دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

مجموعه های بسته ضربی از خودتوان ها در یک حلقه متناهی

نگارش

مریم دهقان

استاد راهنما

دکتر ابراهیم هاشمی

مهر ۹۰

صفحهٔ تصویب نامه توسط هیأت داوران (فرم پیوست ۳ یا ۴ با امضای اصل هیأت داوران مورد قبول است)

قدردانی

در اینجا می‌خواهم از همه تشکر کنم.

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه یکدار متناهی و T مجموعه تمام خودتوان های R باشد. در این پایان نامه زیر مجموعه های بسته ضربی از T که می توانند در تجزیه R به ما کمک کنند را بررسی می کنیم. همچنین ویژگی های یکه هایی که توسط خودتوان ها حفظ می شوند را بررسی می کنیم. فرض کنیم M مجموعه خودتوان های مینیمال R، اجتماع با صفر باشد. حال با استفاده از یکه هایی که توسط خودتوان ها حفظ می شوند نشان می دهیم M تحت ضرب بسته است اگر و تنها اگر R مجموع مستقیم حلقه های موضعی باشد.

مطالب ارائه شده در این پایان نامه برگرفته از مقالات [۲] و [۸] می باشد.

واژه‌های کلیدی: حلقه متناهی، خودتوان، حلقه موضعی.

پیشگفتار

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش نیازها و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این پایان نامه از نمادهای زیر استفاده می کنیم:

$End_R(R)$	حلقه درونریختی های حلقه R
$Hom_R(M, N)$	مجموعه تمام همریختی ها از M به N
$H \ltimes K$	حاصلضرب نیم مستقیم H و K
$\oplus_{i=1}^{n} M_i$	مجموع مستقیم مدولهای M_1، ... و M_n
$Rad(R)$	رادیکال جیکبسون حلقه R

در تمام این پایان نامه R نمایانگر یک حلقه متناهی و یکدار است مگر اینکه خلاف آن ذکر شود.

خودتوان های e و f متعامدند هرگاه $ef = fe = 0$.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم R حلقه ای یکدار باشد. گروه یکه های حلقه R را با R^* نمایش می دهیم.

متمم خودتوان $e \in R$ را که با علامت $\overline{e}$ نشان می دهیم به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\overline{e} := 1 - e.$$

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم A و B زیرمجموعه هایی از R باشند و $r \in R$. قرار می دهیم:

$$A+B:=\{a+b \ : \ a\in A \ , \ b\in B\} \quad , \quad A.B:=\{ab \ : \ a\in A \ , \ b\in B\}$$

و

$$r+A:=\{r+a \ : \ a\in A\} \quad , \quad r.A:=\{ra \ : \ a\in A\}$$

تعریف ۳.۱.۱. زیرگروه G از R^* را تجزیه پذیر می نامیم هرگاه زیر گروه های A و B از G وجود داشته باشند به طوری که $G=A.B$ و $A\cap B=\{e\}$.

اشتراک تمام ایده آلهای چپ (راست) ماکسیمال حلقه R را رادیکال جیکبسون حلقه R نامیده و با $Rad(R)$ نمایش می دهیم. R-مدول N را یک جمعوند مستقیم M می نامیم هرگاه R-مدول K وجود داشته باشد به طوری که $M\cong N\oplus K$.

تعریف ۴.۱.۱. الف) R-مدول ناصفر M را ساده می نامیم هرگاه $\{0\}$ و M تنها زیر مدول های آن باشند.

ب) R-مدول M نیم ساده نامیده می شود هرگاه هر زیر مدول M یک جمعوند مستقیم آن باشد.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت:

الف) R را موضعی می نامیم هرگاه $R/Rad(R)$ یک حلقه تقسیم باشد.

ب) R را نیم موضعی می نامیم هرگاه $R/Rad(R)$ یک حلقه نیم ساده باشد.

تعریف ۶.۱.۱. عنصر $e^2=e\in R$ خودتوان موضعی نامیده می شود هرگاه eRe یک حلقه موضعی باشد.

قضیه ۷.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

الف) R تنها یک ایده آل چپ ماکسیمال دارد؛

ب) R تنها یک ایده آل راست ماکسیمال دارد؛

ج) R یک حلقه موضعی است؛

د) غیر یکه های R تشکیل یک ایده آل می دهند؛

ه) غیر یکه های R تشکیل یک گروه آبلی جمعی می دهند؛

و) اگر $a_1 + ... + a_n \in R^*$، آنگاه برخی از a_i ها در R^* قرار دارند؛

ز) اگر $a + b \in R^*$، آنگاه $a \in R^*$ یا $b \in R^*$.

اثبات . (ج) ← (الف): فرض کنیم $\underline{m}$ یک ایده آل چپ ماکسیمال حلقه R باشد. هر ایده آل چپ ماکسیمال R، شامل $Rad(R)$ است. حال اگر R یک حلقه موضعی باشد، یعنی؛ $R/Rad(R)$ حلقه تقسیم باشد، آنگاه $\underline{m}/Rad(R) = ۰$ یا $\underline{m}/Rad(R) = R/Rad(R)$. چون $\underline{m}$ ماکسیمال است حالت دوم رخ نخواهد داد لذا $\underline{m} = Rad(R)$. پس R تنها یک ایده آل چپ ماکسیمال دارد.

(الف) ← (ج): فرض کنیم R تنها یک ایده آل چپ ماکسیمال مانند $\underline{m}$ دارد. لذا $Rad(R) = \underline{m}$ تنها ایده آل چپ ماکسیمال حلقه R است. از اینرو تنها ایده آلهای چپ $R/Rad(R)$، صفر و خودش می باشند. بنابراین $R/Rad(R)$ یک حلقه تقسیم است. لذا R، موضعی می باشد. (ب) ⇔ (ج)، متناظرا ثابت می شود.

(ج) ← (د): فرض کنیم $R/Rad(R)$ حلقه تقسیم باشد و $a \notin Rad(R)$. لذا a در R وارون پذیر است. بنابراین $R - R^* = Rad(R)$ یک ایده آل R می باشد.

(د) ← (ه) ← (و) ← (ز)، بوضوح برقرار است. (ز) ← (ج): فرض کنیم $a \notin Rad(R)$. در این صورت یک ایده آل چپ ماکسیمال مانند $\underline{m}$ وجود دارد به طوری که $a \notin \underline{m}$. پس $\underline{m} + Ra = R$. عناصر $m \in \underline{m}$ و $b \in R$ وجود دارند که $m + ba = ۱$. از طرفی $m \notin R^*$، لذا با توجه به (ز)، $ba \in R^*$. پس $\overline{a}$ در $\overline{R} = R/Rad(R)$ وارون پذیر از چپ است. بنابراین $\overline{R} - \{۰\}$ با عمل ضرب یک گروه می باشد. لذا $\overline{R}$ حلقه تقسیم است. ■

مدول M را تجزیه ناپذیر می نامیم هرگاه $M \neq 0$ و نتوان M را به صورت مجموع مستقیم هیچ دو زیر مدول ناصفرش نوشت.

قضیه ۸.۱.۱. (کرول-اشمیت) [1] فرض کنیم M یک R-مدول متناهیا تولید شده باشد. فرض کنیم

$$M = M_1 \oplus ... \oplus M_m = N_1 \oplus ... \oplus N_n$$

دو تجزیه از M به زیر مدول های ناصفر و تجزیه ناپذیرش باشد. در این صورت $m = n$ و جایگشت σ از $\{1, ..., m\}$ وجود دارد به طوری که برای هر $1 \leqslant i \leqslant m$، $M_i \simeq N_{\sigma(i)}$.

اثبات. به مرجع [۵] قضیه ۶.۳ رجوع شود. ■

لم ۹.۱.۱. (لم شور) [2] فرض کنیم R یک حلقه و $_RV$ یک R-مدول چپ ساده باشد. در این صورت $End(_RV)$ یک حلقه تقسیم است.

اثبات. به مرجع [۴] لم ۶.۳ رجوع شود. ■

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم L یک ایده آل چپ (راست) از حلقه R باشد. گوییم خودتوان ها قابل انتقال به پیمانه L هستند هرگاه برای هر $x \in R$، اگر $x - x^2 \in L$، آنگاه خودتوان $e \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $e - x \in L$.

تعریف ۱۱.۱.۱. R را یک حلقه تمیز می نامیم هرگاه هر عنصر R با مجموع یک عنصر یکه و یک خودتوان برابر باشد.

گزاره ۱۲.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $x \in R$. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

الف) عنصر $e^2 = e \in R$ وجود دارد به طوری که $e - x \in R(x - x^2)$؛

[1] Krull-Schmidt
[2] Schur

ب) $e^{۲} = e \in R$ و $c \in R$ وجود دارند به طوری که $(۱-e) - c(۱-x) \in Rad(R)$؛

ج) $e^{۲} = e \in Rx$ وجود دارد به طوری که $R = Re + R(۱-x)$؛

د) $e^{۲} = e \in Rx$ وجود دارد به طوری که $۱ - e \in R(۱-x)$.

اثبات. (الف) $\leftarrow$ (ب): چون $e - x \in R(x - x^{۲})$، پس $r \in R$ وجود دارد که $e - x = r(x - x^{۲})$. در نتیجه $۱ - e = (۱ - rx)(۱ - x)$.

(ب) $\leftarrow$ (ج): فرض کنیم $(۱-e) - c(۱-x) \in Rad(R)$. در نتیجه

$$۱ - [(۱-e) - c(۱-x)] = e + c(۱-x)$$

یکه است.

(ج) $\leftarrow$ (د): چون $R = Re + R(۱-x)$ پس عناصر $t, s \in R$ وجود دارند که $۱ = te + s(۱-x)$.

قرار می دهیم

$f := e + (۱-e)te$. در نتیجه

$$f^{۲} = (e + (۱-e)te)(e + (۱-e)te)$$

$$= e + e(۱-e)te + (۱-e)te + (۱-e)te(۱-e)te$$

$$= e + (۱-e)te = f \in R(x)$$

و

$$۱ - f = ۱ - e - (۱-e)te = ۱ - te - e(۱-te)$$

$$= s(۱-x) - es(۱-x) = (۱-e)s(۱-x).$$

(د) ← (الف): فرض کنیم $1 - e \in R(1 - x)$. در نتیجه $e - x = e(1 - x) - (1 - e)x$، که $e(1 - x) \in Rx(1 - x)$ و $(1 - e)x \in R(1 - x)x$. بنابراین $e - x \in R(x - x^2)$. ■

تعریف ۱۳.۱.۱. حلقه R را مناسب می نامیم هرگاه هر عنصر از R در یکی از شرایط گزاره ۱۲.۱.۱ صدق کند.

قضیه ۱۴.۱.۱. هر حلقه تمیز، مناسب است.

اثبات. فرض کنیم R یک حلقه تمیز باشد. در این صورت برای هر $x \in R$، $x = e + u$ که $e^2 = e$ و u یک عنصر یکه است. پس

$$u[x - u^{-1}(1 - e)u] = ue + u^2 - u + eu = x^2 - x.$$

که با توجه به گزاره ۱۲.۱.۱، $e - x \in R(x - x^2)$. بنابراین R یک حلقه مناسب می باشد. ■

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و خودتوان ها قابل انتقال به پیمانه $Rad(R)$ باشند و هر ایده آل چپ (راست) از حلقه R که مشمول در $Rad(R)$ نباشد، شامل یک خودتوان غیر صفر باشد. در این صورت R را یک حلقه قوی می نامیم.

گزاره ۱۶.۱.۱. هر حلقه مناسب، قوی است.

اثبات. با توجه به گزاره ۱۲.۱.۱ کافیست نشان دهیم برای هر $x \in R$ که $x \notin Rad(R)$، Rx شامل یک خودتوان ناصفر است. عنصر $x \in R$ را طوری در نظر می گیریم که $e^2 = e \in Rx$ نتیجه دهد $e = 0$. فرض کنیم $a \in R$. چون R مناسب است پس عنصر $e^2 = e \in Rax$ را در نظر می گیریم به طوری که $1 - e \in R(1 - ax)$. از طرفی $e = 0$ پس $1 \in R(1 - ax)$. یعنی؛ $x \in Rad(R)$ که یک تناقض است. بنابراین $0 \neq e^2 = e \in Rx$. ■

تعریف ۱.۱.۱۷. حلقه R را نیم ساده آرتینی می نامیم هرگاه R نیم اول و آرتینی چپ باشد.

تعریف ۱.۱.۱۸. حلقه R را نیم کامل می نامیم هرگاه $R/Rad(R)$ نیم ساده آرتینی باشد و خودتوان ها قابل انتقال به پیمانه $Rad(R)$ باشند.

تعریف ۱.۱.۱۹. حلقه R (نه لزوما یکدار)، یک I-حلقه نامیده می شود هرگاه هر ایده آل چپ (راست) که مشمول در رادیکال جیکبسون نباشد، شامل یک خودتوان غیر صفر باشد. به علاوه اگر خودتوان ها قابل انتقال به پیمانه $Rad(R)$ باشند، آنگاه R یک حلقه قوی است که در بعضی مقالات آن را I-حلقه نیز می نامند.

تذکر. هر حلقه نیم کامل یک I-حلقه است.

تعریف ۱.۱.۲۰. فرض کنیم R یک حلقه باشد. رابطه $\leqslant$ را روی مجموعه خودتوان های R چنین تعریف می کنیم:

$$f \in eRe \Longleftrightarrow f \leqslant e$$

می توان نشان داد که رابطه فوق با رابطه زیر معادل است:

$$f \leqslant e \Longleftrightarrow f = fe = ef.$$

فرض کنیم $f \in eRe$. پس $r \in R$ وجود دارد که $f = ere$. اگر طرفین این رابطه را از چپ در e ضرب کنیم داریم:

$$ef = ere = f$$

و به همین ترتیب اگر از راست در e ضرب کنیم داریم:

$$fe = ere = f.$$

حال فرض کنیم $f = fe = ef$. اگر طرفین این تساوی را در e ضرب کنیم داریم:

$$efe = ef = f.$$

به سادگی می توان نشان داد $\leqslant$ یک رابطه ترتیبی جزیی است و به آن رابطه ترتیبی جزیی طبیعی گوییم.

گوییم حلقه R در شرط ماکسیمم روی خودتوان ها صدق می کند هرگاه هر زنجیر افزایشی از خودتوان های R، ایستا باشد.

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. خودتوان $e \in R$ را اولیه می نامیم هرگاه نتوان e را به صورت مجموع هیچ دو خودتوان متعامد بدیهی از R نوشت.

تذکر. خودتوان e اولیه است اگر و تنها اگر $0 \neq f^2 = f \in Re$، نتیجه دهد $Rf = Re$.

لم ۲۲.۱.۱. فرض کنیم R یک I_0-حلقه باشد و $x \in R$ به طوری که $x + Rad(R)$ در $R/Rad(R)$ خودتوان اولیه باشد. در این صورت خودتوان $e \in R$ وجود دارد به طوری که $e - x \in Rad(R)$.

اثبات. عنصر $0 \neq f^2 = f \in Rx$ را در نظر می گیریم. پس در $\overline{R} = R/Rad(R)$، $\overline{f} \in \overline{R}\overline{x}$ و لذا با توجه به تذکر قبل، $\overline{Rf} = \overline{R}\overline{x}$. اگر قرار دهیم $e = f + xf - fxf$، آنگاه $e^2 = e \neq 0$ و $\overline{e} = \overline{x}$. ■

قضیه ۲۳.۱.۱. گزاره های زیر برای هر حلقه R معادلند:

الف) R نیم کامل است؛

ب) R، I_0-حلقه است و در شرط ماکسیمم روی خودتوان ها صدق می کند؛

ج) اگر $L \subseteq R$ یک ایده آل چپ (راست) باشد، آنگاه خودتوان $e \in L$ و ایده آل چپ (راست) $M \subseteq Rad(R)$ وجود دارند به طوری که $L = Re + M$.

د) R یک I_0-حلقه و $R/Rad(R)$ نیم ساده آرتینی است.

اثبات. (الف) $\leftarrow$ (ب): اگر حلقه R نیم کامل باشد، آنگاه با توجه به تذکر فوق یک I_0-حلقه است. اگر $e_1 \leqslant e_2 \leqslant \dots$ یک زنجیر افزایشی از خودتوان های R باشد، آنگاه در حلقه $R/Rad(R)$ زنجیر افزایشی $\overline{e}_1 \leqslant \overline{e}_2 \leqslant \dots$ از خودتوان ها را خواهیم داشت. در نتیجه برای برخی n، $\overline{e_n} = \overline{e_{n+1}} = \dots$.

از این رو برای هر $k \geqslant n$،

$$(e_{k+1} - e_k)^2 = (e_{k+1} - e_k) \in Rad(R),$$

بنابراین $e_n = e_{n+1} = \dots$.

(ب) $\leftarrow$ (ج): اگر $L \subseteq Rad(R)$، آنگاه $e = 0$ و $M = L$. در غیر این صورت فرض کنیم $0 \neq e^2 = e \in L$ ماکسیمال باشد. پس $L = Re + M$ که $M = \{x \in L \;:\; xe = 0\}$. اگر $M \nsubseteq Rad(R)$، آنگاه عنصر $0 \neq f^2 = f \in M$ را در نظر می گیریم. بنابراین $g = e + f - ef$ یک خودتوان در L است و $e \leqslant g$، که با توجه به انتخاب e، $e = g$. پس $f = f^2 = f(ef) = 0$ که یک تناقض است. بنابراین $M \subseteq Rad(R)$.

(ج) $\leftarrow$ (د) بدیهی است. (د) $\leftarrow$ (الف): چون R یک I_0-حلقه است پس خودتوان های اولیه در $R/Rad(R)$ با توجه به لم ۲۲.۱.۱ قابل انتقال هستند. اما هر خودتوان در $R/Rad(R)$ مجموع خودتوان های متعامد اولیه است و بنابراین با یک روش استاندارد می توانند انتقال یابند. ■

گزاره ۲۴.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه قوی باشد. در این صورت R یا نیم کامل است یا شامل یک مجموعه نامتناهی از خودتوان های متعامد می باشد.

اثبات . فرض کنیم حلقه R (نه لزوما متناهی) شامل هیچ مجموعه نامتناهی از خودتوان های متعامد نباشد. خودتوان های متعامد اولیه e_i وجود دارند به طوری که

$$1 = e_1 + e_2 + \dots + e_n.$$

فرض کنیم $R' = R/Rad(R)$. در نتیجه $1' = e'_1 + e'_2 + ... + e'_n$. از طرفی چون R یک حلقه قوی است، پس $R'e'_i$ شامل هیچ زیر مدول نابدیهی نمی باشد و از اینرو ساده است. بنابراین R' نیم ساده و با توجه به قضیه قبل، R نیم کامل است. ■

قضیه ۲۵.۱.۱. (ودربرن-آرتین) [۳] فرض کنیم R یک حلقه نیم ساده باشد. در این صورت عدد منحصر به فرد r و حلقه های تقسیم $D_1, ..., D_r$ وجود دارند به طوری که

$$R \cong M_{n_1}(D_1) \times ... \times M_{n_r}(D_r).$$

همچنین دقیقا r، مدول ساده چپ وجود دارد که دو بدو یکریخت نیستند.

اثبات. به مرجع [۴] قضیه ۵.۳ رجوع شود. ■

تعریف ۲۶.۱.۱. حلقه R را منظم می نامیم هرگاه برای هر $x \in R$، عنصر $y \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $xyx = x$.

حلقه R را یکه-منظم می نامیم هرگاه برای هر $x \in R$، عنصر یکه $u \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $xux = x$.

گزاره ۲۷.۱.۱. فرض کنیم R (نه لزوما متناهی) یک حلقه باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

الف) R منظم است؛

ب) هر ایده آل راست اصلی، تولید شده توسط یک خودتوان است؛

ج) هر ایده آل راست متناهیا تولید شده R، تولید شده توسط یک خودتوان است؛

د) هر ایده آل راست متناهیا تولید شده، یک جمعوند مستقیم از R است؛

ه) هر R-مدول R، هموار است.

[۳] Wedderburn-Artin

اثبات. به مرجع [۹] قضیه ۲۰.۱۱.۲ رجوع شود. ■

قضیه ۲۸.۱.۱. فرض کنیم حلقه R (نه لزوما متناهی) منظم و A، مدول راست تصویری روی R باشد. در این صورت هر زیر مدول متناهیا تولید شده A، جمعوند مستقیم A است.

اثبات. به مرجع [۳] قضیه ۱۱.۱ رجوع شود. ■

قضیه ۲۹.۱.۱. فرض کنیم A یک R-مدول راست باشد به طوری که $T = End_R(A)$ منظم باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

الف) T یکه-منظم است؛

ب) اگر $A = A_1 \oplus B_1 = A_2 \oplus B_2$ که $A_1 \cong A_2$، آنگاه $B_1 \cong B_2$؛

ج) برای هر $x \in T$، $Ker\ x \cong coker\ x$؛

د) اگر $e, f \in T$ خودتوان هایی باشند به طوری که $eT \cong fT$، آنگاه $(1-e)T \cong (1-f)T$.

اثبات. به مرجع [۳] قضیه ۴.۱ رجوع شود. ■

قضیه ۳۰.۱.۱. هر حلقه (نه لزوما متناهی) یکه-منظم، تمیز است.

اثبات. فرض کنیم V یک R-مدول راست باشد. نشان می دهیم $V = R_R$. هر عنصر از R را می توان یک R-همریختی از V در نظر گرفت که از چپ در عناصر V ضرب می شود. $L \in R$ را در نظر می گیریم. چون R منظم است پس با توجه به گزاره ۲۷.۱.۱، زیر مدول های Y و A از V وجود دارند به طوری که

$$V = (Im\ L + Ker\ L) \oplus Y = Ker\ L \oplus A.$$

همچنین $Im\ L + Ker\ L$ تصویری است و $Im\ L$ یک جمعوند مستقیم می باشد. بنابراین با توجه به قضیه ۲۸.۱.۱ برای برخی $X \subseteq Ker\ L$، $Im\ L + Ker\ L = Im\ L \oplus X$. از طرفی حلقه R یکه-منظم

است پس با توجه به قضیه ۲۹.۱.۱ داریم:

$$Ker\ L \cong coker\ L = V/Im\ L \cong X \oplus Y.$$

بنابراین $Ker\ L \cong X \oplus Y$ و $Im\ L \cong A$. فرض کنیم $h : Ker\ L \longrightarrow X \oplus Y$ یک یکریختی باشد. با قرار دادن $h(A) = 0$، h را به کل V گسترش می دهیم. فرض کنیم $u = h^{-1} : X \oplus Y \longrightarrow Ker\ L$ وارون بخشی از h باشد. یعنی؛ $hu|_{X\oplus Y} = 1_{X\oplus Y}$. پس $huh = h$ و $e = hu$ یک خودتوان است. به راحتی می توان نشان داد که چطور u به کل V توسیع می یابد. حال نشان می دهیم u را می توان به $L - hu$ توسیع داد که یک به یک است. بنابراین با توجه به منظم بودن R یکه است. فرض کنیم توسیع u را داریم و برای $v \in V$، $L(v) = hu(v)$. بنابراین با توجه به ساختار h،

$$L(v) \in (X \oplus Y) \cap Im\ L = 0. \tag{1.1}$$

قرار می دهیم $Im\ L = K \oplus Z$ که $K = Im\ L \cap Ker\ L$ (که این امکان پذیر است از اینرو تمام این مدول ها متناهیا تولید شده هستند). حال فرض کنیم $\phi : Im\ L \longrightarrow A$ یک یکریختی باشد. تعریف می کنیم $u : V \longrightarrow V$ که برای $x \in X$، $y \in Y$، $k \in K$ و $z \in Z$،

$$u(x+y+k+z) = h^{-1}(x+y) + k + \phi(k+z).$$

نشان می دهیم u یک به یک است. اگر $u(x+y+k+z) = 0$ آنگاه $h^{-1}(x+y)+k+\phi(k+z) = 0$. پس نتیجه می گیریم $h^{-1}(x+y) + k = 0$ و $\phi(k+z) = 0$. بنابراین با توجه به تجزیه های مجموع مستقیم مختلف، $k+z = 0$، $k = 0$ و $x+y = 0$.

سپس اگر $L(v) = hu(v)$ و $v = x+y+k+z$، آنگاه با توجه به روابط فوق و (۱.۱) داریم $L(v) = 0$ و $u(v) \in A$. چون $u(v) = h^{-1}(x+y) + k + \phi(k+z) \in A$ و $\phi(k+z) \in A$ پس $h^{-1}(x+y) + k \in A \cap Ker\ L = 0$. بنابراین $k \in Ker\ L \cap A$. به علاوه $x+y = 0$ پس $v = z \in Z$. اما $L(z) = 0$ پس $z \in Im\ L \cap Ker\ L = K$، بنابراین $z = 0$. ■

نتیجه ۳۱.۱.۱. فرض کنیم D حلقه تقسیم باشد. در این صورت برای ۱ $n \geqslant$ حلقه ماتریس های $n \times n$، روی D تمیز است.

قضیه ۳۲.۱.۱. حلقه R (نه لزوما متناهی) نیم کامل است اگر و تنها اگر R تمیز باشد و شامل هیچ مجموعه نامتناهی از خودتوان های متعامد نباشد.

اثبات . فرض کنیم R یک حلقه تمیز باشد و شامل هیچ مجموعه نامتناهی از خودتوان های متعامد نباشد. با توجه به قضیه ۱۴.۱.۱ و گزاره های ۱۶.۱.۱ و ۲۴.۱.۱، حلقه R نیم کامل است.

به عکس، فرض کنیم R یک حلقه نیم کامل باشد و $Rad(R) = ۰$. در نتیجه خودتوان ها می توانند قابل انتقال به پیمانه $Rad(R)$ می باشند. با استناد به اینکه حاصلضرب مستقیم حلقه های تمیز، تمیز می باشد و با توجه به قضیه ۲۵.۱.۱ و نتیجه قبل که حلقه های نیم ساده، تمیز هستند اثبات کامل می شود. ■

فصل ۲

حلقه های متناهی یکدار

۱.۲ خودتوان ها

مثال.

مدولهای تصویری روی حلقه های موضعی آزاد هستند.

حل.

به مرجع [۹] مثال ۹.۸.۲ رجوع شود.

مثال.

فرض کنیم R یک حلقه موضعی و $R^{(n)}$ یک R-مدول آزاد با پایه ای متشکل از n عنصر باشد. فرض کنیم $e : R^{(n)} \longrightarrow R^{(n)}$ یک R-همریختی باشد به طوری که e یک خودتوان در $End_R(R^{(n)})$ باشد. همچنین قرار می دهیم:

$$N(e) := \{x \in R^{(n)} \quad : \quad e(x) = x\}$$

و

$$P(e) := \{x \in R^{(n)} \quad : \quad e(x) = ۰\}.$$

بوضوح $N(e) \cap P(e) = ۰$. همچنین برای هر $x \in R^{(n)}$، $x = e(x) + (x - e(x))$ که $e(x) \in N(x)$ و $x - e(x) \in P(x)$. بنابراین $R^{(n)} = N(e) \oplus P(e)$. چون $N(e)$ و $P(e)$ تصویری هستند لذا با توجه

به مثال فوق آزاد می باشند. با انتخاب R-پایه آزاد برای $N(e)$ و $P(e)$، به یک R-پایه آزاد برای $R^{(n)}$ می رسیم که با توجه به این پایه، e نمایش ماتریسی به فرم زیر دارد:

$$Mat(e) = \begin{pmatrix} I_t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

که I_t، یک ماتریس همانی $t \times t$ می باشد و $t = dim_R\ (N(e))$.

اگر $S = End_R(R^{(n)})$ آنگاه

$$Se \simeq \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1t} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nt} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad : \quad a_{ij} \in R \right\}$$

(به عنوان S-مدول چپ) و

$$eSe = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad : \quad A \in M_t(R) \right\}$$

(به عنوان یک حلقه). بخصوص eSe موضعی است اگر و تنها اگر e نمایش ماتریسی به فرم زیر داشته باشد:

$$M(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

که $eSe \simeq R$ (به عنوان یک حلقه).

فرض کنیم e خودتوانی از حلقه R باشد. در این صورت $1 - e$ و e متعامد هستند و

$$1 = e + (1 - e).$$

بنابراین تجزیه ای از R به عنوان ایده آلهای چپ (یا به عنوان R -مدول های چپ) بصورت زیر داریم:

$$R = Re \oplus R(1 - e).$$

به عکس، اگر برای ایده آلهای چپ L_1 و L_2 داشته باشیم $R = L_1 \oplus L_2$، آنگاه $1 = e_1 + e_2$ که $e_1 \in L_1$ و $e_2 \in L_2$. بنابراین برای $i = 1, 2$، $e_i^2 = e_i$ و $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$. به علاوه $L_1 = Re_1$ و

$L_۲ = Re_۲$. اگر ایده آل چپ L جمعوند مستقیمی از R باشد در این صورت یک مولفه از R نامیده می شود. از اینرو ایده آل چپ L یک مولفه از R است اگر و تنها اگر خودتوان $e \in R$، وجود داشته باشد به طوری که $L = Re$.

فرض کنیم M، $M_۱$، ... و M_m، R-مدول باشند به طوری که

$$M = M_۱ \oplus M_۲ \oplus ... \oplus M_m.$$

فرض کنیم برای هر $۱ \leq j \leq m$، $\lambda_j : M_j \longrightarrow M$ و $\pi_j : M \longrightarrow M_j$ نگاشت های کانونی باشند. اگر $x \in M$، آنگاه عناصر منحصر به فرد $x_i \in M_i$ وجود دارند به طوری که

$$x = x_۱ + x_۲ + ... + x_m.$$

به علاوه $\pi_j x = x_j$ و اگر $i \neq j$ ، آنگاه $\pi_i \lambda_j \pi_j x = ۰$ و $\sum_j \lambda_j \pi_j x = x$. یعنی؛ $\sum_j \lambda_j \pi_j = i_M$.

فرض کنیم $\sigma : M \longrightarrow M$ یک R-درونریختی باشد و $\sigma_{ij} : M_j \longrightarrow M_i$ ، که $\sigma_{ij} = \pi_i \sigma \lambda_j$. در این صورت با نگاشت زیر σ را به $Mat(\sigma)$ وابسته می کنیم:

$$Mat : \sigma \longrightarrow Mat(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma_{۱۱} & \sigma_{۱۲} & ... & \sigma_{۱m} \\ \sigma_{۲۱} & \sigma_{۲۲} & ... & \sigma_{۲m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{m۱} & \sigma_{m۲} & ... & \sigma_{mm} \end{pmatrix} = (\sigma_{ij})$$

که $\sigma_{ij} = \pi_i \sigma \lambda_j$.

قضیه ۱.۱.۲. فرض کنیم $M = M_۱ \oplus ... \oplus M_m$ یک مجموع مستقیم از R-زیر مدول های M باشد. فرض کنیم برای $۱ \leqslant j \leqslant m$، $\lambda_j : M_j \longrightarrow M$ و $\pi_j : M \longrightarrow M_j$ نگاشت های کانونی باشند. در این صورت نگاشت زیر یک یکریختی است:

$$Mat \ : \ End_R(M) \longrightarrow \{(\sigma_{ij}) \ : \ \sigma_{ij} : M_j \longrightarrow M_i \ , \ \sigma_{ij} = \pi_i \sigma \lambda_j\}$$

که $Mat \ : \ \sigma \longrightarrow Mat(\sigma) = (\sigma_{ij})$.

اثبات. نگاشت $M \longrightarrow M : \psi$ با ضابطه $Mat(\psi) = (\psi_{ij})$ را در نظر می گیریم. چون برای هر i و j،

$$(\sigma+\psi)_{ij} = \pi_i(\sigma+\psi)\lambda_j = \pi_i\sigma\lambda_j + \pi_i\psi\lambda_j = \sigma_{ij} + \psi_{ij}$$

پس

$$Mat(\sigma+\psi) = Mat(\sigma) + Mat(\psi).$$

از طرفی چون برای هر i و j،

$$\begin{aligned} (\sigma\psi)_{ij} &= \pi_i(\sigma\psi)\lambda_j \\ &= \pi_i\sigma(\sum_k \lambda_k\pi_k)\psi\lambda_j \\ &= \sum_k (\pi_i\sigma\lambda_k)(\pi_k\psi\lambda_j) \\ &= \sum_k \sigma_{ik}\psi_{kj} \ , \end{aligned}$$

پس $Mat(\sigma\psi) = Mat(\sigma)Mat(\psi)$. بنابراین نگاشت Mat یک همریختی حلقه ای است. به راحتی می توان نشان داد که دوسویی است. ■

چون R متناهی است پس آرتینی چپ و نوتری چپ می باشد. بنابراین ایده آلهای چپ تجزیه ناپذیر L_i وجود دارند که

$${}_RR = L_۱ \oplus ... \oplus L_n.$$

با توجه به قضیه ۸.۱.۱، این تجزیه در حد یکریختی منحصر به فرد است. اما به عنوان حلقه ها

$$End_R({}_RR) \simeq R^{op}$$

که R^{op} حلقه مقابل R را نشان می دهد. به عبارت دیگر با توجه به قضیه ۱.۱.۲،

$$End_R({}_RR) \simeq \{(\sigma_{ij}) \quad : \quad \sigma_{ij} : L_j \longrightarrow L_i \quad , \quad \sigma_{ij} = \pi_i\sigma\lambda_j\}.$$

اما L_i یک جمعوند مستقیم از R است. یعنی؛ یک مولفه از R است. بنابراین $L_i = Re_i$، که Re_i تولید شده توسط خودتوان e_i می باشد.

قضیه ۲.۱.۲. فرض کنیم e و f خودتوان هایی از R باشند و M یک R-مدول چپ باشد. در این صورت:

الف) $Hom_R(Re, M) \simeq eM$ (به عنوان گروه).

ب) $Hom_R(Re, Rf) \simeq (eRf)$ (به عنوان گروه).

به علاوه $Re \simeq Rf$ اگر و تنها اگر عناصر $c \in eRf$ و $d \in fRe$ وجود داشته باشند به طوری که $cd = e$ و $dc = f$.

بطور مشابه $Re \simeq Rf$ (به عنوان R-مدول) اگر و تنها اگر $eR \simeq fR$ (به عنوان R-مدول).

ج) $End_R(Re) \simeq eRe$ (به عنوان حلقه).

د) اگر S یک ایده آل راست از R باشد، آنگاه نگاشت $S \cap Rf \longrightarrow S \cap Re$، R-یکریختی است.

اثبات. الف) R-همریختی $\rho : Re \longrightarrow M$ را در نظر می گیریم. فرض کنیم $\rho(e) = m$. پس

$$em = e\rho(e) = \rho(e^{۲}) = \rho(e) = m.$$

بنابراین $m = em \in eM$. نگاشت λ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\lambda(\rho) := \rho(e).$$

بوضوح λ همریختی گروهی است که یک به یک می باشد. نشان می دهیم λ پوشا است. فرض کنیم $m \in eM$ و برای هر $r \in R$،

$$\rho(re) := rm.$$

اگر $re = ۰$، آنگاه $rm \in reM = ۰$ و ρ یک R-همریختی خوشتعریف است. از طرفی

$$\lambda(\rho) = \rho(e) = m.$$

بنابراین λ پوشا است.

ب) با توجه به قسمت (الف)، اگر $M = Rf$ آنگاه $Hom_R(Re, Rf) \simeq eRf$. فرض کنیم $\rho : Rf \longrightarrow Re$، یک R-یکریختی باشد. پس برای برخی $c \in eRf$، $\rho = \rho_c$. عنصر $d \in Re$ وجود دارد که $\rho_c(d) = f$. لذا $f = \rho_c(d) = dc$. حال اگر $\rho(e) = c$، آنگاه $\rho^{-۱}(c) = e$. اما $\rho^{-۱}(f) = d$، پس $d \in fRe$ و

$$e = \rho^{-۱}(c) = \rho^{-۱}(cf) = c\rho^{-۱}(f) = cd.$$

به عکس، فرض کنیم $cd = e$ و $dc = f$. عناصر $c \in eRf$ و $d \in fRe$ را در نظر می گیریم. در این صورت

$$(ecf)(fde) = ecfde$$

$$= ecdcde = e^{۴} = e$$

و بطور مشابه $(fde)(ecf) = f$. لذا با توجه به اینکه $cd = e$ و $dc = f$، به راحتی می توان بررسی کرد که نگاشت $Rf \longrightarrow Re$ با ضابطه $x \longmapsto xc$ و نگاشت $Re \longrightarrow Rf$ با ضابطه $y \longmapsto yd$، R-یکریختی هستند.

(ج) با قرار دادن $e = f$ در قسمت (ب)، $\lambda : End_R(Re) \longrightarrow Re$ یکریختی گروهی است. کافیست نشان دهیم λ یکریختی حلقه ای می باشد. فرض کنیم $\rho, \rho' \in End_R(eRe)$ و $m = \rho(e) \in Re$. پس با توجه به (الف) داریم:

$$\lambda(\rho'\rho) = \rho'\rho(e) = \rho'(m)$$

$$= \rho'(em) = \rho'(e)m = \rho'(e)\rho(e)$$

$$= \lambda(\rho')\lambda(\rho).$$

(د) بدیهی است. ■

حال یک مورد خاص را بررسی می کنیم :

فرض کنیم $R = L_۱ \oplus ... \oplus L_n$ که L_i ها ایده آلهای چپ R هستند و برای هر i و j ، $L_i \simeq L_j$ (به عنوان R-مدول). خودتوان های متعامد $e_۱$، ... و e_n وجود دارند که برای هر i، $L_i = Re_i$. اگر e یکی از e_i ها باشد ، آنگاه برای هر $n \leq j \leq ۱$، عناصر c_j و d_j وجود دارند به طوری که $d_jc_j = e_j$ و $c_jd_j = e$.

از متعامد بودن e_iها نتیجه می گیریم:

$$eR = eRe_۱ \oplus ... \oplus eRe_n$$

(به عنوان eRe-مدول چپ). به علاوه

$$ere_j \longmapsto ere_jdj = erd_jc_jd_j = erd_je.$$

به راحتی می توان مشاهده کرد که نگاشت $eRe \longrightarrow eRe_j$ با ضابطه فوق یک eRe -یکریختی است.

قضیه ۳.۱.۲. فرض کنیم $_RR = L_۱ \oplus ... \oplus L_n$ که L_i ها ایده آلهای چپ R هستند و برای هر i و j، $L_i \simeq L_j$ (به عنوان R-مدول چپ). در این صورت خودتوان های e_i وجود دارند به طوری که برای هر $n \leq i \leq ۱$، $L_i = Re_i$ و اگر e یکی از e_i ها باشد آنگاه

الف) eR یک eRe-مدول آزاد است که یک پایه n-عنصری دارد.

ب) $R^{op} \simeq End_R(_RR) \simeq End_{eRe}(eR)$.

ج) R^{op} به عنوان یک حلقه یکریخت با حلقه ماتریس های $n \times n$ روی $(eRe)^{op}$ است.

اثبات. واضح است که $End_R(\oplus \sum Re) \simeq M_n((eRe)^{op}) \simeq End_{eRe}(eR)$. ■

قضیه ۴.۱.۲. فرض کنیم e خودتوانی ناصفر از R باشد. در این صورت

$$Rad(eRe) = eRe \cap (Rad(R)) = e(Rad(R))e.$$

اثبات. کافیست نشان دهیم:

(۱) اگر $r \in Rad(eRe)$، آنگاه $r \in Rad(R)$.

(۲) اگر $r \in Rad(R) \cap (eRe)$، آنگاه $r \in e(Rad(R))e$.

(۳) اگر $r \in e(Rad(R))e$، آنگاه $r \in Rad(eRe)$.

(۱) کافیست نشان دهیم برای هر $y \in R$، $1 - yr$ در R وارون چپ دارد. $b \in eRe$ را طوری در نظر می گیریم که $b(e - eye.r) = e$. پس $b(1 - yr) = e$. بنابراین

$$yrb(1 - yr) = yre = yr.$$

با اضافه کردن $1 - yr$ به طرفین تساوی فوق داریم:

$$(1 + yrb)(1 - yr) = 1.$$

در نتیجه $1 - yr$ در R وارون چپ دارد.

(۲) فرض کنیم $r \in eRe \cap Rad(R)$. در نتیجه $r = ere$ که $r \in Rad(R)$. بنابراین

$$(eRe) \cap Rad(R) \subseteq e(Rad(R))e.$$

(۳) کافیست نشان دهیم برای هر $y \in eRe$، $e - yr$ در eRe وارون چپ دارد.

چون $r \in e(Rad(R))e \subseteq Rad(R)$، پس عنصر $x \in R$ وجود دارد به طوری که $x(1 - yr) = 1$. اما

$$e = ex(1 - yr)e = ex(e - yr) = exe(e - yr).$$

بنابراین $exe \in eRe$ وارون چپ $e - yr$ است. پس $e(Rad(R))e \subseteq Rad(eRe)$. ■

قضیه ۵.۱.۲. فرض کنیم L یک ایده آل غیر پوچتوان از R باشد. در این صورت L شامل یک خودتوان ناصفر است.

اثبات . با استفاده از استقرا روی مرتبه L قضیه را ثابت می کنیم. اگر $|L| = ۲$، آنگاه نتیجه حاصل است. بنابراین فرض می کنیم برای ایده آلهای چپ با مرتبه کمتر از n برقرار باشد. حال فرض کنیم $|L| = n$ و برای برخی $a \in L$، $La = L$. از این که L متناهی است، نتیجه می گیریم برای هر $x \in L$، $xa = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$. همچنین برای برخی $۰ \neq e \in L$، $ea = a$. بنابراین $(e^۲ - e)a = ۰$ و $e^۲ - e = ۰$.

فرض کنیم $|La| < |L|$. با توجه به فرض استقرا La یا پوچتوان است یا شامل یک خودتوان می باشد. اگر برای هر $a \in L$، La پوچتوان باشد آنگاه هر $a \in L$ خود، پوچتوان است.

ادعا می کنیم که L پوچتوان است هرگاه هر $a \in L$ پوچتوان باشد. فرض کنیم L پوچتوان نباشد. کوچکترین ایده آل چپ J در L را طوری در نظر می گیریم که پوچتوان نباشد. در این صورت $J^۲ \subseteq J$ و $J^۲$ پوچتوان نیست. از اینرو $J = J^۲$. حال فرض کنیم H کوچکترین ایده آل چپ R باشد به طوری که $JH \neq ۰$. لذا برای هر $h \in H$، $Jh \neq ۰$. پس $J(Jh) = Jh \neq ۰$ و $Jh \subseteq H$. بنابراین $Jh = H$. $t \in J$ را طوری در نظر می گیریم که $th = h$. بنابراین برای هر عدد صحیح m،

$$t^m h = t^{m-۱} h = ... = th = h \neq ۰$$

که یک تناقض است زیرا $t \in J \subseteq L$ پوچتوان است. پس L پوچتوان می باشد که خلاف فرض است. بنابراین L شامل یک خودتوان ناصفر است. ■

نتیجه ۶.۱.۲. فرض کنیم L یک ایده آل چپ مینیمال R باشد. در این صورت $L^۲ = ۰$ یا برای هر خودتوان $e \in R$، $L = Re$.

اثبات. فرض کنیم L ایده آل چپ مینیمال حلقه R باشد و $L^۲ \neq ۰$. بنابراین با توجه به قضیه قبل، L شامل خودتوان ناصفر e می باشد. پس $Re \subseteq L$. چون L مینیمال است بنابراین $L = Re$. ■

قضیه ۷.۱.۲. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

الف) R موضعی است؛

ب) R شامل هیچ خودتوان نابدیهی نیست.

اثبات. (الف) $\leftarrow$ (ب): فرض کنیم $e^{۲} = e \in R$ و $f = ۱ - e$. چون R موضعی است پس با توجه به قضیه ۷.۱.۱، $e \in R^*$ یا $f \in R^*$. اما $ef = ۰$. در نتیجه $f = ۰$ یا $e = ۰$.

(ب) $\leftarrow$ (الف): فرض کنیم $a \in R$ و $a \notin Rad(R)$. در این صورت Ra پوچتوان نیست. پس با توجه به قضیه ۵.۱.۲، Ra شامل خودتوان ناصفر e می باشد. حال با توجه به (ب)، $e = ۱$. بنابراین عنصر $b \in R$ وجود دارد به طوری که $ba = ۱$ و لذا $R/Rad(R)$ یک حلقه تقسیم است. ■

قضیه ۸.۱.۲. فرض کنیم e یک خودتوان ناصفر از حلقه R باشد. در این صورت:

الف) گزاره های زیر معادلند:

۱) e مینیمال است؛

۲) eRe یک حلقه موضعی است؛

۳) Re تجزیه ناپذیر است.

ب) اگر $Rad(R) = ۰$، آنگاه گزاره های زیر معادلند:

۱) Re یک ایده آل چپ مینیمال است؛

۲) eRe یک میدان متناهی است.

اثبات. (الف). (۲) $\leftarrow$ (۱): فرض کنیم eRe حلقه موضعی باشد. خودتوان $f \in eRe$ را در نظر می گیریم به طوری که $f \leqslant e$. با توجه به قضیه ۷.۱.۲، eRe شامل خودتوان نابدیهی نیست، پس $f = ۱_{eRe} = e$. بنابراین e مینیمال است.

(۱) $\leftarrow$ (۲): فرض کنیم e مینیمال باشد. کافیست ثابت کنیم eRe شامل هیچ خودتوان نابدیهی

نیست. فرض کنیم $f \in eRe$، خودتوان دلخواهی باشد. چون $f \in eRe$ پس $f \leqslant e$. از طرفی e مینیمال است پس $f = e = 1_{eRe}$. بنابراین با توجه به قضیه ۷.۱.۲، eRe حلقه موضعی است.

(۳) $\leftarrow$ (۲): فرض کنیم Re تجزیه ناپذیر باشد و eRe موضعی نباشد. همچنین فرض کنیم $f \in eRe$ $\neq f^2 = f$ ۰ خودتوان ناصفر در eRe باشد و $f \neq e$. در این صورت f و $e-f$ خودتوان های متعامد در eRe هستند که $f + (e-f) = e$. از اینرو Re تجزیه پذیر است که با فرض در تناقض می باشد. بنابراین eRe یک حلقه موضعی است.

(۲) $\leftarrow$ (۳): فرض کنیم eRe موضعی باشد. همچنین فرض کنیم $e = e_1 + e_2$ و $e_1e_2 = 0$ و e_i ها ناصفر باشند. در نتیجه $e = e^2 = ee_1 + ee_2$ و لذا

$$e_1 + e_2 - ee_1 - ee_2 = 0.$$

بنابراین $e_1, e_2 \in eR$. بطور مشابه می توان نشان داد $e_1, e_2 \in Re$. پس $e_1, e_2 \in eRe$، که یک تناقض است.

اثبات (ب). (۱) $\leftarrow$ (۲): اگر Re یک ایده آل چپ مینیمال باشد، آنگاه با توجه به قضیه ۲.۱.۲ و لم شور، $End_R(Re) = eRe$ یک حلقه تقسیم است (از اینرو یک میدان متناهی است.)

(۲) $\leftarrow$ (۱): فرض کنیم $End_R(Re) = eRe$ یک میدان متناهی باشد و همچنین $r \in R$ که $re \neq 0$. ایده آل Rre را در نظر می گیریم. چون $Rad(R) = 0$ پس $(re)R(re) \neq 0$، بنابراین عنصر $s \in R$ وجود دارد به طوری که $esre \neq 0$. اما $esre \in eRe$، لذا وارونی مانند ete در eRe دارد. از طرفی $Re \subseteq Rre$، در نتیجه $((ete)es)re = e$). بوضوح $Rre \subseteq Re$. بنابراین $Re = Rre$ و Re مینیمال است. ■

قضیه ۹.۱.۲. فرض کنیم e یک خودتوان مینیمال غیر صفر حلقه R باشد و همچنین

$$\pi : R \longrightarrow R/Rad(R)$$

نگاشت طبیعی باشد. در این صورت πRe، یک ایده آل چپ مینیمال است.

اثبات . فرض کنیم $\pi(R(۱-e)) \subseteq R/Rad(R)$ یک ایده آل سره باشد. پس مشمول در یک ایده آل ماکسیمال به فرم $\pi(M)$ در $R/Rad(R)$ می باشد. فرض کنیم $\pi(M)\cap\pi(Re) \neq ۰$. در نتیجه $(\pi(M)\cap\pi(Re))^{۲} \neq ۰$ و عنصر $r\in R$ وجود دارد به طوری که $\pi(re)\in\pi(M)$ و $\pi(ere)\neq ۰$. اما $\pi(eRe)$ یک میدان متناهی و eRe موضعی است. پس $\pi(eRe) = eRe/Rad(eRe)$. بنابراین $\pi(x)$ ای وجود دارد به طوری که $\pi(xere) = \pi(e)$ ولذا $\pi(e)\in\pi(M)$. پس $e\in M$ و $۱ = e + (۱-e) \in M$ که یک تناقض است. بنابراین $\pi(M)\cap\pi(Re) = ۰$ و $\pi(Re)$ مینیمال است. ■

فرض کنیم ${}_RR = Re_۱ \oplus ... \oplus Re_n$ که Re_i ها ایده آلهای چپ تجزیه ناپذیر هستند. اگر

$$N_i = Re_i \cap Rad(R)$$

آنگاه N_i بزرگترین زیر مدول Re_i است. از اینرو $Re_i/Rad(R)$ یک ایده آل مینیمال می باشد.

قضیه ۱۰.۱.۲. فرض کنیم ${}_RR = Re_۱ \oplus ... \oplus Re_n$ که Re_i ها تجزیه ناپذیر هستند. فرض کنیم $N_i = Re_i \cap Rad(R)$. در این صورت $Re_i \simeq Re_j$ اگر و تنها اگر $Re_i/N_i \simeq Re_j/N_j$.

اثبات. اگر $Re_i \simeq Re_j$ آنگاه اثبات بدیهی است.

به عکس، فرض کنیم

$$w : Re_i/N_i \longrightarrow Re_j/N_j$$

یک یکریختی باشد و فرض کنیم $\pi_i : Re_i \longrightarrow Re_i/N_i$ همریختی طبیعی باشد. داریم:

$$\begin{tikzcd}
 & Re_i \arrow[d, "w\pi_i"] & \\
Re_j \arrow[r, "\pi_j"] & Re_j/N_j \arrow[r] & ۰
\end{tikzcd}$$

چون Re_i تصویری است پس $\phi \ : \ Re_i \longrightarrow Re_j$ وجود دارد به طوری که $\pi_j\phi = w\pi_i$. از اینکه $w\pi_i \neq 0$ نتیجه می گیریم $\pi_j\phi \neq 0$. پس $\phi(Re_i) \nsubseteq Ker\ \pi_i = N_i$. در نتیجه $\phi(Re_i) = Re_j$. بنابراین $Re_i \simeq Re_j$. ■

تعریف ۱۱.۱.۲. فرض کنیم R یک حلقه باشد. گوییم u یک خودتوان به پیمانه $Rad(R)$ است هرگاه $u^2 - u \in Rad(R)$.

قضیه ۱۲.۱.۲. خودتوان ها به پیمانه $Rad(R)$ قابل انتقال به $Rad(R)$ هستند.

اثبات. فرض کنیم u یک خودتوان به پیمانه $Rad(R)$ باشد. قرار می دهیم $x_1 = u^2 - u$. اگر $x_1 = 0$، آنگاه u یک خودتوان است.

اگر $x_1 \neq 0$ و $e_1 = u + x_1 - 2ux_1$، آنگاه

$$e_1^2 - e_1 = 4x_1^3 - 3x_1^2 = x_1^2(4x_1 - 3).$$

چون $x_1 \in Rad(R)$،پس پوچتوان است. به علاوه $e_1 \equiv u \ (mod(Rad(R)))$. در نتیجه e_1 خودتوان است یا می توانیم این روند را ادامه دهیم. که سرانجام به خودتوان e می رسیم که $e \equiv u \ (mod(Rad(R)))$. ■

قضیه ۱۳.۱.۲. فرض کنیم $S = R/Rad(R)$ و

$${}_SS = S\overline{e_1} \oplus ... \oplus S\overline{e_n}$$

که $\overline{e_i}$ ها خودتوان های دوبدو متعامد مینیمال هستند. در این صورت

$${}_RR = Re_1 \oplus ... \oplus Re_n$$

که e_i ها خودتوان های دوبدو متعامد موضعی می باشند و $e_i \equiv \overline{e_i} \ (mod(Rad(R)))$. به عکس، تجزیه پذیری R در بالا تجزیه پذیری S را ایجاب می کند.

اثبات. به استقرا عمل می کنیم. می توانیم فرض کنیم خودتوان های دوبدو متعامد موضعی e_1 ، ... و e_{s-1}، به ترتیب از $\overline{e_1}$ ، ... و $\overline{e_{s-1}}$ بدست می آیند.

فرض کنیم $f = e_1 + ... + e_{s-1}$ و $\lambda = (1-f)u(1-f)$، که $u \in R$ و $u \equiv \overline{e_s}\ mod(Rad(R))$. در این صورت $\lambda \equiv \overline{e_s}\ mod(Rad(R))$.

برای هر $i < s$، $e_i\lambda = \lambda e_i = 0$. اگر λ خودتوان باشد اثبات کامل است. حال فرض کنیم λ خودتوان نباشد. در نتیجه $x_1 = \lambda^2 - \lambda \in Rad(R)$ را در نظر می گیریم و با تکرار روند قبلی و با توجه به قضیه ۱۲.۱.۲، به خودتوان e_s می رسیم که $e_s \equiv \overline{e_s}\ mod(Rad(R))$ و برای هر $i < s$،

$$e_s e_i = e_i e_s = 0.$$

به راحتی می توان مشاهده کرد که e_s تجزیه ناپذیر است و از اینرو موضعی می باشد. ■

تذکر. در اثبات قضیه فوق مشاهده می کنیم که اگر $\overline{e_n} + ... + \overline{e_1} = \overline{1}$ که $\overline{e_i}$ ها در $R/Rad(R)$ خودتوان های دوبدو متعامدند، آنگاه $e_n + ... + e_1 = 1$ که e_i ها در R، خودتوان های دوبدو متعامد هستند و $e_i \equiv \overline{e_i}\ (mod\ Rad(R))$.

با استفاده از قضیه ۱.۱.۲، اگر ${}_RR = Re_1 \oplus ... \oplus Re_n$ که e_iها موضعی هستند، آنگاه به استناد قضیه کرول-اشمیت این تجزیه منحصر به فرد است. بدون استفاده از قضیه کرول-اشمیت می توان نشان داد اگر R نیم ساده باشد، یعنی؛ $Rad(R) = 0$، آنگاه R بصورت منحصر به فرد به مجموع مستقیمی از ایده آلهای چپ مینیمال تجزیه می شود.

نشان می دهیم این شرط برای اثبات یکتایی تجزیه برای حلقه دلخواه R کافیست. بنابراین در قضیه بعدی دیدگاه دیگری به قضیه کرول-اشمیت را فراهم می کنیم.

قضیه ۱۴.۱.۲. فرض کنیم $\sum_{i=1}^{m} e_i = 1$ و $\sum_{j=1}^{n} f_j = 1$، که e_i ها و f_j ها خودتوان های موضعی هستند. در این صورت $m = n$ و عنصر یکتای $v \in R$ و جایگشت

$p: \{1, ..., m\} \longrightarrow \{1, ...m\}$ وجود دارند به طوری که برای $1 \leqslant i \leqslant m$،

$$ve_iv^{-1} = f_{p(i)}.$$

اثبات . نگاشت طبیعی $R \longrightarrow R/Rad(R) = S$ با ضابطه $r \longmapsto \overline{r}$ را در نظر می گیریم. در نتیجه $\sum_{i=1}^{m} S\overline{e_i} = \sum_{j=1}^{n} S\overline{f_j}$ و $m = n$. به علاوه برای جایگشت مناسب p، $S\overline{e_i} \simeq S\overline{f_{p(i)}}$. بنابراین با توجه به قضیه ۱۰.۱.۲، $Re_i \simeq Rf_{p(i)}$. با توجه به قضیه ۲.۱.۲، v_i و w_i ای وجود دارند به طوری که $w_iv_i = e_i$ و $v_iw_i = f_{p(i)}$. قرار می دهیم:

$$v = \sum_{i=1}^{n} f_{p(i)}v_ie_i$$

و

$$w = \sum_{j=1}^{n} e_jw_jf_{p(j)}.$$

در نتیجه $vw = wv = 1$ و $ve_j = f_{p(j)}v$. ■

نتیجه ۱۵.۱.۲. فرض کنیم $R = \oplus \sum_{i=1}^{m} L_i$ و $R = \oplus \sum_{j=1}^{n} N_j$ که L_i و N_j ایده آل های چپ تجزیه ناپذیر هستند. در این صورت $m = n$ و همچنین به عنوان R-مدول برای هر $1 \leqslant i \leqslant m$، $L_i \simeq N_i$.

فصل ۳

تجزیه یکه ها

۱.۳ وارونپذیری عناصر حلقه و تجزیه پذیری گروه یکه ها

قرارداد : در تمام این فصل R نمایانگر حلقه ای شرکت پذیر و یکدار می باشد مگر اینکه خلاف آن ذکر شود. این بخش را با یک لم درباره وارون پذیری عناصر در یک حلقه آغاز می کنیم.

لم ۱.۱.۳. فرض کنیم $e \in R$ یک خودتوان باشد و $r \in R$. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

الف) ere در eRe وارون پذیر است؛

ب) $\overline{e} + ere$ در R وارون پذیر است؛

ج) $\overline{e} + er$ در R وارون پذیر است.

اثبات. (ب) $\Leftarrow$ (الف): فرض کنیم x وارون $\overline{e} + ere$ باشد. با ضرب طرفین رابطه $(\overline{e} + ere)x = ۱$ در e داریم:

$$e = e\overline{e}xe + erexe = erexe$$

و با ضرب طرفین تساوی $x(\overline{e} + ere) = ۱$ در e داریم $e = exere$ بنابراین $e = ereexe = exeere$ و لذا exe وارون ere در eRe است.

(الف) $\leftarrow$ (ج): فرض کنیم $er'e$ وارون ere در eRe باشد. پس

$$(\overline{e}+er)(\overline{e}+er'e(1-er\overline{e}))=\overline{e}+er\overline{e}+erer'e(1-er\overline{e})$$

$$=\overline{e}+er\overline{e}+e-er\overline{e}=1$$

و

$$(\overline{e}+er'e(1-er\overline{e}))(\overline{e}+er)=\overline{e}-er'er\overline{e}+er'er$$

$$=\overline{e}+er'er(1-\overline{e})=1.$$

بنابراین

$$(\overline{e}+er)^{-1}=\overline{e}+er'e(1-er\overline{e}).$$

(ج) $\leftarrow$ (ب): فرض کنیم x وارون $\overline{e}+er$ باشد. با ضرب طرفین تساوی $x(\overline{e}+er)=1$ در e داریم $e=exere$ و لذا

$$(\overline{e}+exe)(\overline{e}+ere)=\overline{e}+exere=\overline{e}+e=1.$$

حال با ضرب طرفین تساوی $(\overline{e}+er)x=1$ در e داریم:

$$e=erxe=erexe+er\overline{e}xe=erexe+erxe-erexe.$$

از طرفی با ضرب رابطه $(\overline{e}+er)x=1$ در e از سمت راست داریم:

$$\overline{e}xe+erxe=e$$

که نشان می دهد $\overline{e}xe=0$. بنابراین

$$(\overline{e}+ere)(\overline{e}+exe)=\overline{e}+erexe=1-e+e-er\overline{e}xe=1.$$

■

لم ۲.۱.۳. فرض کنیم یکی از شرایط لم قبل برقرار باشد. در این صورت:

$$r \in (e+\overline{e}R).(\overline{e}+eR^*).$$

به علاوه، اگر r وارون پذیر باشد، آنگاه:

$$r \in (e+\overline{e}R^*).(\overline{e}+eR^*).$$

اثبات. فرض کنیم $\overline{e}+er \in R^*$. در نتیجه $\overline{e}+er = \overline{e}+e(\overline{e}+er) \in \overline{e}+eR^*$.

بنابراین کافیست نشان دهیم $r(\overline{e}+er)^{-۱} \in e+\overline{e}R$.

با توجه به لم قبل داریم:

$$e(r(\overline{e}+er)^{-۱}-e) = er(\overline{e}+er'e(۱-er\overline{e}))-e$$

$$= er\overline{e}+erer'e-erer'er\overline{e}-e$$

$$er\overline{e}-er\overline{e} = ۰.$$

در نتیجه

$$e(r(\overline{e}+er)^{-۱}-e) = ۰ = e\overline{e}$$

و لذا

$$r(\overline{e}+er)^{-۱} = \overline{e}+e = \overline{e}+ee \in \overline{e}+eR.$$

به علاوه اگر r وارون پذیر باشد، آنگاه $r(\overline{e}+er)^{-۱} \in R^*$. با استفاده از تساوی های فوق نتیجه می گیریم $r(\overline{e}+er)^{-۱} \in \overline{e}+eR^*$. بنابراین اثبات لم کامل می شود. ■

گزاره ۳.۱.۳. فرض کنیم G زیر گروهی از R^* باشد و خودتوان $e \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $eGe \subseteq (eRe)^*$. در این صورت

$$G \subseteq (e+\overline{e}R^*).(\overline{e}+eR^*).$$

اثبات. فرض کنیم $g \in G$. چون g وارون پذیر است، با استفاده از لم قبل داریم:

$$g \in (e + \overline{e}R^*).(\overline{e} + eR^*).$$

بنابراین

$$G \subseteq (e + \overline{e}R^*).(\overline{e} + eR^*).$$

■

تعریف ۴.۱.۳. فرض کنیم G زیرگروهی از R^* باشد. گوییم خودتوان $e \in R$ گروه G را حفظ می کند هرگاه $\overline{e} + eG$ مشمول در G باشد.

لم ۵.۱.۳. فرض کنیم G زیرگروهی از R^* باشد. در این صورت :

الف) زیرگروه G از R^* توسط خودتوان e حفظ می شود اگر و تنها اگر توسط متممش $\overline{e}$ حفظ شود.

ب) اگر خودتوان e، G را حفظ کند آنگاه $eGe \subseteq (eRe)^*$.

ج) فرض کنیم گروه G با گروه یکه های زیرحلقه ای از R مانند R' برابر باشد و $e \in G$. (بویژه اگر $G = R^*$) در این صورت e گروه G را حفظ می کند اگر و تنها اگر $eGe \subseteq (eR'e)^*$.

اثبات. الف) کافیست یک طرف هم ارزی را ثابت کنیم. اگر e گروه G را حفظ کند آنگاه برای هر $g \in G$ داریم:

$$e + \overline{e}g = (\overline{e} + eg)^{-۱}.g \in (\overline{e} + eG).G = G$$

پس $\overline{e}$ نیز G را حفظ می کند.

ب) برای هر $g \in G$، داریم $\overline{e} + eg \in G$. از اینکه G زیرگروه R^* است نتیجه می گیریم $\overline{e} + eg \in R^*$. بنابراین با توجه به لم ۱.۱.۳، $ege \in (eRe)^*$ و چون g دلخواه بود لذا $eGe \subseteq (eRe)^*$.

ج) برای هر $g \in G$، اگر $ege \in (eR'e)^*$، آنگاه با توجه به لم ۱.۱.۳، $\bar{e} + eg \in (R')^*$. اما $\bar{e} + eg$ و وارونش عناصری از هر زیرحلقه R شامل e و G هستند، بنابراین با توجه به فرض $\bar{e} + eg \in G$.

به عکس، فرض کنیم e گروه G را حفظ کند. در نتیجه برای هر $g \in G$ داریم:

$$\bar{e} + eg \in G \subseteq (R')^*$$

و لذا

$$\bar{e} + eg \in (R')^*.$$

بنابراین با توجه به لم ۱.۱.۳، $ege \in (eR'e)^*$ و لذا $eGe \subseteq (eR'e)^*$. ■

گزاره ۶.۱.۳. فرض کنیم G زیرگروهی از R^* باشد و $e^{۲} = e \in R$. اگر e گروه G را حفظ کند آنگاه $\bar{e} + eG$ و $e + \bar{e}G$ زیرگروه های G هستند.

اثبات. بنا به لم ۵.۱.۳ کافیست ثابت کنیم $\bar{e} + eG$ زیرگروه G است. چون برای هر $g, g' \in G$، داریم $\bar{e} + eg, \bar{e} + eg' \in G$ و

$$(\bar{e} + eg)(\bar{e} + eg') = \bar{e} + e(\bar{e} + eg)(\bar{e} + eg') \in \bar{e} + eG,$$

پس $\bar{e} + eG$ بسته است.

بطور مشابه، اگر $g \in G$ آنگاه $\bar{e} + eg$ وارون پذیر است و با توجه به لم ۱.۱.۳، برای برخی $r \in R$،

$$(\bar{e} + eg)^{-۱} = \bar{e} + ere(۱ - eg\bar{e}),$$

بنابراین داریم:

$$(\bar{e} + eg)^{-۱} = \bar{e} + e(\bar{e} + ere(۱ - eg\bar{e})) = \bar{e} + e(\bar{e} + eg)^{-۱} \in \bar{e} + eG.$$

■

قضیه ۷.۱.۳. فرض کنیم G یک زیرگروه R^* باشد. اگر خودتوان $e \in R$ وجود داشته باشد که G را حفظ کند آنگاه گروه G تجزیه پذیر است. در واقع

$$G = (e + \overline{e}G).(\overline{e} + eG).$$

اثبات. ابتدا مشاهده می کنیم که اگر $x \in e + \overline{e}R^* \cap G$ آنگاه برای برخی $r \in R^*$،

$$x = e + \overline{e}r = e + \overline{e}(e + \overline{e}r) = e + \overline{e}x.$$

درنتیجه $e + \overline{e}R^* \cap G \subset e + \overline{e}G$ (درواقع $e + \overline{e}R^* \cap G = e + \overline{e}G$، زیرا e گروه G را حفظ می کند).

با توجه به گزاره ۳.۱.۳ در تجزیه عنصر $g \in G$ داریم:

$$g = (g(\overline{e} + eg)^{-۱}).(\overline{e} + eg).$$

همچنین باتوجه به گزاره ۳.۱.۳، $g(\overline{e} + eg)^{-۱} \in e + \overline{e}R^*$ و با توجه به فرض این عنصر در G قرار دارد. بنابراین در اشتراکشان قرار دارد که درواقع در $e + \overline{e}G$ است. بدیهی است که $\overline{e} + eg \in \overline{e} + eG$. بنابراین

$$G \subseteq (e + \overline{e}G).(\overline{e} + eG).$$

با توجه به فرض و لم ۵.۱.۳، e و $\overline{e}$ گروه G را حفظ می کنند. پس $(e + \overline{e}G).(\overline{e} + eG) \subset G$ و در نتیجه $G = (e + \overline{e}G).(\overline{e} + eG)$. حال نشان می دهیم $(e + \overline{e}G) \cap (\overline{e} + eG) = \{۱\}$. فرض کنیم $y \in (e + \overline{e}G) \cap (\overline{e} + eG)$. در نتیجه $g, g' \in G$ وجود دارند به طوری که $y = e + \overline{e}g$ و $y = \overline{e} + eg'$.

با ضرب طرفین تساوی $\overline{e} + eg' = e + \overline{e}g$ در e داریم: $e = eg'$ و لذا

$$y = e + \overline{e} = ۱.$$

■

تعریف ۸.۱.۳. فرض کنیم H و K زیرگروه هایی از گروه G باشند. گوییم G حاصلضرب نیم مستقیم H و K می باشد هرگاه :

الف) H یا K در G نرمال باشد،

ب) $H \cap K = \{۱\}$ ،

ج) $HK = G$.

حاصلضرب نیم مستقیم H و K را با علامت $H \ltimes K$ نشان می دهیم.

تذکر. تجزیه گروه G در قضیه ۷.۱.۳ حاصلضرب نیم مستقیم است هرگاه $(e+\bar{e}G)$ یا $(\bar{e}+eG)$ در G نرمال باشد.

نتیجه ۹.۱.۳. فرض کنیم خودتوان e، زیرگروه G از R^* را حفظ کند. در این صورت گروه $\bar{e}+eG$ در G نرمال است اگر و تنها اگر برای هر $g, h \in G$، $\bar{e}geh = \bar{e}ge$.

اثبات. چون $G = (e+\bar{e}G).(\bar{e}+eG)$، پس $\bar{e}+eG$ در G نرمال است اگر و تنها اگر هر عنصر $e+\bar{e}G$ نرمالساز $\bar{e}+eG$ باشد. بنابراین برای هر $e+\bar{e}g \in e+\bar{e}G$ داریم:

$$(e+\bar{e}g)(\bar{e}+eh)(e+\bar{e}g)^{-۱} = eh+\bar{e}g\bar{e}+\bar{e}geh)(e+\bar{e}g)^{-۱}$$

$$= (eh+e+\bar{e}g-e-\bar{e}ge+\bar{e}geh)(e+\bar{e}g)^{-۱}$$

$$= (۱-e-\bar{e}ge+\bar{e}geh(e+\bar{e}g)^{-۱}+eh(e+\bar{e}g)^{-۱}$$

$$= \bar{e}+eh(e+\bar{e}g)^{-۱}+\bar{e}geh(e+\bar{e}g)^{-۱}-\bar{e}ge.$$

بنابراین $(e+\bar{e}g)(\bar{e}+eh)(e+\bar{e}g)^{-۱} \in \bar{e}+eG$ اگر و تنها اگر $\bar{e}geh(e+\bar{e}g)^{-۱} = \bar{e}ge$. ■

تعریف ۱۰.۱.۳. عنصر $r \in R$ شبه وارون پذیر نامیده می شود هرگاه $r+۱$ در R وارون پذیر باشد.

تعریف ۱۱.۱.۳. ایده آل دوطرفه Q شبه وارون پذیر نامیده می شود هرگاه تمام عناصر Q شبه وارون پذیر باشند.

مثال. رادیکال جیکبسون یک ایده آل شبه وارون پذیر است.

نتیجه ۱۲.۱.۳. اگر Q یک ایده آل شبه وارون پذیر باشد آنگاه $1+Q$ زیرگروه R^* است.

اثبات. برای هر $(1+q), (1+q') \in 1+Q$ داریم:

$$(1+q)(1+q') = 1 + q' + q + qq' \in 1+Q$$

بنابراین $1+Q$ بسته می باشد.

اکنون با توجه به بسته بودن $1+Q$ کافیست نشان دهیم برای هر $\beta \in 1+Q$، $\beta^{-1} \in 1+Q$. چون $\beta \in 1+Q$، پس $q \in Q$ وجود دارد به طوری که $\beta = 1+q$. قرار می دهیم:

$$\beta^{-1} = (1+q)^{-1} = x.$$

در نتیجه

$$x(1+q) = 1 \Rightarrow x + xq = 1$$

$$\Rightarrow x = 1 - xq \in 1+Q.$$

بنابراین $\beta^{-1} \in 1+Q$. ■

نتیجه ۱۳.۱.۳. اگر Q یک ایده آل شبه وارون پذیر باشد آنگاه $1+Q$ توسط تمام خودتوان ها حفظ می شود.

اثبات . فرض کنیم e یک خودتوان باشد. چون $\bar{e} + e(1+Q) = 1 + eQ \subseteq 1+Q$، پس $1+Q$ توسط تمام خودتوان ها حفظ می شود. ■

نتیجه ۱۴.۱.۳. اگر Q یک ایده آل شبه وارون پذیر در R باشد، آنگاه برای هر خودتوان $e \in R$،

$$\text{۱} + Q = (\text{۱} + \overline{e}Q).(\text{۱} + eQ).$$

اثبات. با توجه به نتایج ۱۲.۱.۳ و ۱۳.۱.۳، $\text{۱} + Q$ زیرگروهی از R^* است که توسط تمام خودتوان ها حفظ می شود. بنابراین با توجه به قضیه ۷.۱.۳ داریم:

$$\text{۱} + Q = (\overline{e} + e(\text{۱} + Q)).(e + \overline{e}(\text{۱} + Q)) = (\text{۱} + eQ).(\text{۱} + \overline{e}Q).$$

■

تعریف ۱۵.۱.۳. گوییم گروه H توسیعی از گروه K می باشد هرگاه یک بروریختی

$$\varphi : H \longrightarrow K$$

وجود داشته باشد به طوری که هسته آن یک گروه آبلی باشد.

گزاره ۱۶.۱.۳. فرض کنیم خودتوان e گروه G را حفظ کند. در این صورت $\overline{e} + eG$ یک توسیع از گروه eGe می باشد و هسته همریختی مورد نظر با $\{eg\overline{e} \;\;:\;\; g \in G \;\;,\;\; ege = e\}$ به عنوان یک زیرگروه جمعی از R، یکریخت است.

به علاوه اگر $\overline{e} + eGe \subset \overline{e} + eG$، آنگاه $\overline{e} + eG$ حاصلضرب نیم مستقیم eGe و $\{eg\overline{e} \;\;:\;\; g \in G \;\;,\;\; ege = e\}$ است.

اثبات. باتوجه به گزاره ۶.۱.۳، $\overline{e} + eG$ یک گروه است. نگاشت

$$p : \overline{e} + eG \longrightarrow eGe$$

$$\overline{e} + eg \longmapsto ege$$

یک برویختی است. خاصیت همریختی: فرض کنیم $\overline{e}+eg$ و $\overline{e}+eg'$ عناصری از $\overline{e}+eG$ باشند. در نتیجه

$$p[(\overline{e}+eg)(\overline{e}+eg')] = p(\overline{e}+eg\overline{e}+egeg')$$

$$= p(\overline{e}+e(g\overline{e}+geg'))$$

$$= e(g\overline{e}+geg')e$$

$$= (eg\overline{e}+egeg')e = egeg'e$$

$$= (ege)(eg'e) = p(\overline{e}+eg)p(\overline{e}+eg').$$

حال هسته p را محاسبه می کنیم:

$$Ker\ p = \{\overline{e}+eg \quad : \quad g\in G \quad , \quad ege=e\} = \{۱+eg\overline{e} \quad : \quad g\in G \quad , \quad ege=e\}.$$

هسته p آبلی است: زیرا برای هر $(\overline{e}+eg), (\overline{e}+eg')\in Ker\ p$ داریم:

$$(\overline{e}+eg)(\overline{e}+eg') = \overline{e}+eg\overline{e}+egeg' = \overline{e}+eg-ege+egeg'$$

$$= \overline{e}+eg-e+eg'.$$

از طرفی

$$(\overline{e}+eg')(\overline{e}+eg) = \overline{e}+eg'\overline{e}+eg'eg = \overline{e}+eg'-eg'e+eg'eg$$

$$= \overline{e}+eg'-e+eg.$$

حال نشان می دهیم هسته p با گروه جمعی $\{eg\overline{e} \quad : \quad g\in G \quad , \quad ege=e\}$ یکریخت است. نگاشت

$$\varphi : \{eg\overline{e} \quad : \quad g\in G \quad , \quad ege=e\} \longrightarrow Ker\ p$$

$$eg - e \longmapsto ۱ + eg\overline{e}$$

یک یکریختی است. خاصیت همریختی φ را نشان می دهیم. برای هر $g_۱, g_۲ \in G$ داریم :

$$\varphi(eg_۱ - e + eg_۲ - e) = \varphi(e(\overline{e} + eg_۱)(\overline{e} + eg_۲) - e)$$

$$= ۱ + e(\overline{e} + eg_۱)(\overline{e} + eg_۲)\overline{e}$$

$$= ۱ + eg_۲\overline{e} + eg_۱\overline{e}.$$

از طرفی

$$\varphi(eg_۱ - e)\varphi(eg_۲ - e) = (۱ + eg_۱\overline{e})(۱ + eg_۲\overline{e})$$

$$= ۱ + eg_۲\overline{e} + eg_۱\overline{e}.$$

پس φ یک همریختی است. حال نشان می دهیم $\overline{e} + eG$ حاصلضرب نیم مستقیم eGe با $Ker\ p$ است. با توجه به قضیه اول یکریختی $Ker\ p$ در $\overline{e} + eG$ نرمال است. لذا از طرفی $\overline{e} + eG = eGe.Ker\ p$. کافیست ثابت کنیم $eGe \cap Ker\ p = \{۱\}$.

فرض کنیم $x \in eGe \cap Ker\ p$. عناصر $g, g' \in G$ وجود دارند به طوری که $x = eg'e$ و $x = \overline{e} + eg = ۱ + eg\overline{e}$. با ضرب طرفین روابط $eg'e = \overline{e} + eg$ و $eg'e = ۱ + eg\overline{e}$ در e نتیجه می گیریم $eg'e = e$ و $eg'e = eg$. پس $eg = e$ و لذا

$$x = \overline{e} + eg = ۱ - e + e = ۱.$$

■

تذکر. اگر $G = R^*$، آنگاه $Ker\ p \cong eR\overline{e}$ و لذا $۱ + er\overline{e}$ همواره وارون پذیر است. در نتیجه:

$$\{er\overline{e} \ \ : \ \ r \in R^* \ \ , \ \ ere = e\} = \{e(۱ + er\overline{e})\overline{e} \ \ : \ \ r \in R\} = eR\overline{e}.$$

بطور مشابه اگر Q یک ایده آل شبه وارون پذیر باشد و $G = ۱ + Q$ آنگاه $Ker\ p \cong eQ\overline{e}$. زیرا

$$\{e(۱+q)\overline{e} \ : \ q \in Q \ , \ e(۱+q)e = e\} = \{e(۱+q\overline{e})\overline{e} \ : \ q \in Q\} = eQ\overline{e}.$$

نتیجه ۱۷.۱.۳. الف) فرض کنیم e خودتوانی از حلقه R باشد به طوری که $eR^*e \subset (eRe)^*$. در این صورت می توان R^* را بصورت زیر تجزیه نمود:

$$R^* = ((eRe)^* \ltimes (eR\overline{e})).((\overline{e}R\overline{e})^* \ltimes (\overline{e}Re)).$$

ب) فرض کنیم Q یک ایده آل شبه وارون پذیر از حلقه R باشد و $e^۲ = e \in R$.

در این صورت

$$۱ + Q = ((e + eQe) \ltimes (eQ\overline{e})).((\overline{e} + \overline{e}Q\overline{e}) \ltimes (\overline{e}Qe)).$$

ج) فرض کنیم خودتوان e گروه G را حفظ کند و $eGe = \{e\}$ و $\overline{e}G\overline{e} = \{\overline{e}\}$. در این صورت G آبلی است و با $eG\overline{e} \oplus \overline{e}Ge$ یکریخت است.

اثبات. الف) چون $eR^*e \subseteq (eRe)^*$ پس با توجه به لم ۵.۱.۳ خودتوان e، R^* را حفظ می کند. در نتیجه بنابر قضیه ۷.۱.۳ داریم:

$$R^* = (e + \overline{e}R^*).(\overline{e} + eR^*)$$

که با توجه به گزاره ۱۶.۱.۳ و تذکر قبل $e + \overline{e}R^* = (eR^*e) \ltimes (eR\overline{e})$ و $\overline{e} + eR^* = (\overline{e}R^*\overline{e}) \ltimes (\overline{e}Re)$.

ب) با توجه به نتیجه ۱۴.۱.۳، $۱ + Q = (۱ + \overline{e}Q).(۱ + eQ)$ و لذا بنابر گزاره ۱۶.۱.۳،

$۱ + \overline{e}Q = (e(۱+Q)e) \ltimes (eQ\overline{e})$ و $۱ + eQ = (\overline{e}(۱+Q)\overline{e}) \ltimes (\overline{e}Qe)$.

ج) چون خودتوان e، G را حفظ می کند پس با توجه به قضیه ۷.۱.۳،

$$G = (e + \overline{e}G).(\overline{e} + eG) \tag{۱.۳}$$

و در نتیجه بنابر گزاره ۳.۱.۱۶،

$$\bar{e} + eG \simeq eGe \ltimes eG\bar{e} \simeq \{e\} \ltimes eG\bar{e} \simeq eG\bar{e}$$

و همچنین بطور مشابه

$$e + \bar{e}G \simeq \bar{e}G\bar{e} \ltimes \bar{e}Ge \simeq \{\bar{e}\} \ltimes \bar{e}Ge \simeq \bar{e}Ge$$

(به عنوان زیرگروه های جمعی). از طرفی چون $(e + \bar{e}G) \cap (\bar{e} + eG) = \{۱\}$ پس

$$G \simeq (\bar{e}Ge) \oplus (eG\bar{e}).$$

به علاوه برای هر $g, h \in G$ داریم:

$$\bar{e} + eg = \bar{e} + ege + eg\bar{e} = \bar{e} + e + eg\bar{e} = ۱ + eg\bar{e}$$

و همچنین

$$e + \bar{e}h = e + \bar{e}h\bar{e} + \bar{e}he = e + \bar{e} + \bar{e}he = ۱ + \bar{e}he$$

حال نشان می دهیم G آبلی است. با توجه به رابطه (۳.۱) داریم:

$$(۱ + eg\bar{e})(۱ + \bar{e}he) = ۱ + \bar{e}he + eg\bar{e} + eg\bar{e}he.$$

از طرفی

$$eg\bar{e}he = eg(۱ - e)he = eghe - egehe = e - e = ۰,$$

بنابراین

$$(۱ + eg\bar{e})(۱ + \bar{e}he) = (e + \bar{e}h)(\bar{e} + eg).$$

■

مثال. فرض کنیم Q یک ایده آل شبه وارون پذیر حلقه S باشد و R زیرحلقه ای از ماتریس های $n \times n$ روی S باشد که تمام درایه های خارج قطر اصلی آن در Q هستند. نشان می دهیم R^* توسط برخی خودتوان های R حفظ می شود و تحت شرایط خاص توسط تمام خودتوان های R حفظ می شود.

حل. فرض کنیم $e_۱$، $e_۲$، ... و e_n خودتوان های واحد استاندارد R باشند. (هر e_i ماتریسی $n \times n$ است که درایه (i,i)-ام آن ۱ و سایر درایه های آن صفر هستند.) از آنجایی که $e_۱$، $e_۲$، ... و e_n یک سیستم کامل از خودتوان های متعامد را تشکیل می دهند، لذا برای هر $x \in R^*$ داریم:

$$e_m = e_m x x^{-۱} e_m = e_m(\sum_{i,j} e_i x e_j)(\sum_{k,l} e_k x^{-۱} e_l)e_m = \sum_i e_m x e_i x^{-۱} e_m$$
$$= e_m x e_m x^{-۱} e_m + \sum_{i \neq m} e_m x e_i x^{-۱} e_m.$$

اگر $e_i x e_j$ را بعنوان عناصری از S درنظر بگیریم، آنگاه برای هر $i \neq m$، $e_m x e_i \in Q$. در نتیجه

$$e_m x e_m x^{-۱} e_m = e_m - \sum_{i \neq m} e_m x e_i x^{-۱} e_m \in ۱ + Q.$$

بنابراین $e_m x e_m$ در $e_m R e_m$ وارون پذیر است که باتوجه به لم ۱.۱.۳ $\overline{e_m} + e_m x$ در R وارون پذیر می باشد یعنی؛ $\overline{e_m} + e_m x \in R^*$، چون x و e_m دلخواه بودند پس تمام خودتوان های واحد استاندارد، گروه R^* را حفظ می کنند.

در ادامه نشان می دهیم خودتوانی از R وجود دارد که R^* را حفظ نمی کند. اگر خودتوان $u \in S$ وجود داشته باشد که S^* را حفظ نکند آنگاه $u e_۱$ خودتوانی از R است که R^* را حفظ نمی کند. همچنین اگر $u_۱$، ... و u_n خودتوان های S باشند که S^* را حفظ کنند، آنگاه $u = \sum_i u_i e_i$، R^* را حفظ می کند.

نشان می دهیم هر خودتوانی از R، که مزدوج u توسط عنصری از R^* باشد، گروه R^* را حفظ

می کند. فرض کنیم $a \in R^*$. داریم:

$$(aua^{-1})R^*(aua^{-1}) = auR^*ua^{-1} \subset a(uRu)^*a^{-1}$$

$$= auR^*ua^{-1} = aua^{-1}R^*aua^{-1}$$

$$\subset a(ua^{-1}Rau)^*a^{-1} = ((aua^{-1})R(aua^{-1}))^*.$$

اگر S حوزه ایده آل اصلی باشد، آنگاه هر خودتوان در یک حلقه ماتریسی روی S مزدوج مجموعی از خودتوان های واحد استاندارد است. (این نتیجه برای حلقه های دلخواه لزوما درست نیست.) به علاوه اگر S خودتوان نابدیهی نداشته باشد، آنگاه بحث فوق ثابت می کند که تمام خودتوان های R، R^* را حفظ می کنند.

فصل ۴

مجموعه های بسته ضربی از خودتوان ها در یک حلقه متناهی

۱.۴ رابطه هم ارزی روی T

M را مجموعه تمام خودتوان های مینیمال R و صفر در نظر می گیریم که در اینجا فرض می کنیم تحت ضرب بسته است. مجموعه تمام خودتوان های حلقه R را با علامت T نمایش می دهیم.

تعریف ۱.۱.۴. فرض کنیم $e, f \in T$. گوییم $e \leqslant f$ هرگاه $e = efe$.

گزاره ۲.۱.۴. رابطه " $\leqslant$ " روی M، خواص بازتابی و تعدی دارد.

اثبات. خاصیت بازتابی: چون $e = eee = ee = e$، لذا $e \leqslant e$.

خاصیت تعدی: فرض کنیم $e \leqslant f$ و $f \leqslant g$. در این صورت $e = efe$ و $f = fgf$. پس

$$e = efe = e(fgf)e = ef(gfe)$$

$$= ef(gfe)(gfe) = (e(fgf)e)gfe = egfe.$$

بنابراین $e \leqslant gf$.

بطور مشابه

$$e = efe = e(fgf)e = (efg)fe$$

$$= (efg)(efg)fe = (efg)(e(fgf)e) = efge$$

پس $e \leqslant fg$. از طرفی

$$e = egfe = eg(fgf)e$$

$$= (egfg)fe = (egfg)(egfg)fe$$

$$= egfg(eg(fgf)e)$$

$$= (egfg)(egfe)$$

$$= egfge$$

بنابراین $e \leqslant gfg$. لذا

$$e = egfge = (eg)fge = (eg)(eg)fge$$

$$= eg(egfge) = ege$$

پس $e \leqslant g$. ■

تعریف ۳.۱.۴. فرض کنیم $e, f \in T$. گوییم $e \sim f$ هرگاه $e \leqslant f$ و $f \leqslant e$ و قرار می دهیم:

$$[e] := \{x \in T \ : \ x \sim e\}.$$

نتیجه ۴.۱.۴. رابطه " $\sim$ " یک رابطه هم ارزی روی T است.

اثبات. ۱) بازتابی: چون $e = eee = ee = e$ پس $e \leqslant e$ و لذا $e \sim e$.

۲) تقارنی: فرض کنیم $e \sim f$. در نتیجه $e \leqslant f$ و $f \leqslant e$. پس $f \sim e$.

۳) تعدی: فرض کنیم $e \sim f$ و $f \sim g$. پس $e \leqslant f$ و $f \leqslant g$ که با توجه به گزاره ۲.۱.۴، $e \leqslant g$. چون $g \leqslant f$ و $f \leqslant e$ پس $g \leqslant e$. بنابراین $e \sim g$. ■

لم ۵.۱.۴. فرض کنیم $e, f, g, h \in M$. اگر $[e] = [f]$ و $[g] = [h]$، آنگاه $[eg] = [fh]$.

اثبات. ثابت می کنیم $eg \leqslant fh$. کافیست ثابت کنیم اگر $e \leqslant f$ آنگاه $eg \leqslant fg$.

فرض کنیم $e \leqslant f$. از طرفی

$$(eg)e(eg) = egeg = eg.$$

بنابراین $eg \leqslant e \leqslant f$. در نتیجه $eg \leqslant f$.

همچنین $(ge)e(ge) = gege = ge$، لذا $ge \leqslant e \leqslant f$. پس $ge \leqslant f$. حال داریم:

$$eg = egfeg = (eg)feg = (eg)(eg)feg$$

$$= e(ge)gfeg = e(gefge)gfeg$$

$$= (eg)(efg)(egfeg) = (eg)(efg)(eg)$$

بنابراین $eg \leqslant efg$. بطور مشابه می توان نشان داد $efg \leqslant fg$ و با توجه به خاصیت تعدی داریم:

$$eg \leqslant fg \tag{۱.۴}$$

حال اگر $g \leqslant h$، آنگاه

$$(fg)g(fg) = fgfg = fg.$$

بنابراین $fg \leqslant g \leqslant h$.

همچنین $(gf)g(gf) = gfgf = gf$. لذا $gf \leqslant g \leqslant h$. حال داریم:

$$fg = fghfg(fg)hfg = (fg)(fg)hfg$$

$$= f(gf)ghfg = f(gfhgf)ghfg$$

$$= (fg)(fhg)(fghfg) = (fg)(fhg)(fg),$$

پس $fg \leqslant fhg$. بطور مشابه $fhg \leqslant fh$. بنابراین با توجه به خاصیت تعدی داریم:

$$fg \leqslant fh \tag{۲.۴}$$

با توجه به روابط (۱.۴) و (۲.۴)، $eg \leqslant fh$. نامساوی دیگر به طور مشابه ثابت می شود. بنابراین $[eg] = [fh]$. ■

تذکر. $\leqslant$ یک رابطه ترتیبی جزیی روی مجموعه $M/{\sim}$ است.

تعریف ۶.۱.۴. فرض کنیم $e, f \in T$. گوییم $e \leqslant_۱ f$ هرگاه

$$ef = fe = e.$$

گزاره ۷.۱.۴. اگر خودتوان e مینیمال باشد (بر طبق $\leqslant_۱$)، آنگاه $[e]$ در $M/\sim$ مینیمال است.

اثبات. فرض کنیم برای $۰ \neq f \in M$ ، $e \leqslant f$. چون $efee = eefe = efe$ پس $efe \leqslant_۱ e$. بنابراین با توجه به فرض $efe = ۰$ یا $efe = e$. حال فرض کنیم $efe = ۰$. چون $f = fef$ لذا $fe = fefe$. چون $efe = ۰$ نتیجه می گیریم $fe = ۰$ و $f = fef = ۰$ که با فرض در تناقض است. پس $efe = f$ و لذا $f \leqslant e$. بنابراین $[e] = [f]$. ■

۲.۴ مزدوج های یک خودتوان

لم ۱.۲.۴. فرض کنیم $e \in M$ و $a \in G$. در این صورت eae یکه ای از eRe است اگر و تنها اگر $ea^{-۱}e$ یکه ای از eRe باشد. به ویژه $(eae)^{-۱} = ea^{-۱}e$.

اثبات. چون M تحت ضرب بسته است پس $f = eaea^{-۱}e \in T$. پس

$a^{-1}fa = (a^{-1}ea)e(a^{-1}ea)$. بنابراین

$$ea^{-1}fa = (ea^{-1}ea)(ea^{-1}ea) = ea^{-1}ea$$

در نتیجه

$$ea^{-1}e = ea^{-1}f = ea^{-1}(eaea^{-1}e) = (ea^{-1}e)(eae)(ea^{-1}e).$$

حال فرض کنیم $ea^{-1}e$ یکه ای در eRe باشد. در نتیجه

$$(ea^{-1}e)(eae) = (eae)(ea^{-1}e) = e. \quad (۳.۴)$$

به عکس، فرض کنیم $g = ea^{-1}eae \in T$. در نتیجه

$$eaga^{-1} = (eaea^{-1})(eaea^{-1}) = eaea^{-1}$$

بنابراین

$$eae = eag = eaea^{-1}eae = (eae)(ea^{-1}e)(eae).$$

حال فرض کنیم eae یکه ای از eRe باشد. در نتیجه

$$(eae)(ea^{-1}e) = (ea^{-1}e)(eae) = e. \quad (۴.۴)$$

بنابراین با توجه به روابط (۳.۴) و (۴.۴)، $(eae)^{-1} = ea^{-1}e$. ■

قضیه ۲.۲.۴. فرض کنیم $e \in T$ و $a \in G$. در این صورت eae یکه ای در eRe است اگر و تنها اگر $e \sim aea^{-1}$.

اثبات. فرض کنیم eae یکه ای از eRe باشد. بنابر لم قبل، $e = (eae)(ea^{-1}e) = eaea^{-1}e$. پس

$$e \leqslant aea^{-1}. \quad (۵.۴)$$

از اینکه $e = ea^{-1}eae$، نتیجه می گیریم $aea^{-1} = (aea^{-1})e(aea^{-1})$ و لذا

$$aea^{-1} \leqslant e. \qquad (۶.۴)$$

از روابط (۵.۴) و (۶.۴)، نتیجه می گیریم $e \sim aea^{-1}$ اگر و تنها اگر eae یکه ای در eRe باشد. ■

نتیجه ۳.۲.۴. فرض کنیم e خودتوانی باشد که G را حفظ کند. در این صورت برای هر $a \in G$،

$$[e] = [aea^{-1}].$$

اثبات. فرض کنیم e، G را حفظ کند. پس $eGe \subseteq (eRe)^*$. بنابراین با توجه به قضیه قبل $e \sim aea^{-1}$.
■

قضیه ۴.۲.۴. فرض کنیم $a \in G$ و برای هر خودتوان مینیمال e، $[e] = [aea^{-1}]$. در این صورت برای هر $e \in T$، $e \sim aea^{-1}$.

اثبات. خودتوان دلخواه $e \in T$ را در نظر می گیریم. e عضو خنثی eRe است و خودتوان های متعامد و مینیمال e_1، ... و e_n از eRe وجود دارند به طوری که $e = e_1 + e_2 + ... + e_n$.

فرض کنیم $a \in G$ یک عنصر یکه دلخواه باشد. در نتیجه

$$aea^{-1}eaea^{-1} = \sum_{i,j,k} ae_ia^{-1}e_jae_ka^{-1}.$$

اما e_i ها مینیمال هستند و با توجه به فرض $[ae_ia^{-1}] = [e_i]$. پس برای هر i، ae_ia^{-1} مینیمال است. از طرفی با توجه به فرض $[ae_ia^{-1}] = [e_i]$ و $[ae_ka^{-1}] = [e_k]$ و همچنین $[e_j] = [e_j]$، در نتیجه بنابر لم ۵.۱.۴ داریم:

$$[ae_ia^{-1}e_jae_ka^{-1}] = [e_ie_je_k].$$

می توان نتیجه گرفت که $aea^{-1}eaea^{-1} = \sum_i ae_ia^{-1}e_iae_ia^{-1}$. چون $[e_i] = [ae_ia^{-1}]$ پس با توجه به قضیه ۲.۲.۴، e_iae_i یکه ای از e_iRe_i است. بنابراین

$$aea^{-1}eaea^{-1} = \sum_i a(e_ia^{-1}e_i)(e_iae_i)a^{-1} = \sum_i ae_ia^{-1} = aea^{-1}.$$

در نتیجه $aea^{-1} \leqslant e$ و بطور مشابه می توان نتیجه گرفت $e \leqslant aea^{-1}$. بنابراین $e \sim aea^{-1}$. ■

نتیجه ۵.۲.۴. فرض کنیم R یک حلقه نیم ساده باشد و برای هر خودتوان مینیمال e و هر $a \in G$، $eae \neq 0$. در این صورت هر خودتوانی G را حفظ می کند.

اثبات . اگر e مینیمال و R نیم ساده باشد آنگاه با توجه به قضیه ۸.۱.۲، eRe یک میدان است. پس $eae \neq 0$ یکه می باشد. حال بنابر قضایای ۲.۲.۴ و ۴.۲.۴ اثبات کامل می شود. ■

گزاره ۶.۲.۴. فرض کنیم e یک خودتوان غیر صفر باشد. در این صورت خودتوان $e \neq f$ وجود دارد به طوری که f عمود بر e و مزدوج e است اگر و تنها اگر عنصر $b \in G$، وجود داشته باشد که $ebe = 0$.

اثبات. فرض کنیم f یک خودتوان متعامد به e و مزدوج e باشد. پس $a \in G$ وجود دارد که $e = afa^{-1}$ و $fe = 0$. در نتیجه $faf = fea = 0$. از اینکه $f = a^{-1}ea$ نتیجه می گیریم $afe = eae = 0$. بنابراین $eae = 0$.

به عکس، فرض کنیم برای $0 \neq b \in G$، $ebe = 0$. در اثبات لم ۱.۲.۴ دیدیم:

$$eb^{-1}e = (eb^{-1}e)(ebe)(eb^{-1}e).$$

بنابراین $ebe = 0$ اگر و تنها اگر $eb^{-1}e = 0$. حال $f = beb^{-1}$ را در نظر می گیریم. ادعا می کنیم $f \neq e$. در غیر این صورت داریم:

$$f = beb^{-1} = e$$

پس

$$ebe = eb$$

و چون $ebe = ۰$، پس $eb = ۰$. چون $b \neq ۰$ لذا $e = ۰$ که یک تناقض است. بنابراین

$$ef = ebeb^{-۱} = (ebe)(eb^{-۱}) = ۰$$

■

نتیجه ۷.۲.۴. اگر R نیم ساده باشد و هیچ دو خودتوان مینیمال مزدوج یکدیگر نباشند، آنگاه هر خودتوانی G را حفظ می کند.

اثبات. با توجه به گزاره قبل برای هر $b \in G$، $ebe \neq ۰$. با استفاده از نتیجه ۵.۲.۴ و نیم ساده بودن R، نتیجه می گیریم که هر خودتوانی G را حفظ می کند. ■

۳.۴ زیر گروهی از گروه های حفظ شده

تعریف ۱.۳.۴. فرض کنیم $e \in T$. مجموعه H_e را چنین تعریف می کنیم:

$$H_e := \{a \in G \quad : \quad eae \text{ یکه ای در } eRe \text{ است}\}.$$

گزاره ۲.۳.۴. فرض کنیم $e \in T$، در این صورت:

الف) $H_e = \{a \in G \quad : \quad (۱-e)a(۱-e) \text{ یکه ای در } (۱-e)R(۱-e) \text{ است}\}$.

ب) $H_e = \{a \in G \quad : \quad e + (۱-e)a \in G\}$.

ج) $H_e = \{a \in G \quad : \quad (۱-e) + ea \in G\}$.

د) $H_e = \{a \in G \quad : \quad [aea^{-۱}] = [e]\}$.

اثبات. تساوی (ج) در فصل ۳، لم ۱.۱.۳ ثابت شد. (اگر $a \in G$ ، آنگاه وارون $ea + (۱ - e)$ به صورت زیر بدست می آید:

با توجه به لم ۱.۱.۳ داریم:

$$(\bar{e} + ea)^{-۱} = (\bar{e} + ea'e(۱ - er\bar{e}))$$

و می دانیم $(eae)^{-۱} = ea'e = ea^{-۱}e$. پس

$$(\bar{e} + ea)^{-۱} = (۱ - e + ea^{-۱}e(۱ - ea(۱ - e))$$

$$= ۱ - e + ea^{-۱}e - ea^{-۱}ea + ea^{-۱}eae = ۱ - e + ea^{-۱}e - ea^{-۱}ea + e$$

$$= ۱ + ea^{-۱}e(۱ - a),$$

بنابراین

$$((۱ - e) + ea)^{-۱} = ۱ + ea^{-۱}e(۱ - a).$$

حال اگر a یک عنصر از مجموعه (ج) و x وارون $ea + (۱ - e)$ باشد آنگاه exe وارون eae است.) به طور مشابه مجموعه (الف) با مجموعه (ب) برابر است و با توجه به قضیه ۲.۲.۴، مجموعه (د) با H_e برابر است. همچنین لم ۱.۲.۴ ایجاب می کند که $a \in H_e$ اگر و تنها اگر $a^{-۱} \in H_e$. بنابراین با توجه به (ج) داریم:

$$a \in H_e \;\Leftrightarrow\; a^{-۱} \in H_e \;\Leftrightarrow\; (۱ - e) + ea^{-۱} \in G \;\Leftrightarrow\; ((۱ - e) + ea^{-۱})a \in G.$$

پس H_e با مجموعه (ب) برابر است. ■

ثابت خواهیم کرد که مجموعه H_e یک زیر گروه G است. بنابراین به تعریف زیر نیاز داریم.

تعریف ۳.۳.۴. فرض کنیم $e \in T$ و $a, b \in G$. رابطه $\sim_e$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$a \sim_e b \iff ea + (۱ - e)b \in G.$$

لم ۴.۳.۴. $\sim_e$ یک رابطه هم ارزی است.

اثبات . فرض کنیم $e \in T$ و $a, b, c \in G$. خاصیت بازتابی: چون $ea + (1 - e)a = a \in G$ پس $a \sim_e a$.

خاصیت تقارنی: فرض کنیم $a \sim_e b$. در نتیجه

$$ea + (1 - e)b \in G.$$

پس

$$e + (1 - e)ba^{-1} \in G.$$

بنابراین با توجه به گزاره ۲.۳.۴، $ba^{-1} \in H_e$. لذا $e(ba^{-1})e$ یکه ای از eRe است. بنابر لم ۱.۲.۴، $e(ba^{-1})^{-1}e = eab^{-1}e$ یکه ای در eRe می باشد. بنابراین

$$ab^{-1} \in H_e \quad \Rightarrow \quad e + (1 - e)ab^{-1} \in G \quad \Rightarrow \quad eb + (1 - e)a \in G,$$

پس $b \sim_e a$.

خاصیت تعدی: فرض کنیم $a \sim_e b$ و $b \sim_e c$. در نتیجه

$$ea + (1 - e)b \in G \quad \Rightarrow \quad e + (1 - e)ba^{-1} \in G.$$

که با توجه به لم ۲.۳.۴، $ba^{-1} \in H_e$. پس

$$[ba^{-1}e(ba^{-1})^{-1}] = [e] \quad \Rightarrow \quad [ba^{-1}eab^{-1}] = [e],$$

بنابراین

$$[a^{-1}ea] = [b^{-1}eb]. \tag{۷.۴}$$

بطور مشابه اگر $b \sim_e c$ آنگاه

$$eb + (۱ - e)c \in G \quad \Rightarrow \quad e + (۱ - e)cb^{-۱} \in G \quad \Rightarrow \quad cb^{-۱} \in H_e$$

بنابراین

$$[cb^{-۱}e(cb^{-۱})^{-۱}] = [e] \quad \Rightarrow \quad [cb^{-۱}ebc^{-۱}] = [e].$$

پس

$$\Rightarrow [b^{-۱}eb] = [c^{-۱}ec]. \tag{۸.۴}$$

با توجه به روابط (۷.۴) و (۸.۴)، $[a^{-۱}ea] = [c^{-۱}ec]$. در نتیجه

$$[ca^{-۱}eac^{-۱}] = [e] \quad \Rightarrow \quad [ca^{-۱}e(ca^{-۱})^{-۱}] = [e] \Rightarrow \quad ca^{-۱} \in H_e$$

پس

$$e + (۱ - e)ca^{-۱} \in G,$$

لذا

$$ea + (۱ - e)c \in G.$$

در نتیجه $a \sim_e c$. ■

قضیه ۵.۳.۴. فرض کنیم $e \in T$. در این صورت H_e یک گروه است.

اثبات . عناصر دلخواه $a, b \in H_e$ را در نظر می گیریم. ثابت می کنیم $ba^{-۱} \in H_e$. اگر $۱ \sim_e a$ و $۱ \sim_e b$، آنگاه با توجه به خاصیت تعدی $a \sim_e b$. بنابراین $e + (۱ - e)ba^{-۱} \in G$. پس $ba^{-۱} \in H_e$. ■

حال به بررسی برخی خواص گروه H_e می پردازیم.

قضیه ۶.۳.۴. فرض کنیم $e, e_1, e_2 \in T$. در این صورت گزاره های زیر برقرار می باشند:

الف) $H_e = H_{1-e}$.

ب) اگر برای $a \in H_e$، $e = e_1 + e_2$ که e_1 و e_2 متعامد هستند، آنگاه $a \in H_{e_1}$ اگر و تنها اگر $a \in H_{e_2}$.

ج) اگر $a \in G$، آنگاه $H_{aea^{-1}} = aH_e a^{-1}$.

اثبات. (الف) با توجه به گزاره ۲.۳.۴، $H_e = H_{1-e}$.

ب) فرض کنیم $a \in H_e$. چون $a \in H_{e_1}$ پس

$$e_1(eae)e_1 = (e_1e)a(ee_1) = (e_1e_1 + e_1e_2)a(e_1e_1 + e_2e_1) = e_1ae_1$$

یکه ای از $e_1(eRe)e_1$ است. اما متمم e_1 در eRe، e_2 می باشد و eae یکه ای از eRe است، بنابراین با توجه به لم ۲.۳.۴، $e_2(eae)e_2$ یکه ای در $e_2(eRe)e_2$ است و داریم:

$$e_2(eae)e_2 = (e_2e)a(ee_2) = (e_2e_1 + e_2e_2)a(e_1e_2 + e_2e_2) = e_2ae_2$$

پس $a \in H_{e_2}$.

به عکس، فرض کنیم $a \in H_{e_2}$. پس با توجه به روابط فوق $e_2(eae)e_2 = e_2ae_2$ یکه ای در $e_2(eRe)e_2$ می باشد. اما متمم e_1 در eRe، e_2 است و eae یکه ای در eRe می باشد بنابراین $e_1(eae)e_1$ یکه ای در $e_1(eRe)e_1$ است. در نتیجه $a \in H_{e_1}$.

ج) فرض کنیم $x \in H_e$. پس $axa^{-1} \in aH_e a^{-1}$. باید نشان دهیم $axa^{-1} \in H_{aea^{-1}}$. یعنی؛

$$[(axa^{-1})(aea^{-1})(axa^{-1})^{-1}] = [aea^{-1}].$$

لذا کافیست نشان دهیم $[axex^{-1}a^{-1}] = [aea^{-1}]$.

اگر $x \in H_e$، آنگاه $[xex^{-1}] = [e]$. یعنی؛ $exex^{-1}e = e$ پس

$$(aea^{-1})(axa^{-1})(aea^{-1})(ax^{-1}a^{-1})(aea^{-1}) = aea^{-1}.$$

بنابراین

$$(aea^{-1})(axex^{-1}a^{-1})(aea^{-1}) = aea^{-1}.$$

و لذا

$$aea^{-1} \leqslant axex^{-1}a^{-1} \tag{۹.۴}$$

از طرفی چون $xex^{-1} = xex^{-1}exex^{-1}$، پس

$$axex^{-1}a^{-1} = (axex^{-1}a^{-1})(aea^{-1})(axex^{-1}a^{-1}),$$

بنابراین

$$axex^{-1}a^{-1} \leqslant aea^{-1}. \tag{۱۰.۴}$$

حال از روابط (۹.۴) و (۱۰.۴)، نتیجه می گیریم $[axex^{-1}a^{-1}] = [aea^{-1}]$. بنابراین

$$aH_ea^{-1} \subseteq H_{aea^{-1}}. \tag{۱۱.۴}$$

به عکس، فرض کنیم $x \in H_{aea^{-1}}$. باید نشان دهیم $x \in aH_ea^{-1}$. چون $x \in H_{aea^{-1}}$ پس

$$[xaea^{-1}x^{-1}] = [aea^{-1}].$$

در نتیجه

$$[a^{-1}xaea^{-1}x^{-1}a] = [e].$$

یعنی؛ $[(a^{-1}xa)e(a^{-1}xa)^{-1}] = [e]$. پس $a^{-1}xa \in H_e$ و لذا $x \in aH_ea^{-1}$. بنابراین

$$H_{aea^{-1}} \subseteq aH_ea^{-1}. \qquad (12.4)$$

حال با توجه به روابط (۱۱.۴) و (۱۲.۴)، $H_{aea^{-1}} = aH_ea^{-1}$. ■

قضیه ۷.۳.۴. فرض کنیم $e_1, e_2 \in T$. اگر e_1 متعامد به e_2 باشد، آنگاه

$$H_{e_1} \cap H_{e_2} \subseteq H_{e_1+e_2}.$$

اثبات. فرض کنیم $a \in H_{e_1} \cap H_{e_2}$. باید نشان دهیم $a \in H_{e_1+e_2}$. یعنی؛

$$[a(e_1 + e_2)a^{-1}] = [e_1 + e_2].$$

چون $a \in H_{e_1}$ پس $[ae_1a^{-1}] = [e_1]$ و چون $[e_2] = [e_2]$ لذا با توجه به لم ۵.۱.۴،

$$[e_2ae_1a^{-1}] = [e_2e_1] = 0 \quad \Rightarrow \quad e_2ae_1a^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad e_2ae_1 = 0.$$

از اینکه $[a^{-1}e_1a] = [e_1]$ و $[e_2] = [e_2]$، نتیجه می گیریم

$$[e_2a^{-1}e_1a] = [e_2e_1] = 0 \quad \Rightarrow \quad e_2a^{-1}e_1a = 0 \quad \Rightarrow \quad e_2a^{-1}e_1 = 0.$$

چون $a \in H_{e_2}$ پس $[ae_2a^{-1}] = [e_2]$ و چون $[e_1] = [e_1]$ لذا با توجه به لم ۵.۱.۴،

$$[e_1ae_2a^{-1}] = [e_1e_2] = 0 \quad \Rightarrow \quad e_1ae_2a^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad e_1ae_2 = 0.$$

از اینکه $[a^{-1}e_2a] = [e_2]$ و $[e_1] = [e_1]$، نتیجه می گیریم

$$[e_1a^{-1}e_2a] = [e_1e_2] = 0 \quad \Rightarrow \quad e_1a^{-1}e_2a = 0 \quad \Rightarrow \quad e_1a^{-1}e_2 = 0.$$

حال با توجه به روابط فوق داریم:

$$(e_۱+e_۲)a(e_۱+e_۲)a^{-۱}(e_۱+e_۲)=(e_۱+e_۲)(ae_۱+ae_۲)(a^{-۱}e_۱+a^{-۱}e_۲)$$

$$=(e_۱+e_۲)(ae_۱a^{-۱}e_۱+ae_۱a^{-۱}e_۲+ae_۲a^{-۱}e_۱+ae_۲a^{-۱}e_۲)$$

$$=e_۱ae_۱a^{-۱}e_۱+e_۱ae_۲a^{-۱}e_۲+e_۲ae_۱a^{-۱}e_۱+e_۲ae_۲a^{-۱}e_۲$$

$$=(e_۱ae_۱)(e_۱a^{-۱}e_۱)+(e_۲ae_۲)(e_۲a^{-۱}e_۲)=e_۱+e_۲.$$

بنابراین

$$e_۱+e_۲\leqslant a(e_۱+e_۲)a^{-۱}. \qquad (۱۳.۴)$$

به طور مشابه داریم:

$$(e_۱+e_۲)a^{-۱}(e_۱+e_۲)a(e_۱+e_۲)=e_۱+e_۲.$$

در نتیجه

$$(a(e_۱+e_۲)a^{-۱})(e_۱+e_۲)(a(e_۱+e_۲)a^{-۱})=a(e_۱+e_۲)a^{-۱}.$$

پس

$$a(e_۱+e_۲)a^{-۱}\leqslant e_۱+e_۲. \qquad (۱۴.۴)$$

بنابراین با توجه به روابط (۱۳.۴) و (۱۴.۴)، $[a(e_۱+e_۲)a^{-۱}]=[e_۱+e_۲]$. ■

گزاره ۸.۳.۴. فرض کنیم $e,f\in T$ خودتوان های مینیمال متعامد باشند. اگر برای هر $x\in G$، $[xex^{-۱}]\neq[f]$ آنگاه $H_{e+f}=H_e\cap H_f$.

اثبات. اگر $a \in H_{e+f}$، آنگاه $[a(e+f)a^{-1}] = [e+f]$. در نتیجه

$$(e+f)a(e+f)a^{-1}(e+f) = e+f. \tag{۱۵.۴}$$

با توجه به قضیه ۶.۳.۴، کافیست نشان دهیم $a \in H_e$ یا $a \in H_f$. یعنی؛ $ea^{-1}eae = e$ یا $fafa^{-1}f = f$. با ضرب f از چپ در معادله (۱۵.۴) داریم:

$$f = faea^{-1}e + faea^{-1}f + fafa^{-1}e + fafa^{-1}f,$$

و با ضرب f از راست در معادله فوق داریم:

$$f = faea^{-1}f + fafa^{-1}f.$$

کافیست ثابت کنیم $fafa^{-1}f$ یکه ای در fRf است و همچنین یک خودتوان می باشد بنابراین باید با f برابر باشد. فرض کنیم چنین نباشد. چون f مینیمال است لذا با توجه به قضیه ۸.۱.۲، fRf موضعی می باشد. از طرفی $faea^{-1}f = f - fafa^{-1}f$ و $fafa^{-1}f$ یکه نیست. پس با توجه به قضیه ۷.۱.۱، $faea^{-1}f$ یکه می باشد که بنابر تذکر قبل با $1_{fRf} = f$ برابر است. پس

$$f \leqslant aea^{-1}. \tag{۱۶.۴}$$

حال اگر جای e و f را عوض کنیم و با $a^{-1} \in H_{e+f}$ شروع می کنیم، آنگاه

$$e+f = (e+f)a^{-1}(e+f)a(e+f).$$

با ضرب e از چپ و راست در معادله فوق داریم:

$$e = ea^{-1}eae + ea^{-1}fae.$$

حال کافیست ثابت کنیم $ea^{-1}eae$ یکه ای از eRe است و نیز یک خودتوان می باشد، پس باید با e برابر باشد. فرض کنیم چنین نباشد. از طرفی با توجه به مینیمال بودن e، eRe موضعی است و همچنین $ea^{-1}fae$ یکه می باشد لذا با e برابر است. پس $e \leqslant a^{-1}fa$ بنابراین

$$aea^{-1} \leqslant f. \tag{۱۷.۴}$$

از روابط (۱۶.۴) و (۱۷.۴)، نتیجه می گیریم $[f] = [aea^{-1}]$، که با فرض در تناقض است. از اینکه $a \in H_{e+f}$ نتیجه می گیریم $a \in H_e$ و $a \in H_f$. بنابراین $H_{e+f} \subseteq H_e \cap H_f$. پس با توجه به قضیه ۷.۳.۴، اثبات کامل می شود. ■

۴.۴ تجزیه حلقه R

در این بخش نشان می دهیم اگر برای هر خودتوان مینیمال e، H_e با G برابر باشد (به بیان دیگر، با توجه به گزاره ۲.۳.۴ هر خودتوان مینیمال، گروه G را حفظ کند) آنگاه R را می توان به صورت مجموع مستقیمی از حلقه های موضعی تجزیه نمود.

لم ۱.۴.۴. هر عنصر از حلقه متناهی R، برابر با مجموع یک عنصر یکه و یک خودتوان است.

اثبات. با توجه به قضایای ۵.۱.۲ و ۱۲.۱.۲ می توانیم حلقه R را یک حلقه قوی در نظر بگیریم. در نتیجه با توجه به گزاره ۲۴.۱.۱، حلقه R نیم کامل و با توجه به قضیه ۳۲.۱.۱، تمیز است. بنابراین هر عنصر آن را می توان به صورت مجموع یک عنصر یکه و یک خودتوان نوشت. ■

قضیه ۲.۴.۴. اگر هر خودتوان مینیمال، G را حفظ کند (بطور معادل، برای هر خودتوان مینیمال e، $H_e = G$) آنگاه R یک مجموع مستقیم از حلقه های موضعی است و تعداد جمعوندها برابر ماکسیمم تعداد خودتوان های مینیمال متعامد در R است.

اثبات . فرض کنیم e و f دو خودتوان متعامد مینیمال باشند که G را حفظ می کنند و $a \in G$ یک یکه دلخواه باشد. در نتیجه $a \in H_e$ و $a \in H_f$. پس $[afa^{-۱}] = [f]$ و چون $[e] = [e]$ لذا $[eafa^{-۱}] = [ef] = ۰$. بنابراین برای هر $a \in G$، $eaf = ۰$. پس $eGf = ۰$.

حال فرض کنیم $g \in T$. خودتوان های دوبدو متعامد g_i در حلقه gRg، وجود دارند که

$$g = \sum_i g_i$$

با توجه به فرض e و g_i، G را حفظ می کنند. پس $G = H_e$ و $G = H_{g_i}$. در نتیجه

$$[aea^{-۱}] = [e] \quad , \quad [ag_ia^{-۱}] = [g_i].$$

از طرفی با توجه به قضیه ۱۴.۱.۲، برای هر $a \in R$، $aea^{-۱} = g_i$. بنابراین $[e] = [g_i]$ یا $[g_ie] = [۰]$. همچنین بنابر قضیه ۱۴.۱.۲ برای هر $x_i \in R$، می توان نوشت $g_i = x_ifx_i^{-۱}$ که $f = e$ یا f متعامد به e است. بنابراین

$$egf = e(\sum_i g_i)f = eg_۱f + eg_۲f + ... + eg_nf$$

با توجه به اینکه برای هر i، $eg_i = ۰$ لذا $egf = ۰$. پس $eTf = ۰$ و در نتیجه با توجه به لم ۱.۴.۴، $eRf = ۰$.

حال فرض کنیم e_iها خودتوان های دو بدو متعامد و مینیمال باشند که $e_۱ + ... + e_n = ۱$، در نتیجه

$$R = e_۱Re_۱ \oplus ... \oplus e_nRe_n$$

یک تجزیه از R است، که با توجه به قضیه ۸.۱.۲، هر حلقه e_iRe_i موضعی است زیرا هر e_i مینیمال است.

■

نتیجه ۳.۴.۴. فرض کنیم R یک حلقه نیم ساده باشد و همچنین هیچ دو خودتوان متعامد مینیمالی مزدوج یکدیگر نباشند. در این صورت R مجموع مستقیم میدانها است و تعداد جمعوند ها برابر ماکسیمم تعداد خودتوان های مینیمال دوبدو متعامد در R می باشد.

اثبات. با توجه به نتیجه ۷.۲.۴، هر خودتوان مینیمال، G را حفظ می کند و بنابر قضیه قبل R مجموع مستقیمی از حلقه های موضعی است. از اینکه R نیم ساده است، با استفاده از قضیه ۸.۱.۲، نتیجه می گیریم eRe برای خودتوان مینیمال e یک میدان است. ■

لم ۴.۴.۴. فرض کنیم R حلقه ماتریس های $n \times n$ روی میدان F باشد. در این صورت M تحت ضرب بسته نیست.

اثبات. عناصر زیر را در نظر می گیریم :

$$e = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ & \dots & ۱ \\ ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \dots & ۰ \end{pmatrix} \quad , \quad f = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \dots & ۱ \end{pmatrix}$$

e و f خودتوان های مینیمال در R هستند و

$$ef = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & \dots & ۱ \\ ۰ & ۰ & \dots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \dots & ۰ \end{pmatrix} \neq ۰$$

همچنین

$$(ef)^۲ = ۰$$

بنابراین M تحت ضرب بسته نیست. ■

قضیه ۵.۴.۴. اگر M تحت ضرب بسته باشد آنگاه هر خودتوان مینیمال، G را حفظ می کند.

اثبات. خودتوان های $e, f \in T(R)$ را در نظر می گیریم به طوری که $e + Rad(R)$ و $f + Rad(R)$ خودتوان های مینیمال در $R/Rad(R)$ باشند. می توان e و f را طوری در نظر گرفت که هر دو در R مینیمال باشند. حال مجموع مستقیمی از $R/Rad(R)$ را در نظر می گیریم. اگر یک جمعوند مستقیم ماتریس سره وجود داشته باشد، آنگاه می توان $e+Rad(R)$ و $f+Rad(R)$ را عناصری از لم فوق انتخاب کرد. می توان نتیجه گرفت که $(ef)^۲ + Rad(R) = Rad(R)$. پس ef پوچتوان ناصفر است. لذا M تحت ضرب بسته نیست که با فرض در تناقض است. پس $R/Rad(R)$ مجموع مستقیمی از میدانهاست و لذا جابجایی است.

حال فرض کنیم $e \in T$ یک خودتوان مینیمال دلخواه باشد و $a \in G$. در این صورت با توجه به اینکه $R/Rad(R)$ جابجایی است داریم:

$$(e + Rad(R))(a + Rad(R))(e + Rad(R))$$

$$= (a + Rad(R))(e + Rad(R))(e + Rad(R))$$

$$= (a + Rad(R))(e + Rad(R)) = ae + Rad(R).$$

پس برای هر $j \in J$،

$$eae + j = ae + j \qquad \Rightarrow \qquad a^{-۱}eae + j = e + j$$

با ضرب e از چپ در طرفین تساوی فوق داریم $ea^{-۱}eae = e + j = e + eje$. اما eje یک عنصر پوچتوان از eRe است، پس $ea^{-۱}eae = e$ و لذا eae یکه است. در نتیجه $a \in H_e$ و لذا $G = H_e$. ■

نتیجه ۶.۴.۴. M تحت ضرب بسته است اگر و تنها اگر R مجموع مستقیمی از حلقه های موضعی باشد.

اثبات. نتیجه مستقیمی از قضایای ۵.۴.۴ و ۲.۴.۴ است. ■

مراجع

[1] V. P. Camillo, H. -P. Yu, Exchange Rings, Units and Idempotents, *Comm. Algebra*, 22:(12) (1994) 4737–4749.

[2] D. Dolžan, Multiplicative Sets of Idempotents in a Finite Ring, *Journal of Algebra*, 304:(2006) 271–277.

[3] K. R. Goodearl, Von Neumann Regular Rings, *Pitinan (London, San Francisco, Melbourne)*, 1974. 11

[4] T. Y. Lam, A First Course in Noncommutative Rings, *Graduate texts in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, Heldelberg, New York, 1991. 4, 10

[5] B. R. McDonald, Finite Rings with Identity, *Marcel Dekker,* New York, 1974. 4

[6] W. K. Nicholson, Lifting Idempotents and Exchange Rings, *Trans. Amer. Math. Soc*, 229:(1977) 269–278.

[7] W. K. Nicholson(1), I-Rings, *Transactions of the American Mathematical society*, Volume 207, 1975.

[8] P. Paveši ˇc, Factorization of Units and Groups of Stable Homotopy Equivalences, *J. Pure Appl. Algebra*, 172:(2–3) (2002) 271–284.

[9] L. Rowen, Ring Theory, *Vol. 1, Academic press, Londen*, 1988. 11, 14

[10] K. P. Shum, On Matrix Rings over Unit-Regular Rings, *Department of Mathematics, The Chinese University of Hong Kong*, Volume 44 (2003), No. 1, 179-188.

فهرست الفبایی

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

تجزیه پذیر .... Factorizable
توسیع .... Extention
جمعوند مستقیم .... Direct summand
حاصلضرب نیم مستقیم .... Semidirect product
حلقه تمیز .... Clean ring
حلقه قوی .... Potent ring
حلقه متناهی .... Finite ring
حلقه مناسب .... Suitable ring
حلقه منظم .... Regular ring
حلقه موضعی .... Local ring
حلقه نیم ساده آرتینی .... Semisimple artinian ring
حلقه نیم موضعی .... Semilocal ring
حلقه نیم کامل .... Semiperfect ring
حلقه یکه-منظم .... Unit-regular ring
خودتوان اولیه .... Primitive idempotent
خودتوان ماکسیمال .... Maximal idempotent
خودتوان های متعامد .... Orthogonal idempotents
خودتوان موضعی .... Local idempotent
خودتوان مینیمال .... Minimal idempotent
رادیکال جیکبسون .... Jacobson radical
شبه وارون پذیر .... Quasi invertible
متمم .... Complement
مدول تجزیه ناپذیر .... Decomposition module
مدول ساده .... Simple module
مدول نیم ساده .... Semisimple module

واژه نامه انگلیسی به فارسی

حلقه تمیز	Clean ring
متمم	Complement
مدول تجزیه ناپذیر	Decomposition module
جمعوند مستقیم	Direct summand
توسیع	Extention
تجزیه پذیر	Factorizable
حلقه متناهی	Finite ring
رادیکال جیکبسون	Jacobson radical
خودتوان موضعی	Local idempotent
حلقه موضعی	Local ring
خودتوان ماکسیمال	Maximal idempotent
خودتوان مینیمال	Minimal idempotent
خودتوان های متعامد	Orthogonal idempotents
حلقه قوی	Potent ring
خودتوان اولیه	Primitive idempotent
شبه وارون پذیر	Quasi invertible
حلقه منظم	Regular ring
حاصلضرب نیم مستقیم	Semidirect product
حلقه نیم موضعی	Semilocal ring
حلقه نیم کامل	Semiperfect ring
حلقه نیم ساده آرتینی	Semisimple artinian ring
مدول نیم ساده	Semisimple module
مدول ساده	Simple module
حلقه مناسب	Suitable ring
حلقه یکه-منظم	Unit-regular ring

Abstract

Let R be a finite ring with identity. T its set of idempotents. We study the subsets of T that can be closed under multiplication and the idempotents that fact has to the structure of R. We consider the subset M of all minimal idempotents and zero. We achieve this by studing the properties of units that are preserved by idempotents. We prove that M is closed under multiplication if and only if R is a direct sum of local rings.

Keywords: *Finite ring, idempotent, local ring.*

Shahrood University of Technology

Department of Mathematics

MS Thesis

Multiplicative sets of idempotents in a finite ring

By:

Maryam Dehghan

Supervisor:
Ebrahim Hashemi

Ocp 2011