

اللَّهُ الرَّحْمَنُ الرَّحِيمُ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده: ریاضی

گرایش: ریاضی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

کنترل سیستم‌های گسسته زمانی خطی با اغتشاش ورودی

داود دلیری

استاد راهنما:

دکتر حجت احسنی طهرانی

بهمن ۱۳۹۰

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی

به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهمشان به شجاعت می گراید  
به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگار ان بهترین پشتیبان است  
و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند

این مجموعه را به خانواده عزیزم تقدیم می کنم

خدایا

خدایا

سرنوشت مرا خیر بنویس

تقدیری مبارک

تا هر چه را که تو دیر می خواهی زود نخواهم،  
و هر چه را تو زود می خواهی دیر نخواهم...م...

به مصداق «من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق» بسی شایسته است که با درود فراوان خدمت خانواده بسیار عزیز، دلسوز و فداکارم که پیوسته جرعه نوش جام تعلیم و تربیت، فضیلت و انسانیت آنها بوده‌ام و همواره چراغ وجودشان روشنگر راه من در سختی‌ها و مشکلات بوده است، از ایشان تقدیر و تشکر نمایم.

از زحمات بی‌دریغ اساتید فرهیخته و بزرگوارم در دانشگاه صنعتی شاهرود بخصوص استاد ارجمندم جناب آقای دکتر حجت احسنی طهرانی که با راهنمایی‌های دلسوزانه خود در پیشبرد این پروژه راهگشای اینجانب بودند و با مشاوره‌های خردمندانه یاری‌گر من در این راه بوده و همیشه با روی گشاده پاسخگوی سوالات بنده بودند کمال تشکر و سپاسگزاری دارم.

از دوست بزرگوارم جناب آقای جواد محمدیان که نهایت لطف را به بنده نمودند و در این پروژه بسیار مرا یاری کردند، سپاسگزارم.

همچنین از دوستان گرانقدرم آقایان علی آهنگری، امیر علیزاده، مهدی فرهنگ، سعید اسعدی که همیشه اینجانب را مورد لطف و محبت خود قرار داده و به من درس صداقت و مهرورزی آموختند، تشکر فراوان دارم.

از تمامی عزیزانی که بر اثر غفلت، نامشان از قلم افتاد، صمیمانه پوزش می‌خواهم و برایشان آرزوی موفقیت

دارم.

## تعهدنامه

اینجانب داود دلیری دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان‌نامه: کنترل سیستم‌های گسسته زمانی خطی با اغتشاش ورودی تحت راهنمایی دکتر حجت احسنی طهرانی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تا کنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا « **Shahrood University of Technology** » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجودات زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.

## تاریخ

## امضای دانشجو

### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

## چکیده

در این پایان نامه روشی جدید جهت کنترل سیستم‌های گسسته زمانی خطی همراه با اغتشاش ورودی با استفاده از ماتریس‌های افزوده و تبدیلات تشابهی ارائه شده است که نسبت به روش‌های موجود دارای محاسباتی ساده‌تر می‌باشد و در واقع یک سیستم دارای اغتشاش به یک سیستم بدون اغتشاش تبدیل می‌گردد. همچنین در روش ارائه شده سیستم کنترل‌پذیر گسسته خطی دوم دلخواه بوده، لذا به گونه‌ای تعیین می‌گردد تا سیستم نهایی همواره کنترل‌پذیر باشد. لذا با استفاده از تبدیلات تشابهی می‌توان کنترلگر بهینه زمانی را به گونه‌ای تعیین نمود تا پایداری سیستم همواره حفظ گردد.

مطالب ارائه شده در این پایان نامه بصورت زیر آورده شده است:

در فصل اول، تعاریف و نمادهای مقدماتی و همچنین تاریخچه مختصری از کارهای انجام شده برای رد اغتشاش سیستم‌های کنترلی ارائه می‌کنیم. در فصل دوم، سیستم‌های کنترل دیجیتال، تابع تبدیل  $Z$ ، قطب‌ها و صفرها در صفحه  $Z$ ، پایداری سیستم‌های حلقه-بسته در حوزه  $Z$  را بیان می‌کنیم. در فصل سوم، شاخص‌های عملکرد و فرموله نمودن مسائل بهینه‌سازی اشاره می‌کنیم. همچنین در این فصل، تعریف‌های کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری سیستم‌های کنترلی بیان می‌شود. به علاوه، سیستم‌های کنترل بهینه درجه دوم و معادله ریکاتی بردار کنترل بهینه  $u(k)$  بصورت حلقه-بسته و ارزیابی شاخص عملکرد ارائه می‌گردد. در فصل چهارم، پس از بیان تکنیک‌های کنترل کلاسیک و روش‌های کنترل مدرن، روشی جدید برای سیستم‌های گسسته خطی زمانی با ورودی اغتشاش با استفاده از ماتریس‌های افزوده و تبدیلات تشابهی به همراه چند مثال ارائه می‌گردد.

## فهرست مطالب

چکیده .....	۱
فهرست شکل ها .....	و
فهرست جداول .....	ز
فصل ۱ .....	۱
مقدمه و تاریخچه .....	۱
۱,۱ تعاریف و نمادهای مقدماتی .....	۱
تعریف ۱,۱,۱ دستگاه .....	۱
تعریف ۲,۱,۱ فرایند .....	۱
تعریف ۳,۱,۱ سیستم .....	۱
تعریف ۴,۱,۱ اغتشاش .....	۲
تعریف ۵,۱,۱ سیستم کنترل .....	۳
تعریف ۶,۱,۱ ورودی .....	۳
تعریف ۷,۱,۱ خروجی (پاسخ) .....	۳
تعریف ۸,۱,۱ کنترل با پسخورد .....	۳
معرفی سیستم‌های کنترل .....	۳
تقسیم‌بندی سیستم‌های کنترل .....	۴
تعریف ۹,۱,۱ سیستم‌های کنترل حلقه باز .....	۴

تعریف ۱۰,۱,۱ سیستم‌های کنترل حلقه بسته .....	۵
تعریف ۱۱,۱,۱ سیستم‌های کنترل گسسته زمانی .....	۶
تعریف ۱۲,۱,۱ سیستم‌های کنترل آنالوگ و دیجیتال .....	۶
۲,۱ تاریخچه .....	۷
فصل ۲ .....	۸
آشنایی با سیستم‌های کنترل گسسته زمانی .....	۸
۱,۲ مقدمه .....	۸
۲,۲ سیستم‌های کنترل دیجیتال .....	۹
۳,۲ تبدیل Z .....	۱۵
۱,۳,۲ قطب‌ها و صفرها در صفحه Z .....	۱۷
۲,۳,۲ تحلیل پایداری سیستم‌های حلقه-بسته در حوزه Z .....	۱۸
فصل ۳ .....	۲۱
تحلیل در فضای حالت و سیستم‌های کنترل بهینه .....	۲۱
۱,۳ مقدمه .....	۲۱
۲,۳ شاخص‌های عملکرد .....	۲۱
۳,۳ فرموله نمودن مسائل بهینه‌سازی .....	۲۲
۴,۳ کنترل پذیری .....	۲۳
تعریف ۱,۴,۳ کنترل پذیری کامل حالت یک سیستم .....	۲۳



۲۴.....	کنترل پذیری کامل حالت سیستم گسسته زمانی خطی ثابت-زمان
۲۸.....	رویت پذیری
۲۸.....	تعریف ۱,۵,۳ رویت پذیری کامل حالت یک سیستم
۲۹.....	رویت پذیری کامل سیستم‌های گسسته زمانی خطی
۳۳ .....	سیستم‌های کنترل بهینه
۳۴.....	کنترل بهینه درجه دوم خطی
۳۹.....	معادله ریکاتی بردار کنترل بهینه $u(k)$ بصورت حلقه-بسته
۴۲.....	ارزیابی شاخص عملکرد مینیمم
۴۷ .....	فصل ۴
۴۷.....	روشی جدید جهت کنترل سیستم‌های گسسته زمانی خطی با اغتشاش ورودی
۴۷.....	۱,۴ مقدمه
۴۸ .....	۴.۲ تکنیک‌های کنترل کلاسیک
۴۸ .....	۱,۲,۴ کنترل پس‌خورد
۴۹.....	۴.۱,۱,۲ جایابی قطب
۵۰ .....	۴.۲,۱,۲ کنترل $PID$
۵۵ .....	۲,۲,۴ کنترل پیش‌خورد
۵۶.....	۱,۲,۲,۴ طراحی جبران‌ساز پیوندی
۵۸ .....	۳,۴ روش‌های کنترل مدرن

۴,۴	کنترل بهینه زمانی سیستم‌های گسسته زمانی خطی همراه با اغتشاش	۵۹
۵,۴	تبدیلات تشابهی فضای حالت	۶۲
۶,۴	فرم همدم برداری اولیه	۶۵
۵	فصل	۶۹
نتیجه گیری		۶۹
پیوست		۷۰
برنامه‌های کامپیوتری		۷۰
مراجع و منابع		۷۹

## فهرست شکل‌ها

- شکل ۱-۱ سیستم کنترل نشده ..... ۲
- شکل ۱-۲ سیستم کنترل حلقه باز ..... ۵
- شکل ۱-۳ سیستم کنترل حلقه بسته ..... ۶
- 
- شکل ۲-۱ نمودار بلوکی یک سیستم کنترل دیجیتال ..... ۱۱
- شکل ۲-۲ نمودار بلوکی یک ماشین تراش کنترل شده عددی ..... ۱۲
- شکل ۲-۳ تقریب مقطع ماشین تراش کنترل شده عددی ..... ۱۴
- شکل ۲-۴ سیستم کنترل حلقه-بسته مثال ۱-۲ ..... ۱۹
- 
- شکل ۳-۱ سیستم کنترل بهینه براساس شاخص عملکرد درجه دوم ..... ۴۲
- شکل ۳-۲ نمودارهای  $P(k)$  بر حسب  $x$ ،  $x(k)$  بر حسب  $k$ ،  $K(k)$  بر حسب  $k$  و  $u(k)$  بر حسب  $k$  ..... ۴۶
- 
- شکل ۴-۱ نمودار بلوکی کنترل کننده پسخورد ..... ۴۹
- شکل ۴-۲ کنترل PID یک دستگاه ..... ۵۱
- شکل ۴-۳ یافتن پاسخ پله دستگاه ..... ۵۲
- شکل ۴-۴ منحنی پاسخ S شکل ..... ۵۳
- شکل ۴-۵ سیستم حلقه بسته با کنترل کننده تناسبی ..... ۵۴
- شکل ۴-۶ نوسان نامیرا با زمان تناوب  $Pcr$  ..... ۵۴
- شکل ۴-۷ نمودار بلوکی کنترل پیشخورد ..... ۵۶
- شکل ۴-۸ نمودار بلوکی کنترل پیشخورد-پسخورد ..... ۵۷
- شکل ۴-۹ نمودار بلوکی روش جبران‌ساز پیشخورد-پسخورد ..... ۵۷
- شکل ۴-۱۰ نمودار بلوکی فضای حالت سیستم ..... ۵۹

## فهرست جداول

جدول ۴-۱ قواعد تنظیم زیگلر – نیکولس براساس پاسخ پله دستگاه (روش اول).....	۵۳
جدول ۴-۲ قواعد تنظیم زیگلر – نیکولس براساس بهره بحرانی $Kcr$ و زمان تناوب بحرانی $Pcr$ (روش دوم).....	۵۵

# فصل ۱

## مقدمه و تاریخچه

### ۱,۱ تعاریف و نمادهای مقدماتی

#### تعریف ۱,۱,۱ دستگاه

دستگاه می‌تواند بخشی از یک وسیله، مثلاً مجموعه‌ای از اجزاء ماشین که یک کار انجام می‌دهند، باشد. هر جسم فیزیکی تحت کنترل مثلاً یک وسیله مکانیکی، کوره گرمایش، راکتور شیمیایی یا سفینه دستگاه نامیده می‌شود.

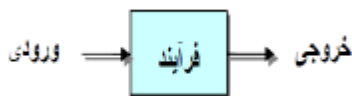
#### تعریف ۲,۱,۱ فرایند

فرایند عملی طبیعی و تدریجی یا یک رشته تغییر تدریجی است که به صورتی تقریباً معین یکی پس از دیگری انجام شده به هدفی مشخص می‌انجامد، همچنین عملی مصنوعی که از یک رشته جنبش‌ها و کارهای کنترل شده برای سوق به هدفی مشخص صورت می‌گیرد. در این پایان نامه هر کاری که باید کنترل شود فرایند می‌نامیم. فرایندهای شیمیایی، اقتصادی، و زیستی مثال‌هایی از این فرایندها هستند.

#### تعریف ۳,۱,۱ سیستم

سیستم ترکیبی از اجزاست که با هم و برای انجام عملی مشخص کار می‌کنند. سیستم تنها سیستم فیزیکی نیست. مفهوم سیستم را می‌توان به پدیده‌های پویای انتزاعی، مثلاً پدیده‌های اقتصادی، نیز تعمیم داد. بنابراین کلمه سیستم می‌تواند تمام سیستم‌های فیزیکی، زیستی، اقتصادی، و غیره را شامل می‌شود.

شکل (۱-۱) یک رابطه ساده ورودی و خروجی را نشان می‌دهد، و نمونه‌ای از یک سیستم کنترل نشده است که شرایط موجود در دنیای فیزیکی را نشان می‌دهد.



شکل ۱ - ۱ سیستم کنترل نشده

چند مثال:

- نیروگاه

ورودی این سیستم سوخت می‌باشد. نیروگاه به عنوان یک سیستم عمل نموده و خروجی آن الکتریسیته می‌باشد.

- موتور الکتریکی

ورودی این سیستم الکتریسته می‌باشد که موجب دوران سیستم موتور می‌گردد.

- ساختمان در طول زلزله

سیستم همان سازه است و حرکت فوندانسیون همان سیگنال ورودی است و سیگنال خروجی پاسخ سازه است.

### تعریف ۴,۱,۱ اغتشاش

اغتشاش سیگنالی است که در جهت تغییر شدید خروجی یک سیستم عمل می‌کند. اگر اغتشاش در داخل سیستم تولید شود آن را داخلی می‌نامیم؛ اغتشاش خارجی در خارج سیستم تولید می‌شود و یک ورودی سیستم است. به عنوان مثال برای اختلال در یک سیستم حرارت مرکزی می‌توان به عواملی مانند باز شدن پنجره، تغییر دما یا سرعت باد خارج ساختمان اشاره نمود. سیستم کنترلی که قادر به غلبه بر اغتشاشات باشد، دارای پیچیدگی بیشتر و در نتیجه هزینه بیشتر خواهد بود که البته امکان ناپایداری خواهد داشت.

## تعریف ۵,۱,۱ سیستم کنترل

سیستمی متشکل از تجهیزات مرتبط به یکدیگر به نحوی که خود یا سیستمی را تنظیم می کنند.

## تعریف ۶,۱,۱ ورودی

محرک یا تحریک کننده اعمالی به یک سیستم کنترل از طرف منبع انرژی خارجی که معمولاً به منظور تولید پاسخ معین توسط سیستم کنترل است.

## تعریف ۷,۱,۱ خروجی (پاسخ)

پاسخ حقیقی دریافتی از سیستم کنترلی است. (معمولاً متغیری که باید کنترل شود).

## تعریف ۸,۱,۱ کنترل با پسخورد

منظور از کنترل با پسخورد عملی است که می کوشد اختلاف بین خروجی سیستم و ورودی مرجع را به رغم وجود اغتشاش مینیمم کند، و این کوشش براساس این اختلاف صورت می گیرد.

## معرفی سیستم های کنترل

تقاضای بشر برای کنترل سیستم های مختلف از جمله نیروهای طبیعت، یکی از علل پیشرفت انسان در طول تاریخ است. در خلال قرن بیستم مهندسی کنترل بسیاری از آرزوهای بشر را جامه عمل پوشاند. نحوه کار ماشین ها و وسایل اولیه ای که به دست بشر ساخته شد، ایجاب می کرد که دست انسان مستقیماً با آنها در تماس بوده و رفتار آنها را کنترل کند. بنابراین یک ماشین یا دستگاه دائماً و به طور متناوب (هر چند دقیقه) احتیاج به کنترل داشته است. اما امروزه علم کنترل در قسمت هایی مورد استفاده قرار می گیرد که انسان به سادگی قادر به انجام آنها نیست. در بسیاری از مسائل از قبیل کنترل دقیق درجه حرارت، دقت در اندازه گیری، سرعت جوابگیری، علوم هسته ای، مهندسی و سایر رشته ها که انسان قادر به درک و حل سریع آنها نیست، کنترل خودکار نقش اساسی و حیاتی را ایفا می کند. رشد و توسعه طرز استفاده از دستگاه های کنترل خودکار در خلال

۳۰ تا ۳۵ سال اخیر، اثر مشخصی در زندگی بشر گذارده است. چون پیشرفت و استفاده از کنترل خودکار جهت اجرای بهترین نوع عملکرد سیستم‌های دینامیکی، بهبود کیفیت و زوال قیمت محصول، ازدیاد درصد تولید و سهولت زیاد کنترل و فرمان سیستم‌ها را سبب شده است. نام سیستم‌های کنترل خودکار اصولاً به وسایلی اطلاق می‌شود که در هر لحظه و به طور خودکار یک سلسله از اعمال خود را بررسی، و اگر اختلافی با وضع یا نتیجه پیش‌بینی شده داشته باشد آن را اصلاح می‌کنند. بدین ترتیب چنین مدارهایی تا حدود زیادی مانند یک انسان متفکر عمل می‌کنند و وظیفه‌ای را انجام می‌دهند که از قبل تعیین شده است. اتومبیل بدون راننده یا هواپیمای بدون خلبان مثال‌هایی از کاربرد مدارهای کنترل خودکار در سال‌های اخیر است. هواپیمای بدون خلبان در هرگونه شرایط جوی که از قبل به طور کامل قابل پیش‌بینی نیست، ارتفاع و زاویه حرکت با افق را حفظ می‌کند و پرواز را طبق برنامه به انجام می‌رساند. به طور کلی برای سیستم‌های کنترل خودکار سه خاصیت اساسی تعریف می‌شود:

۱. کار یک مدار کنترل خودکار تا حد قابل قبولی مستقل از پارازیت‌ها و عوامل خارجی، قابل کنترل است.
۲. سیستم می‌تواند خود را با شرایطی که قابل پیش‌بینی نیست وفق دهد.
۳. دقت عمل بسیار خوب و در اکثر موارد به مراتب بالاتر از دقت عمل انسان است.

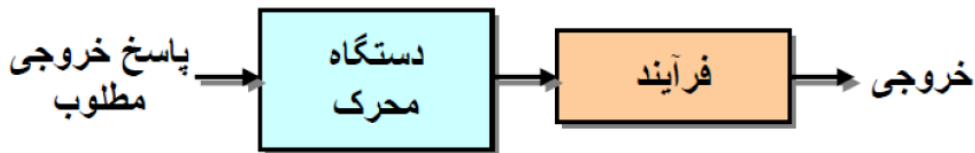
### تقسیم‌بندی سیستم‌های کنترل

سیستم‌های کنترل به طور کلی به دو نوع عمده حلقه باز و حلقه بسته تقسیم می‌شوند. تفاوت اساسی این دو گروه از سیستم‌های کنترل ناشی از کاربرد شاخه پسخورد در سیستم‌های حلقه بسته است.

### تعریف ۹،۱،۱ سیستم‌های کنترل حلقه باز

سیستم‌های کنترل حلقه باز سیستم‌هایی هستند که در آنها عمل کنترل تحت تأثیر نتیجه آن عمل نیست. به عبارت دیگر خروجی سیستم بر روی عمل کنترل اثری ندارد.





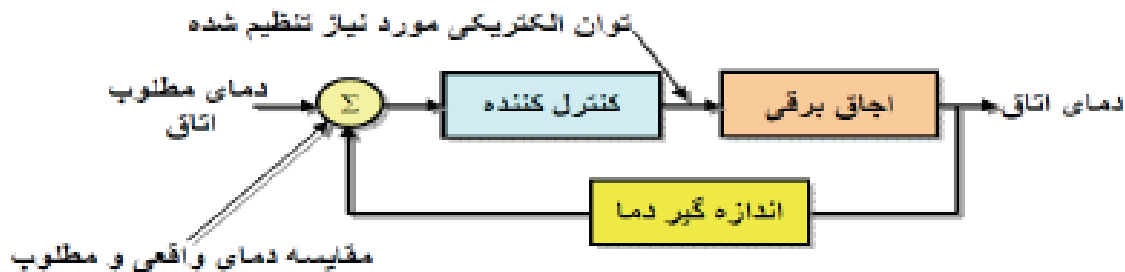
شکل ۱ - ۲ سیستم کنترل حلقه باز

مثلاً هواپیمایی که در بالای ابرها پرواز می‌کند و خلبان هواپیما فقط یک قطب‌نما دارد یک سیستم حلقه باز را نشان می‌دهد. در حالت ایده‌آل خلبان می‌تواند به کمک قطب‌نمای خود به مقصد دلخواه برسد، ولی اگر جریان هوا و باد را در نظر بگیریم و همچنین با توجه به اینکه عکس‌العمل خلبان برای تصحیح مسیر هواپیما آهسته است، معمولاً برای پروازهای طولانی هواپیما از مسیر اصلی خود قدری منحرف می‌شود.

### تعریف ۱۰،۱،۱ سیستم‌های کنترل حلقه بسته

در این نوع سیستم کنترلی سیگنال به کنترل پسخورد می‌شود که موجب تغییرات در سیستم می‌گردد. این تغییرات بطور مداوم به منظور دست یابی مطمئن به مقدار خروجی تعیین شده و مطلوب ادامه دارد. ملاحظه شد که در یک سیستم حلقه باز، رابطه مشخصی بین ورودی اصلی یا فرمان دهنده و خروجی یا فرمان گیرنده موجود است. ولی این رابطه ممکن است به علت ورودی‌های فرعی یا اغتشاشات که بر قسمت‌های مختلف مدار وارد می‌شود، تغییر کند. بنابراین در یک سیستم حلقه باز فقط با تنظیم ورودی نمی‌توان از نتیجه خروجی کاملاً مطمئن بود. مثلاً اگر اتاقی که توسط یک بخاری برقی گرم و جریان بخاری بوسیله یک مقاومت متغیر تنظیم می‌شود، رابطه معینی بین اندازه مقاومت و کالری داده شده بوسیله بخاری، و در نتیجه دمای اتاق موجود خواهد بود. در این مثال دمای اتاق تحت فرمان اندازه مقاومت است و برای هر مقاومت، دمای معینی وجود خواهد داشت. حال اگر یکی از پنجره‌های اتاق باز شود، برای همان مقدار مقاومت، دیگر دمای اتاق ثابت نخواهد بود، بلکه مقدار دیگری را اختیار می‌نماید. لذا در این حالت تعیین مقدار مقاومت، مستقیماً برای ایجاد دمای مورد نظر کافی نیست، بلکه باید دستگاهی تعبیه شود که دمای اتاق را در شرایط مختلف بررسی کند و در

ضمن بررسی اگر لازم باشد مقاومت را متناسب با مقدار لازم تغییر دهد. برای این منظور فرض کنید یک ترموستات در اتاق و در سر راه جریان الکتریکی قرار داده شود به طوری که کلید جریان را در دمای پایین تر



شکل ۱ - ۳ سیستم کنترل حلقه بسته

از دمای مطلوب باز کند، با توجه به شرایط جدید نوعی عمل فرمان از طرف دما انجام شده و اثر ورودی فرعی خنثی شده است ( نظیر کنترل اتوهای برقی ). در این حالت مدار فرمان حلقه باز نیست.

### تعریف ۱۱,۱,۱ سیستم‌های کنترل گسسته زمانی

سیستم‌های کنترل گسسته زمانی ( زمان-گسسته )، سیستم‌های کنترلی هستند که در آنها یک یا چند متغیر فقط در لحظه‌های گسسته‌ای از زمان می‌توانند تغییر کنند. این لحظه‌ها، که آنها را با  $kT$  یا  $t_k (= k)$  نشان می‌دهیم، ممکن است لحظه‌هایی را مشخص کنند که در آنها برخی اندازه‌گیری‌های فیزیکی انجام گرفته است.

### تعریف ۱۲,۱,۱ سیستم‌های کنترل آنالوگ و دیجیتال

سیگنال‌ها در یک سیستم کنترل معمولاً تابعی از متغیر مستقل که عموماً زمان می‌باشد، هستند. ۱- سیگنالی که وابسته به مقادیر پیوسته‌ای از متغیر مستقل زمان باشد، سیگنال پیوسته زمانی یا آنالوگ نامیده می‌شود. به عنوان مثال می‌توان ولتاژ پیوسته سینوسی جریان برق شهر را نام برد.

۲- سیگنالی که فقط در لحظه‌های گسسته‌ای از متغیر مستقل زمان تعریف شود، سیگنال گسسته یا داده نمونه‌برداری شده و یا دیجیتال نامیده می‌شود. به عنوان مثال، نمونه برداری روزانه در ساعت ۸ هر روز از دمای اتاق نمونه‌ای از سیگنال گسسته زمانی است. [۳۲]

## ۲,۱ تاریخچه

لی. چن<sup>۱</sup> و ژاولین. چنگ<sup>۲</sup> در سال ۲۰۰۴ در مقاله‌ای کنترل مسائل بهینه‌سازی درجه دوم خطی منفرد با رد اغتشاش برای سیستم‌های توصیفگر را مورد بررسی قرار داده‌اند و روشی را ارائه داده‌اند که در آن کنترل مسائل بهینه‌سازی درجه دوم خطی منفرد با رد اغتشاش برای سیستم‌های توصیفگر را تغییر شکل داده که با کنترل مسائل بهینه‌سازی نامنفرد با رد اغتشاش برای سیستم‌های توصیفگر معادل شود، که می‌تواند بوسیله حل مسائل کنترل بهینه درجه دوم نامنفرد برای دو سیستم دیگر حل شود. [۱۰]

فرانکو بلاچینی<sup>۳</sup> و ماریو اشنایر<sup>۴</sup> روی رد اغتشاش پایا بوسیله پسخورد حالت ایستا کار کرده‌اند. کرباسی و تهرانی پارامتری‌سازی کنترلگرهای پسخورد حالت برای سیستم‌های خطی چند متغیره را مورد بررسی قرار داده‌اند. [۱۶] لزی فاولر<sup>۵</sup> برای رد اغتشاش سیستم‌های متناوب-زمان، الگوریتم X LMS-فیلتر شده را ارائه کرده‌اند.

---

1- Li Chen

2- Zhaolin Cheng

3- Franco Blanchini

4- Mario Sznaiier

5- Leslie Paige Fowler

## فصل ۲

### آشنایی با سیستم‌های کنترل گسسته زمانی

#### ۱,۲ مقدمه

در سال‌های اخیر افزایش سریعی در استفاده از کنترل کننده‌های دیجیتال در سیستم‌های کنترل حاصل شده است. در واقع بسیاری از سیستم‌های کنترل صنعتی، کامپیوترهای دیجیتال را به عنوان جزء لازم عملیات خود در بر می‌گیرند. کنترل‌های دیجیتال در رسیدن به عملکرد بهینه مثلاً بصورت قابلیت تولید حداکثر، سود حداکثر، هزینه حداقل، یا مصرف انرژی حداقل به کار می‌روند. سیر تکاملی اخیر میکروپروسورها و میکروکامپیوترها که می‌توانند در وظایف کنترلی مختلف مورد استفاده قرار گیرند، روند جدیدی در جهت منظور کردن کامپیوترهای دیجیتال حتی در سیستم‌های کنترل با مقیاس کوچک به منظور به دست آوردن عملکرد بهینه برقرار کرده است.

اخیراً، کاربرد کنترل کامپیوتری، حرکت هوشمندانه در روبات‌های صنعتی، بهینه سازی مصرف سوخت در اتومبیل‌ها، نظریف در عملیات لوازم خانگی و ماشین آلات مانند تنورهای میکروویوی و چرخ‌های خیاطی و غیره را امکان‌پذیر ساخته است. قابلیت تصمیم‌گیری و انعطاف‌پذیری در برنامه کنترل مزایای عملی سیستم‌های کنترل دیجیتال می‌باشد.

در مهندسی کنترل، کامپیوترهای دیجیتال برای دو منظور مختلف به کار برده شده‌اند. اولاً، از آنها برای تحلیل و ترکیب سیستم‌های کنترل پیچیده شامل شبیه‌سازی دیجیتالی و محاسبه دیجیتالی دینامیک‌های کنترل پیچیده استفاده شده است. ثانیاً، بصورت کنترل کننده‌ها در سیستم‌های کنترل به کار برده شده‌اند. [۳۲]

## ۲,۲ سیستم‌های کنترل دیجیتال

شمای کنترلی را که در آن برای انجام پردازش سیگنال با شیوه مطلوب کامپیوتر دیجیتالی در حلقه کنترل گنجانیده شود، کنترل دیجیتال مستقیم<sup>۱</sup> نامند. کنترل دیجیتال مستقیم از سال‌های ۱۹۶۰ به سیستم‌های کنترل فرایند با مقیاس بزرگ در فرایندهای شیمیایی و غیره اعمال شده است و به مقدار بسیار زیادی در پیشرفت‌های مربوط به قابلیت تولید و کیفیت محصولات و صرفه‌جویی در هزینه‌های کارگری سهمیم بوده است. پیشرفت‌های چشمگیر در میکروپروسورها و میکروکامپیوترها از اواسط سال‌های ۱۹۷۰ مهندسين کنترل را قادر کرده است که روش‌های کنترل دیجیتال مستقیم را به تنوع وسیعی از سیستم‌های کنترل هم با مقیاسهای بزرگ و هم با مقیاسهای کوچک اعمال کنند. کنترل دیجیتال مستقیم یک فرایند یا دستگاه در مقایسه با کنترل آنالوگ متناظر دارای مزایای زیر است:

۱- پردازش داده‌ها در کنترل کننده‌های دیجیتال سراسر است، محاسبات کنترلی پیچیده را می‌توان به سهولت انجام داد.

۲- برنامه‌های کنترل ( مشخصه‌های کنترل کننده ) را می‌توان به سادگی تغییر داد، در صورتی که چنین تغییراتی مورد نیاز باشد.

---

1-Direct digital control

۳- از دیدگاه نویز داخلی<sup>۱</sup> و اثرات رانش<sup>۲</sup>، کنترل کننده‌های دیجیتال به مراتب برتر از کنترل کننده‌های آنالوگ متناظر می‌باشند.

از سوی دیگر کنترل دیجیتال معایبی نیز به شرح زیر دارد:

۱- فرایندهای نمونه‌برداری و کوانتیزه کردن به خطاهای بیشتری می‌انجامد، که عملکرد سیستم را تنزل می‌دهد.

۲- طراحی کنترل کننده‌های دیجیتال برای جبران چنین تنزلی به مراتب پیچیده‌تر از طراحی کنترل کننده‌های آنالوگ در یک سطح عملکرد معادل می‌باشد.

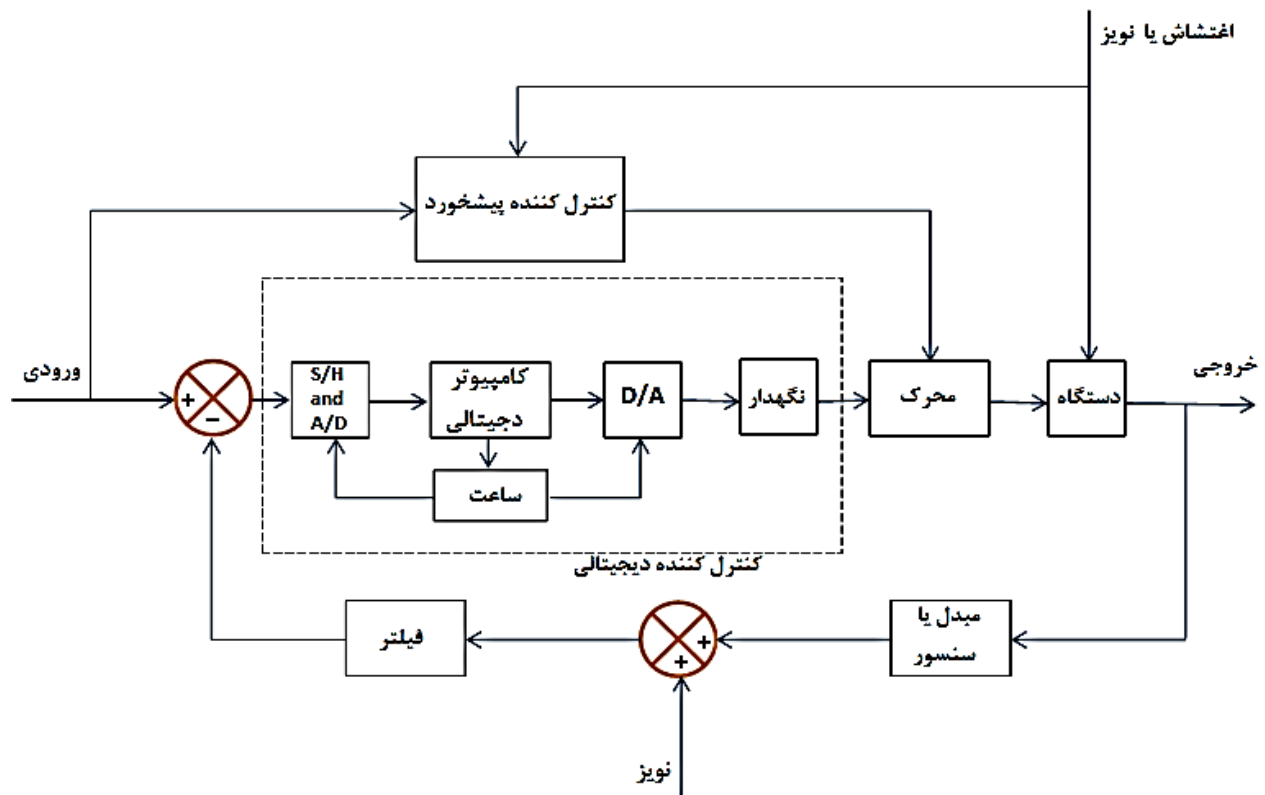
شکل (۱-۲) نمودار بلوکی یک سیستم کنترل دیجیتال را نمایش می‌دهد که تشکیلات یک شمای کنترل اساسی را در بر دارد. سیستم شامل کنترل پس‌خورد و کنترل پیش‌خورد است. در طراحی چنین سیستم کنترلی باید توجه کرد «خوبی» سیستم کنترل به شرایط انفرادی بستگی دارد. برای یک حالت مفروض لازم است شاخص عملکرد مناسبی را انتخاب کرده و کنترل کننده‌ای طراحی نمود که شاخص عملکرد انتخاب شده را بهینه سازد.

یک نمونه از سیستم‌های کنترل دیجیتال، سیستم‌های کنترل عددی است. سیستم‌های کنترل عددی کامپیوتری شده که سیستم‌های کنترل مستقیم هستند بطور گسترده‌ای در صنعت به کار برده می‌شوند، زیرا میکروپروسورها یا میکروکامپیوترهای ارزان قیمت به راحتی در دسترس هستند. با به کار گرفتن میکروپروسورها و میکروکامپیوترها برای پردازش داده‌های لازم، هزینه و اندازه ماشین‌های کنترل عددی کاهش یافته است.

---

1-Internal noise

2-Drift



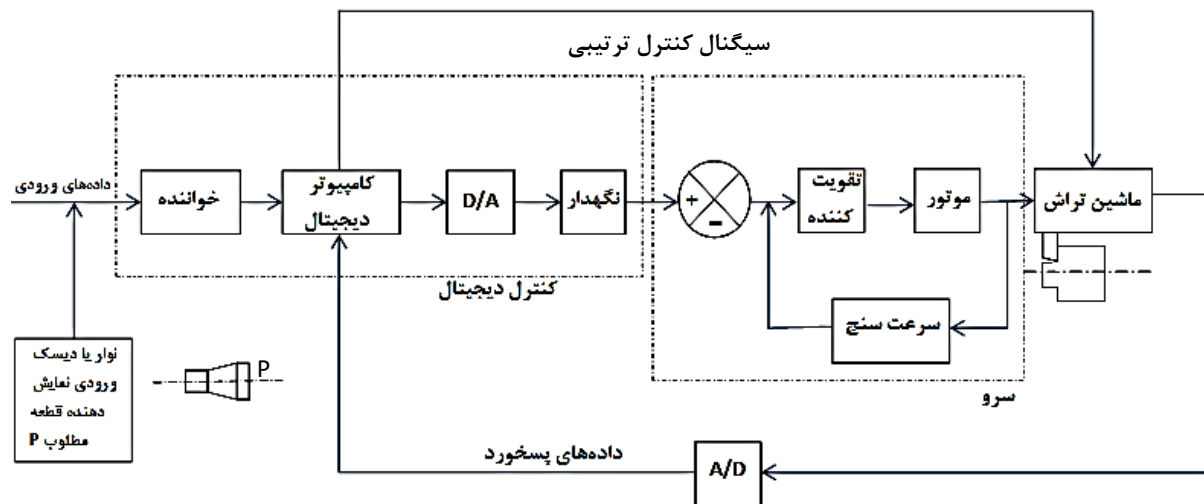
شکل ۱-۲ نمودار بلوکی یک سیستم کنترل دیجیتال

کنترل عددی روشی برای کنترل حرکت قطعات ماشین با اعداد باینری است. داده‌های ورودی ( مرکب از مثلاً ابعاد، شکل یک قسمت مکانیکی که باید تولید شود ) و نیز ترتیب دستورهای برش به عنوان دنباله‌ای از اعداد باینری در یک نوار یا دیسک مغناطیسی ذخیره می‌شوند. چنین نوار، یا دیسکی را نوار ورودی<sup>۱</sup> یا دیسک ورودی<sup>۲</sup> نامند. مشخصه اصلی یک سیستم کنترل عددی آن است که اعداد باینری در داده‌های ورودی به وسیله سیگنال‌های الکتریکی ( یا نوع دیگر ) که به صورت حرکت خطی یا دورانی در می‌آیند به مقادیر فیزیکی (ابعاد یا کمیت‌ها) تبدیل می‌شوند.

1- Input tape

2- Input disk

شکل (۲-۲) نمودار بلوکی یک ماشین تراش کنترل شده عددی را نشان می‌دهد. سیستم به شرح زیر کار می‌کند. یک نوار یا یک دیسک ورودی که نمایش دهنده قطعه مورد نیاز P در شکل باینری است تهیه می‌شود. برای شروع سیستم، داده‌های روی نوار یا دیسک ورودی از طریق خواننده، خواننده می‌شود که اعداد باینری را به صورت سیگنال پالس ورودی تبدیل می‌کند. سیگنال پالس ورودی نخست با سیگنال پالس پس‌خورده مقایسه می‌شود (معمولاً هر دو مدوله شده فرکانسی هستند) و سیگنال تفاضل (خطا) به یک سبک از پیش تعیین شده مطلوب در کامپیوتر پردازش می‌یابد به قسمی که خطا کاهش یابد. خروجی کامپیوتر به مبدل دیجیتال به آنالوگ خواننده می‌شود. مبدل D/A و دستگاه نگهدارنده، داده‌های دیجیتال را بصورت نشان داده شده در شکل تشکیل می‌دهد. (در برخی از کاربردها که نیازهای توانی، بالنسبه کوچک است به جای سروموتورهای dc از موتورهای پله‌ای استفاده می‌شود.) همچنین برای کنترل عملیات ترتیبی سیگنال‌هایی توسط کامپیوتر ارسال می‌شود. مبدلی که به تیغه برش<sup>۱</sup> وصل شده است حرکت را به صورت سیگنالی الکتریکی تبدیل می‌کند، که توسط مبدل آنالوگ به دیجیتال به صورت سیگنال پالس تبدیل می‌شود. خواندن دقیق داده‌های نشان دهنده



شکل ۲-۲ نمودار بلوکی یک ماشین تراش کنترل شده عددی



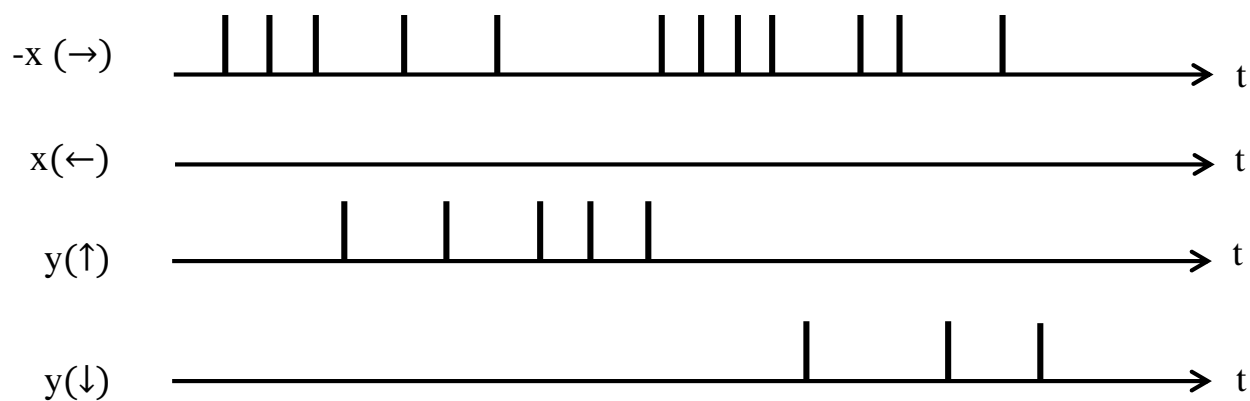
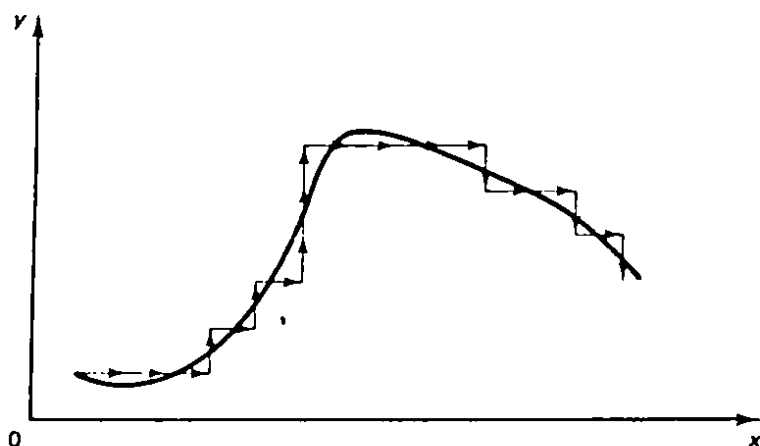
رسم یا شما و تصمیم‌گیری سریع در برنامه‌ترتیبی توسط کنترل عددی امکان‌پذیر شده و باعث افزایش کیفیت محصول و قابلیت تولید گردیده است.

شکل (۲-۳) مثالی از تقریب مقطع<sup>۱</sup> را وقتی که موتورهای پله‌ای برای تعیین وضعیت تیغه برش به کار می‌روند نشان می‌دهد. سیستم موتور پله‌ای که وضعیت تیغه برش ماشین تراش را در صفحه  $XY$  تعیین می‌کند، توسط کامپیوتری که داده‌ای ورودی را پردازش می‌دهد کنترل می‌شود. تعداد و نوع پالس‌های فرمان از کامپیوتر به موتورهای پله‌ای، تعداد و جهت حرکت‌های لازم برای آوردن تیغه برش به وضعیت درست در مختصات  $X$  و  $Y$  را تعیین می‌کند. در بسیاری از موارد حرکت در جهت  $X$  یا  $Y$  یک میکرون (یا ۱۰ میکرون) برای هر پالس فرمان است. مثلاً ۵ پالس فرمان توسط کامپیوتر در جهت مثبت  $X$  ارسال شود، در این صورت تیغه برش ۵ میکرون (یا ۵۰ میکرون) در جهت  $X$  حرکت می‌کند. بنابراین، تیغه برش در هر نوبت در جهت  $X$  یا  $Y$  به اندازه یک میکرون (یا ۱۰ میکرون) حرکت می‌کند. این بدان معنی است که تیغه برش منحنی مفروضی را با دقتی در حدود یک میکرون (یا ۱۰ میکرون) در هر دو جهت  $X$  و  $Y$  دنبال می‌کند. از این رو، دقت دنبال کردن یک مقطع مفروض را می‌توان بالا نگه داشت. مزیت کنترل عددی یک ماشین تراش آن است که قطعات پیچیده را می‌توان با تولرانس‌های یکنواخت در سرعت تراش ماکزیمم تولید کرد.

سیستم‌های کنترل عددی کامپیوتری شده بصورت بلادرنگ عمل می‌کنند. برای تعیین جهت حرکت در صفحه  $XY$ ، کامپیوتر باید معادلات جبری را حل کرده و در هر ۱۰۰ میکروثانیه یا در این حدود یک سیگنال پالس را ارسال کند. برای تسریع زمان محاسبه، نه تنها میکروکامپیوتر باید قادر به پردازش سریع داده‌ها باشد، بلکه تعداد مراحل در برنامه کامپیوتر باید در حداقل نگه داشته شود.

---

1- Profile



شکل ۲-۳ تقریب مقطع ماشین تراش کنترل شده عددی

علاوه بر پایین بودن هزینه و فشرده بودن اندازه آن، سیستم کنترل عددی کامپیوتری شده دارای مزایای عملیاتی<sup>۱</sup> است. هر باری که قطعه یکسانی تولید می شود نیازی به باز چرخاندن نوار ورودی وجود ندارد. علاوه

---

1- Functional advantages

بر این، با افزایش ظرفیت حافظه می‌توان داده‌های ورودی متفاوت بسیاری ذخیره نمود و انواع متفاوت بسیاری از محصولات را به طور پیوسته تولید کرد و از این رو قابلیت تولید را افزایش داد. [۳۲]

## ۳،۲ تبدیل Z

یکی از ابزارهای ریاضی که معمولاً در تحلیل و ترکیب سیستم‌های کنترل گسسته زمانی به کار می‌رود تبدیل Z است. نقش تبدیل Z در سیستم‌های گسسته زمانی مشابه نقش تبدیل لاپلاس در سیستم‌های پیوسته زمانی است. در یک سیستم کنترل گسسته زمانی خطی، یک معادله تفاضلی خطی دینامیک‌های سیستم را مشخص می‌کند. برای آنکه پاسخ سیستمی را به ورودی معینی تعیین کنیم باید چنین معادله تفاضلی را حل کرد. با روش تبدیل Z حل معادلات تفاضلی خطی ماهیتاً جبری می‌شود. (درست به همان ترتیبی که تبدیل لاپلاس معادلات دیفرانسیل خطی ثابت را به معادلات جبری برحسب S تبدیل می‌کند، تبدیل Z معادلات تفاضلی خطی ثابت را به معادلات جبری برحسب Z تبدیل می‌کند.)

روش تبدیل Z یک روش عملیاتی است که در کار کردن با سیستم‌های گسسته زمانی بسیار نیرومند است. تبدیل Z یک تابع زمانی  $x(t)$  که در آن  $t$  نامنفی است، یا دنباله‌ای از مقادیر  $x(kT)$  یا  $x(k)$  که در آن  $k$  مقادیر صفر یا مثبت را اختیار کرده و  $T$  دوره تناوب نمونه‌برداری است، با معادله زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[x(t)] = \mathcal{Z}[x(kT)] = \mathcal{Z}[x(k)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \end{aligned} \quad (1-2)$$

به این تبدیل Z، تبدیل Z یک طرفه اطلاق می‌شود. نماد  $\mathcal{Z}$  نشانگر «تبدیل Z» است. در تبدیل Z یک طرفه فرض می‌کنیم که  $x(t)=0$  برای  $t < 0$  یا  $x(kT)=x(k)=0$  برای  $k < 0$ . توجه کنید که Z یک متغیر مختلط است.

تبدیل Z برای  $x(t)$  که در آن،  $-\infty < t < \infty$  یا  $x(kT)$  یا  $x(k)$  که در آن  $k$  مقادیر صحیح ( $k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$ ) را اختیار می کند، با معادله زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[x(t)] = \mathcal{Z}[x(kT)] = \mathcal{Z}[x(k)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} \end{aligned} \quad (2-2)$$

به این تبدیل Z، تبدیل دو طرفه اطلاق می شود. در تبدیل Z دو طرفه، فرض می شود که برای  $t < 0$  تابع زمانی  $x(t)$  غیر صفر باشد و فرض می شود دنباله زمانی  $x(kT)$  یا  $x(k)$  برای  $k < 0$  مقادیر غیر صفر داشته باشد. هر دو تبدیل Z یک طرفه و دو طرفه سری های توانی  $z^{-1}$  هستند. (دومی شامل هم توان های مثبت و هم توان های منفی  $z^{-1}$  است.)

برای بیشتر کاربردهای مهندسی تبدیل Z یک طرفه جواب صورت بسته راحتی در ناحیه همگرایی خود خواهد داشت. هر وقت  $X(z)$ ، به یک سری نامتناهی برحسب  $z^{-1}$ ، در بیرون دایره  $|z| = R$  همگرا شود، که در آن،  $R$  را شعاع همگرایی مطلق گویند، در استفاده از روش تبدیل Z برای حل مسائل گسسته زمانی لزومی ندارد که هر بار مقادیری از Z مشخص شود که به ازای آن  $X(z)$  همگرا می شود.

گسترش سمت راست معادله (2-1) می دهد:

$$X(z) = x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \dots + x(kT)z^{-k} \quad (3-2)$$

این معادله اخیر ایجاب می کند که تبدیل Z هر تابع پیوسته زمانی  $x(t)$  را می توان به طور ذهنی به صورت سری نوشت. در این حالت  $z^{-1}$  وضعیتی در زمان را نشان می دهد که در آن دامنه  $x(kT)$  حاصل می شود. برعکس، اگر  $X(z)$  به صورت سری به شکل معادله (3-2) داده شود، عکس تبدیل Z را می توان به طور ذهنی به صورت دنباله ای از تابع  $x(kT)$  به دست آورد که با مقادیر  $x(t)$  در لحظه های زمانی مخصوص به خود متناظر می باشد.

اگر تبدیل  $Z$  بصورت نسبت دو چند جمله‌ای از  $Z$  داده شود، در این صورت عکس تبدیل  $Z$  را می‌توان با چندین روش مختلف مانند روش تقسیم مستقیم، روش محاسباتی، روش گسترش کسره‌های جزئی و روش انتگرال معکوس به دست آورد. [۳۲]

### ۱,۳,۲ قطب‌ها و صفرها در صفحه $Z$

در کاربردهای مهندسی روش تبدیل  $Z$ ،  $X(Z)$  ممکن است به شکل زیر باشد:

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} \quad (۴-۲)$$

یا

$$X(z) = \frac{b_0(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n)}$$

که در آن  $p_i$ ها قطب‌های  $X(Z)$  و  $z_i$ ها صفرهای  $X(Z)$  هستند.

موقعیت قطب‌ها و صفرهای  $X(Z)$  مشخصه‌های  $x(k)$ ، دنباله مقادیر اعداد را تعیین می‌کنند. درست مانند حالت تحلیل صفحه  $S$  سیستم‌های کنترل پیوسته خطی زمانی، ما اغلب از یک نمایش ترسیمی در صفحه  $Z$  از محل قطب‌ها و صفرهای  $X(Z)$  استفاده می‌کنیم. در مهندسی کنترل و پردازش سیگنال‌ها،  $X(Z)$  اغلب بصورت نسبت چند جمله‌ای بر حسب  $Z^{-1}$  بصورت زیر بیان می‌شود:

$$X(z) = \frac{b_0 z^{-(n-m)} + b_1 z^{-(n-m+1)} + \dots + b_m z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (۵-۲)$$

که در آن  $Z^{-1}$  به عنوان اپراتور تأخیر واحد تعبیر می‌شود. در پیدا کردن قطب‌ها و صفرهای  $X(Z)$ ، راحت است که  $X(Z)$  را بصورت چند جمله‌ای از  $Z$  بیان کنیم. به عنوان مثال:

$$X(z) = \frac{z^2 + 0.5z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z(z + 0.5)}{(z + 1)(z + 2)}$$

روشن است،  $X(z)$  قطب‌هایی در  $z = -1$  و  $z = -2$  و صفرهایی در  $z = 0$  و  $z = -0.5$  دارد. اما اگر  $X(z)$  را بصورت نسبت چندجمله‌ایهایی از  $z^{-1}$  بنویسیم،  $X(z)$  بالا را می‌توان چنین نوشت:

$$X(z) = \frac{1 + 0.5z^{-1}}{1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{1 + 0.5z^{-1}}{(1 + z^{-1})(1 + 2z^{-2})}$$

اگر چه قطب‌ها در  $z = -1$  و  $z = -2$  و یک صفر در  $z = -0.5$  به روشنی از عبارت بالا دیده می‌شوند، اما صفر در  $z = 0$  بطور صریح نشان داده نشده است. بنابراین، بهتر است در کار کردن با قطب‌ها و صفرهای  $X(z)$ ،  $X(z)$  را بصورت نسبت چند جمله‌ایهایی از  $z$  بیان کرد، نه بصورت چند جمله‌ایهایی از  $z^{-1}$ .

### ۲،۳،۲ تحلیل پایداری سیستم‌های حلقه-بسته در حوزه $z$

در این بخش پایداری سیستم‌های کنترل گسسته زمانی تک ورودی- تک خروجی خطی ثابت-زمان را بررسی می‌کنیم. سیستم با تابع تبدیل پالسی حلقه-بسته زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} \quad (۶-۲)$$

پایداری سیستم تعریف شده با معادله (۶-۲) و نیز سیستم‌های کنترل گسسته زمانی نوع دیگر را می‌توان از محل قطب‌های حلقه-بسته در صفحه  $z$  یا ریشه‌های معادله مشخصه

$$P(z) = 1 + GH(z) = 0 \quad (۷-۲)$$

به شرح زیر تعیین کرد:

۱. برای اینکه سیستم پایدار باشد، قطب‌های حلقه-بسته یا ریشه‌های معادله مشخصه باید در درون دایره واحد در صفحه  $z$  قرار گیرند. هر قطب حلقه-بسته بیرون دایره واحد، سیستم را ناپایدار می‌کند.

۲. اگر یک قطب ساده در  $z = 1$  یا  $z = -1$  قرار گیرد (یا یک قطب ساده در  $z = 1$  و قطب ساده دیگر در  $z = -1$  قرار گیرد) آن وقت سیستم پایدار بحرانی<sup>۱</sup> می‌شود. همچنین، اگر یک جفت قطب مختلط مزدوج بر روی دایره واحد در صفحه  $Z$  قرار گیرد سیستم پایدار بحرانی می‌شود. هر قطب مکرر حلقه-بسته بر روی دایره واحد سیستم را ناپایدار می‌کند.

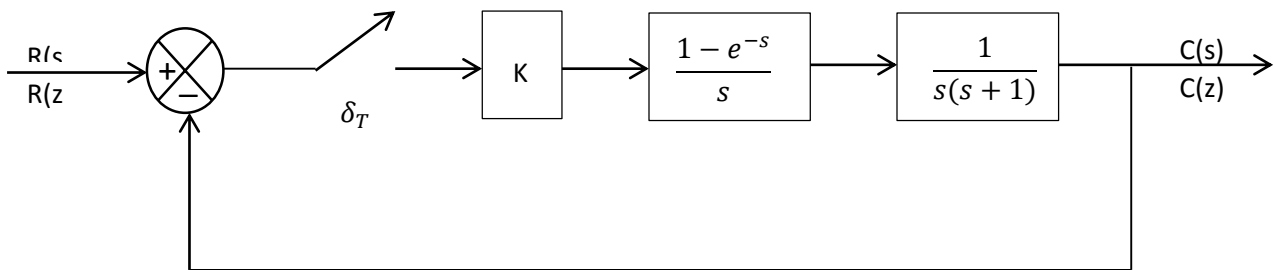
۳. صفرهای حلقه-بسته تأثیری بر روی پایداری مطلق ندارند و بنابراین می‌توانند در هر محلی از صفحه  $Z$  قرار گیرند.

از این رو، یک سیستم کنترل حلقه-بسته گسسته زمانی تک ورودی-تک خروجی خطی ثابت-زمان وقتی ناپایدار می‌شود که لااقل یکی از قطب‌های حلقه-بسته آن بیرون دایره واحد قرار گیرد و یا یک قطب مکرر حلقه-بسته بر روی دایره واحد صفحه  $Z$  قرار گیرد.

مثال ۱،۲ سیستم کنترل حلقه-بسته نشان داده شده در شکل (۲-۴) را در نظر بگیرید. پایداری سیستم را وقتی که  $K = 1$  باشد تعیین می‌کنیم. تابع تبدیل حلقه-باز  $G(s)$  سیستم چنین است:

$$G(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s} \frac{1}{s(s+1)} \quad (۲-۸)$$

با استفاده از رابطه



شکل ۲-۴ سیستم کنترل حلقه-بسته مثال ۱-۲

1- Critically stable

$$c(s) = \mathcal{L}^{-1}[C(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[G(s) \frac{R^*(s)}{1 + GH^*(s)}\right] \quad (9-2)$$

تبدیل z G(s) بصورت زیر است:

$$G(s) = \mathcal{Z}\left[\frac{1 - e^{-s}}{s} \frac{1}{s(s+1)}\right] = \frac{0.3679z + 0.2642}{(z - 0.3679)(z - 1)} \quad (10-2)$$

از آنجایی که تابع تبدیل پالسی حلقه-بسته این سیستم بصورت زیر است:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)} \quad (11-2)$$

معادله مشخصه چنین است:

$$1 + G(z) = 0 \quad (12-2)$$

که چنین می‌شود:

$$(z - 0.3679)(z - 1) + 0.3679z + 0.2642 = 0 \quad (13-2)$$

یا

$$z^2 - z + 0.6321 = 0 \quad (14-2)$$

ریشه‌های معادله مشخصه چنین بدست می‌آیند:

$$z_1 = 0.5 + j0.6181 \quad z_2 = 0.5 - j0.6181 \quad (15-2)$$

چون

$$|z_1| = |z_2| < 1$$

بنابراین سیستم پایدار مجانبی است. [۳۲]



## فصل ۳

### تحلیل در فضای حالت و سیستم‌های کنترل بهینه

#### ۱,۳ مقدمه

مسائل کنترل بهینه مورد توجه تعداد زیادی از مهندسين کنترل قرار گرفته است. یک سیستم کنترل بهینه- سیستمی که طراحی آن مقدار یک تابع انتخاب شده به عنوان شاخص عملکرد را بهینه‌سازی می‌کند بر حسب مورد، ممکن است به حداقل یا حداکثر برساند- با یک سیستم ایده‌آل از این لحاظ متفاوت است که سیستم بهینه، بهترین سیستم قابل حصول با وجود محدودیت‌های فیزیکی است و حال آن که سیستم ایده‌آل ممکن است یک هدف غیرقابل حصول باشد.

#### ۲,۳ شاخص‌های عملکرد

در طراحی یک سیستم کنترل بهینه، برای تعیین یک تصمیم کنترل فعلی تحت محدودیت‌های خاصی لازم است قانونی پیدا کنیم که معیاری از انحراف عملکرد ایده‌آل را به حداقل برساند. آن معیار معمولاً توسط شاخص عملکرد انتخاب شده، فراهم می‌گردد. شاخص عملکرد تابعی است که مقدار آن به عنوان نشانه‌ای از میزان تطبیق عملکرد واقعی با عملکرد مطلوب در نظر گرفته می‌شود. در اکثر مواقع، رفتار یک سیستم با انتخاب بردار  $u(k)$  به گونه‌ای که شاخص عملکرد را به حداقل برساند (یا بر حسب ماهیت شاخص عملکرد انتخاب شده، به حداکثر برساند) بهینه‌سازی می‌شود. از آنجاییکه شاخص عملکرد ماهیت سیستم کنترل بهینه حاصل را تعیین می‌کند انتخاب یک شاخص عملکرد مناسب مهم است. یعنی اینکه تعیین خطی یا غیرخطی بودن، ثابت یا

متغیر با زمان بودن یک سیستم کنترل بستگی به شکل شاخص عملکرد خواهد داشت. بنابراین مهندس کنترل براساس ملزوماتی که یک سیستم باید برآورده کند این شاخص را فرموله‌سازی کرده و آن را در تعیین ماهیت سیستم حاصل در نظر می‌گیرد. ملزومات طراحی معمولاً نه تنها شامل مشخصه‌های عملکرد، بلکه برای تضمین تحقق فیزیکی آن شامل محدودیت‌هایی در شکل کنترل مورد استفاده نیز می‌باشند. فرایند بهینه‌سازی نه تنها باید قوانین کنترل بهینه و ترکیبات پارامترها را فراهم بیاورد بلکه کنترل در عملکرد را که در اثر هرگونه انحراف تابع شاخص عملکرد از مقدار حداقل (حداکثر) آن که از اعمال قوانین کنترل غیربهینه بوجود می‌آید را نیز پیش‌بینی کند.

انتخاب مناسب‌ترین شاخص عملکرد برای یک مسأله داده شده، به خصوص در سیستم‌های پیچیده بسیار مشکل است. مطلوب آن است که معیار کنترل بهینه به جای در نظر گرفتن دیدگاه ریاضی از یک دیدگاه کاربردی سرچشمه بگیرد. اما در حالت کلی انتخاب شاخص عملکرد مصالحه‌ای بین یک برآورد معنی‌دار از عملکرد سیستم و یک مسأله مهارشدنی ریاضی را شامل می‌شود. [۳۲]

### ۳,۳ فرموله نمودن مسائل بهینه‌سازی

اگر اطلاعات زیر داده شده باشند، مسأله بهینه‌سازی یک سیستم کنترل می‌تواند فرموله شود:

۱- معادلات سیستم

۲- رده بردارهای مجاز کنترل

۳- محدودیت‌های یک مسأله

۴- شاخص عملکرد

۵- پارامترهای سیستم

حل یک مسأله کنترل بهینه، تعیین بردار کنترل بهینه  $u(k)$  در میان رده بردارهای مجاز کنترل است. این

بردار  $u(k)$  به عوامل زیر بستگی دارد:

۱- ماهیت شاخص عملکرد

۲- ماهیت محدودیت‌ها

۳- حالت اولیه یا خروجی اولیه

۴- حالت مطلوب یا خروجی مطلوب

جزء در موارد خاص، ممکن است مسأله کنترل بهینه از لحاظ بدست آوردن یک پاسخ تحلیلی آنچنان

پیچیده باشد که لازم گردد جواب محاسباتی آن بدست آورده شود.

مسأله کنترل بهینه، برای هر حالت اولیه داده شده  $x(0)$ ، شامل پیدا کردن یک بردار کنترل مجاز  $u(k)$

است که حالت را به ناحیه مطلوبی در فضای حالت انتقال داده که در آن شاخص عملکرد به حداقل رسانیده شود.

در بعضی از موارد ترکیب خاصی از دستگاه، حالت مطلوب، شاخص عملکرد و محدودیت‌ها، کنترل بهینه را

غیرممکن می‌سازند. سوالاتی در مورد وجود یک بردار کنترل بهینه مهم هستند زیرا که آنها طراح را مطلع می-

سازند که آیا برای یک سیستم و دسته محدودیت‌های داده شده آن، کنترل بهینه امکان‌پذیر است یا خیر. در

میان سوالات دو تا از مهمترین آنها کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری می‌باشند. [۳۱]

## ۴,۳ کنترل‌پذیری

### تعریف ۱,۴,۳ کنترل‌پذیری کامل حالت یک سیستم

سیستم کنترلی را کاملاً کنترل‌پذیر حالت گویند اگر بتوان سیستم را در یک زمان متناهی از هر حالت اولیه

دلخواه به هر حالت مطلوب دیگر همچنین یک حالت دلخواه، انتقال داد. [۳۲] به عبارت دیگر سیستم کنترلی را

کنترل‌پذیر گویند اگر بتوان هر متغیر حالت را در طول یک زمان متناهی توسط سیگنال کنترل بدون

محدودیت، کنترل نمود. اگر یکی از متغیرها مستقل از سیگنال کنترل باشد، کنترل این متغیر حالت غیرممکن خواهد بود و بنابراین سیستم کنترل پذیر نیست. اگر سیستمی کنترل پذیر نباشد، ممکن است جواب مسأله کنترل بهینه آن وجود نداشته باشد. اگرچه بسیاری از سیستم‌های فیزیکی کنترل پذیر هستند اما ممکن است مدل‌های ریاضی متناظر دارای خاصیت کنترل پذیری نباشند، از این رو لازم است بدانیم تحت چه شرایطی سیستم کنترل پذیر است.

### ۱,۴,۳ کنترل پذیری کامل حالت سیستم گسسته زمانی خطی ثابت-زمان

سیستم گسسته زمانی توصیف شده بصورت زیر را در نظر بگیرید:

$$x((k+1)T) = Ax(kT) + Bu(kT) \quad (۱-۳)$$

بطوریکه در آن  $x(kT)$  بردار  $n$ -بعدی حالت در لحظه نمونه برداری  $k$ ام و  $u(kT)$  سیگنال کنترل در لحظه نمونه برداری  $k$ ام و ماتریس‌های  $A$ ،  $n \times n$  و  $B$ ،  $n \times 1$ ، ماتریس‌های ورودی و  $T$ ، دوره نمونه برداری می‌باشد. فرض می‌کنیم که  $u(kT)$  در فاصله  $kT < t < (k+1)T$  ثابت باشد.

### تعریف ۲,۴,۳ کنترل پذیری کامل حالت سیستم گسسته زمانی خطی ثابت-زمان

سیستم کنترل گسسته زمانی داده شده با معادله (۱-۳) را کنترل پذیر کامل حالت یا به سادگی کنترل-پذیر حالت گویند اگر سیگنال کنترل ثابت تکه‌ای  $u(kT)$  تعریف شده در تعداد متناهی از دوره‌های نمونه-برداری چنان وجود داشته باشند که با شروع از هر حالت اولیه، حالت  $x(kT)$  را بتوان به هر حالت مطلوب  $x_f$  در حداکثر  $n$  دوره نمونه برداری انتقال داد. [۳۲]

در بحث کنترل پذیری، حالت مطلوب  $x_f$  را می توان به صورت مبدأ مشخص کرد یا  $x_f = 0$ . اما در اینجا فرض می کنیم که  $x_f$  یک حالت دلخواه در فضای  $n$ -بعدی شامل مبدأ می باشد. با استفاده از تعریفی که داده شد، اینک شرط کنترل پذیری کامل حالت را بدست می آوریم.

از حل معادله (۳ - ۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x(nT) &= A^n x(0) + \sum_{j=0}^{n-1} A^{n-j-1} B u(jT) \\ &= A^n x(0) + A^{n-1} B u(0) + A^{n-2} B u(0) + \dots + B u((n-1)T) \end{aligned}$$

بدست می آوریم:

$$x(nT) - A^n x(0) = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u((n-1)T) \\ u((n-2)T) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \quad (۳ - ۲)$$

چون  $B$  یک ماتریس  $n \times 1$  است، در می یابیم که هر یک از ماتریس های  $B$ ،  $AB$ ،  $A^2 B$ ،  $\dots$ ،  $A^{n-1} B$  یک ماتریس  $n \times 1$  یا یک بردار ستونی  $n$ -بعدی است. اگر رتبه ماتریس زیر  $n$  باشد:

$$\text{Rank} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix} = n \quad (۳ - ۳)$$

در این صورت  $n$  بردار  $B$ ،  $AB$ ،  $A^2 B$ ،  $\dots$ ،  $A^{n-1} B$  می توانند فضای  $n$ -بعدی را بپوشانند. ماتریس معادله (۳ - ۳) را به طور متداول ماتریس کنترل پذیری گویند. ( توجه کنید که تمام حالت هایی که از مبدأ می توان به آنها رسید، توسط ستونهای ماتریس کنترل پذیری پوشانیده می شوند.) از این رو اگر رتبه ماتریس کنترل پذیری برابر  $n$  باشد، در این صورت برای حالت دلخواه  $x(nT) = x_f$ ، دنباله ای از سیگنال های کنترل بدون محدودیت  $u(0)$ ،  $u(T)$ ،  $\dots$ ،  $u((n-1)T)$  وجود دارند که معادله (۳ - ۳) را برآورده می سازند. از این رو شرط اینکه رتبه ماتریس کنترل پذیری  $n$  باشد یک شرط کافی برای کنترل پذیری کامل حالت بدست می دهد. برای اثبات اینکه معادله (۳ - ۳) یک شرط لازم برای کنترل پذیری کامل حالت نیز است، فرض می کنیم:

$$\text{Rank} \left[ B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B \right] < n$$

در این صورت با استفاده از قضیه کیلی - هامیلتون می‌توان نشان داد که برای هر  $i$  دلخواه،  $A^i B$  را می‌توان برحسب ترکیب‌های خطی  $B, AB, \dots, A^{n-1}B$  بیان نمود. در نتیجه برای هر  $i$  داریم:

$$\text{Rank} \left[ B \mid AB \mid \dots \mid A^{i-1}B \right] < n$$

و از این رو بردارهای  $B, AB, \dots, A^{i-1}B$  نمی‌توانند فضای  $n$ -بعدی را بپوشانند و بنابراین برای بعضی  $x_f$  امکان ندارد که برای تمام  $i$  داشته باشیم  $x(iT) = x_f$ . از این رو شرط داده شده توسط معادله (۳ - ۳) یک شرط لازم است. اگر سیستم تعریف شده توسط معادله (۳ - ۱) به طور کامل کنترل‌پذیر حالت باشد، در این صورت امکان دارد هر حالت اولیه را به هر حالت دلخواه دیگر حداکثر در  $n$  دوره نمونه‌برداری انتقال داد، اگر و فقط اگر اندازه  $u(kT)$  بدون محدودیت باشد. در صورتی که اندازه  $u(kT)$  کراندار باشد ممکن است بیش از  $n$  دوره نمونه‌برداری طول بکشد.

**مثال ۱،۳** سیستم‌های زیر کنترل‌پذیر کامل هستند

$$1. \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} [u(k)]$$

چون در این مثال  $n$  برابر با دو می‌باشد، برای آن که سیستم فوق کنترل‌پذیر کامل باشد، باید رتبه ماتریس

$Q$  زیر برابر با دو باشد:

$$Q = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } Q = 2$$

بنابراین سیستم فوق کنترل‌پذیر است.

$$2. \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \\ x_5(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

در این مثال  $n$  برابر پنج است، بنابراین برای کنترل پذیری سیستم فوق باید رتبه ماتریس  $Q$  زیر باید برابر با

پنج باشد:

$$Q = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B & A^4B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 4 & -18 & -8 & 72 & 16 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -12 & 0 & 36 & 0 & -96 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 0 & 12 & 0 & -24 & 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -20 & -10 & 150 & 75 & -1000 & -500 \\ 2 & 1 & -10 & -5 & 50 & 25 & -250 & -125 & 1250 & 625 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } Q = 5$$

بنابراین، این سیستم کنترل پذیر می باشد.

مثال ۲،۳ سیستم های زیر کنترل پذیر نیستند

$$1. \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} [u(k)]$$

در این مثال داریم:

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } Q = 1 < 2 = n$$

در نتیجه سیستم فوق کنترل پذیر نیست.

$$2. \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \\ x_5(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

ماتریس کنترل پذیری،  $Q$ ، برای این مثال بصورت زیر است:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 & -12 & 4 & 36 & -8 & -96 & 16 \\ 3 & 0 & -6 & 0 & 12 & 0 & -24 & 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -10 & -5 & 50 & 25 & -250 & -125 & 1250 & 625 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } Q = 3 < 5 = n$$

بنابراین در این مثال، سیستم کنترل پذیر نمی باشد.

## ۵,۳ رویت پذیری

سیستم کنترل گسسته زمانی تحریک نشده تعریف شده بصورت زیر را در نظر بگیرید:

$$x((k+1)T) = Ax(kT) \quad (۴-۳)$$

$$y(kT) = Cx(kT) \quad (۵-۳)$$

که در آن  $x(kT)$  بردار حالت  $n$ -بعدی در لحظه نمونه برداری  $k$ ام و  $y(kT)$  بردار خروجی  $m$ -بعدی در لحظه نمونه برداری  $k$ ام و  $A$  یک ماتریس  $n \times n$  و  $C$  یک ماتریس  $n \times m$  می باشد.

### تعریف ۱,۵,۳ رویت پذیری کامل حالت یک سیستم

سیستم را رویت پذیر کامل گویند اگر هر حالت اولیه  $x(0)$  را بتوان از مشاهده  $y(kT)$  در طول تعداد متناهی از دوره های نمونه برداری تعیین نمود. بنابراین سیستم رویت پذیر کامل است اگر هر انتقال حالت نهایتاً هر مؤلفه بردار خروجی را تحت تأثیر قرار دهد. [۳۲]

مفهوم رویت پذیری در حل مسأله بازسازی متغیرهای حالت غیرقابل سنجش از متغیرهای حالت قابل سنجش در حداقل دوره های نمونه برداری سودمند است. سیستم های کنترل پسخورد حالت طراحی شده با روش جایابی قطب، پسخورد متغیرهای حالت وزن داده شده را لازم خواهند داشت. مشکل عملی مواجه شده با سیستم های کنترل پسخورد حالت آن است که برخی از متغیرهای حالت برای سنجش مستقیم قابل دسترسی نمی باشند، از این رو لازم است که متغیرهای حالت غیرقابل سنجش تخمین زده شوند تا بتوان سیگنال های کنترل پسخورد را ساخت. دلیل اینکه سیستم بدون تحریک را در نظر می گیریم به شرح زیر است. اگر سیستم با معادلات زیر توصیف شود:

$$x((k+1)T) = Ax(kT) + Bu(kT) \quad (۶-۳)$$



$$y(kT) = Cx(kT) + Du(kT) \quad (7-3)$$

در این صورت:

$$x(kT) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} B u(jT) \quad (8-3)$$

$y(kT)$  چنین است:

$$y(kT) = CA^k x(0) + \sum_{j=1}^{k-1} CA^{k-j-1} B u(jT) + Du(kT) \quad (9-3)$$

چون ماتریس‌های  $A, B, C$  و  $D$  معلوم است و  $u(kT)$  نیز معلوم می‌باشد، جملات دوم و سوم در سمت راست معادله (۳-۹) کمیت‌های معلومی هستند. از این رو می‌توان آنها را از مقدار رویت شده  $y(kT)$  کم کرد. به این جهت برای بررسی یک شرط لازم و کافی برای رویت‌پذیری کامل کافی است سیستم‌های توصیف شده با معادلات (۳-۴) و (۳-۵) در نظر گرفته شوند.

وقتی بتوان  $x(0)$  را از مشاهده خروجی تعیین کرد، می‌توان  $x(k)$  را نیز تعیین نمود، زیرا  $u(0), u(T), \dots, u(k-1)$  معلوم هستند.

### ۱,۵,۳ رویت‌پذیری کامل سیستم‌های گسسته زمانی خطی

سیستم تعریف شده با معادلات (۳-۴) و (۳-۵) را در نظر بگیرید. سیستم رویت‌پذیر کامل است اگر با داشتن خروجی  $y(kT)$  در طول تعداد متناهی از دوره‌های نمونه‌برداری، بتوان بردار حالت اولیه  $x(0)$  را تعیین کرد.

در ادامه شرط رویت‌پذیری کامل سیستم گسسته زمانی توصیف شده با معادلات (۳-۴) و (۳-۵) را بدست خواهیم آورد. از آنجایی که جواب  $x(k)$  معادله (۳-۴) چنین است:

$$x(kT) = A^k x(0) \quad (10-3)$$

بدست می آوریم:

$$y(kT) = CA^k x(0) \quad (۱۱ - ۳)$$

رویت پذیری کامل بدان معنی است که با داشتن  $y(0)$  و  $y(T)$  و  $y(2T)$  و ... بتوان  $x_1(0)$  و  $x_2(0)$  و ... و  $x_n(0)$  را تعیین نمود. از این رو می توان  $n$  مقدار اولیه  $y(kT)$  یا  $y(0), y(T), y(2T), \dots, y((n-1)T)$  را برای تعیین  $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$  به کار برد. در مورد یک سیستم رویت پذیر کامل، با داشتن:

$$y(0) = Cx(0)$$

$$y(T) = CAx(0)$$

$$(۱۲ - ۳)$$

:

$$y((n-1)T) = CA^{n-1}x(0)$$

باید بتوانیم  $x_1(0)$  و  $x_2(0)$  و ... و  $x_n(0)$  را تعیین کنیم. با توجه به اینکه  $y(kT)$  یک  $m$ -بردار است،

دستگاه  $n$  معادله هم زمان  $(۱۲ - ۳)$ ، تعداد  $mn$  معادله بدست می دهد که همگی شامل  $x_1(0)$  و  $x_2(0)$  و ...

و  $x_n(0)$  هستند. برای اینکه دسته جواب های یکتای  $x_1(0)$  و  $x_2(0)$  و ... و  $x_n(0)$  را از این  $mn$  معادله

بدست آوریم، باید بتوانیم دقیقاً  $n$  معادله مستقل خطی از میان آنها بنویسیم. این امر لازم می دارد که ماتریس

$mn \times n$  زیر، از رتبه  $n$  باشد.

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه رتبه یک ماتریس و رتبه ترانزاده مزدوج آن ماتریس یکسان هستند، می توان شرط رویت-پذیری کامل را به شرح زیر بیان کرد. شرط لازم و کافی برای آنکه سیستم تعریف شده با معادلات (۳-۴) و (۳-۵) رویت پذیر کامل باشد آن است که رتبه ماتریس  $n \times mn$  زیر برابر با  $n$  باشد.

$$\left[ C^* \mid A^*C^* \mid \dots \mid (A^*)^{n-1}C^* \right] \quad (۳-۱۳)$$

$C^*$ ، ترانزاده ماتریس  $C$  و  $A^*$ ، ترانزاده ماتریس  $A$  می باشد.

ماتریس داده شده توسط (۳-۱۳) عموماً ماتریس رویت پذیری گفته می شود.

**مثال ۳،۳** سیستم های زیر رویت پذیر کامل هستند.

$$1. \begin{bmatrix} x_1(k+1)T \\ x_2(k+1)T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}$$

$$y(kT) = [1 \quad 5] \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}$$

چون در این مثال  $n$  برابر با دو می باشد، برای آن که سیستم فوق رویت پذیر کامل باشد، باید رتبه ماتریس

$S$  زیر برابر با دو باشد:

$$S = \left[ C^* \mid A^*C^* \right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } S = 2 = n$$

بنابراین سیستم فوق رویت پذیر کامل می باشد.

$$2. \begin{bmatrix} x_1(k+1)T \\ x_2(k+1)T \\ x_3(k+1)T \\ x_4(k+1)T \\ x_5(k+1)T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ x_3(kT) \\ x_4(kT) \\ x_5(kT) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(kT) \\ y_2(kT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ x_3(kT) \\ x_4(kT) \\ x_5(kT) \end{bmatrix}$$

با توجه به مثال قبل، برای رویت پذیری سیستم در این مثال، رتبه ماتریس رویت پذیری  $S$  باید برابر با پنج

باشد:

$$S = \begin{bmatrix} C^* & | & A^*C^* & | & (A^*)^2C^* & | & (A^*)^3C^* & | & (A^*)^4C^* \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 8 & 0 & 16 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 8 & 4 & 20 & 8 & 48 & 16 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 9 & 8 & 26 & 20 & 72 & 48 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 9 & 0 & -27 & 0 & 81 \\ -1 & 0 & -3 & 1 & 9 & -6 & -27 & 27 & 81 & -108 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } S = 5$$

بنابراین سیستم فوق رویت پذیر می باشد.

**مثال ۴,۳** سیستم های زیر رویت پذیر کامل نیستند.

$$1. \begin{bmatrix} x_1(k+1)T \\ x_2(k+1)T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}$$

$$y(kT) = [0 \quad 5] \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{bmatrix}$$

در این مثال، داریم:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } S = 1 < 2 = n$$

در نتیجه سیستم فوق رویت پذیر نیست.

$$2. \begin{bmatrix} x_1(k+1)T \\ x_2(k+1)T \\ x_3(k+1)T \\ x_4(k+1)T \\ x_5(k+1)T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ x_3(kT) \\ x_4(kT) \\ x_5(kT) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(kT) \\ y_2(kT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \\ x_3(kT) \\ x_4(kT) \\ x_5(kT) \end{bmatrix}$$

ماتریس رویت پذیری سیستم فوق بصورت زیر است:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 8 & 0 & 16 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 8 & 4 & 20 & 8 & 48 & 16 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 9 & 8 & 26 & 20 & 72 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 9 & 0 & -27 & 0 & 81 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank } S = 4 < 5 = n$$

بنابراین سیستم فوق رویت پذیر نمی باشد.

### ۶,۳ سیستم های کنترل بهینه

بنابر تعاریف، سیستمی که طراحی آن شاخص عملکرد انتخاب شده ای را به حداقل (حداکثر) می رساند، بهینه است. واضح است که در واقع شاخص عملکرد ترکیب سیستم را تعیین می کند. تذکر این مطلب مهم است که سیستم کنترلی که تحت تأثیر یک شاخص عملکرد بهینه است، در حالت کلی، تحت شاخص های عملکرد دیگر بهینه نمی باشد. همچنین تحقق سخت افزاری یک قانون کنترل بهینه مخصوص ممکن است بسیار مشکل و گران باشد. از این رو ممکن است صرف هزینه های بسیار زیادی برای اعمال کنترل کننده بهینه که تنها در یک مفهوم باریک یا فردگرایانه بهترین است بی معنی باشد. یک سیستم کنترل بندرت برای انجام یک کار تنها که کاملاً از قبل مشخص شده باشد طراحی می گردد. در عوض برای انجام یک کار تصادفی انتخاب شده از میان یک مجموعه کامل کارهای ممکن طراحی می شود. بنابراین ممکن است معقولانه تر باشد اگر در سیستم های عملی به دنبال قوانین تقریبی کنترل بهینه بوده که با دقت به یک شاخص عملکرد یکتا گره نخورده باشد.

وقتی بخواهیم دقیق صحبت کنیم، باید متوجه باشیم که در بیشتر وضعیت های عملی یک سیستم کنترل بهینه بدست آمده از طریق ریاضی بالاترین عملکرد ممکن را تحت شاخص عملکرد داده شده بدست می دهد و بیشتر یک معیار سنجش است تا یک هدف عملی. بنابراین باید پیش از آنکه تصمیم بگیریم که سیستم کنترل بهینه یا چیزی پایین تر ولی ساده تر بسازیم. میزان درجه ای که عملکرد سیستم کنترل بهینه پیچیده از عملکرد

سیستم کنترل زیر بهینه ساده‌تر تجاوز می‌کند را به دقت ارزیابی کنیم. ما نباید یک سیستم کنترل بهینه پیچیده و گران بسازیم جزء آنکه بتوان آن را توجیه کرد.

وقتی که با استفاده از تئوری کنترل بهینه درجه نهایی عملکرد پیدا شد، باید سعی کنیم که سیستم ساده-ای را که نزدیک بهینه باشد طراحی کنیم. با در نظر گرفتن این مطلب، یک سیستم فیزیکی ساخته، آن را آزمایش و اصلاح می‌کنیم تا سیستم رضایت‌بخشی بدست آید که مشخصه‌های عملکردی آن نزدیک به سیستم کنترل بهینه‌ای باشد که از لحاظ تئوری آن را پیدا کرده‌ایم. مسائل کنترل بهینه قابل حل به روش تحلیلی، دید خوبی را نسبت به ساختارها و الگوریتم‌های بهینه‌ای که می‌توانند در مورد عملی اعمال گردند، فراهم می‌آورند. یک مثال از مسائل کنترل بهینه قابل حل به روش تحلیلی مسأله کنترل بهینه سیستم‌های خطی بر اساس شاخص‌های عملکرد درجه دوم است. شاخص‌های عملکرد درجه دوم غالباً در سیستم‌های کنترل عملی به عنوان معیارهایی برای عملکرد سیستم به کار برده می‌شوند. [۳۲]

### ۱,۶,۳ کنترل بهینه درجه دوم خطی

مسأله کنترل بهینه درجه دوم خطی می‌تواند به صورت زیر بیان شود؛ یک سیستم کنترل گسسته زمانی خطی داده شده بصورت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad , \quad x(0) = c \quad (۱۴-۳)$$

که در آن سیستم، کاملاً کنترل‌پذیر حالت فرض شده است و  $x(k)$  بردار حالت  $n$ -بعدی و  $u(k)$  بردار کنترل  $r$ -بعدی،  $A$  یک ماتریس ناویژه  $n \times n$  و  $B$  یک ماتریس  $n \times r$  می‌باشد. در اینجا مسأله کنترل بهینه درجه دوم خطی اصلی را با روش مرسوم مینیمم‌سازی با استفاده از ضرایب لاگرانژ حل خواهیم کرد.

دنباله کنترل بهینه  $u(0), u(1), \dots, u(N-1)$  را که یک شاخص عملکرد درجه دوم را به حداقل می-رساند پیدا می‌کنیم. مثالی از شاخص‌های عملکرد درجه دوم برای یک فرایند زمانی متناهی ( $0 \leq k \leq N$ ) بدین صورت است:

$$J = \frac{1}{2} x^*(N) S x(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [x^*(k) Q x(k) + u^*(k) R u(k)] \quad (3-15)$$

که در آن  $Q$  و  $S$  یک ماتریس هرمیتی معین مثبت یا نیمه معین مثبت (ماتریس حقیقی متقارن)  $n \times n$  و  $R$  یک ماتریس هرمیتی معین مثبت (ماتریس حقیقی متقارن)  $r \times r$  می‌باشند.

ماتریس‌های  $Q, R, S$  به ترتیب برای وزن دادن به اهمیت نسبی معیارهای عملکرد ایجاد شده با بردار حالت  $x(k)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ )، بردار کنترل  $u(k)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ) و حالت نهایی  $x(N)$  انتخاب شده‌اند.

حالت اولیه سیستم در یک حالت اولیه دلخواه  $x(0) = c$  است. حالت نهایی  $x(N)$  ممکن است ثابت باشد، که در آن صورت جمله  $\frac{1}{2} x^*(N) S x(N)$  از شاخص عملکرد معادله (3-15) حذف شده و به جای آن شرط پایانی  $x(N) = x_f$  جایگزین می‌شود، که در آن  $x_f$  حالت پایانی، ثابت است. اگر حالت پایانی  $x_f$  ثابت نباشد، آنگاه اولین جمله (3-15) نشان دهنده وزن معیار عملکرد ناشی از حالت پایانی است. توجه کنید که در مسأله حداقل‌سازی وارد کردن جمله  $\frac{1}{2} x^*(N) S x(N)$  در شاخص عملکرد  $J$  ایجاب می‌کند که ما می‌خواهیم حالت نهایی  $x(N)$  حتی‌الامکان به مبدأ نزدیک باشد.

حل به روش مرسوم حداقل‌سازی با استفاده از ضرایب لاگرانژ

مسأله کنترل بهینه درجه دوم یک مسأله مینیمم‌سازی شامل یک تابع چند متغیره است. از این رو می‌تواند با روش مرسوم مینیمم‌سازی حل گردد. مسأله مینیمم‌سازی تحت محدودیت‌های تساوی می‌تواند با الحاق کردن محدودیت‌ها به تابعی که قرار است به حداقل رسانیده شود با استفاده از ضرایب لاگرانژ حل گردد.

در مسأله کنونی بهینه‌سازی،  $J$  داده شده با معادله (۳-۱۵) که تحت محدودیت زیر قرار گرفته باشد را به حداقل می‌رسانیم:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (۳-۱۶)$$

که در آن  $k = 0, 1, \dots, N-1$  و شرط اولیه بردار حالت بدین صورت مشخص شده باشد:

$$x(0) = c \quad (۳-۱۷)$$

اکنون با استفاده از یک مجموعه ضرایب لاگرانژ  $\lambda(1), \lambda(2), \dots, \lambda(N)$  یک شاخص عملکرد جدید  $L$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L = \frac{1}{2} x^*(N) S x(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \{ [x^*(k) Q x(k) + u^*(k) R u(k)] \\ + \lambda^*(k+1) [Ax(k) + Bu(k) - x(k+1)] \\ + [Ax(k) + Bu(k) - x(k+1)]^* \lambda(k+1) \} \quad (۳-۱۸)$$

نوشتن جملات شامل ضرایب لاگرانژ بصورت نشان داده شده در معادله (۳-۱۸) به دلیل تضمین آن

است.  $L = L^*$  (یک کمیت حقیقی اسکالر است). توجه کنید که

$$\lambda^*(0)[c - x(0)] + [c - x(0)]^* \lambda(0)$$

می‌تواند به شاخص عملکرد  $L$  اضافه گردد. اما برای ساده کردن نمایش، این کار را نخواهیم کرد. یک واقعیت

شناخته شده آن است که حداقل‌سازی تابع  $L$  تعریف شده با معادله (۳-۱۸) معادل است با حداقل‌سازی  $J$

تعریف شده با معادله (۳-۱۵) هنگامی که تحت محدودیت تساوی تعریف شده با معادله (۳-۱۶) قرار

گرفته باشد.



به منظور به حداقل رسانیدن تابع  $L$ ، باید از آن نسبت به هر مؤلفه بردارهای  $x(k)$ ،  $u(k)$ ،  $\lambda(k)$  مشتق گرفته و نتایج را مساوی صفر قرار داد. لیکن از نظر محاسباتی، مناسب است که از  $L$  نسبت به  $\bar{x}_i(k)$ ،  $\bar{u}_i(k)$ ،  $\bar{\lambda}_i(k)$  مشتق گرفته شود. که  $\bar{x}_i(k)$ ،  $\bar{u}_i(k)$ ،  $\bar{\lambda}_i(k)$  به ترتیب مزدوج‌های مختلط  $x_i(k)$ ،  $u_i(k)$ ،  $\lambda_i(k)$  می‌باشند. (توجه کنید که سیگنال و مزدوج آن در بر گیرنده اطلاعات ریاضی یکسان می‌باشند) بنابراین قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{x}_i(k)} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad ; k = 1, 2, \dots, N$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{u}_i(k)} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, r \quad ; k = 1, 2, \dots, N - 1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\lambda}_i(k)} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad ; k = 1, 2, \dots, N$$

این معادلات برای آن که  $L$  یک حداقل داشته باشد، شرایط لازم هستند. توجه کنید که عبارات ساده شده

برای معادلات مشتق‌های نسبی پیشین عبارتند از:

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{x}(k)} = 0 \quad ; k = 1, 2, \dots, N \quad (۱۹ - ۳)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{u}(k)} = 0 \quad ; k = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (۲۰ - ۳)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\lambda}(k)} = 0 \quad ; k = 1, 2, \dots, N \quad (۲۱ - ۳)$$

برای مشتق‌گیری از صورت‌های مختلط درجه دوم و دو خطی نسبت به متغیرهای برداری، داریم:

$$\frac{\partial x^* A x}{\partial \bar{x}} = A x \quad , \quad \frac{\partial x^* A y}{\partial \bar{x}} = A y$$

آنگاه معادلات (۱۹ - ۳) و (۲۰ - ۳) و (۲۱ - ۳) می‌توانند بصورت زیر بدست آیند:

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{x}(k)} = 0 \quad ; Qx(k) + A^* \lambda(k+1) - \lambda(k) = 0 \quad ; k = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (۲۲ - ۳)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{x}(N)} = 0 \quad ; Sx(N) - \lambda(N) = 0 \quad (۲۳ - ۳)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{u}(k)} = 0 \quad ; \quad Ru(k) + B^* \lambda(k+1) = 0 \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (24-3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\lambda}(k)} = 0 \quad ; \quad Ax(k-1) + Bu(k-1) - x(k) = 0 \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (25-3)$$

معادله (۲۵-۳) در واقع معادله حالت سیستم است. معادله (۲۳-۳) مقدار نهایی ضرایب لاگرانژ را مشخص می‌کند. توجه کنید که ضرایب لاگرانژ  $\lambda(k)$  غالباً یک هم‌بردار یا بردار الحاقی نامیده می‌شود. اکنون معادلات بدست آمده در بالا را ساده می‌کنیم. از معادله (۲۲-۳) داریم:

$$\lambda(k) = Qx(k) + A^* \lambda(k+1) \quad ; \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (26-3)$$

با شرط نهایی  $\lambda(N) = Sx(N)$  با حل معادله (۲۴-۳) برای  $u(k)$  و با توجه به اینکه  $R^{-1}$  وجود دارد، بدست می‌آوریم:

$$u(k) = -R^{-1}B^* \lambda(k+1) \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (27-3)$$

معادله (۲۴-۳) می‌تواند بصورت زیر بازنویسی شود:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (28-3)$$

که در واقع معادله حالت است. جایگزینی معادله (۲۷-۳) در (۲۸-۳) می‌دهد:

$$x(k+1) = Ax(k) - BR^{-1}B^* \lambda(k+1) \quad (29-3)$$

با شرط اولیه  $x(0) = c$

برای بدست آوردن پاسخ مسأله مینیمم‌سازی باید معادله‌های (۲۶-۳) و (۲۹-۳) را بطور هم‌زمان حل کنیم. توجه کنید که برای معادله سیستم، معادله (۲۸-۳)، شرط اولیه  $x(0)$  مشخص شده است، ولی برای معادله ضرایب لاگرانژ، معادله (۲۶-۳)، شرط نهایی  $\lambda(N)$  مشخص شده است. از این رو مسأله در اینجا یک مسأله مقدار-مرزی دو-نقطه‌ای<sup>۱</sup> می‌شود.

اگر مسأله مقدار-مرزی دو-نقطه‌ای حل شود، مقادیر بهینه بردار حالت و بردار ضرایب لاگرانژ می‌توانند تعیین گردند و بردار کنترل بهینه  $u(k)$  می‌تواند به شکل حلقه-باز بدست آورده شود. لیکن اگر تبدیلات ریکاتی را به کار بریم، بردار کنترل بهینه  $u(k)$  می‌تواند بصورت حلقه-بسته یا پس‌خورد به شکل زیر بدست آید:

$$u(k) = -K(k)x(k) \quad (۳۰ - ۳)$$

که در آن  $K(k)$  یک ماتریس پس‌خورد  $r \times n$  است. [۳۲ و ۲۸]

### ۲،۶،۳ معادله ریکاتی بردار کنترل بهینه $u(k)$ بصورت حلقه-بسته

فرض کنید که  $\lambda(k)$  می‌تواند بدین صورت نوشته شود:

$$\lambda(k) = P(k)x(k) \quad (۳۱ - ۳)$$

که در آن  $P(k)$  یک ماتریس هرمیتی  $n \times n$  (یا یک ماتریس حقیقی متقارن  $n \times n$ ) است. با جایگزینی

معادله (۳۱-۳) در معادله (۲۶-۳) داریم:

$$P(k)x(k) = Qx(k) + A^*P(k+1)x(k+1) \quad (۳۲ - ۳)$$

و با جایگزینی معادله (۳۱-۳) در معادله (۲۹-۳) بدست می‌آوریم:

$$x(k+1) = Ax(k) - BR^{-1}B^*P(k+1)x(k+1) \quad (۳۳ - ۳)$$

توجه کنید که معادله‌های (۳۲-۳) و (۳۳-۳)  $\lambda(k)$  را شامل نبوده و لذا  $\lambda(k)$  را حذف کرده‌ایم. فرایند تبدیل

به کار گرفته شده در اینجا، تبدیل ریکاتی نامیده می‌شود که در حل چنین مسأله مقدار-مرزی دو-نقطه‌ای از

اهمیت فوق‌العاده‌ای برخوردار است. از معادله (۳۳-۳) داریم:

$$[I + BR^{-1}B^*P(k+1)]x(k+1) = Ax(k) \quad (۳۴ - ۳)$$

برای سیستم‌های کاملاً کنترل‌پذیر حالت، می‌توان نشان داد که  $P(k+1)$  معین مثبت یا نیمه معین مثبت

است. حداقل برای یک ماتریس نیمه معین مثبت  $P(k+1)$ ، داریم:

$$\begin{aligned} |I_n + BR^{-1}B^*P(k+1)| &= |I_r + B^*P(k+1)BR^{-1}| = \\ |I_r + R^{-1}B^*P(k+1)B| &= |R^{-1}| |R + B^*P(k+1)B| \neq 0 \end{aligned}$$

که در آن از رابطه زیر استفاده کرده‌ایم:

$$|I_n + AB| = |I_r + BA|$$

که ماتریس  $A$  یک ماتریس  $n \times r$  و ماتریس  $B$  یک ماتریس  $r \times n$  می‌باشد. از این رو، معکوس  $I +$

$BR^{-1}B^*P(k+1)$  وجود دارد. در نتیجه، معادله (۳۴-۳) بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$x(k+1) = [I + BR^{-1}B^*P(k+1)]^{-1}Ax(k) \quad (۳۵-۳)$$

با جایگزینی معادله (۳۵-۳) در معادله (۳۲-۳) بدست می‌آوریم:

$$P(k)x(k) = Qx(k) + A^*P(k+1)[I + BR^{-1}B^*P(k+1)]^{-1}Ax(k)$$

یا

$$\{P(k) - Q - A^*P(k+1)[I + BR^{-1}B^*P(k+1)]^{-1}A\}x(k) = 0$$

این معادله آخر باید برای تمام  $x(k)$ ها برقرار باشد. از این رو، باید داشته باشیم:

$$P(k) = Q + A^*P(k+1)[I + BR^{-1}B^*P(k+1)]^{-1}A \quad (۳۶-۳)$$

معادله (۳۶-۳) می‌تواند اصلاح شود. با استفاده از لم معکوس سازی ماتریس

$$(A + BD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$$

و با انجام جایگزینی‌های  $D = B^*P(k+1)$  و  $B = BR^{-1}$  و  $A = I$  بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} [I + BR^{-1}B^*P(k+1)]^{-1} &= I - BR^{-1}[I + B^*P(k+1)BR^{-1}]^{-1}B^*P(k+1) \\ &= I - B[R + B^*P(k+1)B]^{-1}B^*P(k+1) \end{aligned}$$

از این رو، معادله (۳۶-۳) می‌تواند بصورت زیر اصلاح شود:

$$P(k) = Q + A^*P(k+1)A - A^*P(k+1)B[R + B^*P(k+1)B]^{-1}B^*P(k+1)A \quad (۳۷-۳)$$

معادله (۳۷-۳)، معادله ریکاتی نامیده می‌شود. با مراجعه به معادله‌های (۲۳-۳) و (۳۱-۳) توجه کنید که در

$k = N$  داریم:

$$P(N)x(N) = \lambda(N) = Sx(N)$$

یا

$$(۳۸-۳)$$

$$P(N) = S$$

از این رو، معادله (۳۶-۳) یا (۳۷-۳) می‌تواند بطور یکتا بصورت معکوس از  $k = N$  به  $k = 0$  حل شود. یعنی اینکه با شروع از  $P(N)$  که معلوم است، می‌توانیم  $P(N-1)$ ،  $P(N-2)$ ، ...،  $P(0)$  را بدست آوریم. با مراجعه به معادله‌های (۲۶-۳) و (۳۱-۳)، بردار کنترل بهینه  $u(k)$  داده شده با معادله (۲۷-۳) اکنون چنین می‌شود:

$$\begin{aligned} u(k) &= -R^{-1}B^*\lambda(k+1) = -R^{-1}B^*(A^*)^{-1}[\lambda(k) - Qx(k)] \\ &= -R^{-1}B^*(A^*)^{-1}[P(k) - Q]x(k) = -K(k)x(k) \end{aligned} \quad (۳۹-۳)$$

که در آن

$$K(k) = R^{-1}B^*(A^*)^{-1}[P(k) - Q] \quad (۴۰-۳)$$

معادله (۳۹-۳)، شکل حلقه-بسته یا شکل پس‌خورد را برای بردار کنترل بهینه  $u(k)$  بدست می‌دهد. توجه کنید که بردار کنترل بهینه متناسب با بردار حالت است.

بردار کنترل بهینه  $u(k)$  می‌تواند به چند شکل مختلف داده شود. با مراجعه به معادله‌های (۳۱-۳) و (۳۵-۳)،  $u(k)$  می‌تواند به صورت زیر داده شود:

$$\begin{aligned} u(k) &= -R^{-1}B^*\lambda(k+1) = -R^{-1}B^*P(k+1)x(k+1) \\ &= -R^{-1}B^*P(k+1)[I + BR^{-1}B^*P(k+1)]^{-1}Ax(k) \\ &= -R^{-1}B^*[P^{-1}(k+1) + BR^{-1}B^*]^{-1}Ax(k) \\ &= -K(k)x(k) \end{aligned} \quad (۴۱-۳)$$

که در آن

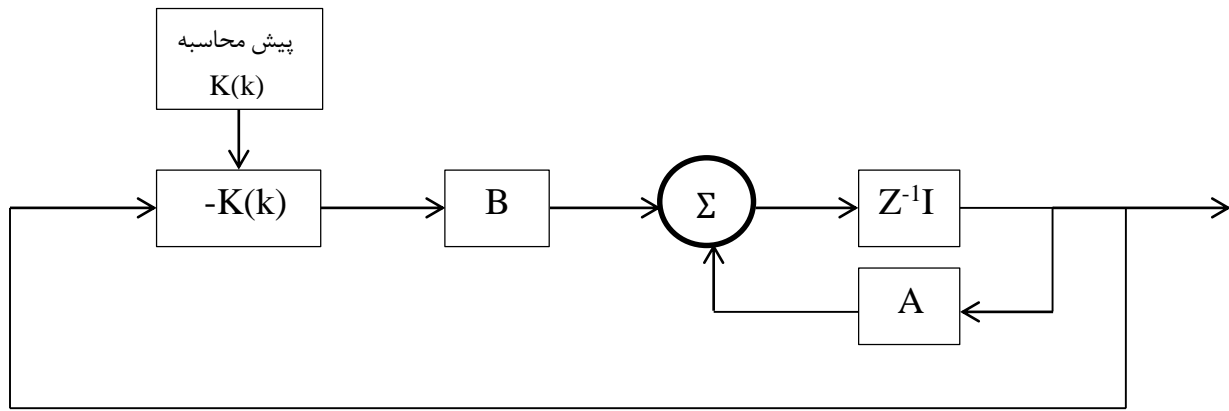
$$K(k) = -R^{-1}B^*[P^{-1}(k+1) + BR^{-1}B^*]^{-1}A \quad (۴۲-۳)$$

یک شکل کمی متفاوت بردار کنترل بهینه  $u(k)$  می‌تواند بصورت زیر داده شود:

$$\begin{aligned} u(k) &= -[R + B^*P(k+1)B]^{-1}B^*P(k+1)Ax(k) \\ &= -K(k)x(k) \end{aligned} \quad (۴۳-۳)$$

که در آن

$$K(k) = -[R + B^*P(k+1)B]^{-1}B^*P(k+1)A \quad (۴۴-۳)$$



شکل ۳-۱ سیستم کنترل بهینه براساس شاخص عملکرد درجه دوم

معادلات (۳-۳۹) و (۳-۴۱) و (۳-۴۳) به وضوح نشان می‌دهند که قانون کنترل بهینه پس‌خورده، بردار حالت را با بهره متغیر با زمان  $K(k)$  لازم می‌دارد. شکل ۳-۱ شمای کنترل بهینه سیستم بر اساس شاخص عملکرد درجه دوم را نشان می‌دهد. بهره متغیر با زمان  $K(k)$  می‌تواند قبل از شروع فرایند، وقتی که ماتریس حالت سیستم  $A$ ، ماتریس کنترل  $B$  و ماتریس‌های وزنی  $Q$ ،  $R$  و  $S$  داده شوند، محاسبه گردد. در نتیجه  $K(k)$  می‌تواند بصورت جداگانه از پیش محاسبه گردیده و برای استفاده‌های بعدی ذخیره گردد. توجه کنید که حالت اولیه  $x(0)$  وارد محاسبه  $K(k)$  نمی‌شود. برای کنترل بهینه،  $u(k)$  در هر مرحله می‌تواند بلافاصله با پیش ضرب کردن بردار حالت  $x(k)$  در  $-K(k)$  تعیین گردد. یک خاصیت ماتریس بهره پس‌خورده  $K(k)$  آن است که تقریباً ثابت است به جزء در نزدیکی پایان فرایند در  $k = N$  [۱ و ۲۸ و ۳۲]

### ۳،۶،۳ ارزیابی شاخص عملکرد مینیمم

اکنون مقدار مینیمم شاخص عملکرد را ارزیابی می‌کنیم:

$$\min J = \min \left\{ \frac{1}{2} x^*(N) S x(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \{ [x^*(k) Q x(k) + u^*(k) R u(k)] \} \right.$$

با پیش ضرب کردن طرفین معادله (۳۲-۳) در  $x^*(k)$  داریم:

$$x^*(k)P(k)x(k) = x^*(k)Qx(k) + x^*(k)A^*P(k+1)x(k+1)$$

با جایگزینی معادله (۳۴-۳) در این معادله اخیر، بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} x^*(k)P(k)x(k) &= x^*(k)Qx(k) + x^*(k+1)[I + BR^{-1}B^*P(k+1)]^*P(k+1)x(k+1) \\ &= x^*(k)Qx(k) + x^*(k+1)[I + P(k+1)BR^{-1}B^*]P(k+1)x(k+1) \end{aligned}$$

از این رو

$$\begin{aligned} x^*(k)Qx(k) &= x^*(k)P(k)x(k) - x^*(k+1)P(k+1)x(k+1) \\ &\quad - x^*(k+1)P(k+1)BR^{-1}B^*P(k+1)x(k+1) \end{aligned} \quad (۴۵-۳)$$

همچنین از معادله‌های (۲۷-۳) و (۳۱-۳) داریم:

$$u(k) = -R^{-1}B^*P(k+1)x(k+1)$$

از این رو

$$\begin{aligned} u^*Ru(k) &= [-x^*(k+1)P(k+1)BR^{-1}]R[-R^{-1}B^*P(k+1)x(k+1)] \\ &= x^*(k+1)P(k+1)BR^{-1}B^*P(k+1)x(k+1) \end{aligned} \quad (۴۶-۳)$$

با جمع کردن معادله‌های (۴۵-۳) و (۴۶-۳)، بدست می‌آوریم:

$$x^*(k)Qx(k) + u^*Ru(k) = x^*(k)P(k)x(k) - x^*(k+1)P(k+1)x(k+1) \quad (۴۷-۳)$$

با جایگزینی معادله (۴۷-۳) در معادله (۱۵-۳)، بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} J_{min} &= \frac{1}{2}x^*(N)Sx(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} [x^*(k)P(k)x(k) - x^*(k+1)P(k+1)x(k+1)] \\ &= \frac{1}{2}x^*(N)Sx(N) + \frac{1}{2}[x^*(0)P(0)x(0) - x^*(1)P(1)x(1) + x^*(1)P(1)x(1) \\ &\quad - x^*(2)P(2)x(2) + \dots + x^*(N-1)P(N-1)x(N-1) - x^*(N)P(N)x(N)] \\ &= \frac{1}{2}x^*(N)Sx(N) + \frac{1}{2}x^*(0)P(0)x(0) - \frac{1}{2}x^*(N)P(N)x(N) \end{aligned} \quad (۴۸-۳)$$

توجه کنید که از معادله (۳۸-۳) داریم  $P(N) = S$ . از این رو معادله (۴۸-۳) چنین می‌شود:

$$J_{min} = \frac{1}{2} x^*(0)P(0)x(0) \quad (49-3)$$

بنابراین، مقدار مینیمم شاخص عملکرد  $J$  با معادله (49-3) داده می‌شود. این شاخص تابعی از  $P(0)$  و حالت اولیه  $x(0)$  می‌باشد.

**مثال 5,3** سیستم کنترل گسسته زمانی تعریف شده زیر را در نظر بگیرید:

$$x(k+1) = 0.3679x(k) + 0.6321u(k), \quad x(0) = 1$$

قانون کنترل بهینه‌ای تعیین کنید که شاخص عملکرد زیر را مینیمم کند:

$$J = \frac{1}{2} [x(10)]^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^9 [x^2(k) + u^2(k)]$$

توجه کنید که در این مثال  $R=1, Q=1, S=1$ . همچنین، مقدار مینیمم شاخص عملکرد  $J$  را تعیین کنید.

**حل.** با مراجعه به معادله (36-3)،  $P(k)$  را بصورت زیر بدست می‌آوریم:

$$P(k) = 1 + (0.3679)P(k+1)[1 + (0.6321)(1)(0.6321)P(k+1)]^{-1}(0.3679)$$

شرط مرزی برای  $P(k)$  با معادله (38-3) مشخص می‌شود، و در این مثال

$$P(N) = P(10) = S = 1$$

اکنون  $P(k)$  را بطور معکوس از  $k=9$  تا  $k=0$  محاسبه می‌کنیم:

$$P(9) = 1 + 0.1354 \times 1(1 + 0.3996 \times 1)^{-1} = 1.0967$$

$$P(8) = 1 + 0.1354 \times 1.0967(1 + 0.3996 \times 1.0967)^{-1} = 1.1032$$

$$P(7) = 1 + 0.1354 \times 1.1032(1 + 0.3996 \times 1.1032)^{-1} = 1.1037$$

$$P(6) = 1 + 0.1354 \times 1.1037(1 + 0.3996 \times 1.1037)^{-1} = 1.1037$$

$$P(k) = 1.1037 \quad k = 5,4,3,2,1,0$$

توجه کنید که مقادیر  $P(k)$  به سرعت به مقدار حالت پایدار نزدیک می‌شوند. مقدار حالت پایدار  $P_{SS}$

می‌تواند از رابطه زیر بدست آورده شود:

$$P_{SS} = 1 + 0.1354P_{SS}(1 + 0.3996P_{SS})^{-1}$$

یا

$$0.3996P_{SS}^2 + 0.4650P_{SS} - 1 = 0$$



با حل این معادله نسبت به  $P_{SS}$  داریم:

$$P_{SS} = 1.1037 \text{ یا } -2.2674$$

از آنجایی که  $P(k)$  باید مثبت باشد، در می‌یابیم که مقدار حالت پایدار  $P(k)$  برابر با  $1/1.037$  است.

بهره پس‌خورد  $K(k)$  می‌تواند از معادله  $(40-3)$  محاسبه گردد:

$$K(k) = (1)(0.6321)(0.3679)^{-1}[P(k) - 1] = 1.7181[P(k) - 1]$$

با جایگزینی مقادیر بدست آمده  $P(k)$  داریم:

$$K(10) = 1.7181[1 - 1] = 0$$

$$K(9) = 1.7181[1.0967 - 1] = 0.1616$$

$$K(8) = 1.7181[1.1032 - 1] = 0.1773$$

$$K(7) = 1.7181[1.1037 - 1] = 0.1782$$

$$K(6) = K(5) = \dots = K(0) = 0.1782$$

قانون کنترل بهینه بدین صورت داده می‌شود:

$$u(k) = -K(k)x(k)$$

از آنجایی که

$$x(k+1) = 0.3679x(k) + 0.6321u(k) = [0.3679 - 0.6321K(k)]x(k)$$

بدست می‌آوریم:

$$x(1) = [0.3679 - 0.6321K(k)]x(0)$$

$$= [0.3679 - 0.6321 \times 0.1782] \times 1 = 0.2553$$

$$x(2) = [0.3679 - 0.6321 \times 0.1782] \times 0.2553 = 0.0652$$

$$x(3) = [0.3679 - 0.6321 \times 0.1782] \times 0.0652 = 0.0166$$

$$x(4) = [0.3679 - 0.6321 \times 0.1782] \times 0.0166 = 0.004241$$

مقادیر  $x(k)$  برای  $k = 5, 6, \dots, 10$  به سرعت به صفر میل می‌کنند.

اکنون دنباله کنترل بهینه  $u(k)$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u(0) = -K(0)x(0) = -0.1782 \times 1 = -0.1782$$

$$u(1) = -K(1)x(1) = -0.1782 \times 0.2553 = -0.0455$$

$$u(2) = -K(2)x(2) = -0.1782 \times 0.652 = -0.0116$$

$$u(3) = -K(3)x(3) = -0.1782 \times 0.0166 = -0.00296$$

$$u(4) = -K(4)x(4) = -0.1782 \times 0.00424 = -0.000756$$

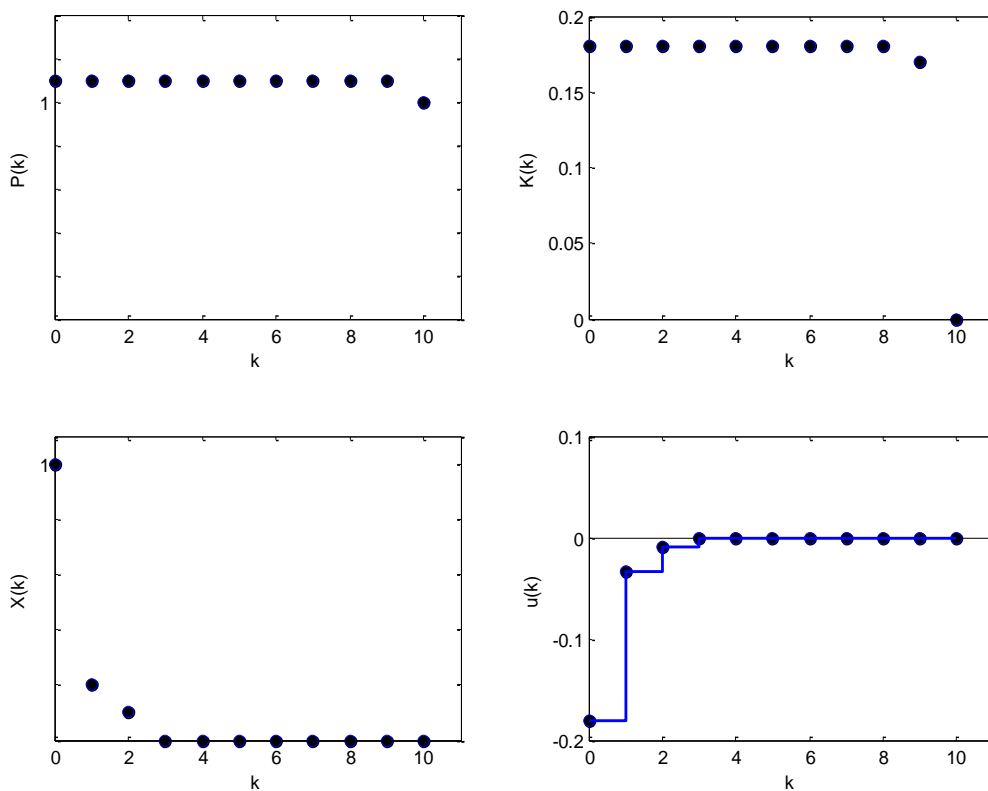
$$u(k) \approx 0 \quad k = 5, 6, \dots, 10$$

مقادیر  $P(k)$ ،  $K(k)$ ،  $x(k)$  و  $u(k)$  در شکل ۳-۲ رسم شده‌اند. توجه کنید که مقادیر  $P(k)$  و  $K(k)$

به جزء در چند مرحله نهایی ثابت می‌باشند. [۳۲]

در نهایت، مقدار مینیمم شاخص عملکرد  $J$  می‌تواند از معادله (۳-۴۹) به دست آید:

$$J_{min} = \frac{1}{2} x^*(0)P(0)x(0) = \frac{1}{2} (1 \times 1.1037 \times 1) = 0.55185$$



شکل ۳-۲ نمودارهای  $P(k)$  بر حسب  $x$ ،  $x(k)$  بر حسب  $k$ ،  $K(k)$  بر حسب  $k$  و  $u(k)$  بر حسب  $k$  برای سیستم در نظر گرفته شده در مثال ۳-۵

## فصل ۴

### روشی جدید جهت کنترل سیستم‌های گسسته زمانی خطی با اغتشاش ورودی

#### ۱،۴ مقدمه

تقریباً همه سیستم‌های پویا ویژگی‌های نامطلوبی نظیر سر و صداهای ناخواسته و لرزش دارند. در تمام طول تاریخچه تئوری کنترل تلاش‌هایی انجام شده است تا سیستم را به شیوه‌ای مرتب اصلاح کنند و بدین طریق تاریخچه کاربردهای دیگر دفع اغتشاش را تعیین کنند. در حقیقت وجود اغتشاش یکی از دلایل عمده استفاده از کنترل است. وقتی اغتشاشات بر سیستم تحمیل می‌شوند محدودیت‌های اساسی بر سیستم قرار داده می‌شوند. پایداری و مقاومت تحت تأثیر اغتشاشات بر سیستم قرار دارند. برای مثال پهنای باند قابل دسترسی یک سیستم حلقه-بسته، اگر سر و صدای اندازه‌گیری در سیستم سروو<sup>۱</sup> وجود داشته باشد، محدود خواهد شد. اگر اغتشاشات ناخواسته در پاسخ دستگاه وجود داشته باشد یک سیستم ردیابی برای یک ماهواره ممکن است همانطور که انتظار می‌رود عمل نکند. اگر می‌خواهیم این سیستم‌ها طبق مشخصات طراحی شده خود عمل کنند، ما باید نوعی از کنترل را بر سیستم اجرا کنیم. چندین روش وجود دارد که در آنها ممکن است به کنترل اغتشاش دست یابیم. روش‌های پسخورد، پیشخورد و پیش بینی وجود دارند که ممکن است از طریق کنترل کلاسیک، کنترل پیشرفته و یا کنترل تطبیقی، اجرا شوند. اغتشاش می‌تواند بنا بر فراخوانی کنترل، در منبع قابل حذف و اندازه‌گیری باشد و یا برآورد شود. [۵]

---

1-Servo

اغتشاشات هم بر سیستم‌های متناوب -زمان و هم بر سیستم‌های ثابت-زمان اثر می‌گذارند. به هر حال، این روش‌ها برای سیستم‌هایی که از نظر ماهیت نانوسانی هستند کاربرد دارند ( یعنی معادله دیفرانسیل توصیف کننده سیستم، ضرایب ثابتی دارد). تکنیک‌های بسیار زیادی برای مسأله دفع اغتشاش در سال‌های گذشته به کار بسته شده است. برای سال‌های زیادی تکنیک‌های ناکارآمدی در ابتدا استفاده می‌شده است. اگرچه با ظهور تئوری کنترل نوین روش‌های کنترل فعال جامعیت پیدا کرده‌اند و با پیشرفت‌های فعلی در صنایع، رشته کامپیوتر، روش‌های انطباقی بطور افزایشی وسایل رایج کنترل فعال شده‌اند. در اینجا یک نگاه کلی از روش‌های مهم توسعه یافته کنونی دفع اغتشاش ارائه می‌دهیم. مهم‌ترین این روش‌ها شامل، کنترل کلاسیک، کنترل مدرن و کنترل تطبیقی می‌باشد. [۶]

## ۲,۴ تکنیک‌های کنترل کلاسیک

قدیمی‌ترین و شهودی‌ترین وسیله برای از بین بردن آثار اغتشاش، تلاش برای ضعیف کردن منابع اغتشاش است و همچنین اندازه‌گیری‌های اصلاحی در سیستم را تفسیر می‌کند. برای مثال تعدیل کردن الکترونیک در یک حسگر چنان که در یک برنامه کاربردی متعارف از این تکنیک امواج مزاحم کاهش پیدا کند. مثال‌های دیگر از این قبیل‌اند: کاهش دادن نیروی‌های اصطحکاک در یک سروو با استفاده از یک یاطاقان بهتر، یا جابجایی یک حسگر به موقعیتی که در آن اغتشاش‌های کوچکتری وجود دارد. اگر چه این روش از کاهش در منبع، خوبی آن در مختصر بودن آن است، اما در اغلب موارد دسترسی به آن مشکل است. [۵]

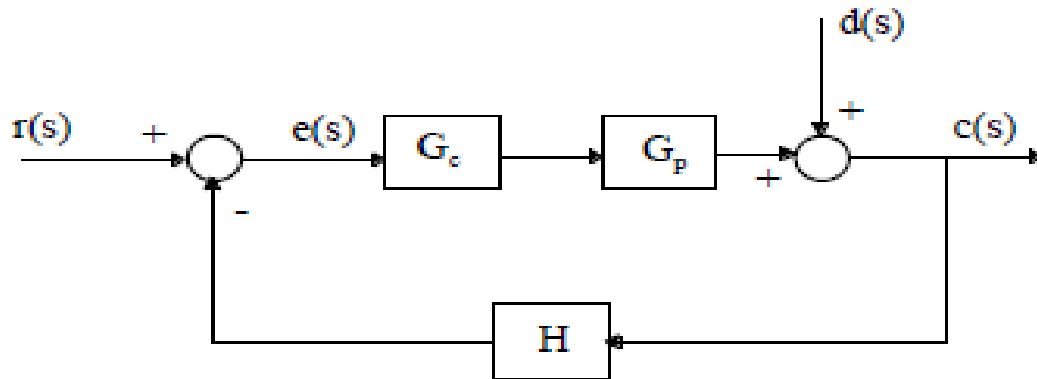
## ۱,۲,۴ کنترل پسخورد

اگر اغتشاشات در منبع غیر قابل دفع باشند، کنترل پسخورد قابل استفاده است. برای این روش طریقه‌ای که در آن اغتشاش وارد سیستم می‌شود باید شناخته شود. ضروری است که بتوانیم حداقل یک متغیر که بوسیله

اغتشاش متأثر شده است را تعریف کنیم و همچنین ضروری است که به یک کنترل ورودی متغیر که به سیستم وارد می‌شود در حومه اغتشاش، دسترسی داشته باشیم. در این روش آثار اغتشاش بوسیله استفاده از پسخورد محلی قابل کاهش هستند. در این بخش دو روش کنترل پسخورد متفاوت را توضیح می‌دهیم. [۵]

#### ۱،۱،۲،۴ جایابی قطب

روش جایابی قطب تا حدی شبیه روش مکان هندسی ریشه‌هاست، از این جهت که قطب‌های سیستم حلقه بسته را در محل‌های مطلوب قرار می‌دهیم. تفاوت اصلی در این است که در روش مکان هندسی ریشه‌ها تنها قطب‌های غالب حلقه بسته در محل‌های مطلوب قرار می‌گیرند، ولی در روش جایابی قطب تمام قطب‌های سیستم حلقه بسته در محل‌های مطلوب قرار می‌گیرند. در این روش حساسیت سیستم به اغتشاش بدین گونه بطور غیر مستقیم تغییر داده می‌شود. هر چند، هنگامیکه قطب‌ها دورتر از سمت چپ محور فرضی در صفحه اعداد مختلط قرار می‌گیرند، دوام و پایداری بهبود می‌یابد اما سیستم به اغتشاش حساس‌تر می‌شود. شکل ۱-۴ نشان می‌دهد که این کنترل کننده چگونه کار می‌کند. [۱۵]



شکل ۱-۴ نمودار بلوکی کنترل کننده پسخورد

اگر سیستم کنترل پذیر حالت کامل باشد، می توان با پسخورد حالت، و به کمک یک ماتریس بهره پسخورد حالت مناسب قطب های حلقه بسته سیستم را در محل دلخواهی قرار داد. وقتی سیگنال کنترل یک کمیت برداری است، جنبه های ریاضی روش جابدهی قطب پیچیده می شود. وقتی سیگنال کنترل یک کمیت برداری است ماتریس بهره پسخورد حالت یکتا نیست. می توان آزادانه بیش از  $n$  پارامتر را برگزید؛ یعنی علاوه بر امکان قرار دادن  $n$  قطب حلقه بسته در مکان های دلخواه، می توانیم خواسته های دیگرمان از سیستم حلقه بسته، در صورت وجود، را نیز برآورده کنیم. [۲ و ۳ و ۴ و ۵]

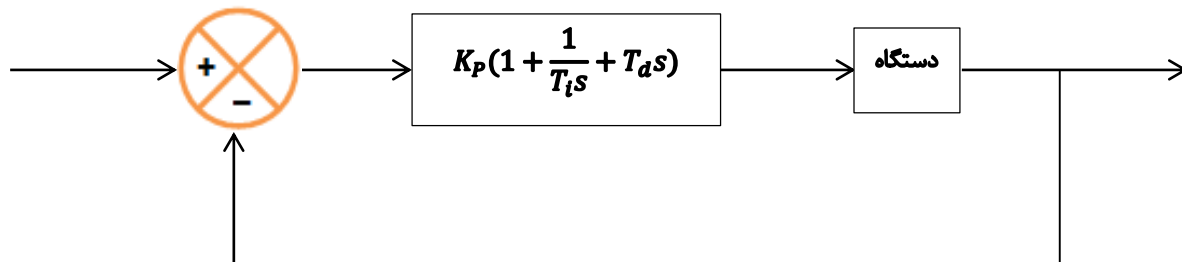
## ۲،۱،۲،۴ کنترل $PID$ <sup>۱</sup>

بیش از نیمی از کنترل کننده های صنعتی که امروزه به کار می روند از طرح های  $PID$  یا  $PID$  اصلاح شده استفاده می کنند. چون اغلب کنترل کننده های  $PID$  در محل تنظیم می شوند، قواعد تنظیم متفاوتی در نوشته ها پیشنهاد شده است. با استفاده از این قواعد می توان کنترل کننده ها را در محل با دقت و ظرافت تنظیم کرد. روش های تنظیم خودکار نیز ابداع شده اند، و بعضی کنترل کننده های  $PID$  دارای قابلیت تنظیم خودکار هستند.

مزیت کنترل کننده های  $PID$  در قابلیت عمومی آنها به اکثر سیستم های کنترل است. در عمل هرگاه مدل ریاضی سیستم معلوم نباشد، و به همین خاطر روش های تحلیلی طراحی را نتوان به کار برد، کنترل کننده های  $PID$  بسیار مفید هستند. در زمینه سیستم های کنترل فرایند، طرح های کنترل  $PID$  و شکل های اصلاح شده آن فایده خود را در ایجاد کنترل رضایتبخش به اثبات رسانده اند، گر چه در بسیاری از موارد کنترل کننده بهینه نیستند.

شکل (۲-۴) کنترل  $PID$  یک دستگاه را نشان می‌دهد. اگر بتوان مدل ریاضی دستگاه را یافت، روش‌های طراحی مختلفی را می‌توان برای تعیین پارامترهای کنترل کننده به کار برد تا سیستم حلقه بسته مشخصات پاسخ گذرا و حالت ماندگار خواسته شده را داشته باشد. ولی اگر دستگاه آنقدر پیچیده باشد که نتوان مدل ریاضی آن را به سادگی به دست آورد، نمی‌توان از رهیافت تحلیلی برای طراحی کنترل کننده  $PID$  استفاده کرد. در این صورت باید برای تنظیم کنترل کننده  $PID$  به روش‌های تجربی متوسل شد. [۱۵]

فرایند انتخاب پارامترهای کنترل کننده برای برآورده شدن مشخصات عملکرد، تنظیم کنترل کننده نامیده می‌شود. زیگلر<sup>۱</sup> و نیکولس<sup>۲</sup> قواعدی برای تنظیم کنترل کننده‌های  $PID$  (یعنی تعیین مقادیر  $K_p$ ،  $T_i$  و  $T_d$ ) پیشنهاد کرده‌اند. این قواعد براساس پاسخ پله به دست آمده از آزمایش یا مقدار  $K_p$  که هنگام استفاده از کنترل تناسبی تنها به پایداری مرزی منجر می‌شود، استوار است. قواعد زیگلر - نیکولس، که به زودی به معرفی آنها می‌پردازیم، در مواقعی که مدل ریاضی دستگاه معلوم نیست بسیار به کار می‌آیند. (البته این قواعد را می‌توان برای طراحی سیستم‌های دارای مدل ریاضی معلوم نیز به کار برد). این قواعد مجموعه‌ای از مقادیر برای  $T_i$ ،  $K_p$  و  $T_d$  به دست می‌دهند که عملکرد پایدار سیستم را به همراه دارد. البته سیستم حاصل ممکن است فراجهدش بزرگ و غیر قابل قبول داشته باشد. در این صورت باید با انجام یک رشته تنظیم دقیق به مشخصه مطلوب دست یافت. در واقع تنظیم زیگلر - نیکولس حدس هوشمندانه‌ای برای پارامترها به دست می‌تواند نقطه شروع خوبی برای تنظیم باشد. پس این قواعد را نباید مقدار نهایی پارامترها به حساب آورد.



شکل ۲-۴ کنترل  $PID$  یک دستگاه

1-Ziegler

2-Nichols

قواعد زیگلر - نیکولس برای تنظیم کنترل کننده‌های  $PID$ . زیگلر و نیکولس قواعدی برای تعیین

بهره تناسبی  $K_p$  زمان انتگرال  $T_i$  و زمان مشتق  $T_d$ ، براساس مشخصات پاسخ گذرای دستگاه تحت کنترل پیشنهاد کرده‌اند. این تعیین پارامتر یا تنظیم کنترل کننده  $PID$  می‌تواند توسط مهندس کنترل در محل و با انجام آزمایش بر روی دستگاه انجام شود. دو روش موسوم به قواعد زیگلر - نیکولس وجود دارد که در اینجا ما این دو روش را به اختصار معرفی می‌کنیم.

**روش اول.** در روش اول پاسخ دستگاه به ورودی پله واحد را به طور تجربی، به صورت نشان داده شده در شکل (۳-۴) می‌یابیم. اگر دستگاه نه انتگرالگیر داشته باشد، و نه قطب‌های مزدوج مختلط غالب، پاسخ پله به صورت یک منحنی S شکل، همانند شکل (۴-۴) است. (اگر پاسخ بصورت منحنی S شکل نباشد، این روش را نمی‌توان به کار برد.) این منحنی پاسخ پله را می‌توان به طور تجربی یا با شبیه سازی دستگاه به دست آورد.

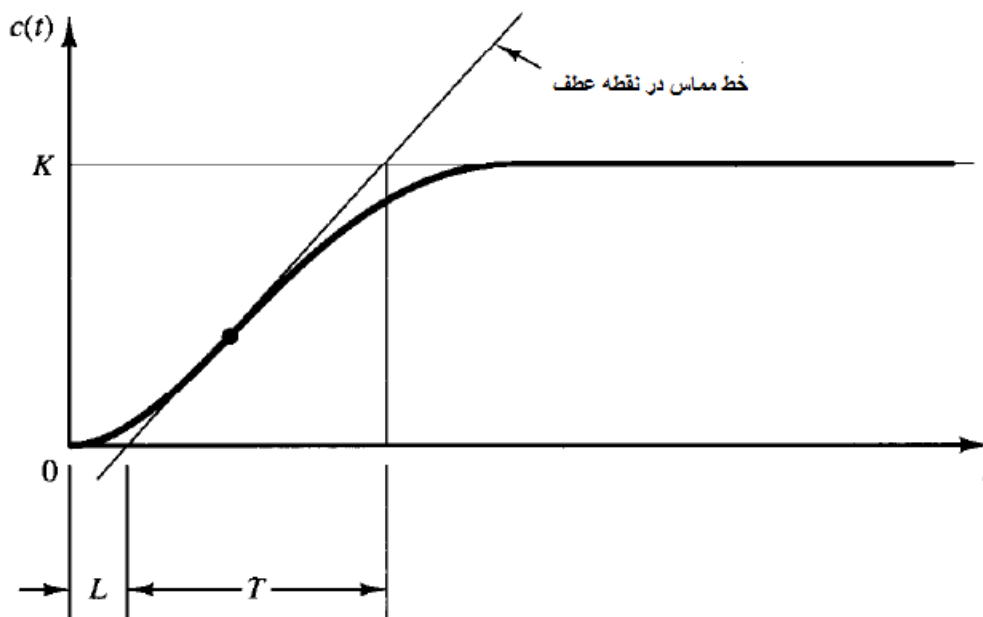
منحنی S شکل را می‌توان با دو پارامتر مشخص کرد، زمان تأخیر  $L$  و ثابت زمانی  $T$ . زمان تأخیر و ثابت زمانی با رسم خط مماس در نقطه عطف منحنی S شکل، و یافتن محل برخورد آن با محور زمان و خط  $c(t) = K$ ، مطابق شکل (۴-۴) تعیین می‌شود. سپس می‌توان تابع تبدیل  $C(s)/U(s)$  را با یک سیستم مرتبه اول دارای تأخیر انتقالی، به صورت زیر تقریب زد:

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{K e^{-Ls}}{Ts + 1} \quad (۱-۴)$$



شکل ۳-۴ یافتن پاسخ پله دستگاه





شکل ۴-۴ منحنی پاسخ S شکل

زیگلر - نیکولس پیشنهاد می کنند مقادیر  $K_P$ ،  $T_i$  و  $T_d$  براساس فرمول های جدول (۴-۱) انتخاب شوند.

جدول ۴-۱ قواعد تنظیم زیگلر - نیکولس براساس پاسخ پله دستگاہ (روش اول)

$T_d$	$T_i$	$K_P$	نوع کنترل کننده
0	$\infty$	$\frac{T}{L}$	P
0	$\frac{L}{0.3}$	$0.9 \frac{T}{L}$	PI
0.5	$2L$	$1.2 \frac{T}{L}$	PID

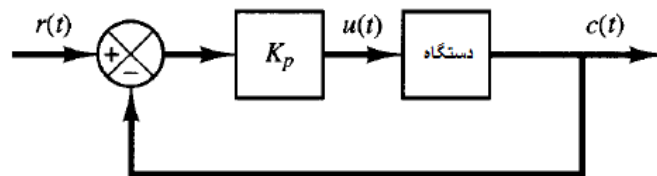
توجه کنید که کنترل کننده  $PID$  تنظیم شده با روش اول قواعد زیگلر - نیکولس دارای تابع تبدیل زیر

است:

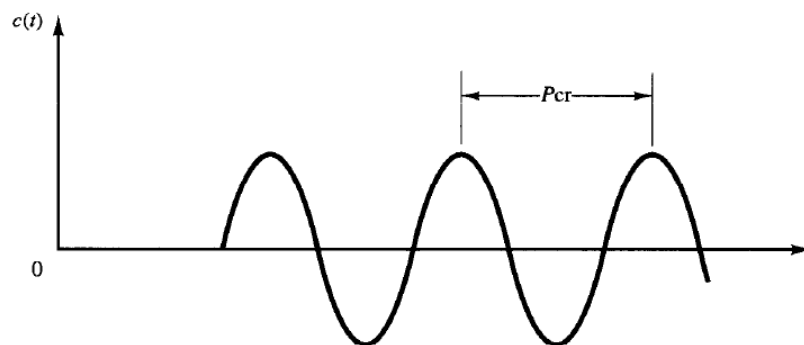
$$\begin{aligned}
 G_c(s) &= K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \\
 &= 1.2 \frac{T}{L} \left( 1 + \frac{1}{2Ls} + 0.5Ls \right) \\
 &= 0.6T \frac{(s + 1/L)^2}{s}
 \end{aligned}
 \tag{۲-۴}$$

پس کنترل  $PID$  یک قطب در مبدأ و صفر دوگانه‌ای در  $s = -1/L$  دارد.

**روش دوم.** در روش دوم ابتدا قرار می‌دهیم  $T_i = \infty$  و  $T_d = 0$ . در این صورت تنها عمل کنترلی تناسبی استفاده می‌شود. (شکل ۴-۵ را ببینید).  $K_p$  را از صفر زیاد می‌کنیم تا به مقدار بحرانی  $K_c$  برسیم، جایی که خروجی برای اولین بار نوسان نامیرا پیدا می‌کند. (اگر به ازای هیچ مقدار  $K_p$  خروجی نوسان نامیرا نداشته باشد، این روش قابل اعمال نیست.) پس مقدار بهره بحرانی  $K_{cr}$  و زمان تناوب متناظر با آن  $P_{cr}$  بطور تجربی تعیین می‌شود (شکل ۴-۶ را ببینید).



شکل ۴-۵ سیستم حلقه بسته با کنترل کننده تناسبی



شکل ۴-۶ نوسان نامیرا با زمان تناوب  $P_{cr}$

زیگلر و نیکولس پیشنهاد کرده اند پارامترهای  $K_P$ ،  $T_i$  و  $T_d$  براساس فرمول‌های جدول ۲-۴ تنظیم شوند.

جدول ۲-۴ قواعد تنظیم زیگلر - نیکولس براساس بهره بحرانی  $K_{cr}$  و زمان تناوب بحرانی  $P_{cr}$  (روش دوم)

$T_d$	$T_i$	$K_P$	نوع کنترل کننده
0	$\infty$	$0.5K_{cr}$	P
0	$\frac{1}{1.2}P_{cr}$	$0.45K_{cr}$	PI
$0.125P_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.6K_{cr}$	PID

توجه کنید که کنترل کننده  $PID$  تنظیم شده به روش دوم زیگلر - نیکولس دارای تابع زیر است:

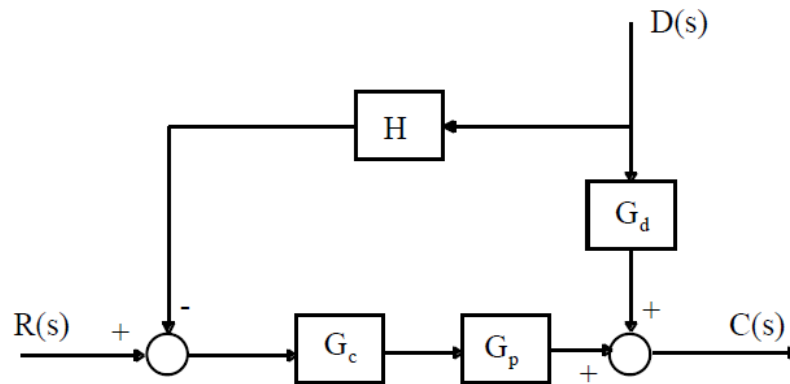
$$\begin{aligned}
 G_c(s) &= K_P \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \\
 &= 0.6K_{cr} \left( 1 + \frac{1}{0.5P_{cr}s} + 0.125P_{cr}s \right) \quad (۳-۴) \\
 &= 0.075P_{cr}K_{cr} \frac{(s + 4/P_{cr})^2}{s}
 \end{aligned}$$

پس این کنترل کننده  $PID$  یک قطب در مبدأ و صفر دوگانه‌ای در  $s = -4/K_{cr}$  دارد. [۳۳]

## ۲،۲،۴ کنترل پیشخورد

اگر عوامل خارجی بر سیستم تحت کنترل اثر قابل توجهی داشته باشد، نادیده گرفتن آنها توسط کنترل کننده، به اختلال در عملکرد سیستم منجر می‌گردد. ممکن است در شرایط خاصی، بتوانیم این عوامل خارجی را از بین برده و یا آنها را تضعیف کنیم، در غیر این صورت برای اجتناب از اختلال در عملکرد سیستم، باید استراتژی کنترل را عوض کنیم. در واقع با تغییر و بهبود مدل، اثر این عوامل خارجی یا اغتشاشات را پیش بینی می‌کنیم و با در نظر گرفتن آنها قوانین کنترلی را مجدداً بررسی می‌نماییم. در این بررسی‌ها، فرامین کنترل به

گونه‌ای طراحی خواهند شد تا اثر این اغتشاشات را به حداقل برسانند. به این چنین استراتژی کنترلی که در آن عوامل خارجی در نظر گرفته شده، و اعمال کنترلی برای مقابله با آنها طراحی می‌شوند، کنترل پیش‌خورده گفته می‌شود. شکل (۷-۴) نشان می‌دهد این روش چگونه اجرا می‌شود. [۱۵]

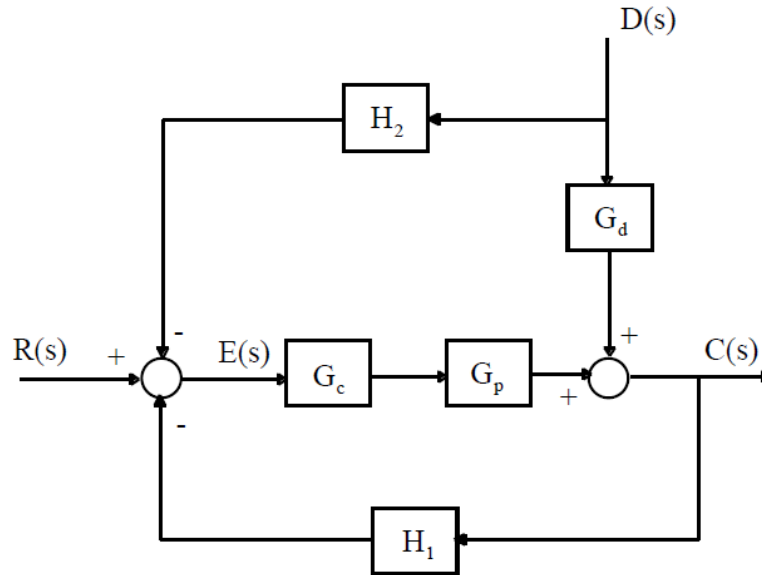


شکل ۷-۴ نمودار بلوکی کنترل پیش‌خورده

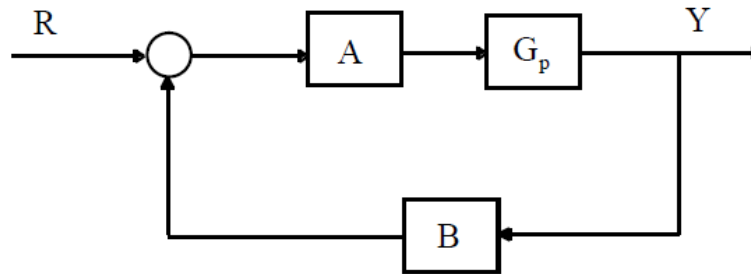
#### ۱،۲،۲،۴ طراحی جبران‌ساز پیوندی<sup>۱</sup>

کنترل پیش‌خورده می‌تواند خطاهای زودگذر یا آنی را کمینه کند اما برای دقت آن به سبب طبیعت حلقه باز آن هیچ تضمینی وجود ندارد. [۱۹] بنابراین کنترل کننده نشان داده شده در شکل (۷-۴) برای بسیاری از برنامه‌ها با دینامیک‌های حلقه باز نامناسب، غیر واقعی است. در نتیجه کنترل پیش‌خورده معمولاً به صورت تصادفی با کنترل پیش‌خورده با هم استفاده می‌شوند تا اشتباهات در مینیمم کردن خطا را خنثی سازی کند. این روش در شکل (۸-۴) نشان داده شده است.

تغییرات دیگر روی این، یک روش جبران‌ساز است که به وسیله آکرمن<sup>۱</sup> نتیجه گرفته شده است و در شکل (۹-۴) نشان داده شده است. [۱]



شکل ۴-۸ نمودار بلوکی کنترل پیشخورد-پسخورد



شکل ۴-۹ نمودار بلوکی روش جبران ساز پیشخورد-پسخورد

طراحی کنترل مانند زیر عمل می کند . اگر بخواهیم ورودی را دنبال کنیم ، به عنوان مثال در مسائل

نوع-پیگردی<sup>۱</sup>، معادلات زیر در دامنه گسسته قرار می گیرند:

$$A(z) = R(z) \quad (۴-۴)$$

1-Ackermann

2-Tracking-Type

$$B(z) = 1 \quad (5-4)$$

اگر نخواهیم ورودی را دنبال کنیم، تابع‌های انتقال بصورت زیر هستند:

$$A = \text{دلخواه} \quad (6-4)$$

$$B = R(z) \quad (7-4)$$

بنابراین اگر ورودی  $R(t) = \sin at$  و نخواهیم ورودی را دنبال کنیم از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$z = e^{jaT} \quad (8-4)$$

در می‌یابیم که انتقال  $z$  از  $R(t)$  نتیجه می‌دهد:

$$B(t) = \frac{z \sin aT}{z^2 - 2 \cos aT z + 1} \quad (9-4)$$

این روش اساساً یک فن پسخورد با جبران‌سازهایی که در جاهای مختلفی قرار دارند وابسته به کاربرد آنها است. اغتشاش (یا تخمینی از آن) پیشخورد است. جبران‌سازها قسمت جلوی حلقه یا در قسمت پسخورد حلقه، چنانچه برای کاربرد مناسب باشند، استفاده می‌شوند. اگر ورودی را دنبال نکنیم، این روش در نتیجه بر طبق دفع اغتشاش‌های ناخواسته با استفاده از معادلات (8-4) و (9-4) استفاده می‌شوند. [۱]

## ۳,۴ روش‌های کنترل مدرن

تکنیک‌های کنترل کلاسیک در ابتدا برای طراحی و آنالیز سیستم‌های تک ورودی - تک خروجی (SISO)<sup>۱</sup> داده شده‌اند. بعد از جنگ جهانی دوم با پیدایش ضرورت‌هایی برای کنترل سیستم‌هایی با ورودی‌ها و خروجی‌های چندگانه (MIMO)<sup>۲</sup>، به توسعه چیزی که در حال حاضر به عنوان کنترل مدرن شناخته می‌شود، منجر شد.

---

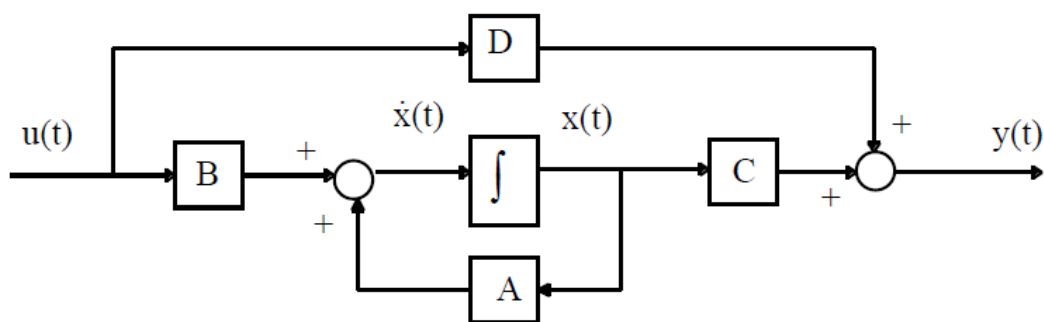
1-Single-Input Single-Output

2-Multiple-Input Multiple-Output

کالمن<sup>۱</sup> و دیگران به این نتیجه رسیده‌اند که روش‌های فضای حالت، که بر مبنای روش‌های معادلات دیفرانسیل پایه‌ریزی شده بودند، لازم بودند تا سیستم‌های پیشرفته بیشتری هدایت شوند. محققین زیادی با این روش موافقت کردند، و در نتیجه زمینه کنترل مدرن طی سال‌های ۱۹۵۰ مورد مطالعه قرار گرفت. فضای حالت یک سیستم با معادلات زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (۱۰-۴)$$

که در آن  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  از معادلات دیفرانسیلی که یک سیستم را توصیف می‌کند، مشخص شده‌اند. نمودار بلوکی این سیستم در شکل (۱۰-۴) نشان داده شده است. [۲۸]



شکل ۱۰-۴ نمودار بلوکی فضای حالت سیستم

#### ۴،۴ کنترل بهینه زمانی سیستم‌های گسسته زمانی خطی همراه با اغتشاش

تاکنون روش‌های متفاوتی جهت کنترل سیستم‌های گسسته زمانی خطی که دارای اغتشاش می‌باشند مورد بررسی قرار گرفته است که می‌توان به عنوان مثال به روش LQR اشاره نمود. در این جا ما روش جدیدی جهت محاسبه کنترلگر بهینه زمانی ارائه می‌دهیم بدین صورت که برای یک سیستم کنترل‌پذیر گسسته زمانی خطی

1- Kalman

همراه با اغتشاش، یک سیستم دلخواه کنترل پذیر بدون اغتشاش در نظر گرفته و سپس با استفاده از ماتریس-های افزوده، دو سیستم را در یک سیستم جدید بدون اغتشاش الحاق نموده و به وسیله تبدیلات تشابهی کنترلگر بهینه زمانی را محاسبه می‌نماییم، به گونه‌ای که اغتشاش تأثیری بر سیستم نداشته باشد.

سیستم گسسته زمانی خطی کنترل پذیر زیر را در نظر بگیرید:

$$x(k+1) = A_1x(k) + B_1u_1(k) + d(k) \quad (۱۱-۴)$$

که در آن  $A_1$  یک ماتریس  $n \times n$ ،  $B_1$  یک ماتریس  $n \times m$ ،  $x(k)$ ، یک ماتریس  $n \times 1$ ،  $u_1(k)$  یک ماتریس  $m \times 1$  و  $d(k)$  یک ماتریس  $n \times 1$  می‌باشند. برای سیستم معادله (۱۱-۴) قانون کنترل زیر را پیشنهاد می‌دهیم:

$$u_1(k) = F_1x(k) \quad (۱۲-۴)$$

ابتدا سیستم کنترل پذیر دلخواه زیر را تعریف می‌کنیم:

$$z(k+1) = A_2z(k) + B_2u_2(k) \quad (۱۳-۴)$$

که در آن  $A_2$  یک ماتریس  $n \times n$ ،  $B_2$  یک ماتریس  $n \times m$ ،  $z(k)$  یک ماتریس  $n \times 1$ ،  $u_2(k)$  یک ماتریس  $m \times 1$  می‌باشد.

قانون کنترل برای سیستم معادله (۱۳-۴) را بصورت زیر پیشنهاد می‌کنیم:

$$u_2(k) = F_2z(k) \quad (۱۴-۴)$$

با شرط این که تمامی عناصر  $z(0)$ ، مخالف صفر باشند. حال تعریف می‌کنیم:

$$d(k) = Cz(k) \quad (۱۵-۴)$$

$C$  یک ماتریس قطری می‌باشد که عناصر روی قطر اصلی آن بصورت زیر می‌باشد:

$$C_{ii} = \frac{d(i)}{z(i)} \quad ; i = 1, 2, \dots, n \quad (۱۶-۴)$$

لذا با جایگذاری معادله (۱۵-۴) در معادله (۱۱-۴) و با توجه به معادله (۱۳-۴) می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ z(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ z(k) \end{bmatrix} \quad (۱۷-۴)$$



با توجه به معادله (۱۲-۴) و معادله (۱۴-۴) خواهیم داشت:

$$u(k) = [F_1 \quad F_2] \begin{bmatrix} x(k) \\ z(k) \end{bmatrix} \quad (۱۸-۴)$$

حال قرار می‌دهیم  $y(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ z(k) \end{bmatrix}$ ، خواهیم داشت:

$$y(k+1) = Ay(k) + Bu(k) \quad (۱۹-۴)$$

بطوریکه  $A$  یک ماتریس  $2n \times 2n$  بصورت  $A = \begin{bmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$  و  $B$  یک ماتریس  $2n \times m$  بصورت

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \text{ می‌باشد.}$$

حال با تعریف  $F$  برای قانون  $u(k) = Fy(k)$  به گونه‌ای که سیستم فوق پایدار باشد، سیستم راکنترل

می‌کنیم که می‌توان سیستم بدون اغتشاش فوق را کنترل نمود و با استفاده از تبدیلات تشابهی و پیدا نمودن  $F$  مناسب،  $y(k)$  را به سمت صفر میل داد.

$$y(k+1) = Ay(k) + Bu(k) \quad (۲۰-۴)$$

$$u(k) = Fy(k) \quad (۲۱-۴)$$

$$y(k+1) = Ay(k) + BFy(k) \quad (۲۲-۴)$$

$$y(k+1) = (A + BF)y(k) \quad (۲۳-۴)$$

$$y(k+1) = \left( \begin{bmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} [F_1 \quad F_2] \right) y(k) \quad (۲۴-۴)$$

ماتریس کنترل‌پذیری  $Q$  را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Q = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{2n-1}B] \quad (۲۵-۴)$$

برای کنترل‌پذیری سیستم معادله (۲۰-۴) کافی است نشان دهیم رتبه ماتریس  $Q$  برابر با  $2n$  است.

## ۵,۴ تبدیلات تشابهی فضای حالت

فرض کنید  $T$  تبدیل تشابهی باشد که بر فضای  $R^n$  تعریف شده است. معادله حالت بصورت

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (۲۶-۴)$$

است. حال فرض کنید بردار حالت سیستم توسط ماتریس تبدیل  $T^{-1}$  به فضای جدید تبدیل شود یعنی

$$\hat{x}(k) = T^{-1}x(k) \quad (۲۷-۴)$$

در نتیجه

$$x(k) = T\hat{x}(k) \quad (۲۸-۴)$$

با جایگذاری در معادله (۲۶-۴) خواهیم داشت:

$$T\hat{x}(k+1) = AT\hat{x}(k) + Bu(k) \quad (۲۹-۴)$$

با ضرب طرفین معادله بالا در  $T^{-1}$  خواهیم داشت:

$$\hat{x}(k+1) = T^{-1}AT\hat{x}(k) + T^{-1}Bu(k) \quad (۳۰-۴)$$

معادله سیستم بالا مشابه معادله (۲۶-۴) است با این تفاوت که  $A$  با  $T^{-1}AT$  و  $B$  با  $T^{-1}B$  عوض شده است. تعریف می‌کنیم:

$$\hat{A} = T^{-1}AT \quad , \quad \hat{B} = T^{-1}B \quad (۳۱-۴)$$

با جایگذاری در معادله (۳۰-۴) خواهیم داشت:

$$\hat{x}(k+1) = \hat{A}\hat{x}(k) + \hat{B}u(k) \quad (۳۲-۴)$$

اگر هدف، کنترل حالت سیستم و رساندن حالت آن به تعادل ( صفر ) باشد با توجه به رابطه (۳۱-۴) می‌توان در فضای حالت جدید بردار حالت  $\hat{x}(k)$  را به صفر رساند، در این صورت بدیهی است که  $x(k)$  نیز که بردار حالت در فضای اولیه است به تعادل خواهد رسید. بدین سان حل مسأله مورد نظر با زوج  $(\hat{B}, \hat{A})$  با حل همان مسأله با زوج  $(B, A)$  هم ارز است. ماتریس  $T$  را می‌توان بصورت منحصر بفردی با استفاده از ماتریس

کنترل پذیری مشخص کرد به این ترتیب که اولین  $n$  ستون مستقل خطی ماتریس  $Q$  را ستون‌های ماتریس تبدیل  $T$  قرار می‌دهیم، بنابراین

$$T = (B, AB, \dots, A^{q-1}B, A^q b_1, \dots, A^q b_r) \quad (33-4)$$

حال فرم استاندارد اشلون زوج  $(B, A)$  را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (\hat{B}, \hat{A}) &= (T^{-1}B, T^{-1}AT) = T^{-1}(B, A(B, AB, \dots, A^{q-1}B, A^q b_1, \dots, A^q b_r)) \\ &= T^{-1}(B, AB, \dots, A^{q-1}B, A^q b_1, \dots, A^q b_r, A^q b_{r+1}, \dots, A^q b_m, A^{q+1} b_1, \dots, A^{q+1} b_r) \\ &= T^{-1}(T, A^q b_{r+1}, \dots, A^q b_m, A^{q+1} b_1, \dots, A^{q+1} b_r) \\ &= (I_n, T^{-1}A^q(b_{r+1}, \dots, b_m, Ab_1, \dots, Ab_r)) \\ &= (I_n, V) \end{aligned} \quad (34-4)$$

بطوریکه  $V$  یک بردار ستونی  $n \times m$  است که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$V_i = T^{-1}A^q b_{i+r} \quad ; i = 1, 2, \dots, s \quad (35-4)$$

$$V_j = T^{-1}A^{q+1} b_{j-s} \quad ; j = s + 1, \dots, m \quad (36-4)$$

در حقیقت سطرهای زوج  $(\hat{B}, \hat{A})$  می‌تواند به  $q$  بلوک مربعی  $m \times m$  و یک بلوک غیرمربعی  $r \times m$  مطابق زیر افراز شود:

$$\hat{A} = \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} 0_{m \times m} & 0_{m \times m} & \dots & 0_{m \times m} & & & & V^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ I_m & 0_{m \times m} & \dots & 0_{m \times m} & & & & V^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0_{m \times m} & 0_{m \times m} & \dots & 0_{m \times m} & & & & V^{(q)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0_{r \times m} & 0_{r \times m} & \dots & 0_{r \times m} & & & & V^{(q+1)} \end{array} \right], \hat{B} = \left[ \begin{array}{c} I_m \\ \dots \\ 0_{m \times m} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ 0_{m \times m} \\ \dots \\ 0_{m \times m} \end{array} \right] \quad (37-4)$$

بطوریکه هر  $V^{(i)}$ ,  $(i = 1, 2, \dots, q)$  یک ماتریس مربعی  $m \times m$  است و  $V^{(q+1)}$  یک ماتریس مربعی  $r \times m$

است.

فرم استاندارد اشلون می‌تواند بطور عددی با انجام عملیات سطری تشابهی روی زوج  $(B, A)$  و به دنبال آن عملیات ستونی تشابهی، تنها روی ماتریس  $A$  بدست آید.

حال اگر عملیات ستونی مشابه بر روی یک ماتریس واحد  $n \times n$  انجام شود ماتریس تبدیل  $T$  بدون احتیاج به تشکیل ماتریس کنترل‌پذیری به سادگی بدست می‌آید. به عبارت دیگر برای تبدیل زوج  $(B, A)$  به  $(\hat{B}, \hat{A})$  ماتریس افزوده  $Q = [B, A, I_n]$  را در نظر می‌گیریم و عملیات تشابهی زیر را تعریف می‌کنیم:

۱- ضرب یا تقسیم یک سطر از  $Q$  در کمیت اسکالر  $k \neq 0$  و به دنبال آن تقسیم یا ضرب ستون متناظر از ماتریس  $A$

$$\text{Row}(i) \rightarrow \text{Row}(i) \times k \quad \text{on } Q$$

$$\text{Column}(i) \rightarrow \text{Column}(i)/k \quad \text{on } A$$

۲- تفاضل مضربی از سطر  $i$  ام ماتریس  $Q$  از سطر  $j$  ام آن و به دنبال آن جمع همان مضرب از ستون  $j$  ام ماتریس  $A$  با ستون  $i$  ام ماتریس  $A$

$$\text{Row}(j) \rightarrow \text{Row}(j) - k \text{Row}(i) \quad \text{on } Q$$

$$\text{Column}(i) \rightarrow \text{Column}(i) + k \text{Column}(j) \quad \text{on } A$$

۳- جابجایی سطر  $i$  ام و سطر  $j$  ام از ماتریس  $Q$  و بدنبال آن جابجایی ستون  $j$  ام و ستون  $i$  ام از ماتریس  $A$

$$\text{Row}(j) \leftrightarrow \text{Row}(i) \quad \text{on } Q$$

$$\text{Column}(i) \leftrightarrow \text{Column}(j) \quad \text{on } A$$

در واقع این عملیات تشابهی مانند عملیات تشابهی در فرایند حذف گاوسی به منظور حل یک دستگاه معادله خطی است با این تفاوت که در آنجا تنها عملیات سطری انجام می‌شود در حالیکه در اینجا عملیات ستونی متناظر با آن باید در ماتریس  $A$  نیز انجام شود، بدین سان  $\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, T^{-1}]$  بدست می‌آید. قابل ذکر است که اگر عملیات ستونی در ماتریس  $I_n$  ذخیره شود ماتریس تبدیل  $T$  بدست خواهد آمد.

فرم استاندارد اشلون برای تعیین قوانین کنترل مناسب نیست، برای رفع این مشکل بردارهای ستونی غیر واحد فرم استاندارد اشلون را با انتخاب یک تبدیل مناسب به بردارهای سطری تبدیل می‌کنیم، این فرم به فرم

همدم برداری معروف است. فرم همدم برداری که مستقیماً از فرم استاندارد اشلون بدست می‌آید، فرم همدم برداری اولیه نامیده می‌شود.

## ۶,۴ فرم همدم برداری اولیه

فرض کنید  $S$  تبدیل خطی تشابهی باشد که بر فضای  $R^n$  تعریف شده است و بردار حالت سیستمی که به فرم استاندارد اشلون است توسط ماتریس تبدیل  $S^{-1}$  به فضای جدید تبدیل شود یعنی:

$$\tilde{x}(k) = S^{-1}\hat{x}(k) = S^{-1}T^{-1}x(k) \quad (۳۸-۴)$$

با جایگذاری  $\hat{x}(k)$  در معادله (۳۲-۴) خواهیم داشت:

$$S\tilde{x}(k+1) = \hat{A}S\tilde{x}(k) + \hat{B}u(k) \quad (۳۹-۴)$$

با ضرب طرفین معادله بالا در  $S^{-1}$  خواهیم داشت:

$$\tilde{x}(k+1) = S^{-1}\hat{A}S\tilde{x}(k) + S^{-1}\hat{B}u(k) \quad (۴۰-۴)$$

قرار می‌دهیم:

$$\tilde{A} = S^{-1}\hat{A}S = S^{-1}T^{-1}ATS \quad , \quad \tilde{B} = S^{-1}\hat{B} = S^{-1}T^{-1}B \quad (۴۱-۴)$$

با جایگذاری در معادله (۴۰-۴) خواهیم داشت:

$$\tilde{x}(k+1) = \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{B}u(k) \quad (۴۲-۴)$$

به گونه‌ای که زوج  $(\tilde{B}, \tilde{A})$  به فرم همدم برداری اولیه خواهد بود. حل معادله سیستم (۴۲-۴) هم ارز با حل

معادله سیستم (۲۶-۴) خواهد بود. [۱۶]

مثال ۱. سیستم کنترل‌پذیر  $x(k+1) = A_1x(k) + B_1u_1(k) + d(k)$  را بصورت زیر در نظر

می‌گیریم:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 & 7 \\ 9 & 5 & 5 & 7 \\ 9 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 9 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad B_1 = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 9 & 8 & 9 \\ 9 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (۴۳-۴)$$

می‌خواهیم ماتریس پس‌خورد حالت را به گونه‌ای تعیین نماییم که علاوه بر دفع اغتشاش، سیستم کنترل‌پذیر باشد.

سیستم کنترل‌پذیر گسسته خطی دلخواه  $z(k+1) = A_2 z(k) + B_2 u_2(k)$  را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 & 8 \\ 2 & 0 & 5 & 7 \\ 8 & 3 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 9 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad Z(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (44-4)$$

ماتریس‌های افزوده زیر را برای سیستم  $y(k+1) = Ay(k) + Bu(k)$  تشکیل می‌دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (45-4)$$

لذا سیستم جدید بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 5 & 5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 7 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 3 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 9 & 8 & 9 \\ 9 & 5 & 0 \\ 6 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad (46-4)$$

واضح است که سیستم جدید نیز کنترل‌پذیر خواهد بود، زیرا رتبه ماتریس  $Q$  برابر با ۸ است.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 21.9505 & 1.1758 & -12.3552 & -161.2449 & -99.5608 & 8.3663 & 433.5198 & -39.5037 \\ 4.8916 & 20.1188 & 6.7282 & 42.9608 & 80.2084 & -4.4403 & -190.1849 & 135.1463 \\ 0 & 0 & 0.9307 & -60.8236 & -64.9911 & -6.9428 & 289.4265 & 89.4681 \\ 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 2.4617 \\ 0 & 1.0000 & -1.8414 \\ 0 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} -0.0866 & -0.0280 & 0.0067 & -0.0823 & 0.1007 & 0.1032 & 0.1366 & 0.2148 \\ 0.0837 & 0.0758 & 0.0639 & 0.1341 & -0.0610 & -0.0969 & -0.1497 & -0.2654 \\ -0.0016 & -0.0331 & 0.0754 & -0.0634 & -0.0569 & -0.0803 & 0.0920 & 0.0372 \\ -0.0137 & 0.0021 & -0.0026 & 0.0016 & 0.0199 & 0.0123 & 0.0004 & -0.0044 \\ 0.0124 & 0.0012 & 0.0002 & 0.0066 & -0.0219 & -0.0252 & 0.0105 & 0.0007 \\ -0.0116 & -0.0063 & 0.0138 & 0.0011 & -0.0020 & 0.0279 & -0.0069 & -0.0118 \\ 0.0005 & -0.0004 & -0.0015 & 0.0011 & 0.0012 & -0.0040 & 0.0031 & -0.0010 \\ 0.0012 & -0.0002 & 0.0008 & -0.0005 & -0.0013 & 0.0071 & -0.0031 & -0.0021 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} 21.9505 & 1.1758 & -14.6464 & -11.5144 & 60.4290 & 25.4576 & -278.9662 & -259.7487 \\ 4.8916 & 20.1188 & 8.4421 & -69.0384 & -39.4648 & -17.2247 & 342.7583 & 299.8907 \\ 0 & 0 & 0.9307 & -60.8236 & -64.9911 & -6.9428 & 289.4265 & 89.4681 \end{bmatrix}$$

کنترلگر بهینه زمانی را با استفاده از تبدیلات تشابهی به فرم زیر بدست می‌آوریم:

$$F = \begin{bmatrix} -1.6243 & 0.0311 & -0.0311 & 0.4765 & 1.3742 & 1.6682 & 1.8732 & 4.4634 \\ 2.4434 & 0.8087 & 1.6492 & 1.5844 & -1.6710 & -1.7233 & -1.7631 & -4.4599 \\ 0.3711 & -0.3366 & -0.2086 & -0.3219 & 0.4007 & 0.0832 & 0.0353 & -0.1393 \end{bmatrix}$$

(۴۷-۴)

در صورتی که اغتشاش در هر گام تغییر کند، می‌توان همانند روش فوق سیستم را کنترل نمود.

**مثال ۲.** سیستم کنترل‌پذیر مثال ۱ را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad z(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

کنترلگر بهینه زمانی را با توجه تبدیلات تشابهی بصورت زیر بدست می‌آوریم:

$$F = \begin{bmatrix} -0.1685 & -1.0187 & -1.4307 & 0.3071 & -1.0150 & -2.1573 \\ 2.1236 & -3.3196 & 1.6422 & 0.8414 & 0.7110 & -3.6180 \end{bmatrix}$$



## فصل ۵

### نتیجه گیری

در این پایان نامه سیستم‌های کنترلی و ویژگی‌های این سیستم‌ها بصورت اختصار ارائه گردید و همچنین سیستم‌های گسسته خطی و ویژگی‌های کنترل پذیری، رویت پذیری و پایداری این سیستم‌ها بیان گردید. سپس روشی جدید جهت کنترل سیستم‌های گسسته خطی زمانی با اغتشاش ورودی با استفاده از ماتریس‌های افزوده و تبدیلات تشابهی ارائه گردید.

روش ارائه شده در این پایان نامه جهت کنترل سیستم‌های گسسته زمانی خطی همراه با اغتشاش با استفاده از ماتریس‌های افزوده و تبدیلات تشابهی می‌باشد که نسبت به روش‌های موجود دارای محاسباتی ساده-تر می‌باشد و در واقع یک سیستم دارای اغتشاش به یک سیستم بدون اغتشاش تبدیل می‌گردد. بدین گونه که سیستم کنترلی با اغتشاش ورودی را با یک سیستم بدون اغتشاش الحاق نموده و سیستم جدید را کنترل می‌نماییم.

همچنین در روش ارائه شده سیستم کنترل پذیر گسسته خطی دوم، دلخواه بوده، لذا به گونه‌ای تعیین می‌گردد تا سیستم نهایی همواره کنترل پذیر باشد. در نهایت با استفاده از تبدیلات تشابهی می‌توان کنترلگر بهینه زمانی را به گونه‌ای تعیین نمود تا سیستم کنترل پذیر باشد. برای نوشتن برنامه‌های این روش از نرم افزار متلب استفاده گردید.

امید است که مطالب این پایان نامه مورد توجه و استفاده دانشجویان و پژوهشگران علاقمند قرار گیرد.

# پیوست

## برنامه‌های کامپیوتری

```
n=input('enter n=');
m=input('enter m=');
A11=fix(10*rand(n,n))
B11=fix(10*rand(n,m))
pause
A22=fix(10*rand(n,n))
B22=fix(10*rand(n,m))
[n,m]=size(B11);
O=[];
C=[];
w=input('enter w=');
for i=1:n
    O(i,i)=0;
end
for i=1:n
    x0(i,1)=input(['Enter x0(',int2str(i),')=']);
    y0(i,1)=x0(i,1);
end
for i=1:n
    z0(i,1)=input(['Enter z0(',int2str(i),')=']);
    y0(n+i,1)=z0(i,1);
end
for j=1:w
    for i=1:n
        d0(i,1)=input(['Enter d0(',int2str(i),')=']);
        C(i,i)=d0(i,1)/x0(i,1);
    end
    A=[A11 C;O A22];
    B=[B11;B22];
    % REGL;
    [n,m]=size(B); %line 7
    r=n+m;
    Q=[B,A];
    T1=eye(n); %line 10
    % The Echelon form of Q
    % -----
    i=1;j=1; tol=1e-6;
    while ( i<=n ) & ( j<=r )
        [q,k]=max(abs(Q(i:n,j))) ; k=k+i-1;
        if (q<=tol)
            Q(i:n,j)=zeros(n-i+1,1);
            j=j+1;
        end
    end
end
```

```

else
    % perform the similarity operations
    % swap i-th row with k-th row:

    % o1

if i~=k
    Q([i,k],:)=Q([k,i],:);
    T1([i,k],:)=T1([k,i],:);
    Q(:, [i+m,k+m])=Q(:, [k+m,i+m]);
end

    % divide the pivot row

    % o2

    t=Q(i,j);
    Q(i,:)=Q(i,)/t;
    Q(:,i+m)=Q(:,i+m)*t;
    T1(i,:)=T1(i,)/t;
    % subtract multiples of the pivot row

    % o3
    if i~=n
    for k=i+1:n
        t=Q(k,i);
        if t~=0
            Q(k,:)=Q(k,)-t*Q(i,);
            Q(:,i+m)=Q(:,i+m)+t*Q(:,k+m);
            T1(k,:)=T1(k,)-t*T1(i,);
        end
    end
    end

end

    i=i+1 ;
    j=j+1;
end

end
% *****
% Now compute the Standard echelon form      !
% -----
s=1;
while s < n
    i=s+1 ;
    for j=i:r
        if Q(i,j)~=0
            for k=1:s
                if Q(k,j)~=0
                    t=Q(k,j);
                    Q(k,:)=Q(k,)-t*Q(i,);
                    T1(k,:)=T1(k,)-t*T1(i,);
                    Q(:,i+m)=Q(:,i+m)+t*Q(:,k+m);
                end
            end
        end
    end
end

```

```

                                end
                                break
                                end
                                end
                                end
                                s=s+1;
                                end
                                % *****
%                               choice=input(' do you want the kronecker invariants displayed,y/n
% ', 's')
%                               if choice=='y'
%                                 % kronk3

                                [n,m]=size(B);p=[];
                                P1=[];p1(m)=0;
                                l=1; j=m+1;
                                    for i=1:m,
                                        p(i)=1;p1(i)=0;
                                    end
                                    for i=m+1:n,
                                        k=j-m*1;
                                        check_k
                                        if Q(i,j)==1,
                                            check_p1
                                        else
                                            p1(k)=1;
                                            for j=i+1:n+m
                                                k=j-m*1;
                                                check_k
                                                if Q(i,j)==1,
                                                    check_p1
                                                    break
                                                else
                                                    p1(k)=1;
                                                end
                                            end
                                        end
                                    end
                                end
                                end
                                j=j+1;
                                end
                                disp('           These are the kronecker invariants ')
                                disp('           ***** ')
                                p

                                %                               end
%                               *****
%                               The vector companion form
                                for i=n:-1:m+1
                                    for k=i:r
                                        if Q(i,k)==1
                                            for j=k+1:r
                                                t=Q(i,j);
                                                Q(:,j)=Q(:,j)-t*Q(:,k);
                                                Q(k-m,:)=Q(k-m,:)+t*Q(j-m,:);
                                                T1(k-m,:)=T1(k-m,:)+t*T1(j-m,:);
                                            end
                                        end
                                    end
                                end

```

```

                                break
                                end
                                end
                                end
                                end
                                % *****
% choice=input('do you want the prim. vec comp form
displayed,y/n%', 's')
%   if choice=='y'
%   disp('   The standard Vector Companion form ')
%   disp('   ***** ')
%
%   Q
% end
% .....
disp('   This is the transformation matrix,T1')
disp('   *****')

                                T1
                                %
                                disp(' press any key to continue')
                                % *****
% pause
% The Feed-back matrix , F
B1=Q(:, [1:m]);A1=Q(:, [m+1:r])
B0=Q(1:m, 1:m);bo=inv(B0)
G=Q(1:m, m+1:r);F1=bo*G;G0=G;
Fp=F1*T1;
% *****
disp('   This is the primdry feedback law ')
disp('   ***** ')

Fp
% *****
%disp('   The closed loop matrix A+B*F ')
%disp('   ***** ')
gama=A-B*Fp
y1=gama*y0
pause
for j=1:n/2
    x1(j,1)=y1(j,1)
end
for i=n/2+1:n
    z1(i-n/2,1)=y1(i,1);
end
x0=x1
z0=z1
pause
end
% program for assigning eigenvalues,eigen.m
% *****
% D=[-1 0 0 0 0 ; 0 -2 1 0 0 ; 0 -1 -2 0 0; 0 0 0 -3 1 ; 0 0 0 -1 -3]
D=[];
for j=1:n
    landa(j)=input (['Enter landa(',int2str(j),')=']);
    end
%landa=[ 0 0 0 ]

```

```

for i=1:n
    D(i,i)= landa(i);
end
% D
%if c==0
    Acap=A1;
    Bcap=B1;
    newF=Fp ;
%end
ac=Acap+Bcap*F1;
acl=ac+D;
bcl=Bcap*bo;

Qc=[bcl acl];
%A=[0.95 0.49 0.46;0.23 0.89 0.02;0.61 0.76 0.82]
% The vector companion form
for i=n:-1:m+1
    for k=1:r
        if Qc(i,k)==1
            for j=k+1:r
                t=Qc(i,j);
                Qc(:,j)=Qc(:,j)-t*Qc(:,k);
                Qc(k-m, :)=Qc(k-m, :)+t*Qc(j-m, :);
            end
            break
        end
    end
end

end
end
G2=Qc(1:m,m+1:r);
glanda=Qc(:,m+1:r);
Fc=bo*G2*T1;
disp('          The feedback matrix which gives the desired
eigenvalues')
disp('
*****')
Kp=newF+Fc
%   disp('          with the closed-loop matrix ')
%   disp('          ***** ')
gamac=A+B*Kp;
disp('          checking the eigen values ')
disp('          ***** ')
v=eig(gamac)
[u1,v1]=eig(gamac);
c2=cond(u1)
disp('          Frobenius norm of feedback matrix ')
disp('          ***** ')
Normkp=norm(Kp, 'fro')
%   disp('          frobenious norm of closed-loop matrix ')
%   disp('          ***** ')
%   Normgama=norm(gamac, 'fro')

%   End of program for eigen

```

```

a      % Algorithm to obtain the kronecker invariants
      % *****
      [n,m]=size(B);p=[];
      P1=[];p1(m)=0;
      l=1; j=m+1;
          for i=1:m,
              p(i)=1;p1(i)=0;
          end
          for i=m+1:n,
              k=j-m*l;
              check_k
              if Q(i,j)==1,
                  check_p1
              else
                  p1(k)=1;
                  for j=i+1:n+m
                      k=j-m*l;
                      check_k
                      if Q(i,j)==1,
                          check_p1
                          break
                      else
                          p1(k)=1;
                      end
                  end
              end
              end
              j=j+1;
          end
      disp('          These are the kronecker invariants ')
      disp('          ***** ')
      p

%          o1.m
%      Swap i-th row with k-th row
      if i~=k
          Q([i,k],:)=Q([k,i],:);
          T1([i,k],:)=T1([k,i],:);
          Q(:, [i+m,k+m])=Q(:, [k+m,i+m]);
      end

%          o2.m
%      Divide the pivot row
      t=Q(i,j);
      if t~=0
          Q(i,:)=Q(i,+)/t;
          Q(:,i+m)=Q(:,i+m)*t;
          T1(i,:)=T1(i,+)/t;
      end

%          o3.m
%      Subtract multiples of the pivot row

```

```

    if i~=n
        for k=i+1:n
            t=Q(k,i);
            if t~=0
                Q(k,:)=Q(k,:)-t*Q(i,:);
                Q(:,i+m)=Q(:,i+m)+t*Q(:,k+m);
                T1(k,:)=T1(k,:)-t*T1(i,:);
            end
        end
    end
end

% Given an n by m matrix B , an n by n matrix A
% This program obtains :
% (1)- The Standard form
% (2)- The primary vector companion form
% (3)- The feedback matrix F
% (4)- The transformation matrix T
% (5)- The Kronecker invariants
% *****
%
t0=cputime;
disp('          This is the given plant matrix A')           %line 1
disp('          *****')                                     %line 2
          A                                                  %line 3
disp('          This is the given input matrix B')           %line 4
disp('          *****')                                     %line 5
          B                                                  %line 6
[n,m]=size(B);                                             %line 7
r=n+m;
Q=[B,A];
T1=eye(n);                                                 %line 10
% The Echelon form of Q
% -----
i=1;j=1; tol=1e-6;
while ( i<=n ) & ( j<=r )
    [q,k]=max(abs(Q(i:n,j))) ; k=k+i-1;
    if (q<=tol)
        Q(i:n,j)=zeros(n-i+1,1);
        j=j+1;
    else
        % perform the similarity operations
        % swap i-th row with k-th row:

        o1
        % divide the pivot row

        o2
        % subtract multiples of the pivot row

        o3
        i=i+1 ;
        j=j+1;
    end
end
end

```



```

% *****
% Now compute the Standard echelon form      !
% -----
s=1;
while s < n
    i=s+1 ;
    for j=i:r
        if Q(i,j)~=0
            for k=1:s
                if Q(k,j)~=0
                    t=Q(k,j);
                    Q(k,:)=Q(k,:)-t*Q(i,:);
                    T1(k,:)=T1(k,:)-t*T1(i,:);
                    Q(:,i+m)=Q(:,i+m)+t*Q(:,k+m);
                end
            end
            break
        end
    end
    s=s+1;
end
% *****
% choice=input(' do you want the kronecker invariants displayed,y/n
%','s')
%     if choice=='y'
%         % kronk3
%     end
% *****
% The vector companion form
for i=n:-1:m+1
    for k=i:r
        if Q(i,k)==1
            for j=k+1:r
                t=Q(i,j);
                Q(:,j)=Q(:,j)-t*Q(:,k);
                Q(k-m,:)=Q(k-m,:)+t*Q(j-m,:);
                T1(k-m,:)=T1(k-m,:)+t*T1(j-m,:);
            end
            break
        end
    end
end
% *****
% choice=input('do you want the prim. vec comp form
displayed,y/n%','s')
%     if choice=='y'
%         disp(' The standard Vector Companion form ')
%         disp(' ***** ')
%         Q
%     end
% .....
disp(' This is the transformation matrix,T1')
disp(' *****')

```

```

                                T1
%                                disp(' press any key to continue')
% *****
% pause
% The Feed-back matrix , F
B1=Q(:, [1:m]);A1=Q(:, [m+1:r])
B0=Q(1:m, 1:m);bo=inv(B0)
G=Q(1:m, m+1:r);F1=-bo*G;G0=G;
Fp=F1*T1;
% *****
disp('          This is the primdry feedback law ')
disp('          ***** ')

Fp
% *****
%disp('          The closed loop matrix A+B*F ')
%disp('          ***** ')
gama=A+B*Fp
% *****
%choice=input(' do you want to check the resultfeed,y/n ', 's')
%if choice=='y'
%    g=gama^p(1);
%    for i=1:n
%        for j=1:n
%            if abs(g(i,j))<tol
%                g(i,j)=0;
%            end
%        end
%    end
%end
%fprintf('          This is g=(A+B*F)^%g', p(1))
%disp('          ***** ')
%g
% *****
% generating parametric feed-back laws
%    q=fix(n/m);
%    if p(1)==q
%        disp('          The feed-back law is unique ! ')
%        disp('          ***** ')
%        disp('          The kronecker invariants are all
equal ')
%disp('          ***** ')
%    else
%        allfeeds
%    end
% *****
t1=cputime-t0

```

## مراجع و منابع

- [1] Ackermann, Jürgen. *Sampled-Data Systems*. New York: Springer-Verlag, 1985.
- [2] Aeyels, D., and J. Willems. "Pole Assignment for Linear Time-Invariant Second-Order Systems by Static Output Feedback," *IMA J. Math. Contr. Inform.*, 1991, Vol. 8, pp 267-274.
- [3] Aeyels, D., and J. Willems. "Pole Assignment for Linear Time-Invariant Systems by Periodic Memoryless Output Feedback," *Automatica*, 1992, Vol. 28, pp 1159-1168.
- [4] Aeyels, D., and J. Willems. "Pole Assignment for Linear Periodic Systems by Memoryless Output Feedback," *IEEE Transactions on Automatic Control*, April 1995, Vol. 40, No. 4, pp 735-739.
- [5] Åström, K., and B. Wittenmark. *Computer-Controlled Systems*, 2nd. ed. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1990.
- [6] Bander, D.J., and Laub.A.J., "The Linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems". *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol.AC-32, pp.672-688, 1987.
- [7] Calico, R., and W. Wiesel. "Control of Time-Periodic Systems," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Nov.-Dec. 1984, Vol. 7, No. 6, pp 671-676.
- [8] Calise, A., Wasikowski, M., and D. Schrage. "Optimal Output Feedback for Linear Time- Periodic Systems," *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Mar.-Apr. 1992, Vol. 15, No. 2, pp 416-423.
- [9] Chen, C. *Linear System Theory and Design*. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1984.
- [10] Cheng, Z., H. Hong, and J. Zhang. "The optimal regulation of generalized stat-space systems with quadratic cost". *Automatica*, vol. 24. No. 5. Pp 697-710, 1988.
- [11] Dai, L, "Singular Control systems", New York: Springer- Verlag. 1989. Vol. 118. *Lecture Notes in Control and Information Science*.
- [12] Fowler, L., Cole, D., Robertshaw, H., and V. Guirguitiu. "Individual Feedforward- Feedback Control of a Flexible Rotor Blade — A Comparison of Approaches," 1995 North American Conference on Smart Structures and Materials, February 1995, pp 423- 431.
- [13] Franklin, G., Powell, J., and M. Workman. *Digital Control of Dynamic Systems*, 2nd ed. New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1990.
- [14] Grasselli, O, and S. Longhi. "Disturbance Localization by Measurement Feedback for Linear Periodic Discrete-time Systems," *Automatica*, 1988, Vol. 24, No. 3, pp 375-385.
- [15] Hale, F. *Introduction to Control System Analysis and Design*, 2nd ed. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1988.

- [16] Karbassi, S.M., and H.A.Tehrani, *Parameterizations of the state feedback controllers for linear multivariable systems*, *Comp. Math. With Appl.*, 44 (2002).
- [17] Knospe, C., and J. Haviland. "Pulse Response Method for Vibration Reduction in Periodic Dynamic Systems," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1991, Vol. 15, No. 3, pp 782-785.
- [18] Nitzsche, F. and E. Breitbach. "A Study of the Feasibility of Using Adaptive Structures in the Attenuation of Vibration Characteristics of Rotary Wings," AIAA paper No. 92-2452, *Proceedings of the 33rd AIAA/ASME/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Part 3*, pp 1391-1402, April 1992.
- [19] Ogata, K. *Modern Control Engineering*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1990.
- [20] Sievers, L., and A. von Flotow. "Comparison and Extensions of Control Methods for Narrow-Band Disturbance Rejection," *IEEE Transactions on Signal Processing*, Oct. 1992, Vol. 40, No. 10, pp 2377-2391.
- [21] Sinha, S., Wu, D., Juneja, V., and P. Joseph. "Analysis of Dynamic Systems With Periodically Varying Parameters Via Chebyshev Polynomials," *Journal of Vibration and Acoustics*, Jan. 1993, Vol. 115, pp 96-102.
- [22] Sreedhar, J., and P. Van Dooren. "Pole Placement Via the Periodic Schur Decomposition," *Proceedings of the 1993 American Control Conference*, June 1993, pp 1563-1567.
- [23] Sreedhar, J., and P. Van Dooren. "On Finding Stabilizing State Feedback Gains for a Discrete Time-Periodic System," *Proceedings of the 1994 American Control Conference*, June 1994, Vol. 1, pp 1167-1168.
- [24] Walgama, K. and J. Sternby. "A Feedforward Controller Design for Periodic Signals in Non-Minimum Phase Processes," *International Journal of Control*, 1995, Vol. 61, No. 3, pp 695-718.
- [25] Widrow, B., McCool, J., Larimore, M., and C. Johnson, Jr. "Stationary and Nonstationary Learning Characteristics of the LMS Adaptive Filter," *Proceedings of the IEEE*, Aug. 1976, Vol. 64, No. 8, pp 1151-1162.
- [26] Widrow, B., and S. D. Stearns. *Adaptive Signal Processing*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1985.
- [27] Widrow, B., and E. Walach. "On the Statistical Efficiency of the LMS Algorithm with Nonstationary Inputs," *IEEE Transactions on Information Theory*, March 1984, Vol. IT-30, No. 2, pp 211-221.
- [28] Wolovich, W. *Automatic Control Systems*. New York: Saunders College Publishing, 1994.
- [29] Zhou, K., Doyle.J.C., and Glover.K. "Robust and optimal control". Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1996.
- [30] Zhu, J, S.Ma, Z. Cheng. "singular LQ problem for descriptor systems" in *proc. 38th IEEE Conf. Decision Control*, Phoenix, AZ, 1999. pp. 4098-4099.

اصول کنترل مدرن، دکتر علی خاکی صدیق، چاپ سوم، مؤسسه انتشارات و چاپ دانشگاه تهران، ۱۳۸۲. [۳۱]

- [۳۲] سیستم‌های کنترل دیجیتال، کاتسو هیکو اوگاتا، ترجمه دکتر پرویز جبه‌دار مارالانی، دکتر علی خاکی صدیق، چاپ اول، مؤسسه انتشارات و چاپ دانشگاه تهران، ۱۳۷۳.
- [۳۳] مهندسی کنترل، کاتسو هیکو اوگاتا، ترجمه محمود دیانی، چاپ دوم، انتشارات مؤسسه علمی و فرهنگی «نص»، ۱۳۸۴.

## **Abstract:**

*In this thesis a new method for controlling the time discrete systems with disturbance in input by using of adjoint matrices and similarity transformations have been presented that is more simple than existing methods computationally.*

*And in fact a system with disturbance turns into a system without disturbance. Also in presented method, the second linear discrete controllable system may be arbitrary so it is determined as the system is always controllable.*

*Therefore by using of the similarity transformations, the time optimized controller is specified as system always be controllable.*

*Keywords: Parametric feedback, Eigenvalue assignment, Linear discrete time systems, State-Feedback, Disturbance rejection.*



**Shahrood University of Technology**  
**Faculty of Mathematics**

## **Master of Science Thesis**

**Control of Linear Discrete Time Systems with Disturbance Input**

**Davood Daliri**

Supervisor:

**Dr. Hojjat Ahsani Tehrani**

**February – 2012**