، پس از بررسی تقارن‌های کروی دیراک، این تقارن‌ها را با پتانسیل‌های Mie و Eckart، کرنل، شبه هارمونیک، ... بررسی کردیم و مشاهده نمودیم که جفت‌های اسپینی و شبه اسپینی دارای تبهگنی هستند. سپس با کمک پتانسیل‌های تانسوری خطی و کولنی توانستیم این تبهگنی را از بین ببریم. در این رساله، اثر پتانسیل تانسوری را روی جفت‌های اسپینی نظیر $\left(1f_{7/2},1f_{5/2}\right)$ و $\left(1p_{3/2},1p_{1/2}\right)$ و جفت‌های شبه اسپینی نظیر $\left(1d_{5/2},0g_{7/2}\right)$ و $\left(2f_{7/2},1h_{9/2}\right)$ بررسی نمودیم بطوریکه در غیاب پتانسیل تانسوری می‌توانیم تبهگنی را مشاهده کنیم. همچنین هنگامیکه پتانسیل تانسوری افزایش می‌یابد، تبهگنی از بین می‌رود و ترازها از هم فاصله می‌گیرند، زیرا جمله $2\kappa H$ باعث تفاوت انرژی در دو تراز تبهگن می‌شود. شایان ذکر است که بررسی مساله دیراک در ابعاد ۱+۱ با

پتانسیل‌های شبه اسکالر همانند بررسی آن در ابعاد ۳+۱ می‌باشد که در بعضی موارد، حل مساله در ابعاد ۱+۱ می‌تواند مفید باشد.

بسیاری از پتانسیل‌های هسته‌ای دارای حل تحلیلی و دقیق نمی‌باشند. در نتیجه با استفاده از یک تقریب مناسب برای جمله اسپین-اوربیت مرکزی، این مسائل را بطور تقریبی حل می‌کنیم. همچنین برای حل معادله دیراک از روش قدرتمند Nikiforov-Uvarov (NU) کمک گرفتیم. روش NU برای حل معادلات دیفرانسیل درجه دوم شبه شرودینگر بکار برده می‌شود که استفاده از آن در این رساله می‌تواند بسیار ارزشمند و جالب ولی در عین حال ساده در مقایسه با روش‌هایی مثل SUSY، AIM، CPT، ... باشد. اما در ادامه، بررسی این تقارن‌ها در هسته با پتانسل واقعی‌تر هسته‌ای نظیر Generalized Woods-Saxon Potential، Hulthén، Pöschl-Teller، ... بسیار ارزشمند خواهد بود.

در نتیجه نتایج ما برای تحقیقات آینده در تقارن اسپینی و شبه اسپینی معادله دیراک می‌تواند مفید باشد. بطور ویژه، تاثیر پتانسل‌های تانسوری بر روی جفت‌های اسپینی و شبه اسپینی برای سیستم‌های فیزیکی می‌تواند بطور عمیق‌تر مورد مطالعه قرار گیرد. همچنین پیشنهاد می‌شود که مساله دیراک با پتانسیل‌های تانسوری غیر از خطی و کولنی مورد مطالعه قرار گیرد تا نتایج حاصله با نتایج موجود مقایسه شوند و تحلیل‌های جدیدتری از این پتانسیل‌ها انجام شود.

در انتها شایان ذکر می‌باشد که در فرآیند مطالعات و گردآوری مطالب مربوط به این رساله، با برخی مسایل جالب در زمینه فیزیک اتمی- مولکولی مواجه شدیم که مسایل را بطور تحلیلی حل نموده و در مجلات مربوطه گزارش دادیم [۱۳۳-۱۳۷]. در مقالات ذکر شده مولکول‌های دواتمی را مورد مطالعه قرار داده و طیف آنها را بدست آورده و با نتایج تجربی یا نتایج دیگران مورد مقایسه قرار دادیم.

مراجع

[1]. K. S. Krane, Introductory Nuclear Physics, John Wiley & Sons, 1988.

[2]. W. E. Meyerhof, Elements of Nuclear Physics, McGraw-Hill Book Company.

[3]. W. Gereiner, "Relativistic Quantum Mechanics, Wave Equations" (Third Edition) Springer 2000.

[4]. G. B. Smith and L. J. Tassie, Ann. Phys. **65** (1971) 352.

[5]. J. S. Bell and H. Ruegg, Nucl. Phys. B **98** (1975) 151.

[6]. K. Hecht and A. Adler, Nucl. Phys. A **137** (1969) 129.

[7]. J. N. Ginocchio, Phys. Rev. Lett. 78 (1997) 436.

[8]. J. N. Ginocchio and D.G. Madland, Phys. Rev. C **57** (1998) 1167.

[9]. J. N. Ginocchio and A. Leviatan, Phys. Lett. B **245** (1998) 1.

[10]. A. Leviatan and J. N. Ginocchio, Phys. Lett. B **518** (2001) 214.

[11]. J. N. Ginocchio, Phys. Rev. C **66** (2002) 064312.

[12]. J. N. Ginocchio, Phys. Rev. C **69** (2004) 034318.

[13]. J .N. Ginocchio, A. Leviatan, J. Meng and S.G. Zhou, Phys. Rev. C **69** (2004) 034303.

[14]. J. N. Ginocchio, Phys. Rep. **414** (2005) 165.

[15]. T. D. Cohen, R. J. Furnstahl, D. K. Griegel, X. Jin, Prog. Part. Nucl. Phys. **35** (1995) 221.

[16]. J. Gasser, H. Leutwyler, M. E. Saino, Phys. Lett. B **253** (1991) 252.

[17]. M. E. Saino, Proceedings of the Ninth International Symposium on Meson–Nucleon Physics and the Structure of theNucleon, District of Columbia, 26–31 July 2001, hep-ph/0110413.

[18]. M. Gell–Mann, R. J. Oakes, B. Renner, Phys. Rev. **175** (1968) 2195.

[19]. A. F. Nikiforov and V. B. Uvarov, "Special Functions of Mathematical Physic", Birkhausr, Berlin, 1988.

[20]. C. Tezcan and R. Sever, Int. J. Theor. Phys. **48** (2009) 337.

[21]. B. Champion, Richard L. Hall, N. Saad, Int. J. Mod. Phys. A **23** (2008) 1405-1415.

[22]. H. Ciftci, Richard L. Hall and N. Saad, J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003) 11807-11816.

[23]. F. M. Fernandez, J. Phys. A: Math. Gen. **37** (2004) 6173-6180.

[44]. H. Ciftci, Richard L. Hall and N. Saad, J. Phys. A: Math. Gen. **38** (2005) 1147-1156.

[25]. H. Ciftci, Richard L. Hall and N. Saad, Phys. Lett. A **340** (2005) 388-396.

[26]. P. M. Morse, Phys. Rev. **34** (1929) 57.

[27]. S. Ikhdair and R. Sever, Cent. Eur. J. Phys. **6** (2008) 697.

[28]. S. Ikhdair and R. Sever, J. Mol. Struc (Theochem) **13** (2008) 855.

[29]. C. Berkdemir, A. Berkdemir and J. Han, Chem. Phys. Lett **417** (2006) 326.

[30]. O. Aydoğdu, R. Sever, Ann. Phys. **325** (2010) 373.

[31]. M. Hamzavi, A. A. Rajabi and H. Hassanabadi, Phys. Lett. A **374** (2010) 4303.

[32]. M. Hamzavi, A.A. Rajabi, H. Hassanabadi, Few-Body Syst. **48** (2010) 171.

[33]. K. J. Oyewumia and C. O. Akoshileb, Eur. Phys. J. A **45** (2010) 311.

[34]. K. J. Oyewumi, Int. J. Theor. Phys. **49** (2010) 1302.

[35]. J. Meng, K. Sugawara-Tanabe, S. Yamaji and A. Arima, Phys. Rev. C **59** (1999) 154.

[36]. J. Meng, K. Sugawara-Tanabe, S. Yamaji, P. Ring and A. Arima, Phys. Rev. C **58** (1998) R628.

[37]. M. Hamzavi, H. Hassanababdi and A. A. Rajabi, Mod. Phys. Lett. A **25** (2010) 2447.

[38]. M. Hamzavi, A. A. Rajabi and H. Hassanababdi, Few Body Syst. **48** (2010) 171.

[39]. C. S. Jia, L. X. Zeng and L. T. Sun, Phys. Lett. A **294** (2002) 185.

[40]. S. H. Dong, Appl. Math. Lett. **16** (2003) 199.

[41]. Z. Rong,H. G. Kjaergaard and M. L. Sage, Mol. Phys. **101** (2003) 2285.

[42]. C. S. Jia, Y. Li, Y. Sun, J. Y. Liu and L. T. Sun, Phys. Lett. A **311** (2003) 115.

[43]. S. H. Dong, G. H. Sun and M. Lozada-Cassou, Int. J. Mod. Phys. A, **20** (2005) 5663.

[44]. L. H. Zhang, X. P. Li and C. S. Jia, Phys. Lett. A **372** (2008) 2201.

[45]. G. F. Wei and X. Y. Liu, Phys. Scr. **78** (2008) 065009.

[46]. Y. Xu, S. He and C. S. Jia, J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008) 255302.

[47]. S. H. Dong and X. Y. Gu, J. Phys.: Conf. Ser. **96** (2008) 012109.

[48]. A. Soylu, O. Bayrak and I. Boztosun, J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008) 065308.

[49]. W. C. Qiang and S. H. Dong, Phys. Lett. A **372** (2008) 4789.

[50]. G. F. Wei and S. H. Dong, Phys. Lett. A **373** (2008) 49.

[51]. S. Haouat and L. Chetouani, Phys. Scr. **77** (2008) 025005.

[52]. T. Chen, Y. F. Diao and C. S. Jia, Phys. Scr. **79** (2009) 065014.

[53]. T. Chen, J. Y. Liu and C. S. Jia, Phys. Scr. **79** (2009) 055002.

[54]. C. S. Jia, T. Chen and L. G. Cui, Phys. Lett. A **373** (2009) 1621.

[55]. Y. Xu, S. He and C. S. Jia, J. Phys. A: Math. Theor. **42** (2009) 198002.

[56]. F. Taskin, Int. J. Theor. Phys. **48** (2009) 1142.

[57]. X. Y. Liu, G. F. Wei and C. Y. Long, Int. J. Theor. Phys. **48** (2009) 463.

[58]. G. F. Wei, S. H. Dong and V. B. Bezerra, Int. J. Mod. Phys. A **24** (2009) 161.

[59]. W. C. Qiang and S. H. Dong, Phys. Scr. **79** (2009) 045004.

[60]. W. C. Qiang, J. Y. Wu and S. H. Dong, Phys. Scr. **79** (2009) 065011.

[61]. G. F. Wei and S. H. Dong, Europhys. Lett. **87** (2009) 40004.

[62]. A. Arda, R. Sever and C. Tezcan, Ann. Phys. (Berlin) **18** (2009) 736.

[63]. S. M. Ikhdair and R. Sever, Ann. Phys. (Berlin) **16** (2009) 218.

[64]. G. F. Wei and S. H. Dong, Eur. Phys. J. A 43, 185–190 (2010)

[65]. G. F. Wei and S. H. Dong, Phys. Lett. B **686** (2010) 288.

[66]. Sameer M. Ikhdai and R. Sever, Appl. Math. Phys. 316 (2010) 545.

[67]. L. Jiang , L. Z. Yi and C. S. Jia, Phys. Lett. A **345** (2005) 279.

[68]. C. S. Jia, L. Z. Yi and Y. Sun, J. Math. Chem. **43** (2008) 435.

[69]. B. Bagchi, C. Quesne and R. Roychoudhury, J. Phys. A **38** (2005) L647.

[70]. B. Roy and P. Roy, J. Phys. A **38** (2005) 11019.

[71]. C. S. Jia and A. S. Dutra, Int. J. Theor. Phys. **39** (2006) 11877.

[72]. O. Mustafa and S. H. Mazharimousavi, J. Phys. A **40** (2007) 863.

[73]. C. S. Jia, J. Y. Liu , P. Q. Wong and C. S. Che, Phys. Lett. A **369** (2007) 274.

[74]. A. Arda and R. Sever, Chin. Phys. Lett. **26** (2009) 090305.

[75]. X. L. Peng, J. Y. Liu and C. S. Jia, Phys. Lett. A **352** (2006) 478.

[76]. A. D. Alhaidari, H. Bahlouli, A. Al-Hasan and M. S. Abdelmonem, Phys. Rev. A **75** (2007) 062711.

[77]. B. Bagchi, P.S. Gorain and C. Quesne, Mod. Phys. Lett A **21** (2006) 2703-2708.

[78]. R. Koc and H. Tutunculer, Ann. Phys. **12** (2003) 684.

[79]. R. Koc and M. Koca, J. Phys. A: Math. Gen. 36 (2003) 8105-8112.

[80]. C. S. Jia and A. de Souza Dutra, Ann. Phys. **323** (2008) 566.

[81]. J. Yu, S. H. Dong and G. H. Sun, Phys. Lett. A **322** (2004) 290.

[82] Y. Xu, S. He, C.S. Jia, J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008) 255302-255309.

[83]. A. de Souza Dutra and C. S. Jia, Phys. Lett. A **352** (2006) 484.

[84]. G. Chen and Z.-D. Chen, Phys. Lett. A **331** (2004) 312.

[85]. S. M. Ikhdair, Int. J. Mod. Phys. C **20** (2009) 1563.

[86]. S.M. Ikhdair, R. Sever, Int. J. Mod. Phys. C **20** (2009) 361.

[87]. A. de Souza Dutra and C. A. S. Almeida, Phys. Lett. A **275** (2000) 25.

[88] A. D. Alhaidari, Phys. Lett. A **322** (2004) 72.

[90]. C. Quesne, Journal of Physics: Conference Series **128** (2008) 012059.

[91]. I. O. Vakarchuk, J. Phys. A **38** (2005) 4727.

[92]. A. Arda, R. Sever and C. Tezcan, Phys. Scr. **79** (2009) 015006.

[93]. S. M. Ikhdair and R. Sever, Phys. Scr. **79** (2009) 035002.

[94]. S. M. Ikhdair, Eur. Phys. J. A **39** (2009) 307.

[95]. S. M. Ikhdair and R. Sever, Ann. Phys. (Berlin) **18** (2009) 189.

[96]. S. M. Ikhdair and R. Sever, Ann. Phys. (Berlin) **18** (2008) 879.

[97]. S. M. Ikhdair and R. Sever, Ann. Phys. (Berlin) **18** (2009) 747.

[98]. C. Eckart, Phys. Rev. **35** (1930) 1303.

[99]. S. Marcos, L.N. Savushkin, M. Lopez-Quelle and P. Ring, Phys. Rev. C **62** (2000) 054309.

[100]. S. Marcos, M. Lopez-Quelle, R. Niembro, L.N. Savushkin and P. Bernardos, Phys. Lett. B **513** (2001) 30.

[101]. P. Alberto, M. Fiolhais, M. Malheiro, A. Delfino and M. Chiapparini, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 5015.

[102]. P. Alberto, M. Fiolhais, M. Malheiro, A. Delfino and M. Chiapparini, Phys. Rev. C **65** (2002) 034307.

[103]. S. Marcos, M. Lopez-Quelle, R. Niembro, L.N. Savushkin and P. Bernardos, Eur. Phys. J. A **17** (2003) 173.

[104]. R. Lisboa, M. Malheiro and P. Alberto, Braz. J. Phys. **34** (2004) 293.

[105]. R. Lisboa, M. Malheiro, A.S. de Castro, P. Alberto and M. Fiolhais, Phys. Rev. C **69** (2004) 024319.

[106]. S. Marcos, M. L´opez-Quelle, R. Niembro and L.N. Savushkin, Eur. Phys. J. A **20** (2004) 443.

[107]. S. Marcos, M. Lopez-Quelle, R. Niembro and L.N. Savushkin, Eur. Phys. J. A **34** (2007) 429.

[108]. S. Marcos, M. López-Quelle, R. Niembro and L.N. Savushkin, Eur. Phys. J. A **37** (2008) 251.

[109]. B. Desplanques and S. Marcos, Eur. Phys. J. A **43** (2010) 369.

[110]. M. Hamzavi, H. Hassanababdi and A. A. Rajabi, Int. J Theor. Phys. **50** (2011) 454.

[111]. M. Hamzavi and A. A. Rajabi, Commun. Theor. Phys. **55** (2011) 35.

[112]. M. Hamzavi, A. A. Rajabi and H. Hassanababdi, Int. J. Mod. Phys. A **26** (2011) 1363.

[113]. O. Aydoğdu and R. Sever, Phys. Scr. **80** (2009) 015001.

[114]. M. Hamzavi, H. Hassanababdi and A. A. Rajabi, Int. J. Mod. Phys. E **19** (2010) 2189.

[115]. M. Hamzavi, A. A. Rajabi and H. Hassanababdi, Phys. Lett. A **374** (2010) 4303.

[116]. M. Hamzavi, A. A. Rajabi and H. Hassanababdi, Few Body Syst. **52** (2012) 19.

[117] C. Berkdemir, Nucl. Phys. A **770** (2006) 32.

[118]. M. Hamzavi and A. A. Rajabi, Adv. High Energy Phys. **2013** (2013) 196989.

[119]. M. Hamzavi and A. A. Rajabi, Can. J. Phys. **91** (2013) 411.

[120]. M. Hamzavi and A. A. Rajabi, Chin. Phys. Lett. **29** (2012) 080302.

[121]. L. B. Castro, A. S. De Castro, M. Hott , Int. J. Mod. Phys. E **16** (2007) 3002

[122]. L. B. Castro, A. S. De Castro, M. Hott, Europhys. Lett. **77** (2007) 20009

[123]. A. D. Alhaidari, Phys. Lett. B **699** (2011) 309

[124]. A. D. Alhaidari, Int. J. Mod. Phys. A **25** (2010) 3703

[125]. A. D. Alhaidari, Found. Phys. **40** (2010) 1088

[126]. A. A. Rajabi and M. Hamzavi, Few Body Syst. (2013) at press.

[127]. C. Quigg and J. L. Rosner, Phys. Rep. **56** (1979) 167

[128]. M. Chaichian and R. Kokerler, Ann. Phys. (N.Y.) **124** (1980) 61

[129]. A. A. Bykov, I. M. Dremin and A. V. Leonidov, Sov. Phys. Usp. **27** (1984) 321

[130]. G. Plante and A. F. Antippa, J. math. Phys. **46** (2005) 062108

[131]. E. R. Figueiredo Medeiros, E. R. Bezerra de Mello, Eur. Phys. J. C **72** (2012) 2051

[132]. M. Hamzavi and A. A. Rajabi, Ann. Phys. **334** (2013) 316.

[133]. M. Hamzavi and A. A. Rajabi, Int. J. Quant. Chem. **112** (2012) 1592.

[134]. M. Hamzavi and A. A. Rajabi, Mol. Phys. **110** (2012) 389.

[135]. M. Hamzavi and A. A. Rajabi, Z. Naturforsch. A **66** (2011) 533.

[136]. M. Hamzavi and A. A. Rajabi, Int. J. Quant. Chem. **122** (2012) 2701.

[137]. A. A. Rajabi and M. Hamzavi, Z. Naturforsch. A (2013) at press.

Abstract

Relativistic symmetries of the Dirac Hamiltonian had been discovered many years ago, but only recently these symmetries have been recognized empirically in nuclear and hadronic spectroscopy. Within the framework of Dirac equation, pseudospin symmetry used to feature deformed nuclei, superdeformation, to establish an effective shell-model and spin symmetry is relevant for mesons. Spin symmetry occurs when the scalar potential $S(r)$ is nearly equal to the vector potential $V(r)$ or equivalently $S(r) \approx V(r)$ and pseudospin symmetry occurs when $S(r) \approx -V(r)$. The pseudospin symmetry refers to a quasi-degeneracy of single nucleon doublets with non-relativistic quantum number $(n, l, j = l + 1/2)$ and $(n-1, l+2, j = l + 3/2)$, where n, l and j are single nucleon radial, orbital and total angular quantum numbers, respectively. The total angular momentum is $j = \tilde{l} + \tilde{s}$, where $\tilde{l} = l + 1$ is pseudo-angular momentum and $\tilde{s}$ is pseudospin angular momentum . Tensor potentials were introduced into the Dirac equation with the substitution $\vec{p} \to \vec{p} - im\omega\beta.\hat{r}U(r)$ and a spin-orbit coupling is added to the Dirac Hamiltonian. In this thesis, we introduce the Dirac equation with scalar and vector potential with arbitrary spin-orbit coupling number κ including tensor interaction under spin and pseudospin symmetry limits. The Pekeris approximation is discussed for some exponential potentials. The Nikiforov-Uvarov method and its generalized form are presented in this thesis too. The energy eigenvalue equations and corresponding eigenfunctions of are obtained for some important potential as Eckart, Mie-Tpe, Pseudoharmonic, Morse, generalized Woods-Saxon, Cornell and Killingbeck potentials. The analytical results have been compared with other results and methods and we see that our calculations are in good agreement with those obtained before.

Shahrood University of Technology
Faculty of Physics

Spherical symmetries of the Dirac Hamiltonian in the nuclear shell model

Majid Hamzavi

Supervisor: Prof. Ali Akbar Rajabi

July 2013