بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : علوم ریاضی

گروه : ریاضی کاربردی

عنوان پایان نامه ارشد

پایداری سیستم های گسسته زمانی خطی مثبت

دانشجو : **فاطمه محمدی زاده سوروئی**

استاد راهنما :

دکتر حجت احسنی طهرانی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

ماه و سال انتشار : **تیر ماه ۱۳۹۰**

تقدیم به:

پدرم، که برای بالندگی ام خمید...

مادرم، که برای شکوفایی ام پژمرد...

آنان که توانشان رفت تا به توانایی برسم و مویشان سپید گشت تا رویم سپید بماند.

در برابرشان زانوی ادب بر زمین می نهم.

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی

به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است

و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند.

خدایا مرا تقدیری خیر بنویس

تا هر آنچه را که تو زود میخواهی من دیر نخواهم

و هر آنچه را که تو دیر می خواهی من زود نخواهم

به مصداق «من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق» بسی شایسته است

که با درود فراوان خدمت خانواده بسیار عزیز، دلسوز و فداکارم که پیوسته جرعه نوش جام تعلیم و تربیت، فضیلت و انسانیّت آنها بوده‌ام و همواره چراغ وجودشان روشنگر راه من در سختی ها و مشکلات بوده است، از ایشان تقدیر و تشکر نمایم.

از زحمات بی دریغ اساتید بزرگوارم در دانشگاه صنعتی شاهرود بخصوص استاد ارجمندم جناب آقای دکتر احسنی طهرانی که با راهنمایی های خود نه تنها در زمینه پایان نامه که در زندگی نیز راهگشای اینجانب بودند کمال تشکر و سپاسگزاری را داشته باشم.

همچنین از هم اتاقی های عزیزم و دوستان گرامیم که لحظاتی سرشار از صفا و صمیمیت را در کنار خود برایم به یادگار گذاشتند و همیشه اینجانب را مورد لطف و محبت خود قرار داده و به من درس صداقت و مهرورزی آموختند بسیار سپاسگزار باشم.

تعهدنامه

اینجانب **فاطمه محمدی زاده سوروئی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه **صنعتی شاهرود** نویسنده پایان‌نامه: **پایداری سیستم های گسسته زمانی خطی مثبت** تحت راهنمایی‌های **دکتر حجت احسنی طهرانی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تا کنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا « **Shahrood University of Technology** » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجودات زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه سیستم های خطی گسسته-زمانی مثبت، ویژگی های کنترل پذیری، دسترسی پذیری و مشاهده پذیری برای این نوع از سیستم ها بیان شده، و سپس انواع پایداری برای سیستم مثبت و نیز مسئله تخصیص مقدار ویژه با استفاده از ماتریس همدم مورد بررسی قرار گرفته و در نهایت روشی جدید برای تخصیص مقدار ویژه با استفاده از فرم همدم برداری و پارامتری سازی پس خورد حالت بیان گردیده، به گونه ای که سیستم حلقه بسته مثبت باقی بماند.

واژه‌های کلیدی: سیستم مثبت، پس خورد، تخصیص مقدار ویژه.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه:

۱. محمدی زاده، ف. طهرانی، ح. ا. ارجمندزاده، ز. تعیین کنترلگر سیستم خطی مثبت با نرم کمینه . چهارمین کنفرانس بین المللی انجمن ایرانی تحقیق در عملیات.

۲. محمدی زاده، ف. طهرانی، ح. ا. ارجمندزاده، ز. تخصیص مقادیر ویژه برای کنترل سیستم خطی مثبت. ششمین سمینار جبرخطی و کاربردهای آن.

۳. ارجمندزاده، ز. طهرانی، ح. ا. محمدی زاده، ف. تعیین کنترلگر بهینه زمانی سیستم های دو بعدی خطی راسر. چهارمین کنفرانس بین المللی انجمن ایرانی تحقیق در عملیات.

۴.

Arjmand zadeh, Z. Tehrani, H. A. Mohamadi zadeh, F. Stabilization of fractional 2D linear systems described by the roesser model.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه و تاریخچه

۱.۱ تاریخچه

در طول دو دهه گذشته کارهای بسیاری روی بررسی و مشخصه سازی برخی ویژگی های مهم سیستم های خطی مثبت صورت گرفته است.

آقایان کاکسون[۱] [۴] ، شاپیرو[۲] [۴] ، رامچف[۳] [۲۰] ، جیمز[۴] [۸] و والچر[۵] دسترسی پذیری و کنترل پذیری سیستم های خطی مثبت را مورد بررسی قرار داده اند. مشاهده پذیری[۶] (که در فصل های بعد تعریف خواهد شد) این سیستم ها توسط اوتا[۷] [۱۷] و وان دن هاف[۸] مطالعه شده است. ساختار مجموعه های دسترس پذیر و رفتار مجانبی آنها توسط رامچف، فرینا[۹]، بنونتی[۱۰] و کمینه سازی سیستم توسط اندرسون[۱۱] و وان دن هاف مورد بررسی قرار گرفته اند. و سیستم های خطی دو بعدی مثبت توسط فرناسینی[۱۲]، والچر و کاکزورک[۱۳] [۱۰] مطالعه گردیده است.

۱ Coxson
۲ Shapiro
۳ Rumchev
۴ James
۵ Valcher
۶ identifiability
۷ Ohta
۸ Van Den Hof
۹ Farina
۱۰ Benvenuti
۱۱ Anderson
۱۲ Fornasini
۱۳ Kaczorek

شکل ۱.۱: سیستم کنترل نشده

کنترل پس خورد سیستم های مثبت نیز توسط افرادی مانند برمن[14] [۱۰] و کاکزورک مورد بحث قرار گرفته است. کاکزورک پایداری سیستم های خطی مثبت را با استفاده از پس خورد حالت خطی بدون محدودیت کنترل نامنفی در سیستم حلقه بسته در نظر گرفت و راه حلی که مسئله را بر اساس قضیه گرشگورین[15] حل نماید را ارائه داد.

۲.۱ تعریف‌ها و نمادهای مقدماتی

تعریف ۱.۲.۱. سیستم:

سیستم[16] عبارت است از یک عضو و یا مجموعه ای از اعضا، که به عنوان یک مجموعه با همدیگر کار می کنند.

شکل(۱.۱)یک رابطه ساده ورودی و خروجی را نشان می دهد، و نمونه ای از یک سیستم کنترل نشده است که شرایط موجود در دنیای فیزیکی را توصیف می کند.

چند مثال:

•نیروگاه

ورودی این سیستم سوخت می باشد. نیروگاه به عنوان یک سیستم عمل نموده و خروجی آن الکتریسیته می باشد.

•موتور الکتریکی

---
[14] Berman
[15] Gersgorin theorem
[16] system

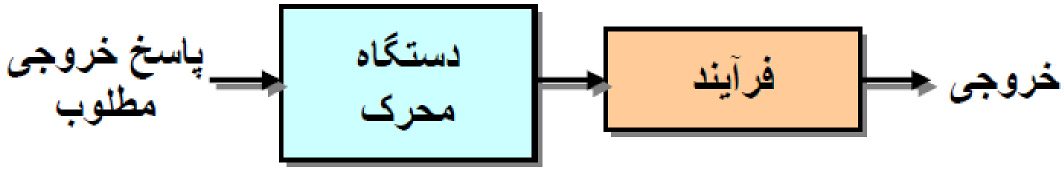
ورودی این سیستم الکتریسیته می باشد که موجب دوران سیستم که موتور می باشد، می گردد.

•ساختمان در طول زلزله

سیستم همان سازه است و حرکت فونداسیون همان سیگنال ورودی است و سیگنال خروجی پاسخ سازه است.

۱.۲.۱ معرفی سیستم های کنترل

تقاضای بشر برای کنترل سیستم های مختلف از جمله نیروهای طبیعت، یکی از علل پیشرفت انسان در طول تاریخ است. در خلال قرن بیستم مهندسی کنترل، بسیاری از آرزوهای بشر را جامه عمل پوشاند. نحوه کار ماشین ها و وسایل اولیه ای که به دست بشر ساخته شد، ایجاب می کرد که دست انسان مستقیما با آنها در تماس بوده و رفتار آنها را کنترل کند. بنابراین یک ماشین یا دستگاه دائما و به طور متناوب (هر چند دقیقه) احتیاج به کنترل داشته است. اما امروزه علم کنترل در قسمت هایی مورد استفاده قرار می گیرد که انسان به سادگی قادر به انجام آنها نیست. در بسیاری از مسائل از قبیل کنترل دقیق درجه حرارت، دقت در اندازه گیری، سرعت جوابگیری، علوم هسته ای، مهندسی و سایر رشته ها که انسان قادر به درک و حل سریع آنها نیست، کنترل خودکار نقش اساسی و حیاتی را ایفا می کند. رشد و توسعه طرز استفاده از دستگاه های کنترل خودکار در خلال ۳۰ تا ۳۵ سال اخیر، اثر مشخصی در زندگی بشر گذارده است. چون پیشرفت و استفاده از کنترل خودکار جهت اجرای بهترین نوع عملکرد سیستم های دینامیکی، بهبود کیفیت و زوال قیمت محصول، ازدیاد درصد تولید و سهولت زیاد کنترل و فرمان سیستم ها را سبب شده است. نام سیستم های کنترل خودکار اصولا به وسایلی اطلاق می شود که در هر لحظه و به طور خودکار یک سلسله از اعمال خود را بررسی، و اگر اختلافی با وضع یا نتیجه پیش بینی شده داشته باشد آن را اصلاح می کنند. اتومبیل بدون راننده یا هواپیمای بدون خلبان مثالهایی از کاربرد مدارهای کنترل خودکار در سالهای اخیر است. هواپیمای بدون خلبان در هر گونه شرایط جوی که از قبل به طور کامل قابل پیش بینی نیست، ارتفاع



شکل ۲.۱: سیستم کنترل حلقه باز

و زاویه حرکت با افق را حفظ می کند و پرواز را طبق برنامه به انجام می رساند. به طور کلی برای سیستم های کنترل خودکار سه خصوصیت اساسی تعریف می شود:

۱. کار یک مدار کنترل خودکار تا حد قابل قبولی مستقل از پارازیت ها و عوامل خارجی، قابل کنترل است.

۲. سیستم می تواند خود را با شرایطی که قابل پیش بینی نیست وفق دهد.

۳. دقت عمل بسیار خوب؛ و در اکثر موارد به مراتب بالاتر از دقت عمل انسان است.

تقسیم بندی سیستم های کنترل:

سیستم های کنترل به طور کلی به دو نوع عمده حلقه باز[۱۷] و حلقه بسته[۱۸] تقسیم می شوند. تفاوت اساسی این دو گروه از سیستم های کنترل ناشی از کاربرد شاخه پس خورد[۱۹] در سیستم های مدار بسته است.

تعریف ۲.۲.۱. سیستم های کنترل حلقه باز

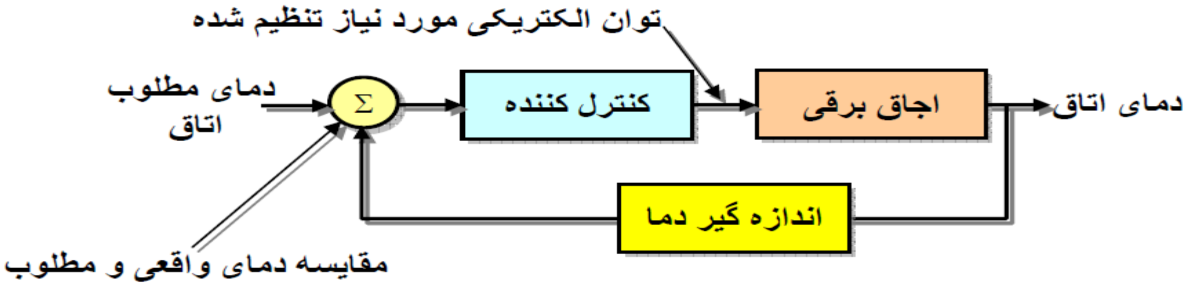
سیستم های کنترل حلقه باز سیستم هایی هستند که در آنها عمل کنترل تحت تاثیر نتیجه آن عمل نیست. به عبارت دیگر خروجی سیستم بر روی عمل کنترل اثری ندارد (شکل ۲.۱).

[۱۷] open-loop
[۱۸] close-loop
[۱۹] feed back

مثلا هواپیمایی که در بالای ابرها پرواز می کند و خلبان هواپیما فقط یک قطب نما دارد یک سیستم حلقه باز را تشکیل می دهد. در حالت ایده آل خلبان می تواند به کمک قطب نمای خود به مقصد دلخواه برسد، ولی اگر جریان هوا و باد را در نظر بگیریم و همچنین با توجه به اینکه عکس العمل خلبان برای تصحیح مسیر هواپیما آهسته است، معمولا برای پروازهای طولانی هواپیما از مسیر اصلی خود قدری منحرف می شود.

تعریف ۳.۲.۱. سیستم های کنترل حلقه بسته (پس خورد)

ملاحظه شد که در یک سیستم حلقه باز، رابطه مشخصی بین ورودی اصلی یا فرمان دهنده و خروجی یا فرمان گیرنده موجود است. ولی این رابطه ممکن است به علت ورودی های فرعی یا اغتشاشات که بر قسمت های مختلف مدار وارد می شود، تغییر کند. بنابراین در یک سیستم حلقه باز فقط با تنظیم ورودی نمی توان از نتیجه خروجی کاملا مطمئن بود. مثلا اگر اتاقی که توسط یک بخاری برقی گرم و جریان بخاری به وسیله یک مقاومت متغیر تنظیم شود، رابطه معینی بین اندازه مقاومت و کالری داده شده بوسیله بخاری، و در نتیجه دمای اتاق موجود خواهد بود. در این مثال دمای اتاق تحت فرمان اندازه مقاومت است و برای هر مقاومت، دمای معینی وجود خواهد داشت. حال اگر یکی از پنجره های اتاق باز شود، برای همان مقدار مقاومت، دیگر دمای اتاق ثابت نخواهد بود، بلکه مقدار دیگری را اختیار می نماید. لذا در این حالت تعیین مقدار مقاومت، مستقیما برای ایجاد دمای مورد نظر کافی نیست، بلکه باید دستگاهی تعبیه شود که دمای اتاق را در شرایط مختلف بررسی کند و در ضمن بررسی اگر لازم باشد مقاومت را متناسب با مقدار لازم تغییر دهد. برای این منظور فرض کنید یک ترموستات در اتاق و در سر راه جریان الکتریکی قرار داده شود به طوری که کلید جریان را در دمای پایین تر از دمای مطلوب باز کند، با توجه به شرایط جدید نوعی عمل فرمان از طرف دما انجام شده و اثر ورودی فرعی خنثی شده است (نظیر کنترل اتوهای برقی). در این حالت مدار فرمان حلقه باز نیست.



شکل ۳.۱: سیستم کنترل حلقه بسته

اختلالات یا آشفتگی عاملی است که بر روی خروجی سیستم کنترلی اثر می گذارد. به عنوان مثال برای اختلال در یک سیستم حرارت مرکزی می توان به عواملی مانند باز شدن پنجره، تغییر دما یا سرعت باد خارج ساختمان اشاره نمود. سیستم کنترلی که قادر به غلبه بر اغتشاشات باشد، دارای پیچیدگی بیشتر و در نتیجه هزینه بیشتر خواهد بود که البته امکان ناپایداری خواهد داشت.

•گرمکن الکتریکی با کنترل کننده دما

• یک سیستم کنترلی حلقه بسته (پس خوردی) اغلب از یک رابطه پیشنهادی بین خروجی و ورودی مرجع، تقویت شده و برای کنترل فرایند استفاده می کند.

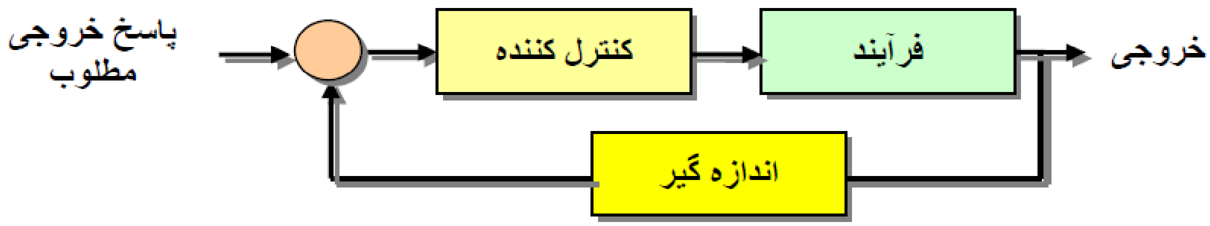
• در اغلب موارد تفاضل بین خروجی فرایند تحت کنترل و ورودی مرجع، تقویت شده و برای کنترل به فرایند اعمال می گردد به نحوی که این اختلاف به تدریج کاهش یابد.

• مفهوم پس خورد، مبنای تحلیل و طراحی سیستم های کنترل می باشد.

• یک سیستم کنترل حلقه بسته، خروجی را اندازه گرفته و این سیگنال را برای مقایسه آن با خروجی مطلوب (مرجع یا فرمان) پس خورد می نماید (شکل ۴.۱).

مشخصات پس خورد:

وجود پس خورد باعث ایجاد ویژگی های زیر در سیستم می شود:



شکل ۴.۱: سیستم کنترل با پس خورد

۱. افزایش دقت

۲. کاهش حساسیت نسبت خروجی به ورودی در مقابل تغییرات در پارامترها و سایر مشخصات سیستم

۳. کاهش اثر اختلالات خارجی یا نویز

مدل های سیستم کنترل:

برای نمایش سیستم کنترل باید خصوصیات یا توصیف آرایش آن سیستم و اجزای آن را به شکل قابل تحلیل، طراحی و ارزیابی در آورد.

برای این امر سه روش به کار برده شده است:

۱. مدل ریاضی به فرم معادلات دیفرانسیل، معادلات تفاضلی و یا روابط ریاضی مانند تبدیل لاپلاس و z

۲. نمودارهای بلوکی

۳. نمودار های مسیر جریان

• مدل های ریاضی هنگامی استفاده می شوند که مقادیر کمّی مورد نیازند. مثلا برای ارائه جزئیات رفتار خروجی سیستم پس خورد به یک ورودی داده شده به سیستم به کار برده می شود.

تعریف ۴.۲.۱. معادله مشخصه:

چند جمله ای مشخصه یا معادله مشخصه[۲۰] ماتریس $A_{n\times n}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$p(z) = det[Iz - A] = (z - z_۱)(z - z_۲) \cdots (z - z_n)$$

تعریف ۵.۲.۱. مقدار ویژه:

مقادیر $z_۱, z_۲, \cdots, z_n$ که ریشه های معادله $det[Iz - A] = ۰$ هستند را مقادیر ویژه[۲۱] ماتریس A نامند و مجموعه آنها را طیف[۲۲] A گویند.

تعریف ۶.۲.۱. چندجمله ای مینیمال:

چندجمله ای مینیمال[۲۳] $\Psi(\lambda)$ برای یک ماتریس مانند A یک چندجمله ای است که حداقل درجه را دارد، به طوری که $\Psi(A) = ۰$ باشد.

تعریف ۷.۲.۱. رد ماتریس:

اگر A ماتریسی $n \times n$ با درایه های a_{ij} باشد؛ رد [۲۴] یا اثر ماتریس A به صورت زیر تعریف می شود:

$$tr(A) = a_{۱۱} + a_{۲۲} + \cdots +_{nn} = \sum_{i=۱}^{n} a_{ii}$$

تعریف ۸.۲.۱. ماتریس تکین:

ماتریسی که در هر سطر و هر ستون تنها دارای یک درایه مثبت باشد و بقیه درایه های آن صفر باشند را ماتریس تکین[۲۵] خوانیم [۷, ۱۰].

تعریف ۹.۲.۱. ماتریس تبدیل:

ماتریس تبدیل[۲۶] یک حالت خاص از ماتریس تکین است، که در هر سطر و هر ستون این ماتریس تنها یک درایه یک وجود دارد و بقیه درایه های آن صفر هستند [۷, ۱۰].

[۲۰] characteristic equation
[۲۱] eigen values
[۲۲] spectral
[۲۳] minimal polynomial
[۲۴] trace
[۲۵] monomial matrix
[۲۶] Transition matrix

یک ماتریس تکین حاصلضرب یک ماتریس تبدیل و یک ماتریس قطری نامنفرد[۲۷] است.

تعریف ۱.۲.۱۰. ماتریس مثبت:

ماتریس $A \in R^{n \times n}$ را مثبت نامیم[۲۸] ، اگر حداقل یکی از درایه های آن مثبت باشد و درایه منفی نداشته باشد [۷, ۱۰, ۱۶].

قضیه ۱.۲.۱۱. ماتریس معکوس[۲۹] یک ماتریس مربعی مثبت، مثبت است اگر و تنها اگر یک ماتریس تکین باشد [۱۶].

قضیه ۱.۲.۱۲. اگر r یک مقدار ویژه ماکسیمم ماتریس A باشد؛ آنگاه

$$min_i r_i \leq r \leq max_i r_i$$

و

$$min_j c_j \leq r \leq max_j c_j$$

که $r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ و $c_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ به ترتیب مجموع درایه های i امین سطر و j امین ستون ماتریس A می باشند.

تعریف ۱.۲.۱۳. سیگنال کراندار: یک سیگنال (ورودی،خروجی) $s_i,\ i \in Z_+$ کراندار خوانده می شود اگر و تنها اگر مقدار آن (یا نرم $\|s_i\|$) برای هر $i \in Z_+$ کراندار باشد.

مطالب ارائه شده در فصل پایان نامه به صورت ذیل آورده شده است:

در فصل دوم، پس از تعریف سیستم مثبت درونی و بیرونی، دسترسی پذیری، کنترل پذیری و مشاهده پذیری سیستم های مثبت؛ سیستم های مثبت دوگان و ارتباط میان دسترسی پذیری و مشاهده پذیری را بیان می کنیم؛ در فصل سوم، به تعریف انواع پایداری مانند پایداری مجانبی، پایداری ورودی کراندار- خروجی کراندار،

[۲۷] non singular
[۲۸] positive matrix
[۲۹] inverse matrix

پایداری مجانبی مولفه ای و پایداری نمایی برای سیستم های مثبت اشاره شده، سپس مسئله تخصیص مقدار ویژه با استفاده از ماتریس همدم و در نهایت الگوریتم روش بیان شده است؛ در نهایت، در فصل چهارم؛ روشی جدید جهت تخصیص مقادیر ویژه سیستم های خطی مثبت با استفاده از پارامتری سازی ارائه شده که در این فصل پس از بیان مقدمه، مختصری از چگونگی تبدیل ماتریس ها به فرم استاندارد اشلون و فرم همدم برداری آورده شده است، سپس با استفاده از ویژگی هایی که برای مقادیر ویژه در فصل ۳ شرح داده شد، ماتریس پس خورد حالت پارامتری با مقادیر ویژه دلخواه به گونه ای که سیستم حلقه بسته مثبت باقی بماند را محاسبه می نماییم، و سپس با اعمال محدودیت مثبت بودن بردار ورودی ماتریس پس خورد حالت را محاسبه می نماییم.

فصل ۲
کنترل سیستم های خطی مثبت

۱.۲ مقدمه

سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x_{i+1} = Ax_i + Bu_i \\ y_i = Cx_i + Du_i \end{cases} \tag{۱.۲}$$

که در آن A یک ماتریس $n\times n$ ، B ماتریسی $n\times m$ ، C ، $p\times n$ و D ماتریسی $p\times m$ می باشد و $x_i \in R^n$ بردارهای حالت[۱] و $u_i \in R^m$ بردارهای ورودی[۲] هستند.

تعریف ۱.۱.۲. [۱۰] سیستم (۱.۲) را مثبت خارجی[۳] خوانیم اگر و تنها اگر برای هر دنباله ورودی $u_i \in R^m_+$ ، که $i \in Z_+$ و $x_\circ = \circ$ ، برای بردارهای خروجی داشته باشیم $\forall i \in Z_+, y_i \in R^p_+$.

تعریف ۲.۱.۲. [۷, ۱۰, ۱۹] سیستم(۱.۲) را مثبت داخلی[۴] (یا به اختصار مثبت) خوانیم اگر و تنها اگر برای هر $x_\circ \in R^n_+$ و هر دنباله ورودی $u_i \in R^m_+, i \in Z_+$ داشته باشیم: $x_i \in R^n_+$ و $y_i \in R^p_+$.

در تعاریف فوق R^n_+ مجموعه بردارهای حقیقی n بعدی با مولفه های نامنفی است. در ضمن می توان نشان داد که معادله حالت در سیستم (۱.۲) مثبت است اگر و تنها اگر $A \in R^{n\times n}_+$ و $B \in R^{n\times m}_+$ باشد، که $R^{n\times m}_+$ مجموعه ماتریس های حقیقی $n\times m$ با درایه های نا منفی است.

[۱] state vector
[۲] input vector
[۳] externally positive
[۴] internally positive

۲.۲ دسترسی پذیری

تعریف ۱.۲.۲. یک حالت $x_f \in R_+^n$ دسترس پذیر[۵] در h گام گفته می شود اگر یک دنباله از ورودی های $u_i \in R_+^m\ ;\ i = ۰, ۱, ..., h-۱$ موجود باشد که سیستم را از شرط اولیه $x_۰ = ۰$ به حالت $x_f \in R_+^n$ برساند.

تعریف ۲.۲.۲. [۳, ۴, ۱۰, ۱۷] سیستم (۱.۲) قابل دسترسی گفته می شود اگر برای هر حالت $x_f \in R_+^n$ ؛ یک عدد $h \in Z_+$ و $u_i \in R_+^m\ ;\ i = ۰, ۱, ..., h-۱$ وجود داشته باشد که $x_f = x_h$.

قضیه ۳.۲.۲. [۱۰] سیستم مثبت (۱.۲) در n گام قابل دسترسی است اگر و تنها اگر:

۱) $rank R_* = n$

۲)ماتریس نامنفرد[۶] $\bar{R}_n$ شامل n ستون R_* موجود باشد بگونه ای که $\bar{R}_n^{-۱} \in R_+^{n\times n}$ یا بطور معادل R_* دارای n ستون مستقل خطی باشد که هر ستون تنها دارای یک درایه مثبت باشد؛ که در آن:

$$R_* = \begin{bmatrix} B & AB & A^۲B & \cdots & A^{n-۱}B \end{bmatrix} \in R_+^{n\times nm} \qquad (۲.۲)$$

تعریف ۴.۲.۲. [۱۰] مجموعه همه ترکیبات خطی مثبت ستون های ماتریس مثبت $A \in R_+^n$ تصویر (برد) مثبت A [۷] خوانده می شود و با نماد Im_+A نمایش داده می شود؛ به عبارت دیگر

$$Im_+A = \{y \in R_+^n ; y = Ax ; x \in R_+^m\} \qquad (۳.۲)$$

قضیه ۵.۲.۲. [۱۰] سیستم مثبت در (۱.۲) قابل دسترسی است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

۱. $Im_+R_* = R_+^n$

[۵] reachability
[۶] nonsingular
[۷] positive image

۲. n ستون مستقل خطی بتواند از R_* انتخاب شود به گونه ای که ماتریس $\bar{R}_n$ تشکیل شده از آنها یک ماتریس تکین [۸]باشد.

۳. n ستون مستقل خطی بتواند به گونه ای از R_* انتخاب شود که ماتریس $\bar{R}_n$ تشکیل شده از آنها دارای معکوس $\bar{R}_n^{-1}$ با درایه های نامنفی باشد، یعنی $\bar{R}_n^{-1} \in R_+^{n\times n}$

اثبات. از حل معادله

$$x_{i+1} = Ax_i + Bu_i \; ; \; i \in Z_+$$

بنابراین

$$x_i = A^i x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} A^{i-k-1} B u_k$$

که برای $x_0 = 0$ و $i = k; k \geq n$ به شکل زیر نوشته می شود:

$$x_k = R_k u_0^k$$

که

$$R_k = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{k-1}B \end{bmatrix} \; ; \; u_0^k = \begin{bmatrix} u_{k-1} \\ u_{k-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{bmatrix}$$

حال برای $k = n, R = R_n$ و $x_n = x_f$ داریم:

$$x_f = R u_0^n$$

از تعاریف (۲.۲.۲) و (۴.۲.۲) به دست می آید که برای هر $x_f \in R_+^n$ ؛ یک $u_0^n \in R_+^{nm}$ وجود دارد اگر و تنها اگر شرط (۱) برقرار باشد آنگاه n ستون مستقل خطی برای یک پایه R_+^n می تواند از R_* انتخاب شود اگر و تنها اگر هر سطر و هر ستون تنها یک درایه مثبت داشته باشد و درایه های باقیمانده صفر باشند؛ به عبارتی یک ماتریس تکین باشد. با استفاده از قضیه (۱۱.۲.۱) ماتریس معکوس یک ماتریس مثبت، مثبت است اگر و تنها اگر یک ماتریس تکین باشد. بنابراین شرایط (۲) و (۳) معادلند.

[۸] monomial

مثال ۱. سیستم مثبت گسسته زمانی در (۱.۲) را در نظر بگیرید؛ بررسی می کنیم که آیا برای هر مقدار از ضرایب $a_i \leq 0$ ، زوج زیر دسترس پذیر است:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in R_+^{n\times n}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in R_+^n \qquad (۴.۲)$$

ماتریس R_n در (۲.۲) دارای شکل زیر است:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 1 & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

که $a_{n,2} = -a_{n-1}$ و $a_{2,n}, a_{n-1,n-1}, ..., a_{n,n}$ به $a_1, ..., a_{n-1}$ وابسته هستند و برابر صفر خواهند بود اگر و تنها اگر $a_i = 0; i = 1, ..., n-1$ که با دسترسی پذیری زوج (۴.۲) هم ارز است.

اگر فرض کنیم که زوج در (۴.۲) دسترس ناپذیر است. یک ماتریس پس خورد حالت $K \in R^{1\times n}$ می یابیم به گونه ای که سیستم حلقه بسته دسترس پذیر باشد:

$$u_i = v_i + Kx_i \qquad (۵.۲)$$

با جایگزین نمودن (۵.۲) در (۱.۲) به دست می آید که:

$$x_{i+1} = A_c x_i + Bv_i; i \in Z_+ \qquad (۶.۲)$$

که

$$A_c = A + BK \qquad (۷.۲)$$

برای (۴.۲) و

$$K = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (۸.۲)$$

ماتریس A_c دارای فرم زیر است:

$$A_c = A + bK =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{۹.۲}$$

بنابراین به دست می آید که:

$$\begin{bmatrix} b & A_c b & A_c^2 b & \cdots & A_c^{n-1} b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

از (۹.۲) و قضیه (۵.۲.۲) نتیجه می شود که زوج (A_c, b) دسترس پذیر است. بنابراین قضیه بعد اثبات شده است.

قضیه ۶.۲.۲. [۱۰] فرض کنید سیستم مثبت در (۱.۲) با (۴.۲) دسترس نا پذیر است. آنگاه سیستم حلقه بسته در (۶.۲) دسترس پذیر است اگر ماتریس پس خورد حالت K دارای فرم (۸.۲) باشد.

بنابراین سیستم مثبت با ماتریس های A و B بیان شده در (۴.۲) دسترسی پذیر خواهد بود، اگر ماتریس پس خورد حالت را

$$K = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

در نظر بگیریم.

مثال ۲. دسترسی پذیری زوج A, B زیر را بررسی نمایید:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \;;\; (a_{ij} \geq 0; b_1, b_2 > 0)$$

برای این هدف R_* را محاسبه می نماییم:

$$R_* = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_{21}b_1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{34}b_2 & \cdots \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix}$$

توجه داریم در این حالت ماتریس $[B, AB]$ یک ماتریس تکین است اگر $b_1, b_2, a_{21}, a_{34} > 0$ ، و معکوس ماتریس دارای شکل زیر خواهد بود:

$$[B, AB]^{-1} = \begin{bmatrix} b_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a_{21}b_1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a_{34}b_2)^{-1} \\ 0 & b_2^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

از اینرو شرایط هم ارز قضیه (۵.۲.۲) برقرارند و زوج (A, B) دسترس پذیر است .

قضیه ۷.۲.۲. [۱۰] سیستم مثبت (۱.۲) در n گام دسترس پذیر است اگر و تنها اگر در $n+1$ گام دسترس پذیر باشد.

قضیه ۸.۲.۲. [۱۰] سیستم مثبت در (۱.۲) دسترس پذیر است اگر $rankR_* = n$ و

$$R_*^T[R_*R_*^T]^{-1} \in R_+^{nm \times n} \qquad (10.2)$$

اثبات. اگر $rankR_* = n$ آنگاه:

$$det[R_*R_*^T] \neq 0$$

و در نتیجه $R_*R_*^T$ دارای معکوس و ماتریس $R_*^T[R_*R_*^T]^{-1}$ خوش تعریف خواهد بود.

حال فرض می کنیم که:

$$u_0^n = R_*^T[R_*R_*^T]^{-1}$$

با استفاده از تعریف(۴.۲.۲)، $x_f \in R_+^n$ بنابراین:

$$u_0^n \in R_+^{nm} \implies R_*u_0^n = R_*R_*^T[R_*R_*^T]^{-1}x_f = x_f$$

□

۳.۲ کنترل پذیری سیستم های مثبت

تعریف ۱.۳.۲. سیستم مثبت (۱.۲) در k گام کنترل پذیر[۹] خوانده می شود اگر برای هر حالت اولیه مخالف صفر $x_۰ \in R_+^n$ و یک حالت نهایی $x_f \in R_+^n$ یک دنباله از ورودی های $u_i \in R_+^m \; ; \; i = ۰, ۱, ..., k - ۱$ وجود داشته باشد که حالت سیستم را از $x_۰$ به x_f برساند.

تعریف ۲.۳.۲. سیستم مثبت (۱.۲) کنترل پذیر خوانده می شود اگر برای هر حالت اولیه مخالف صفر $x_۰ \in R_+^n$ و یک حالت نهایی $x_f \in R_+^n$ یک عدد طبیعی k و یک دنباله از ورودی های $u_i \in R_+^m \; ; \; i = ۰, ۱, ..., k - ۱$ وجود داشته باشد به گونه ای که سیستم در k گام کنترل پذیر باشد.

تعریف ۳.۳.۲. سیستم مثبت (۱.۲) کنترل پذیر به صفر [۱۰] در k گام خوانده می شود اگر برای هر حالت اولیه مخالف صفر $x_۰ \in R_+^n$ و یک حالت نهایی $x_f = ۰$ یک دنباله از ورودی های $u_i \in R_+^m \; ; \; i = ۰, ۱, ..., k - ۱$ وجود داشته باشد که حالت سیستم را از $x_۰$ به صفر $(x_f = ۰)$ برساند.

کنترل پذیری سیستم مثبت در (۱.۲) به ماتریس های A و B سیستم بستگی دارد. بنابراین، گفتن اینکه سیستم (۱.۲) کنترل پذیر است هم ارز است با گفتن اینکه زوج (A, B) کنترل پذیر است.

قضیه ۴.۳.۲. [۱۰, ۲۱] سیستم مثبت (۱.۲) کنترل پذیر به صفر است؛

الف) در n گام؛ اگر و تنها اگر ماتریس A دارای مقادیر ویژه صفر باشد.

ب) در تعداد نامتناهی گام؛ اگر سیستم پایدار مجانبی باشد.

اثبات. الف) با استفاده از $x_{i+۱} = Ax_i + Bu_i$ داریم:

$$x_f = x_n = A^n x_۰ + R_* u_۰^n$$

[۹] controllable

[۱۰] controllable to zero

در این حالت $x_f = \circ$ و در نتیجه:

$$-A^n x_\circ = R_* u_\circ^n$$

برای $u_\circ^n = \circ$ معادله بالا برقرار است اگر و تنها اگر $A^n = \circ$ یعنی ماتریس A دارای مقادیر ویژه صفر باشد.

ب) اگر $x_f = x_i$ داریم:

$$x_i = A^i x_\circ + R_{*\ i} u_\circ^i$$

در این حالت $x_f = \circ$ و در نتیجه:

$$-A^i x_\circ = R_{*\ i} u_\circ^i$$

برای $u_\circ^i = \circ$ معادله بالا برقرار است اگر $lim_{i\to\infty} A^i x_\circ = \circ; \forall x_\circ \in R_+^n$ که همان تعریف پایداری مجانبی است که در فصل بعد خواهد آمد. □

قضیه ۵.۳.۲. [۱۰] سیستم مثبت (۱.۲) کنترل پذیر است اگر و تنها اگر

۱. ماتریس R_* دارای n ستون مستقل خطی باشد که هر کدام تنها شامل یک درایه مثبت باشد.

۲. اگر تبدیل $x_\circ$ به x_f در تعداد نامتناهی گام صورت گیرد شعاع طیفی $\rho(A) < 1$ و اگر تبدیل $x_\circ$ به x_f در تعداد متناهی گام صورت گیرد شعاع طیفی $\rho(A) = \circ$ خواهد بود.

۱.۳.۲ دسترسی پذیری و کنترل پذیری سیستم های مثبت با پس خورد حالت

می دانیم که برای سیستم های خطی استاندارد دسترسی پذیری و کنترل پذیری تحت پس خورد حالت ناوردا [۱۱] هستند.

سیستم حلقه بسته دسترس پذیر (کنترل پذیر) است اگر و تنها اگر سیستم حلقه باز دسترس پذیر (کنترل پذیر) باشد [۹, ۱۱]. نشان خواهیم داد که یک پس خورد حالت مناسب برای سیستم مثبت غیر قابل دسترس (غیر قابل کنترل) وجود دارد، به گونه ای که سیستم مثبت حلقه بسته دسترس پذیر (کنترل پذیر) گردد.

[۱۱] invariant

قضیه ۶.۳.۲. [۹] سیستم مثبت (۱.۲) در k گام کنترل پذیر است اگر و تنها اگر ماتریس A تنها دارای مقادیر ویژه صفر باشد و یکی از شرایط قضیه (۵.۲.۲) برقرار باشد.

اثبات. با استفاده از $x_{i+1} = Ax_i + Bu_i$ داریم:

$$x_f = x_n = A^n x_0 + R_* u_0^n$$

اگر ماتریس A تنها دارای مقادیر ویژه صفر باشد، آنگاه $det[Iz-A] = z^n$ و با استفاده از قضیه کیلی همیلتون [۱۲] داریم: $A^n = 0$

با استفاده از قضیه(۵.۲.۲) یک $u_0^n \in R_+^{nm}$ وجود دارد که در معادله بالا صدق می کند اگر و تنها اگر یکی از شرایط هم ارز قضیه(۵.۲.۲) برقرار باشد. □

قضیه ۷.۳.۲. [۹] سیستم مثبت (۱.۲) در تعداد نامتناهی از گام ها کنترل پذیر است اگر و تنها اگر سیستم پایدار مجانبی باشد و یکی از شرایط قضیه (۵.۲.۲) برقرار باشد.

۴.۲ مشاهده پذیری سیستم های مثبت

تعریف ۱.۴.۲. سیستم مثبت (۱.۲) مشاهده پذیر [۱۳] در k گام خوانده می شود اگر با داشتن خروجی سیستم در k نقطه $y_0, y_1, ..., y_{k-1}$ و ورودی صفر $(u_i = 0 \ ; \ i \in Z_+)$ بتوان شرط اولیه $x_0 \in R_+^n$ را به دست آورد.

تعریف ۲.۴.۲. سیستم مثبت (۱.۲) مشاهده پذیر گفته می شود اگر یک عدد طبیعی $k \geq 1$ وجود داشته باشد بگونه ای که سیستم در k گام مشاهده پذیر باشد.

قضیه ۳.۴.۲. [۴] سیستم مثبت در (۱.۲) مشاهده پذیر است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

۱. امکان انتخاب n سطر مستقل خطی از S_n باشد بگونه ای که ماتریس $\bar{S}_n$ مرکب از آنها دارای معکوس $\bar{S}_n^{-1}$ با درایه های نامنفی باشد، یعنی $\bar{S}_n^{-1} \in R_+^{n \times n}$

[۱۲] Caley-Hamilton
[۱۳] observabilite

۲. امکان انتخاب n سطر مستقل خطی از S_n وجود داشته باشد بگونه ای که ماتریس $\bar{S}_n$ مرکب از آنها یک ماتریس تکین باشد.

۳. $Im_+ S_n = R_+^n$

که

$$S_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

اثبات. با استفاده از $x_{i+1} = Ax_i + Bu_i$ داریم:

$$x_i = A^i x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} A^{i-k-1} B u_k$$

در نتیجه:

$$y_i = CA^i x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} CA^{i-k-1} B u_k + D u_i$$

برای $u_i = 0 ; i \in Z_+$ داریم:

$$y_0^n = S_n x_0 \quad ; \quad y_0^n = [y_0^T, y_1^T, \cdots, y_{n-1}^T]$$

بنابراین با داشتن y_0^n، $x_0 \in R_+^n$ را می یابیم اگر و تنها اگر ماتریس S_n شامل n سطر مستقل خطی باشد به گونه ای که: $\bar{S}_n^{-1} \in R_+^{n \times n}$.

با استفاده از قضیه(۱.۲.۱۱) ماتریس معکوس یک ماتریس مثبت، مثبت است اگر و تنها اگر یک ماتریس تکین باشد، بنابراین هم ارزی شرایط (۱) و (۲) به دست می آید.

هم ارزی شرایط (۱) و (۳) از این حقیقت که $Im_+ S_n = R_+^n$ اگر و تنها اگر $\bar{S}_n$ یک ماتریس تکین باشد به دست می آید. $\square$

مثال ۳. نشان دهید که سیستم مثبت در معادله (۱.۲) با

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (۱۱.۲)$$

برای همه مقادیر ضرایب $a_i \geqslant 0; i = 0, 1, ..., n-1$ مشاهده پذیر است. ماتریس S_n زوج (A, C) دارای شکل زیر است:

$$S_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

واضح است که همه شرایط قضیه (۳.۴.۲) برای همه مقادیر ضرایب $a_i \geqslant 0; i = 0, 1, ..., n-1$ برقرار است.

بنابراین سیستم (۱.۲) با معادلات (۱۱.۲) مشاهده پذیر است.

۱.۴.۲ سیستم های مثبت دوگان و رابطه بین دسترسی پذیری و مشاهده پذیری

تعریف ۴.۴.۲. سیستم مثبت

$$\begin{cases} x_{i+1} = A^T x_i + C^T u_i \\ y_i = B^T x_i + D u_i \end{cases} \quad (۱۲.۲)$$

سیستم دوگان[۱۴] برای سیستم مثبت در (۱.۲) خوانده می شود، جایی که بردارهای x_i, u_i, y_i و ماتریس های C, B, A و D ی هر دو سیستم یکسان باشند.

قضیه ۵.۴.۲. [۱۰] سیستم مثبت در (۱.۲) مشاهده پذیر است اگر و تنها اگر سیستم دوگان (۱۲.۲) دسترس پذیر باشد.

اثبات. با استفاده از قضیه(۳.۴.۲) سیستم مثبت(۱.۲) مشاهده پذیر است اگر و تنها اگر برای ماتریس

$$S_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

[۱۴] dual

یکی از شرایط هم ارز برقرار باشد. با استفاده از ترانهاده ماتریس S_n داریم:

$$S_n^T = [C^T, A^T C^T, \cdots, (A^T)^{n-1} C^T]$$

توجه داریم که این ماتریس شبیه به ماتریس(۳.۲) برای سیستم دوگان(۱۲.۲) است. بنابراین با استفاده از قضیه(۳.۲.۲) سیستم(۱.۲) مشاهده پذیر است اگر و تنها اگر سیستم دوگان(۱۲.۲) دسترس پذیر باشد. $\square$

فصل ۳

پایداری و تخصیص مقادیر ویژه

۱.۳ پایداری سیستم های مثبت

سیستم گسسته زمانی مثبت درونی توصیف شده با معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$x_{i+1} = Ax_i \ ; \ i \in Z_+; \quad A \in R_+^{n\times n} \tag{۱.۳}$$

پاسخ معادله (۱.۳) به فرم زیر است:

$$x_i = A^i x_0 \tag{۲.۳}$$

سیستم مثبت درونی معادله (۱.۳) پایدار مجانبی[1] خوانده می شود اگر و تنها اگر پاسخ معادله (۲.۳) در شرط زیر صدق کند:

$$\lim_{i\to\infty} x_i = 0 \ ; \ \forall x_0 \in R_+^n \tag{۳.۳}$$

قضیه ۱.۱.۳. [۱۰] سیستم مثبت درونی معادله (۱.۳) پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر همه مقادیر ویژه ماتریس $A \in R_+^{n\times n}$ قدرمطلق کمتر از یک داشته باشند؛ $|z_k| < 1 \ ; \ k = 1, \cdots , n$

[1] asymptotic stability

اثبات. فرض کنید

$$\Psi(z) = (z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2}\cdots(z-z_r)^{m_r}$$

چندجمله ای مینیمال A باشد . در این حالت، با استفاده از فرمول سیلوستر [۱۰] برای معادله (۱.۳) مشاهده می کنیم:

$$x_i = \sum_{k=1}^{r}(A_{k1}z_k^i + A_{k2}iz_k^i + \cdots + A_{km}i(i-1)\cdots(i-m_k+2)z_k^{i-m_k+1})x_0 \qquad (۴.۳)$$

که $(j = 1, 2, ..., m_k)$; A_{kj} ها ماتریس های ثابت وابسته به i به صورت زیر هستند

$$A_{kj} = \sum_{i=j-1}^{m_k-1} \frac{\Psi_k(z)}{(i-j+1)!(j-1)!}\frac{d^{(i-j+1)}}{dz^{(i-j+1)}}[\frac{1}{\Psi_k(z)}]_{z=z_k}(A-Iz_k)^i$$

به گونه ای که:

$$\Psi_k(z) = \frac{\Psi(z)}{(z-z_k)^{m_k}}$$

مقادیر ویژه A برای یک سیستم مثبت درونی، حقیقی یا مزدوج مختلط هستند. ساده است که:

$$\lim_{i\to\infty} i(i-1)\cdots(i-j+1)z_k^{i-j} = \begin{cases} 0\ ; & |z_k|<1 \\ \infty; & |z_k|>1 \end{cases} \qquad (۵.۳)$$

$$(j = 0, 1, ..., m_k-1\ ;\ k = 1, 2, ..., r)$$

اگر $m_k = 1$ و $|z_k| = 1$ آنگاه مولفه پاسخ معادله (۴.۳) متناظر با z_k دارای مقدار ثابت A_k است. از معادلات (۴.۳) و (۵.۳) به دست می آید که شرط معادله (۳.۳) برقرار است اگر و تنها اگر $|z_k| < 1$ برای $k = 1, 2, ..., r$. □

قضیه ۲.۱.۳. [۱۰] سیستم مثبت درونی در معادله (۱.۳) پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر ضرایب $\bar{a}_i\ ;\ i = 0, 1, \cdots, n-1$ در چندجمله ای مشخصه مثبت باشند($\bar{a}_i > 0$).

$$p_{I-A}(z) = det(Iz - A + I) = z^n + \bar{a}_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \bar{a}_1 z + \bar{a}_0 \qquad (۶.۳)$$

قضیه ۳.۱.۳. [۱۰] سیستم گسسته-زمانی مثبت درونی در معادله (۱.۳) پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر همه مینورهای اصلی ماتریس $I - A$ مثبت باشند؛ یعنی:

$$|\bar{a}_{11}| > 0 \ , \ \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} \end{vmatrix} > 0, \cdots det(\bar{A}) > 0 \tag{۷.۳}$$

بگونه ای که:

$$\bar{A} = I - A = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \cdots & \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{bmatrix} \tag{۸.۳}$$

در بسیاری حالات، پایداری سیستم مثبت درونی در معادله (۱.۳) ممکن است با استفاده از شرط کافی ناپایداری[۲] تست شود، این شرط در قضیه زیر بیان شده است.

قضیه ۴.۱.۳. [۱۰] سیستم مثبت درونی در معادله (۱.۳) ناپایدار است اگر حداقل یک درایه قطری ماتریس A از یک بزرگتر باشد؛ یعنی: $a_{kk} > 1$ برای برخی از $k \in (1, ..., n)$.

اثبات. اگر k امین ستون ماتریس A را با a_{0k} و k امین سطر را با a_{k0} نشان دهیم، آنگاه با فرض $x_0 = e_k$ از معادله (۱.۳) برای k امین مولفه ی بردار x_i (x_i^k) داریم:

$$x_1^k = a_{kk}, x_2^k = a_{kk}^2, \cdots, x_i^k = a_{kk}^i$$

از این رو اگر $a_{kk} > 1$ آنگاه $\lim_{i\to\infty} x_i^k = \infty$ و سیستم (۱.۳) ناپایدار است. □

مثال ۴. برای چه مقادیری از پارامترهای $a_1 \geq 0$ و $a_2 \geq 0$ سیستم مثبت درونی (۱.۳) با ماتریس زیر پایدار مجانبی است.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0/5 \end{bmatrix}$$

[۲] unstability

با استفاده از قضیه (۳.۱.۳) شرط لازم برای پایداری مجانبی $a_i \leq ۱$ است. از قضیه (۲.۱.۳) به دست می آید که سیستم پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر $|\bar{a}_{۱۱}| = ۱ - a_۱ > ۰$ و

$$det(I - A) = \begin{vmatrix} ۱ - a_۱ & -a_۲ \\ -۱ & ۰/۵ \end{vmatrix} = ۰/۵(۱ - a_۱) - a_۲ > ۰$$

از این رو سیستم پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر $۰ \leq a_۱ \leq ۱$ و $۰ \leq a_۲ \leq ۰/۵(۱ - a_۲)$

تعریف ۵.۱.۳. [۸] یک بردار حالت x_r صادق در شرط $x_r = Ax_r$ نقطه تعادل [۳] سیستم گسسته-زمانی در معادله (۱.۳) خوانده می شود.

سیستم تک ورودی $(m = ۱)$ گسسته-زمانی زیر را با یک ورودی ثابت $\bar{u} > ۰$ در نظر بگیرید:

$$x_{i+۱} = Ax_i + bu_i \qquad (۹.۳)$$

اگر x_r نقطه تعادل معادله (۹.۳) باشد، آنگاه از معادله (۹.۳) داریم:

$$x_r = Ax_r + b\bar{u} \qquad (۱۰.۳)$$

با استفاده از قضیه بعد پایداری مجانبی سیستم در (۹.۳) را نشان خواهیم داد.

قضیه ۶.۱.۳. [۱۰] ورودی متعادل x_r پایدار مجانبی سیستم مثبت درونی (۹.۳) مثبت است اگر $\bar{u} > ۰$ و $b > ۰$.

اثبات. اگر سیستم(۹.۳) پایدار مجانبی باشد آنگاه $x_i \geqslant ۰$ برای $i \to \infty$ به نقطه تعادل $x_r \geqslant ۰$ میل می کند. با فرض خلف اگر $x_r = ۰$ آنگاه $Ax_r = ۰$ در نتیجه معادله(۱۰.۳) برای $\bar{u} > ۰$ و $b > ۰$ برقرار نخواهد بود، بنابراین فرض خلف باطل و حکم ثابت شده است. یعنی در صورتی $x_r > ۰$ خواهد بود که $b > ۰, \bar{u} > ۰$. □

نتیجه ۷.۱.۳. اگر A یک ماتریس پایدار مجانبی سیستم مثبت درونی (۹.۳) باشد، آنگاه

$$[I - A]^{-۱} > ۰$$

[۳] equilibrium point

مثال ۵. نقاط تعادل سیستم در معادله (۹.۳) با ماتریس های زیر را برای $\bar{u} = ۱$ بیابید:

$$A = \begin{bmatrix} ۰/۱ & ۰/۲ \\ ۰/۴ & ۰/۳ \end{bmatrix} \;;\; b = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

پایداری مجانبی سیستم را با استفاده از قضیه (۳.۱.۳) بررسی می کنیم. برای این هدف شرایط معادله (۷.۳) را برای ماتریس زیر بررسی می کنیم

$$\bar{A} = I - A = \begin{bmatrix} ۰/۹ & -۰/۲ \\ -۰/۴ & ۰/۷ \end{bmatrix}$$

شرایط برقرارند زیرا:

$$|\bar{a}_{۱۱}| = ۰/۹ > ۰ \;;\; det\bar{A} = \begin{vmatrix} ۰/۹ & -۰/۲ \\ -۰/۴ & ۰/۷ \end{vmatrix} = ۰/۵۵ > ۰$$

از این رو سیستم پایدار مجانبی است. می توانیم نقطه تعادل موردنظر را بیابیم:

$$x_r = [I - A]^{-۱} b\bar{u} = \bar{A}^{-۱} b\bar{u} = \begin{bmatrix} ۰/۹ & -۰/۲ \\ -۰/۴ & ۰/۷ \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۰/۵۵} \begin{bmatrix} ۰/۹ \\ ۱/۳ \end{bmatrix}$$

۲.۳ پایداری ورودی کراندار-خروجی کراندار

سیستم تک ورودی-تک خروجی گسسته زمانی مثبت درونی توصیف شده با معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x_{i+۱} = Ax_i + bu_i \\ y_i = c^T x_i + du_i \end{cases} \qquad (۱۱.۳)$$

به طوری که $d \in R_+; b, c \in R_+^n; A \in R_+^{n\times n}$ می باشند.

تعریف ۱.۲.۳. سیستم مثبت درونی معادله (۱۱.۳) پایدار ورودی کراندار-خروجی کراندار (□□□□)[۴] خوانده می شود اگر برای هر ورودی کراندار و $i \in Z_+$ ؛ خروجی نیز کراندار باشد.

[۴] bounded input-bounded output

اگر فرض کنید $G(z)$ تابع انتقال سیستم در معادله (۱۱.۳) باشد، یعنی؛

$$G(z) = c^T[Iz - A]^{-1}b + d = \frac{L(z)}{M(z)} \tag{۱۲.۳}$$

که

$$L(z) = \bar{b}_{\acute{n}} z^{\acute{n}} + \bar{b}_{\acute{n}-1} z^{\acute{n}-1} + \cdots + \bar{b}_1 z + \bar{b}_0$$

$$M(z) = z^{\acute{n}} + \bar{a}_{\acute{n}-1} z^{\acute{n}-1} + \cdots + \bar{a}_1 z + \bar{a}_0 \quad (\acute{n} \leq n)$$

قضیه ۲.۲.۳. [۱۱] سیستم مثبت درونی معادله پایدار $BIBO$ است اگر و تنها اگر چند جمله ای $\acute{M}(w) = M(w+1)$ دارای ضرایب مثبت باشد یعنی $\bar{a}' > 0;\ i = 1, 2, \cdots, \acute{n} - 1$.

مثال ۶. پایداری مجانبی و پایداری $BIBO$ سیستم مثبت معادله (۱۱.۳) را با A و b داده شده ذیل بررسی نمایید:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; c^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, d = [0]$$

چندجمله ای مشخصه سیستم بدین شکل است:

$$det(Iz - A) = \begin{vmatrix} z - \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & z - \frac{3}{2} \end{vmatrix} = z^2 - 2z + \frac{2}{3}$$

با استفاده از قضیه (۱.۱.۳) این سیستم پایدار مجانبی نیست زیرا یکی از مقادیر ویژه آن از ۱ بزرگتر است $(\bar{z} = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}})$

تابع انتقال سیستم برابر است با

$$G(z) = c^T[Iz - A]^{-1}b + d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z - \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & z - \frac{3}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{z - \frac{1}{2}}{z^2 - 2z + \frac{2}{3}}$$

در این حالت قطب های تابع انتقال؛ مقادیر ویژه ماتریس A هستند. بنابراین سیستم ناپایدار $BIBO$ نیز هست. چندجمله ای سیستم بدین شکل است:

$$\acute{M}(w) = M(w+1) = (w+1)^2 - 2(w+1) + \frac{2}{3} = w^2 - \frac{1}{3}$$

از اینرو بنابر قضیه (۲.۲.۳) نیز سیستم ناپایدار $BIBO$ است.

۳.۳ پایداری مجانبی مولفه ای و پایداری نمایی سیستم های مثبت

سیستم مثبت توصیف شده با معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$x_{i+1} = Ax_i \tag{۱۳.۳}$$

که $x_i \in R_+^n$ بردار حالت و $A \in R_+^{n\times n}$.

تعریف ۱.۳.۳. [۱۰] سیستم مثبت توصیف شده با معادله (۱۳.۳) پایدار مجانبی مولفه ای[۵] خوانده می شود، اگر برای هر $x_0 \in R_+^n$ یک بردار $\rho_i \in R_+^n$ وجود داشته باشد که در شرط $\lim_{i\to\infty} \rho_i = 0$ صدق کند به گونه ای که:

$$x_i \leq \rho_i \ ; \ \forall i \in Z_+ \tag{۱۴.۳}$$

که x_i پاسخ معادله (۱.۳) با شرط اولیه x_0 است.

تعریف ۲.۳.۳. [۱۰] سیستم مثبت توصیف شده با معادله (۱۳.۳) بطور نمایی پایدار[۶] خوانده می شود هرگاه برای هر $x_0 \in R_+^n$ یک اسکالر $0 < \beta < 1$ و یک بردار $\alpha > 0$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$x_i \leq \alpha\beta^i; \ \ \forall i \in Z_+ \tag{۱۵.۳}$$

قضیه ۳.۳.۳. [۱۰] سیستم توصیف شده با معادله (۱۳.۳) پایدار مجانبی مولفه ای است اگر و تنها اگر بردار ρ_i در نامعادله تفاضلی زیر صدق کند:

$$\rho_{i+1} \geq A\rho_i \tag{۱۶.۳}$$

[۵] componentwise asymptotic stability
[۶] exponential stability

اثبات. ابتدا نشان خواهیم داد که اگر نامساوی (۱۶.۳) برقرار باشد، آنگاه (۱۴.۳) برقرار است. فرض کنید $z_i = \rho_i - x_i \ , \ i \in Z_+$. با استفاده از معادلات (۱۳.۳) و (۱۶.۳) داریم:

$$z_{i+1} = \rho_{i+1} - x_{i+1} \geq A\rho_i - Ax_i = A(\rho_i - x_i) = Az_i$$

از این رو

$$z_{i+1} = Az_i + m_i, \quad i \in Z_+ \tag{۱۷.۳}$$

وقتی که $m_i \in R^n_+$.

پاسخ معادله (۱۷.۳) به شکل زیر است:

$$z_i = A^i z_0 + \sum_{j=0}^{i-1} A^{i-j-1} m_j \quad i \in Z_+ \tag{۱۸.۳}$$

زمانی که $m_j \in R^n_+$ و $A \in R^{n\times n}_+$ با استفاده از معادله (۱۸.۳) برای $j \in Z_+$ داریم $z_i \geq 0$. بنابراین معادله (۱۴.۳) برقرار است. □

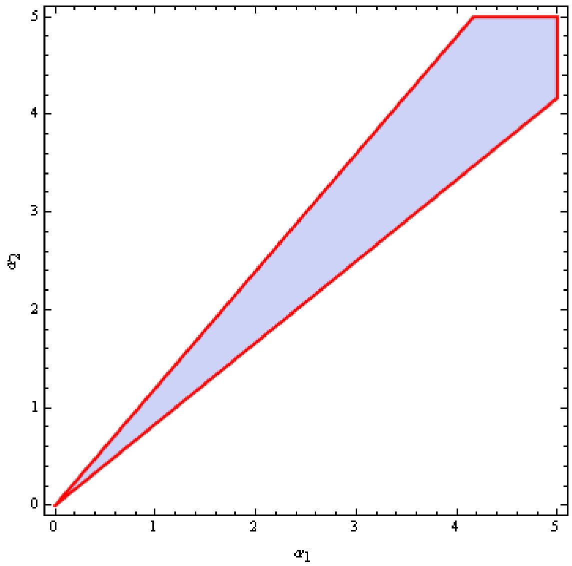
قضیه ۴.۳.۳. [۱۰] سیستم مثبت در معادله (۱۳.۳) به طور نمایی پایدار است اگر و تنها اگر

$$[I\beta - A]\alpha \geq 0 \tag{۱۹.۳}$$

و

$$1 > \beta > max_i[\frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}\alpha_j}{\alpha_i}] \tag{۲۰.۳}$$

اثبات. با جایگزینی $\rho_i = \alpha\beta^i$ در معادله (۱۶.۳) به دست می آید $\rho_{i+1} = \alpha\beta^{i+1} \geq A\alpha\beta^i$ یا $[I\beta - A]\alpha\beta^i \geq 0$ و با تقسیم به β^i معادله (۱۹.۳) اثبات می شود. از (۱۹.۳) برای i امین مولفه داریم: $\beta\alpha_i \geq \sum_{j=1}^n a_{ij}\alpha_j$ و باتقسیم به مولفه α_i معادله (۲۰.۳) نیز اثبات می گردد. □



شکل ۱.۳: نمودار مثال۷

مثال ۷. سیستم مثبت توصیف شده با معادله (۱۳.۳) را با A و x_0 زیر در نظر بگیرید:

$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

چندجمله ای مشخصه A بدین شکل است:

$$det[Iz - A] = \begin{vmatrix} z - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & z - \frac{1}{2} \end{vmatrix} = (z - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{16} = z^2 - z + \frac{3}{16} = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{1}{4}, z_2 = \frac{3}{4}$$

با انتخاب $\beta = \frac{4}{5}$ و با استفاده از نامعادله (۱۹.۳) داریم:

$$[I\beta - A]\alpha = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ناحیه مشخص شده در شکل(۳.۱) با مقادیر α_1, α_2 که در شرط نامعادله (۱۹.۳)صدق می کنند متناظر است. از میان مقادیر α_1, α_2 ، α هایی را انتخاب می کنیم که در شرط معادله (۱۵.۳) برای $i = 0$ یا $\alpha \geq x_0$ صدق کند.

با استفاده از معادله سیلوستر [۱۰] داریم:

$$A^i = \frac{A - Iz_2}{z_1 - z_2} z_1^i + \frac{A - Iz_1}{z_2 - z_1} z_2^i = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = (\frac{1}{4})^i + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} (\frac{3}{4})^i$$

$$= (\frac{1}{2})^{2i+1} \begin{bmatrix} 3^i + 1 & 3^i - 1 \\ 3^i - 1 & 3^i + 1 \end{bmatrix}$$

که پاسخ x_i برای $x_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ از $x_i = A^i x_0 = (\frac{3}{4})^i \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ به دست می آید.

از این رو برای $\beta = \frac{4}{5}$ و $\alpha = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ داریم:

$$\rho_i = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} (\frac{4}{5})^i$$

که در شرط معادله (۱۵.۳) صدق می کند. بنابراین سیستم به طور نمایی پایدار است.

در حالت کلی β به گونه ای انتخاب می شود که همه مقادیر ویژه حقیقی A با قدرمطلق کوچکتر از ۱ از β کوچکتر هستند. از قضیه (۱۲.۲.۱) به دست می آید که β بایستی از بزرگترین مجموع سطر (ستون) درایه های ماتریس A کوچکتر انتخاب شود. در این حالت یک α مناسب $x_0 \leq \alpha$ که در معادلات (۱۹.۳) و (۲۰.۳) صدق کند وجود دارد.

۴.۳ تخصیص مقادیر ویژه سیستم های مثبت

هدف از این بخش، مطالعه مسئله تخصیص مقدار ویژه[۷] برای یک دسته از سیستم های مثبت با ماتریس جایگشت و دنباله بردارهای کنترل می باشد. انتخاب این دسته را تنوع کاربردها و نیز ساختار خوش تعریف شان موجب شده است. در ادامه بخش به شکل زیر تقسیم بندی می شود:

در قسمت اول فرمول بندی مسئله و برخی مقدمات مهم برای بخش های بعد آمده است. در قسمت دوم مشخصه سازی طیف قابل قبول برای دسته ای از سیستم ها که در اینجا مورد توجه ما هستند و در نهایت راه حل مسئله تخصیص مقدار ویژه آورده شده است.

[۷] eigen value assignment

۱.۴.۳ مقدمات

بردار n تایی x و ماتریس $A_{n\times s}$ که همه درایه هایش نامنفی است را به ترتیب با $X \geq ۰$ و $A \geq ۰$ یا $X \in R_{+}^{n}$ و $A \in R_{+}^{n\times s}$ که R_{+}^{n} فضاهای برداری حقیقی n بعدی نامنفی و $R_{+}^{n\times s}$ فضای همه ماتریس های حقیقی نامنفی $n \times s$ است نمایش می دهیم. یک بردار ستونی با دقیقا یک درایه مخالف صفر را بردار تکین می نامیم؛ اگر درایه مخالف صفرش در i مین درایه آن بردار قرار داشته باشد آن را i -تکین گوییم؛ یک ماتریس حقیقی $n \times m$ را m -تکین می نامیم هرگاه از m ستون تکین مستقل خطی تشکیل شده باشد و تکین ساده گوییم وقتی $m = n$.

ماتریس تکین M حاصلضرب یک ماتریس نامنفرد قطری D و یک ماتریس تبدیل P است یعنی $M = DP$ ، یک ماتریس $A_{n\times n}$ را هم ارز ماتریس B گوییم؛ اگر ماتریس تبدیل P وجود داشته باشد به طوری که

$$PAP^T = B$$

P^T ترانهاده P است.

تعریف ۱.۴.۳. ماتریس نامنفی $A_۰ \geq ۰$ را متشابه تکینی یک ماتریس نامنفی $A \geq ۰$ نامیم؛ اگر یک ماتریس تکین نامنفی M موجود باشد که $A = MA_۰M^{-۱}$.

واضح است که در این حالت $A_۰^T$ نیز متشابه تکینی با A^T می باشد.

در این پایان نامه تمامی ماتریس های تکین، نامنفی در نظر گرفته می شوند.

۲.۴.۳ فرمول بندی مسئله

سیستم خطی گسسته-زمانی مثبت حلقه باز را با دنباله کنترلی مثبت زیر در نظر بگیرید [۱۵, ۲۴]:

$$x(t+۱) = Ax(t) + Bu(t); \quad t = ۰, ۱, ۲, \cdots \qquad (۲۱.۳)$$

به طوری که

$$A \in R_+^{n\times n}, B \in R_+^{n\times m}, u(t) \in R_+^m \qquad (۲۲.۳)$$

که $x(t) \in R_+^n$ حالت سیستم در زمان t است و $u(t)$ دنباله کنترل است.

شرط لازم و کافی برای مثبت بودن یک سیستم گسسته-زمانی خطی؛ مثبت بودن A و B است [۶, ۱۵, ۱۹].

آن دسته از سیستم های مثبت که در این فصل مطالعه می شوند با مفروضات زیر محدود شده است:

الف) ماتریس تبدیل حلقه باز A به شکل همدم[۸] است (یا متشابه تکینی با یک ماتریس همدم می باشد):

$$\begin{cases} a_{i,i+1} = 1 & ; \quad i = 1, \cdots, n-1 \\ a_{nj} = \alpha_{j-1} \geq 0; & \quad j = 1, \cdots, n \\ a_{ij} = 0 & ; \quad o.w \end{cases} \qquad (۲۳.۳)$$

ب) ماتریس کنترل B یک ماتریس m -تکین است.

اگر همه متغیرهای حالت برای کنترل در دسترس باشند؛ آنگاه با استفاده از یک ماتریس پس خورد حالت خطی قانون کنترل را به شکل زیر در نظر می گیریم:

$$u(t) = Kx(t) \qquad (۲۴.۳)$$

که K یک ماتریس حقیقی $m \times n$ است؛ سیستم حلقه باز (۲۱.۳) می تواند به سیستم حلقه بسته (همگن) به فرم زیر تبدیل شود:

$$x(t+1) = A_c x(t); \quad t = 0, 1, 2, \cdots \qquad (۲۵.۳)$$

به گونه ای که:

$$A_c = A + BK \qquad (۲۶.۳)$$

[۸] companion

A_c ماتریس تبدیل حلقه بسته است و واضح است که سیستم حلقه بسته (۲۵.۳) مثبت است اگر و تنها اگر

$$A_c = A + BK \geq 0 \tag{۲۷.۳}$$

از آنجایی که در برخی از کاربردهای این نوع از سیستم های مثبت که ما مورد بررسی قرار دادیم بایستی بعد از بسته شدن سیستم حلقه باز توسط پس خورد ساختار اصلی به همان شکل باقی بماند؛ پس در ادامه فرض می کنیم که:

پ) ماتریس سیستم حلقه بسته $A_c \geq 0$ به شکل همدم[۹] باشد؛ یعنی:

$$\begin{cases} a^c_{i,i+1} = 1 & ; \quad i = 1, \cdots, n-1 \\ a^c_{nj} = \alpha^c_{j-1} \geq 0; & \quad j = 1, \cdots, n \\ a^c_{ij} = 0 & ; \quad o.w \end{cases}$$

مسئله تخصیص مقدار ویژه به صورت ذیل شرح داده می شود:

سیستم مثبت (۲۱.۳) با مفروضات (الف) و (ب) و یک مجموعه اعداد حقیقی و یا مزدوج مختلط $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ داده شده، پس خورد حالت خطی (۲۴.۳) را بگونه ای می یابیم که Λ طیف متناظر سیستم مثبت خطی حلقه بسته (۲۵.۳) با حفظ فرض (پ) باشد.

می دانیم که بدون محدودیت نامنفی بودن برای A_c, B, A و $u(t)$ مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته (۲۵.۳) می تواند با یک پس خورد حالت خطی در هر قسمت صفحه مختلط جا به جا شود با این فرض که زوج حلقه باز (A, B) کنترل پذیر است [۲۳].

۵.۳ ماتریس های نامنفی متشابه تکینی[۱۰] با ماتریس همدم

فرض کنید $A_0 \geq 0$ متشابه تکینی با ماتریس همدم A باشد:

[۹] companion
[۱۰] monomilly similar

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \geq 0 \tag{۲۸.۳}$$

یعنی $A = MA_0M^{-1} = DPA_0P^TD^{-1} = DCD^{-1}$ که $D \geq 0$ یک ماتریس قطری نامنفرد، P یک ماتریس تبدیل و A_0 هم ارز با ماتریس $C = PA_0P^T \geq 0$ است [۱۵].

گزاره ۱.۵.۳. [۱۶] اگر L یک تبدیل خطی باشد که نگاشت ماتریس های نامنفی را بر روی ماتریس های نامنفی می برد و طیف هر ماتریس نامنفی را حفظ می کند، آنگاه یک ماتریس تکین M وجود دارد که:

$$L(A) = MAM^{-1}$$

و یا می توان نوشت:

$$L(A) = MAM^{-1}; \quad \forall A \in R_+^{n\times n}$$

مقدار ویژه غالب ماتریس نامنفی A یک عدد حقیقی نامنفی $\rho(A)$ است. برای سیستم های مورد توجه ما، $\rho(A)$ بدین شکل تخمین زده می شود:

$$min\{1, \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j\} \leq \rho(A) \leq max\{1, \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j\} \tag{۲۹.۳}$$

اگر

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j = 1 \tag{۳۰.۳}$$

آنگاه

$$\rho(A) = 1$$

نامساوی های (۲۹.۳) به صورت اکید برقرارند اگر A به شکل همدم (۲۸.۳) داده شده باشد و (۳۰.۳) برقرار نباشد. لذا یک تست پایداری ساده به صورت ذیل به دست می آید:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j = \begin{cases} > 1; & \text{ناپایدار} \\ = 1; & \text{پایدار حاشیه ای} \\ < 1; & \text{پایدار مجانبی} \end{cases}$$

۶.۳ مشخصه سازی طیف و تخصیص مقدار ویژه

در این قسمت حالت کلی مسئله برای ماتریس های نامنفی را تحت شرایط زیر فرموله می نماییم:

شرایط لازم و کافی برای یک مجموعه از اعداد حقیقی و یا مختلط $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ به گونه ای که این مجموعه، طیف یک ماتریس نامنفی $n \times n$ باشد را تعیین می کنیم.

دو تا از شرایط لازم برای تخصیص طیف مقادیر ویژه به ماتریس نامنفی بدین صورت مشخص شده است:

۱) عدد حقیقی $\rho \in \Lambda$ وجود دارد به قسمی که: $\rho = max|\lambda_i| \geq 0$

۲) اعداد مختلط به صورت مزدوج ظاهر شوند: $\Lambda = \bar{\Lambda}$

شرح کامل شرایط کافی برای ماتریس های نامنفی با طیف حقیقی در کتاب مینک[۱۱] (**۱۹۸۸**) [۱۶] آمده است. شرایط لازم و کافی برای ماتریس های نامنفی با طیف اعداد مختلط مخالف صفر در پلمنونز[۱۲] و برمن [۲] اثبات شده است.

گزاره ۱.۶.۳. ناحیه شدنی برای طیف [۷]: فرض کنید $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ یک مجموعه از اعداد حقیقی و یا مختلط باشد که در شرایط (۱) و (۲) صدق می نماید و

$$(-1)^{j+1} S_j(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \geq 0 \quad ; j = 1, 2, \cdots, n \tag{۳۱.۳}$$

که S_j ، j امین عنصر تابع متقارن اعداد $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ است که به صورت زیر داده شده است:

$$S_j(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_j} \prod_{s=1}^{j} \lambda_{i_s} \quad ; j = 1, 2, \cdots, n \tag{۳۲.۳}$$

[۱۱] Minc
[۱۲] Plemnons

آنگاه $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ طیف برخی از ماتریس های نامنفی در سیستم حلقه بسته (۲۸.۳) است.

به آسانی از این گزاره به دست می آید که ناحیه شدنی برای طیف سیستم حلقه بسته بوسیله ملزومات تعریف شده در (۱) و (۲) و نامساوی های (۳۱.۳)، و درایه های n امین سطر A_c می تواند انتخاب شود به طوری که

$$\alpha^c_{n-j} = (-1)^{j+1} S_j(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \geq 0 \quad ; j = 1, 2, \cdots, n \tag{۳۳.۳}$$

بنابراین، گزاره (۱.۶.۳) نه تنها چگونگی تخصیص طیف سیستم حلقه بسته را بیان می کند بلکه چگونگی ساختار ماتریس سیستم حلقه بسته را نیز بیان می کند.

اکنون (تنها) مسئله تعیین ماتریس پس خورد حالت مناسب K باقی می ماند که برای سیستم های تک ورودی-تک خروجی K به طور یکتا توسط (۲۷.۳) مشخص می شود. اما برای سیستم های چند متغیره که K توسط (۲۷.۳) تعیین می شود؛ K یکتا نخواهد بود [۱۸].

گزاره ۲.۶.۳. تخصیص مقدار ویژه: [۷] فرض کنید Λ^* یک مجموعه از اعداد حقیقی و یا مختلط باشد که شرایط گزاره (۱.۶.۳) (یعنی ویژگی های (۱)، (۲) و نامساوی های (۳۱.۳)) برایش برقرار است. مسئله تخصیص مقدار ویژه برای دسته سیستم های خطی مثبت با (الف)، (ب) و (پ) دارای پاسخ است اگر و تنها اگر n امین سطر ماتریس کنترل B ، تکین باشد.

اثبات. فرض کنید مجموعه اعداد حقیقی و یا مختلط Λ^* انتخاب شده در (۱)، (۲) و سیستم نامساوی (۳۱.۳) صدق کند، یعنی طیف ویژه Λ^* سیستم حلقه بسته (۲۵.۳) در ناحیه شدنی است. زمانی که مطابق (پ) ماتریس سیستم حلقه بسته A_c در یک فرم همدم یافت می شود شرایط گزاره (۱.۶.۳) لازم و کافی هستند. آنگاه ماتریس همدم نامنفی A_c با درایه هایی در n امین سطر مطابق (۳۳.۳) محاسبه شده که طیف موردنظر Λ^* را داراست و می تواند به عنوان یک ماتریس تبدیل در (۲۵.۳) استفاده گردد.

از رابطه (۲۷.۳) داریم:

$$BK = A_c - A \qquad (۳۴.۳)$$

و از این رو، مسئله تخصیص مقدار ویژه به یافتن جواب ماتریس K از معادله (۳۴.۳) ساده می شود.

طبق فرض (ب) n امین سطر B می تواند یک سطر صفر و یا یک سطر تکین باشد.

لزوم: به برهان خلف فرض کنید n امین سطر B تکین نباشد یعنی یک سطر صفر باشد؛ آنگاه

$$o \times k_j = a_{nj} \;\; ; \; j = ۱, \cdots, n$$

که k_j ، j امین ستون ماتریس K است، و $a_{nj} = \alpha_j^c - \alpha_j$ درایه های $a_n = (a_{n۱}, a_{n۲}, \cdots, a_{nn})$ یعنی n امین سطر ماتریس $(A_c - A)$ هستند و حداقل یک $a_{nj} \neq ۰$ وجود دارد که با معادله (۳۴.۳) در تناقض است، پس مسئله تخصیص مقدار ویژه برای طیف Λ^* دارای پاسخ نمی باشد.

کفایت: حال اگر فرض کنیم که n امین سطر ماتریس B ، سطر تکین با یک درایه مثبت $b_{ns} > ۰$ در s امین ستون باشد، می توان با استفاده از ماتریس تبدیل سطر P معادله (۳۴.۳) را به فرم زیر کاهش داد:

$$\begin{bmatrix} D \\ ۰ \end{bmatrix} K = P(A_c - A) \qquad (۳۵.۳)$$

به گونه ای که $D = diag\{b_{i_۱,۱}, \cdots, b_{i_m,m}\}$ است، (که $b_{i_s,s}$ درایه مثبت در s امین ستون ماتریس تکین B است) و $\{i_۱, i_۲, \cdots, i_m\}$ هر زیرمجموعه (بدون تکرار) از مجموعه اندیس های $\{۱, ۲, \cdots, n\}$ است. بنابراین، بعد از جابجایی معادلات در (۳۴.۳)؛ n امین معادله آن از s امین معادله در (۳۵.۳) به دست می آید (و n امین سطر ماتریس B از s امین سطر در ماتریس D به دست می آید).

توجه داشته باشید که تنها سطر مخالف صفر $P(A_c - A)$ همان s امین سطر است. بنابراین i امین سطر ماتریس D را با d_i نمایش می دهیم و بنابراین معادله (۳۵.۳) می تواند به شکل زیر بازنویسی شود:

$$\begin{cases} d_s k_j = b_{ns} k_{sj} = a_{nj}; & j = ۱, ..., n \\ d_l k_j = b_{i_l,l} k_{lj} = ۰; & l = ۱, ..., s-۱, s+۱, ..., m \\ o \times k_j = ۰; & j = ۱, ..., n \end{cases} \qquad (۳۶.۳)$$

که a_{nj} عنصر ماتریس $A_c - A$ است.

پاسخ سیستم (۳۶.۳) (و مسئله تخصیص مقدار ویژه) بوسیله زیر داده شده:

$$\begin{cases} k_s = b_{ns}^{-1}(\alpha_0^c - \alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}^c - \alpha_{n-1}) \\ k_i = 0; i = 1, ..., s-1, s+1, ..., m(m \leq n) \end{cases} \tag{۳۷.۳}$$

که $k_s = (k_{s_1}, k_{s_2}, \cdots, k_{s_n})$ ، s امین سطر ماتریس پس خورد K است، $a_n = (a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn})$ n-مین سطر ماتریس $A_c - A$ است، و $b_{ns} > 0$ تنها درایه مخالف صفر در سطر آخر $b_n = (0, ..., 0, b_{ns}, 0, ..., 0)$ ماتریس کنترل B است. این قسمت نیز کامل گردید و در نتیجه گزاره اثبات شده است. □

۱.۶.۳ الگوریتم روش تخصیص مقدار ویژه

ورودی الگوریتم عبارت است از زوج (A_0, B_0) داده شده و به دنبال یافتن ماتریس پس خورد حالت K با تخصیص مقادیر ویژه به سیستم حلقه بسته می باشیم.

۱. زوج اصلی $(A_0, B_0) \geq 0$ داده شده است، بررسی می کنیم که A_0 متشابه تکینی با ماتریس همدم است و B_0 یک ماتریس m -تکین است.

۲. زوج (A_0, B_0) را بوسیله انتقال تکین به (A, B) کاهش می دهیم به طوری که $A = MA_0M^{-1}$ به شکل همدم (۲۸.۳) و $B = MB_0$ باشد. ضرایب α_i ی چندجمله ای حلقه باز را همانند (۲۳.۳) محاسبه می کنیم.

۳. طیف $\Lambda^* = \{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \cdots, \lambda_n^*\}$ برای یک سیستم حلقه بسته را به گونه ای می یابیم که در شرایط گزاره (۱.۶.۳) و تست پایداری صدق کند، یعنی:

الف) $\rho^* = max\{|\lambda_i^*|\} \geq 0$

ب) $\Lambda = \bar{\Lambda}$

پ) $(-1)^{j+1}S_j(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\cdots,\lambda_n^*)\geq 0\ ;\ j=1,2,\cdots,n$

ت) تست پایداری $\rho^*\leq 1$

۴. ماتریس سیستم حلقه بسته (با متغیرهای جدید) را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$\begin{cases} a_{i,i+1}^c=1 & ; \quad i=1,\cdots,n-1 \\ a_{nj}^c=\alpha_{j-1}^c\geq 0 & ; \quad j=1,\cdots,n \\ a_{ij}^c=0 & ; \quad o.w \end{cases}$$

۵. ماتریس پس خورد حالت K را مطابق (۳.۳۷) به دست می آوریم:

$$\begin{cases} k_s=b_{ns}^{-1}(\alpha_0^c-\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1}^c-\alpha_{n-1}); b_{ns}>0 \\ k_i=0; i=1,...,s-1,s+1,...,m(m\leq n) \end{cases}$$

مثال ۸. سیستم مثبت حلقه باز ناپایدار (۳.۲۱) را با زوج (A,B) داده شده در نظر بگیرید:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0/7 & 0/4 & 0/6 \end{bmatrix}\ ;\ B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0/1 & 0 \\ 0 & 0/2 \end{bmatrix}$$

بررسی می کنیم آیا می توان مقادیر ویژه $\{0/7470,-0/2235\pm 0/2897i\}$ را به سیستم حلقه بسته اختصاص داد:

گام اول: می بینیم که ماتریس A به فرم همدم است و سطر آخر ماتریس B تکین است. بنابراین نیازی به بررسی گام دوم نمی باشد.

گام سوم:

$$1)\ \rho^*=max\{|\lambda_i^*|\}=0/7470$$

$$2)\ \bar{\Lambda}=\{0/7470,-0/2235\pm 0/2897i\}=\Lambda$$

$$3)\begin{cases} j=1\Rightarrow(-1)^2S_1(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0/3>0 \\ j=2\Rightarrow(-1)^3S_2(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=-(\lambda_1\times\lambda_2+\lambda_1\times\lambda_3+\lambda_2\times\lambda_3)=0/2>0 \\ j=3\Rightarrow(-1)^4S_3(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\lambda_1\times\lambda_2\times\lambda_3=0/1>0 \end{cases}$$

$$4)\ \rho^*\leq 1$$

گام چهارم:

$$\begin{cases} a^c_{31} = \alpha^c_2 = (-1)^4 S_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0/1 \\ a^c_{32} = \alpha^c_1 = (-1)^3 S_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0/2 \\ a^c_{33} = \alpha^c_0 = (-1)^2 S_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0/3 \\ a^c_{12} = a^c_{23} = 1 \\ a^c_{ij} = 0 \qquad ; \qquad o.w \end{cases}$$

گام پنجم:

$$b_{32} = 0/2 > 0$$

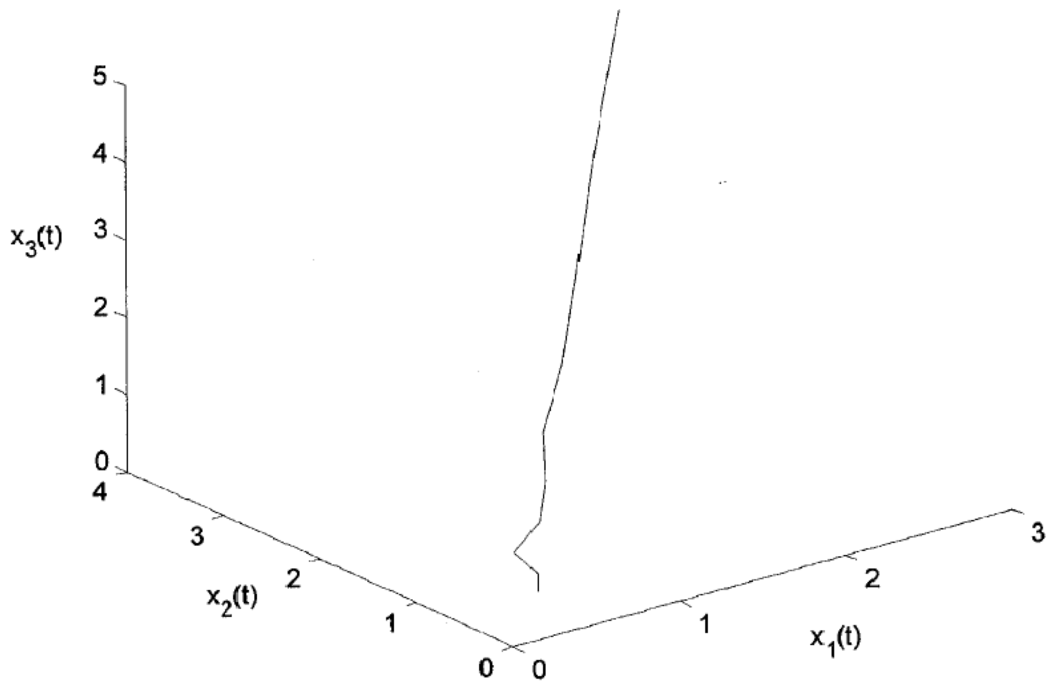
$$\Rightarrow \begin{cases} k_2 = (0/2)^{-1}(0/1 - 0/7, 0/2 - 0/4, 0/3 - 0/6) = (-3, -1, -1/5) \\ k_1 = (0, 0, 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1/5 \end{bmatrix}$$

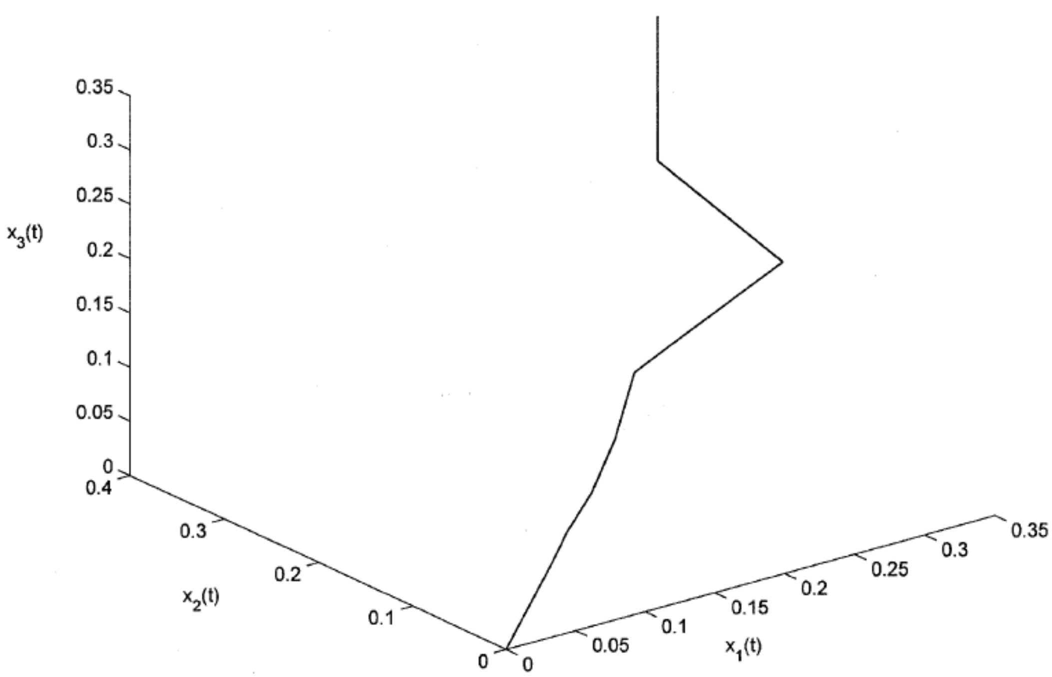
حال دنباله کنترلی را به شکل زیر داریم:

$$u(t) = Kx(t) = -3x_1(t) - x_2(t) - 1/5 x_3(t)$$

نمودار با $x_0 = (0/3333, 0/3333, 0/3333)^T$ برای سیستم حلقه باز با $u(t) = 0$ و نیز سیستم حلقه بسته رسم شده است؛ واضح است که سیستم حلقه باز واگرا (شکل (۲.۳)) و سیستم حلقه بسته همگرا (شکل (۳.۳)) می باشد.



شکل ۲.۳: سیستم حلقه باز و واگرا



شکل ۳.۳: سیستم حلقه بسته و همگرا

فصل ۴

روشی جدید جهت تخصیص مقادیر ویژه سیستم های خطی مثبت

۱.۴ مقدمه

معادله حالت سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$x(t+۱) = Ax(t) + Bu(t) \tag{۱.۴}$$

فرض بر این است که A یک ماتریس مربعی $n \times n$ و B یک ماتریس $n \times m$ است که A می تواند ماتریس منفرد نیز باشد ولی در مورد ماتریس B فرض براین است که

$$rank(B) = m \; ; \quad m \leq n \tag{۲.۴}$$

در این فصل ابتدا با استفاده از ماتریس تبدیل T زوج (A, B) را به فرم استاندارد اشلون [۱] تبدیل کرده و سپس با استفاده از ماتریس تبدیل S فرم استاندارد اشلون را به فرم همدم برداری[۲] تبدیل کرده [۱۳, ۱۴] و با استفاده از آن ماتریس پس خورد حالتی که همه مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته را به صفر می برد، محاسبه می نماییم.

فرض می کنیم که T ماتریس تبدیلات تشابهی باشد که سیستم (۱.۴) را به

$$\hat{x}(t+۱) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \tag{۳.۴}$$

[۱] standard echelon form
[۲] vector companion form

تبدیل می کند، به طوری که:

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = T^{-1}x(t) \\ \hat{A} = T^{-1}AT \\ \hat{B} = T^{-1}B \end{cases}$$

ماتریس T را می توان به صورت منحصربفردی با استفاده از ماتریس کنترل پذیری مشخص کرد.

روش دیگری برای تبدیل زوج (B, A) به $(\hat{B}, \hat{A})$ وجود دارد بدین صورت که ماتریس افزوده $Q = [B, A, I_n]$ را در نظر می گیریم و عملیات تشابهی زیر را تعریف می کنیم:

۱) ضرب یا تقسیم یک سطر از Q به کمیت اسکالر $k \neq 0$ و به دنبال آن تقسیم یا ضرب ستون متناظر از ماتریس A

$$Row(i) \longrightarrow Row(i) \times k \quad on\ Q$$

$$Column(i) \Longrightarrow Column(i)/k \quad on\ A$$

۲) تفاضل مضربی از سطر i ام ماتریس Q از سطر j ام آن و به دنبال آن جمع همان مضرب از ستون j ام ماتریس A با ستون i ام ماتریس A

$$R(j) \longrightarrow R(j) - kR(i) \qquad on\ Q$$

$$C(i) \longrightarrow C(i) + kC(j) \qquad on\ A$$

۳) جابجایی سطر i ام و سطر j ام از ماتریس Q و به دنبال آن جابجایی ستون j ام و ستون i ام از ماتریس A

$$R(i) \longleftrightarrow R(j) \qquad on\ Q$$

$$C(j) \longleftrightarrow C(i) \qquad on\ A$$

بدین سان $\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, T^{-1}]$ به دست می آید.

تفاوت این تعریف با فرم های مختلف استاندارد اشلون این است که در اینجا یک ماتریس تشابهی T منحصر به فرد نتیجه می شود.

فرم استاندارد اشلون برای تعیین قوانین کنترل مناسب نیست، برای رفع این مشکل بردارهای ستونی غیر واحد فرم استاندارد اشلون را با انتخاب یک تبدیل مناسب به بردارهای سطری تبدیل می کنیم این فرم به فرم همدم برداری معروف است.

۱.۱.۴ ناورداهای کرونکر

زوج کنترل پذیر (B, A) را در نظر بگیرید، ماتریس کنترل پذیری سیستم را می توان به صورت زیر نمایش داد:

$$Q = [B, AB, A^{2}B, \cdots, A^{p_1-1}b_1, A^{p_2-1}b_2, \cdots, A^{p_m-1}b_m]$$

به طوری که:

$$rank(Q) = n$$

اعداد $p_i \; ; \; i = 1, 2, \cdots, m$ که هر p_i به بردار ستونی متناظر b_i از ماتریس B مربوط می شود را ناورداهای کرونکر زوج (B, A) می نامند.

واضح است که

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = n \; ; \; 1 \leq p_i \leq n$$

ناورداهای کرونکر زوج کنترل پذیر (B, A) را منظم می نامند هرگاه اختلاف بین ماکسیمم و مینیمم آنها حداکثر برابر واحد باشد.

اگر اختلاف بین ماکسیمم و مینیمم ناورداهای کرونکر زوج کنترل پذیر (B, A) بیشتر از واحد باشد آنها را نامنظم می نامند.

۲.۱.۴ تبدیل به فرم همدم برداری

فرض می کنیم که S ماتریس تبدیلات تشابهی باشد که سیستم (۳.۴) را به

$$\tilde{x}(t+1) = \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t) \tag{۴.۴}$$

تبدیل می کند، به طوری که:

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = S^{-1}\hat{x}(t) \\ \tilde{A} = S^{-1}\hat{A}S = S^{-1}T^{-1}ATS \\ \tilde{B} = T^{-1}\hat{B} = S^{-1}T^{-1}B \end{cases}$$

به گونه ای که زوج $(\tilde{B}, \tilde{A})$ به فرم همدم برداری اولیه خواهد بود.

بعلاوه با استفاده از عملیات تشابهی روی زوج (B, A) می توان فرم همدم برداری را به دست آورد؛ به این شکل که برای تبدیل (B, A) به $(\tilde{B}, \tilde{A})$ پس از به دست آوردن فرم استاندارد اشلون، ماتریس $\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, I_n]$ را در نظر گرفته و با استفاده از عملیات تشابهی آن را به فرم همدم برداری تبدیل می کنیم، یعنی:

$$\tilde{Q} = [\tilde{B}, \tilde{A}, S^{-1}]$$

که فرم همدم برداری در حالتی که ناورداهای کرونکر منظم باشند به صورت

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_0 \\ \cdots \\ o_{n-m\times m} \end{bmatrix}, \tilde{A} = \begin{bmatrix} & G_0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ I_{n-m} & & o_{n-m\times m} \end{bmatrix} \tag{۵.۴}$$

است و در حالتی که ناورداهای کرونکر نامنظم باشند ستون های ماتریس I_{n-m} در بلوک پایین ماتریس $\tilde{A}$ پخش می شوند.

الگوریتم مربوط به محاسبه فرم همدم برداری و برنامه کامپیوتری که بر اساس آن نوشته شده است در پیوست آمده است.

در حالت کلی زوج (B, A) به فرم همدم برداری است اگر دارای ساختاری به صورت زیر باشد:

$$A = \begin{bmatrix} G_0 \\ \cdots \\ G_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_0 \\ \cdots \\ o \end{bmatrix} \tag{۶.۴}$$

که در آن B_0 یک ماتریس $m \times m$ بالامثلثی و معکوس پذیر است و G_0 ماتریس دلخواه m و G_1 ماتریس $(n-m)$ که دارای خصوصیات زیر است:

۱- آخرین ستون G_1 برابر صفر است.

۲- بقیه ستون های G_1 ستون های ماتریس I_{n-m} هستند.

۳- اگر $e_1, e_2, \cdots, e_{n-m}$ به ترتیب ستون های اول تا $(n-m)$ ام ماتریس I_{n-m} باشند آنگاه این بردارها به ترتیب اندیسشان در ستون های G_1 ظاهر می شوند یعنی اگر $j > i$ آنگاه e_j قبل از e_i در G_1 ظاهر نشود.

برای معادله (۱.۴) قانون کنترل به صورت $u(t) = Fx(t)$ تعریف می شود و به طور مشابه برای معادله (۴.۴) قانون کنترل به صورت $\tilde{u}(t) = \tilde{F}\tilde{x}(t)$ تعریف می شود که $\tilde{F}$ ماتریس پس خورد حالت معادله سیستم تبدیل شده به فرم همدم برداری است و با جایگذاری $(TS)^{-1}x(t)$ به جای $\tilde{x}(t)$ داریم:

$$u(t) = \tilde{F}S^{-1}T^{-1}x(t)$$

بنابراین ماتریس پس خورد حالت معادله (۱.۴) سیستم به صورت زیر به دست می آید:

$$F = \tilde{F}S^{-1}T^{-1}$$

که F ماتریس پس خورد حالت اولیه زوج (B, A) است.

اگر $\tilde{F} = -B_0^{-1}G_0$ انتخاب شود؛ واضح است که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}$ همگی صفرند:

$$\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F} = \begin{bmatrix} & G_0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ I_{n-m} & & o_{n-m\times m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 \\ \cdots \\ o_{n-m\times m} \end{bmatrix} [-B_0^{-1}G_0] =$$

$$\begin{bmatrix} & G_0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ I_{n-m} & & o_{n-m\times m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -G_0 \\ \cdots \\ o_{n-m\times m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & o_{m\times n} & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ I_{n-m} & & o_{n-m\times m} \end{bmatrix} \qquad (۷.۴)$$

و از آنجایی که ماتریس حاصل یک ماتریس پایین مثلثی است که همه درایه های روی قطر اصلی آن برابر صفرند مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\tilde{\Gamma}$ همگی برابر صفرند.

حال الگوریتم چگونگی تعیین ماتریس پس خورد حالت اولیه را مطرح می نماییم:

گام ۱- ماتریس افزوده $Q = [B, A, I_n]$ را تشکیل می دهیم.

گام ۲- با عملیات تشابهی سطری و ستونی $\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, T^{-1}]$ را می سازیم.

گام ۳- عملیات تشابهی سطری و ستونی را ادامه داده $\tilde{Q} = [\tilde{B}, \tilde{A}, S^{-1}T^{-1}]$ را می سازیم.

گام ۴- m سطر اول $\tilde{B}$ را B_0 و m سطر اول $\tilde{A}$ را G_0 می نامیم.

گام ۵- $\tilde{F} = -B_0^{-1}G_0$ را تشکیل می دهیم.

گام ۶- $F = \tilde{F}S^{-1}T^{-1}$ ماتریس پس خورد حالت اولیه سیستم (B, A) را به دست می آوریم.

مثال ۹. سیستم(۱.۴) را در نظر بگیرید، که در آن:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

فرم استاندارد اشلون را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$Q = \left[\begin{array}{cc|ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

با استفاده از عملیات سطری ستونی داریم:

$$R(2) - R(1) \rightarrow R(2) \qquad on\ Q$$

$$C(1) + C(2) \rightarrow C(1) \qquad on\ A$$

$$Q \sim \left[\begin{array}{cc|ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R(2) \leftrightarrow -\frac{1}{2}R(2) \qquad on\ Q$$

$$C(2) \leftrightarrow -2C(2) \qquad on\ A$$

$$Q \sim \left[\begin{array}{cc|ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R(۱) - ۲R(۲) \to R(۱) \qquad on\ Q$$

$$C(۲) + ۲C(۱) \to C(۲) \qquad on\ A$$

$$Q \sim \left[\begin{array}{cc|ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۱ & -۴ & ۲ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۲ & -۱ & \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۳ & -۴ & ۳ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

$$R(۳) \leftrightarrow -\frac{۱}{۳}R(۳) \qquad on\ Q$$

$$C(۳) \leftrightarrow -۳C(۳) \qquad on\ A$$

$$Q \sim \left[\begin{array}{cc|ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۱ & -۴ & -۶ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۲ & ۳ & \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & \frac{۴}{۳} & ۴ & ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۳} \end{array}\right]$$

$$R(۱) - R(۳) \to R(۱) \qquad on\ Q$$

$$C(۳) + C(۱) \to C(۳) \qquad on\ A$$

$$\hat{Q} = \left[\begin{array}{cc|ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۰ & -\frac{۱۶}{۳} & -۹ & ۰ & ۱ & \frac{۱}{۳} \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۲ & ۳ & \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & \frac{۴}{۳} & ۴ & ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۳} \end{array}\right]$$

حال با استفاده از عملیات تشابهی فرم همدم برداری را به دست می آوریم:

$$C(۳) - ۴C(۱) \to C(۳) \qquad on\ A$$

$$R(۱) + ۴R(۳) \to R(۱) \qquad on\ \hat{Q}$$

$$\hat{Q} \sim \left[\begin{array}{cc|ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۴ & ۰ & -۹ & ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۲ & ۳ & \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & \frac{۴}{۳} & ۰ & ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۳} \end{array}\right]$$

$$C(۲) - \frac{۴}{۳}C(۱) \to C(۲) \qquad on\ A$$

$$R(۱) + \frac{۴}{۳}R(۲) \to R(۱) \qquad on\ \hat{Q}$$

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۴}{۳} & | & ۴ & -\frac{۸}{۳} & -۵ & | & \frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} & -۱ \\ ۰ & ۱ & | & ۰ & ۲ & ۳ & | & \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & | & ۱ & ۰ & ۰ & | & ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$$

$$B_{۰} = \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۴}{۳} \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \;;\quad G_{۰} = \begin{bmatrix} ۴ & -\frac{۸}{۳} & -۵ \\ ۰ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

با استفاده از فرم همدم برداری:

$$\tilde{F} = -B_{۰}^{-۱} G_{۰} = -\begin{bmatrix} ۱ & \frac{۴}{۳} \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ & -\frac{۸}{۳} & -۵ \\ ۰ & ۲ & ۳ \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} ۴ & -\frac{۱۶}{۳} & -۹ \\ ۰ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

اکنون ماتریس پس خورد حالت اولیه را به این صورت محاسبه می نماییم:

$$F = \tilde{F} S^{-۱} T^{-۱} = \begin{bmatrix} ۰ & -۴ & ۱ \\ -۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

حال اگر بخواهیم طیف مقادیر ویژه $\Lambda = \{\lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_n\}$ را به سیستم حلقه بسته اختصاص دهیم، ابتدا ماتریس پس خورد حالت $\tilde{F}$ و سپس ماتریس پس خورد حالت F را به گونه ای محاسبه می کنیم که مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته صفر باشند.

سپس $\tilde{A}_\lambda$ را به فرم زیر در نظر می گیریم:

$$\tilde{A}_\lambda = \begin{bmatrix} & G_\lambda & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ I_{n-m} & & o_{n-m,m} \end{bmatrix}$$

که از نظر ساختاری هم ارز $\tilde{A}$ است. چون ماتریس $\tilde{A}_\lambda$ با استفاده از عملیات تشابهی به دست آمده؛ بدیهی است که مقادیر ویژه تحت عملیات تشابهی تغییری نمی کنند. G_λ ماتریسی $m \times n$ است و درایه های آن پارامترهای $(i = ۱, ..., m; j = ۱, ..., n)$; g_{ij} به فرم زیر می باشند:

$$G_\lambda = \begin{bmatrix} g_{۱۱} & g_{۱۲} & \cdots & g_{۱n} \\ g_{۲۱} & g_{۲۲} & \cdots & g_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{m۱} & g_{m۲} & \cdots & g_{mn} \end{bmatrix}$$

حال با توجه به اینکه می خواهیم مقادیر ویژه دلخواه به سیستم اختصاص دهیم و سیستم مثبت باقی بماند بایستی مقادیر ویژه در شرایط گزاره (۱.۶.۳) صدق کند؛ و از طرفی با توجه به اینکه مقادیر ویژه ماتریس $\tilde{A}_\lambda$

باید در طیف Λ قرار گیرد، بنابراین به منظور تعیین رابطه بین درایه های g_{ij} باید قرار دهیم:

$$det(\tilde{A}_\lambda - \lambda I) = P_n(\lambda) = 0 \tag{۸.۴}$$

با بسط این دترمینان چندجمله ای درجه n ای به صورت زیر به دست می آید:

$$P_n(\lambda) = det(\tilde{A}_\lambda - \lambda I) = (-1)^n(\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n) \tag{۹.۴}$$

حال با توجه به اینکه ریشه های این چندجمله ای باید همان مقادیر ویژه $\tilde{A}_\lambda$ باشند که اعداد حقیقی و یا مختلط در طیف مقادیر ویژه $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ هستند می توان نوشت:

$$P_n(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) \tag{۱۰.۴}$$

حال با مساوی قرار دادن روابط (۹.۴) و (۱۰.۴) می توان ضرایب $c_i\ (i = 1, \cdots, n)$ را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\begin{aligned}
c_1 &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) \\
c_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \cdots + \lambda_1\lambda_j + \cdots + \lambda_{n-1}\lambda_n = \sum_{i,j=1; i\neq j}^{n} \lambda_i\lambda_j \\
&\vdots \\
c_k &= (-1)^k \sum_{i=j=\cdots=l=1\ ;\ i\neq j\neq\cdots\neq l}^{n} \lambda_i\lambda_j\cdots\lambda_l \qquad (۱۱.۴) \\
&\vdots \\
c_n &= (-1)^n\lambda_1\cdots\lambda_n
\end{aligned}$$

حال با محاسبه $det(\tilde{A}_\lambda - \lambda I)$ و روابط (۱۱.۴) و معادل سازی ضرایب، n معادله به شرح زیر به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} &f_1(g_{11}, g_{12}, \cdots, g_{mn}) = c_1 \\ &f_2(g_{11}, g_{12}, \cdots, g_{mn}) = c_2 \\ &\vdots \\ &f_n(g_{11}, g_{12}, \cdots, g_{mn}) = c_n \end{aligned} \tag{۱۲.۴}$$

که این دستگاه با n معادله و mn مجهول دارای بی شمار جواب است حال پارامترها باید به گونه ای تعیین گردند که علاوه بر تخصیص مقادیر ویژه در نظر گرفته شده مثبت بودن سیستم حلقه بسته نیز حفظ گردد. حال می توان ماتریس پس خورد حالت پارامتری که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته مثبت را در همان طیف Λ می برد به صورت زیر تعیین نمود:

$$K = B_0^{-1}(-G_0 + G_\lambda)T^{-1} \tag{۱۳.۴}$$

باید توجه داشته باشیم از آنجایی که ماتریس سیستم حلقه بسته بایستی مثبت باشد جهت محاسبه پارامترهای ماتریس A_c باید تک تک درایه های ماتریس

$$A_c = A + BK = A + BB_0^{-1}(-G_0 + G_\lambda)T^{-1} \tag{۱۴.۴}$$

بزرگتر یا مساوی صفر باشند.

مثال ۱۰. ماتریس A و B داده شده در ذیل را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0/1 & 0/05 \\ 0/25 & 0/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \;\; ; \;\; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حال با استفاده از روش بیان شده می خواهیم طیف مقادیر ویژه $\Lambda = \{0/9, 0/9 \pm 0/7i\}$ را به سیستم

حلقه بسته اختصاص دهیم؛ می بینیم که این مقادیر ویژه در شرایط گزاره(۱.۶.۳) صدق می نمایند؛ زیرا:

$$۱)\ \rho = max\{|\lambda_i^*|\} = ۱/۱۴$$

$$۲)\ \bar{\Lambda} = \{۰/۹, ۰/۹ \pm ۰/۷i\} = \Lambda$$

$$۳) \begin{cases} j=۱ \Rightarrow (-۱)^{۲} S_{۱}(\lambda_{۱},\lambda_{۲},\lambda_{۳}) = \lambda_{۱}+\lambda_{۲}+\lambda_{۳} = ۲/۷ > ۰ \\ j=۲ \Rightarrow (-۱)^{۳} S_{۲}(\lambda_{۱},\lambda_{۲},\lambda_{۳}) = -(\lambda_{۱}\times\lambda_{۲}+\lambda_{۱}\times\lambda_{۳}+\lambda_{۲}\times\lambda_{۳}) = ۰/۴۶۷۶ > ۰ \\ j=۳ \Rightarrow (-۱)^{۴} S_{۳}(\lambda_{۱},\lambda_{۲},\lambda_{۳}) = \lambda_{۱}\times\lambda_{۲}\times\lambda_{۳} =/ ۰۸۹۴ > ۰ \end{cases}$$

اکنون برای تخصیص این مقادیر ویژه به سیستم حلقه بسته به صورت زیر عمل می کنیم:

ابتدا فرم همدم برداری ماتریس های A و B را می یابیم:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۰/۰۱ \\ ۱/۲۵ & ۱/۲ & -۱/۷۵ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$T^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۰/۱ \\ ۰ & ۵ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix} \quad ; \quad F = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰/۰۵ \\ -۱/۲۵ & -۶ & -۵ \end{bmatrix}$$

که $T^{-۱}$ ماتریس تبدیل تشابهی و F ماتریسی است که مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته را به صفر می برد،

حال ماتریس پس خورد حالت را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$K = K_\lambda + F$$

به طوری که:

$$K_\lambda = B_{۰}^{-۱} G_\lambda T^{-۱}$$

طبق فرمول

$$G_\lambda = \begin{bmatrix} g_{۱۱} & g_{۱۲} & g_{۱۳} \\ g_{۲۱} & g_{۲۲} & g_{۲۳} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow K = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{۱۱} & g_{۱۲} & g_{۱۳} \\ g_{۲۱} & g_{۲۲} & g_{۲۳} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۰/۱ \\ ۰ & ۵ & ۵ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$
+\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰/۰۵ \\ -۱/۲۵ & -۶ & -۵ \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} g_{۱۱} & ۵g_{۱۲} & -۰/۱g_{۱۱}+۵(g_{۱۲}+g_{۱۳})+۰/۰۵ \\ g_{۲۱}-۱/۲۵ & ۵g_{۲۲}-۶ & -۰/۱g_{۲۱}+۵(g_{۲۲}+g_{۲۳})-۵ \end{bmatrix}
$$

حال ماتریس $A_c = A + BK$ را محاسبه می کنیم:

$$
A_c = A + BK = \begin{bmatrix} ۰ & ۰/۱ & ۰/۰۵ \\ ۰/۲۵ & ۰/۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}
$$

$$
+\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰/۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_{۱۱} & ۵g_{۱۲} & -۰/۱g_{۱۱}+۵(g_{۱۲}+g_{۱۳})+۰/۰۵ \\ g_{۲۱}-۱/۲۵ & ۵g_{۲۲}-۶ & -۰/۱g_{۲۱}+۵(g_{۲۲}+g_{۲۳})-۵ \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} g_{۱۱} & ۵g_{۱۲}+۰/۱ & -۰/۱g_{۱۱}+۵(g_{۱۲}+g_{۱۳})+۰/۱ \\ ۰/۲g_{۲۱} & g_{۲۲}-۱ & -۰/۰۲g_{۲۱}+(g_{۲۲}+g_{۲۳})-۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}
$$

بایستی $A_c \geqslant ۰$ ، و با استفاده از فرمول های (۸.۴)، (۹.۴) و (۱۱.۴) داریم:

$$
\begin{array}{ll}
g_{۱۱}+g_{۲۲}=۲/۷ & ۵g_{۱۲}+۰/۱\geqslant ۰ \\
g_{۱۱}g_{۲۲}-g_{۱۲}g_{۲۱}-g_{۱۳}=۲/۹۲ & -۰/۰۲g_{۲۱}+(g_{۲۲}+g_{۲۳})-۱\geqslant ۰ \\
g_{۱۳}+g_{۲۲}-g_{۱۲}g_{۲۳}=-۱/۱۷ & -۰/۱g_{۱۱}+۵(g_{۱۲}+g_{۱۳})+۰/۱\geqslant ۰ \\
g_{۱۱}\geqslant ۰ \qquad ۰/۲g_{۲۱}\geqslant ۰ & g_{۲۲}-۱\geqslant ۰
\end{array}
\tag{۱۵.۴}
$$

و در پایان با استفاده از نرم افزار لینگو یک نقطه که در معادلات (۱۵.۴) صدق می کند را می یابیم؛ یک نقطه به دست آمده برای این معادله

$$
g_{۱۱}=۰/۵\ ;\ g_{۱۲}=۲/۳۶۱\ ;\ g_{۱۳}=-۱/۸۲\ ;\ g_{۲۱}=۰\ ;\ g_{۲۲}=۲/۲\ ;\ g_{۲۳}=-۱/۲
$$

می باشد که در تمامی معادلات (۱۵.۴) صدق می نماید. و ماتریس A_c به صورت زیر به دست می آید:

$$
A_c=\begin{bmatrix} ۰/۵ & ۱۱/۹ & ۲/۸۵۵ \\ ۰ & ۱/۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}
$$

توجه داریم که برای m و n های بزرگ محاسبه ضرایب c_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ دشوار است از این رو روش آسانتر دیگری برای محاسبه ضرایب c_i ها به صورت زیر ارائه می شود:

$$det(\tilde{A}_\lambda - \lambda I) = (-1)^n(\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n)$$

حال می توان نشان داد [۵]

$$\begin{aligned}
c_1 &= -tr(\tilde{A}_\lambda) \\
c_2 &= -(c_1 tr(\tilde{A}_\lambda) + tr(\tilde{A}_\lambda^2))/2 \\
c_3 &= -(c_2 tr(\tilde{A}_\lambda) + c_1 tr(\tilde{A}_\lambda^2) + tr(\tilde{A}_\lambda^3))/3 \\
&\vdots \\
c_n &= -(c_{n-1} tr(\tilde{A}_\lambda) + c_{n-2} tr(\tilde{A}_\lambda^2) + \cdots + c_1 tr(\tilde{A}_\lambda^{n-1}) + tr(\tilde{A}_\lambda^n))/n
\end{aligned} \tag{۱۶.۴}$$

از آنجایی که مقادیر ویژه $\tilde{A}_\lambda$ از پیش تعریف شده اند، $tr(\tilde{A}_\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ به سادگی محاسبه می شود و برای محاسبه $tr(\tilde{A}_\lambda^k)$ از قضیه زیر استفاده می کنیم.

قضیه ۱.۱.۴. [۱۴] فرض کنید مقادیر ویژه A در طیف $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ باشند آنگاه مقادیر ویژه A^k در طیف $\Lambda_k = \{\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k\}$ قرار خواهند داشت.

اثبات. ماتریس $A_{n\times n}$ را با مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ در نظر می گیریم، با استفاده از عملیات تشابهی سطری-ستونی ماتریس A را به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل می کنیم و آنرا A_1 می نامیم و از آنجایی که عملیات تشابهی سطری-ستونی خواص ماتریس را تغییر نمی دهند مقادیر ویژه ماتریس بالا مثلثی A_1 همان مقادیر ویژه ماتریس A خواهد بود و این مقادیر ویژه روی قطر اصلی ماتریس A_1 قرار دارند. واضح است که ماتریس A_1^2 نیز بالا مثلثی خواهد بود و مقادیر روی قطر اصلی آن $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2$ خواهد بود و به همین ترتیب ماتریس A_1^k نیز بالا مثلثی خواهد بود و مقادیر روی قطر اصلی آن $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k$ می باشد و

از آنجایی که ماتریس A_1^k بالا مثلثی است، مقادیر ویژه اش همان $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k$ خواهد بود. □

۲.۴ نامنفی بودن کنترل ها

روشی که ارائه شد برای حالتی بود که هیچ محدودیتی روی کنترل ها نداشتیم، حال با اعمال محدودیت نامنفی بودن کنترل ها روش را مورد بررسی قرار می دهیم.

گزاره ۱.۲.۴. [۱۶] کنترل ها در سیستم مثبت گسسته زمانی خطی حلقه بسته در محدودیت زیر صدق می کنند

$$u(t) \geq 0 \tag{۱۷.۴}$$

اگر و تنها اگر ماتریس پس خورد حالت K یک ماتریس نامنفی باشد؛ یعنی

$$K \in R_+^{m\times n} \tag{۱۸.۴}$$

مستقل از اینکه سیستم حلقه باز مثبت باشد یا نباشد.

اثبات. اثبات کفایت نسبتا بدیهی است. از آنجا که با استفاده از تعریف برای سیستم مثبت گسسته زمانی خطی حلقه بسته بردار حالت $x(t) \geq 0 \ ; \ t = 0, 1, 2, \cdots$ است، به آسانی از رابطه $u(t) = Kx(t)$ بدست می آید که (۱۷.۴) برقرار خواهد بود اگر (۱۸.۴) برقرار باشد.

اثبات لزوم با استفاده از برهان خلف. فرض کنید که (۱۸.۴) برقرار نیست اما (۱۷.۴) درست است. بنابراین

$$k_{ij} \geq 0 \ ; \ (i = 1, ..., r-1, r+1, .., m \ ; \ j = 1, ..., s-1, s+1, ..., n)$$

اما $k_{rs} < 0$.

مطابق فرض برای هر حالت نامنفی کنترل نامنفی است. در نتیجه برای $x(t) = x_s(t)e_s$ داریم:

$$u_s(t) = k_{rs}x_s(t)$$

و از آنجایی که $X(t) \geq 0$ و $k_{rs} < 0$ داریم:

$$u_s(t) \leq 0$$

که یک تناقض است. $\square$

مثال ۱۱. ماتریس A و B داده شده در مثال(۸) را در نظر بگیرید،حال با استفاده از روشی که بیان شد می خواهیم طیف مقادیر ویژه $\Lambda = \{0.95, -0.05, 0\}$ را به سیستم حلقه بسته اختصاص دهیم؛ می بینیم که این مقادیر ویژه در شرایط گزاره(۱.۶.۳) صدق می نمایند؛ زیرا:

$$1)\ \rho = max\{|\lambda_i^*|\} = 0.95 < 1$$

$$2)\ \bar{\Lambda} = \{0.95, -0.05, 0\} = \Lambda$$

$$3)\begin{cases} j = 1 \Rightarrow (-1)^2 S_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0.9 > 0 \\ j = 2 \Rightarrow (-1)^3 S_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -(\lambda_1 \times \lambda_2 + \lambda_1 \times \lambda_3 + \lambda_2 \times \lambda_3) = 0.0475 > 0 \\ j = 3 \Rightarrow (-1)^4 S_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 = 0 \geq 0 \end{cases}$$

اکنون برای تخصیص این مقادیر ویژه به سیستم حلقه بسته به صورت زیر عمل می کنیم:

ابتدا فرم همدم برداری ماتریس های A و B را می یابیم:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0.4 \\ 0 & 0.6 & 0.47 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -10 \\ -3.5 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

که T^{-1} ماتریس تبدیل تشابهی و F ماتریسی است که مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته را به صفر می برد، حال ماتریس پس خورد حالت را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$K = K_\lambda + F$$

به طوری که:

$$K_\lambda = B_0^{-1} G_\lambda T^{-1}$$

طبق فرمول

$$
\begin{aligned}
G_\lambda &= \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \end{bmatrix} \\
\Rightarrow K &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -10 \\ -3/5 & 0 & -3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2g_{12} + 10g_{13} & 10g_{11} & 5g_{12} - 10 \\ -2g_{22} + 10g_{23} - 3/5 & 10g_{21} & 5g_{22} - 3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

بایستی $K \geq 0$ ، با استفاده از فرمول های (۸.۴)، (۹.۴)، (۱۱.۴) داریم:

$$
\begin{aligned}
& g_{11} + g_{22} = 0/9 && 2g_{12} + 10g_{13} \geqslant 0 \\
& g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} - g_{13} = -/0475 && -2g_{22} + 10g_{23} - 3/5 \geqslant 0 \\
& g_{13} + g_{22} - g_{12}g_{23} = 0 && 10g_{11} \geqslant 0 \\
& 10g_{21} \geqslant 0 \qquad 5g_{12} - 10 \geqslant 0 && 5g_{22} - 3 \geqslant 0
\end{aligned} \tag{19.4}
$$

و در پایان با استفاده از نرم افزار لینگو یک نقطه که در معادلات (۱۵.۴) صدق می کند را می یابیم؛ یک نقطه به دست آمده برای این معادله

$$g_{11} = 0/3 \ ; \ g_{12} = 2 \ ; \ g_{13} = 1/7 \ ; \ g_{21} = 0/0036 \ ; \ g_{22} = 0/6 \ ; \ g_{23} = 0/5$$

می باشد که در تمامی معادلات (۱۹.۴) صدق می نماید. و ماتریس K به صورت زیر به دست می آید:

$$K = \begin{bmatrix} 13 & 3 & 0 \\ 0/3 & 0/36 & 0 \end{bmatrix}$$

۳.۴ نتیجه گیری

در این پایان نامه سیستم های کنترلی و ویژگی های دسترسی پذیری، کنترل پذیری و مشاهده پذیری برای این سیستم ها و همچنین پایداری و تخصیص مقدار ویژه برای سیستم های کنترلی مثبت بیان گردید.

سپس برای تخصیص مقدار ویژه دو روش را بیان نمودیم؛ در روش اول ماتریس را به فرم همدم تبدیل و سپس مقادیر ویژه مورد نظر را به سیستم حلقه بسته مثبت اختصاص دادیم و در روش دوم ماتریس را به فرم همدم برداری تبدیل نموده و سپس با استفاده از پارامتری سازی و به دست آوردن یک نقطه از ناحیه شدنی مقادیر ویژه را به سیستم اختصاص دادیم، که برای نوشتن برنامه های این روش از نرم افزارهای متلب و لینگو استفاده گردید.

پیوست

برنامه های کامپیوتری

$t0 = cputime;$

$A;$

$B;$

$[n, m] = size(B);$

$r = n + m;$

$Q = [B, A];$

$i = 1; \quad j = 1; \qquad tol = 1e - 6;$

$while(i <= n)(j <= r)$

$[q, k] = max(abs(Q(i : n, j))); \qquad k = k + i - 1;$

$if(q <= tol)$

$Q(i : n, j) = zeros(n - i + 1, 1);$

$j = j + 1;$

$else$

$if \quad i \quad = k$

$Q([i, k], :) = Q([k, i], :);$

$T1([i, k], :) = T1([k, i], :);$

$Q(:,[i+m,k+m]) = Q(:,[k+m,i+m]);$

end

$t = Q(i,j);$

$Q(i,:) = Q(i,:)/t;$

$Q(:,i+m) = Q(:,i+m)*t;$

$T1(i,:) = T1(i,:)/t;$

$if \quad i \;\; = n$

$fork = i+1:n$

$t = Q(k,i);$

$ift \;\; = 0$

$Q(k,:) = Q(k,:) - t*Q(i,:);$

$Q(:,i+m) = Q(:,i+m) + t*Q(:,k+m);$

$T1(k,:) = T1(k,:) - t*T1(i,:);$

end

end

end

$i = i+1;$

$j = j+1;$

end

end

$s = 1;$

$whiles < n$

$i = s+1;$

$forj = i : r$

$ifQ(i,j) \quad = 0$

$fork = 1 : s$

$ifQ(k,j) \quad = 0$

$t = Q(k,j);$

$Q(k,:) = Q(k,:) - t * Q(i,:);$

$T1(k,:) = T1(k,:) - t * T1(i,:);$

$Q(:,i+m) = Q(:,i+m) + t * Q(:,k+m);$

end

end

$break$

end

end

$s = s + 1;$

end

$fori = n : -1 : m+1$

$fork = i : r$

$ifQ(i,k) == 1$

$forj = k+1 : r$

$t = Q(i,j);$

$Q(:,j) = Q(:,j) - t * Q(:,k);$

$Q(k-m,:) = Q(k-m,:) + t * Q(j-m,:);$

$T1(k-m,:) = T1(k-m,:) + t * T1(j-m,:);$

end

$break$

end

end

end

Q

$T1$

$B1 = Q(:, [1 : m]); \qquad A1 = Q(:, [m + 1 : r])$

$B0 = Q(1 : m, 1 : m); \qquad bo = inv(B0)$

$G = Q(1 : m, m + 1 : r); \qquad F1 = -bo * G; \qquad G0 = G;$

$Fp = F1 * T1;$

Fp

$gama = A + B * Fp$

$t1 = cputime - t0$

$xp = [];$

$up = [];$

$x0 = ones(4, 1);$

$xp(:, 1) = x0;$

$i = 2;$

$whilei < 10$

$xp(:, i) = gama * xp(:, i - 1);$

$up(:, i - 1) = Fp * xp(:, i - 1);$

$i = i + 1;$

end

clf

$stairs(up(1,:)), hold\ on$

$title('input\ response')$

$ylabel('input\ u1')$

$xlabel('time\ t')$

$pause$

$hold\ off$

$plot(xp(1,:)), hold\ on$

$title('state\ response')$

$ylabel('x1')$

$xlabel('timet')$

$hold\ off$

$pause$

$plot(xp(2,:)), hold\ on$

$title('state\ response')$

$ylabel('x2')$

$xlabel('timet')$

$hold\ off$

$pause$

$plot(xp(3,:)), hold\ on$

$title('state\ response')$

$ylabel('x3')$

$xlabel('time\ t')$

$hold\ off$

$pause$

$plot(xp(4,:)), hold\ on$

$title('state\ response')$

$ylabel('x4')$

$xlabel('time\ t')$

$holdoff$

xp

مراجع

[1] *A. Berman, M. Neumann, and R. J. Stern. "Non-negative Matrices in the Mathematical Sciences", Philadelphia:SIAM, 1994.*

[2] *A. Berman, and B. J. Plemnons. "Non-negative Matrices in Dynamic Systems", New York:Wiley, 1989.*

[3] *L. Caccetta, and V. G. Rumchev. "Reachable discrete-time systems with minimal dimension control sets", Dynamics of Continuous,Discrete and Impulsive Systems,* ***4****, 539-552, 1998.*

[4] *P. Coxson, and H. Shapiro. "Positive input reachability and controllability of positive systems", Linear Algebra and Applications ,* ***94****,35-53, 1983.*

[5] *D. T. .Finkbeiner. "Introduction to matrices and linear transformations", Dehli, Shahdra, 236-240, 1986.*

[6] *J. A. Jacquez, and C. P. Simon. "Qualitative theory of compartmental systems", SIAM Review,* ***35****, 43-79, 1993.*

[7] *D. J. G. James, S. P. Kostova, and V. G. Rumchev. "Pole assignment for a class of positive linear systems", International Journal of System Science ,* ***32, No.17****, 1377-1388, 2001.*

[8] D. J. G. James, and V. G. Rumchev. "Stability of positive linear discrete time systems", Technical Sciences, **53**, No.1, 2005.

[9] T. Kaczorek. "Linear control systems", Research Studies Press and J. Wiley, New York, **2**, 1993.

[10] T. Kaczorek. "Positive 1D and 2D Systems", Springer, London, 2002.

[11] T. Kaczorek. "Theory of Control Systems", PWN, Warszava , 1999.

[12] R. E. Kalman. "On general theory of control systems", proceeding of first international congress on automatic control, Butterworth, London, 481-493, 1960.

[13] S. Karbassi, and D. J. Bell. "Parametric time-optimal control of linear discrete-time systems by state feedback", International Journal of Control, **57**, 817-830, 1993.

[14] S. Karbassi, and H. A. Tehrani. "Parameterizations of the state feedback controllers for linear multivariable systems", Computers and Mathematics with Applications , **44**, 1057-1065, 2002.

[15] D. Luenberger. "Introduction to dynamic systems", Theory Models and Applications , **9**, 149-153, 1979.

[16] H. Minc. "Non-negative Matrices", Wiley , New York, 1988.

[17] Y. Ohta, H. Madea, and S. Kodam. "Reachability, observability and realizability of continuos-time positive systems", SIAM Journal of Control and Optimization, **22**, 171-180, 1984.

[18] R. V. Patel, and N. Munro. "Multivariable systems theory and design", Oxford: Pergamon , 1982.

*[19] R. Rouhani, and E. Tse. "Structural design for classes of positive linear systems", IEEE Transactions on Systems, Man, Cybernetics, SMC, **11**, 126-134, 1981.*

*[20] V. G. Rumchev. "Constructing the reachable sets for positive linear discrete-time systems: the case of polyhedra", Systems Science, **15**, 11-21, 1989.*

*[21] V. G. Rumchev, and D. J. G. James. "Controllability of positive linear discrete-time systems", International Journal of Control, **50**, 845-857, 1989.*

*[22] V. G. Rumchev, and D. J. G. James. "Spectral characterization and pole assignment for positive linear discrete-time systems", International Journal of Systems Science, **26**, 295-312, 1995.*

[23] E. D. Sontag. "Mathematical control theory", Berlin: Springer, 1990.

[24] F. Szidarovsky, and A. Bahill. "Linear systems theory", London:CRC press

Abstract

In this thesis, positive linear discrete-time systems, and properties such as controllability, reachability, and observability are investigated and then different types of positive systems stability and also pole assignment problem, has been studied by companion matrix. And finally by using vector companion form and parameterization of the state feedback controller, a new method for pole assignment developed, so that closed-loop systems remain positive.

Keywords: *Positive system, Feedback, Eigen value assignment.*

Shahrood University of Technology
Facualty of Methematical Sciences
Department of Mathematics

M.s Thesis

Stability of positive linear discrete-time systems

By:

Fatemeh Mohamadizadeh Sorui

Supervisor:
Dr. Ahsani Tehrani

11 Jul 2011