

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی محض، گرایش هندسه توپولوژی

رساله دکتری

تحلیل معادلات دیفرانسیل کسری و کاربرد آن در حل برخی معادلات ریاضیات مالی

نگارنده: آزاده نادری فرد

استاد راهنما

دکتر سید رضا حجازی

استاد مشاور

دکتر الهام دسترنج

آبان ماه ۱۳۹۸



فرم شماره ۱۲: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)
(ویژه دانشجویان ورودی های ۹۴ و ما قبل)

بدینوسیله گواهی می شود خانم آزاده نادری فرد دانشجوی دکتری رشته ریاضی محض - هندسه (توپولوژی) به شماره دانشجویی ۹۴۰۱۱۹۵ ورودی مهر ماه سال ۱۳۹۴ در تاریخ ۹۸/۰۸/۱۴ از رساله نظری / عملی خود با عنوان: تحلیل معادلات دیفرانسیل کسری و کاربرد آن در حل برخی معادلات ریاضیات مالی دفاع و با اخذ نمره۲۰..... به درجه : عالی نائل گردید.

- الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰ ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ - ۱۷
- ج) درجه خوب: نمره ۱۶/۹۹ - ۱۵ د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد
- ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبۀ علمی	امضاء
۱	دکتر سیدرضا حجازی	استاد راهنما	دانشیار	
۲	دکتر الهام دسترنج	استاد مشاور	استادیار	
۳	دکتر سید امین اصفهانی	استاد مدعو خارجی	دانشیار	
۴	دکتر احمد معتمدنژاد	استاد مدعو داخلی	دانشیار	
۵	دکتر علیرضا ناظمی	استاد مدعو داخلی	دانشیار	
۶	دکتر مهدی قوتمند	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	استادیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی خانم آزاده نادری فرد بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی قوتمند

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:



این رساله را به پدر صبور و مادر مهربانم و محمد حسین عزیزم تقدیم می‌کنم.

تقدیر و تشکر

کمال تشکر و سپاس را از استاد راهنمای ارزشمندم جناب آقای دکتر سید رضا حجازی و استاد مشاور گرانقدرم سرکار خانم دکتر الهام دسترنج دارم.

آزاده نادری فرد

آبان ماه ۱۳۹۸

تعهد نامه

اینجانب آزاده نادری فرد دانشجوی دکتری رشته ریاضی محض علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان تحلیل معادلات دیفرانسیل کسری و کاربرد آن در حل برخی معادلات ریاضیات مالی، تحت راهنمایی سید رضا حجازی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیر گذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

آزاده نادری فرد

آبان ماه ۱۳۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

موضوع محوری و بنیادی رساله دکتری حاضر، بررسی همه جانبه و فراگیر کاربرد گروه‌های لی در مطالعه و تبیین معادلات دیفرانسیل کسری، شامل حل آنها و قوانین پایستگی نتیجه شده از آنها می‌باشد. سیستم‌های دینامیکی توسعه یافته دارای حافظه جنبش و حرکت دیگر از قوانین مشتقات معمولی پیروی نمی‌کنند. مشتقات و انتگرال‌های کسری به دلیل آنکه مدل‌های دقیق‌تری را برای سیستم‌های مهندسی نسبت به مشتقات و انتگرال‌های مرتبه صحیح فراهم می‌کنند، بیشتر مورد توجه محققان رشته‌های مختلف قرار گرفته‌اند. یافتن جواب برای سیستم‌ها و معادلات با مشتق کسری به دلیل کاربردهایشان از اهمیت بالایی برخوردار است، لذا انتخاب روش متناسب با ساختار کسری دارای ارزش بسیار زیادی است. در این پایان‌نامه به مطالعه معادلات مرتبه کسری می‌پردازیم و روش تقارنی لی بر پایه تعمیمی از تقارن‌های معادلات با مرتبه صحیح را ارائه می‌دهیم. همچنین برخی از روش‌های تحلیلی مانند زیرفضاهای ناورد و زیر معادلات مورد بحث و مقایسه قرار می‌گیرند. در انتها به دلیل اهمیت معادلات دیفرانسیل در ریاضیات مالی، روش تقارنی معادلات دیفرانسیل کسری را به عنوان یک روش هندسی و تحلیلی در برخی معادلات دیفرانسیل موجود در ریاضی مالی مانند معادلات فوکر-پلانک و ... بکار می‌گیریم.

کلمات کلیدی: معادلات اویلر-لاگرانژ، تقارن‌های لی، قوانین پایستگی، قضیه نوتر، قضیه ابراهیموف، مشتقات کسری، مشتق کسری ریمان لیوویل، مشتق کسری کاپاتو، حرکت بروانی، معادلات بلک-شولز.

1. S. Reza Hejazi, A. Naderifard, S. Rashidi, *Conservation laws and similarity reduction of the Zoomeron equation*, Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. Nauki. 14(3) (2016) 7-13.

Abstract: In this study, we consider a 4-th order (1+1)-dimensional PDE called Zoomeron equation. Some conservation laws are derived based on direct method. We also derived some similarity solutions using the symmetries.

2. Azadeh Naderifard, S. Reza Hejazi and Elham Dastranj, *Symmetry properties, conservation laws and exact solutions of time-fractional irrigation equation*, Waves in Random and Complex Media, 29(1) (2019) 178-194.

Abstract: In this paper, we deal with the complete algebra of Lie point symmetries for the generalized model of an irrigation system of fractional order. By means of Lie symmetry method, the vector fields has been investigated which are utilized for obtaining the conservation laws of equation. In addition, through the sub-equation method, we construct some exact solutions for the considered equation by reducing the fractional partial differential equation to an ordinary fractional differential equation.

3. Azadeh Naderifard, Elham Dastranj and S. Reza Hejazi, *Exact solutions for time-fractional Fokker-Planck-Kolmogorov equation of Geometric Brownian motion via Lie point symmetries*, International Journal of Financial Engineering, 5(2)(2018) 1850009 (15 pages).

Abstract: In this paper, the transition joint probability density function of the solution of geometric Brownian motion (GBM) equation is obtained via Lie group theory of differential equations (DEs). Lie symmetry analysis is applied to find new solutions for time-fractional Fokker–Planck–Kolmogorov equation of GBM. This analysis classifies the forms of the solutions for the equation by the similarity variables arising from the symmetry operators. Finally, an analytic method called invariant subspace method is applied in order to find another exact solution.

4. A. Naderifard, S. R. Hejazi, E. Dastranj, A. Motamednezhad, *Symmetry operators and exact solutions of a type of time-fractional Burgers–KdV equation*, International Journal of

Geometric Methods in Modern Physics, 16(2) (2019) 1950032 (15 pages).

Abstract: In this paper, group analysis of the fourth-order time-fractional Burgers–Korteweg–de Vries (KdV) equation is considered. Geometric vector fields of Lie point symmetries of the equation are investigated and the corresponding optimal system is found. Similarity solutions of the equation are presented by using the obtained optimal system. Finally, a useful method called invariant subspaces is applied in order to find another solutions.

5. A. Naderifard, S. R. Hejazi and E. Dastranj, *Conservation laws ogf the time-fractional Zakharov-Kuznetsov-Burgers equation*, Kragujevac Journal of Mathematics, 44(1) (2020), 75-88.

Abstract: In this paper, group analysis of the fourth-order time-fractional Burgers–Korteweg–de Vries (KdV) equation is considered. Geometric vector fields of Lie point symmetries of the equation are investigated and the corresponding optimal system is found. Similarity solutions of the equation are presented by using the obtained optimal system. Finally, a useful method called invariant subspaces is applied in order to find another solutions.

6. A. Naderifard, S. R. Hejazi, S. Hosseinpour and E. Dastranj, *Conservation laws for space-time-fractional generalized Poisson equation*, Submitted.

Abstract: In the present paper Lie theory of differential equations is expanded for finding symmetry geometric vector fields of Poisson equation. Similarity variables extracted from symmetries are applied in order to find reduced form of the considered equation bu using Erdlyi-Kober operator. Conservation laws of the space-space-fractional generalized Poisson equation with the Riemann-Liouville derivative are investigated via Noether’s method. By means of the concept of nonlinear self-adjointness, Noether’s operators, formal Lagrangians and conserved vectors are comupted. A collocation technique is also applied to give a numerical simulation of the problem.

7. S. R. Hejazi, A. Naderifard, S. Hosseinpour and E. Dastranj, *Exactand numerical simulations of time-fractional Fokker-Plank equation for soecial stochastic process*, Submitted.

Abstract: In this paper, a type of time-fractional Fokker-Planck equation (FPE) of the Ornstein-Uhlenbeck process is solved via Riemann-Liouville and Caputo

derivatives. An analytical method based on symmetry operators is used for finding reduced form and exact solutions of the equation. A numerical simulation based on the Muntz-Legendre polynomials is applied in order to find some approximated solutions of the equation.

8. A. Naderifard, S. R. Hejazi and E. Dastranj, *Lie symmetry group and conservation laws for some $(\alpha + 2)$ -dimensional fractional evolution equations*, Submitted.

Abstract: We make some similarity variables and reduced forms of $\alpha + 2$ evolution time fractional equation $\mathcal{D}_t^\alpha u = \left(F(u)u_x \right)_y$ with Riemann-Liouville derivative, for some functions $F(u)$ by applying the point symmetries admitted by the equation. Afterward, we are constructed conservation laws of this equation by Nother's operator.

Conference articles

1. A. Naderifard, S.Reza Hejazi, *similarity solution of Dym equation*, 13th International Seminar on Differential Equations, Dynamical Systems and Applications, Department of Mathematical Sciences, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran, 15-13 July 2016.

Abstract: In this study, we consider a third-order (1+1)-dimensional PDE called Dym equation. Lie point symmetries are given and some similarity solutions via associated symmetries are found.

2. A. Naderifard, S. R. Hejazi, *Conservation Laws and similarity solution of G-equation*, Iranian Conference on Mathematical Physics, Qom University of Technology, p90, 3 November 2016.

Abstract: In this study, we consider a two-dimensional nonlinear differential equation that called G-equation. Some conservation laws and similarity solutions are found via point symmetries.

3. A. Naderifard, S. R. Hejazi, S. Hossinpour and E. Dastranj, *A geometric approach for finding exact solutions of a kind of time-fractional PDE*, the 9th seminar on geometry and topology, Maraghe, Iran, 26-27 July, (2017).

Abstract: In this paper, the Lie algebra of symmetry operators is applied to study a time-fractional PDE of 4th-order. Lie point symmetries of this equation are

investigated and the corresponding similarity solutions are presented. Finally an analytical method for finding another exact solution is considered.

4. A. Naderifard, S. R. Hejazi, E. Dastranj, *Similarity reduction of a model of time-fractional Fokker-Planck equation*, 14th International Seminar on Differential Equations, Dynamical Systems and Applications, The institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan, Iran, 17-19 July (2018).

Abstract: In this paper, the Lie algebra of symmetry operators is applied to study a model of time-fractional Fokker-Planck (FP) equation of a stochastic process. Lie point symmetries of this equation are investigated and the corresponding similarity solutions are presented.

با معرفی مفهوم مشتق توسط نیوتن^۱ و لایبنیتز^۲ در قرن هفدهم، بررسی مسایل پویا و دینامیکی موجود در طبیعت به کمک ریاضیات ممکن گردید. معادلات موجود در ریاضی نیز که تا قبل از آن حالت ایستا داشت و جواب آنها به یک یا چند عدد حقیقی یا مختلط محدود می‌شد، به صورت معادلات دیفرانسیلی درآمد که جواب‌های آن خانواده‌ای از توابع را شامل می‌شد. بررسی و مطالعه معادلات دیفرانسیل تا زمان معرفی مفهوم گروه‌های لی در قرن نوزدهم توسط ریاضیدان نوروژی ماریوس سوفس لی^۳ به طبقه‌بندی معادلات به صورت‌هایی مانند تفکیک‌پذیر، همگن، خطی و ... و یافتن جوابی متناظر با هر دسته محدود می‌شد. لی در دوره دانشجویی در سخنرانی‌هایی که با موضوع معادلات جبری آبل^۴ و گالوا^۵ توسط لودویگ سیلو^۶ ارائه می‌شدند، حضور پیدا می‌کرد. در سال ۱۸۶۹ در سفرش به برلین با کلاین^۷ آشنا شد و بعدها با او همکاری کرد و چندین مقاله بعد از همکاری به چاپ رسید.

در سال ۱۸۷۰ لی تبدیلات برخوردی را کشف کرد و در سال ۱۸۷۴ با بکارگیری ایده‌اش در مطالعات بر روی معادلات دیفرانسیل جزئی، نظریه گروه‌های تبدیل پیوسته را ارائه داد. لی در واقع رویای بیان نظریه‌ای مشابه نظریه گالوا برای معادلات دیفرانسیل را داشت ولی نتوانست این رویا را محقق کند، بالاخره او در سال ۱۸۹۹ درگذشت و امروزه نظریاتش ابزارهایی برای فهم و حل مسائل در تمام زمینه‌های علمی و مهندسی می‌باشد [۸۲].

در سال ۱۹۳۰ کارتان^۸ و وایل^۹ نظریه گروه‌های لی را به یک نظریه سراسری تعمیم دادند. داشتن گروه تقارن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مزیت‌های بسیاری دارد که از جمله آن می‌توان به طبقه‌بندی جواب‌های دستگاه معادلات دیفرانسیل اشاره کرد. اگر با یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی سروکار داشته باشیم، گروه تقارنی به ما کمک می‌کند تا با کاهش مرتبه معادله، جواب را با یک بار انتگرال‌گیری به دست آوریم و در حالتیکه معادله مورد بررسی مرتبه اول باشد، جواب عمومی نیز بدست خواهد آمد. اما چنین چیزی در مورد معادلات دیفرانسیل جزئی برقرار نیست، یعنی جواب عمومی چنین معادلاتی را نمی‌توان لزوماً با داشتن تقارن‌ها به دست آورد (مگر در حالتی که دستگاه قابل تبدیل به دستگاه خطی باشد). در این شرایط تنها برخی از جواب‌ها به دست می‌آیند که تحت زیرگروه‌های گروه تقارن ناوردا هستند و به جواب‌های ناوردا ی گروهی مشهورند و شامل تعداد متغیر مستقل کمتری نسبت به دستگاه اصلی می‌باشند. قوانین پایستگی و تقارن‌ها همواره به طور قابل ملاحظه‌ای در علوم مورد توجه بوده‌اند. آنها در فرمول‌بندی کردن و ارائه مدل‌های ریاضی بسیار مهم می‌باشند. در مطالعه معادلات دیفرانسیل قوانین پایستگی توان توضیح کمیت‌های فیزیکی از قبیل جرم و انرژی را دارند. آنها برای تحقیق انتگرال‌پذیری و برای اثبات وجود و یکتایی جواب‌ها مهم هستند. یک قانون پایستگی معادله‌ای ریاضی است که چگونگی تاثیر یک کمیت توسط شارها را بیان می‌کند. دلایل زیادی برای محاسبه چگالی و شارهای یک دستگاه معادلات دیفرانسیل وجود دارد. به عنوان مثال، کدامیک از کمیت‌های فیزیکی در یک دستگاه به کمک معادلات دیفرانسیل بیان شده است، ثابت می‌ماند. قوانین پایستگی همچنین در مطالعه ساختارهای همپلتونی مفید هستند [۱۴]. وجود تعداد قابل توجهی قوانین پایستگی بیانگر انتگرال‌پذیری کامل دستگاه می‌باشد [۶۳]. در برخی روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل نیز به کمک قوانین پایستگی می‌توان بررسی کرد، آیا مقادیر حفاظت شده ثابت هستند یا خیر [۴۴].

برای یافتن قوانین پایستگی روش‌های مختلفی وجود دارد از جمله قضیه نوتر، روش ضرایب تابعی، روش مستقیم،

^۱Isaac Newton

^۲Gottfried Wilhelm Leibniz

^۳Marius Lie Sophus

^۴Niels Henrik Abel

^۵Évariste Galois

^۶Peter Ludwig Sylow

^۷Felix Christian Klein

^۸Élie Joseph Cartan

^۹Hermann Klaus Hugo Weyl

روش ابراگیموف و ۰۰۰ که علاقمندان می‌توانند به مراجع [۸، ۹، ۱۰، ۲۶، ۳۱، ۴۰، ۶۵، ۶۸، ۸۰، ۸۳] رجوع کنند. با جستجو در مطالب انتشار یافته در دهه‌های اخیر در زمینه‌ی علوم مختلف، کم و بیش با موضوعات حسابان کسری و یا معادلات دیفرانسیل با مشتقات کسری و مفاهیمی از این نوع برخورد می‌کنیم. این مطالب گویای این نکته است که حسابان کسری هم در زمینه‌ی نظری و هم در زمینه‌ی کاربردی سهم قابل توجهی را از تحقیقات به خود اختصاص داده است. در حقیقت سیستم‌های کسری به دلیل توصیف بهتر پدیده‌های فیزیکی همواره مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. یکی از دلایل استفاده از چنین سیستم‌هایی خاصیت حافظه‌دار بودن مشتق کسری است که باعث شده در شرح پدیده‌های فیزیکی دارای خاصیت وراثت، به صورت فراگیر مورد استفاده قرار گیرند. با این وجود به دلیل پیچیدگی تعاریف مشتقات کسری، حتی در حالت خطی، یافتن جواب با دشواریهایی همراه است، به همین دلیل بیشتر روش‌های ذکر شده برای یافتن جواب در آن‌ها، روش‌های عددی و تقریبی می‌باشد. در چنین شرایطی پژوهشگران به دنبال بیان راهکارهایی برای حل تحلیلی این سیستم‌ها می‌باشند.

در این پایان‌نامه به بیان سه روش حل برای معادلات دیفرانسیل کسری پرداخته‌ایم. روش‌های ذکر شده هر یک برای یک طیف از مشتقات مورد استفاده قرار می‌گیرند. روش اول با استفاده از ایده‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDE)، سعی بر کاهش مرتبه معادله مورد بررسی را دارد و در صورتی که این امر محقق شود به کمک چندجمله‌های مشخصه به حل معادله می‌پردازد. در روش دوم با تعریف متغیرهای جدید معادله دیفرانسیل جزئی با مشتقات کسری (FPDE) مورد بررسی را به معادله دیفرانسیل معمولی با مشتقات کسری (FODE) تبدیل می‌نماید و دسته‌ای جواب‌های آن را معرفی می‌نماید. روش سوم بر پایه مجموعه‌ای از توابع مستقل خطی قرار دارد و با یافتن مجموعه مناسب می‌توان فرمت جواب معادله را تعیین نمود.

از آنجایی که تحلیل برخی از معادلات ریاضیات مالی یکی از اهداف ما در این رساله بوده است، سعی کردیم این دسته از معادلات را با روش‌های ذکر شده حل و یا کاهش مرتبه دهیم.

در فصل اول، به بیان تعاریف و مفاهیم و قضایای اولیه که در روش تقارن PDE ها مورد نیاز است پرداخته شده است. در فصل دوم تعاریف و مقدمات مورد نیاز در قوانین پایستگی PDE ها را مورد بررسی قرار گرفته است. در فصل سوم به بیان مقدماتی از حسابان کسری پرداخته‌ایم. در فصل چهارم تقارن‌ها و قوانین پایستگی را برای مسایل معادلات دیفرانسیل کسری (FDE) بیان کردیم و بالاخره در فصل پنجم به کمک روش‌های فصل چهارم معادله فوکر-پلانک را که در ریاضیات مالی مورد تحلیل قرار می‌گیرد را حل نمودیم.

فهرست مطالب

ث	فهرست جداول
۱	۱ گذری بر مفاهیم هندسی گروه‌های لی
۱	۱.۱ مفاهیم مقدماتی
۶	۱.۱.۱ عمل گروه بینهایت کوچک
۸	۲.۱.۱ جدول جابجاگر
۹	۳.۱.۱ ناوردایی بینهایت کوچک
۱۰	۲.۱ فضای جت و امتداد دهی
۱۲	۱.۲.۱ توابع ناوردا
۱۳	۲.۲.۱ امتداد دهی عمل گروه
۱۴	۳.۲.۱ تبدیلات نقطه‌ای
۱۵	۴.۲.۱ تبدیلات افقی
۱۵	۵.۲.۱ تبدیلات عمودی
۱۵	۶.۲.۱ تبدیلات تصویری
۱۵	۷.۲.۱ تبدیلات برخوردی
۱۸	۸.۲.۱ تبدیلات مراتب بالاتر
۲۲	۳.۱ تقارن‌های معادلات دیفرانسیل
۲۶	۴.۱ ساختن جواب‌های ناوردای گروهی
۳۱	۵.۱ تقارن‌های تقریبی
۳۳	۱.۵.۱ معادلات تقریبی لی
۳۶	۲.۵.۱ نگاشت نمایی تقریبی
۴۱	۳.۵.۱ محاسبه تقارن‌های تقریبی
۴۱	۴.۵.۱ مثال‌های از تقارن‌های تقریبی
۴۵	۶.۱ نرم‌افزار
۴۶	۱.۶.۱ ضرایب ارائه شده در رابطه (۶۷.۱)
۴۶	۲.۶.۱ تقارن

۴۸	تقارن تقریبی	۳.۶.۱
۵۱	قوانین پایستگی	۲
۵۱	تعاریف و مفاهیم مقدماتی	۱.۲
۵۳	روش مستقیم برای یافتن قوانین پایستگی	۲.۲
۵۵	الگوریتم مستقیم	۱.۲.۲
۵۷	محاسبه قوانین پایستگی به کمک قضیه نوتر	۳.۲
۵۷	معادلات اوپلر-لاگرانژ	۱.۳.۲
۵۸	الگوریتم نوتر از قضیه نوتر	۲.۳.۲
۶۱	تعمیم قضیه نوتر	۳.۳.۲
۶۴	الگوریتم روش هرمان-پل	۴.۲
۶۸	روش ابراگیموف	۵.۲
۷۵	مقایسه بین روش‌های بیان شده در محاسبه قوانین پایستگی	۶.۲
۷۵	محاسبه قوانین پایستگی به روش مستقیم با کمک نرم افزار	۷.۲
۷۷	عامل انتگرال	۱.۷.۲
۷۹	مروری بر تاریخچه‌ی محاسبات کسری و تعاریف و مقدمات اولیه	۳
۷۹	مقدمه	۱.۳
۸۱	کاربردی از حسابان کسری	۲.۳
۸۳	توابع پرکاربرد در حسابان کسری	۳.۳
۸۷	انتگرال کوشی	۴.۳
۸۸	خواص انتگرال و مشتق کسری ریمن-لیوویل	۱.۴.۳
۹۰	مشتق و انتگرال کسری لیوویل	۲.۴.۳
۹۱	خواص مشتق کسری کاپوتو	۳.۴.۳
۹۲	مشتق کسری ریمن-لیوویل اصلاح شده	۴.۴.۳
۹۵	تقارن‌های معادلات کسری	۴
۹۷	تقارن‌های لی معادلات دیفرانسیل معمولی کسری (FODE)	۱.۴
۱۰۰	تقارن‌های نقطه‌ای معادلات دیفرانسیل جزئی کسری (FPDE)	۲.۴
۱۰۳	محاسبه گروه تقارنی در معادلات هری-دایم، زاخاروف و آبیاری	۱.۲.۴
۱۰۷	روش‌های گوناگون در حل معادلات دیفرانسیل کسری	۳.۴
۱۰۷	یافتن جواب به کمک تقارن‌ها	۴.۴
۱۰۸	روش جواب‌های ناوردا	۱.۴.۴
۱۱۶	روش زیر معادله	۲.۴.۴
۱۱۹	زیر فضای ناوردا	۳.۴.۴

۱۲۴	بررسی روش‌های ارائه شده برای حل معادلات کسری	۵.۴
۱۲۵	قوانین بقا برای معادلات دیفرانسیل کسری	۶.۴
۱۲۶	قضیه نوتر برای معادلات کسری	۷.۴
۱۲۹	محاسبه قوانین پایداری برای معادلات کسری بدون حضور لاگرانژی	۸.۴
۱۳۰	عملگر کسری نوتر	۱.۸.۴
۱۳۷	نرم افزار	۹.۴

۵ تقارن و ریاضیات مالی

۱۴۵	سبد سهام	۱.۵
۱۴۶	قردهای اختیار معامله	۱.۱.۵
۱۴۸	پوشش ریسک با استفاده از اختیار معاملات	۲.۱.۵
۱۵۰	حرکت براونی	۲.۵
۱۵۱	مدل بلک شولز	۳.۵

۱۶۱ مراجع

۱۷۳ واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

۱۷۷ واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فهرست جداول

۲۴	جدول ضرایب و تک جمله‌ای‌ها	۱.۱
۲۵	براکت لی	۲.۱
۴۳	گروه‌های تقریبی	۳.۱
۵۶	قوانین پایستگی معادله هری-دایم	۱.۲
۶۸	چگالی و شارهای متناظر با ضرایب Λ_i با استفاده از روش هرمان-پل	۲.۲
۹۰	مشتق ریمان-لیوویل تعدادی از توابع پرکاربرد	۱.۳
۹۲	مشتق کاپوتو تعدادی از توابع پرکاربرد	۲.۳
۹۳	مقایسه‌ی مشتق کاپوتو و ریمان-لیوویل	۳.۳
۱۱۲	حالات مختلف معادله Korteweg – deVries (KdV)	۱.۴
۱۱۳	تقارن‌های مختلف معادله (۸۱.۴) به ازای ۳ حالت متفاوت $f(u)$	۲.۴
۱۱۴	معادلات مشخصه و جواب‌های ناوردا	۳.۴
۱۱۶	انواع حالت‌های کاهش مرتبه یافته از معادله (۸۱.۴)	۴.۴
۱۲۵	ویژگی هر سه روش، ناوردها و زیرمعادله و زیرفضای ناوردا	۵.۴
۱۳۴	مؤلفه‌های قوانین پایستگی برای معادله (۱۵۵.۴)	۶.۴
۱۳۵	مؤلفه‌های قوانین پایستگی برای معادله (۱۵۶.۴)	۷.۴
۱۳۶	مؤلفه‌های قوانین پایستگی برای معادله (۱۵۷.۴)	۸.۴
۱۳۷	صورت‌های مختلف معادله آبیاری	۹.۴
۱۴۰	مؤلفه‌های قوانین پایستگی برای معادله حالت (۱)	۱۰.۴
۱۴۱	مؤلفه‌های قوانین پایستگی برای معادله حالت (۲)	۱۱.۴
۱۴۲	مؤلفه‌های قوانین پایستگی برای معادله حالت (۳)	۱۲.۴
۱۴۳	مؤلفه‌های قوانین پایستگی برای معادله حالت (۴)	۱۳.۴

فصل ۱

گذری بر مفاهیم هندسی گروه‌های لی

۱.۱ مفاهیم مقدماتی

مطالعه بر روی گروه‌های لی در اواخر قرن نوزدهم توسط ریاضی‌دان نوروژی، سوفس لی با الهام از روش کار ریاضی‌دان فرانسوی، اواریست گالوا^۱ که مطالعات و مقالاتی در زمینه نظریه گروه‌ها داشت و از آن برای تحلیل معادلات چند جمله‌ای استفاده کرده بود، انجام شد.

عملکرد لی در ابتدا مبتنی بر انتگرال‌گیری از معادلات دیفرانسیل بود. در ادامه او نظریه معادلات دیفرانسیل را براساس مفهومی که امروزه به بخشی از گروه‌های لی شناخته می‌شود، گسترش داد. این گروه‌ها علاوه بر ریاضیات در شاخه‌های مختلف علوم به کار گرفته می‌شوند، شاخه‌هایی چون آنالیز توابع خاص، نظریه کنترل، مکانیک کوانتوم، نسبیت و غیره. البته شایان ذکر است که گروه‌های لی در بیشتر مواقع با دیدگاه محض خود در ریاضیات به کار برده نمی‌شوند، بلکه گاهی اوقات تحت عنوان گروه تقارنی یک دستگاه معادلات دینامیکی از معادلات دیفرانسیل ظاهر می‌شوند و به طور مستقیم یا غیر مستقیم رفتار دستگاه را تحلیل میکنند.

لی در مطالعاتش اساساً یک نسخه موضعی از گروه‌های لی را به کار برد که امروزه به عنوان گروه‌های لی موضعی به آن اطلاق می‌شود. در این فصل به معرفی کاربردهای نظریه گروه‌های لی می‌پردازیم. روش گروه‌های لی اغلب در دسته‌بندی معادلات دیفرانسیل، حل معادلات دیفرانسیل، رسیدن به جواب‌های ناوردا و قوانین بقا کاربردهای فراوانی در فیزیک و ریاضیات دارد.

مطالعه‌ی این نوشتار مستلزم اشراف داشتن به هندسه منیفلدها است که در بیشتر کتاب‌های پایه هندسه یافت

^۱Évariste Galois

می‌شود. خواننده محترم در صورت لزوم می‌تواند به یکی از منابع [۷۷، ۹۸، ۹۹] مراجعه نماید.

تعریف ۱.۱.۱. یک گروه لی r -پارامتری، منیفلدی هموار r -بعدی چون G است به طوریکه دارای ساختار جبری گروه بوده و دو نگاشت ضرب و وارون‌ساز که با ضابطه‌های زیر تعریف می‌شوند، هموار باشند.

$$\begin{aligned} m : G \times G &\rightarrow G, & i : G &\rightarrow G \\ m(g.h) &= g.h & i(g) &= g^{-1} \end{aligned} \quad (1.1)$$

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید G یک گروه لی و $H \subseteq G$ یک زیرمجموعه آن باشد. H یک زیرگروه لی است هرگاه اولاً H یک زیرگروه G نسبت به عمل G بوده و ثانیاً H خود یک زیر منیفلد G باشد. همچنین لازم است که دو نگاشت i, m تعریف شده برای H نیز هموار باشند.

در ادامه به منظور تعمیم مفهوم زیرگروهی قضیه زیر را از [۱۲۰] بیان می‌نماییم.

قضیه ۱.۱.۱. هر زیرگروه بسته یک گروه لی یک زیرگروه لی است.

مثال ۱.۱.۱. هر یک از منیفلدهای زیر یک گروه لی محسوب می‌شوند:

- ◀ فضای اقلیدسی \mathbb{R}^n تحت عمل جمع برداری $(x, y) \mapsto x + y$ و نگاشت وارون $x \mapsto -x$ یک گروه لی می‌باشد.
- ◀ دایره S^1 تحت عمل جمع یک گروه است، که با نگاشت‌های هموار زیر تشکیل گروه لی می‌دهد:

$$\begin{aligned} m : S^1 \times S^1 &\rightarrow S^1, & i : S^1 &\rightarrow S^1, \\ m(\theta_1, \theta_2) &= \theta_1 + \theta_2 \pmod{2\pi}, & i(\theta) &= -\theta \pmod{2\pi}, \end{aligned}$$

- ◀ گروه $GL(n, \mathbb{R})$ متشکل از کلیه ماتریس‌های حقیقی وارون‌پذیر از مرتبه n ، با نگاشت‌های ضرب معمولی ماتریس‌ها و وارون هر ماتریس، که هر دو هموار می‌باشند؛ تشکیل یک گروه لی را می‌دهد.

تعریف ۳.۱.۱. یک گروه تبدیل مثل G که روی یک منیفلد مانند M عمل می‌کند، دو شرط اساسی دارد: اول آنکه G گروه لی باشد و دوم آنکه نگاشت

$$\begin{aligned} \phi : G \times M &\longrightarrow M \\ (g, x) &\longmapsto g.x, \end{aligned} \quad (2.1)$$

در دو ویژگی زیر صدق کنند:

$$(g.h).x = g.(h.x), \quad e.x = x,$$

در این صورت گوییم G از سمت چپ روی M عمل می‌کند و به همین ترتیب می‌توان عمل از راست را نیز تعریف کرد.

تعریف ۴.۱.۱. به ازای هر عضو $g \in G$ یک تبدیل گفته می‌شود، اگر G یک گروه تبدیل روی M باشد، در این صورت به ازای هر تبدیل g نگاشت ϕ را می‌توان به اختصار به صورت $\phi_g : M \rightarrow M$ نمایش داد که در آن ϕ_g یک دیفئومورفیسم است و به اختصار می‌توان نوشت $\phi_g = g$.

اگر $x \in M$ باشد آنگاه مجموعه تمام تبدیلات x تحت گروه تبدیلات G یعنی

$$G.x = \{g.x \mid g \in G\}, \quad (3.1)$$

را مدار x تحت تبدیل G می‌نامیم.

تعریف ۵.۱.۱. هرگاه گروه تبدیلات G روی M تنها یک مدار تولید کند، عمل را متعدی می‌نامند.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه تبدیلات باشد که روی منیفلد M عمل می‌کند، در این صورت تابع $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ را یک تابع G -ناوردای حقیقی نامند به قسمی که روی یک زیر مجموعه باز $U \subset M$ برای هر $x \in U$ و هر تبدیل $g \in G$ داشته باشیم:

$$F(g.x) = F(x).$$

به عنوان مثال فرض کنیم $M = \mathbb{R}^2$ باشد و G^1 گروهی به صورت زیر باشد

$$G^1 : (x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda y), \quad \lambda > 0,$$

که اصطلاحاً آن را گروه تجانس می‌نامند.

در این صورت تابع $\zeta(x, y) = \frac{x}{y}$ تابعی ناوردای روی $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ می‌باشد. در حالت کلی اگر برای هر $x \in U$ و $g \in G$ داشته باشیم، $F(g.x) = F(x)$ آنگاه F را ناوردای فراگیر می‌نامیم.

اگر G یک گروه لی باشد در این صورت میدان‌های برداری خاصی روی آن وجود دارند که تحت عمل گروه ناوردای هستند. این نوع از میدان‌های برداری یک فضای برداری می‌سازند که به آن جبرلی G یا مجموعه مولدهای بینهایت کوچک گروه G می‌گویند. این خاصیت که هر ویژگی که در گروه لی مفروض وجود دارد در جبرلی آن نیز دیده می‌شود سبب می‌شود تا در بسیاری از موارد به جای گروه لی از جبر لی مربوطه استفاده شود.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید G یک گروه تبدیلات روی منیفلد M باشد، در این صورت میدان برداری \mathfrak{v} روی M را یک میدان برداری G -ناوردای چپ گوئیم، هرگاه به ازای هر $g \in G$ و $p \in M$ که $g.p$ تعریف شود، داشته باشیم

$$g_*(\mathfrak{v}_p) = \mathfrak{v}_{g.p}$$

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید G گروه لی باشد که روی خودش از چپ (راست) عمل می‌کند در این صورت به مجموعه تمام میدان‌های برداری ناوردای چپ (راست)، جبرلی چپ (راست) G نامیده می‌شود و با نماد \mathcal{G} نمایش داده می‌شود. در [۷۷] ثابت شده است که نگاشتی ایزومورف بین جبرلی چپ و جبرلی راست برقرار است.

مثال ۲.۱.۱. به عنوان مثال برای جبرهای لی می‌توان به گروه لی \mathbb{R}^n اشاره کرد که جبرلی آن همان \mathbb{R}^n می‌باشد. در [۹۹] به کمک اطلاعاتی از هندسه منیفلدها مثال‌های متعددی از جبرهای لی متناظر با گروه‌های لی متفاوت اشاره شده است.

تعریف ۹.۱.۱. اگر G یک گروه لی و \mathcal{G} جبرلی متناظر با آن باشد؛ در این صورت توسط نگاشت نمایی $\exp : \mathcal{G} \rightarrow G$ هر میدان برداری $\mathfrak{v} \in \mathcal{G}$ به یک منحنی $\exp(\varepsilon \mathfrak{v})$ در گروه لی متناظر می‌شود. چنانچه U یک همسایگی $0 \in \mathcal{G}$ باشد و V یک همسایگی $e \in G$ ، آنگاه \exp یک دیفیئومورفیسم بین U و V برقرار می‌کند.

تعریف ۱.۰.۱.۱. فرض کنیم T_ε تبدیل معکوس‌پذیر وابسته به پارامتر ε باشد که در صفحه (x, y) به صورت زیر عمل می‌کند:

$$\begin{aligned} T_\varepsilon : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (\bar{x}, \bar{y}), \end{aligned} \quad (۴.۱)$$

به طوری‌که $\bar{x} = f(x, y, \varepsilon)$ و $\bar{y} = g(x, y, \varepsilon)$ و توابع f و g در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$f \Big|_{\varepsilon=0} = x, \quad g \Big|_{\varepsilon=0} = y, \quad (۵.۱)$$

و همچنین فرض شده است که f و g توابعی هستند که روی دامنه مورد بررسی پیوسته‌اند. در این صورت مجموعه G از تبدیلات به فرم \bar{x} و \bar{y} تشکیل گروه تبدیلات یک پارامتری می‌دهند به شرطی که اولاً تبدیل T_0 تبدیل همانی باشد و همچنین تبدیل وارون T_ε^{-1} موجود باشد. و $T_\varepsilon T_\delta \in G$ و همچنین

$$T_\varepsilon T_\delta = T_{\varepsilon+\delta}, \quad (۶.۱)$$

به این صورت که

$$\begin{aligned} f(f(x, y, \varepsilon), g(x, y, \varepsilon), \delta) &= f(x, y, \varepsilon + \delta), \\ g(f(x, y, \varepsilon), g(x, y, \varepsilon), \delta) &= g(x, y, \varepsilon + \delta). \end{aligned} \quad (۷.۱)$$

در شرایط عملی رابطه (۷.۱) به ازای مقادیر به اندازه کافی کوچک ε و δ برقرار است، لذا G را گروه محلی نیز می‌نامند.

مثال ۳.۱.۱. گروه دوران که به صورت

$$x_1 = x \cos(\varepsilon) - y \sin(\varepsilon), \quad y_1 = x \sin(\varepsilon) + y \cos(\varepsilon), \quad (۸.۱)$$

تعریف می‌شود، یک گروه تبدیل یک پارامتری می‌باشد. برای نشان دادن این موضوع کافی است موارد زیر را بررسی کنیم.

◀ اگر $\varepsilon = 0$ آنگاه $x_1 = x$ و $y_1 = y$.

◀ با قرار دادن $-\varepsilon$ به جای پارامتر ε وارون تبدیل نیز مشخص می‌شود.

◀ اگر $x_2 = x_1 \cos(\delta) - y_1 \sin(\delta)$ و $y_2 = x_1 \sin(\delta) + y_1 \cos(\delta)$ آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} x_2 &= (x \cos(\varepsilon) - y \sin(\varepsilon)) \cos(\delta) - (x \sin(\varepsilon) + y \cos(\varepsilon)) \sin(\delta) \\ &= x \cos(\varepsilon + \delta) - y \sin(\varepsilon + \delta), \\ y_2 &= (x \cos(\varepsilon) - y \sin(\varepsilon)) \sin(\delta) + (x \sin(\varepsilon) + y \cos(\varepsilon)) \cos(\delta) \\ &= x \sin(\varepsilon + \delta) + y \cos(\varepsilon + \delta), \end{aligned}$$

بنابراین خاصیت آخر نیز برقرار است.

قضیه ۲.۱.۱. فرض کنید G یک گروه لی همبند با جبرلی \mathcal{G} باشد. در این صورت برای هر $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathcal{G}$ هر عضو G مانند g قابل بیان به صورت ترکیب نگاشت‌های نمایی می‌باشد، به این معنا که

$$g = \exp(\mathbf{v}_1) \circ \dots \circ \exp(\mathbf{v}_k).$$

تعبیر قضیه آن است که با داشتن اعضای یک جبرلی می‌توان با محاسبه نگاشت‌های نمایی متناظر با هر عضو و ترکیب آن‌ها در هم، ضابطه گروه تبدیل را به طور موضعی بدست آورد. برهان این قضیه در [۶۸] آمده است.

چنانچه مولد گروه تبدیل را داشته باشیم به کمک سری تیلور تابع \exp می‌توان گروه تبدیل مربوطه را به صورت زیر فرض کنیم:

$$\bar{x} = e^{\varepsilon X}(x), \quad \bar{y} = e^{\varepsilon X}(y), \quad (9.1)$$

به طوریکه

$$e^{\varepsilon X} = \exp(\varepsilon X) = 1 + \frac{\varepsilon}{1!}X + \frac{\varepsilon^2}{2!}X^2 + \dots + \frac{\varepsilon^s}{s!}X^s + \dots$$

مثال ۴.۱.۱. برای مولد

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y},$$

می‌خواهیم به کمک نگاشت نمایی، گروه تبدیل آن را بنویسیم. با توجه به عبارت (۹.۱) روابط زیر برقرار می‌باشند:

$$\begin{aligned} X(x) &= x^2, & X(y) &= xy, \\ X^2(x) &= X(X(x)) = X(x^2) = 2!x^3, & X^2(y) &= X(xy) = yX(x) + xX(y) = 2!yx^2, \\ X^3(x) &= X(2!x^3) = 3!x^4, & X^3(y) &= 2!(yX(x^2) + x^2X(y)) = 3!yx^3, \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

با در نظر گیری موارد بالا می‌توان گفت:

$$X^s(x) = s!x^{s+1}, \quad (10.1)$$

$$X^s(y) = s!yx^s, \quad (11.1)$$

لذا به کمک استقرا می‌توان نشان داد:

$$\begin{aligned} X^{s+1}(x) &= (s+1)!x^{s+2}, \\ X^s(y) &= (s+1)!yx^{s+1}. \end{aligned} \quad (12.1)$$

با جایگذاری عبارات فوق در بسط‌های $e^{\varepsilon X}(x)$ و $e^{\varepsilon X}(y)$ به عبارات زیر خواهیم رسید:

$$e^{\varepsilon X}(x) = x + \varepsilon x^2 + \dots + \varepsilon^s x^{s+1} + \dots$$

$$e^{\varepsilon X}(y) = y + \varepsilon yx + \dots + \varepsilon^s yx^s + \dots$$

این بار هم مجدد به کمک بسط تیلور سمت راست عبارات فوق را به ترتیب به صورت:

$$\frac{x}{1 - \varepsilon x}, \quad |\varepsilon x| < 1,$$

و

$$\frac{y}{1 - \varepsilon y}, \quad |\varepsilon y| < 1,$$

می‌نویسیم و لذا طبق رابطه (۹.۱) به گروه تبدیلات مورد نظر زیر خواهیم رسید:

$$\bar{x} = \frac{x}{1 - \varepsilon x}, \quad \bar{y} = \frac{y}{1 - \varepsilon y}. \quad (۱۳.۱)$$

۱.۱.۱ عمل گروه بینهایت کوچک

میدان برداری \mathbf{v} روی منیفلد M ، یک بردار مماس \mathbf{v}_x را به ازای هر نقطه $x \in M$ اختصاص می‌دهد به طوریکه x به طور هموار از نقطه‌ای به نقطه دیگر تغییر می‌کند. در مختصات موضعی (x^1, \dots, x^m) یک میدان برداری دارای فرم

$$\mathbf{v} \Big|_x = \xi^1(x) \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2(x) \frac{\partial}{\partial x^2} + \dots + \xi^m(x) \frac{\partial}{\partial x^m}, \quad (۱۴.۱)$$

است که هر $\xi^i(x)$ تابعی هموار روی x می‌باشد. یک مثال مناسب از میدان برداری را می‌توان میدان سرعت در یک سیاله یکنواخت در زیر مجموعه باز $M \subseteq \mathbb{R}^3$ در نظر گرفت، که در هر نقطه $(x, y, z) \in M$ بردار $\mathbf{v} \Big|_{(x,y,z)}$ نشان دهنده سرعت ذرات سیال که از نقطه (x, y, z) عبور می‌کنند، می‌باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. خم انتگرال از میدان برداری \mathbf{v} یک خم پارامتری $x = \Phi(\varepsilon)$ است که بردار مماس آن در هر نقطه منطبق با مقدار \mathbf{v} در همان نقطه است، یعنی به ازای هر ε داشته باشیم:

$$\dot{\Phi}(\varepsilon) = \mathbf{v} \Big|_{\Phi(\varepsilon)}.$$

در مختصات موضعی که $x = \Phi(\varepsilon) = (\Phi^1(\varepsilon), \dots, \Phi^m(\varepsilon))$ می‌توان گفت $\Phi(\varepsilon)$ باید یک جواب از دستگاه مستقل از معادلات دیفرانسیل

$$\frac{dx^i}{d\varepsilon} = \xi^i(x), \quad i = 1, \dots, m, \quad (۱۵.۱)$$

باشد که در آن $\xi^i(x)$ ها مضاربی از \mathbf{v} در x هستند. برای $\xi^i(x)$ های هموار، قضیه یکتایی و وجود برای دستگاهی از معادلات دیفرانسیل به ازای شرط اولیه $\Phi(0) = x_0$ تضمین می‌کند که جواب یکتا برای (۱۵.۱) موجود باشد. این مطلب نشان دهنده خم انتگرال ماکسیمال واحد $\Phi : I \rightarrow M$ گذرنده از میان نقطه $\Phi(0) = x_0 \in M$ است. شایان ذکر است که ماکسیمال به این معناست که این خم مشمول در هیچ خم انتگرال بزرگتری نیست، یعنی اگر $\bar{\Phi} : \bar{I} \rightarrow M$ خم انتگرال دیگری با شرط اولیه $\bar{\Phi}(0) = x_0$ باشد، آنگاه به ازای هر $\varepsilon \in \bar{I} \subset I$ داشته باشیم:

$$\bar{\Phi}(\varepsilon) = \Phi(\varepsilon).$$

فرض کنیم \mathbf{v} یک میدان برداری باشد، خم انتگرال پارامتری شده در طول $x \in M$ را با $\psi(\varepsilon, x)$ نشان می‌دهیم و ψ را شار تولید کننده \mathbf{v} می‌نامیم. بنابراین برای هر $x \in M$ و $\varepsilon \in I_x$ به طوریکه I_x غیر بدیهی و شامل 0 باشد؛ $\psi(\varepsilon, x)$ یک نقطه روی خم انتگرال عبور کننده از x روی M خواهد بود.
شار یک میدان برداری خواص پایه‌ای زیر را دارد:

$$\psi(\delta, \psi(\varepsilon, x)) = \psi(\delta + \varepsilon, x), \quad (16.1)$$

$$\psi(0, x) = x, \quad (17.1)$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} \psi(\varepsilon, x) = \mathbf{v}|_{\psi(\varepsilon, x)}. \quad (18.1)$$

رابطه (18.1) به طور ساده بیان می‌کند که میدان برداری \mathbf{v} مماس بر خم $\psi(\varepsilon, x)$ در نقطه ثابت x است؛ و (17.1) شرط اولیه روی خم انتگرال می‌باشد و از (16.1) نیز یکتایی جواب برای سیستم‌های معادلات دیفرانسیل معمولی بدست می‌آید. با مقایسه خواص (17.1) و (16.1) با خاصیت‌های گروه تبدیلات مشاهده می‌کنیم که شار تولید شده توسط میدان برداری مشابه گروه عمل می‌کند که به آن عمل گروه یک پارامتری گویند، در این صورت میدان برداری \mathbf{v} را مولد بینهایت کوچک از عمل گروه گفته و بنابر قضیه تیلور در حالت موضعی داریم:

$$\psi(\varepsilon, x) = x + \varepsilon \xi(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (19.1)$$

که $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^m)$ ضرایب \mathbf{v} می‌باشند.

از طرفی اگر $\psi(\varepsilon, x)$ عمل تبدیل گروه یک پارامتری روی M باشد، آنگاه مولد بینهایت کوچک آن به وسیله محدود کردن (18.1) در لحظه $\varepsilon = 0$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{v}|_x = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \psi(\varepsilon, x). \quad (20.1)$$

بنابراین تناظری یک به یک بین انتقالات گروه یک پارامتری و مولدهای بینهایت کوچک آن وجود دارد:

$$\exp(\varepsilon \mathbf{v})x \equiv \psi(\varepsilon, x). \quad (21.1)$$

لذا روابط (16.1)، (17.1) و (18.1) را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$\exp[(\delta + \varepsilon)\mathbf{v}]x = \exp(\delta\mathbf{v}) \exp(\varepsilon\mathbf{v})x, \quad (22.1)$$

$$\exp(0\mathbf{v})x = x, \quad (23.1)$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} [\exp(\varepsilon\mathbf{v})x] = \mathbf{v}|_{\exp(\varepsilon\mathbf{v})x}, \quad (24.1)$$

و رابطه (20.1) نیز به صورت زیر برقرار است:

$$\mathbf{v}|_x = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \psi(\varepsilon, x) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \exp(\varepsilon\mathbf{v})x, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{G}, \quad (25.1)$$

میدان برداری \mathbf{v} مولد بینهایت کوچک از عمل گروه G نامیده می‌شود.

مثال ۵.۱.۱. برای گروه دوران $SO(2)$ با نگاشت

$$SO(2) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\varepsilon) & -\sin(\varepsilon) \\ \sin(\varepsilon) & \cos(\varepsilon) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos(\varepsilon) - y \sin(\varepsilon) \\ x \sin(\varepsilon) + y \cos(\varepsilon) \end{pmatrix}, \quad (26.1)$$

مولد بینهایت کوچک در حالت کلی به فرم $\mathbf{v} = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y$ است، به طوریکه:

$$\begin{aligned} \xi(x, y) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} (x \cos(\varepsilon) - y \sin(\varepsilon)) = -y, \\ \eta(x, y) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} (x \sin(\varepsilon) + y \cos(\varepsilon)) = x, \end{aligned}$$

لذا مولد بینهایت کوچک گروه دوران به صورت $\mathbf{v} = -y\partial_x + x\partial_y$ می‌باشد.

۲.۱.۱ جدول جابجاگر

یکی از روش‌های ساده برای نمایش ساختار جبرلی، نوشتن آن به شکل جدولی می‌باشد. اگر \mathcal{G} یک جبرلی r -بعدی باشد و $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ پایه‌ای برای آن تشکیل دهند، آنگاه جدول جابجاگر برای \mathcal{G} یک جدول $r \times r$ تایی است که درایه (i, j) ام آن بیانگر براکت لی $[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j]$ می‌باشد. توجه شود که برای میدان‌های برداری دلخواه \mathbf{v}_1 و \mathbf{v}_2 که به صورت زیر می‌باشند:

$$\mathbf{v}_1 = \sum_{i=1}^m \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \mathbf{v}_2 = \sum_{i=1}^m \eta^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

در این صورت

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M),$$

عملگر براکت لی دو میدان برداری \mathbf{v}_1 و \mathbf{v}_2 می‌باشد و به صورت

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left\{ \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right\} \frac{\partial}{\partial x^i},$$

تعریف می‌شود. رابطه زیر نحوه عمل براکت لی بر تابع f را بیان می‌کند:

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]f &= \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2f - \mathbf{v}_2\mathbf{v}_1f, \\ [f\mathbf{v}_1, g\mathbf{v}_2] &= fg[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] + (f\mathbf{v}_1g)\mathbf{v}_2 - (g\mathbf{v}_2f)\mathbf{v}_1, \end{aligned} \quad (27.1)$$

قضیه ۳.۱.۱. برخی از خواص براکت لی به شرح زیر می‌باشد:

◀ دو-خطی بودن:

$$\begin{aligned} [a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] &= a[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3] + b[\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] & \forall a, b \in \mathbb{R}, \\ [\mathbf{v}_3, a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2] &= a[\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1] + b[\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2] & \forall a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

◀ پادمتقارن بودن:

$$[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = -[\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1].$$

◀ اتحاد ژاکوبی:

$$[\mathbf{v}_1, [\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]] + [\mathbf{v}_2, [\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1]] + [\mathbf{v}_3, [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]] = 0.$$

۳.۱.۱ نوردایی بینهایت کوچک

قضیه زیر که به محک نوردایی شناخته می‌شود کمک مهمی برای تشخیص گروه‌های تقارن دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل در اختیارمان قرار می‌دهد.

قضیه ۴.۱.۱. [۹۸] فرض کنید G یک گروه همبند از تبدیلات باشد که روی منیفلد M عمل می‌کند. تابع $I : M \rightarrow \mathbb{R}$ تحت G نورداست، اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in M$ و هر مولد بینهایت کوچک $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$ داشته باشیم:

$$\mathbf{v}(I) = 0. \quad (۲۸.۱)$$

بنابراین بر اساس قضیه (۴.۱.۱)، نوردای $u = I(x)$ از گروه یک پارامتری با مولد بینهایت کوچک

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^m \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

در معادلات دیفرانسیل جزئی همگن مرتبه اول خطی زیر صدق می‌کند:

$$\sum_{i=1}^m \xi^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i} = 0. \quad (۲۹.۱)$$

جواب‌های معادله (۲۹.۱) به وسیله روش مشخصه‌ها تعیین می‌گردد. معادله دیفرانسیل جزئی را با دستگاه مشخصه از معادلات دیفرانسیل معمولی زیر عوض می‌کنیم:

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)} = \frac{dx^2}{\xi^2(x)} = \cdots = \frac{dx^m}{\xi^m(x)}. \quad (۳۰.۱)$$

جواب عمومی معادله (۳۰.۱) را می‌توان به طور موضعی به شکل $I_1(x) = c_1, \dots, I_{m-1}(x) = c_{m-1}$ نوشت که در آن c_i ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند. توابع I_1, \dots, I_{m-1} یک مجموعه کامل از نورداهای مستقل تابعی از گروه یک پارامتری تولید شده به وسیله \mathbf{v} می‌باشند.

مثال ۶.۱.۱. گروه یک پارامتری تولید شده به وسیله میدان برداری

$$\mathbf{v} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + (1 + z^2) \frac{\partial}{\partial z}, \quad (۳۱.۱)$$

را در نظر بگیرید. گروه یک-پارامتری (شار) آن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(x, y, z) \mapsto \left(x \cos(\varepsilon) - y \sin(\varepsilon), x \sin(\varepsilon) + y \cos(\varepsilon), \frac{\sin(\varepsilon) + z \cos(\varepsilon)}{\cos(\varepsilon) - z \sin(\varepsilon)} \right), \quad (۳۲.۱)$$

توجه کنید که اگر نقطه (x, y, z) را ثابت در نظر بگیریم، آنگاه (۳۲.۱) خم انتگرال‌گذرنده از این نقطه را پارامتری می‌کند. دستگاه مشخصه (۳۰.۱) برای این میدان برداری عبارت است از:

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{1 + z^2}. \quad (۳۳.۱)$$

معادله اول $\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}$ ، به یک معادله دیفرانسیل معمولی تفکیک‌پذیر ساده $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$ کاهش می‌یابد، که جواب عمومی آن به صورت $x^2 + y^2 = c_1$ است که c_1 ثابت انتگرال است. بنابراین شعاع دایره $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ نوردای اول می‌باشد.

برای حل معادله مشخصه دوم $\frac{dy}{x} = \frac{dz}{1+z^2}$ ، کافی است x را با $\sqrt{r^2 - y^2}$ جایگزین کنیم و با r همچون یک ثابت عمل نماییم. در این صورت جواب برابر است با

$$\tan^{-1}(z) - \sin^{-1}\left(\frac{y}{r}\right) = \tan^{-1}(z) - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = c_2,$$

و لذا با محاسبات مثلثاتی $w = \frac{xz-y}{yz+x}$ نوردای دوم می‌باشد.

قضیه ۵.۱.۱. [۹۹] گروه لی همبند G یک گروه تقارنی از دستگاه معادلات جبری

$$F_1(x) = \dots = F_k(x) = 0,$$

می‌باشد اگر و تنها اگر برای هر مولد بینهایت کوچک $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$ داشته باشیم:

$$\mathbf{v}[F_\nu] = 0, \quad \nu = 1, \dots, k.$$

در ادامه نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان از میدان‌های برداری برای یافتن گروه‌های تقارنی معادلات دیفرانسیل استفاده کرد. برای این منظور ابتدا فضای کل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۲.۱.۱. فضای کل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با p متغیر مستقل $x = (x^1, \dots, x^p)$ و q متغیر وابسته $u = (u^1, \dots, u^q) \in U$ یک منیفلد حاصلضربی به صورت $E = X \times U$ به ترتیب با چارتهای x و u می‌باشد. به طور موضعی داریم $E = X \times U \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ که آن را فضای کل گوییم.

۲.۱ فضای جت و امتداد دهی

از آنجایی که همواره علاقه فراوانی برای مطالعه تقارن‌های معادلات دیفرانسیل وجود دارد، نه تنها به دانستن چگونگی عمل گروه نیاز داریم، بلکه به چگونگی عمل آنها بر متغیرهای مستقل و وابسته نیز احتیاج داریم. این کار که توسط تعریف عمومی فضای جت مرتبط با فضای کل از متغیرهای مستقل و وابسته تشکیل می‌شود، انجام خواهد شد. مختصات فضای جت به عنوان مشتق‌های متغیرهای وابسته ظاهر می‌گردد. در ادامه فرمول‌بندی مستقیمی از این فضاها را ارائه می‌دهیم.

برای شروع می‌توان تابعی حقیقی مقدار مانند $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = f(x^1, x^2, \dots, x^p)$ را در نظر گرفت. می‌توان نشان داد f دارای $p_k = \binom{p+k-1}{k}$ مشتق جزئی متمایز از مرتبه k نسبت به متغیرهایش می‌باشد، که این مشتقات به صورت

$$\partial_J f(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x^{j_1} \partial x^{j_2} \dots \partial x^{j_k}},$$

نمایش داده می‌شوند که با اندیس‌های چندگانه متقارن $J = (j_1, \dots, j_k)$ $1 \leq j_k \leq p$ از مرتبه $k \neq J$ نماد گذاری شده است. حال اگر حالت کلی تابع حقیقی که در بالا مطرح کردیم را به صورت $f : X \rightarrow U$ در نظر بگیریم به طوری که f تابعی p متغیره q مقداری باشد و دارای ضابطه زیر باشد:

$$u = f(x) = (f^1(x), \dots, f^q(x)),$$

در این صورت به کمک استقرا می‌توان نتیجه گرفت که تعداد مشتقات جزئی تا مرتبه k برای این تابع برابر است با

$$q_k = qp_k = q \binom{p+k-1}{k}.$$

لذا به تعداد $q_k = qp_k$ مختصات متمایز u_j^α $1 \leq \alpha \leq q$ از مشتقات داریم که در نمایش فوق در واقع $u_j^\alpha = \partial_J f^\alpha(x)$ که در آن $u = f(x)$ اگر فضای شامل مشتقات جزئی مرتبه اول را با U_1 و به همین ترتیب فضای مشتقات مرتبه i ام را با U_i نمایش دهیم در این صورت فضای تمام مشتقات تا مرتبه n ام را می‌توان با

$$U^{(n)} := U \times U_1 \times \dots \times U_n,$$

نمایش داد. می‌توان مشاهده کرد که بعد فضای مشتقات تا مرتبه n ام برابر است با

$$q + qp_1 + qp_2 + \dots + pq_n = q \binom{p+n}{n} := qp^{(n)}.$$

اکنون نوبت این است که بعد از این مقدمه فضای جت را تعریف کنیم.

فضای جت عبارت است از فضای اقلیدسی $\mathbf{J}^n = \mathbf{J}^n E = X \times U^{(n)}$ با بعد $p + q \binom{p+n}{n}$ که دارای p متغیر مستقل به صورت x^i و q متغیر وابسته u^α و مشتقات u_j^α که در آن $1 \leq \mathbf{J} \leq n$ و $1 \leq \alpha \leq q$ است.

مثال ۱.۲.۱. تابع $u = f(x, y, z)$ را که شامل سه متغیر مستقل و یک متغیر وابسته می‌باشد را در نظر بگیرید. به منظور یافت $\mathbf{J}^{(2)}$ کافی است که مشتقات جزئی تابع فوق را تا مرتبه دوم بنویسیم، در این صورت داریم:

$$\mathbf{J}^{(2)} = \{(x, y, z; u; u_x, u_y, u_z; u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_{xy}, u_{yz}, u_{xz})\} \simeq \mathbb{R}^8.$$

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید که \mathcal{O} زیر مجموعه‌ای باز در فضای کامل E باشد، و $F(x, u^{(n)})$ تابعی هموار روی $\mathbf{J}^{(n)}(\mathcal{O})$ باشد. منظور از مشتق کامل F نسبت به x^i که آن را با $D_i F(x, u^{(n+1)})$ نمایش می‌دهیم؛ تابعی است هموار، روی $\mathbf{J}^{(n+1)}(\mathcal{O})$ که دارای این ویژگی باشد که هرگاه $u = f(x)$ تابعی هموار باشد، آن‌گاه:

$$D_i F(x, f^{(n+1)}(x)) = \frac{\partial}{\partial x^i} [F(x, f^{(n)}(x))].$$

شایان ذکر است که لم زیر که از قاعده مشتق زنجیری حاصل می‌گردد، فرمول صریحی به منظور محاسبه مشتق کامل در قالب یک عملگر مشتق ارائه می‌نماید [۹۸].

لم ۱.۲.۱. تابع $F(x, u^{(n)})$ را روی فضای جت $\mathbf{J}^{(n)}(\mathcal{O})$ در نظر بگیرید. هرگاه $\mathbf{J} = (j_1, \dots, j_k)$ یک اندیس چندگانه بوده و $u_{\mathbf{J},i}^\alpha = \frac{\partial u_{\mathbf{J}}^\alpha}{\partial x^i}$ باشد، آنگاه:

$$D_i F = \frac{\partial F}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_{\mathbf{J}} u_{\mathbf{J},i}^\alpha \frac{\partial F}{\partial u_{\mathbf{J}}^\alpha}, \quad (۳۴.۱)$$

به‌عنوان مثال، هرگاه $E \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ با مختصات (x, y, u) باشد، آن‌گاه:

$$\begin{aligned} D_x F &= \frac{\partial F}{\partial x} + u_x \frac{\partial F}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial F}{\partial u_x} + u_{xy} \frac{\partial F}{\partial u_y} + u_{xxx} \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} + \dots, \\ D_y F &= \frac{\partial F}{\partial y} + u_y \frac{\partial F}{\partial u} + u_{xy} \frac{\partial F}{\partial u_x} + u_{yy} \frac{\partial F}{\partial u_y} + u_{xyy} \frac{\partial F}{\partial u_{xx}} + \dots, \end{aligned}$$

به ترتیب مشتق کامل F نسبت به x, y می‌باشند. به همین ترتیب، مشتق کامل مراتب بالاتر را می‌توان نسبت به اندیس چندگانه $J = (j_1, \dots, j_k)$ به صورت زیر بیان نمود:

$$D_J = D_{j_1} \cdot D_{j_2} \cdots D_{j_k}.$$

در ادامه تعریف دقیق‌تری از یک دستگاه معادلات دیفرانسیل را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۲.۲.۱. یک دستگاه m معادله دیفرانسیل مرتبه n -ام مانند Δ با فضای کامل E تابعی به صورت

$$\begin{aligned} \Delta : \mathbf{J}^n(E) &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ \Delta_\nu(x, u^{(n)}) &= 0, \quad \nu = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (۳۵.۱)$$

می‌باشد که به صورت زیر می‌توان آن را بازنویسی کرد:

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = (\Delta_1(x, u^{(n)}), \dots, \Delta_m(x, u^{(n)})).$$

در واقع دستگاه (۳۵.۱) یک دستگاه شامل m معادله PDE با p -متغیر مستقل و q -متغیر وابسته است، که به ازای $p = 1$ دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی ODE می‌باشد.

بعد از تعریف فضای جت اکنون نوبت آن است که امتداد یک تابع را تعریف کنیم. در واقع امتداد مرتبه n ام از تابع f عبارت است از فضای جت مرتبه n ام منهای متغیرهای مستقلش، که آن را با نماد $u^{(n)} = f^{(n)}(x)$ نشان می‌دهیم. به این ترتیب $f^{(0)}$ امتداد مرتبه صفرم از تابع f می‌باشد که در واقع همان تابع f است.

مثال ۲.۲.۱. برای تابع $u = f(x, y, z)$ که در مثال (۱.۲.۱) نیز مطرح شد، امتداد مرتبه دوم این تابع عبارت است از:

$$f^{(2)}(x, y, z) = \left(f; f_x, f_y, f_z; f_{xx}, f_{yy}, f_{zz}, f_{xy}, f_{xz}, f_{yz} \right).$$

۱.۲.۱ توابع ناورد

تعریف ۳.۲.۱. تابع $u = f(x)$ را تحت تبدیل گروه تبدیلات G ، ناورد می‌نامیم هرگاه گراف آن (Γ_f) زیر مجموعه‌ای G -ناوردا باشد.

مثال ۳.۲.۱. به عنوان مثال می‌توان گروه یک پارامتری تجانس

$$(x, y, u) \longrightarrow (\lambda x, \lambda^\alpha y, \lambda^\beta u),$$

را در نظر بگیرید. نسبت‌های $w = x^{-\beta}u$ و $t = xy^\alpha$ توابع ناوردای آن هستند و لذا هر تابع تجانس-ناوردا به شکل $w = h(y)$ و یا صراحتاً به شکل $u = x^\beta h(xy^\alpha)$ بیان می‌شود.

مناسب‌ترین راه بررسی خصوصیات توابع ناوردا، بررسی آن روی شرایط بینهایت کوچک می‌باشد. از آنجایی که گراف تابع $u = f(x)$ با صفر شدن مولفه‌های $u^\alpha - f^\alpha(x)$ تعریف می‌شود، مطابق قضیه (۵.۱.۱) شرایط ناوردایی بینهایت کوچک زیر به صورت

$$0 = \mathbf{v}(u^\alpha - f^\alpha(x)) = \phi^\alpha(x, u) - \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}, \quad \alpha = 1, \dots, q,$$

را برای هر مولد بینهایت کوچک $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$ ، نتیجه می‌دهد.

تعریف ۴.۲.۱. مشخصه هر میدان برداری

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{j=1}^q \phi^j(x, u) \frac{\partial}{\partial u^j},$$

یک q -تایی از توابع $Q^\alpha(x, u^{(1)})$ است، که به x, u و مشتقات مرتبه اول u وابسته می‌باشد، که به فرم

$$Q^\alpha = \phi^\alpha(x, u) - \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}, \quad \alpha = 1, \dots, q, \quad (۳۶.۱)$$

تعریف می‌شود.

قضیه ۱.۲.۱. [۹۹] تابع $u = f(x)$ تحت گروه همبند از تبدیلات نقطه‌ای ناوردا است اگر و تنها اگر جوابی از دستگاه مرتبه اول از معادلات دیفرانسیلی

$$Q^\alpha(x, u^{(1)}) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, q,$$

باشد، که توسط همه مشخصه‌های $Q^\alpha(x, u^{(1)})$ متناظر با مولدهای بینهایت $\mathbf{v} \in \mathcal{G}$ مشخص می‌شوند.

۲.۲.۱ امتداد دهی عمل گروه

فرض کنیم G گروه تبدیلاتی باشد که روی یک زیر مجموعه‌ی باز از فضای کامل E مانند \mathcal{O} عمل می‌کند. این عمل را می‌توان به فضای جت مرتبه n ام \mathcal{O} یعنی $\mathbf{J}^n \mathcal{O}$ ترفیع داد، که به آن امتداد مرتبه n -ام عمل گروه G روی \mathcal{O} نامیده و با $G^{(n)}$ نشان می‌دهیم. این امتداد دهی چنان تعریف شده است که مشتقات تابع $u = f(x)$ را به مشتقات تابع تبدیل یافته $\bar{u} = \bar{f}(x)$ متناظر می‌کند. به بیان دیگر منظور از امتداد عمل یک گروه، تعمیم عمل آن به روی مشتقات جزئی تا مرتبه n -ام تابع $u = f(x)$ می‌باشد. پس اگر g یک عنصر از گروه تبدیلات G باشد که در همسایگی همانی است تابع تبدیل آن $g.f$ نیز در همسایگی نقطه متناظر $(\bar{x}_0, \bar{u}_0) = g.(x_0, u_0)$ تعریف می‌شود. آنگاه با در نظر گرفتن g به عنوان یک تابع به صورت

$$g : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O},$$

$$(x, u) \rightarrow (\bar{x}, \bar{u}),$$

امتداد آن روی \mathcal{O} به ازای هر نقطه دلخواه $(x_0, u_0^{(n)}) \in \mathcal{O}^{(n)}$ به صورت:

$$g^{(n)} : \mathcal{O}^{(n)} \rightarrow \mathcal{O}^{(n)},$$

$$g^{(n)}.(x_0, u_0^{(n)}) \rightarrow (\bar{x}_0, \bar{u}_0^{(n)}), \quad (37.1)$$

تعریف می‌شود.

در حالت کلی می‌توان گفت، یک گروه تقارن برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta = 0$ ، گروهی موضعی از تبدیلات مانند G است که روی یک مجموعه باز از E مانند \mathcal{O} عمل کرده به طوری که هر جواب از دستگاه $\Delta = 0$ را به جواب دیگری تبدیل می‌کند.

یکی از مطالبی که قبل از بررسی مفهوم تقارن‌ها به آن نیازمندیم، شناخت تبدیلات است که بر متغیرهای وابسته و مستقل اعمال می‌شود. به طور کلی انواع متفاوتی از تبدیلات وجود دارند که از میان آنها می‌توان به تبدیلات نقطه‌ای، تبدیلات افقی، تبدیلات عمودی، تبدیلات برخوردی و چند نوع دیگر را اشاره کرد.

۳.۲.۱ تبدیلات نقطه‌ای

یک تبدیل نقطه‌ای مانند g یک دیفئومورفیسم روی فضای متغیرهای مستقل و وابسته است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\bar{x}, \bar{u}) = (f(x, u), g(x, u)),$$

که در آن x متغیرهای مستقل و u متغیرهای وابسته می‌باشند و به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$x = (x^1, \dots, x^n) \quad u(x) = (u^1(x), \dots, u^m(x)).$$

مشتقات جزئی مرتبه اول از u را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\partial u(x) \equiv \partial^1 u(x) = (u_1^1(x), \dots, u_n^1(x), \dots, u_1^m(x), \dots, u_n^m(x)).$$

به همین ترتیب مشتقات مراتب بالاتر از آن عبارت است از:

$$\partial^p u = \{u_{i_1 \dots i_p}^\mu \mid \mu = 1, \dots, m, \quad i_1, \dots, i_p = 1, \dots, n\}. \quad (38.1)$$

لازم به ذکر است، علت اینکه به این تبدیلات نقطه‌ای گفته می‌شود این است که بر تمام نقاط فضای کلی E تاثیر می‌گذارد، یعنی بر تمام $n + m$ متغیر مستقل و وابسته عمل می‌کند. گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای به صورت

$$\begin{aligned} (\bar{x})^i &= f^i(x, u, \varepsilon) = x^i + \varepsilon \xi^i(x, u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), & i &= 1, \dots, n, \\ (\bar{u})^\mu &= g^\mu(x, u, \varepsilon) = u^\mu + \varepsilon \eta^\mu(x, u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), & \mu &= 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (39.1)$$

می‌باشد، لذا عملگر بینهایت کوچک آن به صورت

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\mu=1}^m \eta^\mu(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\mu}, \quad (40.1)$$

نوشته می‌شود. به طور خلاصه می‌توان گفت، تبدیلات نقطه‌ای دسته‌ای از تبدیلاتند که متغیر مستقل جدید و متغیر وابسته جدید هر دو تابعی از متغیرهای مستقل و وابسته قدیمی هستند.

۴.۲.۱ تبدیلات افقی

می‌توان حالت‌های خاص‌تر تبدیلات نقطه‌ای را نیز تعریف کرد، به عنوان مثال هرگاه متغیر مستقل جدید تابعی از متغیر مستقل قدیم بوده و متغیر وابسته ثابت بماند به تبدیل رخ داده، تبدیل افقی می‌گویند که فرم ریاضی آن به صورت

$$(\bar{x}, \bar{u}) = (f(x), u),$$

است و لذا مولد بینهایت کوچک آن به فرم

$$X = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

خواهد بود.

۵.۲.۱ تبدیلات عمودی

یک حالت خاص دیگر از تبدیلات نقطه‌ای، تبدیلات عمودی می‌باشند که در این نوع از تبدیلات عمل تبدیل تنها بر روی متغیرهای وابسته عمل می‌کند، به این معنا که:

$$(\bar{x}, \bar{u}) = (x, g(u)),$$

و لذا عملگر بینهایت کوچک آن به صورت زیر خواهد بود:

$$X = \sum_{\mu=1}^q \eta^\mu(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\mu}.$$

۶.۲.۱ تبدیلات تصویری

نوع خاص دیگری که می‌توان از تبدیلات پایه‌ای بیان کرد، تبدیلات تصویری یا تبدیلات حافظ تار نام دارد، و به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$(\bar{x}, \bar{u}) = (f(x), g(x, u)).$$

در واقع متغیرهای مستقل جدید، تنها تابعی از متغیرهای مستقل قدیم می‌باشند و متغیرهای وابسته جدید تابعی از متغیرهای مستقل و وابسته قدیم می‌باشند. با توجه به این امر می‌توان عملگر بینهایت کوچک این تبدیلات را به صورت زیر نشان داد:

$$X = \sum_{i=1}^p \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\mu=1}^q \eta^\mu(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\mu}.$$

۷.۲.۱ تبدیلات بر خوردی

دسته دیگری از تبدیلات که در این جا به آن می‌پردازیم **تبدیلات بر خوردی** هستند. به همین مناسبت ابتدا مقدمه‌ای در زمینه فرم‌های برخوردی را بیان می‌نماییم.

تعریف ۵.۲.۱. یک-فرم دیفرانسیل θ روی فضای جت مرتبه n -ام یک فرم برخوردار می‌شود اگر توسط تمام توابع امتداد یافته صفر شود. به عبارت دیگر اگر $u = f(x)$ تابع همواری با امتداد (پرولانگ) مرتبه n -ام $f^{(n)} : X \rightarrow \mathbf{J}^{(n)}$ باشد، آنگاه نگاشت پس کشنده $f^{(n)}$ روی θ به پیمان فرم برخوردار صفر شود، لذا:

$$(f^{(n)})^* \theta \equiv 0.$$

به جهت یافتن دیدی کلی در زمینه فرم‌های برخورداری مثال زیر را در نظر می‌گیریم:

مثال ۴.۲.۱. حالتی را با یک متغیر مستقل و یک متغیر وابسته در نظر بگیرید. روی فضای جت مرتبه اول $\mathbf{J}^{(1)}$ با مختصات u, x و $p = u_x$ یک یک-فرم دیفرانسیلی به صورت

$$\theta = a(x, u, p)dx + b(x, u, p)du + c(x, u, p)dp,$$

نوشته می‌شود. با فرض بالا امتداد مرتبه اول تابع $f(x)$ یعنی:

$$f^{(1)} : X \rightarrow \mathbf{J}^{(1)}.$$

با این ضابطه که $f^{(1)} = (x, f, f')$ نوشته می‌شود نگاشت پس کشنده $(f^{(1)})^* \theta$ برابر است با

$$\begin{aligned} (f^{(1)})^* \theta &= (a \circ f^{(1)})d(xf^{(1)}) + (b \circ f^{(1)})d(uf^{(1)}) + (c \circ f^{(1)})d(pf^{(1)}), \\ &= a(x, f, f')dx + b(x, f, f')f'dx + c(x, f, f')f''dx, \\ &= \left(a(x, f, f') + b(x, f, f')f' + c(x, f, f')f'' \right) dx, \\ &= 0. \end{aligned}$$

از آنجایی که در جت مرتبه اول، مشتق دوم موجود نیست لذا باید $c = 0$ و $a + bf' = a + bp = 0$ در نتیجه $a = -bp$ و بنابراین

$$\theta = -bpdx + bdu = b(du - pdx) = b\theta_0.$$

به $du - pdx$ فرم برخوردار پایه‌ای می‌گوییم که برای جت مرتبه اول با یک متغیر مستقل و یک متغیر وابسته می‌باشد. به همین ترتیب در جت مرتبه دوم $\mathbf{J}^{(2)}$ با مختصات اضافه $q = u_{xx}$ محاسبات مشابه نشان می‌دهد که یک-فرم $\theta = adx + bdu + cdp + edq$ یک فرم برخوردار است اگر و فقط اگر

$$\theta = b\theta_0 + c\theta_1,$$

که $\theta_1 = dp - qdx = du_x - u_{xx}dx$ فرم برخوردار پایه‌ی بعدی است.

قضیه ۲.۲.۱. [۹۹] هر فرم برخورداری روی $\mathbf{J}^{(n)}$ می‌تواند به صورت ترکیب خطی $\theta = \sum_{\mathbf{J}, \alpha} P_{\mathbf{J}}^\alpha \theta_{\mathbf{J}}^\alpha$ با ضرایبی به صورت توابع هموار $P_{\mathbf{J}}^\alpha(x, u^{(n)})$ از فرم‌های برخوردار پایه

$$\theta_{\mathbf{J}}^\alpha = du_{\mathbf{J}}^\alpha - \sum_{i=1}^p u_{\mathbf{J}, i}^\alpha dx^i, \quad \alpha = 1, \dots, q, \quad 0 \leq \mathbf{J} < n, \quad (۴۱.۱)$$

نوشته شود. در رابطه فوق $\#\mathbf{J}$ مرتبه فرم برخورداری $\theta_{\mathbf{J}}^\alpha$ نام دارد. قابل ذکر است که فرم‌های برخورداری روی $\mathbf{J}^{(n)}$ دارای مرتبه حداکثر $n - 1$ می‌باشند.

برخلاف سه تبدیل افقی، عمودی و تصویری که حالت خاصی از تبدیلات پایه‌ای می‌باشند، تبدیلات برخوردی دسته جدیدی از تبدیلات محسوب می‌شوند که توابع تبدیل علاوه بر متغیرهای مستقل و وابسته به مشتق مرتبه اول متغیر وابسته نیز بستگی دارد و به فرم زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}(\bar{x})^i &= f^i(x, u, \partial u), \\(\bar{u})^\mu &= g(x, u, \partial u), \\(\bar{u})^\mu_i &= h_i(x, u, \partial u),\end{aligned}\tag{۴۲.۱}$$

که در آن $i = 1, \dots, n$ و همچنین شرط $d\bar{u} = \bar{u}_i d\bar{x}^i$ که به شرط برخوردی شناخته می‌شود. توجه شود که f^i و g حتما باید به مشتقات مرتبه اول u نیز وابسته باشند، در غیر اینصورت تبدیل برخوردی به تبدیل نقطه‌ای تبدیل خواهد شد. گروه لی یک-پارامتری از تبدیلات برخوردی به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}(\bar{x})^i &= x^i + \varepsilon \xi^i(x, u, \partial u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \bar{u} &= u + \varepsilon \eta(x, u, \partial u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \bar{u}_i &= u_i + \varepsilon \eta_i^{(1)}(x, u, \partial u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\end{aligned}\tag{۴۳.۱}$$

که در آن $i = 1, \dots, p$ و لذا مولد بی‌نهایت کوچک آن به صورت زیر است:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u, \partial u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta(x, u, \partial u) \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^p \eta_i^{(1)}(x, u, \partial u) \frac{\partial}{\partial u_i}.\tag{۴۴.۱}$$

در ادامه به قضایای مهمی در زمینه تبدیلات برخوردی اشاره می‌کنیم:

قضیه ۳.۲.۱ [۲۵] شرط لازم و کافی برای آنکه روابط (۴۲.۱) تبدیلی برخوردی تعریف کنند این است که، توابع f^i, g و h_i در روابط زیر صدق کنند:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial u_i} &= h_j \frac{\partial f^j}{\partial u_i}, \\ \frac{\partial g}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial g}{\partial u} &= h_j \left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial f^j}{\partial u} \right).\end{aligned}\tag{۴۵.۱}$$

قضیه ۴.۲.۱ [۲۵] شرط لازم و کافی برای آنکه روابط (۴۳.۱) یک گروه لی یک-پارامتری از تبدیلات برخوردی تعریف کنند این است که توابع ξ^i و η در روابط زیر صدق کنند:

$$\frac{\partial \eta}{\partial u_i} - u_j \frac{\partial \xi^j}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n.\tag{۴۶.۱}$$

با وجود اینکه تبدیلات برخوردی برای توسعه تبدیلات تقارنی بسیار مناسب می‌باشند، اما در عمل تعداد ناچیزی تبدیلات برخوردی وجود دارد که امتداد تبدیلات نقطه‌ای نیستند لذا بکلاند^۲ قضیه مهم زیر را در این زمینه بیان می‌کند:

قضیه ۵.۲.۱ [۱۷] اگر تعداد متغیرهای وابسته بیشتر از یک باشد در این صورت هر تبدیل برخوردی امتداد یک تبدیل نقطه‌ای می‌باشد. همچنین اگر تعداد متغیرهای وابسته یک باشد آنگاه تبدیلات برخوردی مرتبه اولی وجود دارد که امتداد هیچ تبدیل نقطه‌ای نیستند، اما هر تبدیل برخوردی مرتبه n -ام امتدادی از یک تبدیل برخوردی مرتبه اول است.

^۲Bäcklund

۸.۲.۱ تبدیلات مراتب بالاتر

اکنون تبدیلاتی را در نظر می‌گیریم که بر تعداد بیشتری متغیر عمل می‌کند، برای این منظور متغیرهای مستقل $u(x) = (u^1(x), \dots, u^m(x))$ و $x = (x^1, \dots, x^n)$ را به صورت

$$\begin{aligned}(\bar{x})^i &= f^i(x, u, \partial u, \dots, \partial^s u), \\ (\bar{u})^\alpha &= g^\alpha(x, u, \partial u, \dots, \partial^s u),\end{aligned}$$

در نظر می‌گیریم بطوریکه شرایط تبدیل برخورداری برقرار باشد. این مطلب که تبدیلات برخورداری تنها برای تحلیل معادلات مرتبه اول می‌باشد، سبب شد لی پرسشی را اینگونه مطرح کند که چه تبدیلاتی می‌توانند فرم‌های دیفرانسیلی به شکل

$$du = u_i dx^i, \quad du_i = u_{ij} dx^j, \quad (۴۷.۱)$$

را ناوردا نگه دارند؟ در سال ۱۸۷۶ بکلاند تبدیلاتی با ضابطه

$$\bar{x}^i = \xi^i(x, u^{(k)}), \quad \bar{u}^\alpha = \psi^\alpha(x, u^{(k)}),$$

از فضای کامل E با متغیرهای مستقل $x = (x^1, \dots, x^p)$ و وابسته $u = (u^1, \dots, u^q)$ به فضای جت مرتبه k -ام E معرفی کرد و نشان داد چنین تبدیلاتی فرم‌های (۴۷.۱) را ناوردا نگه می‌دارند. به اینگونه تبدیلات که در آن $u^{(k)}$ نشاندهنده مشتقات جزئی u می‌باشند، تبدیلات مرتبه بالاتر می‌گوییم که تبدیلیست یک به یک به توی $J^k(E)$ به شرط آنکه نه نقطه‌ای باشد و نه برخورداری. گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}\bar{x}^i &= f^i(x, u, \varepsilon) = \exp(\varepsilon \mathbf{v}) x^i, & i &= 1, \dots, p, \\ \bar{u}^\alpha &= g^\alpha(x, u, \varepsilon) = \exp(\varepsilon \mathbf{v}) u^\alpha, & \alpha &= 1, \dots, q,\end{aligned} \quad (۴۸.۱)$$

که مولد بینهایت کوچک آن به صورت

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \eta_\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad (۴۹.۱)$$

می‌باشد. حال خانواده‌ای از رویه‌های $\{u^\alpha = \theta^\alpha(x)\}$ را در نظر می‌گیریم که تحت تبدیلات (۴۸.۱) ناوردا نیستند. برای برخی از مقادیر ε این تبدیلات، نقطه (x, u) روی θ را به نقطه (\bar{x}, \bar{u}) با معادلات

$$\begin{cases} \bar{x}^i = f^i(x, \theta(x), \varepsilon), & i = 1, \dots, p, \\ \bar{u}^\alpha = g^\alpha(x, \theta(x), \varepsilon), & \alpha = 1, \dots, q, \end{cases} \quad (۵۰.۱)$$

تبدیل می‌کنند. برای این ε و x را می‌توان از روابط (۵۰.۱) با جایگذاری $x = f(\bar{x}, \bar{u}, -\varepsilon)$ حذف کرد. آنگاه

$$\begin{aligned}\bar{u} &= g\left(f(\bar{x}, \bar{u}, -\varepsilon), \theta(f(\bar{x}, \bar{u}, -\varepsilon)), \varepsilon\right) \\ &= g\left(e^{-\varepsilon \mathbf{v}} \bar{x}, \theta(e^{-\varepsilon \mathbf{v}}), \varepsilon\right),\end{aligned} \quad (۵۱.۱)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\mu=1}^q \eta^\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \\ &= \sum_{i=1}^p \xi^i(\bar{x}, \bar{u}) \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} + \sum_{\alpha=1}^q \eta^\alpha(\bar{x}, \bar{u}) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^\alpha}. \end{aligned} \quad (52.1)$$

با جایگذاری (x, u, ε) به جای $(\bar{x}, \bar{u}, -\varepsilon)$ در (51.1) داریم:

$$u = g(e^{\varepsilon \mathbf{v}} x, \theta(e^{\varepsilon \mathbf{v}} x), -\varepsilon) = g(f(x, u, \varepsilon), \theta(f(x, u, \varepsilon)), -\varepsilon). \quad (53.1)$$

قضیه 6.2.1. فرض کنید خانواده رویه‌های $\{u^\alpha = \theta^\alpha(x)\}$ تحت تبدیلات (48.1) ناوردا باشند. در این صورت تبدیل (53.1) این خانواده از رویه‌ها را به خانواده رویه‌های یک پارامتری $\{u^\alpha = \theta^\alpha(x, \varepsilon)\}$ تصویر می‌کند.

برای تعمیم گروه‌های یک پارامتری یا برخوردی به تبدیلات یک پارامتری مراتب بالاتر لازم است نحوه تصویر رویه‌ها را از دیدگاه عمل گروه روی فضای توابع $u = u(x)$ به جای عمل روی فضای کامل یا فضای جت مرتبه اول بررسی کنیم. برای چنین کاری باید تبدیل خانواده رویه‌های $\{u^\alpha = \theta^\alpha(x)\}$ به خانواده رویه‌های یک پارامتری $\{u^\alpha = \theta^\alpha(x, \varepsilon)\}$ تحت تبدیلات

$$\bar{x} = x, \quad \bar{u} = \eta(x, \varepsilon) = \left(e^{\varepsilon \tilde{\mathbf{v}}} u \right) \Big|_{u=\theta(x)}, \quad (54.1)$$

را توصیف کرد. اگر $\tilde{\mathbf{v}}$ مولد بینهایت کوچک نظیر تبدیل فوق باشد، آنگاه تبدیلات (39.1) و (50.1) را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned} \bar{x}^i &= x^i + \varepsilon \xi^i(x, \theta(x)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), & i = 1, \dots, p, \\ \bar{u}^\alpha &= u^\alpha + \varepsilon \eta^\alpha(x, \theta(x)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), & \alpha = 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (55.1)$$

برای یافتن $\eta^\alpha(x, \varepsilon)$ باید x را از معادله دوم (55.1) حذف کرد. از معادله اول (55.1) داریم:

$$x^i = \bar{x}^i - \varepsilon \xi^i(\bar{x}, \theta(\bar{x})) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad i = 1, \dots, p, \quad (56.1)$$

حال با جایگذاری (56.1) در (55.1) و بسط آن حول $\varepsilon = 0$ تابع η^α محاسبه می‌شود.

$$\eta^\alpha(\bar{x}, \varepsilon) = \theta^\alpha(\bar{x}) + \varepsilon \left[\eta^\alpha(\bar{x}, \theta(\bar{x})) - \frac{\partial \theta^\alpha(\bar{x})}{\partial \bar{x}^i} \xi^i(\bar{x}, \theta(\bar{x})) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (57.1)$$

حال با جایگذاری x به جای \bar{x} در (57.1) تصویر تبدیل خانواده رویه‌های $\{u^\alpha = \theta^\alpha(x)\}$ را تحت تبدیلات یک پارامتری (55.1) بدست می‌آوریم.

به بیان دیگر خانواده رویه‌های $\{u^\alpha = \theta^\alpha(x, \varepsilon)\}$ تحت تبدیل

$$\begin{aligned} \bar{u}^\alpha &= \eta(x, \varepsilon) \\ &= \theta^\alpha(x) + \varepsilon \left[\eta^\alpha(x, \theta(x)) - \frac{\partial \theta^\alpha(x)}{\partial x^i} \xi^i(x, \theta(x)) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (58.1)$$

تصویر می‌شوند. حال آندسته از رویه‌هایی را در نظر بگیرید که تحت این تبدیل متغیرهای مستقل آن‌ها ناوردا باقی می‌مانند به این معنا که

$$\begin{aligned}\bar{x}^i &= x^i, & i &= 1, \dots, p, \\ \bar{u}^\alpha &= u^\alpha + \varepsilon[\eta^\alpha(x, u) - u_i^\alpha \xi^i(x, u)] + \mathcal{O}(\varepsilon^2).\end{aligned}\quad (59.1)$$

بنابراین مولد بینهایت کوچک نظیر تبدیل فوق به شکل

$$\tilde{\mathbf{v}} = \sum_{\alpha=1}^q \left[\eta^\alpha(x, u) - \sum_{i=1}^p u_i^\alpha \xi^i(x, u) \right] \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad (60.1)$$

نوشته می‌شود. این مولد بینهایت کوچک را شکل مشخصه (تکاملی) مولد بینهایت کوچک \mathbf{v} می‌نامند.

مثال ۵.۲.۱. اگر $E = \mathbb{R}^2$ و گروه تبدیل یک پارامتری آن به صورت

$$\bar{x} = x + \varepsilon, \quad \bar{u} = u,$$

لذا در این حالت داریم

$$\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \tilde{\mathbf{v}} = -u_x \frac{\partial}{\partial u},$$

به عنوان مثالی دیگر اگر گروه تبدیل به صورت تجانس باشد، یعنی داشته باشیم

$$\bar{x} = \exp(\varepsilon)x, \quad \bar{u} = \exp(2\varepsilon)u.$$

بنابراین داریم

$$\mathbf{v} = x \frac{\partial}{\partial x} + 2u \frac{\partial}{\partial u}, \quad \tilde{\mathbf{v}} = (2u - xu_x) \frac{\partial}{\partial u},$$

پس از بررسی برخی از تبدیلات اکنون به بیان مفهوم تقارن باز می‌گردیم. همانطور که در ابتدای فصل بیان کردیم، یک گروه تقارن از دستگاه ϕ یک گروه موضعی از تبدیلات G می‌باشد که هر جواب دستگاه ϕ را به جواب دیگری از دستگاه منتقل می‌کند.

از آنجایی که یک جواب از دستگاه معادلات دیفرانسیل، تابعی هموار به صورت $u = f(x)$ است، اولین موضعی که مطرح می‌شود این است که، چگونه تبدیل مطرح شده g از گروه لی G تابع جواب $u = f(x)$ را انتقال می‌دهد؟ گراف تابع $u = f(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma_f = \left\{ (x, f(x)) : x \in \Omega \right\} \subset E,$$

تبدیل یافته تابع f تحت g را با $\bar{f} = g.f$ تعریف می‌کنیم که گرافش به صورت

$$g.\Gamma_f = \left\{ (\bar{x}, \bar{u}) \mid (x, u) \in \Gamma_f \right\},$$

باشد. روش یافتن گراف تبدیل یافته تابع f در منبع [۹۸] بیان شده است که در زیر به طور اجمالی به آن اشاره می‌کنیم:

$$(\bar{x}, \bar{u}) = g.(x, u) = (\varphi_g(x, u), \psi_g(x, u)), \quad (61.1)$$

که در آن φ_g و ψ_g توابعی هموار هستند. آنگاه مختصات گراف تابع \bar{f} برای x هایی که در دامنه Ω قرار دارند، به صورت

$$\bar{x} = \varphi_g(x, f(x)) = \varphi_g \circ (\text{Id} \times f)(x), \quad (62.1)$$

$$\bar{u} = \psi_g(x, f(x)) = \psi_g \circ (\text{Id} \times f)(x),$$

تعریف می‌شود که در آن Id تابع همانی روی X است. برای یافتن \bar{f} باید x را از رابطه (62.1) حذف نمود. به ازای $g = e$ رابطه زیر برقرار است:

$$\varphi_e \circ (\text{Id} \times f) = \text{Id}.$$

به ازای یک g نزدیک عنصر همانی e ژاکوبین $\varphi_g \circ (\text{Id} \times f)$ غیرتکین است و بنابراین با استفاده از قضیه تابع ضمنی داریم

$$x = [\varphi_g \circ (\text{Id} \times f)]^{-1}(\bar{x}). \quad (63.1)$$

حال با جایگذاری (63.1) در \bar{f} داریم:

$$\bar{f} = g \circ f = [\psi_g \circ (\text{Id} \times f)] \circ [\varphi_g \circ (\text{Id} \times f)]^{-1},$$

لذا با حذف x و وارون کردن φ_g ضابطه \bar{f} به شکل زیر ساخته می‌شود:

$$\bar{u} = \bar{f}(\bar{x}) = f(\varphi_g^{-1}(\bar{x})) = f(\varphi_{g^{-1}}(\bar{x})). \quad (64.1)$$

مثال 6.2.1. گروه یک پارامتری از دوران‌ها را در نظر بگیرید،

$$(\bar{x}, \bar{u}) = (x \cos t - u \sin t, x \sin t + u \cos t),$$

که روی فضای $E \cong \mathbb{R}^2$ ، که شامل یک متغیر مستقل x و یک متغیر وابسته u می‌باشد، عمل می‌کند. چنین دورانی تابع $u = f(x)$ را توسط دوران نمودارش، تبدیل می‌کند. بنابراین، نمودار تبدیل یافته‌ی $g_t \Gamma_f$ فقط در صورتی نمودار یک تابع خوش تعریف می‌باشد، که زاویه چرخش t خیلی بزرگ نباشد. معادله‌ی تابع تبدیل یافته $\bar{f} = g \circ f$ به شکل ضمنی در زیر داده شده است:

$$\bar{x} = x \cos t - f(x) \sin t, \quad \bar{u} = x \sin t + f(x) \cos t,$$

به طوری که تابع $\bar{u} = \bar{f}(\bar{x})$ با حذف x از این دو معادله به دست می‌آید. به عنوان مثال، اگر $u = ax + b$ آفین باشد، آنگاه تابع تبدیل یافته نیز آفین می‌باشد، و \bar{f} به طور صریح عبارت است از

$$\bar{u} = \frac{\sin t + a \cos t}{\cos t - a \sin t} \bar{x} + \frac{b}{\cos t - a \sin t}, \quad (65.1)$$

به شرطی که $\cot t \neq a$ ، تعریف می‌شود. به بیان دیگر دوران هر خط با مختصات $f(x) = ax + b$ تحت زاویه t دوباره یک خط به صورت $\bar{f}(\bar{x}) = A\bar{x} + B$ می‌باشد.

۳.۱ تقارن‌های معادلات دیفرانسیل

در ادامه فرمولی صریح برای محاسبه امتداد یک میدان برداری را ارائه می‌کنیم:

قضیه ۱.۳.۱. [۹۸] فرض کنیم

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \phi_\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

یک میدان برداری روی زیرمجموعه باز \mathcal{O} از فضای کامل E باشد. امتداد مرتبه n -ام میدان برداری \mathbf{v} روی $\mathbf{J}^{(n)}(\mathcal{O})$ یک میدان برداری به شکل

$$\mathbf{v}^{(n)} = \mathbf{v} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_{\mathbf{J}} \phi_\alpha^{\mathbf{J}}(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u_{\mathbf{J}}^\alpha}, \quad (۶۶.۱)$$

می‌باشد، بطوریکه ضرایب $\phi_\alpha^{\mathbf{J}}$ در (۶۶.۱) با فرمول

$$\phi_\alpha^{\mathbf{J}}(x, u^{(n)}) = D_{\mathbf{J}}(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha) + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{\mathbf{J},i}^\alpha, \quad (۶۷.۱)$$

ساخته می‌شوند. شایان ذکر است عبارت

$$Q_\alpha = \phi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha,$$

در (۶۷.۱) همان مشخصه میدان برداری \mathbf{v} می‌باشد.

در ادامه تعریف ماکسیمال بودن رتبه یک دستگاه معادلات را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۱. دستگاه معادلات دیفرانسیل $\mathbf{J}^{(n)} : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^m$ از رتبه‌ی ماکسیمال است هرگاه ماتریس ژاکوبین آن

یعنی

$$\mathbf{J}_\Delta(x, u^{(n)}) = \left(\frac{\partial \Delta_\nu}{\partial x^i}, \frac{\partial \Delta_\nu}{\partial u_{\mathbf{J}}^\alpha} \right)_{m \times (p+qp^{(n)})},$$

از رتبه m باشد.

قضیه ۲.۳.۱. [۹۹] فرض کنیم $\Delta = 0$ یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل از رتبه ماکسیمال تعریف شده در یک زیر مجموعه باز از E مانند \mathcal{O} باشد، اگر گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی \mathcal{O} عمل کرده و \mathbf{v} یک مولد بینهایت کوچک آن باشد، اگر

$$\mathbf{v}^{(n)}(\Delta) = 0, \quad (۶۸.۱)$$

آنگاه گروه G معادله $\Delta = 0$ ، را به عنوان گروه تقارن می‌پذیرد.

مثال ۱.۳.۱. در این مثال بنا داریم، تقارن‌های معادله حرارت را محاسبه کنیم. فرم کلی معادله (۲+۱)- بعدی حرارت به صورت زیر می‌باشد.

$$u_t = F(x, y, u, u_x, u_y)(u_{xx} + u_{yy}), \quad (۶۹.۱)$$

که در آن تابع F تابعی هموار بر حسب x, y, u, u_x, u_y است که در [۹۳] تمام تقارن‌های آن محاسبه شده است. اکنون به عنوان مثالی ساده به تعیین تقارن‌های معادله (۱+۱)- بعدی حرارت که به صورت زیر است می‌پردازیم:

$$u_t = u_{xx}, \quad (۷۰.۱)$$

این معادله روی فضای $E \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ تعریف می‌شود را بررسی می‌کنیم. چون معادله (۷۰.۱) مرتبه دوم می‌باشد، برای یافتن تقارن‌های آن لازم است که امتداد مرتبه دوم میدان برداری را به صورت

$$\mathbf{v} = \xi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u},$$

که روی E تعریف می‌شود را یافته و با استفاده از قضیه (۱.۳.۱) تقارن‌ها را بیابیم. امتداد مرتبه دوم \mathbf{v} برابر است با:

$$\mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v} + \phi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}},$$

و با استفاده از فرمول (۶۷.۱) و این‌که مشخصه میدان برداری \mathbf{v} ، به صورت $Q = \phi - \xi u_x - \tau u_t$ است، ضرایب $\mathbf{v}^{(2)}$ یعنی $\phi^x, \phi^t, \phi^{xx}$ را به شکل زیر بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \phi^x &= D_x Q + \xi u_{xx} + \tau u_{xt} = \phi_x + (\phi_u - \xi_x) u_x - \tau_x u_t - \xi_u u_x^2 - \tau_u u_x u_t, \\ \phi^t &= D_t Q + \xi u_{xt} + \tau u_{tt} = \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t) u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2, \\ \phi^{xx} &= D_x^2 Q + \xi u_{xxx} + \tau u_{xxt} = \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx}) u_x - \tau_{xx} u_t + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu}) u_x^2 \\ &\quad - 2\tau_{xu} u_x u_t - \xi_{uu} u_x^3 - \tau_{uu} u_x^2 u_t + (\phi_u - 2\xi_x) u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} \\ &\quad - \tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt}. \end{aligned}$$

حال با اثر دادن $\mathbf{v}^{(2)}$ بر معادله (۷۰.۱) داریم:

$$\phi^t = \phi^{xx}. \quad (۷۱.۱)$$

با جایگذاری ضرایب امتداد در (۷۱.۱) به دستگاه PDE زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t) u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2 &= \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx}) u_x - \tau_{xx} u_t \\ &\quad + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu}) u_x^2 - 2\tau_{xu} u_x u_t - \xi_{uu} u_x^3 \\ &\quad - \tau_{uu} u_x^2 u_t + (\phi_u - 2\xi_x) u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} \\ &\quad - 3\xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt}. \end{aligned}$$

حال با قرار دادن $u_t = u_{xx}$ در رابطه بالا داریم:

$$\begin{aligned} \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t) u_{xx} - \xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_{xx}^2 &= \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx}) u_x - \tau_{xx} u_{xx} \\ &+ (\phi_{uu} - 2\xi_{xu}) u_x^2 - 2\tau_{xu} u_x u_{xx} \\ &- \xi_{uu} u_x^3 - \tau_{uu} u_x^2 u_{xx} + (\phi_u - 2\xi_x) u_{xx} \\ &- 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_{xx}^2 \\ &- 2\tau_u u_x u_{xt}. \end{aligned}$$

حال با مساوی قرار دادن ضرایب مشتقات تابع u در طرفین تساوی بالا به جدول (۱.۱) می‌رسیم. از معادله (۱) و (۲)

تک جمله‌ای‌ها	ضرایب
$u_x u_{xt}$	$-2\tau_u = 0$
u_{xt}	$-2\tau_x = 0$
u_{xx}^2	$-2\tau_u = -\tau_u$
$u_x^2 u_{xx}$	$-\tau_{uu} = 0$
$u_x u_{xx}$	$-\xi_u = -2\tau_{xu} - 3\xi_u$
u_{xx}	$\phi_u - \tau_t = \tau_{xx} + \phi_u - 2\xi_x$
u_x^3	$-\xi_{uu} = 0$
u_x^2	$-\phi_{uu} - 2\xi_{xu} = 0$
u_x	$-2\xi_t = 2\phi_{xu} - 2\xi_{xx}$
1	$\phi_{xx} = \phi_t$

جدول ۱.۱: جدول ضرایب و تک جمله‌ای‌ها

در جدول مشخص می‌شود که τ تابعی است که تنها بر حسب متغیر مستقل t می‌باشد، همچنین از معادله (۵) مشخص می‌شود که ξ وابسته به u نمی‌باشد.

از رابطه (۶) نتیجه می‌شود $\tau_t = 2\xi_x$ بنابراین $\xi(x, t) = \frac{1}{2}\tau_t x + \sigma(t)$ به شکلی که $\sigma(t)$ تابعی است تنها به t وابسته است و از رابطه (۸) نتیجه می‌شود که ϕ تابعی خطی است که به صورت

$$\phi(x, t, u) = \beta(x, t)u + \alpha(x, t),$$

تعریف می‌شود. با توجه به رابطه (۹) و (۱۰) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \beta = -\frac{1}{8}\tau_{tt}x^2 - \frac{1}{2}\sigma_t x + p(t), \\ \alpha_t = \alpha_{xx}, \\ \beta_t = \beta_{xx}. \end{cases}$$

از روابط فوق نتیجه می‌شود:

$$\tau_{ttt} = 0, \quad \sigma_{tt} = 0, \quad p_t = -\frac{1}{4}\tau_{tt}.$$

لذا τ تابعی درجه دوم از t و σ تابعی خطی بر حسب t است، لذا ضرایب تقارن بینهایت کوچک از معادله حرارت به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} \xi &= c_1 + c_4x + 2c_5t + 4c_6xt, \\ \tau &= c_2 + 2c_4t + 4c_6t^2, \\ \phi &= (c_3 - c_5x - 2c_6t - c_6x^2)u + \alpha(x, t), \end{aligned}$$

که c_i ها ثوابت دلخواه هستند و $\alpha(x, t)$ جواب دلخواهی از معادله حرارت می‌باشد ($\alpha_t = \alpha_{xx}$) بنابراین فضای جبر لی تقارن‌ها توسط بردارهای زیر تولید می‌شوند:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\ \mathbf{v}_3 &= u \frac{\partial}{\partial u}, \\ \mathbf{v}_4 &= x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t}, \\ \mathbf{v}_5 &= 2t \frac{\partial}{\partial x} - xu \frac{\partial}{\partial u}, \\ \mathbf{v}_6 &= 4tx \frac{\partial}{\partial x} + 4t^2 \frac{\partial}{\partial t} - (x^2 + 2t)u \frac{\partial}{\partial u}, \\ \mathbf{v}_\alpha &= \alpha(x, t) \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \tag{۷۲.۱}$$

روابط بین جابجاگر میدان‌های برداری در جدول زیر داده شده است، درایه سطر i ام و ستون j ام با $[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j]$ مشخص می‌شود.

[]	\mathbf{v}_1	\mathbf{v}_2	\mathbf{v}_3	\mathbf{v}_4	\mathbf{v}_5	\mathbf{v}_6	\mathbf{v}_α
\mathbf{v}_1	0	0	0	\mathbf{v}_1	$-\mathbf{v}_3$	$2\mathbf{v}_5$	\mathbf{v}_{α_x}
\mathbf{v}_2	0	0	0	$2\mathbf{v}_2$	$2\mathbf{v}_1$	$4\mathbf{v}_4 - 2\mathbf{v}_3$	\mathbf{v}_{α_t}
\mathbf{v}_3	0	0	0	0	0	0	$-\mathbf{v}_\alpha$
$-\mathbf{v}_4$	$-\mathbf{v}_1$	$-2\mathbf{v}_2$	0	0	\mathbf{v}_5	$2\mathbf{v}_6$	$\mathbf{v}_{\alpha'}$
\mathbf{v}_5	\mathbf{v}_3	$-2\mathbf{v}_1$	0	$-\mathbf{v}_5$	0	0	$\mathbf{v}_{\alpha''}$
\mathbf{v}_6	$-2\mathbf{v}_5$	$2\mathbf{v}_3 - 4\mathbf{v}_4$	0	$-2\mathbf{v}_6$	0	0	$\mathbf{v}_{\alpha'''}$
\mathbf{v}_α	$-\mathbf{v}_{\alpha_x}$	$-\mathbf{v}_{\alpha_t}$	\mathbf{v}_α	$-\mathbf{v}_{\alpha'}$	$-\mathbf{v}_{\alpha''}$	$-\mathbf{v}_{\alpha'''}$	0

جدول ۲.۱: براکت لی

۴.۱ ساختن جواب‌های ناوردای گروهی

یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مانند $\Delta = 0$ که روی یک زیر مجموعه‌ی باز مانند \mathcal{O} از فضای کامل دستگاه، $E \simeq \mathbb{R}^{p+q}$ ، تعریف می‌شود را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم G یک گروه از تبدیلات موضعی باشد که روی \mathcal{O} عمل می‌کند. به طور کلی جواب $u = f(x)$ از این دستگاه را یک جواب G -ناوردا می‌گوییم اگر تحت تبدیلات گروه ناوردا باقی بماند. به تعبیر دیگر یک جواب G -ناوردا از یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی جوابی مانند $u = f(x)$ است که گراف آن $\Gamma_f = \{(x, f(x))\} \subset \mathcal{O}$ موضعاً یک زیر مجموعه‌ی G -ناوردا از \mathcal{O} است.

یک گروه تقارن از دستگاه معادلات جزئی $\Delta = 0$ باشد، هر یک از جواب‌های G -ناوردای نظیر دستگاه معادلات را می‌توان با حل یک دستگاه کاهش یافته از معادلات دیفرانسیل جزئی که با $\frac{\Delta}{G}$ مشخص شده و دارای متغیرهای مستقل کمتری نسبت به دستگاه اصلی است را بدست آورد. برای درک بهتر این مطلب از منابع [۱] و [۹۸] کمک می‌گیریم:

فرض می‌کنیم G یک گروه از تبدیلات تصویری باشد به این معنا که اگر g یک تبدیل و $(x, u) \in E$ باشد، آنگاه

$$(\bar{x}, \bar{u}) := g.(x, u) = (\Phi_g(x), \psi(x, u)).$$

برای سادگی این عمل را به صورت $\bar{x} = g.x = \Phi_g(x)$ نشان می‌دهیم که روی یک زیر مجموعه‌ی باز از متغیرهای مستقل مانند Ω عمل می‌کند. فرض می‌کنیم s بعد مدارات این عمل باشد که از p کوچکتر است. (در حالت $p = s$ اصل مطلب بدیهی است و اگر $s > p$ باشد تابع G -ناوردایی موجود نیست.) تحت این فرض می‌توان $s - p$ ناوردای مستقل تابعی مانند $y^1 = \eta^1(x), \dots, y^{p-s} = \eta^{p-s}(x)$ برای گروه تبدیلات تصویری روی Ω یافت که خود ناوردای تعریف شده روی \mathcal{O} می‌باشند. علاوه بر آن q ناوردای دیگر مانند $v^1 = \zeta^1(x, u), \dots, v^q = \zeta^q(x, u)$ از عمل G موجود است که به همراه ناوردهای η^i یک مجموعه کامل $-(p + q - s)$ -تایی از ناوردهای مستقل خطی برای عمل G روی \mathcal{O} می‌سازند. این مجموعه را با

$$\{y = \eta(x), v = \zeta(x, u)\},$$

نشان می‌دهیم. از این به بعد برای ساختن دستگاه کاهش یافته‌ی مورد نظر y ها را به عنوان متغیرهای مستقل جدید و v ها را به عنوان متغیرهای وابسته‌ی جدید در نظر می‌گیریم. لذا در این حالت تعداد متغیرهای مستقل به $p - s$ کاهش می‌یابد. اما نکته مهم آن است که هیچ تناظر یک به یکی بین جواب‌های G -ناوردای $u = f(x)$ روی \mathcal{O} و توابع $v = h(y)$ موجود نیست. برای یافتن تناظری بین دو تابع، قضیه‌ی تابع ضمنی را برای دستگاه $y = \eta(x)$ با $p - s$ متغیر به کار می‌بریم. این متغیرهای جدید را به جای y^1, \dots, y^{p-s} با x^1, \dots, x^{p-s} و s متغیر باقیمانده را با $\hat{x} = (x^{j_1}, \dots, x^{j_s})$ نمایش می‌دهیم. لذا از این پس جواب دستگاه را می‌توان با

$$\tilde{x} = \gamma(\hat{x}, y), \tag{۷۳.۱}$$

نشان داد. حال متغیرهای \tilde{x} را به عنوان متغیرهای اصلی و \hat{x} را به عنوان متغیرهای پارامتری در نظر می‌گیریم. این مسئله ایجاب می‌کند یک زیر ماتریس وارون‌پذیر $(p - s) \times (p - s)$ بعدی از ژاکوبین دستگاه مانند $\left(\frac{\partial \eta^j}{\partial x^i}\right)_{ij}$ موجود باشد. پس قضیه‌ی تابع ضمنی را میتوان اینگونه به کار برد که برای حل دستگاه ناوردهای $v = \zeta(x, u)$ توسط متغیرهای (y, v) به جای متغیرهای (x, u) و پارامترهای \hat{x} داریم:

$$u = \tilde{\delta}(x, v) = \tilde{\delta}(\hat{x}, \gamma(\hat{x}, y), v) \equiv \tilde{\delta}(\hat{x}, y, v). \tag{۷۴.۱}$$

اگر $v = h(y)$ یک جواب هموار باشد آنگاه (۷۴.۱) به همراه مجموعه $\{y = \eta(x), v = \zeta(x, u)\}$ توابع G -ناوردا روی \mathcal{O} را به صورت

$$u = f(x) = \delta(\hat{x}, \eta(x), h(\eta(x))), \quad (75.1)$$

می‌سازند. برعکس اگر $u = f(x)$ یک تابع G -ناوردا روی \mathcal{O} باشد، تابعی مانند $v = h(y)$ وجود دارد به طوری که f و توابع نظیر آن در (۷۵.۱) موضعاً معادلند.

مفهوم اساسی توضیحات فوق آن است که چگونه توابع G -ناوردا می‌توانند مرتبه یک دستگاه معادلات دیفرانسیل را کاهش دهند. این روش به تبدیلات تصویری اختصاص داشت اما می‌توان آن را به تبدیلات نقطه‌ای هم تعمیم داد. لازمه یافتن جواب‌های ناوردای گروهی آشنایی با روش کاهش مرتبه معادله بود، بنابراین می‌توان به بررسی شیوه یافتن جواب‌های ناوردای گروهی پرداخت. یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل جزئی

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \dots, m \quad (76.1)$$

مفروض است. مقصود آن است که ببینیم چه هنگام تابعی به شکل (۷۵.۱) یک جواب برای دستگاه (۷۶.۱) است؟ این مسئله مستلزم ساخت تابع $v = h(y)$ است و این ساختن مستلزم ساختن مشتقگیری از (۷۵.۱) نسبت به x و جایگزینی آن در دستگاه معادلات است. بنابراین ابتدا باید روش صحیح مشتق‌گیری از تابع $v = h(y)$ با توجه به متناظر بودن آن با تابع $u = f(x)$ آشنا شد. با مشتقگیری از (۷۵.۱) نسبت به x و فرض قرار دادن $y = \eta(x)$ داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[\delta(\hat{x}, y, v)] = \frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{\partial \delta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \delta}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (77.1)$$

همچنین با استفاده از $\tilde{x} = \gamma(\hat{x}, y)$ عبارت $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ را می‌توان بر حسب y و متغیرهای پارامتری \hat{x} بیان کرد. لذا معادله‌ای به شکل

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \delta_1(\hat{x}, y, v, \frac{\partial v}{\partial y}), \quad (78.1)$$

بر حسب مشتقات مرتبه اول هر تابع G -ناوردا مانند u نسبت به x بر حسب y و v ، مشتقات مرتبه اول v نسبت به y همراه متغیرهای پارامتری \hat{x} بدست خواهد آمد. با ادامه مشتقگیری و استفاده از قاعده زنجیره‌ای و توجه به $\tilde{x} = \gamma(\hat{x}, y)$ به فرمول کلی

$$u^{(n)} = \delta^{(n)}(\hat{x}, y, v^{(n)}),$$

می‌رسیم که بر حسب تمام مشتقات u تا مرتبه n -ام نسبت به x بر حسب y و v ، مشتقات v بر حسب y تا مرتبه n -ام و پارامترهای \hat{x} می‌باشد.

شیوه یافتن جواب‌های ناوردای گروهی برای یک دستگاه معادلات دیفرانسیل را می‌توان در هفت گام به شرح زیر بیان کرد [۱].

- (۱) ابتدا مولدهای بینهایت کوچک جبرلی گروه تقارن را به دست می‌آوریم.
- (۲) فرض کنیم $1 \leq s \leq p$ بعد مدارات گروه تقارنی باشد. در این حالت دستگاه کاهش یافته برای یافتن جواب‌های ناوردای گروهی به $p - s$ متغیر مستقل، وابسته می‌باشد. برای کاهش مرتبه دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی باید مدارات با بعد $s = p - 1$ انتخاب شود.

(۳) کلیه زیرگروه‌های s -بعدی گروه تقارنی G را به کمک زیرجبرهای s -بعدی جبرلی تقارن‌ها بدست می‌آوریم. هر یک از این زیرگروه‌ها یا زیر جبرها متناظر با یک دسته از جواب‌های ناورداى گروهیست که توسط G تولید می‌شود.

(۴) یک مجموعه کامل از ناورداهای مستقل تابعی مانند

$$\begin{aligned} y^1 &= \eta^1(x, u), \dots, y^{p-s} = \eta^{p-s}(x, u), \\ v^1 &= \zeta^1(x, u), \dots, v^q = \zeta^q(x, u), \end{aligned} \quad (79.1)$$

برای گروه G می‌یابیم.

(۵) دستگاه (۷۹.۱) را نسبت به $\tilde{x} = (x^{i_1}, \dots, x^{i_{p-s}})$ و u بر حسب متغیرهای y و v و پارامترهای \hat{x} حل می‌کنیم.

$$\tilde{x} = \gamma(\hat{x}, y, v), \quad u = \delta(\hat{x}, y, v). \quad (80.1)$$

حال با فرض v به عنوان تابعی از y و مدنظر قرار دادن روابط (۷۹.۱) و (۸۰.۱) و قاعده زنجیره‌ای می‌توان از u مشتق گرفت.

$$u^{(n)} = \delta^{(n)}(\hat{x}, y, v^{(n)}). \quad (81.1)$$

(۶) معادلات (۸۰.۱) و (۸۱.۱) را در دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ قرار می‌دهیم. معادلات بدست آمده هم ارز دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\Delta/G(y, v^{(n)}) = 0, \quad (82.1)$$

است که همان دستگاه کاهش یافته برای یافتن جواب‌های ناورداى گروهی است.

(۷) دستگاه (۸۲.۱) را حل می‌کنیم. هر یک از جوابهای این دستگاه، $v = h(y)$ متناظر با یک جواب G -ناوردا از دستگاه اصلیست که با فرمول زیر بیان می‌گردد.

$$\zeta(x, u) = h[\eta(x, u)]. \quad (83.1)$$

مثال ۱.۴.۱. ما در مقاله [۵۹] تقارن‌های معادله زومرون را مطالعه کردیم، که در اینجا این مطلب را شرح می‌دهیم. این معادله ابتداً توسط کالوگر^۳ و دگاسپریس^۴ معرفی شد و تاکنون چندین مقاله در مورد این معادله بیان شده است [۴، ۷، ۲۹]. معادله زومرون دو بعدی به صورت زیر است:

$$\left(\frac{u_{xt}}{u}\right)_{tt} - \left(\frac{u_{xt}}{u}\right)_{xx} + 2(u^2)_{xt} = 0. \quad (84.1)$$

معادله (۸۴.۱) معادله‌ای غیر خطی است که روی فضای کامل $E \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ تعریف می‌شود. گروه یک پارامتری از تبدیلات پیوسته‌ای که توسط این معادله پذیرفته می‌شوند به صورت

$$\bar{t} = \bar{t}(t, x, u), \quad \bar{x} = \bar{x}(t, x, u), \quad \bar{u} = \bar{u}(t, x, u),$$

^۳Calogero

^۴Degasperis

هستند که هر جوابی از معادله زومرون را به جوابی دیگر از این معادله نگاشت می‌کنند. میدان برداری وابسته به گروه تبدیلات فوق به صورت

$$\mathbf{v} = \tau(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (85.1)$$

است. با توجه به اینکه زومرون یک معادله مرتبه چهارم است لذا میدان برداری فوق را تا مرتبه چهارم امتداد بدهیم. امتداد مرتبه چهارم میدان برداری (85.1) را با کمک فرمول (66.1) برابر است با:

$$\mathbf{v}^{(4)} = \mathbf{v} + \eta^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \eta^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^{tx} \frac{\partial}{\partial u_{tx}} + \dots + \eta^{xxxx} \frac{\partial}{\partial u_{xxxx}},$$

فرم باز شده معادله زومرون را به صورت

$$\begin{aligned} & u_{xttt}u^2 - uu_{tt}u_{xt} - 2uu_tu_{xtt} + 2u_t^2u_{xt} - u^2u_{xxx} + uu_{xx}u_{xt} + 2uu_xu_{xt} \\ & - 2u_x^2u_{xt} + 4u_tu_xu^3 + 4u_{xt}u^4 = 0. \end{aligned} \quad (86.1)$$

بازنویسی می‌کنیم. حال برای آنکه میدان برداری (85.1) تقارن معادله (86.1) باشد باید طبق قضیه (2.3.1)، در شرط نوردایی

$$\mathbf{v}^{(4)} \left[\left(\frac{u_{xt}}{u} \right)_{tt} - \left(\frac{u_{xt}}{u} \right)_{xx} + 2(u^2)_{xt} \right] = 0, \quad (87.1)$$

صدق کند. و لذا معادله زومرون مولد (85.1) را به عنوان مولد گروه تقارن می‌پذیرد. همانطور که در تعریف مشخصه میدان برداری بیان شد مشخصه میدان برداری به صورت $Q = \eta - \tau u_t - \xi u_x$ است. با اثر دادن مولد $\mathbf{v}^{(4)}$ بر (86.1) به معادله مشخصه زیر خواهیم رسید:

$$\begin{aligned} & -u_{tt}u_{xt}\eta + 2uu_{xtt}\eta + u^2\eta^{xtt} - uu_{xt}\eta^{tt} - uu_{tt}\eta^{xt} - 2u_tu_{xtt}\eta - 2uu_{xtt}\eta^t \\ & - 2uu_t\eta^{xtt} + 2u_t^2\eta^{xt} - 2uu_{xxx}\eta - u^2\eta^{xxx} + u_{xx}u_{xt}\eta + uu_{xt}\eta^{xx} + uu_{xx}\eta^{xt} \\ & - 4u_xu_{xt}\eta^x + 2uu_{xt}\eta^x + 2uu_x\eta^{xt} + 4u^3u_x\eta^t + 16u^3u_{xt} + 4u^3u_t\eta^x \\ & - 2u_x^2\eta^{xt} + 4u^4\eta^{xt} + 4u_tu_{xt}\eta^t + 2u_xu_{xxx}\eta + 12u^2u_xu_t\eta = 0 \end{aligned} \quad (88.1)$$

به کمک فرمول (67.1) ضرایب را در (88.1) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \eta^x &= \eta_x + (\eta_u - \xi_x)u_x - \tau_x u_t - \xi_u u_x^2 - \tau_u u_x u_t, \\ \eta^t &= D_t Q + \xi u_{xt} + \tau u_{tt} = \eta_t - \xi_t u_x + (\eta_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2, \\ \eta^{xx} &= D_x^2 Q + \xi u_{xxx} + \tau u_{xxt} = \eta_{xx} + (2\eta_{xu}\xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + (\eta_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 \\ & - \xi_{uu}u_x^3 - 2\tau_{xu}u_x u_t - \tau_{uu}u_x^2 u_t + (\eta_u - 2\xi_x)u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} \\ & - 2\tau_u u_x u_{xt}. \end{aligned}$$

با جایگذاری ضرایب فوق در معادله (88.1) به دستگاه PDE خطی

$$\xi_x = \tau_t = -\eta_u, \quad \eta_x = \xi_{xx} = \tau_{tt} = 0, \quad (89.1)$$

می‌رسیم که با حل این دستگاه مقادیر τ , ξ و η به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\xi = c_1x + c_2, \quad \tau = c_1t + c_3, \quad \eta = -uc_1, \quad (90.1)$$

که در آن c_i ها ثوابتی دلخواه هستند و بنابراین فضای جبرلی تقارن‌ها توسط بردارهای

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{v}_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial u}. \quad (91.1)$$

گروه یک پارامتری تولید شده توسط \mathbf{v}_i ها به صورت زیر هستند:

$$G_1 : (t + \varepsilon, x, u), \quad G_2 : (t, x + \varepsilon, u), \quad G_3 : (te^\varepsilon, xe^\varepsilon, ue^{-\varepsilon}). \quad (92.1)$$

چون هر G_i یک گروه تقارن است، با استفاده از نگاشت نمایی می‌توان نشان داد که اگر $u = f(t, x)$ جوابی از معادله زورمون باشند، آنگاه توابع

$$u^{(1)} = f(t - \varepsilon, x), \quad u^{(2)} = f(t, x - \varepsilon), \quad u^{(3)} = e^{-\varepsilon} f(e^{-\varepsilon}t, e^{-\varepsilon}x), \quad (93.1)$$

که در آنها پارامتر ε یک عدد حقیقی است نیز جواب‌های دیگری برای این معادله هستند. اینک با انتخاب هر یک از تقارن‌های $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ و یا ترکیب خطی هر یک از تقارن‌ها می‌توان معادله را با تغییر متغیرهای مناسب کاهش مرتبه داد، و یا معادله را به معادله دیگری که راحت‌تر قابل حل می‌باشد تبدیل کرد. به عنوان مثال اگر تقارن $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ را در نظر بگیریم، برای حل به روش ناورداها دستگاه مشخصه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{1} = \frac{du}{0}. \quad (94.1)$$

به کمک حل دستگاه فوق داریم: $t - x = r$ که $r = u$ و همان ناوردهای نظیر $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ می‌باشند، لذا می‌توان تغییر متغیر $u(t, x) = v(r)$ را در نظر گرفت و با استفاده از قاعده زنجیره‌ای، مشتقات موجود در معادله را بر حسب v و r می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} u &= v(r), \quad u_t = v_r r_t = v_r, \quad u_x = v_r r_x = -v_r, \\ u_{tx} &= v_{rr} r_x = -v_{rr}, \quad u_{xx} = -v_{rr} r_x = v_{rr}, \\ u_{xxt} &= v_{rrr}, \quad u_{xxx} = -v_{rrr}, \\ u_{xxxt} &= v_{rrrr}, \end{aligned} \quad (95.1)$$

و لذا معادله زومرون، تبدیل به معادله مرتبه دوم

$$-4v(r)^3 \left(\left(\frac{d}{dr} v(r) \right)^2 + \left(\frac{d^2}{dr^2} v(r) \right) v(r) \right) = 0, \quad (96.1)$$

می‌شود. حل این معادله منجر به یافتن یک جواب عمومی به شکل

$$v(r) = \pm \sqrt{2ar + 2b},$$

می‌شود و لذا با جایگذاری $t - x$ به جای r داریم:

$$u(x, t) = \pm \sqrt{2a(t - x) + 2b}, \quad (97.1)$$

که جوابی از معادله زومرون می‌باشد و در آن a و b ثابت‌های دلخواه می‌باشند.

از گروه تبدیلات که به صورت (۹۲.۱) بیان شد، معادله زومرون جواب‌هایی به فرم (۹۳.۱) دارد. حال با توجه به

(۹۷.۱) به طور مشابه می‌توان جواب‌های دیگری به دست می‌آید:

◀ به ازای \mathbf{v}_1 داریم:

$$G_1 : (t + \varepsilon, x, u) \xrightarrow{\text{نگاشت نمایی}} \exp(\varepsilon \mathbf{v}_1)(x, t, u) = (x, t + \varepsilon, u) \Rightarrow \\ u(x, t) = \pm \sqrt{2a(t - x + \varepsilon) + 2b}.$$

◀ به ازای \mathbf{v}_2 داریم:

$$G_2 = (t, x + \varepsilon, u) \xrightarrow{\text{نگاشت نمایی}} \exp(\varepsilon \mathbf{v}_2)(x, t, u) = (x + \varepsilon, t, u) \Rightarrow \\ u(x, t) = \pm \sqrt{2a(t - x - \varepsilon) + 2b}.$$

◀ به ازای \mathbf{v}_3 داریم:

$$G_3 = (te^\varepsilon, xe^\varepsilon, ue^{-\varepsilon}) \xrightarrow{\text{نگاشت نمایی}} \exp(\varepsilon \mathbf{v}_3)(x, t, u) = (e^\varepsilon x, e^\varepsilon t, e^{-\varepsilon} u) \Rightarrow \\ u(x, t) = \pm e^{-\varepsilon} \sqrt{2a(e^{-\varepsilon} t - xe^{-\varepsilon}) + 2b}.$$

به دست آورد.

۵.۱ تقارن‌های تقریبی

اگر تابع $f(x, \varepsilon)$ را به گونه‌ای در نظر بگیریم که در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x, \varepsilon)}{\varepsilon^p} = 0, \quad (98.1)$$

در این صورت می‌توان تساوی زیر را بیان کرد:

$$f(x, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^p),$$

و f تابعی از مرتبه ای کمتر از ε^p گفته می‌شود.

تعریف ۱.۵.۱. اگر توابع f و g در شرط

$$f(x, \varepsilon) - g(x, \varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^p). \quad (99.1)$$

صدق کنند در این صورت گفته می‌شود این دو تابع به طور تقریبی تا مرتبه $\mathcal{O}(\varepsilon^p)$ (تا خطای $\mathcal{O}(\varepsilon^p)$) هم ارز می‌باشند، به طور خلاصه از نماد $f \approx g$ برای نشان دادن هم ارزی دو تابع f و g می‌توان استفاده کرد. این تساوی تقریبی یک

رابطه هم ارزی از توابع را تعریف می‌کند، به این صورت که توابع $f(x, \varepsilon)$ و $g(x, \varepsilon)$ اعضای از کلاس یکسان هستند اگر و تنها اگر

$$f(x, \varepsilon) \approx g(x, \varepsilon).$$

نمایش متعارف از کلاس توابع پیوسته f که چند جمله‌ای از درجه p می‌باشد و از بسط تیلور تابع $f(x, \varepsilon)$ در اطراف $\varepsilon = 0$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_0(x) + \varepsilon f_1(x) + \dots + \varepsilon^p f_p(x).$$

با توجه به رابطه (۹۹.۱) تساوی زیر برقرار است:

$$g(x, \varepsilon) = f_0(x) + \varepsilon f_1(x) + \dots + \varepsilon^p f_p(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^p).$$

بنابر این کلاس هم ارزی از توابع $f(x, \varepsilon) \approx g(x, \varepsilon)$ با مرتب کردن مجموعه $p + 1$ تابع $f_0(x), f_1(x), \dots, f_p(x)$ به دست می‌آید. در نظریه گروه‌های تقریبی می‌توان مجموعه $p + 1$ تابع

$$f_0(x, a), f_1(x, a), \dots, f_p(x, a),$$

را در نظر گرفت، که در واقع توابع برداری هموار و وابسته به x و پارامتر گروهی a می‌باشند. مختصات در این تبدیلات عبارتند از:

$$f_0^i(x, a), f_1^i(x, a), \dots, f_p^i(x, a), \quad i = 1, \dots, n,$$

فرض کنید خانواده G از تبدیلات تقریبی یک پارامتری به صورت

$$\bar{x}^i \approx f_0^i(x, a) + \varepsilon f_1^i(x, a) + \dots + \varepsilon^p f_p^i(x, a), \quad i = 1, \dots, n, \quad (100.1)$$

تعریف می‌کنیم، که نقاط $x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ را به نقاط $\bar{x} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n) \in \mathbb{R}^n$ می‌نگارد. مانند کلاسی از تبدیلات معکوس پذیر

$$\bar{x} = f(x, a, \varepsilon), \quad (101.1)$$

با توابع برداری $f = (f^1, \dots, f^n)$ به طوریکه

$$f^i(x, a, \varepsilon) \approx f_0^i(x, a) + \varepsilon f_1^i(x, a) + \dots + \varepsilon^p f_p^i(x, a), \quad i = 1, \dots, n,$$

و a یک پارامتر حقیقی است، بعلاوه با این شرط که

$$f(x, 0, \varepsilon) \approx x.$$

تعریف ۲.۵.۱. مجموعه‌ای از تبدیلات به فرم (۱۰۰.۱)، گروه تبدیل تقریبی یک پارامتری است اگر به ازای تمام تبدیلات به فرم (۱۰۱.۱) رابطه زیر برقرار است:

$$f(f(x, a, \varepsilon), b, \varepsilon) \approx f(x, a + b, \varepsilon).$$

مثال ۱.۵.۱. فرض کنید $n = 1$ و توابع

$$f(x, a, \varepsilon) = x + a \left(1 + \varepsilon x + \frac{1}{2} \varepsilon a \right),$$

$$g(x, a, \varepsilon) = x + a \left((1 + \varepsilon x) \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon a \right) \right).$$

را در نظر بگیرید. این دو تابع تا دقت مرتبه اول با هم مساوی هستند، لذا می‌توان به صورت

$$g(x, a, \varepsilon) = f(x, a, \varepsilon) + \varepsilon^2 \varphi(x, a), \quad \varphi(x, a) = \frac{1}{2} a^2 x,$$

آن دو را نمایش داد، که در خاصیت گروه تقریبی زیر صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} f(g(x, a, \varepsilon), b, \varepsilon) &= g(x, a, \varepsilon) + b \left(1 + \varepsilon g(x, a, \varepsilon) + \frac{1}{2} \varepsilon b \right) \\ &= x + a(1 + \varepsilon x) \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon a \right) + b \left[1 + \varepsilon x + \varepsilon a(1 + \varepsilon x) \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon a \right) + \frac{1}{2} \varepsilon b \right] \\ &= x + (a + b) \left[1 + \varepsilon x + \frac{1}{2} \varepsilon (a + b) \right] + \varepsilon^2 \varphi(x, a, b, \varepsilon) \\ &= f(x, a + b, \varepsilon) + \varepsilon^2 \varphi(x, a, b, \varepsilon), \end{aligned} \quad (1.02.1)$$

به طوریکه $\varphi(x, a, b, \varepsilon) = \frac{1}{2} a(ax + ab + 2bx + \varepsilon abx)$ است.

مولد گروه تقریبی G که با (۱.۰۱.۱) داده می‌شود، کلاس عملگرهای خطی دیفرانسیلی مرتبه اول به صورت

$$\mathbf{v} = \xi^i(x, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (1.03.1)$$

می‌باشد به طوریکه هم ارزی

$$\xi^i(x, \varepsilon) \approx \xi_0^i(x) + \varepsilon \xi_1^i(x) + \dots + \varepsilon^p \xi_p^i(x),$$

به ازای $i = 1, \dots, n$ و $\nu = 0, \dots, p$

$$\xi_\nu^i(x) = \left. \frac{\partial f_\nu^i(x, a)}{\partial a} \right|_{a=0},$$

محاسبه شوند، بنابراین مولد گروه تقریبی به صورت زیر می‌باشد.

$$\mathbf{v} \approx (\xi_0^i(x) + \varepsilon \xi_1^i(x) + \dots + \varepsilon^p \xi_p^i(x)) \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (1.04.1)$$

تقریب فوق با خطای $\mathcal{O}(\varepsilon^p)$ می‌باشد که اغلب در بحث‌های عملی برای سادگی خطا را به ازای $p = 1$ در نظر می‌گیرند.

۱.۵.۱ معادلات تقریبی لی

گروه‌های تبدیل تقریبی یک پارامتری G ، با در نظر گرفتن $p = 1$ در رابطه (۱.۰۴.۱) به فرم زیر می‌باشد:

$$\bar{x}^i \approx f_0^i(x, a) + \varepsilon f_1^i(x, a), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.05.1)$$

فرض کنید

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1, \quad (10.6.1)$$

یک مولد تقریبی برای گروه تبدیلات G باشد، که در آن داریم:

$$\mathbf{v}_0 = \xi_0^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \mathbf{v}_1 = \xi_1^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

با توجه به رابطه (10.5.1) تبدیل مختصاتی متناظر از x به $\bar{x} = \bar{x}_0 + \varepsilon \bar{x}_1$ به صورت

$$\bar{x}^i = \bar{x}_0^i + \varepsilon \bar{x}_1^i, \quad (10.7.1)$$

که در آن $\bar{x}_0^i = f_0^i(x, a)$ و $\bar{x}_1^i = f_1^i(x, a)$ با حل معادلات زیر تعیین می‌شود:

$$\frac{d\bar{x}_0^i}{da} = \xi_0^i(\bar{x}_0), \quad \bar{x}_0^i|_{a=0} = x^i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (10.8.1)$$

$$\frac{d\bar{x}_1^i}{da} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \xi_0^i(x)}{\partial x^k} \Big|_{x=\bar{x}_0} \bar{x}_1^k + \xi_1^i(\bar{x}_0), \quad \bar{x}_1^i|_{a=0} = 0. \quad (10.9.1)$$

معادلات (10.8.1) و (10.9.1) معادلات تقریبی لی نامیده می‌شوند و در صورت داشتن مولد با کمک این معادلات می‌توان تبدیلات را تعیین کرد.

در ادامه مثال‌هایی برای تعیین گروه تبدیلات تقریبی از روی مولدهای تقریبی مربوط به آن‌ها را به دست می‌آوریم:

مثال ۲.۵.۱. فرض کنید $n = 1$ باشد و همچنین

$$\mathbf{v} = (1 + \varepsilon x) \frac{\partial}{\partial x},$$

لذا می‌توان نوشت: $\xi_0(x) = 1$ و $\xi_1(x) = x$ و معادلات (10.8.1) و (10.9.1) به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}_0}{da} = 1, & \text{با شرط} & \bar{x}_0|_{a=0} = x, \\ \frac{d\bar{x}_1}{da} = \bar{x}_0, & \text{با شرط} & \bar{x}_1|_{a=0} = 0. \end{cases} \quad (11.0.1)$$

با انتگرال‌گیری از روابط (11.0.1) داریم:

$$\bar{x}_0 = a + x, \quad \bar{x}_1 = ax + \frac{a^2}{2}.$$

لذا می‌توان گروه تبدیل تقریبی را به صورت زیر نوشت:

$$\bar{x} \approx x + a + \varepsilon \left(ax + \frac{a^2}{2} \right).$$

مثال ۳.۵.۱. فرض کنید $n = 2$

$$\mathbf{v} = (1 + \varepsilon x^2) \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon xy \frac{\partial}{\partial y},$$

مولد گروه تبدیلاتی می‌باشد. از روی مولد می‌توان نوشت:

$$\xi_0(x, y) = (1, 0), \quad \xi_1(x, y) = (x^2, xy).$$

لذا معادلات (۱۰۸.۱) و (۱۰۹.۱) به صورت

$$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{d\bar{x}_0}{da} = 1, & \text{با شرط} & \bar{x}_0|_{a=0} = x, \\ \frac{d\bar{y}_0}{da} = 0, & \text{با شرط} & \bar{y}_0|_{a=0} = y, \\ \frac{d\bar{x}_1}{da} = (\bar{x}_0)^2, & \text{با شرط} & \bar{x}_1|_{a=0} = 0, \\ \frac{d\bar{y}_1}{da} = \bar{x}_0\bar{y}_0, & \text{با شرط} & \bar{y}_1|_{a=0} = 0, \end{array} \right.$$

می‌باشند. با انتگرال گیری از معادلات فوق داریم:

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 &= x + a, \\ \bar{y}_0 &= y, \\ \bar{x}_1 &= \int (x + a)^2 da = ax^2 + a^2x + \frac{a^3}{3}, \\ \bar{y}_1 &= \int (xy + ay) da = xya + \frac{a^2}{2}y. \end{aligned}$$

در نتیجه گروه تقریبی به صورت

$$\begin{aligned} \bar{x} &\approx x + a + \varepsilon \left(ax^2 + a^2x + \frac{a^3}{3} \right), \\ \bar{y} &\approx y + \varepsilon \left(axy + \frac{a^2}{2}y \right), \end{aligned}$$

خواهد بود.

مثال ۴.۵.۱. به عنوان آخرین مثال قصد داریم تبدیل تقریبی مولد زیر را بیابیم:

$$\mathbf{v} = \left(t + \frac{\varepsilon}{6}t^2 \right) \frac{\partial}{\partial t} - \left(u + \frac{\varepsilon}{3}tu \right) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (111.1)$$

با توجه به \mathbf{v} می‌توان نوشت: $\xi_0(t, u) = (t, -u)$ و $\xi_1(t, u) = \left(\frac{t^2}{6}, \frac{-tu}{3} \right)$ لذا معادلات (۱۰۸.۱) و (۱۰۹.۱) به

صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \frac{d\bar{t}_0}{da} = \bar{t}_0, & \text{با شرط} & \bar{t}_0|_{a=0} = t, \\ \frac{d\bar{u}_0}{da} = -\bar{u}_0, & \text{با شرط} & \bar{u}_0|_{a=0} = u, \\ \frac{d\bar{t}_1}{da} = \frac{\bar{t}_0^2}{6}, & \text{با شرط} & \bar{t}_1|_{a=0} = 0, \\ \frac{d\bar{u}_1}{da} = \frac{-\bar{t}_0\bar{u}_0}{3}, & \text{با شرط} & \bar{u}_1|_{a=0} = 0, \end{array} \right.$$

که با انتگرال گیری از معادلات فوق خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \ln \bar{t}_0 &= a + C \Rightarrow \bar{t}_0 = e^{a+t}, \\ \ln \bar{u}_0 &= C - a \Rightarrow \bar{u}_0 = e^{u-a}, \\ \frac{d\bar{t}_1}{da} &= \frac{1}{6}(e^{a+t}) \Rightarrow \bar{t}_1 = \int \left(\frac{1}{6}e^{a+t} \right) da \Rightarrow \bar{t}_1 = \frac{1}{6}e^{a+t}, \\ \frac{d\bar{u}_1}{da} &= \frac{1}{3}(e^{a+t})(e^{u-a}) \Rightarrow \bar{u}_1 = \frac{1}{3}e^{t+u}a. \end{aligned}$$

پس گروه تبدیلات تقریبی مورد نظر عبارت است از:

$$\begin{aligned}\bar{t} &\approx e^{a+t} + \varepsilon \frac{1}{6} e^{a+t}, \\ \bar{u} &\approx e^{u-a} + \varepsilon \frac{1}{3} e^{t+u} a.\end{aligned}$$

۲.۵.۱ نگاهت نمایی تقریبی

در این بخش به دنبال روشی دیگر برای به دست آوردن گروه تبدیلات تقریبی به کمک نگاهت نمایی می‌باشیم.

قضیه ۱.۵.۱. مولد تقریبی زیر را با پارامتر ε در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1, \quad (112.1)$$

که در آن

$$\mathbf{v}_0 = \xi_0^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \mathbf{v}_1 = \xi_1^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (113.1)$$

گروه تقریبی متناظر با آن عبارت است از:

$$\bar{x}^i = \bar{x}_0^i + \varepsilon \bar{x}_1^i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (114.1)$$

این روابط توسط معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$\bar{x}_0^i = e^{a\mathbf{v}_0}(x^i), \quad \bar{x}_1^i = \ll a\mathbf{v}_0, a\mathbf{v}_1 \gg (\bar{x}_0^i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (115.1)$$

که در آن روابط

$$e^{a\mathbf{v}_0} = 1 + a\mathbf{v}_0 + \frac{a^2}{2!} \mathbf{v}_0^2 + \frac{a^3}{3!} \mathbf{v}_0^3 + \dots, \quad (116.1)$$

و

$$\ll a\mathbf{v}_0, a\mathbf{v}_1 \gg = a\mathbf{v}_1 + \frac{a^2}{2!} [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1] + \frac{a^3}{3!} [\mathbf{v}_0, [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1]] + \dots, \quad (117.1)$$

برقرار می‌باشند. به عبارت دیگر عملگر تقریبی $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1$ گروه تبدیل تقریبی یک پارامتری می‌باشد که با نگاهت نمایی زیر بدست می‌آید:

$$\bar{x}^i = (1 + \varepsilon \ll a\mathbf{v}_0, a\mathbf{v}_1 \gg) e^{a\mathbf{v}_0}(x^i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (118.1)$$

برهان. با جایگذاری اپراتور

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1, \quad (119.1)$$

در بسط نمایی داریم:

$$e^{(\mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1)} = 1 + a(\mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1) + \frac{a^2}{2!} (\mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1)^2 + \frac{a^3}{3!} (\mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1)^3 + \dots$$

حال جملات دارای ضریب ε را از سایر جملات جدا می‌کنیم و عبارت فوق را به صورت زیر:

$$e^{a(\mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1)} = 1 + a\mathbf{v}_0 + \frac{a^2}{2!}\mathbf{v}_0^2 + \frac{a^3}{3!}\mathbf{v}_0^3 + \dots + \varepsilon \left\{ a\mathbf{v}_1 + \frac{a^2}{2!}(\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1\mathbf{v}_0) \right. \\ \left. + \frac{a^3}{3!}(\mathbf{v}_0^2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_0\mathbf{v}_1\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1\mathbf{v}_0^2) + \frac{a^4}{4!}(\mathbf{v}_0^3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_0^2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1\mathbf{v}_0^3) + \dots \right\} \\ + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

و یا

$$e^{a(\mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1)} \approx 1 + a\mathbf{v}_0 + \frac{a^2}{2!}\mathbf{v}_0^2 + \frac{a^3}{3!}\mathbf{v}_0^3 + \dots + \varepsilon \left\{ a\mathbf{v}_1 + \frac{a^2}{2!}(\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1\mathbf{v}_0) \quad (۱۲۰.۱) \right. \\ \left. + \frac{a^3}{3!}(\mathbf{v}_0^2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_0\mathbf{v}_1\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1\mathbf{v}_0^2) + \frac{a^4}{4!}(\mathbf{v}_0^3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_0^2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1\mathbf{v}_0^3) + \dots \right\},$$

بیان می‌کنیم. با استفاده از اتحاد

$$\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_0 + [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1],$$

و اتحادهای مشابه، معادله (۱۲۰.۱) را به فرم زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$e^{a(\mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1)} \approx 1 + a\mathbf{v}_0 + \frac{a^2}{2!}\mathbf{v}_0^2 + \frac{a^3}{3!}\mathbf{v}_0^3 + \dots \\ + \varepsilon \left\{ a\mathbf{v}_1 \left(1 + a\mathbf{v}_0 + \frac{a^2}{2!}\mathbf{v}_0^2 + \frac{a^3}{3!}\mathbf{v}_0^3 + \dots \right) \right. \\ \left. + \frac{a^2}{2!}[\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1] \left(1 + a\mathbf{v}_0 + \frac{a^2}{2!}\mathbf{v}_0^2 + \frac{a^3}{3!}\mathbf{v}_0^3 + \dots \right) \right. \\ \left. + \frac{a^3}{3!}[\mathbf{v}_0, [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1]] \left(1 + a\mathbf{v}_0 + \frac{a^2}{2!}\mathbf{v}_0^2 + \frac{a^3}{3!}\mathbf{v}_0^3 + \dots \right) + \dots \right\},$$

لذا با کمک نگاشت نمایی می‌توان رابطه زیر را به دست آورد:

$$e^{a(\mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1)} \approx (1 + \varepsilon \ll a\mathbf{v}_0, a\mathbf{v}_1 \gg) e^{a\mathbf{v}_0}. \quad (۱۲۱.۱)$$

به بیان دیگر نگاشت نمایی در رابطه (۱۱۵.۱) را به صورت $\bar{x}^i = e^{a\mathbf{v}}(x^i)$ داریم، که در مرتبه اول دقت نسبت به ε محاسبه شده است. در نهایت با محاسبه گروه تبدیلات (۱۱۴.۱) به معادله (۱۱۵.۱) می‌رسیم و برهان قضیه به اتمام می‌رسد. \square

در ادامه قصد داریم مثال‌هایی که در بخش قبل مطرح کردیم را با استفاده از قضیه (۱.۵.۱) حل کنیم.

مثال ۵.۵.۱. مولد تقریبی $\mathbf{v} = (1 + \varepsilon x) \frac{\partial}{\partial x}$ که در مثال (۲.۵.۱) مطرح شد را در نظر می‌گیریم. اکنون سعی می‌کنیم \mathbf{v} را به فرم

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1 = (1 + \varepsilon x) \frac{\partial}{\partial x},$$

بنویسیم، تا بتوانیم با کمک قضیه (۱.۵.۱) گروه تبدیل تقریبی آن را به دست آوریم. بر این اساس داریم

$$\mathbf{v}_0 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{v}_1 = x \frac{\partial}{\partial x}.$$

بنابراین:

$$\mathbf{v}_0(x) = 1, \quad \mathbf{v}_0^2(x) = \mathbf{v}_0^3(x) = \dots = 0,$$

لذا گروه‌های لی مورد نظر عبارتند از:

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1] &= \frac{\partial}{\partial x} = \mathbf{v}_0, \\ [\mathbf{v}_0, [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1]] &= [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0] = 0, \dots, \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 &= e^{a\mathbf{v}_0}(x) = x + a, \\ \ll a\mathbf{v}_0, a\mathbf{v}_1 \gg &= \left(a\mathbf{v} + \frac{a^2}{2!} \right) \frac{\partial}{\partial x}, \end{aligned}$$

و از این رو

$$\bar{x}_1 = \ll a\mathbf{v}_0, a\mathbf{v}_1 \gg (\bar{x}_0) = \left(ax + \frac{a^2}{2!} \right) \frac{\partial}{\partial x} (x + a) = ax + \frac{a^2}{2!}.$$

و بنابراین تبدیل تقریبی به صورت

$$\bar{x} \approx x + a + \epsilon \left(ax + \frac{a^2}{2!} \right),$$

می‌باشد.

مثال ۶.۵.۱. مولد تقریبی $\mathbf{v} = (1 + \epsilon x^2) \frac{\partial}{\partial x} + \epsilon xy \frac{\partial}{\partial y}$ که در مثال (۳.۵.۱) مطرح شد را در نظر می‌گیریم. مانند

مثال قبل در این مورد نیز می‌توان \mathbf{v}_0 و \mathbf{v}_1 را جداگانه به صورت زیر بیان کرد:

$$\mathbf{v}_0 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{v}_1 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}.$$

بنابراین روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 &= e^{a\mathbf{v}_0}(x) = x + a, \\ [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1] &= 2x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \\ [\mathbf{v}_0, [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1]] &= 2 \frac{\partial}{\partial x}, \\ [\mathbf{v}_0, [\mathbf{v}_0, [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1]]] &= 0, \dots \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\ll a\mathbf{v}_0, a\mathbf{v}_1 \gg = a\mathbf{v}_1 + \frac{a^2}{2!} \left(2x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) + 2 \frac{a^3}{3!} \frac{\partial}{\partial x} \quad (122.1)$$

$$= \left(ax^2 + a^2x + \frac{a^3}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(axy + \frac{a^2}{2}y \right) \frac{\partial}{\partial y}. \quad (123.1)$$

از این رو

$$\bar{x}_1 = \langle\langle a\mathbf{v}_0, a\mathbf{v}_1 \rangle\rangle (\bar{x}_0) = \left(ax^2 + a^2x + \frac{a^3}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x}(x+a),$$

$$\bar{y}_1 = \langle\langle a\mathbf{v}_0, a\mathbf{v}_1 \rangle\rangle (\bar{y}_0) = \left(axy + \frac{a^2y}{2} \right) \frac{\partial}{\partial y}(y),$$

بنابراین

$$\bar{x}_1 = ax^2 + a^2x + \frac{a^3}{3}, \quad \bar{y}_1 = axy + \frac{a^2y}{2},$$

و در نتیجه تبدیل تقریبی به صورت زیر می‌باشد:

$$\bar{x} \approx x + a + \varepsilon \left(ax^2 + a^2x + \frac{a^3}{3} \right),$$

$$\bar{y} \approx y + \varepsilon \left(axy + \frac{a^2y}{2} \right),$$

تعریف ۳.۵.۱. گروه یک پارامتری تقریبی G را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\bar{z}^i = f(z, a, \varepsilon) \equiv f_0^i(z, a) + \varepsilon f_1^i(z, a), \quad i = 1, \dots, N. \quad (124.1)$$

در این صورت معادله تقریبی

$$F(z, \varepsilon) \equiv F_0(z) + \varepsilon F_1(z) \approx 0, \quad (125.1)$$

نسبت به G ناوردای تقریبی نامیده می‌شود، هرگاه

$$F(\bar{z}, \varepsilon) \approx F(f(z, a, \varepsilon), \varepsilon) = O(\varepsilon),$$

به طوری که $z = (z^1, z^2, \dots, z^N)$ در ادامه بیان می‌شود که اگر داشته باشیم $z = (x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)})$ در این صورت معادله $F(z, \varepsilon) \equiv F_0(z) + \varepsilon F_1(z)$ یک معادله تقریبی از مرتبه k نامیده می‌شود و G یک گروه تقارنی از معادله (۱۲۵.۱) می‌باشد.

قضیه ۲.۵.۱. معادله دیفرانسیل تقریبی

$$F(z, \varepsilon) \equiv F_0(z) + \varepsilon F_1(z),$$

تحت گروه تبدیلات تقریبی

$$\bar{z}^i = f(z, a, \varepsilon) \equiv f_0^i(z, a) + \varepsilon f_1^i(z, a), \quad i = 1, \dots, N,$$

با مولد

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \varepsilon \mathbf{v}^1 \equiv \xi_0^i(z) \frac{\partial}{\partial z^i} + \varepsilon \xi_1^i(z) \frac{\partial}{\partial z^i}, \quad (126.1)$$

ناوردا است اگر و فقط اگر

$$\mathbf{v}F(z, \varepsilon)|_{F \approx 0} = \mathcal{O}(\varepsilon),$$

و یا به عبارت دیگر اتحاد

$$[\mathbf{v}^0 F_0(z) + \varepsilon(\mathbf{v}^1 F_0(z) + \mathbf{v}^0 F_1(z))]_{(125.1)} = \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (127.1)$$

برقرار باشد.

برهان. با جایگذاری $F(z, \varepsilon) \equiv F_0(z) + \varepsilon F_1(z)$ و (۱۲۶.۱) در معادله مشخصه در مرتبه اول دقت نسبت به ε معادله (۱۲۷.۱) به دست می‌آیند. به عملگر (۱۲۶.۱) که در (۱۲۷.۱) صدق می‌کند، تقارن تقریبی بینهایت کوچک یا عملگر تقریبی پذیرفته شده توسط معادله (۱۲۵.۱) نامیده می‌شود و در نتیجه معادله (۱۲۷.۱) معادله مشخصه برای تقارن‌های تقریبی نامیده می‌شود. \square

ملاحظه ۱.۵.۱. معادله مشخصه (۱۲۷.۱) را می‌توان به صورت

$$\mathbf{v}^0 F_0(z) = \lambda(z) F_0(z), \quad (128.1)$$

$$\mathbf{v}^1 F_0(z) + \mathbf{v}^0 F_1(z) = \lambda(z) F_1(z), \quad (129.1)$$

نوشت. ضریب $\lambda(z)$ به وسیله معادله (۱۲۸.۱) تعیین و سپس در معادله (۱۲۹.۱) صدق می‌کند. معادله

$$\mathbf{v}^1 F_0(z) + \mathbf{v}^0 F_1(z) = \lambda(z) F_1(z),$$

به ازای تمام جواب‌های $F_0(z) = 0$ برقرار می‌باشد. با مقایسه معادله (۱۲۸.۱) و معادلات مشخصه تقارن‌های دقیق قضیه زیر به دست می‌آید.

قضیه ۳.۵.۱. [۵۰] اگر معادله $F(z, \varepsilon) \equiv F_0(z) + \varepsilon F_1(z)$ گروه تبدیلات تقریبی با مولد $\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \varepsilon \mathbf{v}^1$ باشد به طوری که $\mathbf{v}^0 \neq 0$ ، در این صورت مولد

$$\mathbf{v}^0 = \xi_0^i(z) \frac{\partial}{\partial z^i}, \quad (130.1)$$

یک تقارن برای معادله زیر می‌باشد:

$$F_0(z) = 0. \quad (131.1)$$

ملاحظه ۲.۵.۱. با توجه به معادلات (۱۲۸.۱) و (۱۲۹.۱) واضح است که اگر \mathbf{v}^0 تقارن دقیق از معادله $F_0(z) = 0$ باشد، در این صورت $\mathbf{v} = \varepsilon \mathbf{v}^0$ یک تقارن تقریبی از معادله (۱۲۵.۱) است.

تعریف ۴.۵.۱. معادلات $F_0(z) = 0$ و $F(z, \varepsilon) \equiv F_0(z) + \varepsilon F_1(z) \approx 0$ به ترتیب یک معادله غیر اختلال و معادله اختلال نامیده می‌شوند. تحت شرایط قضیه (۳.۵.۱) عملگر \mathbf{v}^0 یک تقارن پایدار از معادله غیر اختلال $F_0(z) = 0$ نامیده می‌شود. متناظر با آن مولد تقارن تقریبی $\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \varepsilon \mathbf{v}^1$ برای معادله اختلال ($F_0(z) + \varepsilon F_1(z) \approx 0$) در واقع $\mathbf{v}^0 = \xi_0^i(z) \frac{\partial}{\partial z^i}$ در واقع یک تغییر شکل از تقارن بی‌نهایت کوچک \mathbf{v}^0 از معادله $F_0(z) = 0$ که توسط اختلال $\varepsilon F_1(z)$ ایجاد شده، نامیده می‌شود. به ویژه اگر جبرلی از معادله $F_0(z) = 0$ پایدار باشد، در این صورت گوییم معادله اختلال (۱۲۵.۱) تقارن‌های معادله غیر پایدار را به ارث می‌برد.

۳.۵.۱ محاسبه تقارن‌های تقریبی

ملاحظه (۱.۵.۱) و قضیه (۳.۵.۱) یک روش برای محاسبه تقارن‌های تقریبی (۱۲۶.۱) برای معادلات دیفرانسیل با پارامتر ε را فراهم می‌کنند. پیاده‌سازی این روش سه مرحله (گام) زیر را نیاز دارد.

گام اول: ابتدا تقارن‌های \mathbf{v}^0 از معادله غیر اختلال $F_0(z) = 0$ را با حل معادله مشخصه

$$\mathbf{v}^0 F_0(z) \Big|_{F_0(z)=0} = 0, \quad (132.1)$$

به دست می‌آوریم.

گام دوم: تعیین تابع کمکی H به صورت

$$H = \frac{1}{\varepsilon} \left[\mathbf{v}^0 (F_0(z) + \varepsilon F_1(z)) \Big|_{F_0(z) + \varepsilon F_1(z) = 0} \right]. \quad (133.1)$$

گام سوم: عملگر \mathbf{v}^1 را با حل معادله مشخصه زیر به دست می‌آوریم

$$\mathbf{v}^1 F_0(z) \Big|_{F_0(z)=0} + H = 0. \quad (134.1)$$

به وضوح می‌توان رابطه فوق را به صورت $\mathbf{v}^1 F_0(z) \Big|_{F_0(z)=0} = -H$ نمایش داد که بر خلاف معادله مشخصه (۱۳۲.۱) یک عملگر غیر همگن می‌باشد.

۴.۵.۱ مثال‌های از تقارن‌های تقریبی

مثال ۷.۵.۱. در این مثال قصد داریم تقارن‌های معادله غیرخطی با اختلال موج که به صورت

$$u_{tt} - (u^2 u_x)_x + \varepsilon u_t = 0, \quad (135.1)$$

بیان می‌شود را محاسبه می‌کنیم. فرم کامل مولد گروه تبدیلات تقریبی به فرم

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \varepsilon \mathbf{v}^1 \equiv (\tau_0 + \varepsilon \tau_1) \frac{\partial}{\partial t} + (\xi_0 + \varepsilon \xi_1) \frac{\partial}{\partial x} + (\eta_0 + \varepsilon \eta_1) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (136.1)$$

که در آن توابع $\tau_0, \tau_1, \xi_0, \xi_1, \eta_0, \eta_1$ همگی توابعی بر حسب x, t, u می‌باشند. با انجام گام‌های بخش قبل قصد داریم تا این توابع را محاسبه کنیم. در **گام اول** بخش غیر اختلال معادله (۱۳۵.۱) که به صورت

$$u_{tt} - (u^2 u_x)_x = 0, \quad (137.1)$$

می‌باشد را تحلیل می‌کنیم. اکنون با حل معادله مشخصه

$$\mathbf{v}^0 (u_{tt} - (u^2 u_x)_x) \Big|_{\{u_{tt} - (u^2 u_x)_x = 0\}} = 0,$$

برای تقارن‌های دقیق \mathbf{v}^0 عبارات زیر حاصل می‌شوند:

$$\tau_0 = C_1 + C_3 t, \quad \xi_0 = C_2 + (C_3 + C_4)x, \quad \eta_0 = C_4 u, \quad (138.1)$$

در نتیجه

$$\mathbf{v}^0 = (C_1 + C_3t) \frac{\partial}{\partial t} + (C_2 + C_3x + C_4x) \frac{\partial}{\partial x} + C_4u \frac{\partial}{\partial u}. \quad (139.1)$$

لذا بخش دقیق معادله موج، جبر لی ۴ بعدی با پایه‌های زیر را می‌پذیرد:

$$\mathbf{v}_1^0 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{v}_2^0 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{v}_3^0 = t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{v}_4^0 = x \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial u}, \quad (140.1)$$

در گام دوم با جایگذاری (۱۳۹.۱) در معادله (۱۳۳.۱) تابع کمکی H را به صورت

$$H = C_3u_t,$$

به دست می‌آوریم.

در گام سوم با حل معادله مشخصه (۱۳۴.۱) داریم:

$$\mathbf{v}^1(u_{tt} - u^2u_{xx} - 2uu_x^2) \Big|_{(137.1)} + C_3u_t = 0, \quad (141.1)$$

که \mathbf{v}^1 همان امتداد عملگر $\mathbf{v}^1 = \tau_1 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_1 \frac{\partial}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial}{\partial u}$ می‌باشد، که شامل مشتقات u می‌باشد. اکنون به حل معادله (۱۴۱.۱) می‌پردازیم که یک چندجمله‌ای بر حسب $u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}$ می‌باشد، سپس با جایگذاری $u_{tt} = (u^2u_x)_x$ چندجمله‌ای بر حسب u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt} می‌شود، در ادامه با صفر قرار دادن ضرایب به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$\tau_1 = \tau_1(t), \quad \xi_1 = \xi_1(x), \quad 3\tau_1'' = C_3, \quad \xi_1'' = 0, \quad \eta_1 = [\xi_1'(x) - \tau_1'(t)]u.$$

و لذا

$$\begin{aligned} \tau_1 &= A_1 + A_3t + \frac{1}{6}C_3t^2, \\ \xi_1 &= A_2 + (A_3 + A_4)x, \\ \eta_1 &= \left(A_4 - \frac{1}{3}C_3t\right)u. \end{aligned} \quad (142.1)$$

با جایگذاری (۱۳۸.۱) و (۱۴۲.۱) در (۱۳۶.۱) تقارن‌های تقریبی زیر را برای معادله (۱۳۵.۱) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\epsilon}{6} \left(t^2 \frac{\partial}{\partial t} - 2tu \frac{\partial}{\partial u} \right), & \mathbf{v}_2 &= x \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial u}, \\ \mathbf{v}_3 &= \frac{\partial}{\partial t}, & \mathbf{v}_4 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ \mathbf{v}_5 &= \epsilon \mathbf{v}_1, & \mathbf{v}_6 &= \epsilon \mathbf{v}_2, \\ \mathbf{v}_7 &= \epsilon \mathbf{v}_4, & \mathbf{v}_8 &= \epsilon \mathbf{v}_3. \end{aligned} \quad (143.1)$$

ملاحظه ۳.۵.۱. توجه کنید که معادلات (۱۴۲.۱) مولدی به صورت

$$\mathbf{v}_8 = \epsilon \left(t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

را نتیجه می‌دهند. که با دقت مرتبه اول می‌توان به فرم نشان داده شده در (۱۴۳.۱) نوشته می‌شود، چرا که

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_8 &= \varepsilon \mathbf{v}_3 = \varepsilon \left(t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{6} \left(t^2 \frac{\partial}{\partial t} - 2tu \frac{\partial}{\partial u} \right) \\ &= \varepsilon \left(t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} \right) + \mathcal{O}^2 \\ &\approx \varepsilon \left(t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

جدول (۳.۱) که با دقت مرتبه اول محاسبه شده است؛ نشان می‌دهد که عملگرهای (۱۴۳.۱) جبرلی تقریبی 8 بعدی را تولید می‌کند و بنابراین مولد تبدیلات تقریبی 8 پارامتری را تولید می‌کند. جدول (۳.۱) نشان می‌دهد که

[,]	\mathbf{v}_1	\mathbf{v}_2	\mathbf{v}_3	\mathbf{v}_4	\mathbf{v}_5	\mathbf{v}_6	\mathbf{v}_7	\mathbf{v}_8
\mathbf{v}_1	0	0	$\mathbf{v}_1 + \frac{1}{3}(\mathbf{v}_8 - \mathbf{v}_7)$	0	0	0	0	\mathbf{v}_5
\mathbf{v}_2	0	0	\mathbf{v}_2	\mathbf{v}_2	0	0	\mathbf{v}_6	\mathbf{v}_6
\mathbf{v}_3	$-\mathbf{v}_1 - \frac{1}{3}(\mathbf{v}_8 - \mathbf{v}_7)$	$-\mathbf{v}_2$	0	0	$-\mathbf{v}_5$	$-\mathbf{v}_6$	0	0
\mathbf{v}_4	0	$-\mathbf{v}_2$	0	0	0	$-\mathbf{v}_6$	0	0
\mathbf{v}_5	0	0	\mathbf{v}_5	0	0	0	0	0
\mathbf{v}_6	0	0	\mathbf{v}_6	\mathbf{v}_6	0	0	0	0
\mathbf{v}_7	0	$-\mathbf{v}_6$	0	0	0	0	0	0
\mathbf{v}_8	$-\mathbf{v}_5$	$-\mathbf{v}_6$	0	0	0	0	0	0

جدول ۳.۱: گروه‌های تقریبی

اگرچه تقارن‌های $\mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6, \mathbf{v}_7, \mathbf{v}_8$ و بدیهی هستند (چون از ضرب یک ضریبی در تقارن‌ها $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ به دست می‌آیند). ولی با توجه به مطلب بیان شده در ملاحظه (۲.۵.۱) همین تقارن‌های $\mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6, \mathbf{v}_7, \mathbf{v}_8$ برای ساختن جبرلی و نیز برای ساختن گروه‌های تبدیل چند پارامتری لازمند.

ملاحظه ۴.۵.۱. معادلات (۱۴۳.۱) نشان می‌دهد که همه تقارن‌های (۱۴۰.۱) از معادله

$$u_{tt} - (u^2 u_x)_x = 0,$$

پایدار هستند در نتیجه معادله اختلال

$$u_{tt} - (u^2 u_x)_x + \varepsilon u_t = 0,$$

تقارن‌های معادله غیر اختلال را به ارث می‌برد.

البته این مطلب همواره اتفاق نمی‌افتد در منبع [۵۰] نشان داده شده است که معادله

$$u_{tt} - (u^{-4}u_x)_x + \varepsilon u_t = 0. \quad (144.1)$$

همه تقارن‌های بخش غیر اختلال $u_{tt} - (u^{-4}u_x)_x = 0$ پایدار نیستند، در نتیجه معادله (۱۴۴.۱) تقارن‌های بخش غیر اختلال را به ارث نمی‌برد.

مثال ۸.۵.۱. اکنون قصد داریم تقارن‌های تقریبی معادله هری-دایم که به فرم زیر است را محاسبه کنیم [۹۴].

$$u_t + \frac{1}{2}u^3u_{xxx} + \varepsilon u_x = 0. \quad (145.1)$$

اولین کاری که انجام می‌دهیم این است که در **گام اول** مولد گروه تبدیلات تقریبی معادله فوق را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \varepsilon \mathbf{v}^1 \equiv (\tau_0 + \varepsilon \tau_1) \frac{\partial}{\partial t} + (\xi_0 + \varepsilon \xi_1) \frac{\partial}{\partial x} + (\eta_0 + \varepsilon \eta_1) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (146.1)$$

که توابع $\phi_0, \xi_0, \xi_1, \tau_0, \tau_1, \phi_0$ بر حسب t, x و u هموار می‌باشند. با اثر امتداد مرتبه سوم از تقارن \mathbf{v}^0 روی بخش غیر اختلال $u_t + \frac{1}{2}u^3u_{xxx} = 0$ داریم:

$$\mathbf{v}_0^{(3)} \left(u_t - \frac{1}{2}u^3u_{xxx} \right) \Big|_{u_t - \frac{1}{2}u^3u_{xxx}=0} = 0, \quad (147.1)$$

حال با حل دستگاه (۱۴۷.۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= A_4 + A_5 t, \\ \xi_0 &= A_1 + A_2 x + \frac{A_3}{2} x^2, \\ \phi_0 &= \left(A_2 - \frac{1}{3A_5} + x A_3 \right) u, \end{aligned} \quad (148.1)$$

که A_5, \dots, A_1 ثوابت دلخواه هستند. بنابراین

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &= \left(A_x + A_2 x + \frac{A_3}{2} x^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} + (A_4 + A_5) \frac{\partial}{\partial t} \\ &+ \left(A_2 - \frac{1}{3A_5} + x A_3 \right) u \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned}$$

لذا بخش غیر اختلال $u_t - \frac{1}{2}u^3u_{xxx} = 0$ دارای تقارن‌های زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0^1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & \mathbf{v}_0^2 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\ \mathbf{v}_0^3 &= x \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial u}, & \mathbf{v}_0^4 &= 3t \frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial u}, \\ \mathbf{v}_0^5 &= x^2 \frac{\partial}{\partial x} + 2xu \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \quad (149.1)$$

در **گام دوم** از تقارن‌های فوق و رابطه (۱۳۳.۱) تابع کمکی H را به دست می‌آوریم.

$$H = u_x (A_5 - A_2) + A_3 (u - xu_x). \quad (150.1)$$

در گام سوم نوبت به محاسبه \mathbf{v}_1 می‌رسد که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$u_x(A_5 - A_2) + A_3(u - uu_x) + \mathbf{v}_1^{(3)} \left(u_t + \frac{1}{2}u^3 u_{xxx} \right) \Big|_{u_t + \frac{1}{2}u^3 u_{xxx} = 0} = 0, \quad (151.1)$$

حال با حل رابطه فوق داریم:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (A_5 - A_2)t - A_3xt + C_4x - C_5 + \frac{C_3}{2}x^2, \\ \tau_1 &= C_1t + C_2, \\ \phi_1 &= (-A_3t + C_4 + C_3x + \frac{C_1}{3})u, \end{aligned} \quad (152.1)$$

که C_i ها ثوابت دلخواه هستند. بنابراین مولدهای تقارن‌های تقریبی معادله غیر اختلال عبارتند از:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & \mathbf{v}_2 &= \frac{\partial}{\partial t}, & \mathbf{v}_3 &= x \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial u}, \\ \mathbf{v}_4 &= 3t \frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial u}, & \mathbf{v}_5 &= x^2 \frac{\partial}{\partial x} + 2xu \frac{\partial}{\partial u}, & \mathbf{v}_6 &= \varepsilon \left(3t \frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial u} \right), \\ \mathbf{v}_7 &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}, & \mathbf{v}_8 &= \varepsilon \left(x \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial u} \right), & \mathbf{v}_9 &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}, \\ \mathbf{v}_{10} &= \varepsilon \left(x^2 \frac{\partial}{\partial x} + 2xu \frac{\partial}{\partial u} \right). \end{aligned} \quad (153.1)$$

معادلات (153.1) نشان می‌دهند که تمام تقارن‌های (149.1) پایدار هستند و لذا معادله اختلال

$$u_t + \frac{1}{2}u^3 u_{xxx} + \varepsilon u_x = 0,$$

تمام تقارن‌های معادله غیر اختلال

$$u_t + \frac{1}{2}u^3 u_{xxx} = 0,$$

را به ارث می‌برند.

۶.۱ نرم افزار

یکی از دستاوردهای مهم علوم رایانه در سال‌های اخیر، ارائه نرم افزارهای هوشمند و قدرتمند در محاسبات و حل محاسبات مسایل پیچیده است، به گونه‌ای که کمتر مسئله‌ای را می‌توان یافت که رایانه‌ها قدرت پردازش و تحلیل آن را نداشته باشند. اصولاً نرم افزارها برخی کاملاً تخصصی و فقط در زمینه‌های خاصی مورد استفاده قرار می‌گیرند، مانند نرم افزارهای آماری، علوم اقتصادی، حسابداری و غیره. برخی دیگر از نرم افزارها به صورت عام‌تر بوده و موضوعات بیشتری را در بر می‌گیرند، یکی از این نرم افزارها در زمینه ریاضیات و مهندسی، نرم افزار Maple است. این نرم افزار طیف گسترده‌ای از مفاهیم ابتدایی تا سطح پیشرفته را پوشش می‌دهد.

به طور خیلی ساده می‌توان گفت وقتی شما Maple را اجرا می‌کنید تنها قادر هستید از یک سری از دستورات ساده آن استفاده کنید، حال آنکه اگر نیاز داشته باشید از دستورات پیشرفته‌تر مانند هندسه دیفرانسیل یا نظریه اعداد استفاده کند، حتماً باید بسته حاوی این دستورات را باز کرده و به حافظه انتقال دهید که این کار به کمک دستور `with(package)` انجام می‌شود. در نرم افزار Maple هر دستور باید با نماد `;` یا `:` به آخر رساند. اگر از نماد :

استفاده کنیم، دستور اجرا می‌شود ولی خروجی چاپ نمی‌شود، اما در هنگام استفاده از ; خروجی نیز چاپ می‌شود. نماد % برای ارجاع به نتیجه قبلی استفاده می‌شود و به صورت مشابه %% و %%% برای نتیجه دو و سه محاسبه قبل استفاده می‌شود. دقت کنید Maple نسبت به حروف بزرگ و کوچک حساس است، لذا Diff و diff دستوراتی متفاوتند. اکنون قصد داریم کدهای محاسباتی که در این فصل به کار گرفته‌ایم را بیان کنیم:

۱.۶.۱ ضرایب ارائه شده در رابطه (۶۷.۱)

یکی از مهم‌ترین گام‌ها در رسیدن به تقارن‌های یک دستگاه معادلات دیفرانسیل، محاسبه ضرایب (۶۷.۱) می‌باشد:

```
with(PDEtools, declare, Etak, InfinitesimalGenerator, ToJet) :
DepVars := [u](t, x);
declare((tau, xi, eta)(t, x, u)); SS := [tau(t, x, u), xi(t, x, u), eta(t, x, u)];
S := [seq(xi[j](t, x, u), j = [t, x]), seq(phi[j](t, x, u), j = [u])];
G := InfinitesimalGenerator(SS, DepVars);
Eta := Etak(G, DepVars);
pol1 := Eta[u, [x]];
pol2 := Eta[u, [x, x]];
pol3 := Eta[u, [x, x, x]];
```

آخرین خروجی به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \text{pol1} &:= -\tau_u u_t u_x - \xi_u u_x^2 + u_x \eta_u - \tau_x u_t - \xi_x u_x + \eta_x \\ \text{pol2} &:= -\tau_{uuu} u_t u_x^2 - \xi_{uu} u_x^3 - \tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} - 2\xi_{ux} u_x^2 + \eta_{xx} \\ &\quad - 2\tau_{ux} u_t u_x + \eta_{uu} u_x^2 + \eta_u u_{xx} - 2\tau_x u_{tx} - 2\xi_x u_{xx} + 2\eta_{ux} u_x - \tau_{xx} u_t - \xi_{xx} u_x \\ \text{pol3} &:= -\xi_{uuu} u_x^4 - 3\tau_{uu} u_t u_x u_{xx} + 3\eta_{xu} u_{xx} - 3\tau_{xx} u_{xt} - \xi_{xxx} u_x - \tau_{xxx} u_t + 3\eta_{xxu} u_x \\ &\quad - 3\xi_{xxu} u_x^2 + 3\eta_{uu} u_x^2 - 3\xi_{uu} u_x^3 - 3\xi_{xx} u_{xx} - 3\xi_x u_{xxx} + \eta_u u_{xxx} - 3\tau_x u_{tx} \\ &\quad - 3\xi_u u_{xx}^2 - 3\tau_{uu} u_t u_x^2 - 9\xi_{xu} u_x u_{xx} - 3\tau_{xu} u_t u_x - 3\tau_{xu} u_t u_{xx} - 6\tau_{xu} u_x u_{tx} \\ &\quad - 3\tau_u u_{xx} u_{tx} + 3\eta_{uu} u_x u_{xx} - 3\tau_u u_x u_{tx} - \tau_u u_t u_{xxx} - 4\xi_u u_x u_{xxx} - 6\xi_{uu} u_x^2 u_{xx} \\ &\quad - \tau_{uuu} u_x u_x^3 - 3\tau_{uu} u_x^2 u_{tx} + \eta_{xxx} + \eta_{uuu} u_x^3 \end{aligned}$$

۲.۶.۱ تقارن

تقارن‌های معادلات دیفرانسیل نیز با کمک نرم افزار Malpe قابل محاسبه می‌باشد، که در زیر تقارن‌های معادله زومرون را به دست آورده‌ایم:

```
with(PDEtools);
```

```

declare((u)(x, t), (xi, eta)(x, t, u));
DepVars := [u](x, t);
U := difftable(u(x, t));
pde[1] := U[]^2 * U[t, t, t, x] - U[] * U[t, t] * U[t, x] - 2 * U[] * U[t] * U[t, t, x]
+ 2 * U[t]^2 * U[t, x] - U[]^2 * U[t, x, x, x] + U[] * U[x, x] * U[t, x]
+ 2 * U[] * U[x] * U[t, x, x] - 2 * U[x]^2 * U[t, x] + 4 * U[x] * U[t] * U[]^3
+ 4 * U[t, x] * U[]^4
DetSys := DeterminingPDE(pde[1]);
pdsolve(%);
G := Infinitesimals(pde[1], DepVars);

```

آخرین دستور خروجی به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned}
 G := & [\xi[x](x, t, u) = 1, \xi[t](x, t, u) = 0, \eta[u](x, t, u) = 0], \\
 & [\xi[x](x, t, u) = 0, \xi[t](x, t, u) = 1, \eta[u](x, t, u) = 0], \\
 & [\xi[x](x, t, u) = x, \xi[t](x, t, u) = t, \eta[u](x, t, u) = -u].
 \end{aligned}$$

دستور لازم برای محاسبه تقارن های یک دستگاه معادلات نیز مشابه حالت فوق محاسبه می شود:

```

with(PDEtools);
declare((u, v, w)(x, t), (xi, eta, phi)(x, t, u, v, w));
DepVars := ([u, v, w])(x, t)
U, V, W := diff_table(u(x, t), diff_table(v(x, t)), diff_table(w(x, t)));
eq1 := V[t] + V[] * V[x] + U[x] / W[] = 0;
eq2 := V[] * W[x] + V[x] * W[] + W[t] = 0;
eq3 := a * U[] * V[x] + U[x] * V[] + U[t];
PDESYS := [eq1, eq2, eq3];
DetSys := DeterminingPDE(PDESYS);
pdsolve(DetSys);
G := Infinitesimals(PDESYS, DepVars);

```

۳.۶.۱ تقارن تقریبی

دستور زیر تقارن معادله هری-دایم در حالت تقریبی را محاسبه می‌کند، بهمین منظور در گام اول:

```
with(DifferentialGeometry) :
with(Tools) :
with(JetCalculus);
DGsetup([t, x], [u], M, 3);
eq := u[1] + 1/2 * u[]3 * u[2, 2, 2];
v := evalDG(xi0(t, x, u[]) * Dx + phi0(t, x, u[]) * Dt + eta0(t, x, u[]) * Du);
v2 := Prolong(v, 3);
EQ := LieDerivative(v2, eq);
solve(eq, u[1]);
subs(u[1] = %, EQ) :
EQ := expand(%);
coeffs(%, [u[1, 2], u[1, 1], u[2, 2, 2], u[2, 2], u[2]]) : sys := map(coeffs, %, U[1]);
sol := pdsolve(sys);
```

در گام دوم:

```
w := evalDG((1/2 * A 3 * x2 + A 4 * x + A 5) * Dx + (A 1 * t + A 2) * Dt
+ (-1/3 * u[] * (-3 * A 3 * x + A 1 - 3 * A 4)) * Du);
w2 := Prolong(w, 3);
eq := u[1] + 1/2 * u[]3 * u[2, 2, 2] + r * u[2];
H := 1/r * (LieDerivative(w2, eq));
solve(eq, u[1]);
subs(u[1] = %, H) :
H := expand(%);
```



```

v := evalDG(xi1(t, x, u[]) * Dx + phi1(t, x, u[]) * Dt + eta1(t, x, u[]) * Du[]);
v2 := Prolong(v, 3);
eq := u[1] + 1/2 * u[]3 * u[2, 2, 2];
EQ := LieDerivative(v2, eq);
solve(eq, u[2, 2, 2]);
subs(u[2, 2, 2] = %, EQ) :
EQ := expand(%) + H;
simplify(%);
coeffs(EQ, u[1, 1]); map(coeffs, %, u[1, 2]) :
map(coeffs, %, u[2]) :
sys := map(coeffs, %, u[1]);
sol := pdsolve(sys);

```

یادداشت

در فصلی که از پیش رو گذشت سعی شد تا به طور بنیادی با مفهوم تقارن‌های معادلات دیفرانسیل و انواع آن‌ها آشنا شویم. در ادامه فصل برخی از گروه‌های تقارن‌های برخی از PDE های خاص ارائه شد. همانگونه که بیان شد روش گروه تقارنی لی یک روش مؤثر و قدرتمند برای به دست آوردن جواب‌های معادلات دیفرانسیل می‌باشد. محاسبه گروه تقارن به وسیله فرمول امتداد نخستین بار توسط لی بنا شد و اولور فرمول صریح را برای محاسبه تقارن‌ها ارائه کرد. مراجع بی‌شماری وجود دارند که به تقارن‌های معادلات دیفرانسیل و تحلیل هندسی آنها پرداخته‌اند که خواننده محترم جهت آشنایی بیشتر می‌تواند به [۸، ۹، ۱۰، ۲۵] مراجعه نماید.

فصل ۲

قوانین پایستگی

قوانین پایستگی هم برای دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل جزئی و هم برای معادلات دیفرانسیل معمولی تعریف می‌شوند. از نظر اهمیت می‌توان گفت که این موضوع در طیف وسیعی از کاربردها و زمینه‌های علمی مختلف ظاهر می‌گردد. در واقع قوانین پایستگی را می‌توان به عنوان تعابیر ریاضی برای اصول فیزیکی بنیادی، مانند پایستگی انرژی، پایستگی ماده، اندازه حرکت تلقی کرد. به عنوان نمونه می‌توان گفت قانون پایستگی انرژی می‌گوید که انرژی نه از بین می‌رود و نه به وجود می‌آید و تنها از شکلی به شکل دیگری تبدیل می‌شوند؛ که البته از آنجا که در نظریه نسبیت خاص انرژی و جرم به هم وابسته‌اند؛ پایستگی انرژی در حالت کلی اینطور بیان می‌شود که مجموع انرژی و جرم یک سیستم پایسته خواهد بود.

در فیزیک نمونه‌هایی از قوانین پایستگی وجود دارد که به آنها قوانین پایستگی تقریبی گویند. به عنوان مثال می‌توان به پایستگی مقادیری مانند جرم، تقارن زوج‌ها، تعداد لپتون‌ها، تعداد باریون‌ها و غیره اشاره کرد. از آنجا که معادلات دیفرانسیل به توصیف بسیاری از قوانین عمومی می‌پردازند، می‌توان ارتباط قوانین پایستگی با دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل را این چنین بیان کرد که قوانین پایستگی برای PDE ها عبارت‌های دیورژانسی هستند که روی جواب‌های دستگاه PDE ثابت می‌باشند و برای معادلات دیفرانسیل ODE انتگرال‌های اول را نتیجه می‌دهد.

۱.۲ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی از مرتبه k با n متغیر مستقل $x = (x^1, \dots, x^n)$ و m متغیر وابسته

$$u(x) = (u^1(x), \dots, u^m(x)),$$

را به صورت زیر در نظر بگیرد:

$$R(x, u) = \Delta_\nu(x, u, u^{(1)}, \dots, u^{(k)}) = 0, \quad \nu = 1, \dots, l, \quad (1.2)$$

در اینجا مشتقات جزئی به صورت $u_i^\mu = \frac{\partial u^\mu}{\partial x^i}$ می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۲. یک قانون پایستگی موضعی، برای دستگاه معادلات PDE (۱.۲) یک عبارت دیورژانسی به شکل

$$D_i \Phi^i[u] = D_1 \Phi^1[u] + \dots + D_n \Phi^n[u] = 0, \quad (2.2)$$

می‌باشد که عبارت دیورژانسی (۲.۲) باید روی همه جواب‌های دستگاه (۱.۲) صدق کند. در اینجا

$$\Phi^i[u] = \Phi^i(x, u, \partial u \dots, \partial^r u),$$

شار قانون پایستگی نام دارد و بیشترین مرتبه مشتق که در شار $\Phi^i[u]$ دیده می‌شود، مرتبه قانون پایستگی نامیده می‌شود.

ملاحظه ۱.۱.۲. اگر یکی از متغیرهای مستقل دستگاه (۱.۲) متغیر زمان t باشد، در این صورت قانون پایستگی (۲.۲) به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$D_t \Psi[u] + \operatorname{div} \Phi[u] = 0. \quad (3.2)$$

که در آن div دیورژانس بوده و به صورت $D_i \Phi^i[u] = D_1 \Phi^1[u] + \dots + D_{n-1} \Phi^{n-1}[u]$ تعریف می‌شود و متغیر $x = (x^1, \dots, x^{n-1})$ معرف $n - 1$ متغیر فضا می‌باشند. در حالت فوق به $\Psi[u]$ چگالی، و به $\Phi^i[u]$ شارهای قانون پایستگی (۳.۲) گفته می‌شود.

تعریف ۲.۱.۲. قانون پایستگی (۲.۲)، یک قانون پایستگی بدیهی نامیده می‌شود هرگاه بتوان هر شار $\Phi^i[u]$ را به صورت $\Phi^i[u] = M^i[u] + H^i[u]$ نوشت که $M^i[u]$ به عنوان جواب در معادله (۱.۲) صدق کرده و $D_i(H^i[u]) = 0$ برقرار باشد.

به عنوان مثال معادله $u_t = u^3 u_{xxx}$ دارای قانون بقا بدیهی به صورت $D_t(x) + D_x(2(u_t - u^3 u_{xxx})) = 0$ می‌باشد. به عنوان یک مثال مهم از قانون پایستگی می‌توان $\operatorname{div}(\operatorname{curl})f = 0$ را در نظر گرفت که در آن $f(x)$ تابعی برداری در \mathbb{R}^3 است.

تعریف ۳.۱.۲. دو قانون پایستگی موضعی (۲.۲) را هم ارز گوییم هرگاه تفاضل آن دو یک قانون پایستگی بدیهی باشند.

تعریف ۴.۱.۲. یک مجموعه L تایی از قوانین پایستگی که به فرم $\{D_i \Phi_{(j)}^i[u] = 0\}_{j=1}^L$ می‌باشند، وابسته خطی است اگر ضرایب ثابت ناصفر $\{a^{(j)}\}_{j=0}^L$ موجود باشند به طوری که ترکیب خطی

$$D_i \left(a^{(j)} \Phi_{(j)}^i[u] \right) = 0,$$

قانون پایستگی بدیهی باشد.

در ادامه پیش از بیان روش‌های محاسبه قوانین پایستگی برخی از قوانین پایستگی دستگاه معادلات بازینیسک را بیان می‌کنیم. این دستگاه در دینامیک سیالات در ژئوفیزیک برای بررسی طبقه‌بندی غیر فشرده و یکنواخت جریان سیال در اقیانوس به کار می‌رود، صورت این دستگاه عبارتست از:

$$\begin{aligned} \Delta\psi_t - g\rho_x - fv_z &= \psi_x\Delta\psi_z - \psi_z\Delta\psi_x, \\ v_t + f\psi_z &= \psi_xv_z - \psi_zv_x, \\ \rho_t + \frac{N^2}{g}\psi_x &= \psi_x\rho_z - \psi_z\rho_x, \end{aligned} \quad (4.2)$$

در دستگاه فوق Δ لاپلاسیان 2 بعدی به صورت

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (5.2)$$

تعریف شده و ψ, u و w توابع سیال می‌باشند که وابسته به متغیرهای x, t و z می‌باشند به طوری که

$$u = \psi_z, \quad w = -\psi_x, \quad (6.2)$$

و f, g و N ثابت‌های فیزیکی هستند. به عنوان مثال g شتاب گرانشی می‌باشد. قوانین پایستگی سیستم فوق عبارتند از:

$$\begin{aligned} D_t(\Delta\psi) + D_x(-g\rho + \psi_z\Delta\psi) + D_z(-fv - \psi_x\Delta\psi) &= 0, \\ D_t(v) + D_x(v\psi_z) + D_z(f\psi - v\psi_x) &= 0, \\ D_t(\rho) + D_x\left(\frac{N^2}{g}\psi + \rho\psi_z\right) + D_z(-\rho\psi_x) &= 0. \end{aligned} \quad (7.2)$$

در ادامه به بیان روش‌های مستقیم، نوتر و ابراگیموف برای یافتن قوانین پایستگی دستگاه‌های PDE خواهیم پرداخت.

۲.۲ روش مستقیم برای یافتن قوانین پایستگی

در تعریف (۱.۱.۲) نیز بیان شد که قوانین پایستگی دستگاه معادلات دیفرانسیل $R(x, u)$ با مشتقات جزئی؛ معادله‌ای به فرم دیورژانسی است که روی تمام جواب‌های دستگاه معادله $R(x, u)$ ثابت می‌شود.

این نمایش دیورژانسی همان ترکیب خطی معادله $R(x, u)$ با ضرایبی که در ادامه آشنا می‌شویم، می‌باشد. برای یافتن نمایش‌های دیورژانسی هم متغیرهای وابسته و مشتقات آن‌ها در دستگاه $R(x, u)$ و هم متغیرهای وابسته و مشتقاتشان که در ضرایب تابعی ظاهر شده‌اند را با توابع دلخواهی جایگزین می‌کنیم و این کار سبب می‌شود این نمایش‌های دیورژانسی روی تمام جواب‌های دستگاه $R(x, u)$ صفر می‌شوند. مجموعه‌ای از ضرایب به فرم

$$\{\Lambda_\sigma[U]\}_{\sigma=1}^N = \{\Lambda_\sigma(x, U, \dots, \partial^L U)\}_{\sigma=1}^N,$$

که به عنوان ضرایب در ترکیب خطی از دستگاه معادلات دیفرانسیل محسوب می‌شوند، یک عبارت دیورژانسی را تولید می‌کنند به شرط آنکه اتحاد زیر برقرار باشد:

$$\Lambda_\sigma[U]R^\sigma[U] \equiv D_i\Phi^i[U], \quad (8.2)$$

که در آن $U(x)$ توابع دلخواه می‌باشد؛ از جمله برای تابع $u(x)$ که معادله (۱.۲) می‌باشد. به منظور جستجوی ضرایب $\{\Lambda_\sigma[U]\}_{\sigma=1}^N$ که منجر به قوانین پایستگی (۲.۲) دستگاه (۱.۲) می‌گردند، به معرفی عملگرهای اویلر می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲.۲. عملگر اویلر-لاگرانژ نسبت به U^j ، عملگری به فرم

$$E_{U^j} = \frac{\partial}{\partial U^j} - D_i \frac{\partial}{\partial U_i^j} + \dots + (-1)^s D_{i_1} \dots D_{i_s} \frac{\partial}{\partial U_{i_1 \dots i_s}^j} + \dots, \quad j = 1, \dots, m. \quad (9.2)$$

می‌باشد که عبارتی دیورژانسی $D_i \Phi^i[U]$ را صفر می‌کند. به طور کلی رابطه

$$E_{U^j} \left(D_i \Phi^i(x, u, \partial u, \dots, \partial^r u) \right) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (10.2)$$

برای هر $U(x)$ دلخواهی برقرار می‌باشد.

عکس مطلب فوق نیز صادق است یعنی تنها نمایش اسکالری که توسط عملگر اویلر پوچ می‌شود، نمایش دیورژانس است. این موضوع را می‌توان در قضیه زیر به شکل کامل بیان کرد.

قضیه ۱.۲.۲. [۲۵] متغیرهای $x = (x^1, \dots, x^n)$ و $U(x) = (U^1(x), \dots, U^m(x))$ را در نظر می‌گیریم. عبارت $F[U] = F(x, U, \partial U, \dots, \partial^s U)$ ، $s \geq 0$ ، توسط تمامی عملگرهای اویلر E_{U^j} پوچ می‌شود، یعنی رابطه زیر برقرار است:

$$E_{U^j} F(x, U, \partial U, \dots, \partial^s U) \equiv 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (11.2)$$

اگر و تنها اگر به ازای هر مجموعه از شارهای $\{\Phi^i(x, U, \partial U, \dots, \partial^s U)\}_{i=1}^n = \{\Phi^i[U]\}_{i=1}^n$ ، عبارت $F[U]$ یک رابطه دیورژانسی به فرم زیر می‌باشد:

$$F(x, U, \partial U, \dots, \partial^s U) \equiv D_i \Phi^i(x, U, \partial U, \dots, \partial^s U). \quad (12.2)$$

بنابر قضیه (۱.۲.۲)، قضیه زیر ارتباط بین این ضرایب تابعی موضعی و قوانین پایستگی موضعی را مشخص می‌کند.

قضیه ۲.۲.۲. [۲۵] مجموعه‌ای از ضرایب موضعی $\Lambda_\sigma[U]_{\sigma=1}^N = \Lambda_\sigma(x, U, \partial U, \dots, \partial^s U)_{\sigma=1}^N$ با مرتبه دلخواه s ، یک قانون پایستگی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۲) نتیجه می‌دهد، اگر رابطه

$$E_{U^j} [\Lambda_\sigma(x, U, \partial U, \dots, \partial^s U) R^\sigma(x, U, \partial U, \dots, \partial^s U)] \equiv 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (13.2)$$

برای هر تابع دلخواه $U(x)$ برقرار باشد.

اهمیت مجموعه معادلات (۱۳.۲) در این است که، این معادلات همان معادلات مشخصه خطی برای یافتن ضرایب Λ_σ را نتیجه می‌دهد. چون معادلات (۱۳.۲) برای هر تابع دلخواه $U(x)$ برقرار است، می‌توان U^j و تمام مشتقات آن را به عنوان متغیرهای مستقلی نسبت به x^i در نظر گرفت، بنابراین دستگاه PDE خطی (۱۳.۲) به دستگاه خطی از معادلات مشخصه تبدیل می‌شود که جواب‌های آن مجموعه‌هایی از ضرایب تابعی موضعی برای دستگاه $R(x, u)$ خواهند بود. البته بلومن^۱ نشان داد اگر دستگاه PDE بر اساس مشتقات پیشرو قابل حل باشد، در این صورت عکس قضیه (۲.۲.۲) نیز برقرار است.

^۱Bluman

در حالت خاص، فرض کنید هر PDE از دستگاه مرتبه r ، را بتوان به فرم حل شده

$$R^v[u] = u_{i_{v,1}\dots i_{v,s}}^{j_v} - G^v(x, u, \partial u, \dots, \partial^r u) = 0, \quad v = 1, \dots, l, \quad (14.2)$$

نوشت به طوری که $1 \leq i_{v,1} \dots i_{v,s} \leq p, 1 \leq j_v \leq q, s \leq k$ همچنین در (۱۴.۲)، مجموعه‌ای شامل تعداد l مشتق پیشرو مستقل خطی از مرتبه s است، با این ویژگی که هیچ کدام از آن‌ها و مشتقات مربوط به آن‌ها در $\{G^v[u]\}_{v=1}^l$ ظاهر نشده‌اند. بنابراین بدون کاستن از کلیت مسأله تمام مشتقات پیشرو و مشتقات مربوط به آن‌ها را می‌توان در شارهای $\Phi^i[U]$ از قوانین پایستگی حذف کرد. قضیه زیر از این مطلب نتیجه می‌شود.

قضیه ۳.۲.۲. [۲۵] برای هر قانون پایستگی موضعی $D_i \Phi^i[U] = 0$ از دستگاه $R(x, u)$ که به فرم حل شده (۱۴.۲) بیان شده، قوانین پایستگی موضعی معادلی وجود دارد که می‌توان آن‌ها را به فرم مشخصه

$$D_i \tilde{\Phi}^i[U] = \tilde{\Lambda}_v(U_{i_{v,1}\dots i_{v,s}}^{j_v} - G^v), \quad (15.2)$$

با جملاتی از مجموعه ضرایب موضعی $\{\tilde{\Lambda}_v\}_{v=1}^l$ و شارهایی که شامل جملات $U_{i_{v,1}\dots i_{v,s}}^{j_v}$ نیستند، نوشت.

۱.۲.۲ الگوریتم مستقیم

(۱) در مرحله اول، به ازای دستگاه PDE داده شده (۱.۲)، ابتدا می‌بایست به جست‌وجوی ضرایب به فرم کلی $\{\Lambda_\sigma(x, U, \partial U, \dots, \partial^l U)\}_{\sigma=1}^N$ به ازای مرتبه مشخص l پرداخته شود.

(۲) در گام بعدی، می‌بایست مجموعه معادلات تعیین کننده (۱۳.۲) به ازای $U(x)$ دلخواه به منظور یافتن ضرایب این چنینی حل شود.

(۳) در این مرحله، باید تمامی شارهای متناظر $\Phi^i[U] = \Phi^i(x, U, \partial U, \dots, \partial^r U)$ که در رابطه زیر صدق می‌کنند، پیدا شوند.

$$\Lambda_v(x, U, \partial U, \dots, \partial^r U) \Delta_v(x, u^{(n)}) \equiv D_i \Phi^i(x, U, \partial U, \dots, \partial^r U). \quad (16.2)$$

(۴) در نهایت، هر مجموعه از شارها و ضرایب یک قانون پایستگی موضعی به فرم کلی زیر

$$D_i \Phi^i(x, u, \partial u, \dots, \partial^r u) = 0, \quad (17.2)$$

که به ازای تمامی جواب‌های دستگاه PDE (۱.۲) برقرار می‌باشند، نتیجه می‌دهند.

در عمل برای حل معادلات مشخصه (۱۳.۲) بهتر است دستگاه $R(x, u)$ را در حالت حل شده نسبت به مشتقهای پیشرو نوشت. در حالت خاص، وقتی دستگاه $R(x, u)$ به صورت حل شده نوشته می‌شود، قضیه (۳.۲.۲) تضمین می‌کند که، تمام قوانین پایستگی موضعی بدست آیند. بعلاوه، در حالت دستگاه حل شده، ضرایب تابعی تکین (که قانون پایستگی تولید نمی‌کنند) و بدیهی (که قوانین پایستگی بدیهی را نتیجه می‌دهند) حذف خواهند شد و در نتیجه، شارها را می‌توان به صورت مستقیم با مقایسه طرفین معادله (۱۶.۲)، یا در حالت‌های پیچیده از ضرایب تابعی یا دستگاه PDE با انتگرال گیری پیدا کرد. البته انتگرال گیری نیز در برخی موارد بسیار پیچیده خواهد شد که ما برای رفع این مشکل از عملگر هوموتوپای استفاده خواهیم کرد که در ادامه فصل به آن اشاره خواهد شد. برای درک بهتر روش مستقیم قوانین پایستگی مثال زیر را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱.۲.۲. معادله غیر خطی هری-دایم که به صورت زیر تعریف می‌شود را در نظر بگیرید:

$$R[u] = u_t - u^3 u_{xxx}, \quad (18.2)$$

معادله فوق از مرتبه سوم با مشتق پیشرو u_t می‌باشد. هدف یافتن تمامی ضرایب قوانین پایستگی موضعی مرتبه صفر به فرم

$$\Lambda_1 = \xi(x, t, U), \quad (19.2)$$

از (۱۸.۲) می‌باشد. بر حسب عملگرهای اولیر متناظر زیر

$$E_U = \frac{\partial}{\partial U} - D_x \frac{\partial}{\partial U_x} - D_t \frac{\partial}{\partial U_t}, \quad (20.2)$$

معادلات تعیین کننده (۱۳.۲) برای ضرایب (۱۹.۲) به صورت زیر خواهند بود:

$$E_U [\xi(x, t, U)(U_t - U^3 U_{xxx})] \equiv 0,$$

که در آن $U(x, t)$ تابعی دلخواه می‌باشد. پس از تفکیک نمودن معادلات (۲۱.۲) نسبت به مشتقات U_t, U_{xxx} به کمک نرم افزار میپل، جواب‌های $\xi_i(x, t, U)$ به صورت زیر می‌باشند:

$$\xi_1(x, t, u) = \frac{1}{u^3}, \quad \xi_2(x, t, u) = \frac{1}{u^2}, \quad \xi_3(x, t, u) = \frac{x}{u^3}, \quad \xi_4(x, t, u) = \frac{x^2}{2u^3}. \quad (21.2)$$

طبق دستورالعمل روش مستقیم، باید فرم مشخصه زیر را حل کنیم:

$$D_t \Psi(x, t, U) + D_x \Phi(x, t, U) \equiv \xi(x, t, U) R^1[U],$$

با حل رابطه فوق به کمک نرم افزار میپل قوانین پایستگی را مطابق جدول (۱.۲) به دست آورده‌ایم.

چگالی	شار
$-xu_x - u + 1$	xu_t
$-tu_x - 2tx$	$tu_t + u + x^2$
$t^2 + x^2$	$-2xt$
$-u_x - t$	$u_t + x$
$-uu_x$	$uu_t + t$
$xu_{xx} + u_x + tu_{xx}$	$-xu_{tx} - tu_{tx} - u_x$
$-uu_x - 2xt - \frac{t^2}{2}$	$uu_t + x^2 + xt + t^2 + t^3$

جدول ۱.۲: قوانین پایستگی معادله هری-دایم

۳.۲ محاسبه قوانین پایستگی به کمک قضیه نوتر

در سال ۱۹۱۸ آمالی نوتر^۲ الگوریتم مشهور خود (قضیه نوتر) برای یافتن قوانین پایستگی موضعی برای دستگاه‌های معادلات دیفرانسیلی که اصل تغییراتی را می‌پذیرند، ارائه نمود [۹۵]. زمانی که دستگاه معادلات دیفرانسیل اصل تغییراتی را می‌پذیرد، آنگاه اکستریم‌های اصل تغییراتی، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل را نتیجه می‌دهد که آنها را معادلات اوپلر-لاگرانژ می‌نامند. در این حالت نوتر نشان داد که اگر یک تقارن نقطه‌ای از اصل تغییراتی موجود باشد، آنگاه شارهای قانون پایستگی موضعی توسط فرمولی صریح شامل بی‌نهایت کوچک‌هایی از تقارن نقطه‌ای و لاگرانژی (چگالی لاگرانژی) از اصل تغییراتی به دست می‌آیند.

۱.۳.۲ معادلات اوپلر-لاگرانژ

تابع $J[u]$ با n متغیر مستقل $x = (x^1, \dots, x^n)$ و m تابع دلخواه $U = (U^1(x), \dots, U^m(x))$ و مشتق‌های آنها تا مرتبه k که روی دامنه Ω تعریف شده اند را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$J[U] = \int_{\Omega} L[U] dx = \int_{\Omega} L(x, U, \partial U, \dots, \partial^k U) dx, \quad (22.2)$$

تابع $L[U] = L(x, U, \partial U, \dots, \partial^k U)$ را لاگرانژی و تابع $J[U]$ را اصل تغییراتی یا انتگرال کنش می‌نامند. تغییر بینهایت کوچک از U به صورت $U(x) \rightarrow U(x) + \varepsilon v(x)$ است که در آن $v(x)$ تابعی است که خودش و مشتقات آن از مرتبه $k-1$ بر روی مرز $\partial\Omega$ از دامنه Ω صفر می‌شوند. تغییر متناظر در لاگرانژی $L[U]$ به صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned} \delta L &= L(x, U + \varepsilon v, \partial U + \varepsilon \partial v, \dots, \partial^k U + \varepsilon \partial^k v) - L(x, U, \partial U, \dots, \partial^k U) \\ &= \varepsilon \left(\frac{\partial L[U]}{\partial U^\sigma} v^\sigma + \frac{\partial L[U]}{\partial U_j^\sigma} v_j^\sigma + \dots + \frac{\partial L[U]}{\partial U_{j_1 \dots j_k}^\sigma} v_{j_1 \dots j_k}^\sigma \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (23.2)$$

با چندین بار انتگرال گیری می‌توان نشان داد که

$$\delta L = \varepsilon (v^\sigma E_{U^\sigma}(L[U]) + D_i W^i[U, v]) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (24.2)$$

که E_{U^σ} عملگر اوپلر-لاگرانژ نسبت به U^σ است و $W^i[U, v]$ با رابطه زیر ارائه می‌شود:

$$\begin{aligned} W^i[U, v] &= v^\sigma \left(\frac{\partial L[U]}{\partial U_i^\sigma} + \dots + (-1)^{k-1} D_{j_1} \dots D_{j_{k-1}} \frac{\partial L[U]}{\partial U_{i j_1 \dots j_{k-1}}^\sigma} \right) \\ &+ v_{j_1}^\sigma \left(\frac{\partial L[U]}{\partial U_{i j_1}^\sigma} + \dots + (-1)^{k-2} D_{j_2} \dots D_{j_{k-1}} \frac{\partial L[U]}{\partial U_{i j_1 j_2 \dots j_{k-1}}^\sigma} \right) \\ &+ \dots + v_{j_1 \dots j_{k-1}}^\sigma \frac{\partial L[U]}{\partial U_{i j_1 j_2 \dots j_{k-1}}^\sigma}. \end{aligned} \quad (25.2)$$

^۲ Amalie Emmy Noether

بنا به نمایش (۲۴.۲) و قضیه دیورژانس، تغییر متناظر در $J[U]$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \delta J &= J[U + \varepsilon v] - J[U] = \int_{\Omega} \delta L dx \\ &= \varepsilon \int_{\Omega} \left(v^{\sigma} E_{U^{\sigma}}(L[U]) + D_i W^i[U, v] \right) dx + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon \left(\int_{\Omega} v^{\sigma} E_{U^{\sigma}}(L[U]) dx + \int_{\partial\Omega} W^l[U, v] n^l dS \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (24.2)$$

که $\int_{\partial\Omega}$ بیانگر انتگرال سطح روی مرز $\partial\Omega$ از دامنه Ω با $n = (n^1, \dots, n^n)$ به عنوان بردار نرمال برون سوی یکه است. بنابراین، اگر $U = u(x)$ اکستریم $J[U]$ باشد، آنگاه جمله $\mathcal{O}(\varepsilon)$ از δJ باید صفر شود، از طرفی قبلا گفته شده که تابع v خودش و مشتقاتش روی مرز $\partial\Omega$ صفر می‌شوند پس حتما عبارت $\int_{\partial\Omega} W^l[U, v] n^l dS$ صفر می‌شود و بنابراین:

$$\int_{\Omega} v^{\sigma} E_{U^{\sigma}}(L[U]) dx = 0, \quad (27.2)$$

که $v(x)$ تابع دلخواه تعریف شده روی دامنه Ω است. بنابراین، اگر $U = u(x)$ اکستریم $J[U]$ باشد، آنگاه $u(x)$ باید در دستگاه PDE زیر صدق کند:

$$E_{u^{\sigma}}(L[U]) = \frac{\partial L[U]}{\partial u^{\sigma}} + \dots + (-1)^k D_{j_1} \dots D_{j_k} \frac{\partial L[U]}{\partial U_{j_1 \dots j_k}^{\sigma}} = 0, \quad \sigma = 1, \dots, m, \quad (28.2)$$

معادلات (۲۸.۲) را معادلات اوپلر-لاگرانژ می‌نامند که اکستریم $U = u(x)$ از اصل تغییراتی $J[u]$ در این معادلات صادق است. بنابراین قضیه زیر اثبات می‌شود.

قضیه ۱.۳.۲. اگر تابع هموار $U(x) = u(x)$ اکستریم اصل تغییراتی

$$J[U] = \int_{\Omega} L[U] dx,$$

با $L[U] = L(x, U, \partial U, \dots, \partial^k U)$ باشد، آنگاه $u(x)$ در معادلات اوپلر-لاگرانژ (۲۸.۲) صدق می‌کند.

۲.۳.۲ الگوریتم نوتر از قضیه نوتر

در این بخش به بیان الگوریتم نوتر از قضیه نوتر خواهیم پرداخت. شرط ضروری که نوتر در این الگوریتم قرار داد این است که اصل تغییراتی $J[U]$ ، تحت گروه لی یک-پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای

$$\begin{aligned} (x^*)^i &= x^i + \varepsilon \xi^i(x, U) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad i = 1, \dots, n, \\ (U^*)^{\mu} &= U^{\mu} + \varepsilon \eta^{\mu}(x, U) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad \mu = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (29.2)$$

با مولد بی‌نهایت کوچک

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \xi^i(x, U) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\mu=1}^m \eta^{\mu}(x, U) \frac{\partial}{\partial U^{\mu}}, \quad (30.2)$$

ناوردا باشد و این ناوردایی برقرار است اگر و تنها اگر

$$\int_{\Omega^*} L[U^*] dx^* = \int_{\Omega} L[U] dx,$$

که در آن منظور از Ω^* تصویر Ω تحت تبدیل نقطه‌ای (۲۹.۲) است. ژاکوبین تبدیل (۲۹.۲) عبارتست از:

$$J = \det(D_i(x^*)^i) = 1 + \varepsilon D_i \xi^i(x, U) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (31.2)$$

در این صورت $dx^* = J dx$. به علاوه، چون (۲۹.۲) گروه لی از تبدیلات است، بنابراین عبارت $L[U^*] = e^{\varepsilon \mathbf{v}^{(k)}} L[U]$ با جملاتی از توسعه مرتبه k -ام بی‌نهایت کوچک (۳۰.۲) است. در نتیجه در الگوریتم نوتر، گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای (۲۹.۲) تقارن نقطه‌ای برای $J[U]$ است اگر و تنها اگر رابطه زیر به ازای تابع دلخواه $U(x)$ برقرار باشد:

$$\int_{\Omega} (J e^{\varepsilon \mathbf{v}^{(k)}} - 1) L[U] dx = \varepsilon \int_{\Omega} \left(L[U] (D_i \xi^i(x, U)) + \mathbf{v}^{(k)} L[U] \right) dx + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (32.2)$$

در رابطه فوق منظور $\mathbf{v}^{(k)}$ امتداد مرتبه k ام مولد بینهایت کوچک متناظر می‌باشد. بنابراین، اگر $J[U]$ دارای تقارن نقطه‌ای (۲۹.۲) باشد، آنگاه جمله $\mathcal{O}(\varepsilon)$ در (۳۲.۲) صفر خواهد شد و در نتیجه اتحاد زیر برقرار است:

$$L[U] D_i \xi^i(x, U) + \mathbf{v}^{(k)} L[U] \equiv 0. \quad (33.2)$$

می‌دانیم که گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای (۲۹.۲) با خانواده‌ای از تبدیلات موضعی به فرم زیر معادل است:

$$\begin{aligned} (x^*)^i &= x^i, & i &= 1, \dots, n, \\ (U^*)^\mu &= U^\mu + \varepsilon [\eta^\mu(x, U) - U_i^\mu \xi^i(x, U)] + \mathcal{O}(\varepsilon^2), & \mu &= 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (34.2)$$

با مولد بی‌نهایت کوچک امتداد یافته مرتبه k ام متناظرش یعنی $\hat{\mathbf{v}}^{(k)}$ که با جایگذاری U به جای u روابط زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} \bar{x}^i &= x^i, & i &= 1, \dots, p, \\ \bar{u}^\alpha &= u^\alpha + \varepsilon \left[\eta^\alpha(x, u) - u_i^\alpha \xi^i(x, u) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2), & \alpha &= 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (35.2)$$

و

$$\tilde{\mathbf{v}} = \sum_{\alpha=1}^q \left[\eta^\alpha(x, u) - \sum_{i=1}^p u_i^\alpha \xi^i(x, u) \right] \frac{\partial}{\partial u^\alpha}. \quad (36.2)$$

تحت تبدیل (۳۴.۲)، تغییر بی‌نهایت کوچک $U(x) \rightarrow U(x) + \varepsilon v(x)$ دارای مؤلفه‌های

$$v^\mu(x) = \hat{\eta}^\mu[U] = \eta^\mu(x, U) - U_i^\mu \xi^i(x, U),$$

با جملاتی از تبدیل (۳۴.۲) می‌باشند. بعلاوه، بنابر خواص گروهی از (۳۴.۲) نتیجه می‌شود که

$$\delta L = \varepsilon \hat{\mathbf{v}}^{(k)} L[U] + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (37.2)$$

بنابراین رابطه زیر برقرار است:

$$\int_{\Omega} \delta L dx = \varepsilon \int_{\Omega} \hat{v}^{(k)} L[U] dx + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (38.2)$$

بعد از مقایسه روابط (37.2) و (24.2) با $v^\mu(x) = \hat{\eta}^\mu[U] = \eta^\mu(x, U) - U_i^\mu \xi^i(x, U)$ داریم

$$\hat{v}^{(k)} L[U] \equiv \hat{\eta}^\mu E_{U^\mu}(L[U]) + D_i W^i[U, \hat{\eta}^\mu[U]], \quad (39.2)$$

که در آن $W^i[U, \hat{\eta}^\mu[U]]$ توسط رابطه (25.2) بیان می‌شود.

لم 1.3.2. [25] فرض کنید $v^{(k)}$ امتداد مرتبه k -ام مولد بی‌نهایت کوچک از گروه یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای (29.2) و $\hat{v}^{(k)}$ امتداد مرتبه k -ام مولد بی‌نهایت کوچک از تبدیلات یک پارامتری معادل آن (34.2) باشد. اگر

$$F(U) = F(x, U, \partial U, \dots, \partial^k U),$$

تابع دلخواهی باشد، آنگاه اتحاد زیر برقرار است

$$v^{(k)} F[U] + F[U] D_i \xi^i(x, U) \equiv \hat{v}^{(k)} F[U] + D_i (F[U] \xi^i(x, U)). \quad (40.2)$$

بنابر آنچه در بالا آمد، قضیه زیر نتیجه می‌شود.

قضیه 2.3.2. (قضیه نوتر). فرض کنید دستگاه $R(x, u)$ ، (1.2) از اصل تغییراتی نتیجه شده باشد، یعنی دستگاه PDE مفروض، مجموعه‌ای از معادلات اویلر-لاگرانژ (27.2) باشد که جواب‌های آن یعنی $u(x)$ اکسترمم

$$U(x) = u(x),$$

اصل تغییراتی $J[U]$ (22.2) با لاگرانژی $L[U]$ باشد و فرض کنید گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای (29.2) تقارن نقطه‌ای از $J[U]$ باشد و همچنین $W^i[U, u]$ برای توابع دلخواه $U(x)$ و $v(x)$ توسط رابطه (25.2) تعریف شده باشد. در اینصورت

(1) به ازای توابع دلخواه $U(x)$ رابطه زیر برقرار می‌باشد:

$$\hat{\eta}^\mu[U] E_{U^\mu}(L[U]) \equiv -D_i \left(\xi^i(x, U) L[U] + W^i[U, \hat{\eta}^\mu[U]] \right), \quad (41.2)$$

یعنی $\{\hat{\eta}^\mu[U]\}_{\mu=1}^m$ مجموعه‌ای از ضرایب تابعی از دستگاه اویلر-لاگرانژ (27.2) است.

(2) به ازای هر جواب دلخواه $u = \theta(x)$ از دستگاه معادلات اویلر-لاگرانژ (25.2)، قانون پایستگی زیر برقرار است:

$$D_i \left(\xi^i(x, u) L[u] + W^i[u, \hat{\eta}[u]] \right) = 0. \quad (42.2)$$

برهان. کافی است در اتحاد (40.2) قرار دهیم $F[U] = L[U]$ ، در این صورت از اتحاد (33.2) نتیجه می‌شود، رابطه

$$\hat{v}^{(k)} L[U] + D_i (L[U] \xi(x, U)) \equiv 0, \quad (43.2)$$

برای تابع دلخواه $U(x)$ برقرار است. در رابطه (43.2) به جای $\hat{v}^{(k)} L[U]$ از رابطه (40.2) مساویش را قرار دهید، آنگاه

(41.2) حاصل می‌شود. اگر $U(x) = u(x)$ جواب دستگاه اویلر-لاگرانژ (27.2) باشد، آنگاه سمت چپ رابطه (41.2)

□

صفر می‌شود و قانون پایستگی (42.2) به دست می‌آید.

۳.۳.۲ تعمیم قضیه نوتر

در سال ۱۹۶۷، بویر^۳ قضیه‌ی نوتر را برای یافتن قوانین پایستگی حاصل از تبدیلات مرتبه بالاتر، تعمیم داد [۲۱]. قضیه بویر با شرط تعمیم نوردایی ذکر شده در قضیه نوتر، این امکان را فراهم می‌آورد که بتوان به سهولت آن دسته از قوانین پایستگی را که از نوردایی تحت تبدیلات مراتب بالاتر ایجاد می‌شوند، محاسبه کرد.

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنید

$$\hat{\mathbf{v}} = \sum_{\mu=1}^m \hat{\eta}^{\mu}(x, U, \partial U, \dots, \partial^s U) \frac{\partial}{\partial U^{\mu}}, \quad (44.2)$$

مولد بی‌نهایت کوچک تبدیلات موضعی مرتبه بالاتر با امتداد $\hat{\mathbf{v}}^{(\infty)}$ باشد، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{\mathbf{v}}^{(\infty)} = \hat{\eta}^{\mu} \frac{\partial}{\partial u^{\mu}} + \hat{\eta}_i^{(1)\mu} \frac{\partial}{\partial u_i^{\mu}} + \dots + \hat{\eta}_{i_1, \dots, i_p}^{(p)\mu} \frac{\partial}{\partial u_{i_1, \dots, i_p}^{\mu}} + \dots, \quad (45.2)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_i^{(1)\mu} &= D_i \hat{\eta}^{\mu}, & \hat{\eta}_{i_1, \dots, i_p}^{(p)\mu} &= D_{i_p} \hat{\eta}_{i_1, \dots, i_{p-1}}^{(p-1)\mu}, \\ \mu &= 1, \dots, m, & i, i_j &= 1, \dots, n, & p &= 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (46.2)$$

فرض کنید که $\hat{\eta}^{\mu}[U] = \hat{\eta}^{\mu}(x, U, \partial U, \dots, \partial^s U)$ در این صورت تبدیل فوق یک تقارن موضعی از $J[U]$ می‌باشد، اگر و تنها اگر به ازای یک مجموعه دلخواه از توابع به فرم

$$A^i[U] = A^i(x, U, \partial U, \dots, \partial^r U), \quad i = 1, \dots, n.$$

رابطه زیر برقرار باشد:

$$\hat{\mathbf{v}}^{(\infty)} L[U] \equiv D_i A^i[U]. \quad (47.2)$$

تعریف ۲.۳.۲. به هر تبدیل موضعی که یک تقارن موضعی $J[U]$ باشد، یک تقارن تغییراتی $J[U]$ گفته می‌شود.

قضیه زیر از یک خاصیت عملگرهای اویلر مبنی بر پوچ ساختن دیورژانس‌ها نتیجه می‌گردد [۲۵].

قضیه ۳.۳.۲. یک تقارن تغییراتی نظیر $J[U]$ با مولد بینهایت کوچک (۴۴.۲)، یک تقارن موضعی با مولد بینهایت کوچک $\hat{X} = \hat{\eta}^{\mu}(x, u, \partial u, \dots, \partial^s u) \frac{\partial}{\partial u^{\mu}}$ از دستگاه اویلر-لاگرانژ متناظر (۲۷.۲) را نتیجه می‌دهد.

قضیه ۴.۳.۲. (تعمیم بویر از قضیه نوتر). [۲۵] فرض کنید که دستگاه PDE، به صورت زیر از یک اصل تغییراتی نشات گرفته باشد:

$$R^{\sigma}[u] = R^{\sigma}(x, u, \partial u, \dots, \partial^k u) = 0 \quad \sigma = 1, \dots, N. \quad (48.2)$$

به عبارت دیگر، فرض کنید که دستگاه فوق مجموعه‌ای از معادلات اویلر-لاگرانژ (۲۸.۲) باشد، بطوریکه توابع $u(x)$ یعنی جواب‌های آن، اکستریمم $U(x) = u(x)$ از اصل تغییراتی $J[U]$ ، با لاگرانژین متناظر $L[U]$ می‌باشند. فرض کنید که

^۳T. H. Boyer

گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای (۲۹.۲) یک تقارن نقطه‌ای از $J[U]$ باشد. همچنین فرض کنید که $W^1[U, u]$ به ازای توابع دلخواه $U(x)$ و $v(x)$ توسط رابطه (۲۵.۲) تعریف شود. در اینصورت، داریم:

(۱) به ازای توابع دلخواه $U(x)$ ، رابطه زیر برقرار می‌باشد:

$$\hat{\eta}^\mu[U] E_{U^\mu}(L[U]) \equiv D_i (A^i[U] - W^i[U, \hat{\eta}^\mu[U]]), \quad (۴۹.۲)$$

به عبارتی دیگر، $\{\hat{\eta}^\mu[U]\}_{\mu=1}^m$ یک مجموعه از ضرایب تابعی برای دستگاه اویلر-لاگرانژ (۲۷.۲) می‌باشد.

(۲) به ازای هر جواب دلخواه $u = \theta(x)$ از دستگاه اویلر لاگرانژ (۲۷.۲)، قانون پایستگی زیر برقرار می‌باشد:

$$D_i (W^i[U, \hat{\eta}^\mu[u]] - A^i[u]) = 0, \quad (۵۰.۲)$$

قضیه ۵.۳.۲. [۲۵] اگر یک قانون پایستگی از طریق فرمول‌بندی نوتر بدست آید، آنگاه همان قانون پایستگی را می‌توان از طریق فرمول‌بندی بویر نیز نتیجه گرفت.

مثال ۱.۳.۲. معادلات ماکسول^۴ که به صورت زیر بیان می‌شوند را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} B_t + E_z &= 0, \\ D_t + B_z &= 0, \\ D &= E + \frac{E^{2\sigma+1}}{2\sigma+1} + P, \\ P_{tt} + P - \alpha E &= 0. \end{aligned} \quad (۵۱.۲)$$

که در آن E, B, D, P متغیرهای وابسته می‌باشند که E میدان الکتریکی، B میدان مغناطیسی، D جریان و P میدان قطبی (قطبش) می‌باشد و t و z متغیرهای وابسته می‌باشند که به ترتیب متغیر زمان و متغیر مکان می‌باشند و α, σ اعداد ثابت می‌باشند.

با معرفی ϕ و F به عنوان پتانسیل الکتریکی و پتانسیل مغناطیسی به طوریکه

$$E = \phi_z, \quad B = F_z, \quad (۵۲.۲)$$

در این صورت معادله اول (۵۱.۲) به صورت $(E + F_t)_z = 0$ تبدیل می‌شود و بنابراین

$$B = F_z, \quad E = -F_t, \quad (۵۳.۲)$$

نمایش‌هایی برای میدان مغناطیسی B و میدان الکتریکی E بر حسب F می‌باشند و لذا دستگاه (۵۱.۲) را می‌توان به صورت دستگاهی با دو معادله به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left(-F_t - \frac{F_t^{2\sigma+1}}{2\sigma+1} + P \right) + F_{zz} = 0, \\ P_{tt} + P + \alpha F_t = 0. \end{cases} \quad (۵۴.۲)$$

^۴Maxwell

این معادله دارای اصل تغییراتی و لاگرانژی، به صورت زیر می‌باشد:

$$J[U] = \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dt L, \quad (55.2)$$

$$L[U] = \frac{1}{2} F_t^2 + \frac{F_t^{2\sigma+2}}{(2\sigma+1)(2\sigma+2)} - \frac{1}{2} F_z^2 + \frac{P_t^2 - P^2}{2\alpha} - F_t P. \quad (56.2)$$

تقارن‌های دستگاه فوق با مولدهای

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, & \mathbf{v}_2 &= \frac{\partial}{\partial z}, \\ \mathbf{v}_3 &= z \frac{\partial}{\partial F}, & \mathbf{v}_4 &= \frac{\partial}{\partial F}, \end{aligned} \quad (57.2)$$

تولید می‌شوند. اکنون برای تقارن \mathbf{v}_1 قانون پایستگی به دست آمده از روش نوتر را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial t} \implies \begin{cases} \hat{\eta}^F = \eta^F - \xi^s u_s^\alpha = 0 - 1 \times F_t - 0 \times F_z = -F_t, \\ \hat{\eta}^P = \eta^P - \xi^s u_s^\alpha = 0 - 1 \times P_t - 0 \times P_z = -P_t. \end{cases}$$

حال به محاسبه W^t و W^z می‌پردازیم. توجه شود که v^α ها همان η^F و η^P می‌باشند.

$$\begin{aligned} W^t &= (-F_t) \left(\frac{\partial L}{\partial F_t} \right) + (-P_t) \left(\frac{\partial L}{\partial P_t} \right) = -F_t \left(F_t + \frac{F_t^{2\sigma+1}(2\sigma+2)}{(2\sigma+2)(2\sigma+1)} - P \right) - P_t \frac{P_t}{\alpha} \\ &= -F_t \left(F_t + \frac{F_t^{2\sigma+1}}{2\sigma+1} - P \right) - \frac{P_t^2}{\alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W^z &= (-F_t) \left(\frac{\partial L}{\partial F_z} \right) + (-P_t) \left(\frac{\partial L}{\partial P_z} \right) \\ &= F_t F_z. \end{aligned}$$

اکنون با کمک قضیه بوییر به یافتن شار و فلاکس مربوط به میدان برداری مربوطه می‌پردازیم:

$$D_t \left(W^t[U, \hat{\eta}] + \xi^t L \right) + D_z \left(W^z[U, \hat{\eta}] + \xi^z L \right) = 0, \quad (58.2)$$

با توجه به میدان برداری $\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ داریم

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial t} \implies \xi^t = 1, \xi^z = 0 \implies \begin{cases} W^t + \xi^t L = \frac{E^2}{2} - \frac{B^2}{2} + \frac{E^{2\sigma+2}}{2\sigma+2} - \frac{P_t^2 - P^2}{2\alpha}, \\ W^z + \xi^z L = -F_t F_z = EB. \end{cases}$$

در نتیجه قانون پایستگی برای این حالت به صورت زیر بیان می‌شود:

$$D_t \left(\frac{E^2}{2} - \frac{B^2}{2} + \frac{E^{2\sigma+2}}{2\sigma+2} - \frac{P_t^2 - P^2}{2\alpha} \right) + D_z (EB) = 0. \quad (59.2)$$

قانون پایستگی (59.2) همان قانون پایستگی انرژی الکترومغناطیس (قضیه پوانتینگ) ^۵ می‌باشد.

اکنون میدان برداری \mathbf{v}_2 را در نظر می‌گیریم:

$$\blacktriangleright \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\partial}{\partial z} \implies \begin{cases} \hat{\eta}^F = -F_z & \hat{\eta}^P = -P_z, \\ W^t = B \left(E + \frac{E^{2\sigma+1}}{2\sigma+1} + P \right) - \frac{P_z P_t}{\alpha}, \\ W^z = B^2. \end{cases}$$

^۵Poynting

بنابراین قانون پایستگی در این حالت به صورت زیر به دست می‌آید، که همان قانون پایستگی تکانه^۶ می‌باشد.

$$D_z \left(\frac{E^2 + B^2}{2} + \frac{E^{2\sigma+2}}{(2\sigma+1)(2\sigma+2)} + \frac{P_t^2 - P^2}{2\alpha} + EP \right) + D_t \left(BE + \frac{BE^{2\sigma+1}}{2\sigma+1} + BP - \frac{P_z P_t}{\alpha} \right) = 0. \quad (۶۰.۲)$$

در ادامه میدان برداری v_3 را در نظر می‌گیریم:

$$\blacktriangleright \quad v_3 = z \frac{\partial}{\partial F} \implies \begin{cases} \hat{\eta}^F = z & \hat{\eta}^P = 0, \\ D_t \left(zE + \frac{zE^{2\sigma+1}}{2\sigma+1} + zP \right) + D_z (zB - F) = 0. \end{cases}$$

در پایان میدان برداری v_4 را در نظر می‌گیریم که می‌توان قوانین پایستگی آن را به طور خلاصه به صورت زیر نمایش داد.

$$\blacktriangleright \quad v_4 = \frac{\partial}{\partial F} \implies \begin{cases} \hat{\eta}^F = 1 & \hat{\eta}^P = 0, \\ D_t \left(E + \frac{E^{2\sigma+1}}{2\sigma+1} + P \right) + D_z (B) = 0. \end{cases}$$

۴.۲ الگوریتم روش هرمان-پل

به دنبال روش‌هایی که تاکنون برای محاسبه قوانین پایستگی بیان شد، اکنون در پی بیان روشی هستیم که در اواخر سال ۲۰۰۹ ویلی هرمان^۷ و داگلاس پل^۸ یافتن قوانین پایستگی ارائه کردند [۶۴، ۶۵]. الگوریتم هرمان-پل برای یافتن قوانین پایستگی موضعی به شرح زیر است:

۱. در این روش ابتدا باید PDE مورد نظر را به صورت تکاملی بنویسیم و اگر این امکان فراهم نباشد، نمی‌توان از این روش استفاده کرد. لازم به ذکر است که نمایش به فرم تکاملی به این معناست که t را به عنوان متغیر تکاملی در نظر بگیریم و مشتق متغیر وابسته u نسبت به t باید در یک سمت از معادله به شکل تنها بتواند قرار گیرد.

۲. چون معادله به فرم تکاملی است می‌توان جملات u_t را از معادله حذف کرد و از این مساله که اثر عملگر اویلر بر عبارت دقیق باقی مانده، حاصلی برابر با صفر دارد استفاده نمود تا به دستگاه خطی از ضرایب نامعین برسیم. با حل این دستگاه، ضرایب در نظر گرفته شده محاسبه می‌شوند.

۳. با استفاده از عملگر هموتویی ضرایبی را به دست می‌آوریم و با آن ضرایب شارهای متناظر را محاسبه می‌کنیم.

۴. قوانین پایستگی متناظر با چگالی و شارهای بدست آمده محاسبه می‌شوند.

تعریف ۱.۴.۲. عملگر هموتویی دو بعدی، عملگر برداری است، با دو مؤلفه

$$\left(H_{u(x,t)}^x(f), H_{u(x,t)}^t(f) \right), \quad (۶۱.۲)$$

^۶momentum

^۷Willy Hereman

^۸Douglas Poole

که مولفه‌های آن با روابط زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} H_{u(x,t)}^x(f) &= \int_0^1 \sum_{j=1}^q I_{u^j}^x(f)[\lambda u] \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ H_{u(x,t)}^t(f) &= \int_0^1 \sum_{j=1}^q I_{u^j}^t(f)[\lambda u] \frac{d\lambda}{\lambda}, \end{aligned} \quad (۶۲.۲)$$

و توابع زیر انتگرال $I_{u^j}^x(f)$ و $I_{u^j}^t(f)$ عبارتند از

$$\begin{aligned} I_{u^j}^x(f) &= \sum_{k_1=1}^{M_1^j} \sum_{k_2=0}^{M_2^j} \left[\sum_{i_1=0}^{k_1-1} \sum_{i_2=0}^{k_2} B^x u_{x^{i_1} t^{i_2}}^j (-D_x)^{k_1-i_1-1} (-D_t)^{k_2-i_2} \right] \frac{\partial f}{\partial u_{x^{k_1} t^{k_2}}^j}, \\ I_{u^j}^t(f) &= \sum_{k_1=0}^{M_1^j} \sum_{k_2=1}^{M_2^j} \left[\sum_{i_1=0}^{k_1} \sum_{i_2=0}^{k_2-1} B^t u_{x^{i_1} t^{i_2}}^j (-D_x)^{k_1-i_1} (-D_t)^{k_2-i_2-1} \right] \frac{\partial f}{\partial u_{x^{k_1} t^{k_2}}^j}, \end{aligned} \quad (۶۳.۲)$$

که M_1^j و M_2^j به ترتیب مشتقات f در u نسبت به x و t می‌باشند. ضرایب ترکیبیاتی عبارتند از

$$B^x = B(i_1, i_2, k_1, k_2) = \frac{\binom{i_1+i_2}{i_1} \binom{k_1+k_2-i_1-i_2-1}{k_1-i_1-1}}{\binom{k_1+k_2}{k_1}}, \quad (۶۴.۲)$$

$$B^t = B(i_1, i_2, k_1, k_2) = \frac{\binom{i_1+i_2}{i_2} \binom{k_1+k_2-i_1-i_2-1}{k_2-i_2-1}}{\binom{k_1+k_2}{k_2}}. \quad (۶۵.۲)$$

تعریف ۲.۴.۲. به همین ترتیب می‌توان عملگر هوموتوبی سه بعدی، را تعریف نمود که میدان برداری سه مولفه‌ای می‌باشد:

$$\left(H_{u(t,x,z)}^t f, H_{u(t,x,x)}^x f, H_{u(t,x,x)}^z f \right), \quad (۶۶.۲)$$

که در آن مؤلفه x به فرم زیر است

$$H_{u(t,x,z)}^x(f) = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^q I_{u^j}^x(f) \right) [\lambda u] \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad (۶۷.۲)$$

و مؤلفه‌های t و z نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند. تابع زیر انتگرال $I_{u^j}^x(f)$ عبارت است از

$$\begin{aligned} I_{u^j}^x(f) &= \sum_{k_1=1}^{M_1^j} \sum_{k_2=0}^{M_2^j} \sum_{k_3=0}^{M_3^j} \left[\sum_{i_1=0}^{k_1-1} \sum_{i_2=0}^{k_2} \sum_{i_3=0}^{k_3} B^x u_{x^{i_1} t^{i_2} z^{i_3}}^j \right. \\ &\quad \left. (-D_x)^{k_1-i_1-1} (-D_t)^{k_2-i_2} (-D_z)^{k_3-i_3} \right] \frac{\partial f}{\partial u_{x^{k_1} t^{k_2} z^{k_3}}^j}. \end{aligned} \quad (۶۸.۲)$$

ضریب ترکیبیاتی در رابطه فوق به صورت

$$B^x = \frac{\binom{i_1+i_2+i_3}{i_1} \binom{i_2+i_3}{i_2} \binom{k_1+k_2+k_3-i_1-i_2-i_3-1}{k_1-i_1-1} \binom{k_2+k_3-i_2-i_3}{k_2-i_2}}{\binom{k_1+k_2+k_3}{k_1} \binom{k_2+k_3}{k_2}}, \quad (۶۹.۲)$$

تعریف می‌شود. به طور مشابه $I_{u^j}^z f$ ، $I_{u^j}^t f$ ، B^t و B^z قابل تعریف هستند.

تا به اینجا الگوریتم روش هرمان-پل بیان شد. اکنون به دنبال این هستیم که به کمک این الگوریتم، روش مستقیم را که در ابتدای فصل بیان کردیم را بهینه سازی نماییم. در بخش روش مستقیم؛ نیاز به یافتن ضرایب تابعی داریم که به کمک رابطه (۱۶.۲) بدست می آید، که می توان از نرم افزار میپل نیز برای این منظور استفاده کرد. ویژگی این فاکتورهای انتگرال این است که مرتبه مشتقاتی که در فاکتورهای انتگرال ظاهر می شوند با مرتبه مشتقاتی که در ضرایب تابعی ظاهر می شوند یکسان است. بنابراین هنگام در نظر گرفتن ضرایب تابعی، کفایت مرتبه مشتقات مورد نظر را تا مرتبه مشتقات فاکتورهای انتگرال در نظر بگیریم. سپس در مرحله سوم از روش مستقیم که به کمک انتگرال گیری به محاسبه شارها می پردازیم، از آنجایی که انتگرال گیری و حل رابطه (۱۶.۲) در بعضی از معادلات دشوار است می توان با استفاده از عملگر هوموتوپیک شارها و چگالی ها را بیابیم. با تغییراتی که بیان شد، الگوریتم روش مستقیم را به صورت زیر باز نویسی می کنیم:

۱. برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $R(x, u)$ می بایست به جستجوی ضرایبی در آن به فرم

$$\{\Lambda_\sigma(x, U, \dots, \partial^r U)\}_{\sigma=1}^l,$$

پردازید.

۲. به منظور یافتن Λ_σ ها کافی است فاکتورهای انتگرال دستگاه را با مشخص کردن مرتبه مورد نظر به کمک نرم افزار میپل محاسبه نماییم.

۳. از عملگر هوموتوپیک برای یافتن شارهای متناظر با ضرایب تابعی $\Phi^i[u]$ استفاده نماییم.

۴. در نهایت، هر شار و ضریب تابعی، یک قانون پایستگی $D_i \Phi^i(x, u, \dots, \partial^r u) = 0$ برای تمام جواب های $u(x)$ را نتیجه می دهد.

مثال ۱.۴.۲. معادله هری دایم به فرم $F[x, u] = u_t - u^3 u_{xxx} = 0$ را در نظر بگیرید. همان طور که در روش مستقیم آمده است، ضرایب برای معادله هری دایم به صورت زیر می باشند:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{1}{u^3}, \\ \Lambda_2 &= \frac{1}{u^2}, \\ \Lambda_3 &= \frac{x}{u^3}, \\ \Lambda_4 &= \frac{x^2}{2u^3}, \end{aligned}$$

که متناظر با هر Λ_i می توان قوانین پایستگی را با استفاده از روش هرمان-پل بدست آورد. در ادامه به جهت جلوگیری از طولانی شدن محاسبات، قوانین پایستگی متناظر با ضریب

$$\Lambda_1 = \frac{1}{u^3}, \quad (70.2)$$

را به دست می آوریم و از آوردن سایر موارد که مشابه می باشند، اجتناب می شود. ابتدا f را به صورت حاصلضربی از ضریب Λ_1 در معادله F به صورت

$$f = \Lambda_1 \cdot F[x, u] = \left(\frac{1}{u^3}\right)(u_t - u^3 u_{xxx}), \quad (71.2)$$

می‌نویسیم. بیشترین مرتبه مشتق نسبت به x و t به ترتیب ۳ و ۱ می‌باشد. رابطه (۶۳.۲) برای این معادله عبارت است از:

$$I_u^t(f) = \sum_{k_1=0}^3 \sum_{k_2=1}^1 \left[\sum_{i_1=0}^{k_1} \sum_{i_2=0}^{k_2-1} B^t u_{x^{i_1} t^{i_2}} (-D_x)^{k_1-i_1} (-D_t)^{k_2-i_2-1} \right] \frac{\partial f}{\partial u_{x^{k_1} t^{k_2}}}.$$

اگر در این رابطه $k_2 = 1$ و $k_1 = 0$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$I_u^t(f) = \left[\sum_{i_1=0}^0 \sum_{i_2=0}^0 B^t u (-D_x)^{0-i_1} (-D_t)^{0-i_2} \right] \frac{\partial f}{\partial u_t} = \frac{1}{u^2},$$

سایر حالت‌های $k_2 = 1$ با $k_1 = 1$ و $k_1 = 2$ و $k_1 = 3$ صفر خواهند شد. در ادامه می‌توان تابع $I_u^x(f)$ را نیز از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$I_u^x(f) = \sum_{k_1=1}^3 \sum_{k_2=0}^1 \left[\sum_{i_1=0}^{k_1-1} \sum_{i_2=0}^{k_2} B^x u_{x^{i_1} t^{i_2}} (-D_x)^{k_1-i_1-1} (-D_t)^{k_2-i_2} \right] \frac{\partial f}{\partial u_{x^{k_1} t^{k_2}}}, \quad (۷۲.۲)$$

کلیه حالت‌هایی که برای k_i ها وجود دارد به صورت زیر است:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = 1, k_2 = 0 \Rightarrow I_1^x = \left[\sum_{i_1=0}^0 \sum_{i_2=0}^0 B^x u (-D_x)^0 (-D_t)^0 \right] \frac{\partial f}{\partial u_x} = 0, \\ k_1 = 1, k_2 = 1 \Rightarrow I_2^x = \left[\sum_{i_1=0}^0 \sum_{i_2=0}^1 B^x u_{x^{i_1} t^{i_2}} (-D_x)^{i_1} (-D_t)^{i_2} \right] \frac{\partial f}{\partial u_{xt}} = 0, \\ k_1 = 2, k_2 = 0 \Rightarrow I_3^x = \left[\sum_{i_1=0}^1 \sum_{i_2=0}^0 B^x u_{x^{i_1} t^{i_2}} (-D_x)^{1-i_1} (-D_t)^{-i_2} \right] \frac{\partial f}{\partial u_{xx}} = 0, \\ k_1 = 2, k_2 = 1 \Rightarrow I_4^x = \left[\sum_{i_1=0}^1 \sum_{i_2=0}^1 B^x u_{x^{i_1} t^{i_2}} (-D_x)^{1-i_1} (-D_t)^{1-i_2} \right] \frac{\partial f}{\partial u_{xxt}} = 0, \\ k_1 = 3, k_2 = 0 \Rightarrow I_5^x = \left[\sum_{i_1=0}^2 \sum_{i_2=0}^0 B^x u_{x^{i_1} t^{i_2}} (-D_x)^{2-i_1} (-D_t)^{-i_2} \right] \frac{\partial f}{\partial u_{xxx}} = -u_{xx}, \end{array} \right.$$

که برای نمونه محاسبات انجام شده به ازای $k_1 = 3, k_2 = 0$ به تفصیل در زیر آمده است :

$$B^x = 1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u_{xxx}} = -1 \left\{ \begin{array}{l} i_1 = 0, i_2 = 0 \Rightarrow I^x = 1u(-D_x)^2(-D_t)^0(-1) = 0, \\ i_1 = 1, i_2 = 0 \Rightarrow I^x = 1u_{xx}(-D_x)^1(-D_t)^0(-1) = 0, \\ i_1 = 2, i_2 = 0 \Rightarrow I^x = 1u_{xx}(-D_x)^0(-D_t)^0(-1) = -u_{xx}, \end{array} \right.$$

بنابراین مؤلفه x از تابع تحت انتگرال به صورت

$$I^x(f) = -u_{xx},$$

خواهد بود. لذا شار تولید شده متناظر با ضریب Λ_1 ، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \phi_{u(x,t)}^x(f) &= \int_0^1 (I^x(f))[\lambda u] \frac{d\lambda}{\lambda} = -\lambda u_{xx} \Big|_0^1 = -u_{xx}, \\ \psi_{u(x,t)}^t(f) &= \int_0^1 (I^t(f))[\lambda u] \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{-1}{2\lambda^2 u^2} \Big|_0^1 = \frac{-1}{2u^2}, \end{aligned}$$

لذا قوانین پایستگی به ازای Λ_1 به شرح زیر است:

$$D_t\left(\frac{-1}{2u^2}\right) + D_x(-u_{xx}) = \Lambda_1 F \equiv 0. \quad (۷۳.۲)$$

به طریق مشابه می‌توان متناظر با ضرایب Λ_2 و Λ_3 و Λ_4 نیز را محاسبه کرد که نتایج آن را در جدول (۲.۲) خلاصه کرده‌ایم.

Λ_i	I^x	I^t	ψ_i^t	ϕ_i^x
$\Lambda_1 = \frac{1}{u^3}$	$-u_{xx}$	$\frac{1}{u^2}$	$\psi_1^t = \frac{-1}{2u^2}$	$\phi_1^x = -u_{xx}$
$\Lambda_2 = \frac{1}{u^2}$	$-2uu_{xx} + u_x^2$	$\frac{1}{u}$	$\psi_2^t = \frac{-1}{u}$	$\phi_2^x = \frac{1}{2}u_x^2 - uu_{xx}$
$\Lambda_3 = \frac{x}{u^3}$	$u_x - xu_{xx}$	$\frac{x}{u^2}$	$\psi_3^t = \frac{-x}{2u^2}$	$\phi_3^x = u_x - xu_{xx}$
$\Lambda_4 = \frac{x^2}{2u^3}$	$-u + xu_x - \frac{x^2}{2}u_{xx}$	$\frac{x^2}{2u^2}$	$\psi_4^t = \frac{-x^2}{4u^2}$	$\phi_4^x = -u + xu_x - \frac{x^2}{2}u_{xx}$

جدول ۲.۲: جگالی و شارهای متناظر با ضرایب Λ_i با استفاده از روش هرمان-پل

۵.۲ روش ابرایموف

ابرایموف در مقاله [۴۹] تعریف جدیدی را از معادله الحاقی برای معادلات دیفرانسیل غیر خطی ارائه داد و سپس لاگرانژی فرمال برای هر معادله (خطی یا غیرخطی) را به دست آورد و از این طریق توانست قوانین پایستگی معادلات دیفرانسیل را بدون لاگرانژی کلاسیک محاسبه کند. به این منظور در ادامه نیاز به معرفی مفاهیمی همچون اکیداً خودالحاق، شبه خودالحاق و در نهایت خودالحاق غیرخطی هستیم.

دستگاه معادلات دیفرانسیل با n متغیر مستقل $x = (x^1, \dots, x^n)$ و m متغیر وابسته $u = (u^1, \dots, u^m)$ و مشتقات متغیرهای وابسته تا مرتبه k ام، به صورت $u_{(1)}, \dots, u_{(k)}$ را به فرم زیر در نظر بگیرید:

$$R^\alpha[U] = R^\alpha(x, u, \partial u, \dots, \partial^k u) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m. \quad (۷۴.۲)$$

تعریف ۱.۵.۲. لاگرانژی قراردادی برای دستگاه (۷۴.۲) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم که در آن $v = (v^1, \dots, v^m)$ متغیرهای وابسته جدید هستند.

$$L = \sum_{\beta=1}^m v^\beta R^\beta(x, u, \partial u, \dots, \partial^k u), \quad (۷۵.۲)$$

با تعریف لاگرانژین قراردادی می‌توان معادلات الحاقی را بیان کرد.

تعریف ۲.۵.۲. معادلات الحاقی برای دستگاه (۷۴.۲) به صورت

$$(R^\alpha)^*(x, u, v, \partial u, \dots, \partial^k u, \partial^k v) = \frac{\delta L}{\delta u^\alpha} = 0, \quad (۷۶.۲)$$

تعریف می‌شود با این شرط که $\frac{\delta}{\delta u^\alpha}$ همان عملگر اویلر لاگرانژ است که از رابطه

$$\frac{\delta}{\delta u^\alpha} = \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s D_{i_1} \cdots D_{i_s} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \cdots i_s}^\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, m, \quad (77.2)$$

به دست می‌آید، البته در الگوریتم روش مستقیم عملگر اویلر لاگرانژ را با نماد E_{U^j} نمایش دادیم.

فرم باز شده رابطه (۷۶.۲) را می‌توان به صورت زیر نمایش داد که D_i ها همان مشتق‌های کامل می‌باشند:

$$\frac{\delta(v^\beta R_\beta)}{\delta u^\alpha} = \frac{\partial(v^\beta R_\beta)}{\partial u^\alpha} - D_i \left(\frac{\partial(v^\beta R_\beta)}{\partial u_i^\alpha} \right) + D_i D_k \left(\frac{\partial(v^\beta R_\beta)}{\partial u_{ik}^\alpha} \right) + \dots$$

تعریف ۳.۵.۲. دستگاه معادلات دیفرانسیل (۷۴.۲) را خودالحاقی غیرخطی گویند هرگاه دستگاه الحاقی (۷۶.۲) روی همه جواب‌های دستگاه (۷۴.۲) با جایگذاری $v^\alpha = \phi^\alpha(x, u)$ به ازای $\alpha = 1, \dots, m$ صدق کند. یعنی رابطه زیر برقرار باشد:

$$(R^\alpha)^* \left(x, u, v, \dots, u^{(s)}, v^{(s)} \right) = \lambda_\alpha^\beta R^\beta, \quad (78.2)$$

در رابطه فوق ضرایب λ_α^β توابعی به فرم $\lambda_\alpha^\beta = \lambda_\alpha^\beta(x, u, \dots, \partial^s u)$ می‌باشند و $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(s)}$ نیز مشتقات کامل نسبت به v می‌باشند.

تعریف ۴.۵.۲. در تعریف خودالحاقی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل (۷۴.۲)؛ هرگاه معادله الحاقی به دست آمده از (۷۶.۲) با جایگذاری $u = v$ تبدیل به خود معادله با یک ضریب λ شود، در این صورت دستگاه (۷۴.۲) را اکیداً خودالحاقی می‌نامیم.

تعریف ۵.۵.۲. در تعریف فوق دستگاه معادلات دیفرانسیل (۷۴.۲) را شبه خودالحاقی گویند هرگاه با جایگذاری

$$v = \varphi(u),$$

با شرط $\varphi'(u) \neq 0$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$R_\alpha^* \left(x, u, \varphi(u), \dots, u^{(s)}, \varphi^{(s)}(u) \right) = \lambda_\alpha^\beta R^\beta. \quad (79.2)$$

با مقایسه (۷۸.۲) و (۷۹.۲) این چنین نتیجه می‌شود که تفاوت اصلی خودالحاقی و شبه خودالحاقی در φ می‌باشد؛ به طوریکه در شبه خودالحاقی φ تنها به u وابسته است ولی در خودالحاقی غیرخطی φ علاوه بر متغیر وابسته u به متغیر مستقل x نیز وابسته می‌باشد.

مثال ۱.۵.۲. معادله PDE زیر را در نظر بگیرید:

$$F = \mu(u) \left(u_t - f(u) \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right). \quad (80.2)$$

اکنون قصد داریم نوع خودالحاقی این معادله را مشخص نماییم [۵۱]. روال کار به این صورت است که ابتدا لاگرانژی قراردادی برای این معادله را تعیین می‌کنیم:

$$L = v\mu(u) \left(u_t - f(u) \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right).$$

عملگر اویلر-لاگرانژ نیز برای این معادله به صورت

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} - D_t \frac{\partial}{\partial u_t} + (-1)^n D_x^n \frac{\partial}{\partial u_x^{(n)}},$$

تعریف می‌شود. بنابراین معادله الحاق به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta u} &= -D_t[\mu(u)v] - D_x^n[\mu(u)f(u)v] + v\mu'(u)u_t - v[\mu(u)f(u)]'u_n, \\ &= -\mu(u)u_t - u u_{(n)}(f(u)\mu(u))' + (-1)^n D_x^n(u\mu(u)f(u)), \end{aligned}$$

حال اگر $\mu(u)$ که تابعی است بر حسب u به صورت $\mu(u) = \frac{1}{f(u)}$ باشد، اکنون به وضوح با تبدیل v به u معادله الحاقی به همان معادله اولیه تبدیل خواهد شد. پس معادله (۸.۲) یک معادله اکیداً خود الحاقی است و در رابطه (۷۸.۲) λ برابر با -1 می‌باشد.

مثال ۲.۵.۲. معادله غیر خطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u_t = \nabla(k(u)\nabla u). \quad (۸۱.۲)$$

با توجه به اینکه در ریاضیات پایه داریم:

$$\begin{aligned} \nabla u &= (u_{x^1}, u_{x^2}, \dots, u_{x^n}), \\ \nabla u \cdot \nabla u &= (u_{x^1}^2 + \dots + u_{x^n}^2), \\ \Delta u &= (u_{x^1x^1} + \dots + u_{x^nx^n}), \end{aligned}$$

بنابراین فرم باز شده این معادله به صورت زیر می‌باشد:

$$u_t = \nabla k(u) \cdot \nabla u + k(u)\Delta u = k'(u)(u_{x^1}^2 + \dots + u_{x^n}^2) + k(u)(u_{x^1x^1} + \dots + u_{x^nx^n}).$$

لاگرانژی قراردادی برای این معادله عبارت است از:

$$L = vF = vk'(u)(u_{x^1}^2 + \dots + u_{x^n}^2) + vk(u)(u_{x^1x^1} + \dots + u_{x^nx^n}) - vu_t.$$

با اعمال عملگر اویلر-لاگرانژ بر این لاگرانژی خواهیم دید که معادله الحاقی برای معادله به صورت زیر است [۵۱]:

$$\begin{aligned} F^* &= \frac{\delta L}{\delta u} = k''vu_{x^1}^2 + \dots + k''vu_{x^n}^2 + vk'u_{x^1x^1} + \dots + vk'u_{x^nx^n} - D_{x^1}(2vk'u_{x^1}) \\ &\quad - \dots - D_{x^n}(2vk'u_{x^n}) + D_{x^1x^1}(vk) + \dots + D_{x^nx^n}(vk) \\ &= v_t + k(\Delta v), \end{aligned}$$

که به وضوح با تبدیل v به u به معادله (۸۱.۲) تبدیل نخواهد شد پس این معادله اکیداً خود الحاقی نیست. اکنون با در نظر گرفتن $v = \varphi(t, x^1, \dots, x^n, u)$ داریم:

$$\begin{aligned} F^* &= \varphi_t + \varphi_u u_t + k\varphi_{x^1x^1} + 2k\varphi_{ux^1}u_{x^1} + k\varphi_{uu}u_{x^1}^2 + k\varphi_u u_{x^1x^1} + \dots \\ &\quad + k\varphi_{x^nx^n} + 2\varphi_{ux^n}u_{x^n} + \varphi_{uu}u_{x^n}^2 + \varphi_u u_{x^nx^n} \end{aligned}$$

$$= \lambda u_t - \lambda k u_{x^1 x^1} - \dots - \lambda k u_{x^n x^n} - \lambda k' u_{x^1}^2 - \dots - \lambda k' u_{x^n}^2. \quad (۸۲.۲)$$

در ادامه با در نظر گرفتن ضرایب مشتقات نسبت به u یعنی u_t و $u_{x^1 x^1}$ و \dots خواهیم داشت:

$$\varphi_u = 0, \quad \varphi_t = 0, \quad \Delta \varphi = 0. \quad (۸۳.۲)$$

در نتیجه φ تابعی است بر حسب x^1, \dots, x^n یعنی $\varphi = \varphi(x^1, \dots, x^n)$ و لذا معادله (۸۱.۲) شبه خود الحاقی می‌باشد.

مثال ۳.۵.۲. معادله مرتبه دوم غیر خطی

$$C(\psi)\psi_t = [K(\psi)\psi_x]_x + [K(\psi)(\psi_z - 1)]_z - S(\psi), \quad (۸۴.۲)$$

که به معادله آبیاری شناخته می‌شود را در نظر بگیرید. ψ ، $C(\psi)$ و $S(\psi)$ به ترتیب نشان‌دهنده رطوبت سطح خاک، ظرفیت آب و منبع آب می‌باشند و به $K(\psi)$ اصطلاحاً هدایت هیدرولیکی گویند. با توجه به معادله

$$S'(\psi) = aC(\psi), \quad (۸۵.۲)$$

که در آن a ثابت دلخواه می‌باشد، فرم بسط داده شده معادله (۸۴.۲) به صورت زیر می‌باشد:

$$F \equiv K' \psi_x^2 + K \psi_{xx} + K' \psi_z^2 + K \psi_{zz} - K' \psi_z - S - C \psi_t = 0,$$

و معادله الحاقی آن عبارت است از:

$$F^* \equiv C(v_t - av) + K(v_{xx} + v_{zz}) + K'v_z. \quad (۸۶.۲)$$

با جایگذاری $v = \varphi(t, x, \psi)$ و مشتقات لازم

$$v_t = \varphi_t + \varphi_\psi \psi_t,$$

$$v_x = \varphi_x + \varphi_\psi \psi_x,$$

$$v_{xx} = \varphi_{xx} + 2\varphi_{x\psi} \psi_x + \varphi_{\psi\psi} \psi_x^2 + \varphi_\psi \psi_{xx},$$

$$v_{zz} = \varphi_{zz} + 2\varphi_{z\psi} \psi_z + \varphi_{\psi\psi} \psi_z^2 + \varphi_\psi \psi_{zz},$$

با توجه به این شرط که $F^* = \lambda F$ و از آنجایی که $F = 0$ و توابع $C(\psi)$ ، $K(\psi)$ و $S(\psi)$ ناصفر می‌باشند، طبق رابطه (۸۶.۲) خواهیم داشت:

$$v_z = 0,$$

$$v_{xx} = 0, \quad (۸۷.۲)$$

$$v_t - av = 0.$$

از دو معادله ابتدایی (۸۷.۲) نتیجه می‌گیریم

$$v = p(t)x + q(t), \quad (۸۸.۲)$$

با جایگذاری (۸۸.۲) در سومین معادله (۸۷.۲) خواهیم داشت:

$$[p'(t) - ap(t)]x + q'(t) - aq(t) = 0.$$

از حل دستگاه فوق به معادلات زیر می‌رسیم:

$$p'(t) - ap(t) = 0, \quad q'(t) - aq(t) = 0,$$

در نتیجه

$$p(t) = b^{at}, \quad q(t) = l^{at},$$

به شرط آنکه b, l ثوابت دلخواه می‌باشند و لذا معادله آبیاری با شرط (۸۵.۲) و با جایگذاری

$$v = (bx + l)e^{at},$$

در شرط خود الحاق غیر خطی صادق است.

قضیه ۱.۵.۲. (قضیه ابراگیموف) فرض کنیم که دستگاه معادلات دیفرانسیل (۷۴.۲)، یک معادله خود الحاق غیر خطی باشد. در این صورت با هر یک از تقارن‌های نقطه‌ای، برخوردی و مراتب بالاتر دستگاه می‌توان قانون پایستگی به فرم زیر

به تعداد متغیرهای مستقل $n, \dots, 1$

$$D_i(C^i) = 0,$$

را تولید کرد که مؤلفه‌های C^i از رابطه زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} C^i = & \xi^i L + W^\sigma \left[\frac{\partial L}{\partial u_i^\sigma} - D_j \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ij}^\sigma} \right) + D_j D_k \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\sigma} \right) - \dots \right] \\ & + D_j (W^\sigma) \left[\frac{\partial L}{\partial u_{ij}^\sigma} - D_k \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\sigma} \right) + \dots \right] + D_j D_k (W^\sigma) \left[\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\sigma} - \dots \right] + \dots, \end{aligned} \quad (۸۹.۲)$$

به طوریکه که در آن $W^\sigma = \eta^\sigma - \xi^j u_j^\sigma$ و $L = v^\beta \Delta^\beta$

برهان. یادآور می‌شویم که قضیه نوتر، وابسته به قوانین پایستگی با تقارن‌های معادلات دیفرانسیل که از اصول تغییرات نتیجه می‌شود، ابتدأً با کمک حساب تغییرات اثبات شده است. اما روش دیگر نیز برای اثبات آن وجود دارد. اتحاد عملگری نوتر زیر که در [۱۱۰] ثابت شده است و در [۶۶] جهت ساده‌سازی اثبات قضیه نوتر استفاده شده است را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{v} + D_i(\xi^i) = W^\alpha \frac{\delta}{\delta u^\alpha} + D_i \mathbf{N}^i. \quad (۹۰.۲)$$

در این اتحاد \mathbf{v} مولد بی‌نهایت کوچک به صورت

$$\mathbf{v} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + \zeta_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + \zeta_{i_1 i_2}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2}^\alpha} + \dots, \quad (۹۱.۲)$$

است که ضرایب آن با فرمول امتداد به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\zeta_i^\alpha = D_i(W^\alpha) + \xi^j u_{ij}^\alpha, \quad \zeta_{i_1 i_2}^\alpha = D_{i_1} D_{i_2}(W^\alpha) + \xi^j u_{j i_1 i_2}^\alpha. \quad (92.2)$$

در رابطه (۹۰.۲)، عملگر اویلر-لاگرانژ بوده و همچنین عملگر \mathbf{N}^i با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{N}^i = \xi^i + W^\alpha \frac{\delta}{\delta u_i^\alpha} + \sum_{s=1}^{\infty} D_{i_1} \cdots D_{j_s}(W^\alpha) \frac{\delta}{\delta u_{i_1 \cdots i_s}^\alpha}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (93.2)$$

طبق خاصیت عملگر اویلر-لاگرانژ داریم:

$$\frac{\delta L}{\delta u^\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m. \quad (94.2)$$

و نیز فرض کنیم مولد (۹۱.۲) توسط معادله (۹۴.۲) به عنوان تقارن پذیرفته می‌شود و نیز انتگرال تغییرات

$$\int L(x, u, u_{(1)}, \dots) dx,$$

تحت گروه تبدیلات با مولد \mathbf{v} ناوردا باقی می‌ماند، بر این اساس در [۶۶] تساوی زیر اثبات شده است:

$$\mathbf{v}(L) + D_i(\xi^i)L = 0. \quad (95.2)$$

بنابراین، اگر دو سوی رابطه (۹۰.۲) را روی L اعمال کنیم، به این صورت که:

$$\mathbf{v}(L) + D_i(\xi^i)L = W^\alpha \frac{\delta L}{\delta u^\alpha} + D_i[\mathbf{N}^i(L)],$$

با در نظر گرفتن (۹۴.۲) و (۹۵.۲)، خواهیم دید که بردار با مؤلفه‌های

$$C^i = \mathbf{N}^i(L), \quad i = 1, \dots, n, \quad (96.2)$$

در معادله قانون پایستگی

$$D_i(C^i)|_{(94.2)} = 0, \quad (97.2)$$

صدق می‌کند. در هنگام محاسبه قوانین پایستگی، عملگر (۹۳.۲) را فقط محدود به مشتق‌های درگیر در لاگرانژی خواهیم

کرد و C^i ها از رابطه (۹۰.۲) محاسبه خواهند شد و این برهان را کامل می‌کند. □

ملاحظه ۱.۵.۲. از آنجایی که برای دستگاه معادلات

$$R^\alpha[U] = R^\alpha(x, u, \partial u, \dots, \partial^k u) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, m,$$

لاگرانژی قراردادی به صورت $L = v^\beta R^\beta(x, u, \partial u, \dots, \partial^k u)$ ، تعریف می‌شود، لذا $\xi^i L$ چیزی جز یک قانون

پایستگی بدیهی نمی‌باشد و بنابراین رابطه (۸۹.۲) را به صورت زیر می‌توان بازنویسی کرد.

$$C^i = W^\sigma \left[\frac{\partial L}{\partial u_i^\sigma} - D_j \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ij}^\sigma} \right) + D_j D_k \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\sigma} \right) - \dots \right] \quad (98.2)$$

$$+ D_j(W^\sigma) \left[\frac{\partial L}{\partial u_{ij}^\sigma} - D_k \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\sigma} \right) + \dots \right] + D_j D_k(W^\sigma) \left[\frac{\partial L}{\partial u_{ijk}^\sigma} - \dots \right] + \dots$$

مثال ۴.۵.۲. بار دیگر معادله آبیاری را که به صورت زیر تعریف می‌شود را در نظر می‌گیریم

$$C(\psi)\psi_t = [K(\psi)\psi_x]_x + [K(\psi)(\psi_z - 1)]_z - S(\psi), \quad (۹۹.۲)$$

لاگرانژی قراردادی برای این معادله به صورت

$$L = v(C(\psi)\psi_t - [K(\psi)\psi_x]_x - [K(\psi)(\psi_z - 1)]_z + S(\psi)), \quad (۱۰۰.۲)$$

است و معادله الحاقی برای آن عبارت است از:

$$F^* \equiv C(\psi)(v_t - av) + K(\psi)(v_{xx} + v_{zz}) + K'(\psi)v_z. \quad (۱۰۱.۲)$$

که با انجام محاسبات در فصل قبل دریافتیم این معادله یک معادله غیر خطی خود الحاق با ضریب $v = (bx + l)e^{at}$ است که b, l اعداد ثابت می‌باشند. اکنون می‌خواهیم قوانین پایستگی را برای این معادله محاسبه کنیم. برای این منظور ابتدا تغییر متغیر $x = x^2, t = x^1, z = x^3$ را در نظر می‌گیریم. لاگرانژین قراردادی (۱۰۰.۲) شامل مشتقاتی از مرتبه بیشتر از دو نمی‌باشند، بنابراین حالت ساده شده (۹۸.۲) را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$C^i = W \left[\frac{\partial L}{\partial \psi_i} - D_j \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{ij}} \right) \right] + D_j(W) \left[\frac{\partial L}{\partial \psi_{ij}} \right]. \quad (۱۰۲.۲)$$

در نتیجه قوانین بقای معادله با جایگذاری مشتقات مختلف لاگرانژین و همچنین مقدار متغیر v عبارتند از:

$$\begin{aligned} C^1 &= -WC(\psi)e^{at}, \\ C^2 &= [WK'(\psi)\psi_x + D_x(W)K(\psi)]e^{at}, \\ C^3 &= [WK'(\psi)(\psi_z - 1) + D_z(W)K(\psi)]e^{at}, \end{aligned} \quad (۱۰۳.۲)$$

از آنجایی که معادله آبیاری به طور عبارت صحیح شامل متغیرهای مستقل t, x و z نمی‌باشد، لذا برخی از تقارن‌های معادله به صورت زیر می‌باشند:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{v}_3 = \frac{\partial}{\partial z}. \quad (۱۰۴.۲)$$

در ادامه به منظور اختصار مولد $\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ را در نظر می‌گیریم. مشخصه این مولد عبارت است از

$$W = -\psi_t, \quad (۱۰۵.۲)$$

با جایگذاری (۱۰۵.۲) در (۱۰۳.۲) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} C^1 &= C(\psi)\psi_t e^{at}, \\ C^2 &= -[K'(\psi)\psi_t\psi_x + K(\psi)\psi_{tx}]e^{at}, \\ C^3 &= -[K'(\psi)\psi_t(\psi_z - 1) + K(\psi)\psi_{tz}]e^{at}, \end{aligned} \quad (۱۰۶.۲)$$

به همین ترتیب می‌توان برای سایر مولدها نیز قوانین پایستگی را محاسبه کرد.

۶.۲ مقایسه بین روش‌های بیان شده در محاسبه قوانین پایستگی

مقایسه بین روش‌ها را با روش نوتر آغاز می‌کنیم. از محدودیت‌های روش نوتر این است که اولاً تعداد PDE های دستگاه باید با تعداد متغیرهای وابسته یکسان باشد، ثانیاً فرمول صریحی برای لاگرانژی داشته باشیم، ثالثاً از بین کل تقارن‌ها باید تقارن‌های تغییراتی را مشخص کرد.

اما روش مستقیم فارغ از تمام این مسائل می‌باشد. از مزایای روش مستقیم این است که در این روش برای محاسبه قوانین پایستگی طیف وسیعی از دستگاه‌های PDE قابل استفاده می‌باشد و البته در عمل بهتر است دستگاه $R(x, U)$ نسبت به متغیر مستقلی مانند x^j به فرم کوشی-کوالسکی باشد و این یعنی دستگاه نسبت به بیشترین مرتبه مشتق هر متغیر وابسته نسبت به x^j قابل حل باشد، یعنی:

$$\frac{\partial^{s_\nu} u^\nu}{\partial (x^j)^{s_\nu}} = G^\nu(x, u, \partial u, \dots, \partial^r u), \quad 1 \leq s_\nu \leq r, \quad \nu = 1, \dots, q. \quad (107.2)$$

که در آن همه مشتق‌های نسبت به x^j که در سمت راست هر یک از PDE های دستگاه فوق ظاهر می‌شوند، دارای مرتبه کمتری نسبت به مشتق‌های سمت چپ باشند. فایده این که دستگاهی فرم کوشی-کوالسکی را بپذیرد این است که تمام قوانین پایستگی موضعی که از روش مستقیم نتیجه می‌دهد، غیر بدیهی می‌باشند و لذا بعد از طی مراحل طولانی حل، به قوانین پایستگی بدیهی نخواهیم رسید [۹]. برای درک بهتر این مطلب معادله تلگراف که به صورت زیر بیان می‌شود را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} R^1[u, v] &= v_t - (u^2 + 1)u_x - u = 0, \\ R^2[u, v] &= u_t - v_x = 0, \end{aligned} \quad (108.2)$$

دستگاه فوق به فرم کوشی-کوالسکی است که به طور مشروح در [۲۵] قوانین پایستگی آن بیان شده است. در روش ابراگیموف هم بسیاری از محدودیت‌های روش نوتر موجود نیست. ابراگیموف با تعریف مفهوم جدیدی برای لاگرانژی، دشواری یافتن لاگرانژی برای معادلات دیفرانسیل را برطرف کرد. این روش برای هر دستگاه معادلات دیفرانسیل که تعداد معادلاتش با تعداد متغیرهای وابسته اش برابر باشد به کار گرفته می‌شود. در روش ابراگیموف این محدودیت وجود دارد که متغیر v باید دارای مقداری ناصفر باشد و از طرفی محاسبه آن نیز می‌تواند کار دشواری باشد و اگر v به دست آمده برابر صفر شود، در این صورت معادله دیفرانسیل خودالحاقی غیر خطی نمی‌باشد و نمی‌توان از این روش استفاده کرد.

۷.۲ محاسبه قوانین پایستگی به روش مستقیم با کمک نرم افزار

در ابتدای بخش دوم روش دستی محاسبه قوانین پایستگی به روش مستقیم بیان شد، اکنون کد محاسباتی آن را برای معادله حرارت $u_t = u_{xx}$ را بیان می‌کنیم.

with(DifferentialGeometry) :

with(Tools) :

with(JetCalculus) :

```

DGsetup([x, t], [u], M, 3) : PDE := u[2] - u[1, 1];
DE := DifferentialEquationData([PDE], [u[2]]) :
DE1 := Prolong(DE, 2) :
iota := Transformation(DE1) :
alias(M = M(x, t, u[])) :
EulerLagrange(M * PDE) :
op(%): Pullback(iota, %): expand(%):
sys := {coeffs(%), [u[1], u[1, 1], u[1, 1, 1]]};
pdsolve(sys);
alias(P1 = P1(x, u[], u[1], u[1, 1])) :
alias(P2 = P2(x, u[], u[1], u[1, 1])) :
TotalDiff(P1, x) + TotalDiff(P2, t) - 1 * PDE :
{coeffs(%), [u[1, 2], u[2, 2], u[1, 1, 1], u[1, 1, 2], u[1, 2, 2], u[2, 2, 2]]};
pdsolve(%);
alias(P1 = P1(x, u[], u[1], u[1, 1])) :
alias(P2 = P2(x, u[], u[1], u[1, 1])) :
TotalDiff(P1, x) + TotalDiff(P2, t) - u[] * PDE : expand(%):
{coeffs(%), [u[1, 2], u[2, 2], u[1, 1, 1], u[1, 1, 2], u[1, 2, 2], u[2, 2, 2]]};
pdsolve(%);
alias(P1 = P1(x, u[], u[1], u[1, 1])) :
alias(P2 = P2(x, u[], u[1], u[1, 1])) :
TotalDiff(P1, x) + TotalDiff(P2, t) - (t * u[] - x) * PDE :
expand(%):
{coeffs(%), [u[1, 2], u[2, 2], u[1, 1, 1], u[1, 1, 2], u[1, 2, 2], u[2, 2, 2]]};
pdsolve(%);

```

۱.۷.۲ عامل انتگرال

در ادامه مراحل به دست آوردن عامل انتگرال را که هم می‌تواند برای محاسبه قوانین پایستگی روش مستقیم و هم برای محاسبه روش هرمان-پل مفید باشد را بیان می‌کنیم:

```
with(PDEtools) :
U := diff_t_able(u(t, x)) :
declare(U[]) :
pde[1] := U[t] - U[]^3 * U[x, x, x] = 0 :
mu[alpha] := IntegratingFactors(pde[1]) :
IntegratingFactors(pde[1], order = 0) :
IntegratingFactors(pde[1], order = 1) :
IntegratingFactors(pde[1], order = 2) :
J[polynomial] := ConservedCurrents(pde[1], type = polynomial, split = false,
order = 0) :
J[polynomial] := ConservedCurrents(pde[1], type = polynomial, split = false,
order = 1) :
J[polynomial] := ConservedCurrents(pde[1], type = polynomial, split = false,
order = 2) :
```

یادداشت

نتایج بیان شده در این فصل روشی موثر برای ساختن قوانین پایستگی برای معادلات PDE می‌باشد. برای یافتن مولفه‌های پایستگی با استفاده از تقارن‌ها کفایت عملگرهای نوتر که در این فصل ارائه شد را بر روی لاگرانژی اعمال کنیم. همچنین در ادامه فصل به بررسی روش‌های مستقیم، هرمان پل و ابراگیموف برای محاسبه قوانین پایستگی پرداختیم. خواننده محترم می‌تواند برای مطالعه بیشتر به منابع [۲۶، ۳۱، ۴۲، ۴۴] مراجعه نماید.

فصل ۳

مروری بر تاریخچه محاسبات کسری و تعاریف و مقدمات اولیه

۱.۳ مقدمه

حسابان کسری موضوعی است که بیش از ۳۰۰ سال قدمت دارد. می‌توان گفت ایده حسابان کسری به پایان قرن هفدهم برمی‌گردد، یعنی در زمانی که تازه حسابان کلاسیک توسط لایبنیتس^۱ و نیوتون^۲ ابداع شده بود. از آنجا که در آن زمان روش متداول تبادل اطلاعات بین دانشمندان عمدتاً نامه بود در ۳۰ سپتامبر (۱۶۹۵) ریاضیدان فرانسوی هوپیتال^۳ معنای مشتق مرتبه $\frac{1}{2}$ را در یادداشتی از لایبنیتس جوینا می‌شود. لایبنیتس در پاسخ به او نوشت: "این موضوع منجر به تناقض می‌شود، اما بعدها نتایج مفیدی به دست خواهد آمد" [۱۰۸].

در هر حال این نامه را می‌توان شروعی برای پیدایش بخشی از ریاضیات معرفی کرد که بعدها به حسابان کسری شناخته و در سال‌های اخیر به عنوان حساب قرن ۲۱ معرفی شد.

سوال طرح شده توسط لایبنیتس باعث شد از آن به بعد ریاضیدانان زیادی این موضوع را به طور مستقیم و غیر مستقیم دنبال کنند، که از جمله از آن‌ها می‌توان به لاگرانژ^۴ اشاره کرد. او در سال (۱۷۷۲) با مطالعه عملگر دیفرانسیلی، به طور غیر مستقیم به حسابان کسری پرداخته است. در سال (۱۸۱۲) لاپلاس^۵ و در سال (۱۸۱۴) لارنت^۶ در بررسی‌های خود به حسابان کسری پرداختند تا اینکه در سال (۱۸۱۹) لاکوریکس^۷ اولین مفهوم مشتق از مرتبه دلخواه

^۱Gottfried Wilhelm Leibniz

^۲Sir Isaac Newton

^۳Guillaume Antoine Hôpital

^۴Joseph-Louis Lagrange

^۵Pierre-Simon Laplace

^۶Paul Matthieu Hermann

Laurent

^۷Sylvestre François Lacroix

را با شروع از تابع $y = x^m, m \in \mathbb{N}$ و با تعمیم فرمول مشتق معمولی

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n.$$

مورد توجه فرار داد، او همچنین با کمک تابع گاما تعمیم رابطه فوق را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}.$$

در ادامه او رابطه

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.$$

را برای مشتق مرتبه $\frac{1}{2}$ از تابع $y = x$ به کار برد [۵۷]. فوریه^۸ در سال‌های پایانی عمرش در سال (۱۸۲۲) عملگرهای کسری را با نمایش تابع انتگرالی $f(x)$ به صورت زیر معرفی کرد:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(t(x-u)) dt,$$

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du \int_{-\infty}^{+\infty} t^n \cos(t(x-u) + \frac{1}{2}n\pi) dt.$$

در سال (۱۸۲۳) آبل^۹ از معادله انتگرالی به صورت

$$k(x) = \int_0^x (x-t)^\alpha f(t) dt, \quad (۱.۳)$$

استفاده کرد که این انتگرال در مسئله همزمانی که در فیزیک از اهمیت زیادی برخوردار است رخ داده بود. مسئله همزمانی شامل تعیین یک منحنی در صفحه (x, y) می‌باشد به طوری که زمان لازم برای رسیدن ذره در حال لغزش به پایین ترین نقطه تحت جاذبه گرانشی زمین، مستقل از نقطه شروع (x_0, y_0) بر روی منحنی باشد.

هر چند آبل در تحقیقاتش به صورت مستقیم به تعریف مشتق کسری نپرداخت ولی نقش مهمی در راستای توسعه حساب دیفرانسیل کسری داشته است. در واقع آبل با حل معادله (۱.۳) به طور ناآگاهانه معادله‌ای را حل کرد که بعدها مشخص گردید همان انتگرال کسری از مرتبه $1 - \alpha$ می‌باشد. در طول سال‌های (۱۸۳۲) تا (۱۸۳۷) مقالاتی توسط لیوویل^{۱۰} منتشر گردید که انتشار این مقالات سبب شد او به عنوان اصلی‌ترین خالق تئوری مشتق و انتگرال کسری نام گیرد. لیوویل با مفهوم مشتق صحیح مرتبه m ام تابع e^{ax} شروع کرد. همانطور که می‌دانیم حاصل به صورت زیر است:

$$D^m e^{ax} = a^m e^{ax}.$$

لیوویل ابتدا از $D^\alpha e^{ax} = a^\alpha e^{ax}$ به عنوان تعمیم مشتق صحیح به مشتق مرتبه دلخواه استفاده کرد و همین تعمیم را برای سری $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}$ به کار برد و مشتق آن را در حالت دلخواه به صورت

$$D^\alpha f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\alpha e^{a_n x},$$

تعریف کرد. این تعریف نخستین تعریف از عملگر مشتق کسری بود که لیوویل ارائه داد ولی از نقاط ضعف این تعریف می‌توان به این مطلب اشاره کرد که این تعریف نه تنها جامع نبود بلکه بحث همگرایی سری‌ها نیز در آن مطرح شد.

^۸Joseph Fourier

^۹Niels Henrik Abel

^{۱۰}Joseph Liouville

دومین روشی که لیوویل در پیش گرفت این بود که او توابعی از فرم x^{-a} , $a > 0$ را به کار گرفت. به کمک انتگرال $I = \int_0^{\infty} u^{a-1} e^{-xu} du$ و تغییر متغیر $xu = t$ نشان داد:

$$x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} I,$$

لیوویل تعریف زیر را برای مشتق تابع x^{-a} به کار برد:

$$D^{\alpha} x^{-a} = \frac{(-1)^{\alpha} \Gamma(a + \alpha)}{\Gamma(a)} x^{-a-\alpha}.$$

این تعریف که در واقع دومین تعریف از مشتق کسری لیوویل بود. به دلیل تعریف $\Gamma(0) = \infty$ سبب می‌شود تا مشتق از توابع ثابت برابر صفر باشد همچنین برخلاف تعریف اول که فقط مربوط به مقادیر خاصی از α بود، به کمک این تعریف می‌توان برای مقادیر مختلف α ، مشتق را بیان کرد ولی همچون تعریف اول نمی‌توان این تعریف را نیز برای هر کلاسی از معادلات به کار گرفت. با این وجود لیوویل این تعاریف را برای پاره‌ای از مسائل به کار گرفت.

ریمن^{۱۱} در سال ۱۸۴۷ در حالیکه دانشجوی بود مقاله‌ای را نوشت که سال‌ها پس از مرگش منتشر شد. به گفته برخی از محققان ریمن تعریف کسری‌اش را تحت تاثیر تعریف دوم لیوویل بیان کرده است. او تعریف انتگرال کسری از مرتبه α از تابع مفروض $f(x)$ را به صورت زیر پیشنهاد کرد:

$$D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt + \psi(x). \quad (2.3)$$

از آنجایی که توسعه ریاضیات بدون سختی و ایراد نبوده است مشتق کسری ریمن نیز به دلیل وجود تابع نامعلوم $\psi(x)$ سخت می‌توانست مورد استفاده قرار بگیرد. گرونوالد^{۱۲} و لتنیکوف^{۱۳} نتایج به دست آمده توسط ریمن و لیوویل را یکسان‌سازی کرده و در نهایت انتگرال و مشتقی را به نام ریمن-لیوویل معرفی کردند که امروزه همچنان با همین نام به کار می‌رود. با گذشت زمان و پیدایش کاربردهای مختلفی از حسابان کسری تعاریف متعددی از مشتق و انتگرال کسری که متناسب با مدل‌های فیزیکی بودند بیان شد. در قرن بیستم در سال‌های بین (۱۹۰۰) تا (۱۹۷۰) تلاش‌های زیادی توسط دانشمندان مختلف صورت گرفت. با گذشت زمان کاپوتو^{۱۴} ریاضیدان معاصر سعی کرد با بازنویسی فرمول ریمن-لیوویل مشتق جدیدی را معرفی نماید که امروزه نیز با همین نام شناخته می‌شود.

مارچاد^{۱۵}، لتنیکوف^{۱۶} اسپانیر^{۱۷} اولدهام^{۱۸} کیلباس^{۱۹} و پادلینی^{۲۰} و سایر ریاضیدانان تلاش‌هایی را در زمینه تعریف و تعمیم حسابان کسری انجام دادند [۱۰۹، ۱۱۱].

۲.۳ کاربردی از حسابان کسری

همان‌طور که در بخش تاریخچه بیان شده است، مشتق و انتگرال کسری برخلاف مفاهیم کلاسیک، ابتدا جنبه نظری آنها پایه‌گذاری شد و سپس کاربردهایی برای آنها یافته شد. به عبارت دیگر، مفهوم مشتق کلاسیک از شیب خط مماس در هندسه و یا مفهوم سرعت در فیزیک شروع و در نهایت به یک تعریف ریاضی منجر شد. اما مشتق کسری ابتدا به

^{۱۱}Bernhard Riemann

^{۱۲}Anton Karl Grünwald

^{۱۳}Aleksey Vasilievich

Letnikov

^{۱۴}Michele Caputo

^{۱۵}André Marchaud

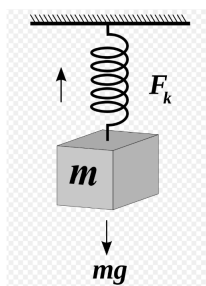
^{۱۶}Aleksey Letnikov

^{۱۷}Jerome Spanier

^{۱۸}Keith Oldham

^{۱۹}Anatoly A. Kilbas

^{۲۰}Igor Podlubny



شکل ۱.۳: پیشبینی کشیده شدن فنر براساس قانون هوک

صورت یک تعمیم از مشتق معمولی مطرح شد و به عنوان یک تعریف محض ریاضی گسترش یافت و تا نیمه قرن بیستم حسابان کسری تا حدی رشد پیدا کرد.

با وجود این تلاش‌ها کاربرد ملموس برای مفهوم عملگرهای کسری تا سالها ناشناخته بود. تا اینکه در سال ۱۹۲۰ ناتینگ^{۲۱} کاربرد عملگر کسری را در دسته‌ی زیادی از مواد نشان داد [۳۶]. کلید حل مساله توجه به رفتار مواد با تاثیر فشار بر آنها بود، البته این مساله‌ای است که همواره مورد توجه دانشمندان از جمله نیوتن بوده است. روش سنتی برای پاسخگویی به این سوال کمک گرفتن از قانون هوک و قانون نیوتن می‌باشد. رفتاری که ما می‌خواهیم در اینجا بررسی کنیم رابطه بین کشش و تنش است که هر دو تابعی از زمان می‌باشند. اگر ماده‌ای که می‌خواهیم بررسی کنیم، مایع باشد قانون نیوتن درباره ارتباط بین کشش و تنش در این مواد به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sigma(t) = \eta D^1 \epsilon(t), \quad (۳.۳)$$

که در آن ثابت η میزان چسبندگی مایع مورد آزمایش می‌باشد و $\sigma(t)$ و $\epsilon(t)$ به ترتیب نشان دهنده میزان کشش و فشار اعمال شده بر جسم بر حسب زمان می‌باشند و D^1 همان عملگر مشتق مرتبه اول است. لازم به ذکر است که مایعاتی که از قانون نیوتن در هنگام تنش و فشار تبعیت می‌کنند سیالات نیوتنی می‌نامند که برای نمونه می‌توان آب را ذکر کرد.

در ادامه اگر ماده مورد بررسی جامد قابل ارتجاع باشد یعنی اگر تنش تا قبل از نقطه تسلیم در ماده ایجاد شود و با برداشتن آن، ماده به حالت اولیه خود باز گردد ولی اگر تنش از مقداری نهایی و بیشینه که به تنش تسلیم مشهور است، فراتر رود، ماده دچار تغییر شکل دائم شده و با برداشتن تنش، دیگر ماده به حالت اولیه خود باز نمی‌گردد. در این صورت رابطه بین کشش و تنش از قانون هوک تبعیت می‌کند که عبارت است از:

$$\sigma(t) = ED^0 \epsilon(t), \quad (۴.۳)$$

که در آن ثابت E ضریب قابلیت ارتجاع ماده می‌باشد و D^0 عملگر همانی می‌باشد که صرفاً به جهت نشان دادن رابطه بین قانون هوک و قانون نیوتن جایگذاری شده است. در شکل (۲.۳) تصویری از قانون هوک نمایش داده شده است.

در واقع می‌توان گفت قانون هوک تقریبی است که نشان می‌دهد تغییر طول یک ماده با بار وارد بر آن رابطه خطی دارد. بسیاری از مواد تا زمانی که نیرو از حد کشسانی آنها کمتر باشد با تقریب خوبی از این قانون پیروی می‌کنند. موادی که قانون هوک برای آنها تقریب مناسبی باشد، مواد کشسان خطی یا «مواد هوکی» نام دارند. ساده شده قانون هوک بیان می‌دارد که کرنش با تنش رابطه مستقیم دارد. ولی با افزایش میزان تغییر شکل، انحراف از قانون هوک زیاد

^{۲۱}Perley Nutting

می‌شود به طوری که در تغییر شکل‌های زیاد با خارج شدن ماده از دامنه کشسان خطی، این قانون به طور کامل کاربرد خود را از دست می‌دهد. یک میله از جنس یک ماده کشسان را می‌توان مانند یک فنر خطی در نظر گرفت، طول میله L و سطح مقطع آن A است. افزایش طول میله (کرنش) آن به صورت خطی با تنش کششی σ وارد بر آن نسبت خطی ثابت دارد. و وارون این نسبت خطی را ضریب قابلیت ارتجاع ماده (الاستیسیته E) می‌نامند.

می‌توان قانون هوک و نیوتن را برای تنش خطی به میزان $\epsilon(t) = t$ برای $t \in [0, T]$ در حالت خلاصه به صورت زیر نمایش داد:

$$\psi_k = \frac{\sigma(t)}{\epsilon(t)} t^k, \quad (5.3)$$

که در آن $\psi_0 = E$ و $\psi_1 = \eta$ و لذا حالت $k = 0$ با قانون هوک برای مواد جامد قابل ارتجاع و حالت $k = 1$ با قانون نیوتن برای مایعات چسبنده مطابقت می‌کند.

در قرن بیستم پژوهشگران در راستای طرح‌هایی برای بازیابی شیشه‌ها و فلزات در مشاهداتشان با دسته‌ای از مواد آشنا شدند که عملکرد آن‌ها در رابطه با کشش و تنش رفتاری بین مایع خالص و جامد را دارند، این مواد را اصطلاحاً مواد ویسکوالاستیک می‌نامند. بعد از آن با ظهور مواد سنتز شده پلیمری و کاربردهای آن باز هم مواد ویسکوالاستیک در زندگی بشر مورد توجه قرار گرفت و به همین جهت در طراحی وسایل و تجهیزات حساس، توجه به رفتارهای این مواد جایگاه خاصی دارد. به‌طور مشخص، ویسکوالاستیسیته خاصیتی است که در بعد مولکولی و با بازآرایش مولکول‌ها همراه است. به‌طور کلی، تسلط و احاطه کامل بر رفتارهای ویسکوالاستیک مواد نیازمند اندازه‌گیری‌ها و آزمایش‌های زیادی است. ناتینگ در مشاهداتش نشان داد که رابطه بین تنش و فشار از معادله زیر تبعیت می‌کند:

$$\sigma(t) = \nu D^k \epsilon(t), \quad (6.3)$$

که در آن ν ثابت مواد ویسکوالاستیک است و $k \in (0, 1)$. این رابطه به قانون ناتینگ شهرت دارد. لازم به ذکر است که ν و k به خواص ماده بستگی دارد. از دیگر کاربردهای حسابان کسری که در دهه‌های اخیر به آنها پرداخته شده است می‌توان به طراحی مدل انتقال بیماری مالاریا [۱۰۳]، پردازش تصویر [۳۵] و مدل‌سازی سیگنال‌های گفتار [۱۲] اشاره کرد. در سال (۲۰۱۶) محی‌الدین و همکارانش یک مدل زیستی جمعیت، با استفاده از مشتقات جزئی از مرتبه کسری مورد مطالعه قرار دادند و در واقع با درک روش‌های دینامیک تغییرات جمعیت، توانستند پیش‌بینی‌های ارزشمندی را در مدل جمعیتی انجام دهند [۸۴].

موارد فوق تنها تعداد بسیار کمی از مقالاتی است که به کاربرد حسابان کسری می‌پردازد، خواننده محترم برای اطلاعات بیشتر می‌تواند به منابع [۱۱]، [۵۲]، [۱۰۷]، [۱۱۷] مراجعه نماید.

۳.۳ توابع پر کاربرد در حسابان کسری

در این فصل به بیان برخی از توابع اولیه مورد نیاز که نقش مهمی در حسابان کسری را دارند، می‌پردازیم. برای مشاهده اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توان به مرجع [۱۰۵] مراجعه کرد.

تابع گاما

به عنوان ساده‌ترین بیان در تعریف تابع گاما $\Gamma(z)$ می‌توان گفت این تابع بسط مفهوم $n!$ برای هر عدد دلخواه n (حتی اگر n مختلط باشد) را بیان می‌کند. رایج‌ترین فرم تعریف این تابع به صورت انتگرال زیر است:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (۷.۳)$$

که در نیمه راست صفحه مختلط $Re(z)$ همگرا می‌باشد.

اوپلر نمایش حدی زیر را برای تابع گاما به صورت زیر بیان کرد:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)}, \quad Re(z) > 0.$$

برخی از خواص تابع گاما به شرح زیر است:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = z\Gamma(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}, \quad (۱)$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad n \in \mathbb{N}, \quad (۲)$$

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+m)}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+m-1)}, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots, \quad (۳)$$

$$\Gamma(z)\Gamma(z-1) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (۴)$$

$$\Gamma(-z) = \frac{-\pi \csc(\pi z)}{\Gamma(z+1)}. \quad (۵)$$

در شکل (۳.۳) تصویری از تابع گاما نشان داده شده است.

تابع بتا

تابع بتا نیز همانند تابع گاما یک تابع انتگرالی است که به جای ترکیب خاصی از تابع گاما مناسب‌تر است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

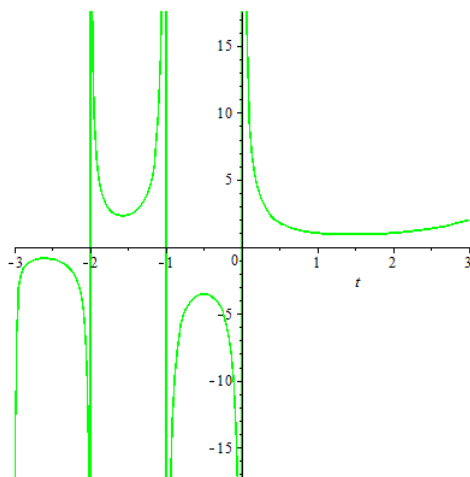
$$\beta(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt, \quad Re(z) > 0, \quad Re(w) > 0. \quad (۸.۳)$$

لم ۱.۳.۳. رابطه بین تابع بتا و تابع گاما به صورت زیر است [۱۰۵]:

$$\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

برخی از خواص تابع بتا چنین است:

$$\beta(x, y) = \beta(y, x), \quad (۱)$$



شکل ۲.۳: تابع گاما

$$\beta(x, y + 1) = \frac{y}{x} \beta(x + 1, y) = \frac{y}{x + y} \beta(x, y), \quad (۲)$$

$$\beta(x, y) \beta(x + y, z) = \beta(y, z) \beta(y + z, x) = \beta(z, x) \beta(z + x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y) \Gamma(z)}{\Gamma(x + y + z)}, \quad (۳)$$

$$\beta\left(\frac{x}{z}, y\right) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t^z)^{y-1} dt, \quad z > 0. \quad (۴)$$

به کمک تعریف تابع بتا می‌توان روابط مهمی برای تابع گاما بدست آورد. به عنوان مثال کافی است در خاصیت چهارم از تابع گاما، $z = \frac{1}{2}$ را قرار دهیم تا به رابطه زیر برسیم:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad (۹.۳)$$

تابع میتاگ-لفلر

تابع میتاگ-لفلر توسط مگنس میتاگ-لفلر^{۲۲} ریاضی دان سوئدی تعریف و به نام او نام‌گذاری شد. این تابع در دو حالت تک پارامتری و دو پارامتری به صورت زیر تعریف می‌شود (که البته حالت دو پارامتری اولین بار توسط آگاروال^{۲۳} معرفی شد):

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1 + k\alpha)}, \quad E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (۱۰.۳)$$

که در حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل کسری مورد استفاده قرار می‌گیرند. تابع نمایی e^z در تئوری معادلات دیفرانسیل نقش مهمی را ایفا می‌کند، که با در نظر گرفتن $\alpha = \beta = 1$ می‌توان نشان داد که تابع میتاگ-لفلر تعمیمی از تابع

^{۲۲}Magnus Mittag - Leffler

^{۲۳}Deepak Aggarwal

نمایی می‌باشد و در حالتی که $\alpha = 2$ باشد تابع میتاگ-لفلر برابر با $\cosh(\sqrt{z})$ خواهد بود:

$$E_1(z) = e^z, \quad E_2(z) = \cosh(\sqrt{z}). \quad (11.3)$$

در نمودار (۳.۳) تابع میتاگ-لفلر یک متغیره را به ازای مقادیر $\alpha = 1, 1/5, 2, 5$ و $z \in \mathbb{R}$ ملاحظه می‌کنید. تابع دو پارامتری میتاگ-لفلر در واقع تعمیمی از تابع تک پارامتری میتاگ-لفلر می‌باشد و زمانی که $\beta = 1$ در نظر گرفته شود، رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\alpha) > 0). \quad (12.3)$$

با توجه به تعریف تابع میتاگ-لفلر در حالت خاص عبارت‌های زیر برقرارند:

$$\begin{aligned} E_{1,1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \\ E_{2,2}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}, \\ E_{1,2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}, \\ E_{2,2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(2k+1)!} = \sinh(\sqrt{z}), \\ E_{2,1}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z), \end{aligned}$$

انتگرال معمولی تابع میتاگ-لفلر به صورت زیر می‌باشد:

$$\int_0^z E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha) t^{\beta-1} dt = z^\beta E_{\alpha,\beta+1}(\lambda z^\alpha), \quad (\beta > 0). \quad (13.3)$$

مثال‌هایی از کاربردهای تابع میتاگ-لفلر در انتگرال‌گیری از توابع مختلف:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z-t)^{\alpha-1} e^{\lambda t} dt &= z^\alpha E_{1,\alpha+1}(\lambda z), \quad (\alpha > 0). \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z-t)^{\alpha-1} \cosh(\sqrt{\lambda t}) dt &= z^\alpha E_{2,\alpha+1}(\lambda z^2), \quad (\alpha > 0). \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z (z-t)^{\alpha-1} \frac{\sinh(\sqrt{\lambda t})}{\sqrt{\lambda t}} dt &= z^{\alpha+1} E_{2,\alpha+2}(\lambda z^2), \quad (\alpha > 0). \end{aligned}$$

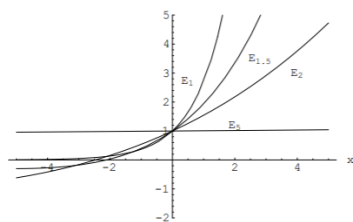
مشتق از تابع میتاگ-لفلر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D^\gamma [t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(at^\alpha)] = t^{\beta-\gamma-1} E_{\alpha,\beta-\gamma}(at^\alpha), \quad (14.3)$$

$$D^\alpha [E_\alpha(at^\alpha)] = a E_\alpha(at^\alpha). \quad (15.3)$$

تبدیل لاپلاس از تابع میتاگ-لفلر از مرتبه $\alpha > 0$ عبارت است از:

$$L \{E_\alpha(at^\alpha)\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - a}, \quad s > |a|^{1/\alpha}. \quad (16.3)$$



شکل ۳.۳: نمودار تابع میتاگ-لفلر برای $\alpha = 1, 1/5, 2, 5$ و $z \in \mathbb{R}$

در حقیقت برای $s > a$ با استفاده از سری بسط تابع نمایی داریم

$$\frac{1}{s - a} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{k!} \int_0^\infty e^{-st} t^k dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{k!} \frac{k!}{s^{k+1}} = \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{s^{k+1}}.$$

به طور مشابه برای تابع میتاگ-لفلر نیز داریم:

$$\begin{aligned} L\{E_\alpha(at^\alpha)\} &= \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha k} dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{s^{\alpha k + 1}} \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{s^{\alpha k + 1}} = s^{\alpha - 1} \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k}{(s^\alpha)^{k+1}} = \frac{s^{\alpha - 1}}{s^\alpha - a}. \end{aligned}$$

با توجه به آنچه بیان شد، تبدیل لاپلاس از تابع $t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(\pm at^\alpha)$ به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} L\{t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(\pm at^\alpha)\} &= \int_0^\infty t^{\alpha k + \beta - 1} e^{-st} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(\pm at^\alpha) dt \\ &= \frac{k! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha \mp a)^{k+1}}, \quad s > |a|^{1/\alpha}, \end{aligned} \quad (17.3)$$

که منظور از $E_{\alpha, \beta}^{(k)}(z) = \frac{d^k}{dz^k} E_{\alpha, \beta}(z)$ مشتق مرتبه k -ام است.

۴.۳ انتگرال کوشی

یکی از ابتدایی‌ترین علل پیدایش حسابان کسری در جهت توسعه مشتق به مراتب واقع در صفحه مختلط بوده است، اما می‌توان گفت کوشی^{۲۴} آغازگر دوره‌های دیگر از تاریخ حساب کسری است و یکی از مهمترین مفاهیم در حسابان کسری که مفهوم انتگرال کسری می‌باشد، در واقع تعمیمی از فرمول انتگرال کوشی است.

فرض کنیم تابع $f(\tau)$ در هر بازه متناهی (a, b) انتگرال پذیر باشد، در این صورت فرمول انتگرالی زیر که به فرمول

انتگرال کوشی معروف است به صورت زیر بیان می‌شود [۱۱۶]:

$$f^{(-n)}(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in (a, b). \quad (18.3)$$

^{۲۴}Augustin-Louis Cauchy

به کمک تابع گاما می‌توان انتگرال کوشی را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$f^{(-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in (a, b). \quad (19.3)$$

انتگرال کوشی ایده‌ای شد تا با جانشینی هر عدد مختلط α که $Re(\alpha) > 0$ به ترتیب انتگرال‌های کسری چپ و راست که به انتگرال‌های ریمن-لیوویل شناخته می‌شوند، به صورت زیر تعریف شوند [۷۴]:

$$\begin{aligned} {}_a I_t^\alpha f(t) &:= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t f(\tau) (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau, & t > a, \\ {}_t I_b^\alpha f(t) &:= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b f(\tau) (t - \tau)^{\alpha-1} d\tau, & t < b. \end{aligned}$$

به همین ترتیب همانطور که در مقدمه بیان شد گرونوالد و لتنیکوف با یکسان‌سازی نتایج به دست آمده توسط لیوویل و ریمن مشتقات کسری ریمن-لیوویل چپ و راست را به ازای $\alpha > 0$ که $Re(\alpha) > 0$ به صورت زیر بیان کردند:

$$\begin{aligned} ({}_a D_t^\alpha f)(t) &= \frac{d^n}{dt^n} ({}_a I_t^{n-\alpha} f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > a, \quad n = [\mathcal{R}] + 1, \\ ({}_t D_b^\alpha f)(t) &= -\frac{d^n}{dt^n} ({}_t I_b^{n-\alpha} f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} - \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (\tau - t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t < b, \quad n = [\mathcal{R}] + 1, \end{aligned} \quad (20.3)$$

۱.۴.۳ خواص انتگرال و مشتق کسری ریمن-لیوویل

۱- انتگرال و مشتق کسری ریمن-لیوویل همانند عملگرهای انتگرال و مشتق مرتبه صحیح خطی می‌باشند.

$$\begin{aligned} {}_a I_t^\alpha (\lambda f(t) + \gamma g(t)) &= \lambda {}_a I_t^\alpha f(t) + \gamma {}_a I_t^\alpha g(t), \\ {}_a D_t^\alpha (\lambda f(t) + \gamma g(t)) &= \lambda {}_a D_t^\alpha f(t) + \gamma {}_a D_t^\alpha g(t), \\ {}_t I_b^\alpha (\lambda f(t) + \gamma g(t)) &= \lambda {}_t I_b^\alpha f(t) + \gamma {}_t I_b^\alpha g(t), \\ {}_t D_b^\alpha (\lambda f(t) + \gamma g(t)) &= \lambda {}_t D_b^\alpha f(t) + \gamma {}_t D_b^\alpha g(t). \end{aligned}$$

۲- به ازای $\beta \in \mathbb{C}$ بطوریکه $Re(\beta) > 0$ داریم:

$$\begin{aligned} ({}_t I_b^\alpha (b-t)^{\beta-1})(x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (b-x)^{\beta+\alpha-1}, \quad (Re(\alpha) > 0), \\ ({}_t D_b^\alpha (b-t)^{\beta-1})(x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-x)^{\beta-\alpha-1}, \quad (Re(\alpha) \geq 0), \\ ({}_a I_t^\alpha (t-a)^{\beta-1})(x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha-1}, \quad (Re(\alpha) > 0), \\ ({}_a D_t^\alpha (t-a)^{\beta-1})(x) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1}, \quad (Re(\alpha) \geq 0), \end{aligned}$$

و در حالت خاص اگر $\beta = 1$ و $Re(\alpha) \geq 0$ ، آنگاه

$$({}_t D_b^\alpha 1)(x) = \frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},$$

$$({}_a D_t^\alpha 1)(x) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \quad (21.3)$$

این خاصیت مهمترین تفاوت مشتق ریمن-لیوویل نسبت به مشتقات مرتبه صحیح را نشان می‌دهد، چرا که مشتق ریمن-لیوویل از تابع ثابت مخالف صفر است.

از طرف دیگر به ازای $j = 1, 2, 3, \dots, [Re(\alpha)] + 1$ داریم:

$$\begin{aligned} ({}_t D_b^\alpha (b-t)^{\alpha-j})(x) &= 0, \\ ({}_a D_t^\alpha (t-a)^{\alpha-j})(x) &= 0. \end{aligned} \quad (22.3)$$

۳- اگر $Re(\alpha) > 0$ و $Re(\beta) > 0$ باشند، آنگاه:

$$\begin{aligned} ({}_t I_b^\alpha {}_t I_b^\beta f)(t) &= ({}_t I_b^\beta {}_t I_b^\alpha f)(t) = ({}_t I_b^{\alpha+\beta} f)(t), \\ ({}_a I_t^\alpha {}_a I_t^\beta f)(t) &= ({}_a I_t^\beta {}_a I_t^\alpha f)(t) = ({}_a I_t^{\alpha+\beta} f)(t). \end{aligned}$$

۴- بر خلاف انتگرال کسری ریمن-لیوویل، مشتق کسری ریمن-لیوویل در حالت کلی دارای خاصیت جابه‌جایی پذیری نیست:

$$({}_t D_b^\alpha {}_t D_b^\beta f)(x) = ({}_t D_b^{\alpha+\beta} f)(x) - \sum_{j=1}^m ({}_t D_b^{\beta-j} f)(a) \frac{(x-a)^{-j-\alpha}}{\Gamma(1-j-\alpha)}. \quad (23.3)$$

با انجام محاسبات مربوط به مشتقات کسری می‌توان نشان داد مشتق کسری ریمن-لیوویل دارای خاصیت جابه‌جایی است، اگر و تنها اگر

$$f^{(k)}(a) = 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots, r-1, \quad r = \max\{[Re(\alpha)], [Re(\beta)]\}. \quad (24.3)$$

۵- اگر $\alpha > 0$ و $f(t) \in L_p(a, b)$ به طوری که $1 \leq p \leq \infty$ باشد، آنگاه عملگر مشتق کسری ریمن-لیوویل معکوس چپ برای عملگر انتگرال کسری ریمن-لیوویل از همان مرتبه می‌باشد.

$${}_a D_t^\alpha ({}_a I_t^\alpha f(t)) = f(t), \quad {}_t D_b^\alpha ({}_t I_b^\alpha f(t)) = f(t).$$

۶- به عنوان یک نتیجه از خاصیت فوق می‌توان نشان داد، اگر $\alpha > 0$ و $\Phi(t) \in L_1(a, b)$ چنان باشد که

$$f = {}_a I_t^\alpha \Phi(t),$$

در این صورت ${}_a I_t^\alpha {}_a D_t^\alpha f(t) = f(t)$.

۷- عملگر مشتق کسری ریمن-لیوویل معکوس راست عملگر انتگرال کسری ریمن-لیوویل نیست. لذا رابطه زیر برای مشتق و انتگرال راست ریمن-لیوویل برقرار است:

$$({}_t I_b^\alpha {}_t D_b^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} \frac{f_{n-\alpha}^{(n-j)}(b)}{\Gamma(\alpha-j+1)} (b-x)^{\alpha-j}, \quad (25.3)$$

که در آن $f_{n-\alpha}(x) = ({}_t I_b^{n-\alpha} f)(x)$. مشابه همین روابط را می‌توان برای مشتق و انتگرال چپ نیز به صورت زیر بیان کرد:

$$({}_a I_t^\alpha {}_a D_t^\alpha f)(x) = f(x) - \sum_{j=1}^n \frac{f_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha-j+1)} (x-a)^{\alpha-j}, \quad (26.3)$$

که در آن $f_{n-\alpha}(x) = ({}_a I_t^{n-\alpha} f)(x)$.

۸- فرض کنیم $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ دنباله‌ای به صورت یکنواخت همگرا از توابع پیوسته روی $[a, b]$ باشد، در این صورت داریم:

$${}_a I_t^\alpha (\lim_{k \rightarrow \infty} f_k)(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} {}_a I_t^\alpha f_k(t).$$

۹- فرض کنید $f(x)$ تابع تحلیلی روی بازه $(a-h, a+h)$ باشد، به طوری که $h > 0$ و $\alpha > 0$ ، آنگاه

$$D_x^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} (D_x^k f)(x). \quad (27.3)$$

۱۰- فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ توابع تحلیلی روی بازه $(a-h, a+h)$ با شرطی که $h > 0$ باشد در این صورت قاعده

زیر که فرمول لایبنیتز^{۲۵} برای مشتقات کسری ریمان-لیوویل می‌باشد، عبارت است از:

$$D^\alpha [fg](x) = \sum_{k=0}^{[n]} \binom{n}{k} (D_x^k f)(x) (D_x^{n-k} g)(x) + \sum_{k=[n]+1}^{\infty} \binom{n}{k} (D_x^k f)(x) (I_x^{k-n} g)(x). \quad (28.3)$$

نحوه اثبات روابط فوق در اغلب منابع حسابان کسری موجود می‌باشد، برای نمونه می‌توان به [۳۶، ۷۴] اشاره کرد.

در انتها مشتق ریمان-لیوویل تعدادی از توابع پرکاربرد را به شرح زیر بیان می‌کنیم:

$f(t)$	${}_0 D_t^\alpha f(t)$
1	$\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$
t^γ	$\frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)} t^{\gamma-\alpha}$
$\exp^{\lambda t}$	$t^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(\lambda t)$

جدول ۱.۳: مشتق ریمان-لیوویل تعدادی از توابع پرکاربرد

۲.۴.۳ مشتق و انتگرال کسری لیوویل

مشتق و انتگرال ریمان-لیوویل روی بازه متناهی $[a, b]$ تعریف می‌شود. لیوویل نشان داد با تعمیم بازه محدود به \mathbb{R}^+

می‌توان تعاریف مشتق و انتگرال کسری ریمان-لیوویل را به صورت زیر توسعه داد:

$${}_0^L I_t^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau) (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \quad t > 0, \operatorname{Re}(\alpha) > 0,$$

$${}_t^L I_\infty^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty f(\tau) (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \quad t > 0, \operatorname{Re}(\alpha) > 0.$$

به همین ترتیب می‌توان مشتقات کسری چپ و راست لیوویل را به ازای $\alpha > 0$ که $\operatorname{Re}(\alpha) \geq 0$ به صورت زیر بیان

کرد:

$$\begin{aligned} ({}_0^L D_t^\alpha f)(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n ({}_0^L I_t^{n-\alpha} f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0, n = [\mathbb{R}] + 1, \end{aligned}$$

^{۲۵}Leibniz

$$\begin{aligned}({}_t^L D_\infty^\alpha f)(t) &= \left(-\frac{d}{dt}\right)^n ({}_t^L I_\infty^{n-\alpha} f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^\infty (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, t < b, n = [\mathbb{R}] + 1.\end{aligned}$$

به طور مشابه می‌توان مشتق و انتگرال لیوویل را روی محور حقیقی \mathbb{R} تعریف کنیم، جزئیات بیشتر را در [۲۴] مشاهده نمایید.

مشتق کسری کاپوتو

در سال ۱۹۶۷ ریاضیدان ایتالیایی به نام کاپوتو مقاله‌ای را منتشر کرد که در آن تعریف جدیدی از اپراتور مشتقات از مرتبه کسری مطرح شده بود. اما اینکه چه نیازی سبب تعریف مفهومی بعد از مشتق کسری ریمن-لیوویل بود این است که اگرچه مشتق کسری ریمن-لیوویل نقش اساسی در توسعه نظریه حسابان کسری دارد، اما این روش در حل معادلات دیفرانسیل کسری که شرایط اولیه را تنها به صورت

$$\lim_{t \rightarrow a} D_t^{\alpha-k} f(t) = b_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n, \quad n-1 \leq \alpha < n, \quad (29.3)$$

می‌باشد و b_k ها مقادیر ثابت می‌باشند، اعمال می‌شود. این در حالی است که بر خلاف مشتق کسری ریمن-لیوویل، شرایط اولیه برای مشتق کاپوتو، همان فرم معادلات دیفرانسیل مرتبه صحیح را دارد، یعنی شامل مشتق مرتبه صحیح در پایین بازه $t = a$ خواهند بود. در زیر تعریف این مشتق بیان شده است:

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau = {}_a I_t^{n-\alpha} (D^n f(t)), \quad (30.3)$$

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau = (-1)^n {}_t I_b^{n-\alpha} D^n(f(t)). \quad (31.3)$$

۳.۴.۳ خواص مشتق کسری کاپوتو

۱- مشتق کاپوتو نیز همانند مشتق ریمن-لیوویل دارای خاصیت خطی می‌باشد:

$$\begin{aligned}{}_a^C D_t^\alpha (\lambda f(t) + \gamma g(t)) &= \lambda {}_a^C D_t^\alpha f(t) + \gamma {}_a^C D_t^\alpha g(t), \\ {}_t^C D_b^\alpha (\lambda f(t) + \gamma g(t)) &= \lambda {}_t^C D_b^\alpha f(t) + \gamma {}_t^C D_b^\alpha g(t).\end{aligned}$$

۲- اگر $Re(\alpha) > 0$ و $\beta \in \mathbb{C}$ که $Re(\beta) > 0$ آنگاه

$$\begin{aligned}({}_a^C D_t^\alpha (t-a)^{\beta-1})(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}, \\ ({}_t^C D_b^\alpha (b-t)^{\beta-1})(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}.\end{aligned} \quad (32.3)$$

۳- مشتق کسری کاپوتو جابه‌جایی پذیر است، یعنی

$${}_a^C D_t^m {}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^C D_t^\alpha {}_a^C D_t^m f(t) = {}_a^C D_t^{m+\alpha} f(t), \quad n-1 < \alpha < n, \quad (33.3)$$

اگر و تنها اگر

$$f^k(a) = 0, \quad (k = n, n + 1, \dots, m).$$

۴- فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ توابع تحلیلی روی بازه $(a - h, a + h)$ با شرط $h > 0$ باشند در این صورت فرمول لایبنتز برای مشتقات کسری ریمن-لیوویل، عبارت است از:

$$D^\alpha [fg](x) = \sum_{k=0}^{[n]} \binom{n}{k} (D_x^k f)(x) (D_x^{n-k} g)(x) + \sum_{k=[n]+1}^{\infty} \binom{n}{k} (D_x^k f)(x) (I_x^{k-n} g)(x). \quad (۳۴.۳)$$

۵- به سادگی می‌توان نشان داد که مشتق کاپوتو از یک تابع ثابت برابر صفر است.

قضیه ۱.۴.۳. [۲۶، ۷۴] اگر $f(t) \in C^n$ و $n - 1 < \alpha < n$ آنگاه رابطه زیر بین مشتقات ریمن-لیوویل و کاپوتو برقرار است:

$$\begin{aligned} ({}^C D_b^\alpha f(t))(x) &= ({}_t D_b^\alpha f(t)) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (x - a)^{k-\alpha}, \quad (n = [\mathcal{R}(\alpha)] + 1), \\ ({}^C D_t^\alpha f(t))(x) &= ({}_a D_t^\alpha f(t)) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (x - a)^{k-\alpha}, \quad (n = [\mathcal{R}(\alpha)] + 1), \end{aligned}$$

$f(t)$	${}_a^C D_t^\alpha f(t)$
ثابت	0
t	$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} t^{1-\alpha}$
t^p	$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-\alpha)} t^{p-\alpha} & p > n - 1 \quad p \in \mathbb{N} \\ 0 & p \leq n - 1 \quad p \in \mathbb{N} \end{cases}$
$\exp^{\lambda t}$	$\lambda^n t^{n-\alpha} E_{1, n-\alpha+1}(\lambda t)$

جدول ۲.۳: مشتق کاپوتو تعدادی از توابع پرکاربرد

در ادامه در جدول زیر به طور خلاصه مقایسه‌ای بین مشتق کسری ریمن-لیوویل و کاپوتو را به شرح زیر انجام

می‌دهیم:

۴.۴.۳ مشتق کسری ریمن-لیوویل اصلاح شده

مشتقات کسری ریمن-لیوویل و کاپوتو از جمله مهمترین مشتقات کسری به حساب می‌آیند که علت این مطلب این است که در مدل سازی پدیده‌های فیزیکی اغلب از این دو نوع از مشتق استفاده می‌شود. با این حال برخی از خواص این مشتقات سبب می‌شود که بهره‌گیری از این مشتقات در بعضی موارد با سختی‌هایی همراه باشد مثلاً اینکه، مشتق ریمن-لیوویل از یک مقدار ثابت ناصفر است و یا این مطلب که برای اعمال اوپراتور مشتق کسری کاپوتو بر یک تابع باید مشتقات صحیح از آن تابع موجود باشند. در سال (۲۰۰۵) تعریف جدیدی از مشتق کسری ارائه شد، که به آن مشتق

ویژگی‌ها	مشتق ریمن-لیوویل	مشتق کاپوتو
نمایش	${}_a D_t^\alpha f(t) = D^n J^{n-\alpha} f(t)$	${}_a^C D_t^\alpha f(t) = J^{n-\alpha} D^n f(t)$
رابطه با حد	$\lim_{\alpha \rightarrow n} {}_a D_t^\alpha f(t) = f^{(n)}(t)$ $\lim_{\alpha \rightarrow n} {}_a D_t^\alpha f(t) = f^{(n-1)}(t)$	$\lim_{\alpha \rightarrow n} {}_a^C D_t^\alpha f(t) = f^{(n)}(t)$ $\lim_{\alpha \rightarrow n-1} {}_a^C D_t^\alpha f(t) = f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0)$
خطی	${}_a D_t^\alpha (\lambda f(t) + g(t)) = \lambda {}_a D_t^\alpha f(t) + {}_a D_t^\alpha g(t)$	${}_a^C D_t^\alpha (\lambda f(t) + g(t)) = \lambda {}_a^C D_t^\alpha f(t) + {}_a^C D_t^\alpha g(t)$
غیرجابجایی	$D_t^m {}_a D_t^\alpha f(t) = {}_a D_t^{\alpha+m} f(t) \neq {}_a D_t^\alpha D_t^m f(t)$	${}_a^C D_t^\alpha D_t^m f(t) = {}_a^C D_t^{\alpha+m} f(t) \neq D_t^m {}_a^C D_t^\alpha f(t)$
لاپلاس	$L\{{}_a D_t^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left[{}_a D_t^{\alpha-k-1} f(t) \right]_{t=0}$	$L\{{}_a^C D_t^\alpha f(t); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0)$
مشتق عدد ثابت	${}_a D_t^\alpha C = \frac{C t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$	${}_a^C D_t^\alpha C = 0$

جدول ۳.۳: مقایسه‌ی مشتق کاپوتو و ریمن-لیوویل

کسری ریمن-لیوویل اصلاح شده می‌گویند و در آن مشتق کسری از عدد ثابت صفر می‌شود و لزومی به وجود مشتق مرتبه صحیح برای مشتق کسری ندارد. انتگرال کسری این مشتق نیز به صورت زیر تعریف می‌شود

$${}_a^J I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\xi)^{\alpha-1} (f(\xi) - f(a)) d\xi, \alpha > 0. \quad (35.3)$$

به همین ترتیب به ازای $0 < \alpha < 1$ مشتق کسری ریمن-لیوویل اصلاح شده به صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}_a^J D_t^\alpha f(t) = D_a^J I_t^{\alpha-1} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\xi)^{\alpha-1} (f(\xi) - f(a)) d\xi. \quad (36.3)$$

برای $n \geq 1$ و $n-1 \leq \alpha \leq n$ مشتق کسری ریمن-لیوویل اصلاح شده به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$${}_a^J D_t^\alpha f(t) = D_a^n J I_t^{\alpha-n} f(t). \quad (37.3)$$

خواص مشتق کسری ریمن-لیوویل اصلاح شده

۱- بسط تیلور برای تابع پیوسته $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ که تا مرتبه $k\alpha$ برای هر k صحیح مثبت و $0 < \alpha < 1$ مشتق پذیر باشد، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{\alpha k}}{\Gamma(1+\alpha k)} f^{(\alpha k)}(x), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (38.3)$$

که می‌توان آن را به صورت زیر به کمک تابع میتاژ-لفلر نمایش داد:

$$f(x+h) = E_\alpha(h^\alpha D_x^\alpha) f(x). \quad (39.3)$$

۲- مشتق کسری ریمن- لیوویل اصلاح شده یک عدد ثابت برابر صفر می‌باشد.

۳- مشتق کسری ریمن- لیوویل اصلاح شده توابع نمایی به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$D^\alpha x^\gamma = \Gamma(\gamma + 1)\Gamma^{-1}(\gamma + 1 - \alpha)x^{\gamma-\alpha}, \quad \gamma > 0,$$

$$D^{n+\theta} x^\gamma = \Gamma(\gamma + 1)\Gamma^{-1}(\gamma + 1 - n - \theta)x^{\gamma-n-\theta}, \quad 0 < \theta < 1.$$

۴- مشتق کسری ریمن- لیوویل اصلاح شده حاصلضرب توابع به صورت زیر بدست نوشته می‌شود

$$(x(t)y(t))^{(\alpha)} = x^{(\alpha)}(t)y(t) + x(t)y^{(\alpha)}(t).$$

۵- مشتق کسری ریمن- لیوویل اصلاح شده ترکیب توابع به صورت زیر بیان می‌شود:

$$(f[x(t)])^{(\alpha)} = f'_x(x)x^{(\alpha)}(t) = f_x^{(\alpha)}(x)(x'_t)^\alpha.$$

۶- آخرین خاصیتی که در این بخش بیان می‌کنیم این است که، تبدیل لاپلاس از مشتق کسری ریمن- لیوویل اصلاح شده عبارت است از:

$$L[{}_a^J D_t^\alpha f(t)](s) := s^\alpha L[f(t)](s) - s^{\alpha-1} f(0), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (۴۰.۳)$$

برهان تمامی روابط فوق به کمک تعریف مشتق کسری ریمن- لیوویل اصلاح شده بیان می‌شوند [۵۳، ۵۴].

یادداشت

مدل سازی پدیده‌های طبیعی با کمک معادلات دیفرانسیل مستلزم شناخت ساختار و انواع گسترده آنهاست. درست همزمان با شکل گیری حساب دیفرانسیل کلاسیک در قرن هجدهم حساب دیفرانسیل کسری نیز شکل گرفت. حساب دیفرانسیل کسری که دربرگیرنده مشتقات و انتگرال از مرتبه کسری است، نیز همچون نمونه کلاسیک آن دارای کاربردهای فراوانی است که آشنایی و کار با آن را جذاب می‌نماید. در فصلی که از پیش رو گذشت تاریخچه و تعاریف و مقدمات کار با حساب دیفرانسیل کسری بیان شد در فصل‌های آتی به تفصیل به روش‌های حل گروه معادلات دیفرانسیل کسری خواهیم پرداخت.

فصل ۴

تقارن‌های معادلات کسری

در هر فرآیند طبیعی، متغیرهای مربوطه و میزان تغییرات آن‌ها به وسیله اصول علمی حاکم بر آن فرآیند به یکدیگر مربوط می‌شوند. هنگامی که این ارتباط با علائم ریاضی بیان شود نتیجه به صورت یک معادله دیفرانسیل می‌باشد. معادلات دیفرانسیل انواع گوناگون دارند.

به عنوان مثال فرض کنید جسمی به جرم m تحت جاذبه زمین آزادانه سقوط کند. نیروی وارد بر جسم از رابطه زیر به دست می‌آید که در آن g شتاب ثقل زمین است.

$$F = m \cdot g, \quad (1.4)$$

حال اگر y فاصله جسم از ارتفاع ثابتی باشد، در این صورت شتاب جسم برابر است با $\frac{d^2y}{dt^2}$. طبق قانون دوم نیوتن برآیند نیروهای وارد بر جسم از رابطه

$$F = ma = m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad (2.4)$$

به دست می‌آید. طبق روابط (۱.۴) و (۲.۴) داریم $m \cdot g = m \frac{d^2y}{dt^2}$ با ساده کردن به رابطه $g = \frac{d^2y}{dt^2}$ می‌رسیم که یک معادله دیفرانسیل می‌باشد.

و اما در حسابان کسری، واقعیت امر این است که مشتقات کسری به دلیل ماهیتی که دارند و در یک بازه عمل مشتقگیری را انجام می‌دهند، مدل‌های دقیق‌تری را برای بسیاری از سیستم‌های مهندسی نسبت به مشتقات مرتبه صحیح فراهم می‌کنند، به همین دلیل در سال‌های اخیر رشد قابل توجهی در حوزه حسابان کسری به وجود آمده است و لذا انواع مختلفی از معادلات دیفرانسیل کسری وجود دارد.

به عنوان نمونه معادله برگر که یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم غیر خطی است را در نظر می‌گیریم. این معادله برای تشریح حرکت سیالات و بررسی لایه‌های مرزی و امواج ضربه‌ای، حرکت و جابجایی اجسام و همچنین در علوم مهندسی به عنوان مدلی ساده برای نمایش آشفتگی و تلاطم به کار می‌رود، در حالت یک بعدی به شکل زیر است:

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \quad (3.4)$$

پارامتر ثابت ν در معادله فوق ضریب چسبندگی نام دارد و همچنین عدد $\frac{1}{\nu}$ را عدد رینولد می‌نامند. تعمیم این معادله به معادله‌ای که در آن مشتق مرتبه صحیح نسبت به زمان با مشتق کسری جایگزین می‌شود به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + uu_x = \nu u_{xx}. \quad (4.4)$$

معادله فوق می‌تواند نمونه‌ای از یک معادله دیفرانسیل کسری به حساب آید. به عنوان مثال دیگر معادله کامپانیتس^۱ را در نظر می‌گیریم. این معادله که به معادله انتشار فوتون‌ها معروف است، از معادله بولتزمن^۲ تحت شرایط مشخصی به طور همزمان توسط کامپانیتس^۳ [۷۲] و ویمن^۴ [۱۲۱] برداشت شد که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$f_t = \frac{1}{x^2} D_x \left[x^4 (f_x + f + f^2) \right], \quad (5.4)$$

این معادله توصیف کننده تکاملی از تابع چگالی f از انرژی فوتون‌ها حاصل از پراکندگی کامپوننت‌ها^۵ در پلاسمای کامل یونیزه همگن است. جواب‌های این معادله در مقاله [۱۲۴] بیان شده است. در دو دهه اخیر چندین مدل با مشتقات کسری برای توصیف فرایندهای جنبشی به کار گرفته شده است. به عنوان نمونه این مدل‌ها شامل تعمیم کسری-زمانی از معادلات بولتزمن و فوکر-پلانک^۶ می‌باشند.

در مقاله [۴۰] به معادله کامپانیتس با مشتقات کسری پرداخته است:

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u_t &= \frac{1}{x^2} \left[x^4 (u_x + u + u^2) \right], \\ {}^c D_t^\alpha u &= \frac{1}{x^2} \left[x^4 (u_x + u + u^2) \right], \\ D_t^{1+\alpha} u &= \frac{1}{x^2} \left[x^4 (u_x + u + u^2) \right], \\ D_t^\alpha u &= \frac{1}{x^2} \left[x^4 (u_x + u + u^2) \right]. \end{aligned}$$

همانطور که در روابط فوق آمده است، انواع مختلف مشتقات کسری نسبت به زمان را در این معادله در نظر گرفته شده است. اگرچه نویسنده درباره علت این مسئله توضیحی نداده ولی از این نظر که تعمیمی همه جانبه از مشتق کسری نسبت به زمان داده است کار بارزشی محسوب می‌شود.

ما در این فصل به معرفی روش تقارن‌های لی برای مسایل کسری که با مشتق ریمن-لیوویل می‌باشند، می‌پردازیم و سپس از کاربرد تقارن‌ها در کاهش مرتبه معادلات و یافتن جواب برای آن‌ها استفاده می‌کنیم و در پایان فصل نیز قوانین پایستگی معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری را حساب می‌کنیم.

^۱Kompaneets

^۲Boltzmann

^۳Kompaneets

^۴Weymann

^۵Compton

^۶Foker-plank

۱.۴ تقارن‌های لی معادلات دیفرانسیل معمولی کسری (FODE)

صورت کلی معادلات دیفرانسیل کسری معمولی که با یک متغیر مستقل و یک متغیر وابسته می‌باشند به صورت زیر است:

$$F(x, y, {}_aD_x^\alpha y, {}_aD_x^{\alpha+1} y, \dots) = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+. \quad (۶.۴)$$

گروه لی یک پارامتری که معادله (۶.۴) تحت آن ناورداست به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + \varepsilon \xi(x, y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \bar{y} &= y + \varepsilon \eta(x, y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \bar{y}^{(n)}(\bar{x}) &= y^{(n)}(x) + \varepsilon \eta^{(n)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad n \in N \\ {}_aD_{\bar{x}}^\alpha \bar{y} &= {}_aD_x^\alpha y + \varepsilon \eta^{(\alpha)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ &\vdots \end{aligned} \quad (۷.۴)$$

ξ و η توابع بینهایت کوچک نام دارند و $\eta^{(n)}$ و $\eta^{(\alpha)}$ به ترتیب امتداد مرتبه n -ام و α -ام از تابع $\eta(x, y)$ می‌باشد. از فصل اول می‌دانیم امتداد مرتبه n ام η از یکی از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\eta^{(n)} = D(\eta^{(n-1)}) - y^{(n)} D(\xi),$$

یا

$$\eta^{(n)} = D^n(\eta - \xi y^{(1)}) + \xi y^{(n+1)}. \quad (۸.۴)$$

چون حد پایین انتگرال در تعریف مشتق ریمن-لیوویل ثابت است، بنابر این آن نیز باید تحت تبدیلات (۸.۴) ناوردا باشد، چنین شرط ناوردایی نتیجه زیر را در پی دارد:

$$\xi(x, y)|_{x=a} = 0. \quad (۹.۴)$$

قضیه ۱.۱.۴. امتداد مرتبه α -ام ($\alpha \in \mathbb{R}^+$) وابسته به مشتق کسری ریمن-لیوویل به صورت زیر است:

$${}_aD_x^\alpha (\eta) = {}_aD_x^\alpha (\eta) - {}_aD_x^\alpha (\xi y^{(1)}) + \xi {}_aD_x^{\alpha+1} y. \quad (۱۰.۴)$$

برهان. یادآوری می‌کنیم که قاعده لایبنیتز در حالت تعمیم یافته به صورت زیر است:

$${}_aD_x^\alpha (f(x)g(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} {}_aD_x^{\alpha-n} f(x) g^{(n)}(x), \quad \alpha > 0, \quad (۱۱.۴)$$

که در آن داریم

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\Gamma(1 + \alpha)}{\Gamma(\alpha - n + 1)\Gamma(n + 1)}.$$

با استفاده از قاعده لاینیتز به ازای $f = 1$ و $g = y$ داریم:

$${}_a D_{\bar{x}}^\alpha \bar{y}(\bar{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{(\bar{x} - a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n - \alpha + 1)} \bar{y}^{(n)}(\bar{x}). \quad (12.4)$$

اگر از طرفین رابطه فوق نسبت به ε مشتق بگیریم، با توجه به رابطه چهارم از (۷.۴) و با توجه به اینکه چون عمل مشتقگیری از مرتبه صحیح و نسبت به ε انجام می‌شود، پس طبق قانون مشتق حاصلضرب دو تابع خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \eta^{(\alpha)} &= \frac{d}{d\varepsilon} [{}_a D_{\bar{x}}^\alpha \bar{y}(\bar{x})]_{\varepsilon=0} \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{(n - \alpha)(x - a)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n - \alpha + 1)} \bar{y}^{(n)}(x) \xi + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{(x - a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n - \alpha + 1)} \eta^{(n)} \right]_{\varepsilon=0} \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{(n - \alpha)(x - a)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n - \alpha + 1)} y^{(n)}(x) \xi + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{(x - a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n - \alpha + 1)} \eta^{(n)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{(n - \alpha)(x - a)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n - \alpha + 1)} \xi \eta^{(n)} \varepsilon \right]_{\varepsilon=0} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{(n - \alpha)(x - a)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n - \alpha + 1)} y^{(n)}(x) \xi + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{(x - a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n - \alpha + 1)} \eta^{(n)}. \quad (13.4) \end{aligned}$$

با جایگذاری (۱۰.۴) در عبارت (۱۳.۴) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \eta^{(\alpha)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{(x - a)^{n-\alpha} D_x^n (\eta - \xi y^{(1)})}{\Gamma(n - \alpha + 1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{(x - a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n - \alpha + 1)} \xi y^{(n+1)} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{(n - \alpha)(x - a)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n - \alpha + 1)} y^{(n)} \xi. \quad (14.4) \end{aligned}$$

اکنون با به کار بردن رابطه (۱۲.۴) در نخستین جمله و همچنین جایگزینی $n - 1$ به جای n در دومین جمله و جداسازی جمله $n = 0$ از سومین جمله، عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \eta^{(\alpha)} &= D_x^\alpha (\eta - \xi y^{(1)}) + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n-1} \frac{(x - a)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n - \alpha)} \xi y^{(n)} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{(x - a)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n - \alpha)} \xi y^{(n)} + \frac{(-\alpha)(x - a)^{-1-\alpha}}{\Gamma(-\alpha + 1)} \xi y \\ &= D_x^\alpha (\eta - \xi y^{(1)}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - a)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n - \alpha)} \xi y^{(n)} \left[\binom{\alpha}{n-1} + \binom{\alpha}{n} \right] \\ &\quad - \frac{\alpha(x - a)^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha + 1)} \xi y. \quad (15.4) \end{aligned}$$

از طرفی با توجه به (۱۲.۴) و اینکه $\frac{-\alpha}{\Gamma(-\alpha+1)} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}$ و همچنین $\binom{\alpha}{n-1} + \binom{\alpha}{n} = \binom{\alpha+1}{n}$ داریم:

$$\begin{aligned} \eta^{(\alpha)} &= D_x^\alpha (\eta - \xi y^{(1)}) + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+1}{n} \frac{(x - a)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n - \alpha)} \xi y^{(n)} \\ &= D_x^\alpha (\eta) - D_x^\alpha (\xi y^{(1)}) + \xi D_x^{\alpha+1} y. \quad (16.4) \end{aligned}$$

در فصل قبل نیز بیان شد که در حسابان کسری $\lim_{\alpha \rightarrow n} D_t^\alpha f = f^{(n)}$ لذا اگر در رابطه بالا α را که عددی کسری است با مقدار n که عددی صحیح است جایگذاری کنیم، عیناً به رابطه (۸.۴) خواهیم رسید. □

با توجه به اینکه دومین جمله‌ای که در رابطه (۱۶.۴) آمده است همان مشتق حاصلضرب می‌باشد، لذا داریم:

$$D_x^\alpha(\xi y^{(1)}) = D_x^\alpha(D(\xi y) - yD(\xi)) = D_x^{\alpha+1}(\xi y) - D_x^\alpha(yD(\xi)), \quad (17.4)$$

و لذا رابطه زیر را برای $\eta^{(\alpha)}$ خواهیم داشت:

$$\eta^{(\alpha)} = D_x^\alpha(\eta) + D_x^\alpha(yD(\xi)) - D_x^{\alpha+1}(\xi y) + \xi D_x^{\alpha+1}y. \quad (18.4)$$

اکنون از خاصیت لاینیتز در حاصلضرب توابع داریم:

$$D_x^\alpha(yD\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_x^{\alpha-n}yD_x^{n+1}\xi, \quad D_x^{\alpha+1}(y\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+1}{n} D_x^{\alpha-n+1}yD_x^n\xi,$$

و در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} \eta^{(\alpha)} &= D_x^\alpha(\eta) + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_x^{\alpha-n}yD_x^{n+1}\xi - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+1}{n} D_x^{\alpha-n+1}yD_x^n\xi \\ &\quad + \xi D_x^{\alpha+1}y \\ &= D_x^\alpha(\eta) + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_x^{\alpha-n}yD_x^{n+1}\xi - \xi D_x^{\alpha+1}y + \xi D_x^{\alpha+1}y \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha+1}{n} D_x^{\alpha-n+1}yD_x^n\xi \\ &= D_x^\alpha(\eta) + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_x^{\alpha-n}yD_x^{n+1}\xi - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha+1}{n+1} D_x^{\alpha-n}yD_x^{n+1}\xi. \end{aligned} \quad (19.4)$$

با استفاده از رابطه $\binom{\alpha+1}{n+1} = \binom{\alpha}{n} \frac{\alpha+1}{n+1}$ می‌توان عبارت فوق را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\eta^{(\alpha)} = D_x^\alpha(\eta) + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{n-\alpha}{n+1} D_x^{\alpha-n}yD_x^{n+1}\xi. \quad (20.4)$$

در ادامه مثالی برای محاسبه تقارن معادلات FODE بیان می‌کنیم. معادله ریکاتی را که در حالت کسری با مشتق ریمان-لیوویل به صورت زیر بیان می‌شود را در نظر می‌گیریم:

$$\Delta : D_x^\alpha y + ay^2 = \frac{b}{x^{2\alpha}}, \quad \alpha \in (0, 1), \quad (21.4)$$

به طوریکه a و b ثوابت دلخواه هستند. فرض کنید معادله (۲۱.۴) تحت گروه یک پارامتری از تبدیلات نقطه‌ای که به صورت زیر بیان می‌شود، ناوردا باشد:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + \varepsilon\xi(x, y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \bar{y} &= y + \varepsilon\eta(x, y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \bar{y}^{(n)}(\bar{x}) &= y^{(n)}(x) + \varepsilon\eta^{(n)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ {}_aD_{\bar{x}}^\alpha \bar{y} &= {}_aD_x^\alpha y + \varepsilon\eta^{(\alpha)} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

طبق رابطه (۲۰.۴) متغیر $\eta^{(\alpha)}$ که در معادله چهارم از رابطه بالا مشاهده می‌شود، عبارت است از:

$$\eta^{(\alpha)} = D_x^\alpha(\eta) + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{n-\alpha}{n+1} D_x^{\alpha-n}yD_x^{n+1}\xi.$$

با توجه به تعداد متغیرهای مستقل و وابسته، مولد بینهایت کوچک به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{v} = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

با توجه به اینکه معادله داده شده از مرتبه کسری می‌باشد لذا امتداد مرتبه α ام از مولد بینهایت کوچک عبارت است از:

$$\mathbf{v}^{(\alpha)} = \mathbf{v} + \eta^{(\alpha)} \frac{\partial}{\partial y_x^\alpha}. \quad (22.4)$$

در معادلات با مشتق کسری نیز همانند PDE ها، محک ناوردایی عبارت است از [47, 40]:

$$\mathbf{v}^{(\alpha)}(\Delta) \Big|_{\Delta=0} = 0.$$

لذا می‌توان نوشت:

$$\eta^\alpha + 2\alpha y \eta + 2b\alpha \xi x^{-2\alpha-1} = 0. \quad (23.4)$$

با جایگذاری به جای η^α داریم:

$$D_x^\alpha(\eta) + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{n-\alpha}{n+1} D_x^{\alpha-n} y D_x^{n+1} \xi + 2\alpha y \eta + 2b\alpha \xi x^{-2\alpha-1} = 0.$$

پس از ساده کردن و انجام محاسبات طولانی مولد بینهایت کوچک به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\mathbf{v} = x \frac{\partial}{\partial x} - \alpha y \frac{\partial}{\partial y}. \quad (24.4)$$

ملاحظه ۱.۱.۴. مراحل یافتن مولدهای بینهایت کوچک را می‌توان به کمک نرم افزار Maple انجام داد که در انتهای این فصل به بیان آن خواهیم پرداخت.

۲.۴ تقارن‌های نقطه‌ای معادلات دیفرانسیل جزئی کسری (FPDE)

صورت کلی معادلات کسری با دو متغیر مستقل t و x و متغیر وابسته u عبارت است از:

$$\partial_t^\alpha u(t, x) = \theta(x, t, u, u_x, u_{xx}, \dots). \quad (25.4)$$

اگر گروه لی یک پارامتری از تبدلات نقطه‌ای برای معادله فوق را به شکل

$$\bar{t} = t + \varepsilon \tau(x, t, u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

$$\bar{t} = t + \varepsilon \xi(x, t, u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

$$\bar{u} = u + \varepsilon \eta(x, t, u) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

$$\frac{\partial^\alpha \bar{u}}{\partial \bar{t}^\alpha} = \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \varepsilon \zeta_\alpha^0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \zeta_1^1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon \zeta_2^1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

$$\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x}^3} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \varepsilon \zeta_3^1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

در نظر می‌گیریم، آنگاه مولد بینهایت کوچک نظیر تبدیل فوق عبارت است از:

$$\mathbf{v} = \tau(t, x, u) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(t, x, u) \frac{\partial}{\partial u}. \quad (26.4)$$

مشابه معادلات با مشتقات صحیح و معادلات FODE برای اجرای محک ناوردایی امتداد یافته مولد بینهایت کوچک را روی معادله اثر می‌دهیم. میزان امتداد برابر است با بالاترین مرتبه مشتق ظاهر شده در معادله که البته در حسابان کسری هم مشتق صحیح را در نظر می‌گیریم و هم مشتق کسری و به صورت رابطه زیر داریم:

$$\mathbf{v}^{(\alpha, n)}(F) \Big|_{F=0} = 0, \quad F = \theta - \partial_t^\alpha u, \quad (27.4)$$

که در آن

$$\mathbf{v}^{(\alpha, n)} = \mathbf{v} + \eta_t^\alpha \frac{\partial}{\partial u_t^\alpha} + \eta^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta^{xxx} \frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + \dots \quad (28.4)$$

و ضرایب η_t^α و η^x و η^{xx} و η^{xxx} به طریق زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \eta^x &= D_x(\eta) - u_t D_x(\tau) - u_x D_x(\xi), \\ \eta^{xx} &= D_x(\eta^x) - u_{tx} D_x(\tau) - u_{xx} D_x(\xi), \\ \eta^{xxx} &= D_x(\eta^{xx}) - u_{txx} D_x(\tau) - u_{xxx} D_x(\xi), \\ \eta^{xxxx} &= D_x(\eta^{xxx}) - u_{txxx} D_x(\tau) - u_{xxxx} D_x(\xi), \end{aligned} \quad (29.4)$$

یا

$$\begin{aligned} \eta^x &= D_x(\eta - \tau u_t - \xi u_x) + \tau u_{tx} + \xi u_{xx}, \\ \eta^{xx} &= D_{xx}(\eta - \tau u_t - \xi u_x) + \tau u_{txx} + \xi u_{xxx}, \\ \eta^{xxx} &= D_{xxx}(\eta - \tau u_t - \xi u_x) + \tau u_{txxx} + \xi u_{xxxx}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

ضریب η_t^α را نیز می‌توان به شیوه زیر به دست آورد:

$$\eta_t^\alpha = D_t^\alpha \eta + \xi D_t^\alpha u_x - D_t^\alpha (\xi u_x) + D_t^\alpha (u D_t \tau) + \tau D_t^{\alpha+1} u - D_t^{\alpha+1} (\tau u).$$

یا

$$\eta_t^\alpha = \mathcal{D}_t^\alpha (\eta - \tau u_t - \xi u_x) + \tau \mathcal{D}_t^\alpha (u_t) + \xi \mathcal{D}_t^\alpha (u_x),$$

به کمک خاصیت لاینیتز داریم:

$$\begin{aligned} D_t^\alpha (\xi u_x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^n (\xi) D_t^{\alpha-n} u_x \\ &= \xi D_t^\alpha u_x + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^n (\xi) D_t^{\alpha-n} u_x, \end{aligned} \quad (30.4)$$

و لذا می‌توان نوشت:

$$\xi D_t^\alpha(u_x) - D_t^\alpha(\xi u_x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^n(\xi) D_t^{\alpha-n} u_x. \quad (31.4)$$

این بار هم به کمک خاصیت لاینیتز، تساوی‌های زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} -D_t^{\alpha+1}(\tau u) + D_t^\alpha(u D_t \tau) + \tau D_t^{\alpha+1} u &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^{n+1} \tau D_t^{\alpha-n} u \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha+1}{n} D_t^n \tau D_t^{\alpha+1-n} u \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n-1} D_t^n(\tau) D_t^{\alpha-n+1} u \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha+1}{n} D_t^n(\tau) D_t^{\alpha+1-n} u \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^n(\tau) D_t^{\alpha-n+1} u \\ &= -\alpha D_t \tau D_t^\alpha u - \sum_{n=2}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^n(\tau) D_t^{\alpha-n+1} u \\ &= -\alpha D_t \tau D_t^\alpha u - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n+1} D_t^{n+1}(\tau) D_t^{\alpha-n} u. \end{aligned} \quad (32.4)$$

سپس موارد فوق را در η_t^α جایگذاری می‌کنیم:

$$\eta_t^\alpha = D_t^\alpha \eta - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^n \xi D_t^{\alpha-n} u_x - \alpha D_t \tau D_t^\alpha u - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n+1} D_t^{n+1}(\tau) D_t^{\alpha-n} u.$$

قاعده زنجیری در حالت تعمیم یافته برای تابع ترکیب به فرم زیر است:

$$\frac{d^\alpha f(g(t))}{dt^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{n!} \binom{n}{k} g^k(t) \partial_t^\alpha (g^{n-k}(t)) \left. \frac{d^n f(z)}{dz^n} \right|_{z=g(t)}. \quad (33.4)$$

یا

$$\frac{d^\alpha f(g(t))}{dt^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n}{n!} \left. \frac{d^n f(z)}{dz^n} \right|_{z=g(t)}, \quad (34.4)$$

که در آن U_n با عبارت

$$U_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} g^k(t) \partial_t^\alpha (g^{n-k}(t)),$$

ارائه می‌شود. با به کارگیری رابطه (34.4) و نیز خاصیت لاینیتز، $D_t^\alpha \eta$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$D_t^\alpha(\eta) = \frac{\partial^\alpha \eta}{\partial t^\alpha} + \eta_u \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - u \frac{\partial^\alpha \eta_u}{\partial t^\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^n \eta_u}{\partial t^n} D_t^{\alpha-n}(u) + \mu, \quad (35.4)$$

که در آن

$$\mu = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^n \sum_{k=2}^m \sum_{l=0}^{k-1} \binom{\alpha}{n} \binom{n}{m} \binom{k}{l} \frac{t^{n-\alpha}}{k! \Gamma(n+1-\alpha)} (-u)^l \frac{\partial^m}{\partial t^m} (u^{k-l}) \frac{\partial^{n-m+k} \eta}{\partial t^{n-m} \partial u^k}.$$

در عبارت فوق به علت وجود $\frac{\partial^k \eta}{\partial u^k}$ در عبارت μ ، به ازای $k \geq 2$ وقتی η عبارتی خطی نسبت به u باشد، مقدار μ برابر با صفر خواهد بود. در نهایت با خلاصه کردن استدلال‌های آورده شده به فرمول صریح زیر برای η_t^α خواهیم رسید.

$$\eta_t^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\binom{\alpha}{n} \partial_t^n \eta_u - \binom{\alpha}{n+1} D_t^{n+1}(\tau) \right] \partial_t^{\alpha-n} u + \partial_t^\alpha \eta - u \partial_t^\alpha \eta_u - \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} D_t^n(\xi) \partial_t^{\alpha-n}(u_x) + (\eta_u - \alpha D_t(\tau)) \partial_t^\alpha u + \mu, \quad (36.4)$$

۱.۲.۴ محاسبه گروه تقارنی در معادلات هری-دایم، زاخاروف و آبیاری

معادله هری-دایم را در حالت کسری به صورت زیر در نظر می‌گیریم [۴۷]:

$$\partial_t^\alpha u = u^3 u_{xxx}. \quad (37.4)$$

با قرار دادن $\alpha = 1$ به معادله هری-دایم در حالت صحیح می‌رسیم. برای محاسبه تقارن‌های معادله، ابتدا محک ناوردایی مربوط به آن را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{v}^{(\alpha,3)} \left(\partial_t^\alpha u - 3u_{xxx} \right) \Big|_{\partial_t^\alpha u - u^3 u_{xxx} = 0} = 0, \quad (38.4)$$

که در آن $\mathbf{v}^{(\alpha,3)}$ همان امتداد مرتبه $(\alpha, 3)$ برای \mathbf{v} می‌باشد:

$$\mathbf{v}^{(\alpha,3)} = \mathbf{v} + \eta^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta^{xxx} \frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + \eta_t^\alpha \frac{\partial}{\partial u_t^\alpha}, \quad (39.4)$$

و لذا شرط ناوردایی عبارت است از:

$$\left(\eta^{\alpha,t} - 3u^2 u_{xxx} \eta - u^3 \eta^{xxx} \right) \Big|_{\partial_t^\alpha u - u^3 u_{xxx} = 0} = 0, \quad (40.4)$$

در ادامه مقادیر مربوط به η^x ، η^{xx} و $\eta^{\alpha,t}$ را از عبارات (۲۹.۴) و (۳۵.۴) در (۴۰.۴) جایگذاری می‌کنیم سپس با صفر قرار دادن ضرایب مشتقات $\partial_t^{\alpha-n} u_x$ ، $\partial_t^{\alpha-n} u$ ، u_t ، u_x ، \dots و $\partial_t^{\alpha-n} u$ به عبارتهای مشخصه زیر خواهیم رسید که این معادلات عبارتند از:

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{n} \partial_t^n \eta_u - \binom{\alpha}{n+1} D_t^{n+1}(\tau) &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, \\ \tau_x = \tau_u = \xi_t = \xi_u = \eta_{uu} &= 0, \\ 3u\xi_x - \alpha\tau_t u - 3\eta &= 0, \\ \partial_t^\alpha - u\partial_t^\alpha - u^3 \eta_{xxx} &= 0. \end{aligned} \quad (41.4)$$

با حل دستگاه فوق به جواب زیر خواهیم رسید:

$$\tau = c_3 t + c_5, \quad \xi = c_4 x^2 + c_2 x + c_1, \quad \eta = \left(2c_4 x + c_2 - \frac{\alpha c_3}{3} \right) u, \quad (42.4)$$

به طوری که c_i ها ثوابت دلخواه هستند. بنابراین مولدهای بینهایت کوچک برای معادله هری-دایم عبارتند از:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{v}_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial u}, \quad \mathbf{v}_3 = t \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\alpha}{3} u \frac{\partial}{\partial u}, \quad \mathbf{v}_4 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + 2xu \frac{\partial}{\partial u}.$$

به عنوان مثال دیگری معادله زاخاروف که ما در [۹۱] به بررسی آن پرداخته‌ایم را در نظر می‌گیریم:

مثال ۱.۲.۴. معادله کسری زاخاروف را که یک FPDE مرتبه سوم می‌باشد را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\partial_t^\alpha u + auu_x + bu_{xxx} + cu_{xyy} - du_{xx} - eu_{yy} = 0, \quad (43.4)$$

در ادامه معادله فوق را در چهار حالت مختلف می‌پردازیم. در حالت غیر کسری این معادله به صورت

$$u_t + auu_x + bu_{xxx} + cu_{xyy} - du_{xx} - eu_{yy} = 0, \quad (44.4)$$

می‌باشد، که توسط زاخاروف^۷ کوزنسو^۸ بیان شد و مربوط به امواج یون آکوستیک در مغناطیس پلاسما شامل یون‌های سرد و الکترون‌های گرم می‌باشد و مقادیر a, b, c, d و e ثابت‌هایی می‌باشند که شامل مقادیر فیزیکی همچون جرم، چگالی، میدان مغناطیسی، فرکانس پلاسما و ویسکوسیته جنبشی می‌باشند.

در این مثال قصد داریم کلیه تعمیم‌های کسری معادله زاخاروف نسبت به زمان را به صورت زیر بیان کنیم:

$$\mathcal{D}_t^\alpha u_t = -auu_x - bu_{xxx} - cu_{xyy} + du_{xx} + eu_{yy}, \quad (45.4)$$

$${}^C\mathcal{D}_t^\alpha u = -auu_x - bu_{xxx} - cu_{xyy} + du_{xx} + eu_{yy}, \quad (46.4)$$

$$\mathcal{D}_t^{\alpha+1} u = -auu_x - bu_{xxx} - cu_{xyy} + du_{xx} + eu_{yy}, \quad (47.4)$$

$$\mathcal{D}_t^\alpha u = -auu_x - bu_{xxx} - cu_{xyy} + du_{xx} + eu_{yy}. \quad (48.4)$$

به خاطر داشته باشید که هر ۴ معادله (۴۵.۴)-(۴۸.۴) با تبدیل مشتق کسری به مشتق مرتبه صحیح به معادله اصلی زاخاروف تبدیل خواهند شد. معادلات فوق قابل بازنویسی به صورت زیر می‌باشند:

$$F(t, x, y, u, \mathcal{D}_t^{\mu(\alpha)} u, u_x, \dots, u_{xyy}) = -auu_x - bu_{xxx} - cu_{xyy} + du_{xx} + eu_{yy}. \quad (49.4)$$

که انواع مشتقات را می‌توان با $\mathcal{D}_t^{\mu(\alpha)} u$ نمایش داد.

فرض کنیم معادله (۴۹.۴) تحت گروه یک پارامتری زیر ناوردا است:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t + \varepsilon\tau(t, x, y, u) + O(\varepsilon^2), \\ \bar{x} &= x + \varepsilon\xi(t, x, y, u) + O(\varepsilon^2), \\ \bar{y} &= y + \varepsilon\rho(t, x, y, u) + O(\varepsilon^2), \\ \bar{u} &= u + \varepsilon\eta(t, x, y, u) + O(\varepsilon^2), \\ \bar{u}_t^\alpha &= u_t^\alpha + \varepsilon\eta_t^\alpha(t, x, y, u) + O(\varepsilon^2), \\ \bar{u}_{\bar{x}} &= u_x + \varepsilon\eta^x(t, x, y, u) + O(\varepsilon^2), \\ \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} &= u_{xx} + \varepsilon\eta^{xx}(t, x, y, u) + O(\varepsilon^2), \\ \bar{u}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} &= u_{xxx} + \varepsilon\eta^{xxx}(t, x, y, u) + O(\varepsilon^2), \\ \bar{u}_{\bar{y}\bar{y}} &= u_{yy} + \varepsilon\eta^{yy}(t, x, y, u) + O(\varepsilon^2), \\ \bar{u}_{\bar{y}\bar{y}\bar{x}} &= u_{yyx} + \varepsilon\eta^{yyx}(t, x, y, u) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (50.4)$$

به طوری که ضرایب $\eta_t^\alpha, \xi, \tau, \eta, \eta^x, \eta^{xx}, \eta^{xxx}, \eta^{yy}, \eta^{yyx}$ ضرایب بینهایت کوچک می‌باشند.

^۷Zakharov

^۸Kuznetsov

جبر لی وابسته با این تقارن‌ها میدان برداری به فرم زیر است:

$$\mathbf{v} = \tau(t, x, y, u) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x, y, u) \frac{\partial}{\partial x} + \rho(t, x, y, u) \frac{\partial}{\partial y} + \eta(t, x, y, u) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (51.4)$$

که شرط نوردایی برای معادله زاخاروف عبارت است از:

$$\mathbf{v}^{(\alpha,3)} \left(F(t, x, y, u, D_t^{\mu(\alpha)} u, u_x, \dots, u_{xyy}) \right) |_{(F=0)} = 0, \quad (52.4)$$

که در آن $\mathbf{v}^{(\alpha,3)}$ همان امتداد مرتبه $(\alpha, 3)$ برای \mathbf{v} می‌باشد:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(\alpha,3)} = & \mathbf{v} + \eta^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta^{xxx} \frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + \eta^{yy} \frac{\partial}{\partial u_{yy}} + \eta^{yyx} \frac{\partial}{\partial u_{yyx}} \\ & + \eta_t^\alpha \frac{\partial}{\partial u_t^\alpha}. \end{aligned} \quad (53.4)$$

بنابراین محک نوردایی برای معادله زاخاروف عبارت است از:

$$\eta_t^\alpha + a\eta u_x + a\eta^x + b\eta^{xxx} + c\eta^{yyx} - d\eta^{xx} - e\eta^{yy} = 0. \quad (54.4)$$

در این مرحله همانند مثال قبل ابتدا مقادیر η_t^α و $\eta^x, \eta^{xx}, \eta^{xyy}$ را جایگذاری می‌کنیم و سپس با صفر قرار دادن ضرایب توان‌های مشتقات u به دستگاهی از معادلات به آن دستگاه مشخصه گوییم، خواهیم رسید که جواب‌های عبارتند از:

$$\xi = C_1, \quad \rho = C_2, \quad \tau = C_3. \quad (55.4)$$

بنابراین دو مولد بینهایت کوچک زیر حاصل خواهند شد:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\partial}{\partial y}. \quad (56.4)$$

در ادامه به عنوان مثالی که در آن تابع دلخواه باشد معادله آبیاری را در نظر می‌گیریم، ما این معادله را در [۸۷] مورد بررسی قرار دادیم و در بخش ابتدایی آن تقارن‌های معادله را به دست آوردیم:

مثال ۲.۲.۴. پس این بار روش تقارنی که در بالا اشاره شد را برای یک PDE کسری که به آن معادله دیفرانسیل کسری آبیاری می‌گوییم به کار می‌بریم. این معادله به فرم

$$C(u)D_t^\alpha u = \left(K(u)u_x \right)_x + \left(L(u)(u_y - 1) \right)_y - S(u), \quad (57.4)$$

بیان می‌شود که در آن u نمایانگر میزان رطوبت سطح زمین می‌باشد و تابع $C(u)$ ظرفیت آب می‌باشد و نیز $S(u)$ منبع آب است. همچنین $K(u)$ و $L(u)$ هدایت هیدرولیکی منبع می‌باشند. فرم بسط داده شده معادله آبیاری به صورت زیر است:

$$\Delta = -C(u)D_t^\alpha u S(u) + K'(u)u_x^2 + K(u)u_{xx} + L'(u)u_y(u_y - 1) + L(u)u_{yy}. \quad (58.4)$$

با اثر امتداد مرتبه دوم

$$\mathbf{v}^{(\alpha,2)} = \mathbf{v} + \eta^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^y \frac{\partial}{\partial u_y} + \eta^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta^{yy} \frac{\partial}{\partial u_{yy}} + \eta_t^\alpha \frac{\partial}{\partial u_t^\alpha}, \quad (59.4)$$

بر معادله (۵۷.۴) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(\alpha,2)}(\Delta) = & -C(u)\eta_t^\alpha - C'(u)\eta u_\alpha^t + K''(u)\eta u_x^2 + 2K'(u)\eta^x u_x + K(u)\eta^{xx} \\ & + K'(u)\eta u_{xx} + L''(u)\eta u_y^2 + 2L'(u)\eta^y u_y - L''\eta u_y - L'\eta^y \\ & + L(u)\eta^{yy} + L'(u)\eta u_{yy} - S'(u)\eta = 0 \pmod{(4.57)}, \end{aligned} \quad (60.4)$$

و

$$\mathbf{v}^{(\alpha,2)}(\Delta) \Big|_{(\Delta=0)} = 0. \quad (61.4)$$

با حل دستگاه معادلات مشخصه فوق و با صفر قرار دادن ضرایب $\{u_t, u_x, \dots, \partial_t^{\alpha-n}(u)\}$ می‌توان معادلات مشخصه را به دست آورد. با حل معادلات مشخصه، دو مولد به شرح زیر برای معادله (۵۷.۴) به دست می‌آید:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\partial}{\partial y}. \quad (62.4)$$

با جایگذاری مقادیر مختلف به ازای توابع دلخواه موجود در معادله، تقارن‌های بیشتری بدست خواهد آمد. در ادامه ۴ حالت متفاوت از معادله آبیاری را بررسی می‌کنیم:

◀ **حالت اول:** اگر $K(u) = L(u) = n(\text{constant})$ و $C(u) = u$ و $S(u) = -u^3 - mu$ و همچنین $\alpha \in (0, 1]$ آنگاه تقارن‌های زیر را می‌توان به عنوان تقارن‌های جدید معادله در نظر گرفت:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{\partial}{\partial y}, \\ \mathbf{v}_3 &= u \frac{\partial}{\partial u}, \\ \mathbf{v}_4 &= y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}, \\ \mathbf{v}_5 &= 2\alpha x \frac{\partial}{\partial x} + 2\alpha y \frac{\partial}{\partial y} + 4t \frac{\partial}{\partial t} + 3\alpha u \frac{\partial}{\partial u} - 2u \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \quad (63.4)$$

◀ **حالت دوم:** اگر $K(u) = L(u) = u$ و $C(u) = 1$ و $S(u) = au$ و همچنین $\alpha \in (0, 1]$ در این صورت تقارن‌های زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{\partial}{\partial y}, \\ \mathbf{v}_3 &= \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial}{\partial y} + t \frac{\partial}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \quad (64.4)$$

◀ **حالت سوم:** اگر $K(u) = L(u) = e^u$ و $C(u)$ و $S(u)$ همانند حالت دوم باشند، و همچنین $\alpha \in (0, 2]$ در این صورت تقارن‌های زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_3 = -t \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial u}, \quad (65.4)$$

$$\mathbf{v}_4 = -2e^{\frac{y}{4}} \cos\left(\frac{x}{4}\right) \frac{\partial}{\partial x} + 2e^{\frac{y}{4}} \sin\left(\frac{x}{4}\right) \frac{\partial}{\partial y} + e^{\frac{y}{4}} \sin\left(\frac{x}{4}\right) \frac{\partial}{\partial u},$$

$$\mathbf{v}_5 = 2e^{\frac{y}{4}} \sin\left(\frac{x}{4}\right) \frac{\partial}{\partial x} + 2e^{\frac{y}{4}} \cos\left(\frac{x}{4}\right) \frac{\partial}{\partial y} + e^{\frac{y}{4}} \cos\left(\frac{x}{4}\right) \frac{\partial}{\partial u}.$$

◀ **حالت چهارم:** اگر $K(u) = L(u) = u^\beta$ و $C(u) = e^u$ و $S(u) = ae^u$ و همچنین $\alpha \in (0, 2]$ و β و a مقادیر ثابت باشند، در این صورت تقارن‌های معادله عبارتند از:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad (66.4)$$

$$\mathbf{v}_3 = -\alpha x \frac{\partial}{\partial x} - \alpha y \frac{\partial}{\partial y} + (\beta - 2)t \frac{\partial}{\partial t} - \alpha u \frac{\partial}{\partial u}.$$

۳.۴ روش‌های گوناگون در حل معادلات دیفرانسیل کسری

برای حل یک معادله دیفرانسیل کسری روش‌های متفاوتی وجود دارد و مقالات بسیار زیادی در زمینه‌های مهندسی و علوم و اقتصاد و دیگر زمینه‌ها به منظور حل این معادلات به چاپ رسیده است. برای مثال در مرجع [۷۱] از روش چیشیف برای حل مسائل کسری بهینه استفاده شده است. گیو^۹ و همکارانش در سال ۲۰۱۲ از روش زیر-معادله برای حل دسته‌ای از معادلات با مشتقات کاپوتو پرداخته است [۴۵]. ژنگ^{۱۰} در [۱۲۶] نیز به کمک روش $\frac{G}{G'}$ به حل دسته‌ای از معادلات پرداخته است. همچنین، روش زیر فضای ناوردا نیز اولین بار در مقاله [۴۳] توسط گالکتونوف^{۱۱} برای معادلات PDE بیان شد و خیلی زود برای معادلات FDE به کار گرفته شد.

در ادامه این فصل به دنبال ارائه سه روش ناورداها، زیر معادله و زیر فضاهای ناوردا در جهت حل معادلات دیفرانسیل کسری می‌باشیم و در انتهای فصل به مقایسه روش‌های بیان شده خواهیم پرداخت.

۴.۴ یافتن جواب به کمک تقارن‌ها

در فصل اول نحوه به دست آوردن ناورداهای معادلات دیفرانسیل بیان شد، در این فصل قصد داریم ابتدا به کمک مفهوم تقارن‌ها، ناورداهای معادله مورد بررسی را بیابیم و سپس به کمک ناورداها معادله را کاهش دهیم. مفهوم ناوردای گروهی یک معادله دیفرانسیل قبل از سوفس لی نیز به صورت‌های پراکنده ارائه شده بود، اما لی این مفهوم را به شکل دست بندی شده بیان کرد [۷۶]. پس از لی ریاضیدانان زیادی به تعمیم کارهای او پرداختند ولی بیش از همه اوزیاناکوف^{۱۲} ریاضیدان روسی به کاوش در یافتن جواب‌های ناوردای گروهی یک دستگاه معادلات با مشتقات جزئی پرداخت. از جمله کاربردهای این جواب‌ها در معادلات هذلولوی می‌باشد که بارنبلت^{۱۳} در مقاله [۱۵] به این بخش پرداخته است. در مقاله [۶] ابلوویتز^{۱۴} و کوداما^{۱۵} تحلیل‌های جامعی را در مورد جواب‌های معادله KdV ارائه دادند که ایده آن‌ها برای سایر معادلات تکاملی غیر خطی نیز به کار می‌آید. در فصل اول نیز بیان شد که تقارن‌های یک دستگاه معادلات

^۹Guo

^{۱۰}Zhang

^{۱۱}Galaktionov

^{۱۲}Ovsiannikov

^{۱۳}Barenblatt

^{۱۴}Ablowitz

^{۱۵}Kodama

خانواده‌ای از جواب‌ها را به خانواده دیگر از جواب‌ها می‌نگارد، در این بین جواب‌هایی هم وجود دارند که به خودشان نگاشته می‌شوند، یعنی نسبت به عمل تقارن‌های دستگاه PDE ناوردا هستند، چنین جواب‌هایی را جواب‌های ناوردا می‌نامند.

۱.۴.۴ روش جواب‌های ناوردا

مشابه جواب‌های ناوردا که برای PDF ها در فصل اول بیان شد، این تعریف را می‌توان برای FDE ها نیز بیان کرد. می‌توان گفت $u = \theta(t, x)$ یک جواب ناوردا از معادله FDE مربوط به تقارن \mathbf{v} می‌باشد، به شرط آنکه اولاً $u = \theta(t, x)$ در معادله صدق کند و ثانیاً $u = \theta(t, x)$ نسبت به تقارن نقطه‌ای زیر

$$\mathbf{v} = \tau \partial_t + \xi \partial_x + \eta \partial_u,$$

ناوردا باشد و شرط زیر را بتوان نوشت:

$$\tau(x, t, \theta) \theta_t + \xi(x, t, \theta) \theta_x = -\eta(x, t, \theta).$$

به جهت یافتن جواب‌های ناوردا، ابتدا این مفهوم را برای معادله PDE حرارت، انجام می‌دهیم و سپس آن را در مورد معادله فوکر-پلانک کسری اعمال می‌نماییم.

مثال ۱.۴.۴. همانطور که در فصل اول بیان شد، گروه تقارنی معادله گرما در مثال (۱.۳.۱) به دست آمد که شامل یک گروه شش پارامتری از تقارن‌های مخصوص خود معادله بعلاوه یک زیرگروه نامتناهی البعد که از خطی بودن معادله نتیجه می‌شود، می‌باشد. متناظر با زیر گروه یک پارامتری از گروه تقارنی کل، کلاسی از جواب‌های گروه ناوردا وجود خواهد داشت که از معادله دیفرانسیل معمولی خلاصه شده‌ای بدست می‌آید که شکل آن به طور کلی به زیرگروه خاص مورد بررسی بستگی دارد [۹۸].

◀ **حالت اول.** جواب‌های موج سیار: به طور کلی، جواب‌های موج سیار برای یک معادله دیفرانسیل جزئی، از جواب‌های گروه-ناوردای خاصی ناشی می‌شوند که در آن گروه مورد مطالعه، یک گروه انتقالی بر فضای متغیرهای مستقل می‌باشد. در این مثال، گروه انتقالی

$$(x, t, u) \mapsto (x + c\varepsilon, t + \varepsilon, u), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad (۶۷.۴)$$

که تعیین کنند سرعت امواج است و توسط $\partial_t + c\partial_x$ ، که در آن c یک مقدار ثابت می‌باشد، تولید شده است را در نظر می‌گیریم. معادله مشخصه که از گروه انتقال زیر به دست می‌آید عبارت است از:

$$\frac{dx}{c} = \frac{dt}{1} = \frac{du}{0} \Rightarrow \begin{cases} dx = cdt \Rightarrow x = ct + y \Rightarrow y = x - ct, \\ du = 0 \Rightarrow u = v. \end{cases}$$

لذا ناوردهای گروه (۶۷.۴) عبارتند از:

$$y = x - ct, \quad u = v,$$

بنابراین یک جواب گروه-ناوردای $v = h(y)$ به شکل $u = h(x - ct)$ خواهد بود. با حل معادله برای مشتقات u نسبت به x و t ، و برحسب مشتقات v نسبت به y خواهیم داشت:

$$u_t = -cv_y, \quad u_x = v_y, \quad u_{xx} = v_{yy}, \quad (68.4)$$

با جایگذاری این عبارات در معادله گرما، معادله دیفرانسیل معمولی خلاصه شده برای جواب‌های موج سیار به شکل زیر به دست خواهد آمد،

$$-cv_y = v_{yy}. \quad (69.4)$$

با قرار دادن $p = v_y$ خواهیم داشت $-cp = p_y$ و لذا $p = e^{-cy}m$ و در نتیجه $dv = e^{-cy}m dy$ پس جواب عمومی معادله (69.4) با ضرایب ثابت عبارت است از:

$$v(y) = ke^{-cy} + l. \quad (70.4)$$

◀ **حالت دوم. جواب‌های گالیله‌ای-ناوردا:** گروه یک پارامتری گالیله‌ای که توسط $v_5 = 2t\partial_x - xu\partial_u$ تولید می‌شود، دارای ناوردهای

$$y = t, \quad v = ue^{\frac{x^2}{4t}}, \quad (71.4)$$

در نیم فضای بالایی $\{t > 0\}$ می‌باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$u_t = \left(v_y + \frac{x^2}{4t^2}v\right)e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

$$u_{xx} = \left(\frac{x^2}{4t} - \frac{1}{2t}v\right)ve^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

بنابراین معادله خلاصه شده برای جواب‌های گالیله‌ای ناوردا، معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اولی به شکل

$$2yv_y + v = 0,$$

است (هر چند خود معادله گرما یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم می‌باشد). جواب معادله فوق برابر $v(y) = \sqrt{y}$ می‌باشد. از اینجا عمومی‌ترین جواب گالیله-ناوردا، مضرب اسکالری از جواب منبع به شکل

$$u(x, t) = \frac{k}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

است. فهرست فوق از جواب‌های گروه-پایا را می‌توان با در نظر گرفتن زیرگروه‌های یک پارامتری بیشتری، که از ترکیب‌های خطی کلی‌تری از مولدهای بینهایت کوچک گروه تقارنی کل به دست می‌آید، تعمیم داد.

در ادامه معادله‌ای کسری را در نظر می‌گیریم تا جوابی از معادله را به کمک روش ناورداها به دست آورده:

مثال ۲.۴.۴. مدلی از معادله فوکر-پلانک در حالت PDE به صورت زیر می‌باشد، که در ابتدا در سال ۲۰۰۴ توسط اکسندال^{۱۶} به صورت

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [f(x)u] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [g(x)u], \quad (72.4)$$

بیان شد و مورد مطالعه قرار گرفت. در این معادله $u(x, t)$ شرح‌دهنده تابع چگالی احتمالی در فرایندی تصادفی می‌باشد. ما در مقاله [۹۰] مدلی از معادله فوکر-پلانک را در حالت کسری مورد مطالعه قرار دادیم تا به کمک مفهوم تقارن‌ها بتوانیم جوابی را برای آن بیابیم. معادله را در حالتی که مشتق نسبت به زمان آن کسری باشد، به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathcal{D}_t^\alpha u = -\frac{\partial}{\partial x} [f(x)u] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [g(x)u], \quad (73.4)$$

به ازای $\alpha \in (0, 1)$ تقارن‌های این معادله به ازای توابع دلخواه $f(x)$ و $g(x)$ عبارتند از:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= 16t \frac{\partial}{\partial t} - \left(8\sqrt{g(x)}\alpha \int \frac{dx}{\sqrt{g(x)}} \right) \frac{\partial}{\partial x} - \left(8u\alpha - \frac{8uf(x)\alpha}{\sqrt{g(x)}} \int \frac{dx}{\sqrt{g(x)}} \right. \\ &\quad \left. + 6u \ln(g(x))\alpha + \left[3u \int \left(\frac{2g''(x)\alpha}{\sqrt{g(x)}} \int \frac{dx}{\sqrt{g(x)}} - \frac{g''(x)\alpha}{\sqrt{g^3(x)}} \int \frac{dx}{\sqrt{g(x)}} \right) dx \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 8u \right] \frac{\partial}{\partial u}, \quad (74.4) \\ \mathbf{v}_2 &= -16 \left(\sqrt{g(x)} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left[-\frac{16uf(x)}{\sqrt{g(x)}} + 3u \int \left(\frac{2g''(x)}{\sqrt{g^3(x)}} + \frac{4g''(x)}{\sqrt{g(x)}} \right) dx \right] \frac{\partial}{\partial u}, \\ \mathbf{v}_3 &= u \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned}$$

در ادامه معادله را در دو حالت متفاوت در نظر می‌گیریم:

◀ **حالت اول:** به ازای $f(x) = x$ و $g(x) = x$ تقارن‌های معادله عبارتند از:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= 2\alpha x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t} + \left(u\alpha + 2u\alpha x - u \right) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (75.4) \\ \mathbf{v}_2 &= 4\sqrt{x} \frac{\partial}{\partial x} + \left(4u\sqrt{x} - \frac{3u}{\sqrt{x}} \right) \frac{\partial}{\partial u}, \quad \mathbf{v}_3 = u \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned}$$

◀ **حالت دوم:** تقارن‌ها به ازای $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^2$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= 2x\alpha \ln(x) \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t} + \left(2u\alpha + 2ux \ln(x)\alpha - 3u\alpha \ln(x) \right) \frac{\partial}{\partial u}, \quad (76.4) \\ \mathbf{v}_2 &= x \frac{\partial}{\partial x} + ux \frac{\partial}{\partial u}, \quad \mathbf{v}_3 = u \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned}$$

اکنون می‌خواهیم به کمک ناورداها معادله را کاهش مرتبه دهیم. به این منظور تقارن \mathbf{v}_1 را از حالت اول که در بالا مطرح شد، در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه

$$\mathbf{v}_1 = 2\alpha x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t} + \left(u\alpha + 2u\alpha x - u \right) \frac{\partial}{\partial u},$$

لذا معادله مشخصه آن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{dx}{2\alpha x} = \frac{dt}{2t} = \frac{du}{u(\alpha + 2\alpha x - 1)}.$$

در نتیجه ناوردهای معادله عبارتند از $tx^{-\frac{1}{\alpha}}$ و $\frac{u}{\sqrt{x}e^x}$. لذا جواب ناوردای معادله عبارت است از:

$$u(x, t) = x^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}} e^x g(z), \quad (77.4)$$

به طوریکه $z = tx^{-\frac{1}{\alpha}}$ با توجه به جواب ناوردا، مشتق کسری سمت چپ معادله (۷۳.۴) به صورت

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{u(x, \tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{\sqrt{x} e^x g(y)}{2\sqrt{x} x(z-y)^\alpha} x^{\frac{1}{\alpha}} dy \\ &= x^{-\frac{\alpha-1}{2\alpha}} e^x \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{g(y)}{(z-y)^\alpha} dy \\ &= x^{-\frac{\alpha-1}{2\alpha}} e^x \partial_z^\alpha g(z), \end{aligned} \quad (۷۸.۴)$$

می‌باشد. با جایگذاری (۷۸.۴) در (۷۳.۴) و جایگذاری به ازای مشتقات نسبت به u به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$\begin{aligned} \partial_z^\alpha g(z) &= x^{\frac{1+\alpha}{2\alpha}} \left\{ -x^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}} g(z) - \frac{1}{2} x^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}} g(z) - x^{\frac{3\alpha-1}{2\alpha}} g(z) - \frac{1}{2\alpha} x^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}} g(z) \right. \\ &+ \frac{1}{x} x^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}} z g'(z) + \frac{1}{2} x^{-\frac{\alpha-1}{2\alpha}} g(z) - \frac{1}{2\alpha} x^{-\frac{\alpha-1}{2\alpha}} g(z) - \frac{\alpha+1}{8\alpha} x^{-\frac{\alpha-1}{2\alpha}} g(z) \\ &+ \frac{1}{4} x^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}} g(z) - \frac{1}{4\alpha} x^{-\frac{\alpha-1}{2\alpha}} z g'(z) - \frac{1}{\alpha} x^{-\frac{\alpha-1}{2\alpha}} z g'(z) + \frac{\alpha-1}{4\alpha} x^{-\frac{\alpha-1}{2\alpha}} g(z) \\ &+ \frac{1}{2} x^{\frac{3\alpha-1}{2\alpha}} g(z) - \frac{1}{2\alpha} x^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}} z g'(z) + \frac{\alpha+1}{8\alpha^2} x^{-\frac{\alpha-1}{2\alpha}} g(z) - \frac{1}{4\alpha} x^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}} g(z) \\ &+ \frac{1}{4\alpha^2} x^{-\frac{\alpha-1}{2\alpha}} z g'(z) + \frac{\alpha+3}{4\alpha^2} x^{-\frac{\alpha-1}{2\alpha}} z g'(z) - \frac{1}{2\alpha} x^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}} z g'(z) + x^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}} g(z) \\ &\left. + \frac{1}{2\alpha^2} x^{-\frac{\alpha-1}{2\alpha}} z^2 g''(z) \right\}. \end{aligned} \quad (۷۹.۴)$$

اگرچه با کاهش مرتبه صورت داده معادله به یک FODE تبدیل نشد ولی توانستیم معادلی برای (۷۳.۴) بیابیم که هر جواب از (۷۹.۴) جوابی از (۷۳.۴) نیز می‌باشد و برعکس.

مثال ۳.۴.۴. در ریاضیات معادله Korteweg de Vries (KdV) مدلی ریاضی از امواج در سطوح کم عمق آب است. این معادله اولین بار در سال (۱۸۷۷) توسط بازینیسک^{۱۷} بیان شد. تا کنون صورت‌های مختلف معادله KdV ذکر شده است که برخی از آن‌ها در جدول (۱.۴) ذکر شده‌اند.

در حسابان کسری معادله برگر - KdV مرتبه n ام با اقتباس از معادله برگر - KdV با مشتقات جزئی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_t^\alpha(u) = a \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + f(u) \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (۸۰.۴)$$

که به ازای n های مختلف و $f(u)$ های گوناگون با روش‌های متفاوت این معادله مورد بررسی قرار گرفته است. به عنوان مثال به کمک روش تقارن‌ها این فرم از معادله در مقالات [۳۸، ۱۱۵، ۱۱۹] مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به (۸۰.۴) می‌توان معادله برگر - KdV مرتبه ۴ ام با مشتق کسری را به صورت زیر بیان کرد:

$$D_t^\alpha(u) = a \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + f(u) \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (۸۱.۴)$$

که می‌توان آن را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$F = a u_{xxxx} + f(u) u_x - D_t^\alpha(u). \quad (۸۲.۴)$$

^{۱۷}Boussinesq

مراجع	معادله	نام
[۱۸]	$\partial_t u + \partial_x^3 u + 6u\partial_x u = 0$	KdV
[۳۰]	$\partial_t u + \partial_x^3 u - 6u\partial_x u + \frac{u}{2t} = 0$	KdV استوانه‌ای
[۳۴]	$\partial_t u + \partial_x \left(\frac{\partial_x^2 u - 2\eta u^3 - 3u(\partial_x u)^2}{2(\eta + u^2)} \right) = 0$	KdV تغییر فرم داشته
[۳۳]	$\partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x f(u) = 0$	KdV در حالت کلی
[۸۱]	$\partial_t u + \partial_x^3 u \pm 6u^2 \partial_x u = 0$	KdV اصلاح شده
[۱۰۶]	$\partial_t u + \partial_x^3 - \frac{1}{8}(\partial_x u)^3 + (\partial_x u)(Ae^{au} + B + Ce^{-au}) = 0$	KdV اصلاح شده اصلاح شده
[۱۱۳]	$\partial_t u + \partial_x^3 u - 6u\partial_x u + \frac{u}{t} = 0$	KdV کروی
[۴۸]	$\begin{cases} \partial_t u = 6u\partial_x u - \partial_x^3 u + 3w\partial_x^2 w \\ \partial_t w = 3(\partial_x u)w + 6u\partial_x w - 4\partial_x^3 w \end{cases}$	KdV فوق العاده
[۹۷]	$\partial_t u + \partial_x^3 u - 6f(t)u\partial_x u = 0$	KdV انتقالی
[۹۶]	$\partial_t u + \beta t^n \partial_x^3 u + \alpha t^n u \partial_x u = 0$	KdV با ضرایب متغیر
[۵۵]	$\partial_t u + \mu \partial_x^3 u + 2u\partial_x u - \nu \partial_x^2 u = 0$	KdV برگر
[۴۶]	$\partial_t u - \frac{\partial_x^N u}{\partial_x^N} - Au^p u_x = 0$	KdV مرتبه n
[۸۹]	$\partial_t u - u_{xxxx} - f(u)u_x = 0$	KdV برگر تعمیم یافته مرتبه 4

جدول ۱.۴: حالات مختلف معادله Korteweg – deVries(KdV)

با توجه به مطالبی که در ابتدای این فصل بیان شد، در حالت کلی تقارن معادله (۸۱.۴) عبارت است از:

$$v_1 = \frac{\partial}{\partial x}.$$

در حالتی که $0 < \alpha < 2$ ، $\alpha \neq 1$ و $f(u) = u^b(x, t)$ معادله را می‌توان به صورت

$$D_t^\alpha(u) = a \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + u^b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (۸۳.۴)$$

نوشت و تقارن‌های آن عبارتند از:

$$v_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad v_2 = tb \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\alpha bx}{4} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{3\alpha u}{4} \frac{\partial}{\partial u}. \quad (۸۴.۴)$$

در حالتی که $0 < \alpha < 2$ ، $\alpha \neq 1$ و $f(u) = u(x, t)$ معادله عبارت است از:

$$D_t^\alpha(u) = a \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + u(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (۸۵.۴)$$

و تقارن آن برابر است با:

$$v_1 = \frac{\partial}{\partial x}. \quad (۸۶.۴)$$

به طور خلاصه می‌توان مطالب فوق را به صورت جدول (۲.۴) بیان کرد.

v_2	v_1	α	$f(u)$	
-	$\frac{\partial}{\partial x}$	$0 < \alpha < 2$ $\alpha \neq 1$	$f(u)$ تابع دلخواه	حالت 0
$tb \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\alpha bx}{4} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{3\alpha u}{4} \frac{\partial}{\partial u}$	$\frac{\partial}{\partial x}$	$0 < \alpha < 2$ $\alpha \neq 1$	$f(u) = u^b(x, t)$	حالت 1
$t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\alpha x}{4} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{3\alpha u}{4} \frac{\partial}{\partial u}$	$\frac{\partial}{\partial x}$	$0 < \alpha < 2$ $\alpha \neq 1$	$f(u) = u(x, t)$	حالت 2

جدول ۲.۴: تقارن‌های مختلف معادله (۸۱.۴) به ازای ۳ حالت متفاوت $f(u)$

◀ در حالت ۱ به ازای تقارن $v_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ داریم:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dt}{0} = \frac{du}{0}. \quad (۸۷.۴)$$

لذا به ناوردهای t و u می‌رسیم و در نتیجه جواب معادله به صورت $u = g(t)$ خواهد بود که با جایگذاری آن در معادله (۸۳.۴) به معادله زیر خواهیم رسید:

$$\mathcal{D}_t^\alpha u = 0, \quad 0 < \alpha < 2, \quad \alpha \neq 1.$$

با حل رابطه فوق داریم جواب ناوردا به صورت زیر می‌باشد:

$$u(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2}.$$

◀ در ادامه حالت ۱، ترکیب خطی $v_1 + v_2$ را در نظر می‌گیریم تا جواب ناوردای مربوط به آن را بیابیم: داریم:

$$\frac{dt}{bt} = \frac{dx}{1 + \frac{\alpha bx}{4}} = \frac{du}{\frac{-3\alpha u}{4}}.$$

با انتگرال‌گیری از دستگاه فوق، ناوردهای $\frac{\sqrt[4]{4+\alpha bx}}{\sqrt[4]{t}}$ و $u \sqrt[4]{t^{3\alpha}}$ به دست می‌آیند، بنابراین جواب ناوردا عبارت است از:

$$u(x, z) = \frac{g(z)}{\sqrt[4]{t^{3\alpha}}}, \quad z = \frac{\sqrt[4]{4 + \alpha bx}}{\sqrt[4]{t}}. \quad (۸۸.۴)$$

در جدول (۳.۴) لیستی از ناوردهای معادله برگر KdV- بیان شده است. اکنون به کمک قضیه زیر به دنبال کاهش مرتبه معادله (۸۳.۴) می‌باشیم:

انواع حالات	v_i	معادلات مشخصه	جواب‌های ناوردا
حالت اول	v_1	$\frac{dt}{0} = \frac{dx}{1} = \frac{du}{0}$	$u = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2}$
	$v_1 + v_2$	$\frac{dt}{tb} = \frac{dx}{1 + \frac{\alpha bx}{4}} = \frac{du}{\frac{-3\alpha u}{4}}$	$u = g(z)t^{\frac{-3\alpha}{4b}} \quad z = \frac{\sqrt[4]{4+\alpha bx}}{\sqrt[4]{t}}$
	$v_2 - v_1$	$\frac{dt}{tb} = \frac{dx}{-1 + \frac{\alpha bx}{4}} = \frac{du}{\frac{-3\alpha u}{4}}$	$u = f(z)t^{\frac{-3\alpha}{4b}} \quad z = \frac{\sqrt[4]{-4+\alpha bx}}{\sqrt[4]{t}}$
	v_2	$\frac{dt}{tb} = \frac{dx}{\frac{\alpha bx}{4}} = \frac{du}{\frac{-3\alpha u}{4}}$	$u = h(z)t^{\frac{-3\alpha}{4b}} \quad z = xt^{-\frac{\alpha}{4}}$
حالت دوم	v_1	$\frac{dt}{0} = \frac{dx}{1} = \frac{du}{0}$	$u = c_3 t^{\alpha-1} + c_4 t^{\alpha-2}$
	$v_1 + v_2$	$\frac{dt}{t} = \frac{dx}{1 + \frac{\alpha x}{4}} = \frac{du}{\frac{-3\alpha u}{4}}$	$u = g(z)t^{\frac{-3\alpha}{4}} \quad z = \frac{\sqrt[4]{4+\alpha x}}{\sqrt[4]{t}}$
	$v_2 - v_1$	$\frac{dt}{t} = \frac{dx}{-1 + \frac{\alpha x}{4}} = \frac{du}{\frac{-3\alpha u}{4}}$	$u = g(z)t^{\frac{-3\alpha}{4}} \quad z = \frac{\sqrt[4]{-4+\alpha x}}{\sqrt[4]{t}}$
	v_2	$\frac{dt}{t} = \frac{dx}{\frac{\alpha x}{4}} = \frac{du}{\frac{-3\alpha u}{4}}$	$u = g(z)t^{\frac{-3\alpha}{4}} \quad z = xt^{-\frac{\alpha}{4}}$

جدول ۳.۴: معادلات مشخصه و جواب‌های ناوردا

قضیه ۱.۴.۴. با توجه به تبدیلات (۸۸.۴) معادله (۸۳.۴) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{P}_4^{1-\alpha-\frac{3\alpha}{4b}, \alpha} g\right)(z) &:= at^\alpha \left(g''''(z)z'^4 + 6g''''(z)z'^2z'' + 4g''(z)z'z'''' \right. \\ &\quad \left. + 3g''(z)z''^2 + g'(z)z'''' \right) + t^{\frac{-\alpha}{4}} g'(z)g^b(z)z'. \end{aligned} \quad (۸۹.۴)$$

که در آن $\left(\mathcal{P}_4^{1-\alpha-\frac{3\alpha}{4b}, \alpha} g\right)(z)$ همان عملگر دیفرانسیل کسری کوبر می‌باشد، که به صورت زیر تعریف می‌شود: [۵۶]

$$\left(\mathcal{P}_\beta^{\tau, \alpha} g\right)(z) := \prod_{j=0}^{n-1} \left(\tau + j - \frac{1}{\beta} z \frac{d}{dz} \right) (\mathcal{K}_\beta^{\tau+\alpha, n-\alpha} g)(z), \quad (۹۰.۴)$$

۹

$$\left(\mathcal{K}_\beta^{\tau, \alpha} g\right)(z) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^\infty (u-1)^{\alpha-1} u^{-(\tau+\alpha)} g(zu^{\frac{1}{\beta}}) du, & \alpha > 0, \\ g(z) & \alpha = 0, \end{cases} \quad n = \begin{cases} [n] + 1, & \alpha \notin \mathbb{N}, \\ \alpha, & \alpha \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

برهان. برای شروع ابتدا سمت چپ معادله (۸۳.۴) را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t^\alpha u(t, x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_0^t \frac{u(s, x)}{(t-s)^{\alpha+1-m}} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_0^t s^{\frac{-3\alpha}{4b}} g\left(\frac{\sqrt[4]{4+\alpha bx}}{\sqrt[4]{s}}\right) (t-s)^{n-\alpha-1} ds. \end{aligned} \quad (۹۱.۴)$$

فرض کنید $\nu = \frac{t}{s}$, $(ds = \frac{-t}{\nu^2} d\nu)$ را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t^\alpha u(t, x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_1^\infty s^{n-\alpha-\frac{3\alpha}{4b}} g\left(z\nu^{\frac{1}{4}}\right) (\nu-1)^{n-\alpha-1} \frac{d\nu}{\nu} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_1^\infty t^{n-\alpha-\frac{3\alpha}{4b}} \frac{\nu^{-(n-\alpha-\frac{3\alpha}{4b}+1)}}{(\nu-1)^{n-\alpha-1}} g\left(z\nu^{\frac{1}{4}}\right) d\nu. \end{aligned} \quad (92.4)$$

با توجه به عملگر کوبر داریم:

$$\mathcal{D}_t^\alpha u(t, x) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[t^{n-\alpha-\frac{3\alpha}{4b}} \left(\mathcal{K}_4^{1-\frac{3\alpha}{4b}, n-\alpha} g \right) (z) \right]. \quad (93.4)$$

با جایگذاری $z = \frac{\sqrt[4]{4+abx}}{\sqrt[4]{t}}$ در رابطه (93.4) با محاسبات ریاضی داریم:

$$t \frac{d}{dt} g(z) = \frac{-1}{4} z \frac{d}{dz} g(z).$$

در انتها می‌توان مشتق $\mathcal{D}_t^\alpha u(t, x)$ به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t^\alpha u(t, x) &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[t^{n-\alpha-\frac{3\alpha}{4b}} \left(\mathcal{K}_4^{1-\frac{3\alpha}{4b}, n-\alpha} g \right) (z) \right] \right\} \\ &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left\{ \frac{\left(n-\alpha-\frac{3\alpha}{4b} - \frac{1}{4} z \frac{d}{dz} \right) \left(\mathcal{K}_4^{1-\frac{3\alpha}{4b}, n-\alpha} g \right) (z)}{t^{-(n-\alpha-\frac{3\alpha}{4b}-1)}} \right\} \\ &\vdots \\ &= t^{-\alpha-\frac{3\alpha}{4b}} \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{3\alpha}{4b} + j - \frac{1}{4} z \frac{d}{dz} \right) \left(\mathcal{K}_4^{1-\frac{3\alpha}{4b}, n-\alpha} g \right) (z) \\ &= t^{-\alpha-\frac{3\alpha}{4b}} \left(\mathcal{P}_4^{1-\frac{3\alpha}{4b}-\alpha, \alpha} \right) (z). \end{aligned} \quad (94.4)$$

سمت راست رابطه (83.4) با توجه به مشتقات $u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_{xxxx}$ که عبارتند از:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{g'(z)z'}{t^{\frac{3\alpha}{4b}}}, & u_{xx} &= \frac{g''(z)z'^2 + g'(z)z''}{t^{\frac{3\alpha}{4b}}}, \\ u_{xxx} &= \frac{g'''(z)z'^3 + 3g''(z)z'z'' + g'(z)z'''}{t^{\frac{3\alpha}{4b}}}, \\ u_{xxxx} &= \frac{g''''(z)z'^4 + 6g'''(z)z'^2z'' + 4g''(z)z'z''' + 3g'(z)z''''}{t^{\frac{3\alpha}{4b}}}. \end{aligned}$$

به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} a \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + u^b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} &= at^{-\frac{3\alpha}{4b}} \left(g''''(z)z'^4 + 6g'''(z)z'^2z'' + 4g''(z)z'z''' + 3g'(z)z'''' \right. \\ &\quad \left. + g'(z)z'''' \right) + t^{-\frac{3\alpha}{4b}-\frac{3\alpha}{4}} g^b(z)g'(z)z'. \end{aligned} \quad (95.4)$$

با توجه به روابط (94.4) و (95.4)، شکل دیگری از رابطه (83.4) به فرم زیر به دست می‌آید:

$$\left(\mathcal{P}_4^{1-\alpha-\frac{3\alpha}{4b}, \alpha} g \right) (z) := at^\alpha \left(g''''(z)z'^4 + 6g'''(z)z'^2z'' + 4g''(z)z'z''' \right)$$

$$+3g''(z)z''^2 + g'(z)z'''' + t^{-\frac{\alpha}{4}} g'(z)g^b(z)z'. \quad (۹۶.۴)$$

□ به دست می‌آید.

مطابق قضیه فوق تمام فرمهای مختلف کاهش مرتبه یافته از معادله برگر - KdV را می‌توان به صورت جدول (۴.۴) به دست آورد.

معادله کاهش یافته	v_i	انواع حالتها
$u = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2}$	v_1	۱-۱
$(\mathcal{P}_4^{1-\alpha-\frac{3\alpha}{4b}, \alpha} g_1)(z) = at^\alpha (g_1''''(z)z'^4 + 6g_1'''(z)z'^2z'' + 4g_1''(z)z'z'''' + 3g_1''(z)z''^2 + g_1'(z)z''''') + t^{\frac{\alpha}{4}} g_1'(z)g_1^b(z)z'$ $z = \frac{\sqrt[4]{4+\alpha bx}}{\sqrt[4]{t}}$	$v_1 + v_2$	۱-۲
$(\mathcal{P}_4^{1-\alpha-\frac{3\alpha}{4b}, \alpha} g_2)(z) = at^\alpha (g_2''''(z)z'^4 + 6g_2'''(z)z'^2z'' + 4g_2''(z)z'z'''' + 3g_2''(z)z''^2 + g_2'(z)z''''') + t^{\frac{\alpha}{4}} g_2'(z)g_2^b(z)z'$ $z = \frac{\sqrt[4]{-4+\alpha bx}}{\sqrt[4]{t}}$	$v_2 - v_1$	۱-۳
$(\mathcal{P}_4^{1-\alpha-\frac{3\alpha}{4b}, \alpha} g_3)(z) = at^\alpha (g_3''''(z)z'^4 + 6g_3'''(z)z'^2z'' + 4g_3''(z)z'z'''' + 3g_3''(z)z''^2 + g_3'(z)z''''') + t^{\frac{\alpha}{4}} g_3'(z)g_3^b(z)z'$ $z = \frac{x}{\sqrt[4]{t^\alpha}}$	v_2	۱-۴
$u = c_3 t^{\alpha-1} + c_4 t^{\alpha-2}$	v_1	۲-۱
$(\mathcal{P}_4^{1-\frac{7\alpha}{4}, \alpha} h_1)(z) = at^\alpha (h_1''''(z)z'^4 + 6h_1'''(z)z'^2z'' + 4h_1''(z)z'z'''' + 3h_1''(z)z''^2 + h_1'(z)z''''') + t^{\frac{\alpha}{4}} h_1'(z)h_1(z)z'$ $z = \frac{\sqrt[4]{4+\alpha x}}{\sqrt[4]{t}}$	$v_1 + v_2$	۲-۲
$(\mathcal{P}_4^{1-\frac{7\alpha}{4}, \alpha} h_2)(z) = at^\alpha (h_2''''(z)z'^4 + 6h_2'''(z)z'^2z'' + 4h_2''(z)z'z'''' + 3h_2''(z)z''^2 + h_2'(z)z''''') + t^{\frac{\alpha}{4}} h_2'(z)h_2(z)z'$ $z = \frac{\sqrt[4]{-4+\alpha x}}{\sqrt[4]{t}}$	$v_2 - v_1$	۲-۳
$(\mathcal{P}_4^{1-\frac{7\alpha}{4}, \alpha} h_3)(z) = at^\alpha (h_3''''(z)z'^4 + 6h_3'''(z)z'^2z'' + 4h_3''(z)z'z'''' + 3h_3''(z)z''^2 + h_3'(z)z''''') + t^{\frac{\alpha}{4}} h_3'(z)h_3(z)z'$ $z = \frac{x}{\sqrt[4]{t^\alpha}}$	v_2	۲-۴

جدول ۴.۴: انواع حالت‌های کاهش مرتبه یافته از معادله (۸۱.۴)

۲.۴.۴ روش زیر معادله

این روش برای معادلاتی که مشتق کسری نسبت به زمان آن‌ها، مشتق ژومقی است مورد استفاده قرار می‌گیرد. همانطور که در فصل سوم نیز بیان شد، مشتق ژومقی عبارت است از:

$$D_t^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-\xi)^{-\alpha-1} [f(\xi) - f(0)] d\xi, & \alpha < 0, \\ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-\xi)^{-\alpha} [f(\xi) - f(0)] d\xi, & 0 < \alpha < 1, \\ [f^{(\alpha-n)}(x)]^{(n)}, & 1 \leq n \leq \alpha < n+1. \end{cases} \quad (۹۷.۴)$$

برای شروع معادله

$$F(u, u_x, u_y, D_t^\alpha u, \dots) = 0, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (98.4)$$

را در حالت کلی در نظر می‌گیریم. در ادامه مراحل انجام روش زیر معادله را در ۴ گام بیان می‌کنیم:
(گام اول) ابتدا از متغیر $u(x, y, t) = u(\xi)$ برای تغییر متغیر استفاده می‌کنیم که در آن

$$\xi = hx + ly + ct + \xi_0,$$

توجه شود که l, k و c ثابت می‌باشند. با این تغییر متغیر معادله (98.4) به معادله FODE زیر تبدیل می‌شود:

$$F(u(\xi), hu'(\xi), lu'(\xi), c^\alpha D_\xi^\alpha u(\xi), \dots) = 0, \quad (99.4)$$

(گام دوم) فرض می‌کنیم معادله (99.4) دارای جوابی به صورت زیر باشد:

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^n a_i \Phi^i(\xi), \quad (100.4)$$

که در آن a_i ($i = 1, \dots, n$) ثابت می‌باشد و n عددی صحیح مثبت است و از متعادل کردن بالاترین مشتق در رابطه (99.4) به دست می‌آید، علاوه بر این $\Phi^i(\xi)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) در معادله ریکاتی کسری با مشتق ژومقی که به صورت زیر می‌باشد، صدق می‌کند:

$$D_\xi^\alpha \Phi(\xi) = \sigma + \Phi^2(\xi), \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (101.4)$$

ژنگ^{۱۸} در مقاله [۱۲۵] بعضی از جواب‌های معادله (101.4) را که به صورت زیر می‌باشند را به دست آورده است:

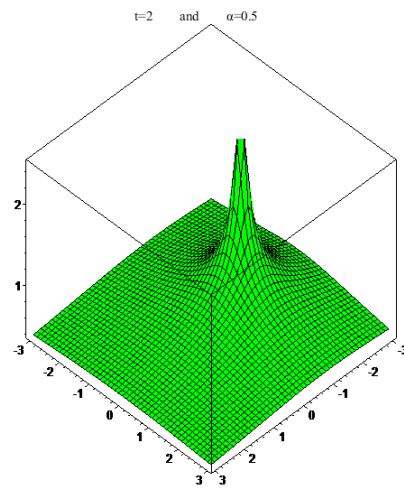
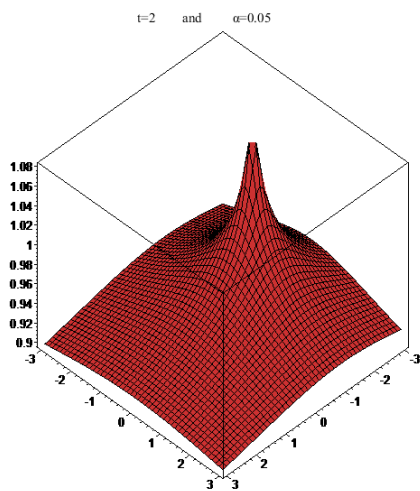
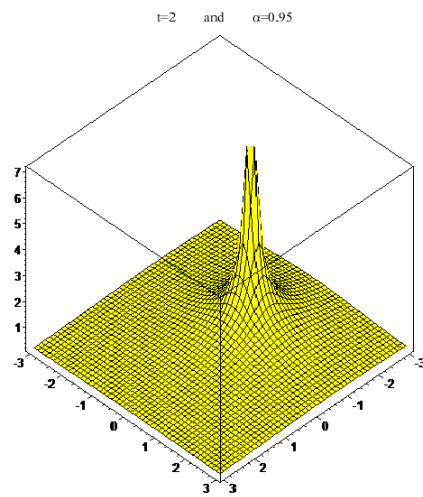
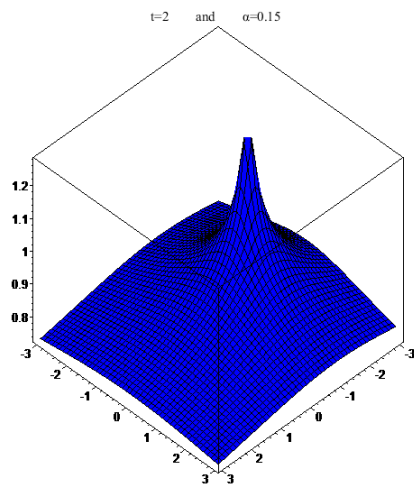
$$\Phi(\xi) = \begin{cases} -\sqrt{-\sigma} \tanh(\sqrt{-\sigma}\xi), & \sigma < 0, \\ -\sqrt{-\sigma} \coth(\sqrt{-\sigma}\xi), & \sigma < 0, \\ \sqrt{\sigma} \tan(\sqrt{\sigma}\xi), & \sigma > 0, \\ -\sqrt{\sigma} \cot(\sqrt{\sigma}\xi), & \sigma > 0, \\ -\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\xi^\alpha + \omega}, & \omega = \text{const}, \sigma = 0. \end{cases} \quad (102.4)$$

(گام سوم) در این مرحله (100.4) را در رابطه (99.4) جایگذاری می‌کنیم و با صفر قرار دادن ضرایب Φ^i ها به یک دستگاه از معادلات خواهیم رسید.

(گام چهارم) معادلات به دست آمده در گام سوم را حل می‌کنیم تا مقادیر a_i ها ($i = 1, \dots, n$) و ξ به دست آید، سپس این مقادیر را در (100.4) قرار می‌دهیم و به کمک (102.4) جوابی برای معادله FDE (98.4) خواهیم رسید.

مثال ۴.۴.۴. ما در [۸۷] از این روش برای حل دستگاه

$$\begin{cases} c(u)D_t^\alpha(u) = (K(u)u_x)_x + (L(u)(u_y - 1))_y - S(u), \\ C(u) = u(x, y, t), \quad K(u) = L(u) = n, \quad S(u) = -u^3 - mu, \quad n, m \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (103.4)$$



شکل ۱.۴: نموداری از جواب به ازای $t = 2$ و $\alpha = 0/5, 0.15, 0/05$

استفاده کردیم که در آن مشتق ژومقی می‌باشد. و جواب‌های زیر را برای معادله به دست آوردیم:

$$u = \begin{cases} -c^\alpha \sqrt{-\frac{m}{c^{2\alpha}}} \tanh \left(\sqrt{-\frac{m}{c^{2\alpha}}} (hx + ly + ct + \xi_0) \right), & m < 0, c^{2\alpha} > 0, \\ -c^\alpha \sqrt{-\frac{m}{c^{2\alpha}}} \coth \left(\sqrt{-\frac{m}{c^{2\alpha}}} (hx + ly + ct + \xi_0) \right), & m < 0, c^{2\alpha} > 0, \\ c^\alpha \sqrt{\frac{m}{c^{2\alpha}}} \tan \left(\sqrt{\frac{m}{c^{2\alpha}}} (hx + ly + ct + \xi_0) \right), & m > 0, c^{2\alpha} > 0, \\ -c^\alpha \sqrt{\frac{m}{c^{2\alpha}}} \cot \left(\sqrt{\frac{m}{c^{2\alpha}}} (hx + ly + ct + \xi_0) \right), & m > 0, c^{2\alpha} > 0, \\ c^\alpha \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(hx+ct+ly+\xi_0)^{\alpha+\omega}}, & \omega = \text{const}, \sigma = 0. \end{cases} \quad (10.4.4)$$

برای نمونه پنجمین جواب از معادله را به ازای $t = 2$ و $\alpha = 0.5, 0.15, 0.05$ در شکل (۴.۴.۴) رسم نموده‌ایم.

۳.۴.۴ زیر فضای ناورد

در این بخش ابتدا این روش را برای معادلات PDE شرح می‌دهیم و سپس به شرح آن برای معادلاتی با مشتقات کسری می‌پردازیم. روش زیر فضای ناورد را برای معادلات با مشتقات صحیح که به صورت تکاملی به فرم زیر هستند، مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$u_t = F(u, u_x, \dots, \partial_x^k u), \quad (10.5.4)$$

که در آن:

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \dots, \quad \partial_x^k u = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}.$$

می‌توان سمت راست معادله فوق را با $\widehat{F}[u]$ نمایش دهیم، لذا معادله (۱۰۵.۴) به فرم زیر بیان می‌شود:

$$u_t = \widehat{F}[u]. \quad (10.6.4)$$

تعریف ۱۰۴.۴. یک زیر فضای خطی W_n تولید شده توسط توابع مستقل خطی $f_1(x), \dots, f_n(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W_n = \langle f_1(x), \dots, f_n(x) \rangle = \left\{ c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x), \quad | \quad \forall c_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

W_n زیر فضای ناوردای عملگر \widehat{F} نامیده می‌شود، اگر برای تابع $y(x) \in W_n$ شرط زیر برقرار باشد:

$$\widehat{F}[y] \in W_n. \quad (10.7.4)$$

به عبارت دیگر اگر $y(x) \in W_n$ یعنی $y(x) = c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x)$ در این صورت رابطه زیر برقرار باشد:

$$\widehat{F}[y] = F_1(c_1, \dots, c_n) f_1(x) + \dots + F_n(c_1, \dots, c_n) f_n(x), \quad (10.8.4)$$

به طوریکه ضرایب $\{F_i(c_1, \dots, c_n)\}_{i=1}^n$ در $\widehat{F}[y]$ توابعی هستند که به ازای عملگر $\widehat{F}[y]$ توسط زیر فضای ناوردای

$$\langle f_1(x), \dots, f_n(x) \rangle,$$

داده شده است.

مثال ۵.۴.۴. معادله زیر را در نظر می‌گیریم

$$u_t = uu_{xx} + \frac{1}{\sigma}u_x^2 - \sigma, \quad (109.4)$$

که در آن σ مقداری ثابت می‌باشد. در این صورت می‌توان این معادله را به فرم زیر نمایش داد:

$$\widehat{F}[u] = uu_{xx} + \frac{1}{\sigma}u_x^2 - \sigma, \quad (110.4)$$

معادله (۱۱۰.۴) دارای زیرفضای-ناوردای $W_2 = \langle 1, x^2 \rangle$ هست، زیرا

$$\widehat{F}[c_1 + c_2x^2] = 2c_1c_2 - \sigma + 2\left(1 + \frac{2}{\sigma}\right)c_2^2x^2 \in W_2, \quad (111.4)$$

که در آن ضرایب F_1 و F_2 عبارتند از:

$$F_1(c_1, c_2) = 2c_1c_2 - \sigma, \quad F_2(c_1, c_2) = 2\left(1 + \frac{2}{\sigma}\right)c_2^2x^2. \quad (112.4)$$

برای یافتن زیر فضای ناوردای می‌توان از گزاره زیر که در کتاب [۴۳] به همراه برهان آورده شده است، استفاده کرد.

قضیه ۲.۴.۴. فرض کنید توابع $f_1(x), \dots, f_n(x)$ از مجموعه جواب‌های معادله خطی مرتبه n -ام

$$\widehat{L}[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0, \quad (113.4)$$

و تابع F نیز هموار باشد، در این صورت $W_n = \langle f_1(x), \dots, f_n(x) \rangle$ نسبت به عملگر

$$\widehat{F}[y] = F[x, y, \dots, y^{(k)}],$$

ناوردا است اگر و تنها اگر به ازای تمام جواب‌های $y(x)$ از معادله (۱۱۳.۴) رابطه $\widehat{L}[\widehat{F}[y]] = 0$ برقرار باشد. ضمناً برای

عملگر $\widehat{F}[y] = F[x, y, y', \dots, y^{(k)}]$ از مرتبه k که حداکثر بعد W_n عبارت است از $2k + 1$ ، (به عبارت دیگر $n \leq 2k + 1$).

قضیه ۳.۴.۴. فرض کنید $W_n = \langle f_1(x), \dots, f_n(x) \rangle$ زیر فضای ناوردای $\widehat{F}[u]$ باشد، در این صورت تابع

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^m u_i(t) f_i(x),$$

یک جواب از معادله (۱۰۶.۴) می‌باشد اگر و تنها اگر ضرایب $u_i(t)$ ها در دستگاه زیر صدق کنند

$$\begin{cases} u'_1(t) = F_1(u_1, \dots, u_n), \\ u'_n(t) = F_n(u_1, \dots, u_n), \end{cases} \quad (114.4)$$

که F_1, \dots, F_n توسط رابطه (۱۰۸.۴) تعریف می‌شود.

دستگاه (۱۱۴.۴) معمولاً غیرخطی است. توجه شود که جواب عمومی (۱۱۴.۴) فقط یک دسته از جواب‌های معادله (۱۰۶.۴) می‌باشد. اما با این حال این روش می‌تواند در کلاس‌های وسیعی از PDE ها و سیستم‌های غیرخطی به کار گرفته شود و بسیاری از جواب‌ها را برای معادلات گوناگون ارائه دهد.

مثال ۶.۴.۴. بار دیگر معادله (۱۰۹.۴) را از مثال (۵.۴.۴) در نظر می‌گیریم. همانطور که بیان شد زیر فضای ناوردای این معادله عبارت است از $W_2 = \langle 1, x^2 \rangle$ ، بنابراین جواب معادله به فرم

$$u(x, t) = u_1(t) + u_2(t)x^2, \quad (115.4)$$

می‌باشد. در مثال (۵.۴.۴) به جای $u_1(t)$ و $u_2(t)$ از $c_1(t)$ و $c_2(t)$ استفاده کردیم. با توجه به رابطه (۱۱۲.۴) می‌توان نوشت

$$\begin{cases} u_1'(t) = 2u_1u_2 - \sigma, \\ u_2'(t) = 2\left(1 + \frac{\sigma}{\sigma}\right)u_2^2. \end{cases} \quad (116.4)$$

با حل دستگاه فوق، جواب معادله (۱۰۹.۴) به صورت زیر بدست می‌آید (روش کامل حل در [۴۱] بیان شده است).

$$u(x, t) = A_0 t^{-\frac{\sigma}{\sigma+2}} - \frac{\sigma(\sigma+2)}{2(\sigma+1)} t - \frac{\sigma}{2(\sigma+2)t} x^2. \quad (117.4)$$

در ابتدا روش ناورداهای همانطور که در بالا شرح داده شد، برای معادلات PDE مطرح شد، تا اینکه نویسندگان بزرگی همچون گازیزو^{۱۹} و کاساخین^{۲۰} در منبع [۴۱] این روش را برای یافتن جواب معادلات با مشتق کسری استفاده کردند. نحوه اجرای الگوریتم روش را در قضیه زیر بیان می‌کنیم. در حالت کلی نمایش معادلات کسری به صورت زیر می‌باشد:

$$\partial_t^\alpha u(t, x) = \theta(x, t, u, u_x, u_{xx}, \dots). \quad (118.4)$$

قبل از هرچیز برای حل معادله‌ای که شامل مشتق کسری با روش زیرفضاهای ناوردای لازم است معادله را به صورت تکاملی مانند رابطه زیر بنویسیم:

$$D_t^\alpha u = \widehat{F}[u]. \quad (119.4)$$

قضیه زیر که گازیزو آن را در سال ۲۰۱۳ مطرح کرده است، برای معادلات کسری به کار می‌رود که البته مشتق موجود در معادله از نوع ریمان-لیوویل باشد.

قضیه ۴.۴.۴. فرض کنید توابع مستقل خطی $\{f_i(x)\}$ زیر فضای ناوردای W_n نسبت به عملگر $\widehat{F}[u]$ را به صورت زیر تولید کند:

$$W_n = \langle f_1(x), \dots, f_n(x) \rangle,$$

و همچنین $D_t^\alpha f_i(t)$ به ازای هر $i = 1, \dots, n$ موجود باشد و بسط $\widehat{F}[u]$ به ازای $u \in W_n$ به فرم زیر باشد

$$\widehat{F}[c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x)] = F_1(c_1, \dots, c_n) f_1(x) + \dots + F_n(c_1, \dots, c_n) f_n(x). \quad (120.4)$$

در این صورت اگر ضرایب $u_i(t)$ که در رابطه

$$u(x, t) = u_1(t)f_1(x) + \dots + u_n(t)f_n(x), \quad (121.4)$$

قرار دارند و باید در دستگاه معادلات FODE زیر صدق کند،

$$\begin{cases} D_t^\alpha u_1(t) = F_1(u_1, \dots, u_n), \\ \dots \\ D_t^\alpha u_n(t) = F_n(u_1, \dots, u_n), \end{cases} \quad (122.4)$$

در این صورت (121.4) یک جواب برای معادله (119.4) می‌باشد:

برهان. از آنجایی که عملگر مشتق از نوع ریمان-لیوویل می‌باشد، لذا می‌توان آن را بر معادله (121.4) اثر داد و با توجه به اینکه توابع f_i بر حسب x می‌باشند، لذا مشتق نسبت به t بر آن اثر نمی‌کند و داریم:

$$D_t^\alpha u = (D_t^\alpha u_1)f_1(x) + \dots + (D_t^\alpha u_n)f_n(x). \quad (123.4)$$

با توجه به رابطه (120.4) می‌توان تساوی زیر را بدست آورد:

$$\widehat{F}[u(x, t)] = F_1(u_1(t), \dots, u_n(t))f_1(x) + \dots + F_n(u_1(t), \dots, u_n(t))f_n(x). \quad (124.4)$$

بنابراین معادله (119.4) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\sum_{i=1}^n (D_t^\alpha u_i - F_i(u_1(t), \dots, u_n(t)))f_i(x) = 0. \quad (125.4)$$

در این تبدیل، تعداد متغیرهای مستقل معادله کاهش می‌یابد و همین امر سرعت چشمگیری در روند حل معادله ایجاد می‌کند.

با توجه به اینکه f_i ها توابع مستقل خطی می‌باشند، برای برقراری رابطه فوق کافی است ضرایب را برابر صفر قرار دهیم که این امر ما را به دستگاه (122.4) خواهد رساند و برهان تمام می‌شود. □

از آنجایی که حل دستگاه (122.4) برای معادلات با مشتقات ریمان-لیوویل به سادگی امکان پذیر نیست و اینکه یکی از اولین مسائلی که برای این دست از معادلات مطرح می‌شود، این است که مشتق عدد ثابت در آن‌ها صفر نیست، لذا باکیاراج^{۲۱} و ساهدون^{۲۲} از هندوستان قضیه‌ای مشابه قضیه (4.4.4) را در [۱۶] برای معادلات با مشتق کسری کاپاتو بیان کردند.

ما نیز براساس نتایج به دست آمده در مورد روش زیرفضاهای ناوردا در [۸۸] و [۸۹] از این روش برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتق کسری استفاده کردیم.

همانطور که در مبحث تقارن‌ها مطرح شد در مقاله [۸۹] معادله برگر KdV را به صورت زیر در نظر گرفته‌ایم:

$${}^C D_t^\alpha(u) = a \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + f(u) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad 0 < \alpha < 2, \quad f(u) = u, \quad (126.4)$$

^{۲۱}T.Bakkyaraj

^{۲۲}R.Sahadevan

در نتیجه

$$\widehat{F} = a \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + u \frac{\partial u}{\partial x}.$$

با توجه به اینکه

$$\widehat{F}[c_1 + c_2 x] = c_1 c_2 + c_2^2 x \in W,$$

لذا می‌توان $W = \langle 1, x \rangle$ را به صورت زیر فضای ناوردای معادله را در نظر گرفت، چرا که

$$\widehat{F}[c_1 + c_2 x] \in W.$$

بنابراین با توجه به W ، می‌توان گفت معادله (۱۲۶.۴) جوابی به فرم زیر دارد:

$$u(t, x) = c_1(t) + c_2(t)x, \quad (127.4)$$

که در آن $c_1(t)$ و $c_2(t)$ توابعی نامشخص هستند که برای تعیین آن‌ها کافی است (۱۲۷.۴) را در (۱۲۶.۴) جایگذاری کنیم تا دستگاه زیر بدست آید:

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha c_1(t) = c_1(t)c_2(t), \\ \partial_t^\alpha c_2(t) = c_2^2(t). \end{cases} \quad (128.4)$$

از حل معادله دوم از دستگاه فوق داریم:

$$c_2(t) = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-2\alpha)} t^{-\alpha}.$$

با قرار دادن $c_2(t)$ در معادله اول به منظور بدست آوردن $c_1(t)$ به معادله زیر می‌رسیم:

$$\partial_t^\alpha c_1(t) = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-2\alpha)} t^{-\alpha} c_1(t),$$

لذا

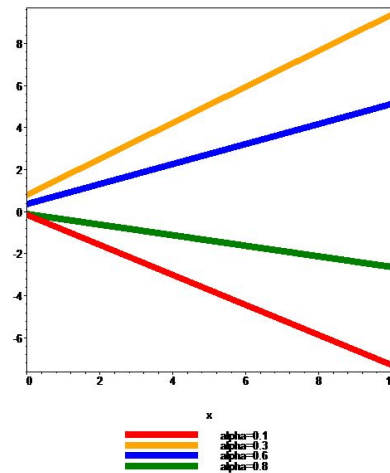
$$c_1(t) = t^{-\alpha}.$$

در نتیجه با جایگذاری $c_1(t)$ و $c_2(t)$ در $u(x, t)$ ، جواب معادله را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$u(t, x) = t^{-\alpha} \left(1 + x \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1-2\alpha)} \right). \quad (129.4)$$

تصویری از معادله را به ازای α های مختلف در شکل (۵.۴) به تصویر درآورده‌ایم.

ملاحظه ۱.۴.۴. با توجه به اینکه $\Gamma(0)$ مقداری تعیین نشده می‌باشد، لذا لازم است در مثال فوق α را مخالف $\frac{1}{2}$ در نظر بگیریم ($\alpha \neq \frac{1}{2}$).



شکل ۲.۴: جواب $u(x, t)$ برای معادله (۱۲۸.۴) که شکل سمت چپ به ازای $t = 2$ و شکل سمت راست به ازای $t = 0.5$ می‌باشد.

۵.۴ بررسی روش‌های ارائه شده برای حل معادلات کسری

در این فصل ۳ روش را برای حل معادلات ارائه دادیم. روش جواب‌های ناوردا بر پایه تقارن‌ها بیان شده است. این روش در معادلات PDE برای مسائلی با شرایط مرزی نیز قابلیت مطرح شدن دارد، ولی در معادلات FDE تاکنون برای مسائل با شرایط مرزی مورد استفاده قرار نگرفته است. اما با وجود این محدودیتی که دارد، تا به امروز توانسته در حل بسیاری از مسایل به کار آید، چرا که اولاً حتی اگر معادله به صورت تکاملی هم نوشته نشده باشد، باز هم می‌توان از این روش استفاده کرد و ثانیاً اگر نتواند به حل معادله منجر شود، حداقل در اغلب موارد می‌تواند مرتبه معادله را کاهش دهد و حتی اگر موفق به این عمل هم نشود، می‌تواند بدون هیچ پیش شرطی معادله دیگری را تولید کند که جوابش همان جواب معادله اولیه می‌باشد. ما در مقالات [۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۱، ۹۲] از این روش برای حل معادلات برگر-KdV در حالت کسری، معادله فوکر-پلانک-کولموگرو، معادله آبیاری، معادله زاخاروف، معادله فوکر-پلانک در فرایند اورنشتاین-اولنیک و معادله پواسون استفاده نموده‌ایم.

در ادامه این فصل به روش زیر معادله و نحوه انجام آن پرداختیم. مشتق مورد استفاده در این روش مشتق ژومقی می‌باشد. از آنجایی که مشتق ژومقی در مورد حاصلضرب توابع و ترکیب توابع دارای روابطی آسان می‌باشد و همچنین مشتق عدد ثابت در آن برابر صفر است، لذا روش‌های بسیاری برای معادلاتی که دارای این مشتق هستند تا به حال بیان شده است که به عنوان مثال می‌توان به روش بسط $(\frac{G}{G^2})$ و همچنین روش زیر-معادله اشاره کرد [۴۵، ۱۲۵، ۱۲۶].

از جمله مزایای روش زیر معادله این است که، پتانسیل این امر را دارد که معادله FPDE مورد بررسی را با یک تغییر متغیر به معادله FODE تبدیل نماید ولی این مزیت همزمان می‌تواند یک نقطه ضعف برای روش به حساب آید چرا که با این تبدیل متغیر در گام اول حل معادله و سپس پرداختن به گام دوم آن که عبارت است از این فرض که معادله FODE دارای جوابی به صورت (۱۰۰.۴) $u(\xi) = \sum_{i=0}^n a_i \Phi^i(\xi)$ می‌باشد، ما را بیشتر به جواب‌هایی از معادله می‌رساند که به شکل مثلثاتی می‌باشند و همچنین متعادل کردن درجه مشتق در گام دوم برای بسیاری از معادلات امکان‌پذیر نمی‌باشد. ما در مقاله [۸۷] از این روش برای حل معادله آبیاری استفاده کردیم.

روش زیر فضای ناوردا سومین روشی است که در این فصل مورد مطالعه قرار گرفته است. این روش محدودیت نوع مشتق را به طور وسیعی ندارد و هر دو مشتق ریمان-لیوویل و کاپوتو برای آن قابل استفاده می‌باشد. این روش بر پایه مجموعه‌ای از توابع مستقل خطی به نام $W_n = \langle f_1(x), \dots, f_n(x) \rangle$ قرار دارد و سخت‌ترین قسمت آن یافتن W_n می‌باشد، چرا که براساس W_n می‌توان جواب معادله را به صورت

$$u(x, t) = u_1(t)f_1(x) + \dots + u_n(t)f_n(x), \quad (۱۳۰.۴)$$

تعیین نمود. اگرچه هیچ روشی نمی‌تواند ادعا کند که تمام جواب‌های معادله را بدست می‌آورد اما از محدودیت‌های این روش هم می‌توان به این موضوع اشاره کرد که در آن جواب‌هایی که به صورت توابع غیر تفکیک پذیر $h(x, t)$ باشد، به دست نمی‌آیند و همچنین برای معادلات FDE هنوز الگوریتمی برای تشخیص W_n وجود ندارد. در جدول (۵.۴) به شکل خلاصه ویژگی‌های روش‌های به کار رفته در این رساله را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

روش ناورداها	زیر معادله	زیر فضای ناوردا
مشتق ریمان-لیوویل		♣
مشتق کاپوتو		♣
مشتق ژومقی	♣	
مشروط به نمایش تکاملی		♣
بدون شرایط مرزی	♣	♣
نوع جواب	اغلب به سبک مثلثاتی	به صورت $u(x, t) = \sum_{i=1}^n f_i(x)c_i(t)$
هر نوع جوابی ممکن است		

جدول ۵.۴: ویژگی هر سه روش، ناوردها و زیرمعادله و زیرفضای ناوردا

۶.۴ قوانین بقا برای معادلات دیفرانسیل کسری

در فصل دوم بیان شد که قضیه نوتر برای یافتن قوانین پایستگی موضعی برای دستگاه‌های معادلات دیفرانسیلی که اصل تغییراتی را می‌پذیرند، به کار می‌آید. بنابر قضیه نوتر قوانین پایستگی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل تغییراتی، از تقارن‌های تغییراتی (آن دسته از تقارن‌هایی هستند که انتگرال کنش را حفظ می‌کنند) حاصل می‌شود.

اگر یک دستگاه معادلات دیفرانسیل اصل تغییراتی را بپذیرد، آنگاه اکسترمم‌های اصل تغییرات را نتیجه می‌دهد که آن را معادلات اوپلر-لاگرانژ می‌نامند. ریو^{۲۳} در سال ۱۹۹۶ لاگرانژی وابسته به مشتقات کسری را ارائه داد [۱۱۲]. پس از آن تعمیم قضیه نوتر در حالت کسری در مقالات متعدد از جمله [۱۳، ۱۹، ۳۹، ۷۵، ۸۵، ۱۰۱] انجام شد. اما همانطور که در حالت PDE هم این محدودیت وجود دارد که نمی‌توان برای تمام معادلات از قضیه نوتر استفاده کرد، در FDE ها نیز همین محدودیت سبب شد تا روشی جایگزین برای یافتن قوانین بقا ایجاد شود. این روش که از مفهومی به نام لاگرانژین قراردادی استفاده می‌کند و با کمک تقارن‌ها می‌تواند قوانین پایستگی را به دست آورد.

^{۲۳}Riewe

۷.۴ قضیه نوتر برای معادلات کسری

منیفلد $M = T \times U \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ را به عنوان فضای کامل در نظر بگیرید. این فضا شامل p متغیر مستقل مرتبه n است و $m \leq \alpha, \beta < m + 1$ نشان دهنده مرتبه مشتقات کسری هستند. فرض کنید که میدان برداری به صورت

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \xi^i \frac{\partial}{\partial t_i} + \sum_{j=1}^q \eta^j \frac{\partial}{\partial u^j},$$

و مشخصه q مؤلفه‌های $Q = (Q_1, \dots, Q_q)$ این میدان برداری به صورت

$$Q_\sigma(t, u^{(1)}) = \eta_\sigma - \sum_{i=1}^p \xi^i \frac{\partial u^\sigma}{\partial t_i}, \quad \sigma = 1, 2, \dots, q,$$

باشد. امتداد مرتبه n -ام این میدان برداری به صورت

$$\mathbf{v}^{(n)} = \mathbf{v}_Q^{(n)} + \sum_{i=1}^p \xi^i D_i, \quad (131.4)$$

است که در آن $\mathbf{v}_Q^{(n)}$ و \mathbf{v}_Q با روابط

$$\mathbf{v}_Q = \sum_{\sigma=1}^q Q_\sigma(t, u^{(1)}) \frac{\partial}{\partial u^\sigma}, \quad \mathbf{v}_Q^{(n)} = \sum_{\sigma=1}^q \sum_J D_J Q_\sigma \frac{\partial}{\partial u^\sigma}, \quad (132.4)$$

داده می‌شوند. جمع در روابط فوق روی اندیس چندگانه $J = (j_1, \dots, j_k)$ با $1 \leq j_k \leq p$ و $k \geq 0$ است.

تعریف ۱.۷.۴. فرض کنید f و g توابعی از کلاس C^1 روی بازه $[a, b]$ باشند، و در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$D_t^\nu(f, g) = -g {}_t D_b^\nu f + f {}_a D_t^\nu g. \quad (133.4)$$

که در رابطه فوق $t \in [a, b]$ است و $\nu \in \mathbb{R}_0^+$.

ملاحظه ۱.۷.۴. اگر $\nu = 1$ عملگر $D_t^\nu(f, g)$ را برابر با $\frac{d}{dt}(fg)$ تعریف می‌کنیم و لذا در این حالت می‌توان گفت

$$D_t^1(f, g) = D_t^1(g, f) \text{ ولی در حالتی که } \nu \neq 1 \text{ مطابق (133.4) داریم:}$$

$$D_t^\nu(f, g) \neq D_t^\nu(g, f)$$

تعریف ۲.۷.۴. عبارت $P(t, u, {}_a D_t^\alpha u, {}_t D_b^\beta u)$ کمیت پایستگی کسری گفته می‌شود اگر و فقط اگر به فرم زیر باشد

$$P(t, u, {}_a D_t^\alpha u, {}_t D_b^\beta u) = \sum_{i=1}^m P_i^1(t, u, {}_a D_t^\alpha u, {}_t D_b^\beta u) P_i^2(t, u, {}_a D_t^\alpha u, {}_t D_b^\beta u),$$

برای $m \in N$ و توابعی به فرم P_i^1 و P_i^2 که در رابطه

$$D_t^{\gamma_i} \left(P_i^{j_i^1}(t, u, {}_a D_t^\alpha u, {}_t D_b^\beta u) P_i^{j_i^2}(t, u, {}_a D_t^\alpha u, {}_t D_b^\beta u) \right) = 0,$$

برای $\gamma_i \in \{\alpha, \beta, 1\}$ ، $j_i^1 = 1$ و $j_i^2 = 2$ یا $j_i^1 = 2$ و $j_i^2 = 1$ بر روی تمامی جواب‌های معادلات اویلر-لاگرانژ کسری صادق هستند.

قضیه ۱.۷.۴. [۳۹] فرض کنید $L(u)$ تابعی به صورت

$$L(u) = \int_a^b L(t, u^{(n)}, {}_a D_t^\alpha u, {}_t D_b^\beta u) dt, \quad (134.4)$$

باشد که روی مجموعه توابع $u(t)$ دارای مشتق کسری ریمان-لیوویل چپ از مرتبه α و مشتق کسری ریمان-لیوویل راست از مرتبه β روی بازه $[a, b]$ می‌باشند و همچنین این توابع در شرایط $u(a) = u_a$ و $u(b) = u_b$ صادق هستند. آنگاه شرط لازم برای اینکه $L(u)$ دارای اکسترمم در تابع $u(t)$ باشد آن است که $u(t)$ در معادله زیر به ازای $k = 1, \dots, q$ صادق باشد:

$$E_k(L) = \frac{\partial L}{\partial u} - D_x \frac{\partial L}{\partial u_x} + \dots + (-1)^n D_x^n \frac{\partial L}{\partial u_n} - {}_t D_b^\alpha \frac{\partial L}{\partial {}_a D_t^\alpha u} - {}_a D_t^\beta \frac{\partial L}{\partial {}_t D_b^\beta u} = 0, \quad (135.4)$$

تعریف ۳.۷.۴. برای $1 \leq k \leq q$ عملگر اویلر مرتبه k -ام برای معادلاتی که مشتق کسری دارند، عبارت است از

$$E_k = \frac{\partial}{\partial u} - D_x \frac{\partial}{\partial u_x} + \dots + (-1)^n D_x^n \frac{\partial}{\partial u_n} - {}_t D_b^\alpha \frac{\partial}{\partial {}_a D_t^\alpha u} - {}_a D_t^\beta \frac{\partial}{\partial {}_t D_b^\beta u}, \quad (136.4)$$

که در آن $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ ، همچنین ${}_a D_t^\alpha = \frac{d}{dt}$ و ${}_t D_b^\beta = -\frac{d}{dt}$ را به معادله اویلر-لاگرانژ استاندارد تبدیل می‌کند.

تعریف ۴.۷.۴. فرض کنید گروه موضعی از تبدیلات G که روی منیفلد $M \subset T \times U$ عمل می‌کند. G یک گروه تقارن تغییراتی از (۱۳۴.۴) است اگر به ازای $u = f(t)$ که روی $\Omega \subseteq T$ تعریف شده باشد و گراف آن در M قرار می‌گیرد و $g \in G$ به قسمی باشد که $\bar{u} = \bar{f}(\bar{t}) = g.f(\bar{t})$ ، آنگاه

$$\int_\Omega L(t, f^{(n)}(t), {}_a D_t^\alpha u, {}_t D_b^\beta u) dt = \int_{\bar{\Omega}} L(\bar{t}, \bar{f}^{(n)}(\bar{t}), {}_a D_{\bar{t}}^\alpha \bar{u}, {}_{\bar{t}} D_b^\beta \bar{u}) d\bar{t}. \quad (137.4)$$

لازم به ذکر است برای هر $g \in G$ گروه تبدیلات

$$(\bar{t}, \bar{u}) = g.(t, u) = (\Psi(t, u, \varepsilon), \Pi(t, u, \varepsilon)),$$

را می‌توان به عنوان تغییر متغیر در نظر گرفت، پس می‌توان (۱۳۷.۴) را به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$\int_{\bar{\Omega}} L(\bar{t}, \bar{f}^{(n)}(\bar{t}), {}_a D_{\bar{t}}^\alpha \bar{u}, {}_{\bar{t}} D_b^\beta \bar{u}) \det J_g(t, u^1) dt, \quad (138.4)$$

که ماتریس ژاکوبین دارای درایه‌های زیر است:

$$J_g^{ij}(t, u, \varepsilon) = D_i \Psi^j(t, u, \varepsilon).$$

قضیه ۲.۷.۴. [۵۸] گروه همبند از تبدیلات G که روی منیفلد M عمل می‌کند، یک گروه تقارن تغییراتی از تابع (۱۳۴.۴) است اگر و فقط اگر

$$\mathbf{v}^{(\alpha, \beta)}(L) + L \text{Div} \xi = 0, \quad (139.4)$$

برای هر مولد بی‌نهایت کوچک

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \xi^i \frac{\partial}{\partial t_i} + \sum_{j=1}^q \eta^j \frac{\partial}{\partial u^j},$$

از گروه G ، برقرار باشد. همچنین $\text{Div} \xi$ نماد دیورژانس کلی از p -تایی $(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p)$ می‌باشد.

قضیه ۳.۷.۴. فرض کنید G یک گروه تقارن تغییراتی از (۱۳۷.۴) باشد و همچنین

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \xi^i \frac{\partial}{\partial t_i} + \sum_{j=1}^q \eta^j \frac{\partial}{\partial u^j},$$

مولد بی‌نهایت کوچک از G باشد. آنگاه $Q = (Q_1, \dots, Q_q)$ مشخصه قانون پایستگی برای معادلات اویلر-لاگرانژ $E(L) = 0$ است. به عبارت دیگر یک p -تایی از توابع به صورت $P(x, u^{(\alpha, \beta)}) = (P_1, P_2, \dots, P_p)$ موجود است به قسمی که:

$$\text{Div} P = Q \cdot E(L) = \sum_{\nu=1}^q Q_\nu E_\nu(L).$$

برهان. با جایگذاری فرمول امتداد (۱۳۱.۴) در (۱۳۹.۴) داریم:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{v}^{(\alpha, \beta)}(L) + L \text{Div} \xi \\ &= \mathbf{v}_Q^{(\alpha, \beta)}(L) + \sum_{i=1}^p \xi^i D_i L + L \sum_{i=1}^p D_i \xi^i \\ &= \mathbf{v}_Q^{(\alpha, \beta)}(L) + \text{Div}(L\xi). \end{aligned}$$

با توجه به رابطه (۱۳۲.۴) داریم:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{v}_Q^{(\alpha, \beta)}(L) + \text{Div}(L\xi) \\ &= \sum_{\alpha, J} D_J Q_\alpha \frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha} + \text{Div}(L\xi). \end{aligned}$$

کافی است به جای $\sum_{\alpha, J} D_J Q_\alpha \frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha}$ عبارت $\text{Div} \left(Q_\alpha \frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha} \right) - \sum_{\alpha, J} Q_\alpha (D)_J \frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha}$ را قرار دهیم، و لذا داریم:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\alpha, J} D_J Q_\alpha \frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha} + \text{Div}(L\xi) \\ &= \sum_{\alpha, J} Q_\alpha (-D)_J \frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha} + \text{Div} \left(Q_\alpha \frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha} + L\xi \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^q Q_\alpha E_\alpha(L) + \text{Div} P. \end{aligned}$$

□ پس ثابت کردیم $P = Q_\alpha \frac{\partial L}{\partial u_J^\alpha} + L\xi$ قانون پایستگی برای معادله اویلر-لاگرانژ است.

برای درک بهتر قضیه فوق مثال زیر را بررسی می‌کنیم که در منبع [۵۸] به آن پرداخته شده است:

مثال ۱.۷.۴. اگر $\mathbf{v} = \eta \partial u$ یک تقارن تغییراتی برای تابع

$$L(u) = \int_a^b L(t, u, u^1, {}_a D_t^\alpha u) dt,$$

باشد، با توجه به آنکه برای این تقارن $\xi = 0$ و مشخصه $Q = \eta$ است، بنابراین دیورژانس تابع P در قضیه (۳.۷.۴) در این مثال به روش زیر محاسبه می‌شود (در این مثال $\alpha = 1$):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(\alpha)}(L) + L \text{Div} \xi - Q.E(L) &= \left(\eta \frac{\partial}{\partial u} + \eta_t \frac{\partial}{\partial u_t} + {}_a D_t^\alpha \eta \frac{\partial}{\partial {}_a D_t^\alpha u} \right) (L) + 0 - \eta \left(\frac{\partial}{\partial u} L \right. \\ &\quad \left. - D_t \frac{\partial}{\partial u_t} L + {}_t D_b^\alpha \frac{\partial}{\partial {}_a D_t^\alpha u} L \right) \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u_t} L + \eta D_t \frac{\partial}{\partial u_t} L + {}_a D_t^\alpha \eta \frac{\partial}{\partial {}_a D_t^\alpha u} L - \eta {}_t D_b^\alpha \frac{\partial}{\partial {}_a D_t^\alpha u} L \\ &= D_t \left(\eta \frac{\partial L}{\partial u_t} \right) + {}_a D_t^\alpha (\partial_{a D_t^\alpha} L, \eta). \end{aligned}$$

۸.۴ محاسبه قوانین پایستگی برای معادلات کسری بدون حضور لاگرانژی

با توجه به آنکه محاسبه قوانین پایستگی با روشی که لاگرانژی موجود باشد، همیشه امکان‌پذیر نیست و ما حتی در حالت PDE نیز با این مساله روبه‌رو بودیم. روشی که اکنون معرفی می‌کنیم بر پایه تقارن‌ها، لاگرانژی قراردادی و عملگری به نام اتحاد نوتر می‌باشد.

معادله دیفرانسیل کسری زیر را در حالت کلی در نظر می‌گیریم:

$$F(t, x, y, u, D_t^{(\alpha)} u, u_{(1)}, \dots, u_{(n)}) = 0. \quad (۱۴۰.۴)$$

لاگرانژی فرمال برای معادله (۱۴۰.۴) به صورت زیر می‌باشد

$$\mathcal{L} = v F(t, x, y, u, D_t^{(\alpha)} u, u_{(1)}, \dots, u_{(n)}), \quad (۱۴۱.۴)$$

که در آن v یک متغیر وابسته جدید می‌باشد.

همانند مفهوم قوانین پایستگی در معادلات با مشتقات صحیح قوانین پایستگی در واقع برداری مانند

$$C = (C^t, C^x, C^y),$$

است که در آن $C^t = C^t(t, x, u, \dots)$, $C^x = C^x(t, x, u, \dots)$, $C^y = C^y(t, x, u, \dots)$ و رابطه‌ای به صورت زیر برقرار است:

$$D_t C^t + D_x C^x + D_y C^y = 0. \quad (۱۴۲.۴)$$

و با تعریف عملگر اویلر-لاگرانژ به صورت

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} + (D_t^{\mu(\alpha)})^* \frac{\partial}{\partial (D_t^{\mu(\alpha)} u)} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s D_{i_1} \dots D_{i_s} \frac{\partial}{\partial u_{i_1, \dots, i_s}}. \quad (۱۴۳.۴)$$

معادله الحاقی کسری، با رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F^*(t, x, y, u, D_t^{\mu(\alpha)} u, D_t^{\mu(\alpha)} v, u_{(1)}, v_{(1)}, \dots, u_{(n)}, v_{(n)}) := \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = 0. \quad (۱۴۴.۴)$$

در رابطه (۱۴۳.۴) در واقع $(D_t^{\mu(\alpha)})^*$ عملگر الحاقی برای $(D_t^{\mu(\alpha)})$ می‌باشد که برای مشتقات کسری ریمان-لیوویل و کاپوتو به فرم زیر خواهند داشت:

$$\begin{aligned} ({}_0D_t^\alpha)^* &= (-1)^n {}_tI_T^{n-\alpha} (D_t^n) \equiv {}_t^C D_T^\alpha, \\ ({}_0^C D_t^\alpha)^* &= (-1)^n D_t^n ({}_tI_T^{n-\alpha}) \equiv {}_t D_T^\alpha, \end{aligned} \quad (145.4)$$

که در آن ${}_tI_T^{n-\alpha}$ عملگر راست انتگرال کسری از مرتبه $n - \alpha$ می‌باشد.

تعریف ۱.۸.۴. معادله الحاقی نظیر (۱۴۰.۴) عبارت است از:

$$F^* \Big|_{v=\phi} = \lambda(t, x, y, u, u_{(1)}, \dots) F. \quad (146.4)$$

معادله (۱۴۰.۴) خودالحاق غیرخطی است، اگر رابطه فوق به ازای تمام جواب‌های $v = \phi(t, x, y)$ به شرط آنکه ϕ مخالف صفر باشد، صادق باشد.

۱.۸.۴ عملگر کسری نوتر

با در نظر گرفتن معادله دیفرانسیل کسری (۱۴۰.۴) با ۳ متغیر مستقل x, y, t و یک متغیر وابسته $u(x, y, t)$ اتحاد زیر که همان اتحاد نوتر می‌باشد را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \bar{\nu} \mathcal{L} + D_t^{\mu(\alpha)}(\xi^0) \mathcal{L} + D_t^{\mu(\alpha)}(\xi^1) \mathcal{L} + D_y^{\mu(\alpha)}(\xi^2) \mathcal{L} &= W \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} + D_t(\mathcal{N}^t \mathcal{L}) + D_x(\mathcal{N}^x \mathcal{L}) \\ &+ D_y(\mathcal{N}^y \mathcal{L}). \end{aligned}$$

در اتحاد فوق $\mathcal{N}^t, \mathcal{N}^x, \mathcal{N}^y$ عملگرهای نوتر، $\bar{\nu}$ امتداد عملگر ν تا مرتبه معادله و W مشخصه میدان برداری به صورت $W = \eta - \xi^0 u_t - \xi^1 u_x - \xi^2 u_y$ است. در [۱۱۰] نشان داده می‌شود که سمت چپ معادله فوق برابر است با صفر و از طرفی طبق (۱۴۴.۴) $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = 0$ لذا داریم:

$$D_t(\mathcal{N}^t \mathcal{L}) + D_x(\mathcal{N}^x \mathcal{L}) + D_y(\mathcal{N}^y \mathcal{L}) = 0. \quad (147.4)$$

با مقایسه (۱۴۲.۴) و (۱۴۷.۴) مولفه‌های قوانین پایستگی برای معادله (۱۴۰.۴) عبارتند از:

$$C^t = \mathcal{N}^t \mathcal{L}, \quad C^x = \mathcal{N}^x \mathcal{L}, \quad C^y = \mathcal{N}^y \mathcal{L}. \quad (148.4)$$

در مقاله [۴۰] گازیو و همکارانش، عملگر \mathcal{N}^t در حالتی که مشتق کسری نسبت به زمان از نوع ریمان-لیوویل باشد به صورت

$$\mathcal{N}^t = \xi^0 I + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k {}_0D_t^{\alpha-1-k} (W) D_t^k \frac{\partial}{\partial ({}_0D_t^\alpha u)} - (-1)^n J \left(W, D_t^n \frac{\partial}{\partial ({}_0D_t^\alpha u)} \right), \quad (149.4)$$

و در حالتی که مشتق کسری نسبت به زمان موجود در معادله به صورت کاپوتو باشد عملگر \mathcal{N}^t به صورت

$$\mathcal{N}^t = \xi^0 I + \sum_{k=0}^{n-1} D_t^k (W) D_T^{\alpha-1-k} \frac{\partial}{\partial ({}_0^C D_t^\alpha u)} - J \left(D_t^n (W), \frac{\partial}{\partial ({}_0^C D_t^\alpha u)} \right), \quad (150.4)$$

به دست آوردند. در روابط فوق آنچه با J نشان داده شده است، انتگرالی است که با رابطه

$$J(f, g) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t \int_t^T \frac{f(\tau, x)g(\mu, x)}{(\mu - \tau)^{\alpha+1-n}} d\mu d\tau, \quad (151.4)$$

تعریف می‌شود و دارای ویژگی زیر است:

$$D_t J(f, g) = f {}_t I_T^{n-\alpha} g - g {}_0 I_t^{n-\alpha} f. \quad (152.4)$$

در هر دو صورتی که مشتق معادله نسبت به زمان از نوع ریمان-لیوویل باشد یا از نوع کاپوتو باشد عملگر \mathcal{N}^y و \mathcal{N}^x همانند PDE ها به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^x &= W^\alpha \left[\frac{\partial}{\partial u_x^\alpha} - D_j (\partial u_{xj}^\alpha) + D_j D_k (\partial u_{xjk}^\alpha) - \dots \right], \\ \mathcal{N}^y &= W^\alpha \left[\frac{\partial}{\partial u_y^\alpha} - D_j (\partial u_{yj}^\alpha) + D_j D_k (\partial u_{yjk}^\alpha) - \dots \right]. \end{aligned} \quad (153.4)$$

مثال ۱.۸.۴. معادله زاخاروف که در مثال (۱.۲.۴) معرفی شد را مجدداً در نظر بگیرید. $\mathcal{D}_t^{\mu(\alpha)}$ نشان دهنده هریک از انواع عملگرهای مشتقات کسری نسبت به زمان، که در حالت باز شده به صورت زیر است:

$$\mathcal{D}_t^\alpha u_t = -auu_x - bu_{xxx} - cu_{xyy} + du_{xx} + eu_{yy}, \quad (154.4)$$

$${}^C \mathcal{D}_t^\alpha u = -auu_x - bu_{xxx} - cu_{xyy} + du_{xx} + eu_{yy}, \quad (155.4)$$

$$\mathcal{D}_t^{\alpha+1} u = -auu_x - bu_{xxx} - cu_{xyy} + du_{xx} + eu_{yy}, \quad (156.4)$$

$$\mathcal{D}_t^\alpha u = -auu_x - bu_{xxx} - cu_{xyy} + du_{xx} + eu_{yy}. \quad (157.4)$$

لاگرانژی قراردادی برای معادله زاخاروف به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\mathcal{L} = v \mathcal{D}_t^{\mu(\alpha)} + avu_x + bv_{xxx} + cvu_{xyy} - dvu_{xx} - evu_{yy}, \quad v = v(t, x, y). \quad (158.4)$$

و عملگر الحاقی F^* نسبت به عملگر غیر خطی F عبارت است از [۹۱]:

$$F^* = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} = (\mathcal{D}_t^{\mu(\alpha)})^* v - av_x u - bv_{xxx} - cv_{xyy} - dv_{xx} - ev_{yy}. \quad (159.4)$$

فرض کنیم t به بازه $[0, T]$ تعلق داشته باشد، در رابطه (۱۴۳.۴) برای معادلاتی با مشتق ریمان-لیوویل و کاپوتو عملگر اویلر-لاگرانژ را به صورت زیر معرفی کردیم:

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} + (\mathcal{D}_t^{\mu(\alpha)})^* \frac{\partial}{\partial (\mathcal{D}_t^{\mu(\alpha)} u)} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s D_{i_1} \dots D_{i_s} \frac{\partial}{\partial u_{i_1, \dots, i_s}}.$$

در رابطه فوق $(\mathcal{D}_t^{\mu(\alpha)})^*$ عملگر الحاقی از $(\mathcal{D}_t^{\mu(\alpha)} u)$ است. در حالت کلی این عملگر را به صورت (۱۴۵.۴) تعریف کردیم، که در این مثال به طور مجزا عملگر الحاقی برای حالت‌های مختلف مشتق به صورت زیر هستند:

$$\text{برای معادله (154.4):} \quad (\mathcal{D}_t^{\mu(\alpha)})^* \equiv (\mathcal{D}_t^\alpha \mathcal{D}_t)^* = {}_t \mathcal{D}_T^\alpha \mathcal{D}_t, \quad (160.4)$$

$$\text{برای معادله (155.4):} \quad (\mathcal{D}_t^{\mu(\alpha)})^* \equiv ({}^C \mathcal{D}_t^\alpha)^* = {}_t \mathcal{D}_T^\alpha, \quad (161.4)$$

$$\text{برای معادله (156.4):} \quad (\mathcal{D}_t^{\mu(\alpha)})^* \equiv (\mathcal{D}_t^{\alpha+1})^* = {}_t \mathcal{D}_T^{\alpha+1}, \quad (162.4)$$

$$\text{برای معادله (157.4):} \quad (\mathcal{D}_t^{\mu(\alpha)})^* \equiv (\mathcal{D}_t^\alpha)^* = {}_t \mathcal{D}_T^\alpha. \quad (163.4)$$

حال به دنبال محاسبه v هایی هستیم که در شرط (۱۴۶.۴) صدق می‌کنند، به این منظور در رابطه (۱۵۸.۴) با جایگذاری v به صورت

$$v = \phi(t)\psi(x)\eta(y),$$

در معادله (۱۵۹.۴) داریم:

$$\begin{cases} \psi'(x)\eta(y)u + d\psi''(x)\eta(y) + b\psi'''(x)\eta(y) + e\psi(x)\eta''(y) + c\psi'(x)\eta''(y) = 0, \\ (D_t^{\mu(\alpha)})^*(\phi(t)) = 0. \end{cases} \quad (164.4)$$

اولین معادله از دستگاه فوق یک PDE مرتبه دو می‌باشد که جوابی به صورت

$$\psi(x)\eta(y) = \psi, \quad (165.4)$$

دارد، به طوری که $\psi \neq 0$ مقداری ثابت می‌باشد و دومین معادله که وابسته به عملگر خطی کسری $D_t^{\mu(\alpha)}$ است، وابسته به نوع عملگر مشتق کسری که در آن است (طبق روابط (۱۵۴.۴)-(۱۵۷.۴)) به صورت زیر حل می‌کنیم: به ازای معادله (۱۵۴.۴) داریم $(D_t^\alpha D_t(\Phi(t)))^* = 0$ ، بنابراین با توجه به معادله (۱۶۰.۴) داریم:

$$\Phi(t) = \phi_1(T-t)^\alpha + \phi_2.$$

به ازای معادله (۱۵۵.۴) داریم $(D_t^\alpha(\Phi(t)))^* = 0$ ، بنابراین با توجه به معادله (۱۶۱.۴) داریم:

$$\Phi(t) = \phi_1(T-t)^\alpha.$$

به ازای معادله (۱۵۶.۴) داریم $(D_t^{\alpha+1}(\Phi(t)))^* = 0$ ، بنابراین با توجه به معادله (۱۶۲.۴) داریم:

$$\Phi(t) = \phi_1 t^2 + \phi_2 t + \phi_3,$$

به ازای معادله (۱۵۷.۴) داریم $(D_t^\alpha(\Phi(t)))^* = 0$ ، بنابراین با توجه به معادله (۱۶۳.۴) داریم:

$$\Phi(t) = \phi_1 t + \phi_2.$$

که در آن ϕ_1 و ϕ_2 ثوابت دلخواه می‌باشند. حال با در نظر گرفتن روابط فوق قوانین پایستگی را برای معادلات (۱۵۴.۴)-(۱۵۷.۴) به دست می‌آوریم.

برای معادله (۱۵۴.۴) با توجه به مقداری که برای v به دست آوردیم، لاگرانژین عبارت است از:

$$\mathcal{L} = \left(\psi\phi_1(T-t)^\alpha + \psi\phi_2 \right) \left(D_t^{\mu(\alpha)} + auu_x + bu_{xxx} + cu_{xyy} - du_{xx} - eu_{yy} \right). \quad (166.4)$$

لذا با توجه به ظاهر معادله زاخاروف (۱۵۴.۴) مولفه‌های قوانین پایستگی عبارتند از:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^x = & \xi \mathcal{I} + W \left(\frac{\partial}{\partial u_x} - \mathcal{D}_i \frac{\partial}{\partial u_{xi}} + \mathcal{D}_i \mathcal{D}_k \frac{\partial}{\partial u_{xik}} - \dots \right) \\ & + \mathcal{D}_i(W) \left(\frac{\partial}{\partial u_{xi}} - \mathcal{D}_k \frac{\partial}{\partial u_{xik}} - \dots \right) \\ & + \mathcal{D}_i \mathcal{D}_k(W) \left(\frac{\partial}{\partial u_{xik}} - \dots \right), \end{aligned} \quad (167.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^y &= \rho \mathcal{I} + W \left(\frac{\partial}{\partial u_y} - \mathcal{D}_i \frac{\partial}{\partial u_{yi}} + \mathcal{D}_i \mathcal{D}_k \frac{\partial}{\partial u_{yik}} - \dots \right) \\ &+ \mathcal{D}_i(W) \left(\frac{\partial}{\partial u_{yi}} - \mathcal{D}_k \frac{\partial}{\partial u_{yik}} - \dots \right) \\ &+ \mathcal{D}_i \mathcal{D}_k(W) \left(\frac{\partial}{\partial u_{yik}} - \dots \right), \end{aligned} \quad (168.4)$$

که i و k برابر با x یا y می‌باشد. و همچنین \mathcal{N}^t عبارت است از:

$$\mathcal{N}^t = \tau \mathcal{I} + \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{D}_t^k(W) \mathcal{D}_T^{\alpha-1-k} \frac{\partial}{\partial (\mathcal{D}_t^\alpha u)} - J \left(\mathcal{D}_t^n(W), \frac{\partial}{\partial (\mathcal{D}_t^\alpha u)} \right). \quad (169.4)$$

لذا داریم:

$$\begin{aligned} C^x &= a \left(\psi \phi_1(T-t)^\alpha + \psi \phi_2 \right) u W - d \left(\psi \phi_1(T-t)^\alpha + \psi \phi_2 \right) W_x \\ &+ b \left(\psi \phi_1(T-t)^\alpha + \psi \phi_2 \right) W_{xx} + c \left(\psi \phi_1(T-t)^\alpha + \psi \phi_2 \right) W_{yy}, \\ C^y &= e \left(\psi \phi_1(T-t)^\alpha + \psi \phi_2 \right) W_y + c \left(\psi \phi_1(T-t)^\alpha + \psi \phi_2 \right) W_{yy}, \\ C^t &= \mathcal{J}_t^{1-\alpha} W_t \psi \phi_1(T-t)^\alpha + \mathcal{J}_t^{1-\alpha} W_t \psi \phi_2 + \mathcal{J}_T^{1-\alpha} \left(\alpha \psi \phi_1(T-t)^{\alpha-1} \right) W \\ &+ J \left(W_t, \alpha \psi \phi_1(T-t)^{\alpha-1} \right). \end{aligned} \quad (170.4)$$

که همانطور که قبلاً ذکر شد، W همان مشخصه هر یک از تقارن‌ها می‌باشد. از آنجایی که برای X_1 داریم $W = -u_x$ مطابق روابط فوق داریم:

$$\begin{aligned} C^x &= -a u_x \left(\psi \phi_1(T-t)^\alpha + \psi \phi_2 \right) u + d u_{xx} \left(\psi \phi_1(T-t)^\alpha + \psi \phi_2 \right) \\ &- b u_{xx} \left(\psi \phi_1(T-t)^\alpha + \psi \phi_2 \right) - c u_{xyy} \left(\psi \phi_1(T-t)^\alpha + \psi \phi_2 \right), \\ C^y &= -e u_{xy} \left(\psi \phi_1(T-t)^\alpha + \psi \phi_2 \right) - c u_{xyy} \left(\psi \phi_1(T-t)^\alpha + \psi \phi_2 \right), \\ C^t &= -\mathcal{J}_t^{1-\alpha} u_{xt} \psi \phi_1(T-t)^\alpha - \mathcal{J}_t^{1-\alpha} u_{xt} \psi \phi_2 - u_x \Gamma(\alpha+1) \psi \phi_1 \\ &+ \alpha \psi \phi_1 J \left(u_{xt}, (T-t)^{\alpha-1} \right). \end{aligned} \quad (171.4)$$

به همین ترتیب برای X_2 داریم:

$$\begin{aligned} C^x &= -a u_y \left(\psi \phi_1(T-t)^\alpha + \psi \phi_2 \right) u + d u_{xy} \left(\psi \phi_1(T-t)^\alpha + \psi \phi_2 \right) \\ &- b u_{xxy} \left(\psi \phi_1(T-t)^\alpha + \psi \phi_2 \right) - c u_{yyy} \left(\psi \phi_1(T-t)^\alpha + \psi \phi_2 \right), \\ C^y &= -e u_{yy} \left(\psi \phi_1(T-t)^\alpha + \psi \phi_2 \right) - c u_{yyy} \left(\psi \phi_1(T-t)^\alpha + \psi \phi_2 \right), \\ C^t &= -u_{yt} \mathcal{J}_t^{1-\alpha} \psi \phi_1(T-t)^\alpha - \mathcal{J}_t^{1-\alpha} u_{yt} \psi \phi_2 - \mathcal{J}_T^{1-\alpha} \left(\alpha \psi \phi_1(T-t)^{\alpha-1} \right) u_y \\ &- J \left(u_{ty}, \alpha \psi \phi_1(T-t)^{\alpha-1} \right). \end{aligned} \quad (172.4)$$

مشابه معادله (154.4) می‌توان برای معادلات (155.4)-(157.4) نیز قوانین پایستگی را حساب کرد که در جدول‌های (1.8.4)، (1.8.4) و (1.8.4) به طور خلاصه این مطلب را آورده‌ایم:

X_i	W_i	$C^{x,y,t}$	معادله برای پایستگی قوانین مولفه‌های (۱۵۵.۴)
X_1	$-u_x$	C^x	$-a(\psi\phi_1(T-t)^\alpha)u_xu + du_{xx}(\psi\phi_1(T-t)^\alpha)$ $-bu_{xxx}(\psi\phi_1(T-t)^\alpha) - cu_{xyy}(\psi\phi_1(T-t)^\alpha)$
		C^y	$-eu_{xy}(\psi\phi_1(T-t)^\alpha) - cu_{xyy}(\psi\phi_1(T-t)^\alpha)$
		C^t	$-\phi_1\psi u_x\Gamma(\alpha) - \phi_1\psi u_{xt}\Gamma(\alpha)(T-t)$ $+ \phi_1\psi J(u_{xtt}, (T-t)^{\alpha-1})$
X_2	$-u_y$	C^x	$-a(\psi\phi_1(T-t)^\alpha)u_yu + du_{xy}(\psi\phi_1(T-t)^\alpha)$ $-bu_{xxy}(\psi\phi_1(T-t)^\alpha) - cu_{yyy}(\psi\phi_1(T-t)^\alpha)$
		C^y	$-eu_{yy}(\psi\phi_1(T-t)^\alpha) - cu_{yyy}(\psi\phi_1(T-t)^\alpha)$
		C^t	$-\phi_1\psi u_y\Gamma(\alpha) - \phi_1\psi u_{yt}\Gamma(\alpha)(T-t)$ $+ \phi_1\psi J(u_{ytt}, (T-t)^{\alpha-1})$

جدول ۶.۴: مولفه‌های قوانین پایستگی برای معادله (۱۵۵.۴)

X_i	W_i	$C^{x,y,t}$	معادله برای پایستگی قوانین مولفه‌های (۱۵۶.۴)
X_1	$-u_x$	C^x	$-a(\psi\phi_1 t^2 + \psi\phi_2 t + \psi\phi_3)u_x u + du_{xx}(\psi\phi_1 t^2 + \psi\phi_2 t + \psi\phi_3) - bu_{xxx}(\psi\phi_1 t^2 + \psi\phi_2 t + \psi\phi_3) - cu_{xyy}(\psi\phi_1 t^2 + \psi\phi_2 t + \psi\phi_3)$
		C^y	$-eu_{xy}(\psi\phi_1 t^2 + \psi\phi_2 t + \psi\phi_3) - cu_{xyy}(\psi\phi_1 t^2 + \psi\phi_2 t + \psi\phi_3)$
		C^t	$D_t^\alpha(-u_x)(\psi\phi_1 t^2 + \psi\phi_2 t + \psi\phi_3) + D_t^{\alpha-1}(u_x)(2\psi\phi_1 t + \psi\phi_2) + J(u_x, 2\psi\phi_1)$
X_2	$-u_y$	C^x	$-a(\psi\phi_1 t^2 + \psi\phi_2 t + \psi\phi_3)u_y u + du_{xy}(\psi\phi_1 t^2 + \psi\phi_2 t + \psi\phi_3) - bu_{xxy}(\psi\phi_1 t^2 + \psi\phi_2 t + \psi\phi_3) - cu_{yyy}(\psi\phi_1 t^2 + \psi\phi_2 t + \psi\phi_3)$
		C^y	$-eu_{yy}(\psi\phi_1 t^2 + \psi\phi_2 t + \psi\phi_3) - cu_{yyy}(\psi\phi_1 t^2 + \psi\phi_2 t + \psi\phi_3)$
		C^t	$D_t^\alpha(-u_y)(\psi\phi_1 t^2 + \psi\phi_2 t + \psi\phi_3) + D_t^{\alpha-1}(u_y)(2\psi\phi_1 t + \psi\phi_2) + J(u_y, 2\psi\phi_1)$

جدول ۷.۴: مولفه‌های قوانین پایستگی برای معادله (۱۵۶.۴)

X_i	W_i	$C^{x,y,t}$	(۱۵۷.۴) معادله برای پایستگی قوانین مولفه‌های
X_1	$-u_x$	C^x	$-a(\psi\phi_1 t + \psi\phi_2)u_x u + du_{xx}(\psi\phi_1 t + \psi\phi_2)$ $-bu_{xxx}(\psi\phi_1 t + \psi\phi_2) - cu_{xyy}(\psi\phi_1 t + \psi\phi_2)$
		C^y	$-eu_{xy}(\psi\phi_1 t + \psi\phi_2) - cu_{yyy}(\psi\phi_1 t + \psi\phi_2)$
		C^t	$D_t^\alpha(-u_x)(\psi\phi_1 t + \psi\phi_2) + D_t^{\alpha-2}(u_x)\phi_1\psi$
X_2	$-u_y$	C^x	$-a(\psi\phi_1 t + \psi\phi_2)u_y u + du_{xy}(\psi\phi_1 t + \psi\phi_2)$ $-bu_{xxy}(\psi\phi_1 t + \psi\phi_2) - cu_{yyy}(\psi\phi_1 t + \psi\phi_2)$
		C^y	$-eu_{yy}(\psi\phi_1 t + \psi\phi_2) - cu_{yyy}(\psi\phi_1 t + \psi\phi_2)$
		C^t	$D_t^\alpha(-u_y)(\psi\phi_1 t + \psi\phi_2) + D_t^{\alpha-2}(u_y)\phi_1\psi$

جدول ۸.۴: مولفه‌های قوانین پایستگی برای معادله (۱۵۷.۴)

مثال ۲.۸.۴. همانطور که در مثال (۲.۲.۴) بیان شد، معادله دیفرانسیل کسری آبیاری به فرم

$$C(u)D_t^\alpha u = \left(K(u)u_x\right)_x + \left(L(u)(u_y - 1)\right)_y - S(u), \quad (۱۷۳.۴)$$

بیان می‌شود. در مقاله [۸۷] ابتدا این معادله را در ۴ حالت مختلف به صورت جدول (۲.۸.۴) مورد بررسی قرار دادیم، سپس قوانین پایستگی را در حالت‌های مختلف مورد بررسی قرار دهیم. لاگرانژی قراردادی برای معادله (۱۷۳.۴) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\mathcal{L} = v(t, x, y) \left(C(u)D_t^\alpha u - \left(K(u)u_x\right)_x - \left(L(u)(u_y - 1)\right)_y + S(u) \right), \quad (۱۷۴.۴)$$

به‌طوریکه $v(t, x, y)$ متغیر وابسته جدید می‌باشد. همانطور که پیش از این بیان شد، اوپراتور اویلر-لاگرانژ برای معادلات کسری به صورت

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} + (D_t^\alpha)^* \frac{\partial}{\partial D_t^\alpha u} - D_x \frac{\partial}{\partial u_x} - D_y \frac{\partial}{\partial u_y} + D_{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + D_{yy} \frac{\partial}{\partial u_{yy}} - \dots \quad (۱۷۵.۴)$$

تعریف می‌شود. عملگر الحاقی F^* عبارت است از:

$$F^* = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta u} \quad (۱۷۶.۴)$$

با توجه به معادلات (۱۴۹.۴) و (۱۵۳.۴) می‌توان \mathcal{N}^t ، \mathcal{N}^x و \mathcal{N}^y را بدست آورد و با توجه به اینکه

$$C^t = N^t \mathcal{L}, \quad C^x = N^x \mathcal{L}, \quad C^y = N^y \mathcal{L}. \quad (۱۷۷.۴)$$

قوانین پایستگی برای معادله (۱۷۳.۴) را می‌توان به دست آورد، که به طور خلاصه در جداول زیر بیان شده است:

انواع حالت‌ها	حالت‌های مختلف توابع	تقارن‌ها
حالت اول	$S(u) = -u^3 - mu$ مقدار ثابت n $K(u) = L(u) = n$ $C(u) = u$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = u \frac{\partial}{\partial u}$ $X_4 = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$ $X_5 = 2\alpha x \frac{\partial}{\partial x} + 2\alpha y \frac{\partial}{\partial y} + 4t \frac{\partial}{\partial t} + 3\alpha u \frac{\partial}{\partial u} - 2u \frac{\partial}{\partial u}$
حالت دوم	$S(u) = au$ $K(u) = L(u) = u$ $C(u) = 1$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ $X_2 = \frac{\partial}{\partial y}$ $X_3 = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial}{\partial y} + t \frac{\partial}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial}{\partial u}$
حالت سوم	$S(u) = au$ $K(u) = L(u) = e^u$ $C(u) = 1$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = -t \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial u}$ $X_4 = -2e^{\frac{u}{4}} \cos\left(\frac{x}{4}\right) \frac{\partial}{\partial x} + 2e^{\frac{u}{4}} \sin\left(\frac{x}{4}\right) \frac{\partial}{\partial y} + e^{\frac{u}{4}} \sin\left(\frac{x}{4}\right) \frac{\partial}{\partial u}$ $X_5 = 2e^{\frac{u}{4}} \sin\left(\frac{x}{4}\right) \frac{\partial}{\partial x} + 2e^{\frac{u}{4}} \cos\left(\frac{x}{4}\right) \frac{\partial}{\partial y} + e^{\frac{u}{4}} \cos\left(\frac{x}{4}\right) \frac{\partial}{\partial u}$
حالت چهارم	$S(u) = ae^u$ $K(u) = L(u) = u^\beta$ $C(u) = e^u$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ $X_2 = \frac{\partial}{\partial y},$ $X_3 = -\alpha x \frac{\partial}{\partial x} - \alpha y \frac{\partial}{\partial y} + (\beta - 2)t \frac{\partial}{\partial t} - \alpha u \frac{\partial}{\partial u}$

جدول ۹.۴: صورت‌های مختلف معادله آبیاری

۹.۴ نرم افزار

در ادامه نحوه محاسبه تقارن‌های معادلات دیفرانسیل کسری را در قالب یک مثال بیان می‌کنیم. برای انجام این محاسبات احتیاج به پکیج **FracSym** داریم که اولین بار توسط الکسی چویاکوف^{۲۴} به **Maple** اضافه شد. همانند سایر پکیج‌هایی که به نرم افزار اضافه می‌شوند این پکیج نیز با دستور **read** فراخوانی می‌شود.

^{۲۴}Alexei Cheviakov

معادله آبیاری را که در همین فصل بیان شد را در نظر می‌گیریم:

```
restart;
read("D : /foldersoft/mypaper/fracsym/ASPv4.6.3.mpl") :
/ASPv4.6.3.mpl") :
with(ASP) :
with(desolv) :
read("D : /foldersoft/myandpaper/fracsym/FracSym.v1.16.txt") :
with(FracSym) :
Rfracdiff(u(x, y, t), t, alpha);
Rfracdiff(u(x, y, t) * v(x, y, t), t, alpha);
Rfracdiff(v(x, y, t) * u(x, y, t), t, alpha);
Rfracdiff(u(x, y, t) * v(x, y, t), t, 2);
TotalD(xi[x](x, y), x, 2);
evalTotalD([%], [y], [x]);
fde1 := C(u(x, y, t)) * Rfracdiff(u(x, y, t), t, alpha) = diff(K(u(x, y, t))
*(diff(u(x, y, t), x), x) + diff(K(u(x, y, t)) * (diff(u(x, y, t), y) - 1), y)
-S(u(x, y, t)));
deteqs := fracDet([fde1], [u], [x, y, t], 2, alpha = 0.1..1);
sol1 := pdesolv(expand(deteqs[1][1]), deteqs[1][3], deteqs[1][4]);
subs(sol1[3], deteqs[1][2]);
```

آخرین خروجی به صورت زیر می‌باشد:

$$\text{pol1} := \xi_{[x]}(x, y, t, u) = C_3, \xi_{[y]}(x, y, t, u) = C_5, \xi_{[t]}(x, y, t, u) = C_1,$$

$$\eta_{[u]}(x, y, t, u) = 0$$

با توجه به اینکه توابع $C(u)$, $L(u)$, $K(u)$ و $S(u)$ دلخواه می‌باشند، در مقاله [۸۷] در ۴ حالت زیر به کمک پکیج **FracSym** تقارن‌ها را به دست آوردیم:

$$D_t^\alpha u = \frac{nu_{xx} + \left(n(u_y - 1) \right)_y + u^3 + mu}{u}$$

$$\Leftarrow \begin{aligned} K(u) &= L(u) = n \\ C(u) &= u && \text{حالت اول} \\ S(u) &= -u^3 - mu \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_t^\alpha u = \left(uu_x \right)_x + \left(u(u_y - 1) \right)_y - au, \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} K(u) &= L(u) = u \\ C(u) &= 1 \\ S(u) &= au \end{aligned} \quad \blacktriangleleft \text{حالت دوم:}$$

$$\mathcal{D}_t^\alpha u = \left(e^u u_x \right)_x + \left(e^u (u_y - 1) \right)_y - au, \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} K(u) &= L(u) = e^u \\ C(u) &= 1 \\ S(u) &= au \end{aligned} \quad \blacktriangleleft \text{حالت سوم:}$$

$$\mathcal{D}_t^\alpha u = \frac{\left(u^\beta u_x \right)_x + \left(u^\beta (u_y - 1) \right)_y - ae^u}{e^u} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} K(u) &= L(u) = u^\beta \\ C(u) &= e^u \\ S(u) &= ae^u \end{aligned} \quad \blacktriangleleft \text{حالت چهارم:}$$

برای هر یک از حالت‌ها کافی است، رابطه مربوط به آن حالت را در پکیج در مقابل := fde1 قرار داد تا تقارن مربوط به آن به دست آید.

یادداشت

در این فصل تقارن برای دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل با مشتقات کسری را بررسی کردیم و سپس به کمک دو روش به یافتن قوانین پایستگی این معادلات پرداختیم. لازم به ذکر است مشتقاتی که برای آن‌ها تقارن‌ها و قوانین پایستگی رامحاسبه کردیم تنها از نوع مشتق ریمان-لیوویل و کاپوتو می‌بودند. امید است بتوان تقارن‌ها را برای سایر انواع مشتقگیری نیز مورد محاسبه قرار داد و از این طریق بتوان به قوانین پایستگی متناظر با هر تقارن برای سایر معادلات با مشتقاتی همچون گرانوالد و ریمان لیوویل اصلاح شده را بیان کرد.

X_i	W_i	$C^{x,y,t}$	مولفه‌های قوانین پایستگی برای معادله حالت (۱)
X_1	$-u_x$	C^x C^y C^t	$-u_x v_x n + u_{xx} v n$ $-u_x v_y n + u_{xy} v n$ $-v u D_t^{\alpha-1}(u_x) + J(-u_x, v u_t + u v_t)$
X_2	$-u_y$	C^x C^y C^t	$-u_y v_x n + u_{xy} v n$ $-u_y v_y n + u_{yy} v n$ $-v u D_t^{\alpha-1}(u_y) + J(-u_y, v u_t + u v_t)$
X_3	u	C^x C^y C^t	$-n u v_x + n v u_x$ $+n u v_y - n v u_y$ $-v u D_t^{\alpha-1}(u) + J(u, v u_t + u v_t)$
X_4	$-y u_x - x u_y$	C^x C^y C^t	$-n u_x v_x y - n u_y v_x x + n v x u_{xy}$ $+n v u_{xx} y + n v u_y$ $-u_x v_y n y - u_y v_y n x + u_x v n$ $+v u_{yy} n x + v u_{xy} n y$ $-v u D_t^{\alpha-1}(y u_x + x u_y)$ $+J(-y u_x - x u_y, v u_t + u v_t)$
X_5	$(u(3\alpha - 2) - 4t u_t - 2\alpha x u_x - 2\alpha y u_y)$	C^x C^y C^t	$+n v_x [u(3\alpha - 2) - 4t u_t - 2\alpha x u_x - 2\alpha y u_y] + [-2\alpha u_x + u_x(3\alpha - 2) - 2\alpha x u_{xx} - 2\alpha y u_{xy} - 4t u_{tx}](-n v)$ $+n v_y [u(3\alpha - 2) - 4t u_t - 2\alpha x u_x - 2\alpha y u_y] + [-2\alpha u_y + u_y(3\alpha - 2) - 2\alpha y u_{yy} - 2\alpha x u_{xy} - 4t u_{ty}](-n v)$ $+v u D_t^{\alpha-1}(u(3\alpha - 2) - 4t u_t - 2\alpha x u_x - 2\alpha y u_y) + J(u(3\alpha - 2) - 4t u_t - 2\alpha x u_x - 2\alpha y u_y, v u_t + u v_t)$

جدول ۱۰.۴: مولفه‌های قوانین پایستگی برای معادله حالت (۱)

X_i	W_i	$C^{x,y,t}$	مولفه‌های قوانین پایستگی برای معادله حالت (۲)
X_1	$-u_x$	C^x C^y C^t	$-u_x(-vu_x + uv_x) + u_{xx}uv$ $-u_x(-vu_y + v + uv_y) + u_{xy}uv$ $-vD_t^{\alpha-1}(u_x) + J(-u_x, v_t)$
X_2	$-u_y$	C^x C^y C^t	$-u_y(-vu_x + uv_x) + u_{xy}uv$ $-u_y(-vu_y + v + uv_y) + u_{yy}uv$ $-vD_t^{\alpha-1}(u_y) + J(-u_y, v_t)$
X_3	$+\alpha u - tu_t - \alpha y u_y$ $-\alpha x u_x$	C^x C^y C^t	$(\alpha u - tu_t - \alpha y u_y - \alpha x u_x)(-vu_x + v_x u) + uv(\alpha x u_{xx} + tu_{xt} + \alpha y u_{xy})$ $(\alpha u - tu_t - \alpha y u_y - \alpha x u_x)(-vu_y + v + uv_y) + uv(\alpha y u_{yy} + tu_{yt} + \alpha x u_{xy})$ $+vD_t^{\alpha-1}(\alpha u - tu_t - \alpha y u_y - \alpha x u_x) + J(\alpha u - tu_t - \alpha y u_y - \alpha x u_x, v_t)$

جدول ۱۱.۴: مولفه‌های قوانین پایستگی برای معادله حالت (۲)

X_i	W_i	$C^{x,y,t}$	مولفه‌های قوانین پایستگی برای معادله حالت (۳)
X_1	$-u_x$	C^y C^t	$-u_x(vu_y e^u + e^u v + e^u v_y) + u_{xy} e^u v$ $-v D_t^{\alpha-1}(u_x) + D_t^{\alpha-2}(u_x)v_t - J(-u_x, v_{tt})$
X_2	$-u_y$	C^x C^y C^t	$-u_y(-vu_x e^u + e^u v_x) + u_{xy}(e^u v_x + e^u vu_x)$ $-u_y(-vu_y e^u + e^u v + e^u v_y) + u_{yy} e^u v$ $-v D_t^{\alpha-1}(u_y) + D_t^{\alpha-2}(u_y)v_t - J(-u_y, v_{tt})$
X_3	$\alpha + tu_t$	C^x C^y C^t	$-tu_{xt} v e^u + (\alpha + tu_t)(-vu_x e^u + e^u v_x)$ $-tu_{yt} v e^u + (-vu_y e^u + v e^u + v_y e^u)$ $+v D_t^{\alpha-1}(\alpha + tu_t) - v_t D_t^{\alpha-2}(\alpha + tu_t)$ $-J(\alpha + tu_t, v_{tt})$
X_4	$+e^{\frac{y}{4}} \sin(\frac{x}{4}) - 2e^{\frac{y}{4}} \sin(\frac{x}{4})u_y$ $+2e^{\frac{y}{4}} \cos(\frac{x}{4})u_x$	C^x C^y C^t	$(-vu_x e^u + e^u v_x)(e^{\frac{y}{4}} \sin(\frac{x}{4}) - 2e^{\frac{y}{4}} \sin(\frac{x}{4})u_y$ $+2e^{\frac{y}{4}} \cos(\frac{x}{4})u_x) - v e^u (e^{\frac{y}{4}} \cos(\frac{x}{4}) - \frac{e^{\frac{y}{4}}}{2} \cos(\frac{x}{4})u_y$ $- \frac{e^{\frac{y}{4}}}{2} \sin(\frac{x}{4})u_x + 2e^{\frac{y}{4}} \cos(\frac{x}{4})u_{xx} - 2e^{\frac{y}{4}} \sin(\frac{x}{4})u_{xy})$ $(e^{\frac{y}{4}} \sin(\frac{x}{4}) - 2e^{\frac{y}{4}} \sin(\frac{x}{4})u_y + 2e^{\frac{y}{4}} \cos(\frac{x}{4})u_x)$ $\times (-vu_y e^u + e^u v + e^u v_y) - v e^u (e^{\frac{y}{4}} \sin(\frac{x}{4})$ $- \frac{e^{\frac{y}{4}}}{2} \sin(\frac{x}{4})u_y + \frac{e^{\frac{y}{4}}}{2} \cos(\frac{x}{4})u_x - 2e^{\frac{y}{4}} \sin(\frac{x}{4})u_{yy}$ $+ 2e^{\frac{y}{4}} \cos(\frac{x}{4})u_{xy})$ $+D_t^{\alpha-1}(e^{\frac{y}{4}} \sin(\frac{x}{4}) - 2e^{\frac{y}{4}} \sin(\frac{x}{4})u_y + 2e^{\frac{y}{4}}$ $\times \cos(\frac{x}{4})u_x)v - D_t^{\alpha-2}(e^{\frac{y}{4}} \sin(\frac{x}{4}) - 2e^{\frac{y}{4}}$ $\times \sin(\frac{x}{4})u_y + 2e^{\frac{y}{4}} \cos(\frac{x}{4})u_x)v_t - J(e^{\frac{y}{4}} \sin(\frac{x}{4})$ $- 2e^{\frac{y}{4}} \sin(\frac{x}{4})u_y + 2e^{\frac{y}{4}} \cos(\frac{x}{4})u_x, v_{tt})$
X_5	$+e^{\frac{y}{4}} \cos(\frac{x}{4}) - 2e^{\frac{y}{4}} \sin(\frac{x}{4})u_x$ $-2e^{\frac{y}{4}} \cos(\frac{x}{4})u_y$	C^x C^y C^t	$(-vu_x e^u + e^u v_x)(e^{\frac{y}{4}} \cos(\frac{x}{4}) - 2e^{\frac{y}{4}}$ $\times \sin(\frac{x}{4})u_x - 2e^{\frac{y}{4}} \cos(\frac{x}{4})u_y) - v e^u (-\frac{e^{\frac{y}{4}}}{4}$ $\times \sin(\frac{x}{4}) - \frac{e^{\frac{y}{4}}}{2} \cos(\frac{x}{4})u_x + \frac{e^{\frac{y}{4}}}{2} \sin(\frac{x}{4})u_y$ $- 2e^{\frac{y}{4}} \sin(\frac{x}{4})u_{xx} - 2e^{\frac{y}{4}} \cos(\frac{x}{4})u_{xy})$ $(-vu_y e^u + e^u v + e^u v_y)(e^{\frac{y}{4}} \cos(\frac{x}{4})$ $- 2e^{\frac{y}{4}} \sin(\frac{x}{4})u_x - 2e^{\frac{y}{4}} \cos(\frac{x}{4})u_y) + (\frac{e^{\frac{y}{4}}}{4} \cos(\frac{x}{4})$ $- \frac{e^{\frac{y}{4}}}{2} \sin(\frac{x}{4})u_x - \frac{e^{\frac{y}{4}}}{2} \cos(\frac{x}{4})u_y - 2e^{\frac{y}{4}} \sin(\frac{x}{4})u_{xy}$ $- 2e^{\frac{y}{4}} \cos(\frac{x}{4})u_{yy})(-v e^u)$ $+D_t^{\alpha-1}(e^{\frac{y}{4}} \cos(\frac{x}{4}) - 2e^{\frac{y}{4}} \sin(\frac{x}{4})u_x$ $- 2e^{\frac{y}{4}} \cos(\frac{x}{4})u_y)v - D_t^{\alpha-2}(e^{\frac{y}{4}} \cos(\frac{x}{4})$ $- 2e^{\frac{y}{4}} \sin(\frac{x}{4})u_x - 2e^{\frac{y}{4}} \cos(\frac{x}{4})u_y)v_t$ $- J(e^{\frac{y}{4}} \cos(\frac{x}{4}) - 2e^{\frac{y}{4}} \sin(\frac{x}{4})u_x - 2e^{\frac{y}{4}}$ $\times \cos(\frac{x}{4})u_y, v_{tt})$

جدول ۱۲.۴: مولفه‌های قوانین پایستگی برای معادله حالت (۳)

X_i	W_i	$C^{x,y,t}$	مولفه‌های قوانین پایستگی برای معادله حالت (۴)
X_1	$-u_x$	C^x C^y C^t	$-u_x \left(-\beta u^{\beta-1} v u_x + u^\beta v_x \right) + u_{xx} u^\beta v$ $-u_x \left(-\beta u^{\beta-1} v u_y + \beta u^{\beta-1} v + v_y u^\beta \right) + v u_{xy} u^\beta$ $-v e^u D_t^{\alpha-1} (u_x) + D_t^{\alpha-2} (u_x) \left(v_t e^u + v e^u u_t \right) - J \left(-u_x, v_{tt} e^u + 2v_t e^u u_t + v e^u u_t^2 + v e^u u_{tt} \right)$
X_2	$-u_y$	C^x C^y C^t	$-u_y \left(-\beta u^{\beta-1} v u_x + u^\beta v_x \right) + u_{xy} u^\beta v$ $-u_y \left(-\beta u^{\beta-1} v u_y + \beta u^{\beta-1} v + v_y u^\beta \right) + v u_{yy} u^\beta$ $-v e^u D_t^{\alpha-1} (u_y) + D_t^{\alpha-2} (u_y) \left(v_t e^u + v e^u u_t \right) - J \left(-u_y, v_{tt} e^u + 2v_t e^u u_t + v e^u u_t^2 + v e^u u_{tt} \right)$
X_3	$\alpha u - \alpha x u_x - \alpha y u_y$	C^x C^y C^t	$\left(\alpha u - \alpha x u_x - \alpha y u_y + \beta t u_t - 2t u_t \right) \times \left(-\beta u^{\beta-1} u_x v + v_x u^\beta \right) - u^\beta v$ $\times \left(-\alpha x u_{xx} - \alpha y u_{xy} + \beta t u_{xt} - 2t u_{xt} \right)$ $\left(\alpha u - \alpha x u_x - \alpha y u_y + \beta t u_t - 2t u_t \right) \times \left(-\beta u^{\beta-1} u_y v + \beta v u^{\beta-1} + v_y u \right) - u^\beta v$ $\times \left(-\alpha x u_{xy} - \alpha y u_{yy} + \beta t u_{yt} - 2t u_{yt} \right)$ $+ v e^u D_t^{\alpha-1} \left(\alpha u - \alpha x u_x - \alpha y u_y + \beta t u_t - 2t u_t \right) + D_t^{\alpha-2} (u_y) \left(v_t e^u + v e^u u_t \right) - J \left(-u_y, v_{tt} e^u + 2v_t e^u u_t + v e^u u_t^2 + v e^u u_{tt} \right)$

جدول ۱۳.۴: مولفه‌های قوانین پایستگی برای معادله حالت (۴)

فصل ۵

تقارن و ریاضیات مالی

ریاضیات مالی شاخه‌ای از ریاضیات است که برای جریان‌های پول و سرمایه در بازارهای مالی، مدل‌های ریاضی طراحی و مطالعه می‌نماید. به عبارت دیگر با کمک ابزارهای ریاضی به توصیف و مدل‌سازی رفتارهای مختلف بازارهای مالی می‌پردازد. بازارهای مالی محل خرید و فروش دارایی‌ها هستند و علاوه بر خرید و فروش دارایی‌های پایه نظیر سهام و اوراق قرضه، قراردادهایی تحت عنوان مشتقات مالی نیز مورد توجه قرار می‌گیرند. در این فصل مروری بر تعاریف و مفاهیم مورد نیاز می‌کنیم. برای مطالعه بیشتر می‌توان به مراجع [۲]، [۲۰] مراجعه کرد.

۱.۵ سبد سهام

تعریف ۱.۱.۵. سبد سهام یا پرتفوی ترکیبی مناسب از سهام یا سایر دارایی‌ها است، که یک سرمایه‌گذار آنها را خریداری کرده است. هدف از تشکیل سبد سهام، تقسیم کردن ریسک سرمایه‌گذاری بین چند سهم است؛ بدین ترتیب سود یک سهم می‌تواند ضرر سهام دیگر را جبران کند.

پرتفوی به منظور کاهش ریسک و به صورتی انتخاب می‌شود تا در شرایط عادی احتمال کاهش بازده همه دارایی‌ها (شامل سهام‌های خریداری شده) نزدیک به صفر باشد.

تعریف ۲.۱.۵. پرتفوی $h = (x, y)$ را در نظر بگیرید. فرآیند ارزش پرتفوی h به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V_t^h = xB_t + yS_t, \quad t = 0, 1,$$

که S_t فرآیند قیمت هر سهم (فرآیند تصادفی) در زمان t ، B_t فرآیند قیمت یک ورق قرضه (فرآیند قطعی) در زمان t است.

۱.۱.۵ قراردادهای اختیار معامله

اولین معاملات اختیار خرید و اختیار فروش، در اروپا و آمریکا در اوایل قرن ۱۸ صورت گرفت. در اوایل دهه ۱۹۹۰، گروهی از شرکت‌ها که خود را انجمن کارگزاران و معامله‌گران اختیار خرید و اختیار فروش معرفی می‌کردند، برای ایجاد یک بازار اختیار معامله اقدام نمودند. هدف این انجمن گردهم آوردن خریداران و فروشندگان در کنار یکدیگر بود. اگر سرمایه‌گذاری قصد خرید یک اختیار معامله را داشت، بایستی با یکی از اعضای انجمن تماس می‌گرفت، تا او یک فروشنده را، که قصد فروش اختیار معامله مذکور را دارد، پیدا کند. اگر عضو مذکور نمی‌توانست یک فروشنده پیدا کند، خود شرکت برای فروش اختیار معامله مذکور اقدام می‌کرد. در آوریل ۱۹۷۳، بورس شیکاگو یک بورس انحصاری برای اختیار معاملات بر روی سهام تشکیل داد. پس از آن، چندین بورس سهام و تقریباً تمام بورس‌های معاملات آتی، به مبادله اختیار معامله اقدام نمودند. فعالان بازارهای اقتصادی و سرمایه‌گذاری به دلیل شرایط حاکم بر بازارها، نوسانات و عدم اطمینان از وضعیت آتی بازار؛ همواره با ریسک‌هایی مواجه هستند که ممکن است آن‌ها را در معرض زیان قرار دهد. به این منظور همواره تلاش بر این بوده است که راهکارهای مناسبی برای پوشش این ریسک‌ها اتخاذ شود و به عبارتی ریسک‌های پیش روی فعالان بازار سرمایه مدیریت شوند.

اختیار معامله استاندارد

یک اختیار معامله استاندارد، اختیاری است که به دارنده آن این اختیار و نه اجبار را می‌دهد تا یک دارایی پایه را در زمان مشخص در آینده با قیمت توافق شده بخرد یا بفروشد. اساس اختیارها حق بدون الزام است. در واقع سود بدون ضرر را برای دارنده اختیار به همراه دارد. در چنین قراردادهای بدون تعهد، دارنده اختیار باید مقداری پول را پیشاپیش پرداخت کند که به آن قیمت اختیار گفته می‌شود. می‌توان حق اختیار معامله را به دو دسته تقسیم کرد؛ اختیار خرید و اختیار فروش. یک اختیار خرید در واقع این حق (و نه الزام) را به دارنده آن می‌دهد، که دارایی موضوع قرارداد را با قیمت معین و در تاریخ مشخص یا قبل از آن، بخرد. به همین ترتیب، یک اختیار فروش به دارنده آن این حق را می‌دهد، که دارایی موضوع قرارداد را با قیمت معین و در تاریخ مشخصی و یا قبل از آن بفروشد. قیمتی را که در قرارداد ذکر می‌شود، قیمت توافقی یا قیمت اعمال و تاریخ ذکر شده در قرارداد را، اصطلاحاً تاریخ انقضا یا سررسید اختیار معامله می‌گویند. اختیار خرید یا فروش، هر کدام به دو حالت اروپایی و آمریکایی تقسیم می‌شود. قرارداد اختیار اروپایی فقط در تاریخ سررسید قابلیت اعمال دارد. در حالی که قرارداد اختیار آمریکایی، در هر زمانی قبل از تاریخ سررسید یا در تاریخ سررسید قابل اعمال است.

در هر قرارداد اختیار معامله، دو طرف معامله‌گر وجود دارد. یک طرف معامله‌کننده، سرمایه‌گذاری است

که موقعیت خرید اتخاذ کرده است و اختیار معامله را خریده است. در طرف دوم قرارداد، سرمایه‌گذار موقعیت فروش اتخاذ کرده است؛ یعنی اختیار معامله را صادر کرده یا فروخته است. خریدار یا دارنده اختیار معامله، هیچ‌گونه تعهدی در قبال قرارداد ندارد، در حالی که فروش یا صدور اختیار معامله برای فروشنده تعهدآور است. بدین معنی که فروشنده، مبلغ قیمت اختیار را دریافت می‌کند و در مقابل متعهد می‌شود که در صورت اعمال اختیار معامله توسط خریدار، به مفاد قرارداد عمل کند.

برای توضیح بیشتر فرض کنید در لحظه $t = 0$ ، سهامی را به قیمت S_0 بخرید و قصد داشته باشید آن را تا زمان T نگه دارید و سپس به قیمت S_T بفروشید. از آنجایی که نوسانات قیمت سهام تصادفی است، در لحظه $t = 0$ مقدار S_T معلوم نیست. پس این امکان وجود دارد که به علت کاهش قیمت سهام متضرر شوید. یک قرارداد مالی بدین صورت در نظر بگیرید: اگر در لحظه $t = 0$ مبلغ π_0 را بپردازید، در لحظه T می‌توانید (در صورت تمایل) سهام خود را به قیمت از پیش تعیین شده K بفروشید. در صورت انعقاد چنین قراردادی، در لحظه T ، دو حالت ممکن است:

(۱) اگر $S_T < K$ ، سهام را به قیمت K به طرف قرارداد می‌فروشید و با پرداخت مبلغ S_T سهام را از بازار خریداری می‌کنید و سود $K - S_T$ عایدی شما خواهد بود.

(۲) چنانچه $S_T \geq K$ ، قرارداد را اعمال نخواهید کرد و عایدی شما برابر صفر خواهد بود.

به عبارت دیگر با پرداخت مبلغ تعیینی π_0 در زمان $t = 0$ مبلغ تصادفی $\max\{K - S_T, 0\}$ را در زمان T دریافت خواهید کرد. علاوه بر اختیارمعامله‌های استاندارد، اختیارمعامله‌های غیراستاندارد نیز وجود دارد. قراردادهای اختیارمعامله غیر استاندارد یا نامتعارف، اختیاراتی هستند که با استفاده از یک سری قواعد، بازده‌هایی را به دست می‌دهند که محاسبه این بازده‌ها همچون اختیارمعامله استاندارد ساده و آسان نیست. از جمله اختیارات غیر استاندارد می‌توان اختیار آسیایی، اختیار متکی به گذشته، مانع و اختیار معاملات توان نام برد.

تعریف ۳.۱.۵. یک مشتق مالی استاندارد، قراردادی است که به موجب آن دارایی پایه در زمان معلوم با قیمت توافق شده مشخص مورد معامله قرار گیرد. قرارداد اختیار معامله یکی از انواع مشتقات مالی است.

تعریف ۴.۱.۵. به‌طور کلی ریسک احتمالی است که انجام یا عدم انجام کاری مشخص منجر به زیان و پیامدهای ناخوشایند و ناخواسته گردد. در ادبیات مالی ریسک را به عنوان رویدادهای غیر منتظره‌ای تعریف می‌کنند که معمولاً باعث تغییر در ارزش دارایی‌ها یا بدهی‌ها می‌شود.

تعریف ۵.۱.۵. دارایی‌هایی را که میزان سود آن‌ها در سررسید به‌طور قطع از قبل مشخص نباشد مانند سهام و اختیارمعامله دارایی‌های ریسکی می‌نامند.

تعریف ۶.۱.۵. دارایی بدون ریسک، دارایی است که هنگام سرمایه‌گذاری میزان سود آن در سررسید به‌طور قطع مشخص می‌شود مانند سپرده‌های سرمایه‌گذاری اشخاص در بانک‌ها و اوراق قرضه.

عملکرد قراردادهای اختیار معاملات، به طور قابل توجهی موفقیت‌آمیز بوده است. مهم‌ترین دلیل آن، توانایی آنها برای جذب تعداد کثیری از انواع معامله‌گران و ایجاد قابلیت نقدینگی فراوان برای انجام مبادلات است، به طوری که چنانچه سرمایه‌گذاری بخواهد یک موقعیت معاملاتی را اتخاذ کند، معمولاً مشکلی در یافتن طرف دوم قرارداد ندارد. سه گروه عمده معامله‌گران را می‌توان پوشش‌دهندگان ریسک، سفته‌بازان و آربیتراژگران در نظر گرفت. پوشش‌دهندگان ریسک با استفاده از اختیار معاملات به دنبال کاهش ریسکی هستند، که از حرکت بالقوه آتی در یک متغیر ناشی می‌شود. سفته‌بازان از پیش‌بینی، جهت حرکت آتی قیمت، در یک متغیر بازار استفاده می‌کنند. آربیتراژگران با اتخاذ موقعیت‌های متناسب در دو یا چند بازار مختلف، به دنبال کسب سود بدون ریسک هستند. در این قسمت فعالیت‌ها و اقدامات هر یک از این گروه‌ها را بررسی می‌کنیم.

۲.۱.۵ پوشش ریسک با استفاده از اختیار معاملات

با استفاده از اختیار معاملات، می‌توان به پوشش ریسک پرداخت. به این صورت که پوشش‌دهندگان ریسک در موقعیتی هستند که در معرض ریسک مرتبط با تغییر قیمت دارایی‌اند. آن‌ها از قراردادهای فوق برای کاهش یا حذف این ریسک استفاده می‌کنند. فرض کنید سرمایه‌گذاری در ماه مه، هزار سهام میکروسافت را در اختیار دارد. قیمت فعلی هر سهم ۷۳ دلار است و انتظار می‌رود که اقامه دعوی علیه شرکت، باعث افت شدید قیمت، در دو ماه آینده شود. این سرمایه‌گذار می‌تواند، اختیار فروش با سررسید ۱۰ ژوئیه را از بورس شیکاگو با قیمت توافقی ۶۵ دلار برای هر سهم بخرد. فرض کنید قیمت هر حق اختیار فروش ۲.۵ دلار باشد. در این صورت هزینه کل انتخاب این استراتژی، معادل ۲۵۰۰ دلار خواهد بود. با این‌که انتخاب این استراتژی ۲۵۰۰ دلار هزینه در بردارد، ولی در عوض تضمین می‌کند، که حداقل قیمت فروش سهام برای هر سهم تا زمان سررسید اختیار، ۶۵ دلار باشد. اگر قیمت بازار سهام کاهش یابد، شخص می‌تواند اختیار فروش را اعمال کند و ۶۵۰۰۰ دلار بابت فروش سهام دریافت کند، که با کسر هزینه ۲۵۰۰ دلار برای خرید اختیار معامله درآمد خالص وی، مبلغ ۶۲۵۰۰ دلار می‌شود. اگر قیمت بازار بیش از ۶۵ دلار شود، اختیار فروش اعمال نمی‌شود و منقضی می‌گردد. اما در این حالت، ارزش کل دارایی بیش از ۶۵۰۰۰ دلار می‌شود (یا با در نظر گرفتن هزینه اوراق اختیار فروش ۶۲۵۰۰ دلار می‌شود).

سفته‌بازان

پوشش‌دهندگان ریسک از مواجه شدن با تغییرات نامطلوب قیمت دارایی‌ها اجتناب می‌کنند. درحالی‌که برخلاف آن‌ها سفته‌بازان به استقبال ریسک می‌روند و موقعیت‌هایی را متناسب با نوع پیش‌بینی خود درباره تغییر قیمت‌ها، کسب می‌کنند. فرض کنید الان ماه اکتبر است و یک سفته‌باز پیش‌بینی می‌کند، که ارزش شرکت آمازون در دو ماه آینده افزایش خواهد یافت. قیمت سهام فوق در حال حاضر، ۴۰ دلار است و یک اختیار خرید دو ماهه با قیمت اعمال ۴۵ دلار، به قیمت ۲ دلار فروخته می‌شود. دو راهکار را برای یک سفته‌باز

با سرمایه ۴۰۰۰ دلار تشریح می‌کنیم. گزینه اول این است که ۱۰۰ سهم بخرد. گزینه دوم شامل خرید ۲۰۰۰ اختیار خرید (یا ۲۰ قرارداد اختیار خرید) است. فرض کنید پیش‌بینی سفته‌باز درست باشد و قیمت سهم آمازون در ماه دسامبر به ۷۰ دلار برسد. گزینه اول که خرید سهم بود، سود ۳۰۰۰ دلار را ایجاد می‌کند. اما گزینه دوم بسیار سودآورتر است. یک اختیار خرید بر روی سهم آمازون با قیمت توافقی ۴۵ دلار، درآمدی معادل ۲۵ دلار نصیب سفته‌باز می‌کند، چرا که ورقه اختیار خرید، او را قادر می‌سازد، که سهم ۷۰ دلاری را با قیمت ۴۵ دلار بخرد. کل سودی که در روش دوم نصیب سفته‌باز می‌شود، عبارت است از ۵۰۰۰ دلار که با کم کردن هزینه (قیمت) اختیار خرید، سود خالص عبارت است از ۴۶۰۰ دلار. بنابراین سود حاصل از انتخاب استراتژی اختیار خرید، بیش از ۱۵ برابر سود حاصل از انتخاب استراتژی خرید سهم است. در ضمن، توجه کنید که اوراق اختیار خرید، میزان زیان بالقوه را نیز افزایش می‌دهد. فرض کنید قیمت سهم در ماه دسامبر به ۳۰ دلار کاهش یابد. در این صورت استفاده از روش اول (یعنی خرید سهم) زیانی معادل ۱۰۰۰ دلار، بر سفته‌باز وارد می‌کند. ولی از آنجا که اوراق اختیار خرید بدون اینکه اعمال شوند، منقضی می‌شوند، لذا روش دوم (یعنی اوراق اختیار) فقط زیانی معادل ۴۰۰۰ دلار - مبلغی که در ابتدا بابت اوراق اختیار خرید پرداخته می‌شود - بر سفته‌باز تحمیل می‌کند. نتایج این استراتژی نشان می‌دهد اوراق اختیار معامله، نوعی اهرم ایجاد می‌کنند؛ یعنی میزان پیامدهای مالی حاصل از سرمایه‌گذاری با استفاده از اوراق اختیار معامله اهرمی، افزایش می‌یابد؛ به عبارت دیگر، اگر پیش‌بینی‌ها درست باشند، سودهای بیشتر و در غیر این صورت، زیان‌های بیشتری را نصیب سرمایه‌گذار می‌کند.

آربیتراژگران

گروه سوم و مهم معامله‌گران در بازارهای اختیار معاملات، آربیتراژگران هستند. آربیتراژ عبارت است از فرصت دستیابی به سود بدون ریسک، از طریق ورود هم‌زمان در دو یا چند بازار. فرض کنید سهامی هم‌زمان در بورس سهام نیویورک و در بورس سهام لندن معامله می‌شود. همچنین فرض کنید قیمت این سهام در بورس نیویورک ۱۷۲ دلار و در بورس لندن ۱۰۰ پوند است. اگر نرخ مبادله پوند و دلار، برابر ۱.۷۵ دلار برای هر پوند باشد، آنگاه آربیتراژگر می‌تواند با خرید مثلاً ۱۰۰ سهم از بورس نیویورک و فروش آن سهام در بازار لندن به سود بدون ریسک ۳۰۰ دست پیدا کند. یعنی سودی معادل ۳۰۰ دلار بدون در نظر گرفتن هزینه معاملات برای آربیتراژگر تضمین می‌شود. البته احتمال دارد که هزینه‌های معاملات برای سرمایه‌گذاران کوچک سود آربیتراژی را از بین ببرد. با این حال، هزینه‌های مربوط به معاملات در بازار سهام و بازار تبدیلات ارز، برای معاملات بزرگ رقم چندانی نیست و همین موضوع سبب می‌شود که فرصت آربیتراژ بسیار جذاب باشد و همگان بکوشند، تا از این فرصت‌ها بیشترین منفعت را کسب کنند. همچنین باید توجه داشت که فرصت‌های آربیتراژی که یک نمونه از آن در بالا ذکر شد، نمی‌تواند برای مدت طولانی استمرار داشته باشد. با خرید سهام در بازار نیویورک، نیروهای عرضه و تقاضا باعث افزایش قیمت سهام می‌شوند و همچنین فروش آن در بازار لندن، زمینه کاهش قیمت را فراهم می‌آورد و به زودی دو قیمت فوق با نرخ مبادله فعلی در دو بازار یکسان خواهند شد. نکته جالب‌تر این است، که وجود آربیتراژگرانی که به دنبال کسب سود آربیتراژی هستند، امکان

تفاوتی قابل ملاحظه بین قیمت دلار و قیمت پوند را، از همان ابتدا غیرممکن می‌سازد. به طور کلی می‌توان گفت، وجود تعداد زیادی آربیتراژگر در بازار، به این معناست که در عمل، فرصت آربیتراژی بسیار کمی در بازارهای مالی مشاهده می‌شود. به همین دلیل، بیشتر مسائلی که در خصوص قیمت‌گذاری دارایی‌ها و مشتقات مالی مطرح می‌شوند، بر این پیش فرض مبتنی هستند، که فرصت آربیتراژ وجود ندارد.

تعریف ۷.۱.۵. هر خانواده (شمارا یا ناشمارا) از متغیرهای تصادفی، یک **فرآیند تصادفی** نامیده می‌شود.

تعریف ۸.۱.۵. اگر f تابع چگالی احتمال فرایند تصادفی قیمت X باشد در این صورت رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$P(X \in (a, b)) = \int_a^b f(X) dm,$$

که در آن m اندازه لبگ می‌باشد و a ، b اعداد حقیقی می‌باشند.

از آنجایی که فرایند قیمت یک متغیر تصادفی می‌باشد با داشتن تابع چگالی آن می‌توانیم برای سهمی مانند w که در حال حاضر ۵۰ دلار است پیش بینی کنیم که در بازه‌ی زمانی دلخواه آینده این سهم چه میزان رشد خواهد کرد.

۲.۵ حرکت براونی

حرکت براونی از اساسی‌ترین فرآیندهای تصادفی و سنگ بنای نظریه احتمال مدرن، آنالیز تصادفی و معادلات دیفرانسیل است. حرکت نامنظم گرده گیاهان که در آب معلق هستند را به افتخار روبرت براون^۱، گیاه‌شناس اسکاتلندی که برای نخستین بار در تابستان ۱۸۲۷ میلادی حرکت نامنظم گرده گیاهان معلق در آب را مشاهده کرد، حرکت براونی نامیدند. در سال ۱۹۰۵ میلادی آلبرت انیشتن^۲ علت این حرکت را بمباران دانه‌های گرده از سوی ملکول‌های مایع معرفی کرد. به عبارت دیگر، ذرات و ملکول‌های موجود در گازها و یا مایعات دارای حرکت نامنظمی هستند، یعنی در هر راستایی می‌توانند حرکت کنند و با برخورد با یکدیگر تغییر جهت دهند به این حرکت، حرکت براونی می‌گویند. پس از آن دامنه کاربرد حرکت براونی بسیار فراتر رفته و حتی وارد مباحث ریاضیات مالی مانند مدل‌سازی قیمت سهام نیز شده است. در سال ۱۹۱۸ میلادی نوربرت وینر^۳ (۱۸۹۴ - ۱۹۶۴ میلادی) ریاضی‌دان برجسته و نابغه آمریکایی، الگوی حرکت براونی را به‌طور کامل بررسی کرد. وی در سال ۱۹۲۳ میلادی فرآیند مطلوب حرکت براونی را که امروز فرآیند وینر نیز گفته می‌شود را به فرم ریاضی ساخت که به صورت زیر قابل بیان است [۳].

تعریف ۱.۲.۵. فرآیند تصادفی $\{B_t\}_{t \geq 0}$ را یک **حرکت براونی استاندارد** گوئیم هرگاه

$$B_0(w) = 0 \quad ۱.$$

۲. برای $0 \leq t \leq s$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $s - t$ باشد،

^۱Robert Brown

^۲Albert Einstein

^۳Norbert Wiener

۳. برای $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ ، متغیرهای تصادفی $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \dots, B_{t_1} - B_{t_0}$ مستقل و هم توزیع باشند.

حرکت براونی استاندارد را فرآیند وینر نیز می‌گوییم.

تعریف ۲.۲.۵. فرض کنید $\{W_t\}_{t \geq 0}$ یک حرکت براونی استاندارد باشد. در این صورت فرآیند تصادفی $\{S_t\}_{t \geq 0}$ که در معادله دیفرانسیل معمولی زیر صدق می‌کند

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (1.5)$$

که در آن α و σ مقادیر ثابت‌اند، را حرکت براونی هندسی گویند.

۳.۵ مدل بلک شولز

در اوایل دهه‌ی ۱۹۷۰ آقایان "فیشر بلک"^۴، "میرن شولز"^۵ و "رابرت مرتون"^۶ گام بزرگی در قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله برداشتند. نتیجه‌ی کار آن‌ها ارائه مدلی بود که تحت عنوان "مدل بلک - شولز"^۷ معروف گشت. این مدل تأثیر زیادی در نحوه قیمت‌گذاری و پوشش خطر اختیار معامله داشته است. همچنین این مدل نقش اساسی و محوری در موفقیت مهندسی مالی در دهه‌های ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰ داشته است [۲]. ارزش‌گذاری اختیار معامله یکی از مهم‌ترین موضوعات در اقتصادهای مالی است. و بی‌شک مدل بلک - شولز انقلابی در شیوه‌ی قیمت‌گذاری اختیار معامله به وجود آورده است. حرکت براونی هندسی (GBM) در واقع یک مفهوم بسیار مهم در ریاضیات مالی در مدل سهم قیمت‌هاست، این مدل با مدل بلک-شولز که توسط معامله‌گران شناخته می‌شود، با بازاری که شامل دارایی‌هایی ریسکی $\{S_t\}$ می‌باشد و دارای دینامیک زیر هست را در نظر می‌گیریم:

$$dS_t = \beta S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

که در آن μ و σ به ترتیب تلاطم قیمت دارایی و نرخ بازده مورد انتظار دارایی (مقادیر ثابت) می‌باشند و W_t یک فرآیند براونی است.

قضیه ۱.۳.۵. [۲۰] فرض کنید $\{X_t\}_t$ جواب معادله دیفرانسیل زیر باشد:

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t,$$

با مولد نامتناهی A که توسط رابطه زیر داده شده است:

$$(Af)(s, y) = \mu(s, y) \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, y).$$

^۴Fischer Black
^۵Myron Scholes

^۶Robert Merton
^۷Black - Scholes model

اگر جواب $\{X_u\}_{u \in [t, s]}$ دارای چگالی انتقال $p(s, y; t, x)$ باشد، آنگاه p در معادله فوکر-پلانک زیر صدق می‌کند:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(s, y; t, x) = \mathcal{A}^* p(s, y; t, x), \quad (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R},$$

به طوریکه

$$(\mathcal{A}^* p)(t, x) = -\frac{\partial}{\partial x} [\mu(t, x)p(t, x)] + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(t, x).$$

بنابراین نوعی خاص از معادله فوکر-پلانک که به معادله فوکر-پلانک-کولموگروو^۸ برای (GBM) شناخته می‌شود. اهمیت بررسی این معادله در مبحث ریاضیات مالی در این است که جواب معادله فوکر-پلانک در واقع تابع چگالی احتمال می‌باشد و همانطور که در ابتدای فصل اشاره شد یک تابع چگالی فرایند تصادفی قیمت دید وسیعی درباره‌ی آن سهم در اختیار سرمایه‌گذاران قرار می‌دهد. معادله فوکر-پلانک که از نام‌های آدرین فوکر^۹ و مکس پلانک^{۱۰} گرفته شده است، عبارت است از:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + (2\sigma^2 - \beta)x \frac{\partial p}{\partial x} + (\sigma^2 - \beta)p. \quad (۲.۵)$$

که $\alpha \in (0, 1)$ پارامتر مشتق کسری و نرخ بهره، σ تلاطم بازار، x فرایند قیمت، t زمان، p تابع چگالی احتمال قیمت و β مقداری ثابت می‌باشد. در حالت کسری عبارت است از:

$$\mathcal{D}_t^\alpha p = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + (2\sigma^2 - \beta)x \frac{\partial p}{\partial x} + (\sigma^2 - \beta)p, \quad (۳.۵)$$

که ما در [۸۸] در حالت $\alpha = \beta$ این معادله را مورد بررسی قرار دادیم، و در اغلب منابع شرط $\mathcal{D}_t^{\alpha-1} p(t) = 1$ نیز بر آن برقرار است.

با توجه به اینکه معادله‌ی فوکر-پلانک-کولموگروو دارای متغیرهای مستقل x و t و همچنین متغیر وابسته‌ی p می‌باشد، لذا می‌توان مولد گروه تقارنی برای گروه تبدیل این معادله را به صورت زیر نمایش داد:

$$\mathbf{v} = \tau(t, x, p) \frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x, p) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(t, x, p) \frac{\partial}{\partial p}. \quad (۴.۵)$$

همانند محاسبات انجام شده برای مثال آبیاری که در فصل قبل بیان شد، جبرلی تقارن‌های این معادله با مولدهای زیر تولید می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= x \frac{\partial}{\partial x}, \\ \mathbf{v}_2 &= p \frac{\partial}{\partial p}, \\ \mathbf{v}_3 &= 2\sigma^2 x \alpha \ln(x) \frac{\partial}{\partial x} + 4\sigma^2 t \frac{\partial}{\partial t} + \left(2\sigma^2 \alpha p - 3\sigma^2 \alpha \ln(x)p + 2\alpha^2 \ln(x)p - 2\sigma^2 p \right) \frac{\partial}{\partial p}. \end{aligned} \quad (۵.۵)$$

اکنون به دو شیوه از تقارن‌ها استفاده می‌کنیم شیوه اول اینکه با تقارن جواب‌هایی از معادله را بدست آوریم و در شیوه دوم معادله را فقط کاهش مرتبه می‌دهیم.

^۸Fokker-Planck-Kolmogorov

^۹Adrin Fokker
^{۱۰}Max Planck

روش اول) تقارن v_1 را در نظر می‌گیریم. ناوردهای این معادله تحت این تقارن عبارتند از $p = v$ و $t = y$ لذا مشتقات معادله عبارتند از $p_x = p_{xx} = 0$ که در نتیجه معادله به صورت زیر کاهش مرتبه می‌یابد:

$$D_t^\alpha p = (\sigma^2 - \alpha)p. \quad (۶.۵)$$

همان‌طور که در فصل سوم بیان شد، تبدیل لاپلاس برای مشتق ریمان-لیوویل به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$L\{ {}_0 D_x^\alpha f(x); s \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k D^{\alpha-k-1} f(0+), \quad (۷.۵)$$

اینک تبدیل لاپلاس را بر معادله (۶.۵) اثر داده و معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$L\{ D_t^\alpha p \} = (\sigma^2 - \alpha)L\{ p \}. \quad (۸.۵)$$

با توجه به اینکه $0 < \alpha < 1$ فرض شده است، لذا خواهیم داشت $n = 1$ و سمت چپ از معادله‌ی (۸.۵) به فرم $L\{ D_t^\alpha p \} = s^\alpha L\{ p \} - s^{\alpha-1}$ نوشته می‌شود. با انجام محاسبات ساده‌ای خواهیم داشت:

$$L\{ p \} = \frac{1}{s^\alpha + (-\sigma^2 + \alpha)}. \quad (۹.۵)$$

از آن‌جا که رابطه‌ی لاپلاس معکوس زیر برقرار است:

$$G(s) = \frac{1}{a + s^\alpha}, \quad \left| \frac{a}{s^\alpha} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad L^{(-1)}\{ G(s) \} = t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-at^\alpha), \quad (۱۰.۵)$$

در نتیجه جواب معادله فوکر-پلانک-کولموگرو عبارتست از:

$$p = t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}((\sigma^2 - \alpha)t^\alpha). \quad (۱۱.۵)$$

روش دوم) با توجه به اینکه جمع دو تقارن همچنان یک تقارن می‌باشد لذا $v_1 + \beta v_2$ نیز یک تقارن است. از آنجا که اثر ناوردها بر تقارن‌ها صفر است لذا ناوردهای معادله عبارتند از $y = t$ و $x = xp^{-\frac{1}{\beta}}$. لذا می‌توان معادله‌ی فوکر-پلانک-کولموگرو را با قراردادن $p = x^\beta v^\beta(t)$ بازنویسی کرد. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} p_x &= \beta x^{\beta-1} v^\beta, \\ p_{xx} &= \beta(\beta-1)x^{\beta-2} v^\beta, \\ \partial_t^\alpha p &= \frac{1}{2}\sigma^2 \beta(\beta-1)x^\beta v^\beta + (2\sigma^2 - \alpha)\beta x^\beta v^\beta + (\sigma^2 - \alpha)x^\beta v^\beta. \end{aligned} \quad (۱۲.۵)$$

با جایگذاری این مشتقات در معادله‌ی فوکر-پلانک-کولموگرو، معادله **FODE** زیر بدست می‌آید:

$$\partial_t^\alpha (v^\beta(t)) = \frac{1}{2}\sigma^2 \beta(\beta-1)v^\beta + (2\sigma^2 - \alpha)\beta v^\beta + (\sigma^2 - \alpha)v^\beta.$$

برای حل معادله‌ی فوق می‌توان مجدداً یا از روش گروه‌های لی و یا روش‌های عددی استفاده کرد.

در ادامه از روش زیر-فضاهای ناوردا که در فصل قبل مطرح کردیم برای حل معادله فوکر-پلانک-کولموگرو استفاده می‌کنیم. از اصول این روش این است که برای معادلاتی قابل اجراست که بتوان آن‌ها را به صورت

$$\frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha} = \widehat{F}[p]. \quad (13.5)$$

نوشت و البته مشتق کسری موجود از نوع کاپوتو باشد. بار دیگر قضیه مربوط به این روش را بیان می‌کنیم:

قضیه ۲.۳.۵. فرض کنید $\{W_n\}$ فضای خطی تولید شده توسط مجموعه‌ی مستقل خطی از توابع

$$\{f_i(x); i = 1, \dots, n\},$$

باشد و W_n تحت عملگر $\widehat{F}[p]$ ناوردا باشد. در این صورت توابع ψ_1, \dots, ψ_n چنان وجود دارند بطوریکه در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند

$$\widehat{F}\left[\sum_{i=1}^n c_i f_i(x)\right] = \sum_{i=1}^n \Psi_i(c_1, c_2, \dots, c_n) f_i, \quad (14.5)$$

در نتیجه معادله‌ی تکاملی (۱۳.۵) دارای جوابی به فرم

$$p(x, t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) f_i(x), \quad (15.5)$$

می‌باشد، که در آن اولاً $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ مشتق کاپوتو می‌باشد و ثانیاً رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{d^\alpha c_i(t)}{dt^\alpha} = \Psi_i(c_1(t), \dots, c_n(t)). \quad (16.5)$$

حال از قضیه فوق برای حل مسئله‌ی فوکر-پلانک استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $W = \langle 1, x \rangle$ و توجه به فرم معادله‌ی (۳.۵) می‌توان نوشت

$$\widehat{F} = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + (2\sigma^2 - \alpha)x \frac{\partial p}{\partial x} + (\sigma^2 - \alpha)p. \quad (17.5)$$

با توجه به قضیه فوق جواب معادله‌ی فوکر به صورت زیر خواهد بود:

$$p(x, t) = c_1(t) + c_2(t)x. \quad (18.5)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۱۸.۵) در عبارت (۳.۵)، دستگاه زیر برقرار می‌باشد:

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha c_1(t) = (\sigma^2 - \alpha)c_1(t), \\ {}^C D_t^\alpha c_2(t) = (3\sigma^2 - 2\alpha)c_2(t). \end{cases} \quad (19.5)$$

برای حل سیستم فوق از تبدیل لاپلاس استفاده می‌کنیم، برای مشتق کاپوتو تبدیل لاپلاس به صورت زیر بدست می‌آید:

$$L\{{}^C D_t^\alpha f(x); s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad n-1 < \alpha \leq n. \quad (20.5)$$

با توجه به تبدیل لاپلاس (۲۰.۵) در معادله اول دستگاه (۱۹.۵) داریم $L\{c_1(t)\} = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}-\sigma^2+\alpha}$ با بهره‌گیری از رابطه‌ی لاپلاس معکوس در مشتق کاپوتو که به صورت

$$L^{-1}\left\{\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-b}\right\} = x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(bx^{\alpha}), \quad (21.5)$$

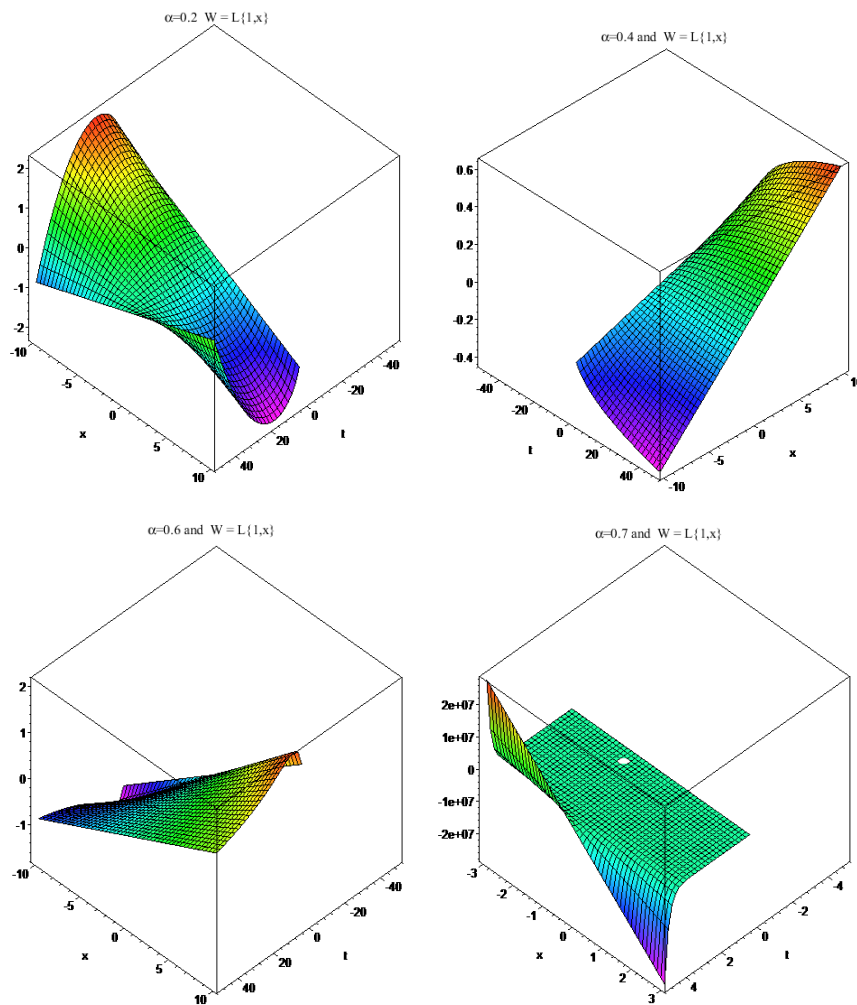
بیان می‌شود می‌توان جواب معادله اول از دستگاه (۱۹.۵) را به صورت $c_1(t) = E_{\alpha,-1}\left((\sigma^2 - \alpha)t^{\alpha}\right)$ نوشت. مشابه آنچه برای $c_1(t)$ بیان شد میتوان $c_2(t)$ را نیز به فرم زیر بدست آوریم:

$$c_2(t) = E_{\alpha,-1}\left((3\sigma^2 - 2\alpha)t^{\alpha}\right).$$

بنابراین جواب دستگاه (۱۹.۵)، به صورت زیر می‌باشد

$$u(x, t) = E_{\alpha,-1}\left((\sigma^2 - \alpha)t^{\alpha}\right) + E_{\alpha,-1}\left((3\sigma^2 - 2\alpha)t^{\alpha}\right)x. \quad (22.5)$$

در شکل (۳.۵) جواب‌های معادله‌ی فوق را به ازای مقادیر مختلف α رسم کرده‌ایم. سایر جواب‌های معادله‌ی فوکر را می‌توان به ازای فضاهاى ناورداى ديگر نیز به دست آورد.



شکل ۱.۵: جواب معادله‌ی (۲۲.۵) را با قرار دادن $\sigma = 0.5$ به ازای $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.7$ به دست آورده‌ایم

مثال ۱.۳.۵. معادله فوکر - پلانک را در حالتی دیگر به صورت

$$\mathcal{D}_t^\beta p - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \alpha p - \alpha x \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (23.5)$$

در نظر می‌گیریم که در آن پارامتر کسری می‌باشد. ایده اصلی این معادله از [۳۷] اقتباس شده است، که در آن معادله فوق به ازای $\beta = 1$ مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است. محک ناوردایی برای (۲۳.۵) به صورت

$$\eta_t^\beta - \frac{1}{2}\sigma^2 \eta^{xx} - \alpha \eta - \alpha x \eta_x - \alpha x \eta^x = 0, \quad (24.5)$$

خواهد بود. با جایگزین کردن $\eta^x, \eta^{xx}, \eta_t^\beta$ مولدهای بینهایت کوچک را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \beta \sigma^2 x \frac{\partial}{\partial x} + 2\sigma^2 t \frac{\partial}{\partial t} + (\beta p \sigma^2 - p \beta \alpha x^2 - \sigma^2 p) \frac{\partial}{\partial p}, \\ \mathbf{v}_2 &= -\sigma^2 \frac{\partial}{\partial x} + p \alpha x \frac{\partial}{\partial p}, \quad \mathbf{v}_3 = p \frac{\partial}{\partial p}. \end{aligned} \quad (25.5)$$

متغیرهای متشابه متناظر با هر یک از تقارن‌ها را می‌توان با حل معادله مشخصه به دست آورد. برای مثال متناظر با تقارن ν_1 دستگاه مشخصه

$$\frac{dx}{\beta\sigma^2x} = \frac{dt}{2t\sigma^2} = \frac{dp}{\beta\sigma^2p - p\beta\alpha x^2 - \sigma^2p}. \quad (26.5)$$

یافت می‌شود و در نتیجه ناوردهای معادله به صورت

$$\frac{t}{\sqrt[\beta]{x^2}}, \quad \frac{x^{1-\frac{1}{\beta}} e^{-\frac{\alpha x^2}{2\sigma^2}}}{p(x, z)}, \quad (27.5)$$

به دست می‌آیند. حال به دنبال کاهش دادن معادله (23.5) با یک جواب به فرم

$$p(x, z) = \frac{x^{1-\frac{1}{\beta}} e^{-\frac{\alpha x^2}{2\sigma^2}}}{g(z)}, \quad (28.5)$$

هستیم. پس سمت راست معادله (23.5) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \alpha p - \alpha x \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\sigma^2 x^{-1-\frac{1}{\beta}}}{2g(z)e^{\frac{\alpha x^2}{2\sigma^2}}} \left(\frac{1}{\beta}\right) \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) - \frac{\alpha^2 x^{3-\frac{1}{\beta}}}{2\sigma^2 g(z)e^{\frac{\alpha x^2}{2\sigma^2}}} \\ &+ \frac{\alpha x^{1-\frac{1}{\beta}}}{2g(z)e^{\frac{\alpha x^2}{2\sigma^2}}} + \frac{\sigma^2 g''(z)x^{1-\frac{1}{\beta}}}{2g^2(z)e^{\frac{\alpha x^2}{2\sigma^2}}} z'^2 + \frac{\sigma^2 g'(z)x^{1-\frac{1}{\beta}}}{2g^2(z)e^{\frac{\alpha x^2}{2\sigma^2}}} z'' - \frac{\sigma^2 g'^2(z)x^{1-\frac{1}{\beta}}}{g^3(z)e^{\frac{\alpha x^2}{2\sigma^2}}} z'^2 \\ &+ \frac{\sigma^2 g'(z)x^{1-\frac{1}{\beta}}}{g^2(z)e^{\frac{\alpha x^2}{2\sigma^2}}} z' \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) - \frac{\alpha x^{1-\frac{1}{\beta}}}{g(z)e^{\frac{\alpha x^2}{2\sigma^2}}} + \frac{\alpha^2 x^{3-\frac{1}{\beta}}}{\sigma^2 g(z)e^{\frac{\alpha x^2}{2\sigma^2}}}, \end{aligned} \quad (29.5)$$

که در آن $g(z) = \frac{x^{1-\frac{1}{\beta}} e^{-\frac{\alpha x^2}{2\sigma^2}}}{p(x, z)}$ و سمت چپ معادله به صورت

$$\mathcal{D}_t^\beta p(t, x) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{p(\tau, x) d\tau}{(t-\tau)^\beta} = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{x^{1-\frac{1}{\beta}} e^{-\frac{\alpha x^2}{2\sigma^2}} d\tau}{g\left(\frac{\tau}{\sqrt[\beta]{x^2}}\right) (t-\tau)^\beta}, \quad (30.5)$$

می‌باشد. با قرار دادن $y = \frac{\tau}{\sqrt[\beta]{x^2}}$ ، $(d\tau = \sqrt[\beta]{x^2} dy)$ و اینکه می‌دانیم $\left(\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt[\beta]{x^2}} \frac{\partial}{\partial z}\right)$ $t = z\sqrt[\beta]{x^2}$ ، می‌توان (30.5) را به صورت

$$\mathcal{D}_t^\beta p(t, x) = \frac{x^{-1-\frac{1}{\beta}} e^{-\frac{\alpha x^2}{2\sigma^2}}}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^z \frac{dy}{g(z)(z-y)^\beta} = x^{-1-\frac{1}{\beta}} e^{-\frac{\alpha x^2}{2\sigma^2}} \mathcal{D}_z^\beta \left(\frac{1}{g(z)}\right). \quad (31.5)$$

بازنویسی کرد، در نتیجه معادله (23.5) با متغیرهای جدید به فرم

$$\begin{aligned} x^{-1-\frac{1}{\beta}} \mathcal{D}_z^\beta \left(\frac{1}{g(z)}\right) &= \frac{\alpha}{2g(z)} x^{1-\frac{1}{\beta}} - \frac{\sigma^2 g''(z)}{2g^2(z)} z'^2 x^{1-\frac{1}{\beta}} - \frac{\sigma^2 g'(z)}{g^2(z)} z' \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) x^{-\frac{1}{\beta}} \\ &- \frac{\sigma^2}{2g(z)} \left(\frac{1}{\beta}\right) \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) x^{-1-\frac{1}{\beta}} + \frac{\sigma^2 g'^2(z)}{g^3(z)} z'^2 x^{1-\frac{1}{\beta}} \\ &- \frac{\sigma^2 g'(z)}{g^2(z)} z'' x^{1-\frac{1}{\beta}} - \frac{\alpha^2}{2\sigma^2 g(z)} x^{3-\frac{1}{\beta}}, \end{aligned} \quad (32.5)$$

می‌باشد. با به کار بردن $h(z) = \frac{1}{g(z)}$ روابط زیر به دست می‌آید:

$$h'(z)z' = -\frac{g'(z)z'}{g^2(z)},$$

$$h''(z)z'^2 + h'(z)z'' = \frac{-g''(z)z'^2g^2(z) - g'(z)z''g^2(z) + 2g(z)g'^2(z)z'^2}{2g^4(z)}.$$

حال با جایگذاری روابط فوق در معادله (۳۳.۵) صورت ساده شده آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathcal{D}_z^\beta(h(z)) = h(z) \left[-\frac{(\beta-1)\sigma^2}{2\beta^2} - \frac{\alpha^2x^4}{2\sigma^2} + \frac{\alpha x^2}{2} \right] + h''(z) \left(\frac{z'\sigma^2x^2}{2} \right) + h'(z) \left[\frac{z''\sigma^2x^2}{2} + \frac{z'(\beta-1)\sigma^2x}{\alpha} \right]. \quad (33.5)$$

با در نظر گرفتن معادله فوق بار دیگر روش ناورداها را برای یافتن جوابی از معادله (۲۳.۵) اعمال می‌کنیم. به همین منظور مولدهای بینهایت کوچک معادله (۳۳.۵) را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$y_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad y_2 = h \frac{\partial}{\partial h}. \quad (34.5)$$

همانند آنچه برای معادله (۲۳.۵) انجام دادیم، جواب ناوردای معادله متناظر با $y_1 + y_2$ به صورت

$$p(x, z) = \frac{x^{1-\frac{1}{\beta}} e^{-\frac{\alpha x^2}{2\sigma^2}}}{g(z)},$$

به دست می‌آید. از آنجایی که هدف اصلی ما یافتن جوابی ناوردا برای معادله (۲۳.۵) می‌باشد، با قرار دادن $h(z) = \frac{1}{g(z)}$ و در نتیجه $g(z) = \frac{k(z)}{e^x}$ جواب $p(x, z) = \frac{x^{1-\frac{1}{\beta}} e^{-\frac{\alpha x^2}{2\sigma^2}}}{k(z)}$ برای معادله (۲۳.۵) به دست می‌آید.

یادداشت

در این فصل سعی شد تا مطالب بیان شده برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات کسری را که در فصل قبل به آن پرداختیم برای رده ای از معادلات دیفرانسیل کسری که در حوزه ریاضیات مالی مورد بررسی قرار می‌گیرد (معادله فوکر-پلانک) به کار گیریم. لازم به ذکر است محاسبه تقارن برای این معادله را به کمک پکیج FracSym که در فصل قبل بیان شد، به دست آوردیم.

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این پایان نامه به دنبال روشی کارا برای حل دسته‌ای از معادلات کسری که در ریاضیات مالی به آن‌ها پرداخته می‌شود، بودیم. اغلب مسائلی که در ریاضیات مالی مطرح می‌شوند به منظور یافتن تابع چگالی احتمال می‌باشد، چرا که با داشتن تابع چگالی احتمالی قیمت یک سهام که متغیری تصادفی است می‌توان در

زمینه تصمیم‌گیری برای آینده آن سهم راحت‌تر عمل کرد. روش تقارن‌های لی به دلیل آنکه هیچ پیش‌شرطی را برای یافتن تابع چگالی مد نظر قرار نمی‌دهد، می‌تواند روشی مفید برای حل معادلاتی نظیر فوکر-پلانک باشد.

با توجه به اینکه تقارن‌های لی که در این رساله با آن سروکار داشتیم، همگی از تبدیلات پیوسته انتخاب شده بودند، به عنوان یک پیشنهاد برای کارهای آتی می‌توان از تبدیلات گسسته و یا λ تقارن‌های برای حل معادلاتی نظیر فوکر-پلانک کمک گرفت.

مراجع

- [۱] سید رضا حجازی، پایان‌نامه دکتری "هندسه برخوردی و تحلیل تقارنی معادلات دیفرانسیل"، دانشکده ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تیر ماه (۱۳۹۰).
- [۲] سیاح س.، صالح آبادی ع.، مبانی مهندسی مالی و مدیریت ریسک، (ترجمه)، گروه رایانه تدبیر پرداز.
- [۳] ظهوری زنگنه ب. و جهانی پور ر. ا.، (۲۰۰۴)، حرکت براونی یا فرآیند وینر: ریاضی مدل ساز پدیده های طبیعی، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۲۰۱، (۱۳۸۴).
- [4] R. Abazari, *The solitary wave solutions of Zoomeron equation*, Applied Mathematical Sciences, 59(5) (2011) 2943–2949.
- [5] M. Abramowitz, L. Stegun, *Handbook of mathematical functions national bureau of standards*, Appl. Math. Series, 55, U.S. Govt. Printing Office, Washington, D.C., (1970).
- [6] M.J. Ablowitz and Y. Kodama, *Note on asymptotic solutions of the KdV equation with solutions*, Studies in applied mathematics, 66 (1982) 159–170.
- [7] M. Alquran, K. Al-Khaled, *Mathematical methods for a reliable treatment of the (2+1)-dimensional Zoomeron equation*, Mathematical Sciences, 6 (2012) 11–15.
- [8] S. Anco and G. Bluman, *Direct construction of conservation laws*, Physical review letters, 78 (1997).
- [9] S. Anco and G. Bluman, *Direct construction method for conservation laws of partial differential equations. Part I: Examples of conservation law classifications*, European Journal of Applied Mathematics, 13(5) (2002) 545–566.

-
- [10] S. Anco and G. Bluman, *Direct construction Method for conservation laws of Partial Differential Equations Part II: General treatment*, European Journal of Applied Mathematics, 13(5) (2002) 567–585.
- [11] I. Area, H. Batarfi, J. Losada, J. J. Nieto, W. Shammakh and A. Torres, *On a fractional order Ebola epidemic model*, Advances in Difference Equations, 278 (2015) 1–10.
- [12] K. Assaleh and W. M. Ahmad, *Modeling of speech signals using fractional calculus*, 9th International Symposium on Signal Processing and Its Applications, 2 (2007) 1–4.
- [13] T.M. Atanackovic, S. Konjik, S. Pilipovic, S. Simic, *Variational problems with fractional derivatives: Invariance conditions and Noethers theorem*, Nonlinear analysis, 71(6) (2009) 1504–1517.
- [14] D.E. Baldwin, W. Hereman, *A symbolic algorithm for computing recursion operators of nonlinear partial differential equations*, International Journal of Computer Mathematics, 87(5) (2010) 1094–1119.
- [15] I.G. Barenblatt, *Similarity self-similarity, and intermediate asymptotics*, Consultant Bureau, New York, (1979).
- [16] T. Bakkyaraj, R. Sahadevan, *Invariant subspace method and exact solutions of certain nonlinear time fractional partial differential equations*, Fractional Calculus and Applied Analysis, 18(1) (2016) 146–162.
- [17] A.V. Bäcklund, *Ueber Flächen transformationen*, Mathematische Annalen, 9(3) (1876) 297–320.
- [18] J. Boussinesq, *Essai sur la theorie des eaux courantes*, Memoires presentes par divers savants, (1877).
- [19] L. Bourdin, J. Cresson, I. Greff, *A continuous discrete fractional Noethers theorem*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 18(4) (2013) 878–887.

- [20] T. Björk, *Arbitrage theory in continuous time*, Oxford university press, (2009).
- [21] T.H. Boyer, *Continuous symmetries and conserved currents*, *Annals of Physics*, 42(3) (1967) 445–466.
- [22] G. Bluman and J.D. Cole *The general similarity solution of the Heat equation*, *Journal of Mathematics and Mechanics*, 18(2) (1969) 1025–1042.
- [23] G. Bluman, S. Anco, *Symmetry and integrating methods for differential equation*, *Applied Mathematical Sciences*, 30(2) (2002) 914–942.
- [24] G. Bluman and S.Kumei, *Symmetry and differential equations*, *Applied Mathematical Sciences*, 22 (1989) 1125–1142.
- [25] G. Bluman, A. F. Cheviakov and S.C. Anco, *Application of symmetry methods to partial differential equations*, Springer, New York, Dordrecht Heudelberg London, 18 (2009) 825–842.
- [26] G. Bluman and Temuerchaolu, *Comparing symmetries and conservation laws of nonlinear telegraph equations*, *Journal of Mathematical Physics*, 46(7) (2005) 700–720.
- [27] E. Bessel-Hagen, *Über die erhaltungssatze der elektrodynamik*, *Mathematische Annalen*, 84(4) (1921) 258–276.
- [28] J.M. Burgers, *A mathematical model illustrating the theory of turbulence*, *Advances in Applied Mechanics*, 2(3) (1948) 171–199.
- [29] F. Calogero, A. Degasperis, *Non-linear evolution equations solvable by the inverse spectral transform I*, *Nuovo Cimento B*, 32(2) (1976) 201–242.
- [30] F. Calogero, A. Degasperis, *Solution by the spectral-transform method of a nonlinear evolution equation including as a special case the cylindrical KdV equation*, *Lettere al nuovo cimento*, 23(4) (1978) 150–154.
- [31] A. F. Cheviakov, *Computation of fluxes of conservation laws*, *J. Engineering Mathematics*, 66(3) (2010) 153–173.

-
- [32] M. Caputo, *Elasticity and anelastic dissipation*, Zanichelli Publisher Rigorous time domain responses of polarizable media. I, Ann. Geofis, 40(2) (1997) 423–434.
- [33] A. Sidi, C. Sulem P.L. Sulem, *On the long time behaviour of a generalized KdV equation*, Acta Applicandae Mathematicae, 7(1) (1986) 35–47.
- [34] M. Chaichian, Z. Popowicz, P. Presnajder, *q-Virasoro algebra and its relation to the q-deformed KdV system*, Physics Letters B, 249(1) (1990) 63–65.
- [35] E. Cuesta, M. Kirane and S.A. Malik, *Image structure preserving denoising using generalized fractional time integrals*, Signal Processing, 92(2) (2012) 553–563.
- [36] K. Diethelm, *The analysis of fractional differential equations*, Academic Press, San Diego (2010).
- [37] E. Dastranj and S. R. Hejazi, *New Solution for Fokker-Plank Equation of Special Stochastic Process with Lie Point Symmetries*, Computational Methods for Differential Equations, 5(1) (2017) 30–42.
- [38] S.A. El-Wakil, A. Elhanbalym and M.A. Abdou, *Adomian decomposition method for solving fractional nonlinear differential equations*, Applied Mathematics and Computation, 182 (2006) 313–324.
- [39] G.S.F. Frederico, D.F.M. Torres, *A formulation of Noether's theorem for fractional problems of the calculus of variations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 334(2) (2007) 834–846.
- [40] R.K. Gazizov, N.H. Ibragimov, S.Y. Lukashchuk, *Nonlinear self-adjointness, conservation laws and exact solutions of time-fractional Kompaneets equations*, Commun Nonlinear Sci Numer Simul, 23(3) (2014) 153–163.
- [41] R.K. Gazizov, A.A. Kasatkin, *Construction of exact solutions for fractional order differential equations by the invariant subspace method*, Computers and Mathematics with Applications, 66 (2013) 576–584.
- [42] V.A. Galaktionov, V.A. Dorodnitsyn, G.G. Elenin, S.P. Kurdyumov, and A. A. Samarskii, *A quasilinear heat equation with a source: peaking, localization, sym-*

- metry, exact solutions, asymptotics, structures, Itogi Naukii Tekhniki, Seriya Sovremennye problemy matematiki: Noveishye dostizhenia*, 28 (1986) 95–206.
- [43] V. A. Galaktionov and S. R. Svirshchevskii, *Exact solutions and invariant subspaces of nonlinear partial differential equations in mechanics and physics*, Chapman Hall/CRC Applied Mathematics Nonlinear Science, Taylor Francis Group, (2006).
- [44] U. Göktas, W. Hereman, *Computation of conservation laws for nonlinear lattices*, *Physica D*, 123(4) (1988) 425–436.
- [45] S. Guo, L. Mei, Y. Li and Y. Sun, *The improved fractional sub equation method and its applications to the space time fractional differential equations in fluid mechanics*, *Physics Letters A*, 376(4) (2012) 407–411.
- [46] J. Hu, Y. Ye, S. Shen and J. Zhang, *Lie symmetry analysis of the time fractional KdV type equation*, *Applied Mathematics and Computation*, 233 (2014) 439–444.
- [47] Qing Huang, Renat Zhdanov, *Symmetries and exact solutions of the time fractional Harry Dym equation with Riemann–Liouville derivative*, *Physica A*, 409 (2014) 110–118.
- [48] T. Inami, H. Kanno, *Lie superalgebraic approach to super Toda lattice and generalized super KdV equations*, *Communications in Mathematical Physics*, 136(3) (1991) 519–542.
- [49] N.H. Ibragimov, *Integrating factors, adjoint equations and Lagrangians*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 318(2) (2006) 742–757.
- [50] N. Ibragimov, F. Kovalev Vladimir, *Approximate and Renormgroup Symmetries*, Academic Press, San Diego (2009).
- [51] N. Ibragimov, *Archives of ALGA Volume 7/8*, ALGA Publications Karlskrona, Sweden, (2011).
- [52] O. S. Iyiola and F. D. Zaman, *A fractional diffusion equation model for cancer tumor*, *AIP Adv*, 4 (2014) 107–121.

- [53] G. Jumarie, *Riemann Liouville Derivative and Fractional Taylor Series of Nondifferentiable Functions Further Results*, Computers and Mathematics with Applications, 51 (2006) 1367–1376.
- [54] G. Jumarie, *Modeling fractional stochastic systems as nonrandom fractional dynamics driven by Brownian motions*, Applied Mathematical Modelling, 32 (2008) 836–859.
- [55] S. Jian Jun, *The proper analytical solution of the Korteweg de Vries Burgers equation*, Journal of Physics A: Mathematical and General, 20(2) (1987) 49–56.
- [56] V. Kiryakova, *Generalised fractional calculus and applications*, Pitman research notes in mathematics, 301 (1994) 100–120.
- [57] J.M. Kimeu, *Fractional calculus, definitions and applications*, Open Mathematics, 13 (2015) 1200–1220.
- [58] M. Khorshidi, M. Nadjafikhah and H. Jafari, *Fractional derivative generalization of Noether's theorem*, Open Mathematics, 13 (2015) 940–947.
- [59] S. Reza Hejazi, A. Naderifard, S. Rashidi, *Conservation laws and similarity reduction of the Zoomeron equation*, Vestnik KRAUNC. Fiz. mat. Nauki, 14(3) (2016) 7–13.
- [60] M.S. Hashemi, *Group analysis and exact solutions of the time fractional Fokker Planck equation*, Phys A Stat Mech Appl, 417 (2015) 141–149.
- [61] S.R. Hejazi, *Lie group analysis, Hamiltonian equations and conservation laws of Born In feild equation*, Asian European Journal of Mathematics, 7(3) (2014) 1450040 (19 pages).
- [62] W. Hereman, P.P. Banerjee, M.R. Chatterjee, *On the nonlocal equations and nonlocal charges associated with the Harry Dym hierarchy Korteweg de Vries equation*J. Physics. A, 22 (1989) 241–252.
- [63] W. Herman, *Symbolic computation of conservation laws of nonlinear partial differential equations in multi dimensional*, Home International Journal of Chemistry, 12 (2008) 58–62.

- [64] W. Hereman, Bernard Deconinck and L.D. Poole, *Continuous and discrete homotopy operators: A theoretical approach made concrete*, Mathematics and Computers in Simulation, 74 (2007) 352–360.
- [65] D. Poole and W. Hereman, *Symbolic computation of conservation laws of non-linear partial differential equations in multi dimensions*, Journal of Symbolic Computation, 46 (2011) 1355–1377.
- [66] N. H. Ibragimov, *The Noether identity*, Continuum Dynamics, 38 (1979) 26–32.
- [67] N. H. Ibragimov, *Nonlinear self adjointness in constructing conservation laws*, Archives of ALGA, 7/8 (2011) 1–99.
- [68] N.H. Ibragimov, *CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations, Symmetries, exact solutions and conservation laws*, Boca Raton, CRC Press Inc, (1994).
- [69] N. H . Ibragimov, *A new covservation theorem*, Journal of Mathematical Analysis and Application, 333(1) (2007) 311–328.
- [70] N.H. Ibragimov, *Integrating factors, adjoint equations and Lagrangians*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 318(2) (2006) 742–757.
- [71] M. M. Khader, A. S. Hendy, *An efficient numerical scheme for solving fractional optimal control problems*, International Journal of Nonlinear Science, 14(3) (2012) 287–296.
- [72] A. S. Kompaneets, *The establishment of thermal equilibrium between quanta and electrons*, Zh Eksp Teor Fiz, 5 (1956) 876–885.
- [73] M.D. Kruskal, J. Moster, *Dynamical Systems, Theory and Applications*, in: *Lecture Notes in Physics*, Springer, Berlin, (1975).
- [74] A. A. Kilbas and H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, NorthHolland Mathematics Studies, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 204 (2006).

-
- [75] Long Z.X., Zhang Y, *Fractional Noether theorem based on extended exponentially fractional integral*, International Journal of Theoretical Physics, 53(3) (2014) 841–855.
- [76] Lie S., Zur, *allgemeinen theorie der partillen differentialgleichungen beliebiger ordnung*, Leipz, Berich, 1 (1895) 53–128.
- [77] J.M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, GTM Springer, New York (2002).
- [78] S. Lie, *Theorie der Transformations gruppen*, Vol. II. B.G. Teubner, Leipzig (1890).
- [79] H. Liu , J. Li , L. Liu, *Lie symmetry analysis optimal systems and exact solutions to the fifth order KdV types of equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 368 (2010) 551–558.
- [80] S.Y. Lukashchuk, *Conservation laws for time-fractional subdiffusion and diffusion-wave equations*, Nonlinear Dyn, 60 (2015) 500–510.
- [81] J. Manafian Heris, M. Bagheri, *Exact Solutions for the Modified KdV and the Generalized KdV Equations via Exp-Function Method*, Journal of mathematical extension, 4(2) (2010) 75–95.
- [82] M. Motlatsi, *Group classification of coupled partial differential equations with applications to flow in a collapsible channel and diffusion processes*, Ph.D. dissertation, USA (2018).
- [83] L. D. Moleleki and C. M. Khalique, *Solutions and conservation laws of a (2+1)-dimensional Boussinesq equation*, International Journal of Biomathematics, 5(5) (2013) 100–113.
- [84] S. T. Mohyud-Din, A. Ali and B. Bin-Mohsin, *On biological population model of fractional order*, International Journal of Biomathematics, 9(5) (2016) 1–13.
- [85] A.B. Malinowska, *A formulation of the fractional Noether type theorem for multidimensional Lagrangians*, Applied Mathematics Letters, 25(11) (2012) 1941–1946.
- [86] M. Musiela and M. Rutkowski, *Martingale methods in financial modelling*, Springer Science and Business Media, 36(1) (2006) 1500–1515.

-
- [87] Azadeh Naderifard, S. Reza Hejazi and Elham Dastranj, *Symmetry properties, conservation laws and exact solutions of time fractional irrigation equation*, Waves in Random and Complex Media, 29(1) (2019) 178–194.
- [88] Azadeh Naderifard, Elham Dastranj and S. Reza Hejazi, *Exact solutions for time-fractional Fokker-Planck-Kolmogorov equation of Geometric Brownian motion via Lie point symmetries*, International Journal of Financial Engineering, 5(2) (2018) 1850009 (15 pages).
- [89] A. Naderifard, S. R. Hejazi, E. Dastranj, A. Motamednezhad, *Symmetry operators and exact solutions of a type of time-fractional Burgers–KdV equation*, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 16(1) (2019) 1950032 (15 pages).
- [90] A. Naderifard, S. R. Hejazi, E. Dastranj, *Similarity reduction of a model of time-fractional Fokker-Planck equation*, 14th International Seminar on Differential Equations, Dynamical Systems and Applications, The institute for Advanced Studies in Basic Sciences (IASBS), Zanjan, Iran, 17–19 July (2018).
- [91] Azadeh Naderifard, S. Reza Hejazi and Elham Dastranj, *Conservation laws of the time-fractional Zakharov-Kuznetsov-Burgers equation*, Kragujevac Journal of Mathematics, 44(1) (2020) 75–88.
- [92] A. Naderifard, S. R. Hejazi, S. Hossinpour and E. Dastranj, *A geometric approach for finding exact solutions of a kind of time-fractional PDE*, the 9th seminar on geometry and topology, Maraghe, Iran, 26–27 July, (2017).
- [93] M. Nadjafikhah, R. Bakhshandeh Chamazkoti, *Preliminary group classification of a class of 2D nonlinear heat equations*, Nuovo Cimento Basic Topics in physics, 125(12) (2013) 110–120.
- [94] M. Nadjafikhah, P Kabi-Nejad, *approximate symmetries of the Harry Dym equation*, Nuovo Cimento Basic Topics in physics, 125(12) (2013) 110–120.
- [95] E. Noether, *Invariant Variationsprobleme*, Nachr. Kaonig. Gesell. Wis-Sen. Gaot-Tivgen, Math-Phys, 8 (1918) 235–257.

-
- [96] Zhu Zuo-Nong, *On the KdV-type equation with variable coefficients*, Journal of Physics A: Mathematical and General, 28(19) (1995) 1–9.
- [97] W. V. L. Nunes, *Global well-posedness for the transitional Korteweg-de Vries equation*, Applied Mathematics Letters, 11(5) (1998) 15–20.
- [98] P. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, (1993).
- [99] P.J Olver, *Equivalence, invariants, and symmetry*, Cambridge University Press, Cambridge, (1995).
- [100] K.B Oldham and F. Spanier, *The fractional calculus*, Academic Press, New York, (1974).
- [101] T. Odziejewicz, A.B. Malinowska, D.F.M Torres, *Noether's theorem for fractional variational problems of variable order*, Cent. Eur. J. Phys, 11(6) (2013) 691–701.
- [102] L.V. Ovsiannikov, *Groups and group invariant solutions of differential equations*, Akad. Nauk. USSR, 118 (1958) 439–442.
- [103] C.M.A. Pinto and J.A. Tenreiro Machado, *Fractional model for malaria transmission under control strategies*, Computers and Mathematics with Applications, 66(5) (2013) 908–916.
- [104] D. Poole, W. Hereman, *The homotopy operator method for symbolic integration by parts and inversion of divergences with applications*, Applicable Analysis, 89(4) (2010) 433–455.
- [105] I. Podlubny, *Fractional differential equations. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, some methods of their solution and some of their applications*, Academic Press, San Diego, CA, (1999).
- [106] G. Quispel, F.W. Nijhoff, H.W. Capel, J. Linden, *Bäcklund transformations and singular integral equations*, Physica A, 123(2) (1984) 319–359.
- [107] F. A. Rihan, *On fractional order cancer model*, Journal of Fractional Calculus and Applications, 3(2) (2012) 1–6.

-
- [108] B. Ross, *Fractional calculus and its applications*, University Canada West, Canada, (1974).
- [109] B. Ross, *The development of fractional calculus*, *Historia Math*, 4 (1977) 75–89.
- [110] J. Rosen, *Some properties of the Euler-Lagrange operators*, Tel-Aviv University, Tel-Aviv, (2017).
- [111] S. Rogosin, M. Dubatovskaya, *Letnikov vs. Marchaud: A survey on two prominent constructions of fractional derivatives*, *Mathematics*, 6(1) (2018) 112–130.
- [112] F. Riewe, *Nonconservative Lagrangian and Hamiltonian mechanics*, *Physical Review E*, 53(2) (1996) 1890–1899.
- [113] B. Sahu and R. Roychoudhury, *Exact solutions of cylindrical and spherical dust ion acoustic waves*, *Physics of Plasmas*, 10(10) (2003) 120–130.
- [114] P.C. Sabatier, *On some spectral problems and isospectral evolutions connected with the classical string problem*, *Constants of motion*, *Lett. Nuovo Cimento*, 26 (1979) 477–482.
- [115] R. Sahadevan, T. Bakkyaraj, *Invariant analysis of time fractional generalized Burgers and Korteweg-de Vries equations*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 393(2) (2012) 341–347.
- [116] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives (theory and applications)*, Gordon and Breach Science Publishers, (1987).
- [117] N. Sebaa, Z. E. A. Fellah, W. Lauriks and C. Depollier, *Application of fractional calculus to ultrasonic wave propagation in human cancellous bone*, *Signal Processing*, 86 (2006) 2668–2677.
- [118] G. Wang, K. Fakhar, *Lie symmetry analysis, nonlinear self-adjointness and conservation laws to an extended (2+1)-dimensional Zakharov–Kuznetsov–Burgers equation*, *Computers and Fluids*, 119 (2015) 143–148.
- [119] G.W. Wang, G.W. Liu and Y.Y. Zhang, *Lie symmetry analysis to the time fractional generalized fifth-order KdV equation*, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul*, 18(9) (2013) 2321–2326.

-
- [120] F.W. Warner, *Foundations Of Differential Manifolds and Lie Groups*, Scott, Foresman and Co., Glenview, III, (1971).
- [121] R. Weymann, *Diffusion approximation for a photon gas interacting with a plasma via the Compton effect*, Phys Fluids, 8(11) (1965) 211–214.
- [122] D. V. Widder, *The Heat Equation Academic Press*, New York, (1975).
- [123] V. E. Zakharov, E. A. Kuznetsov, *Three-dimensional solitons*, Sov Phys -JETP [Appl Math Comput], (1974).
- [124] B. Zel'dovich Ya, *Interaction of free electrons with electromagnetic radiation*, English transl. Sov Phys Uspekhi, 18(2) (1975) 79–98.
- [125] Zhang, S. and Zhang, H-Q, *Fractional sub-equation method and its applications to nonlinear fractional PDEs* Physics Letters A, 375(7) (2011) 1069–1073.
- [126] B. Zheng, *(G G')-expansion method for solving fractional partial differential equations in the theory of mathematical physics*, Commun Theor Phys, 58(5) (2012) 623–630.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Option	اختیار معامله
Asian option	اختیار آسیایی
American option	اختیار آمریکایی
European option	اختیار اروپایی
Power option	اختیار توان معامله
Call option	اختیار خرید
Put option	اختیار فروش
Look back option	اختیار متکی به گذشته
Barrier option	اختیار مانع
Strictly Self Adjoint	اکیدا خودالحاق
Prolongation	امتداد دادن
Translation	انتقال
Potential Energy	انرژی پتانسیل
Euler Lagrange	اویلر لاگرانژ
Trivial	بدیهی
Tangent Vector	بردار مماس
Equality	برابری
Section	برش
Local Section	برش موضعی
Contact	برخوردی
Clearly	به وضوح
Dimension	بعد
Basis	پایه
Continuos	پیوسته

Portfolio	سبد سهام
Beta Function	تابع بتا
Gamma Function	تابع گاما
Mittag-Leffler Function	تابع میتاژ-لفلر
Transformation	تبدیل
Scale	تجانس
linear Composition	ترکیب خطی
Lie Symmetry	تقارن لی
Point Symmetry	تقارن نقطه‌ای
Commutator	تعویض گر
Modification Variable	تغییر متغیر
Stress	تنش
Elastic Solid	جامد قابل ارتجاع
Lie Algebra	جبر لی
Real-Valued	حقیقی مقدار
Brownian motion	حرکت بروانی
Standard Brownian motion	ح
Geometric Brownian motion	رکت بروانی استاندارد حرکت بروانی هندسی
Non Linear Self Adjoint	خود الحاق غیر خطی
Optimal System	دستگاه بهینه
attainable	دست یافتنی
Entiies	درایه
Billinearity	دو خطی
Total Differential	دیفرانسیل کامل
Diffeomorphism	دیفتومورفیسم
Arbitrary	دلخواه
Rank	رتبه
Soil moisture pressure head	رطوبت سطح خاک
Direct Method	روش مستقیم
Satisfy	صدق کردن
Multiplier	ضریب
Water Capacity	ظرفیت آب

Portfolio	سبد مالی
Quasi Self Adjoint	شبه خود الحاقی
Conditions	شرایط
Identify	شناسایی
Integrating Factor	عامل انتگرال
Divergeve Expression	عبارت دیورژانسی
Adjoint Operator	عملگر الحاقی
linear Operator	عملگر خطی
Non Monic	غیر تکین
Wiener process	فرآیند وینر
Determinestic	فرآیند قطعی
Arbitrage opportunity	فرصت آربیتراژ
Form	فرم
Contact Form	فرم برخوردی
Differential Form	فرم دیفرانسیلی
Vector Space	فضای برداری
Topological Space	فضای توپولوژیکی
Jet Space	فضای جت
Strike price or Exercise price	قیمت توافقی یا قیمت اعمال
NoetherTheorem	قضیه نوتر
Conservation Laws	قوانین پایستگی
Flow	شار
Completely	کاملاً
Sufficient	کافی
Strain	کشش
Symmetry Group	گروه تقارن
Lie Group	گروه لی
Locall group	گروه موضعی
Lagrangian	لاگرانژین
Viscous Liquid	مایع چسبنده
Calculate	محاسبه
Independent	مستقل

Dertivative	مشتق
Partial Derivatives	مشتقات جزئی
Total Dertivative	مشتق کامل
Caputo derivative	مشتق کاپاتو
fractional derivatives	مشتقات کسری
Riemman-Liouville derivative	مشتق ریمان-لیوویل
Lie Dertivative	مشتق لی
Characteristic	مشخصه
Higer Order	مراتب بالاتر
Associated	مرتبط
Characteristic	معادلات مشخصه
Differential Equation	معادله دیفرانسیل
Equivalent	معادل
Ordinary	معمولی
Inverse	معکوس
Source term	منبع آب
Regular	منظم
Viscoelastic Materials	مواد ویسکوالاستیک
Locally Euclidean	موضعا اقلیدسی
Infinitesimal Generator	مولد بینهایت کوچک
Vector Field	میدان برداری
Vector Field	میدان برداری
Invariavt	ناوردا
Linear Mapping	نگاشت خطی
Exponential Map	نگاشت نمایی
Dependent	وابسته
Unsaturated Hydraulic Conductivity	هدایت هیدرولیکی اشباع نشده
Herman-Poole	هرمان-پل
Ion-acoustic	یون آکوستیک

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Arbitrage opportunity	فرصت آربیتراژ
Asian option	اختیار آسیایی
American option	اختیار آمریکایی
Adjoint Operator	عملگر الحاقی
Alternately	به‌طور متناوب
Arbitrary	دلخواه
Associated	مرتبط
Basis	پایه
Barrier option	اختیار مانع
Beta Function	تابع بتا
Brownian motion	حرکت بروانی
Bilinearity	دو خطی
Calculate	محاسبه
Contingent claim	ادعای مشروط
Call option	اختیار خرید
Characteristic	مشخصه
Clearly	به‌وضوح
Commutator	تعویض‌گر
Completely	کاملاً
Conditions	شرایط
Contact	برخوردی
Contact Form	فرم برخوردی
Continuos	پیوسته
Conservation Laws	قوانین پایستگی

Caputo derivative	مشتق کاپاتو
Dependent	وابسته
Deterministic	فرآیند قطعی
Derivative	مشتق
Diffeomorphism	دیفئومورفیسم
Differential Equation	معادله دیفرانسیل
Differential Form	فرم دیفرانسیلی
Dimension	بعد
Direct Method	روش مستقیم
Divergence Expression	عبارت دیورژانسی
Elastic Solid	جامد قابل ارتجاع
European option	اختیار اروپایی
Entities	درايه
Equality	برابری
Equivalent	معادل
Euler Lagrange	اویلر لاگرانژ
Exponential Map	نگاشت نمایی
Fractional derivatives	مشتقات کسری
Flow	شار
Form	فرم
Gamma Function	تابع گاما
Geometric Brownian motion	حرکت بروانی هندسی
Herman-Poole	هرمان-پول
Higher Order	مراتب بالاتر
Identify	شناسایی
Independent	مستقل
Infinitesimal Generator	مولد بینهایت کوچک
Integrating Factor	عامل انتگرال
Invariant	ناوردا
Inverse	معکوس
Ion-acoustic	یون آکوستیک
Jet Space	فضای جت

Lagrangian	لاگرانژین
Lie Algebra	جبر لی
Lie Dertivative	مشتق لی
Lie Group	گروه لی
Lie Symmetry	تقارن لی
Linear Composition	ترکیب خطی
Linear Mapping	نگاشت خطی
Linear Operator	عملگر خطی
Local Section	برش موضعی
Local Group	گروه موضعی
Locally Euclidean	موضعا اقلیدسی
Look back option	اختیار متکی به گذشته
Mittag-Leffler Function	تابع میتاژ لفلر
Modification Variable	تغییر متغیر
Multiplier	ضریب
Noether Theorem	قضیه نوتر
Non Linear Self Adjoint	خود الحاق غیر خطی
Option	اختیار معامله
Ordinary	معمولی
Partial Derivatives	مشتقات جزئی
Portfolio	سبد مالی
Power option	اختیار توان معامله
Put option	اختیار فروش
Point Symmetry	تقارن نقطه‌ای
Potential Energy	انرژی پتانسیل
Prolongation	امتداد دادن
Quasi Self Adjoint	شبه خود الحاق
Rank	رتبه
Real-Valued	حقیقی مقدار
Regular	منظم
Riemman-Liouville derivative	مشتق ریمان لیوویل
Risk	ریسک

Satisfy	صدق کردن
Scale	تجانس
Section	برش
Strictly Self Adjoint	اکیدا خودالحاق
Strike price or Exercise price	قیمت توافقی یا قیمت اعمال
Strain	کشش
Stress	تنش
Standard Brownian motion	حرکت بروانی استاندارد
Soil moisture pressure head	رطوبت سطح خاک
Sufficient	کافی
Symmetry Group	گروه تقارن
Tangent Vector	بردار مماس
Topological Space	فضای توپولوژیکی
Total Dertivative	مشتق کامل
Total Differential	دیفرانسیل کامل
Translation	انتقال
Transformation	تبدیل
Trivial	بدیهی
Unsaturated Hydraulic Conductivity	هدایت هیدرولیکی اشباع نشده
Vector Field	میدان برداری
Vector Space	فضای برداری
Viscous Liquid	مایع چسبنده
Viscoelastic Materials	مواد ویسکو الاستیک
Wiener process	فرآیند وینر
Water Capacity	ظرفیت آب

Abstract

The main purpose of the present thesis is a comprehensive and general analysis of the application of Lie groups in fractional differential equation including their solving method and conservation laws.

The extended dynamical systems with movement and motion's memory don't follow from the ordinary derivatives rules. Because of the more exactness of the models for engineering systems than integer orders fractional derivatives and integrals and more interesting for researchers.

Obtaining solutions for a system of fractional differential equations has great importance, thus choosing the suitable methods with respect to fractional structures is so valuable. In this thesis, the Lie symmetry method is studied based on the extension of the symmetry of the equations with integer order derivatives. Also, some analytic method such as invariant subspace and sub-equation are studied and comparison too.

Finally, for the importance of the differential equations in financial mathematics, the symmetry method for fractional differential equations as a geometric method, are applied in order to study some equation in financial mathematics such as Fokker-Plank and etc.

Keywords: Euler-lagrange equation, Lie symmetries, Conservation laws, Noether's theorem, Ibragimov's theorem, Fractional derivative, Riemann-Liouville fractional derivative, Caputo fractional derivative, Black-Sholes equation, Brownian motion.



Shahrood University of Technology

**Faculty of Mathematical Sciences
Department of Pure Mathematics**

PhD Thesis in: Geometry and Topology

**Analyzing of fractional differential equations
and their applications in solving of some
equations in financial mathematics**

**By: Student
Azade Naderifard**

**Supervisor
Dr. S. Reza Hejazi
Advisor
Dr. Elham Dastranj**

November 2019