بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد جبر

بررسی قطر گراف یکه های یک حلقه

نگارنده: مریم محمودی

استاد راهنما

دکتر ابراهیم هاشمی

استاد مشاور

دکتر عبدالله ال هوز

آبان ۱۳۹۸

تقدیم به

همسرم

بهترین پشتیبان و مشوق زندگی من

و به دخترانم

باارزش‌ترین سرمایه‌های زندگی‌ام

سپاس‌گزاری...

رازهای نهفته در جهان انسان این اشرف مخلوقات را به سمت و سوی تحقیق و پژوهش در این جهان بی‌منتها می‌کشاند و انسان نیز با دیدگاهی سوال برانگیزانه در هر نکته‌ای، برای دست‌یابی و شناخت آن تلاش می‌کند. خدای بزرگ را سپاسگزارم به خاطر این نعمت بزرگ که با توکل به ایزد منان، زیر سایه آموزگاران زندگی‌ام، پدر و مادرم و تحت راهنمایی اساتیدی گرانقدر بدان دست یافتم. در این جا وظیفه خود می‌دانم از جناب آقای دکتر هاشمی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

مریم محمودی
آبان ۱۳۹۸

تعهد نامه

اینجانب **مریم محمودی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **بررسی قطر گراف یکه های یک حلقه**، تحت راهنمایی دکتر **ابراهیم هاشمی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود’’ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مریم محمودی
آبان ۱۳۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه باشد. گراف یکه‌های R را با علامت $G(R)$ نمایش می‌دهیم که رئوس آن تمام عناصر حلقه‌ی R و دو رأس به یکدیگر متصل هستند، هرگاه مجموع آن‌ها یک عنصر یکه از حلقه‌ی R باشد.

قطر گراف ساده‌ی G را با علامت $\mathrm{diam}(G)$ نمایش می‌دهیم که طول طولانی‌ترین مسیر بین دو رأس دلخواه گراف G می‌باشد. در این پایان‌نامه ابتدا نشان می‌دهیم که برای هر عدد طبیعی n، حلقه‌ای مانند Rوجود دارد که $n \leq \mathrm{diam}(G(R)) \leq 2n$. همچنین نشان می‌دهیم قطر حلقه‌هایی که به فرم $s = \frac{R}{J(R)}$ هستند، به مجموعه‌ی $\{1,2,3,\infty\}$ تعلق دارد.

در ادامه نشان می‌دهیم برای حلقه‌های R گزاره‌های زیر معادل‌اند:

(الف) $\mathrm{diam}(G(\bar{R})) < \mathrm{diam}(G(R))$،

(ب) R یک حلقه‌ی موضعی است و $J(R) \neq 0$ و $2 \in J(R)$.

(ج) $\mathrm{diam}(G(R)) = 2$ و $\mathrm{diam}(G(\bar{R})) = 1$.

همچنین برای هر حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم گزاره‌های زیر معادل‌اند:

(الف) هر عضوی از R را می‌توان به‌صورت مجموع دو عنصر یکه نوشت.

(ب) همانی R را به‌صورت مجموع دو عنصر یکه می‌توان نوشت.

(ج) هیچ خارج‌قسمتی از R با $\mathbb{Z}_2$ یکریخت نیست.

در پایان نشان می‌دهیم برای هر حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم ناصفر مانند R، $usn(M_2(R))=2$ به‌ویژه برای هر حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم که نامتناهی محض باشد، $usn(R) = 2$.

هر حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم ناصفر مانند R قابل تجزیه به‌صورت $R = S \times T$ می‌باشد که $usn(S) = 1$ یا $usn(S) = 2$ و T یک حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم آبلی است.

کلمات کلیدی: گراف ساده، گراف یکه، حلقه‌ی خودانژکتیو منظم، حلقه‌ی جابه‌جایی، گراف همبند، قطر گراف

فهرست مطالب

پیشگفتار

تحقیق در زمینه‌ی نظریه حلقه‌ها و نظریه‌ی گراف‌ها با وابسته نمودن یک گراف به یک حلقه توجه زیادی را در دو دهه‌ی قبل به خود جذب کرده است. در سال ۱۹۸۸، گراف مقسوم علیه‌های صفر از یک حلقه جابجایی برای اولین بار توسط بک[1] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفت [۹]. بعد از آن، بسیاری از نویسندگان شکل‌های مختلفی از گراف‌های مقسوم علیه‌های صفر حلقه‌ها و دیگر ساختارهای جبری را مورد بررسی قرار دادند.

از طریق گراف مقسوم‌علیه‌های صفر یک حلقه می‌توان ویژگی‌های مقسوم‌علیه‌های صفر آن را بررسی نمود. یکه‌های یک حلقه عناصر کلیدی در مشخص نمودن ساختار یک حلقه می‌باشند و بسیاری از ویژگی‌های حلقه رابطه‌ی نزدیکی با عناصر یکه‌ی حلقه دارند. بنابراین طبیعی است که یک حلقه را به گرافی متناظر کنیم که یال‌های آن رابطه‌ای با یکه‌های حلقه داشته باشند.

در این پایان‌نامه، گراف یکه‌های یک حلقه را مورد بررسی قرار می‌دهیم. یکی از ویژگی‌های مهم هر گراف بررسی قطر آن می‌باشد. به این دلیل افراد زیادی قطر گراف‌های وابسته به حلقه‌ها را مورد بررسی قرار داده‌اند. به‌عنوان مثال، اندرسون[2] و لیوینگستون[3] [۴]، اندرسون و مولای[4][۵]، به ترتیب قطر گراف مقسوم علیه‌های صفر از یک حلقه‌ی جابجایی را بررسی کرده‌اند. آنها ثابت کردند که گراف مقسوم علیه‌های صفر وابسته به یک حلقه‌ی جابجایی همبند بوده و قطر آن حداکثر ۳ است.

نتایج مشابهی برای گراف مقسوم علیه‌های صفر وابسته به نیم‌گروه جابجایی توسط دیمیر[5]، مکنزی[6] و اشنایدر[7] نشان داده شده است[۱۱].

همچنین اندرسون و بداوی[8] اثبات کردند که برای هر عدد صحیح $n \geq ۱$ ، یک حلقه R وجود دارد به طوری که گراف آن دارای قطر n است. حیدری و نیک‌مهر ثابت کردند که در حلقه‌های آرتینی قطر گراف یکه‌های یک حلقه متعلق به مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,\infty\}$ است [۳].

---

[1] Beck
[2] Anderson
[3] Livingston
[4] Mulay
[5] Demeyer
[6] Makenzie
[7] Schneider
[8] Badawi

فرض کنیم R یک حلقه‌ی یکدار باشد. گراف یکه‌های R را با $G(R)$، نمایش داده که گراف ساده‌ای است که رئوس آن تمام عناصر حلقه بوده و دو رأس متمایز x و y مجاور هستند هرگاه $x+y$ یک عنصر وارون‌پذیر حلقه‌ی R باشد. در سال ۱۹۹۰ ، گراف یکه‌ها برای اولین بار توسط گریمالدی[1] برای $\mathbb{Z}_n$ بررسی شد که نویسندگان بدان توجه کرده‌اند[۱۳]. در واقع درجه‌ی یک راس، هامیلتونی بودن، عدد پوششی، عدد استقلال و چند جمله‌ای رنگی از گراف $G\left(\mathbb{Z}_n\right)$ را مورد بررسی قرار دادند.

در سال ۲۰۱۰ ،اشرفی و همکارانش، گراف یکه $G\left(\mathbb{Z}_n\right)$ را به $G\left(R\right)$ برای هر حلقه دلخواه R تعمیم دادند و نتایج مختلفی برای حلقه های متناهی با توجه به همبندی، شاخص رنگی، قطر، کمر $G\left(R\right)$ به دست آوردند[۷]. میمنی[2] و همکارانش شرایط لازم و کافی را برای گراف های یکه هامیلتون بیان کردند[۲۰]. حیدری و نیک مهر گراف یکه حلقه آرتینی چپ را بررسی کردند[۱۵]. افخمی و خوش آهنگ گراف یکه‌های حلقه چند جمله‌ای ها و سری های توانی را مطالعه کردند[۱]. در سال ۲۰۱۴ ،سو و ژو[3] اثبات کردند که کمر $G\left(R\right)$ برای هر حلقه‌ی دلخواه R متعلق به مجموعه‌ی $\{۳,۴,۶,\infty\}$ است. همچنین مقالات دیگری در این موضوع چاپ شده‌اند[۲، ۲۱، ۲۳].

در این پایان‌نامه، ما قطر گراف یکه‌های حلقه و ارتباط آنها را با ساختار حلقه‌ها مورد مطالعه قرار داده‌ایم. در ابتدا تعیین می‌کنیم چه زمانی $\operatorname{diam}\left(G\left(R/J\left(R\right)\right)\right)$ مساوی $\operatorname{diam}\left(G\left(R\right)\right)$ است، همچنین نشان می‌دهیم که برای حلقه متناهی یا آرتینی چپ R، $\operatorname{diam}\left(G\left(R\right)\right) \in \{۱,۲,۳,\infty\}$ است.

در ادامه نشان می‌دهیم حلقه‌هایی مانند R وجود دارند به طوری که

$$۳ < \operatorname{diam}\left(G\left(R\right)\right) < \infty.$$

ابتدا مفاهیم مورد نیاز نظریه‌ی گراف را معرفی می‌کنیم. فرض کنیم G یک گراف ساده باشد. یک مسیر مجموعه‌ای از رأس‌ها و یال‌هاست. بنابراین ما از $x-y$ برای مشخص کردن دو راس x و y که در گراف G مجاور هستند استفاده می‌کنیم.

در تمام پایان‌نامه، حلقه‌ها شرکت‌پذیر و دارای همانی غیر صفر هستند.

فرض کنید R یک حلقه باشد، مشخصه R را با $\operatorname{char}\left(R\right)$ نشان می‌دهیم.

از $J\left(R\right)$ برای نشان دادن رادیکال جیکبسون R استفاده می‌کنیم.

قرار می‌دهیم $\overline{R} = R/J\left(R\right)$ و برای هر $a \in R$ داریم $\overline{a} = a + J(R) \in \overline{R}$. همچنین از $\mathbb{Z}_n$ و $R\left[x\right]$ و $R\left[\left[x\right]\right]$ به ترتیب، برای تعیین حلقه اعداد صحیح به همنهشتی n، حلقه‌ی چند جمله‌ای ها روی حلقه‌ی R در t نامشخص و فرم حلقه سری های توانی روی حلقه R در t نامشخص استفاده می‌کنیم.

---

[1] Grimaldi
[2] Maimani
[3] Su and Zhou

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه مربوط به حلقه‌ها و گراف‌ها

۱.۱ مقدمه

در این فصل ابتدا تعاریف مربوط به حلقه‌های جابجایی و قضایای مربوطه که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند را بیان می‌کنیم. همچنین مفاهیم مورد نیاز نظریه‌ی گراف را یادآوری می‌کنیم.

تعاریف این بخش از [۱۸] گرفته شده است.

۲.۱ مفاهیم مربوط به حلقه‌ها

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی و یکدار باشد، عنصر $a \in R$ را **یکه** یا **وارون‌پذیر** می‌نامیم هرگاه $b \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری که $ab = 1$.

مثال ۱.۲.۱. $\{-1, 1\}$ مجموعه تمام عناصر یکه‌ی حلقه‌ی $\mathbb{Z}$ می‌باشد.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی باشد. عنصر $a \in R$ را یک **مقسوم علیه صفر** می‌نامیم هرگاه عنصر ناصفر $b \in R$ وجود داشته باشد که $ab = 0$.

در هر حلقه‌ای همیشه ۰ مقسوم‌علیه صفر است که به آن **مقسوم‌علیه صفر بدیهی** می‌گوییم.

اگر عنصری یکه باشد، مقسوم‌علیه صفر نیست.

تعریف ۳.۲.۱. حلقه‌ی جابجایی و یکدار R را **حوزه‌ی صحیح (دامنه‌ی صحیح)** می‌نامیم هرگاه به جز 0 مقسوم‌علیه صفر دیگری نداشته باشد.

به‌عنوان مثال $\mathbb{Z}$ حوزه‌ی صحیح است.

تعریف ۴.۲.۱. حلقه‌ی جابجایی و یکدار R را **میدان** گوییم هرگاه همه‌ی عناصر ناصفر آن یکه باشند.

بنابراین همه‌ی میدان‌ها حوزه‌ی صحیح‌اند.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد گوییم مشخصه‌ی R عدد n است، هرگاه

۱. برای هر $x \in R$، $nx = 0$.

۲. n کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد که در شرط (۱) صدق می‌کند.

اگر چنین عددی وجود نداشته باشد، گوییم مشخصه‌ی R صفر است. مشخصه‌ی R را با نماد $\mathrm{char}(R)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۲.۲.۱. $\mathrm{char}(\mathbb{Z}) = 0$، $\mathrm{char}(\mathbb{Z}_4) = 4$ و $\mathrm{char}(\mathbb{Z}_n) = n$.

گزاره ۱.۲.۱. اگر R یک حوزه‌ی صحیح باشد، آن‌گاه $\mathrm{char}(R) = 0$ یا $\mathrm{char}(R)$ یک عدد اول است.

گزاره ۲.۲.۱. اگر R یک حلقه‌ی یکدار باشد، آن‌گاه $\mathrm{char}(R) = n$ اگر و تنها اگر n کوچک‌ترین عدد طبیعی باشد که در شرط $n \cdot 1 = 0$ صدق کند.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنیم M و N دو Rـ مدول باشند، تابع $f : M \longrightarrow N$ را یک **$\mathbf{R}$ـ همریختی** گوییم، هرگاه

$$
\begin{aligned}
&1)\ \forall m_1, m_2 \in M, \quad f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2) \\
&2)\ \forall r \in R, \forall m \in M \quad f(rm) = rf(m).
\end{aligned}
$$

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنیم I یک مجموعه‌ی ناتهی و $\leqslant$ یک رابطه بر I باشد، $(I, \leqslant)$ را یک **مجموعه‌ی جزئی مرتب** گوییم، هرگاه

۱. $\leqslant$ یک رابطه‌ی انعکاسی باشد (برای هر $a \in I$، $a \leqslant a$).

۲. $\leqslant$ یک رابطه‌ی پادتقارنی باشد ($a \leqslant b \ \&\ b \leqslant a \Longrightarrow a = b$).

۳. $\leqslant$ یک رابطه‌ی متعدی باشد ($a \leqslant b \ \&\ b \leqslant c \Longrightarrow a \leqslant c$)

تعریف ۸.۲.۱. مجموعه‌ی جزئی مرتب $(I, \leqslant)$ را **کاملا مرتب** گوییم، هرگاه برای هر $a, b \in I$ داشته باشیم $a \leqslant b$ یا $b \leqslant a$.

لم ۱.۲.۱. (لم زرن). فرض کنیم $(I, \leqslant)$ یک مجموعه‌ی جزئی مرتب باشد ($I \neq \emptyset$)، به‌طوری که هر زیرمجموعه‌ی کاملا مرتب از I حداقل یک کران بالا در I داشته باشد. در این صورت I حداقل یک عنصر ماکزیمال دارد.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنیم M یک Rــ مدول و N زیرمدولی از آن باشد، به‌طوری که

(الف) $N \subsetneq M$

(ب) هیچ زیرمدولی بین N و M موجود نباشد (یعنی N'ای نباشد که $N \subsetneq N' \subsetneq M$)

در این صورت گوییم N یک **زیرمدول ماکزیمال** M است.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنیم M یک Rــ مدول ناصفر باشد، گوییم M **ساده** است، هرگاه فقط دو زیرمدول $\{0\}$ و M را داشته باشد.

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنیم M یک Rــ مدول باشد، $_RM$را **آرتینی** گوییم، هرگاه هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از زیرمدول‌های M نسبت به رابطه‌ی شمول $(\subseteq)$ حداقل یک عضو مینیمال داشته باشد.

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی یکدار باشد و $P \trianglelefteq R$، گوییم P **اول** است هرگاه

(الف) $P \neq R$

(ب) $ab \in P$ نتیجه دهد $a \in P$ یا $b \in P$.

گزاره ۳.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی یکدار باشد و $P \underset{\neq}{\trianglelefteq} R$. در این صورت P اول است اگر و تنها اگر $\frac{R}{P}$ یک دامنه‌ی صحیح باشد.

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی یکدار باشد و $\underline{m} \trianglelefteq R$. $\underline{m}$ را **ایده‌آل ماکزیمال** گوییم، هرگاه

۱. $\underline{m} \neq R$

۲. هیچ ایده‌آل سره‌ای بین $\underline{m}$ و R وجود نداشته باشد.

مثال ۳.۲.۱. برای هر عدد اول p، $p\mathbb{Z}$ یک ایده‌آل ماکزیمال $\mathbb{Z}$ است.

تعریف ۱۴.۲.۱. به حلقه‌ی جابجایی که فقط یک ایده‌آل ماکزیمال داشته باشد، **حلقه‌ی موضعی** می‌گوییم.

تعریف ۱.۲.۱۵ (حلقه‌ی تقسیم[1]). اگر در حلقه‌ی یکدار R همه‌ی عناصر به جز صفر یکه باشند، آن‌گاه R را یک **حلقه‌ی تقسیم** می‌گوییم.

گزاره ۱.۲.۴. فرض کنیم $\underline{m}$ یک ایده‌آل سره از حلقه‌ی جابجایی و یکدار R باشد، در این صورت $\underline{m}$ ماکزیمال است اگر و تنها اگر $\frac{R}{\underline{m}}$ میدان باشد.

قرارداد ۱.۲.۱. مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی R را با علامت $Spec(R)$ نمایش می‌دهیم.

قرارداد ۱.۲.۲. مجموعه تمام ایده‌آل‌های ماکزیمال حلقه‌ی R را با علامت $\mathrm{Max}(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱۶. اشتراک تمام ایده‌آل‌های ماکزیمال حلقه‌ی R را با علامت $J(R)$ نمایش می‌دهیم و به آن **رادیکال جیکبسون** می‌گوییم.

قضیه ۱.۲.۱. فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی و یکدار باشد، در این صورت:
برای هر $y \in R$، $1 - xy$ وارون‌پذیر است، اگر و تنها اگر $x \in J(R)$.

برهان. به [18] مراجعه شود. □

تعریف ۱.۲.۱۷ (حوزه‌ی ایده‌آل اصلی). حوزه‌ی ایده‌آل اصلی، یک حوزه‌ی صحیح است که همه‌ی ایده‌آل‌های آن توسط یک عنصر تولید می‌شود.

لم ۱.۲.۲. در حوزه‌ی ایده‌آل اصلی هر ایده‌آل اول غیرصفر ماکزیمال است.

تعریف ۱.۲.۱۸. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $I, J \trianglelefteq R$. در این صورت I و J را **هم‌ماکزیمال** گوییم هرگاه $I + J = R$.

مثال ۱.۲.۴. اگر $\underline{m}$ و $\underline{n}$، دو ایده‌آل متمایز و ماکزیمال از حلقه‌ی R باشند، آن‌گاه $\underline{m}$ و $\underline{n}$ هم‌ماکزیمال هستند.

تعریف ۱.۲.۱۹. فرض کنید $\varphi : G \to H$ یک همریختی از گروه‌ها باشد. هسته‌ی φ را با علامت $\ker\varphi$ نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\ker\varphi = \{x \in G | \varphi(x) = e_H\}.$$

قضیه ۱.۲.۲ (قضیه‌ی باقیمانده‌ی چینی). فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و $I_1, \dots, I_n$ ایده‌آل‌هایی از R باشند. تعریف می‌کنیم:

$$\varphi : R \longrightarrow \frac{R}{I_1} \times \cdots \times \frac{R}{I_n}$$
$$\varphi(r) = (r + I_1, \dots, r + I_n)$$

[1] Division ring

در این صورت داریم:

(الف) اگر برای هر $i \neq j$، I_i و I_j هم‌ماکزیمال باشند، آن‌گاه

$$\prod_{i=1}^{n} I_i = I_1 I_2 \dots I_n = \bigcap_{i=1}^{n} I_i.$$

(ب) φ یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر $\bigcap\limits_{i=1}^{n} I_i = \{0\}$.

(ج) φ پوشاست اگر و تنها اگر برای هر $i \neq j$، I_i و I_j هم‌ماکزیمال باشند. تحت این شرایط

$$\frac{R}{I_1 \dots I_n} \cong \frac{R}{I_1} \times \frac{R}{I_2} \times \dots \times \frac{R}{I_n}.$$

برهان. (الف) با استقرا روی n اثبات می‌کنیم. برای $n = 1$ واضح است. فرض کنیم $n = 2$، ثابت می‌کنیم $IJ = I \cap J$.

با توجه به این‌که $IJ \subseteq I \cap J$، کافیست نشان دهیم $I \cap J \subseteq IJ$. طبق فرض $I + J = R$ بنابراین

$$1 \in R = I + J \Longrightarrow \exists a \in I, b \in J : 1 = a + b, \tag{1.1}$$

حال فرض کنیم $x \in I \cap J$، با ضرب طرفین رابطه‌ی (۱.۱) در x داریم:

$$x = ax + xb \in IJ \Longrightarrow I \cap J \subseteq IJ \Longrightarrow I \cap J = IJ.$$

حال فرض کنیم $n > 2$ و حکم برای اعداد کمتر از n برقرار باشد، ثابت می‌کنیم برای n درست است. ادعا می‌کنیم I_n و $I_1 \dots I_{n-1}$ هم‌ماکزیمال هستند. برای هر $1 \leq i \leq n-1$، I_n و I_i هم‌ماکزیمال هستند، یعنی $I_i + I_n = R$. چون $1 \in R$، پس $x_i \in I_i$ $(1 \leq i \leq n-1)$ و $y_i \in I_n$ وجود دارند که $1 = x_i + y_i$.

فرض کنیم $x = x_1 \dots x_{n-1} = \prod\limits_{i=1}^{n-1} x_i \in \prod\limits_{i=1}^{n-1} I_i$، داریم:

$$\begin{aligned}
x + I_n &= x_1 \dots x_{n-1} + I_n = (x_1 + I_n) \dots (x_{n-1} + I_n) \\
&= (1 - y_1 + I_n) \dots (1 - y_{n-1} + I_n) = (1 + I_n) \dots (1 + I_n) = 1 + I_n \Longrightarrow \\
&- x + 1 \in I_n \Longrightarrow \exists y \in I_n, x + y = 1 \Longrightarrow 1 \in I_n + \prod_{i=1}^{n-1} I_i \Longrightarrow I_n + \prod_{i=1}^{n-1} I_i = R.
\end{aligned}$$

بنابراین I_n و $I_1 I_2 \ldots I_{n-1}$ هم‌ماکزیمال هستند. از طرفی طبق فرض استقرا داریم

$$I_1 \ldots I_{n-1} = I \cap \ldots \cap I_{n-1}$$

پس

$$\prod_{i=1}^{n} I_i = (I_1 \ldots I_{n-1}) I_n = (I_1 \ldots I_{n-1}) \cap I_n = (I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_{n-1}) \cap I_n = \bigcap_{i=1}^{n} I_i.$$

(ب) می‌دانیم φ یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر $\ker \varphi = \{0\}$، داریم

$$\begin{aligned} \ker \varphi &= \{r \in R | \varphi(r) = 0\} = (I_1, I_2 \ldots, I_n) \\ &= \{r \in R | (r + I_1, r + I_2, \ldots r + I_n) = (I_1, I_2, \ldots, I_n)\} \\ &= \{r \in R | r \in I_1, \ldots, r \in I_n\} = \bigcap_{i=1}^{n} I_i. \end{aligned}$$

(پ) ابتدا فرض کنیم φ پوشا باشد، ادعا می‌کنیم I_1 و I_2 $(i \geq 2)$ هم‌ماکزیمال هستند. $(1 + I_1, I_2, \ldots, I_n) \in \frac{R}{I_1} \times \cdots \times \frac{R}{I_n}$ و φ پوشاست، بنابراین $x \in R$ وجود دارد به‌طوری که

$$\varphi(x) = (1 + I_1, I_2, \ldots, I_n) \Longrightarrow (x + I_1, x + I_2, \ldots, x + I_n) = (1 + I_1, I_2, \ldots, I_n)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 1 - x \in I_1 \\ x \in I_2 \\ \vdots \\ x \in I_n \end{cases} \qquad \exists a \in I_1, 1 - x = a \Longrightarrow 1 = a + x \Longrightarrow I_1 + I_i = R,$$

پس I_1 و I_2 ماکزیمال‌اند.

برعکس: فرض کنیم $(r_1 + I_1, \ldots, r_n + I_n) \in \frac{R}{I_1} \times \cdots \times \frac{R}{I_n}$، ابتدا نشان می‌دهیم $x_1 \in R$ وجود دارد که

$$\varphi(x_1) = (1 + I_1, I_2, \ldots, I_n) = (\bar{1}, \bar{0}, \ldots, \bar{0}),$$

می‌دانیم I_1 و I_i $(i \geq 2)$ هم‌ماکزیمال هستند، پس

$$I_1 + I_i = R \Longrightarrow 1 \in I_1 + I_i \Longrightarrow \exists a_i \in I_1, b_i \in I_i \; s.t. \; 1 = a_i + b_i.$$

حال قرار دهید $x_1 = b_2 \dots b_n$ در نتیجه

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1) &= (x_1 + I_1, x_1 + I_2, \dots, x_1 + I_n)\\
&= (b_2 \dots b_n + I_1, \underbrace{b_2 \dots b_n + I_2}_{=I_2}, \dots, \underbrace{b_2 \dots b_n + I_n}_{=I_n})\\
&= \left((b_2 + I_1)(b_3 + I_1) \dots (b_n + I_1), \bar{0}, \dots, \bar{0}\right)\\
&= \left((1 - a_1 + I_1)(1 - a_2) + I_1) \dots (1 - a_n + I_1), \bar{0}, \dots, \bar{0}\right)\\
&= \left((1 + I_1) \dots (1 + I_1), \bar{0}, \bar{0}, \dots, \bar{0}\right)\\
&= (\bar{1}, \bar{0}, \dots, \bar{0}),
\end{aligned}$$

به طریق مشابه $x_i \in R$ وجود دارد که $\varphi(x_i) = (\bar{0}, \dots, \bar{1}, \dots, \bar{0})$، که در آن $\bar{1}$ مولفه‌ی iام است.

با تعریف $x =: r_1 x_1 + \dots + r_n x_n$، حال

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \varphi(r_1 x_1 + \dots + r_n x_n) = \varphi(r_1)\varphi(x_1) + \dots + \varphi(r_n)\varphi(x_n)\\
&= \underbrace{(r_1 + I_1, r_1 + I_2, \dots, r_1 + I_n)(\bar{1}, \bar{0}, \dots, \bar{0})}_{(r_1 + I_1, \bar{0}, \dots, \bar{0})}\\
&\quad + \dots + \underbrace{(r_n + I_1, r_n + I_2, \dots, r_n + I_n)(\bar{0}, \bar{0}, \dots, \bar{1})}_{(\bar{0}, \bar{0}, \dots, \bar{0}, r_n + I_n)}\\
&= (r_1 + I_1, r_2 + I_2, \dots, r_n + I_n).
\end{aligned}$$

بنابراین φ پوشاست.

□

تعریف ۲۰.۲.۱. فرض کنیم A و B دو مدول باشند. A را یک زیرمدول اساسی از B می‌نامیم هرگاه اشتراک A با هر زیرمدول B نابدیهی باشد و با نماد $A \leqslant_e B$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۱.۲.۱. فرض کنیم A یک $R-$مدول راست باشد و $X \subseteq A$. پوچساز X در R را با علامت $r_R(X)$ نشان می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم $r_R(X) = \{r \in R | Xr = 0\}$. اگر $X = \{x\}$ باشد، آن‌گاه به‌جای $r_R(X)$ از $r_R(x)$ استفاده می‌کنیم.

لم ۳.۲.۱. فرض کنیم A یک $R-$مدول راست باشد و $Z(A) = \{x \in A | r_R(x) \leqslant_e R_R\}$. در این صورت $Z(A)$ زیرمدولی از A است.

تعریف ۲۲.۲.۱. زیرمدول $Z(A)$ که در لم قبل تعریف شد را **زیرمدول منفرد** A می‌نامیم. مدول A را **منفرد** می‌نامیم هرگاه $Z(A) = A$ و **نامنفرد** می‌نامیم هرگاه $Z(A) = 0$.

تعاریف این بخش از [۱۰] گرفته شده است.

۳.۱ تعاریف اولیه گراف‌ها

تعریف ۱.۳.۱. گراف یکه‌های حلقه‌ی R را با $G(R)$ نمایش می‌دهیم که راس‌های آن تمام اعضای R می‌باشند و دو راس گراف زمانی یالی بین آن‌ها وجود دارد که مجموع آن‌ها عضوی یکه از حلقه‌ی R شود.

اگر در تعریف $G(R)$ شرط متمایز بودن راس‌ها را حذف کنیم، آن‌گاه گراف را با $\bar{G}(R)$ نمایش می‌دهیم. در صورتی که $۲ \notin U(R)$، آن‌گاه $\bar{G}(R) = G(R)$.

تعریف ۲.۳.۱. دو راس x و y در G را **مجاور** گوییم هرگاه بین x و y یالی موجود باشد.

تعریف ۳.۳.۱. گراف G را **همبند** گوییم هرگاه بین هر دو راس دلخواه a و b از G مسیری در G باشد، در غیر این صورت G را **ناهمبند** گوییم.

تعریف ۴.۳.۱. طول کوتاهترین مسیر بین دو راس a و b را فاصله‌ی a و b نامیده و با $d(a,b)$ نمایش می‌دهیم. همچنین اگر مسیری بین a و b موجود نباشد، می‌نویسیم $d(a,b) = \infty$.

تعریف ۵.۳.۱. بیشترین فاصله‌ی بین راس‌های G را **قطر** G می‌نامیم و با $\operatorname{diam}\left(G(R)\right)$ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر

$$\operatorname{diam}\left(G(R)\right) = \sup\{d(x,y) \mid \text{دو راس متمایز از گراف باشند } y,x\}.$$

تعریف ۶.۳.۱ (گراف کامل)**.** گرافی که هر دو رأس متمایز آن مجاور باشند را **گراف کامل** گوییم. گراف کامل با n رأس را با K_n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۷.۳.۱ (تعریف گراف دوبخشی)**.** گراف دوبخشی گرافی است که رأس‌هایش را می‌توان به دو مجموعه‌ی مجزا مثل $\mathcal{U}$ و $\mathcal{V}$ تقسیم کرد به طوری که هر یال از آن گراف یک رأس از $\mathcal{U}$ را به یک رأس از $\mathcal{V}$ متصل کند. گراف دوبخشی را معمولاً به‌صورت $G = (\mathcal{U}, \mathcal{V}, E)$ نشان می‌دهیم که $\mathcal{U}$ و $\mathcal{V}$ دو بخش گراف و E مجموعه یال‌های گراف است.

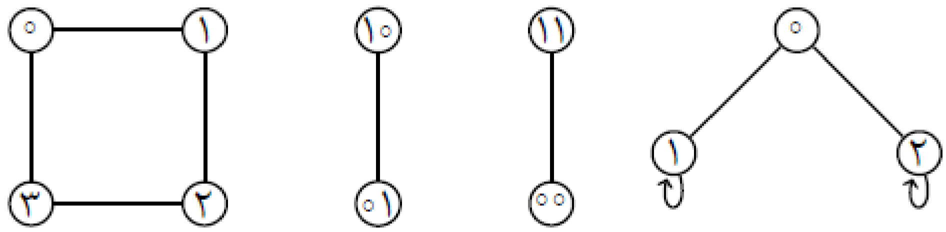
همچنین گراف دوبخشی G را یک گراف دوبخشی کامل می‌گوییم هرگاه هر دو رأس که در یک بخش نباشند با یکدیگر مجاور باشند. گراف دوبخشی کامل با بخش‌هایی با اندازه‌های m و n را با $K_{m,n}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۸.۳.۱ (درجه‌ی یک راس)**.** به تعداد یال‌هایی که از هر راس خارج می‌شود درجه‌ی آن راس می‌گوییم.

تعریف ۹.۳.۱ (گراف منتظم)**.** در نظریه‌ی گراف، **گراف منتظم** به گرافی گفته می‌شود که درجه‌ی تمام رئوس آن یکسان باشد، به‌عبارت دیگر از تمامی رئوس آن تعداد یال‌های مساوی خارج شود.

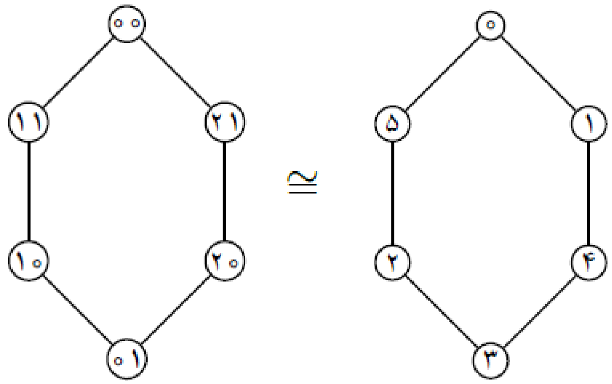
گراف منتظمی که درجه‌ِی هر راس آن l باشد، گراف l**ـ منتظم** خوانده می‌شود. گراف کامل نمونه‌ای از گراف lـ منتظم است.

در زیر نمونه‌هایی از گراف‌های lـ منتظم رسم شده است.



$G(\mathbb{Z}_{۴})$ $G(\mathbb{Z}_{۲} \times \mathbb{Z}_{۲})$ $\bar{G}(\mathbb{Z}_{۳})$

توجه داریم اگر R و S دو حلقه باشند به‌طوری که $R \cong S$ آن‌گاه $G(R) \cong G(S)$.
به‌عنوان مثال: $\mathbb{Z}_{۶} \cong \mathbb{Z}_{۲} \times \mathbb{Z}_{۳}$.



$G(\mathbb{Z}_{۳} \times \mathbb{Z}_{۲})$ $G(\mathbb{Z}_{۶})$

فصل ۲

گراف یکه‌های با قطر n

۱.۲ گراف یکه‌های یک حلقه

تعریف ۱.۱.۲. عنصر $r \in R$ را kـ**خوب**[1] گوییم هرگاه بتوان r را به‌صورت مجموع kـ عنصر وارون‌پذیر از R نوشت، یعنی:

$r = u_1 + u_2 + \cdots + u_k$ که برای هر i، $u_i \in U(R)$.

تعریف ۲.۱.۲ (حلقه‌ی kـ خوب)**.** حلقه‌ی R را kـ خوب گوییم هرگاه همه‌ی عناصر آن kـ خوب باشند.

تعریف ۳.۱.۲ (عدد مجموع یکالی حلقه‌ی R)**.** عدد مجموع یکالی یک حلقه را با نماد $u(R)$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

(الف) اگر R یک حلقه‌ی kـ خوب باشد، آن‌گاه

$$u(R) = \min\{k \in \mathbb{N} | \text{یک حلقه‌ی } k \text{ـ خوب باشد } R\}.$$

(ب) $u(R) = w$ اگر برای هر $k \geq 1$، حلقه‌ی R، kـ خوب نباشد اما برای هر عنصر $x_i \in R$ عدد طبیعی m_i وجود داشته باشد به‌طوری که عنصر x_i، m_iـ خوب باشد.

[1] k-Good

(ج) $u(R) = \infty$ هرگاه برای هر $k \geq ۱$، برخی از عناصر حلقه‌ی R، kـخوب نباشند.

مثال ۱.۱.۲. $u(\mathbb{Z}_۳) = ۲$ زیرا هر عنصر $\mathbb{Z}_۳$ را می‌توان به‌صورت مجموع دو عنصر یکه از $\mathbb{Z}_۳$ نوشت.

$$\mathbb{Z}_۳ = \{\bar{۰}, \bar{۱}, \bar{۲}\}$$
$$\bar{۰} = \bar{۱} + \bar{۲} \qquad \bar{۲} = \bar{۱} + \bar{۱} \qquad \bar{۱} = \bar{۲} + \bar{۲}$$

به عبارتی همه‌ی عناصر حداقل ۲ـخوب هستند.

مثال ۲.۱.۲. $u(\mathbb{Z}) = w$ زیرا با این‌که همه‌ی عناصر $\mathbb{Z}$ را می‌توان به‌صورت مجموع چند عنصر یکه از $\mathbb{Z}$ نوشت ولی $\min$ مقداری برای آن نمی‌توان پیدا کرد.

مثال ۳.۱.۲. $U(\mathbb{Z}[t]) = \infty$ که $\mathbb{Z}[t]$ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها بر اساس t، ضرایب از $\mathbb{Z}$ می‌باشند. زیرا مثلاً $t^۲ \in \mathbb{Z}[t]$ را نمی‌توان برحسب عناصری از $U(\mathbb{Z}[t]) = \{-۱, ۱\}$ نوشت.

یادآوری ۱.۱.۲. در صورتی که $\mathbb{F}$ میدان باشد، عناصر یکه $\mathbb{F}[x]$ همان عناصر یکه‌ی $\mathbb{F}^*$ می‌باشند.

تذکر ۱.۱.۲. اگر $۲ \in U(R)$ و $r \in R$ یک عنصر kـخوب باشد، آن‌گاه برای هر $l \geq k$، r یک عنصر lـخوب هم می‌باشد.

لم ۱.۱.۲. فرض کنیم R یک حلقه باشد، در این صورت $G(R)$ کامل[1] است اگر و تنها اگر R یک حلقه‌ی تقسیم با مشخصه‌ی ۲ باشد.

برهان. $\Leftarrow$: فرض کنیم $G(R)$ کامل باشد پس $\operatorname{diam}(G(R)) = ۱$ و چون در گراف کامل همه‌ی رئوس با هم در ارتباط می‌باشند، از این رو دو راس r و ۰ نیز باهم در ارتباطند بنابراین

$$۰ + r = r \in U(R)$$

در نتیجه R یک حلقه‌ی تقسیم است.

از طرفی دو راس ۱ و -۱ در ارتباط نمی‌باشند، زیرا $۱ + (-۱) = ۰ \notin U(R)$. پس این دو راس باید باهم برابر باشند یعنی $۱ = -۱$ و یا $۲ = ۰$ یعنی حلقه‌ی R از مشخصه‌ی ۲ است.

$\Rightarrow$: فرض کنیم R یک حلقه‌ی تقسیم از مشخصه‌ی ۲ باشد. دو عضو دلخواه x و y از R را در نظر می‌گیریم مجموع آن‌ها یا مخالف صفر است که در این حالت چون R حلقه‌ی

[1] Complete

تقسیم است $x+y \in U(R)$ و یا مجموع آن‌ها برابر صفر است که چون مشخصه‌ی حلقه ۲ می‌باشد، بنابراین

$$x+y=\circ \Rightarrow x=-y \Rightarrow x=y,$$

در نتیجه هر دو راس دلخواه $G(R)$ با هم در ارتباط‌اند، پس گراف $G(R)$ یک گراف کامل است یعنی $\operatorname{diam}(G(R))=۱$.

□

لم ۲.۱.۲. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $r \in R$. در این صورت داریم:

(الف) اگر r، یک عنصر kــخوب باشد، آن‌گاه $d(r,\circ) \leq k$.

(ب) اگر $r \neq \circ$ و $d(r,\circ)=k$، آن‌گاه r یک عنصر kــخوب است اما برای $l<k$، r یک عنصر lــخوب نمی‌باشد.

برهان. (الف) چون r، یک عنصر kــخوب است، داریم $r=u_۱+u_۲+\cdots+u_k$ به‌طوری که برای هر i، $u_i \in U(R)$. فرض کنیم k، فرد باشد، در نتیجه

$$\circ - u_۱ - (-u_۱-u_۲) - \cdots - (-u_۱-u_۲-\cdots-u_{k-۱}) - (u_۱+u_۲+\cdots+u_k)=r.$$

یعنی از $\circ$ تا r مسیری به‌طول k وجود دارد.

حال فرض کنیم k زوج باشد، در نتیجه

$$\circ - (-u_۱) - (u_۱+u_۲) - \cdots - (-u_۱-u_۲-\cdots-u_{k-۱}) - (u_۱+u_۲+\cdots+u_k)=r.$$

یعنی از $\circ$ تا r مسیری به‌طول k وجود دارد. بنابراین $d(r,\circ) \leq k$.

(ب) فرض کنیم $d(r,\circ)=k$ و $r=x_\circ - x_۱ - x_۲ - \cdots - x_k=\circ$ یک مسیری از r به $\circ$ باشد، قرار می‌دهیم:

$$u_i := x_{i-۱}+x_i \in U(R) \qquad (\forall ۱ \leq i \leq k),$$

بنابراین $r=\sum_{i=۱}^{k}(-۱)^{i+۱}u_i$ یک عنصر kــخوب است و با استفاده از قسمت (الف) می‌دانیم که برای هر $l<k$، r، یک عنصر lــخوب نیست، زیرا اگر lــخوب باشد، آن‌گاه $d(r,\circ) \leq l$ که یک تناقض است.

□

قضیه ۱.۱.۲. اگر R حلقه‌ی تقسیم نباشد و $u(R)=k$، آن‌گاه $\operatorname{diam}(G(R))=k$.

برهان. فرض کنیم $x,y\in R$. اگر k فرد باشد، قرار می‌دهیم:

$$x+y=u_۱+u_۲+\cdots+u_k,\qquad (u_i\in U(R)),$$

پس مسیری از x به y به‌صورت زیر وجود دارد:

$$x — (-x+u_۱) — (x-u_۱-u_۲) — \cdots (x-u_۱-\cdots-u_{k-۱}) — (-x+u_۱+\cdots+u_k)=y.$$

بنابراین $d(x,y)\leq k$.

حال اگر k زوج باشد، قرار می‌دهیم:

$$y-x=u_۱+u_۲+\cdots+u_k\quad u_i\in U(R).$$

پس مسیری از x به y به‌صورت زیر وجود دارد:

$$x — (-x-u_۱) — (x+u_۱+u_۲) — \cdots (x-u_۱-\cdots-u_{k-۱}) — (-x+u_۱+\cdots+u_k)=y.$$

بنابراین $d(x,y)\leq k$ پس $\operatorname{diam}(G(R))\leq k$.

از طرف دیگر چون $u(R)=k$ از این رو عنصر $۰\neq r\in R$ وجود دارد که یک عنصر kـ‌خوب است، اما برای $l<k$، lـ‌خوب نیست بنابراین طبق لم ۲.۱.۲ قسمت (ب) داریم $d(r,۰)=k$ در نتیجه $\operatorname{diam}(G(R))=k$. □

تذکر ۲.۱.۲. در قضیه‌ی قبل شرط “R حلقه‌ی تقسیم نباشد” قابل حذف نیست. به عنوان مثال $\mathbb{Z}_۲=\{\bar{۰},\bar{۱}\}$ یک حلقه‌ی تقسیم است و $U(\mathbb{Z}_۲)=w$ اما $\operatorname{diam}(G(R))=۱$.

تذکر ۳.۱.۲. عکس قضیه‌ی ۱.۱.۲ در حالت کلی درست نمی‌باشد. مثلاً با این‌که $\mathbb{Z}_۴$ حلقه‌ی تقسیم نمی‌باشد و $\operatorname{diam}(G(\mathbb{Z}_۴))=۳$ اما $u(\mathbb{Z}_۴)=w$.

قضیه ۲.۱.۲. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $\operatorname{diam}(G(R))=k\geq ۲$. اگر $۲\in U(R)$، آن‌گاه $u(R)=k$.

برهان. با استفاده از لم ۱.۱.۲ چون $\operatorname{diam}(G(R))\neq ۱$ پس R یک حلقه‌ی تقسیم با مشخصه‌ی ۲ نیست. اگر R یک حلقه‌ی تقسیم باشد، آن‌گاه $\operatorname{char}(R)\neq ۲$. پس $\operatorname{diam}(G(R))=۲$. توجه داریم که در این حالت $u(R)=۲$.

حال فرض کنیم R حلقه‌ی تقسیم نباشد. عنصر $۰\neq r\in R$ را در نظر می‌گیریم. اگر $d(r,۰)=l\leq k$، آن‌گاه با استفاده از لم ۲.۱.۲ قسمت (ب)، r یک عنصر lـ‌خوب می‌باشد و چون $r,۲\in U(R)$ یک عنصر kـ‌خوب است، چون r دلخواه بود بنابراین R یک حلقه‌ی kـ‌خوب

است و با استفاده از قضیه‌ی ۱.۱.۲، R برای هر $l < k$، lـ‌خوب نمی‌باشد (زیرا اگر lـ‌خوب باشد، $\operatorname{diam}(G(R)) = l$ که یک تناقض است) در نتیجه $u(R) = k$. □

قضیه ۳.۱.۲. فرض کنید R یک حلقه و $k \geq ۲$ عدد صحیح باشد و $۲ \in U(R)$، در این صورت $\operatorname{diam}(G(R)) = k$ اگر و تنها اگر $u(R) = k$.

برهان. $\Leftarrow$) همان برهان قضیه‌ی قبل است.
$\Rightarrow$) با استفاده از قضایای ۱.۱.۲ و ۲.۱.۲ نتیجه حاصل می‌شود. □

تعریف ۴.۱.۲ ($usn(R)$)**.** $usn(R)$ کوچک‌ترین عدد طبیعی است که همه‌ی عناصر حلقه را بتوان به فرم حداکثر مجموع آن تعداد عنصر یکه نوشت. در صورتی که کوچک‌ترین عددی وجود نداشته باشد، قرار می‌دهیم:

$$usn(R) = \infty.$$

مثال:

$$usn(\mathbb{Z}_۳) = ۲, \qquad usn(\mathbb{Z}_۲) = ۲, \qquad usn(\mathbb{Z}) = \infty.$$

تعریف ۵.۱.۲ (گراف همبند[1])**.** گراف G را **همبند** گوییم هرگاه بین هر دو راس دلخواه a و b از G، مسیری در G موجود باشد. در غیر این‌صورت G را **ناهمبند** نامیم.

قضیه ۴.۱.۲. فرض کنیم R یک حلقه‌ی دلخواه باشد و $\bar{R} = \frac{R}{J(R)}$. در این صورت

(الف) $x \in U(R)$ اگر و تنها اگر $\bar{x} \in U(\bar{R})$.

(ب) $G(R)$ همبند است اگر و تنها اگر $G(\bar{R})$ همبند باشند.

همچنین $\operatorname{diam}(G(\bar{R})) \leq \operatorname{diam}(G(R))$.

برهان. (الف) $\Leftarrow$: بدیهی است.

$\Rightarrow$: حال فرض کنیم $\bar{x} \in \bar{R}$ وارون‌پذیر چپ باشد، بنابراین $\bar{y} \in \bar{R}$ وجود دارد به‌طوری که $\bar{y}\bar{x} = \bar{۱} \in \bar{R}$. بنابراین داریم:

$$\big(y + J(R)\big)\big(x + J(R)\big) = ۱ + J(R),$$

در نتیجه

$$yx + J(R) = ۱ + J(R) \Rightarrow ۱ - yx \in J(R) \Rightarrow ۱ - (۱ - yx) \in U(R),$$

[1] Connected graph

یعنی x وارون چپ دارد. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که x وارون راست دارد.

(ب) با استفاده از (الف) واضح است که اگر $r, s \in R$ و $\bar{r} = \bar{s}$، آن‌گاه هر مسیر از $\bar{r}$ به $\bar{s}$ در $G(\bar{R})$ به طول l یک مسیر از r به s به طول l در $G(R)$ می‌دهد. برعکس هر مسیر از r به s به طول l در $G(R)$ یک مسیر از $\bar{r}$ به $\bar{s}$ در $G(\bar{R})$ به طول حداکثر l می‌دهد. اگر $r \neq s$ و $\bar{r} = \bar{s}$، آن‌گاه $a \in R$ وجود دارد که $\bar{a} \neq \bar{r}(= \bar{s})$ و $\bar{r} + \bar{a}(= \bar{s} + \bar{a})$ یک عنصر از $\bar{R}$ می‌باشد (در $G(\bar{R})$ راس تنهایی وجود ندارد) از این‌رو هر دوی r و s مجاور a می‌باشند، بنابراین $G(R)$ همبند است اگر و تنها اگر $G(\bar{R})$ همبند باشد. همچنین برای هر $r, s \in R$ اگر $\bar{r} \neq \bar{s}$ آن‌گاه $d(r, s) = d(\bar{r}, \bar{s})$ و اگر $\bar{r} = \bar{s}$، آن‌گاه $d(\bar{r}, \bar{s}) = 0$. پس در حالت کلی $d(\bar{r}, \bar{s}) \leq d(r, s)$ بنابراین $\operatorname{diam}(G(\bar{R})) \leq \operatorname{diam}(G(R))$.

□

قضیه ۵.۱.۲. فرض کنید R یک حلقه‌ی آرتینی چپ باشد. هر عنصر از R را می‌توان به‌صورت مجموع دو عنصر یکه نوشت اگر و تنها اگر $\bar{R}$ شامل یک جمع‌وند مستقیم یکریخت با $\mathbb{Z}_2$ نباشد.

برهان. به قضیه‌ی ۱ از [19] رجوع شود. □

قضیه ۶.۱.۲. فرض کنیم R یک حلقه‌ی آرتینی چپ باشد، در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

(الف) هر عنصر از R حداقل مجموع دو عنصر یکه است.

(ب) گراف $G(R)$ همبند است.

(ج) حلقه‌ی $\bar{R}$ حداکثر یک جمع‌وند مستقیم یکریخت با $\mathbb{Z}_2$ دارد.

برهان. (الف)⇐(ب): فرض کنیم $r \neq 0$ یک عنصر غیریکه از R باشد، اگر $r = u_1 + u_2$ که $u_1, u_2 \in U(R)$ آن‌گاه ما مسیر $r - (-u_1) - 0$ را بین 0 و r داریم. اگر $r = u_1 + u_2 + u_3$ که $u_1, u_2, u_3 \in U(R)$ آن‌گاه ما مسیر $r - (-u_1 - u_2) - 0$ را بین 0 و r داریم، از این‌رو برای هر دو عنصر متمایز $r, s \in R$ مسیری وجود دارد پس $G(R)$ همبند است.
(ب)⇐(ج): برهان خلف: فرض کنیم $\bar{R} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times T$ که T زیرحلقه‌ی $\bar{R}$ می‌باشد. بنابراین مسیری بین $(0, 1, 0)$ و $(0, 0, 0)$ در $G(\bar{R})$ وجود ندارد. از این رو $G(\bar{R})$ ناهمبند است. پس با توجه به قسمت (ب) قضیه‌ی ۴.۱.۲، $G(R)$ ناهمبند است که با فرض در تناقض است. اگر $\bar{R} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ را در نظر بگیریم آن‌گاه به طریق مشابه به تناقض می‌رسیم. بنابراین فرض خلف باطل و حکم ثابت است.
(ج)⇐(الف): اگر $\bar{R}$ هیچ جمع‌وند مستقیم یکریخت با $\mathbb{Z}_2$ نداشته باشد، آن‌گاه طبق قضیه‌ی ۵.۱.۲ حکم برقرار است. حال فرض کنیم که $\bar{R}$ دقیقاً یک جمع‌وند مستقیم یکریخت

با $\mathbb{Z}_۲$ داشته باشد. توجه داریم که اگر $r \in R$ و $\bar{r} = \bar{u_۱} + \bar{u_۲} + \cdots + \bar{u_k}$ که k یک عدد صحیح مثبت و $\bar{u_۱}, \bar{u_۲}, \ldots, \bar{u_k} \in U(\bar{R})$، آن‌گاه $j \in J(R)$ وجود دارد که $r = u_۱ + u_۲ + \cdots + u_k + j$. پس با استفاده از قضیه‌ی ۴.۱.۲ قسمت (الف)، r مجموع k عنصر یکه است. حال دو حالت اتفاق می‌افتد: اگر $\bar{R} \cong \mathbb{Z}_۲$ آن‌گاه نتیجه حاصل است، زیرا $۱ + ۱ = ۰$ و $۱ + ۱ + ۱ = ۱$.

حال فرض کنیم $\bar{R} \cong \mathbb{Z}_۲ \times T$ که T یک زیرحلقه از $\bar{R}$ می‌باشد و شامل هیچ جمع‌وند مستقیم یکریخت با $\mathbb{Z}_۲$ نباشد. با استفاده از قضیه‌ی ۵.۱.۲ برای هر $t \in T$، عناصر $u_۱, v_۱ \in U(T)$ وجود دارند به‌طوری که $t = u_۱ + v_۱$. همچنین عناصر $u_۲, u_۳ \in U(T)$ وجود دارند به‌طوری که $v_۱ = u_۲ + u_۳$. بنابراین داریم $(۰, t) = (۱, u_۱) + (۱, v_۱)$ و $(۱, t) = (۱, u_۱) + (۱, u_۲) + (۱, u_۳)$، حکم ثابت می‌شود. □

قضیه ۷.۱.۲. اگر R یک حلقه‌ی آرتینی چپ باشد، آن‌گاه

$$\operatorname{diam}(G(R)) \in \{۱, ۲, ۳, \infty\},$$

برهان. فرض کنیم که $\bar{R}$ هیچ جمع‌وند مستقیم یکریخت با $\mathbb{Z}_۲$ نداشته باشد، با استفاده از قضیه‌ی ۵.۱.۲ هر عنصر از R را می‌توان به‌صورت مجموع ۲ عنصر یکه نوشت. بنابراین برای هر دو عنصر متمایز $r, s \in R$ عناصر $u, v \in U(R)$ وجود دارند به‌طوری که $r - s = u + v$. از این‌رو اگر r مجاور s نباشد آن‌گاه $r \text{---} (u - r) \text{---} s$ یک مسیر بین r و s می‌باشد. در نتیجه $\operatorname{diam}(G(R)) \leq ۲$. حال فرض کنیم $\bar{R}$ دقیقاً یک جمع‌وند مستقیم یکریخت با $\mathbb{Z}_۲$ داشته باشد. اگر $\bar{R} \cong \mathbb{Z}_۲$ آن‌گاه واضح است که $G(R)$ گراف کامل دوبخشی است، بنابراین $\operatorname{diam}(G(R)) \leq ۲$. در غیر این‌صورت $\bar{R} \cong \mathbb{Z}_۲ \times T$ که T یک زیرحلقه از $\bar{R}$ است به‌طوری که شامل هیچ جمع‌وند مستقیم یکریخت با $\mathbb{Z}_۲$ نمی‌باشد. فرض کنیم r و s دو عنصر متمایز از R باشند. اگر $\bar{r} = \bar{s}$ آن‌گاه $a \in R$ وجود دارد که $\bar{a} \neq \bar{r}(= \bar{s})$ و $\bar{r} + \bar{a}(= \bar{s} + \bar{a})$ یک عنصر یکه در $\bar{R}$ است (یعنی هیچ راس جدایی در $G(\bar{R})$ وجود ندارد.) از این‌رو هر دوی r و s مجاور با a هستند. بنابراین $d(r, s) \leq ۲$.

حال فرض کنیم $\bar{r} \neq \bar{s}$. سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$\bar{r} = (۱, t_۱)$ و $\bar{s} = (۱, t_۲)$ یا $\bar{r} = (۰, t_۱)$ و $\bar{s} = (۰, t_۲)$ یا $\bar{r} = (۰, t_۱)$ و $\bar{s} = (۱, t_۲)$، به‌طوری که $t_۱, t_۲ \in T$. با استفاده از قضیه‌ی ۵.۱.۲، عناصر $u, v \in U(T)$ وجود دارند به‌طوری که $t_۱ - t_۲ = u + v$.

حال اگر $\bar{r} = (۱, t_۱)$ و $\bar{s} = (۱, t_۲)$ هر دوی $\bar{r}$ و $\bar{s}$ مجاور با $(۰, u - t_۱)$ هستند و در نتیجه $d(r, s) = d(\bar{r}, \bar{s}) = ۲$.

اگر $\bar{r} = (۰, t_۱)$ و $\bar{s} = (۰, t_۲)$ با توجه به این‌که $d(r, s) = ۲$، اگر $\bar{r} = (۰, t_۱)$ و $\bar{s} = (۱, t_۲)$ آن‌گاه $G(T)$ شامل هیچ راس جدایی نمی‌باشد، لذا $t_۳ \in T$ وجود دارد که $t_۱ + t_۳ \in U(T)$. در نتیجه $\bar{r}$ مجاور با $(۱, t_۳)$ می‌باشد، بنابراین با استفاده از روندی مشابه حالت اول داریم $d(r, s) = d(\bar{r}, \bar{s}) \leq ۳$ و در نتیجه $\operatorname{diam}(G(R)) \leq ۳$.

در پایان فرض کنیم $\bar{R}$ حداقل ۲ جمعوند مستقیم یکریخت با $\mathbb{Z}_۲$ داشته باشد. با استفاده از قضیه‌ی ۶.۱.۲، $G(R)$ ناهمبند بوده و $\operatorname{diam}\left(G(R)\right)=\infty$. □

توجه داریم که $\operatorname{diam}\left(G(\mathbb{Z}_۲)\right)=۱$ و $\operatorname{diam}\left(G(\mathbb{Z}_۳)\right)=۲$ و $\operatorname{diam}\left(G(\mathbb{Z}_۶)\right)=۳$ و $\operatorname{diam}\left(G(\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲)\right)=\infty$.

قضیه ۸.۱.۲ (قضیه‌ی اساسی). اگر R یک حلقه‌ی تقسیم نباشد به‌طوری که $usn(R)=n$، آن‌گاه

$$n\leq \operatorname{diam}\left(G(R)\right)\leq ۲n.$$

برهان. فرض کنیم $usn(R)=n\geq ۲$. در نتیجه $R\ni r\neq ۰$ وجود دارد که r مجموع n عنصر یکه است اما برای هر $m<n$، مجموع m عنصر یکه نمی‌باشد. ادعا می‌کنیم $d(r,۰)\geq n$.
اگر $d(r,۰)=k<n$، آن‌گاه با استفاده از قسمت (ب) لم ۲.۱.۲، r یک عنصر kــخوب است که یک تناقض است. بنابراین $d(r,۰)\geq n$ پس $\operatorname{diam}\left(G(R)\right)\geq n$.
حال برای هر $x,y\in R$ فرض کنیم x یک عنصر kــخوب و y یک عنصر lــخوب باشد، با استفاده از لم ۲.۱.۲ قسمت (الف) $d(x,۰)\leq k$ و $d(y,۰)\leq l$ و چون $x+y$ یک عنصر $l+k$ــخوب می‌باشد، لذا $d(x+y,۰)\leq l+k\leq ۲n$ و در نتیجه $d(x,y)\leq ۲n$. بنابراین $\operatorname{diam}\left(G(R)\right)\leq ۲n$.
در نتیجه $n\leq \operatorname{diam}\left(G(R)\right)\leq ۲n$. □

تذکر ۴.۱.۲. در قضیه‌ی ۸.۱.۲ شرط این‌که R حلقه‌ی تقسیم نباشد ضروری است. به‌عنوان مثال:

$$usn(\mathbb{F}_۴)=۲,\quad \operatorname{diam}\left(G(\mathbb{F}_۴)\right)=۱.$$

لم ۳.۱.۲. فرض کنید R یک دامنه‌ی صحیح باشد و $R\ni a\neq ۰$. اگر چندجمله‌ای $f\in R[x_۱,\ldots,x_n]$ ناصفر باشد و بر چندجمله‌ای $x_۱+x_۲+\cdots+x_n-a$ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه شامل بیش از n تک‌جمله‌ای است.

برهان. می‌نویسیم $f=g\cdot(x_۱+\cdots+x_n-a)$. فرض کنیم درجه‌ی کلی g، m باشد. برای هر i، μ_i یک تک‌جمله‌ای از g است که درجه‌ی کلی m را دارد و x_i بزرگ‌ترین توان ممکن را دارد. بنابراین تک‌جمله‌ای‌های $\mu_۱x_۱$،...،μ_nx_n همگی در f قرار می‌گیرند و درجه‌ی آن‌ها $m+۱$ است و μ_ix_iها با هم برابر نیستند. از طرفی a برابر تمام تک‌جمله‌ای‌های موجود در g است که داخل f قرار می‌گیرند. این نتیجه می‌دهد، حداقل شامل $n+۱$ تک‌جمله‌ای است. □

قضیه ۹.۱.۲. فرض کنیم R یک دامنه‌ی صحیح باشد، $R\ni a\neq ۰$ و $n\geq ۲$، یک عدد طبیعی باشد، در این صورت دامنه‌ی R' شامل R با خاصیت‌های زیر وجود دارد.

(الف) a مجموع n عنصر یکه از R' است.

(ب) اگر یک عنصر مانند $r \in R$ مجموع k عنصر یکه از R' باشد که $k < n$، آن‌گاه r مجموع k عنصر یکه از R است.

برهان. حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های $P = R[x_1, \dots, x_{n-1}]$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم S تکوار ضربی (نیم‌گروه یکدار) تولیدشده توسط x_1،x_2،...،x_{n-1} و $w = -x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1} + a$ باشد. R' همان حلقه‌ی کسرهای $P_S = \{\frac{a}{s} | a \in P, s \in S\}$ خواهد بود (x_iها و w همگی متعلق به S می‌باشند). واضح است که a مجموع n عنصر یکه در R' است زیرا $a = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + w$ که x_iها و w در $R' = P_S$ وارون‌پذیرند.

حال فرض کنیم عنصر $r \in R$ مجموع k عنصر یکه از R' باشد به‌طوری که $k < n$. نشان می‌دهیم r مجموع k عنصر یکه در R است. یکه‌های $R' = P_S$ به فرم ust^{-1} می‌باشند که $u \in U(R)$ و $s, t \in S$، زیرا $S = x_1^{t_1} \dots x_{n-1}^{t_{n-1}} w^k$.

(می‌دانیم چون S تکوار ضربی است $1 \in S$ پس در حالتی‌که $t = s = 1$، آن‌گاه $U(R') = U(R)$. به همین علت یکه‌های R' را در u ضرب کرده ایم.)

حال چندجمله‌ای f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = r\mu_0 x_n^{m_0} - u_1\mu_1 x_n^{m_1} - \dots - u_k\mu_k x_n^{m_k} \in R[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n],$$

پس داریم $f(x_1, \dots, x_{n-1}, w) = 0$ یعنی w ریشه‌ی f است و نتیجه می‌شود که f مضربی از $x_n - w = x_1 + \dots + x_n - a$ است. از طرفی f حداکثر حاوی n تک‌جمله‌ای است. پس با استفاده از لم ۳.۱.۲، $f = 0$ و لذا $f(1, \dots, 1) = r - u_1 - u_2 - \dots - u_k = 0$ بنابراین r مجموع k عنصر یکه در R است. □

تعریف ۶.۱.۲. دامنه‌ی R' که در خاصیت (ب) قضیه‌ی۹.۱.۲ صدق می‌کند را یک nـ**اُمین توسیع**[1] از R می‌گوییم.

قضیه ۱۰.۱.۲. برای هر دامنه‌ی صحیح R یک nـاُمین توسیع مانند R' وجود دارد به‌طوری که $u(R') \leq n$.

برهان. دنباله‌ی $\{a_\alpha\}$ از عناصر R را در نظر می‌گیریم و یک زنجیر صعودی از دامنه‌های R_α می‌سازیم. $R_0 = R$ را در نظر می‌گیریم. $R_{\alpha+1}$ طبق قضیه‌ی ۹.۱.۲ یک nـاُمین توسیع از R_α هست که a_α را می‌توان به‌صورت مجموع n عنصر یکه نوشت.

حد عددهای ترتیبی R_λ را اجتماع R_αهای قبلی در نظر می‌گیریم. اجتماع این زنجیر یک nـاُمین توسیع از R است که هر عنصر از R مجموع n عنصر یکه است. اگر این روند را به تعداد شمارا بار تکرار کنیم آن‌گاه یک R' دلخواه پیدا کرده‌ایم که یک nـاُمین توسیع از R است و $u(R') \leq n$. □

[1] n-extension

قضیه ۱۱.۱.۲. برای هر عدد طبیعی n که $n \geq ۲$ باشد دامنه‌ی R وجود دارد به‌طوری که $u(R) = n$.

برهان. با توجه به قضیه‌ی ۱۰.۱.۲ یک nــ اُمین توسیع برای R وجود دارد به‌طوری که $u(R) \leq n$. از طرفی عدد طبیعی n مجموع کمتر از n عنصر یکه نیست، در نتیجه $u(R) = n$. □

قضیه ۱۲.۱.۲. حلقه‌هایی مانند R وجود دارند که $۳ < \operatorname{diam}(G(R)) < \infty$.

برهان. با استفاده از قضایای ۸.۱.۲ و ۱۱.۱.۲ نتیجه حاصل می‌شود. □

قضیه ۱۳.۱.۲. فرض کنیم R یک حلقه باشد، در این صورت $\operatorname{diam}(G(R)) = ۲$ اگر و تنها اگر $usn(R) = ۲$ و R یک حلقه‌ی تقسیم با مشخصه‌ی ۲ نباشد.

برهان. ($\Leftarrow$): فرض کنیم $\operatorname{diam}(G(R)) = ۲$. بنابراین طبق لم ۱.۱.۲، R یک حلقه‌ی تقسیم با مشخصه‌ی ۲ نمی‌باشد. برای هر عنصر غیریکه‌ی ناصفر مانند $r \in R$ چون $\operatorname{diam}(G(R)) = ۲$، در نتیجه داریم $d(r, ۰) = ۲$. بنابراین طبق لم ۲.۱.۲ قسمت (ب) r یک عنصر ۲ــخوب است از این رو $usn(R) = ۲$.

($\Rightarrow$): واضح است که $\operatorname{diam}(G(R)) \geq ۲$. زیرا R حلقه‌ی تقسیم با مشخصه‌ی ۲ نمی‌باشد. برای هر دو عنصر $x, y \in R$ اگر $x + y \in U(R)$ باشد، آن‌گاه $d(x, y) = ۱$ و اگر $x + y \notin U(R)$ آن‌گاه $x + y$ یک عنصر ۲ــخوب است، در نتیجه طبق لم ۲.۱.۲ قسمت (الف) $d(x - y, ۰) = ۲$ و یا $d(x, y) = ۲$. بنابراین $\operatorname{diam}(G(R)) = ۲$. □

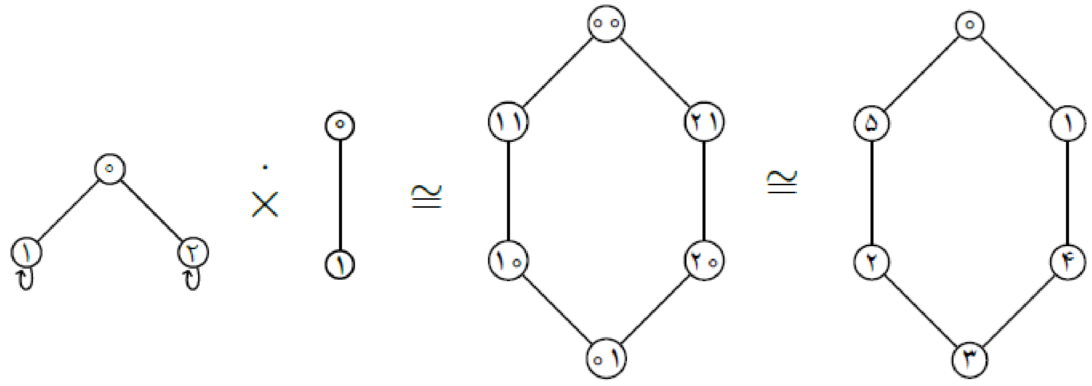
تعریف ۷.۱.۲. مجموعه‌ی رأس‌های یک گراف را با $V(G)$ و مجموعه‌ی یال‌های یک گراف را با نماد $E(G)$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنیم $G_۱$ و $G_۲$ دو گراف دلخواه باشند. حاصل‌ضرب $G_۱$ و $G_۲$ را با نماد $G_۱ \dot{\times} G_۲$ نشان می‌دهیم که داریم $V(G_۱ \dot{\times} G_۲) = V(G_۱) \times V(G_۲)$.

دو رأس متمایز (x, y) و (x', y') مجاور هستند اگر و تنها اگر x با x' در $G_۱$ مجاور باشد و y با y' در $G_۲$.

همچنین برای حلقه‌های $R_۱$ و $R_۲$ دو رأس متمایز $(x, y), (x', y') \in V(\bar{G}(R_۱) \dot{\times} \bar{G}(R_۲))$ مجاور هستند اگر و تنها اگر x با x' در $\bar{G}(R_۱)$ و y با y' در $\bar{G}(R_۲)$ مجاور باشند. بنابراین $\bar{G}(R_۱) \dot{\times} \bar{G}(R_۲) \cong G(R_۱ \times R_۲)$.

مثال:



$\bar{G}(\mathbb{Z}_۳)$ $\dot{\times}$ $\bar{G}(\mathbb{Z}_۲)$ $\cong$ $G(\mathbb{Z}_۳ \times \mathbb{Z}_۲)$ $\cong$ $G(\mathbb{Z}_۶)$

تعریف ۸.۱.۲. برای رأس $x \in V(G)$، راس‌هایی که با x همسایه هستند را با $N_G(x)$ نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$N_G(x) := \{v \in V(G) | \text{مجاور است } x \text{ با } v\}$$

علاوه بر این اگر G در رأس x طوق داشته باشد، آن‌گاه $x \in N_G(x)$ و همسایه‌ی بسته‌ی رأس x را به‌صورت $N_G[x] = N_G(x) \cup \{x\}$ تعریف می‌کنیم.

قضیه ۱۴.۱.۲. فرض کنید R یک حلقه‌ی متناهی و $G(R)$ گراف یکه‌های آن باشد، در این صورت گزاره‌های زیر برقرار است:

(الف) اگر $۲ \notin U(R)$، آن‌گاه $G(R)$ یک گراف $|U(R)|$ــ منتظم است.

(ب) اگر $۲ \in U(R)$، آن‌گاه برای هر رأس $x \in U(R)$ داریم $\deg(x) = |U(R)| - ۱$ و در صورتی که رأس $x \in R \setminus U(R)$ باشد، $\deg(x) = |U(R)|$.

برهان. برای اثبات هر دو قسمت فرض می‌کنیم رأس $x \in R$ دلخواه باشد.

(الف) می‌دانیم $R + x = R$ بنابراین برای هر $u \in U(R)$ یک عنصر $x_u \in R$ وجود دارد به‌طوری که $x_u + x = u$. واضح است که x_u منحصر به فرد است و توسط u مشخص می‌شود.

ابتدا فرض می‌کنیم $۲ \notin U(R)$. در این حالت $x_u \neq x$، زیرا اگر $x_u = x$ باشد $۲x$ یکه می‌شود و $۲ \in U(R)$ که یک تناقض است. از این رو x_u و x در $G(R)$ مجاور هستند.

حال تابع f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f : U(R) \longrightarrow N_{G(R)}(x)$$
$$f(u) = x_u$$

این تابع خوش‌تعریف و دوسویی است. بنابراین

$$\deg(x) = |N_{G(R)}(x)| = |U(R)|$$

و چون رأس x دلخواه بود، لذا $G(R)$ یک گراف $|U(R)|$ـ منتظم است.

(ب) فرض کنیم $۲ \in U(R)$ و رأس $x \in R \setminus U(R)$. در این حالت هم مانند قسمت (الف) $x_u \neq x$. از این رو x_u با x در $G(R)$ مجاورند. بنابراین طبق آنچه که در قسمت (الف) اثبات شد، $\deg(x) = |U(R)|$.

در پایان فرض کنیم $۲ \in U(R)$ و رأس $x \in U(R)$ باشد. در این حالت $۲x \in U(R)$. اگر $u \neq ۲x$، آن‌گاه $x_u \neq x$ و اگر $u = ۲x$، آن‌گاه $x_{۲x} = x$. حال x_u با x در $G(R)$ مجاور است، پس $u \neq ۲x$، بنابراین

$$f:\ u(R) \longrightarrow N_{G(R)}[x]$$
$$f(u) = x_u$$

یک تابع خوش‌تعریف است و دوسویی هم می‌باشد. در نتیجه

$$\deg(x) = |N_{G(R)}(x)| = |N_{G(R)}[x]| - ۱ = |U(R)| - ۱.$$

□

نکته ۱.۱.۲. فرض کنید R یک حلقه‌ی موضعی متناهی با ایدهآل ماکزیمال $\underline{m}$ باشد. اگر $|\frac{R}{\underline{m}}| > ۲$ ($|\frac{R}{\underline{m}}| \geq ۳$)، آن‌گاه $|U(R)| \geq \frac{۲|R|}{۳}$.

برهان. داریم:

$$\frac{|R|}{|\underline{m}|} \geq ۳ \Longrightarrow |R| \geq ۳|\underline{m}|,$$

از طرفی می‌دانیم $|R| = |\underline{m}| + |U(R)|$. از این رو

$$\begin{aligned} ۳|U(R)| + ۳|\underline{m}| =& ۳|R| \leq ۳|U(R)| + |R| \\ & ۲|R| \leq ۳|U(R)| \Longrightarrow |U(R)| \geq \frac{۲}{۳}|R|. \end{aligned}$$

□

بنابراین با استفاده از قضیه‌ی ۱۴.۱.۲ برای هر دو رأس $x, y \in R$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}|N_{\bar{G}(R)}(x) \cap N_{\bar{G}(R)}(y)| =& |N_{\bar{G}(R)}(x)| + |N_{\bar{G}(R)}(y)| - |N_{\bar{G}(R)}(x) \cup N_{\bar{G}(R)}(y)| \\ \geq& |U(R)| + |U(R)| - |R| \geq \frac{|R|}{۳} \geq ۰\end{aligned}$$

قضیه ۱۵.۱.۲. فرض کنید R یک حلقه‌ی جابجایی باشد و $\underline{m}$ یک ایده‌آل ماکزیمال از R باشد به‌طوری که $|\frac{R}{\underline{m}}| = ۲$. در این صورت $G(R)$ یک گراف دوبخشی است.

علاوه بر این $G(R)$ یک گراف دوبخشی کامل است اگر و تنها اگر R یک حلقه‌ی موضعی باشد.

برهان. فرض کنیم $v_۱ = \underline{m}$ و $v_۲ = R \setminus \underline{m}$، می‌دانیم $\mathcal{V}(G(R)) = v_۱ \cup v_۲$ و $v_۱ \cap v_۲ = \emptyset$. بنابراین $v_۱$ و $v_۲$ افرازی برای $\mathcal{V}(G(R))$ با دو زیرمجموعه می‌باشد. واضح است که هیچ زوج از عناصر متمایز $v_۱$ مجاور نیستند. بنابراین برای اثبات قسمت اول کافیست نشان دهیم که هیچ یک از عضوهای متمایز $v_۲$ مجاور نمی‌باشند.

حال برای اثبات یک عنصر ثابت مانند a در $v_۲ = R \setminus \underline{m}$ در نظر می‌گیریم.

با این فرض داریم:

$$R = \underline{m} \cup (\underline{m} + a) = \underline{m} \cup (\underline{m} + (-a)).$$

برای عناصر متمایز x و y در $R \setminus \underline{m}$ می‌توان نوشت:

$$x = m + a, \quad y = m' - a, \quad m, m' \in \underline{m},$$

اگر $x + y \in U(R)$ باشد، آن‌گاه $m + m' \in U(R)$. در نتیجه $\underline{m}$ یک عنصر یکه دارد که یک تناقض است. پس $x + y \notin U(R)$. بنابراین x و y مجاور نیستند. یعنی هیچ دو عنصر از $v_۲$ مجاور نمی‌باشند. از این رو گراف $G(R)$ یک گراف دوبخشی است.

علاوه بر این فرض کنیم R یک حلقه‌ی موضعی با تنها ایده‌آل ماکزیمال $\underline{m}$ باشد و همچنین عناصر $x \in v_۱$ و $y \in v_۲$ دلخواه باشند، اگر $x + y \notin U(R)$ آن‌گاه $x + y \in v_۱$ و در نتیجه $y \in v_۱$ که یک تناقض است. بنابراین $x + y \in U(R)$ که این نشان می‌دهد x و y مجاور هستند. پس بین هر رأس از $v_۱$ با هر رأس از $v_۲$ یالی وجود دارد. از این رو گراف $G(R)$ یک گراف دوبخشی کامل است.

در پایان فرض می‌کنیم $G(R)$ یک گراف دوبخشی کامل باشد. نشان می‌دهیم R یک حلقه‌ی موضعی است. فرض می‌کنیم $v_۱$ و $v_۲$ دو افراز از $G(R)$ باشند و $۰ \in v_۱$، پس داریم $v_۲ = U(R)$.

ادعا می‌کنیم که $v_۱ = J(R) = \cap \underline{m}$.

واضح است که $J(R) \subseteq v_۱$. فرض کنیم عنصر $x \in v_۱$. بنابراین x یکه نیست. از این

رو برای هر عنصر دلخواه $a \in R$، $-ax$ یکه نیست، پس $-ax \in v_1$. بنابراین برای هر عنصر دلخواه $a \in R$، $1 - ax \in U(R)$. لذا نتیجه می‌گیریم $x \in J(R)$. پس $v_1 \subseteq J(R)$ از این رو $v_1 = J(R) = R \setminus U(R)$. بنابراین R یک حلقه‌ی موضعی است. $\square$

تعریف ۹.۱.۲. فرض کنید G یک گراف باشد، زیرگرافی از G که کامل باشد را یک **خوشه**[1] می‌گویند و یک هم‌خوشه[2] در گراف G مجموعه‌ای از رأس‌های غیرمجاور می‌باشد.

تعریف ۱۰.۱.۲. زیرگراف H از گراف G، **زیرگراف فراگیر**[3] نامیده می‌شود اگر $V(H) = V(G)$. زیرگراف فراگیری که lـ منتظم باشد، **تطبیق کامل**[4] گفته می‌شود.

تعریف ۱۱.۱.۲. فرض کنید G_1 و G_2 دو گراف باشند. الحاق G_1 و G_2 را با $G_1 \vee G_2$ نمایش می‌دهیم. این الحاق گرافی است که رأس آن در $V(G_1) \cup V(G_2)$ قرار دارد و یال‌های آن در

$$E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{xy | x \in V(G_1), y \in V(G_2)\}.$$

تعریف ۱۲.۱.۲. اگر تطبیق کامل از یک گراف کامل (K_{2n}) را حذف کنیم، آن‌گاه گراف حاصل را با $cp(2n)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۶.۱.۲. فرض کنیم R یک حلقه و n یک عدد صحیح مثبت باشد و p یک عدد اول فرد باشد، آن‌گاه $G(R) \cong K_1 \vee cp(p^n - 1)$ اگر و تنها اگر R یک میدان با p^n عنصر باشد.
(یادآوری: توجه داریم که همه‌ی میدان‌های متناهی کاردینال‌شان p^n است و به ازای هر p^n یک میدان وجود دارد.)

برهان. فرض کنیم $G(R) \cong K_1 \vee cp(p^n - 1)$ از این رو یک عنصر $r \in R$ وجود دارد که مجاور با هر عنصر از R است. از آن‌جا که $G(R)$ گراف منتظم نیست، هر عنصر از R به‌جز r معکوس‌پذیر است. پس طبق قضیه‌ی ۱۴.۱.۲، $2 \in U(R)$ و $r = 0$. بنابراین R یک میدان با p^n عنصر است.
برعکس اگر از گراف یکه‌های $G(R)$، 0 را برداریم، آن‌گاه گراف باقی‌مانده یک گراف کامل بدون یال‌های $\{-r, r\}$ برای هر $r \neq 0$ می‌باشد. از این رو این گراف یک $cp(p^n - 1)$ است. بنابراین ایزومورفیسمی به $cp(p^n - 1)$ وجود دارد. از آن‌جا که $0 \in R$ مجاور هر عنصر ناصفر از R می‌باشد، نتیجه می‌گیریم:

$$G(R) \cong K_1 \vee cp(p^n - 1).$$

$\square$

[1]Clique
[2]Coclique
[3]Spanning subgraph
[4]Perfect matching

تعریف ۱۳.۱.۲ (زیرگراف القایی). فرض کنیم $G=(V,E)$ گرافی دلخواه و $S\subset V$ باشد. زیرگراف القاشده با S گرافی است که رأس‌های آن متشکل از رئوس موجود در مجموعه‌ی S و یال‌های آن، تمامی یال‌های موجود در E است با این شرط که رئوس هر دو سر یال مذکور در S موجود باشد و با نماد $G[S]=\langle S\rangle$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۷.۱.۲. فرض کنیم R یک حلقه باشد، آن‌گاه گراف یکه‌های R همبند است اگر و تنها اگر $u(R)\leq w$.

برهان. زیرحلقه‌ی S از R را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$S=\{a\in R|\ \text{برای تعدادی } k\text{، عنصر } k\text{ـخوب است. } a\}$$

توجه داریم که ۰، یک عنصر ۲ـخوب از R است، بنابراین $0\in S$. ادعا می‌کنیم زیرگراف القایی $\langle S\rangle$ از $G(R)$ یک قطعه‌ی همبند از $G(R)$ است.

برای اثبات این ادعا فرض کنیم $x\in S$ داده شده باشد. بنابراین برای تعدادی k، x یک عنصر kـخوب است. پس می‌توان x را به‌صورت زیر نوشت:

$$x=u_1+u_2+\cdots+u_k \quad s.t \quad u_1,u_2,\ldots,u_k\in U(R).$$

حال زمانی که k زوج باشد، مسیر

$$0\overset{e_1}{\text{——}}(-u_1)\overset{e_2}{\text{——}}u_1+u_2\overset{e_3}{\text{——}}(-u_1-u_2-u_3)\overset{e_4}{\text{——}}u_1+u_2+u_3+u_4\text{——}\cdots$$
$$\overset{e_k}{\text{——}}u_1+u_2+\cdots+u_k=x,$$

را بین ۰ و x در $\langle S\rangle$ داریم.

و زمانی که k فرد باشد، مسیر زیر را بین ۰ و x در $\langle S\rangle$ داریم:

$$0\overset{e_1}{\text{——}}u_1\overset{e_2}{\text{——}}-u_1-u_2\overset{e_3}{\text{——}}u_1+u_2+u_3\overset{e_4}{\text{——}}-u_1-u_2-u_3-u_4\text{——}\cdots$$
$$\overset{e_k}{\text{——}}u_1+u_2+\cdots+u_k=x,$$

بنابراین برای هر دو عنصر $x,y\in S$، مسیر w_1 بین x و ۰ در $\langle S\rangle$ و همچنین مسیر w_2 بین ۰ و y در $\langle S\rangle$ وجود دارد. مسیرهای w_1 و w_2 باهم به‌صورت مسیر W بین x و y در $\langle S\rangle$ می‌باشد. پس نتیجه می‌گیریم بین هر دو عنصر x و y در $\langle S\rangle$ مسیری مانند P وجود دارد، از این رو $\langle S\rangle$ زیرگراف همبند از $G(R)$ است.

حال فرض کنیم $x\in R\setminus S$ باشد، زیرگراف تولیدشده $\langle S\cup\{x\}\rangle$ از $G(R)$ نیز همبند است.

پس یک مسیر به‌صورت

$$0 = x_0 \overset{e_1}{—} x_1 \overset{e_2}{—} x_2 — \cdots \overset{e_k}{—} x_k \overset{e_{k+1}}{—} x_{k+1} = x.$$

بین 0 و x در $\langle S \cup \{x\} \rangle$ وجود دارد.
قرار می‌دهیم:

$$x_i + x_{i-1} := u_i, \quad u_i \in U(R), \ \ \forall\, 1 \le i \le k+1,$$

$$x = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{k} (-1)^i u_{i+1} & \text{اگر } k \text{ زوج باشد.} \\ \sum\limits_{i=0}^{k} (-1)^{i+1} u_{i+1} & \text{اگر } k \text{ فرد باشد.} \end{cases}$$

بنابراین $x \in S$ که یک تناقض است. لذا $\langle S \rangle$ یک قطعه‌ی همبند از $G(R)$ است. اکنون به سادگی می‌بینیم که $u(R) \le w$ اگر و تنها اگر $S = R$. به عبارت دیگر $S = R$ است اگر و تنها اگر $\langle S \rangle = G(R)$. از این رو با استفاده از ادعایی که کردیم نتیجه می‌گیریم $G(R)$ همبند است اگر و تنها اگر $u(R) \le w$. $\square$

نکته ۲.۱.۲. میدان‌های 2^n عضوی مشخصه‌شان ۲ می‌باشد. بنابراین اگر میدانی مشخصه‌اش ۲ نباشد 2^n عضوی نیست.

لم ۴.۱.۲. فرض کنیم R یک حلقه‌ی جابجایی یکدار متناهی باشد و میدان با مشخصه‌ی ۲ نباشد، آن‌گاه گزاره‌های زیر برقرار است.

(الف) اگر هیچ خارج‌قسمتی از R یکریخت با $\mathbb{Z}_2$ نباشد (یعنی ایده‌آلی از R مانند I وجود نداشته باشد که $\frac{R}{I} \cong \mathbb{Z}_2$) یا R یک حلقه‌ی موضعی با ایده‌آل ماکزیمال $\underline{m}$ به‌طوری که $|\frac{R}{\underline{m}}| = 2$ باشد، آن‌گاه $\operatorname{diam}(G(R)) = 2$.

(ب) اگر خارج‌قسمتی از R یکریخت با $\mathbb{Z}_2$ باشد و هیچ خارج‌قسمتی از R یکریخت با $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ نباشد و R حلقه‌ی موضعی با ایده‌آل ماکزیمال $\underline{m}$ به‌طوری که $|\frac{R}{\underline{m}}| = 2$ نباشد، آن‌گاه $\operatorname{diam}(G(R)) = 3$.

(ج) اگر خارج‌قسمتی از R یکریخت با $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ باشد، آن‌گاه $\operatorname{diam}(G(R)) = \infty$.

برهان. (الف) از آن‌جا که هر حلقه‌ی جابجایی یکدار متناهی ناصفر، طبق قضیه‌ی باقی‌مانده‌ی چینی ایزومورفیسم با حاصل‌ضرب دکارتی از حلقه‌های موضعی متناهی می‌باشد، پس داریم:

$$R \cong R_1 \times R_2 \times \cdots \times R_k,$$

که هر R_i یک حلقه‌ی موضعی با ایده‌آل ماکزیمال $\underline{m}_i$ است.

ابتدا فرض کنیم هیچ خارج‌قسمتی از R یکریخت با $\mathbb{Z}_۲$ نباشد و برای هر i، $|\frac{R_i}{m_i}| > ۲$.
همچنین $x = (x_۱, \ldots, x_k)$ و $y = (y_۱, \ldots, y_k)$ دو عنصر متمایز دلخواه از $R_۱ \times \cdots \times R_k$ باشند. از آن‌جا که برای هر $۱ \leq i \leq k$، داریم $|\frac{R_i}{m_i}| > ۲$. با استفاده از نکته‌ی ۱.۱.۲، نتیجه می‌گیریم که

$$N_{\bar{G}(R_i)}(x_i) \cap N_{\bar{G}(R_i)}(y_i) \neq \emptyset,$$

لذا عنصر $z_i \in N_{\bar{G}(R_i)}(x_i) \cap N_{\bar{G}(R_i)}(y_i)$ وجود دارد به‌طوری که در $\bar{G}(R_۱ \times \cdots \times R_k)$ مسیر زیر را داریم:

$$(x_۱, \ldots, x_k) \overset{e_۱}{\text{———}} (z_۱, \ldots, z_k) \overset{e_۲}{\text{———}} (y_۱, \ldots, y_k),$$

بنابراین $d(x,y) \leq ۲$ و از این رو $\operatorname{diam}(G(R)) = \operatorname{diam}(G(R_۱ \times \cdots \times R_k)) \leq ۲$.

اگر $diam(G(R)) = ۱$، آن‌گاه $G(R)$ یک گراف کامل است. پس با استفاده از لم ۱.۱.۲، R یک میدان با مشخصه‌ی ۲ است که یک تناقض است، بنابراین $\operatorname{diam}(G(R)) = ۲$.

حال فرض کنیم R یک حلقه‌ی متناهی با ایده‌آل ماکزیمال $\underline{m}$ باشد و داشته باشیم $|\frac{R_i}{m_i}| = ۲$. با استفاده از قضیه‌ی ۱۵.۱.۲ نتیجه می‌گیریم $G(R)$ یک گراف کامل دوبخشی است و $|R| \geq ۴$، بنابراین $\operatorname{diam}(G(R)) = ۲$.

(ب) از آن‌جا که هیچ خارج‌قسمتی از R یکریخت با $\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$ نیست ولی خارج‌قسمتی از R وجود دارد که با $\mathbb{Z}_۲$ یکریخت است، فرض کنیم $|\frac{R_i}{m_i}| > ۲$ برای هر i به‌جز یکی از آن‌ها برقرار باشد.

اگر $k = ۱$، آن‌گاه $R \cong R_۱$ یک حلقه‌ی موضعی متناهی با ایده‌آل ماکزیمال $\underline{m}_۱$ است به‌طوری که $|\frac{R_۱}{m_۱}| = ۲$ که یک تناقض است.

اگر $k \geq ۲$، در این صورت فرض می‌کنیم $|\frac{R_۱}{m_۱}| = ۲$ و برای هر i که $۲ \leq i \leq k$، $|\frac{R_i}{m_i}| > ۲$.
همچنین فرض کنیم $x = (x_۱, x_۲, \ldots, x_k)$ و $y = (y_۱, y_۲, \ldots, y_k)$ دو عنصر متمایز از $R_۱ \times \cdots \times R_k$ باشند. ابتدا دو حالت در نظر می‌گیریم، $x_۱, y_۱ \in \underline{m}_۱$ یا $x_۱, y_۱ \notin \underline{m}_۱$.

پس با برهانی مشابه قسمت (الف)، مسیری بین x و y با طول حداکثر ۲ به‌دست می‌آید، بنابراین $d(x,y) \leq ۲$.

حالت سوم فرض کنیم $x_۱ \in \underline{m}_۱$ و $y_۱ \notin \underline{m}_۱$. برای هر i که $۲ \leq i \leq k$ باشد، w_i را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$w_i = \begin{cases} ۱, & x_i \in \underline{m}_i \\ ۰, & x_i \notin \underline{m}_i. \end{cases}$$

به‌عبارت دیگر از آن‌جا که برای هر i، $۲ \leq i \leq k$ داریم $|\frac{R_i}{m_i}| > ۲$.

با استفاده از نکته‌ی ۱.۱.۲، نتیجه می‌گیریم:

$$N_{\bar{G}(R_i)}(x_i) \cap N_{\bar{G}(R_i)}(y_i) \neq \emptyset.$$

بنابراین عنصر $z_i \in N_{\bar{G}(R_i)}(x_i) \cap N_{\bar{G}(R_i)}(y_i)$ وجود دارد به‌طوری که در $\bar{G}(R_۱ \times R_۲ \times \cdots \times R_k)$ مسیر زیر را داریم:

$$(x_۱, x_۲, \ldots, x_k) \xrightarrow{e_۱} (y_۱, w_۱, \ldots, w_k) \xrightarrow{e_۲} (x_۱, z_۲, \ldots, z_k) \xrightarrow{e_۳} (y_۱, y_۲, \ldots, y_k),$$

و این نشان می‌دهد $d(x, y) \leq ۳$. بنابراین برای هر دو عنصر متمایز $x, y \in R_۱ \times \cdots \times R_۲$ داریم $d(x, y) \leq ۳$. پس $\operatorname{diam}\left(G(R_۱ \times \cdots \times R_k)\right) \leq ۳$.

حال با در نظر گرفتن دو عنصر $a = (۰, ۰, \ldots, ۰)$ و $b = (۱, ۰, \ldots, ۰)$ در $G(R_۱ \times \cdots \times R_k)$ از آن‌جا که a و b مجاور نیستند، نتیجه می‌گیریم که $d(a, b) \geq ۲$.

اگر $d(a, b) = ۲$ پس باید مسیری به‌صورت زیر وجود داشته باشد:

$$(۰, ۰, \ldots, ۰) \overset{e_۱}{\text{——}} (x_۱, x_۲, \ldots, x_k) \overset{e_۲}{\text{——}} (۱, ۰, \ldots, ۰),.$$

مجاورت $(۰, ۰, \ldots, ۰)$ و $(x_۱, x_۲, \ldots, x_k)$ نشان می‌دهد که $x_۱$ یک عنصر یکه است، در صورتی که از مجاورت $(x_۱, x_۲, \ldots, x_k)$ و $(۱, ۰, \ldots, ۰)$ نتیجه می‌گیریم $x_۱$ عنصر یکه نیست که یک تناقض است. بنابراین $d(a, b) \geq ۳$ و از آن‌جا که

$$\operatorname{diam}\left(G(R_۱ \times \cdots \times R_k)\right) \leq ۳.$$

بنابراین

$$\operatorname{diam}\left(G(R)\right) = \operatorname{diam}\left(G(R_۱ \times \cdots \times R_k)\right) = ۳.$$

(ج) چون خارج‌قسمتی از R یکریخت با $\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$ می‌باشد، پس $k \geq ۲$.

حال دو عنصر $a = (۱, ۱, ۰, \ldots, ۰)$ و $b = (۱, ۰, \ldots, ۰)$ را در $G(R_۱ \times R_۲ \times \cdots \times R_k)$ در نظر می‌گیریم. اگر بین a و b مسیری به‌صورت زیر وجود داشته باشد:

$$(۱, ۱, ۰, \ldots, ۰) \overset{e_۱}{\text{——}} (x_۱, x_۲, \ldots, x_k) \text{——} \cdots \overset{e_{n-۱}}{\text{——}} (y_۱, y_۲, \ldots, y_k) \overset{e_n}{\text{——}} (۱, ۰, \ldots, ۰),$$

آن‌گاه مسیرهایی در $G(R_1)$ و $G(R_2)$ به‌صورت زیر داریم:

$$1 \overset{e'_1}{\text{——}} x_1 \text{——} \cdots \overset{e'_{n-1}}{\text{——}} y_1 \overset{e'_n}{\text{——}} 1$$
$$1 \overset{e''_1}{\text{——}} x_2 \text{——} \cdots \overset{e''_{n-1}}{\text{——}} y_2 \overset{e''_n}{\text{——}} 0$$

مسیر اوّل نشان می‌دهد که n زوج است، در حالی که مسیر دوم نشان می‌دهد که n فرد است که یک تناقض است، بنابراین مسیری بین a و b وجود ندارد. در نتیجه

$$\operatorname{diam}\left(G(R)\right) = \operatorname{diam}\left(G(R_1 \times \cdots \times R_k)\right) = \infty.$$

□

نتیجه ۲.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه‌ی جابجایی متناهی باشد، آن‌گاه

$$\operatorname{diam}\left(G(R)\right) \in \{1, 2, 3, \infty\},$$

برهان. اگر R یک میدان با مشخصه‌ی ۲ باشد، پس با استفاده از لم ۲.۱.۱، $G(R)$ یک گراف کامل است. بنابراین $\operatorname{diam}\left(G(R)\right) = 1$. اگر R میدان با مشخصه‌ی ۲ نباشد، با استفاده از قضیه‌ی ۲.۱.۱۶ داریم $\operatorname{diam}\left(G(R)\right) = 2$.

حال فرض کنیم R میدان نباشد، اگر خارج‌قسمتی از R یکریخت با $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ باشد، آن‌گاه طبق لم ۲.۱.۴ قسمت (ج) داریم:

$$\operatorname{diam}\left(G(R)\right) = \infty.$$

اگر هیچ خارج‌قسمتی از R یکریخت با $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ نباشد، آن‌گاه دو حالت اتفاق می‌افتد.

حالت اول: خارج‌قسمتی از R یکریخت با $\mathbb{Z}_2$ است، حالت دوم: هیچ خارج‌قسمتی از R یکریخت با $\mathbb{Z}_2$ نیست.

در حالت اول با استفاده از لم ۲.۱.۴ قسمت (الف) نتیجه می‌گیریم:

$$\operatorname{diam}\left(G(R)\right) = 2.$$

در حالت دوم اگر R یک حلقه‌ی موضعی با ایده‌آل ماکزیمال $\underline{m}$ باشد، آن‌گاه $|\frac{R}{\underline{m}}| = 2$. از این رو با استفاده از لم ۲.۱.۴ قسمت (ج) داریم:

$$\operatorname{diam}\left(G(R)\right) = 3.$$

□

فصل ۳

حلقه‌های خودانژکتیو

۱.۳ مقدمه

در این فصل ابتدا تعاریف مربوط به حلقه‌های خودانژکتیو را ارائه می‌دهیم و همچنین تعاریفی از قبیل عناصر خودتوان، حلقه‌های نامتناهی محض و قضایای مربوط به حلقه‌های خودانژکتیو را بیان می‌کنیم.

۲.۳ عدد مجموع یکالی حلقه‌های خودانژکتیو

تعریف ۱.۲.۳. مدول J روی حلقه‌ی R را **انژکتیو** گوییم هرگاه به ازای هر نمودار از همریختی‌های Rـ مدول‌ها با سطر

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g\ \text{تکریختی}"] \arrow[d, "f\ \text{همریختی}"'] & B \\ & J & \end{tikzcd}$$

بالای کامل (یعنی g یک تکریختی) یک همریختی از Rـ مدول‌ها مانند $h : B \longrightarrow J$ وجود

داشته باشد به‌طوری که نمودار

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, "h"] \\ & J & \end{tikzcd}$$

جابجایی باشد، یعنی:

$$h \circ g = f.$$

نکته ۱.۲.۳. اگر در تعریف ۱.۲.۳ به‌جای مدول J حلقه‌ی R را قرار دهیم، آن‌گاه به مدول خودانژکتیو، حلقه‌ی خودانژکتیو می‌گوییم.

تعریف ۲.۲.۳ (حلقه‌های خودانژکتیو راست)**.** حلقه‌ی R را **خودانژکتیو راست** گوییم هرگاه هر همریختی از ایده‌آل‌های راست R را بتوان به یک درون‌ریختی از R گسترش داد.

تعریف ۳.۲.۳ (حلقه‌ی منظم)**.** حلقه‌ی R را **منظم** گوییم هرگاه برای هر $x \in R$ یک عنصر $a \in R$ وجود داشته باشد، به‌طوری که $x = xax$.

نکته ۲.۲.۳. اگر در تعریف ۳.۲.۳، عنصر $a \in U(R)$ باشد به R **حلقه‌ی منظم یکه** گفته می‌شود.

قضیه ۱.۲.۳. برای هر حلقه‌ی R شرایط زیر معادلند:

(الف) R منظم است.

(ب) هر ایده‌آل چپ اصلی توسط یک عنصر خودتوان تولید می‌شود.

(ج) هر ایده‌آل چپ اصلی جمع‌وند مستقیم از ${}_RR$ است.

(د) هر ایده‌آل چپ با تولید متناهی توسط یک عنصر خودتوان تولید می‌شود.

(ه) هر ایده‌آل چپ با تولید متناهی یک جمع‌وندمستقیم از ${}_RR$ است.

برهان. به قضیه‌ی ۲۳.۴ از [۱۸] رجوع شود. □

تعریف ۴.۲.۳. به حلقه‌ای که هم منظم و هم خودانژکتیو باشد حلقه‌ی خودانژکتیو منظم گفته می‌شود.

لم ۱.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد اگر $\operatorname{diam}(G(R)) \geq ۳$، آن‌گاه

$$\operatorname{diam}(G(\bar{R})) = \operatorname{diam}(G(R)).$$

برهان. فرض کنیم $\operatorname{diam}(G(R))=\infty$ باشد، نشان می‌دهیم $\operatorname{diam}(G(\bar{R}))=\infty$.

فرض خلف: فرض کنیم $\operatorname{diam}(G(R))=m<\infty$. برای هر دو عنصر $x,y\in R$ اگر $\bar{x}=\bar{y}$، آن‌گاه $x-y\in J(R)$. لذا طبق قضیه‌ی ۱.۲.۱، $1+x-y\in U(R)$. از این رو مسیری از x به y به‌صورت y —— $(1-y)$ —— x داریم، بنابراین $d(x,y)\leq 2$.

اگر $\bar{x}\neq\bar{y}$ و یک مسیری از $\bar{x}$ به $\bar{y}$ داشته باشیم، آن‌گاه مسیری از x به y هم وجود دارد و این نشان می‌دهد:

$$d(x,y)\leq d(\bar{x},\bar{y})\leq m.$$

بنابراین $\operatorname{diam}(G(R))<\infty$ که یک تناقض است. پس فرض خلف باطل است در نتیجه $\operatorname{diam}(G(\bar{R}))=\infty$.

حال فرض می‌کنیم $\operatorname{diam}(G(R))$ متناهی و برابر با $\operatorname{diam}(G(R))=k\geq 3$ باشد. با استفاده از قضیه‌ی ۴.۱.۲ داریم:

$$\operatorname{diam}(G(\bar{R}))\leq\operatorname{diam}(G(R)).$$

بنابراین کافیست نشان دهیم $\operatorname{diam}(G(\bar{R}))\geq k$.

چون $\operatorname{diam}(G(R))=k$، بنابراین $x,y\in R$ وجود دارد که $d(x,y)=k$.

ابتدا ادعا می‌کنیم $\bar{x}\neq\bar{y}$. اگر $\bar{x}=\bar{y}$، آن‌گاه $x-y\in J(R)$ و از این رو $1+x-y\in U(R)$، بنابراین مسیری از x به y به‌صورت (y) —— $(1-y)$ —— x وجود دارد، پس $d(x,y)\leq 2$ که یک تناقض است (زیرا در این‌صورت $\operatorname{diam}(G(R))\leq 2$ می‌شود).

حال فرض کنیم (برهان خلف) $d(\bar{x},\bar{y})=l<k$. در این صورت مسیری به طول l از $\bar{x}$ به $\bar{y}$ به صورت زیر داریم:

$$\bar{x} —— \bar{x}_1 —— \bar{x}_2 —— \cdots —— \bar{x}_{l-1} —— \bar{y}$$

لذا مسیر $x —— x_1 —— x_2 —— \cdots —— x_{l-1} —— y$ مسیری به طول l از x به y می‌باشد، در نتیجه $d(x,y)\leq l<k$ که یک تناقض است، بنابراین $d(\bar{x},\bar{y})\geq k$ و از این رو $\operatorname{diam}(G(\bar{R}))\geq k$. □

حال نشان می‌دهیم چه زمانی $\operatorname{diam}(G(\bar{R}))\leq\operatorname{diam}(G(R))$.

قضیه ۲.۲.۳ (قضیه‌ی اساسی). فرض کنید R یک حلقه باشد، در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند.

(الف) $\operatorname{diam}(G(\bar{R}))<\operatorname{diam}(G(R))$.

(ب) R یک حلقه‌ی موضعی است، $J(R)\neq 0$ و $2\in J(R)$.

(ج) $\operatorname{diam}(G(R))=2$ و $\operatorname{diam}(G(\bar{R}))=1$.

برهان. (الف)$\Rightarrow$(ج) واضح است.
(ب)$\Rightarrow$(الف): فرض کنیم $\operatorname{diam}(G(R)) < \operatorname{diam}(G(\bar{R}))$ با استفاده از لم ۱.۲.۳ داریم $\operatorname{diam}(G(R)) \leq ۲$.
توجه داریم که $\operatorname{diam}(G(R)) = ۱$ نتیجه می‌دهد $\operatorname{diam}(G(\bar{R})) = ۱$ که این حالت اتفاق نمی‌افتد، زیرا با فرض در تناقض است، از این رو $\operatorname{diam}(G(R)) = ۲$. پس طبق فرض نتیجه می‌گیریم $\operatorname{diam}(G(\bar{R})) = ۱$. بنابراین $J(R) \neq ۰$ و با استفاده از لم ۱.۱.۲، R یک حلقه‌ی تقسیم با مشخصه‌ی ۲ است. از این رو R یک حلقه‌ی موضعی است، $J(R) \neq ۰$ و $۲ \in J(R)$.
(ج)$\Rightarrow$(ب): فرض کنیم R یک حلقه‌ی موضعی، $J(R) \neq ۰$ و $۲ \in J(R)$ بنابراین $\bar{R} = \frac{R}{J(R)}$ یک حلقه‌ی تقسیم با مشخصه‌ی ۲ می‌باشد، پس با استفاده از لم ۱.۱.۲ نتیجه می‌گیریم $G(\bar{R})$ یک گراف کامل است، یعنی $\operatorname{diam}(G(\bar{R})) = ۱$.
به‌عبارت دیگر برای هر $r \in R$ دو حالت داریم $r \in J(R)$ یا $r \in U(R)$. برای هر دو عنصر متمایز $a, b \in R$ اگر $a+b \in U(R)$، آن‌گاه $d(a,b) = ۱$. فرض کنیم $a+b \in J(R)$. اگر $a \in J(R)$، آن‌گاه $b \in J(R)$ از این رو مسیری به‌صورت b —— ۱ —— a داریم، بنابراین $d(a,b) = ۲$.
(توجه داریم که $J(R) \neq ۰$ باشد، چنین a و bای وجود دارد). اگر $a \in U(R)$، آن‌گاه $b \in U(R)$ و یک مسیر به‌صورت b —— $(a+b)$ —— a داریم، بنابراین $d(a,b) = ۲$. از این رو $\operatorname{diam}(G(R)) = ۲$. □

نتیجه ۱.۲.۳. فرض کنیم R یک حلقه باشد، $\operatorname{diam}(G(\bar{R})) = \operatorname{diam}(G(R))$ اگر وفقط اگر یکی از موارد زیر برقرار باشد:

(الف) R موضعی نباشد.

(ب) R یک حلقه‌ی موضعی باشد و $۲ \in U(R)$، یعنی $۲ \notin J(R)$.

(ج) R یک حلقه‌ی تقسیم باشد ($J(R) = ۰$).

برهان. با استفاده از قضیه‌ی ۲.۲.۳ نتیجه حاصل می‌شود. □

تعریف ۵.۲.۳ (عنصر خودتوان[1]). در حلقه‌ی R عنصر e را خودتوان گوییم هرگاه $e^۲ = e$.

تعریف ۶.۲.۳. حلقه‌ی ناصفر R را **ساده** نامیم هرگاه ایده‌آل‌های آن فقط صفر و خودش باشد.

تعریف ۷.۲.۳ (خودتوان‌های متعامد). در حلقه‌ی R دو عنصر e و f را **خودتوان‌های متعامد** نامیم، هرگاه $ef = fe = ۰$.
در این حالت $e+f$ یک عنصر خودتوان است و $(e+f)R = eR \oplus fR$.

تعریف ۸.۲.۳ (دو عنصر هم‌ارز یا معادل[2]). فرض کنیم R یک حلقه باشد و دو عنصر $e, f \in R$ خودتوان باشند، e و f را **معادل** گوییم و با نماد $e \sim f$ نشان می‌دهیم هرگاه عنصر $x \in eRf$ و $y \in fRe$ وجود داشته باشد، به‌طوری که $xy = e$ و $yx = f$.

[1] Idepotent
[2] Equivalent

تعریف ۹.۲.۳. یک عنصر خودتوان مانند e در حلقه‌ی R را **نامتناهی**[1] گوییم هرگاه خودتوان‌های متعامد $f, g \in R$ وجود داشته باشند، به‌طوری که $e = f + g$ و $e \sim f$ و $g \neq 0$.

تعریف ۱۰.۲.۳ (حلقه‌ی نامتناهی محض[2]). به حلقه‌ی ساده‌ی R **نامتناهی محض** گفته می‌شود اگر هر ایده‌آل راست ناصفر از R شامل حداقل یک عنصر خودتوان نامتناهی باشد.

تعریف ۱۱.۲.۳ (ددکیند متناهی[3]). حلقه‌ی R را **ددکیند متناهی** گوییم اگر برای هر دو عنصر $x, y \in R$، اگر $xy = 1$ باشد، آن‌گاه بتوان نتیجه گرفت $yx = 1$.

تعریف ۱۲.۲.۳ (عنصر مرکزی). عنصر $x \in R$ را **مرکزی** گوییم هرگاه برای هر عنصر $y \in R$ داشته باشیم $xy = yx$.

تعریف ۱۳.۲.۳ (حلقه‌ی آبلی[4]). حلقه‌ی R را **آبلی** گوییم هرگاه همه‌ی خودتوان‌های آن مرکزی باشد.

تعریف ۱۴.۲.۳ (خودتوان آبلی[5]). فرض کنیم R یک حلقه‌ی منظم باشد و $e \in R$ خودتوان باشد، e را **خودتوان آبلی** گوییم هرگاه حلقه‌ی eRe آبلی باشد.

توجه داریم که لازم است خودتوان‌های eRe در حلقه‌ی eRe مرکزی باشند و لزومی ندارد در حلقه‌ی R مرکزی باشند.

تعریف ۱۵.۲.۳ (خودتوان‌های ددکیند متناهی). خودتوان e از حلقه‌ی R را یک **خودتوان ددکیند متناهی** می‌نامیم هرگاه حلقه‌ی eRe، ددکیند متناهی باشد.

یا به‌طور معادل هرگاه ایده‌آل راست eR، ددکیند متناهی باشد. بنابراین همه‌ی حلقه‌های منظم آبلی ددکیند متناهی هستند.

تعریف ۱۶.۲.۳. فرض کنیم R یک حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم باشد و $e \in R$ خودتوان باشد، عنصر e را **وفادار**[6] می‌نامیم، اگر تنها خودتوان مرکزی عمود بر e، 0 باشد.

یعنی اگر f یک خودتوان مرکزی باشد و $ef = 0$ آن‌گاه $f = 0$.

به‌عنوان مثال اگر حلقه‌ی R اول باشد، آن‌گاه

$$\{0, 1\} = \text{خودتوان‌های متعامد مرکزی}.$$

بنابراین هر خودتوان غیرصفر از حلقه‌ی R در این حالت وفادار است.

تعریف ۱۷.۲.۳. به یک حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم، نوع I گفته می‌شود هرگاه شامل حداقل یک عنصر خودتوان آبلی وفادار باشد.

به‌عنوان مثال هر حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم آبلی از نوع I است.

[1] Infinite
[2] Purely infinite
[3] Directly finite
[4] Abelian
[5] Abelian idempotent
[6] Faithful

تعریف ۱۸.۲.۳. به یک حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم نوع II گفته می‌شود به‌شرط این‌که شامل حداقل یک خودتوان ددکیند وفادار باشد، امّا شامل خودتوان‌های آبلی ناصفر نباشد.

قضیه ۳.۲.۳. فرض کنیم R یک حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم و ددکیند متناهی باشد و P یک ایده‌آل اول از R باشد، آن‌گاه $\frac{R}{P}$ یک حلقه‌ی خودانژکتیو راست است اگر و تنها اگر P یک ایده‌آل ماکزیمال دوطرفه از R باشد.

برهان. به قضیه‌ی ۳۲.۹ از [۱۲] رجوع شود. □

قضیه ۴.۲.۳. فرض کنیم R یک حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم، اول و ددکیند متناهی باشد. در این صورت R از نوع I است اگر و تنها اگر R یک حلقه‌ی آرتینی باشد.

برهان. به قضیه‌ی ۱۰.۳ از [۱۲] رجوع شود. □

قضیه ۵.۲.۳. فرض کنید $J \leq K$ ایده‌آل‌های دوطرفه از حلقه‌ی R باشند، آن‌گاه K منظم یکه است اگر و تنها اگر J و $\frac{K}{J}$ منظم یکه باشد.

برهان. به لم ۱.۳ از [۱۲] رجوع شود. □

قضیه ۶.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی ساده باشد، آن‌گاه شرایط زیر معادل‌اند.

(الف) R آرتینی چپ است.

(ب) R یک ایده‌آل مینیمال چپ دارد.

(ج) برای تعدادی عدد طبیعی n، $R \cong M_n(D)$ به‌طوری که D حلقه‌ی تقسیم است.

برهان. به قضیه‌ی ۱۰.۳ از [۱۸] رجوع شود. □

مثال ۱.۲.۳. حلقه‌های ساده‌ای وجود دارند که خودانژکتیو منظم یکه بوده و از نوع II می‌باشند.

برهان. فرض کنیم $\mathbb{F}_1$، $\mathbb{F}_2$، $\dots$ میدان باشند، برای هر عدد طبیعی n، قرار می‌دهیم:

$$R = \prod R_n, \quad R_n = M_{n!}(\mathbb{F}_n).$$

از این‌رو هر R_n یک حلقه‌ی خودانژکتیو منظم یکه‌ی دوطرفه روی R است. فرض کنیم M یک ایده‌آل ماکزیمال دوطرفه روی R باشد، به‌طوری که شامل $\oplus R_n$ باشد. با توجه به قضیه‌ی ۵.۲.۳، $\frac{R}{M}$ یک ایده‌آل منظم یکه ساده است. بنابراین با توجه به قضیه‌ی ۳.۲.۳، $\frac{R}{M}$ خودانژکتیو هم می‌باشد.

از طرف دیگر برای هر k مثبت و برای هر $n=k, k+1, \dots$ خودتوان‌های متعامد $e_{1n}, e_{2n}, \dots e_{kn} \in R_n$ وجود دارند، به‌طوری که $e_{1n}+e_{2n}+\dots+e_{kn}=1$ و $e_{in}R_n \cong e_{jn}R_n$.

برای هر k و $i=1,\ldots,k$ و هر $n=1,\ldots,k-1$، $e_{in}=0$ را در نظر می‌گیریم. پس خودتوان‌های متعامد $e_1,\ldots,e_k\in R$ به‌دست می‌آیند به‌طوری که $(e_1+\cdots+e_k)-1$ یک عنصر همانی از $R_1\times\cdots\times R_{k-1}$ و همه‌ی $e_iR\cong e_jR$ و چون $\oplus R_n\leq M$ پس خودتوان‌های متعامد $\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_k\in\frac{R}{M}$ را داریم به‌طوری که $\bar{e}_1+\cdots+\bar{e}_k=1$ و همه‌ی

$$\bar{e}_i(\frac{R}{M})\cong\bar{e}_j(\frac{R}{M}).$$

بنابراین $\frac{R}{M}$ یک مجموع مستقیم از kتا ایده‌آل راست دوبه دو مجزا و یکریخت است. چون این رابطه برای هر k درست است، پس طبق قضیه‌ی ۳.۲.۶، $\frac{R}{M}$ نمی‌تواند آرتینی باشد. از این رو طبق قضیه‌ی ۳.۲.۴، $\frac{R}{M}$ از نوع I نمی‌باشد، بنابراین طبق تعریف $\frac{R}{M}$ شامل هیچ خودتوان آبلی وفادار نیست.

با توجه به این‌که $\frac{R}{M}$ ساده است، همه‌ی خودتوان‌های ناصفر در $\frac{R}{M}$ وفادار هستند. یعنی تنها خودتوان مرکزی عمود بر آن خودتوان‌های ناصفر، صفر است. پس $\frac{R}{M}$ شامل هیچ خودتوان آبلی ناصفر نمی‌باشد. از آن‌جا که ۱ در $\frac{R}{M}$ یک عنصر خودتوان ددکیند متناهی وفادار است، نتیجه می‌گیریم که $\frac{R}{M}$ از نوع II است. □

تعریف ۳.۲.۱۹. به یک حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم نوع III گفته می‌شود اگر شامل هیچ خودتوان ددکیند متناهی ناصفر نباشد.

قضیه ۳.۲.۷. هر حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم را به‌طور منحصر به فرد می‌توان به حاصل‌ضرب دکارتی حلقه‌هایی از نوع I و II و III تجزیه کرد.

برهان. به قضیه‌ی ۱۰.۱۳ از [۱۲] رجوع شود. □

تعریف ۳.۲.۲۰. به حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم، نامتناهی محض گفته می‌شود اگر شامل هیچ خودتوان مرکزی ددکیند متناهی ناصفری نباشد.

به‌عنوان مثال، هر حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم از نوع III نامتناهی محض می‌باشد.

قضیه ۳.۲.۸. هر حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم را می‌توان به‌صورت منحصر به فرد به صورت حاصل‌ضرب دکارتی از یک حلقه‌ی ددکیند متناهی و یک حلقه‌ی نامتناهی محض نوشت.

برهان. به قضیه‌ی ۱۰.۲۱ از [۱۲] رجوع شود. □

تعریف ۳.۲.۲۱. حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم R را از نوع I_f گوییم هرگاه R از نوع I باشد و ددکیند متناهی هم باشد و R را از نوع I_∞ گوییم هرگاه R از نوع I باشد و نامتناهی محض هم باشد. به همین ترتیب R را از نوع II_f گوییم هرگاه از نوع II و ددکیند متناهی باشد و همچنین از نوع II_∞ گوییم هرگاه از نوع II و نامتناهی محض باشد.

قضیه ۳.۲.۹. هر حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم را می‌توان به‌طور منحصر به فرد به حاصل‌ضرب دکارتی از حلقه‌های نوع I_f، I_∞، II_f و II_∞ نوشت.

برهان. به قضیه‌ی ۱۰.۲۲ از [۱۲] رجوع شود. □

تعریف ۲۲.۲.۳. فرض کنیم R یک حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم باشد و n یک عدد صحیح مثبت باشد. R را از نوع I_n می‌نامیم هرگاه حلقه‌ی منظم آبلی مانند S وجود داشته باشد به‌طوری که $R \cong M_n(S)$.

قضیه ۱۰.۲.۳. حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم R از نوع I_f است اگر و تنها اگر حلقه‌های خودانژکتیو راست منظم R_1، R_2، ... وجود داشته باشند به‌طوری که $R \cong \prod R_n$ و هر R_n از نوع I_n باشد.

برهان. به قضیه‌ی ۱۰.۲۴ از [۱۲] رجوع شود. □

قضیه ۱۱.۲.۳. فرض کنیم R یک حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم باشد به‌طوری که شامل هیچ خودتوان آبلی ناصفر نباشد. در این صورت خودتوان‌های $e_1, e_2, e_3, \ldots \in R$ وجود دارند به‌طوری که برای هر n،

$$R_R \cong n(e_n R)$$

$$R_R \cong e_1 R, \;\; R_R \cong e_2 R \times e_2 R = e_2 R \oplus e_2 R.$$

برهان. به قضیه‌ی ۱۰.۲۸ از [۱۲] رجوع شود. □

تذکر ۱.۲.۳. عبارت $B \precsim A$ به این مفهوم است که A زیرمدول B بوده و از A به B یکریختی وجود دارد.

قضیه ۱۲.۲.۳. فرض کنید A و B مدول‌های راست انژکتیو نامنفرد روی حلقه‌ی R باشند و n یک عدد صحیح مثبت باشد، آن‌گاه

(الف) اگر $nA \precsim nB$، آن‌گاه $A \precsim B$.

(ب) اگر $nA \cong nB$، آن‌گاه $A \cong B$.

برهان. به قضیه‌ی ۱۰.۳۴ از [۱۲] رجوع شود. □

تعریف ۲۳.۲.۳. فرض کنیم R یک حلقه باشد. منظور از $FP(R)$ خانواده‌ی تمام Rـ مدول‌های با تولید متناهی تصویری[1] است. حلقه‌ی R را **جداپذیر**[2] گوییم، هرگاه برای هر $A, B \in FP(R)$ داشته باشیم:

$$A \oplus A \cong A \oplus B \cong B \oplus B \Longrightarrow A \cong B.$$

[1] Projective
[2] Separative

قضیه ۱۳.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه باشد، در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند.

(الف) R یک حلقه‌ی جداپذیر است.

(ب) برای هر $A, B \in FP(R)$ اگر $2A \cong 2B$ و $3A \cong 3B$، آن‌گاه $A \cong B$.

(ج) برای هر $A, B \in FP(R)$ اگر $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد، به‌طوری که $nA \cong nB$ و $(n+1)A \cong (n+1)B$، آن‌گاه $A \cong B$.

برهان. به قضیه‌ی ۱.۲ از [۶] رجوع شود. □

قضیه ۱۴.۲.۳. اگر R یک حلقه‌ی منظم جداپذیر باشد، آن‌گاه هر ماتریس مربعی که درایه‌هایش از R باشد، یک ماتریس قطری‌شدنی است.

برهان. به قضیه‌ی ۲.۵ از [۶] رجوع شود. □

نتیجه ۲.۲.۳. ماتریس‌های مربعی با درایه‌هایی از حلقه‌های منظم خودانژکتیو راست قطری‌شدنی هستند.

برهان. با توجه به قضیه‌ی ۱۲.۲.۳ اگر $2A \cong 2B$ باشد، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت $A \cong B$. از این رو با توجه به قضیه‌ی ۱۳.۲.۳، R یک حلقه‌ی جداپذیر است و بنابر قضیه‌ی ۱۴.۲.۳ نتیجه می‌گیریم R یک ماتریس قطری‌شدنی است. □

قضیه ۱۵.۲.۳. برای هر حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم گزاره‌های زیر معادل‌اند.

(الف) R نامتناهی محض است.

(ب) عدد صحیح مثبت $n \geq 2$ وجود دارد به‌طوری که $nR_R \precsim R_R$.

(ج) برای هر عدد صحیح مثبت n، $nR_R \cong R_R$.

(د) $E(N_\circ R_R) \cong R_R$.

برهان. به قضیه‌ی ۱۰.۱۶ از [۶] رجوع شود. □

لم ۲.۲.۳. برای هر حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم ناصفر مانند R، $usn(M_n(R)) = 2$. به‌ویژه برای هر حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم که نامتناهی محض باشد $usn(R) = 2$.

برهان. با استفاده از نتیجه‌ی ۲.۲.۳، هر $A \in M_2(R)$ یک ماتریس قطری‌شدنی می‌باشد. پس ماتریس‌های معکوس‌پذیر P و Q در $M_2(R)$ وجود دارد به‌طوری که PAQ یک ماتریس قطری است. واضح است که PAQ و همچنین A را می‌توان به‌صورت مجموع دو عنصر یکه نوشت.

اگر R یک حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم و نامتناهی محض باشد، پس طبق قضیه‌ی ۱۵.۲.۳ داریم $R_R \cong (R+R)_R$ و از این رو نتیجه می‌گیریم که حلقه‌های $R \cong M_2(R)$ بنابراین $usn(R) = 2$. □

لم ۳.۲.۳. یک حلقه‌ی خودانژکتیور راست منظم ناصفر مانند R قابل تجزیه به‌صورت $R = S \times T$ می‌باشد که $usn(S) = ۱$ یا $usn(S) = ۲$ و T یک حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم آبلی است.

برهان. بنا به قضیه‌ی ۸.۲.۳، $R \cong R_۱ \times R_۲$ به‌طوری که $R_۱$ یا ناصفر است یا نامتناهی محض و $R_۲$ هم ددکیند متناهی است، بنابراین با توجه به لم ۲.۲.۳ داریم $usn(R_۱) = ۱$ یا $usn(R_۱) = ۲$ و با استفاده از قضیه‌ی ۹.۲.۳، $R_۲ = R_۳ \times R_۴$ به‌طوری که $R_۳$ از نوع I_f و $R_۴$ از نوع II_f است.
از طرفی بنابر قضیه‌ی ۱۰.۲.۳، $R_۳ \cong \prod M_n(S_i)$ به‌طوری که هر S_i یک حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم آبلی است. همچنین چون $R_۴$ از نوع II_f می‌باشد، پس خودتوان آبلی ناصفر ندارد و در نتیجه طبق قضیه‌ی ۱۱.۲.۳ یک خودتوان $e \in R_۴$ وجود دارد به‌طوری که

$$(R_۴)_{R_۴} \cong (eR_۴ \oplus eR_۴)_{R_۴}.$$

پس نتیجه می‌گیریم:

$$R_۴ \cong M_۲(eR_۴e),$$

بنابراین $R \cong R_۱ \times \left(\prod M_n(S_i)\right) \times M_۲(eR_۴e)$.
حال فرض کنیم:

$$S = R_۱ \times \Big(\prod_{n>۱} M_n(S_i)\Big) \times M_۲(eR_۴e)$$

و $T = \prod S_i$. بنابراین با توجه به لم ۲.۲.۳ داریم $usn(S) = ۱$ یا $usn(S) = ۲$. $\square$

قضیه ۱۶.۲.۳. برای هر حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم ناصفر گزاره‌های زیر معادل‌اند:

(الف) هر عضوی از R را می‌توان به‌صورت مجموع دو عنصر یکه نوشت.

(ب) همانی R را به‌صورت مجموع دو عنصر یکه می‌توان نوشت.

(ج) هیچ خارج‌قسمتی از R با $\mathbb{Z}_۲$ یکریخت نیست.

برهان. برهان‌های (الف) به (ب) و (ب) به (ج) بدیهی است. کافی است برهان (ج) به (الف) را نشان دهیم.
می‌دانیم که $R/J(R)$ یک حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم است. از آن‌جا که هر عنصر از R را می‌توان به‌صورت مجموع دو عنصر یکه نوشت، می‌توانیم فرض کنیم R منظم است، با استفاده از قضیه‌ی ۸.۲.۳، $R \cong S \times T$ به‌طوری که S نامتناهی محض و T ددکیند متناهی است. از آن‌جا که S یک نامتناهی محض می‌باشد، بنا بر قضیه‌ی ۱۵.۲.۳ می‌توان نوشت $S_S \cong (S \oplus S)_S$ و بنابراین $S \cong M_۲(S)$.

حال نشان می‌دهیم هر عنصری از $M_2(S)$ که S یک حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم است را می‌توان به‌صورت مجموع دو عنصر یکه نوشت. بر اساس نتیجه ۲.۲.۳، هر $A \in M_2(S)$ ماتریس قطری‌شدنی است. از این رو ماتریس‌های وارون‌پذیر P و Q در $M_2(S)$ وجود دارند به‌طوری که PAQ ماتریس قطری است و آن را به‌صورت $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$PAQ = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & b \end{pmatrix}$$

یعنی به‌صورت مجموع دو عنصر یکه نوشته شد. پس A به‌صورت مجموع دو عنصر یکه نوشته می‌شود. از این رو هر عنصر از $M_2(S)$ و همچنین هر عنصری از S را می‌توان به‌صورت مجموع دو عنصر یکه نوشت.

از آن‌جا که T یک حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم و ددکیند متناهی است، بنابر قضیه‌ی ۹.۲.۳ می‌توان نوشت $T \cong R_1 \times R_2$ به‌طوری که R_1 از نوع I_f و R_2 از نوع II_f می‌باشد. ابتدا نشان می‌دهیم که هر عنصر از R_1 را می‌توان به‌صورت مجموع دو عنصر یکه نوشت. طبق قضیه‌ی ۱۰.۲.۳، $R_1 \cong \prod M_n(S_i)$ که هر S_i یک حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم آبلی می‌باشد، لذا کافیست نشان دهیم که هر عنصر $M_n(S_i)$ را می‌توان به‌صورت مجموع دو عنصر یکه نوشت.

اگر $n > 1$ باشد، همان‌طور که در بالا بحث شد، نتیجه حاصل است. کافیست نشان دهیم که هر عنصر در S_i (S_i حلقه‌ی منظم آبلی است و هیچ خارج‌قسمتی از آن با $\mathbb{Z}_2$ یکریخت نیست.) را می‌توان به‌صورت مجموع دو عنصر یکه نوشت. حال $a \in S_i$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم a را نتوان به‌صورت مجموع دو عنصر یکه نوشت.

مجموعه‌ی Ω را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\Omega = \{I : \text{است } S_i \text{ یک ایده‌آل از } I \text{ نوشت و } \frac{S_i}{I} \text{ را نتوان به‌صورت مجموع دو عنصر یکه از } a+I\}.$$

$\Omega \neq \emptyset$ و هر زیرمجموعه‌ی کاملاً مرتب از آن دارای کران بالا می‌باشد، پس با استفاده از لم زرن Ω دارای عضو ماکزیمال مانند I است، بنابراین $\frac{S_i}{I}$ یک حلقه‌ی تجزیه‌ناپذیر است و از این رو خودتوان مرکزی ندارد (اگر حلقه‌ای خودتوان مرکزی داشته باشد، به‌صورت $R = eR \oplus (1-e)R$ تجزیه می‌شود.) اما چون منظم آبلی است، $\frac{S_i}{I}$ باید حلقه‌ی تقسیم باشد. از طرفی به علت این‌که $a+I$ را نمی‌توان به‌صورت مجموع دو عنصر یکه در $\frac{S_i}{I}$ نوشت، پس $\frac{S_i}{I} \cong \mathbb{Z}_2$ که یک تناقض است. بنابراین هر عنصر از R_1 را می‌توان به‌صورت مجموع دو عنصر یکه نوشت.

در پایان نشان می‌دهیم که هر عنصر در R_2 را می‌توان به‌صورت مجموع دو عنصر یکه نوشت. از آن‌جا که R_2 از نوع II_f است، پس خودتوان آبلی غیرصفر ندارد. بنابراین طبق

قضیه‌ی ۱۱.۲.۳ یک خودتوان $e \in R_2$ وجود دارد به‌طوری که

$$(R_2)_{R_2} \cong (eR_2 \oplus eR_2)_{R_2},$$

پس $R_2 \cong M_2(eR_2e)$ و از آن‌جا که هر عنصر از $M_2(eR_2e)$ را می‌توان به فرم مجموع دو عنصر یکه نوشت، پس هر عنصر از R_2 را هم می‌توان به‌صورت مجموع دو عنصر یکه نوشت. بنابراین هر عنصر از T را می‌توان به‌صورت مجموع دو عنصر یکه نوشت. از این رو هر عنصر از R را می‌توان به‌صورت مجموع دو عنصر یکه از R نوشت. □

تعریف ۲۴.۲.۳ (حلقه‌ی بولی). حلقه‌ی R را **بولی** گوییم هرگاه به ازای هر عضو آن مانند x داشته باشیم $x^2 = x$.

توجه داریم که حلقه‌های بولی جابجایی نیز می‌باشند.

لم ۴.۲.۳. فرض کنید E یک مدول انژکتیو نامنفرد باشد. در این صورت $\mathrm{End}(E)$ یک حلقه‌ی بولی است، اگر و تنها اگر هر جمع‌وند مستقیمی از E مانند N را در نظر بگیریم، تابع همانی روی N مجموع دوتا یکه نباشد.

برهان. به قضیه‌ی ۱۹ از [۲۴] رجوع شود. □

لم ۵.۲.۳. فرض کنید T یک حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم آبلی باشد، آن‌گاه $T = T_1 \times T_2$ به‌طوری که $usn(T_1) = 1$ یا $usn(T_2) = 2$ و T_2 صفر است یا یک حلقه‌ی بولی است.

برهان. به لم ۵ از [۱۶] مراجعه شود. □

قضیه ۱۷.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی خودانژکتیو منظم راست ناصفر باشد. در این صورت $u(R) = 2$ یا $u(R) = w$ یا $u(R) = \infty$. به‌علاوه

(الف) $usn(R) = 2$ اگر و تنها اگر R هیچ حلقه‌ی بولی ناصفر به‌عنوان جمع‌وند مستقیم نداشته باشد.

(ب) $usn(R) = w$ اگر و تنها اگر R، $\mathbb{Z}_2$ را داشته باشد، اما هیچ حلقه‌ی بولی با بیش از دو عنصر به‌عنوان جمع‌وند مستقیم نداشته باشد. علاوه بر این در این حالت هر عنصر غیریکه از R را می‌توان به‌صورت مجموع ۲ یا ۳ عنصر یکه نوشت.

(ج) $usn(R) = \infty$ اگر و تنها اگر R یک حلقه‌ی بولی با بیش از دو عنصر به‌عنوان جمع‌وند مستقیم داشته باشد.

برهان. با توجه به قضیه‌ی ۳.۲.۳ و لم ۵.۲.۳، $R = R_1 \times B$ که $usn(R_1) = 1$ یا $usn(R_1) = 2$ و B یک حلقه‌ی بولی است. واضح است که عدد مجموع یکالی حلقه‌های بولی ناصفر ∞ است،

مگر این‌که با $\mathbb{Z}_۲$ یکریخت باشند که در این حالت هم $u(R) = w$. بنابراین (الف) مستقیماً اثبات شد.

اگر $usn(R) \neq ۲$ آن‌گاه $B \neq ۰$. واضح است که $usn(R) = w$ اگر و تنها اگر $B \cong \mathbb{Z}_۲$ و $usn(R) = \infty$ اگر و تنها اگر B بیش از دو عنصر داشته باشد. همچنین اگر $usn(R) = w$ آن‌گاه $R = R_۱ \times \mathbb{Z}_۲$ لذا واضح است که هر عنصر غیریکه از R را به‌صورت مجموع دو یا سه عنصر یکه می‌توان نوشت. □

لم ۶.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم باشد، آن‌گاه $usn(R) = ۲$ یا $usn(R) = ۳$ یا $usn(R) = \infty$ و علاوه‌براین

(الف) $usn(R) = ۲$ اگر و تنها اگر R، هیچ حلقه‌ی بولی غیرصفر به‌عنوان جمع‌وند مستقیم نداشته باشد یا $R \cong \mathbb{Z}_۲$.

(ب) $usn(R) = ۳$ اگر و تنها اگر $R \ncong \mathbb{Z}$ و R، $\mathbb{Z}_۲$ را داشته باشد و هیچ حلقه‌ی بولی با بیش از دو عنصر به‌عنوان جمع‌وند مستقیم R نداشته باشد.

(ج) $usn(R) = \infty$ اگر و تنها اگر R یک حلقه‌ی بولی با بیش از دو عنصر به‌عنوان جمع‌وند مستقیم داشته باشد.

برهان. با استفاده از قضیه‌ی ۱۷.۲.۳ اثبات حاصل می‌شود. □

لم ۷.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم باشد. در این صورت

$$\operatorname{diam}(G(R)) \in \{۱, ۲, ۳, \infty\}.$$

برهان. بنابر قضیه‌ی ۱۷.۲.۳، $u(R) = ۲$ یا $u(R) = w$ یا $u(R) = \infty$ می‌باشد. فرض می‌کنیم $u(R) = ۲$. اگر R حلقه‌ی تقسیم نباشد، آن‌گاه با استفاده از قضیه‌ی ۲.۲.۳ داریم $\operatorname{diam}(G(R)) = ۲$.

اگر R حلقه‌ی تقسیم باشد، آن‌گاه واضح است که $\operatorname{diam}(G(R)) \leq ۲$.

فرض کنیم $u(R) = w$. بنابراین با استفاده از قضیه‌ی ۱۷.۲.۳ قسمت (ب)، می‌توانیم فرض کنیم $R = R_۱ \times \mathbb{Z}_۲$، که ۲ یا $u(R_۱) = ۱$.

اگر $u(R_۱) = ۱$، آن‌گاه $R_۱$ یک حلقه‌ی بدیهی است و لذا $R = \mathbb{Z}_۲$، بنابراین $\operatorname{diam}(G(R)) = ۱$.

حال فرض کنیم $u(R_۱) = ۲$ و $x, y \in G(R)$. اگر $x = (x_۱, ۰)$ و $y = (y_۱, ۱)$، آن‌گاه $z_۱ \in R_۱$ وجود دارد به‌طوری که $x_۱ + z_۱$ و $y_۱ + z_۱$ یکه‌هایی از R هستند. بنابراین مسیری از $(x_۱, ۰)$ به $(y_۱, ۱)$ به‌صورت زیر داریم:

$$(x_۱, ۰) — (z_۱, ۱) — (y_۱, ۱),$$

که این نتیجه می‌دهد:

$$d(x,y) \leq ۲. \qquad (۱.۳)$$

اگر $x=(x_۱,۱)$ و $y=(y_۱,۱)$ آن‌گاه با برهانی مشابه حالت قبل نتیجه می‌گیریم که

$$d(x,y) \leq ۲. \qquad (۲.۳)$$

اگر $x=(x_۱,\circ)$ و $y=(y_۱,۱)$، آن‌گاه $z_۱ \in R_۱$ وجود دارد به‌طوری که $x+z_۱$ یک عنصر یکه در $R_۱$ است. بنابراین با برهانی مشابه مسیری به‌صورت زیر داریم:

$$(x_۱,\circ) — (z_۱,۱) — (w_۱,\circ) — (y_۱,۱).$$

بنابراین

$$d(G(R)) \leq ۳. \qquad (۳.۳)$$

پس با توجه به (۱.۳)، (۲.۳) و (۳.۳) نتیجه می‌گیریم $\operatorname{diam}(G(R)) \leq ۳$.

حال فرض کنیم $u(R)=\infty$. در این حالت با توجه به قضیه‌ی ۱۷.۱.۲، $G(R)$ ناهمبند است، بنابراین $\operatorname{diam}(G(R))=\infty$. □

قضیه ۱۸.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه و $R/J(R)$ خودانژکتیو راست (در حالت خاص R خودانژکتیو راست است) آن‌گاه $\operatorname{diam}(G(R)) \in \{۱,۲,۳,\infty\}$.

برهان. می‌دانیم که در این حالت $\bar{R}=\frac{R}{J(R)}$ یک حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم است، پس با توجه به لم ۷.۲.۳، $\operatorname{diam} G(\bar{R}) \in \{۱,۲,۳,\infty\}$ و با استفاده از لم ۱.۲.۳ نتیجه می‌گیریم $\operatorname{diam}(G(R)) \in \{۱,۲,۳,\infty\}$. □

قضیه ۱۹.۲.۳. فرض کنید R یک حلقه و $R/J(R)$ خودانژکتیو راست (در حالت خاص R خودانژکتیو راست است) در این صورت گزاره‌های زیر برقرار است:

(الف) $\operatorname{diam}(G(R))=۱$ اگر و تنها اگر R یک حلقه‌ی تقسیم با مشخصه‌ی ۲ باشد.

(ب) $\operatorname{diam}(G(R))=۱$ اگر و تنها اگر R یک حلقه‌ی تقسیم با مشخصه‌ی ۲ نباشد و یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

(۱) $\bar{R}$ حلقه‌ی بولی یا جمعوند مستقیم ندارد.

(۲) $\bar{R} \cong \mathbb{Z}_۲$.

(ج) $\operatorname{diam}(G(R)) = ۳$ اگر و تنها اگر $\bar{R} \ncong \mathbb{Z}_۲$ و خارج‌قسمتی از $\bar{R}$ با $\mathbb{Z}_۲$ یکریخت باشد اما هیچ حلقه‌ی بولی با بیشتر از دو عنصر به‌عنوان جمع‌وند مستقیم نداشته باشد.

(د) $\operatorname{diam}(G(R)) = \infty$ اگر و تنها اگر $\bar{R}$ یک حلقه‌ی بولی با بیش از دو عنصر به‌عنوان جمع‌وند مستقیم داشته باشد.

برهان. قسمت (الف) با استفاده از لم ۱.۱.۲ نتیجه می‌شود. حال فرض کنیم R حلقه‌ی تقسیم با مشخصه‌ی ۲ نباشد. قسمت (ب)، (ج) و (د) را با هم اثبات می‌کنیم. توجه داریم که $\bar{R}$ یک حلقه‌ی خودانژکتیو راست منظم است، بنابراین با استفاده از قضیه‌ی ۱۷.۲.۳ نتیجه می‌گیریم $u(\bar{R}) = ۲, w$ یا ∞. حال برای تکمیل اثبات در هر مورد قطر را تعیین می‌کنیم.

حالت اول $u(\bar{R}) = ۲$ در این حالت طبق لم ۶.۲.۳، $\bar{R}$ هیچ حلقه‌ی بولی به‌عنوان جمع‌وند مستقیم ندارد یا $\bar{R} \cong \mathbb{Z}_۲$. توجه داریم که $\operatorname{diam}(G(\bar{R})) \in \{۱, ۲\}$.

بنابراین با استفاده از لم ۱.۲.۳، $\operatorname{diam}(G(R)) = ۲$.

حالت دوم $u(\bar{R}) = w$. اگر $\bar{R} \cong \mathbb{Z}_۲$، آن‌گاه $G(R)$ یک گراف کامل دوبخشی است، بنابراین $\operatorname{diam}(G(R)) = ۲$. اگر $\bar{R} \ncong \mathbb{Z}_۲$ در این حالت $usn(\bar{R}) = ۳$. پس طبق لم ۷.۲.۳، $\operatorname{diam}(G(\bar{R})) = ۳$.

بنابراین طبق لم ۱.۲.۳، $\operatorname{diam}(G(R)) = ۳$.

در حالت سوم $u(\bar{R}) = \infty$. با استفاده از قضیه‌ی ۱۷.۱.۲، $G(\bar{R})$ ناهمبند است، بنابراین $\operatorname{diam}(G(\bar{R})) = \infty$. پس با استفاده از لم ۱.۲.۳ داریم $\operatorname{diam}(G(R)) = \infty$. □

مراجع

[1] Afkhami M. and Khosh-Ahang F. (2013), Unit graphs of rings of polynomials and power series, **Arab. J. Math**. 2, no. 3, 233-246.

[2] Akbari S., Estaji E. and Khorsandi M. R. (2015), On the unit graph of a non-commutative ring, **Algebra Colloq**. 22, Special Issue no. 1, 817-822.

[3] Anderson D. F. and Badawi A. (2008), The total graph of a commutative ring, **J. Algebra**, 320 no. 7, 2706-2719.

[4] Anderson D. F. and Livingston P. S. (1999), The zero-divisor graph of a commutative ring, **J. Algebra**, 217 no. 2, 434-447.

[5] Anderson D. F. and Mulay S. B. (2007), On the diameter and girth of a zero-divisor graph, **J. Pure Appl. Algebra**, 210, no. 2, 543-550.

[6] Ara P., Good dearl K. R. and Omeara E. Pardo (1997), Diagonalization of matrices over regular rings, **Linear Algebra Appl**. 265, 147-163

[7] Ashrafi N., Maimani H. R. and Pournaki M. R., and Yassemi S. (2010), Unit graphs associated with rings, **Comm. Algebra**, 38, no. 8, 2851-2871.

[8] Ashrafi N. and Vamos P. (2005), On the unit sum number of some rings, Q. **J. Math**. 56, no. 1, 1-12.

[9] Beck I. (1988), Coloring of commutative rings, **J. Algebra**, 116, no. 1, 208-226.

[10] Bollabo B. (1979), as, Graph theory, An Introductory Course, **Springer-Verlag**, New York.

[11] Demeyer F. R., Makenzie T. and Schneider K. (2002), The zero-divisor graph of a commutative semigroup, **Semigroup Forum**, 65, no. 2, 206-214.

[12] Good dearl K.R. and von Neumann, (1991), Regular Rings, Krieger publishing Company, Malabar, Florida.

[13] Grimaldi R. P. (1989), Graphs from rings, Proceedings of the Twentieth Southeastern Conference on Combinatorics, **Graph Theory, and Computing (Boca Raton, FL), Congr**, Numer. 71 (1990), 95-103.

[14] Herwig B. and Ziegler M. (2002), A remark on sums of units, **Arch. Math**. (Basel) 79, no. 6, 430-431.

[15] Heydari F. and Nikmehr M. J. (2013), The unit graph of a left Artinian ring, **Acta Math. Hungar**, 139 no. 1-2, 134-146.

[16] Khurana D. and Srivastava A. K. (2007), Unit sum numbers of right self-injective rings, **Bull. Austral. Math. Soc**. 75, no. 3, 355-360.

[17] Khurana D. and Srivastava A. K. (2007), Right self-injective rings in which every element is a sum of two units, **J. Algebra Appl**, 6 (2007), no. 2, 281-286.

[18] Lam T. Y. (2001), **A first course in noncommutative rings**. **Springer-Verlag** New York, Inc.

[19] Lanski C. and Morti A. (2009), Ring elements as sums of units, **Cent. Eur. J. Math**. 7, 395-399.

[20] Maimani H. R., Pournaki M. R. and Yassemi S. (2011), Necessary and sufficient conditions for unit graphs to be Hamiltonian, **Pacific J. Math**. 249, no. 2, 419-429.

[21] Su H., Noguchi K. and Zhou Y. (2015), Finite commutative rings with higher genus unit graphs, **J. Algebra Appl**. 14, no. 1, 1550002, 14 pp.

[22] Su H., Tang G. and Zhou Y. (2015), Rings whose unit graphs are planar, **Publ. Math. Debrecen**, 86, no. 3-4, 363-376.

[23] Su H. and Zhou Y. (2014), On the girth of the unit graph of a ring, **J. Algebra Appl**. 13, no. 2, 1350082, 12 pp.

[24] Vamos P. (2005), 2-good rings, **Q. J. Math**, 56 no. 3, 417-430.

[25] Wolfson K. G. (1953), An ideal-theoretic characterization of the ring of all linear transformations, **Amer. J. Math**. 75, 358-386.

[26] Zelinsky D. (1954), Every linear transformation is a sum of nonsingular ones, **Proc. Amer. Math. Soc**. 5, 627-630.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

آبلی .... Abelian
اندیس پوچ‌توانی .... Index of nilpotency
ایده‌آل اول .... Prime ideal
ایده‌آل اول مینیمال .... Minimal prime ideal
ایده‌آل پوچ‌توان .... Nilpotent ideal
ایده‌آل ماکزیمال .... Maximal ideal
اجتماع .... Union
افراز .... Partition
القاشده .... Induced
بعد .... Dimension
به‌طور معادل .... Equvalently
به‌طور نسبی .... Relatively
پوچ‌توان .... Nilpotent
پوچ‌ساز .... Annihilator
تجزیه .... Decomposition
تصویری .... Projective
تناقض .... Contradiction
توسیع .... Extension
تولیدشده .... Generated
جزئی .... Partial
جفت .... Pair
جمع‌وند مستقیم .... Direct summand
حلقه‌ی تقسیم .... Division ring
حلقه‌ی جابه‌جایی .... Commutative ring
حلقه‌ی چندجمله‌ای .... Polynomial ring
حلقه‌ی کسرها .... Quotient ring

خودتوان	Idempotent
خودتوان مرکزی	Central idempotent
خودانژکتیو	Self-injective
دامنه‌ی صحیح	Integral domain
درجه	Degree
دسته‌بندی	Category
دوبخشی	Bipartite
دور	Cycle
دوسویی	Bijection
رأس	Vertex
زنجیر	Chain
زیرگراف القایی	Induced subgraph
زیرمجموعه	Subset
زیرمدول	Submodule
سری توانی	Power series
شرکت‌پذیر	Associative
ضرب مستقیم	Direct product
طول	Length
طوقه	Loop
عضو	Member
عنصر	Element
غیرتکین	Non-singular
غیرتهی	Non-empty
غیر معکوس‌پذیر	Non-invertible
فاصله	Distance
قطر	Diameter
کامل	Complete
کاهشی	Reduced
کمر	Girth
گراف	Graph
گراف یکه	Unit graph
متعامد	Orthogonal
متغیر	Variable
متمایز	Distinct

متناهی .... Finite
مجاور .... Adjacent
مجزا .... Disjoint
مختلف .... Various
مدول .... Modulo
مسیر .... Path
مشخصه .... Characteristic
مقسوم‌علیه صفر .... Zero-divisor
مقسوم‌علیه صفر بدیهی .... Trivial zero-divisor
معکوس‌پذیر .... Invertible
منظم .... Regular
میدان .... Field
نابرابری .... Inequality
نامتناهی .... Infinite
نامتناهی محض .... Purely infinite
نامنفی .... Non-negative
ناهمبند .... Disconnected
نگاشت .... Map
وفادار .... Faithful
همانی .... Identitiy
همبند .... Connected
همریختی .... Homomorphism
همسایه .... Neighbor
یال .... Edge
یک‌به‌یک .... One by One
تک‌جمله‌ای .... Monomial
یکریختی .... Isomorphism

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Abelian	آبلی
Adjacent	مجاور
Annihilator	پوچ‌ساز
Associative	شرکت‌پذیر
Bijection	دوسویی
Bipartite	دوبخشی
Central idempotent	خودتوان مرکزی
Chain	زنجیر
Characteristic	مشخصه
Commutative ring	حلقه‌ی جابه‌جایی
Complete	کامل
Connected	همبند
Contradiction	تناقض
Cycle	دور
Decomposition	تجزیه
Degree	درجه
Diameter	قطر
Dimension	بعد
Direct product	ضرب مستقیم
Direct summand	جمع‌وند مستقیم
Disconnected	ناهمبند
Disjoint	مجزا
Distance	فاصله
Distinct	متمایز
Division ring	حلقه‌ی تقسیم
Edge	یال

Element .... عنصر
Equvalently .... به‌طور معادل
Extension .... توسیع
Faithful .... وفادار
Field .... میدان
Finite .... متناهی
Generated .... تولیدشده
Girth .... کمر
Graph .... گراف
Homomorphism .... همریختی
Idempotent .... خودتوان
Identitiy .... همانی
Index of nilpotency .... اندیس پوچ‌توانی
Induced .... القاشده
Induced subgraph .... زیرگراف القایی
Inequality .... نابرابری
Infinite .... نامتناهی
Integral domain .... دامنه‌ی صحیح
Invertible .... معکوس‌پذیر
Isomorphism .... یکریختی
Length .... طول
Loop .... طوقه
Map .... نگاشت
Maximal ideal .... ایده‌آل ماکزیمال
Member .... عضو
Minimal prime ideal .... ایده‌آل اول مینیمال
Modulo .... مدول
Monomial .... تک‌جمله‌ای
Neighbor .... همسایه
Nilpotent .... پوچ‌توان
Nilpotent ideal .... ایده‌آل پوچ‌توان
Non-empty .... غیرتهی
Non-invertible .... غیر معکوس‌پذیر
Non-negative .... نامنفی

Non-singular	غیرتکین
One by One	یک‌به‌یک
Orthogonal	متعامد
Pair	جفت
Partial	جزئی
Partition	افراز
Path	مسیر
Polynomial ring	حلقه‌ی چندجمله‌ای
Power series	سری توانی
Prime ideal	ایده‌آل اول
Projective	تصویری
Purely infinite	نامتناهی محض
Quotient ring	حلقه‌ی کسرها
Reduced	کاهشی
Regular	منظم
Relatively	به‌طور نسبی
Self-injective	خودانژکتیو
Submodule	زیرمدول
Subset	زیرمجموعه
Trivial zero-divisor	مقسوم‌علیه صفر بدیهی
Union	اجتماع
Unit graph	گراف یکه
Variable	متغیر
Various	مختلف
Vertex	رأس
Zero-divisor	مقسوم‌علیه صفر

Abstract

Let R be a ring. The unit graph of R, denoted by $G(R)$, is the simple graph defined on all elements of R, and two distinct vertices x and y are adjacent if and only if $x+y$ is a unit of R. The diameter of a simple graph G, denoted by $\text{diam}(G)$, is the longest distance between all pairs of vertices of the graph G. In this thesis, we prove that for each integer $n \geq 1$, there exists a ring R such that $n \leq \text{diam}(G(R)) \leq 2n$. We also show that $\text{diam}(G(R)) \in \{1, 2, 3, \infty\}$ for a ring R with $R/J(R)$ self-injective and classify all those rings with $\text{diam}(G(R)) = 1, 2, 3$ and ∞ respectively.

Furthermore, if R is a ring, then the following are equivalent:

(i) $\text{diam}(G(\bar{R})) < \text{diam}(G(R))$.

(ii) R is a local ring with $J(R) \neq 0$ and $2 \in J(R)$

(iii) $\text{diam}(G(R)) = 2$ and $\text{diam}(G(\bar{R})) = 1$.

Also for a right self-injective ring R, the following conditions are equivalent:

(i) Every element of R is a sum of two units.

(ii) Identity of R is a sum of two units.

(iii) R has no factor ring isomorphic to $\mathbb{Z}_2$.

For any nonzero regular right self-injective ring R, where $usn(M_2(R)) = 2$. In particular, $usn(R) = 2$ for any purely infinitive regular right self-injective ring R.

Finally we show a nonzero regular right self-injective ring R has a ring decomposition $R = S \times T$ where $usn(S) = 1$ or 2 and T is an abelian regular right self-injective ring.

Keywords: simple graph, unit graph, regular self-injective ring, commutative ring, connected graph, diam graph

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in Algebra

The Diameter of Unit Graphs of Rings

By: Maryam Mahmoodi

Supervisor:

Ebrahim Hashemi

Advisor:

Abdollah All Hevaz

November 2019