بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده :ریاضی

گروه: ریاضی کاربردی

مطالعه مسئله رنگ آمیزی گراف‌های فازی

دانشجو: صفر محمد نوری

استاد راهنما :

آقای دکتر صادق رحیمی شعرباف

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

دی ماه ۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده :ریاضی

گروه :ریاضی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

صفر محمد نوری

تحت عنوان:

مطالعه مسئله رنگ آمیزی گراف فازی

در تاریخ ۹۰/۱۰/۱۲ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی مورد ارزیابی و با درجه .... مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
دکتر صادق رحیمی شعرباف		----------------	
-------------------- :		----------------	

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
دکتر میثم علیشاهی		دکتر احمد نزاکتی	
دکتر مرتضی زاهدی			

سپاس از دو وجود مقدس

آنان که ناتوان شدند تا به توانایی برسم

موهایشان سپید گشت تا رو سفید شوم

و عاشقانه سوختند تا گرمابخش وجود و روشنگر راهم باشند

تقدیم به

پدرم

و

مادرم

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس پروردگار یکتا را که لطف و کرم بی کرانش من را نیز در بر گرفت تا به وسع توان خویش گامی کوچک در گستره علم و معرفت بردارم و میسر گشت تا از خرمن دانش و تجربه بزرگان و نیک اندیشان بهره ببرم.

اکنون که به یاری خداوند متعال، این دوره پرخاطره از دوران تحصیلم را به پایان رسانده ام، هرچند واژه ها یارای آن نیست که لطف و محبت و بزرگواری آنانی را که در تمام دوران زندگی ام جرعه نوش دریای مهر و محبتشان بوده ام به تصویر بکشم، اما به رسم ادب و احترام بوسه بر دستانشان زده و بر خود واجب می دانم، زحمات پدر و مادر مهربانم را که همواره راه گشای مشکلاتم در تمام مراحل زندگی بوده اند ارج نهاده و مراتب تشکر قلبی و باطنی را از الطاف و مهربانی های آنان ابراز دارم. همچنین لازم می دانم که از زحمات فراوان اساتید توانمندم آقای دکتر رحیمی که با راهنمایی ها و نظرات ارزنده و صبر و حوصله فراوان، نقش مهمی در به ثمر رساندن این کار داشته اند صمیمانه تقدیر و تشکر نمایم، بی تردید انجام این پایان نامه بدون همکاری و راهنمایی ایش امکان پذیر نبود. همچنین بر خود لازم می دانم از زحمات آقایان دکتر فتحعلی، دکتر جعفری نیز تشکر ویژه نمایم که در انجام این پایان نامه بنده را یاری نمودند. در اینجا همچنین لازم می دانم از اعضای خانواده عزیزم و مخصوصاً پدر و مادرم، همچنین از دوستان عزیزم آقایان خوجلی، جانفدا، امیدیان، لندرانی، گلپایگانی و آقای الهی که مایه دلگرمی من بوده و متحمل زحمات زیادی شدند نهایت سپاسگزاری را داشته باشم، و برای آنها بهترین ها را آرزو می کنم.

صفر محمد نوری

دی ماه ۱۳۹۰

تعهد نامه

اینجانب **صفر محمد نوری** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** دانشکده **ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **مطالعه مسئله رنگ آمیزی گراف فازی** تحت راهنمائی دکتر **صادق رحیمی شعر باف** متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.

- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شـده اسـت ضـوابط و اصـول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

چکیده

منطق فازی برای اولین بار در سال ۱۹۶۵ توسط دکتر لطفی زاده مطرح شد. معمولاً شیوه‌هایی که برای طراحی و مدل‌سازی یک سیستم بکار می رود نیازمند ریاضیات پیچیده و پیشرفته‌ای است که با استفاده از مقادیر زبانی و دانش فرد خبره قابل بیان هستند. با اعمال مفهوم فازی بر روی رئوس و یال‌های گراف، ابهام در مدل بندی بسیاری از مسائل با استفاده از گراف فازی رفع می‌گردد.

این تحقیق به مطالعه رنگ آمیزی گراف‌های فازی می‌پردازد. برای گراف $G=(V,E)$، تابع رنگ آمیزی C، یک مقدار عدد صحیح $C(i)$ را به هر رأس $i \in V$ طوری تخصیص می‌دهد که یال‌های مجاور $\{i, j\} \in E$، رنگ‌های یکسانی نگیرند. در این تحقیق ضمن بیان رنگ آمیزی گراف‌های فازی، برای دسته بندی مدل‌هایی که در آن دسته‌ها ارزش نزولی دارند، مجموعه رنگ‌های فازی نزدیک به یک تعریف شده است و با ارائه مفهوم رنگ آمیزی مجموع، برای گراف فازی $\widetilde{G} = (V, \widetilde{E})$، مسئله بهینه

سازی دسته بندی رنگی توسعه یافته فازی بیان شده است. همچنین کاربرد این مسئله در زمان بندی امتحانات[۱] بیان گشته که در آن رنگ‌های فازی، ارزش زمان برگزاری امتحانات است. نتایج محاسباتی بر روی برخی گراف‌های فازی برای مقایسه نیز آورده شده است. برای گراف‌های فازی وزن دار $\tilde{G}=(V,\tilde{E},W)$، رنگ آمیزی بازه‌ای مورد بررسی واقع گردیده و یک رنگ آمیزی بازه‌ای[۲] بر اساس سطح شدت یال‌های متصل به رئوس ناسازگار بیان و کاربرد آن در مسئله چراغ ترافیک[۳] ارائه شده است. یک الگوریتم دقیق برای بدست آوردن عدد رنگی[۴] و تابع رنگ آمیزی بازه‌ای معرفی و برخی نتایج برای آزمایش سرعت الگوریتم بیان گردیده است. برای بدست آوردن جواب بهتر ، رنگ آمیزی دوری[۵] تعریف شده و یک الگوی برنامه‌ی خطی برای یافتن عدد رنگی و تابع مربوطه[۶] ارائه شده است.

کلمات کلیدی: نظریه فازی، نظریه گراف، رنگ آمیزی گراف، بهینه سازی، مسائل زمان‌بندی.

مقالات مستخرج

۱ -نوری. صفر محمد، رحیمی. شعر باف. صادق، ۱۳۸۹، برخی کاربردهای رنگ آمیزی گراف برای مسائل بهینه سازی، اولین همایش الکترونیکی نقش ریاضی در توسعه علوم، مجتمع آموزش عالی جهرم

۲-نوری. صفر محمد، رحیمی. شعر باف. صادق، ۱۳۹۰، بهینه سازی زمان‌بندی امتحانات با استفاده از رنگ آمیزی گراف، یازدهمین کنفرانس سیستم‌های فازی ایران، ص ۹، زاهدان

[۱] -Exam scheduling
[2] -Interval coloring
[3] -Traffic problem
[4] -Chromatic number
5- Circular coloring

فهرست مطالب

فصل اول: کلیات تحقیق

فهرست اشکال

فهرست جداول

فصل اول

کلیات تحقیق

۱-۱- تاریخچه رنگ آمیزی گراف

مفهوم گراف در سال ۱۷۳۶ توسط لئونارد اویلر با طرح راه حلی برای مسئله پل کونیسبرگ[1] ارائه شد و به تدریج توسعه یافت. گراف‌ها امروزه کاربرد زیادی در برخی علوم دارند. از گراف‌ها در شبکه‌ها، طراحی مدارهای الکتریکی، آنالیزسیستم‌ها، اقتصاد، حمل و نقل، تحقیق در عملیات، اصلاح مسیر خیابان‌ها و برای حل مشکل ترافیک و.... استفاده می‌کنند.

رنگ آمیزی گراف یکی از مهمترین مسائل بهینه سازی ترکیبیات است، بسیاری از مسائل کاربردی مورد مطالعه، می‌تواند به عنوان مسائل رنگ آمیزی، مدل بندی شود. فرم عمومی این مسائل، مستلزم تشکیل یک گراف با رئوسی که نماینده‌ی بخش‌های مورد مطالعه و یال‌ها، ارتباط دهنده‌ی بین این بخش‌ها است. تاریخچه رنگ آمیزی گراف از مسئله چهار رنگ[2]است، به این صورت که آیا می‌توان کشورهای هر نقشه را با حداکثر چهار رنگ، رنگ آمیزی کرد به طوری که دو کشور با مرز مشترک رنگ یکسان نگیرند [۱].

این مسئله توسط فرانک گاثری[3] در سال ۱۸۵۲ مطرح گردید و بار اول در سال ۱۸۷۹ توسط کمپ[4] اثبات گردید که اثبات وی در سال ۱۸۹۰ توسط هی‌وود[5]رد گردید و سرانجام در سال ۱۹۷۷ توسط دانشمندانی چون اپل[6]، هاکن[7]، کچ[8] اثبات گردید [۲].

اساس مسئله رنگ آمیزی گراف، دسته بندی رئوس گراف است به بخش‌های کوچک، با این محدودیت که رأس‌های ناسازگار در یک گروه یکسان قرار نگیرند.

گراف $G=(V,E)$ را در نظر بگیرید، یک تابع رنگ آمیزی، یک نگاشت $C: V \rightarrow N$ است که $C(i)$ رنگ رأس i است به این صورت که دو رأس مجاور، نمی‌توانند رنگ یکسان بگیرند یعنی اگر $\{i,j\}\in E$ آنگاه

[1]-Konigsberg bridge
[2]-Color four problem
[3]-F.Gathree
[4]-Kempe
[5]-Heawood
[6]-Appel
[7]-Haken
[8]-Koch

که رئوس i , j رئوس ناسازگار نامیده می‌شود. k-رنگ آمیزی C^k، یک تابع رنگ آمیزی با $C(i)\neq C(j)$ حداکثر k رنگ مختلف به صورت زیر است:

$$C^k : V \to \{1,\ldots,k\}$$

یک گراف، k-رنگ پذیر[1] است اگر یک k-رنگ آمیزی را بپذیرد، مینیمم مقدار k که G، k-رنگ پذیر باشد عدد رنگی G نامیده می‌شود و با $\chi(G)$ نشان داده می‌شود [۲].

همچنین دو نوع دیگر از رنگ آمیزی به صورت زیر تعریف می‌شود:

رنگ آمیزی یالی[2]: k-رنگ آمیزی یالی G، تخصیص k رنگ k ،...،۱،۲،۳ به یال‌های G به طوری که یال‌های متلاقی، همرنگ نباشند [۳].

رنگ آمیزی کلی[3]: k -رنگ آمیزی کلی G، تخصیص k رنگ k ،...،۱،۲،۳ به رئوس و یال‌های G به طوری که رئوس مجاور و یال‌های متلاقی و یال‌های متصل به رئوس، رنگ یکسان نگیرند [۳].

مسئله رنگ آمیزی گراف[4] شامل یافتن عدد رنگی گراف و تابع رنگ آمیزی مربوطه است. این مسئله از مسائل Np-سخت است [۴].

بخشی از کاربردهای مسئله رنگ آمیزی در علوم مدیریت است. کاربردهای معمولی شامل سیم کشی مدارهای چاپی، تخصیص منابع، مسئله تخصیص فرکانس و انواع گوناگونی از مسائل زمان بندی و تخصیص ثبات کامپیوتر می‌باشد [۲]. در این مسائل هدف، مینیمم کردن تعداد رنگ‌های تخصیص یافته به رئوس گراف است به طوری که رئوس مجاور رنگ‌های متفاوتی می‌گیرد و رئوس، نماینده‌ی بخش‌های معین است. در بعضی از شرایط، مدل بندی برخی مسائل، برای رنگ آمیزی، پیچیده است و روش‌های مرسوم برای حل آن بعضاً ناکارامد و محدود است و نیازمند استفاده از ابزارهای دیگر است.

---

[1]-k -colored
[2]-Edge coloring
[3]-Total coloring
[4]-Graph coloring problem

یک توسیع از مسائل رنگ آمیزی روی مفهوم ناسازگاری بین رئوس گراف است. دو رأس i ,j سازگار است اگر $\{i, j\}\notin E$ و ناسازگار است اگر $\{i, j\}\in E$ به هر حال در بسیاری از موقعیت‌های واقعی این ناسازگاری قطعی نیست و ناسازگاری می‌تواند درجات مختلفی داشته باشد و در حالت قطعی درجه شدت رئوس گراف صفر یا یک است که این درجه شدت در بسیاری از موقعیت‌های واقعی می‌تواند سطوح مختلفی داشته باشد.

این تحقیق روی مفهوم تئوری مجموعه‌های فازی بنا نهاده شده است.

۱-۲ - تاریخچه گراف فازی

در این زیرقسمت مفهوم مجموعه فازی و تاریخچه گراف‌های فازی بیان می‌شود و نحوه نمایش مجموعه فازی و انواع گراف فازی مورد استفاده در این تحقیق، مورد بحث واقع شده است.

۱-۲-۱ مجموعه های فازی

مجموعه فازی $\tilde{A}$ روی مجموعه X، مجموعه‌ای از زوج مرتب به صورت $\{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) / x \in X\}$ است که X مجموعه مرجع و ناتهی است و $\mu_{\tilde{A}}(x) : X \to [0,1]$ تابع عضویت[1] است که درجه تعلق x به A است [۲].

هر مجموعه، یک صفت مشخص کننده مربوط به خود را دارد. معیار عضویت عناصر در مجموعه، صفت مشخص کننده مجموعه است و هر عنصر اگر دارای آن صفت باشد عضو مجموعه و در غیر این صورت خارج از مجموعه است. این معیار عضویت را تابع عضویت می‌نامیم و با $\mu_{\tilde{A}}(x)$ نشان می‌دهیم، که در صورت تعلق x به A این مقدار یک و در غیر این صورت صفر است. در منطق قطعی ارزش هر گزاره می‌تواند درست یا نادرست باشد که کامپیوتر آن را با یک و صفر نشان می‌دهد [۵].

[1]-Membership function

در زندگی روزمره، وقایع و حوادث را توسط گزاره‌هایی مثل "امروز هوا ابری است"، " امروز من ساعت ۴ می‌آیم"و... بیان می‌کنیم. در این موارد تابع عضویت نمی‌تو.اند به صورت صفر و یک عمل کند، تا چه حد هوا ابری است، مثلا یک روز آسمان کاملا ابری باشد تابع عضویت ابری بودن را یک می‌گیریم اگر کاملا صاف باشد درجه ابری بودن را صفر می‌گیریم، اما اگر یک روز نیمه ابری باشد آنگاه نمی‌توانیم از منطق قطعی استفاده کنیم مجبوریم یک درجه عضویت بین صفر و یک، به میزان ابری بودن بدهیم [۵].

در مدل بندی سیستم‌های پیچیده در دنیای واقعی ممکن است اطلاعات ما دقیق نباشد. یعنی برخی اطلاعات مربوط به مسئله معین نیست، که در این سیستم‌ها استفاده از تئوری فازی می تواند کارساز باشد.

در تئوری فازی به طور کلاسیک مجموعه‌ی سطح شدت I به صورت بازه‌ی [۰, ۱] تعریف می‌شود به طوری که $\mu_A(x)=0$ نشان دهنده‌ی عدم تعلق x به A است و $\mu_A(x)=1$ نشان دهنده‌ی تعلق اکید x به A است و هر مقدار میانه با یک درجه‌ی عضویت به A متعلق است، به هر حال مجموعه I می‌تواند یک مجموعه گسسته به صورت $I=\{0,1,\dots,k\}$ متشکل از k صفت بیانی باشد. عبارت $\mu_A(x) \prec \mu_A(x')$ نشان می‌دهد درجه عضویت x به A از درجه عضویت x' به A کمتر است، به طور کلی مجموعه I می‌تواند هر مجموعه‌ی مرتب نه لزوما عددی باشد برای مثال I می‌تواند به صورت: $I=$ {پوچ, ضعیف, متوسط, قوی, کلی} یا به طور معادل $I=\{n,l,m,h,t\}$ باشد [۲].

۱-۲-۲ گراف‌های فازی

اولین تعریف از گراف فازی توسط کافمن[1] (۱۹۷۷) پیشنهاد شد که مبتنی بر روابط فازی بیان شده

[1] Koefman

توسط لطفی زاده (۱۹۷۵) بود، همچنین رزنفلد[1] (۱۹۷۶) تعریفات شامل رئوس فازی و یال‌های فازی را بیان کرده بود [۱]. از آن پس در بسیاری از کتاب‌ها و مقالات در مورد گراف‌های فازی بحث شد و بدین گونه گراف‌ها به عنوان یکی از پر کاربردترین ابزار حل مسائل بهبود یافت و بسیاری از مسائل بهینه سازی توسط گراف‌های فازی مورد مطالعه قرار گرفت [۶].

یک نوع از گراف فازی به این صورت است که مجموعه یال‌های آن فازی و رئوس آن غیر فازی باشند. نمایش این گراف به صورت $\tilde{G}=(V,\tilde{E})$ است، به طوری که V مجموعه رئوس قطعی و $\tilde{E}$ مجموعه یال‌های فازی است که به وسیله ماتریس $\mu=(\mu_{ij})_{i,j\in V}$ مشخص می‌شود:

$$\mu_{ij}=\mu_{\tilde{E}}(\{i,j\}) \quad \forall i,j\in V \quad i\neq j$$

$\mu_{\tilde{E}}:V\times V\to I$ یک تابع عضویت یال‌های فازی گراف است، هر عضو $\mu_{ij}\in I$ سطح شدت یال $\{i,j\}$ برای هر $i,j\in V$ را نشان می‌دهد که $i\neq j$، این نوع گراف فازی را به صورت $\tilde{G}=(V,\mu)$ هم نشان می‌دهند. در این گراف‌ها شدت رئوس قطعی و صفر یا یک است و ارزش همه رئوس یکسان است و سطح شدت تعلق یال‌ها به رئوس از داخل مجموعه سطح شدت I است. در این نوع گراف‌ها اگر رئوس گراف وزن دار باشد گراف فازی وزن‌دار را به صورت $\tilde{G}=(V,\mu,W)$ نمایش می‌دهیم. نوع دیگری از گراف فازی که در آن مجموعه رئوس و مجموعه یال‌ها هر دو فازی هستند به صورت $\tilde{G}=(\tilde{V},\tilde{E})$ نمایش می‌دهیم، به طوری که $\tilde{V}$ مجموعه رئوس فازی و $\tilde{E}$ مجموعه یال‌های فازی است که ماتریس آن بیان شد، مجموعه رئوس فازی $\tilde{V}$ به وسیله بردار $\sigma=(\sigma_i)_{i\in V}$ مشخص می‌شود:

$$\sigma_i=\sigma_{\tilde{V}}(i) \quad \forall i\in V$$

$\sigma_{\tilde{V}}:V\to I$ تابع عضویت رئوس فازی گراف است. هر عضو σ_i نشان دهنده‌ی سطح شدت رأس $i\in V$ است، این نوع گراف فازی را به صورت $\tilde{G}=(\sigma,\mu)$ هم نشان می‌دهند.

[1] Rosenfeld

مجموعه سطح شدت I به طور خطی مرتب شده است به طوری که عبارت $\mu_{ij} \prec \mu_{i'j'}$ یعنی سطح شدت یال $\{i, j\}$ از سطح شدت یال $\{i', j'\}$ پایین تر است و عبارت $\sigma_i \prec \sigma_{i'}$ یعنی سطح شدت رأس i از سطح شدت رأس i' پایین تر است.

گراف فازی $\tilde{G} = (\sigma, \mu)$ تعمیمی از یک گراف قطعی $G=(V,E)$ است که در آن $I=\{۰, ۱\}$ و μ, σ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_i = \begin{cases} 1 & if \quad i \in V \\ 0 & o.w \end{cases} \quad \text{و} \quad \mu_{ij} = \begin{cases} 1 & if \quad \{i, j\} \in E \\ 0 & otherwhere \end{cases}$$

۱-۳-تاریخچه رنگ آمیزی گراف‌های فازی

با توجه به اینکه قدمت گراف فازی کمتر از ۴ دهه می‌باشد و یک موضوع جدید تلقی می‌شود رنگ آمیزی این گراف‌ها موضوع بسیار جدیدی است. اولین بار این رنگ آمیزی توسط نویسندگانی چون اصلاحچی و اونق (۲۰۰۴) تحت عنوان رنگ آمیزی فازی گراف فازی مطرح گردید و این موضوع در سال ۲۰۰۵ به طور خاص تر تحت عنوان رنگ آمیزی گراف های فازی توسط نویسندگانی چون مونز[۱]-اورتینو[۲]-رامیرز[۳] و یانز[۴] ارائه شد و تا کنون این رنگ آمیزی از جنبه‌های گوناگون مورد توجه واقع شده است [۲].

[1] -Munez
[2] -Ortuno
[3] -Ramirez
[4] -Yanez

۱- ۴- ضرورت تحقیق

اساس کار در رنگ آمیزی رأسی گراف که مبحث این تحقیق می‌باشد دسته بندی کردن رئوس است به طوری که رئوسی که در هر دسته قرار می‌گیرند با یکدیگر سازگار باشند و تعداد دسته‌ها حداقل باشد. رئوس و ناسازگاری در مدل گراف می‌تواند هر چیزی باشد که بستگی به مسئله مورد بررسی دارد. مثلا در مسئله زمان بندی امتحان، رئوس گراف، امتحان و درجه یا شدت سخت بودن امتحان، درجه ناسازگاری آن است و در مسئله چراغ ترافیک، مسیرهای ترافیکی، رئوس گراف و برخورد دو مسیر ترافیکی یال ناسازگار ایجاد می‌کند و بسیاری از مسائل رنگ آمیزی دیگر. در برخی از این مسائل استفاده از مدل گراف قطعی برای رنگ آمیزی بسیار محدود کننده است.

در رنگ آمیزی گراف، رنگ‌های تخصیص یافته به رئوس، ممکن است رنگ زمان یا مکان یا چیزهای دیگری باشد. اگر در یک رنگ آمیزی، رنگ نشان دهنده‌ی زمان باشد، رنگ آمیزی با عنوان مسائل زمان بندی[۱] مطرح می‌شود. اگر زمان به صورت مدت دار و پویا باشد آنگاه با رنگ آمیزی بازه‌ای سرو کار داریم که به هر رأس، یک مدت زمان تخصیص می‌دهد به طوری که رئوس مجاور، تداخل نداشته باشند.

در این تحقیق به دو مسئله از مسائل زمان بندی می‌پردازیم. در رنگ آمیزی بازه‌ای، هدف پیدا کردن طول مدت زمانی است که عمل تمام رئوس در آن مدت زمان، یک بار انجام شود. اگر مدل مورد بررسی تکرار پذیر باشد آنگاه رنگ آمیزی دوری نتیجه بهتری می‌دهد که این مبحث با مفهوم رنگ آمیزی ستاره‌ای[۲] در سال ۱۹۸۸ توسط وینس[۳] معرفی شد.

[1]-Scheduling problem
[2]-Star coloring
[3]-Vince

۱-۵- ساختار تحقیق

در فصل اول، کلیاتی از تاریخچه تحقیق و ضرورت انجام آن بیان شد و در فصل دوم مفاهیم پایه‌ای گراف‌های قطعی و رنگ آمیزی رأسی آن بیان شده است و در فصل سوم به رنگ آمیزی گراف‌های فازی پرداخته شده است.

رنگ آمیزی توسعه یافته (d,f)[1] از گراف‌های فازی $\tilde{G}=(V,\tilde{E})$، که در آن d اندازه عدم تشابه[2] رنگ‌های تخصیص یافته به گراف است و f یک تابع مقیاس[3] برای سطح شدت یال‌های فازی است.

در مسئله رنگ آمیزی گراف به طور کلی پیدا کردن مینیمم دسته بندی یا به عبارتی عدد رنگی، دارای اهمیت است و تابع رنگ آمیزی که هر بخش را در کدام گروه قرار می‌دهد اهمیتی ندارد، اما شرایط برخی از مسائل رنگ آمیزی، طوری است که در آن رنگ های تخصیص یافته به رئوس، ارزش نزولی دارند و رنگ اول بیشترین ارزش را دارد و رنگ آخر کمترین ارزش را دارد، در فصل چهار برای این مسائل یک مجموعه فازی نزدیک به یک بیان شد و مفهوم رنگ آمیزی مجموع توسعه یافته برای رنگ آمیزی توسعه یافته (d,f) بیان شد که با استفاده از این رنگ آمیزی، مسئله بهینه سازی دسته بندی رنگی توسعه یافته ارزش فازی با رنگ‌های فازی نزدیک به یک مطرح و حل گردید و کاربرد این مسئله در زمان بندی امتحانات ارائه گردید و نتایج مقایسه‌ای بین رنگ آمیزی مجموع توسعه یافته و رنگ آمیزی توسعه یافته برای گراف فازی $\tilde{G}=(V,\tilde{E})$ برای چندین حالت برای گراف‌ها به صورت تصادفی آورده شده است.

در فصل پنچ، رنگ آمیزی بازه‌ای (In, f) برای گراف‌های وزن دار فازی تعریف می‌شود که یک رنگ آمیزی بازه‌ای است که مقدار اشتراک مجاز بر مبنای درجه شدت یال‌های متصل به رئوس ناسازگار می‌باشد و طول بازه‌ها متناسب با وزن رئوس است که برای محاسبه تابع این رنگ آمیزی بازه‌ای و عدد

[1]-Extended coloring of (d, f)
[2]-Dissimilarly measure
[3]-Scale function

رنگی مربوطه یک الگوریتم دقیق ارائه شده است و برخی نتایج بر روی تعدادی گراف‌ها به منظور آزمایش سرعت الگوریتم بیان شده است و یک الگوی برنامه خطی برای حالت دوری این رنگ آمیزی بیان می‌شود که کاربرد زیادی در مسئله چراغ ترافیک دارد.

فصل دوم

مفاهیم گراف و رنگ آمیزی راسی گراف

مقدمه

موضوع مورد بحث این فصل به طور کلی رنگ آمیزی رأسی گراف می‌باشد که برای مقدمه ابتدا به تعاریف و مفاهیم اساسی گراف پرداخته می‌شود که این مفاهیم به نحوی در تحقیق مورد استفاده واقع شده است، سپس به رنگ آمیزی رأسی گراف پرداخته می شود که می توان گفت اساس این تحقیق به شمار می‌رود. در زیر بخش‌های سوم و چهارم، رنگ آمیزی رأسی بازه‌ای و دوری گراف قطعی بیان می‌شود که اساساً در فصل آخر این تحقیق، برای بسط این مفاهیم به گراف فازی مورد استفاده واقع می‌شود.

۲-۱- تعاریف و مفاهیم پایه‌ای گراف

در این بخش تعاریف ومفاهیم پایه‌ای گراف مربوط به تحقیق بیان می‌شود.

تعریف۲-۱-۱ یک ساختار دوتایی به صورت $G=(V,E)$ را که در آن $V=\{v_1,v_2,v_3,..v_n\}$ مجموعه‌ای متناهی که عناصر آن را رأس[۱] و مجموعه $E=\{e_1,e_2,e_3,..e_m\}$ به صورت زوج‌های $e_k=(v_i,v_j)$ که آنرا یال[۲] می نامند گراف[۳] اطلاق می‌شود [۷].

تعریف ۲-۱-۲ هر دنباله به صورت $v_1e_1v_2e_2v_3e_3...v_{k+1}$ را یک گشت[۴] به طول k می‌نامیم [۷].

تعریف ۲-۱-۳ گشتی را که یال تکراری نداشته باشد مدار[۵] می‌نامیم [۷].

[1]-Vertex
[2]-Edge
[3]-Graph
[4]-Walk
[5] -Circuit

تعریف ۲-۱-۴ مسیر[1]، گشتی است که در آن تکرار رأس و یال مجاز نباشد [۷].

تعریف ۲-۱-۵ یک مسیر که در آن رأس ابتدایی و انتهایی آن یکسان باشد، دور[2] نامیده می شود [۷].

تعریف ۲-۱-۶ گرافی که بین هر دو رأس آن یک مسیر وجود داشته باشد، گراف همبند[3] نامیده می‌شود [۷].

تعریف ۲-۱-۷ گراف H زیرگراف[4] G است، اگر $V(H) \subseteq V(G), E(H) \subseteq E(G)$ وقتی $H \subseteq G$ اما $H \neq G$، می‌نویسیم $H \subset G$ و H را زیرگراف سره G می‌نامیم [۸].

تعریف ۲-۱-۸ $d_G(v)$ درجه رأس v در G است که تعداد یال‌های G است که بر v واقع است. مینیمم و ماکزیمم درجه‌های رأس‌های G را به ترتیب با Δ, δ نشان می‌دهند [۸].

افرازی از V به زیرمجموعه‌های ناتهی $V_1, V_2, ..., V_w$ وجود دارد به طوری که دو رأس u, v همبندند اگر و تنها اگر u, v هر دو متعلق به یک مجموعه V_i باشند. زیرگراف‌های $G[V_1], G[V_2], ..., G[V_w]$ را مؤلفه‌های G می‌نامند. اگر G دارای یک مولفه باشد، G همبند است، در غیر این صورت G ناهمبند است [۸].

تعریف ۲-۱- ۹ مجموعه مستقل، مجموعه از رئوس گراف است که هیچ دو رأس از آن در گراف مجاور نباشد [۹].

تعریف ۲-۱-۱۰: مجموعه $S \subseteq V$ را یک مجموعه مستقل ماکزیمال[5] برای گراف $H=(V,E)$ گوئیم هرگاه اولاً S یک مجموعه مستقل باشد و ثانیاً به ازای هر رأس $v \notin S$, $S \cup \{v\}$، یک مجموعه مستقل نباشد [۹].

1-Path
2 -Cycle
3 -Connected graph
4 -Sub graph
5- Maximal independent set

تعریف ۲-۱-۱۱ گراف بازه‌ای[1] به گراف‌هایی اطلاق می شود که رأس‌های آن بازه‌های اعداد می‌باشند و دو رأس مجاورند هر گاه بازه‌های متناظر، اشتراک غیر تهی داشته باشند [۷].

تعریف ۲-۱-۱۲ برای هر گراف یک ماتریس مجاورت[2] موجود است که با $A(G)=[a_{ij}]$، نشان می‌دهند که در آن a_{ij} تعداد یال‌هایی است که v_i و v_j به هم متصل می‌کنند، که ماتریسی متقارن است [۸].

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \{v_i v_j\} \in E \\ 0 & otherwhere \end{cases}$$

تعریف ۲-۱-۱۳ برای هر گراف، یک ماتریس وقوع[3] موجود است که با $M(G)=[m_{ij}]$، نشان می‌دهند که در آن m_{ij} تعداد دفعاتی است که v_i بر e_j واقع می‌شود [۸].

۲-۲ تعاریف و مفاهیم رنگ آمیزی رأسی گراف

در این قسمت تعاریف و مفاهیم پایه‌ای رنگ‌آمیزی رأسی گراف مربوط به تحقیق بیان می‌شود.

تعریف ۲-۲-۱ k- رنگ آمیزی رأسی گراف G، تخصیص k رنگ ۱،۲،۳،...، k به رأس‌های G است، به طوری که هیچ دو رأس مجاور متمایز، دارای یک رنگ نباشند. لذا k-رنگ آمیزی رأسی گراف بدون طوقهٔ G، افراز $(v_1, v_2, v_3, ..., v_k)$ از V به k مجموعه مستقل است [۸].

گراف G، k-رنگ پذیر رأسی[4] است اگر G دارای k-رنگ آمیزی رأسی باشد. راحت‌تر خواهد بود که «رنگ آمیزی رأسی » را به صورت ساده، رنگ آمیزی و « k-رنگ پذیر رأسی » را k-رنگ پذیر بخوانیم [۸].

به عبارت دیگر یک رنگ آمیزی مجاز به صورت زیر است :

$$c : V \rightarrow N, c(v) \neq c(w), (v, w) \in E$$

---

[1]-Interval graph
[2]-Adjacent matrix
[3]-Incidence matrix
[4]-Vertex-k-colored

تعریف ۲-۲-۲: کمترین تعداد رنگ‌هایی که برای رنگ آمیزی مجاز G بکار می‌رود تا تمام رئوس، رنگ آمیزی شود عدد رنگی[1] گراف G نامیده می‌شود که آنرا با نماد $\chi(G)$ نشان می‌دهند [۸].

تعریف ۲-۲-۳ گراف G را بحرانی[2] گوییم اگر برای هر زیرگراف سره H، از G، $\chi(H) < \chi(G)$ باشد، چنین گراف‌هایی را اولین بار دیراک[3] (۱۹۵۲) بررسی کرده است. گراف k-بحرانی، گرافی است که k-رنگی و بحرانی باشد. هر گراف k-رنگی دارای یک زیرگراف k- بحرانی است. گراف‌های بحرانی دارای این خاصیت هستند که به محض حذف کردن حتی یک یال و یا یک رأس از عدد رنگی آن‌ها کاسته می‌شود همچنین واضح است که هر گراف بحرانی همبند است [۸].

قضیه۲-۲-۱: اگر گراف G، یک گراف k-بحرانی باشد، آنگاه $\delta \geq k-1$.

برهان: به وسیله تناقض، در صورت امکان، فرض کنید G، k-بحرانی است، G-v،k-۱ رنگ پذیر است. فرض کنید $(V_1,V_2,V_3,\ldots,V_{k-1})$، k-۱- رنگ آمیزی از G-v باشد. بنابر تعریف، v مجاور به $\sigma < k-1$ رأس در G است و بنابراین v باید نامجاور با هر رأس V_j باشد اما در این صورت $(V_1,V_2,\ldots,V_j \cup \{v\},\ldots,V_{k-1})$ یک k-۱-رنگ آمیزی از G است و این تناقض است لذا $\delta \geq k-1$ [۸].

نتیجه۲-۲-۱: هر گراف k-رنگی دارای حداقل k رأس از درجه حداقل k-۱ است [۸].

نتیجه۲-۲-۲:برای هر گراف G داریم $\chi(G) \leq \Delta+1$ [۸].

چون هر رأس در گراف، حداکثر با Δ رأس دیگر مجاور است اگر خود آن را با رنگ ۱ و مجاورهایش را به ترتیب با ۲و۳و...وΔ+۱ رنگ متفاوت رنگ آمیزی‌کنیم آنگاه یک رنگ آمیزی مجاز بدست می‌آید.

قضیه زیر که منسوب به بروکس[4] است بیان می‌دارد که تنها دو رده از گراف‌ها وجود دارند که برای آن‌ها $\chi(G) = \Delta+1$ و برای تمامی گراف‌های دیگر داریم $\chi(G) \leq \Delta$.

قضیه ۲-۲-۲ (بروکس(۱۹۴۱)): اگر گراف G، یک گراف ساده همبند باشد که دور فرد یا کامل نباشد آنگاه $\chi(G) \leq \Delta$ [۸].

---
[1]-Chromatic number
[2]-Critical
[3]-Dirac
[4]-Brooks

قضیه ۲-۲-۳ (سکرش[1] و ویلف[2] (۱۹۶۸)): برای هر گراف G، $\chi(G) \le 1 + \max_{H \le G} \delta(H)$ [۷].

اثبات: فرض کنید $\chi(G)=k$، اگر G بحرانی باشد، بنابر قضیه ۲-۲-۱ حکم تمام است، لذا فرض کنید، G بحرانی نیست. بنابراین مرحله به مرحله از G رأس‌ها و یال‌هایی را حذف می‌کنیم تا به گراف k-بحرانی H برسیم، بنابر قضیه ۲-۲-۱ داریم: $k \le \delta(H)+1 \Leftarrow$ $\chi(G) \le 1+\delta(H) \le 1+\max_{G' \le G} \delta(G')$ [۷].

الگوریتم رنگ آمیزی گریدی[3]: ابتدا رأس‌های G را به صورت مشخصی مرتب می‌کنیم که دارای اندیس در N باشد، در این صورت مرحله به مرحله از رأس با کمترین اندیس، رنگ آمیزی را انجام می‌دهیم به طوری که به رأسی با اندیس k می‌رسیم، اگر رنگی از رنگ‌های به کار رفته در رأس‌های با اندیس کمتر را بتوان بکار برد این رنگ را به V_k، می‌دهیم در غیر اینصورت رنگ جدیدی را به V_k می‌دهیم [۷].

عدد رنگی گراف کمترین تعداد مجموعه‌های مستقل است که در آن‌ها مجموعه‌ی رأس‌های گراف را می‌توان افراز کرد، اگر S مجموعه مستقل ماکزیمال باشد آنگاه:

$\chi(G) = \chi(G(V \setminus S))+1$ که $G(V\setminus S)$، زیرگراف تولید شده توسط $V\setminus S$ است [۲].

یک k-رنگ آمیزی $(V_1, V_2, V_3, \ldots, V_k)$ از G را مجاز می‌نامند اگر V_1 مجموعه مستقل ماکزیمال G، V_2 مجموعه مستقل ماکزیمال G-V_1، V_3 مجموعه مستقل ماکزیمال G-($V_1 \cup V_2$) باشد، آن‌گاه یک k-رنگ آمیزی مجاز G وجود دارد. با استفاده‌ی مکرر از روش فوق برای یافتن مجموعه‌های مستقل ماکزیمال، می‌توان همه رنگ آمیزی‌های مجاز G را تعیین کرد. پس عدد رنگی G، کمترین تعداد رنگ‌های مورد استفاده در چنین رنگ آمیزیی است [۸].

[1] Szekresh
[2]- Wilf
[3]-Greedy coloring algorithm

برای گراف‌های با اندازه کوچک تا متوسط، الگوریتم دقیقی می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد [۱۵-۱۰]. با این حال با توجه به NP-سخت بودن مسئله رنگ آمیزی برای گراف‌های با اندازه متوسط تا بزرگ الگوریتم‌های ابتکاری مورد استفاده قرار می‌گیرد [۱۹-۱۶].

۲-۳ رنگ آمیزی بازه‌ای گراف قطعی

تابع رنگ آمیزی، به هر رأس گراف، یک رنگ از اعداد طبیعی را تخصیص می‌دهد به طوری که رئوس مجاور رنگ یکسان نداشته باشند. این عدد طبیعی تخصیصی، به عنوان رنگ می‌تواند نشان دهنده‌ی زمان یا مکان یا هرچیز دیگری باشد. در برخی از مسائل رنگ آمیزی گراف، رنگ‌های تخصیصی دقیقا یک زمان یا مکان را نشان نمی‌دهد بلکه به صورت یک بازه است. برای این مدل‌ها از رنگ آمیزی بازه‌ای استفاده می‌شود. r -رنگ آمیزی بازه‌ای گراف G، یک نگاشت

g:$V(G)\rightarrow${زیر بازه‌های باز به طول واحد از بازه‌ی $(۰, r)$}

است. این نگاشت، رئوس V از گراف G را به زیر بازه‌های باز به طول واحد از $(۰, r)$ می‌نگارد به طوری که رأس‌های مجاور به زیربازه‌های مجزا تخصیص داده می‌شوند. در این حالت یک r -رنگ آمیزی بازه‌ای داریم، که در این رنگ آمیزی، هدف پیدا کردن کمترین r -رنگ آمیزی است [۲۰].

۲-۴ رنگ آمیزی دوری گراف‌های قطعی

عدد رنگی دوری گراف G ابتدا توسط وینس در سال ۱۹۸۸ با عنوان عدد رنگی ستاره‌ای[1] تعریف شد و با نماد χ^*، نمایش داده می‌شود.

تعریف ۲-۴-۱ در **تعریف وینس** به ازاء دو عدد صحیح n, d، که $1 \le 2d \le n$، (n, d)-رنگ آمیزی گراف $G=(V,E)$، نگاشت $c: V \to \{1,\dots,n\}$، است بطوری که

$xy \in E \Rightarrow d \le |c(x)-c(y)| \le n-d$.

قضیه۲-۴-۱: اگر $|V(G)|=P$ و G یک (n,d)–رنگ آمیزی داشته باشد به قسمی که $p<n$ و $gcd(n,d)=1$ آنگاه اعداد صحیح n_1 و d_1 وجود دارند به طوری که G یک (n_1,d_1)- رنگ آمیزی دارد که $n_1/d<n_2/d$ و $n_1<n$، به عبارت دیگر اگر G گراف باشد آنگاه عدد رنگی ستاره‌ای G به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۱]:

$$\chi_G^*=\inf\{\frac{n}{d} \quad : \quad d \le n \le p \text{ و یک } (n,d) - \text{رنگ آمیزی } G \text{ وجود دارد}\}$$

مثال ۲-۴-۱: دور C_5، را در نظر بگیرید می خواهیم عدد رنگی دوری آن را پیدا کنیم. با توجه به تعریف عدد رنگی ستاره‌ای کافی است تا $(i$, ۵)- رنگ آمیزی $1 \le i \le 2$، $(۴ , i)$- رنگ آمیزی $1 \le i \le 2$، $(i$, ۳)- رنگ آمیزی ها، i=۱ و $(i$, ۲)- رنگ آمیزی ها ۱ =i را بررسی کنیم. (۱، ۵)- رنگ آمیزی که همان ۵- رنگ آمیزی معمولی است و (۲، ۵)- رنگ آمیزی همان است که در جدول ۲-۱ آمده است؛ (۱، ۴)- رنگ آمیزی همان ۴- رنگ آمیزی معمولی است ولی چون $4 > 5/2$ تاثیری در جواب مسئله ندارد. (۲، ۴)-رنگ آمیزی نیز وجود ندارد زیرا در غیر این صورت داریم $\chi(C_5)=2$ که تناقض است، (۱، ۳)- رنگ آمیزی همان ۳-رنگ آمیزی است ولی چون $3 > 5/2$، تاثیری در جواب مسئله ندارد، (۱، ۲)- رنگ آمیزی هم که باز وجود ندارد زیرا در غیر این صورت داریم $\chi(C_5)=2$ که تناقض است.

جدول ۲-۱-رنگ آمیزی دوری گراف C_5

[1] -The star-chromatic number

i	۱	۲	۳	۴	۵
$c(i)$	(۰,۵،۰)∪(۲,۵،۲)	(۱,۵،۰,۵)	(۲,۵،۱,۵)	(۱،۰)	(۲،۱)

$\Rightarrow \chi^*(C_5) = 5/2$

تعریف ۲-۴-۲ ژو[1] یک تعریف برای رنگ آمیزی دوری ارائه داد. فرض کنید c یک دایره به محیط r باشد. یک r-رنگ آمیزی دوری گراف G نگاشت c است که به هر رأس x از G کمان باز به طول واحد $c(x)$ از c را نسبت می‌دهد به طوری که به ازاء هر یال xy از G، $c(x)\cap c(y)=\phi$. گوییم گراف G، r-رنگ آمیزی دوری است اگر یک r-رنگ پذیر دوری برای G وجود داشته باشد. عدد رنگی دوری گراف G، با نماد $\chi_c(G)$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۱]:

$\chi_c(G) = \inf\{r:$ است دوری پذیر رنگ- r ,$G\}$

واضح است که اگر $\chi_c(G)=r$ آنگاه برای هر $r'\geq r$ یک r-رنگ آمیزی دوری موجود است و همچنین بدیهی است که اگر H زیرگراف از G باشد آنگاه $\chi_c(H)\leq\chi_c(G)$ [۲۰].

اگر دورC را از یک نقطه دلخواه برش دهیم در این صورت یک بازه به طول r بدست می‌آوریم، حال اگر برای هر راس $x\in V(G)$، $c'(x)$ را نقطه ابتدائی کمان $c(x)$ قرار دهیم؛

آنگاه برای هر $(x,y)\in E$ از G داریم: $1\leq|c'(x)-c'(y)|\leq r-1$ و $c'(x)\leq r-1$ [۲۰].

بنابراین برای هر r-رنگ آمیزی دوری $c':V\to[0,r)$ فرض می‌کنیم $s=\max\{c'(x):x\in V\}$

آنگاه c' می‌تواند به صورت یک $s+1$-رنگ آمیزی بازه‌ای نشان داده شود.

برای گراف C_5 رنگ آمیزی دوری با تعریف ژو به صورت زیر است:

i	۱	۲	۳	۴	۵

[1]-Zhu

$\acute{c}(\mathrm{i})$	۲	۰,۵	۱,۵	۰	۱
$c(i)$	(۰,۵،۰)∪(۲,۵،۲)	(۱,۵،۰,۵)	(۲,۵،۱,۵)	(۱،۰)	(۲،۱)

فصل سوم

مفاهیم رنگ آمیزی گراف‌های فازی

مقدمه

در این فصل به بررسی مفهوم کلی رنگ آمیزی گراف‌های فازی پرداخته می‌شود، بدین منظور در بخش اول این فصل مفهوم روابط فازی و گراف فازی بیان می‌شود، با توجه به اینکه گراف‌های فازی بنا بر فازی بودن رأس یا یال دو نوع می باشد در زیر بخش ۳-۲ گراف‌های فازی با رئوس قطعی و یال فازی مورد مطالعه قرار می‌گیرد و در این زیر بخش به یکی از کاربردهای این رنگ آمیزی در مسئله چراغ ترافیک پرداخته می‌شود سپس در زیر بخش ۳-۳ به مطالعه رنگ آمیزی گراف با رئوس ویال فازی به صورت فازی پرداخته می‌شود و در آخر یک رنگ آمیزی توسعه یافته از گراف فازی نوع اول بیان می شود که در آن رنگ‌های تخصیص یافته با تابع عدم تشابه d لحاظ می شود و رنگ آمیزی با تابع مقیاس f انجام می‌شود.

۳-۱ روابط فازی و گراف فازی

در این قسمت مفهوم روابط فازی و گراف فازی بیان می‌شود.

تعریف ۳-۱-۱: اگر $X,Y \subseteq R$ مجموعه‌های مرجع باشند آنگاه:

$$\widetilde{R} = \{((x,y),\mu_{\widetilde{R}}(x,y)) \mid (x,y) \in X \times Y\}$$

یک رابطه فازی بر $X \times Y$ نامیده می‌شود [۵].

به عبارت دیگر اگر $X,Y \subseteq R$ و مجموعه‌های $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ با تعریف $\widetilde{A}=\{(x,\mu_{\widetilde{A}}(x)) \mid x\in X\}$ و $\widetilde{B}=\{(x,\mu_{\widetilde{B}}(x)) \mid x\in X\}$ دو مجموعه فازی باشند، آنگاه } $\widetilde{R}=\{[(x,y),\mu_{\widetilde{R}}(x,y)] \mid (x,y)\in X\times Y$ یک رابطه فازی بر A و B خواهد بود اگر

$\mu_{\widetilde{R}}(x,y)\le \mu_{\widetilde{A}}(x)\ ,\ \forall (x,y)\in X\times Y$ و $\mu_{\widetilde{R}}(x,y)\le \mu_{\widetilde{B}}(x)\ ,\ \forall (x,y)\in X\times Y$ [۵].

تعریف ۳-۱-۲: یک گراف فازی $\widetilde{G}=(\sigma,\mu)$ یک مجموعه با دو تابع $\mu: E\to[0,1]$ و $\sigma: V\to[0,1]$ است به طوری که $\mu(\{x,y\})\le\min\{\sigma(x),\sigma(y)\}$ [۲۲].

گراف فازی $\widetilde{G}=(V,\mu)$ با رئوس قطعی و یال‌های فازی را در نظر بگیرید، یک روش طبیعی برای بدست آوردن برخی اطلاعات در مورد گراف فازی این است که دنباله‌ی α-برش[1] آن مورد بررسی قرار گیرد، یک مجموعه فازی $\widetilde{A}$ که روی X تعریف شده است، خانواده‌ی α-برش آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A_\alpha=\{x\in X \mid \mu_{\widetilde{A}}(x)\ge\alpha\}$$

به این مجموعه، مجموعه‌ی در سطح α نیز می‌گویند که اعضایش، x های متعلق به مجموعه مرجع X بوده و تابع عضویت آن‌ها در مجموعه فازی $\widetilde{A}$ حداقل α باشد [۲].

این مجموعه، خانواده‌ای از مجموعه‌های همگرا است یعنی

$$A_\alpha \supseteq A_\beta \qquad \forall \alpha,\beta\in I\ ,\ \alpha\le\beta$$

۲-۳ رنگ آمیزی گراف فازی با رئوس قطعی و یال فازی $\widetilde{G}=(V,\mu)$

فرض کنید $\widetilde{G}=(V,\mu)$ یک گراف فازی با مجموعه رئوس قطعی $V=\{۱،۲،...،n\}$ و یال‌های فازی با سطح شدت μ باشد که یک عدد فازی تعریف شده روی یال‌ها است.

[1]-α -cut

فرض کنید A=$\{\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_k\}$ یک دنباله از سطوح شدت یال‌های فازی باشد و $I = A \cup \{0\}$ ، برای هر $\alpha \in I$، گراف قطعی $G_\alpha = (V, E_\alpha)$ دارای مجموعه یال‌های به صورت $E_\alpha = \{ij \mid 1 \le i < j \le n, \mu(ij) \ge \alpha\}$ است.

این رنگ آمیزی بر اساس مفهوم α-برش تعریف شده است بنابراین هر k-رنگ آمیزی C_α^k می‌تواند روی G_α بیان شود، هر k-رنگ آمیزی از $\tilde{G}$ از بین این دنباله‌ها تعیین می‌شود.

عدد رنگی گراف فازی به صورت زیر تعریف می‌شود [۲]:

تعریف۳-۲-۱ عدد رنگی گراف فازی $\tilde{G}$، یک عدد فازی به صورت $\chi(\tilde{G}) = \{(x, \upsilon(x)) \mid x \in X\}$ است به طوری که

$$\upsilon(x) = \sup\{\alpha \in I \mid x \in A_\alpha\} \quad \forall x \in X$$

$$X = \{1, \dots, |V|\}$$

$$A_\alpha = \{1, \dots, \chi_\alpha\} \quad \forall \alpha \in I$$

برای هر مقدار α یک گراف قطعی G_α را به صورت معمولی رنگ آمیزی می‌کنیم که عدد رنگی بدست آمده برای هر یک از این گراف‌ها، به معنی کمترین تعداد دسته‌های ممکن سازگار درسطح α است. به این ترتیب k گراف قطعی $\{G_{\alpha^i} \mid i = 1, \dots, k\}$ داریم که از گراف فازی $\tilde{G}$ ، به دست می‌آید و برای هر گراف قطعی G_{α^i} ، عدد رنگی مربوطه χ_{α^i} بدست می‌آید. طبق تعریف عدد رنگی،برای هر عضو x برای هر سطح α یک تابع عضویت $\upsilon(x)$ دارد، عدد رنگی گراف فازی تعمیمی از عدد رنگی گراف قطعی است، اگر $k = 1$ باشد که فقط یک سطح α مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۳-۲-۱ کاربردی از مسئله عدد رنگی گراف فازی

در این قسمت یکی از کاربردهای رنگ آمیزی گراف فازی در مسئله چراغ ترافیک بررسی می‌شود.

مسئله چراغ ترافیک

در یک تقاطع، که متشکل از چند مسیر ترافیکی است، هر یک از مسیرهای ترافیکی در هر دوره(سیکل) یک چراغ سبز را پیش رو دارد، یک دوره برای تقاطع عبارت است از مدت زمانی که هر یک از مسیرهای ترافیکی یک بار از تقاطع عبور کند [۲۳].

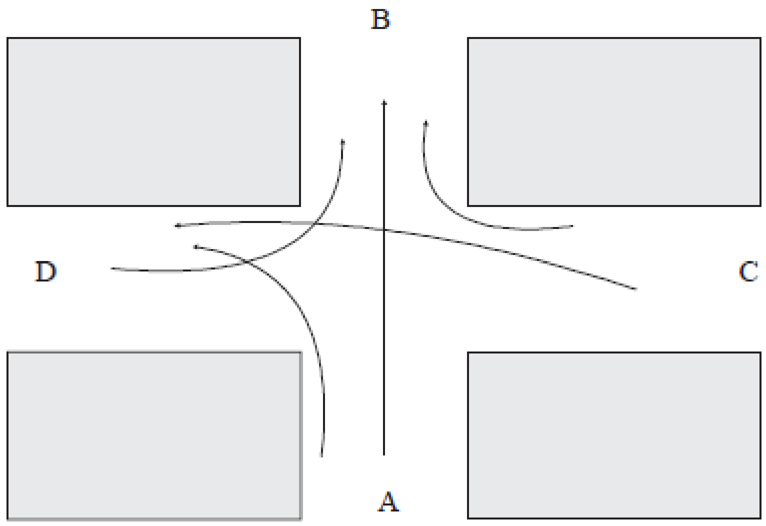
مدل بدست آوردن دوره ، در نحوه عبور n تا مسیر ترافیکی در یک تقاطع، به صورت رابطه (۳-۱) می‌باشد [۲۴].

$$V(G) = \{v_۱, v_۲, v_۳, \dots, v_n\}$$

$$E(G) = \{\ v_i v_j \,|\, v_i \text{ و } v_j \text{ در یک زمان نتواند حرکت کند } \} \qquad (۱-۳)$$

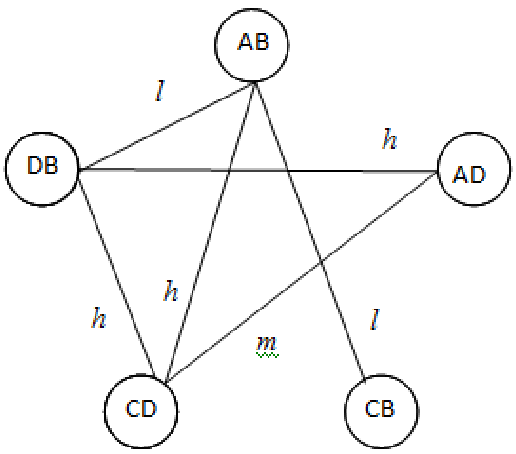
که در آن V_i مسیرترافیکیi ام است. نیز به همین ترتیب، هر k-رنگ آمیزی C^k از هر گراف، یک تدبیر کنترل، از سیستم چراغ ترافیک را نشان می‌دهد. کل چرخه سیستم چراغ ترافیک به k دوره‌ی یا قطعه زمانی تقسیم می‌شود (با هر طول زمان) برای هر قطعه زمانی $c \in \{1,\dots,k\}$ مسیرهای ترافیکی که $C^k(v)$ آنها برابر هستند می‌توانند هم‌زمان از تقاطع عبور کنند. با پیدا کردن عدد رنگی گراف $\chi(G)$ دوره‌ی بهینه برای مسئله پیدا می‌شود که در آن رنگ تخصیص داده شده از جنس زمان (t) است.

مثال ۳-۲-۱ : فرض می کنیم مسیر های ترافیکی در یک چهار راهی به صورت شکل ۳-۱ باشد.

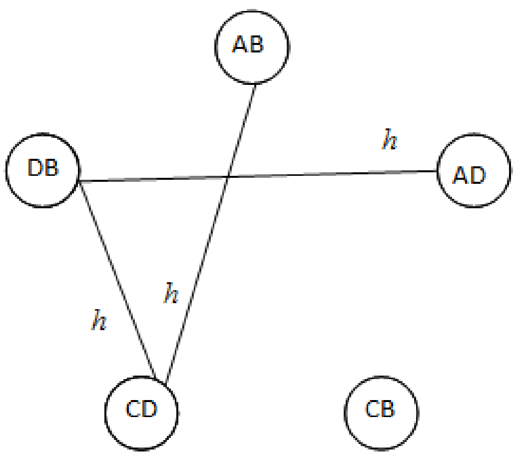


شکل ۳-۱-جریان ترافیک برای مثال ۳-۲-۱

در این صورت مسیر های ترافیکی $\{AD,CB\}$, با هم سازگار هستند و مسیر ترافیکی $\{AB,CD\}$ با هم ناسازگار هستند، این مسئله می‌تواند با گراف $G=(V,E)$ مدل بندی شود. گراف G در شکل ۳-۳ ترسیم شده است. آن‌گاه $C^2(AB)=1, C^2(AD)=2, C^2(CB)=1, C^2(CD)=2, C^2(DB)=1$



شکل ۳-۲- گراف فازی برای مثال ۳-۲-۱



شکل ۳-۳-گراف قطعی برای مثال ۳-۲-۱

واضح است که تدبیر چراغ‌ها مربوط به ناسازگاری خطوط است. مفهوم ناسازگاری می‌تواند فازی باشد و می‌تواند درجه بندی شود. این درجه بندی لزومی ندارد عددی باشد ماکزیمم سطح ایمنی وقتی بدست می‌آید که تمام خطوط مورد بررسی ناسازگار هستند و گراف کامل است در این صورت عدد رنگی به اندازه تعداد خطوط ترافیکی است و تدبیر سیستم چراغ ترافیک، یک حرکت برای هر یک از مسیرها را دارد. از طرف دیگر مینیمم سطح ایمنی وقتی است که مجموعه یال‌های ناسازگار تهی است در این صورت عدد رنگی ۱ است و تمام حرکت یک‌جا انجام می‌شود. مثلاً خطوط CD,DB ناسازگاری بیشتری نسبت به ناسازگاری خطوط AB,DB دارند. فرض کنید $I=\{n,l,m,h,t\}$ به طوری که n و l و m و h و t درجه ناسازگاری یا سطح شدت یال‌ها به صورت هیچ-کم-متوسط-قوی-کلی، به ترتیب دارند [۲].

این مسئله می‌تواند با گراف فازی $\tilde{G}=(V,\mu)$ مدل بندی شود گراف $\tilde{G}$.در شکل ۳-۲ ترسیم شده است. گراف فازی با مجموعه رئوس قطعی $\{$۱=AB,۲=AD,۳=CB,۴=CD,۵=DB $\}$.

آنگاه یال‌های $\tilde{E}=\{$۱۳،۱۴،۱۵،۲۴،۲۵،۳۵$\}$ در نظر بگیرید. ماتریس مجاورت گراف فازی به صورت زیر است.

$$\mu=\begin{pmatrix} - & n & l & h & l \\ n & - & n & m & h \\ l & n & - & n & n \\ h & m & n & - & h \\ l & h & n & h & - \end{pmatrix}$$

با تشکیل گراف‌های قطعی G_α و رنگ آمیزی آن برای هر سطح $\{n,l,m,h,t\}$ نتایج زیر بدست می‌آید:

جدول ۳- ۱ بدست آوردن $\alpha, E_\alpha, \chi_\alpha, C_\alpha^{\chi_\alpha}$ برای مثال ۳-۲-۱

α	E_α	χ_α	$C_\alpha^{\chi_\alpha}(1)$	$C_\alpha^{\chi_\alpha}(2)$	$C_\alpha^{\chi_\alpha}(3)$	$C_\alpha^{\chi_\alpha}(4)$	$C_\alpha^{\chi_\alpha}(5)$
n	$\{$۱۲،۱۳،۱۴،۱۵،۲۳،۲۴،۳۴،۳۵،۴۵$\}$	۵	۱	۲	۳	۴	۵

l	{۱۳،۱۴،۱۵،۲۴،۲۵،۳۵ }	۳	۱	۱	۲	۲	۳
m	{۱۴،۴۵،۲۴،۲۵ }	۳	۱	۳	۱	۲	۱
h	{۱۴،۴۵،۲۵ }	۲	۱	۲	۱	۲	۱
t	ϕ	۱	۱	۱	۱	۱	۱

با توجه به تعریف عدد رنگی گراف فازی داریم:

$$\chi(\tilde{G}) = \{(1,t),(2,h),(3,m),(4,n),(5,n)\}$$

$\chi(\tilde{G})$ بیان می‌کند که مقادیر پایین α مربوط به راننده‌هایی با سطح توانایی پایین‌تر است و چراغ ترافیک باید محتاطانه کنترل کند و عدد رنگی، بالا است ازطرف دیگر برای مقادیر بالاتر α، سطح توانایی راننده افزایش می‌یابد و عدد رنگی پایین‌تر است و جریان ترافیک روان‌تر است، به منظور حل مسئله رنگ آمیزی، هر الگوریتم که عدد رنگی گراف قطعی G_α را محاسبه کند می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد [۲].

۳-۳ رنگ آمیزی گراف فازی با رئوس و یال فازی $\tilde{G} = (\sigma, \mu)$

گراف فازی $\tilde{G} = (\sigma, \mu)$ با رئوس و یال‌های فازی را در نظر بگیرید؛

فرض کنید $A = \{\sigma(v) > 0 \mid v \in V\} \cup \{\mu(xy) > 0 \mid x \neq y, x, y \in V\}$ با k عنصر $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ است. به طوری که $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k$ آنگاه این دنباله را دنباله اساسی می‌نامند.

$\alpha-$برش از $\tilde{G}$، $G_\alpha = (V_\alpha, E_\alpha)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V_\alpha = \{v \in V \mid \sigma(v) \geq \alpha\} \quad \& \quad E_\alpha = \{xy \in E \mid \mu(xy) \geq \alpha\}$$

یعنی $G_\alpha = (V_\alpha, E_\alpha)$ یک گراف قطعی است که درجه عضویت رئوس و یال‌های آن از مقدار α بیشتر است [۲۵].

واضح است که گراف فازی تعداد متناهی $\alpha-$برش مختلف دارد در حقیقت $\alpha-$برش در داخل بازه-های $(0,\alpha_1],(\alpha_1,\alpha_2],\dots,(\alpha_{k-1},\alpha_k]$ تغییر نمی‌کند.

فرض کنید $\Gamma=\{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_k\}$ یک خانواده‌ای از مجموعه‌های فازی تعریف شده روی V باشد، مجموعه های $\alpha-$برش آن به صورت $\Gamma^{\alpha}=\{{\gamma_1}^{\alpha},{\gamma_2}^{\alpha},\dots,{\gamma_k}^{\alpha}\}$ است و مجموعه فازی $\vee\Gamma$ روی V به صورت $\vee\Gamma(v)=\max_i \gamma_i(v)$ [۲۵].

گراف فازی $\tilde{G}=(\sigma,\mu)$ را در نظر بگیرید، آنگاه k-رنگ آمیزی فازی روی V به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۳-۳-۱ : یک خانواده $\Gamma=\{\gamma_1 , \gamma_2 , \gamma_3 ,\dots, \gamma_k\}$ از مجموعه‌های فازی روی V، یک k-رنگ آمیزی فازی از $\tilde{G}=(\sigma,\mu)$ نامیده می‌شود اگر شرایط زیر را داشته باشد[۲۵]:

1- $\sigma=\vee\,\Gamma$ (۳-۲)

$2-\gamma_i\wedge\gamma_j=0$

$3-\min\{\gamma_i(x),\gamma_i(y)\}=0$ $1\le i\le k$ (x,y) برای هر یال قوی

تعریف ۳-۳-۲ یال قوی[1] به یالی از گراف فازی اطلاق می‌شود که سطح شدت آن در رابطه زیر صدق کند [۲۵].

$\mu_{xy}\ge ۰/۵ * \min\{\sigma(x),\sigma(y)\}$.

$\min\{\sigma(x),\sigma(y)\}$ با m_σ نشان می‌دهیم.

در این رنگ آمیزی، رئوسی که دردسته‌های $\{\gamma_i \mid 1\le i\le k\}$ قرار می‌گیرند، رئوسی هستند که با یال-های قوی به هم متصل هستند.

تعریف ۳-۳-۳: حداقل مقدار k که k-رنگ آمیزی فازی داشته باشیم عدد رنگی فازی[2] نامیده می‌شود و با $\chi^f(\tilde{G})$ نشان می‌دهند [۲۵].

1 -Strong edge
2 -k-fuzzy chromatic

این رنگ آمیزی، تعمیمی از رنگ آمیزی قطعی است که $\sigma=1, \mu=\{0,1\}$ است و برای هر i، $\sup\gamma_i$ مجموعه مستقل در گراف است در این حالت Γ یک k-رنگ آمیزی است.

در k-رنگ امیزی فازی مجموعه رئوسی که در یک γ_i قرار می‌گیرند با یال قوی متصل نیستند و درجه عضویت تمام این یال‌ها کمتر از $۰/۵\mathrm{m}_\sigma$ است، در این رنگ آمیزی پیدا کردن کمترین تعداد γ_i با شرایط (۳-۲) مد نظر است.

مثال ۳-۳-۱: گراف فازی با مجموعه رئوس {۱, ۲, ۳, ۴, ۵} داده شده است، که رئوس و یال‌های آن با توابع عضویت زیر مشخص شده‌اند:

$$\sigma(i)=\begin{cases}5 & i\in\{1,2,3\}\\ 4 & i\in\{4,5\}\end{cases}$$

$$\mu(ij)=\begin{cases}5 & \{12,13\}\\ 3 & \{24,25\}\\ 2 & \{23\}\end{cases}$$

برای گراف‌های فازی $\widetilde{G}=(V,\mu)$ ، k-رنگ آمیزی را طبق تعریف از یک رأس دلخواه شروع می کنیم و γ_1 را برای تمام رئوس بدست می‌آوریم و این روند را تا γ_k ادامه می دهیم رئوسی که در هر γ_i $i=1,\dots,k$ قرار می‌گیرند رئوس یک‌جور نامیده می‌شود.

آنگاه با رنگ آمیزی گراف داریم:

	۱	۲	۳	۴	۵
γ_1	۵	۰	۰	۴	۴
γ_2	۰	۵	۵	۰	۰

بنابر این ۲ =|γ| و $\chi^f(\widetilde{G})=2$

رئوس {۵ ,۴ ,۱} رنگ γ_1 و رئوس { ۲, ۳ } رنگ γ_2 دارند.

برای گرف فازی قوی، تمام یال‌ها قوی است بنابراین $\chi^f(\widetilde{G})=\chi(G)$ که G گراف قطعی درسطح مینیمم α متعلق به یال است.

۳-۴ رنگ آمیزی توسعه یافته ***(d, f)*** ازگراف فازی $\widetilde{G}=(V,\mu)$

رنگ آمیزی توسعه یافته (d, f)[۱] از گراف فازی $\tilde{G}=(V,\mu)$ روی اندازه‌ی عدم تشابه (d) تعریف شده روی رنگ‌های (S) و تابع مقیاس (f)، پایه ریزی شده است [۲].

گراف فازی $\tilde{G}=(V,\mu)$ در نظر بگیرید، S، مجموعه رنگ‌های در دسترس باشد، d، اندازه‌ی عدم تشابه تعریف شده به صورت $d:S\times S\rightarrow[0,\infty)$ با مشخصات زیراست:

۱ـ $d(r,s)\geq 0 \qquad \forall r,s\in S$

۲ـ $d(r,s)=0 \Leftrightarrow r=s \quad \forall r,s\in S$

۳ـ $d(r,s)=d(s,r) \qquad \forall r,s\in S$

فرض کنید I تصویر تابع عضویت گراف فازی $\tilde{G}=(V,\tilde{E})$ باشد. $f:I\rightarrow[0,\infty)$ یک تابع نامنفی، نانزولی و یک تابع مقیاس[۲] است. یعنی

$$\forall \mu,\mu'\in I \qquad s.t \qquad \mu\prec\mu' \qquad \Rightarrow \qquad f(\mu)\leq f(\mu')$$

تابع رنگ آمیزی $C:V\rightarrow S$ با مشخصات زیر یک تابع رنگ آمیزی توسعه یافته است [۲].

$$d(C(i),C(j))\geq f(\mu_{ij}) \qquad \forall i,j\in V \qquad i\neq j$$

در این بخش تابع d به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$d(r,s)=|r-s|$$

تابع عضویت $I=\{n, l, m, h, vh\}$ که نشان دهنده سطح شدت یا درجه، یال‌های فازی است به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

n: درجه ناسازگاری یا سطح شدت هیچ و l درجه ناسازگاری کم و m درجه ناسازگاری متوسط و h درجه ناسازگاری زیاد و vh درجه ناسازگاری خیلی زیاد را نشان می‌دهد.

---

[1] -(d, f)-extended coloring

[2] -Scale function

تابع مقیاس f را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

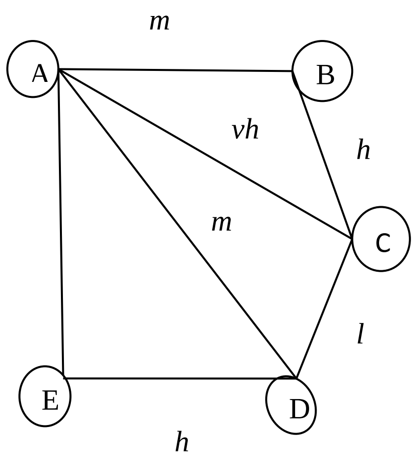
I	n	l	m	h	vh
f	۰	۱	۲	۳	۴

در این رنگ آمیزی به هر رأس، یک رنگ تخصیص می‌یابد، با این شرط که اختلاف دو رنگ تخصیص یافته به دو رأس مجاور (u, v) باید از سطح شدت بین رئوس (u, v) بیشتر باشد، در این رنگ آمیزی،

گراف‌های فازی با رئوس قطعی هستند و فقط یال‌های ناسازگار، فازی هستند و این ناسازگاری در این نوع رنگ آمیزی با تابع عدم تشابه d بیان می‌شود که روی رنگ‌های تخصیص یافته به رئوس تعریف می‌شود.

مسئله رنگ آمیزی توسعه یافته (d, f) شامل تعیین عدد رنگی و تابع رنگ آمیزی مربوطه است، مسئله رنگ آمیزی جزء مسائل Np-سخت است. برای این مسئله الگوریتم دقیقی موجود است [۲].

مثال ۳-۴-۱: پنج امتحان {A,B,C,D,E } را در نظر بگیرید و با توجه به درجه سختی و موارد دیگر، سطح ناسازگاری بین امتحانات به این صورت درجه بندی می‌شود که اگر دو امتحان سازگار باشد nوl، m, h, vh برای درجه ناسازگاری به ترتیب ضعیف، متوسط، قوی و خیلی قوی می‌باشد، این مسئله با گراف فازی به صورت زیر مدل بندی می‌شود:



vh

شکل ۳-۴ گراف فازی برای مثال ۳-۴-۱

ماتریس مجاورت گراف به صورت زیر است:

$$\mu = \begin{pmatrix} - & m & t & m & vh \\ m & - & h & n & n \\ t & h & - & l & n \\ m & n & l & - & h \\ vh & n & n & h & - \end{pmatrix}$$

با رنگ آمیزی توسعه یافته (d, f) داریم:

$$c(A)=1 \quad c(B)=3 \quad c(C)=6 \quad c(D)=3 \quad c(E)=6 \quad \Rightarrow \chi = 6$$

عدد رنگی برابر ۶ بدست می‌آید یعنی در مدت ۶ روز کل امتحانات برگزار می‌شود. نتیجه حاصل از رنگ آمیزی گراف فازی مربوط به مدل به این صورت است که امتحان A در روز اول و امتحان B,D

در روز سوم و آخرین امتحان C,E در روز ششم برگزار می‌شود. در این مثال تابع رنگ آمیزی با استفاده از الگوریتم ارائه شده در مرجع [۲] بدست آمده است.

فصل چهارم

رنگ آمیزی مجموع با رنگ های فازی

مقدمه

در این فصل برای برخی از مسائل رنگ آمیزی که در آن رنگ تخصیص یافته حالت ابهام دارد یک مجموعه فازی تعریف شد، بنابراین برای دسته بندی یا همان رنگ آمیزی این مسائل، رنگ آمیزی معمولی نتیجه بهینه نمی دهد، برای دسته بندی رئوس در این مسائل، رنگ آمیزی مجموع جواب بهینه می‌دهد در این فصل ابتدا مفهوم رنگ آمیزی مجموع را بیان کرده و در قسمت بعد از آن با تعریف رنگ فازی در مسئله رنگ آمیزی برای گراف‌های قطعی اعمال گردید، برای اعمال این مفهوم برای گراف‌های فازی، در زیر قسمت ۴-۳ رنگ آمیزی مجموع توسعه یافته‌ی (d, f) تعریف شد و با

اعمال رنگ فازی، مسئله بهینه سازی دسته بندی رنگی ارزش فازی بیان می‌گردد و کاربرد این مسئله در زمان‌بندی امتحانات ارائه می‌شود.

۴-۱ رنگ آمیزی مجموع برای گراف قطعی

تعریف ۴-۱-۱ گراف $G=(V,E)$ را با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E در نظر بگیرید، رنگ آمیزی مجموع[1] شامل تخصیص رنگ $c(v)\in N$ به هر رأس $v\in V$ از گراف است، به طوری که رئوس مجاور رنگ‌های مختلفی بگیرند و مجموع $c(v)$ روی تمام رئوس مینیمم باشد.

گراف $G=(V,E)$ را با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E، در نظر بگیرید مینیمم مجموع رنگی[2] G (MSC)، را با $\sum G$ نشان می‌دهند که مینیمم $\sum_{v\in V} c(v)$ از بین تمام رنگ آمیزی‌های مجاز c از گراف G است [۲۶].

به عبارت دیگر

$$\sum G=\min\sum_{v\in V} c(v)$$

تعریف ۴-۱-۲ رأس قدرت[3] گراف G، که با $s(G)$ نشان داده می‌شود کوچکترین عدد صحیح s است که $\sum G$ از مجموعه رنگ‌های $\{1,\dots,s\}$ بدست می‌آید [۲۶].

هر رنگ آمیزی از گراف G که $\sum G=\sum_{v\in V} c(v)$ باشد، بهترین رنگ آمیزی[4] نامیده می‌شود، مسئله رنگ آمیزی مجموع، به دنبال یافتن بهترین رنگ آمیزی است.

[1]-Sum coloring
[2]- Minimum sum of coloring
[3] -Vertex-strong
[4] -Best coloring

دسته بندی مجموعه رئوس گراف با تابع C به کلاس‌های رنگی $C_i = c^{-1}(\{i\})$ از رئوس رنگ شده i را در نظر بگیرید، آنگاه با رنگ آمیزی مجموع داریم $|C_1| \geq |C_2| \geq \ldots \geq |C_s|$ اگر برای بعضی $i < j$ داشته باشیم $|C_i| < |C_j|$ آن‌گاه با دوباره رنگ آمیزی C_i با j و C_j با i، مجموع رنگ با کران پایین بدست می‌آید.

آنگاه بهترین رنگ آمیزی، مجموع $\sum_{i \in c(V(G))} i|C_i|$ را مینیمم می‌کند [۲۷].

با رنگ آمیزی مجموع داریم $\sum_{i \in c(V(G))} i|C_i| = \sum_{i=1}^{n} c(v_i)$ و با توجه به مینیمم بودن سمت راست تساوی $\sum_{i \in c(V(G))} i|C_i|$ نیز مینیمم است.

مسئله رنگ آمیزی مجموع، جزء مسائل *NP*-سخت می‌باشد، برای این مسئله الگوریتم دقیقی موجود است [۲۷].

یکی از کاربردهای مینیمم مجموع رنگی در مسئله دسته بندی رنگی هزینه است این مسئله به صورت زیر تعریف می‌شود.

۴-۱-۱: (مسئله بهینه سازی دسته بندی رنگی هزینه[1]):گراف $G=(V,E)$ با n رأس $i=1,\ldots,n$ و دنباله‌ای از هزینه‌های رنگ آمیزی $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ برای هر رأس را در نظر بگیرید این مسئله،

رنگ آمیزی مجاز $C(v) \in \{1,\ldots,n\}$را پیدا می کند که مجموع هزینه‌های رنگ آمیزی $\sum_{v \in V} k_{c(v)}$ مینیمم باشد [۲۸].

در این مسئله k_1 یعنی هزینه رنگ آمیزی یک رأس گراف با رنگ ۱ و k_2 هزینه رنگ آمیزی یک رأس با رنگ ۲ و الی آخر k_n هزینه رنگ آمیزی یک رأس با رنگ n، در این مسئله هزینه‌ها به طور صعودی افزایش می‌یابد و k_1 کمترین هزینه را دارد و k_n دارای بیشترین هزینه است. یعنی برای $c(i) < c(i')$ داریم $k_{c(i)} < k_{c(i')}$، هدف دسته بندی مجموعه رئوس V به مجموعه‌های مستقل $v_1, v_2, \ldots, v_s$ است به طوری که $\sum_{c=1}^{s} k_c |v_c|$ مینیمم است.

---

[1] -Optimum cost chromatic partition problem

با رنگ آمیزی مجموع که مجموع رنگ‌های تخصیص یافته به رئوس گراف مینیمم است، به هر رأس i رنگ $c(i)$ با هزینه $k_{c(i)}$ تخصیص داده می شود و چون برای $c(i) < c(i')$ داریم $k_{c(i)} < k_{c(i')}$ بنابراین $\sum_{v\in V} k_{c(v)}$ مینیمم است.

اگر هزینه رنگ آمیزی k_α برای تمام رئوس برابر α باشد آنگاه $\sum G = \sum_{v\in V} k_{c(v)}$، یعنی برابر مینیمم مجموع رنگ‌ها می‌شود.

۴-۲ رنگ آمیزی مجموع با رنگ‌های فازی برای گراف قطعی

۴-۲-۱ رنگ‌های فازی

در هر رنگ آمیزی پیدا کردن عدد رنگی (کمترین تعداد رنگ‌هایی که گراف رنگ آمیزی می‌شود) مهم است. رنگ‌های تخصیصی ارزش یکسانی دارند و با رنگ آمیزی گراف، نحوه‌ی قرار گرفتن رئوس در دسته‌های خاص مشخص‌می شود. در برخی از مسائل کاربردی رنگ آمیزی، نحوه‌ی قرار گرفتن رئوس در هر دسته ارزش یکسان ندارد و این عمل ارزش نزولی دارند و مکان یا زمان اول بیشترین ارزش و آخری کمترین ارزش را دارد. همان طور که بیان شد تئوری فازی برای موارد ابهام و عدم قطعیت بکار می رود و دانش فرد خبره جایگزین یک سری فرمولات پیچیده ریاضی می‌شود در این فصل با ارائه رنگ‌های فازی نزدیک به یک برای این ارزش گذاری، با ارائه یک تابع عضویت، نحوه دسته بندی برای گراف‌ها قطعی و فازی انجام می‌گیرد.

تابع عضویت بیان شده به صورت زیر تعریف می‌شود.

فرض می‌کنیم $G=(V,E)$ یک گراف باشد، اگر $\{c(v_i)/i=1,\ldots,n\}$ رنگ‌های تخصیص یافته به رئوس گراف با رنگ آمیزی رأسی باشند و $\tilde{A}$ مجموعه رنگ‌های نزدیک به ۱ باشند آنگاه $\tilde{A}$ را به صورت رابطه زیر در نظر می‌گیریم [۲۹] :

$$\widetilde{A}=\{(c(v_i),\mu_{\widetilde{A}}(c(v_i))\ |\quad i\in\{1..n\}\}$$

(۱-۴)

$$\mu_{\widetilde{A}}(c(v_i))=1-\left((c(v_i)-1)\Big/\sum_{i=1}^{n}c(v_i)\right)$$

در مسئله بهینه سازی دسته بندی رنگی هزینه، هر رنگ آمیزی برای رئوس، هزینه داشت و این مسئله با رنگ آمیزی مجموع، جواب بهینه دارد که حاصل به این صورت است که مجموع هزینه‌های مصرفی مینیمم خواهد بود، حال در این بخش یک مسئله جدیدی مطرح می شود که اگر هر رنگی که بخواهیم به رئوس گراف تخصیص دهیم دارای یک ارزش خاص باشد، در این تحقیق این ارزش خاص را مجموعه فازی $\widetilde{A}$ در نظر می‌گیریم و بخواهیم که مجموع این ارزش‌ها ماکزیمم شود، این مسئله را با عنوان بهینه سازی دسته بندی رنگی ارزش فازی مطرح می کنیم.

در این مسئله u_{α_i} را به عنوان ارزش رنگ آمیزی یک رأس با رنگ فازی $\alpha_i\in\widetilde{A}$ در نظر می‌گیریم، مثلاً u_{α_1}، ارزش رنگ آمیزی یک رأس گراف با رنگ فازی ۱ و u_{α_2} ارزش رنگ آمیزی یک رأس با رنگ فازی ۲ و به همین ترتیب u_{α_n} ارزش رنگ آمیزی یک رأس با رنگ فازی n را نشان می‌دهد که این رنگ‌های فازی از مجموعه فازی $\widetilde{A}$ است.

همان‌طور که گفتیم هدف این است که گراف را چطور رنگ آمیزی کنیم تا مجموع این ارزش‌ها ماکزیمم شود.

گراف $G=(V,E)$، با رنگ آمیزی مجاز C در نظر بگیرید و برای هر رأس i، رنگ های تخصیص یافته به رأس i به صورت مجموعه فازی $(c(i),\mu_{\widetilde{A}}(c(v_i))$ باشد که $\widetilde{A}$ مجموعه فازی تعریف شده در رابطه (۱-۴) باشد، با توجه به تعریف این مجموعه فازی که ارزش رنگ‌ها به صورت نزولی رتبه بندی می‌کند برای $c(i)<c(i')$ داریم $u_{\mu_{\widetilde{A}}(c(i))}>u_{\mu_{\widetilde{A}}(c(i'))}$. آنگاه مسئله بهینه سازی دسته بندی رنگی ارزش فازی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

۴-۲-۲ مسئله بهینه سازی دسته بندی رنگی ارزش فازی : گراف $G=(V,E)$ با n رأس با رنگ آمیزی C و دنباله‌ای از ارزش‌های رنگ آمیزی $\{u_{\alpha_i} \mid i=1,\ldots,n, 0<\alpha_i \le 1\}$ در نظر بگیرید که $\alpha_i = \mu_{\tilde{A}}(c(v_i))$ به طوری که مجموع ارزش‌های فازی $\sum_{v\in V} u_{\alpha_v}$ ماکزیمم باشد.

با رنگ آمیزی مجموع داریم $|C_1| \ge |C_2| \ge \ldots \ge |C_s|$ و طبق رابطه ۴-۱ $\mu_{\tilde{A}}(1) > \mu_{\tilde{A}}(2) > \ldots > \mu_{\tilde{A}}(s)$ آنگاه داریم :

$\sum_{v\in V} \mu_{\tilde{A}}(c(v)) = |C_1|\,\mu_{\tilde{A}}(1) + |C_2|\,\mu_{\tilde{A}}(2) + \ldots + |C_s|\,\mu_{\tilde{A}}(s)$ که یک مجموع بهینه است و چون برای $c(i) < c(i')$ داریم $u_{\alpha_{c(i)}} > u_{\alpha_{c'(i)}}$ بنابراین $\sum_{v\in V} u_{\mu_{\tilde{A}}(c(v))}$ ماکزیمم است.

۴-۳ رنگ آمیزی مجموع توسعه یافته (d, f) با رنگ‌های فازی

تعریف ۴-۳-۱ مسئله رنگ آمیزی مجموع توسعه یافته (d, f)، شامل تخصیص رنگ‌های $c_{d,f}(v_i) \in N$ به هر رأس $v_i \in V$ با رنگ آمیزی توسعه یافته‌ی (d, f) از گراف فازی $\tilde{G} = (V, \mu)$ است، به طوری مجموع رنگ‌های $c_{d,f}(v_i)$ روی تمام رئوس مینیمم باشد.

این رنگ آمیزی، همان رنگ آمیزی مجموع ر.وی رنگ آمیزی توسعه یافته (d, f) است و رأس قدرت این رنگ آمیزی همانند رأس قدرت رنگ آمیزی مجموع تعریف می‌شود.

برای بدست آوردن رأس قدرت گراف فازی $\tilde{G} = (V, \mu)$ و تابع رنگ آمیزی مجموع توسعه یافته، در رابطه (۴-۲) یک مدلی ارائه می‌شود.

گراف فازی $\tilde{G} = (V, \mu)$ را با n رأس قطعی $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ و یال‌های فازی $\{\mu_{ij} \mid 1 \le i < j \le n\}$را در نظر بگیرید که $c_{d,f}(v)$ رنگ‌های تخصیص یافته به رئوس گراف با رنگ آمیزی توسعه یافته باشد، آنگاه مسئله رنگ آمیزی مجموع توسعه یافته را به صورت رابطه (۴-۲) مدل بندی می‌کنیم:

$$\min \sum_{i=1}^{n} c_{d,f}(v_i)$$

(2-4)

$$|c_{d,f}(v_i) - c_{d,f}(v_j)| \geq f(\mu_{ij})$$

$$i = 1..n-1,\ j = i+1..n;$$

$$c(v_i), c(v_j) \in N$$

که در این الگو $c(v_i), c(v_j)$ رنگ‌های تخصیص یافته به رئوس است و $f(\mu_{ij})$ مقیاس شدت یال‌های متصل به رئوس $\{v_i, v_j\}$ است و $1 \leq i < j \leq n$.

این الگو دارای |E|۲ قید است. چون تمام یال‌ها به علت قدر مطلق دو بار بررسی می‌شود.

برای حالت خاص این مدل برای گراف قطعی، تابع f به صورت زیر است:

$$f(\mu_{ij}) = \begin{cases} 1 & \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & O.W \end{cases}$$

۴-۳-۱ مسئله بهینه سازی دسته بندی رنگی توسعه یافته ارزش فازی برای گراف فازی

گراف فازی $\tilde{G} = (V, \mu)$ با n رأس و دنباله‌ای از ارزش‌های $\{u_{\alpha_i} \mid i = 1,\ldots,n, 0 < \alpha_i \leq 1\}$ را با رنگ آمیزی توسعه یافته (d, f) در نظر بگیرید که $\alpha_i = \mu_{\tilde{A}}(c_{d,f}(v_i))$ به طوری که مجموع ارزش‌های فازی $\sum_{v \in V} u_{\alpha_i}$ ماکزیمم باشد.

در این مسئله برای $c_{d,f}(i) < c_{d,f}(i')$ داریم $u_{\mu_{\tilde{A}}(c(i))} > u_{\mu_{\tilde{A}}(c(i'))}$.

این مسئله را به طور خلاصه با *ofecp* (***o**ptimum **f**uzzy value **e**xtended **c**hromatic **p**artition*) نمایش می‌دهیم.

قضیه ۴-۳-۱ مسئله *ofecp* با رنگ آمیزی مجموع توسعه یافته، جواب بهینه می‌دهد.

اگر $c'(v_i) \in \{1,2,3,\ldots\}$ رنگ‌های تخصیص یافته به رئوس با یک رنگ آمیزی توسعه یافته‌ی (d, f) باشد و $c(v_i) \in \{1,\ldots,s\}$ رنگ‌های تخصیص یافته به رئوس با رنگ آمیزی مجموع توسعه یافته باشد که $\{v_i \mid i = 1,2,3,\ldots,\mathrm{n}\}$ آنگاه داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} c'(v_i) \geq \sum_{i=1}^{n} c(v_i) \Rightarrow 1\Big/\sum_{i=1}^{n} c'(v_i) \leq 1\Big/\sum_{i=1}^{n} c(v_i) \Rightarrow n\Big/\sum_{i=1}^{n} c'(v_i) \leq n\Big/\sum_{i=1}^{n} c(v_i) \Rightarrow$$

$$1-\left(n\Big/\sum_{i=1}^{n} c'(v_i)\right) \geq 1-\left(n\Big/\sum_{i=1}^{n} c(v_i)\right) \Rightarrow \left((\sum_{i=1}^{n} c'(v_i)-n)\Big/\sum_{i=1}^{n} c'(v_i)\right) \geq$$

$$\left((\sum_{i=1}^{n} c(v_i)-n)\Big/\sum_{i=1}^{n} c(v_i)\right)$$

$$\Rightarrow n-\left((\sum_{i=1}^{n} c'(v_i)-n)\Big/\sum_{i=1}^{n} c'(v_i)\right) \leq n-\left((\sum_{i=1}^{n} c(v_i)-n)\Big/\sum_{i=1}^{n} c(v_i)\right) \qquad \Rightarrow$$

$$\left(1-\left((c'(v_1)-1)\Big/\sum_{i=1}^{n} c'(v_1)\right)\right)+\left(1-\left((c'(v_2)-1)\Big/\sum_{i=1}^{n} c'(v_2)\right)\right)+$$
$$\left(1-\left((c'(v_3)-1)\Big/\sum_{i=1}^{n} c'(v_3)\right)\right)+\ldots+\left(1-\left((c'(v_n)-1)\Big/\sum_{i=1}^{n} c'(v_n)\right)\right) \leq$$
$$\left(1-\left((c(v_1)-1)\Big/\sum_{i=1}^{n} c(v_1)\right)\right)+\left(1-\left((c(v_2)-1)\Big/\sum_{i=1}^{n} c(v_2)\right)\right)+$$
$$\left(1-\left((c(v_3)-1)\Big/\sum_{i=1}^{n} c(v_3)\right)\right)+\ldots+\left(1-\left((c(v_n)-1)\Big/\sum_{i=1}^{n} c(v_n)\right)\right) \Rightarrow$$

$$\sum_{i\in\{1,\ldots,n\}} \mu_{\tilde{A}}(c(v_i)) \geq \sum_{i\in\{1,\ldots,n\}} \mu_{\tilde{A}}(c'(v_i)) \qquad (۴-۳)$$

بنابر رابطه ۴-۳ و اینکه $\sum c(v)$ مینیمم است و در این مسئله برای $c(i) < c(i')$ داریم $u_{\mu_{\tilde{A}}(c(i))} > u_{\mu_{\tilde{A}}(c(i'))}$ بنابراین $\sum\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}} u_{\mu_{\tilde{A}}(c'(v))} \geq \sum\limits_{i\in\{1,\ldots,n\}} u_{\mu_{\tilde{A}}(c(v_i))}$ و مسئله (*ofecp*) حل شده است.

در این تحقیق یک حالت که $u_{\mu_{\tilde{A}}(c(v))} = \mu_{\tilde{A}}(c(v))$ در نظر گرفته شده است.

۴-۴- زمینه کاربردی (مسئله زمان‌بندی امتحان)

بهینه سازی مطرح شده، کاربرد فراوانی در مسائل ترکیبیاتی دارد در هر مسئله رنگ آمیزی که در آن رنگ اول بیشترین ارزش را دارد و به ترتیب این ارزش تا آخرین رنگ تخصیص یافته به گراف پایین تر می‌شود می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد، رنگ می‌تواند مکان باشد که در صورت ارزشمند بودن مکان اول و ارزش نزولی تا مکان آخر از این مجموعه فازی استفاده می‌شود و یا رنگ می‌تواند زمان باشد که در آن ارزش زمان انجام عمل طبق ارزش بندی مجموعه فازی $\tilde{A}$ باشد و یا بسیاری از مسائل دیگر، در این قسمت به یکی از کاربردهای آن در مسئله زمان بندی امتحان می‌پردازیم.

۴-۴-۱ مسئله زمان بندی امتحان

مسئله زمان بندی امتحان، شامل تخصیص یک تعداد امتحان به یک تعداد دورهای زمانی از بین کل دوره‌ی زمانی امتحانات می‌باشد که دانش آموزان نمی‌توانند بیش از یک امتحان در یک زمان یکسان داشته باشند و همچنین بسیاری از محدودیت‌های مکانی و محدودیت‌های دیگر. هدف دراین مسئله مینیمم کردن کل دوره‌ی امتحانات می‌باشد [۳۰].

یک حالت ساده‌ی این مسئله می‌تواند به عنوان یک مسئله رنگ آمیزی بیان شود. هر امتحان یک رأس گراف است و یال‌ها پیوند دهنده‌ی امتحان‌های ناسازگار است، که حداقل یک دانش آموز در هر دو امتحان وجود دارد. هر رنگ نشان دهنده‌ی یک قطعه زمانی است و رأس‌های رنگ شده‌ی یکسان به یک قطعه‌ی زمانی تخصیص می‌یابد، با رنگ آمیزی مناسب کل دوره‌ی برگزاری امتحان کمینه می‌شود.

این مسئله به این صورت بیان شده را می‌توان با گراف قطعی مدل بندی و حل نمود، که زمان برگزاری برای یک زیرمجموعه از دانش آموزان، در فاصله زمانی یک و صفر انجام می‌شود حال آنکه سختی امتحانات در نظر گرفته نمی‌شود، در رنگ آمیزی (d, f) تابع عدم تشابه d، حداقل فاصله بین برگزاری امتحانات را بیان می‌کند.

۴-۴-۲ مسئله زمان بندی فازی امتحان

واحد زمان را در این مسئله روز در نظر بگیریم، اگر ارزش برگزاری روزهای امتحان برابر نباشد و روزهای ابتدائی برگزاری امتحان نسبت به روزهای آخر، ارزش بیشتری داشته باشند، این ارزش گذاری را با یک تابع عضویت، فازی می‌نماییم.

تابع عضویت رابطه (۴-۱)، به روز اول بیشترین ارزش را می‌دهد و به ترتیب برای آخرین روز برگزاری امتحان کمترین ارزش را تخصیص می‌دهد، با اعمال این تابع عضویت برای ارزش بندی روزهای امتحانات، با توجه به مسئله $(ofecp)$ که در آن ارزش زمان برگزاری امتحان v برابر $\mu_{\tilde{A}}(c(v))$ است، زمان برگزاری بهینه امتحانات بدست می‌آید.

مثال ۴-۴-۱ مدل گراف فازی بیان شده در مثال ۳-۴-۱ با مجموعه فازی $\tilde{A}$ ارائه شده در رابطه (۴-۱) را در نظر بگیرید.

با رنگ آمیزی توسعه یافته (d, f) داریم:

$$c(A)=1 \quad c(B)=3 \quad c(C)=6 \quad c(D)=3 \quad c(E)=6 \quad \Rightarrow \chi=6$$
$$\sum_{i\in\{1,\dots,5\}} \mu_{\tilde{A}}(c(v_i))=4.142857$$

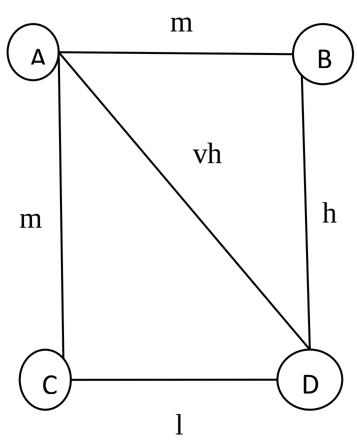
با رنگ آمیزی مجموع، روی رنگ آمیزی توسعه یافته (d, f) داریم:

$$c(A)=6 \quad c(B)=4 \quad c(C)=1 \quad c(D)=4 \quad c(E)=1 \quad \Rightarrow$$
$$\sum_{E} G=16 \;, \quad s_e=6 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i\in\{1,\dots,5\}} \mu_{\tilde{A}}(c(v_i))=4.3125$$

این مدل گراف فازی مربوط به زمان‌بندی امتحانات می‌باشد که در آن مجموعه {A,B,C,D,E } به عنوان رئوس گراف، نشان‌دهنده‌ی امتحانات می‌باشد و با توجه اولویت بندی زمان امتحانات اعمال شده با مجموعه فازی $\tilde{A}$، نحوه‌ی برگزاری امتحانات با دو رنگ آمیزی در فوق آمده است. رنگ آمیزی توسعه یافته (d,f) با استفاده از الگوریتم ارائه شده در مرجع [۲] بدست آمده که در این مثال با این رنگ آمیزی در روز اول امتحان A برگزار می‌شود و در روز سوم امتحان D,B و در روز ششم که روز آخر است دو تا امتحان C,E برگزار می‌شود و با ارزش بندی این روزها توسط مجموعه فازی $\tilde{A}$،
مجموع این ارزش‌ها برای تمام روزها برابر ۴,۱۴۲۸۵۷ شده است و رنگ آمیزی مجموع توسعه یافته با استفاده از الگوی رابطه ۴-۲ بدست امده است. که با این رنگ آمیزی در روز اول دو امتحان C,E برگزار می‌شود و در روز چهارم دو امتحان B,E و در روز ششم امتحان A برگزار می‌شود و با ارزش بندی این روزها با مجموعه فازی $\tilde{A}$، مجموع این ارزش‌ها برای تمام روزها برابر ۴,۳۳۱۲۵ شده است که بهتر از رنگ امیزی قبلی است.

در این مثال داشتیم که عدد رنگی و رأس قدرت گراف فازی برابر است یعنی $s=\chi=6$ و این همیشه لازم نیست برقرار باشد در مثال بعدی رابطه $s<\chi$ برقرار می باشد.

مثال ۴-۴-۲ گراف فازی ترسیم شده در شکل ۴-۱ را در نظر بگیرید که یال‌های فازی آن در شکل داده شده است، مجموعه فازی $\tilde{A}$ همان مجموعه فازی بیان شده در رابطه ۴-۱ است.



شکل ۴-۱-گراف فازی برای مثال ۴-۴-۲

با رنگ آمیزی مجموع، روی رنگ آمیزی توسعه یافته (d, f) داریم:

$$c(v_1)=3,\ c(v_2)=1,\ c(v_3)=7,\ c(v_4)=1 \quad \Rightarrow s(G)=7,\ \sum\nolimits_E G=12 \Rightarrow$$

$$\sum_{i\in v}\mu_{\tilde{A}}(c(v_i))=3.3333$$

با رنگ آمیزی توسعه یافته (d, f) داریم:

$$c(v_1)=1,\ c(v_2)=3,\ c(v_3)=6,\ c(v_4)=3 \quad \Rightarrow \chi_{d,f}=6 \quad \Rightarrow \sum\nolimits_{i\in V} c(v_i)=13 \Rightarrow$$

$$\sum_{i\in v}\mu_{\tilde{A}}(c(v_i))=3.3076$$

با رنگ آمیزی مجموع، با اینکه در مدت ۷ روز کل امتحانات به پایان می‌رسد که بیشتر از مدت زمان برگزاری این امتحانات با رنگ آمیزی توسعه یافته است (۶) با این حال مجموعاً ارزش رنگ آمیزی مجموع روی رنگ آمیزی توسعه یافته بیشتر است.

۴-۵ مقایسه رنگ آمیزی مجموع توسعه یافته و رنگ آمیزی توسعه یافته با رنگ‌های فازی

به منظور مقایسه مقدار مجموع ارزش $\sum_{v\in V}\mu_{\tilde{A}}(c_{d,f}(v))$ در دو نوع رنگ آمیزی مجموع توسعه یافته (d, f) و رنگ آمیزی توسعه یافته (d, f)، ۹ گراف فازی $\tilde{G}=(V,\mu)$ به دلخواه در نظر می‌گیریم، به این صورت که برای هر کدام از سه گراف با ۶ و ۷ و ۸ رأسی سه تیپ گراف در نظر می گیریم و تابع رنگ آمیزی $C_{d,f}$ را مربوط به رنگ آمیزی مجموع توسعه یافته و تابع رنگ آمیزی $C'_{d,f}$ را مربوط به رنگ آمیزی توسعه یافته در نظر می‌گیریم، در جدول ۴-۱ نتایج محاسباتی این ۹ گراف برای این دو رنگ آمیزی آمده است. در این جدول عدد رنگی و رأس قدرت برای دو رنگ آمیزی و همچنین مجموع رنگ‌های تخصیصی قبل و بعد از ارزش گذاری این رنگ‌ها با رابطه ۴-۱، آمده است.

جدول ۴-۱- مقایسه رنگ آمیزی مجموع توسعه یافته با رنگ آمیزی توسعه یافته

n	$Type$	$\chi_{d,f}$	S	$\sum_{i\in v}c'_{d,f}(v_i)$	$\sum_{i\in v}c_{d,f}(v_i)$	$\sum_{i\in v}\mu_{\tilde{A}}(c'_{d,f}(v_i))$	$\sum_{i\in v}\mu_{\tilde{A}}(c_{d,f}(v_i))$
۶	۱	۹	۱۰	۲۷	۲۶	۵,۲۲۲۲	۵,۲۳۰۷
	۲	۹	۱۰	۲۸	۲۳	۵,۲۱۴۲	۵,۲۶۰۸
	۳	۸	۸	۲۷	۲۱	۵,۲۲۲۲	۵,۲۸۵۷
۷	۴	۱۰	۱۲	۳۲	۳۱	۶,۲۱۸۷	۶,۲۲۵۸

	۵	۸	۹	۲۷	۲۶	۶,۲۵۹۲	۶,۲۶۹۲
	۶	۱۱	۱۱	۳۲	۲۹	۶,۲۲۵۸	۶,۲۴۱۳
۸	۷	۷	۸	۲۹	۲۹	۷,۲۷۵۸	۷,۲۷۵۸
	۸	۷	۷	۳۱	۲۹	۷,۲۵۸۰	۷,۲۵۸۰
	۹	۸	۸	۲۸	۲۵	۷,۲۸۵۷	۷,۲۸۵۷

طبق جدول برای برخی تیپ گراف‌ها، با اینکه عددرنگی $\chi_{d,f}$ از رأس قدرت s کمتر است مقدار ارزش فازی $\sum_{i\in v}\mu_{\tilde{A}}(c'_{d,f}(v_i))$ مساوی با مقدار ارزش فازی $\sum_{i\in v}\mu_{\tilde{A}}(c_{d,f}(v_i))$ است و یا ممکن است $\chi_{d,f}=s$ باشد در حالی که $\sum_{i\in v}\mu_{\tilde{A}}(c'_{d,f}(v_i))<\sum_{i\in v}\mu_{\tilde{A}}(c_{d,f}(v_i))$. ستون آخر مقدار ارزش رنگ آمیزی مجموع توسعه یافته (d, f) است که برای تمام تیپ گراف‌ها این مقدار نسبت به ستون قبلی آن که با رنگ آمیزی توسعه یافته (d, f) بدست آمده بیشتر یا مساوی است.

فصل پنجم

رنگ آمیزی بازه‌ای و دوری گراف وزن دار فازی

مقدمه

در فصل سوم مسئله رنگ آمیزی گراف‌های فازی برای مدل حرکت مسیرهای ترافیکی در چهار راه، مورد بررسی قرار گرفت که در آن سطح تداخل مسیرهای ترافیکی فازی است و سطح تداخل این مسیرها، می تواند بیشتر یا کمتر باشد. در این مسئله حجم ترافیک در تمام مسیرهای ترافیکی یکسان در نظر گرفته شد، حال آنکه در برخی حالات و چهارراه‌ها، حجم ترافیک در مسیرهای گوناگون

متفاوت است این حجم ترافیک را با وزن مشخص می‌کنیم. هدف کلی در این فصل ارائه رنگ آمیزی مناسب برای گراف فازی وزن دار است.

۵-۱ رنگ آمیزی بازه‌ای گراف وزن دارقطعی

رنگ آمیزی بازه‌ای گراف قطعی، در قسمت ۲-۳ تعریف شد، اگر در مدل مسئله، رئوس گراف وزن داشته باشند آنگاه طول بازه‌ی تخصیص یافته به رئوس گراف با رنگ آمیزی بازه‌ای این گراف، هم-اندازه‌ی وزن رئوس گراف است.

در مسئله رنگ آمیزی بازه‌ای، برای گراف وزن دار $G=(V,E,W)$ که $W: V \to N$ وزن رئوس گراف است به هر رأس v، بازه‌ی $g(v)$ تخصیص می‌یابد به طوری که $|g(v)|=W(v)$ با این شرط که برای هر یال $uv \in E$ داریم $|\mathrm{g}(u) \cap \mathrm{g}(v)| = \emptyset$، در این مسئله هدف، یافتن مقدار $Min \ |\cup_{v \in V} \mathrm{g}(v)|$ است[۳۱].

مینیمم مقدار بازه‌ی بدست آمده از رنگ آمیزی بازه‌ای، طول رنگ آمیزی است که در آن تمام رئوس گراف یک بار هر کدام یک رنگ را می‌پذیرند، که رئوس مجاور در گراف رنگ یکسان نمی‌گیرد. حال اگر رنگ‌های مدل مورد بررسی از نوع زمان باشد، آنگاه با مسائل زمان بندی سرو کار داریم که برای هر رأس گراف، یک مدت زمان تخصیص داده می‌شود، مثلاً در زمان‌بندی مسئله چراغ ترافیک، مسیرهای ترافیکی متداخل، نباید در یک زمان حرکت کنند، هدف در این مسائل یافتن مدت زمان دوره است که در آن تمام مسیرهای ترافیکی هم‌زمان با سبز شدن چراغ عبور کنند. در برخی از مسائل زمان‌بندی چراغ ترافیک، سطح تداخل مسیرهای ترافیکی متلاقی، درجه بندی شده است و ممکن است ضعیف یا متوسط یا قوی باشد که برای زمان‌بندی این مدل، در زیر بخش بعدی رنگ آمیزی بازه‌ای گراف فازی ارائه می‌شود.

۲-۵ رنگ آمیزی بازه‌ای گراف فازی

مسئله سیستم چراغ ترافیک با ناسازگاری فازی یال‌ها، برأساس دنباله α-برش‌های $G_\alpha=(V,E_\alpha)$ در قسمت ۳-۲-۱ مورد بررسی قرار گرفت که این ناسازگاری به صورت مجموعه سطح شدت $I=\{n,l,m,h,t\}$ در نظر گرفته شد به طوری که n وl وm وh به ترتیب درجه ناسازگاری یا سطح شدت هیچ-کم-متوسط-قوی برای هر یک از یال‌ها و t ناسازگاری یا سطح شدت کلی گراف را نشان می‌دهند. در مسئله سیستم چراغ ترافیک، حجم ترافیک در مسیرهای عبوری تاثیری نداشت و در قسمت ۳-۲-۱ بیان شد که با رنگ آمیزی معمولی گراف‌های قطعی G_α که $\alpha\in I$ نحوه عبور و مرور برای مسیرهای ترافیکی بدست آمد. حال آنکه در سیستم چراغ ترافیک، حجم ترافیک ثابت نیست این حجم ترافیک می‌تواند توسط حسگرهای تعبیه شده در سطح خیابان مشخص شود، که معمولاً با مقیاس تعداد ماشین‌های عبوری در واحد ثانیه بیان می‌شود، مجموعه وزن‌های $w_1,w_2,\ldots,w_n$، این حجم ترافیک را برای مسیرهای ترافیکی نشان می‌دهند. این سیستم را با گراف وزن دار فازی $\tilde{G}=(V,\mu,W)$ مدل بندی می‌کنیم که رئوس قطعی گراف، وزن دار و یال‌ها فازی هستند.

برای رنگ آمیزی این مدل گراف‌ها از رنگ آمیزی معمولی گراف های وزن دار قطعی $G_\alpha=(V,E_\alpha,W)$ جواب مناسب نمی‌دهد و تابع رنگ آمیزی بازه‌ای برای این مدل‌ها جواب بهتر می دهد.

مثال ۵-۲-۱ مدل گراف فازی مطرح شده برای چهار راه در مثال ۳-۲-۱ را در نظر بگیرید.

در ضعیف‌ترین سطح ناسازگاری l که کل یال‌های ناسازگار را شامل می شود عدد رنگی ۳ بدست آمد و نحوه‌ی عبور مسیرهای ترافیکی $\{AB,AD,CB,CD,DB\}$ بدون در نظر گرفتن حجم ترافیک به صورت $C_\alpha^{\chi_\alpha}(AB)=C_\alpha^{\chi_\alpha}(AD)=1,\ C_\alpha^{\chi_\alpha}(CB)=C_\alpha^{\chi_\alpha}(CD)=2,\ C_\alpha^{\chi_\alpha}(DB)=3$ است حال اگر حجم ترافیک به صورت زیر باشد:

v	۱	۲	۳	۴	۵
$w(v)$	۵	۳	۵	۳	۴

با رنگ آمیزی بازه‌ای گراف قطعی وزن دار $G_l = (V, E_l, W)$ برای مثال ۳-۲-۱ نحوه‌ی عبور مسیر-های ترافیکی به صورت زیر بدست می‌آید:

مسیر ترافیکی	۱=AB	۲=AD	۳=CB	۴=CD	۵=DB
نحوه‌ی عبورمسیرترافیکی(زمان)	(۰, ۵)	(۰, ۳)	(۵, ۱۰)	(۵, ۸)	(۸, ۱۲)

یعنی عدد رنگی بازه‌ای برابر ۱۲ است.

بدین منظور برای یافتن عد رنگی بازه‌ای و تابع رنگ آمیزی بازه‌ای از الگوریتم‌های ارائه شده برای رنگ آمیزی بازه‌ای می توان استفاده کرد [۳۲, ۳۳].

به طور کلی عدد رنگی گراف وزن دار را با $\chi(G, w)$ نشان می دهند در این تحقیق، عدد رنگی گراف وزن دار قطعی $G_l = (V, E_l, W)$ که l ضعیف‌ترین سطح ناسازگاری α از سطح شدت یال‌های فازی $\tilde{E}$ است را با نماد $\chi(G', w)$ نشان می دهیم.

۳-۵ رنگ آمیزی فازی بازه‌ای گراف وزن دار فازی $\tilde{G} = (V, \mu, W)$

در فصل سوم بخش ۳، رنگ آمیزی فازی گراف‌های فازی $\tilde{G} = (\sigma, \mu)$ بررسی شد که در آن رئوس و یال‌های گراف، فازی هستند و یال‌های ضعیف که با توجه به σ, μ تعیین می‌شوند رنگ یکسانی

می‌گیرند. در این رنگ آمیزی، اگر رئوس گراف قطعی باشد آنگاه تعیین یال‌های ضعیف و قوی مستقل از رئوس گراف است.

برای مسئله چراغ ترافیک با یال‌های فازی با مجموعه شدت‌های $\{n,l,m,h\}$ یال‌های با سطح شدت m,h یال‌های قوی هستند و یال‌های با سطح شدت $n,.l$ یال‌های ضعیف هستند.

یال‌های فازی برای مسئله ترافیک می تواند به صورت مجموعه $\{n,vl,l,m,h,vh\}$ در نظر گرفته شود به طوری که n و vl و l و m و h و vh درجه ناسازگاری هیچ-خیلی کم- کم-متوسط-قوی و خیلی قوی، برای یال‌ها را نشان می‌دهند که در این صورت طبق تعریف یال قوی، یال‌های m و h وvh یال قوی و یال‌های n و l و vl، یال‌های ضعیف هستند.

تعریف ۵-۳-۱: گراف وزن دار فازی$\tilde{G}$=(V,μ,W) با تابع وزنی $W: V \rightarrow N$، را در نظر بگیرید آنگاه مسئله رنگ آمیزی فازی بازه‌ای، به هر رأس v بازه‌ی $g(v)$ را طوری تخصیص می‌دهد که $|g(v)|$=$W(v)$ با این شرط که برای هر یال قوی uv، داشته باشیم $|\mathrm{g}(u) \cap \mathrm{g}(v)| = \emptyset$، در این مسئله هدف یافتن $Min\ \ |\cup_{v\in V} \mathrm{g}(v)|$.

در مسئله رنگ آمیزی بازه‌ای برای گراف وزن دار فازی $\tilde{G}$=(V,μ,W) یال‌های ضعیف رنگ یکسان می‌پذیرند.

رنگ آمیزی بازه‌ای گراف وزن دار، حالت خاص رنگ آمیزی فازی بازه‌ای گراف وزن دار فازی $\tilde{G}$=(V,μ,W)، است که در آن تمام یال‌ها، قوی باشند یعنی رنگ آمیزی بازه‌ای گراف قطعی G_{α_m}=$(V,E_{\alpha_m}\ ,W)$ است که در آن α_m،کوچکترین عضو مجموعه I است و در آن سطح تمام یال‌ها قوی هستند. این رنگ آمیزی با الگوریتم‌های ارائه شده برای رنگ آمیزی بازه‌ای گراف وزن دار قابل حل است.

تعریف ۵-۳-۲ در مسئله رنگ آمیزی فازی بازه‌ای ، یافتن کوچکترین بازه که در آن تمام یال‌های قوی، رنگ یکسان نگیرد اهمیت دارد که اصطلاحاً به این مقدار، عدد رنگی فازی بازه‌ای می نامیم و با نماد $\chi^f(\tilde{G},w)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۵-۳-۱ :گراف وزن دار فازی $\tilde{G}=(V,\mu,W)$ را در نظر بگیرید که ماتریس مجاورت μ و وزن رئوس W آن به صورت زیر است:

$$\mu=\begin{pmatrix} - & n & l & h & l \\ n & - & n & m & h \\ l & n & - & n & n \\ h & m & n & - & h \\ l & h & n & h & - \end{pmatrix}$$

v	۱	۲	۳	۴	۵
$w(v)$	۵	۳	۵	۳	۴

در این مدل، رئوس نشان دهنده‌ی مسیرهای ترافیکی و وزن آن حجم ترافیک را نشان می دهد این گراف فازی در مثال ۳-۲-۱ بدون در نظر گرفتن وزن، بررسی شده است و گراف فازی آن در ۳-۲ ترسیم شده است.

با رنگ آمیزی بازه‌ای، نحوه‌ی حرکت هر یک از مسیرهای ترافیکی به دست می‌آید، زمان‌های حرکت برای این ۵ مسیر به صورت زیر است:

مسیر ترافیکی	۱	۲	۳	۴	۵
نحوه‌ی عبور مسیر ترافیکی (زمان)	(۰, ۵)	(۰, ۳)	(۰, ۵)	(۷, ۱۰)	(۳, ۷)

$\chi^f(\tilde{G},w)=10$ است و این یعنی که در مدت ۱۰ واحد زمان، کل مسیرهای ترافیکی یک دور می‌زنند.

یعنی ابتدا مسیرهای ترافیکی AB و AD و CB به مدت ۵ و ۳ و ۵ واحد زمان حرکت می‌کنند و در زمان ۳ مسیر ترافیکی DB حرکت می‌کند و پس از ۷ واحد زمان مسیر ترافیکی CD حرکت می‌کند.

۵-۴ .رنگ آمیزی بازه‌ای (In, f) گراف وزن دار فازی

در رنگ آمیزی فازی بازه‌ای، یال‌ها به دو دسته قوی و ضعیف تقسیم می‌شوند و یال با هر شدت که قوی یا ضعیف باشند تفاوتی ندارد مثلاً یال با شدت فازی m با h تفاوتی ندارد.

در مسئله چراغ ترافیک سطح شدت یال‌های ناسازگار می‌تواند به صورت $I=\{n,l,m,h\}$ یا $I=\{n,vl,l,m,h,vh\}$ و.... می‌باشد که به صورت کلی $I=\{\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_{m-1},\alpha_m,...,\alpha_k\}$ نمایش می‌دهیم که یال‌ها با شدت‌های $\{n,vl,l\}$ یال‌های ضعیف و یال‌ها با شدت‌های $\{m,h,vh\}$ یال‌های قوی هستند به بیان کلی، یال‌ها با شدت‌های $\{\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_{m-1}\}$ یال‌های ضعیف و یال‌ها با شدت‌های $\{\alpha_m,\alpha_{m+1},...,\alpha_k\}$ یال‌های قوی هستند. بنابراین به طور کلی α_k قوی‌ترین شدت یال و α_1 ضعیف ترین سطح شدت یال در گراف فازی $\tilde{G}=(V,\mu)$ است.

گراف فازی $\tilde{G}=(V,\mu)$ با مجموعه شدت برای یال‌های فازی به صورت زیر در نظر بگیرید:

$I=\{\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_{m-1},\alpha_m,...,\alpha_k\}$ آنگاه تعاریف زیر را داریم :

تعریف ۵-۴-۱ یالی که درجه عضویت آن بزرگتر از α_m است یال قوی است.

تعریف ۵-۴-۲ یالی که درجه عضویت آن برابر α_k است یال موثر است.

در فصل سوم بخش ۴، رنگ آمیزی توسعه یافته (d,f) بیان شد و کاربرد آن در مسئله زمان‌بندی امتحانات که رنگ‌های تخصیص یافته، با توجه به درجه سخت بودن امتحانات متداخل، توسط تابع f، مقیاس می‌شود، در مسئله چراغ ترافیک تابع مقیاس f را برای میزان ناسازگار بودن و سطح شدت مسیرهای ترافیکی ناسازگار بکار برده می‌شود.

گراف با مجموعه رئوس $\{V_i\,/\,i=1,...,n\}$ را در نظربگیرید، فرض می‌کنیم S مجموعه بازه‌های باز از داخل بازه $[\cdot,r)$ هستند، این مجموعه بازه‌ها که بازه‌های تخصیص یافته به رئوس وزن دار هستند به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$S_i:V_i\to(a(i),b(i))$$

به طوری که $|S_i|=W_i$

تعریف ۵-۴-۱ گراف وزن دار فازی $\tilde{G}=(V,\mu,W)$ با تابع وزنی $W:V \to N$ و $I=\{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{m-1},\alpha_m,\ldots,\alpha_k\}$ و تابع مقیاس f را در نظر بگیرید، رنگ آمیزی بازه‌ای (In, f) به هر رأس، بازه‌ی $g(v)$ از مجموعه S، را طوری تخصیص می‌دهد که $|g(v)|=W(v)$ با این شرط که برای هر یال uv، $|g(u) \cap g(v)| = In(u,v)$ در این مسئله هدف یافتن $Min\ |\cup_{v\in V} g(v)|$ که In مقدار اشتراک مجاز با توجه به یال‌های فازی هستند که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$In(u,v) \le \begin{cases} \min(f(a_k) - f(\mu_{uv})), w_u \wedge w_v) & (u,v) \in E \\ w_u \wedge w_v & (u,v) \notin E \end{cases}$$

در رنگ آمیزی بازه‌ای گراف قطعی G، بازه‌های تخصیص یافته به رئوس مجاور اشتراک ندارند و بازه‌های تخصیص یافته به رئوس غیر مجاور اشتراک کامل دارند اما در رنگ آمیزی (In, f) اگر یک یال قوی‌ترین درجه عضویت از بین مجموعه I داشته باشد آنگاه بازه‌های تخصیص یافته به رئوس متصل به این یال اشتراک ندارند در غیر این صورت این بازه‌ها بنابر درجه عضویت یال‌های متصل به رئوس، اشتراک پیدا می‌کنند.

این رنگ آمیزی تعمیمی از رنگ آمیزی بازه‌ای گراف‌های وزن دار قطعی است اگر مقدار اشتراک مجاز In به صورت زیر تعریف شود :

$$In(u,v) \le \begin{cases} 0 & (u,v) \in E \\ w_u \wedge w_v & (u,v) \notin E \end{cases}$$

و تعمیمی از رنگ آمیزی بازه‌ای گراف‌های قطعی است اگر مقدار اشتراک مجاز In به صورت زیر تعریف شود :

$$In(u,v) \le \begin{cases} 0 & (u,v) \in E \\ 1 & (u,v) \notin E \end{cases}$$

بنابراین برای بدست آوردن اعداد رنگی $\chi^f(\tilde{G},w), \chi(G',w)$ می توان از رنگ آمیزی بازه‌ای (In, f) استفاده کرد، که در آن عدد رنگی $\chi(G',w)$ از رنگ آمیزی گراف قطعی وزن دار G_{α_1} و عدد رنگی $\chi^f(\tilde{G},w)$ از رنگ آمیزی گراف قطعی وزن دار G_{α_m} بدست می‌آید. در قسمت ۵-۵ یک الگوریتم برای یافتن تابع رنگ آمیزی و عدد رنگی مسئله رنگ آمیزی بازه‌ای (In, f) ارائه می‌گردد.

به طور معمول برای نمایش گراف از ماتریس مجاورت و ماتریس وقوع استفاده می‌شود برای رنگ آمیزی بازه‌ای (In, f) ماتریس مجاورت اشتراک AIn را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۵-۴-۱ گراف وزن دار فازی $\tilde{G}=(V,\mu,W)$ با قوی‌ترین شدت یال $a_k \in I$ و تابع مقیاس f را در نظر بگیرید. ماتریس مجاورت اشتراک این گراف به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{A}In(i,j) = \begin{cases} -1 & (i,j) \notin E \\ 0 & \text{یال موثر باشد } (i,j) \\ \min(f(a_k) - f(\mu_{ij}), w_i \wedge w_j) & \text{یال موثر نباشد } (i,j) \end{cases}$$

به عبارت دیگر اگر رئوس i,j با هم سازگاری کامل داشته باشند قرار داده می‌شود $\mathrm{A}In(i,j) = -1$ و اگر با هم با یال‌های موثر وصل هستند قرار داده می‌شود $AIn(i,j) = 0$ و برای یال‌های دیگر مقدار ماتریس مجاورت اشتراک را $\min(f(a_k) - f(\mu_{ij}), w_i \wedge w_j)$ گرفته می‌شود که بازه‌های تخصیص یافته به رئوس i,j به این اندازه نیز اشتراک دارند.

رنگ آمیزی فازی بازه‌ای، تعمیمی از رنگ آمیزی بازه‌ای (In, f) است اگر ماتریس مجاورت اشتراک به صورت زیر در نظر گرفته شود:

$$\mathrm{A}In(i,j) = \begin{cases} -1 & (i,j) \notin E \\ 0 & \text{یال قوی باشد } (i,j) \\ w_i \wedge w_j & \text{یال قوی نباشد } (i,j) \end{cases}$$

رنگ آمیزی گراف قطعی وزن دار G_{α_1} ، تعمیمی از رنگ آمیزی بازه‌ای (In, f) است اگر ماتریس مجاورت اشتراک به صورت زیر در نظر گرفته شود:

$$\mathrm{A}In(i,j)=\begin{cases}-1 & (i,j)\notin E_{\alpha_1}\\ 0 & (i,j)\in E_{\alpha_1}\end{cases}$$

در این تحقیق تابع مقیاس f برای مجموعه شدت یال‌های فازی $I=\{n, l, m, h\}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

I	n	l	m	h
$f(I)$	۰	۱	۲	۳

یک r–رنگ آمیزی بازه‌ای (In, f) گراف وزن دار را به اختصار $g_I^{\,r}$ نشان می‌دهیم که یک تابع رنگ آمیزی به صورت زیر است که در آن r، طول بازه‌ی بدست آمده است:

$g_I^{\,r} : V(G) \rightarrow \{[0, r)$ از بازه‌ی $w(v)$ زیر بازه‌های باز به طول$\}$

به طوری که برای هر یال (u,v)، $g_I^r(u)\cap g_I^r(v)=In(u,v)$

تعریف ۵-۴-۲ در رنگ آمیزی بازه‌ای (In, f) هدف، پیدا کردن بازه‌های تخصیص یافته به رئوس، با کمترین مقدار r است که به آن عدد رنگی رنگ آمیزی بازه‌ای توسعه یافته، می‌گویند و با نماد $\chi_{I,f}(\widetilde{G})$ نشان می‌دهیم و به عبارت دیگر:

$\chi_{I,f} = \inf\{r \;\; s.\, t$ موجود باشد $\widetilde{G}$ گراف وزن دار، (In, f) رنگ آمیزی بازه‌ای-$r\}$

مثال ۵-۴-۱:گراف وزن دار فازی $\widetilde{G}=(V,\mu,W)$ ارائه شده در مثال ۵-۳-۱ را در نظر بگیرید، با رنگ آمیزی بازه‌ای (In, f)، مسیرهای ترافیکی که با یال موثر h به هم وصل شده‌اند نمی‌توانند همزمان عبور کنند بقیه مسیرها بنا به درجه فازی یال‌های متصل به مسیرها، اشتراک دارند، مسیر ترافیکی {AD,CD} سطح شدت تداخل m دارند و یک واحد می‌توانند اشتراک داشته باشند و مسیر

ترافیکی {AB,CB} و {AB,DB} که سطح شدت تداخل l دارند می‌توانند ۲ واحد اشتراک داشته باشند، ماتریس مجاورت اشتراک به صورت زیر است:

$$AIn = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

تابع رنگ آمیزی این گراف فازی به صورت زیر است.

مسیر ترافیکی i	۱	۲	۳	۴	۵
$g_I(i)$	(۰ , ۵)	(۰ , ۳)	(۳, ۸)	(۷, ۱۰)	(۳, ۷)

از مثال‌های ۵-۲-۱ و ۵-۳-۱ و ۵-۴-۱ روابط زیر بدست آمد.

$$\chi(G', w) = 12, \chi^f(\tilde{G}, w) = 10, \chi_{I,f}(\tilde{G}) = 10$$

مثال ۵-۴-۲ گراف وزن دار فازی با ماتریس مجاورت μ و وزن‌های W داده شده است.

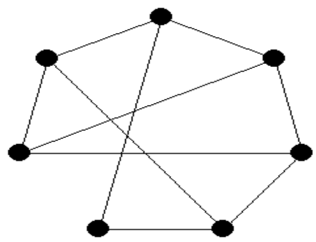
$$\mu = \begin{pmatrix} - & h & n & n & h & n & m \\ h & - & m & n & n & l & n \\ n & m & - & h & n & m & n \\ n & n & h & - & m & n & h \\ h & n & n & m & - & n & n \\ n & l & m & n & n & - & m \\ m & n & n & h & n & m & - \end{pmatrix}$$

رئوس	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
وزن	۳	۴	۳	۴	۳	۲	۲

ماتریس مجاورت اشتراک به صورت زیر است:

$$AIn=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

گراف مربوطه در شکل ۵-۱ ترسیم شده است.



شکل ۵-۱ گراف فازی برای مثال ۵-۴-۲

با رنگ آمیزی بازه‌ای (In, f) تابع رنگ آمیزی زیر بدست می‌آید.

رئوس i	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$g_I(i)$	(۰,۳)	(۳,۷)	(۰,۳)	(۳,۷)	(۶,۹)	(۲,۴)	(۷,۹)

بنابراین $\chi_{I,f}(\tilde{G})=9$.

در این مثال، رنگ آمیزی فازی بازه‌ای، ماتریس مجاورت اشتراک، از جانشینی $AIn(i,j)=2$ با $AIn(i,j)=0$ بدست می‌آید و بقیه مولفه‌ها ثابت است و تابع رنگ آمیزی حاصل به صورت زیر است.

رئوس i	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$g\ (i)$	(۰,۳)	(۳,۷)	(۰,۳)	(۵,۹)	(۳,۶)	(۷,۹)	(۳,۵)

بنابراین $\chi^{f}(\tilde{G},w)=9$ است.

و برای رنگ آمیزی بازه‌ای گراف وزن دار $G_l=(V,E_l,W)$، ماتریس مجاورت اشتراک از جانشینی $AIn(i,j)>0$ با $AIn(i,j)=0$ بدست می‌آید و بقیه مولفه‌ها ثابت است و تابع رنگ آمیزی حاصل به صورت زیر است.

رئوس i	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$g\ (i)$	(۰,۳)	(۳,۷)	(۰,۳)	(۶,۱۰)	(۳,۶)	(۷,۹)	(۳,۵)

بنابراین $\chi(G',w)=10$ است.

بنابراین $\chi_{I,f}(\tilde{G})$ نسبت به $\chi(G',w)$ ۱ واحد کاهش زمانی در هر تکرار دارد که اگر هر واحد، معادل۳۰ ثانیه باشد آنگاه در هر ۵ دقیقه در این سیستم یک بار کل عمل‌ها و با رنگ آمیزی بازه‌ای (In,f) در هر ۴,۵ دقیقه این عمل ها انجام می‌شوند پس در هر ۵ دقیقه نیم دقیقه کاهش زمانی برای انجام تمام عمل‌ها نسبت به رنگ آمیزی معمولی داریم و برای ۱۰ ساعت، ۱ ساعت کاهش زمانی داریم که این مقدار زمان زیادی است.

به طور کلی رابطه $\chi^{f}(\tilde{G},w)\leq\chi(G',w)$ و $\chi_{I,f}(\tilde{G})\leq\chi(G',w)$ بر قرار است اما رابطه خاصی بین $\chi^{f}(\tilde{G},w)$ و $\chi_{I,f}(\tilde{G})$ نیست.

در زیر بخش بعدی یک الگوریتم دقیق برای بدست آوردن عدد رنگی و تابع رنگ آمیزی بازه‌ای (In,f) آمده است.

۵-۵ ارائه الگوریتم برای حل مسئله رنگ آمیزی بازه‌ای گراف‌های فازی

۵-۵-۱ مقدمه

گراف وزن دار فازی $\tilde{G} = (V, \mu, W)$ را در نظر بگیرید با تعداد رئوس $|V|=n$، فرض کنید $S=\{s_۱, s_۲ , s_۳ ,\dots, s_n\}$ مجموعه رنگ‌هایی باشند که به صورت بازه‌ای، در دسترس هستند و تابع *In* مقدار اشتراک ممکن برای رئوس گراف باشد و تابع *f*، تابع مقیاس باشد، آنگاه می‌خواهیم یک الگوریتم برای رنگ آمیزی بازه‌ای (In, f) گراف فازی بیان کنیم.

به طور کلی رایج ترین برنامه برای یافتن عدد رنگی یا مینیمم بازه‌ی رنگ آمیزی برای گراف قطعی مبتنی بر دو روش زیر است:

۱-یافتن مجموعه مستقل ماکزیمال

۲-شمارش ضمنی بوسیله عمل پیمایش معکوس (*back tracking*)

روش اول در مراجع [۳۴, ۳۵, ۳۶, ۳۷] بیان شده است، که اساس آن به صورت زیر است:

فرض کنید $G=(V,E)$ گراف قطعی باشد، آنگاه با استفاده از مجموعه مستقل ماکزیمال *M*، عدد رنگی گراف را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$\chi(G) = \chi(G \setminus M) + 1$ که $G(V\backslash M)$، زیرگراف تولید شده توسط $V\backslash M$ است.

در این تحقیق برای بدست آوردن رنگ آمیزی بازه‌ای مورد نظر از روش دوم استفاده می‌شود.

قدیمی‌ترین روش نوع دوم در مرجع [۳۸] آمده است، الگوریتم برون(Brown) به وسیله‌ی دوباره مرتب سازی رئوس گراف، آغاز می‌شود سپس متناوباً از گام به جلو و گام به عقب استفاده می‌کند. در

گام به جلو رنگ‌ها به رئوس متوالیاً تخصیص می‌یابد تا زمانی که رأسی به علت نبودن رنگ‌های در دسترس نتواند رنگ شود، در گام به عقب، متوالیاً به عقب حرکت می‌کنیم تا رأسی با رنگ‌های در دسترس بعدی بتواند رنگ شود.

به هر حال یک تابع رنگ آمیزی بدست می‌آید، این الگوریتم برای یک تابع رنگ آمیزی با رنگ‌های کمتر جستجو می‌کند تا زمانی که رأس اول گراف، گام به عقب برسد.

چندین نویسندگان برای بهبود الگوریتم برون کوشش کردند. که اساس این بهبود از دو جهت بوده است، یکی اینکه روش‌های مختلفی برای دوباره مرتب سازی رئوس، بکار برده شده است که همه این روش‌ها مبتنی بر مرتب سازی درجه رئوس است، جهت دوم تعیین یک کران پایین، با استفاده از خوشه گراف می‌باشد [۲].

بنابراین می‌توان انتظار داشت که این بهبودها برای رنگ آمیزی بازه‌ای (In, f) مفید خواهد بود، ابتدا مفهوم سطح شدت یالی برای گراف‌های فازی با توجه به نوع رنگ آمیزی، باید تعریف و تعمیم داده شود همچنین برای تعیین کران پایین و یافتن خوشه، تعریفی که از خوشه برای گراف‌های معمولی داریم برای گراف فازی بدون از دست دادن کلیت تعمیم داده شود البته چون گراف، فازی است ما علاقه‌مند به یافتن خوشه‌هایی با سطح شدت یالی بیشتر هستیم که این صرفنظر از تعداد رئوس است مثلاً یک خوشه سه رأسی با سطح شدت یالی یک، دارای اندازه خوشه ۳ است، حال آنکه خوشه مورد بررسی در این رنگ آمیزی یک خوشه دو رأسی با سطح شدت یالی ۲ که وزن رئوس آن۲ است، دارای اندازه ۴ است.

در زیر یک الگوریتم برای تعیین عدد رنگی بازه‌ای (In, f) و تابع رنگ آمیزی مربوطه را ارائه می‌شود. این الگوریتم از ایده اصلی الگوریتم برون استفاده می‌کند که در آن رنگ‌ها به صورت بازه‌های تخصیص یافته به رئوس است و به دنبال یافتن کوچکترین بازه و بازه‌های مربوط به هر رأس است.

این الگوریتم از روش گریدی برای رنگ آمیزی استفاده می‌کند که به هر رأس، مینیمم رنگ سازگار با رأس‌های رنگ شده قبلی را می‌دهد.

۲-۵-۵ شروع الگوریتم

در این الگوریتم به دنبال یافتن بازه‌ی بهینه‌ی $NEWIL$ هستیم که در آن تمام رئوس گراف فازی $\tilde{G}$ با بازه‌ی مربوطه با تابع رنگ آمیزی (In, f) رنگ آمیزی شوند که نتوان در بازه‌ی کمتر از آن رنگ آمیزی کرد. به عبارت دیگر به دنبال یافتن عبارت زیر هستیم:

$$NEWIL = \min |\cup_{i=1}^{n}(a(i),b(i))|$$

که در آن $a(i)$ و $b(i)$ مکان رأس i ام هستند و $b(i)=a(i)+w(i)$، گراف فازی با مجموعه رئوس $i=1,...,n$ و مجموعه وزن‌های W برای این رئوس با ماتریس مجاورت اشتراک $\mathrm{A}In$ را در نظر بگیرید.

برای شروع قرار می‌دهیم:

$$NewIL \leftarrow IL+1, IL=\sum_{i=1}^{n} w(i), k=1$$

برای این الگوریتم سه شرط دستوری g=1,g=2,g=3 بکار می‌بریم، در شرط دستوری g=1، تا زمانی که $k \leq n$ است برای هر رأس مینیمم رنگ سازگار با رأس رنگ شده قبلی با توجه به مقدار اشتراک مجاز که توسط ماتریس مجاورت اشتراک $\mathrm{A}In$ مشخص می‌شود تخصیص داده می‌شود که در k=n یک جواب اولیه $NEWIL$ بدست می‌آید و برای بررسی جواب بهتر از این طول بازه، یک واحد کمتر می‌شود یعنی $IL \leftarrow NewIL-1$ و تمام رئوسی که انتهای بازه‌ی آن از IL رد شده است به ابتدای بازه برمی‌گردانیم.

در روند الگوریتم اگر بازه‌ی یک رأس با در نظرگرفتن مقدار اشتراک مجاز از IL رد شود آنگاه توسط شرط دستوری g=2، به ابتدای بازه برمی‌گردد و برای رأس قبلی آن در صورتی که بازه‌ی آن با IL

برابر نباشد ادامه می‌یابد. در تمام الگوریتم اگر g مخالف ۳ باشد برای رأس k داریم $a(k) \leftarrow a(k)+1$ یعنی $g=3$ باعث می‌شود تا مکان $a(k)$ تغییری نکند.

اتمام این الگوریتم توسط زیربرنامه منطقی halph passed مشخص می‌شود که در آن بازه‌های تخصیص یافته به رئوس ۱ تا k از نصف بازه رد می‌شود.

۱- $NewIL \leftarrow IL+1$ و $g \leftarrow 1, k \leftarrow 1$ و $a(i)=0 \ \ \forall i=1,...,n$

۲-اگر k=0 تمام و $NewIL$ جواب است وگرنه زیربرنامه halph passed را چک کن

۳-اگر halph passed درست باشد تمام و $NewIL$ جواب است وگرنه برو بعدی (۴)

۴-اگر $k \geq 1$ نباشد برو ۱۱ وگرنه برو بعدی

۵-اگر $g \neq 3 \quad \& \quad a(k)+b(k)-1 < IL$ آنگاه عمل $a(k) \leftarrow a(k)+1$ انجام بده سپس برو بعدی وگرنه مستقیماً برو بعدی (۶)

۶-قرار بده $g \leftarrow 1, i \leftarrow 1$

۷-اگر $i \leq k-1$ برو به ۸ وگرنه برو ۱۲

۸-اگر $AIn[i,k] \geq 0$ آنگاه $\begin{cases} tc \leftarrow \min\{a(k)+b(k), a(i)+b(i)\} - \max(a(k), a(i)) \\ tempIn \leftarrow tc - AIn[i,j] \end{cases}$ و برو به ۱۰

وگرنه برو به ۹

۹- $i \leftarrow i+1$ و برو ۷

۱۰-اگر $tempIn > 0$ برو ۱۰ وگرنه برو ۹

۱۱-اگر $a(i)+b(i)-AIn[i,k]+b(k)-1 \leq IL$ آنگاه $a(i) \leftarrow a(i)+b(i)-AIn[i,k] \ , \ g \leftarrow 3$

وگرنه $g \leftarrow 2$ در هر دو صورت برو به ۱۲

۱۲-اگر $g=1$ برو ۱۳ وگرنه برو به ۱۵

۱۳-اگر $k<n$ آنگاه $k \leftarrow k+1$ و برو به ۲ وگرنه برو به ۱۴

۱۴- اگر $k{=}n$ آنگاه یک جواب بازه‌ای اولیه $(NewIL)$ برای هر رأس i به صورت $(a(i),b(i))$ بدست می‌آید و برو به ۱۵ وگرنه برو به ۱۶

۱۵-۱- $IL \leftarrow NewIL$ و برای رئوسی که $k \leftarrow j-1 \Leftarrow A(j)+b(j)>IL$ و برای رئوس $a(j)=0 \Leftarrow \ j=k+1 \text{ to } n$

۱۶-اگر $g=2$ آنگاه $k \leftarrow k-1 \ , \ a(k) \leftarrow 0$ و برو به ۱۷وگرنه برو به ۲

۱۷-اگر $k \geq 0 \ \ \& \ \ a(k)+b(k)-1=IL$ آنگاه $k \leftarrow k-1 \ , \ a_k \leftarrow 0$ و دوباره این مرحله را چک کن وگرنه برو به ۲

۳-۵-۵ آزمایشات محاسباتی

به منظور آزمایش کردن این الگوریتم، یک برنامه کامپیوتری به زبان دلفی ۷ نوشته شده است که در بخش پیوست ارائه شده است، عدد رنگی بازه‌ای توسعه یافته ازگراف وزن دار فازی و تابع رنگ آمیزی مربوطه را محاسبه می‌کند. این محاسبات در یک سیستم کامپیوتری با مشخصات *cpu* GHz ۱,۹ و ۲GB رم انجام شده است.

زمینه آزمایش از گراف‌های وزن دار فازی استفاده شده است. وزن‌ها بین ۱ تا ۵ در نظر گرفته می‌شود و یال‌های فازی از مجموعه $I=\{null, low, medium, high\}$ تولید می‌شود و تابع مقیاس f به صورت زیر تعریف شده است.

I	$null$	low	$medium$	$high$

$f(I)$	۰	۱	۲	۳

سرعت اجرای الگوریتم ارائه شده به سه عامل بستگی دارد، یکی وزن رئوس و دیگری شدت یال‌ها و عامل اصلی دیگر که نحوه‌ی مرتب سازی رئوس است. نحوه‌ی مرتب سازی رئوس طوری باشد که زیر گراف‌های کامل با رئوس و وزن‌های بیشتر در اولویت قرار گیرند نتیجه بهتری می‌دهد و سرعت اجرای آن در اکثر موارد چندین برابر افزایش می‌یابد.

مرتب سازی رئوس بر اساس زیر گراف کامل

زیر گراف کامل، زیر گرافی است که تمام رئوس آن توسط یال به یکدیگر متصل هستند، تعداد رأس‌های بزرگترین زیرگراف کامل G عدد خوشه‌ای[1] نامیده می‌شود و با $\omega(G)$ نشان داده می‌شود [۷].

برای آزمایش تاثیر نحوه‌ی مرتب سازی، زیر گراف‌های کامل، گراف‌هایی با ۱۵ و ۲۰ رأسی و از هر کدام ۴ نوع در نظر می‌گیریم، هر یک از این گراف‌ها دارای یک خوشه ۵ رأسی هستند و بقیه زیر گراف‌های کامل دو رأسی هستند، ۴ نوع از این گراف‌ها را طوری در نظر می‌گیریم که در نوع اول، خوشه در یک چهارم ابتدائی رئوس قرار می‌گیرد و در نوع دوم در یک چهارم دوم رئوس قرار می‌گیرد و در نوع سوم در یک چهارم سوم و در نوع چهارم در یک چهارم نهایی رئوس قرار می‌گیرد، وزن رئوس برابر ۱ است و شدت یال ها *high* در نظر گرفته شده است.

رنگ آمیزی بازه‌ای (In, f) برای این گراف‌ها انجام شده است و نتایج آزمایش این گراف‌ها، زمان *cpu* و تعداد تکرار محاسبات در جدول ۵-۱ آمده است، گراف‌ها طوری است که عدد رنگی تمام انواع برابر ۱۰ است و سرعت الگوریتم با توجه به مرتب سازی رئوس مورد آزمایش واقع شده است.

[1]-Clique number

جدول ۵- ۱-آزمایش سزعت الگوریتم با مرتب سازی رئوس بر اساس زیر گراف کامل

	نوع	*Cpu* time(*s*)	تعداد تکرار
۱۵	۱	۰,۰۷۹	۱۸۰
	۲	.۰.۱۰۹	۱۴۹۷
	۳	۰,۱۲۵	۱۲۰۲۹۱
	۴	۱,۲۷۸	۹۷۴۳۰۸۵
۲۰	۱	۰,۰۸۵	۱۸۹
	۲	۰,۸۰۹	۴۰۱۱۰
	۳	۰,۹۲۸	۷۳۳۲۲۹۴
	۴	۳,۴۸,۲۳۴	۱۷۷۵۷۹۲۰۵۵

از این ازمایش نتیجه می‌گیریم که هر قدر خوشه‌ها در ابتدای رئوس قرار گیرد سرعت الگوریتم بیشتر است.

مرتب سازی رئوس بر اساس وزن

به منظور آزمایش تاثیر وزن رئوس در مرتب سازی، گراف‌هایی با ۱۵ و ۲۰ رأسی از هر کدام ۲ نوع در نظر می‌گیریم، هر یک از گراف‌ها خوشه دو رأسی دارند که به طور یکسان در تمام گراف توزیع شده است.

شدت یال ها *high* در نظر گرفته شده است و وزن رئوس از بین {۱،۲،۳،۴،۵} از هر کدام به تعداد یک پنجم رئوس انتخاب شده است.

در نوع اول این وزن‌ها به طور نزولی مرتب شده است و در نوع دوم به طور صعودی مرتب شده است.

رنگ آمیزی بازه‌ای (In, f) برای این گراف‌ها انجام شده است و نتایج آزمایش این گراف‌ها، زمان *cpu* و تعداد تکرار محاسبات در جدول ۵-۲ آمده است، گراف‌ها طوری است که عدد رنگی تمام انواع برابر ۲ است و سرعت الگوریتم با توجه به مرتب سازی رئوس مورد آزمایش واقع شده است.

جدول ۵- ۲-آزمایش سرعت الگوریتم بر اساس مرتب سازی وزن رئوس

	نوع	طول بازه	*Cpu* time(s)	تعداد تکرار
۱۵	۱	۱۰	۰,۰۸۹	۳۱
	۲	۱۰	۱,۱۲۵	۵۹۱۱۷۰۰
۲۰	۱	۱۰	۰,۱۱۰	۳۱
	۲	۱۰	۳,۹۷۸,۵	۳۴۱۵۲۰۸۶۷

از این آزمایش، نتیجه می‌شود که نوع دوم که در آن وزن رئوس به طور نزولی مرتب شده است سرعت بیشتر و بهتری دارد.

۵-۶ رنگ آمیزی دوری از گراف وزن دار قطعی

برای گراف‌های وزن دار، رنگ آمیزی دوری به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۵-۶-۱ یک r-رنگ آمیزی دوری از گراف وزن دار $G=(V,E,W)$ یک نگاشت Δ از رئوس گراف به کمان‌هایی از دورهای C به طول r است به طوری که:

۱- $\Delta(x),\Delta(y)$ برای هر $(x,y)\in E(G)$ مجزا باشد.

۲-طول Δ برای تمام رئوس x حداقل برابر $W(x)$ باشد [۳۹].

عدد رنگی دوری $\chi_c(G,w)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$\chi_c(G,w)=\inf\{r:$ یک r-رنگ آمیزی دوری موجود باشد$\}$ [۳۲].

همچنین تعاریف هم ارز دیگری از این مفهوم توسط گودین[1]، تارسی[2]و ژنگ[3] بیان شده است [۲۹].

۵-۶-۱ الگوی رنگ آمیزی بازه‌ای گراف‌های وزن دار $G=(V,E,W)$

برای r-رنگ آمیزی بازه‌ای گراف‌های وزن‌دار $G=(V,E,W)$ برای هر رأس i بازه‌های تخصیص یافته‌ی $S_i = (a(i), b(i))$ باید شرط‌های ارائه شده در رابطه (۵-۱) را دارا باشد:

$$
\begin{aligned}
&1 - a(i) \le r \quad \forall i \in V \\
&\begin{cases}
2\text{-}1 \quad a(i) - a(j) \ge w(j) \quad if \;\; a(i) \ge a(j) \quad (i,j) \in E \\
3\text{-}1 \qquad a(i) + w(i) \le r \\
2-2 \quad a(j) - a(i) \ge w(i) \quad if \; a(j) \ge a(i) \quad (i,j) \in E \\
3-2 \qquad a(j) + w(j) \le r
\end{cases}
\end{aligned}
\qquad (۵\text{-}۱)
$$

شرط ۱ واضح است، شرط ۲-۱ و ۲-۲ باعث می‌شود که دو رأس مجاور اشتراک نداشته باشند و شرط ۳-۱ و ۳-۲ کران پایین مقدار r را نشان می‌دهد که برای هر رأس باید از مکان آن رأس بعلاوه وزن آن بیشتر باشد.

۵-۶-۲ الگوی رنگ آمیزی دوری گراف‌های وزن دار $G=(V,E,W)$

برای r-رنگ آمیزی دوری گراف‌های وزن دار باید شرط ۳-۱ و ۳-۲ از رابطه ۵-۱ که مقدار کران پایین r در رنگ آمیزی بازه‌ای را نشان می‌دادند با کسر شدن از مقدار ابتدائی بازه کاهش می‌یابد مثلاً برای شرط ۳-۱ از سمت رأس j که $(i,j) \in E$ و $a(j) \le a(i)$ محدود می‌شود تا مقداری از بازه‌ی تخصیص یافته به رأس i بتواند در بازه‌ی تخصیص یافته به رأس j دور بزند، الگوی این رنگ آمیزی در رابطه (۵-۲) آمده است.

[1]-Goddyn
[2]-Tarsi
[3]-Zhang

$$1-a(i)\le r \quad \forall i\in V$$

$$\begin{cases} 2\text{-}1 \quad a(i)-a(j)\ge w(j) \quad if \;\; a(i)\ge a(j) \quad (i,j)\in E \\ 3\text{-}1 \quad a(i)+w(i)-a(j)\le r \\ 2-2 \qquad a(j)-a(i)\ge w(i) \quad a(j)\ge a(i) \quad (i,j)\in E \\ 3-2 \quad a(j)+w(j)-a(i)\le r \end{cases} \tag{۲-۵}$$

۵-۷ رنگ آمیزی دوری (In, f) از گراف فازی

تعریف ۵-۷-۱ یک r-رنگ آمیزی دوری (In, f) از گراف فازی $\tilde{G}$ یک نگاشت Γ از رئوس گراف به کمان‌هایی از دورهای C به طول r است به طوری که:

۱- $\Gamma(x),\Gamma(y)$ برای هر $(x,y)\notin E(G)$ روی هم باشد.

۲- $\Gamma(x),\Gamma(y)$ برای هر $(x,y)\in E(G)$ حداکثر به اندازه‌ی مقدار $\mathrm{A}In(x,y)$ اشتراک دارد.

۳-طول Γ برای تمام رئوس x حداقل برابر $w(x)$ باشد.

عدد رنگی دوری $\chi_{c,I}(\tilde{G})$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$\chi_{c,I}(\tilde{G})=\inf\{r:$ یک r-رنگ آمیزی دوری (In, f) موجود باشد$\}$

۵-۷-۱ الگوی رنگ آمیزی بازه‌ای (In, f)

برای r-نگ آمیزی بازه‌ای (In, f) گراف‌های وزن دار فازی $\tilde{G}=(V,\tilde{E},W)$ برای هر رأس i بازه‌های تخصیص یافته‌ی $S_i = (a(i), b(i))$ باید شرط‌های ارائه شده در رابطه (۵-۳) را دارا باشد:

$$1-a(i) \le r \quad \forall i \in V$$
$$\begin{cases} 2\text{-}1 & a(i)-a(j) \ge w(j)-AIn(i,j) \quad if \quad a(i) \ge a(j) \quad (i,j) \in E \\ 3\text{-}1 & a(i)+w(i)-AIn(i,j) \le r \\ 2-2 & a(j)-a(i) \ge w(i)-AIn(i,j) \quad a(j) \ge a(i) \quad (i,j) \in E \\ 3-2 & a(j)+w(j)-AIn(i,j) \le r \end{cases} \qquad (۳-۵)$$

که AIn ماتریس مجاورت اشتراک گراف فازی $\tilde{G}=(V,\mu,W)$ و برای دو رأس مجاور مقدار اشتراک مجاز را نشان می‌دهد شرط ۲-۱ و ۲-۲ مقدار اشتراک AIn برای رئوس را مجاور مقدور می‌سازد و شرط ۳-۱ و ۳-۲ کاهش کران پایین به اندازه‌ی اشتراک مجاز AIn را بیان می‌دارد. در زیربخش ۵-۷-۲ این الگو را برای حالت دوری تعمیم می‌دهیم.

۵-۷-۲ الگوی رنگ آمیزی دوری (In, f) از گراف های فازی

گراف فازی وزن دار $\tilde{G}=(V,\mu,W)$ با ماتریس مجاورت اشتراک AIn در نظر بگیرید برای r-رنگ آمیزی دوری گراف‌های وزن دار باید شرط ۳-۱ و ۳-۲ از رابطه ۵-۳ که مقدار کران پایین r در رنگ آمیزی بازه‌ای (In, f) را نشان می‌دادند با کسر شدن از مقدار ابتدائی بازه کاهش می‌یابد مثلاً برای شرط ۳-۱ از سمت رأس j که $(i,j) \in E$ و $a(j) \le a(i)$ محدود می‌شود تا مقداری از بازه‌ی تخصیص یافته به رأس i بتواند در بازه‌ی تخصیص یافته به رأس j دور بزند، الگوی این رنگ آمیزی در رابطه (۵-۴) آمده است.

$$1-a(i) \le r \quad \forall i \in V$$
$$\begin{cases} 2\text{-}1 & a(i)-a(j) \ge w(j)-AIn(i,j) \quad if \quad a(i) \ge a(j) \quad (i,j) \in E \\ 3\text{-}1 & a(i)+w(i)-AIn(i,j)-a(j) \le r \\ 2-2 & a(j)-a(i) \ge w(i)-AIn(i,j) \quad a(j) \ge a(i) \quad (i,j) \in E \\ 3-2 & a(j)+w(j)-AIn(i,j)-a(i) \le r \end{cases} \qquad (۴-۵)$$

مثال ۵-۷-۱ گراف وزن دار فازی با ماتریس مجاورت μ و وزن‌های W ارائه شده در مثال ۵-۴-۲ را در نظر بگیرید. آنگاه با رنگ آمیزی دوری (In, f)، مقدار r=۷ بدست می‌آید که ابتدای بازه هر رأس i در جدو.ل زیر آمده است حالت دوری در رأس ۲ و۵ اتفاق می‌افتد و چون طول بازه دوری بدست آمده برابر ۷ است و طول بازه‌ی متعلق به رأس ۲و ۵ برابر ۴ و ۳ است بنابراین ۲ واحد از رأس ۲ و ۱ واحد از رأس ۵ در مکان اول قرار می‌گیرد. تابع رنگ آمیزی دوری از گراف وزن دار حاصل از این مثال به صورت جدول ۵-۳ زیر است:

جدول ۵-۳ تابع رنگ آمیزی دوری

رأس iام	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$a(i)$	۲	۵	۴	۰	۵	۰	۵
$\Gamma(i)$	(۲, ۵)	(۵, ۷)∪(۰, ۲)	(۴, ۷)	(۰, ۴)	(۵, ۷)∪(۰, ۱)	(۰, ۲)	(۵, ۷)

پس با رنگ آمیزی دوری، ۲ واحد کاهش زمانی در هر دوره داریم، مثلاً اگر واحد را ثانیه بگیریم در سیستم مورد نظر در هر ۹ ثانیه، کل مسیرهای ترافیکی یک بار عبور می‌کنند و همان عمل در ۷ ثانیه در حالت دوری انجام می‌پذیرد یعنی در یک دور انجام کامل عمل‌ها، ۲ ثانیه کاهش زمانی داریم و در یک ساعت ۸۰۰ ثانیه و در ۱۰ ساعت ۸۰۰۰ ثانیه که تقریباً ۱۳۳ دقیقه کاهش زمانی داریم و برای رنگ آمیزی (In, f) نسبت به حالت معمولی نیز ۶۰ دقیقه کاهش زمانی یافتیم پس در کل تقریباً ۱۹۳ دقیقه در هر ۱۰ ساعت، کاهش زمانی داریم که این رقم بالایی است.

برای این مثال رابطه زیر برقرار است.

$$\chi_{c,f}(\widetilde{G}) = 7, \chi_{I,f}(\widetilde{G}) = 9, \chi^{f}(G, w) = 9, \chi(G', w) = 10$$

به طورکلی رابطه زیر برقرار است:

$$\chi_{c,f}(\widetilde{G}) \le \chi_{I,f}(\widetilde{G}) \le \chi(G', w)$$

اگر تمام یال‌ها موثر باشند آنگاه $\chi_{I,f}(\widetilde{G}) = \chi(G', w)$ و اگر تمام یال‌ها قوی باشند آنگاه اختلاف زیادی بین $\chi_{I,f}(\widetilde{G}), \chi(G', w)$ نیست و هر قدر تعداد یال‌های ضعیف بیشتر باشد این مقدار اختلاف بیشتر می‌شود و برای رابطه $\chi_{c,f}(\widetilde{G}) \leq \chi_{I,f}(\widetilde{G})$ برای برخی گراف‌ها مثلاً گراف‌های بازه‌ای تساوی برقرار است.

نتایج

در این تحقیق به طور کلی دو مبحث از تئوری فازی مورد بررسی قرار گرفت که در آن مسائل کاربردی توسط گراف فازی مدل بندی شده است.

در برخی از مسائل زمان بندی، زمان انجام عمل در زمان اول بیشترین ارزش را دارد و به ترتیب نزولی این اولویت تا زمان آخر کاهش می‌یابد، یک مجموعه فازی برای اولویت بندی زمان انجام عمل بیان شد. این مسائل به طور کلی باید طوری دسته بندی شود که در آن اولویت زمان انجام عمل توسط مجموعه فازی ارائه شده، مورد لحاظ قرار گیرد برای دستیابی به این مهم رنگ آمیزی مجموع نتیجه بهینه می‌دهد.

مسئله بهینه سازی دسته بندی رنگی ارزش فازی برای گراف‌های قطعی بیان شد که با مسئله مینیمم مجموع رنگی جواب بهینه می‌دهد، که در آن رنگ‌ها، یک مجموعه فازی نزدیک به یک است، برای بررسی این مسئله برای گراف‌های فازی از رنگ آمیزی توسعه یافته (d, f) استفاده می‌شود و ثابت شد که این مسئله با رنگ آمیزی مجموع توسعه یافته (d ,f)، جواب بهینه می‌دهد.

گراف‌های وزن دار فازی برای مدل بندی مسئله چراغ ترافیک که در آن وزن رئوس، متناسب با حجم ترافیک است مورد استفاده قرار گرفت، در ابتدا مسئله رنگ آمیزی بازه‌ای برای این گراف‌ها بیان شد که عدد رنگی بدست آمده از آن رنگ آمیزی را با نماد $\chi(G', w)$ نمایش داده شد و سپس رنگ آمیزی فازی بازه‌ای که عدد رنگی این رنگ آمیزی را با نماد $\chi^f(\tilde{G}, w)$ نمایش دادیم و نتیجه گرفته شد که $\chi^f(\tilde{G}, w) \leq \chi(G', w)$ سپس رنگ آمیزی توسعه یافته (In, f) برای این مدل گراف‌ها بیان شد که انعطاف پذیری بیشتری دارد که عدد رنگی آن را با نماد $\chi_{I,f}(\tilde{G})$ نشان دادیم که مقدار آن از $\chi(G', w)$ کمتر و بهتر است. یک الگوریتم دقیق برای بدست آوردن عدد رنگی و تابع رنگ آمیزی بیان شد و برخی آزمایشات محاسباتی برای سرعت الگوریتم نیز بیان شد.

به طور کلی در زمان‌بندی مسئله چراغ ترافیک، رنگ آمیزی دوری نتیجه بهتری می‌دهد و برای مدل گراف وزن دار فازی این مسئله رنگ آمیزی دوری (In, f) معرفی شد و یک الگوی برنامه خطی برای بدست آوردن تابع رنگ آمیزی دوری (In, f) و عدد رنگی مربوطه بیان شد که به طور کلی رابطه $\chi_{c,f}(\tilde{G}) \leq \chi_{I,f}(\tilde{G}) \leq \chi(G', w)$ برای اعداد رنگی هر یک از رنگ آمیزی برقرار است. بنابراین رنگ آمیزی دوری برای این مدل مسائل چراغ ترافیک بهینه است.

پیوست

کد برنامه الگوریتم رنگ آمیزی بازه‌ای (In, f) نوشته شده به زبان دلفی ۷ مربوط به بخش ۵-۵ که تابع رنگ آمیزی و عدد رنگی را ارائه می‌دهد.

```
Function GetIL3(IL:integer):Integer ;
var
  i,NewIL,j,k,tc,g,TempIn:integer;

  function HalphPassed:boolean ;
  var j:integer;
  begin
  HalphPassed:=false;
```

```
    for j:=1 to k do
    begin
      if (a[j]-1)+(b[j]/2)>(IL/2) then
      begin
        HalphPassed:=true;
        break;
      end
      else if (a[j]-1)+(b[j]/2)<(IL/2) then
      begin
        HalphPassed:=false;
        break;
      end
    end;
  end;

  procedure SetZero;
  var j:integer;
  begin
    for j := 1 to n do
    begin
      a[j]:=0;
    end;
  end;


begin
  NewIL:=IL+1;
  SetZero;
  k:=1;
  g:=1;
  while True do
  begin
    if k=0 then break;
    if HalphPassed then break;

    if k>=1 then
    begin
      if ((a[k]+b[k]-1<IL)and(g<>3)) then
      begin
        a[k]:=a[k]+1;
      end;
      g:=1;
      for i := 1 to k-1 do
      begin
        if AIn[i,k]>=0 then
        begin
          tc:= Min(a[k]+b[k], a[i]+b[i])-Max(a[i], a[k]);
          TempIn:=tc-AIn[i,k];
          if TempIn>0 then
          begin
            if a[i]+b[i]-AIn[i,k]+B[k]-1<=IL then
            begin
              a[k]:=a[i]+b[i]-AIn[i,k];
              g:=3;
              break;
            end
```

```
     else
     begin
      g:=2;
      break;
     end;
    end;
   end;
  end;
 end;
 if g=1 then
 begin
  if k<n then
  begin
   k:=k+1;
  end
  else if k=n then    // Answer is here
  begin
   NewIL:=  A[1]+b[1]-1;                     //-----     82
   for i := 2 to n do
   begin
    if A[i]+b[i]-1>NewIL then
     NewIL:=A[i]+b[i]-1;
   end;
   ReportAnswer(1,NewIL);
   IL:=NewIL-1;            ////----------       89
   for  j:= 1 to n do       //-------------        90
   begin
    if A[j]+b[j]-1>IL then
    begin
     k:=j-1;
     break;
    end;
   end;
   if k=0 then break; // end of proccess......
   for j := k+1 to n do
   begin
    a[j]:=0;
   end;                          //--------------------             102
   while ((a[k]+b[k]-1=IL)and(k>=0)) do //         103
   begin
    a[k]:=0;
    k:=k-1;
   end;                          //-------------------              107
  end;
 end
 else if g=2 then
 begin
  a[k]:=0;
  k:=k-1;
  while ((a[k]+b[k]-1=IL)and(k>=0)) do
  begin
   a[k]:=0;
   k:=k-1;
  end;
 end;
end;
```

```
  Result:=NewIL;
end;
```

منابع

[۱] -Vitaly I. Voloshin. **(2009)**, “Graph coloring: History, results and open problem” **Alabama journal of mathematics.**

[۲] - Munez S, Teresa Ortuna M, Yanez J, **(2005),** “Coloring fuzzy graphs”, **omega 33, 211-221.**

[۳] - Chartrand G and Zhang P, **(2009**), **“Chromatic graph theory”**, CRC press Taylor &Francis Group A chapmn &hall book, pp **397-398**.

[۴]- Garey MR, Johnson DS, (1979), Computers and intractability, “A guide to the theory of NP-completeness”, W.H. Freeman and Company, New York.

[۵] مرتضی زاهدی، **۱۳۷۸**، **تئوری مجموعه‌های فازی و کاربردهای آن**، چاپ اول ، نشر کتاب دانشگاهی، ص **۱۳**.

[۶] -Delgado M, Verdegay JL, Vila MA. **(1990),** “On valuation and optimization problems in fuzzy graphs a general approach and some particular cases”, **ORSA Journal on Computing, 2, 1,** pp **74–83.**

[۷] -D. B. West, (**2001**), **“Introduction to Graph Theory”**, Second, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ pp.

[۸]- جی .آ باندی، یو. اس. آر. مورتی، (**۱۳۷۸**)، **نظریه گرافها و کاربرد آن** ، مترجم حمید ضرابی زاده، تهران، موسسه فرهنگی و هنری دیباگران تهران.

[۹]- Mihelic. J, (**2005**) “Solving the k-center problem efficiently with a dominating set algorithm”, **J. of .computing and information technology-CIT 13**, 3, pp. **225-233.**

[۱۰] -Korman SM. (**1979**), The graph coloring problem, p. **211–235,** In: “**Combinatorial optimization**” Christofides N, Mingozzi A, Toth P, Sandi C, New York, Wiley.

[۱۱] -Sager TJ, Lin SJ. (**1991**), “A pruning procedure for exact graph coloring”, **ORSA Journal on computing, 3, 3,** pp **226–230.**

[۱۲] -Mehrotra A, Trick MA. (**1996**), “A column generation approach for graph coloring” **INFORMS Journal on Computing, 8, 4,** pp **344–354.**

[۱۳] -Sewell EC. (1996), an improved algorithm for exact graph coloring, p. **359–373,** In: “**DIMACS series in discrete mathematics and theoretical computer science Johnson DS**”, Trick MA. vol .**26**. American Mathematical Society, Providence.

[۱۴] -Herrmann F, Hertz A. **(2002)** “Finding the chromatic number by means of critical graphs**, Journal of Experimental Algorithmic, 7, Article 10,** pp **1–9.**

[۱۵] -Eppstein D. (**2003**),“Small maximal independent sets and faster exact graph coloring” , **Journal of Graph Algorithms and Applications**, **7, 2,** pp **131–140.**

[۱۶] -Pardalos PM, Mavridou T, Xue J. (1998), The graph coloring problem, a bibliographic survey, p. **331–395,** In: “**Handbook of combinatorial optimization**”. Du DZ, Pardalos PM. vol. **2**. Kluwer Academic, Publishers, Boston.

[۱۷] -Brelaz D. (**1979**), “New methods to color the vertices of a graph” , **Communications of the ACM**, 22, 4, pp **251–256**.

[۱۸] -Avanthay C, Hertz A, Zufferey N. (**2003**), “A variable neighborhood search for graph coloring” , **European Journal of Operational Research**, **151**, **2**, pp **379–388**.

[۱۹] -Di Blas A, Jagota A, Hughey R. (**2003**), “A range-compaction heuristic for graph coloring” , **Journal of Heuristics**, **9, 6,** pp **489–506**.

[۲۰] -Zhu, X. (**2001**), “Circular chromatic index: A survey”, **Journal of Discrete Mathematics**, **229**, pp **371-410**.

[۲۱] -Vince, A. (**1988**), “Star chromatic number”, **Journal of Graph Theory**, **12**, pp **551- 559** .

[۲۲] **-Sunitha, M.S., (2001), PhD. Thesis, “Studies on fuzzy graph” , Mathematics. Depart. Cochin University.**

[۲۳] - Stofers KE, (**1968**), .”Scheduling of traffic lights a new approach” **Transportation research**, **2**, pp **199-234**.

[۲۴] -نوری. صفر محمد، رحیمی. شعر باف. صادق، ۱۳۸۹، برخی کاربردهای رنگ آمیزی گراف برای مسائل بهینه سازی، اولین همایش الکترونیکی نقش ریاضی در توسعه علوم، مجتمع آموزش عالی جهرم.

[۲۵] -Eslahchi and B. N. Onagh, (**2006**), "Vertex Strength of Fuzzy Graphs" **International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences**.

[۲۶] -E. Kubicka and A. J. Schwenk,(1989), An introduction to chromatic sums, Proc. ACM Computer Science Conference (Louisville), ACM Press, New York, pp. 39–45.

[۲۷] - K. Marek (2000), graph coloring, "contemporary mathematics" , library of congress cataloging in publication data.

[۲۸] -L. G. Kroon, A. Sen, H. Deng, and A. Roy, (**1997**), "**The optimal cost chromatic partition problem for trees and interval graphs**" Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (Cadenabbia,1996), Lecture Notes in **Computer Science**, vol. **1197**, Springer, Berlin, , pp**. 279–292.**

[۲۹]-نوری. صفر محمد، رحیمی. شعر باف. صادق، ۱۳۹۰، بهینه سازی زمان‌بندی امتحانات با استفاده از رنگ آمیزی گراف، یازدهمین کنفرانس سیستم‌های فازی ایران، ص ۹، زاهدان.

[۳۰] -Bullnheimer B, (1998), An examination scheduling model to maximize students time, p 78–91, in : "**Practice and theory of automated timetabling II**", burke E, Ross p. Springer, Berlin.

[۳۱] -Zhu, X. (**1992**), "Star chromatic numbers and products of graphs" , **Journal of Graph Theory**, **16**, pp **557-569**.

[۳۲] -L. Lian, X.jingling, (**2010**), "Scratchpad Memory Allocation for Data Aggregates via Interval Coloring in Super perfect Graphs".

[۳۳] -M. Bouchard, M. Cangalovi´c, A. Hertz, (**2008**) "About Equivalent Interval Colorings of Weighted Graphs"

[۳۴] -Korman SM. (1979), The graph colouring problem, p. 211–235, In: **Combinatorial optimization** Christofides N, Mingozzi A, Toth P, Sandi C. Wiley, New York.

[۳۵] -Mehrotra A, Trick MA. **(1996**), "A column generation approach for graph coloring" **INFORMS Journal on Computing, 8, 4,** pp **344–54.**

[۳۶] -Eppstein D. (2003), "Small maximal independent sets and faster exact graph coloring" , **Journal of Graph Algorithms and Applications, 7, 2,** pp **131–140.**

[۳۷] -Christofides N. (**1971**), an algorithm for the chromatic number of a graph" , **The Computer Journal**, 14, 1, pp **38–39.**

[۳۸] -Brown JR. (**1972**), "Chromatic scheduling and the chromatic number problem" **Management Science, 19, 4,** pp **456–463.**

[۳۹] -Deuber, W. and Zhu, X. (**1997**), "Circular coloring of weighted graphs", **Journal of Graph Theory**, **23**, pp **365-376.**

Abstract

Fuzzy-set theory was introduced by Zadeh in 1965. Usually, applied methods of modeling and designing a system need to complexes and advanced mathematics. These mathematics are expressed with expert acknowledge and linguistic variable. A lot of the ambiguity can be resolved in modeling by applying fuzzy concept on vertices and edges of graph.

This study deals with fuzzy graph coloring. Given a graph G = (V; E), a coloring function C assigns an integer value C(i) to each node i $\in$V in such a way that the extremes of any edge $\{i, j\} \in E$ cannot share the same color, i.e., C(i) $\neq$ C(j). In this study during expression of fuzzy graph coloring, for partitioning of models that its partitions have decrees value is defined colors set close to 1 and with presentation sum coloring for fuzzy graph $\tilde{G}=(V,\tilde{E})$ optimum fuzzy extended chromatic partition is expressed. Also application of this problem in exam scheduling that fuzzy color is slot value of exam. Calculation results on some random fuzzy graph are expressed for comparison. An interval coloring is expressed based on edges intensity for weighted graph with crisp vertices and fuzzy edges $\tilde{G}=(V,\tilde{E},W)$ and its application at traffic problem is presented. An exact algorithm for obtaining the chromatic number is proposed, and some computational results for test of algorithm on randomly generated fuzzy graphs are reported. A circular coloring To get a better answer than a weighted fuzzy graph interval coloring is defined and a linear program to find the chromatic number and the corresponding function is provided.

Keywords: fuzzy theory, graph theory, graph coloring, optimization, scheduling problems

Shahrood University of technology

Faculty of mathematic

A Study of fuzzy graph coloring problem

Safar Mohammad Nouri

Supervisor:

Dr S.Rahimi

January 2011