دانشگاه صنعتی شاهرود

حوزه معاونت پژوهشی و فناوری

گزارش پایانی طرح پژوهشی

گرافهای احاطه بحرانی رومی

کد ۲۳۰۵۱

مجری: نادر جعفری راد
عضو هیات علمی دانشگاه صنعتی شاهرود

این طرح با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه صنعتی شاهرود انجام شده و تاریخ های تصویب و خاتمه آن به ترتیب ۸۸/۱۰/۱۶ و ۸۹/۳/۱۶ می باشد.

بسم الله الرحمن الرحيم

چکیده:

تابع $f : V(G) \to \{0,1,2\}$ تعریف شده روی یک گراف G یک تابع رومی نامیده می شود هرگاه به ازای هر راس v با $f(v) = 0$ راسی مانند $u \in N(v)$ موجود باشد که $f(u) = 2$. در این خصوص پایگاه هر لشگر یا گروه نظامی به عنوان راس یک گراف در نظر گرفته می شود. وزن تابع f برابر است با مجموع وزن های آن روی تمام یالهای گراف G و با $w(f)$ نشان داده می شود. در میان وزن های تمام توابع رومی تعریف شده روی گراف G کوچکترین وزن را عدد احاطه گری رومی گراف G می نامیم و با $\gamma_R(G)$ نشان میدهیم. لذا:

$$\gamma_R(G) = \min\{w(f) \mid \text{یک تابع رومی روی } G \text{ است } f\}$$

این پارامتر برگرفته از یک مدل دفاعی- نظامی در روم باستان در قرن چهارم قبل از میلاد است. در این پژوهش گرافهایی را بررسی می کنیم که کاستن راس یا افزودن یال و همچنین انقباض یک یال در آنها منجر به کاهش عدد احاطه گری رومی گراف می شود. این گرافها را به ترتیب گرافهای احاطه رومی بحرانی راسی و یالی و انقباضی می نامیم. ابتدا خواص متعددی از چنین گرافهایی ارائه می دهیم و سپس دسته های مهم و متعددی از آنها را دسته بندی می کنیم.

کلمات کلیدی: احاطه گری، احاطه گری رومی، بحرانی.

فهرست مطالب

فصل اول

مفاهیم اولیه و مقدمات

در این فصل به ارائه برخی از تعاریف، مفاهیم و قضایای نظریه گراف که از آنها استفاده می‌کنیم می پردازیم. منظور از یک گراف، همواره یک گراف ساده است. یک گراف ساده زوجی به صورت $G=(V,E)$ است که در آن V مجموعه ای از نقاط موسوم به راسها و E مجموعه ای از زیر مجموعه های دو عضوی V است. هر عنصر $e=\{u,v\}$ از E را یک یال نامیده و آن را برای سادگی با uv نشان می دهیم.

۱-۱ احاطه‌گری راسی

ابتدا مفاهیم و نتایجی در زمینه احاطه گری راسی گرافها را از مرجع [6] بیان می کنیم.

تعریف ۱-۱-۱: در یک گراف G مجموعه $S\subseteq V(G)$ را یک مجموعه احاطه گر می‌نامیم هرگاه هر راس از $V(G)\text{-}S$ با حداقل یکی از راسهای S مجاور باشد. عدد احاطه گری گراف G کمترین اندازه در میان اندازه‌های مجموعه‌های احاطه گر برای G است و آن را با $\gamma(G)$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین بزرگترین اندازه در بین مجموعه‌های احاطه گر می‌نیمال برای گراف G را با $\Gamma(G)$ نشان می‌دهیم.

برای راس x از گراف G منظور از همسایگی x که با $N(x)$ نشان داده می‌شود مجموعه تمام راسهای مجاور با x در گراف G است و همسایگی بسته x به صورت زیر $N[x]=N(x)\bigcup\{x\}$ تعریف می‌شود.

هم‌چنین برای یک زیرمجموعه S از راسهای G همسایگی S در G عبارتست از

$$N(S)=x\in S\bigcup N(x)$$

و همسایگی بسته S عبارتست از $N[S]=N(S)\bigcup S$.

بنابراین مجموعه S یک مجموعه احاطه گر است هرگاه $N[S]=V(G)$.

قضیه ۱-۱-۲([6]): اگر G گرافی بدون راس تنها باشد آنگاه $\gamma(G)\leq\frac{|V(G)|}{2}$.

برای یک زیر مجموعه S از راسهای گراف G فرض کنید $G[S]$ زیرگراف القایی توسط S باشد.

زیرمجموعه S از مجموعه راسهای گراف G را مستقل نامیم هرگاه هیچ دو راسی از S در گراف G مجاور نباشند.

تعریف ۱-۱-۳ ([6]): فرض کنید S یک مجموعه احاطه گر در گراف G باشد در این صورت S را مجموعه‌ای احاطه گر باز یا کلی نامیم هرگاه $G[S]$ راس تنها نداشته باشد.

کوچکترین اندازه مجموعه S در تعریف فوق را عدد احاطه‌گری باز یا کلی گراف G نامیده و با $\gamma_t(G)$ نشان می‌دهیم.

گراف $K_{1,3}$ را پنجه می‌نامیم و منظور از یک گراف بدون پنجه گرافی است که هیچ زیرگرافی القایی یکریخت با $K_{1,3}$ نداشته باشد.

قضیه ۱-۱-٤([6]) : هرگراف بدون پنجه G دارای یک مجموعه احاطه گر مستقل با اندازه $\gamma(G)$ است.

اندازه بزرگترین مجموعه مستقل در گراف G را با $\beta_o(G)$ نشان می‌دهیم.

ویزینگ در سال ۱۹۶۸ مجموعه‌های احاطه گر را در گرافهای حاصل‌ضربی بررسی کرده و حدس زیر را ارائه داد:

حدس ۱-۱-۵(ویزینگ [6]): برای هر دو گراف G و H،

$$.\gamma(G\times H)\geq\gamma(G)\gamma(H)$$

درستی حدس فوق برای بسیاری از دسته‌های گراف‌ها ثابت شده است. اما در حالت کلی هنوز این حدس اثبات یا رد نشده است.

تعریف ۱-۱-٦ ([6]): گراف G در حدس ویزینگ صدق می‌کند هرگاه برای هر گراف H،

$$.\gamma(G\times H)\geq\gamma(G)\gamma(H)$$

قضیه ۱-۱-۷([6]): اگر $\gamma(G)=1$ یا ۲ آن گاه G در حدس ویزینگ صدق می‌کند.

تعریف ۱-۱-۸([6]): مجموعه احاطه گر S را مجموعه‌ای احاطه گر قوی نامیم هرگاه هر راس x در $V(G)-S$ توسط راسی مانند y از S احاطه شود به طوریکه $deg(y)\geq deg(x)$ کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه گر قوی در گراف G را با $\gamma_s(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱-۱-۹([6]): یک ۲ بسته‌بندی از گراف G، زیر مجموعه‌ای از راسها مانند S است که برای هر $x,y\in S$ داشته باشیم

$$N[x]\cap N[y]=\phi.$$

عدد ۲ بسته‌بندی G که با $\rho_{2}(G)$ نشان داده می‌شود کوچکترین اندازه یک ۲ بسته‌بندی گراف G می باشد.

قضیه ۱-۱-۱۰([6]): برای هر گراف G، $\rho(G)\leq\gamma(G)$.

منظور از یک $\gamma(G)-$ مجموعه، مجموعه‌ای احاطه گر از اندازه $\gamma(G)$ خواهد بود و منظور از یک $\gamma_c(G)-$ مجموعه، مجموعه‌ای احاطه گر همبند از اندازه $\gamma_c(G)$ خواهد بود. به همین ترتیب عبارتهای $\gamma_t(G)-$ مجموعه، $i(G)-$ مجموعه، $\beta_{\circ}(G)-$ مجموعه و $\Gamma(G)-$ مجموعه با مفاهیم مربوطه به کار می‌روند. برای مطالعه بیشتر در زمینه مجموعه‌های احاطه گر و انواع آن خواننده را به مرجع [6] ارجاع می‌دهیم.

تعریف ۱-۱-۱۱([6]): در یک گراف G مجموعه $S\subseteq V(G)$ را یک مجموعه احاطه گر کلی مکانی می‌نامیم هرگاه S مجموعه ای احاطه گر کلی بوده و برای هر دو راس x,y از $V(G)\setminus S$ داشته باشیم

$$N(x)\cap S\neq N(y)\cap S.$$

عدد احاطه کنندگی کلی مکانی گراف G کمترین اندازه در میان اندازه‌های مجموعه‌های احاطه گر کلی مکانی برای G است و آن را با $\gamma_t^l(G)$ نشان می‌دهیم.

1-۲- احاطه کنندگی رومی

در این بخش مفاهیم و نتایجی مقدماتی را در خصوص احاطه گری رومی یک گراف از مرجع [4] ارائه می کنیم. فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف باشد . تابع

$$f\ : V\ (G) \to \{0,1,2\}$$

را یک تابع احاطه گر رومی می نامیم هر گاه به ازای هر راس v با شرط $f(v)=0$ راسی مانند $u \in N\ (v)$ داشته باشیم که $f(u)=2$.

اگر f یک تابع احاطه گر رومی روی گراف G باشد وزن f برابر است با

$$w(f) = \sum_{v \in V} f(v)$$

عدد احاطه گری رومی گراف G که با $\gamma_R\ (G)$ نشان داده می شود برابر است با کوچکترین وزن در میان وزنهای توابع احاطه گر رومی روی گراف G. این پارامتر برگرفته از یک مدل دفاعی- نظامی در روم باستان در قرن چهارم قبل از میلاد است که در حال حاضر در مسایل دفاعی و نظامی مورد بررسی قرار گرفته است. در این مدل روشهای قرار دادن گروههای نظامی (اعم از دیده بان- لشگر- هنگ و...) طوری بررسی شده است که در مواقع حمله دشمن به سرزمین یا کشور امکان دفاع وجود داشته باشد.

قرارداد ۱-۲-۱ : اگر f یک تابع احاطه گر رومی روی گراف G باشد $w(f)=\gamma_R\ (G)$ آن گاه f را به اختصار یک γ_R-تابع برای G می نامیم .

یک تابع احاطه گر رومی می تواند توسط یک سه تایی (V_0, V_1, V_2) نشان داده شود که در آن

$$V_0 = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

و $V_1 = \{v \in V \mid f(v) = 1\}$

.$V_2 = \{v \in V \mid f(v) = 2\}$

دراین نمایش برای تابع احاطه گر رومی f داریم

$$w(f) = |V_1| + 2|V_2|$$

تعریف ۱-۲-۲ : گراف G را گرافی رومی نامیم هر گاه

$$\gamma_R(G) = 2\gamma(G)$$

قضیه ۱-۲-۳ ([4]): برای هر گراف G داریم :

$$\gamma(G) \le \gamma_R(G) \le 2\gamma(G)$$

قضیه ۱-۲-٤ ([4]): برای هر گراف G از مرتبه n ، $\gamma_R(G) = \gamma(G)$ اگر و تنها اگر G گراف تهی از مرتبه n باشد .

قضیه ۱-۲-۵ : گراف G گرافی رومی است اگر و تنها اگر دارای یک γ_R- تابع $f = (V_0, V_1, V_2)$ باشد که در آن $V_1 = \varnothing$

قضیه ۱-۲-٦([4]): فرض کنید $f = (V_0, V_1, V_2)$ یک γ_R- تابع برای گراف G باشد . در این صورت :

(۱) $G[V_1]$ زیر گراف تولید شده توسط رأسهای V_1 دارای ماکزیمم درجه حداکثر 1 است ..

(۲) هر رأس از V_0 با حداکثر دو رأس از V_1 مجاور است .

(۳) V_2 یک مجموعه احاطه گر برای گراف تولید شده توسط $V_0 \cup V_2$ است .

(۴) هیچ یالی دو راس x و y را با $x \in V_1$ و $y \in V_2$ وصل نخواهد کرد .

قضیه ۱-۲-۷ ([4]): فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه n باشد . در این صورت $\gamma_R(G) \le \frac{4n}{5}$.

همچنین تساوی برقرار است اگر و تنها اگر یا $G = C_5$ و یا G اجتماع $\frac{n}{5} p_5$ و یک زیر گراف همبند باشد که راسهای آن مراکز $\frac{n}{5} p_5$ هستند .

قضیه ۱-۲-۸ ([4]): برای مسیرها و دورها داریم

$$\gamma_R(P_n) = \gamma_R(C_n) = \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$$

توجه کنید که به ازای دو گراف G و H حاصلضرب دکارتی آنها که با $G \square H$ نشان داده می شود گرافی اس با مجموعه راسهای

$$.\{(u,v) \mid u \in V(G), v \in V(H)\}$$

دو راس (u_1,v_1) و (u_2,v_2) مجاورند هر گاه

(۱) $u_1 = u_2$ و $v_1v_2 \in E(H)$ یا

(۲) $v_1 = v_2$ و $u_1u_2 \in E(G)$.

قضیه ۱-۲-۹ ([4]): برای هر عدد n داریم $\gamma_R(P_2 \square P_n) = n+1$.

فصل دوم

گرافهای راس بحرانی رومی

در این فصل گرافهای راس بحرانی رومی را بررسی نموده و سعی بر آن است تا این گرافها را دسته بندی کنیم. برای این منظور ابتدا ما یک دسته بندی در حالت کلی ارائه می دهیم و سپس گرافهای بلوکی بحرانی را مشخص می نماییم.

لم ۲-۱: برای هر راس v در یک گراف احاطه بحرانی رومی G داریم

$$\gamma_R(G-v)=\gamma_R(G)-1.$$

اثبات: فرض کنید G یک گراف احاطه بحرانی رومی بوده و v راسی از G باشد. لذا $\gamma_R(G-v)\le\gamma_R(G)-1$. فرض کنید $f=(V_0,V_1,V_2)$ یک $\gamma_R(G-v)-$تابع باشد. در این صورت تابع $f_1:V(G)\to\{0,1,2\}$ با ضابطه $f_1(v)=1$, $f_1(x)=f(x)$ اگر $x=v$ یک تابع احاطه گر رومی برای G است. لذا $\gamma_R(G)\le\gamma_R(G-v)+1$ بنابراین

$$\gamma_R(G-v)=\gamma_R(G)-1 \quad ■$$

حال یک دسته بندی برای گرافهای احاطه رومی بحرانی راسی در حالت کلی ارائه می دهیم.

قضیه ۲-۲: گراف G احاطه بحرانی رومی است اگر و تنها اگر به ازای هر راس V در G یک $\gamma_R(G)-$ تابع $f=(V_0,V_1,V_2)$ موجود باشد که $v\in V_1$.

اثبات: فرض کنید v راسی در G باشد و $f=(V_0,V_1,V_2)$ یک $\gamma_R(G)-$ تابع باشد به طوری که $v\in V_1$. در این صورت

$$f_1:V(G-v)\to\{0,1,2\}$$

تعریف شده با ضابطه $f_1(X)=f(X)$ یک تابع رومی برای G-v با وزن $\gamma_R(G)-1$ است. در نتیجه $\gamma_R(G-v)<\gamma_R(G)$ چون vدلخواه است لذا G گرافی احاطه رومی بحرانی راسی است.

بر عکس فرض کنید G گرافی احاطه رومی بحرانی راسی باشد و v راسی دلخواه باشد.

بنا به لم ۲-۱ داریم

$.\gamma_R(G-v)=\gamma_R(G)-1$

فرض کنید : $g=(V_0,V_1,V_2)$ یک $\gamma_R(G-v)$ - تابع باشد .

تابع $g_1=V(G)\to\{0,1,2\}$ را با ضابطه $g_1(v)=1$ و $g_1(u)=g(u)$ و اگر $u=v$ تعریف می کنیم . در این صورت g_1 یک تابع رومی برای G با وزن $1+\gamma_R(G-v)$ می باشد. چون

$\gamma_R(G)=1+\gamma_R(G-v)$. لذا g_1 یک $\gamma_R(G)$ - تابع می باشد.■

در گزاره زیر خانواده هایی از گرافهای احاطه رومی بحرانی رومی راسی را ارائه می دهیم.

گزاره ۲-۳:

۱- گراف نردبانی $P_2\times P_n$ ، γ_R - بحرانی راسی است اگر و تنها اگر $n\le 2$.

۲- گراف $K_P\times K_q$, γ_R - بحرانی راسی است اگر و تنها اگر $|P-q|\le 1$.

۳-گراف مستدیر $C_n(\{1,2,......r\})$, γ_R-بحرانی راسی است اگر و تنها اگر

$n\equiv 1$ یا ۲ (پیمانه ۲r+۱) .

۴- گراف r-بخشی کامل $K_{P_1,P_2,...,P_r}$ برای $r\ge 2$. γ_R - بحرانی راسی است اگر و تنها اگر یا

$P_1=P_2=....P_r\in\{2,3\}$ و یا $K_{P_1,P_2,P_r}=K_2$.

اثبات:

۱- داریم $\gamma_R(P_2\times P_n)=n+1$. به وضوح $P_2\times P_1=K_2$, $P_2\times P_2=C_4$ گرافهایی γ_R- بحرانی راسی هستند. لذا فرض کنید $n\ge 3$. فرض کنید u راسی با درجه ۲ باشد و v مجاور با u باشد که $deg(u)=3$. در این صورت

$$\gamma_R(P_2 \times P_n - v) = n+1 = \gamma_R(P_2 \times P_n)$$

لذا $P_2 \times P_n$ تنها در حالت $n \le 2$ بحرانی است.

(۲) بدون کاستن از کلیت فرض کنید $q \le p$.

اگر $p=q$ باشد آن گاه $\gamma_R(K_p \times K_q) = 2q$ و اگر $p=q$ آن گاه $\gamma_R(K_p \times K_q) = 2q-1$.

به ازای هر راس v در $K_p \times K_q$ می توان دید که برای $p-q \ge 2$

$$\gamma_R(K_p \times K_q - v) = 2q$$

و برای $p-q=1$

$$\gamma_R(K_p \times K_q - v) = 2q-1$$

و

برای $p=q$, $\gamma_R(K_p \times K_q - v) = 2p-2$.

بنابراین $K_p \times K_q$, γ_R- بحرانی راسی است اگر و تنها اگر $|p-q| \le 1$

(۳) به آسانی دیده می شود

$$\gamma_R(C_n(\{1,2,....r\})) = 2\left\lceil \frac{n}{2r+1} \right\rceil - 1$$

اگر $n \equiv 1$ (پیمانه $2r+1$) و

$$\gamma_R(C_n(\{1,2,....r\})) = 2\left\lceil \frac{n}{2r+1} \right\rceil$$

اگر $n \equiv 1$ (پیمانه $2r+1$) . فرض کنید v راسی از $C_n(\{1,2,...r\})$ باشد . در این صورت داریم:

$$\gamma_R(C_n(\{1,2,....r\}) - v) = 2\left\lceil \frac{n}{2r+1} \right\rceil - 1$$

اگر $n \equiv 2$ (پیمانه $2r+1$) و

$$\gamma_R(C_n(\{1,2,....r\})-v)=2\left\lceil \frac{n}{2r+1} \right\rceil$$

اگر $n \neq 2$ (پیمانه $2r+1$) و در نتیجه $C_n(\{1,2,....r\})$ گرافی γ_R - بحرانی راسی است اگر و تنها اگر

۲ یا $n \equiv 1$ (پیمانه $2r+1$).

(۴) بدون کاستن از کلیت فرض کنید :

$$P_1 \le P_2 \le .... \le P_r$$

اگر $P_1=1$ آن گاه

$\gamma_R(K_{P_1,P_2,.....P_r})=2$.

اگر $P_1=2$ آن گاه $\gamma_R(K_{P_1,P_2,.....P_r})=3$ و

اگر $P_1 \geq$ ۳ آن گاه $\gamma_R(K_{P_1,P_2,.....P_r})=4$.

اگر $P_r=1$ آن گاه

$$K_{P_1,P_2,.....P_r}=K_r$$

و به وضوح γ_R- بحرانی راسی است اگر وتنها اگر $r=2$. برای حالت های دیگر می توان دید که $K_{P_1,P_2,.....P_r}$, γ_R- بحرانی راسی است اگر و تنها اگر

$P_1=P_2=....=P_r \in \{2,3\}$. ■

نتیجه ۲-٤: یک دور C_n ، γ_R- بحرانی راسی است اگر و تنها اگر ۲ یا $n=1$ (پیمانه ۳).

لم ۲-۵: فرض کنید G گرافی با راس u از درجه حداقل ۲ باشد. اگر v و w همسایه های u باشند به طوری که $N(v)\cup N(w)\subseteq N[u]$. آن گاه G، γ_R- بحرانی راسی نیست.

اثبات : فرض کنید G، γ_R- بحرانی راسی است. بنا به قضیه ۲-۲ یک γ_R- تابع $f=(V_0,V_1,V_2)$ برای G موجود است به طوری که $u\in V_1$. در این صورت $N(u)\subseteq V_0\cup V_1$.

چون

$$N(v)\cup N(w)\subseteq N[u]$$

در این صورت $f(v)=f(w)=1$. این یک تناقض است. لذا G، γ_R- بحرانی راسی نیست. ■

نتیجه ۲-٦: در یک گراف γ_R- بحرانی راسی هر راس پشتیبان با دقیقاً یک برگ مجاور است.

حال ما گرافهایی γ_R- بحرانی راسی بلوکی را دسته بندی می کنیم.

قضیه ۲-۷: یک گراف بلوکی G، γ_R- بحرانی راسی است اگر و تنها اگر $G=K_2$.

اثبات: به وضوح K_2 یک گراف γ_R- بحرانی راسی است. فرض کنید G گرافی γ_R- بحرانی راسی با مرتبه حداقل ۳ باشد که $G\neq K_2$. اگر G گرافی کامل باشد آن گاه G، γ_R- بحرانی راسی نیست. لذا فرض می کنیم G گراف کامل نباشد. اگر G دارای راسی پشتیبان مانند v از درجه ۲ باشد آن گاه فرض می کنیم u و w همسایه های v باشند که w یک برگ است. بنا بر قضیه ۲-۲ چون G، γ_R- بحرانی است یک γ_R- تابع $f=(V_0,V_1,V_2)$ موجود است که $f(u)=1$. هم چنین $f(v)+f(w)\geq 2$.

اما در این صورت تابع $g:V(G)\to\{0,1,2\}$ با ضابطه

$$g(w)=g(u)=0 \quad g(v)=2 \quad g(a)=f(a), \text{ اگر } a\notin\{u,v,w\}$$

یک تابع رومی برای G با وزن کمتر از $\gamma_R-(G)$ است.

این یک تناقض است. لذا G دارای هیچ راس پشتیبانی ازدرجه ۲ نمی باشد. فرض کنید یک بلوک پایانی B از مرتبه حداقل ۳ برای G داریم و $u \in V(B)$ یک راس برشی از G باشد و $v, w \in V(B)-\{u\}$ باشند. در این صورت $N(v) \cup N(w) \subseteq N[u]$ و بنا بر لم ۲-۵، G بحرانی نیست. طبق نتیجه ۲-۶ می دانیم هر راس پشتیبان مجاور با دقیقاً یک برگ است. لذا هر بلوک پایانی از G یک K_2 است وهر بلوک پایانی از $G\text{-}L(G)$ از مرتبه حداقل ۳ است. فرض کنید B' یک بلوک پایانی برای $G\text{-}L(G)$ باشد. فرض کنید Y راسی از B' باشد که راس برشی در $G\text{-}L(G)$ نمی باشد اما یک راس پشتیبان در G است. فرض کنید $z, x \in V(B')-\{y\}$ برگی مجاور با y باشد. بنا به قضیه ۲-۲ یک γ_R-تابع $f'=(v_0, v_1, v_2)$ برای G موجود است که $x \in V_1$. در این صورت $N(X) \leq V_1 \cup V_0$.

اگر $f'(y)=0$ آن گاه $f'(z)=2$ و تابع $g': V(G) \rightarrow \{0,1,2\}$ با ضابطه $g'(y)=2$، $g'(a)=f'(a)$ اگر $a \in \{x,y,z\}$ یک تابع رومی برای G با وزن کمتر از $\gamma_R(G)$ است که یک تناقض است. در نتیجه $f'(y)=1$ و در نتیجه $f'(z)=1$. این یک تناقض است. بنابراین $G=K_2$. ■

فصل سوم

گرافهای یال بحرانی رومی

در این فصل گرافهای γ_R- بحرانی یالی را مطالعه می کنیم و درختهای γ_R- بحرانی یالی را دسته بندی می کنیم.

لم ۳-۱: اگر G گرافی γ_R- بحرانی ریالی باشد و $e \in E(\overline{G})$ آن گاه

$$.\gamma_R(G+e)=\gamma_R(G)-1$$

اثبات: فرض کنید G گرافی γ_R- بحرانی یالی باشد و $e \in E(\overline{G})$.

فرض کنید $e=xy$. بنا به تعریف $.\gamma_R(G+e)\le\gamma_R(G)-1$

فرض کنید $g=(V_0,V_1,V_2)$ یک γ_R- تابع برای $G+e$ باشد. اگر $\{g(x),g(y)\}\ne\{0,2\}$ آن گاه g یک تابع احاطه گر رومی برای G بوده ودر نتیجه $\gamma_R(G)\le\gamma_R(G)-1$ که یک تناقض مـی باشـد. لذا $\{g(x),g(y)\}=\{0,2\}$ فرض کنید:

$g(x)=2$ در این صورت $g':V(G)\to\{0,1,2\}$ با ضابطه $g'(y)=1$ و $g'(v)=g(v)$ اگر $v\ne y$ یک تابع احاطه گر رومی برای G است . در نتیجه $\gamma_R(G)\le\gamma_R(G+e)+1$. یعنی

$$\gamma_R(G+e)\ge\gamma_R(G)-1$$

بنابراین $.\gamma_R(G+e)=\gamma_R(G)-1$ ■

قضیه ۳-۲: گراف G، γ_R- بحرانی یالی است اگر و تنها اگر برای هر دو راس غیر مجاور x و y از G، یک $\gamma_R-(G)$، تابع $f=(V_0,V_1,V_2)$ موجود باشد به طوری که $.\{f(x),f(y)\}=\{1,2\}$

اثبـات: فـرض کنیـد G یـک گـراف شـامل دو راس غیـر مجـاور y,x باشـد. ابتـدا فـرض کنیـد یـک $\gamma_R-(G)$، تابع $f=(V_0,V_1,V_2)$ موجود اسـت بـه طـوری کـه $\{f(x),f(y)\}=\{1,2\}$. فـرض کنیـد $.f(x)=1$

در این صورت $f_1 : V(G+xy) \to \{0,1,2\}$ با ضابطه

$f_1(x)=0$ و $f_1(v)=f(v)$ اگر $v \neq x$

یک تابع احاطه گر رومی برای $G+xy$ است. در نتیجه $\gamma_r(G+xy) < \gamma_R(G)$. بنابراین G گرافی γ_R- بحرانی ریالی است.

برعکس فرض کنید G گرافی γ_R- بحرانی رومی است. بنابر لم ۳-۱ داریم

$\gamma_R(G+xy) = \gamma_R(G) - 1$.

فرض کنید $g=(V_0,V_1,V_2)$ یک $\gamma_R(G+xy)-$تابع باشد.

اگر $\{f(x), f(y)\} = \{0,2\}$ آن گاه g یک تابع احاطه گر رومی برای G است که یک تناقض می باشد لذا $\{g(x), g(y)\} = \{0,2\}$. فرض کنید $g(x)=0$. در این صورت تابع $g_1 : V(G) \to \{0,1,2\}$ با ضابطه $g_1(x)=1$ و $g_1(v)=g(v)$ اگر $v \neq x$ یک تابع احاطه گر رومی گراف G است. چون وزن g_1 برابر $\gamma_R(G)$است لذا g_1 یک $\gamma_R(G)-$ تابع می باشد. ■

برای دسته بندی کردن درختهای احاطه رومی بحرانی یالی به چند لم نیاز داریم.

لم ۳-۳: هر راس پشتیبان در یک گراف γ_R- بحرانی یالی با دقیقاً یک برگ مجاور است.

اثبات: فرض کنید G گرافی γ_R- بحرانی یالی باشد. فرض کنید x راسی پشتیبان باشد و x با دو برگ b,a مجاور باشد . بنا به قضیه ۳-۲ یک $\gamma_R(G)-$تابع $f=(V_0,V_1,V_2)$ موجود است که

$\{f(a), f(b)\} = \{1,2\}$.

در این صورت $g : V(G) \to \{0,1,2\}$ با ضابطه

$g(x)=2$، $g(v)=0$ اگر $v \in \{a,b\}$، $g(v)=f(v)$ اگر $v \notin \{x,a,b\}$

یک تابع احاطه گر رومی برای G است که وزن آن کمتر از $\gamma_R(G)$است. این یک تناقض است. لذا x با دقیقاً یک برگ مجاور است.

■

لم ۳-٤: اگر T درختی γ_R-بحرانی یالی باشد آن گاه $diam(T)=5$.

اثبات: فرض کنید T درختی γ_R- بحرانی ریالی باشد و فرض کنید yو z دو برگ در T باشند به طوری که $d(y,z)=diam(T)$ و فرض کنید P مسیر بین yو z باشد. فرض کنید $N(z)=\{v\}, N(y)=\{u\}$ بنا بر لم ۳-۳: $u\neq v$ و $d(y,z)\geq 3$ به علاوه $deg(u)=deg(v)=2$. به راحتی می توان دید که یک مسیر چهار راسی γ_R- بحرانی یالی نمی باشد. لذا فرض می کنیم $diam(T)\geq 4$. فرض کنید $w\in N(u)-\{y\}$ راسی از p باشد. طبق قضیه ۳-۲ یک $\gamma_R-(T)$ تابع $h=(V_0,V_1,V_2)$ موجود است به طوری $\{h(y),h(z)\}=\{1,2\}$. بدون کاستن از کلیت فرض کنید $f(y)=2$ و $f(z)=1$.

فرض کنید $diam(T)=4$. در این صورت v مجاور w می باشد. و به راحتی می توان دید u و w متعلق به V_0 هستند.چون $h(w)=0$ و $h(z)=1$ خواهیم داشت $h(v)=1$. چون h یک تابع احاطه گر رومی است لذا $N(w)\cap V_2\neq\phi$.

فرض کنید $w'\in N(w)\cap V_2$. در این صورت w' یا یک برگ است و یا یک راس پشتیبان . اگر w' یک برگ باشد آن گاه $h_1:V(T)\to\{0,1,2\}$ با ضابطه

$$h_1(x)=h(x), h_1(y)=1\ , h_1(w')=h_1(v)=0,\ h_1(w)=2 \text{ اگر } x\notin\{w,w',v,y\}$$

یک تابع احاطه گر رومی برای T با وزن کمتر از $\gamma_R(T)-$ است. این یک تناقض است. لذا فرض کنید w' یک راس پشتیبان باشد. فرض کنید w^* برگ مجاور با w' باشد. در این صورت $h_2:V(T)\to\{0,1,2\}$ با ضابطه $h_2(w')=h_2(v)=0, h_2(w)=2$،

$$h_2(x)=h(x), h_2(y)=h_2(w^*)=1 \text{ اگر } x\in\{w,w',w^*,v,y\}$$

یک تابع احاطه گر رومی برای T با وزن کمتر از $\gamma_R(T)-$ است.

این یک تناقض است. لذا $diam(T)>=5$.

حال فرض کنید $diam(T)\geq 6$. فرض کنید $w'\in N(v)-\{z\}$ راسی در P باشد. در این صورت $w'\notin N[w]$. بنا بر قضیه ۳-۲ یک $\gamma_R(T)$ تابع $g_1=(V_0,V_1,V_2)$ موجود است به طوری که $\{g_1(w),g_1(w')\}=\{1,2\}$.

بدون کاستن از کلیت فرض کنید $g_1(w')=1$, $g_1(w)=2$. در این صورت $g_1(y)+g_1(u)\geq 2$.

حال تابع $g_2:V(G)\rightarrow\{0,1,2\}$ با ضابطه

$$g_2(y)=g_2(w)=0 \text{ و } g_2(u)=2 \text{ و } g_2(x)=g_1(x) \text{ اگر } x\notin\{y,u,w\}$$

یک تابع احاطه گر رومی برای T با وزن کمتر از $\gamma_R(T)$ است. این یک تناقض است. لذا $diam(T)=5$. ■

حال ما آماده ایم تا درختهای γ_R بحرانی یالی را دسته بندی کنیم. فرض کنیم H_1 , H_2 درختهای زیر باشند.

قضیه ۳-۵ : درخت T، γ_R - بحرانی یالی است اگر و تنها اگر $T \in \{T_1, T_2\}$.

اثبات : ابتدا به سادگی دیده می شود که درخت های T_1, T_2 و γ_R - بحرانی یالی هستند. فرض کنید T درختی γ_R - یال بحرانی دلخواه باشد. نشان می دهیم $T \in \{T_1, T_2\}$. فرض خلف – فرض کنید $T \notin \{T_1, T_2\}$. فرض کنید y, z دوراس قطری باشند به طوری که $d(y,z) = diam(T)$. فرض کنید p مسیری قطری بین y و z باشد. فرض کنید $N(y) = \{u\}$, $N(z) = \{v\}$ که $\deg(u) = \deg(v) = 2$. در این صورت $diam(T)=5$ و یک γ_R - تابع $h = (V_0, V_1, V_2)$ موجود است که $\{h(y), h(z)\} = \{1,2\}$.
فرض کنید $y \in V_2$, $z \in V_1$ باشند. فرض کنید $w \in N(u) - \{y\}$, $v' \in N(w) \cap N(v)$. لذا P مسیر y-u-w-v'-v-z می باشد. در این صورت $u, w \in V_0$.

اگر $h(v') = 1$ آن گاه $h(v) = 0$. اما در این صورت $N(v) \cap V_2 = \phi$ که یک تناقض می باشد. لذا $h(v') \in \{0,2\}$.

ادعای ۱ : $\deg(w) \in \{2,3\}$.

برای اثبات این ادعا فرض کنید که $\deg(w) \geq 4$ باشد. در این صورت حداکثر یک راس در $N(w) - \{v', u\}$ برگ است و بقیه راسهای $N(w) - \{v', u\}$ راسهای پشتیبان می باشند. چون $w \in V_0$ برای هر راس پشتیبان $a \in N(w) - \{u, v'\}$ داریم $h(a) + h(a') \geq 2$ که در آن a' برگ مجاور با a است. هم چنین فرض کنید A مجموعه همه برگ هایی باشد که با راسی در $N(w) - \{u, v'\}$ مجاورند.

تابع $h^*: V(T) \to \{0,1,2\}$ را تعریف می کنیم که در آن

$$h^*(y) = h^*(x) = 1, h^*(w) = 2 \text{ اگر } x \in A$$

$$h^*(x) = 0, \text{ اگر } x \in N(w) - \{u, v'\},$$

$$h^*(x) = h(x) \text{ اگر } x \notin \{y, w\} \cup A \cup (N(w) - \{u, v'\}).$$

در این صورت h^* یک تابع احاطه گر رومی برای T با وزن کمتر از $\gamma_R(T)$ است. این یک تناقض است.

لذا $\deg(w) \in \{2,3\}$.

ادعای ۲ : $\deg(v') \in \{2,3\}$.

برای اثبات این ادعا فرض کنید $\deg(v') \geq 4$. در این صورت یک برگ $v^* \neq z$ موجود است که

$$(N(v^*) \cap N(v')) - \{v, w\} \neq \phi.$$

هم چنین یک γ_R - تابع h^* برای T موجود است که

$$\{h^*(v^*), h^*(z)\} = \{1,2\}.$$

بدون کاستن از کلیت فرض کنید $h^*(v^*) = 2 \quad , \quad h^*(z) = 1$.

در این صورت $h^*(v') = 0$ و در نتیجه مشابه ادعای ۱ می توان دید که $\deg(v') \in \{2,3\}$.

ادعای ۳ : $\deg(v') = 3$

برای اثبات این ادعا فرض کنید $\deg(v') = 2$. در این صورت $h(v') = 2 \quad , \quad h(v) = 0$. حال $h^*: V(T) \to \{0,1,2\}$ را طوری تعریف می کنیم که $h^*(y) = h^*(v') = h^*(z) = 0$ و

$h^*(u) = h^*(v) = 2 \quad , \quad h^*(x) = h(x)$ اگر $x \notin \{y, v', z, u, v\}$.

در این صورت h^* یک تابع احاطه گر رومی برای T با وزن کمتر از $\gamma_R(T)$ است. این تناقض نتیجه می دهد $\deg(v') = 3$.

مشابه به ادعای ۳ می توان دید که $\deg(w) = 3$.

فرض کنید $w_1 \in N(w) - \{u, v'\}$. در این صورت به سادگی می توان دید که $\{w_1, v'_1\} \not\subset L(T)$. در این صورت یا دقیقا یکی از w_1 , v'_1 راس پشتیبان است که نتیجه می دهد $T = T_1$ و یا هر دوی w_1 , v'_1 راس پشتیبان هستند که نتیجه می دهد $T = T_2$. ■

فهرست منابع و ماخذ

1. J. R. S. Blair, W. Goddard, S. Hedetniemi, S. Horton, P. Jones, and G. Kubicki, On domination and reinforcement in trees, Discrete Math. 308 (2008), 1165-1175.

2. E.W. Chambers, B. Kinnersley, N. Prince, and D. B. West, Extremal problems for Roman domination, SIAM J. Discr. Math. (accepted).

3. X. Chen, L. Sun, and D. Ma, Bondage and reinforcement number for complete multipartite graphs, J. Beijing Inst. Technol. 12 (2003), 89-91.

4. E. J. Cockayne, P. M. Dreyer Jr., S. M. Hedetniemi, and S. T. Hedetniemi, On Roman domination in graphs, Discrete Math. 278 (2004), 11-22.

5. G. S. Dumke and R. C. Laskar, The bondage and reinforcement numbers of f for some graphs, Discrete Math. 167/168 (1997), 249-259.

6. T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi and P.J. Slater, Fundamentals of Domination
in graphs, Marcel Dekker, Inc., New york, 1998.

7. J. Kok, and C. M. Mynhardt, Reinforcement in graphs, Congr. Numer. 79 (1990), 225-231.

8. C.S. Revelle and K.E. Rosing, Defendens imperium romanum: a classical problem in military strategy, Amer. Math. Monthly 107 (7) (2000), 585–594.

9. I. Stewart, Defend the Roman Empire, Sci. Amer. 281 (6) (1999), 136-139.

10. D.B. West, Introduction to Graph Theory, Prentice-Hall, Inc, 2000.

واژه نامه انگلیسی-فارسی

Claw	پنجه
Claw – free	پنجه آزاد
Critical	بحرانی
Domination	احاطه‌گری
Domination critical	احاطه بحرانی
Domination number	عدد احاطه کنندگی
Dominating set	مجموعه احاطه کننده
k – domination	k – احاطه‌گری
Reinforcement	کمکی
Roman domination	احاطه کنندگی رومی
Roman domination number	عدد احاطه کنندگی رومی