دانشگاه صنعتی شاهرود

حوزه معاونت پژوهشی و فناوری

گزارش پایانی طرح پژوهشی

بررسی صفر سازهای شبه حلقه های اریب

با کد ۲۳۰۸

مجری: ابراهیم هاشمی
عضو هیات علمی دانشکده ریاضی

این طرح با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه صنعتی شاهرود انجام شده است و تاریخ های تصویب و خاتمه آن بترتیب ۱۳۸۵/۲/۳ و ۱۳۸۵/۷/۳۰ می باشد.

بسم الله الرحمن الرحيم

بررسی صفر سازهای شبه حلقه های اریب

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه شرکت پذیر و یکدار باشد. فرض کنیم α یک همومورفیسم از R باشد و δ یک تابع α—مشتق از R باشد یعنی δ یک تابع جمعی است و برای هر $a, b \in R$، $\delta(ab) = \delta(a)b + \alpha(a)\delta(b)$. در این صورت مجموعه $R[x; \alpha, \delta]$ همراه با دو عمل جمع معمولی چند جمله ایها و ترکیب معمولی چند جمله ایها یک شبه حلقه آبلی تشکیل می دهد که به آن شبه حلقه چند جمله ایهای اریب گویند. در این طرح با فرض اینکه R یک حلقه α—صلب باشد به بررسی صفر سازهای زیر مجموعه های شبه حلقه $(R[x; \alpha, \delta], +, \circ)$ می پردازیم.

فهرست

فصل ۱

۱.۱ مقدمه و نتایج مقدماتی

فرض کنیم R یک حلقه شرکت پذیر و یکدار باشد. بنابر [۱۲]، حلقه R یک حلقه بئر[۱] نامیده می‌شود هرگاه پوچساز راست هر زیر مجموعه ناتهی آن، بعنوان یک ایده‌آل راست، توسط یک خودتوان تولید گردد. این تعریف برای راست و چپ تقارن دارد. مطالعه حلقه‌های بئر ریشه در آنالیز تابعی دارد [بعنوان نمونه به [۱۲] می توان مراجعه کرد]. کاپلانسکی به معرفی و مطالعه حلقه‌های بئر پرداخته و خواص گوناگونی از جبرهای فون نیومن و حلقه‌های $*$- منظم کامل را بررسی نمود. یک $*$—حلقهٔ (یا حلقه‌ی برگشت پذیر، یا حلقه‌ی با برگشت) R عبارت است از حلقه‌ای که دارای یک تابع برگشت $x \to x^*$ باشد بقسمی که برای هر $x،y \in R$ دارای خواص زیر باشد:

۱) $(x^*)^* = x$،

۲) $(x+y)^* = x^* + y^*$،

۳) $(xy)^* = y^*x^*$.

هرگاه علاوه بر این حلقهٔ R یک جبر روی یک $*$—میدان با تابع برگشت $\lambda \to \lambda^*$ باشد و

Baer[۱]

همچنین برای هر $x \in R$، $(\lambda x)^* = \lambda^* x^*$)، یک $*$—جبر نامیده می‌شود. C^*—جبرها نمونه خاص و مهمی از $*$—حلقه‌ها می‌باشد. خانوادهٔ حلقه‌های بئر شامل جبرهای فون نیومن (یعنی جبر همهٔ عملگرهای کراندار روی یک فضای هیلبرت[۲])، C^*—جبر جابجایی $C(T)$ از توابع با مقدار مختلط پیوسته روی یک فضای استونی[۳] T و حلقه‌های منظمی که شبکهٔ ایده‌آلهای راست اصلی آن کامل است (بعنوان نمونه حلقه‌های منظمی که خود انژکتیو راست هستند) می‌باشد. R را یک حلقه $p.p.$—چپ نامند هرگاه هر ایده‌آل چپ اصلی آن یک جمعوند از $_RR$ باشد. واضح است R یک حلقه $p.p.$—چپ است اگر و تنها اگر صفرساز چپ هر عنصر از R بعنوان یک ایده‌آل چپ توسط یک خودتوان تولید گردد. بطور مشابه $p.p.$—راست تعریف می‌شود. حلقه R را $p.p.$ (ریکارت[۴]) نامیم اگر هم $p.p.$—چپ و هم $p.p.$—راست باشد. کلاس حلقه‌های $p.p.$ شامل کلاس حلقه‌های بئر است. حلقه R را آبلی نامیم هرگاه هر عنصر خودتوان آن مرکزی باشد. اندو[۵] نشان داد که اگر حلقه R آبلی باشد آنگاه R یک حلقه $p.p.$—چپ است اگر و تنها اگر $p.p.$—راست باشد. حلقه (شبه حلقه R) کاهشی نامیده می شود هر گاه عنصر پوچتوان غیر صفر نداشته باشد. فرض کنیم R یک حلقه باشد. مجموعه تمام چند جمله ایها با ضرائب از R همراه با دو عمل جمع معمولی چند جمله ایها و ترکیب معمولی چند جمله ایها تشکیل یک شبه حلقه می دهد. این شبه حلقه را با $(R[x], +, \circ)$ نمایش می دهیم. در [۳] برکینمیر به مطالعه صفر سازها در کلاس شبه حلقه‌ها پرداخت. فرض کنیم S زیر مجموعه غیر تهی از شبه حلقه N باشد. مجموعه های $r_N(S) = \{a \in N | Sa = \circ\}$ و $\ell_N(S) = \{a \in N | aS = \circ\}$

Hilbert[۲]

Stonian[۳]

Rikart[۴]

Endo[۵]

مثال ۲.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه باشد و $R_\circ[x]$ نمایانگر تمام چند جمله ایهایی روی R باشد که جمله ثابت آنها صفر می باشد. در این صورت $R_\circ[x]$ همراه با دو عمل جمع معمولی چند جمله ایها و ترکیب معمولی چند جمله ایها یک شبه حلقه متقارن تشکیل می دهد.

قضیه ۱.۱.۱ فرض کنیم $(G,+)$ یک گروه باشد. در این صورت

الف. $M(G) \in \beta_{r۲} \cap \beta_{\ell۲}$، $M(G) \notin \beta_{r۱} \cup \beta_{\ell۱}$.

ب. $M_\circ(G) \in \beta_{r۱} \cap \beta_{r۲} \cap \beta_{\ell۱} \cap \beta_{\ell۲}$.

قضیه ۲.۱.۱ فرض کنیم D یک حوزه صحیح باشد. در این صورت

$D_\circ[x] \in \beta_{r۱} \cap \beta_{r۲} \cap \beta_{\ell۱} \cap \beta_{\ell۲}$.

قضیه ۳.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه کاهشی باشد. در این صورت

$R_\circ[x] \in \beta_{r۱} \cap \beta_{r۲} \cap \beta_{\ell۱} \cap \beta_{\ell۲}$.

قضیه ۴.۱.۱ اگر $R_\circ[x] \in \beta_{r۱} \cup \beta_{r۲} \cup \beta_{\ell۱} \cup \beta_{\ell۲}$، آنگاه حلقه R بئر است.

نتیجه ۲.۱.۱ فرض کنیم حلقه R کاهشی باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

الف. حلقه R بئر است.

ب. حلقه $R[x]$ بئر است.

ج. $(R_\circ[x], +, \circ) \in \beta_{r۱} \cup \beta_{r۲} \cup \beta_{\ell۱} \cup \beta_{\ell۲}$.

لم ۱.۱.۱ فرض کنیم S و T دو زیر مجموعه غیر تهی از شبه حلقه N باشند. در این صورت:

الف. $S \subseteq r(\ell(S))$، $S \subseteq \ell(r(S))$.

ب. اگر $S \subseteq T$، آنگاه $r(T) \subseteq r(S)$ و $\ell(T) \subseteq \ell(S)$.

ج. $\ell(S) = \ell(r(\ell(S)))$ و $r(S) = r(\ell(r(S)))$.

د. $\ell(\cup S_i) = \cap \ell(S_i)$ و $r(\cup S_i) = \cap r(S_i)$.

قضیه **۵.۱.۱** فرض کنیم $\{N_i | i \in \Lambda\}$ مجموعه ای از شبه حلقه ها باشد که در یکی از شرایط $\beta_{\ell 1}$، $\beta_{\ell 2}$، β_{r1} یا β_{r2} صدق می کنند. در این صورت $N = \Pi_{i \in \Lambda} N_i$ نیز در همان شرط صدق می کند.

قرارداد: فرض کنیم $\Omega_r(N)$ نمایانگر مجموعه تمام صفر سازهای راست شبه حلقه N باشد. فرض کنیم Tو S دو زیر مجموعه غیر تهی از N باشند. در این صورت:

$r(S) \wedge r(T) := r(S) \cap r(T)$ و $r(S) \vee r(T) := r(\ell(r(S) + r(T))$.

قضیه **۶.۱.۱** فرض کنیم N یک شبه حلقه متقارن باشد. در این صورت $(\Omega_r(N), \wedge, \vee)$ که با رابطه شمول مرتب شده است یک شبکه کامل می باشد.

قضیه **۷.۱.۱** فرض کنیم $N \in \beta_{r2}$. در این صورت:

الف. e عضو خنثی چپ شبه حلقه N است اگر و تنها اگر $r(e) = 0$. بویژه، اگر N یک شبه حلقه کاهشی باشد آنگاه e عضو خنثی N است.

ب. فرض کنیم N یک شبه حلقه متقارن باشد و ایده آل I یک جمع وند مستقیم N باشد. اگر e عضو خنثی چپ N باشد آنگاه $I \in \beta_{r2}$ و یک عنصر خودتوان از N مانند v وجود دارد بطوری که $I = vN$. همچنین، اگر N یکدار باشد آنگاه v تنها عنصر خودتوان مرکزی N است.

قضیه **۸.۱.۱** فرض کنیم N یک شبه حلقه و K یک زیر شبه حلقه از آن باشد. فرض کنیم K شامل تمام خودتوانهای N باشد. در این صورت:

الف. اگر $N \in \beta_{r1} (N \in \beta_{r2})$ آنگاه $K \in \beta_{r1} (K \in \beta_{r2})$.

ب. اگر N متقارن باشد و $N \in \beta_{\ell 1} (N \in \beta_{\ell 2})$ آنگاه $K \in \beta_{\ell 1} (N \in \beta_{\ell 2})$.

قضیه **۹.۱.۱** فرض کنیم N یک شبه حلقه یکدار و فاقد مقسوم علیه صفر باشد. در این صورت $N \in \beta_{r2} \cup \beta_{\ell 2}$. علاوه بر آن، اگر N متقارن باشد آنگاه $N \in \beta_{r1} \cap \beta_{\ell 1} \cap \beta_{r2} \cap \beta_{\ell 2}$.

هدف این طرح: با مطالعه کارهای انجام شده در مورد صفر سازهای زیر مجموعه های شبه حلقه چند جمله ایها و حلقه چند جمله ایهای اریب نتایجی در زمینه صفر سازهای زیر مجموعه های شبه حلقه چند جمله ایهای اریب بدست می آوریم.

۲.۱ شبه حلقه های چند جمله ایهای اریب

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنیم α یک همومورفیسم از حلقه R باشد. α را یک همومورفیسم صلب می نامند هرگاه $a\alpha(a) = 0$ نتیجه دهد $a = 0$. حلقه R را α—صلب می نامند هرگاه α یک همومورفیسم صلب از R باشد.

واضح است که هر همومورفیسم صلب یک منومورفیسم است. هر حلقه α—صلب یک حلقه کاهشی است. در واقع اگر R یک حلقه α—صلب باشد و $a^2 = 0$، آنگاه $a\alpha(a)\alpha(a\alpha(a)) = 0$. در نتیجه $a\alpha(a) = 0$، و لذا $a = 0$. بنابراین، حلقه R کاهشی است.

لم ۱.۲.۱ فرض کنیم R یک حلقه α—صلب باشد و $a, b \in R$. در این صورت:

(۱) اگر $ab = 0$، آنگاه برای هر عدد صحیح مثبت n، $a\alpha^n(b) = \alpha^n(a)b = 0$.

(۲) اگر برای عدد صحیح مثبت k، $a\alpha^k(b) = 0$ یا $\alpha^k(a)b = 0$، آنگاه $ab = 0$.

(۳) اگر $ab = 0$، آنگاه برای هر دو عدد صحیح مثبت m, n،

$\alpha^n(a)\delta^m(b) = 0 = \delta^m(a)\alpha^n(b)$.

(۴) اگر $e^2 = e \in R$، آنگاه $\alpha(e) = e$ و $\delta(e) = 0$.

اثبات : (۱) اگر $ab = 0$، آنگاه $\alpha^n(a)\alpha^n(b) = 0$. چون R یک حلقه α—صلب است لذا $\alpha^n(a)b = 0$.

(۲) اگر $\alpha^k(a)b = 0$، آنگاه $\alpha^k(a)\alpha^k(b) = 0$. در نتیجه $\alpha^k(ab) = 0$، و چون α یک منومورفیسم است لذا $ab = 0$.

(۳) کافی است نشان دهیم $\delta(a)\alpha(b) = 0$. اگر $ab = 0$، آنگاه $0 = \delta(ab) = \delta(a)b + \alpha(a)\delta(b)$. چون حلقه R کاهشی است لذا بنا به (۱) $\alpha(a)b = 0$، در نتیجه $\alpha(a)\delta(a)b = 0$. پس $\alpha^2(a)\delta(b) = 0$، و لذا $\alpha(a)\delta(b) = 0$. به همین نحو می توان نتیجه گرفت $\delta(a)\alpha(b) = 0$.

(۴) اگر $e^2 = e$، آنگاه $e(1 - e) = 0$. در نتیجه بنا به (۱)، $e(1 - \alpha(e)) = 0$. یعنی $e = e\alpha(e)$. لذا $(e - \alpha(e))^2 = e^2 - e\alpha(e) - \alpha(e)e + \alpha^2(e) = 0$. چون حلقه R کاهشی است پس $e - \alpha(e) = 0$، و در نتیجه $\alpha(e) = e$. بنابراین، $\delta(e) = \delta(e^2) = \delta(e)e + \alpha(e)\delta(e) = 2e\delta(e)$. پس $e\delta(e) = 0$، و لذا $\delta(e) = 0$.

تعریف ۲.۲.۱ گوییم شبه حلقه N خاصیت IFP دارد، اگر برای هر $a, b, n \in N$، $ab = 0$ نتیجه دهد $anb = 0$.

لم ۱.۲.۲ فرض کنیم δ یک تابع α—مشتق روی R باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

(۱) α یک منومورفیسم است، حلقه R کاهشی است و اگر

$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in R[x;\alpha,\delta]$، $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$، بطوری

که $f(x) \circ g(x) = 0$، آنگاه برای هر $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$، $b_ja_i = 0$.

(۲) α یک منومورفیسم است، حلقه R کاهشی است و اگر

$f(x) = a_1x + \cdots + a_nx^n \in R_0[x;\alpha,\delta]$، $g(x) = b_1x + \cdots + b_mx^m$، بطوری که

$f(x) \circ g(x) = 0$، آنگاه برای هر $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$، $b_ja_i = 0$.

(۳) حلقه R کاهشی است.

اثبات : (۱)←(۲) بدیهی است.

(۲)←(۳). فرض کنیم $a\alpha(a) = 0$. در نتیجه

$\delta(a\alpha(a)) = \delta(a)\alpha(a) + \alpha(a)\delta(\alpha(a)) = 0$. فرض کنیم $f(x) = \alpha(a)x$ و

$g(x) = \delta(a)x + x^2 \in R_0[x;\alpha,\delta]$. در نتیجه

$f(x) \circ g(x) = (\delta(a)\alpha(a) + \alpha(a)\delta(\alpha(a)))x + \alpha(a)\alpha^2(a)x^2 = 0$. لذا بنا به (۲)،

$\delta(a)\alpha(a) = \alpha(a) = 0$. چون α منومورفیسم است لذا $a = 0$. بنابراین R یک حلقه α—صلب است.

(۳)←(۱). واضح است که حلقه R کاهشی است و α منومورفیسم است. فرض کنیم $f(x)$، $g(x) \in R[x;\alpha,\delta]$، بطوری که $f(x) \circ g(x) = 0$. با استفاده از استقراء روی مجموع درجات f, g اثبات می کنیم. اگر مجموع درجات f, g عدد ۲ باشد بوضوح برقرار است. حال فرض کنیم $k \geq 3$ و برای هر $f, g \in R[x;\alpha,\delta]$ که مجموع درجات آنها کمتر از k است درست باشد. فرض کنیم

$(x)g = b_\circ + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ ،$(x)f = a_\circ + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in R_\circ[x;\alpha,\delta]$ بطوری که $m, n \geq 1$، $m + n = k$ و $(x)f \circ (x)g = \circ$. در نتیجه $\sum_{j=\circ}^{m} b_j((x)f)^j = \circ$، و لذا $b_m a_n \alpha^n(a_n) \cdots \alpha^{(m-1)n}(a_n) = \circ$. در نتیجه بنا به لم ۱.۲.۱(۳)، $b_m a_n = a_n b_m = \circ$. بنابراین، $\sum_{j=\circ}^{m-1} b_j((x)f)^j = \circ$، یعنی $(x)f \circ (a_n b_\circ + \cdots + a_n b_{m-1} x^{m-1}) = \circ$. در نتیجه بنا به فرض استقراء، برای هر $1 \leq j \leq m-1$، $a_n b_j a_n = \circ$. چون حلقه R کاهشی است لذا برای هر $1 \leq j \leq m-1$، $a_n b_j = \circ$. چون حلقه R خاصیت IFP دارد لذا با استفاده از لم ۱.۲.۱ خواهیم داشت

$(x)f \circ (x)g = (a_\circ + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}) \circ (b_\circ + b_1 x + \cdots + b_m x^m) = \circ$. حال با استفاده از فرض استقراء نتیجه حاصل است.

مثال زیر نشان می دهد که حلقه R چنان موجود است که α—صلب نیست اما اگر $(x)f = a_1 x + \cdots + a_n x^n \in R_\circ[x;\alpha,\delta]$، $(x)g = b_1 x + \cdots + b_m x^m$، بطوری که $(x)f \circ (x)g = \circ$، آنگاه برای هر $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$، $b_j a_i = \circ$.

مثال ۱.۲.۱ فرض کنیم F یک میدان باشد و $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & r \\ \circ & a \end{pmatrix} \mid a, r \in F \right\}$ توسیع بدیهی حلقه F باشد. به سادگی می‌توان بررسی نمود که R یک حلقه جابجایی است. فرض کنید $\alpha : R \to R$ نگاشتی با ضابطه $\alpha\left(\begin{pmatrix} a & r \\ \circ & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & ur \\ \circ & a \end{pmatrix}$ باشد، که u یک عنصر ناصفر از F است. α یک اتومورفیسم از R می‌باشد. حال نشان می‌دهیم:

(۱) R یک حلقه α—صلب نیست.

چون حلقه R کاهشی نیست لذا α—صلب نیست.

(۲) فرض کنیم $(x)f = A_1 x + \cdots + A_n x^n \in R_\circ[x;\alpha]$، $(x)g = B_1 x + \cdots + B_m x^m$،

بطوری که برای هر $1 \leq i \leq n$، $1 \leq j \leq m$، $A_i = \begin{pmatrix} a_i & r_i \\ 0 & a_i \end{pmatrix}$ و $B_j = \begin{pmatrix} b_j & s_j \\ 0 & b_j \end{pmatrix}$.
فرض کنیم $g(x) \circ f(x) = 0$، $A_n \neq 0$ و $B_m \neq 0$. ادعا می کنیم برای هر $1 \leq i \leq n$، $1 \leq j \leq m$، $B_j(A_i x^i)^j = 0$. چون

$$(\dagger) \qquad 0 = g(x) \circ f(x) = B_1(A_1 x + \cdots + A_n x^n) + \cdots + B_m(A_1 x + \cdots + A_n x^n)^m,$$

خواهیم داشت $B_m(A_n x^n)^m = 0$ و لذا $B_m A_n \alpha^n(A_n) \cdots \alpha^{n(m-1)}(A_n) = 0$. پس $b_m a_n^m = 0$ و در نتیجه $b_m = 0$ یا $a_n = 0$.

حالت اول. فرض کنیم $b_m \neq 0$ و $a_n = 0$. چون $A_n \neq 0$، لذا $r_n \neq 0$. چون برای هر $k \geq 0$، $A_n \alpha^k(A_n) = 0$، و حلقه R جابجایی است لذا اگر A_n را در رابطه $(\dagger)$ از سمت چپ ضرب کنیم خواهیم داشت

$$A_n B_1(A_1 x + \cdots + A_{n-1} x^{n-1}) + \cdots + A_n B_m(A_1 x + \cdots + A_{n-1} x^{n-1})^m = 0.$$

در نتیجه $A_n B_m (A_{n-1})^m = 0$. بنابراین $r_n b_m a_{n-1}^m = 0$، و لذا $a_{n-1} = 0$. چون برای هر $k \geq 0$، $A_n \alpha^k(A_{n-1}) = 0$، و حلقه R جابجایی است لذا

$$A_n B_1(A_1 x + \cdots + A_{n-2} x^{n-2}) + \cdots + A_n B_m(A_1 x + \cdots + A_{n-2} x^{n-2})^m = 0.$$

به همین نحو می توان نتیجه گرفت $a_1 = \cdots = a_n = 0$. چون برای هر $i \geq 1$، $A_i \alpha^i(A_i) = 0$، لذا برای هر $1 \leq i \leq n$، $2 \leq j \leq m$، $B_j(A_i x^i)^j = 0$. در نتیجه $B_1(A_1 x + \cdots + A_n x^n) = g(x) \circ f(x) = 0$، و لذا برای هر $1 \leq i \leq n$، $B_1(A_i x^i) = 0$. با ادامه این روند می توان نتیجه گرفت برای هر $1 \leq i \leq n$، $1 \leq j \leq m$، $B_j(A_i x^i)^j = 0$.

حالت دوم. فرض کنیم $b_m = 0$ و $a_n \neq 0$. چون $B_m A_n \alpha^n(A_n) \cdots \alpha^{n(m-1)}(A_n) = 0$، لذا $s_m a_n^m = 0$ و در نتیجه $s_m = 0$. بنابراین $B_m = 0$، و این یک تناقض است.

حالت سوم. فرض کنیم $a_n = 0 = b_m$. ادعا می کنیم $a_1 = \cdots = a_n = 0$ یا $b_1 = \cdots = b_m = 0$. فرض کنیم چنین نباشد در نتیجه اعداد n_1 و m_1 چنان موجودند که $a_{n_1} \neq 0$ و $b_{m_1} \neq 0$، اما $a_{n_1+1} = \cdots = a_n = 0$ و $b_{m_1+1} = \cdots = b_m = 0$. در نتیجه $A_nB_1(A_1x + \cdots + A_{n_1}x^{n_1}) + \cdots + A_nB_{m_1}(A_1x + \cdots + A_{n_1}x^{n_1})^{m_1} = 0$. بنابراین $A_nB_{m_1}(A_{n_1}x^{n_1})^{m_1} = 0$، و لذا $r_nb_{m_1}a_{n_1}^{m_1} = 0$. پس $r_n = 0$، و این یک تناقض است. اگر $a_1 = \cdots = a_n = 0$، آنگاه با استفاده از (۱) برای هر $1 \leq i \leq n$، $1 \leq j \leq m$، خواهیم داشت $B_j(A_ix^i)^j = 0$. اگر $b_1 = \cdots = b_m = 0$، آنگاه

$$0 = f(x)\circ g(x) = B_1(A_1x+\cdots+A_{n-1}x^{n-1})+\cdots+B_m(A_1x+\cdots+A_{n-1}x^{n-1})^m$$

و لذا $B_m(A_{n-1}x^{n-1})^m = 0$. در نتیجه $a_{n-1} = 0$. با ادامه این روند می توان نشان داد $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$. بنابراین برای هر $1 \leq i \leq n$، $1 \leq j \leq m$، $B_j(A_ix^i)^j = 0$.

لم ۳.۲.۱ فرض کنیم δ یک تابع α—مشتق روی حلقه R باشد و $R[x;\alpha,\delta]$ شبه حلقه چند جمله ایهای اریب روی حلقه α—صلب R باشد. در این صورت:

(۱) اگر $E(x) \in R[x;\alpha,\delta]$ یک خودتوان باشد، آنگاه $E(x) = e_1x + e_0$، بطوری که e_1 یک خودتوان از R است و $e_1e_0 = 0$.

(۲) شبه حلقه $R[x;\alpha,\delta]$ کاهشی است.

اثبات : (۱) فرض کنیم $E(x) = e_0 + e_1x + \cdots + e_nx^n$ خودتوان باشد. چون $E(x)\circ E(x) = E(x)$، لذا $E(x)\circ(E(x) - x) = 0$، و در نتیجه $(e_0 + e_1x + \cdots + e_nx^n)\circ(e_0 + (e_1 - 1)x + \cdots + e_nx^n) = 0$. پس بنا به لم ۲.۲.۱، برای هر $i \geq 2$، $e_i^2 = 0$. در نتیجه برای هر $i \geq 2$، $e_i = 0$. بنابراین $e_0 + e_1(e_0 + e_1x) = e_0 + e_1x$، و لذا $e_1e_0 = 0$ و $e_1^2 = e_1$.

(۲) فرض کنیم $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in R_0[x;\alpha,\delta]$، بطوری که $f(x) \circ f(x) = 0$. در نتیجه بنا به لم ۲.۲.۱، برای هر $1 \leq i \leq n$، $a_i^2 = 0$. چون حلقه R کاهشی است لذا برای هر $1 \leq i \leq n$، $a_i = 0$. بنابراین $f(x) = 0$.

قضیه ۱.۲.۱ فرض کنیم R یک حلقه α—صلب باشد. اگر $R[x;\alpha,\delta] \in \beta_{r2}$، آنگاه حلقه R بئر است.

اثبات : فرض کنیم S زیر مجموعه ای ناتهی از حلقه R باشد و $S_x = \{sx | s \in S\} \subseteq R[x;\alpha,\delta]$. چون $R[x;\alpha,\delta] \in \beta_{r2}$ و R یک حلقه α—صلب است لذا بنا به لم ۳.۲.۱ خودتوان $E(x) = e_1x + e_0 \in R[x;\alpha,\delta]$ وجود دارد بطوری که $r(S_x) = r(E(x))$. نشان می دهیم $\ell_R(S) = \ell_R(e_1)$. فرض کنیم $a \in \ell_R(S)$. در نتیجه $(e_1x+e_0)\circ(ax-ae_0) = a(e_1x+e_0)-ae_0 = 0$. پس $ax-ae_0 \in r(E(x)) = r(S_x)$. بنابراین $sx \circ (ax-ae_0) = 0$ و لذا برای هر $s \in S$، $as = ae_0 = 0$. در نتیجه $a \in \ell_R(S)$ و $\ell_R(e_1) \subseteq \ell_R(S)$. حال فرض کنیم $a \in \ell_R(S)$. در نتیجه $sx \circ ax = asx = 0$. بنابراین $as \in r(S_x) = r(E(x))$. در نتیجه $E(x) \circ ax = a(e_1x+e_0) = 0$، و لذا $ae_1 = ae_0 = 0$. پس $a \in \ell_R(e_1)$ و $\ell_R(S) \subseteq \ell_R(e_1)$. بنابراین $\ell_R(S) = \ell_R(e_1)$ و $R \in \beta_{\ell 2}$. بنا به [۳، لم ۲.۳]، $R \in \beta_{r2}$. بنا به [۳، گزاره ۱.۴]، حلقه R یکدار است. بنابراین حلقه R بئر است.

عکس قضیه ۱.۲.۱ همیشه درست نیست. مثال زیر نشان می دهد که حلقه R چنان موجود است که کاهشی، جابجایی، متناهی و بئر است اما $R[x] \notin \beta_{r2}$.

مثال ۲.۲.۱ فرض کنیم $R = Z_6$ و $S = \{2x+2, 2x+5\}$. بنا به لم ۳.۲.۱، $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, x, 3x+2, 3x+4, 4x+3\}$ مجموعه تمام خودتوانهای $Z_6[x]$ است. توجه داریم برای هر خودتوان ثابت $c \in Z_6[x]$، $x - c \in r(c)$ و $x - c \notin r(S)$. همچنین بنا به لم ۳.۲.۱، $4x$ و $4x + 3$ تنها خودتوانهای $Z_6[x]$ هستند که می توانند در رابطه $r(S) = r((x)E)$ صدق کنند. مشاهده می کنیم که $3x \in r(4x)$ اما $3x \notin r(S)$، همچنین $3x^3 + 3 \in r(4x+3)$ اما $3x^3 + 3 \notin r(S)$. بنابراین، خودتوان $(x)E \in Z_6[x]$ وجود ندارد بطوری که $r(S) = r((x)E)$. در نتیجه $Z_6[x] \notin \beta_{r2}$.

قرارداد: اگر $(x)f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x;\alpha,\delta]$، مجموعه تمام ضرایب $(x)f$ را به $S_f^* = \{a_0, \cdots, a_n\}$ نمایش می دهیم.

قضیه ۲.۲.۱ فرض کنیم R یک حلقه α—صلب باشد. اگر $R \in \beta_{\ell 2} \cup \beta_{r2}$، آنگاه $R[x;\alpha,\delta] \in R_{r2}$.

اثبات : بنا به [۳، لم ۲.۳] کافی است فرض کنیم $R \in \beta_{\ell 2}$. فرض کنیم $(x)f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in R[x;\alpha,\delta]$. چون $R \in \beta_{\ell 2}$، لذا خودتوان $e_1 \in R$ موجود است بطوری که $\ell_R(S_f^*) = \ell_R(e_1)$. فرض کنیم $(x)E = e_1 x + e_0$ بطوری که $e_0 = -e_1 a_0 + a_0$. واضح است که $(x)E$ یک خودتوان از $R[x;\alpha,\delta]$ است. نشان می دهیم $r((x)f) = r((x)E)$. فرض کنیم $(x)g = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in r((x)f)$. در نتیجه بنا به لم ۲.۲.۱، برای هر $1 \leq j \leq n$، $b_j \in \ell_R(S_f^*)$ و $b_0 + b_1 a_0 + \cdots + b_n a_0^n = 0$. بنا به لم ۱.۱.۲، $\alpha(e_1) = e_1$ و $\delta(e_1) = 0$، لذا با محاسبه ساده‌ای می توان نشان داد $(x)E)^k = e_1 x^k + e_0^k$. بنابراین $(x)E \circ (x)g = \sum_{j=0}^{n} b_j((x)E)^j = \sum_{j=0}^{n} b_j e_1 x^j + \sum_{j=1}^{n} b_j e_0^j + b_0 = 0$. در نتیجه $(x)g \in r((x)E)$ و $r((x)f) \subseteq r((x)E)$. حال فرض کنیم $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in r((x)E)$.

در نتیجه بنا به لم ۲.۲.۱، برای هر n $\leq j \leq 1$، $b_j \in \ell_R(e_1) = \ell_R(S_f^*)$ و $b_0 + b_1 e_0 + \cdots + b_n e_0^n = 0$. چون برای هر $t \geq 1$، $e_0^t = -e_1 a_0^t + a_0^t$، لذا $b_0 + b_1 a_0 + \cdots + b_n a_0^n = 0$ و در نتیجه $(x)g \in r((x)f)$. بنابراین $r((x)f) = r((x)E)$. در نتیجه $R[x;\alpha,\delta] \in R_{r2}$.

قضیه ۳.۲.۱ فرض کنیم R یک حلقه α—صلب باشد. در این صورت:

(۱) $R \in \beta_{r1}$ اگر و تنها اگر $R_0[x;\alpha,\delta] \in \beta_{\ell 1}$.

(۲) $R \in \beta_{r2}$ اگر و تنها اگر $R_0[x;\alpha,\delta] \in \beta_{\ell 2}$.

اثبات : (۱) فرض کنیم $R \in \beta_{r1}$. فرض کنیم S زیر مجموعه‌ای ناتهی از $R_0[x;\alpha,\delta]$ باشد. در نتیجه $T = \cup_{f\in S} S_f^*$ زیر مجموعه ای ناتهی از R است. چون $R \in \beta_{r1}$، لذا خودتوان $e \in R$ وجود دارد بطوری که $r_R(T) = eR$. نشان می دهیم $\ell(S) = R_0[x;\alpha,\delta] \circ (ex) = e.R_0[x;\alpha,\delta]$. فرض کنیم $(x)f = \sum_{i=1}^{m} a_i x^i \in S$. چون $\alpha(e) = e$ و $\delta(e) = 0$، خواهیم داشت $(ex) \circ (x)f = \sum_{i=1}^{m} a_i (ex)^i = \sum_{i=1}^{m} a_i e x^i = 0$. بنابراین $ex \in \ell(S)$ و در نتیجه $eR_0[x;\alpha,\delta] \subseteq \ell(S)$. حال فرض کنیم $(x)h = \sum_{k=1}^{n} c_k x^k \in \ell(S)$. در نتیجه بنا به لم ۲.۲.۱، برای هر n $\leq k \leq 1$، $c_k \in r_R(T)$. پس برای هر n $\leq k \leq 1$، $c_k = ec_k$. در نتیجه $(x)h = e\sum_{k=1}^{n} c_k x^k \in eR_0[x;\alpha,\delta]$ و لذا $\ell(S) = R_0[x;\alpha,\delta] \circ (ex)$. بنابراین $R_0[x;\alpha,\delta] \in \beta_{\ell 1}$.

حال فرض کنیم $R_0[x;\alpha,\delta] \in \beta_{\ell 1}$. فرض کنیم S زیر مجموعه‌ای ناتهی از R باشد. زیر مجموعه $S_x = \{sx | s \in S\}$ از $R_0[x;\alpha,\delta]$ را در نظر می گیریم. چون $R_0[x;\alpha,\delta] \in \beta_{\ell 1}$، لذا بنا به لم ۳.۲.۱، خودتوان $e \in R$ چنان موجود است که $\ell(S_x) = R_0[x;\alpha,\delta] \circ (ex)$. برای هر $s \in S$، $sex = (sx) \circ (ex) = 0$. در

نتیجه $e \in r_R(S)$. حال فرض کنیم $a \in r_R(S)$. در نتیجه برای هر $sx \in S_x$، $(ax) \circ (sx) = sax = \circ$. بنابراین $ax \in \ell(S_x) = R_\circ[x;\alpha,\delta] \circ (ex) = eR_\circ[x;\alpha,\delta]$. پس $a = ea \in eR$. در نتیجه $r_R(S) = eR$، و لذا $R \in \beta_{r۱}$.

(۲) فرض کنیم $R \in \beta_{r۲}$. فرض کنیم S زیر مجموعه ای ناتهی از $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ باشد و $T = \cup_{f \in S} S_f^*$. با اثباتی مشابه (۱) می توان نشان داد خودتوانی مانند $e \in R$ وجود دارد بطوری که $r_R(T) = r_R(e)$. ادعا می کنیم $\ell(S) = \ell(ex)$. فرض کنیم $(x)g = \sum_{j=۱}^n b_j x^j \in \ell(ex)$. در نتیجه $(x)g \circ ex = e(x)g = \circ$. پس برای هر $۱ \leq j \leq n$، $eb_j = \circ$. بنابراین، برای هر $۱ \leq j \leq n$، $b_j \in r_R(e) = r_R(T)$. فرض کنیم $(x)f = \sum_{i=۱}^m a_i x^i \in S$. در نتیجه با استفاده از لم ۱.۲.۱، $(x)g \circ (x)f = \sum_{i=۱}^m a_i (\sum_{j=۱}^n b_j x^j)^i = \circ$. بنابراین $\ell(ex) \subseteq \ell(S)$. حال فرض کنیم $(x)g = \sum_{j=۱}^n b_j x^j \in \ell(S)$. در نتیجه بنا به لم ۲.۲.۱، برای هر $۱ \leq j \leq n$، $b_j \in r_R(T) = r_R(e)$. پس $(x)g \circ (ex) = e(x)g = \circ$. بنابراین $\ell(S) = \ell(ex)$ و لذا $R_\circ[x;\alpha,\delta] \in \beta_{\ell۲}$.

حال فرض کنیم $R_\circ[x;\alpha,\delta] \in \beta_{\ell۲}$. فرض کنیم S زیر مجموعه ناتهی از R باشد. زیر مجموعه $S_x = \{sx | s \in S\}$ از $R_\circ[x;\alpha,\delta]$ را در نظر بگیرید. بنا به لم ۳.۲.۱، خود توان $(x)E = ex \in R_\circ[x;\alpha,\delta]$ وجود دارد بطوری که $\ell(S_x) = \ell((x)E)$. ادعا می کنیم $r_R(S) = r_R(e)$. فرض کنیم $a \in r_R(S)$. در نتیجه برای هر $sx \in S_x$، $ax \circ sx = sax = \circ$. پس $ax \in \ell(S_x) = \ell((x)E)$. بنابراین، $ax \circ ex = eax = \circ$ و لذا $a \in r_R(e)$. در نتیجه $r_R(S) \subseteq r_R(e)$. حال فرض کنیم $b \in r_R(e)$. در نتیجه $bx \circ ex = ebx = \circ$، و لذا $bx \in \ell(S_x)$. پس برای هر $s \in S$، $bx \circ sx = sbx = \circ$. در نتیجه $b \in r_R(S)$. بنابراین، $R \in \beta_{r۲}$.

مثال زیر نشان می دهد که حلقه ای بئر مانند R وجود دارد بطوری که $R_\circ[x;\alpha] \notin \beta_{\ell 1} \cup \beta_{r 2}$. بنابراین، شرط α—صلب بودن R در قضیه ۳.۲.۱ قابل حذف نمی باشد.

مثال ۳.۲.۱ فرض کنیم F یک میدان باشد و $R = F[y]$ حلقه چند جمله ایها روی F باشد. در نتیجه R یک دامنه جابجایی است و لذا بئر است. فرض کنیم $\alpha : R \to R$ یک هomomorفیسم با ضابطه $\alpha((f(y)) = f(\circ)$ باشد. در این صورت:

(۱) R یک حلقه α—صلب نیست.

چون $y\alpha(y) = \circ$، اما $y \neq \circ$.

(۲) $R_\circ[x;\alpha] \notin \beta_{\ell 1} \cup \beta_{r 2}$.

ابتدا نشان می دهیم $\circ$ و x تنها خودتوانهای $R_\circ[x;\alpha]$ می باشند. فرض کنیم $e(x) = f_1(y)x + \cdots + f_n(y)x^n$ یک خودتوان ناصفر از $R_\circ[x;\alpha]$ باشد. در نتیجه $e(x) \circ e(x) = e(x)$ و لذا

$$f_1(y)(f_1(y)x + \cdots + f_n(y)x^n) + \cdots + f_n(y)(f_1(y)x + \cdots + f_n(y)x^n)^n =$$

$$f_1(y)x + \cdots + f_n(y)x^n$$

پس $f_1(y)^2 = f_1(y)$، و چون R یک دامنه است لذا $f_1(y) = 1$ یا $f_1(y) = \circ$. اگر $f_1(y) = \circ$، با محاسبه ساده ای می توان نشان داد $e(x) = \circ$، و این یک تناقض است. در نتیجه $f_1(y) = 1$. چون $f_2(y) = f_1(y)f_2(y) + f_2(y)f_1(y)\alpha(f_1(y))$ و $\alpha(f_1(y)) = 1$، لذا $f_2(y) = 1$. با ادامه این روند می توان نشان داد $e(x) = 1$. حال نشان می دهیم $R_\circ[x;\alpha] \notin \beta_{\ell 1}$. فرض کنیم $S = \{x^2\}$. چون $yx \circ x^2 = \circ$، لذا $\ell_{R_\circ[x;\alpha]}(S) \neq \circ$. چون

$x^{۲} = x \circ x^{۲}$، لذا $\ell_{R_\circ[x;\alpha]}(S) \neq R_\circ[x;\alpha] = R_\circ[x;\alpha] \circ x$. بنابراین $R_\circ[x;\alpha] \notin \beta_{\ell ۱}$. با استدلالی مشابه می توان نشان داد $R_\circ[x;\alpha] \notin \beta_{\ell ۲}$.

قضیه ۴.۲.۱ فرض کنیم R یک حلقه α—صلب باشد. در این صورت:

(۱) اگر حلقه R بئر باشد آنگاه $R_\circ[x;\alpha,\delta] \in \beta_{r۱} \cap \beta_{r۲} \cap \beta_{\ell ۱} \cap \beta_{\ell ۲}$.

(۲) اگر $R_\circ[x;\alpha,\delta] \in \beta_{r۱} \cup \beta_{r۲} \cup \beta_{\ell ۱} \cup \beta_{\ell ۲}$، آنگاه حلقه R بئر است.

اثبات : فرض کنیم حلقه R بئر باشد. کافی است نشان دهیم $R_\circ[x;\alpha,\delta] \in \beta_{\ell ۱}$. فرض کنیم S یک مجموعه ناتهی باشد و $T = \cup_{f\in S} S_f^*$. چون حلقه R بئر است لذا خودتوان $e \in R$ وجود دارد بطوری که $r_R(T) = eR$. نشان می دهیم $\ell(S) = (۱-e)R_\circ[x;\alpha,\delta] = R_\circ[x;\alpha,\delta] \circ (۱-e)x$. فرض کنیم $(x)f = \sum_{i=۱}^{m} a_i x^i \in S$ و $(x)g = \sum_{j=۱}^{n} b_j x^j \in \ell(S)$. در نتیجه بنا به لم ۲.۲.۱، برای هر $۱ \leq i \leq m$، $۱ \leq j \leq m$، $a_i b_j = \circ$. پس برای هر $۱ \leq j \leq m$، $eb_j = \circ$ و $b_j = (۱-e)b_j$. در نتیجه $(x)g = (۱-e)\sum_{j=۱}^{n} b_j x^j \in (۱-e)R_\circ[x;\alpha,\delta]$ و لذا $\ell(S) \subseteq (۱-e)R_\circ[x;\alpha,\delta]$. حال فرض کنیم $(x)g = (۱-e)\sum_{j=۱}^{n} b_j x^j \in (۱-e)R_\circ[x;\alpha,\delta]$. چون $(۱-e)$ خودتوان است و R یک حلقه α—صلب است لذا $\alpha(۱-e) = (۱-e)$، $\delta(۱-e) = \circ$ و $(۱-e)$ یک خودتوان مرکزی است. در نتیجه برای هر $(x)f = \sum_{i=۱}^{m} a_i x^i \in S$، $(x)g \circ (x)f = (\sum_{j=۱}^{n} b_j x^j)(\sum_{i=۱}^{m} a_i (۱-e) x^i) = \circ$. بنابراین $\ell(S) = (۱-e)R_\circ[x;\alpha,\delta]$. در نتیجه $R_\circ[x;\alpha,\delta] \in \beta_{\ell ۱}$.

(۲) فرض کنیم $R_\circ[x;\alpha,\delta] \in \beta_{r۱} \cup \beta_{r۲} \cup \beta_{\ell ۱} \cup \beta_{\ell ۲}$. بنا به [۳، گزاره ۱.۴]، $R_\circ[x;\alpha,\delta] \in \beta_{\ell ۲}$. بنا به قضیه ۲.۲.۱، $R \in \beta_{r۲}$ و بنا به [۳، لم ۲.۳]، حلقه R یکدار است. لذا حلقه R بئر است.

مثال ۳.۲.۱ همچنین نشان می دهد که شرط α—صلب بودن حلقه R در قضیه ۴.۲.۱ الزامی است.

نتیجه **۱.۲.۱** فرض کنیم R یک حلقه α—صلب باشد. در این صورت شرایط زیر هم ارزند:

(۱) حلقه R بئر است.

(۲) حلقه $R[x;\alpha,\delta]$ بئر است.

(۳) $R_{\circ}[x;\alpha,\delta]\in\beta_{r1}\cup\beta_{r2}\cup\beta_{\ell 1}\cup\beta_{\ell 2}$.

اثبات : از [۱۱] و قضیه ۴.۲.۱ نتیجه می شود.

قضیه **۵.۲.۱** فرض کنیم R یک حلقه α—صلب باشد. فرض کنیم S زیر شبه حلقه ای از $R[x;\alpha,\delta]$ باشد که توسط مجموعه $\{ex|e^2=e\in R\}$ تولید می شود و T زیر شبه حلقه ای از $R[x;\alpha,\delta]$ باشد. اگر $S\subseteq T$ و $R[x;\alpha,\delta]\in\beta_{ij}$، بطوری که $i\in\{\ell,r\}$ و $j\in\{1,2\}$، آنگاه $T\in\beta_{ij}$.

اثبات : از لم ۳.۲.۱ و [۳] نتیجه می شود.

کتاب‌نامه

[1] E.P. Armendariz, A note on extensions of Baer and p.p.-rings, *J. Austral. Math. Soc. 18 (1974), 470-473.*

[2] S.K. Berberian, Baer $*$-Rings, Grundlehren Math. Wiss. Band 195, Springer: Berlin, 1972, 296 pp.

[3] G.F. Birkenmeie and F.K. Huang, Annihilator conditions on polynomials, *Comm. Algebra 29(5) (2001) 2097-2112.*

[4] G.F. Birkenmeie and F.K. Huang, Annihilator conditions on formal power series, *Algebra Colloq. 9(1) (2002) 29-37.*

[5] G.F. Birkenmeier, J. Y. Kim and J.K. Park, On quasi-Baer rings, *Contemporary Mathematics 259 (2000), 67-92.*

[6] G.F. Birkenmeier, J.Y. Kim and J.K. Park, Polynomial extentions of Baer and quasi-Baer, rings, *J. Pure Appl. Algebra 159 (2001), 25-42.*

[7] E. Hashemi and A. Moussavi, Polynomial extensions of Baer and quasi-Baer rings, *Acta Math. Hungar. 107(3) (2005) 207-224.*

[8] E. Hashemi and A. Moussavi, Polynomial ore extensions of Baer and p.p.-rings, *Bull. of the Iranian Math. Soc. 29(2)(2003), 65-85.*

[9] E. Hashemi and A. Moussavi, Skew power series extensions of α-rigid p.p.-rings, *Bull. Korian Math. Soc. 41(4)(2004), 657-665.*

[10] Y. Hirano, On annihiator ideals of polynomial ring over a noncommutative ring, *J. Pure Appl. Algebra 168 (2002), 45-52.*

[11] C.Y. Hong, N.K. Kim and T.K. Kwak, Ore extensions of Baer and PP rings, *J. Pure Appl. Algebra 151 (2000), 215-226.*

[12] I. Kaplansky, Rings of operators, Benjamin, New York, 1995.

[13] J. Krempa, Some examples of reduced rings, *Algebra Colloq. 3(4) (1996), 289-300.*

[14] P. Pollingher and A. zaks, On Baer and quasi-Baer rings, *Duke Math. J. 37 (1970), 127-138.*

[15] C.E. Rickart, Banach algebras with an adjoint operation, *Ann. of Math. 47 (1946), 528-550.*