

الْحَمْدُ لِلَّهِ



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی و کنترل

رساله دکتری

کنترل بهینه زمانی و پایدارسازی سیستم‌های تاخیری با مرتبه کسری

نگارنده: فرگس طهماسبی

استادان راهنما

دکتر حجت احسنی طهرانی
دکتر یدالله اردوخانی

آبان ۹۸



فرم شماره 12: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)
(ویژه دانشجویان ورودی های 94 و ما قبل)

بدینوسیله گواهی می شود خانم نرگس طهماسبی دانشجوی دکتری رشته ریاضی کاربردی به شماره دانشجویی 9216975 ورودی مهر ماه سال 1392 در تاریخ 1398/8/12 از رساله نظری خود با عنوان: کنترل بهینه زمانی و پایدارسازی سیستم های تاخیری با مرتبه کسری دفاع و با اخذ نمره 19/20 به درجه عالی نائل گردید.

<input type="checkbox"/> الف) درجه عالی: نمره 19-20	<input checked="" type="checkbox"/> ب) درجه بسیار خوب: نمره 18/99 - 17
<input type="checkbox"/> ج) درجه خوب: نمره 16/99 - 15	<input type="checkbox"/> د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد
<input type="checkbox"/> ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد	

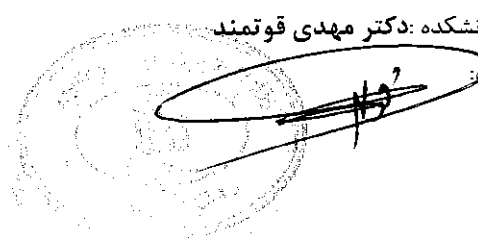
ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
1	دکتر حجت احسنی طهرانی	استاد راهنما	دانشیار	
2	دکتر یدالله اردوخانی	استاد راهنما	استاد	
3	دکتر سهراب عفتی	استاد مدعو خارجی	استاد	
4	دکتر علیرضا ناظمی	استاد مدعو داخلی	دانشیار	
5	دکتر محمدهادی نوری اسکندری	استاد مدعو داخلی	استادیار	
6	دکتر مهدی قوتمند	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده		

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی خانم نرگس طهماسبی بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی قوتمند

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:



تقدیم به
روح آسمانی مادرم

سپاسگزاری...

سپاس خدایی که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او را ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. در ابتدا از استاد با کمالات و شایسته، جناب آقای دکتر احسنی طهرانی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را به عهده گرفتند، از استاد راهنمایم فرهیخته و بزرگووارم جناب آقای دکتر اردوخانی و از اساتید داور گرانقدر، جناب آقای دکتر عفتی، جناب آقای دکتر ناظمی و جناب آقای دکتر نوری که زحمت مطالعه و داوری این رساله را متقبل شده‌اند، کمال تشکر و قدردانی را دارم. باشد که این خردترین بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

همچنین از خانواده عزیزم و دوستان مهربانم که بودنشان تاج افتخاریست بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم، سپاسگزارم.

نرگس طهماسبی
آبان ۹۸

تعهد نامه

اینجانب **نرگس طهماسبی** دانشجوی دکتری رشته **ریاضی کاربردی علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **کنترل بهینه زمانی و پایداری سیستم‌های تاخیری با مرتبه کسری**، تحت راهنمایی **حجت احسنی طهرانی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

نرگس طهماسبی

آبان ۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

این رساله، رده‌ای از سیستم‌های مرتبه صحیح و کسری دارای تاخیر زمانی را در نظر می‌گیرد و به بررسی روش‌های پایداری و طراحی کنترل‌گر برای این سیستم‌ها می‌پردازد. یکی از پدیده‌هایی که در بیشتر سیستم‌های فیزیکی رخ می‌دهد وجود جمله تاخیر زمانی است لذا آنالیز پایداری و طراحی کنترل‌گر در حضور تاخیر زمانی لازم و ضروری است. از آنجایی که در طراحی کنترل‌گر ورودی سیستم دارای هزینه است، برای کاهش هزینه و دامنه نوسانات سیگنال‌های کنترل، ماتریس پسخورد حالت پارامتری را محاسبه نموده و مقادیر پارامترها را به گونه‌ای تعیین می‌کنیم که نرم ماتریس پسخورد حداقل مقدار ممکن شده و کنترل سیستم بهینه زمانی گردد. این رساله در دو بخش تنظیم گردیده است، بخش اول به بررسی برخی روش‌های ارائه شده در زمینه تحلیل پایداری و طراحی کنترل‌گر در سیستم‌های خطی تاخیری مرتبه صحیح و سیستم‌های مرتبه کسری می‌پردازد و در بخش دوم روشی بر پایه تبدیلات تشابهی برای پایداری سازی سیستم‌های زمان پیوسته و گسسته پیشنهاد می‌دهیم. همچنین کمینه‌سازی نرم ماتریس بهره را با حل مساله برنامه‌ریزی غیرخطی انجام می‌دهیم و مقایسه‌ای با روش‌های ارائه شده صورت می‌گیرد. در انتها مزایای روش‌های ارائه شده با استفاده از شبیه‌سازی بر روی مثال‌های مختلف بررسی شده است و نتایج شبیه‌سازی، اثرات و کارایی روش پیشنهادی را نشان می‌دهند.

کلمات کلیدی: تأخیر زمانی، مشتق مرتبه کسری، پایداری عملی، تخصیص مقادیر ویژه جزئی، کمینه نرم، تبدیلات تشابهی، پسخورد حالت.

لیست مقالات مستخرج از رساله

1. N. Tahmasbi, H. A. Tehrani and J. Esmaeili, (2019), "Practical stabilization of time-delay fractional-order systems by parametric controllers", **ISA Transactions**, Accepted.
2. N. Tahmasbi, H. A. Tehrani and Y. Ordokhani, (2019), "Control a class of fractional-order systems with delay in a specified sector", **Journal of Solid and Fluid Mechanics**, Accepted.
3. N. Tahmasbi, H. A. Tehrani, Y. Ordokhani and S. Mirassadi (2019), "Partial eigenvalue assignment of descriptor fractional discrete-time linear systems by parametric state feedback", **Computational Methods for Differential Equations**, Accepted.
4. N. Tahmasbi and H. A. Tehrani, (2019), "Stabilization of time-delay systems with minimize norm of feedback matrix", **International Journal of Computing Science and Mathematics**, Under Review.
5. N. Tahmasbi and H. A. Tehrani, (2017), "Parameterization of feedback matrix in time-delay systems, **The 9th Seminar on Linear Algebra and its Applications**", Tabriz University, Tabriz, Iran, 5-6 July.
6. N. Tahmasbi and H. A. Tehrani, (2017), "Norm minimization controller in fractional systems with delay, **The 9th Seminar on Linear Algebra and its Applications**", Tabriz University, Tabriz, Iran, 5-6 July.
7. N. Tahmasbi and H. A. Tehrani, (2016), "Control and Stability of the Time-delay Linear Systems, **Journal of Information and Computing Science**", Vol. 11, No. 4, pp. 291–297.

فهرست مطالب

م	فهرست تصاویر
س	فهرست جداول
ف	فهرست نشانه‌های اختصاری
۱	۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی
۱	۱.۱ تعاریف و مفاهیم ریاضی
۳	۲.۱ تعاریف و پیش‌نیازهای کنترل
۷	۱.۲.۱ پایداری سیستم‌های کنترلی
۱۰	۲.۲.۱ نامساوی ماتریسی خطی
۱۱	۳.۱ مروری بر حسابان کسری
۱۲	۱.۳.۱ انتگرال و مشتق مرتبه کسری
۱۵	۲.۳.۱ لم و قضایا
۱۹	۲ روش تخصیص مقادیر ویژه و پارامتری‌سازی کنترل‌گرها
۱۹	۱.۲ روش تخصیص مقادیر ویژه (EVA)
۱۹	۱.۱.۲ تاریخچه
۲۰	۲.۱.۲ وجود و یکتایی جواب برای مسئله تخصیص مقدار ویژه
۲۱	۳.۱.۲ تخصیص مقادیر ویژه با استفاده از تبدیلات تشابهی
۲۴	۲.۲ روش تخصیص مقدار ویژه جزئی (PEVA)
۲۴	۱.۲.۲ تاریخچه
۲۵	۲.۲.۲ وجود و یکتایی جواب برای مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی
۲۵	۳.۲.۲ تخصیص مقادیر ویژه جزئی با استفاده از تبدیلات تشابهی
۲۷	۳.۲ پارامتری‌سازی ماتریس پسخورد حالت
۲۷	۱.۳.۲ کمینه‌سازی نرم ماتریس پسخورد با پارامتری‌سازی خطی
۳۲	۲.۳.۲ پارامتری‌سازی غیرخطی ماتریس پسخورد حالت
۳۹	۳ سیستم‌های تاخیری
۳۹	۱.۳ معادلات دیفرانسیل با تأخیر زمانی

۴۲	تاریخچه سیستم‌های تاخیری	۲.۳
۴۶	سیستم‌های تاخیری زمان-پیوسته	۳.۳
۴۶	کنترل‌پذیری سیستم‌های تاخیری	۱.۳.۳
۴۹	پایداری سیستم‌های تاخیری	۲.۳.۳
۵۱	تحلیل پایداری براساس توابع لیاپانوف	۳.۳.۳
۶۱	سیستم‌های تاخیری زمان-گسسته	۴.۳
۶۱	تحلیل پایداری از طریق الحاق	۱.۴.۳
۶۲	تحلیل پایداری براساس توابع لیاپانوف	۲.۴.۳
۶۴	مساله LQR با افق نامتناهی برای سیستم‌های زمان-گسسته	۳.۴.۳
۶۶	پایداری سیستم تاخیری زمان-گسسته با روش EVA	۵.۳
۶۸	روش PEVA برای سیستم‌های تاخیری با کمینه‌سازی نرم پس‌خورد	۶.۳
۷۷	کنترل بهینه زمانی	۷.۳
۸۳	سیستم‌های مرتبه‌کسری	۴
۸۳	تاریخچه	۱.۴
۸۴	سیستم‌های مرتبه‌کسری زمان-پیوسته	۲.۴
۸۴	پایداری سیستم‌های مرتبه‌کسری	۱.۲.۴
۸۷	کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری سیستم‌های مرتبه‌کسری	۲.۲.۴
۸۹	سیستم‌های مرتبه‌کسری مثبت	۳.۲.۴
۹۱	سیستم‌های مرتبه‌کسری زمان-گسسته	۳.۴
۹۱	نمایش سیستم‌های زمان-گسسته مرتبه‌کسری	۱.۳.۴
۹۳	پایداری سیستم‌های مرتبه‌کسری	۲.۳.۴
۹۴	سیستم‌های مرتبه‌کسری مثبت	۳.۳.۴
۹۵	پایداری عملی	۴.۳.۴
۹۹	سیستم‌های تاخیری با مرتبه‌کسری	۵
۹۹	تاریخچه	۱.۵
۱۰۰	سیستم‌های تاخیری مرتبه‌کسری زمان-گسسته	۲.۵
۱۰۴	پایدارسازی عملی سیستم زمان-گسسته با کنترل‌گر پارامتریک	۳.۵
۱۰۵	پایداری عملی و مجانبی	۱.۳.۵
۱۰۷	الگوریتم	۲.۳.۵
۱۰۷	مثال‌های عددی	۳.۳.۵
۱۱۸	سیستم‌های تاخیری مرتبه‌کسری زمان-پیوسته	۴.۵
۱۱۸	پایداری سیستم‌های مثبت	۱.۴.۵
۱۲۰	پایداری سیستم‌های زمان-پیوسته با استفاده از تبدیلات تشابهی	۲.۴.۵
۱۳۰	نتیجه‌گیری و پیشنهادات	۵.۵
۱۳۰	نتیجه‌گیری	۱.۵.۵
۱۳۱	پیشنهادات	۲.۵.۵

۱۳۳	مراجع
۱۴۳	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۱۴۵	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فهرست تصاویر

۷	پایدار مجانبی و لیاپانوف	۱.۱
۱۲	تابع گاما در محدوده اعداد حقیقی	۲.۱
۳۳	مقایسه رفتار همگرایی مولفه‌های بردار حالت در مثال ۳.۶.۳	۱.۲
۴۰	پانتوگراف (حمل و نقل و استودیو)	۱.۳
۴۴	آونگ ساده	۲.۳
۴۶	طرح ساده از سیستم دوش	۳.۳
۴۷	سیستم حرکتی از راه دور	۴.۳
۴۷	جراحی از راه دور	۵.۳
۴۹	وضعیت ریشه‌های معادله مشخصه	۶.۳
۵۲	ایده روش رازومیخین	۷.۳
۶۰	رفتار همگرایی بردار حالت در مثال ۳.۳.۳	۸.۳
۶۰	رفتار همگرایی بردارهای حالت و ورودی در مثال ۴.۳.۳	۹.۳
۶۳	رفتار همگرایی بردار حالت در مثال ۱.۴.۳	۱۰.۳
۶۵	رفتار همگرایی بردار حالت در مثال ۲.۴.۳	۱۱.۳
۶۸	رفتار همگرایی بردارهای حالت در مثال ۱.۵.۳	۱۲.۳
۶۹	رفتار همگرایی بردارهای ورودی در مثال ۱.۵.۳	۱۳.۳
۷۰	رفتار همگرایی بردارهای حالت در مثال ۲.۵.۳	۱۴.۳
۷۱	رفتار همگرایی بردارهای ورودی در مثال ۲.۵.۳	۱۵.۳
۷۳	رفتار همگرایی مولفه‌های بردار حالت در مثال ۲.۶.۳	۱۶.۳
۷۴	رفتار همگرایی مولفه‌های بردار ورودی در مثال ۲.۶.۳	۱۷.۳
۷۸	مقایسه رفتار همگرایی مولفه‌های بردار حالت در مثال ۳.۶.۳	۱۸.۳
۷۹	مقایسه رفتار همگرایی مولفه‌های بردار ورودی در مثال ۳.۶.۳	۱۹.۳
۸۱	رفتار همگرایی بردارهای حالت و ورودی در مثال ۱.۷.۳	۲۰.۳
۸۶	نواحی پایداری برای سیستم (۵.۴)	۱.۴
۹۰	تصویرسازی نتیجه ۱.۲.۴	۲.۴
۹۱	ترکیب سری یک نگهدارنده مرتبه صفر، سیستم کسری زمان-پیوسته و یک نمونه بردار	۳.۴
۹۱	ترکیب سری یک نگهدارنده مرتبه صفر، سیستم صحیح زمان-پیوسته و یک نمونه بردار	۴.۴

۱۰۲	رفتار همگرایی بردارهای حالت در مثال ۱.۲.۵	۱.۵
۱۰۲	رفتار همگرایی بردارهای ورودی در مثال ۱.۲.۵	۲.۵
۱۰۲	مقایسه رفتار همگرایی بردار حالت در مثال ۱.۲.۵	۳.۵
۱۱۲	مقایسه رفتار همگرایی مولفه بردار حالت x_1 در مثال ۱.۳.۵	۴.۵
۱۱۳	مقایسه رفتار همگرایی مولفه بردار حالت x_2 در مثال ۱.۳.۵	۵.۵
۱۱۳	مقایسه رفتار همگرایی مولفه بردار حالت x_3 در مثال ۱.۳.۵	۶.۵
۱۱۴	مقایسه رفتار همگرایی مولفه بردار ورودی u_1 در مثال ۱.۳.۵	۷.۵
۱۱۵	مقایسه رفتار همگرایی مولفه بردار ورودی u_2 در مثال ۱.۳.۵	۸.۵
۱۱۷	رفتار همگرایی مولفه‌های بردار حالت x در مثال ۲.۳.۵	۹.۵
۱۱۷	رفتار همگرایی مولفه‌های بردار ورودی u در مثال ۲.۳.۵	۱۰.۵
۱۲۳	نمایش مقادیر ویژه در ناحیه مشخص	۱۱.۵
۱۲۶	نمایش مقادیر ویژه در ناحیه مشخص از مثال ۲.۴.۵	۱۲.۵
۱۲۶	رفتار همگرایی مولفه‌های بردار حالت در مثال ۲.۴.۵	۱۳.۵
۱۲۷	رفتار همگرایی مولفه‌های بردار ورودی در مثال ۲.۴.۵	۱۴.۵
۱۲۷	رفتار همگرایی مولفه‌های بردار حالت در مثال ۳.۴.۵	۱۵.۵
۱۲۸	رفتار همگرایی مولفه‌های بردار ورودی در مثال ۳.۴.۵	۱۶.۵
۱۲۹	رفتار همگرایی مولفه‌های بردار حالت در مثال ۴.۴.۵	۱۷.۵
۱۳۰	رفتار همگرایی مولفه‌های بردار ورودی در مثال ۴.۴.۵	۱۸.۵

فهرست جداول

۵۹	۳.۳.۳	مقایسه مقادیر کران بالای تاخیر	۱.۳
۷۷	۳.۶.۳	مقایسه نرم ماتریس با روش‌های مختلف برای مثال	۲.۳
۱۱۲	۱.۳.۵	مقایسه نرم ماتریس با روش‌های مختلف برای مثال	۱.۵
۱۱۶	۲.۳.۵	مقایسه نرم ماتریس با روش‌های مختلف برای مثال	۲.۵

فهرست علائم و اختصارات

فهرست نشانه‌های اختصاری

\mathbb{R}	مجموعه اعداد حقیقی
\mathbb{R}_+	مجموعه اعداد حقیقی مثبت
$\mathbb{R}^{n \times m}$	فضای ماتریس‌های حقیقی $n \times m$
$C[a, b]$	فضای توابع پیوسته روی بازه $[a, b]$
$arg(\cdot)$	تابع آرگومان
$\Gamma(\cdot)$	تابع گاما
$L(\cdot)$	تبدیل لاپلاس
$I^\alpha(\cdot)$	عملگر انتگرال مرتبه کسری
$D^\alpha(\cdot)$	عملگر مشتق مرتبه کسری
Δ^α	عملگر تفاضلی پسرو کسری
*	عناصر متقارن در ماتریس‌های متقارن
$P > 0$	ماتریس متقارن و معین مثبت
$P \geq 0$	ماتریس متقارن و نیمه معین مثبت
$col\{\cdot\}$	بردار ستونی
$\lambda_{min}, \lambda_{max}(P)$	مقادیر ویژه ماکزیمم و مینیمم ماتریس متقارن P
$\rho(P)$	P شعاع طیفی ماتریس $(\max \lambda_i(P))$
$\Omega(\cdot)$	طیف مقادیر ویژه

فهرست کلمات اختصاری

LTI.....	ناوردای زمانی خطی (نامتغیر با زمان)
ODE.....	معادلات دیفرانسیل معمولی
DDE.....	معادلات دیفرانسیل تاخیری
FDE.....	معادلات دیفرانسیل کسری
RDE.....	معادلات دیفرانسیل تعویقی
NDE.....	معادلات دیفرانسیل خنثی

TDs	سیستم با تاخیر زمانی (تاخیری)
FOs	سیستم مرتبه کسری
FOTDs	سیستم تاخیری کسری
EVA	تخصیص مقادیر ویژه
PEVA	تخصیص مقادیر ویژه جزئی
SISO	سیستم تک ورودی-تک خروجی
MIMO	سیستم چند ورودی-چند خروجی
LMI	نامساوی ماتریسی خطی
LKF	تابع لیاپانوف-کراسوفسکی
SMC	کنترل مد لغزشی
LQR	تنظیم کننده درجه دوم خطی
FTS	پایداری زمان متناهی

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ تعاریف و مفاهیم ریاضی

تعاریف و قضایای این بخش از مراجع [۱] و [۲] گردآوری شده است.

تعریف ۱.۱.۱. مجموعه‌ای از mn عنصر مرتبط در یک آرایه مستطیلی، متشکل از m سطر و n ستون است که یک ماتریس مرتبه $m \times n$ نامیده می‌شود و به صورت زیر نمایش داده می‌شود،

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

که به صورت $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ، $(j = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, m)$ نیز نمایش داده می‌شود. مجموعه همه ماتریس‌های $m \times n$ با عناصر طبیعی، با $\mathbb{R}^{m \times n}$ نشان داده می‌شوند.

تعریف ۲.۱.۱. (نرم فروبنیوس) نرم

$$\|A_{n \times n}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \text{tr}(AA^T),$$

که یک نرم ماتریسی است، نرم فروبنیوس^۱ نامیده می‌شود.

^۱ Frobenius

تعریف ۳.۱.۱. چندجمله‌ای مشخصه یا معادله مشخصه^۲ ماتریس $A_{n \times n}$ به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$P_n(\lambda) = \det(I\lambda - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n),$$

به طوری که ریشه‌های $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ، مقادیر ویژه ماتریس A خوانده می‌شود و مجموعه آن‌ها را طیف^۳ A گویند و اغلب با نماد $\Omega(A)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۴.۱.۱. (بردار ویژه) اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، بردار ناصفر x یک بردار ویژه^۴ راست (یا فقط یک بردار ویژه) A است هرگاه Ax مضربی از x باشد و یا $Ax = \lambda x$ و (λ, x) یک زوج ویژه نامیده می‌شود. بردار y تولید شده توسط $y^T A = \lambda y^T$ را بردار ویژه چپ ماتریس A می‌گویند.

تعریف ۵.۱.۱. (ماتریس‌های متشابه) ماتریس‌های A و B را متشابه نامند هرگاه ماتریس نامنفرد P موجود باشد به طوری که $B = P^{-1}AP$.

تعریف ۶.۱.۱. (تقریب پاده^۵) فرض کنید $f(t)$ تابع تحلیلی با سری مک‌لورن زیر باشد،

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n, \quad 0 \leq t \leq T$$

آن‌گاه تقریب پاده برای $f(t)$ از مرتبه $[L, M]$ که با $[L, M]f(t)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر است،

$$[L, M]f(t) = \frac{P_L(t)}{Q_M(t)} = \frac{p_0 + p_1 t + \cdots + p_L t^L}{1 + q_1 t + \cdots + q_M t^M} = \frac{\sum_{n=0}^L p_n t^n}{\sum_{n=0}^M q_n t^n},$$

که در آن $q_0 = 1$ در نظر می‌گیریم، به علاوه صورت و مخرج هیچ عامل مشترکی ندارند. در اینجا داریم،

$$f(t) \simeq \sum_{n=0}^{L+M} f_n t^n,$$

بنابراین

$$f(t) - [L, M]f(t) = O(t^{L+M+1}) \implies f(t) \sum_{n=0}^M q_n t^n - \sum_{n=0}^L p_n t^n = O(t^{L+M+1}), \quad (1.1)$$

از (۱.۱) معادلات جبری-خطی زیر را داریم،

$$\begin{cases} f_L q_1 + \cdots + f_{L-M+1} q_M = -f_{L+1} \\ f_{L+1} q_1 + \cdots + f_{L-M+2} q_M = -f_{L+2} \\ \vdots \\ f_{L+M+1} q_1 + \cdots + f_L q_M = -f_{L+M} \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} p_0 = f_0 \\ p_1 = f_1 + f_0 q_1 \\ \vdots \\ p_L = f_L + f_{L-1} q_1 + \cdots + f_0 q_L \end{cases} \quad (3.1)$$

² Characteristic Equation

³ Spectrum

⁴ Eigen Vector

⁵ Pade Approximation

از (۲.۱)، ابتدا همه ضرایب q_n ، $1 \leq n \leq M$ را محاسبه می‌کنیم. سپس ضرایب p_n ، $0 \leq n \leq L$ را از (۳.۱) به دست می‌آوریم.

تعریف ۷.۱.۱ (ماتریس متزله) ^۶ ماتریس $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ یک ماتریس متزله نامیده می‌شود، اگر همه‌ی درایه‌های خارج قطر اصلی نامنفی باشند و با نماد $A \in M_n$ نمایش می‌دهیم.

۲.۱ تعاریف و پیش‌نیازهای کنترل

تعاریف و قضایای این بخش از مراجع [۴] و [۳] گردآوری شده است. در روش‌های مبتنی بر کنترل کلاسیک، مدل‌سازی و تحلیل سیستم‌ها بر اساس تابع تبدیل ^۷ سیستم صورت می‌گیرد که این تابع ارتباط بین ورودی و خروجی سیستم را بیان می‌دارد، اما در روش‌های مبتنی بر کنترل مدرن، مدل‌سازی سیستم بر پایه فضای حالت ^۸ است. از جمله مزایای این روش مدل‌سازی، قابلیت استفاده از آن برای سیستم‌های چند ورودی-چند خروجی، سیستم‌های خطی، غیرخطی و متغیر با زمان است. فرم کلی معادلات فضای حالت به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t] \\ y(t) = g[x(t), u(t), t], \end{cases} \quad (۴.۱)$$

که در آن $x_{n \times 1}$ ، $y_{k \times 1}$ و $u_{m \times 1}$ به ترتیب بردارهای ورودی و خروجی هستند. در حالت کلی f و g نیز توابع متغیر با زمان هستند که نحوه ارتباط بردارهای حالت، ورودی و خروجی را نشان می‌دهند.

تعریف ۱.۲.۱. معادله دینامیکی ورودی-خروجی سیستم خطی به صورت،

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0u(t), \quad (۵.۱)$$

و به طور خلاصه

$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^m b_k u^{(k)}(t), \quad a_n = 1, \quad (۶.۱)$$

بیان می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱. با استفاده از تبدیل لاپلاس بر روی معادله ورودی-خروجی سیستم با شرایط اولیه صفر، شکل ورودی-خروجی فوق به صورت تابع تبدیل،

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}, \quad (۷.۱)$$

بیان می‌شود که منحصر به فرد است. چند جمله‌ای مخرج را چند جمله‌ای مشخصه سیستم و ریشه‌های آن را قطب‌های سیستم گوئیم و ریشه‌های چند جمله‌ای صورت، صفرهای سیستم نامیده می‌شود.

⁶ Metzler

⁷ Transfer Function

⁸ State Space

تعریف ۳.۲.۱. در صورتی که سیستم به صورت،

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = b_0u(t), \quad (۸.۱)$$

باشد، آن را سیستم تک ورودی-تک خروجی^۹ (SISO) گویند. در غیر این صورت سیستم چندورودی-چندخروجی^{۱۰} (MIMO) خواهد بود.

در روش‌های مبتنی بر کنترل مدرن، مدل‌سازی سیستم براساس فضای حالت است و برای سیستم‌های خطی ناوردای زمانی^{۱۱} (LTI) معادلات به صورت زیر بیان می‌شوند

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (۹.۱)$$

وقتی که $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^r$ بردارهای حالت، ورودی و خروجی، $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ماتریس‌های حالت، ورودی، خروجی و D ماتریسی است که ارتباط بین ورودی و خروجی را نشان می‌دهد. معادله (۹.۱) را معادله سیستم پیوسته-زمانی (زمان-پیوسته) گویند. برای برخی از سیستم‌ها، بردار حالت یا ورودی و یا هر دو در هر لحظه از زمان قابل محاسبه یا اندازه‌گیری نیستند، بلکه در دنباله‌ای از نقاط t_i , $(i = 0, 1, \dots, n)$ ، این کمیت‌ها در دسترس است. در این موارد، معادله دیفرانسیل حالت سیستم به‌طور معادل به صورت معادله تفاضلی مرتبه اول زیر است،

$$\begin{cases} x(i+1) = Ax(i) + Bu(i) \\ y(i) = Cx(i) + Du(i), \end{cases} \quad (۱۰.۱)$$

که در آن $x(i)$ و $u(i)$ به ترتیب، بردارهای حالت و ورودی در زمان t_i هستند. معادله (۱۰.۱) را معادله سیستم گسسته-زمانی گویند.

تعریف ۴.۲.۱. [۵] سیستم (۱۰.۱) مثبت^{۱۲} (داخلی) نامیده می‌شود اگر به‌ازای هر $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ و $u_i \in \mathbb{R}_+^m$ داشته باشیم، $x_i \in \mathbb{R}_+^n$ و $y_i \in \mathbb{R}_+^p$ ($\forall i \in \mathbb{Z}_+$).

قضیه ۱.۲.۱. [۵] سیستم (۱۰.۱) مثبت نامیده می‌شود اگر و تنها اگر،

$$A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, \quad C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}, \quad D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}. \quad (۱۱.۱)$$

تعریف ۵.۲.۱. (کنترل‌پذیری) سیستم خطی ناوردای زمانی،

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (۱۲.۱)$$

را به‌ازای $t \geq t_0$ و با حالت اولیه‌ی $x(t_0) = x_0$ در نظر بگیرید، سیستم کنترل‌پذیر^{۱۳} نامیده می‌شود، اگر با شروع از حالت اولیه x_0 ، با انتخاب ورودی مناسب $u(t)$ ، در زمان متناهی t_1 بتوان سیستم را به حالت نهایی (دلخواه) $x_1 = x(t_1) = 0$ هدایت کرد. کنترل‌پذیری یک سیستم اهمیت اساسی دارد زیرا در مسائلی که هدف انتقال سیستم از حالت اولیه‌ی دلخواهی به حالت تعادل باشد کنترل‌پذیری سیستم شرط لازم برای وجود جواب است.

⁹ Single Input Single Output

¹⁰ Multi Input Multi Output

¹¹ Linear Time-Invariant

¹² Positive

¹³ Controlable

تعریف ۶.۲.۱. برای سیستم تعریف شده با معادله (۹.۱)، ماتریس کنترل‌پذیری به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \quad (۱۳.۱)$$

تعریف ۷.۲.۱. سیستم (۹.۱) را کاملاً کنترل‌پذیر گوییم هرگاه به‌ازای هر $x_0 \in \mathbb{R}^n$ سیستم به حالت دلخواه کنترل‌پذیر باشد.

ملاحظه ۱.۲.۱. سیستم خطی توصیف شده با معادلات (۹.۱) کاملاً کنترل‌پذیر است اگر و فقط اگر ستون‌های ماتریس کنترل‌پذیری سیستم، فضای \mathbb{R}^n را تولید کند و یا به عبارت دیگر سیستم کنترل‌پذیر است اگر و تنها اگر $\text{rank}(Q_c) = n$ باشد.

قضیه ۲.۲.۱. (معیار کنترل‌پذیری سیستم زمان-پیوسته) فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ($m \leq n$) باشد، عبارت‌های زیر معادل هستند:

۱. دستگاه (۹.۱) کنترل‌پذیر است.
 ۲. ماتریس کنترل‌پذیری $Q_{n \times nm}$ ، رتبه کامل n است.
 ۳. اگر (λ, x) ، زوج ویژه ماتریس A^T باشد ($x^T A = \lambda x^T$)، آن‌گاه $x^T B \neq 0$.
 ۴. برای هر مقدار ویژه λ از ماتریس A ، $\text{rank}(A - \lambda I, B) = n$.
 ۵. با انتخاب مناسب ماتریس K ، مقادیر ویژه مطلوب را می‌توان به ماتریس $A + BK$ تخصیص داد.
- اکنون ماتریس کنترل‌پذیری (۱۳.۱) را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم b_1, b_2, \dots, b_m به ترتیب ستون‌های اول تا m ام ماتریس B باشند، بنابراین می‌توان نوشت،

$$Q_c = \begin{bmatrix} b_1 \dots b_m & Ab_1 \dots Ab_m \dots & A^{n-1}b_1 \dots A^{n-1}b_m \end{bmatrix}. \quad (۱۴.۱)$$

چون دستگاه کنترل‌پذیر است، پس می‌توان n ستون از اولین ستون‌های ماتریس Q_c را طوری به‌دست آورد که مستقل خطی باشند. برای نمایش آسان‌تر، ستون‌های Q را در یک بلوک مستطیلی که n سطر و m ستون دارد به صورت زیر نمایش می‌دهیم،

$$\begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_m \\ Ab_1 & \dots & Ab_m \\ A^2 b_1 & \dots & A^2 b_m \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A^{n-1} b_1 & \dots & A^{n-1} b_m \end{bmatrix}, \quad (۱۵.۱)$$

با شروع از گوشه سمت چپ بالای بلوک به طرف راست و پایین، بردارهایی که با بردار قبلی وابسته خطی‌اند، از بلوک حذف می‌کنیم و اگر بردار حذف شد همه‌ی بردارهای واقع در زیر آن بلوک حذف می‌شوند و این عمل را تا جایی ادامه می‌دهیم که تعداد بردارهای مستقل خطی n بردار باشد. در این حالت همه‌ی بردارهای باقی‌مانده غیر از n بردار به‌دست آمده را از بلوک حذف می‌کنیم. اگر این n بردار مستقل خطی را به ترتیب

ستون‌های ماتریس T قرار دهیم آن‌گاه T معکوس‌پذیر خواهد بود و تبدیل مورد نظر به صورت زیر به دست می‌آید،

$$T = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_m & Ab_1 & \cdots & Ab_m & \cdots & A^{p_1-1}b_1 & \cdots & A^{p_m-1}b_m \end{bmatrix}. \quad (۱۶.۱)$$

تعریف ۸.۲.۱. (ناوردهای کرونکر^{۱۴}) در رابطه (۱۶.۱) به هر ستون از بلوک متناظر ستونی از ماتریس B عددی صحیح مانند p_i مربوط می‌شود که در رابطه زیر صدق می‌کند،

$$1 \leq p_i \leq n, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

این p_i ها را ناوردهای کرونکر می‌نامیم. از طرفی p_i تعداد بردارهای باقی‌مانده در ستون i ام بلوک است، پس تعداد بردارهای واقع در ستون‌های بلوک برابر است با

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_m,$$

از طرفی این تعداد برابر n است.

در کنترل بهینه زمانی به دنبال ماتریس K به گونه‌ای هستیم که حالت دستگاه را در کوتاه‌ترین زمان (کمترین مرحله) مانند v به صفر (به حالت تعادل) برساند. v را اندیس کنترل‌پذیری می‌نامیم و تعریف می‌کنیم

$$v = \max \{p_i | i = 1, \dots, m\}. \quad (۱۷.۱)$$

ناوردهای کرونکر (B, A) را منظم گوییم هرگاه اختلاف بین حداقل و حداکثر آن‌ها حداکثر یک باشد، در غیر این صورت ناوردهای کرونکر را نامنظم گویند.

جواب معادلات فضای حالت

معادلات فضای حالت (۹.۱) را در نظر بگیرید، برای حل این معادلات لازم است تا بردار $x(t)$ را از معادله اولیه دست آورد و با جایگذاری آن‌ها در معادله دوم، خروجی سیستم را محاسبه نمود. معادله اول را در نظر بگیرید، پاسخ کلی چنین معادله‌ای به صورت زیر است،

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + e^{At} \int_{t_0}^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau, \quad (۱۸.۱)$$

e^{At} تابع نمایی ماتریسی است که به آن ماتریس انتقال حالت^{۱۵} می‌گویند که در واقع پاسخ طبیعی (بدون ورودی) سیستم است و با نماد $\varphi(t)$ نیز نمایش می‌دهند،

$$x(t) = \varphi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \varphi(t - \tau)Bu(\tau) d\tau.$$

¹⁴ Kronecker Invariant

¹⁵ State Transition Matrix

۱.۲.۱ پایداری سیستم‌های کنترلی

در طراحی یک سیستم کنترل، شناخت اجزای سیستم برای پیش‌بینی رفتار دینامیکی سیستم لازم است. یک سیستم کنترل خطی ناوردای زمانی، در صورتی پایدار است که هنگام اعمال یک شرط اولیه جدید به آن، به حالت تعادل خود برگردد. حالت تعادل برای یک سیستم کنترل خطی، حالتی است که در صورت عدم اغتشاش و تغییر نکردن ورودی، خروجی در آن حالت باقی بماند.

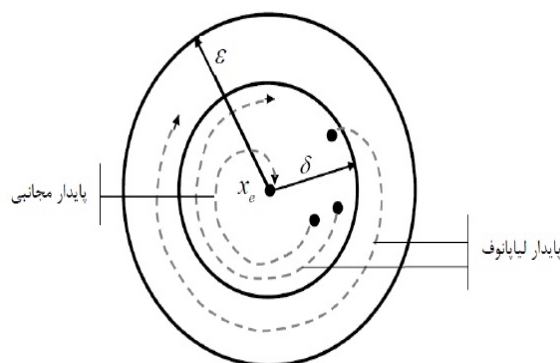
تعریف ۹.۲.۱ (نقطه تعادل^{۱۶}) بردار ثابتی مانند x_e ، نقطه تعادل است هرگاه $x(t_0) = x_0$ و $u(t) = 0$ باشد، پاسخ سیستم داده شده با معادله

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t],$$

برای $x(t) = x_e$ هر $t \geq t_0$ باشد. همچنین از آنجایی که نقطه تعادل برداری ثابت است،

$$\dot{x}_e(t) = 0 = f(x_e, 0, t), \quad (19.1)$$

نقطه تعادل نشان‌دهنده پاسخ ثابت حالت ماندگار به معادله (۱۹.۱) است. اگر فرض کنیم که سیستم خطی است، نقطه تعادل از معادله $Ax_e = 0$ به دست می‌آید. بدیهی است که مبدا مختصات همواره یک نقطه تعادل برای سیستم‌های خطی است.



شکل ۱.۱: پایدار مجانبی و لیپانوف

تعریف ۱۰.۲.۱ (پایداری لیپانوف^{۱۷}) معادله دیفرانسیل حالت زیر را در نظر بگیرید،

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad (20.1)$$

نقطه تعادل x_e را به مفهوم لیپانوف پایدار گویند، اگر به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ ، یک t_0 و یک $\delta(\varepsilon) > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری که اگر $\|x(t_0) - x_e\| < \delta(\varepsilon)$ آن‌گاه برای هر $t \geq t_0$ داشته باشیم $\|x(t) - x_e\| < \varepsilon$. به‌عبارتی،

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists t_0 > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \|x(t_0) - x_e\| < \delta(\varepsilon) \quad \underline{t \geq t_0} \quad \|x(t) - x_e\| < \varepsilon.$$

¹⁶ Equilibrium Point

¹⁷ Lyapunov Stability

ویژگی فیزیکی پایداری به مفهوم لیاپانوف آن است که می‌توان با انتخاب حالت اولیه به اندازه کافی نزدیک به نقطه تعادل از دور شدن حالت از نقطه تعادل جلوگیری نمود. به عبارت دیگر حالت تعادل x_e را به مفهوم لیاپانوف پایدار گویند اگر پاسخ سیستم ناشی از هر حالت اولیه نزدیک x_e هیچ‌گاه از حالت تعادل دور نشود (شکل ۱.۱ را ببینید)

تعریف ۱۱.۲.۱. (پایداری مجانبی)^{۱۸} نقطه تعادل معادله دیفرانسیل (۲۰.۱) پایدار مجانبی است اگر،

۱. پایدار به مفهوم لیاپانوف باشد.

۲. برای کلیه مقادیر $t_0 > 0$ یک $\delta(t_0) > 0$ وجود داشته باشد طوری که اگر $\|x(t_0) - x_e\| < \delta$ آن‌گاه،

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0.$$

تعریف ۱۲.۲.۱. (قانون کنترل) برای کنترل بهینه زمانی با پسخورد حالت^{۱۹} ورودی، $u(t)$ را برای سیستم (۹.۱) به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$u(t) = Kx(t), \quad (21.1)$$

که در آن $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ماتریس حقیقی با درایه‌های ثابت زمانی است و ماتریس پسخورد حالت (بهره) نامیده می‌شود. با جایگذاری قانون کنترل در معادله حالت سیستم خواهیم داشت،

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) = \Gamma x(t). \quad (22.1)$$

ماتریس A را ماتریس حلقه-باز^{۲۰} سیستم و مقادیر ویژه آن را مقادیر ویژه حلقه-باز سیستم می‌نامند. ماتریس $\Gamma = A + BK$ را ماتریس حلقه-بسته^{۲۱} سیستم و مقادیر ویژه آن را مقادیر ویژه حلقه-بسته سیستم می‌نامند.

در ادامه، برخی از تعاریف و اصطلاحات را که در مطالعه سیستم‌های کنترل با آن‌ها برخورد خواهیم داشت، ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۲.۱. سیستم‌هایی که در آن‌ها خروجی هیچ نقشی بر روی عمل کنترل ندارد را سیستم‌های کنترل حلقه-باز گویند. در سیستم‌های حلقه-باز خروجی با ورودی مرجع مقایسه نمی‌شود، پس به‌ازای هر ورودی مرجع یک شرایط کاری ثابت وجود دارد، بنابراین دقت سیستم به تنظیم آن بستگی دارد. اگر اغتشاش وجود داشته باشد سیستم کنترل حلقه-باز نمی‌تواند وظیفه مطلوب را انجام دهد. هر سیستم کنترلی که بر اساس زمان‌بندی کار می‌کند مانند چراغ‌های راهنمایی، حلقه-باز است.

تعریف ۱۴.۲.۱. سیستم‌های کنترل پسخوردی را عموماً سیستم‌های کنترل حلقه-بسته می‌نامیم. منظور از کنترل حلقه-بسته استفاده از پسخورد برای کاهش خطای سیستم و رسیدن به پایداری است.

¹⁸ Asymptotically Stability

¹⁹ Feedback State

²⁰ Open-Loop

²¹ Closed-Loop

تعریف ۱۵.۲.۱. سیستم کنترل خطی تعریف شده توسط معادلات (۹.۱) و (۲۲.۱) را یک سیستم پایدار مجانبی می‌نامیم هرگاه قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه ماتریس حلقه-بسته منفی باشد. در صورتی که قسمت حقیقی همه مقادیر ویژه منفی یا صفر باشد سیستم را پایدار و در غیر این صورت سیستم را ناپایدار نامیم.

تعریف ۱۶.۲.۱. مسأله یافتن ماتریس پسخورد K ، برای سیستم کنترل خطی تعریف شده توسط (۹.۱) و (۱۰.۱) به گونه‌ای که سیستم پایدار مجانبی باشد را مسأله تخصیص مقادیر ویژه^{۲۲} (EVA) گوییم.

روش لیاپانوف

روش مستقیم لیاپانوف بدون به دست آوردن پاسخ $x(t)$ ، پایداری سیستم‌های غیرخطی و خطی را تعیین می‌کند. این روش انتخاب یک تابع اسکالر $V(x(t))$ که برای تعیین شرایط پایداری آزموده می‌شود را لازم دارد. وقتی که $V(x(t))$ این شرایط را به‌طور موفقیت‌آمیزی برآورده می‌سازد یک تابع لیاپانوف نامیده می‌شود. مشکل اساسی در اعمال این روش تعیین یک تابع لیاپانوف مناسب است، زیرا عدم موفقیت یک تابع برای برآورده ساختن شرایط پایداری دلیلی بر اینکه یک تابع لیاپانوف واقعی وجود ندارد نیست. این مسئله با این واقعیت که تابع لیاپانوف منحصر بفرود نیست پیچیده‌تر می‌شود. با وجود این مشکلات، روش لیاپانوف مورد توجه بسیاری از مهندسين کنترل سیستم قرار گرفته است. برای سیستم‌های ساده حدس توابع لیاپانوف مناسب امکان‌پذیر است لیکن برای سیستم‌های پیچیده پیدا کردن یک تابع لیاپانوف مناسب ممکن است بسیار مشکل باشد.

در روش لیاپانوف رفتار علامتی $V(x(t))$ و $\dot{V}(x(t))$ پایداری، پایداری مجانبی یا ناپایداری حالت تعادل سیستم را بدون نیاز به حل مستقیم معادلات آن تعیین می‌کنند.

لم ۱۰.۲.۱. سیستم (؟؟) پایدار است اگر و تنها اگر ماتریس معین مثبت P یافت شود که نامساوی زیر برقرار باشد،

$$A^T P + P A < 0. \quad (23.1)$$

به نامساوی فوق، نامساوی لیاپانوف بر روی P گفته می‌شود که فرم خاصی از نامساوی ماتریسی خطی^{۲۳} (LMI) است. همچنین لیاپانوف نشان داد که این نخستین LMI که با انتخاب مناسب ماتریس متقارن و معین مثبت Q و حل معادله $A^T P + P A = -Q$ می‌توان P را پیدا کرد.

برهان. برای سیستم (؟؟) یک تابع احتمالی لیاپانوف $V(x(t))$ را در نظر می‌گیریم به طوری که،

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t),$$

ماتریس P متقارن و معین مثبت است. سپس برای پایداری، مشتق تابع لیاپانوف رابه دست می‌آوریم،

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) = x(t)^T (A^T P + P A) x(t).$$

²² Eigenvalue Assignment

²³ Linear Matrix Inequalities

از آنجایی که $V(t)$ را معین مثبت انتخاب کردیم لذا برای پایداری مجانبی لازم است که مشتق تابع لیاپانوف معین منفی باشد. بنابراین،

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t)) &= x(t)^T Q x(t), \\ A^T P + PA &= -Q.\end{aligned}$$

برای اثبات پایداری مجانبی سیستم کافی است که ماتریس Q معین مثبت باشد. به بیان دیگر سیستم فوق پایدار مجانبی است هرگاه (LMI) زیر برقرار باشد،

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & \circ \\ \circ & -P \end{bmatrix} < \circ. \quad (24.1)$$

□

لم ۲.۲.۱. (۲۴ مکمل شر) فرض کنید $P, Q, S \in M^{n \times n}$ ماتریس‌های داده شده باشند، به طوری که $P = P^T$ (متقارن)، $S > \circ$ (معین مثبت) و $S = S^T$ باشد، دو نامساوی ماتریسی خطی زیر هم ارزند،

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ Q^T & -S \end{bmatrix} < \circ \iff P < \circ, P + QS^{-1}Q^T < \circ. \quad (25.1)$$

اکنون همین روند را برای سیستم (؟؟) به کار برده و این بار بجای ماتریس حلقه-باز A ماتریس حلقه-بسته $A + BK$ را جایگزین می‌کنیم، در این صورت، با توجه به لم مکمل شور نامساوی زیر،

$$(A + BK)^T P + P(A + BK) < \circ,$$

شرط پایداری برای سیستم خواهد بود.

۲.۲.۱ نامساوی ماتریسی خطی

تاریخچه LMI در تجزیه و تحلیل سیستم‌های دینامیکی به بیش از صد سال پیش برمی‌گردد. داستان در حدود سال ۱۸۹۰ آغاز می‌شود زمانی که لیاپانوف کار اصلی خود را معرفی آنچه در حال حاضر نظریه لیاپانوف می‌نامیم منتشر کرد. او نشان داد معادله دیفرانسیل $\dot{x} = Ax(t)$ پایدار است اگر و تنها اگر یک ماتریس معین مثبت P وجود داشته باشد به طوری که نامساوی (۲۴.۱) برقرار باشد، لازم است $P > \circ$ و $A^T P + PA < \circ$ باشد همان چیزی که اکنون یک نامساوی لیاپانوف روی P نامیده می‌شود که یک شکل خاصی از نامساوی‌های ماتریسی خطی است.

در نظریه کنترل به مسائلی مواجه می‌شویم که دستیابی به جواب آن منوط به حل یک نامساوی ماتریسی است و یا در بعضی مسائل بهینه‌سازی، قیود نامساوی ماتریسی هستند. یک LMI در حالت کلی هر محدودیتی به فرم زیر است،

$$A(x) := A_0 + x_1 A_1 + \dots + x_N A_N < \circ, \quad (26.1)$$

که در آن $x = (x_1, \dots, x_N)$ بردار حقیقی نامشخص بوده و یک بردار از متغیرهای تصمیم‌گیری و A_0, \dots, A_N ماتریس‌های متقارن مشخص هستند. نماد نامساوی در رابطه فوق به این معناست که

رابطه معین منفی است، یعنی راست‌ترین مقدار ویژه دارای قسمت حقیقی منفی است. هر نامساوی ماتریسی متقارن که به متغیر خود وابسته باشد، قابل بیان به صورت LMI است.

مثال ۱.۲.۱. معادلات ریکاتی که به‌طور وسیعی در کنترل بهینه استفاده می‌شوند یک LMI است. نمایش آن به صورت رابطه زیر است،

$$A^T P + PA + PBR^{-1}B^T P + Q < 0,$$

که در آن $P = P^T > 0$ و $R > 0$ است، این رابطه معادل نامساوی ماتریسی زیر است

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + Q & PB \\ * & -R \end{bmatrix} < 0.$$

۳.۱ مروری بر حسابان کسری

تعاریف و قضایای این بخش از مراجع [۶، ۷] گردآوری شده است.

حسابان کسری به عنوان تعمیم حسابان معمولی قدمتی بیش از ۳۰۰ سال دارد این موضوع طی بحثی بین لایبنیتز^{۲۵} و هوبیتال^{۲۶} شکل گرفت و در آن مشتق غیرصحیح $n = \frac{1}{p}$ یک تابع مورد بحث و بررسی قرار گرفت. در پی آن دانشمندان زیادی به بررسی و ارائه تعاریف متعدد برای آن پرداختند که می‌توان به اویلر^{۲۷} در سال ۱۷۳۰، لاگرانژ^{۲۸} در سال ۱۷۷۲، لاپلاس^{۲۹} در سال ۱۸۱۲، لاکزر^{۳۰} در سال ۱۸۱۹، فوریه^{۳۱} در سال ۱۸۲۲، ریمان^{۳۲} در سال ۱۸۴۷، گرین^{۳۳} در سال ۱۸۵۹، هولمگرن^{۳۴} در سال ۱۸۶۵، گرانوالد^{۳۵} در سال ۱۸۶۷، لتنیکوف^{۳۶} در سال ۱۸۶۸، سونینی^{۳۷} در سال ۱۸۶۹، لوران^{۳۸} در سال ۱۸۸۴، نکراسوو^{۳۹} در سال ۱۸۸۸، کراگ^{۴۰} در سال ۱۸۹۰، ویل^{۴۱} در سال ۱۹۱۹ و غیره اشاره کرد [۶]. نظریه مشتق مرتبه کسری در قرن نوزدهم به‌طور قابل توجهی ارتقا پیدا کرد و کاربرد آن به سرعت در زمینه‌های مختلف مورد توجه قرار گرفت و تعاریف متعددی از مشتق و انتگرال مرتبه کسری که متناسب با مدل‌های فیزیکی بودند بیان شد. تا نیمه قرن بیستم حسابان کسری تا حدی رشد پیدا کرد که اولین کنفرانس نظریات و کاربردهای حسابان کسری در سال ۱۹۷۴ برگزار شد.

مسائلی که دینامیک آنها با معادلات دیفرانسیل کسری^{۴۲} (FDE) همراه می‌شوند در بسیاری از مسائل علوم، مهندسی، اقتصاد و زمینه‌های دیگر کاربرد دارند [۸]. هنگامی که دستگاه‌های دینامیکی پیچیده و یا ذرات دینامیکی در مقیاس ذره بینی هستند، آن‌گاه جنبش و حرکت دیگر از قوانین معمولی مشتقات مرتبه صحیح پیروی نمی‌کنند، در این گونه موارد حرکت‌ها از قوانین مرتبه کسری پیروی می‌کنند، به این معنی که رفتارشان با معادلات دیفرانسیل کسری همراه می‌شوند. خواننده علاقه‌مند برای درک تفسیر فیزیکی مشتق و انتگرال مرتبه کسری می‌تواند به [۹] مراجعه نماید.

²⁵Leibnitz

²⁶Hopital

²⁷Euler

²⁸Lagrange

²⁹Laplace

³⁰Lacroix

³¹Fourier

³²Rieman

³³Green

³⁴Holgerman

³⁵Grunwuld

³⁶Letnikov

³⁷Sonini

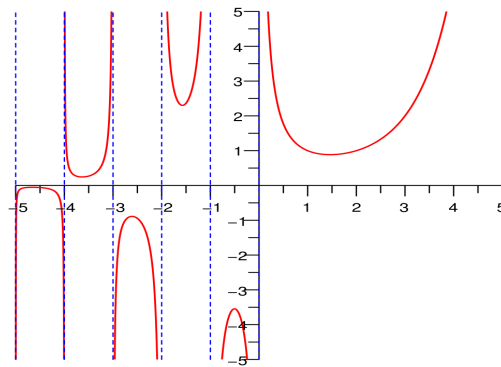
³⁸Laurent

³⁹Nekrassov

⁴⁰Krug

⁴¹Weyl

⁴²Fractional Differential Equations



شکل ۲.۱: تابع گاما در محدوده اعداد حقیقی

در طول دهه‌های اخیر به دلیل کاربردهای فراوان FDE در زمینه‌های مختلف علمی تلاش‌های فراوانی در زمینه حل این معادلات انجام شده است (برای مثال [۶] را ملاحظه کنید). در ادامه به معرفی توابع خاص از جمله تابع گاما و تابع میتاگ-لفلر^{۴۳} که نقش بسیار مهمی را در حسابان کسری دارند، می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳.۱. تابع گاما به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt,$$

و اگر $Re(z) > 0$ داریم، $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ (شکل ۲.۱ را ببینید)

تعریف ۲.۳.۱. تابع میتاگ-لفلر تعمیم تابع نمایی است. همان‌طور که تابع نمایی نقش مهمی در جواب معادلات دیفرانسیل مرتبه صحیح ایفا می‌کند، تابع میتاگ-لفلر نیز نقش مهمی در جواب معادلات دیفرانسیل مرتبه غیرصحیح دارد. تابع میتاگ-لفلر در دو نوع تابع تک پارامتری و دو پارامتری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

برای مثال تابع نمایی e^z ، با استفاده از تابع میتاگ-لفلر تک پارامتری به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z,$$

تابع $E_{\alpha}(z)$ برای هر $z \in \mathbb{C}$ همگرا است. علاقه‌مندان به مطالعه بیشتر در زمینه توابع ویژه در حسابان کسری و خواص آن‌ها به [۱۰] مراجعه نمایند.

۱.۳.۱ انتگرال و مشتق مرتبه کسری

خواص انتگرال کسری یک نتیجه بدیهی انتگرال مرتبه صحیح است. تعریف انتگرال مرتبه کسری، در واقع تعمیمی از فرمول کوشی^{۴۴} برای محاسبه انتگرال‌های مرتبه صحیح است. از طرف دیگر یکی از مهم‌ترین مفاهیم در سیستم‌های مرتبه کسری، تعریف مشتق است که برخلاف انتگرال مرتبه کسری می‌توان تعریف‌های متفاوتی از آن ارائه کرد.

⁴³Mittag-Leffler

⁴⁴Cauchy

مشتق و انتگرال کسری ریمان-لیوویل

فرض کنید $a \in \mathbb{R}$ عددی روی محور حقیقی \mathbb{R} باشد. تابع $f(t)$ که به ازای $t > a$ تعریف شده است را در نظر بگیرید. انتگرال مرتبه n تابع $f(t)$ طبق فرمول کوشی برابر است با

$$\begin{aligned} {}_a I_t^n f(t) &= \int_a^t \int_a^{t_1} \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \dots dt_2 dt_1 \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (27.1)$$

از طرفی با توجه به تعریف تابع گاما (27.1) را می‌توان به صورت زیر نوشت،

$${}_a I_t^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad n \in \mathbb{N}.$$

با الهام گرفتن از فرمول کوشی و جانشینی عدد حقیقی $\alpha > 0$ به جای عدد صحیح n ، ${}_a I_t^\alpha f(t)$ و ${}_t I_b^\alpha f(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} {}_a^{RL} I_t^\alpha f(t) &\triangleq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (t > a), \\ {}_t^{RL} I_b^\alpha f(t) &\triangleq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (t < b). \end{aligned}$$

فرض کنید $n-1 \leq \alpha < n$ و $f \in C^n([a, b])$ که $n = [\alpha]$. در این صورت، مشتقات چپ و راست ریمان-لیوویل⁴⁵ از مرتبه α به صورت زیر تعریف می‌شوند،

$$\begin{aligned} {}_a^{RL} D_t^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n ({}_a I_t^{n-\alpha} f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (t > a), \\ {}_t^{RL} D_b^\alpha f(t) &= \left(-\frac{d}{dt}\right)^n ({}_t I_b^{n-\alpha} f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (t < b). \end{aligned}$$

مشتق کسری کاپوتو

ایده تعریف مشتق کاپوتو⁴⁶ بسیار مشابه با همان ایده‌ای است که در تعریف مشتق ریمان-لیوویل به کار گرفته شد. در این تعریف مانند تعریف ریمان-لیوویل، مشتق براساس مفهوم انتگرال مرتبه کسری توسعه پیدا می‌کند. تفاوت این دو تعریف در واقع در توالی عملگرهای مشتق مرتبه صحیح و عملگر انتگرال مرتبه کسری است. در مشتق کسری کاپوتو برعکس مشتق کسری ریمان-لیوویل ابتدا مشتق مرتبه صحیح از تابع گرفته شده و سپس انتگرال گیری مرتبه کسری انجام می‌شود. به بیان ریاضی اگر $\alpha \in \mathbb{R}^+$ عدد مثبت ناصحیحی باشد و $n = [\alpha] + 1$ مشتق کسری کاپوتو از مرتبه α به صورت زیر تعریف می‌شود،

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^{RL} I_t^{n-\alpha} \{f^{(n)}(t)\}.$$

بنابراین مشتق کسری چپ و راست کاپوتو به ترتیب عبارت است از:

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \quad (t > a), \\ {}_t^C D_b^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \quad (t < b). \end{aligned}$$

⁴⁵Riemann-Liouville

⁴⁶Caputo

مشتق کسری گرانوالد-لتنیکوف

این مشتق در واقع یک تعمیم مبتنی بر تعریف حدی مشتق است. فرض کنید f تابعی پیوسته باشد. ابتدا تعریف حدی مشتق مرتبه اول تابع f را در نظر بگیرید،

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h},$$

با به کارگیری تعریف بالا، مشتق مرتبه دوم به صورت زیر به دست می آید،

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2},$$

در حالت کلی برای مشتق مرتبه n ام رابطه‌ی زیر را داریم،

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t-rh), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (28.1)$$

همان طور که می دانیم تابع گاما در اعداد صحیح نامثبت دارای قطب است. بنابراین رابطه حدی (28.1) را می توان به صورت زیر نوشت،

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{n}{r} f(t-rh). \quad (29.1)$$

بنابراین می توان مشتق کسری مرتبه α ام را به صورت زیر تعمیم داد،

$${}^G D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^{\lceil \frac{t-a}{h} \rceil} (-1)^r \binom{\alpha}{r} f(t-rh), \quad \alpha > 0, \quad (30.1)$$

که $[\alpha] = n$ ، می توان با جایگذاری $-\alpha$ و α در رابطه (30.1)، انتگرال کسری گرانوالد-لتنیکوف^{۴۷} از مرتبه α را تعریف کرد. یعنی با فرض $nh = t - a$ داریم،

$$\begin{aligned} {}^G I_t^\alpha f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{-\alpha}{r} f(t-rh), \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{r=0}^n \frac{\Gamma(r+\alpha)}{\Gamma(r+1)} f(t-rh), \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

قضیه ۱.۳.۱. فرض کنید تابع $f(t)$ دارای مشتقات مرتبه اول تا مرتبه $n-1$ پیوسته بوده و $f^{(n)}(t)$ انتگرال پذیر باشد. همچنین فرض کنید $n-1 < \alpha < n$ ، $n \in \mathbb{N}$. در این صورت مشتق مرتبه α با تعریف گرانوالد-لتنیکوف تابع $f(t)$ با مشتق مرتبه α ریمان-لیوویل این تابع برابر خواهد بود، یعنی

$${}^G D_t^\alpha f(t) = {}_a D_t^\alpha f(t).$$

با فرض برقراری شرایط مطرح شده در قضیه ۱.۳.۱ تعاریف گرانوالد-لتنیکوف و ریمان-لیوویل معادل بوده و بنابراین خواص مشتق مرتبه کسری ریمان-لیوویل برای مرتبه کسری گرانوالد-لتنیکوف نیز برقرار است.

⁴⁷Grunwaid-Letnikov

تقریب مشتق گرانوالد- لتنیکوف

گرانوالد و لتنیکوف با الهام گرفتن از رابطه حدی (۲۸.۱) مشتق مرتبه کسری تابع f را به فرم (۳۰.۱) تعریف کردند که برای محاسبات عددی می توان از رابطه زیر استفاده کرد،

$${}^{\circ}GLD_t^\alpha f(t) \cong \frac{\sum_{r=0}^{N(t)} \omega_r^\alpha f(t-rh)}{h^\alpha}, \quad (31.1)$$

وقتی $N(t) = \min\{\lceil \frac{t}{h} \rceil, \lceil \frac{L}{h} \rceil\}$ که L طول حافظه ^{۴۸} و h طول گام است و ω_r^α ضرایب بسط دوجمله ای است که به صورت زیر داده شده است:

$$\omega_0^\alpha = 1, \quad \omega_r^\alpha = \left(1 - \frac{1+\alpha}{r}\right) \omega_{r-1}^\alpha. \quad (32.1)$$

با توجه به ماهیت تعریف مشتق $(\cdot) {}^{\circ}GLD_t^\alpha$ ، از این تعریف در روش های عددی محاسبه مشتقات مرتبه کسری و همچنین گسسته سازی معادلات FDE استفاده فراوانی می شود. وقتی اندازه گام h خیلی کوچک باشد داریم:

$${}^{\circ}GLD^\alpha f(t) \approx h^{-\alpha} \sum_{r=0}^N (-1)^r \binom{\alpha}{r} f(t-rh), \quad h = \frac{t}{N},$$

$${}^{\circ}GLD_{t_k}^\alpha f(t) \approx h^{-\alpha} \sum_{r=0}^k \omega_r^\alpha f(t_k-r), \quad t_k = kh, \quad k = 1, \dots, \frac{t}{h}.$$

لم ۱.۳.۱. (مرتبه تقریب [۱۱]) فرض کنید $f \in \mathbb{C}([0, b])$ آن گاه تقریب گرانوالد- لتنیکوف با طول گام h در رابطه زیر صدق می کند،

$${}^{\circ}GLD_{t_k}^\alpha f(t) = h^{-\alpha} \sum_{r=0}^k \omega_r^\alpha f(t_k-r) + O(h), \quad (h \rightarrow 0). \quad (33.1)$$

با توجه به کاربردهای گوناگون و شرایط مساله هر کدام از تعاریف می تواند مورد استفاده قرار بگیرد، به عنوان مثال تعریف مشتق گرانوالد- لتنیکوف بیشتر در روش های عددی مناسب و تعریف کاپوتو مبتنی بر تلفیق تبدیل لاپلاس است و تبدیل لاپلاس آن بر حسب مشتقات صحیح مورد نظر قابل بیان است، لذا در مسائل فیزیکی و مهندسی کاربرد بیشتری دارد. روش های زیادی برای محاسبه عددی مشتق و انتگرال مرتبه کسری توابع پیشنهاد شده است. برای جزئیات بیشتر می توان مرجع [۱۲] را ملاحظه نمود. از آنجا که هدف ما کنترل و پایدارسازی سیستم های کسری و تأخیری است سه تعریف مذکور کافی خواهد بود. خواننده علاقه مند می تواند عملگرهای مشتق کسری دیگر را در کتاب های حسابان کسری از جمله [۶] مطالعه نماید.

۲.۳.۱ لم و قضایا

لم ها و قضایای این بخش از مراجع [۱۳] و [۱۴] گردآوری شده است.

لم ۲.۳.۱. اگر تابع $f(\circ) > \circ$ موجود باشد و $\alpha > \circ$ آن گاه ${}^{\circ}CD^\alpha f(t) \leq {}^{RL}D^\alpha f(t)$.

⁴⁸Memory Length

لم ۳.۳.۱. (قاعده لایبنیتز^{۴۹}) برای مشتق گرفتن از انتگرال $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)dt$ نسبت به x ، قاعده لایبنیتز به صورت زیر به کار می رود

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)dt = f(x,\beta(x)) \frac{d\beta}{dx} - f(x,\alpha(x)) \frac{d\alpha}{dx} + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x} dt. \quad (34.1)$$

همچنین داریم

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \int_{x-\theta}^x f(s) ds d\theta \right) &= (\beta(x) - \alpha(x)) f(x) - (1 - \dot{\beta}(x)) \int_{x-\beta(x)}^{x-\alpha(x)} f(s) ds \\ &+ (\dot{\beta}(x) - \dot{\alpha}(x)) \int_{x-\theta}^x f(s) ds. \end{aligned}$$

لم ۴.۳.۱. اگر طبق قضیه لایبنیتز، مشتق α ام، $x^T x$ به صورت زیر باشد

$$D^\alpha x^T x = (D^\alpha x) x^T + x^T (D^\alpha x) + \gamma,$$

آن گاه وجود دارد η به طوری که $\|x\| \|\gamma\| \leq \eta$ که در آن

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha)(D^k x)^T (D^{\alpha-k} x)}{\Gamma(1+k)\Gamma(1+\alpha-k)}.$$

لم ۵.۳.۱. اگر $x(t) \in \mathbb{R}^n$ مشتق پذیر باشد آن گاه به ازای هر $t \geq t_0$ و $0 < \alpha < 1$ داریم

$$\frac{1}{\Gamma} {}_a^C D_t^\alpha (x^T(t)x(t)) \leq x^T(t) {}_a^C D_t^\alpha x(t), \quad \frac{1}{\Gamma} {}_a^C D_t^\alpha (x^2(t)) \leq x(t) {}_a^C D_t^\alpha x(t).$$

لم ۶.۳.۱. اگر $x(t) \in \mathbb{R}^n$ و $0 < \alpha \leq 1$ آن گاه $P \succ 0$ وجود دارد به طوری که

$$\begin{cases} \frac{1}{\Gamma} {}_a^C D_t^\alpha (x^T(t)Px(t)) \leq x^T(t)P {}_a^C D_t^\alpha x(t), \\ {}_a^C D_t^\alpha (x^T(t)Px(t)) \leq {}_a^C D_t^\alpha x^T(t)Px(t) + x^T(t)P {}_a^C D_t^\alpha x(t). \end{cases}$$

تبدیلات لاپلاس

در این بخش تبدیلات لاپلاس که به عنوان ابزار مهم در ریاضیات و مهندسی به حساب می آید، بیان می شود. در مسیر حل معادلات دیفرانسیل از جمله نوع کسری آن به وسیله تبدیلات لاپلاس، معادله دیفرانسیل کسری به معادلات جبری تبدیل شده و سپس با حل معادلات جبری می توان معادلات مجهول را با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس به دست آورد.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنید تابع $f(x)$ برای $0 < x < \infty$ تعریف شده باشد، در این صورت تبدیل لاپلاس برای مقادیری از s که انتگرال زیر متناهی باشد به صورت زیر قابل تعریف است،

$$F(s) = L[f(x)] = \int_0^\infty f(x)e^{-sx} dx,$$

که s می تواند یک متغیر حقیقی یا مختلط باشد.

⁴⁹Leibniz

برخی از تبدیلات لاپلاس مهم که بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند، در این قسمت معرفی می‌شوند. برای $L[f(x)] = F(s)$ و $L[g(x)] = G(s)$ داریم،

$$\begin{cases} L[x^\beta] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{s^{\beta+1}} \\ L[f^{(n)}(x)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(\circ) - s^{n-2} f'(\circ) - \dots - f^{(n-1)}(\circ) \\ L\left[\int_0^x f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} \\ L[f * g] = \int_0^x f(x-t)g(t)dt = F(s)G(s). \end{cases}$$

تبدیل لاپلاس مشتق و انتگرال مرتبه کسری

لم ۷.۳.۱. تبدیل لاپلاس انتگرال کسری ریمان-لیوویل از مرتبه $\alpha > 0$ از رابطه زیر به دست می‌آید

$$L[{}_a^{RL}I_t^\alpha f(t)] = \frac{F(s)}{s^\alpha}.$$

لم ۸.۳.۱. تبدیل لاپلاس مشتق کسری ریمان-لیوویل برای $n-1 < \alpha \leq n \in \mathbb{N}$ از رابطه زیر به دست می‌آید

$$L[{}_a^{RL}D_t^\alpha f(t)] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D^{\alpha-k-1} f(\circ)].$$

لم ۹.۳.۱. تبدیل لاپلاس مشتق کسری کاپوتو برای $n-1 < \alpha \leq n \in \mathbb{N}$ در رابطه زیر صدق می‌کند

$$L[{}_a^C D_t^\alpha f(t)] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(\circ).$$

فصل ۲

روش تخصیص مقادیر ویژه و پارامتری سازی کنترل گرها

در این فصل، ابتدا در بخش‌های ۱.۲ و ۲.۲ مسئله تخصیص مقدار ویژه و تخصیص مقدار ویژه جزئی (PEVA)^۱ را معرفی کرده و مروری بر کارهای انجام شده داریم و به بررسی وجود و یکتایی جواب برای مسائل فوق می‌پردازیم، سپس در بخش ۲.۳ ماتریس پسخورد حالت پارامتری خطی و غیرخطی را با استفاده از تبدیلات تشابهی مطرح می‌کنیم و از آنجایی که ورودی (متغیر کنترل) داری هزینه است برای کاهش نوسانات سیگنال‌های کنترلی ماتریسی با حداقل نرم معرفی می‌کنیم.

۱.۲ روش تخصیص مقادیر ویژه (EVA)

۱.۱.۲ تاریخچه

مسئله تخصیص مقادیر ویژه با پسخورد یک مسئله اساسی در طراحی سیستم کنترل است که به‌طور گسترده در هر دو زمینه نظری و محاسباتی مورد مطالعه قرار گرفته است. روش EVA یا جایابی قطب^۲ نخستین بار در سال ۱۹۷۸ برای سیستم‌های تاخیری توسط رزاقی معرفی شد. در ادامه در سال‌های ۱۹۸۲ الی ۲۰۰۲ پنج روش EVA معرفی شدند، از جمله روش پارامتری کرباسی و بل^۳ [۱۵، ۱۶] که در ادامه به آن خواهیم

^۱Partial Eigenvalue Assignment

^۳Bell

^۲Pole Placement

پرداخت. در سال ۲۰۰۲ داتا^۴ الگوریتم ساده تری نسبت به روش های قبلی برای سیستم های خطی مرتبه دوم ارائه کرد. در سال ۲۰۰۷ زنگ^۵ روش EVA پارامتری را برای سیستم های توسیع یافته (تکین)^۶ به کار گرفت. در سال ۲۰۱۱ عطائی و همکارش [۱۷] بهبودی از روش [۱۵] برای سیستم های LTI با کاهش نرم ماتریس پس خورد حالت ارائه کردند. در سال ۲۰۱۵ روش ساده تری برای حل مساله EVA توسط آل- قزاوی^۷ [۱۸] با کمک روش های بازگشتی پیشنهاد شد. در سال ۲۰۱۷ کاکزورک^۸ روش EVA را برای سیستم های مرتبه کسری توسیع یافته خطی به کار گرفت، همچنین آل سعید^۹ و همکاران [۱۹] مساله EVA با پس خورد خروجی را برای سیستم های LTI زمان- گسسته با فرمول بندی به یک مساله بهینه سازی نامقید و حل با روش گرادیان- مزدوج به کار گرفتند و روش پیشنهادی را نیز روی سیستم های تاخیری زمان- گسسته اعمال کردند.

این قسمت به بیان دقیق مسئله به زبان ریاضی می پردازیم. معادله ی فضای حالت را به صورت زیر در نظر بگیرید،

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1.2)$$

که در آن $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ باشد و $S = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ، که نسبت به ترکیب مختلط بسته است. برای ادامه باید $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ را به گونه ای پیدا کنیم که $\Omega(A + BK) = S$.

۲.۱.۲ وجود و یکتایی جواب برای مسئله تخصیص مقدار ویژه

در این بخش وجود و یکتایی جواب را برای مسئله تخصیص مقدار ویژه بررسی می کنیم. برای این منظور، ابتدا به بیان مفهوم کنترل پذیری می پردازیم که برای بررسی این دو ویژگی بسیار مهم است.

قضیه ۱.۱.۲. [۱۵] سیستم (۱.۲) یا به طور معادل زوج ماتریس (B, A) نسبت به مقدار ویژه λ از ماتریس A کنترل پذیر است، هرگاه،

$$\forall y \neq 0 \implies y^T A = \lambda y^T \text{ که به طوری که } y^T B \neq 0 \quad (2.2)$$

تعریف ۱.۱.۲. [۱۵] سیستم (۱.۲) یا زوج ماتریس (B, A) نسبت به زیرمجموعه $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ از طیف ماتریس A به طور جزئی کنترل پذیر است، اگر نسبت به هر مقدار ویژه λ_j ، $j = 1, 2, \dots, p$ کنترل پذیر باشد.

تعریف ۲.۱.۲. [۱۵] سیستم (۱.۲) یا زوج ماتریس (B, A) کاملاً کنترل پذیر است، هرگاه نسبت به هر مقدار ویژه از ماتریس A کنترل پذیر باشد.

قضیه ۲.۱.۲. [۱۵] (وجود و یکتایی برای مسئله EVA)

برای هر مجموعه دلخواه S ، مسئله تخصیص مقدار ویژه برای زوج ماتریس (B, A) حل پذیر است اگر و تنها اگر زوج (B, A) به طور کامل کنترل پذیر باشد. جواب این مساله یکتاست اگر و تنها اگر سیستم تک ورودی باشد (B یک بردار باشد). در حالت چند ورودی، در صورت وجود جواب، بی نهایت جواب موجود است.

⁴Datta

⁵Zhang

⁶Discriptor

⁷El-Ghezawi

⁸Kaczorek

⁹El-Sayed

۳.۱.۲ تخصیص مقادیر ویژه با استفاده از تبدیلات تشابهی

در این بخش ابتدا به بیان فرم‌های استاندارد اشلون^{۱۰} و همدم برداری^{۱۱} زوج (B, A) می‌پردازیم که با کمک آن‌ها ماتریس پس‌خورده حالتی که مقادیر ویژه صفر را به سیستم تخصیص می‌دهد به دست می‌آید و در ادامه با کمک ماتریس‌های متشابه، مقادیر ویژه مطلوب را به سیستم حلقه- بسته تخصیص می‌دهیم.

فرم استاندارد اشلون

فرض کنید که T تبدیل تشابهی باشد که بر فضای \mathbb{R}^n تعریف شده است. معادله حالت سیستم (۱.۲) را در نظر بگیرید، فرض می‌کنیم بردار حالت سیستم توسط ماتریس تبدیل T^{-1} به فضای جدید تبدیل شود، یعنی،

$$\hat{x}(t) = T^{-1}x(t), \quad (۳.۲)$$

با جایگذاری رابطه (۳.۲) در معادله حالت (۱.۲) داریم،

$$\hat{\dot{x}}(t) = T^{-1}AT\hat{x}(t) + T^{-1}Bu(t), \quad (۴.۲)$$

حال با در نظر گرفتن $\hat{A} = T^{-1}AT$ و $\hat{B} = T^{-1}B$ در معادله (۴.۲) داریم،

$$\hat{\dot{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t), \quad (۵.۲)$$

ماتریس تبدیل T را می‌توان به صورت منحصر به فردی با استفاده از ماتریس کنترل‌پذیری مشخص کرد. به این ترتیب که اولین n ستون مستقل خطی ماتریس کنترل‌پذیری Q را ستون‌های ماتریس تبدیل T قرار می‌دهیم. در این صورت فرم استاندارد اشلون را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$T = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m & \dots & A^{q-1}b_1 & \dots & A^{q-1}b_r & A^{q-1}b_{r+1} & \dots & A^{q-1}b_m & A^qb_1 & \dots & A^qb_r \end{bmatrix},$$

ماتریس افزوده $[B, A]$ ، که دارای n سطر و $n + m$ ستون است را تشکیل می‌دهیم. با تشکیل ماتریس $[T^{-1}B, T^{-1}AT]$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} T^{-1}[B, AT] &= T^{-1}[b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m \ Ab_1 \ \dots \ A^qb_1 \ \dots \ A^qb_r \ A^qb_{r+1} \ \dots \ A^qb_m \ A^{q+1}b_1 \ \dots \ A^{q+1}b_r] \\ &= T^{-1}[T, A^qb_{r+1} \ \dots \ A^{q+1}b_r] = [I, T^{-1}A^qb_{r+1} \ \dots \ T^{-1}A^{q+1}b_r] = [I_{n \times n}, V_{n \times m}]. \end{aligned}$$

اکنون تبدیلات تشابهی سطری و ستونی نظیر را به کار می‌بریم. برای تبدیل زوج (B, A) به فرم استاندارد اشلون $[I_n, V_{n \times m}]$ ابتدا ماتریس افزوده $Q = [B, A, I_n]$ را تشکیل می‌دهیم. سپس با استفاده از عملیات سطری مقدماتی روی ماتریس Q و ستونی مقدماتی نظیر روی ماتریس A حاصل در هر مرحله، n ستون اول ماتریس Q را به I_n تبدیل می‌کنیم. در این صورت ماتریس افزوده \hat{Q} به صورت زیر تبدیل می‌شود،

$$\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, T^{-1}] = [I_n, V_{n \times m}, T^{-1}],$$

که ماتریس‌های \hat{A} و \hat{B} به صورت زیر هستند:

¹⁰Standard Echelon Form

¹¹Vector Companion Form

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} o_{m \times m} & o & \cdots & o_{m \times r} & \nu_{m \times m}^{(1)} \\ I_m & o & \cdots & o & \nu_{m \times m}^{(2)} \\ o_{m \times m} & I_m & \cdots & o & \nu_{m \times m}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ o & o & \cdots & o & \nu_{m \times m}^{(q)} \\ o_{r \times m} & o_{r \times m} & \cdots & I_r & \nu_{r \times m}^{(q+1)} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} I_m \\ o_{m \times m} \\ o_{m \times m} \\ \vdots \\ o_{m \times m} \\ o_{r \times m} \end{bmatrix}.$$

فرم همدم برداری

یک ماتریس تبدیل خطی تشابهی مانند S را در نظر می‌گیریم که بر فضای \mathbb{R}^n تعریف شده است. اکنون بردار حالت سیستم که در بخش قبل آن را به فرم استاندارد اشلون در آوردیم، توسط ماتریس تبدیل S^{-1} به فضای جدید تبدیل می‌شود،

$$\tilde{x}(t) = S^{-1}\hat{x}(t) = S^{-1}T^{-1}x(t), \quad (6.2)$$

با جایگذاری معادله فوق در معادله (5.2) داریم،

$$\tilde{\dot{x}}(t) = S^{-1}\hat{A}S\tilde{x}(t) + S^{-1}\hat{B}u(t), \quad (7.2)$$

با در نظر گرفتن $\tilde{B} = S^{-1}\hat{B} = S^{-1}T^{-1}B$ و $\tilde{A} = S^{-1}\hat{A}S = S^{-1}T^{-1}ATS$ در معادله (7.2) داریم،

$$\tilde{\dot{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t). \quad (8.2)$$

زوج (\tilde{B}, \tilde{A}) ، فرم همدم برداری زوج (B, A) است. از آن جایی که معادلات (1.2) و (8.2) معادل یکدیگر هستند، جواب آن‌ها نیز یکسان است.

به دست آوردن فرم همدم برداری به روش عددی

اگر ناورداهای کرونگر منظم باشد، با استفاده از عملیات ستونی مقدماتی روی ماتریس \hat{A} و سطری مقدماتی نظیر آن روی کل ماتریس Q ، می‌توان فرم همدم برداری و ماتریس تبدیل آن را به صورت زیر به دست آورد:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} G_0 & & \\ & \cdots & \\ I_{n-m} & & o_{(n-m) \times m} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_0 \\ \cdots \\ o_{(n-m) \times m} \end{bmatrix}, \quad (9.2)$$

که G_0 یک ماتریس $m \times n$ و B_0 یک ماتریس $m \times m$ بالا مثلثی است. حال اگر ناورداهای کرونگر نامنظم باشند، برخی از ستون‌های I_{n-m} از ماتریس \tilde{A} ، در پایین قطر اصلی پخش می‌شوند. برای معادله (1.2)، قانون کنترل را به صورت $U(t) = Kx(t)$ تعریف می‌کنیم و به طور مشابه برای معادله (8.2)، قانون کنترل به صورت $U(t) = \tilde{K}\tilde{x}(t)$ تعریف می‌شود که \tilde{K} ماتریس پس‌خورد حالت معادله سیستم تبدیل شده به فرم همدم برداری است. با جایگذاری $S^{-1}T^{-1}x(t)$ به جای $\tilde{x}(t)$ خواهیم داشت،

$$U(t) = \tilde{K}S^{-1}T^{-1}x(t), \quad (10.2)$$

فرض کنید، $K = \tilde{K}S^{-1}T^{-1}$ که آن را ماتریس پس‌خورد اولیه زوج (B, A) می‌نامیم. در صورتی که \tilde{K} را به صورت $-B_o^{-1}G_o$ تعریف نماییم، مقادیر ویژه ماتریس حلقه- بسته $\tilde{\Gamma}_p = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$ صفر است، زیرا

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_p &= \begin{bmatrix} G_o & & \\ & \dots & \\ I & & o \end{bmatrix}_{n \times n} + \begin{bmatrix} B_o & \\ & \dots \\ & & o \end{bmatrix}_{n \times m} (-B_o)^{-1}G_o \\ &= \begin{bmatrix} & o_{m \times n} & \\ & \dots & \\ I_{n-m} & & o_{(n-m) \times m} \end{bmatrix}_{n \times n} = \tilde{\Gamma}_o. \end{aligned} \quad (11.2)$$

نتیجه ۱.۱.۲. به دلیل مشابه بودن Γ با $\tilde{\Gamma}_o$ ، تمامی مقادیر ویژه ماتریس حلقه- بسته $\Gamma = A + BK$ نیز صفرند.

قضیه ۳.۱.۲. [۱۵] فرض کنید D یک ماتریس قطری به صورت

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & \circ & \dots & \circ \\ \circ & D_2 & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & D_k \end{bmatrix}, \quad (12.2)$$

باشد که هر D_j به‌ازای مقادیر ویژه مزدوج مختلط $\alpha_j + i\beta_j$ به صورت،

$$D_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{bmatrix},$$

و به‌ازای مقادیر ویژه حقیقی به صورت $D_j = [d_j]$ باشد. اگر چنین ماتریس قطری D با مقادیر ویژه مزدوج مختلط به ماتریس حلقه- بسته $\tilde{\Gamma}_o$ اضافه شود. آنگاه مقادیر ویژه حاصل، مقادیر ویژه مطلوب است.

قضیه ۴.۱.۲. اگر ماتریس پس‌خورد حالت را برای تخصیص مقادیر ویژه مطلوب λ_i برای زوج (\tilde{B}, \tilde{A}) به صورت

$$\tilde{K} = \tilde{F} + B_o^{-1}G_\lambda = B_o^{-1}(-G_o + G_\lambda), \quad (13.2)$$

تعریف کنیم، آنگاه مقادیر ویژه ماتریس حلقه- بسته $\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$ مجموعه از پیش تعیین شده λ_i است.

برهان.

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K} &= \begin{bmatrix} G_o & & \\ I_{n-m} & & O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_o & \\ & O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} [B_o^{-1}(-G_o + G_\lambda)] \\ &= \begin{bmatrix} G_\lambda & & \\ I_{n-m} & & O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

به وضوح $\tilde{\Gamma} = \tilde{H}_\lambda$. حال چون ماتریس \tilde{H}_λ با ماتریس \tilde{H} متشابه است و عملیات تشابهی مقادیر ویژه را تغییر نمی دهد، پس مقادیر ویژه ماتریس \tilde{H}_λ با مقادیر ویژه ماتریس \tilde{H} برابر است. بنابراین مقادیر ویژه ماتریس حلقه- بسته $\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$ یا $\Gamma = A + BK$ ، مجموعه از پیش تعیین شده $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ است که $K = \tilde{K}S^{-1}T^{-1}$. □

۲.۲ روش تخصیص مقدار ویژه جزئی (PEVA)

در این بخش ابتدا تاریخچه ای از روش را بیان می کنیم، سپس مشابه قضیه ۲.۱.۲، وجود و یکتایی جواب را برای مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی بررسی کرده و روش را بر پایه تبدیلات تشابهی بیان می کنیم.

۱.۲.۲ تاریخچه

مسئله ثابت نگه داشتن یک بخش از طیف ماتریس حلقه- باز سیستم خطی با ماتریس پس خورد حالت، خارج کردن باقیمانده طیف و جایگزین کردن آن با طیف پایدار، مسئله PEVA نامیده می شود. در بسیاری از برنامه های عملی مانند، سازه های بزرگ و پراکنده، شبکه های برق، خطوط نیرو، شبکه های کامپیوتری، ... باعث ایجاد ماتریس های بزرگ و اسپارس و مشکلات فراوانی می شود که روش های عددی مرسوم برای تخصیص مقدار ویژه، به خوبی عمل نمی کنند. اصل این مسئله برای سیستم هایی به کار می رود که به طور کامل پایدار نیستند و تعدادی از مقادیر ویژه طیف ماتریس حلقه- باز (ماتریس A)، که تنها همین مقادیر نیاز به تخصیص دارند، در ناحیه پایداری قرار ندارند. بسیاری از محققان، الگوریتمی برای حل مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی طراحی کرده اند. مسئله PEVA، نخستین بار توسط سعد و داتا^{۱۲} مطرح شده است [۲۰]. در این روش پیشنهادی، ابتدا به حل معادله سیلوستر $AX - XH = GC$ پرداخته می شود. (H) ، یک ماتریس بالا هسنبرگی است که با استفاده از الگوریتم آرنولدی^{۱۳} ساخته شده است. طیف H برابر $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ است. ماتریس G یک ماتریس خاص به صورت $G = (0, 0, \dots, 0, b)$ و X یک ماتریس نرمال شده است که توسط ماتریس نرمال v که در $V^H AV = H$ صدق می کند، به دست می آید. با این روش، بردار پس خورد حالت $f = X e_m$ که $e_m = (0, 0, \dots, 0, 1)$ است را محاسبه می کنیم. در این حالت طیف مقادیر ویژه $A - bf^T$ ، شامل $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ است. یکی از روش های پیشنهادی، به طور عمده بر اساس مفهوم نرمال کردن با استفاده از الگوریتم آرنولدی [۲۱] یا روش دیگر با استفاده از تجزیه جزئی QR [۲۲] است. رامادان^{۱۴} و همکارش [۲۳] الگوریتمی را ارائه دادند که در آن با تعریف $f^T = \beta Y_1^H A$ ماتریس بردار ویژه های چپ وابسته به $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ و محاسبه پارامتر β ، بردار پس خورد حالت را می توان به صورتی به دست آورد که مقادیر ویژه مورد نظر را به سیستم اختصاص می دهد. در ادامه نیز نشان دادند که بردار پس خورد حالت حقیقی است. در ادامه در سال ۲۰۱۴ زنگ [۲۴] و همکارش روش جدیدی از PEVA برای سیستم های مراتب بالا ارائه کردند و در [۲۵] روش را برای سیستم های مراتب بالا با تاخیر زمانی گسترش داده اند. روش های ارائه شده اخیر را در مراجع [۲۶] - [۲۸] مشاهده نمایید.

¹²Saad and Datta

¹⁴Ramadan

¹³Arnoldi's Algorithm

۲.۲.۲ وجود و یکتایی جواب برای مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی

قضیه ۱.۲.۲. (وجود و یکتایی برای مسئله PEVA) [۲۹]

ماتریس قطری $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p; \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$ که شامل مقادیر ویژه $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ از ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ است را در نظر بگیرید، به طوری که مجموعه‌های $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ و $\{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$ از هم گسسته هستند. فرض کنید که مقادیر $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ به $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ تغییر یابد و باقی مقادیر ویژه ماتریس A یعنی مقادیر $\{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$ ثابت بماند. در نتیجه مسئله PEVA به ازای هر انتخاب مقدار ویژه $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ برای زوج (B, A) دارای جواب است اگر و تنها اگر زوج (B, A) به طور جزئی نسبت به مجموعه $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ کنترل پذیر باشد. جواب منحصر به فرد است، اگر و تنها اگر سیستم، یک سیستم تک ورودی کاملاً کنترل پذیر باشد. در حالت چند ورودی و تک ورودی‌ها، زمانی که سیستم کاملاً کنترل پذیر نباشد، در صورت وجود جواب، بی‌نهایت جواب وجود دارد.

۳.۲.۲ تخصیص مقادیر ویژه جزئی با استفاده از تبدیلات تشابهی

در این بخش با استفاده از بردارهای ویژه سمت چپ وابسته به مقادیر ویژه ناپایدار سیستم، ابتدا مسئله را به یک مسئله تخصیص مقدار ویژه تبدیل می‌کنیم و سپس با بکاربردن تبدیلات تشابهی در سیستم کنترل خطی، ماتریس پس‌خورده حالتی را به دست می‌آوریم که مقادیر ویژه مطلوب را به سیستم حلقه- بسته اختصاص دهد.

ماتریس $A_{n \times n}$ و ماتریس $B_{n \times m}$ در سیستم LTI (۱.۲) را در نظر بگیرید، فرض می‌کنیم که $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p; \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$ مقادیر ویژه ماتریس حلقه- باز A است، به طوری که $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ و $\{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$ از هم گسسته هستند.

فرض می‌کنیم $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ مقادیر ویژه ناپایدار ماتریس حلقه- باز (ماتریس A) باشد. مقادیر ویژه دلخواه $S = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ که تحت ترکیب مختلط بسته هستند را در نظر می‌گیریم که $m \leq p$ است. برای شروع، نیازمند به دست آوردن بردارهای ویژه سمت چپ ماتریس A هستیم. این بردارها را به صورت، $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ نمایش می‌دهیم که $\{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ بردارهای ویژه سمت چپ ماتریس A ، متناظر با مقادیر ویژه $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ است که آن را به صورت زیر نمایش می‌دهیم،

$$Y_1 = (y_1, y_2, \dots, y_p) = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1p} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{np} \end{bmatrix}. \quad (14.2)$$

در ادامه ماتریس Y_1^H را به دست می‌آوریم و ماتریس‌های $\Lambda_1 = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ و $Y_1^H B$ را در نظر می‌گیریم، هدف از کنترل سیستم، یافتن ماتریس پس‌خورده حالت K است به طوری که، مقادیر ویژه ماتریس حلقه- بسته $\Lambda_1 + Y_1^H B K$ در مجموعه تعیین شده $S = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ باشند. نخست با استفاده از تبدیلات تشابهی بیان شده در بخش ۳.۱.۲، فرم‌های استاندارد اشلون و همدم برداری زوج $(Y_1^H B, \Lambda_1)$ را به دست می‌آوریم،

$$\widetilde{Y_1^H B} = \begin{bmatrix} (Y_1^H B)_{m \times m} \\ O \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\Lambda}_1 = \begin{bmatrix} G_{o(m \times p)} \\ I_{p-m} & O_{(p-m) \times m} \end{bmatrix}. \quad (15.2)$$

ماتریس پسخورد اولیه $G_o = -((Y_1^H B)_o)^{-1}$ را محاسبه نموده به گونه ای که مقادیر ویژه ماتریس حلقه- بسته $\tilde{\Lambda}_1 + (Y_1^H B)\tilde{F}_p$ ، همگی صفر هستند. سپس ماتریس حلقه- بسته

$$\tilde{\Gamma}_o = \tilde{\Lambda}_1 + (\widetilde{Y_1^H B})\tilde{F}_p = \begin{bmatrix} G_o(m \times n) & \\ I_{n-m} & O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix}.$$

را محاسبه می کنیم. اکنون ماتریس قطری D را به صورت $D = \text{diag}\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ تشکیل داده و با $\tilde{\Gamma}_o$ جمع می کنیم و آن را A_μ می نامیم. به وضوح مقادیر ویژه ماتریس A_μ مجموعه $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$

است. اکنون عملیات تشابهی $\begin{cases} c(j) = c(j) - \mu c(i) \\ r(i) = r(i) + \mu c(j) \end{cases}$ را بر روی ماتریس A_μ انجام می دهیم. با انجام این عملیات A_μ به فرم همدم برداری \tilde{A}_μ به صورت زیر تبدیل می شود،

$$\tilde{A}_\mu = \begin{bmatrix} G_{\mu(m \times p)} & \\ I_{p-m} & O_{(p-m) \times m} \end{bmatrix}. \quad (16.2)$$

از آن جایی که \tilde{A}_μ و A_μ مشابه اند، مقادیر ویژه آن ها نیز یکسان است. یعنی مقادیر ویژه \tilde{A}_μ نیز مجموعه $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ است. در ادامه ماتریس پسخورد حالت \tilde{K} را به صورت زیر تعریف می کنیم،

$$\tilde{K} = ((Y_1^H B)_o)^{-1}(-G_o + G_\mu) = -((Y_1^H B)_o)^{-1}G_o + ((Y_1^H B)_o)^{-1}G_\mu = \tilde{F}_p + \tilde{K}_\mu \quad (17.2)$$

به وضوح مقادیر ویژه ماتریس $\tilde{\Gamma}_\mu = \tilde{\Lambda}_1 + (\widetilde{Y_1^H B})\tilde{K}$ طیف $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ است، تعریف می کنیم $K = \tilde{K}T^{-1}$ که T^{-1} ماتریس تبدیلی است که از فرم همدم برداری به دست آوردیم. لذا، مقادیر ویژه ماتریس حلقه- بسته $\Gamma = \Lambda_1 + Y_1^H B K$ نیز طیف $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ است. در انتها، ماتریس پسخورد حالت مسئله تخصیص مقدار ویژه جزئی را به صورت زیر تعریف می کنیم،

$$F = K \times Y_1^H. \quad (18.2)$$

با تعریف ماتریس F مقادیر ویژه ماتریس حلقه- بسته $A + BF$ ، برابر طیف زیر است،

$$\Omega(A + BF) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p; \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}.$$

الگوریتم

فرضیات: زوج (B, A) به صورت جزئی نسبت به مقادیر ویژه $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ قابل کنترل است.
ورودی ها: ماتریس های A, B و مجموعه $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ و بردارهای ویژه سمت چپ Y_1 ماتریس A متناظر با مقادیر ویژه $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$.

خروجی: ماتریس پسخورد حالت F به طوری که $\Omega(A + BF) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$.

گام اول: محاسبه ماتریس های $\Lambda_1 = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ و $Y_1^H B$ طبق رابطه (15.2).

گام دوم: به دست آوردن ماتریس پسخورد K ، با کمک روش EVA به طوری که مقادیر ویژه ماتریس حلقه- بسته $\Lambda_1 + Y_1^H B K$ برابر طیف $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ باشد.

گام سوم: محاسبه ماتریس $F = K \times Y_1^H$.

۳.۲ پارامتری سازی ماتریس پسخورد حالت

ماتریس پسخورد یکتانویس و عموماً وابسته به پارامترهای آزاد است، بنابراین انتظار می رود برای سیستم های کنترلی بتوان ماتریس های مختلفی به دست آورد. کمینه سازی نرم و پارامتری سازی کنترل گرها مورد توجه بسیاری از محققین از جمله [۳۳]–[۳۸] قرار گرفته است. برای بهبود عملکرد سیستم و رفتار همگرایی بردارهای ورودی و حالت نیاز است نرم ماتریس پسخورد حداقل مقدار ممکن باشد. روش های مختلفی برای یافتن ماتریس پسخورد ارائه شده است [۱۷، ۳۳، ۳۵، ۳۱].

۱.۳.۲ کمینه سازی نرم ماتریس پسخورد با پارامتری سازی خطی

در این بخش ابتدا با استفاده از نظریه گراف و تعریف مربوط به گراف و ماتریس متناظر با آن، گراف متناظر با ماتریس $A + BF_p$ را شرح داده و سپس از نظریه گراف برای به دست آوردن ماتریس پسخورد حالت پارامتری خطی در مسئله PEVA استفاده می کنیم. در انتها تلاش می کنیم تا نرم ماتریس پسخورد حالت را برای مسئله تخصیص مقدار ویژه به حداقل مقدار برسانیم.

ماتریس و گراف

تعریف ۱.۳.۲. گراف از مجموعه غیرتهی به نام رئوس و مجموعه دیگری به نام یال تشکیل شده است که هر یال با دو رأس مشخص می شود. یکی از این رئوس را ابتدای یال و دیگری را انتهای یال می نامند. گراف را با حرف g و رئوس را با نماد e_i نمایش می دهیم.

تعریف ۲.۳.۲. تعداد یال های تشکیل دهنده یک مسیر در گراف را طول مسیر می نامند و آن را با L_i نشان می دهیم.

رئوس در گرافی که در ادامه با آن سروکار داریم، پایه های استاندارد \mathbb{R}^n به انضمام صفر است. مسیرهایی از این گراف مورد توجه ما خواهند بود که انتهای آنها به صفر برسند. اگر مسیری از e_i به صفر وجود داشته باشد، آن گاه e_i با صفر مرتبط است.

برای هر گراف n رأسی g ، ماتریس $G, n \times n$ وجود دارد به طوری که، اگر یالی از e_i به e_j وجود داشته باشد، $G_{ij} = 1$ و اگر از e_i به e_j یالی وجود نداشته باشد، $G_{ij} = 0$ خواهد شد. (که G_{ij} ، درایه سطر i ام و ستون j ام ماتریس $G, n \times n$ است). به طور مشابه می توان با داشتن یک ماتریس $n \times n$ ، با درایه های صفر و یک، گرافی n رأسی متناظر نمود. به طوری که به ازای درایه $G_{ij} = 1$ ، یالی از رأس e_i به e_j رسم نمود و برای $G_{ij} = 0$ ، یعنی از رأس e_i به e_j یالی وجود ندارد.

گراف مربوط به ماتریس $A + BF_p$

زوج (B, A) را در سیستم خطی (۱.۲) در نظر بگیرید. با استفاده از روش تبدیلات تشابهی بیان شده در بخش ۳.۱.۲، ماتریس پسخورد F_p را از فرم همدم برداری این زوج به دست می آوریم. همان گونه که پیش از این نشان داده ایم، درایه های ماتریس حلقه- بسته $A + BF_p$ ، صفر یا یک است. در نتیجه می توان گرافی برای آن متناظر نمود به طوری که رئوس آن را بردارهای پایه استاندارد \mathbb{R}^n به انضمام بردار صفر تشکیل

می‌دهند [۳۰]. به این ترتیب که ابتدا، m رأس ورودی e_1, e_2, \dots, e_m را در نظر می‌گیریم. سپس دو حالت زیر به وجود می‌آید:

$$1. \text{ از رأس } e_i \text{ به رأس } e_j \text{ یالی در نظر گرفته می‌شود، هرگاه } (A + BF_p)e_i = e_j.$$

$$2. \text{ بین رأس } e_i \text{ و صفر رأسی فرض می‌کنیم اگر و تنها اگر } (A + BF_p)e_i = 0.$$

از آن جایی که ماتریس $A + BF_p$ پوچ توان است، از هر رأس غیرصفر گراف g متناظر آن، مسیری به رأس صفر وجود دارد. علاوه بر این، در گراف g هیچ حلقه و دوری وجود ندارد. در نتیجه طبق مطالب گذشته، L_i را ماکسیمم فاصله رأس e_i با رأس صفر در نظر می‌گیریم و می‌توان گفت:

$$1. \text{ هر } L_i \text{ عدد صحیحی است که } 1 \leq L_i \leq n.$$

$$2. \text{ اندیس پوچ توانی ماتریس } A + BF_p \text{ عبارت است از، } \vartheta = \max\{L_1, L_2, \dots, L_m\}.$$

$$3. \text{ در گراف } g, \text{ به هیچ یک از رئوس } e_1, e_2, \dots, e_m \text{ یالی منتهی نمی‌شود.}$$

$$\max\{L_1, L_2, \dots, L_m\} = \max\{L_1, L_2, \dots, L_m, L_{m+1}, \dots, L_n\}.$$

ماتریس پس‌خورده حالت پارامتری خطی

برای تعیین جایگاه پارامترهای خطی در ماتریس پس‌خورده حالت، ماتریس حلقه-بسته $\tilde{\Gamma}_0 = \tilde{\Lambda}_1 + \tilde{Y}_1^H B \tilde{F}_p$ را در فضای همدم برداری تشکیل می‌دهیم. همان گونه که در بخش قبل بیان شد، از آن جایی که درایه‌های این ماتریس صفر و یک است، گراف متناظر با این ماتریس را رسم می‌نماییم. با توجه به این که درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس $\tilde{\Gamma}_0$ همگی صفر هستند و این ماتریس، ماتریسی مثلثی است، گراف متناظر با این ماتریس شامل هیچ حلقه و دوری نیست و برگشت از روی یال امکان ندارد. از هر رأس غیر صفر، مسیری به رأس صفر وجود دارد و اندیس پوچ توانی $\tilde{\Gamma}_0$ ، بزرگ‌ترین طول مسیر از یک رأس ورودی تا رأس صفر است.

اکنون ماتریس $G_\alpha, m \times p$ با درایه‌های صفر را در نظر بگیرید. سپس برای یافتن پارامترها، یال‌هایی از هر رأس به رأس‌های دیگر رسم می‌کنیم، به طوری که:

$$1. \text{ ابتدای هر یال، یکی از } m \text{ ورودی گراف باشد و انتهای آن یال ورودی یا گره‌های دیگر باشد.}$$

$$2. \text{ یال‌ها را به گونه‌ای رسم کنیم که در گراف ایجاد دور ننمایند.}$$

$$3. \text{ یال‌ها نباید روی هم قرار گیرند.}$$

$$4. \text{ اگر از رئوسی که اندیس آن‌ها کوچک‌تر یا مساوی } m \text{ است، یالی به رئوس دیگر وصل گردد آن‌گاه این یال‌های اضافی بیانگر پارامترهای خطی است.}$$

هنگامی که از رأس e_i به رأس e_j یالی اضافی کنیم، درایه (i, j) ماتریس G_α را پارامتر g_{ij} قرار می‌دهیم. به این ترتیب پارامترهای مؤثر ماتریس G_α تعیین شده و واضح است که این ماتریس منحصر به فرد نیست.

ملاحظه ۱.۳.۲. برای به‌دست آوردن گراف متناظر با ماتریس حلقه- بسته $A + BF_p$ ، اگر ناوردهای کرونگر منظم باشد، می‌توان از رابطی زیر استفاده کرد:

$$\begin{cases} \tilde{\Gamma}_\circ e_i = e_{i+m}, & i + m \leq p, \\ \tilde{\Gamma}_\circ e_i = \circ, & i + m > p. \end{cases} \quad (19.2)$$

ماتریس پسخورد حالت پارامتری خطی که مقادیر ویژه $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ را به ماتریس حلقه- بسته $\Lambda_1 + Y_1^H BK$ اختصاص می‌دهد، به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} K &= F_p + K_\mu + K_\alpha \\ &= -(Y_1^H B)_\circ^{-1} G_\circ + (Y_1^H B)_\circ^{-1} G_\mu + (Y_1^H B)_\circ^{-1} G_\alpha \\ &= (Y_1^H B)_\circ^{-1} (-G_\circ + G_\mu + G_\alpha). \end{aligned} \quad (20.2)$$

در انتها با استفاده از ماتریس K که در معادله (۲۰.۲) به‌دست آمد، ماتریس پسخورد حالت پارامتری خطی مسئله PEVA را به‌صورت $F = KY_1^H$ تعریف می‌کنیم.

در ادامه هدف یافتن ماتریس پسخورد حالت F است به‌گونه‌ای که نرم آن کمینه شود. واضح است که ماتریس پسخورد حالت جزئی F ، با ماتریس پسخورد حالت پارامتری خطی K رابطه مستقیم دارد، بنابراین برای کمینه کردن نرم ماتریس پسخورد حالت F ، می‌توان از کمینه کردن نرم ماتریس K استفاده نمود. از آنجایی که اندازه ماتریس K می‌تواند بسیار کوچک‌تر از ماتریس F باشد، این کار از نظر زمان و هزینه بسیار به‌صرفه‌تر است. در نتیجه هدف یافتن پارامترهای ماتریس پسخورد حالت K است، به‌طوری که نرم آن حداقل مقدار ممکن شود.

الگوریتمی برای کمینه کردن کنترل‌گر پسخورد حالت در مسئله PEVA

در این قسمت هدف یافتن ماتریس پسخورد حالت $(-G_\circ + G_\mu + G_\alpha)T^{-1}$ به‌طوری که نرم آن حداقل مقدار خود باشد. یعنی کمینه کردن عبارت زیر،

$$\|K\|_F = \text{trac}[KK^T]. \quad (21.2)$$

یک راه برای به‌دست آوردن چنین ماتریسی استفاده از معادله زیر است:

$$\frac{\partial \|K\|_F^2}{\partial \alpha_i} = \circ, \quad (i = 1, 2, \dots, r) \quad (22.2)$$

که در آن α_i ها نشان دهنده پارامترهای خطی ماتریس پسخورد حالت هستند که متعلق به ماتریس G_α است. اکنون مجموعه‌ای از r معادله خطی به‌دست می‌آید که دارای r مجهول است. از آنجایی که با افزایش پارامترها، به‌دست آوردن مشتقات جزئی $\|K\|$ برحسب هر پارامتر بسیار دشوار خواهد بود. در ادامه روشی برای کمینه‌سازی ماتریس پسخورد حالت K بیان می‌کند که در آن مجموعه‌ای مطلوب از مقادیر که پیش از این ذکر شد، به ماتریس حلقه- بسته اختصاص داده می‌شود [۳۱]. زیر ماتریس G_α ، که شامل مؤلفه‌های غیر صفر G_α ، (یعنی پارامترهای g_{ij})، است را در نظر بگیرید. این زیر ماتریس را H می‌نامیم و عناصر آن را با h_{sr} نشان می‌دهیم که در سطر s ام و ستون r ام قرار دارد. به‌وضوح، در حاصل ضرب

$(Y_1^H B)_0^{-1} G_\alpha T^{-1}$ ، ستون s از ماتریس $(Y_1^H B)_0^{-1}$ و سطر r از ماتریس T^{-1} ، پارامترهای ناصفر تولید می کنند که با عناصر متناظر K_p که برابر $(Y_1^H B)_0^{-1} (-G_\alpha + G_\mu) T^{-1}$ است، جمع می شوند. ستون های $(Y_1^H B)_0^{-1}$ را که با سطرهای h_{sr} سازگارند در ماتریس V و سطرهای T^{-1} را که با ستون های h_{sr} سازگار هستند را در ماتریس W قرار می دهیم. بنابراین ماتریس پسخورد حالت پارامتری خطی مؤثر عبارت است از،

$$K = K_p + VHW = k_{p_{ij}} + v_{is} h_{sr} w_{rj}, \quad (23.2)$$

که نرم فروبنیوس K به صورت زیر است،

$$\|K\|^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n k_{ij}^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (k_{p_{ij}} + v_{is} h_{sr} w_{rj})^2, \quad (24.2)$$

برای کمینه کردن باید معادله (۲۲.۲)، برای هر $s \leq m$ و $r \leq n$ برقرار باشد. مشتق گیری از نرم K نسبت به هر یک از پارامترهای h_{sr} به صورت زیر است:

$$2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n v_{si} (k_{p_{ij}} + v_{is} h_{sr} w_{rj}) w_{jr} = 0,$$

یا

$$2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n v_{si} k_{p_{ij}} w_{jr} + v_{si} v_{is} h_{sr} w_{rj} w_{jr} = 0, \quad (25.2)$$

در نمادگذاری ماتریس، $\sum_{i=1}^m v_{si} v_{is}$ را با $V^T V$ نشان می دهیم که یک ماتریس وارون پذیر $s \times s$ است و آن را P می نامند. $\sum_{j=1}^n w_{rj} w_{jr}$ را با $W W^T$ نمایش می دهیم که یک ماتریس وارون پذیر $r \times r$ است و آن را با Q نمایش می دهیم (زیرا ستون های V و سطرهای W ، به ترتیب بردارهای مستقل به دست آمده از ماتریس های $(Y_1^H B)_0^{-1}$ و T^{-1} هستند). اکنون معادله (۲۳.۲) را بازنویسی می کنیم

$$(26.2)$$

$$2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (v_{is})^T K_p (w_{rj})^T + (v_{is})^T v_{is} H w_{rj} (w_{rj})^T = 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (v_{is})^T K_p (w_{rj})^T + P H Q = 0.$$

قرار می دهیم

$$C = V^t K_p W^t, \quad (27.2)$$

با جایگذاری (۲۷.۲) در معادله (۲۶.۲) داریم:

$$C + P H Q = 0 \rightarrow H = -P^{-1} C Q^{-1}. \quad (28.2)$$

مثال ۱.۳.۲. سیستم (۱.۲) را در نظر بگیرید که در آن A و B ، به صورت زیر هستند:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 7 & 0 & 10 \\ 7 & 5 & 0 & 1 & 7 & 9 & 2 \\ 9 & 3 & 17 & 3 & 11 & 2 & 4 \\ 8 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 7 & 13 & 1 & 3 & 2 & 16 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 3 & 9 & 0 & 4 \\ 19 & 3 & 0 & 2 & 0 & 11 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 7 \\ 2 & 5 \\ 3 & 7 \\ 0 & 7 \\ 3 & 1 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

ماتریس پسخورد حالت K_1 که مقادیر ویژه ماتریس حلقه- بسته $\Lambda_1 + Y_1^H B K_1$ را به طیف $\{-9, -2, -7\}$ و ماتریس پسخورد حالت تخصیص جزئی F_1 که مقادیر ویژه ماتریس $A + B F_1$ را به

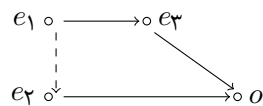
$$\{-9, -2, -7, -18/6725, -6/11228, -0/8487, -3/9606\}$$

می برد به صورت زیر هستند:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -5/2986 & -6/0292 & -25/9118 \\ -2/3706 & 5/1108 & 10/8866 \end{bmatrix},$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} -19/5004 & 8/6128 & 3/1993 & -4/5050 & 1/3807 & 0/7880 & -15/8838 \\ 6/6131 & -4/5067 & -3/1836 & 1/3248 & -2/1015 & -1/3099 & 5/8603 \end{bmatrix},$$

با نرم های $\|K_1\|_F = 29/7676$, $\|F_1\|_F = 29/1158$. برای به دست آوردن ماتریس پسخورد حالت پارامتری خطی، در حالتی که شرط بهینه زمانی مهم باشد، گراف حالت انتقال سیستم و ماتریس گراف متناظر G_α به صورت زیر به دست می آید:



$$G_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & g_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

برای محاسبه پارامتر ماتریس G_α ستون اول ماتریس $(Y_1^H B)^{-1}$ را در ماتریس V و سطر دوم ماتریس T^{-1} را در ماتریس W قرار می دهیم و داریم:

$$P = V^T V = [1], \quad Q = W W^T = [1/0696],$$

و

$$C = V^T K_1 W^T = [27/0120], \quad H = -P^{-1} C Q^{-1} = [-25/2536].$$

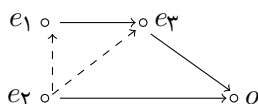
در نتیجه ماتریس های G_α , K_2 و F_2 به صورت زیر به دست می آیند:

$$G_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -25/2536 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = (Y_1^H B)^{-1} (-G_o + G_\mu + G_\alpha) T^{-1} = \begin{bmatrix} -7/2197 & 0/9524 & -0/8176 \\ -2/3706 & 5/1108 & 10/8866 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} -3/7553 & -2/3571 & -0/9757 & -1/3333 & -2/8670 & -2/8899 & -2/3094 \\ 6/6129 & -4/5071 & -3/1836 & 1/3243 & -2/1023 & -1/3104 & 5/8607 \end{bmatrix},$$

با نرم های $\|K_2\|_F = 12/3288$, $\|F_2\|_F = 10/9563$ در حالتی که بهینه زمانی مورد توجه نباشد،



$$G_{\alpha} = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ g_{21} & \circ & g_{23} \end{bmatrix},$$

اکنون، ستون دوم ماتریس $(Y_1^H B)^{-1}$ را در ماتریس V و سطر اول و سوم ماتریس T^{-1} را در ماتریس W قرار می دهیم و داریم:

$$P = V^T V = [2/481 \circ], \quad Q = W W^T = \begin{bmatrix} \circ/1866 & \circ/185 \\ \circ/185 & \circ/1020 \end{bmatrix},$$

9

$$C = V^T K_1 W^T = [17/4317 \quad 1/8952] \quad H = -P^{-1} C Q^{-1} = [6/2576 \quad -42/3558],$$

در نتیجه ماتریس های G_{α} ، K_3 و F_3 به صورت زیر حاصل می شود:

$$G_{\alpha} = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ 6/2576 & \circ & -42/3558 \end{bmatrix}$$

در نتیجه،

$$K_3 = \begin{bmatrix} -3/4232 & -6/1606 & -5/1322 \\ -3/9116 & 5/2187 & -6/1884 \end{bmatrix},$$

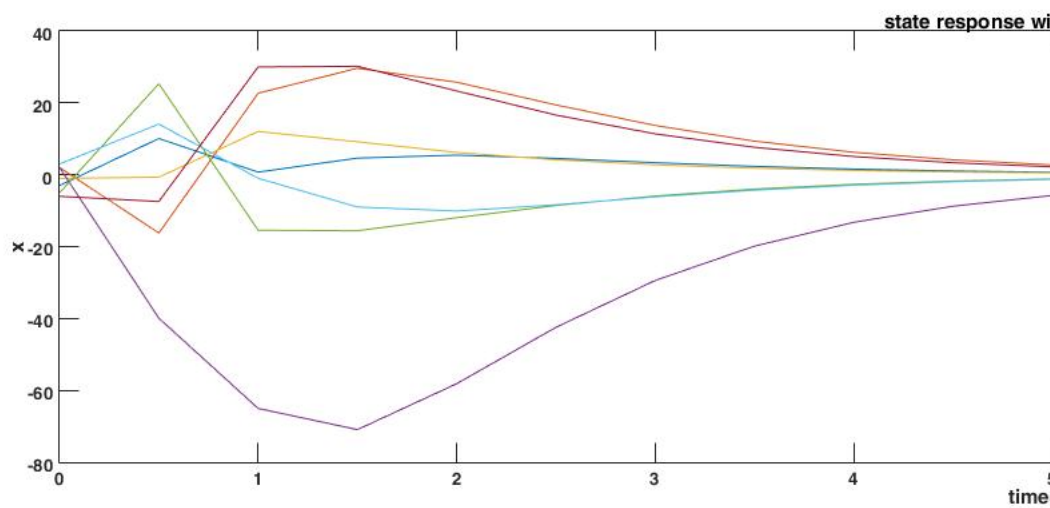
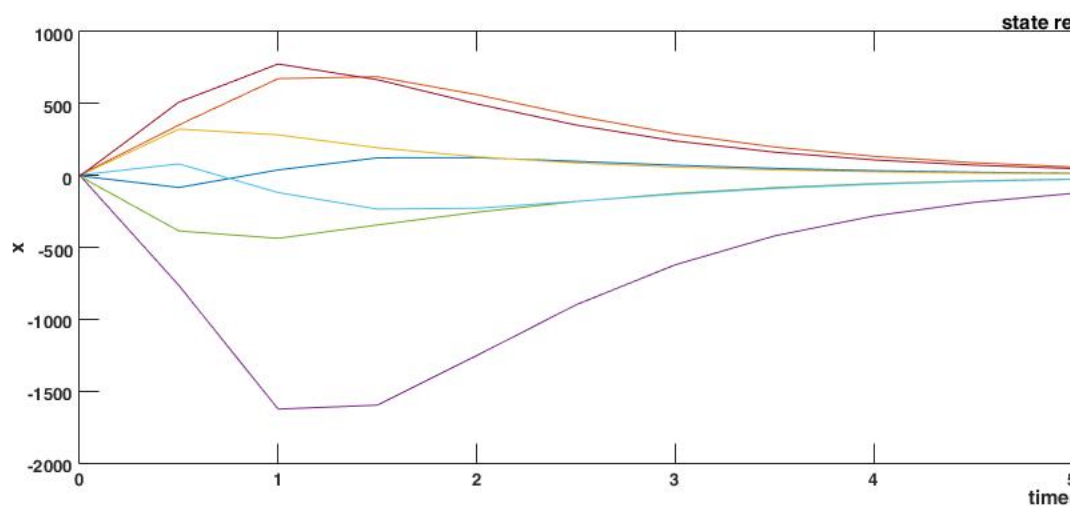
$$F_3 = \begin{bmatrix} -6/2822 & -1/5881 & 3/5929 & -1/9010 & -1/8029 & -3/5133 & -4/8216 \\ -4/2485 & 3/8756 & -3/5070 & -\circ/8149 & \circ/5145 & 2/2246 & -3/2298 \end{bmatrix},$$

$$\|K_3\|_F = 9/5730, \quad \|F_3\|_F = 10/1827$$

مقایسه بین نرم های ماتریس پسخورد در جدول ۲.۳ آورده شده است. همچنین پاسخ سیستم در شکل های ۱۸.۳ و ۱۹.۳ نشان داده شده اند. از شکل موجود مشاهده می شود که سیستم (۷۶.۳) با بردار اولیه $x_0 = [-3, 2]^T$ به طور مجانبی پایدار است.

۲.۳.۲ پارامتری سازی غیر خطی ماتریس پسخورد حالت

پارامتر سازی کنترل گرها پسخورد حالت با استفاده از مسئله تخصیص مقدار ویژه موضوع بسیاری از تحقیقات در دهه های اخیر بوده است. روش های مختلف تخصیص مقدار ویژه پارامتری برای دستگاه چندوردی در مقالات بیان شده است. کرباسی و طهرانی در [۳۲] یک روش جدید برای پارامتری سازی کنترل گر پسخورد حالت معرفی کرده اند، آن ها نشان دادند که با استفاده از الگوریتم ساده بر پایه بردارهای به دست آمده از عملگرهای مقدماتی و ویژگی های ثابت های کرونگر، یک گروه از کنترل گرها پارامتری با پارامترهای خطی را می توان تولید کرد. موقعیت پارامترها را می توان با استفاده از گراف تبدیل حالت به دست آورد [۳۰]. در این مبحث با بسط روش کرباسی و طهرانی، یک چارچوب کلی برای به دست



شکل ۱.۲: مقایسه رفتار همگرایی مولفه‌های بردار حالت در مثال ۳.۶.۳

آوردن کنترل گره های پارامتری با استفاده از پارامترهای غیرخطی می سازیم. نشان می دهیم که این ماتریس کنترل گر در حالت طبیعی غیرخطی است و مجموعه ای از کنترل گرها با پارامترهای خطی، یک زیر مجموعه از این حالت پارامتری شده عمومی هستند. یک نتیجه قابل توجه آن است که دستگاه معادلات غیرخطی برای تخصیص مقدار ویژه، برای جفت ماتریس (B, A) از دستگاه دلخواه و یک مجموعه دلخواه از مقادیر ویژه به شکل یکتا، با استفاده از ویژگی های ساختاری دستگاه تعیین می شود که در آن از ثابت کرونگر تعریف شده در مرجع [۱۵] استفاده کردیم.

زوج (B, A) را در معادله حالت دستگاه خطی زیر در نظر بگیرید،

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

فرم همدم برداری زوج (B, A) را طبق بخش ۳.۱.۲ به دست می آوریم،

$$[B, A, I_n] \xrightarrow{T^{-1}} [\tilde{B}, \tilde{A}, T^{-1}],$$

سپس، در فضای همدم برداری و برای حالتی که مقادیر ویژه ماتریس حلقه- بسته را به صفر می برد، در فضای همدم برداری محاسبه نموده و آن را \tilde{F}_p می نامیم. داریم،

$$\tilde{\Gamma}_o = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}_p,$$

اکنون ماتریس \tilde{A}_λ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\tilde{A}_\lambda = \begin{bmatrix} G_{\lambda_{m \times n}} & \\ I_{n-m} & O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix}, \quad (29.2)$$

که در آن G_λ ، ماتریس پارامتری به صورت زیر است:

$$G_\lambda = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \dots & g_{mn} \end{bmatrix}. \quad (30.2)$$

با توجه به این که مقادیر ویژه ماتریس \tilde{A}_λ باید در طیف $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ قرار گیرد، بنابراین به منظور تعیین رابطه بین پارامترهای g_{ij} باید قرار دهیم،

$$\det(\tilde{A}_\lambda - \lambda I) = P_n(\lambda) = 0,$$

با بسط دترمینان فوق خواهیم داشت،

$$P_n(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \dots + c_{n-1} \lambda + c_n), \quad (31.2)$$

با توجه به این که ریشه های این چند جمله ای باید همان مقادیر ویژه \tilde{A}_λ باشند که اعداد حقیقی و مختلط در طیف مقادیر ویژه $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ هستند، می توان نوشت،

$$P_n(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n), \quad (32.2)$$

که با استفاده از مساوی قرار دادن معادلات (۳۱.۲) و (۳۲.۲) می توان ضرایب c_i ، $(i = 1, 2, \dots, n)$ را به صورت زیر محاسبه نمود.

$$\begin{cases} c_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) = -\sum_{i=1}^n \lambda_i, \\ c_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \dots + \lambda_{n-1} \lambda_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \lambda_i \lambda_j, \\ \vdots \\ c_n = (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = (-1)^n \prod_{i=1}^n \lambda_i. \end{cases} \quad (33.2)$$

با محاسبه $\det(\tilde{A}_\lambda - \lambda I)$ و روابط به دست آمده بالا، n معادله غیرخطی به شرح زیر به دست می آید:

$$\begin{cases} f_1(g_{11}, g_{12}, \dots, g_{mn}) = c_1, \\ f_2(g_{11}, g_{12}, \dots, g_{mn}) = c_2, \\ \vdots \\ f_n(g_{11}, g_{12}, \dots, g_{mn}) = c_n. \end{cases} \quad (34.2)$$

در نتیجه، یک دستگاه معادلات غیرخطی خواهیم داشت که در آن n معادله و mn مجهول داریم. لذا دستگاه فوق در صورت وجود جواب، دارای بی شمار جواب است.

اکنون باید $mn - n$ مجهول آن را آزاد در نظر بگیریم تا بتوان n مجهول آن را در صورت وجود به دست آورد. در ادامه می توان برای حالتی که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\Gamma = A + BK$ را در طیف Λ قرار می دهد، ماتریس پسخورد را به صورت زیر تعیین نمود،

$$K = B_0^{-1}(-G_0 + G_\lambda)T^{-1} = -B_0^{-1}G_0T^{-1} + B_0^{-1}G_\lambda T^{-1} = F_p + K_\lambda \quad (35.2)$$

به طوری که K_λ ، یک ماتریس پسخورد حالت پارامتری غیرخطی است که مقادیر ویژه Λ را اختصاص می دهد و F_p ماتریس پسخورد حالتی است که مقادیر ویژه ماتریس حلقه - بسته را به صفر می برد.

ماتریس پسخورد حالت پارامتری غیرخطی در مسئله PEVA

سیستم (۱.۲) را در نظر بگیرید، همانند قبل، مقادیر ویژه ماتریس حلقه - باز A ، در طیف $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ باشد به طوری که، $\lambda_p; \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$ در ناحیه ناپایدار و $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ در ناحیه پایدار قرار دارند. در این قسمت هدف یافتن ماتریس پسخورد حالت پارامتری غیرخطی F است، به گونه ای $\Omega(A + BF) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p; \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$ برای رسیدن به هدف، ابتدا مانند بخش ۳.۲.۲، ماتریس Λ_1 و بردارهای ویژه سمت چپ ماتریس A ، متناظر با مقادیر ویژه $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ ، که آن را در ماتریس Y_1 قرار می دهیم، به دست می آوریم. زوج $(\Lambda_1, Y_1^H B)$ را در نظر بگیرید. همانند بخش ۳.۱.۲، ماتریس های $\tilde{A}_{\mu_p \times p}$ و $G_{\mu_m \times p}$ را به دست آورده، که مقادیر ویژه ماتریس \tilde{A}_μ باید برابر طیف $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ باشند. از این طریق و با استفاده از ریشه های چندجمله ای مشخصه، مقادیر c_1, c_2, \dots, c_p و c_p را به دست می آوریم. با این روند، پارامترهای مجهول G_μ را محاسبه می کنیم.

ماتریس پسخورد حالت پارامتری غیرخطی، که مقادیر ویژه ماتریس حلقه - بسته $\Lambda_1 + Y_1^H BK$ را در طیف $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ قرار می دهد، به صورت زیر تعریف می شود،

$$K = -(Y_1^H B)_0^{-1} G_0 T^{-1} + (Y_1^H B)_0^{-1} G_\mu T^{-1} \implies F = KY_1^H. \quad (36.2)$$

ماتریس پسخورد حالت پارامتری غیرخطی مسئله PEVA را به دست می آوریم. این ماتریس، طیف مقادیر ویژه ماتریس $A + BF$ را به $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p; \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$ می برد.

مثال ۲.۳.۲. سیستم مثال ۱.۳.۲ را در نظر بگیرید. داریم،

$$\Omega(A) = \{29/1620, -18/6725, 16/4868, 8/9558, -8/4887, -6/1228, -3/9606\}.$$

مقادیر مطلوب $\{-8, -2/3, -8/3\}$ را در نظر بگیرید. هدف یافتن ماتریس پسخورد حالت پارامتری غیرخطی F است، به گونه ای که مقادیر ویژه ماتریس حلقه- بسته $A + BF$ برابر

$$\Omega(A + BF) = \{-8, -2/3, -8/3, -18/6725, -8/4887, -6/1228, -3/9606\}$$

باشد. بنابراین،

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 29/1620 & 0 & 0 \\ 0 & 16/4868 & 0 \\ 0 & 0 & 8/9558 \end{bmatrix}$$

$$Y_1^H = \begin{bmatrix} 0/4865 & 70/4457 & 70/521 & 70/1873 & 0/4459 & 0/4947 & 0/2887 \\ 0/2547 & 0/4502 & -0/6207 & 0/1136 & 0/2049 & 0/5024 & 0/1994 \\ 0/5938 & -0/5283 & 0/103 & 70/1091 & -0/1922 & -0/2485 & 0/5076 \end{bmatrix}.$$

ماتریس پسخورد حالتی که مقادیر ویژه ماتریس $\Lambda_1 - Y_1^H B F_p$ را به صفر می برد، به صورت زیر است:

$$F_p = \begin{bmatrix} -2/3433 & -5/4603 & -14/3752 \\ -2/2184 & 4/5579 & 8/8993 \end{bmatrix},$$

اکنون ماتریس

$$\tilde{A}_\mu = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

را در نظر بگیرید. داریم

$$\det(\tilde{A}_\mu - \lambda I) = \begin{vmatrix} g_{11} - \lambda & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} - \lambda & g_{23} \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(\lambda^3 - (g_{11} + g_{22})\lambda^2 + (g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} - g_{13})\lambda + g_{13}g_{22} - g_{12}g_{23}).$$

در نتیجه،

$$\begin{cases} g_{11} + g_{22} = -c_1 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = -10/6, \\ g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} - g_{13} = c_2 = \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 = 21/49, \\ g_{13}g_{22} - g_{12}g_{23} = c_3 = -\mu_1\mu_2\mu_3 = 5/52. \end{cases}$$

دستگاه بالا یک دستگاه ۳ معادله، ۶ مجهول است. با انتخاب ۳ مجهول به صورت دلخواه، می‌توان مجهولات دیگر را محاسبه نمود. با انتخاب یکی از مجهولات آزاد به صورت $g_{11} = \mu_1 + \mu_3$ ، از دستگاه بالا داریم:

$$g_{22} = \mu_2 = -2/3 \quad (\text{از معادله اول})$$

$$g_{11}g_{22} = \mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_3 \rightarrow g_{13} = -g_{12}g_{21} - \mu_1\mu_3 \quad (\text{معادله دوم}) \quad (37.2)$$

$$g_{12}g_{23} = \mu_2g_{13} + \mu_1\mu_2\mu_3 = -2/3(g_{13} + 2/4) \quad (\text{معادله سوم}) \quad (38.2)$$

با استفاده از معادلات (۳۷.۲) و (۳۸.۲) داریم

$$g_{12}g_{23} = \mu_2(-g_{12}g_{21}) \rightarrow g_{23} = -\mu_2g_{21}$$

اکنون ماتریس G_μ به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$G_\mu = \begin{bmatrix} -\lambda/3 & g_{12} & -2/4 - g_{12}g_{21} \\ g_{21} & -2/3 & 2/3g_{21} \end{bmatrix}$$

دو پارامتر g_{12} و g_{21} در ماتریس G_μ نیز آزاد هستند. با هر انتخاب برای این دو پارامتر، ماتریس K ، مقادیر ویژه ماتریس $\Lambda_1 + Y^H B K$ را به $\{-\lambda, -2/3, -0/3\}$ می‌برد. بنابراین داریم،

$$K = F_p + B_o^{-1}G_\mu T^{-1} = K_{ij}$$

که در آن،

$$\begin{cases} k_{11} = -3/5599 - 0/2832g_{21} + 0/854g_{12}, \\ k_{12} = -6/1998 + 0/0164g_{21} - 0/2512g_{12}, \\ k_{13} = -20/5481 - 0/6023g_{21} - 0/99g_{12} - 0/0425g_{12}g_{21}, \\ k_{21} = -2/3934, \\ k_{22} = 5/1938, \\ k_{23} = 11/1848. \end{cases}$$

در انتها با تعریف ماتریس پس‌خورده حالت F به صورت زیر، مقادیر ویژه ماتریس حلقه-بسته $A + BF$ برابر $\{-\lambda, -2/3, -0/3, -18/6725, -0/8487, -6/1228, -3/9606\}$ می‌شود. $(f_{ij}, i = \{1, 2\})$

$j = \{1, 2, \dots, 7\}$ ، درایه های ماتریس F هستند).

$$\left\{ \begin{array}{l}
 F = KY^H \\
 f_{11} = -15/5100 - 0/542g_{21} - 0/6123g_{12} - 0/212g_{12}g_{21}, \\
 f_{12} = 6/5529 + 0/219g_{21} + 0/4423g_{12} + 0/243g_{12}g_{21}, \\
 f_{13} = 3/4638 - 0/312g_{21} + 0/1465g_{12}, \\
 f_{14} = -3/6160 - 0/1287g_{21} - 0/1521g_{12}, \\
 f_{15} = 1/183 - 0/122g_{21} + 0/1717g_{12} + 0/651g_{12}g_{21}, \\
 f_{16} = 0/320 + 0/11g_{21} + 0/1723g_{12} + 0/143g_{12}g_{21}, \\
 f_{17} = -12/7468 - 0/3916g_{21} - 0/5312g_{12} - 0/272g_{12}g_{21}, \\
 f_{21} = 6/7325 + 0/3812g_{21}, \\
 f_{22} = -4/6470 - 0/1872g_{21}, \\
 f_{23} = -3/2332 + 0/165g_{21}, \\
 f_{24} = 1/3525 + 0/843g_{21}, \\
 f_{25} = -2/1320 - 0/112g_{21}, \\
 f_{26} = -1/3736 - 0/372g_{21}, \\
 f_{27} = 6/512 + 0/321g_{21}.
 \end{array} \right.$$

به عنوان مثال، با در نظر گرفتن پارامترهای آزاد به صورت $g_{12} = g_{21} = 0$ ، طیف مقادیر ویژه ماتریس حلقه- بسته $A + BF$ ، با خطای بسیار ناچیز برابر مجموعه زیر می شود که متشکل از مقادیر پایدار اولیه ماتریس حلقه- باز دستگاه و مقادیر دلخواه مورد نظر هستند.

$$\Omega(A + BF) = \{-18/6725, -8/0002, -6/1228, -0/2998, -0/8487, -2/300, -3/9606\}.$$

فصل ۳

سیستم‌های تاخیری

تأخیر زمانی^۱ ویژگی یک سیستم فیزیکی است که در نتیجه آن واکنش یا پاسخ سیستم به یک نیروی وارد شده به تأخیر می‌افتد. در هر زمان که اطلاعات یا انرژی به لحاظ فیزیکی از یک مکان به مکان دیگر انتقال داده می‌شود به همراه انتقال تأخیر به وجود می‌آید که مقدار آن به فاصله و سرعت انتقال بستگی دارد به این ترتیب تأخیرها گاهی اوقات طولانی و گاهی کوتاه هستند که وجود تاخیرهای طولانی باعث ناپایداری سیستم‌ها می‌شوند.

در این فصل ابتدا در بخش ۱.۳ معادلات دیفرانسیل با تاخیر زمانی (تاخیردار)^۲ (DDE) را معرفی می‌کنیم. در ادامه در بخش ۲.۳ مروری بر سیستم‌های تاخیری داریم. در بخش ۳.۳ به معرفی سیستم‌های زمان-پیوسته، کنترل پذیری و پایداری آن‌ها تحت تابع لیاپانوف می‌پردازیم. در بخش ۴.۳ سیستم‌های زمان-گسسته را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و تحلیلی بر پایداری آن‌ها با چندین روش داریم و روشی بر پایه تبدیلات تشابهی در بخش‌های ۵.۳ و ۶.۳. برای پایداری سازی سیستم‌های تاخیری پیشنهاد می‌کنیم.

۱.۳ معادلات دیفرانسیل با تأخیر زمانی

ویژگی که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل تاخیری را از سایر دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل معمولی^۳ (ODE) متمایز می‌کند، این خاصیت است که تحولات دستگاه DDE نه تنها به وضعیت کنونی دستگاه بلکه به حالات پیشین دستگاه نیز وابسته است. در عمل بسیاری از سیستم‌های دینامیکی فقط به وسیله ODE بیان می‌شوند در حالی که در برخی اوقات تاثیر تاخیر زمانی در دستگاه را نمی‌توان نادیده گرفت و یا حداقل وجود تاخیر برای سیستم مفید خواهد بود.

¹ Time-delay

² Delay Differential Equation

³ Ordinary Differential Equation



شکل ۱.۳: پانتوگراف (حمل و نقل و استودیو)

در قرن هجدهم کاندورست^۴ و لاپلاس^۵ یک رده مهم و بزرگ از سیستم‌های دینامیکی معادلات دیفرانسیل تاخیری را معرفی کردند. صورت کلی معادله دیفرانسیل با تاخیر زمانی برای $x(t) \in \mathbb{R}^n$ به صورت

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x_t), \quad (1.3)$$

است که در آن $x_t = \{x(h) : h \leq t\}$ و f یک تابع $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ است. نمایشی که در این رساله برای سیستم با تاخیر ثابت استفاده می‌شود به صورت

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h)), \quad (2.3)$$

است که در آن f یک تابع خطی است و h تاخیر زمانی را نشان می‌دهد. یکی از معادلات تاخیری پرکاربرد در زیست‌شناسی، معادله لوجستیک تاخیری (۱۹۴۸) است که در مدل‌های دینامیکی رشد جمعیت به صورت زیر کاربرد دارد،

$$\dot{x}(t) = ax(t)(1 - x(t - \tau(t))).$$

همچنین معادله دیفرانسیل $\dot{x}(t) = \frac{bx(t-\tau(t))}{1+[x(t)-\tau(t)]^n} - ax(t)$ که توسط مک‌کی^۶ و گلاس^۷ ارائه شده است مربوط به سرعت پخش سلول‌های بالغ نسبت به زمان در جریان خون است. از دیگر معادلات پرکاربرد تاخیری می‌توان به معادلات پانتوگراف اشاره کرد که کاربرد زیادی در الکتروپنوماتیک دارد. پانتوگراف وسیله مناسبی برای تجهیز آتلیه و استودیوهای ثابت عکاسی است. که ریل‌های سقفی هستند که جایگزین پایه و سه پایه‌های نورپردازی و عکاسی شده‌اند و سرعت عمل و جابجایی و تنظیم تجهیزات با آن‌ها بسیار بهینه می‌شود. همچنین پانتوگراف‌ها وسایلی هستند که جریان الکتریکی را در خطوط بالای ترن‌ها جمع می‌کند (شکل ۱.۳ را ببینید).

صورت کلی این معادلات به صورت:

$$\begin{cases} \dot{u}(x) = ax(x)u(x) + \sum_{r=1}^L b_r(x)u(q_r x), \\ u(a) = u_a, \quad x \in [a, b], \quad q_r \in [0, 1], \end{cases}$$

که در آن q_r تاخیرهای زمانی است. روش‌های عددی زیادی برای حل آن‌ها ارائه شده از جمله [۳۹] را ببینید.

مدل واقعی اغلب سیستم‌ها یا فرایندها، شامل تعدادی از وضعیت‌ها در زمان گذشته نیز است، فرایندهایی

⁴Condorcet
⁵Laplace

⁶Mackey
⁷Glass

نظیر شیمیایی، بیولوژی، اقتصاد و سیستم‌های مکانیکی و الکتریکی، خود به نوعی درگیر این مسائل هستند. به عنوان مثال میزان رشد باکتری خالص در فرایندهای بیولوژی بدون تاثیر از وضعیت‌های گذشته نیست.

با توجه به مفاهیم استنباط شده از سیستم‌های تأخیر زمانی^۸ (TDs) می‌توان گفت که در آرگومان معادلات دینامیکی این سیستم‌ها، علاوه بر وجود متغیر زمان، متغیر تغییر زمان داده شده نیز وجود داشته به طوری که اثرات گذشته متغیرهای حالت سیستم در تعیین متغیرهای حالت جاری بروز خواهد نمود. بنابراین این امر باعث شده که عناوین دیگری به این سیستم‌ها تعلق گیرد از جمله سیستم موروثی^۹، معادلات تعویقی^{۱۰}، معادلات دیفرانسیل-تفاضلی^{۱۱} و غیره.

اکنون سیستم LTI تأخیری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-h) \\ x(t) = Q(t) \quad \forall t \in [-h, 0], \end{cases} \quad (3.3)$$

که در آن A, A_d ماتریس‌های $n \times n$ هستند، $x(t)$ بردار حالت و $h > 0$ تأخیر زمانی را نشان می‌دهد. برای اینکه این معادله جواب یکتا داشته باشد باید تابع اولیه‌ای باشد که

$$x(t) = Q(t), \quad t \in [-h, 0]. \quad (4.3)$$

برای حل معادله (۳.۳) از طرفین رابطه تبدیل لاپلاس می‌گیریم. با توجه به اینکه،

$$L(x(t-h)) = \int_0^\infty e^{-st} x(t-h) dt = \int_0^h e^{-st} x(t-h) dt + \int_h^\infty e^{-st} x(t-h) dt,$$

و چون

$$0 < t < h \rightarrow -h < t-h < 0 \rightarrow x(t-h) = g(t-h),$$

بنابراین

$$L(x(t-h)) = \int_0^h e^{-st} g(t-h) dt + e^{-sh} \int_0^\infty e^{-st} x(t) dt,$$

همچنین داریم

$$\int_0^\infty e^{-st} x(t) dt = X(s),$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$sX(s) - g(0) = AX(s) + A_d(e^{-sh}X(s) + \int_0^h e^{-st} g(t-h) dt),$$

با ساده کردن رابطه‌ی فوق داریم

$$X(s) = (sI - A - A_d e^{-sh})^{-1} [g(0) + A_d \int_0^h e^{-st} g(t-h) dt], \quad (5.3)$$

⁸Time-Delay Systems
⁹Hereditary

¹⁰Retarded
¹¹Differential-Difference

با کمک تبدیل لاپلاس معکوس از رابطه (۵.۳) جواب سیستم محاسبه می‌شود. معادله مشخصه سیستم با فرض یک جواب غیرصفر به فرم Ce^{st} که در آن s یک متغیر اسکالر و C یک ثابت است به صورت،

$$\det[sI - A - A_d(e^{-sh})] = s^n + a_{n-1}(e^{-sh})s^{n-1} + \dots + a_1(e^{-sh})s + a_0(e^{-sh}) = 0, \quad (6.3)$$

به دست می‌آید که s ریشه‌های معادله مشخصه یا همان مقادیر ویژه هستند. وجود تأخیر زمانی در این معادله باعث ایجاد عبارت‌های نمایی در معادله مشخصه سیستم می‌شود. بنابراین دارای طیف نامتناهی از مقادیر ویژه می‌شوند. واضح است این معادله دارای تعداد نامتناهی جواب است و به طور جبری نمی‌تواند حل شود. چنین مسائلی اغلب به طور غیرمستقیم و با استفاده از روش‌های ترسیمی، عددی و تقریبی حل می‌شوند. در بسیاری از موارد از تقریب پاده به جای عبارت نمایی در معادله مشخصه استفاده می‌شود.

۲.۳ تاریخچه سیستم‌های تأخیری

تحقیقات اولیه درباره TDs از قرن هجدهم آغاز شد که اغلب راجع به مسائل هندسی اینگونه سیستم‌ها بوده و این اطلاعات به صورت پراکنده تا شروع قرن بیستم ادامه داشت. در این زمان، مطالعه سیستم‌های تأخیری به صورت پیشرفته‌تری توسط ولتر^{۱۲} در سال ۱۹۲۰ آغاز شد که مطالعه وی با سیستم‌های اکولوژی و هم چنین مدل‌های شکار و شکارچی ارتباط داشت. در ادامه میسکیس^{۱۳} در سال ۱۹۴۱ تحقیقاتی راجع به تحلیل نظریه حل و طبقه بندی ارائه کرد. هالا^{۱۴}، رازومیخین^{۱۵} و کراسوفسکی^{۱۶} در سال ۱۹۴۹ در زمینه پایداری و نظریه نوسانات کارهایی انجام دادند. در بین سال‌های ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ اسمیت^{۱۷} در مورد پایداری با کنترل‌گر و الگوریتم پیشگویی اسمیت نظراتی ارائه کرد. در سال ۱۹۶۲ مینورسکی^{۱۸} مطالعاتی در زمینه پایداری کشتی و هدایت اتوماتیک در مکانیزم فیدبک اثرات تأخیر انجام داد. از همین سال‌ها به بعد، علاقه مندی زیادی در زمینه کنترل این سیستم‌ها به وجود آمد. لازم به ذکر است که این تحقیقات بیشتر راجع به سیستم‌های خطی بودند. در سال ۱۹۶۳ کورزویل^{۱۹} با روش تحلیلی به کنترل سیستم‌های تأخیری زمان-گسسته پرداخت. بعد از آن کوپک^{۲۰} در سال ۱۹۶۵، روش بردار افزوده‌ی^{۲۱} حالت برای این سیستم‌ها ارائه کرد و پس از آن شماری از محققان از ایده‌ی کوپک برای کنترل سیستم‌های با تأخیر زمانی استفاده کردند. نخستین رساله در مورد تجزیه و تحلیل سیستم‌های تأخیری توسط گوریک^{۲۲} در سال ۱۹۷۴ منتشر شده است. در سال ۱۹۹۳ روش تخصیص طیف نامتناهی^{۲۳} توسط مانیتوس^{۲۴} با تبدیل سیستم به یک سیستم بدون تأخیر پیشنهاد شد. در سال ۱۹۷۸ رزاقی روش جایابی قطب^{۲۵} را برای این سیستم‌ها به کار برد. از سال ۱۹۸۰ به بعد، تحقیقات در زمینه تحلیل و طراحی سیستم‌های خطی تأخیری گسترش یافت از جمله در سال ۱۹۸۹ لانگمن و همکارانش^{۲۶} تکنیک‌هایی جهت تخصیص مقادیر ویژه ارائه کردند. در اواخر قرن ۲۰ ام دانشمندان توانستند تابع‌های لیاپانوف را استخراج کنند که شرایط لازم و کافی جهت پایداری سیستم‌های TD ارائه دهند. در سال ۱۹۹۹ کلومانوفسکی^{۲۷} با کمک روش پایداری لیاپانوف

¹²Volterra

¹³Myskis

¹⁴Hala

¹⁵Razomikhin

¹⁶Krasoviskii

¹⁷Smith

¹⁸Minorsky

¹⁹Kurzweil

²⁰Koepcke

²¹Augmented

²²Guretskiy

²³Finite Spectrum Assignment(FSA)

²⁴Manitius

²⁵Pole Placment

²⁶Langman et al.

²⁷Kolomanovskii

مقاوم سیستم‌های تاخیری زمان-پیوسته را بررسی کرد.

در سال ۲۰۰۲ فریدمن^{۲۸} با معرفی صورت توسعه یافته^{۲۹} سیستم تاخیری زمان-پیوسته به تحلیل پایداری با تابع لیاپانوف جدید پرداخت. در سال ۲۰۰۳، شمالی و همکاران^{۳۰} روش کنترل مود لغزشی^{۳۱} (SMC) را برای پایداری سیستم‌های TDs بکار گرفتند. در ادامه در سال ۲۰۰۴ تابع لیاپانوف جدیدی توسط سو و همکاران^{۳۲} پیشنهاد شد. در سال ۲۰۰۶ بوکاس^{۳۳} با کمک LMI شرط کافی برای پایداری سیستم‌های تاخیری را بررسی کرد. در ادامه ایکسا و همکاران^{۳۴} در سال ۲۰۰۸ روش BMI را برای کنترل و پایداری سازی سیستم تاخیری پیشنهاد کردند. از آن به بعد محققان زیادی در مورد کلاس‌های خاصی از TDs مطالعاتی را انجام دادند برای مثال کاکزورک^{۳۵} در سال ۲۰۰۹ با تعریف سیستم مثبت تأخیری شرایط پایداری جدیدی را پیشنهاد کرد. در سال ۲۰۱۰ یی^{۳۶} برای کنترل سیستم‌های تخصیص مقادیر ویژه استفاده کرد و برای حل این مسأله از تابع لامبرت^{۳۷} کمک گرفت. پاکزاد در ۲۰۱۱ روشی براساس معادله لیاپانوف و آنالیز پایداری در حوزه فرکانسی برای سیستم تاخیری زمان-گسسته پیشنهاد کرد. در سال ۲۰۱۳ استوجانویک^{۳۸} به بررسی پایداری وابسته به تأخیر برای سیستم‌های تأخیری مراتب بالا^{۳۹} پرداخت. در سال ۲۰۱۵ روش تخصیص مقادیر ویژه برای سیستم تاخیری زمان-گسسته با کنترل گر پسخورد به کار گرفته شد و الگوریتم تعمیم یافته رونگ-کوتا برای حل مسأله تخصیص پیشنهاد شد. در همین سال ژنگ^{۴۰} برای بررسی پایداری سیستم تاخیری زمان-گسسته از لم آبل کمک گرفت.

در ادامه بیشتر محققین بر روی روش‌های بر پایه لیاپانوف مطالعه و سعی در بهبود و کاهش محافظه کاری آن‌ها با معرفی توابع لیاپانوف و نامساوی‌های تعمیم یافته جدید داشتند از جمله در سال ۲۰۱۶ کیم^{۴۱} [۴۰] بهبودی برای نامساوی جنسن^{۴۲} ارائه و پایداری سیستم‌های تاخیری را بررسی کرد. در سال ۲۰۱۷ سورت^{۴۳} [۴۱] با کمک نامساوی ویرتینگر^{۴۴} و معرفی تابع جدید به پایداری سیستم تاخیری زمان-گسسته پرداخت. در سال ۲۰۱۸ پارک^{۴۵} و همکاران [۴۲] یک تابع لیاپانوف جدید برای سیستم‌های خطی تاخیری ارائه دادند و نتایج بسیار خوبی در شبیه سازی عددی به دست آوردند. همچنین ژنگ و همکاران [۴۳] بهبودی برای روش محدب متقابل^{۴۶} معرفی شده در سال ۲۰۱۱ توسط پارک، ارائه کردند و به شروط با محافظه کاری خیلی کمتر رسیدند.

یکی از مسائل مطرح در سیستم‌های تأخیری، تحلیل پایداری است. بر خلاف سیستم‌های معمولی، در این سیستم‌ها دو نوع تحلیل پایداری به نام پایداری مستقل از تأخیر^{۴۷} و وابسته به تأخیر^{۴۸} وجود دارد، که نوع دوم پایداری نسبت به نوع اول پیچیده تر است. تحقیقات انجام شده در زمینه پایداری سیستم‌های خطی تأخیر زمانی، قابل توجه بوده و این تحقیقات در دو حوزه فرکانسی^{۴۹} و زمانی^{۵۰}، معادلات زیادی را به خود اختصاص داده اند. از مهمترین روش‌های ارائه شده استفاده از توابع لیاپانوف و معادله‌ی مشخصه است.

²⁸Fridman

²⁹Discriptor

³⁰Shamali et al.

³¹Sliding mode control

³²Suh

³³Boukas

³⁴Xia et al.

³⁵Kaczorek

³⁶Yi

³⁷Lambert function

³⁸Stojanovic

³⁹High-order

⁴⁰Zhang

⁴¹Kim

⁴²Jensen

⁴³Seuret

⁴⁴Wirtinger

⁴⁵Park

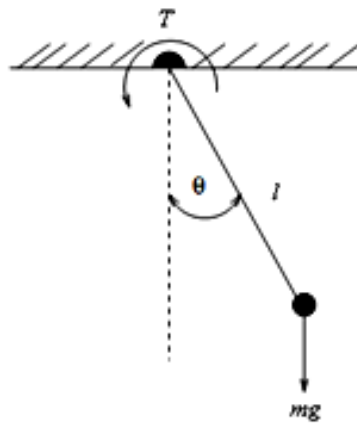
⁴⁶Reciprocally Convex Approach

⁴⁷Delay-independent

⁴⁸Delay-dependent

⁴⁹Frequency domain

⁵⁰Time domain



شکل ۲.۳: آونگ ساده

دو دیدگاه کلی برای سیستم‌های تاخیری در نظر گرفته می‌شود: از دید محل وقوع: به چهار دسته با تاخیرهای زمانی در بردارهای ورودی، خروجی، حالت و مشتق حالت تقسیم می‌شوند.

از دید ماهیت: به دو دسته کلی تاخیرهای توزیع شده و گسسته تقسیم می‌شوند. همچنین TDs را به دو دسته کلی معادلات تعویقی^{۵۱} (RDE) و معادلات خنثی^{۵۲} (NDE) تقسیم می‌کنیم. سیستم‌های LTI تاخیری زمان-گسسته و زمان-پیوسته RDE مورد مطالعه و بررسی در این رساله به صورت زیر هستند:

$$x(k+1) = \sum_{j=0}^p A_j x(k-j) + \sum_{j=0}^q B_j u(k-j), \quad (7.3)$$

و

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^p A_j x(t-j) + \sum_{j=0}^q B_j u(t-j). \quad (8.3)$$

مثال‌های کاربردی

مثال ۱.۲.۳. (مساله آونگ) معادله حرکت یک آونگ ساده را به صورت زیر در نظر بگیرید (شکل ۲.۳ را ملاحظه کنید)،

$$T(t-h) - mgl \sin(\theta(t)) = ml^2 \ddot{\theta}(t),$$

m جرم آونگ و T گشتاور ورودی و θ زاویه راستای آونگ با راستای قائم است. هدف نگه داشتن آونگ در نقطه $\theta = \theta_0$ است. می‌توان نشان داد که مدل غیرخطی می‌تواند در اطراف $\theta = \theta_0$ به صورت خطی زیر تبدیل شود،

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\theta}(t) \\ \Delta \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos(\theta_0) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta(t) \\ \Delta \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{g \sin(\theta_0)}{l} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} T(t-h),$$

⁵¹Retarded type Differential Equation

⁵²Neutral type Differential Equation

با در نظر گرفتن، $\Delta(\theta) = \theta - \theta_0$ بدست می‌آوریم،

$$T(t) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta(t) \\ \Delta\dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + mgl \sin(\theta_0),$$

بنابراین سیستم حلقه- بسته می‌تواند به صورت زیر نشان داده شود،

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\theta}(t) \\ \Delta\ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos(\theta_0) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta(t) \\ \Delta\dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k_1}{ml^2} & \frac{k_2}{ml^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta(t-h) \\ \Delta\dot{\theta}(t-h) \end{bmatrix}.$$

مثال ۲.۲.۳. (کنترل مدیریت مالی) فرض کنیم مبلغی سرمایه داریم که مقداری از آن را سپرده‌گذاری و مابقی را سهام خریداری کرده‌ایم. این مدل دارای سیستمی به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_1 x_1(t-h) - u(t) - b|u(t)| + f(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_2 x_2(t-h) + u(t), \end{cases}$$

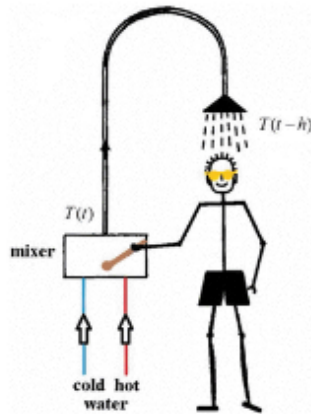
x_1 میزان سپرده فعلی با سود a_1 و x_2 میزان سهام با سود a_2 است. $b \in (0, 1)$ میزان هزینه پرداخت شده به دلالتان سهام و u میزان خرید و فروش سهام است که u مثبت معادل خرید سهام و u منفی معادل فروش سهام است و شرط $u_0 \geq |u(t)|$ ، بدلیل محدودیت خرید و فروش سهام برقرار است. $f(t)$ نرخ مصرف را نشان می‌دهد. تاخیر در این سیستم، نشان‌دهنده این است که سود سپرده لحظه‌ای نیست و با تاخیر این سود برگردانده می‌شود. در اینجا هدف این است که با ورودی $u(0)$ ، خرید و فروش سهام را طوری به تعادل برسانیم که مجموع دارایی‌ها $(x_1(T) + x_2(T))$ در انتهای یک دوره مشخص T بیشینه شود.

مثال ۳.۲.۳. (سیستم دوش حمام) یک مثال ساده از یک سیستم تاخیری که در زندگی روزمره اتفاق می‌افتد کنترل دما است. همان‌طور که در شکل ۳.۳ نشان داده می‌شود اکثر افراد مشکل تنظیم دمای آب را تجربه کرده‌اند دمای آب گاهی اوقات خیلی داغ یا خیلی سرد است. دمای واقعی اغلب خارج از حد مطلوب است و گاهی مدتی طول می‌کشد تا دما کنترل شود و این به خاطر آن است که برای جاری شدن آب از شیر به سمت بدن فرد زمانی صرف می‌شود. این زمان یک تاخیر است که به فشار آب و طول لوله بستگی دارد. طبق شکل ۳.۳، $T(t)$ نشان‌دهنده دما در زمان t است و چون طول لوله باعث ایجاد یک تاخیر می‌شود تا به دمای مطلوب T_d برسیم، بنابراین دمای آبی که از سر دوش بیرون می‌آید مهم است که با $T(t-h)$ نمایش می‌دهیم، که DDE آن به صورت زیر است،

$$\dot{T}(t) = -K[T(t-h) - T_d], \quad K \in \mathbb{R}.$$

مثال ۴.۲.۳. (عملیات از راه دور ۵۳) در حالت کلی یک سیستم استاندارد عملیاتی از راه دور شامل سه بخش زیر است:

۱. سایت اصلی^{۵۴}: شامل عملگر انسانی (سیستم فرمانده)



شکل ۳.۳: طرح ساده از سیستم دوش

۲. سایت دور^{۵۵}: (شامل فرمانبر و محیط عملیاتی)

۳. کانال ارتباطی: وظیفه اتصال اطلاعات بین فرمانده و فرمانبر.

به دلیل محدودیت سرعت انتقال داده‌ها بین مستر و اسلیو سیگنال‌های کنترلی با تاخیر به ربات هدف می‌رسد (شکل ۴.۳ را ببینید). سیستم حرکت از راه دور دو طرفه توانایی کنترل از راه دور یک تجهیز را فراهم می‌کند به گونه‌ای که اطلاعات نیرو در سیستم فرمانبر به فرمانده مخابره شده و به اپراتور احساسی از حضور در محیط دور و در تعامل نزدیک با تجهیز فرمانبر دست بدهد. نکته مهم در این گونه سیستم‌ها از دیدگاه طراحی کنترل که به صورت یک سیستم حلقه- بسته کنترل مکان و سرعت معرفی می‌شوند، وجود تاخیر زمانی (متغیر با زمان) است که وجود چنین تاخیرهایی در سیستم، کنترل سیستم را دشوار و کارایی سیستم را کاهش می‌دهد، بنابراین هدف، پایداری سیستم حلقه- بسته ناشی از تاخیر در کانال ارتباطی و ردیابی سیستم فرمانبر با کمترین خطا است [۴۴، ۴۵]. از جمله کاربردهای این سیستم‌ها در جراحی از راه دور، کاربرد با مواد رادیواکتیو، کنترل ربات‌های فضایی از زمین، کاوشگرهای زیردریایی بدون سرنشین و غیره است (شکل ۵.۳ را ببینید).

۳.۳ سیستم‌های تاخیری زمان- پیوسته

تعاریف و قضایای این بخش از مراجع [۴۶] و [۴۷] گردآوری شده است.

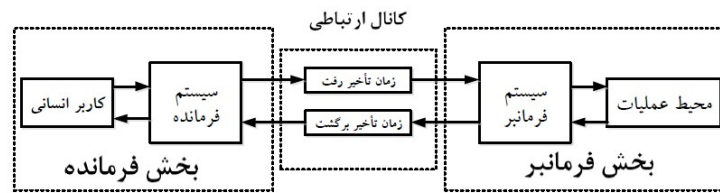
۱.۳.۳ کنترل پذیری سیستم‌های تاخیری

سیستم (RDE) زمان- پیوسته با تاخیرهای معلوم و ماتریس‌های ثابت زیر را در نظر بگیرید،

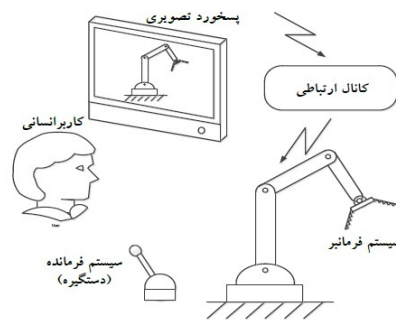
$$\dot{x}(t) = \sum_{k=0}^N A_k(t)x(t - h_k) + \int_{-h}^0 A_d(t, \theta)x(t + \theta)d\theta + B(t)u(t), \quad (9.3)$$

وقتی $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ، $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بردارهای حالت و ورودی، A_k ، B و A_d ماتریس‌های پیوسته معلوم و $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_N < h$ تاخیرهای گسسته باشند. تعاریف مختلفی در مراجع برای کنترل پذیری سیستم‌های تاخیری ارائه شده است که در زیر به چند مورد از این تعاریف اشاره می‌کنیم:

⁵⁵Slave

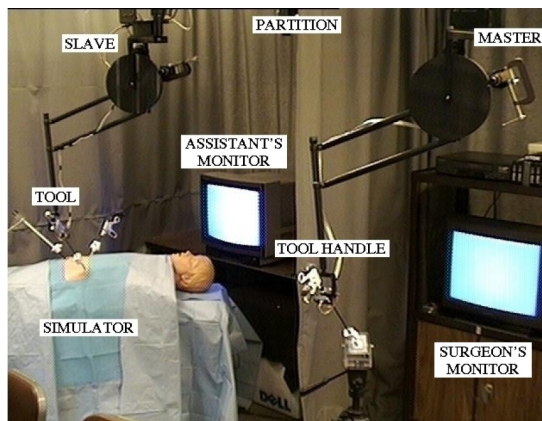


نمای بلوکی یک سیستم حرکتی از راه دور



نمای گرافیکی یک سیستم حرکتی از راه دور

شکل ۴.۳: سیستم حرکتی از راه دور



شکل ۵.۳: جراحی از راه دور

تعریف ۱.۳.۳. سیستم تاخیری (اکیدا) در بازه $[t_0, t_1]$ کنترل‌پذیر- C است اگر به‌ازای هر $x_0 \in C[-h, 0]$ و هر $x_1 \in C[-h, 0]$ یک ورودی قطعه‌ای-پیوسته $u(t) = u(t, x, x_1)$ چنان وجود داشته باشد که پاسخ سیستم (۹.۳) با شرایط اولیه $x(t_0) = x_0$ نتیجه دهد $x(t_1) = x_1$ ، بر خلاف سیستم‌های بدون تاخیر در اینجا شرط $t_1 - t_0 > h$ وجود دارد.

تعریف ۲.۳.۳. سیستم تاخیری (اکیدا) در بازه $[t_0, t_1]$ کنترل‌پذیر- \mathbb{R}^n است اگر به‌ازای هر $x_0 \in C[-h, 0]$ و هر $x_1 \in \mathbb{R}^n$ یک ورودی تکه‌ای-پیوسته $u(t) = u(t, x, x_1)$ چنان وجود داشته باشد که پاسخ سیستم (۹.۳) با شرایط اولیه $x(t_0) = x_0$ نتیجه دهد $x(t_1) = x_1$.

گزاره ۱.۳.۳. اگر سیستم بدون تاخیر (۹.۳) در بازه $[t_0, t_1]$ کنترل‌پذیر باشد در این صورت سیستم تاخیری (۹.۳) با $A_d \equiv 0$ در بازه $[t_0, t_1]$ کنترل‌پذیر- \mathbb{R}^n است.

قضیه ۱.۳.۳. [۴۷] سیستم با یک تاخیر گسسته زیر را در نظر بگیرید،

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + Bu(t), \quad (10.3)$$

این سیستم در بازه $[t_0, t_1]$ و برای تمام $t_1 > nh$ کنترل‌پذیر- \mathbb{R}^n است هرگاه $rank(Q) = n$ باشد، که در آن

$$\begin{cases} Q = [Q_1^0 \dots Q_1^n, Q_2^0 \dots Q_2^n, \dots, Q_n^n]B, \\ Q_j^k = I, \quad Q_j^{k+1} = A_0 Q_j^k + A_1 Q_{j-1}^k, \quad j = 1, \dots, k+1, \quad k = 1, \dots, n-1, \\ Q_j^k = 0, \quad j = 0 \text{ یا } j > k. \end{cases} \quad (11.3)$$

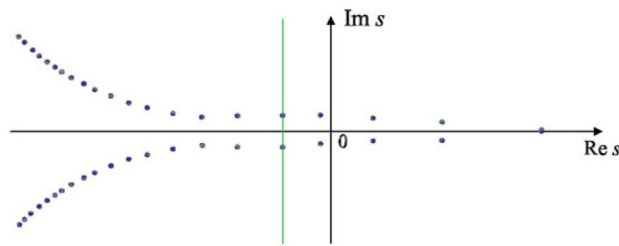
مثال ۱.۳.۳. سیستم (۱۰.۳) را با

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

و A_1 دلخواه در نظر بگیرید، داریم با توجه به اینکه ماتریس کنترل‌پذیری Q دارای رتبه کامل است (سیستم بدون تاخیر کنترل‌پذیر است)، بنابراین سیستم دارای تاخیر نیز حتما کنترل‌پذیر است،

$$\begin{cases} A_1 = 0 \rightarrow Q = \begin{bmatrix} I & A_0 & A_0^2 \end{bmatrix} B \rightarrow rank(Q) = 3, \\ A_0 \neq 0 \rightarrow Q = \begin{bmatrix} I & A_0 & A_0^2 & A_1 & A_0 A_1 + A_1 A_0 & A_1^2 \end{bmatrix} B \rightarrow rank(Q) = 3 \end{cases}$$

گزاره فوق خیلی مفید است ولی ممکنه A_0 را نداشته باشیم و یا شرط کنترل‌پذیری برای تاخیر گسسته چندگانه بررسی شود در این صورت این گزاره نمی‌توان استفاده کرد، برای جزئیات بیشتر در مورد کنترل‌پذیری سیستم‌های تاخیری به [۴۸] مراجعه کنید.



شکل ۶.۳: وضعیت ریشه های معادله مشخصه

۲.۳.۳ پایداری سیستم‌های تاخیری

شبیه‌سازی سیستم‌های تاخیری با شرایط اولیه امکانپذیر نیست و باید تابع اولیه معلوم باشد به همین خاطر به آن‌ها سیستم‌های بینهایت بعدی گفته می‌شود، علیرغم بینهایت بعدی بودن معادله مشخصه سیستم‌های تاخیری، ریشه‌های آن (قطب‌های سیستم) در یک ناحیه محدود قرار ندارند و در هر ناحیه محدود در فضای حالت تنها تعداد محدودی ریشه قرار دارد. یک ویژگی جالب ریشه‌ها (قطب‌ها) این است که هر خط عمودی در صفحه رسم شود، تعداد محدودی قطب در سمت راست آن وجود دارد (شکل ۶.۳ را ببینید).

معیار راث-هورویتز

در سیستم‌های مراتب بالا و یا در صورتی که بعضی از ضرایب معادله مشخصه غیرعددی باشند، پیدا کردن مقادیر ویژه برای تعیین پایداری سیستم می‌تواند بسیار مشکل و یا حتی غیرممکن باشد. در چنین حالتی اگر معادله مشخصه سیستم تعیین شده باشد، می‌توان از روش راث-هورویتز^{۵۶} استفاده نمود. چندجمله‌ای مشخصه زیر را در نظر بگیرید،

$$P(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n, \quad (12.3)$$

که در آن تمام ضرایب a_1, a_2, \dots, a_n موجود و مثبت باشند، در این صورت برای معیار راث باید جدول زیر را از ضرایب و مقادیر وابسته بسازیم. برای تعیین ستون‌های آرایه راث به صورت زیر عمل می‌کنیم،

سطر اول	۱	۱	a_2	a_4	a_6
سطر دوم	۲	a_1	a_3	a_5	a_7
سطر سوم	۳	b_1	b_2	b_3	b_4
سطر چهارم	۴	c_1	c_2	c_3	c_4
سطر پنجم	۵	d_1	d_2	d_3	d_4
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
سطر $n + 1$ ام	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯

⁵⁶Roth-Horwitz

در سطر اول ضرایب s^n, s^{n-2}, \dots را در $P(s)$ درج می‌کنیم. وقتی ضرایب درج شوند، صفر قرار می‌دهیم، بنابراین اگر $n = 5$ ، آن‌گاه $a_6 = a_7 = \dots = 0$.
در سطر دوم ضرایب s^{n-1}, s^{n-3}, \dots را در $P(s)$ درج می‌کنیم. برای تولید ضرایب b_1, b_2, \dots و c_1, c_2 و غیره از نتایج زیر استفاده می‌کنیم:

$$b_1 = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} 1 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \quad b_2 = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} 1 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}, \quad b_3 = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} 1 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}, \quad \dots$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \quad c_2 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \quad c_3 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}, \quad \dots$$

$$d_1 = -\frac{1}{c_1} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \quad d_2 = -\frac{1}{c_1} \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}, \quad d_3 = -\frac{1}{c_1} \begin{vmatrix} b_1 & b_4 \\ c_1 & c_4 \end{vmatrix}, \quad \dots$$

به این ترتیب ستون‌های آرایه را ساخته می‌شود.

قضیه ۲.۳.۳. برای آنکه سیستم با معادله مشخصه (۱۲.۳) پایدار باشد، باید درایه‌های ستون اول را تغییر علامت نداشته باشد.

مثال ۲.۳.۳. سیستم بدون تاخیر با معادله مشخصه زیر مفروض است. محدوده K را چنان بیابید که سیستم پایدار شود.

$$P(s) = s^4 + 4s^3 + 5s^2 + Ks + 4K.$$

s^4	1	5	$4K$
s^3	4	K	0
s^2	$\frac{20 - K}{4}$	$4K$	0
s^1	$\frac{20K - K^2 - 16K}{20 - K}$	0	0
s^0	$4K$	0	0

طبق قضیه ۲.۳.۳ باید $20 - K > 0$ و $20K - K^2 - 16K > 0$ برقرار باشد، بنابراین باید $4 < K < 20$.

باشد تا سیستم بدون تاخیر پایدار شود.

معیار پایداری را در تحلیل سیستم‌های کنترل خطی کاربرد محدودی دارد، زیرا این معیار راهی برای بهبود پایداری نسبی یا پایدار کردن یک سیستم ناپایدار نشان نمی‌دهد. ولی می‌توان اثر تغییر یک یا دو پارامتر سیستم را با بررسی مقادیری که باعث ناپایداری می‌شود، بررسی کرد. در واقع به کمک این معیار گستره پایداری یک پارامتر را بررسی می‌کنیم.

در ادامه هدف پیدا کردن کران بالای تاخیر است برای یافتن اینکه تا چه حد سیستم پایدار است، روش‌های مختلفی در حوزه فرکانسی وجود دارد از جمله روش مستقیم^{۵۷}. روش‌های حوزه فرکانسی دقیقاً مرز بین پایداری و ناپایداری را مشخص می‌کنند و برای سیستم‌های با تاخیرهای گسسته (دارای یک تاخیر) کاربرد

دارند ولی برای تاخیرهای چندگانه پیچیدگی بالایی دارند. از این روش‌ها معمولاً در یک مطالعه موردی^{۵۸} استفاده می‌شود و با روش‌های دیگر مقایسه انجام می‌شود. روش‌های فرکانسی تنها برای سیستم‌های تاخیری خطی قابل اعمال است و چون برای سیستم‌های غیرخطی تبدیل لاپلاس نداریم مورد استفاده قرار نمی‌گیرد. خواننده علاقمند برای جزئیات بیشتر در مورد روش‌های حوزه فرکانسی به [۴۶، ۴۷] مراجعه نماید. سیستم غیرخطی و تاخیری زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t), & t \geq t_0 \\ x_t(\theta) = x(t + \theta) = \varphi(\theta), & \theta \in [-h, 0], \quad f: \mathbb{R} \times C[-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (13.3)$$

که در آن فرض می‌شود تابع غیرخطی f نسبت به هر دو آرگومان پیوسته و نسبت به آرگومان دوم به صورت محلی لیبشیتز است و $f(t, 0) = 0$ که $x \equiv 0$ پاسخ بدیهی سیستم است.

تعریف ۳.۳.۳. سیستم (۱۳.۳)، پایدار یکنواخت است اگر هر زمان اولیه $t_0 \in \mathbb{R}$ یک $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ چنان وجود داشته باشد که $\|x_{t_0}\|_c < \delta(\epsilon)$ برای تمام زمان‌های $t \geq t_0$ بتوان نتیجه گرفت $|x(t)| < \epsilon$.

تعریف ۴.۳.۳. سیستم (۱۳.۳)، پایدار مجانبی یکنواخت است اگر پایدار یکنواخت بوده و یک $\delta_a > 0$ چنان وجود داشته باشد که به ازای هر $\eta > 0$ یک $T(\delta_a, \eta)$ ای موجود که از $\delta_a < \|x_{t_0}\|_c$ برای تمام $t \geq t_0 + T(\delta_a, \eta)$ بتوان نتیجه گرفت $|x(t)| < \eta$.

۳.۳.۳ تحلیل پایداری براساس توابع لیاپانوف

همانند سیستم‌های بدون تاخیر، یک روش موثر برای تحلیل پایداری سیستم‌های تاخیری روش مستقیم لیاپونوف است. دو روش تحلیل زمانی با روش مستقیم لیاپونوف، روش کراسوفسکی^{۵۹} و روش رازومیکین^{۶۰} برای توابع لیاپونوف هر دو در سال ۱۹۶۵ ارائه شدند. در روش کراسوفسکی از تابعهای لیاپونوف-کراسوفسکی $V(t, x_t)$ یا به اختصار LKF^{۶۱} استفاده شده و در روش رازومیکین از توابع لیاپونوف $V(t, x(t))$ استفاده می‌شد.

استفاده از LKF در واقع تعمیم مستقیم روش مستقیم لیاپونوف از سیستم‌های ODE به TD است چراکه به خاطر اینکه x_t می‌تواند حالت مناسبی برای سیستم‌های تاخیری باشد از طرف دیگر شاید کار کردن با تابع لیاپونوف-رازومیکین $V(t, x(t))$ راحت‌تر باشد.

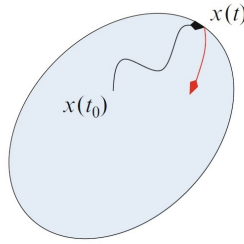
روش کراسوفسکی

تابع پیوسته $V: \mathbb{R} \times C[-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ را برای سیستم (۱۳.۳) در نظر بگیرید، فرض کنید برای زمان‌های $t \geq \tau$ ، پاسخ سیستم فوق با شرایط اولیه $x_t = Q$ با $x_\tau(t, Q)$ نشان داده می‌شود. با تعریف مشتق بالای راست به صورت

$$\dot{V}(t, Q) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \sup \frac{1}{\Delta t} [V(t + \Delta t, x_{t+\Delta t}(t, Q)) - V(t, Q)]. \quad (14.3)$$

⁵⁸Case study
⁵⁹Krasovskii

⁶⁰Razumikhin
⁶¹Lyapunov-Krasovskii Functionals



شکل ۷.۳: ایده روش رازومیخین

به لحاظ شهودی غیرمثبت بودن $\dot{V}(t, x_t)$ نشان می‌دهد که x_t با تغییر t افزایش نمی‌یابد یعنی سیستم پایدار است.

قضیه ۳.۳.۳. (قضیه لیاپونوف-کراسوفسکی) با فرض اینکه تابع غیرخطی f آرگومان محدود خود را به یک مجموعه محدود نگاشت کند و توابع $u, w, \nu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ پیوسته و غیرکاهشی باشند و همچنین $u(s)$ و $\nu(s)$ برای تمام $s > 0$ ، مثبت بوده و $\nu(0) = u(0) = 0$. پاسخ بدیهی سیستم غیرخطی پایدار یکنواخت است، اگر یک تابع پیوسته معین مثبت به صورت زیر وجود داشته باشد،

$$u(|Q(0)|) \leq V(t, Q) \leq \nu(\|Q\|_c), \quad (15.3)$$

به طوری که مشتق آن در راستای سیستم غیرخطی، غیر مثبت باشد یعنی،

$$\dot{V}(t, Q) \leq -w(|Q(0)|).$$

و اگر برای هر s مثبت، $w(s) > 0$ باشد، در این صورت پاسخ بدیهی پایدار مجانبی یکنواخت است.

روش رازومیخین

ایده روش رازومیخین به این شکل است که تابع لیاپونوف به شکل مرسوم $V(x) = x^T P x$ و با $P > 0$ در نظر گرفته می‌شود. اگر یک پاسخ سیستم داخل بیضی گون^{۶۲} زیر باشد،

$$V(x(t_0 + \theta)) = x^T(t_0 + \theta) P x(t_0 + \theta) \leq \delta, \quad \forall \theta \in [-h, 0],$$

و برای $t \geq t_0$ بخواهد از بیضی گون شکل ۷.۳ خارج شود، در این صورت

$$x^T(t + \theta) P x(t + \theta) \leq x^T(t) P x(t), \quad \theta \in [-h, 0].$$

بنابراین اگر مشتق تابع لیاپونوف در راستای $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$ برای تمام حالت‌های $x_t(\theta) = x(t + \theta)$ که شرط رازومیخین $V(x(t + \theta)) \leq V(x(t))$ را برآورده می‌کنند، منفی باشد، پاسخ سیستم بیضی گون $x^T(t) P x(t) \leq \delta$ را ترک نخواهد کرد.

قضیه ۴.۳.۳. (قضیه لیاپونوف-رازومیخین): با فرض اینکه تابع غیرخطی f آرگومان محدود خود را به یک مجموعه محدود نگاشت کند و توابع $u, w, \nu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ پیوسته و غیرکاهشی باشند و همچنین

⁶²Ellipsoid

$u(s)$ و $v(s)$ برای تمام $s > 0$ مثبت بوده و $u(0) = v(0) = 0$. پاسخ بدیهی سیستم غیرخطی پایدار یکنواخت است اگر یک تابع مشتق پذیر معین مثبت V به صورت زیر وجود داشته باشد

$$u(|x|) \leq V(t, x) \leq v(|x|), \quad (16.3)$$

به طوری که اگر $V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq V(t, x(t))$ مشتق آن در شرط زیر صدق کند،

$$\dot{V}(t, x(t)) \leq -w(|x(t)|).$$

اگر برای هر s مثبت $w(s) > 0$ باشد و یک تابع غیر کاهشی برای s مثبت، به صورت $\rho(s) > s$ چنان وجود داشته باشد که اگر $V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq \rho V(t, x(t))$ شرط زیر برقرار باشد،

$$\dot{V}(t, x(t)) \leq -w(|x(t)|).$$

در این صورت پاسخ بدیهی پایدار مجانبی یکنواخت است.

شروط مستقل از تاخیر

LMI مستقل از تاخیر با روش کراسوفسکی

در این زیر بخش برای سادگی تنها یک تاخیر گسسته (متغیر با زمان) در نظر گرفته شده است اما به راحتی می‌توان همین روش را برای تاخیرهای چندگانه تعمیم داد. سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t - \tau(t)), & t \geq 0, \\ \tau(t) \in [0, h], & \dot{\tau}(t) \leq d < 1. \end{cases} \quad (17.3)$$

اگر در سیستم بالا تاخیر ثابت باشد $\tau(t) = h$ ، یک LKF کلی برای سیستم تاخیری به شکل زیر است،

$$V(x(t), x_t) = x^T(t)Px(t) + \int_{-h}^0 Q(\xi)x(t+\xi)d\xi + \int_{-h}^0 \int_{-h}^0 x^T(t+\xi)R(s, \xi)x(t+\xi)dsd\xi. \quad (18.3)$$

این LKF متاسفانه منجر به یک سری PDE های پیچیده از P, Q, R می‌شود، انتخاب LKF برای استخراج معیار پایداری بسیار مهم است. یک LKF ساده (که اولین بار توسط کراسوفسکی ارائه شد) برای سیستم بالا به صورت زیر است،

$$V(t, x_t) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-\tau(t)}^t x^T(s)Q(s)x(s)ds, \quad P > 0, Q > 0, \quad (19.3)$$

وقتی ماتریس‌های مربعی P, Q معین مثبت هستند همانطور که می‌بینیم LKF فوق در شرط (۱۵.۳) صدق می‌کند، حال با مشتق‌گیری از LKF داریم:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x_t) &= \int_{t-\tau}^t x^T(s)Q(s)\dot{x}(s)ds + x^T(t)Qx(t) - (1 - \dot{\tau})x^T(t - \tau)Qx(t - \tau) \\ &\leq \int_{t-\tau}^t x^T(s)Q(s)\dot{x}(s)ds + x^T(t)Qx(t) - (1 - d)x^T(t - \tau)Qx(t - \tau) \\ &\leq \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t - \tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PA + A^T P + Q & PA_1 \\ * & -(1 - d)Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau) \end{bmatrix} \quad (20.3) \\ &\leq X^T W X \leq -\alpha |x(t)|^2, \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

وقتی که برای برخی $\alpha > 0$ ،

$$X = \text{col}\{x(t), x(t - \tau)\}, W = \begin{bmatrix} PA + A^T P + Q & PA_1 \\ * & -(1-d)Q \end{bmatrix} < 0. \quad (21.3)$$

در LMI بدست آمده h حضور ندارد، بنابراین این یک شرط مستقل از تاخیر ^{۶۳} است اما با توجه به حضور d در LMI، شرط به دست آمده وابسته به تغییرات تاخیر ^{۶۴} است. بنابراین، اگر LMI مستقل از تاخیر بالا برقرار (شدنی) ^{۶۵} شد.

- ماتریس‌های A و $A \pm A_1$ همگی هرویتز هستند (پایدار هستند).
- یک ماتریس شور است یعنی تمام مقادیر ویژه آن داخل دایره واحد است.

LMI مستقل از تاخیر با روش رازومیخین

تابع لیاپونوف $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$ در شرط (۱۶.۳) صدق می‌کند حال مشتق تابع لیاپونوف را محاسبه می‌کنیم،

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}^T(t)P[Ax(t) + A_1x(t - \tau(t))],$$

در شرط قضیه رازومیخین فرض می‌کنیم $\rho(s) = \bar{\rho}s$ با شرط $\bar{\rho} > 1$ انتخاب شود،

$$V(x(t + \theta)) \leq \rho V(x(t)),$$

با فرض هر $q > 0$ همیشه یک $\alpha > 0$ وجود دارد به طوری که،

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &\leq \dot{x}^T(t)P[Ax(t) + A_1x(t - \tau(t))] + q[\bar{\rho}x^T(t)Px(t) - x(t - \tau(t))^T Px(t - \tau(t))] \\ &= \begin{bmatrix} x^T(t) & x^T(t - \tau(t)) \end{bmatrix} W_R \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau(t)) \end{bmatrix} \leq -\alpha |x(t)|^2. \end{aligned} \quad (22.3)$$

LMI بالا قابل حل است اگر به ازای یک مقدار کوچک $\epsilon > 0$ و فرض $\bar{\rho} = \epsilon + 1$ نامساوی زیر برقرار باشد (q پارامتر طراحی است)،

$$W_R = \begin{bmatrix} PA + A^T P + q\bar{\rho}P & PA_1 \\ * & -qP \end{bmatrix} < 0. \quad (23.3)$$

LMI بالا مستقل از تاخیر است چون در آن h ظاهر نشده است همچنین این LMI مستقل از تغییرات تاخیر نیز هست چون در آن d ظاهر نشده است بنابراین تاخیر، هر تغییر شدیدی می‌تواند داشته باشد. LMI به دست آمده از روش رازومیخین پایداری مجانبی یکنواخت سیستم را مستقل از تاخیر و مشتق آن (تاخیر با تغییرات سریع) تضمین می‌کند.

⁶³Delay-Independent

⁶⁴Delay-Derivative

Dependent(Rate-

Dependent)

⁶⁵Feasibility

مقایسه روش‌های رازومیخین و کراسوفسکی

مشابه روش کراسوفسکی، برای روش رازومیخین هم به راحتی می‌توان اثبات کرد که شدنی بودن نامساوی رازومیخین تضمین می‌کند که ماتریس‌های A و $A \pm A_1$ هرویتز بوده و مقادیر ویژه ماتریس $A^{-1}A_1$ داخل دایره واحد باشد.

LMI بدست آمده از روش کراسوفسکی محافظه‌کاری کمتری نسبت به روش رازومیخین دارد چرا که اگر LMI روش کراسوفسکی شدنی باشد، LMI روش رازومیخین نیز با فرض $q > 0$ حتما شدنی خواهد بود. یک مزیت دیگر روش کراسوفسکی این است که LMI به دست آمده نسبت به متغیرهای P و Q خطی است اما LMI رازومیخین نسبت به q و P دوخطی است (باید q توسط طراح انتخاب شود).

یک مزیت روش رازومیخین این است که برای سیستم‌های دارای تغییرات تند تاخیر فقط روش رازومیخین شرط پایداری مستقل از تاخیر ارائه می‌دهد (با روش کراسوفسکی نمی‌توان چنین شرطی بدست آورد).

شرط وابسته تاخیر

۱. تبدیل مدل و روش توصیفی

در بخش قبل برای سیستم تاخیری از دو شرط کراسوفسکی و رازومیخین دو LMI زیر به دست آمد:

$$(24.3) \quad W = \begin{bmatrix} PA + A^T P + Q & PA_1 \\ * & -(1-d)Q \end{bmatrix} < 0, \quad W_R = \begin{bmatrix} PA + A^T P + q\bar{\rho}P & PA_1 \\ * & -qP \end{bmatrix} < 0$$

در آنجا دیدیم که حل‌پذیری (شدنی بودن) این دو LMI هرویتز بودن (پایداری) ماتریس‌های A و $A \pm A_1$ را نتیجه می‌دهد، یعنی از این روش‌ها نمی‌توان برای پایدارسازی سیستم‌های ناپایدار استفاده کرد و در این حالت نیاز به استفاده از شرط وابسته به تاخیر است. اولین شرط وابسته به تاخیر (از روش کراسوفسکی و یا رازومیخین) با جایگذاری رابطه زیر در سیستم (۱۷.۳) و جایگذاری \dot{x} از خود سیستم استخراج شدند:

$$(25.3) \quad \begin{cases} x(t - \tau(t)) = x(t) - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(t) \\ \dot{x}(t) = [A + A_1]x(t) - A_1 \int_{t-\tau(t)}^t [Ax(s) + A_1 x(s - \tau(s))] ds. \end{cases}$$

این تبدیل برای $t - \tau(t) \geq t_0$ معتبر بوده و سیستم حاصل شده با سیستم اصلی دقیقاً یکسان نیست. محافظه‌کاری اولین شرط وابسته ^{۶۶} به تاخیر از اینجا ناشی می‌شود که تبدیل مدل یک دینامیک اضافی به سیستم اضافه می‌کند و دو سیستم اصلی و تبدیل یافته دقیقاً معادل هم نیستند. این شرط (با روش کراسوفسکی) تنها برای تاخیرهای دارای تغییرات کند ($\dot{\tau} \leq d < 1$) اعمال شده و برای سیستم‌های دارای تغییرات تند تاخیر ($\dot{\tau} > 1$) از روش رازومیخین استفاده شده است. برای تاخیرهای دارای تغییرات تند، نخستین بار فریدمن ^{۶۷} در سال ۲۰۰۳ با استفاده از تبدیل مدل توصیفی

⁶⁶Delay-dependent

⁶⁷Fridman

۶۸ و از طریق روش کراسوفسکی شرط پایداری را ارائه کرد،

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ y(t) = Ax(t) + A_1x(t - \tau(t)). \end{cases} \quad (26.3)$$

با جایگذاری تبدیل بالا داریم:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \circ = y(t) + (A + A_1)x(t) - A_1 \int_{t-\tau(t)}^t y(s) ds. \end{cases} \quad (27.3)$$

از دید پایداری، سیستم به دست آمده معادل سیستم اصلی است. در روش توصیفی \dot{x} از معادله سیستم جایگذاری نمی‌شود در عوض به‌عنوان یک متغیر حالت اضافه در سیستم توصیفی در نظر گرفته می‌شود. بنابراین نوآوری روش توصیفی در خود LKF و تغییر آن نیست، بلکه در نحوه محاسبه مشتق آن است،

$$\frac{d}{dt}(x^T(t)Px(t)) = \Upsilon x^T(t)P\dot{x}(t) + \Upsilon[x^T(t)P_1^T x(t) + \dot{x}(t)P_2^T][-\dot{x}(t) + (A + A_1)x(t) - A_1 \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds], \quad (28.3)$$

در اینجا ماتریس‌های مربعی P_1, P_2 به‌عنوان متغیرهای کمکی ^{۶۹} هستند و باعث بهبود می‌شوند. از مزایای روش توصیفی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱. شروط دارای محافظه‌کاری کمتری هستند.

۲. حفظ مزیت‌ها برای هر دو سیستم‌های زمان-پیوسته و گسسته با LMI های مشابه.

۳. برای سیستم‌های دارای تاخیر در حالت، ورودی و خروجی و با فرض $P_2 = \epsilon P_1$ که ϵ یک پارامتر اسکالر تنظیم است، می‌توان به راحتی طراحی را انجام داد.

۲. روش ماتریس‌های وزنی آزاد

در روش توصیفی، ماتریس‌های آزاد P_1 و P_2 را وارد تحلیل لیاپونوف شدند اما، یک ایده متفاوت و قدیمی‌تر استفاده از تبدیل مدل پارامتری شده ^{۷۰} با یک ماتریس آزاد وزنی C است [۴۹].

$$\dot{x}(t) = (A + C)x(t) + (A_1 + C)x(t - \tau(t)) - C \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds. \quad (29.3)$$

سیستم تبدیل یافته را می‌توان به راحتی با اضافه کردن عبارت زیر به سیستم (۱۷.۳) بدست آورد،

$$\circ = C[x(t) - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds - x(t - \tau(t))]. \quad (30.3)$$

یک روش دیگر برای وارد کردن ماتریس‌های آزاد وزنی در سال ۲۰۰۴ توسط هی ^{۷۱} ارائه شد که از فرمول لایب‌نیتز بهره می‌برد. در واقع جمله زیر با ماتریس‌های آزاد وزنی N_1 و N_2 به \dot{V} اضافه می‌شود،

$$\circ = \Upsilon[x^T(t)N_1 + x(t - \tau(t))^T N_2][x(t) - \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}(s) ds - x(t - \tau(t))]. \quad (31.3)$$

⁶⁸Descriptor Method

⁶⁹Slack Variables

⁷⁰Free-Weighting Matrices Technique

⁷¹He

نتیجه ۱.۳.۳. نامساوی جنسن^{۷۲} [۵۰] برای هر ماتریس مربعی $R > \circ$ ، اسکالر $h > \circ$ و تابع برداری $\phi : C[-h, \circ] \rightarrow \mathbb{R}^n$ به گونه‌ای که انتگرال‌های موجود خوش تعریف باشند داریم

$$\int_{-h}^{\circ} \phi^T(s)R\phi(s)ds \geq \frac{1}{h} \int_{-h}^{\circ} \phi^T(s)dsR \int_{-h}^{\circ} \phi(s)ds. \quad (۳۲.۳)$$

نامساوی جنسن توسعه یافته: برای هر ماتریس مربعی $R > \circ$ ، اسکالر $h > \circ$ و تابع برداری $\phi : C[-h, \circ] \rightarrow \mathbb{R}^n$ به گونه‌ای که انتگرال‌های موجود خوش تعریف باشند داریم

$$-\int_{-h}^{\circ} \int_{t+\theta}^t R\phi^T(s)R\phi(s)dsd\theta \leq -\frac{2}{h^2} \left(\int_{-h}^{\circ} \int_{t+\theta}^t \phi^T(s)dsd\theta \right) R \left(\int_{-h}^{\circ} \int_{t+\theta}^t \phi(s)dsd\theta \right). \quad (۳۳.۳)$$

در بسیاری از مراجع اخیر از نامساوی جنسن برای استخراج LMI در روش کراسوفسکی استفاده می‌کنند.

شروط وابسته به تاخیر با روش کراسوفسکی

عموما روش کراسوفسکی نسبت به روش رازومیخین به نتایج با محافظه‌کاری کمتر می‌انجامد. اولین شرط پایداری با روش کراسوفسکی برای تاخیرهای دارای تغییرات تند توسط فریدمن [۵۱] ارائه شد که از تکنیک مدل توصیفی بهره می‌برد، معادله (۲۸.۳) را در نظر بگیرید، با مشتق‌گیری از جمله کوادراتیک و استفاده از روش توصیفی، برای جبران (شدنی بودن LMI) جمله انتگرالی در عبارت بالا، انتگرال دوگانه زیر را به LKF اضافه می‌کنیم،

$$V_R(\dot{x}_t) = \int_{-h}^{\circ} \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)dsd\theta, \quad R > \circ. \quad (۳۴.۳)$$

که برابر عبارت زیر است،

$$V_R(\dot{x}_t) = \int_{t-h}^t (h+s-t)\dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds. \quad (۳۵.۳)$$

در مراجع برای تاخیرهای ثابت از انتگرال دوگانه به وفور استفاده شده است. اکنون با تعریف LKF

$$V(x(t), \dot{x}(t)) = x^T(t)Px(t) + V_R(\dot{x}_t) \quad (۳۶.۳)$$

با مشتق‌گیری از جمله بالا و اعمال نامساوی جنسن و تعریف بردار افزوده،

$$\eta(t) = \text{col}\{x(t), \dot{x}(t), \frac{1}{h} \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s)ds\}.$$

داریم

$$\dot{V}(t) \leq \eta^T(t)\Psi_d\eta(t) \leq -\alpha|x(t)|^2, \quad (۳۷.۳)$$

که در آن

$$\Psi_d = \begin{bmatrix} P_{\Psi}^T(A+A_1) + (A+A_1)^T P_{\Psi} & P - P_{\Psi}^T(A+A_1)^T & P_{\Psi} - hP_{\Psi}^T A_1 \\ * & -P_{\Psi} - P_{\Psi}^T + hR & -hP_{\Psi}^T A_1 \\ * & * & -hR \end{bmatrix} < \circ. \quad (۳۸.۳)$$

⁷²Jensen's Inequality

بهبود معیارهای وابسته به تاخیر با روش محدب متقابل

روش‌های اشاره شده در بخش‌های قبل به راحتی قابل توسعه به تاخیرهای چندگانه است. با توجه به کافی بودن شرایط محاسبه شده، همیشه می‌توان محافظه‌کاری این روشها را بهبود داد. به جای استفاده از $\frac{1}{h}$ در عبارات بالا، می‌توان از $\frac{1}{\tau}$ و $\frac{1}{h-\tau}$ استفاده کرد و به نتایج بهتری (به بهای پیچیدگی بیشتر) رسید. در بین مقالات اخیر روش محدب متقابل^{۷۳} معرفی شده در مقاله [۵۲] عملکرد مناسبی داشته است.

قضیه ۵.۳.۳. به ازای مقادیر از قبل تعیین شده $h \geq 0$ و $d \in [0, 1)$ ، فرض کنید ماتریس‌های $P > 0, S > 0, \varphi > 0, R > 0, S_{12}, P_2, P_2$ نامساوی‌های زیر را برآورده کنند،

$$\left\{ \begin{array}{l} \Xi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & S_{12} & R - S_{12} + P_2^T A_1 \\ * & \phi_{22} & 0 & P_2^T A_1 \\ * & * & -(S + R) & R - S_{12}^T \\ * & * & * & -2R + S_{12} + S_{12}^T - (1-d)\varphi \end{bmatrix} < 0, \\ \begin{bmatrix} R & S_{12} \\ * & R \end{bmatrix} \geq 0, \\ \phi_{11} = A^T P_2 + P_2^T A + S + \varphi - R, \\ \phi_{12} = P - P_2^T + A^T P_2, \\ \phi_{22} = -P_2 - P_2^T + h^2 R. \end{array} \right. \quad (39.3)$$

در این صورت سیستم تاخیری (۱۷.۳) برای $\tau(t) \in [0, h]$ با شرط $\dot{\tau}(t) \leq d$ پایدار مجانبی است. به علاوه، اگر LMI های بالا برای $\varphi = 0$ (یا به صورت معادل $d = 1$)، در این صورت سیستم برای تمام تاخیرهای دارای تغییرات دلخواه $\tau(t) \in [0, h]$ پایدار مجانبی یکنواخت است.

برای $d = 0$ (تأخیر ثابت) روش محدب متقابل مزیتی نسبت به روش‌های قبل ندارد چراکه نامساوی استفاده شده تنها در حالت متغیر با زمان می‌تواند کران بالای مشتق LKF را بهتر کند. بنابراین برای تأخیر ثابت این روش در مقایسه با روش‌های قبلی دارای محافظه‌کاری یکسان است. اگرچه مزیت و بهبود روش محدب در حالتی که $0 < d < 1$ باشد خود را نشان می‌دهد مخصوصاً زمانی که d به یک نزدیکتر باشد یا نامعلوم ($d = 1$) باشد (تأخیر با سرعت تغییر دلخواه)، برای جزییات بیشتر این روش و روش‌های بهبود یافته دیگر مراجع [۴۷، ۴۱] را ببینید.

تابع‌های لیاپونوف کلی برای سیستم‌های تاخیری خطی

یک شرط لازم برای استفاده از LKF ساده در بخش‌های قبل، پایداری سیستم بدون حضور تاخیر بود. به عنوان مثال سیستم زیر را در نظر بگیرید،

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t-h). \quad (40.3)$$

⁷³Reciprocally Convex Approach

جدول ۱.۳: مقایسه مقادیر کران بالای تاخیر ۳.۳.۳

روش	τ_{max}
LMI (۲۱.۳)	۱
LMI (۲۳.۳)	۱
LMI (۳۸.۳)	۳/۲۴
LMI (۳۹.۳)	۴/۷۲
LMI(DLF) [۴۶]	۶/۵۱
LMI [۴۰]	۶/۱۶
LMI [۴۲]	۶/۱۶۸۹

این سیستم برای تاخیر صفر ناپایدار است اما به ازای تاخیر در بازه $h \in (0/1002, 1/7178)$ پایدار است. برای چنین سیستم‌هایی (مخصوصاً اگر هدف پایدارسازی سیستم با استفاده از تاخیر باشد)، نتایج ساده بدست آمده در بخش‌های قبل قابل استفاده نیست. در چنین مواردی می‌توان از GLF^{۷۴} زیر استفاده کرد،

$$V(x_t) = x^T(t)Px(t) + 2x^T(t) \int_{-h}^{\circ} \varphi(\xi)x(t+\xi)d\xi + \int_{-h}^{\circ} \int_{-h}^{\circ} x^T(t+s)R(s,\xi)x(t+\xi)dsd\xi, \quad (41.3)$$

ماتریس‌های $\varphi(s)$ ، $P > 0$ و $R(s,\xi)$ مربوط به شروط لازم و کافی پایداری هستند. برای جزئیات بیشتر مرجع [۴۶] را ببینید. در ادامه GLF و DLF^{۷۵} هایی هم برای کاهش محافظه کاری معرفی شدند. تحلیل وابسته به تاخیر با استفاده از LKF های ساده تاکنون براساس نامساوی جنسن صورت گرفته است، یک نامساوی دیگر به نام ویرتینگر^{۷۶} برای پیدا کردن کران بالا با محافظه کاری کمتر معرفی شده که در مقالات اخیر [۴۱، ۵۳، ۴۳] در پایداری سیستم‌های تاخیری به کارگرفته شدند.

مثال ۳.۳.۳. [۴۷] سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0/9 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x(t - \tau(t)) \\ \tau(t) \in [-h, 0], \quad \dot{\tau}(t) \leq d < 1. \end{cases} \quad (42.3)$$

برای تاخیر ثابت ($d = 0$) کران بالای تحلیلی تاخیر ۶/۱۷۲۵ است. در جدول ۱.۳ نتایج اعمال LMI های مختلف نشان داده شده است. از شکل ۸.۳ مشاهده می‌شود سیستم برای $\tau \leq 6/1725$ پایدار مجانبی است.

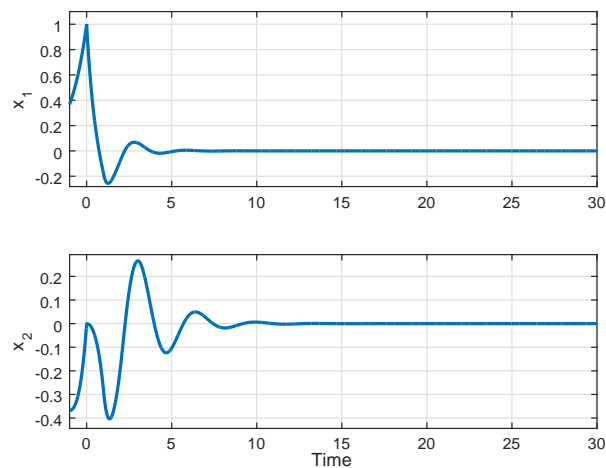
مثال ۴.۳.۳. [۴۷] سیستم زیر را در نظر بگیرید،

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1/6 & 0/2 \\ 0/2 & -1/9 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -2/1 & -1 \\ -1 & -0/6 \end{bmatrix} x(t-h) + \begin{bmatrix} 0/3 & 0 \\ -0/1 & 0/5 \end{bmatrix} u(t), \quad (43.3)$$

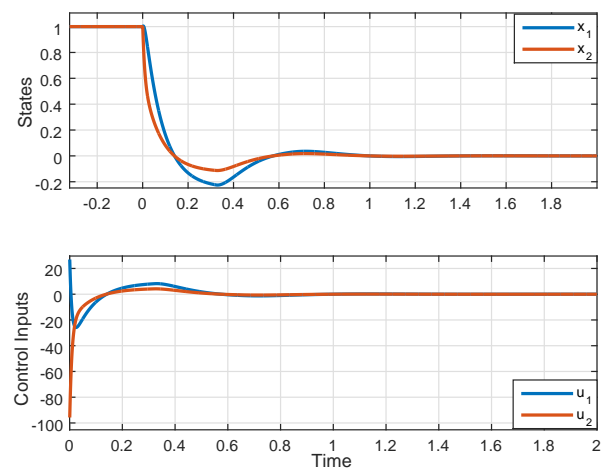
⁷⁴General Lyapunov Functional

⁷⁶Wirtinger

⁷⁵Discretized Lyapunov Functional



شکل ۸.۳: رفتار همگرایی بردار حالت در مثال ۳.۳.۳



شکل ۹.۳: رفتار همگرایی بردارهای حالت و ورودی در مثال ۴.۳.۳

کران بالای تحلیلی برای تاخیر در این مثال ۳۲۵٪ است. با استفاده از قانون کنترل $u(t) = Kx(t)$ می‌توان ماتریس پسخورد را با روش‌هایی چون جایابی قطب^{۷۷}، LQR^{۷۸} و غیره بدست آورد، داریم

$$K = \begin{bmatrix} -100/16 & 127/12 \\ 59/15 & -159/9 \end{bmatrix}.$$

طبق شکل ۹.۳ سیستم پایدار مجانبی است.

۴.۳ سیستم‌های تاخیری زمان-گسسته

۱.۴.۳ تحلیل پایداری از طریق الحاق

در این بخش به تحلیل پایداری و عملکرد و همین‌طور کنترل سیستم‌های LTI زمان-گسسته می‌پردازیم، برخلاف سیستم‌های زمان-پیوسته، سیستم‌های زمان-گسسته تاخیری را می‌توان با استفاده از الحاق^{۷۹} ورودی، خروجی و حالت به یک سیستم زمان-گسسته بدون تاخیر تبدیل کرد. البته اگر تاخیر نامعین، متغیر و یا بزرگ باشد، سیستم بدون تاخیر نتیجه شده ممکن است پیچیده باشد. بنابراین مانند سیستم‌های پیوسته، برای سیستم‌های گسسته نیز روش‌های لیاپونوف کراسوفسکی و لیاپونوف رازومیخین منجر به نتایج موثری جهت تحلیل و طراحی می‌شوند. سیستم خطی زمان-گسسته زیر را در نظر بگیرید،

$$x(k+1) = A_0 x(k) + A_1 x(k-h), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad h \in \mathbb{N}, \quad x(k) \in \mathbb{R}^n \quad (44.3)$$

مانند سیستم‌های پیوسته $x(k)$ را دیگر نمی‌توان به‌عنوان حالت سیستم در نظر گرفت و باید آن را با گذشته اش به‌صورت زیر الحاق کرد،

$$x_{aug}(k) = \text{col}\{x(k), x(k-1), \dots, x(k-h)\}, \quad (45.3)$$

که به سیستم الحاقی بدون تاخیر زیر منجر می‌شود،

$$x_{aug}(k+1) = A_{aug} x_{aug}(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad x_{aug}(k) \in \mathbb{R}^{(h+1)n}, \quad (46.3)$$

که در آن

$$A_{aug} = \begin{bmatrix} A & \circ & \dots & A_1 \\ I_n & \circ & \dots & \circ \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \circ & \dots & I_n & \circ \end{bmatrix}. \quad (47.3)$$

همچنین شرایط اولیه به‌صورت زیر است،

$$\text{col}\{x(\circ), x(-1), \dots, x(-h)\} = \text{col}\{\varphi(\circ), \varphi(-1), \dots, \varphi(-h)\}. \quad (48.3)$$

بر خلاف سیستم‌های زمان-پیوسته، سیستم‌های زمان-گسسته دارای تاخیر محدود بینهایت بعدی نیستند. مفهوم پایداری برای سیستم‌های زمان-گسسته مانند سیستم‌های زمان-پیوسته تعریف می‌شود، سیستم پایدار است اگر به ازای شرایط اولیه به اندازه کافی کوچک $x(k)$ محدود باقی بماند. همچنین

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \circ \text{ باشیم و داشته باشیم}$$

به جای تحلیل پایداری سیستم زمان-گسسته تاخیری، می‌توان سیستم زمان-گسسته بدون تاخیر مرتبه‌ی بالای فوق را تحلیل کرد، اگر روش لیاپونوف را به سیستم بالا اعمال کنیم، یک شرط لازم و کافی برای پایداری مجانبی سیستم اصلی، وجود یک تابع لیاپونوف به‌صورت زیر

$$V_{aug}(x_{aug}(k)) = x_{aug}^T(k) P_{aug} x_{aug}(k), \quad P_{aug} > \circ,$$

⁷⁹ Augmentation

به طوری که است که شرط زیر برقرار باشد،

$$V_{aug}(x_{aug}(k+1)) - V_{aug}(x_{aug}(k)) \leq -\alpha |x_{aug}(k)|^2, \quad \alpha > 0. \quad (49.3)$$

برخلاف سیستم‌های پیوسته، می‌توان برای سیستم‌های زمان-گسسته الحاقی یک تابع لیاپونوف کلی پیدا کرد که به شرط لازم و کافی منجر می‌شود. اما عیب اصلی روش الحاق، نفرین ابعاد^{۸۰} است مخصوصاً اگر تاخیر بزرگ باشد [۵۴].

استفاده از روش الحاق برای تاخیرهای نامشخص و متغیر با زمان مساله را بسیار پیچیده می‌کند. بنابراین برای سیستم خطی با تاخیر متغیر با زمان^{۸۱} زیر

$$x(k+1) = Ax(k) + A_1 x(k - \tau_k), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad \tau_k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \tau_k \leq h, \quad (50.3)$$

روش الحاق به یک ماتریس نامعین متغیر با زمان $A_{aug}(k)$ منجر می‌شود. در واقع برای تمام تاخیرهای نامعین $h+1, \tau_k \leq h$ حالت ممکن از $n(h+1) \times n(h+1)$ ماتریس برای $A_{aug}(k)$ وجود دارد:

$$A^{(e)} = \begin{bmatrix} A + A_1 & 0 & \dots & 0 \\ I_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & I_n & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{(1)} = \begin{bmatrix} A & A_1 & 0 & \dots & 0 \\ I_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & I_n & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{(h)} = \begin{bmatrix} A & 0 & \dots & 0 & A_1 \\ I_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & I_n & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

بنابراین پایداری سیستم گسسته دارای تاخیر متغیر با زمان به تحلیل پایداری سیستم خطی با سویچینگ اختیاری^{۸۲} زیر تبدیل می‌شود [۵۵]،

$$x_{aug}(k+1) = A_{aug}^{(j)} x_{aug}(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad x_{aug}(k) \in \mathbb{R}^{(h+1)n}. \quad (51.3)$$

بنابراین برای سادگی فرض می‌کنیم که $k_0 = 0$ باشد.

۲.۴.۳ تحلیل پایداری براساس توابع لیاپانوف

جهت استخراج شروط پایداری کافی است نسخه‌های گسسته توابع لیاپونوف رازومیخین و توابع لیاپونوف کراسوفسکی را اعمال کرد. در روش لیاپونوف رازومیخین تابع لیاپونوف $V: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ و شرط زیر

$$V(k+1, x(k+1)) - V(k, x(k)) \leq -\alpha |x(k)|^2, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+.$$

با یک $\alpha > 0$ در راستای سیستم و تحت شرط زیر استفاده می‌شود،

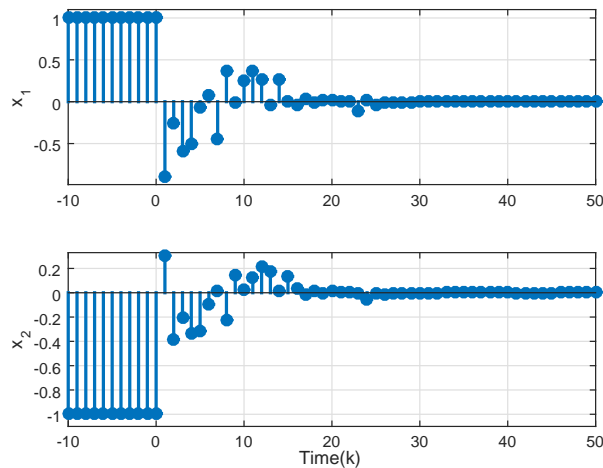
$$\exists \rho > 1: \quad V(k+i, x(k+i)) \leq \rho V(k, x(k)), \quad -h \leq i \leq -1. \quad (52.3)$$

قضیه ۱.۴.۳. [۵۶] سیستم (۵۰.۳) را در نظر بگیرید، با یک پارامتر اسکالر طراحی q معلوم، این سیستم پایدار مجانبی است، اگر یک ماتریس مربعی $P > 0$ چنان وجود داشته باشد که LMI زیر شدنی باشد،

$$\Gamma_{int} \triangleq \begin{bmatrix} A^T P A - (1-q)P & A^T P A_1 \\ * & A_1^T P A_1 - qP \end{bmatrix} < 0. \quad (53.3)$$

⁸⁰Curse of Dimensionality
⁸¹Time-Varing

⁸²Arbitrary Switching



شکل ۱۰.۳: رفتار همگرایی بردار حالت در مثال ۱.۴.۳

ملاحظه ۱.۴.۳. برقراری شرط مستقل از تاخیر بالا نامساوی‌های لیاپونوف زیر را نتیجه می‌دهد:

$$A^T P A < \circ, \quad A_1^T P A_1 - P < \circ,$$

وقتی که هر دو ماتریس A و A_1 ، ماتریس‌های شور h^* هستند. این نتیجه با سیستم‌های زمان-پیوسته متفاوت است چراکه در آنجا شرط پایداری مستقل از تاخیر تنها منجر به پایداری (هرویتز بودن) ماتریس A می‌شد.

مثال ۱.۴.۳. سیستم زیر را در نظر بگیرید،

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \circ & \circ/5 \\ \circ/5 & \circ/2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -\circ/4 & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} x(k - \tau_k). \quad (54.3)$$

با فرض $q = \circ/5$ و با حل LMI (52.3)، با توجه به شکل ۱۰.۳ مشاهده می‌شود که سیستم مستقل از تاخیر پایدار است.

روش لیاپونوف-کراسوفسکی و LMI های وابسته به تاخیر

مانند سیستم‌های زمان-پیوسته تعریف زیر را در نظر بگیرید،

$$x_k(j) \triangleq x(k+j), \quad j = -h, \dots, -1, \circ.$$

لم ۱.۴.۳. اگر اسکالرهایی مثبت α و β و یک تابع لیاپونوف به صورت $V: \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{h+1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ چنان

وجود داشته باشند که برای همه $k \in \mathbb{W}$ داشته باشیم،

$$\begin{cases} \circ \leq V(x_k) \leq \beta \{ \max_{j \in [-h, \circ]} |x(k+j)|^2 \} \\ V(x_{k+1}) - V(x_k) \leq -\alpha |x(k)|^2, \end{cases} \quad (55.3)$$

در این صورت سیستم (50.3) پایدار مجانبی است.

□ برهان. به [۴۷] مراجعه کنید.

قضیه ۲.۴.۳. به ازای یک $h \geq 0$ داده شده، اگر ماتریس‌های مربعی P, P_1, S_{12} و $P > 0, S > 0, R > 0$ وجود داشته باشند که LMI های زیر برقرار باشند، در این صورت سیستم (۵۰.۳) برای تمام تأخیرهای متغیر با زمان $0 \leq \tau_k \leq h$ پایدار مجانبی است.

$$\Phi_{dis} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & S_{12} & R - S_{12} + P_1^T A_1 \\ * & \phi_{22} & 0 & P_1^T A_1 \\ * & * & -(S + R) & R - S_{12}^T \\ * & * & * & -2R + S_{12} + S_{12}^T \end{bmatrix} < 0, \quad (56.3)$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} R & S_{12} \\ * & R \end{bmatrix} \geq 0, \\ \phi_{11} = (A - I)^T P_1 + P_1^T (A - I) + S - R, \\ \phi_{12} = P - P_1^T + (A^T - I) P_1, \\ \phi_{22} = -P_1 - P_1^T + h^2 R. \end{cases}$$

□ برهان. به [۴۷] مراجعه کنید.

مثال ۲.۴.۳. سیستم زیر را در نظر بگیرید،

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.97 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ -0.1 & -0.1 \end{bmatrix} x(k - \tau_k). \quad (57.3)$$

برای این سیستم $A - A_1$ ناپایدار بوده و یک مقدار ویژه خارج دایره واحد دارد بنابراین شروط مستقل از تأخیر قابل استفاده نیست. با روش الحاق می‌بینیم که سیستم برای تأخیر ثابت $0 \leq h \leq 16$ پایدار است (یعنی مقادیر ویژه ماتریس A_{aug} داخل دایره واحد است). با اعمال قضیه بالا، پایداری سیستم برای $0 \leq h \leq 18$ تضمین می‌شود. رفتار همگرایی بردار حالت را در شکل ۱۱.۳ مشاهده می‌کنید.

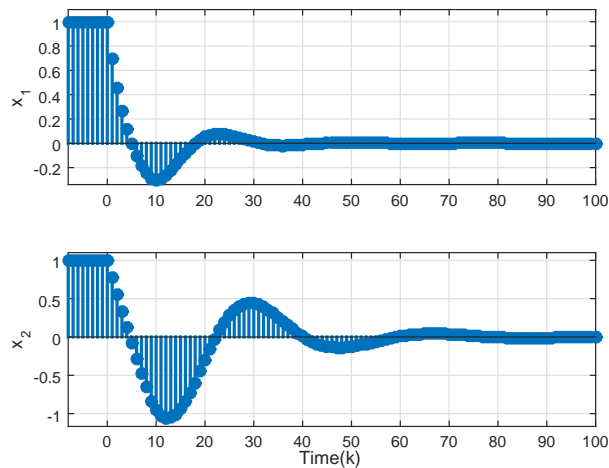
۳.۴.۳ مساله LQR با افق نامتناهی برای سیستم‌های زمان-گسسته

سیستم خطی گسسته زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + A_1 x(k-h) + Bu(k), \\ \text{col}\{x(0), x(-1), \dots, x(-h)\} = \text{col}\{\varphi(0), \varphi(-1), \dots, \varphi(-h)\}, \end{cases} \quad (58.3)$$

با تعریف بردار حالت الحاقی به سیستم بدون تأخیر زیر منجر می‌شود،

$$x_{aug}(k+1) = A_{aug} x_{aug}(k) + B_{aug} u(k), \quad (59.3)$$



شکل ۱۱.۳: رفتار همگرایی بردار حالت در مثال ۲.۴.۳

که در آن

$$A_{aug} = \begin{bmatrix} A & \circ & \cdots & A_1 \\ I_n & \circ & \cdots & \circ \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \circ & \cdots & I_n & \circ \end{bmatrix}, \quad B_{aug} = \begin{bmatrix} B \\ \circ \\ \vdots \\ \circ \end{bmatrix}.$$

مساله LQR

با افق نامحدود زیر را در نظر بگیرید، هدف یافتن قانون کنترلی u به گونه‌ای که سیستم (۵۸.۳) پایدار جانبی شده و تابع هزینه درجه دوم زیر کمینه شود:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [x^T(k)\phi x(k) + u^T(k)Ru(k)], \quad \phi \geq \circ, R > \circ.$$

این مساله در واقع به مساله LQR برای سیستم الحاقی بدون تاخیر با تابع هزینه فوق منجر می‌شود. مساله LQR برای سیستم بدون تاخیر کاملاً شناخته شده است. در واقع اگر زوج ماتریس (A_{aug}, B_{aug}) پایداری‌پذیر^{۸۴} بوده و زوج ماتریس (A_{aug}, ϕ_{aug}) مشاهده‌پذیر^{۸۵} باشد که در آن $\phi_{aug} = \text{diag}\{\phi, \circ\}$ در این صورت یک قانون کنترلی بهینه به صورت زیر وجود دارد [۳]،

$$u(k) = Kx_{aug}(k), \quad K = -(B_{aug}^T P B_{aug} + R)^{-1} B_{aug}^T P A_{aug}, \quad (۶۰.۳)$$

ماتریس $P \in \mathbb{R}^{(h+1)n \times (h+1)n}$ پاسخ یکتای معین مثبت معادله ریکاتی جبری زمان-گسسته (DARE) زیر است،^{۸۶}

$$P = A_{aug}^T [P - P B_{aug} (B_{aug}^T P B_{aug} + R)^{-1} B_{aug}^T P] A_{aug} + \phi_{aug}, \quad (۶۱.۳)$$

به طوری که ماتریس $A_{aug} + B_{aug}K$ شور (پایدار) است. این مساله منجر به پسخورد بهینه زیر با تاخیر توزیع شده برای سیستم اصلی می‌شود،

$$x_{aug}(k+1) = (A_{aug} + B_{aug}K)x_{aug}(k), \quad u(k) = K \text{col}\{x(k), x(k-1), \dots, x(k-h)\}. \quad (۶۲.۳)$$

⁸⁴Stabilizable

⁸⁵Detectable

⁸⁶Discrete-time Algebraic Riccati Equation

لازم به ذکر است که برای سیستم‌های پیوسته نیز مساله LQR برای سیستم‌های دارای تاخیر در حالت نیز دارای قانون کنترلی توزیع شده است.

۵.۳ پایداری سیستم تاخیری زمان-گسسته با روش EVA

نتایج این بخش در مراجع [۵۸] به چاپ رسیده است. سیستم LTI با تاخیرهای چندگانه زیر را در نظر بگیرید،

$$x_{k+1} = \sum_{i=0}^p A_i x_{k-i} + \sum_{j=0}^q B_j u_{k-j}, \quad (۶۳.۳)$$

که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ و $u \in \mathbb{R}^m$ بردارهای حالت و ورودی، و $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B_j \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ماتریس‌های ثابت حقیقی هستند و $rank(B_j) = m$. با تعریف بردار حالت افزوده (الحاقی)

$$X_{k+1} = col\{x_{k+1}, x_k, \dots, x_{k-(p-1)}, u_k, u_{k-1}, \dots, u_{k-(q-1)}\}, \quad (۶۴.۳)$$

سیستم (۶۳.۳) به سیستم استاندارد زیر تبدیل می‌شود،

$$X_{k+1} = AX_k + Bu_k, \quad (۶۵.۳)$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_{p-1} & A_p & B_1 & B_2 & \dots & B_{q-1} & B_q \\ I_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & I_m & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & I_m & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & I_m & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I_m \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (۶۶.۳)$$

و $X \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ ، $u \in \mathbb{R}^m$ ، $\tilde{n} = n(p+1) + mq$. با تعریف قانون کنترل $u_k = FX_k$ وقتی F ماتریس بهره (پس‌خورد) است، سیستم (۶۵.۳) به سیستم حلقه-بسته $X_{k+1} = (A + BF)X_k$ تبدیل می‌شود. با کمک روش EVA ماتریس پس‌خورد حالت سیستم را به گونه ای می‌یابیم که سیستم مذکور پایدار و مقادیر ویژه ماتریس حلقه-بسته $\Gamma = A + BF$ در طیف مشخص مقادیر ویژه مطلوب $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\tilde{n}}\}$ قرار گیرند.

مثال ۱.۵.۳. سیستم زمان-گسسته خطی با تاخیر در بردار حالت زیر را در نظر بگیرید،

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} x_{k-1} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} u_k \quad (۶۷.۳)$$

با کمک رابطه (۶۶.۳) داریم،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (۶۸.۳)$$

سیستم (۶۷.۳) ناپایدار است زیرا،

$$\Omega(A) = \{3/198, 2/194, 1/136, -1/76 \pm 0/88i, -1\}.$$

بنابراین هدف یافتن ماتریس پسخوردی است که مقادیر مطلوب $\Lambda = \{0/1, -0/3, 0, 0/1, 0/3, 0/5\}$ را به سیستم اختصاص دهد. با کمک روش EVA داریم،

$$F = \begin{bmatrix} 0/8 & 1/4 & -0/73 & 3/71 & -4/03 & 1/65 \\ -2/58 & 1/5 & -0/065 & -1/415 & -0/45 & -1/30 \end{bmatrix},$$

رفتار همگرایی سیستم (۶۷.۳) در شکل ۱۲.۳ نشان داده شده، با توجه به شکل ۱۳.۳ این سیستم با بردار اولیه $x_0 = [-1, 5, 3]^T$ پایدار مجانبی است.

مثال ۲.۵.۳. سیستم زمان-گسسته خطی با تاخیرهای چندگانه زیر را در نظر بگیرید،

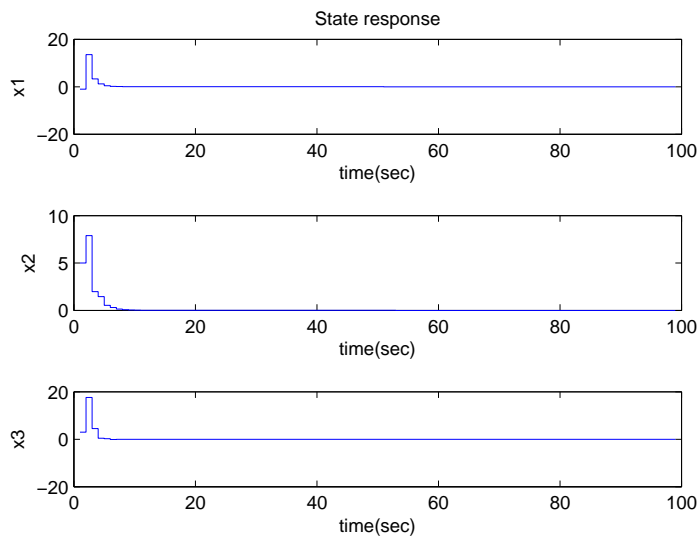
$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x_{k-1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} u_{k-1} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_{k-2} \quad (۶۹.۳)$$

برای پایداری سیستم، ماتریس بهره را به گونه ای بدست می آوریم که مقادیر ویژه

$$\Lambda = \{0/1, -0/2, -0/3, -0/4, 0/1, 0/2, 0/3, 0/4\}$$

را به سیستم اختصاص دهد. بنابراین،

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



شکل ۱۲.۳: رفتار همگرایی بردارهای حالت در مثال ۱.۵.۳

در نتیجه

$$F = \begin{bmatrix} ۳/۱۶۴۵ & -۳/۴۵۶۸ & ۴/۶۹۴۰ & -۳/۴۶۹۶ & ۰/۰۱۶۹ & ۴/۸۷۷۷ & -۲/۹۵۸۵ & ۲/۷۰۴۰ \\ -۳/۳۴۸۰ & ۲/۶۶۱۷ & -۴/۰۶۱۹ & ۲/۶۲۹۴ & -۰/۲۱۵۶ & -۵/۳۸۶۴ & ۲/۷۴۳۹ & -۲/۸۰۴۴ \end{bmatrix}.$$

با توجه به شکل‌های ۱۴.۳ و ۱۵.۳ این سیستم با بردار اولیه $x_0 = [-۲, ۲]^T$ پایدار مجانبی است.

۶.۳ روش PEVA برای سیستم‌های تاخیری با کمینه‌سازی نرم پس‌خورد

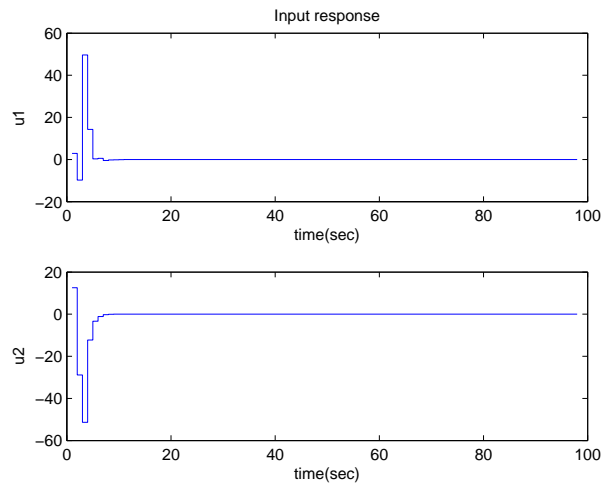
نتایج این بخش در مراجع [۵۷] به چاپ رسیده است. سیستم خطی زمان-گسسته استاندارد شده (۶۳.۳) را در نظر بگیرید با کمک روش PEVA ماتریس پس‌خورد را به دست می‌آوریم. بدون کاستن از کلیت مساله فرض می‌کنیم زوج ماتریس (B, A) کنترل‌پذیر و $rank(B) = m$ برای $m \leq \bar{n}$. طیف مقادیر ویژه ماتریس A را به صورت زیر در نظر گرفته،

$$\Omega(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p; \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{\bar{n}}\},$$

فرض می‌کنیم $S = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ ، هدف یافتن ماتریس پس‌خورد حالتی است که

$$\Omega(\Gamma) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p; \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{\bar{n}}\}.$$

این مساله برای سیستم‌های استفاده می‌شود که کاملاً پایدار نیستند و تنها تعدادی از مقادیر ویژه ماتریس حلقه-باز (A) نامطلوب هستند. در ابتدا بردارهای ویژه چپ ماتریس A را به صورت $Y = (y_1, y_2, \dots, y_{\bar{n}})$ در نظر بگیرید، اکنون ماتریس‌های $Y_1^H B$ و $\Lambda_1 = diag\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ را در نظر گرفته، هدف یافتن



شکل ۱۳.۳: رفتار همگرایی بردارهای ورودی در مثال ۱.۵.۳

ماتریس K به طوری که مقادیر ویژه ماتریس حلقه- بسته $\Lambda_1 + Y_1^H B K$ در طیف $s = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ قرار بگیرد. با کمک تبدیلات تشابهی فرم اشلون و همدم زوج مرتب $(Y_1^H B, \Lambda_1)$ را به دست می‌آوریم، داریم:

$$\widetilde{Y_1^H B} = \begin{bmatrix} (Y_1^H B)_{O_{m \times m}} \\ \circ \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\Lambda}_1 = \begin{bmatrix} G_{\circ(m \times p)} \\ \dots\dots \\ I_{p-m} & O_{(p-m) \times m} \end{bmatrix}.$$

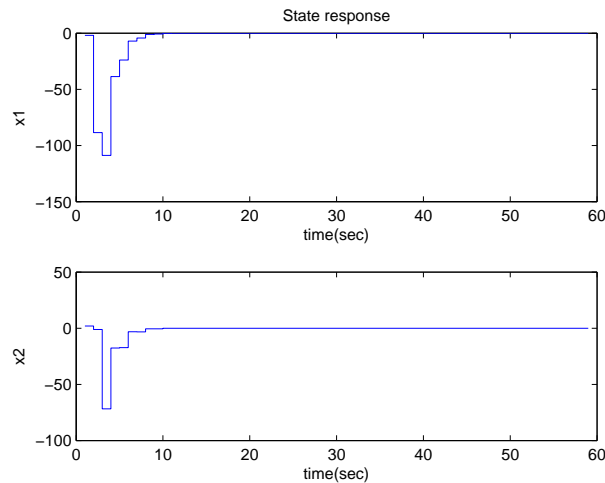
و ماتریس پس‌خورد اولیه $\widetilde{F}_p = -((Y_1^H B)_{\circ})^{-1} G_{\circ}$ است که مقادیر ویژه ماتریس $\widetilde{\Gamma}_{\circ}$ را به صفر می‌برد. اکنون ماتریس قطری $D = \text{diag}\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ را در نظر گرفته و $A_{\mu} = \widetilde{\Gamma}_{\circ} + D$ را تعریف می‌کنیم. واضح است که مقادیر ویژه ماتریس A_{μ} طیف $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ هستند. اکنون با عملیات تشابهی که روی ماتریس A_{μ} انجام می‌دهیم به فرم همدم زیر می‌رسیم،

$$\widetilde{A}_{\mu} = \begin{bmatrix} G_{\mu(m \times p)} \\ \dots\dots \\ I_{p-m} & O_{(p-m) \times m} \end{bmatrix}.$$

با توجه به اینکه دو ماتریس A_{μ} و \widetilde{A}_{μ} متشابه هستند و دارای مقادیر ویژه یکسان، بنابراین ماتریس پس‌خورد حالت \widetilde{K} به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\widetilde{K} = ((Y_1^H B)_{\circ})^{-1} (-G_{\circ} + G_{\mu}) = \widetilde{F}_p + \widetilde{K}_{\mu} \implies K = \widetilde{K} T^{-1}.$$

واضح است که ماتریس پس‌خورد برای سیستم (۶۳.۳) در مساله PEVA به صورت $F = K \times Y_1^H$ است. ماتریس پس‌خورد یکتانگشت و عموماً وابسته به پارامترهای آزاد است، بنابراین انتظار می‌رود برای سیستم‌های کنترلی بتوان ماتریس‌های مختلفی به دست آورد. کمینه‌سازی نرم و پارامترسازی کنترل‌گرها مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. برای بهبود عملکرد سیستم و رفتار همگرایی بردارهای ورودی و حالت نیاز است نرم ماتریس پس‌خورد حداقل مقدار ممکن باشد. روش‌های مختلفی برای یافتن ماتریس پس‌خورد



شکل ۱۴.۳: رفتار همگرایی بردارهای حالت در مثال ۲.۵.۳

ارائه شده است [۳۳]–[۳۸]. در ادامه با کمک روش بیان شده در بخش ۲.۳.۲، روش جدیدی را برای کمینه کردن نرم ماتریس بهره پیشنهاد می‌کنیم. روش [۳۲] نیازمند حل معادلات غیرخطی که تعداد مجهولات بیشتر از معادلات است، بنابراین فرض می‌کنیم،

$$K = B_o^{-1}(-G_o + G_\lambda)T^{-1} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \dots & k_{mn} \end{bmatrix},$$

با کمک معادلات (۳۴.۲)، مساله بهینه‌سازی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n k_{ij}^2, \quad (۷۰.۳)$$

$$\text{subject to} \quad \begin{cases} f_1(g_{11}, g_{12}, \dots, g_{1n}, g_{21}, \dots, g_{2n}, \dots, g_{m1}, g_{m2}, \dots, g_{mn}) = c_1 \\ f_2(g_{11}, g_{12}, \dots, g_{1n}, g_{21}, \dots, g_{2n}, \dots, g_{m1}, g_{m2}, \dots, g_{mn}) = c_2 \\ \vdots \\ f_n(g_{11}, g_{12}, \dots, g_{1n}, g_{21}, \dots, g_{2n}, \dots, g_{m1}, g_{m2}, \dots, g_{mn}) = c_n \end{cases}$$

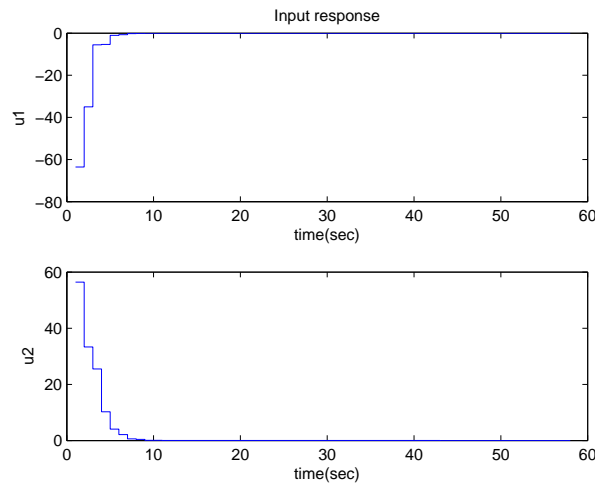
با حل مساله بهینه‌سازی با روش‌های موجود ماتریس پسخورد با حداقل نرم به دست می‌آید.

الگوریتم

فرضیات: زوج کنترل‌پذیر (B, A) و $\text{rank}(B_j) = m$.

ورودی: ماتریس‌های A_i, B_j .

خروجی: ماتریس پسخورد حالت F با کمترین نرم به طوری که سیستم حلقه-بسته دارای مقادیر ویژه مطلوب باشد.



شکل ۱۵.۳: رفتار همگرایی بردارهای ورودی در مثال ۲.۵.۳

گام اول: تبدیل سیستم تاخیری (۶۳.۳) به سیستم استاندارد (۶۵.۳) و محاسبه ماتریس‌های \$A\$ و \$B\$ با کمک روابط (۶۶.۳).

گام دوم: محاسبه زوج مرتب \$(Y_1^H B, \Lambda_1)\$ و تخصیص مقادیر ویژه مطلوب \$S = \{\mu_1, \dots, \mu_p\}\$ به مقادیر نامطلوب \$\Omega(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}\$ با کمک روش PEVA.

گام سوم: محاسبه ماتریس‌های پس‌خورد \$K\$ و \$F = K \times Y_1^H\$.

مثال‌های عددی

در این بخش، سه مثال عددی برای نشان دادن کارایی و مقایسه روش پیشنهادی با نتایج قبلی ارائه می‌دهیم.

مثال ۱.۶.۳. سیستم زیر را در نظر بگیرید،

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.9512 & 0 \\ 0 & 0.9048 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 4.8770 & 4.8770 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1.1895 & 3.5890 \end{bmatrix} u_{k-1}, \quad (71.3)$$

هدف یافتن ماتریس پس‌خورد حالتی با کمینه نرم است که مقادیر ویژه مطلوب \$\Lambda = \{\pm 0.1, \pm 0.5\}\$ را به سیستم اختصاص دهد. با روش EVA داریم،

$$K = \begin{bmatrix} -0.2470 & 0.2954 & -0.3351 & 1.1697 \\ -0.0255 & -0.0851 & 0.1126 & -0.3922 \end{bmatrix},$$

با نرم \$\|K\|_F = 1.3428\$. اکنون در نظر بگیرید،

$$\tilde{A}_\lambda = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

با کمک روابط (۳۳.۲) و (۳۴.۲) داریم:

$$\begin{cases} -(g_{11} + g_{22}) = 0 \\ g_{11}g_{24} - g_{12}g_{23} + g_{13}g_{22} - g_{14}g_{21} = 0 \\ -g_{13} - g_{24} + g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = -0.26 \\ g_{13}g_{24} - g_{14}g_{23} = 0.0025 \end{cases}$$

با تعریف،

$$G_\lambda = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \end{bmatrix}, \quad (72.3)$$

در نتیجه،

$$K = B_0^{-1}(-G_0 + G_\lambda)T^{-1} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0.154g_{11} + 0.051g_{12} + 0.162g_{13} + 0.0537g_{14} - 0.15 & 0.154g_{11} + 0.051g_{12} + 0.162g_{13} + 0.0537g_{14} - 0.05 \\ 0.189g_{21} - 0.189g_{11} - 0.209g_{12} + 0.209g_{14} + 0.17 & 0.189g_{21} - 0.189g_{21} - 0.209g_{12} + 0.209g_{14} - 0.17 \\ 0.249g_{11} - 0.249g_{12} - 0.79g_{13} - 0.262g_{14} - 0.23 & 0.249g_{21} - 0.249g_{22} - 0.79g_{23} - 0.262g_{24} + 0.26 \\ 0.751g_{12} - 0.751g_{11} - 0.79g_{13} - 0.262g_{14} + 0.68 & 0.751g_{22} - 0.751g_{21} - 0.79g_{23} - 0.262g_{24} - 0.68 \end{bmatrix}^T \quad (73.3)$$

بنابراین با کمک معادلات فوق مساله بهینه‌سازی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 k_{ij}^2$$

$$\text{subject to} \quad \begin{cases} -(g_{11} + g_{22}) = 0 \\ g_{11}g_{24} - g_{12}g_{23} + g_{13}g_{22} - g_{14}g_{21} = 0 \\ -g_{13} - g_{24} + g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = -0.26 \\ g_{13}g_{24} - g_{14}g_{23} = 0.0025 \end{cases}$$

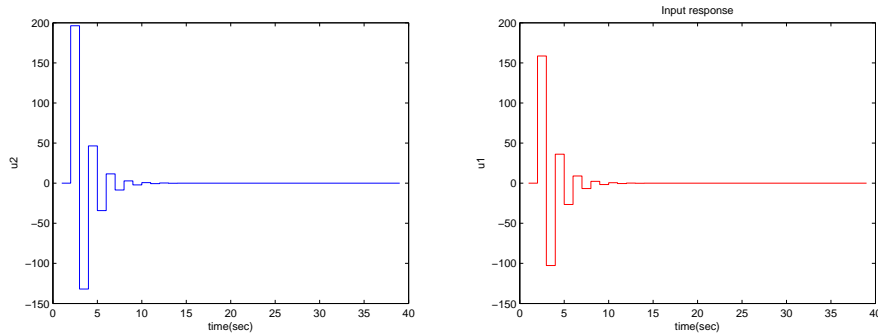
با حل آن داریم:

$$G_\lambda = \begin{bmatrix} -0.0585 & -0.1487 & 0.2175 & -0.0156 \\ -0.1541 & 0.0585 & -0.0633 & 0.0162 \end{bmatrix}, \quad (74.3)$$

و

$$K = \begin{bmatrix} -0.1287 & 0.1055 & -0.3704 & 0.4442 \\ -0.0787 & -0.1144 & 0.2181 & -0.4741 \end{bmatrix}, \quad (75.3)$$

با نرم $\|K\|_F = 0.8086$.



شکل ۱۶.۳: رفتار همگرایی مولفه‌های بردار حالت در مثال ۲.۶.۳

مثال ۲.۶.۳. سیستم خطی با تاخیر زمانی زیر را در نظر بگیرید،

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} x_{k-1} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} u_k.$$

این سیستم ناپایدار است، زیرا طیف مقادیر ویژه ماتریس حلقه-باز آن به صورت زیر است،

$$\Omega(A) = L_1 \cup L_2 = \{3/8 \pm 27i, 0/9867 \pm 1/242 \pm i, 2\} \cup \{-0/4591, 0/6830\}$$

اکنون برای پایدارسازی، طیف دلخواه $S = \{\pm 0/1, \pm 0/5\}$ را در نظر به طوری که مقادیر ویژه ماتریس $A + BF$ برابر $S \cup L_2$ باشد. داریم،

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 3/8 \pm 27i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0/987 + 1/24i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0/987 - 1/24i \end{bmatrix}, Y_1^H B = \begin{bmatrix} -0/269 & 1/262 \\ 0/392 & -0/392 \\ -0/001 + 0/18i & 0/06 - 0/174i \\ -0/001 - 0/18i & 0/06 + 0/174i \end{bmatrix}.$$

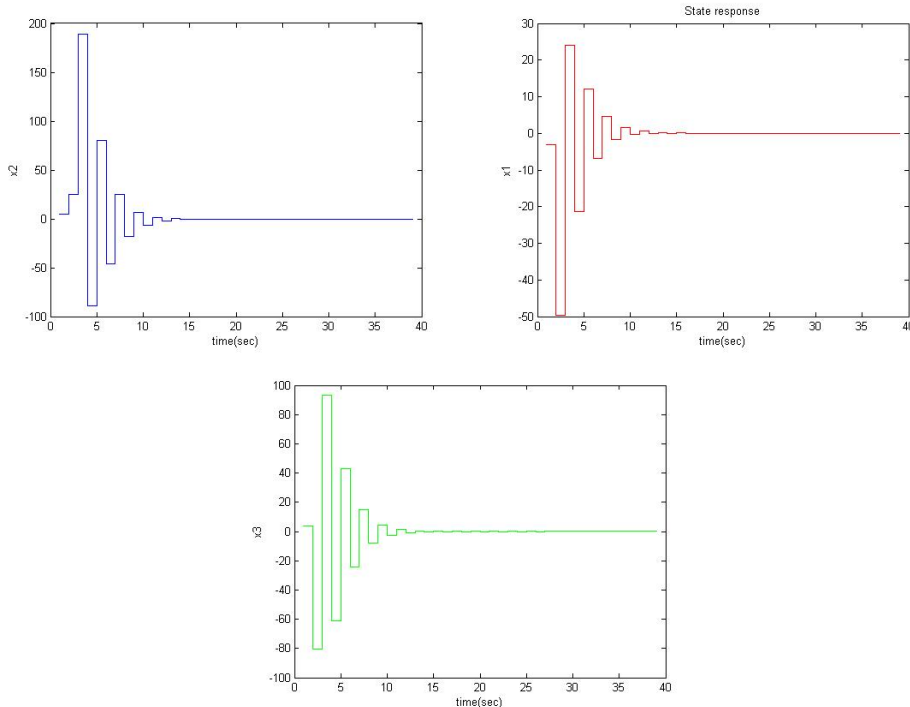
اکنون بعد از به دست آوردن فرم همدم برداری ماتریس‌های Λ_1 و $Y_1^H B$ ، ماتریس پس‌خورد K که همه مقادیر ویژه ماتریس $\Lambda_1 + Y_1^H B K$ را به S اختصاص می‌دهد به صورت زیر به دست می‌آید،

$$K = \begin{bmatrix} -4/2443 & 0/4525 & -3/4508 + 5/4896i & -3/4508 - 5/4896i \\ -3/7139 & 9/5410 & -7/1141 + 6/2832i & -7/1141 - 6/2832i \end{bmatrix}$$

در نتیجه،

$$F = \begin{bmatrix} 5/1958 & 0/5906 & -4/6393 & -7/4212 & -1/0257 & 3/0991 \\ 7/3317 & -2/6174 & -7/2586 & -15/9376 & -0/0232 & -0/9156 \end{bmatrix}$$

پاسخ سیستم در شکل‌های ۱۶.۳ و ۱۷.۳ نشان داده شده‌اند. از شکل‌ها مشاهده می‌شود که سیستم (۲.۶.۳) با بردار اولیه $x_0 = [-3, 5, 4]^T$ به طور مجانبی پایدار است.



شکل ۱۷.۳: رفتار همگرایی مولفه‌های بردار ورودی در مثال ۲.۶.۳

مثال ۳.۶.۳. سیستم زیر را در نظر بگیرید،

(۷۶.۳)

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} x_{k-1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} u_{k-1} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} u_{k-2}.$$

مقادیر ویژه ماتریس حلقه-باز $L = \{-2/9488, -1, 2/166, 0/7828, 0, 0, 0, 0\}$ هستند. طیف دلخواه $S = \{-0/5, 0/5, 0/3\}$ را در نظر گرفته، طبق روش PEVA داریم،

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} -2/9488 & 0 & 0 \\ 0 & 2/166 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, Y_1^H B = \begin{bmatrix} -0/9233 & 0/1728 \\ 0/2977 & -0/7771 \\ 0/1491 & -0/7454 \end{bmatrix},$$

بنابراین، ماتریس‌های پسخورد به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$K = \begin{bmatrix} -2/243 & -4/8647 & -3/9686 \\ -0/5600 & -0/6141 & -2/2421 \end{bmatrix},$$

9

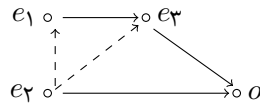
$$F = \begin{bmatrix} -1/1216 & 0/0890 & -3/6359 & 3/6388 & 1/2418 & 6/2617 & 1/4538 & -0/7197 \\ 0/1290 & -0/0947 & -1/0215 & 0/8304 & -0/2236 & 2/1463 & 0/4468 & -0/7011 \end{bmatrix}.$$

با نرم‌های $\|K\|_F = 7/0826$ و $\|F\|_F = 8/8440$ ، اکنون موارد زیر را در نظر می‌گیریم:

مورد اول: با کمک روش بیان شده در بخش ۱.۳.۲ گراف متناظر با ماتریس حلقه-بسته را در نظر گرفته، انتخاب‌های مختلفی برای G_α می‌توان در نظر گرفت به‌عنوان مثال برای

$$\tilde{\Gamma}_\circ = \begin{bmatrix} & O_{2,4} \\ I_2 & , & O_{2,2} \end{bmatrix},$$

فرض می‌کنیم،



در این صورت، با کمک روابط بیان شده در زیر بخش ۱.۳.۲ داریم،

$$G_\alpha = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ g_{21} & \circ & g_{23} \end{bmatrix} \Rightarrow G_\alpha = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ ۱/۳۴۶۹ & \circ & -۰/۶۰۰۷ \end{bmatrix},$$

و

$$K = \begin{bmatrix} -۳/۴۵۸۴ & -۱/۰۱۷۳ & -۰/۷۱۶۴ \\ -۱/۱۵۴۸ & ۱/۲۶۸۸ & -۰/۶۵۰۵ \end{bmatrix},$$

در نتیجه،

$$F = \begin{bmatrix} -۰/۱۳۲۹ & -۱/۱۲۵۱ & -۱/۱۹۴۸ & ۱/۹۴۷۹ & ۱/۷۹۱۲ & ۱/۸۵۲۲ & ۰/۳۲۷۳ & ۱/۷۱۸۹ \\ ۰/۶۱۲۸ & -۰/۶۸۸۹ & ۰/۱۷۳۲ & ۰/۰۰۲۹ & ۰/۰۴۵۲ & -۰/۰۱۱۷ & -۰/۱۰۴۵ & ۰/۴۹۲۴ \end{bmatrix},$$

با نرم‌های $\|K\|_F = ۴/۱۰۸۰$ ، $\|F\|_F = ۴/۱۶۴۳$

مورد دوم: در این مورد، هدف پیدا کردن ماتریس‌های پارامتری غیرخطی K, F با کمک روش بیان شده در زیر بخش ۲.۳.۲ است. بنابراین، فرض می‌کنیم،

$$\tilde{A}_\mu = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ ۱ & \circ & \circ \end{bmatrix},$$

با کمک روابط (۳۳.۲) و (۳۴.۲) داریم،

$$\begin{cases} -g_{11} - g_{22} = -۰/۳ \\ g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} - g_{13} = -۰/۲۵ \\ g_{13}g_{22} - g_{12}g_{23} = ۰/۰۷۵ \end{cases}$$

انتخاب‌های مختلفی می‌توان برای حل معادله غیرخطی بالا در نظر گرفت. برای مثال داریم،

$$K = \begin{bmatrix} -۳/۴۰۹۰ & -۲/۲۴۹۴ & -۲/۷۰۵۳ \\ -۰/۹۸۲۶ & ۰/۹۰۲۵ & -۱/۱۷۹۸ \end{bmatrix}$$

و

$$F = \begin{bmatrix} -0/2948 & -0/8663 & -2/3123 & 2/7674 & 1/5030 & 4/0418 & 0/8339 & 0/7210 \\ 0/5492 & -0/5517 & -0/1158 & 0/1738 & -0/1009 & 0/5600 & 0/0347 & 0/1276 \end{bmatrix}$$

مشاهده می‌شود طیف مقادیر ویژه ماتریس $A + BF$ برابر $S \cup L_2$ و نرم‌های ماتریس‌های پسخورد $\|F\|_F = 5/8859$ و $\|K\|_F = 5/2127$ هستند.

مورد سوم: با کمک روش پیشنهادی، ماتریس پسخورد پارامتری را به فرم زیر در نظر می‌گیریم:

$$K = (Y_1^H B)^{-1} (-G_0 + G_\lambda) T^{-1} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix},$$

که در آن

$$\begin{cases} k_{11} = 0/13g_{13} - 0/172g_{12} - 0/384g_{11} - 0/784g_{21} - 0/352g_{22} + 0/266g_{23} - 2/17 \\ k_{12} = 1/76g_{11} + 0/329g_{12} + 0/813g_{13} + 3/6g_{21} + 0/672g_{22} + 1/66g_{23} - 5/27 \\ k_{13} = 0/817g_{11} - 1/72g_{12} - 0/817g_{13} + 1/67g_{21} - 3/52g_{22} - 1/67g_{23} - 2/71 \\ k_{21} = 0/13g_{23} - 0/172g_{22} - 0/384g_{21} - 0/508 \\ k_{22} = 1/76g_{21} + 0/329g_{22} + 0/813g_{23} - 0/713 \\ k_{23} = 0/817g_{21} - 1/72g_{22} - 0/817g_{23} - 1/72 \end{cases}$$

بنابراین، مساله بهینه سازی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 k_{ij}^2 \quad (77.3)$$

$$\text{subject to} \quad \begin{cases} -g_{11} - g_{22} = -0/3 \\ g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} - g_{13} = -0/25 \\ g_{13}g_{22} - g_{12}g_{23} = 0/075 \end{cases}$$

با حل مساله برنامه‌ریزی غیرخطی فوق داریم،

$$G_\lambda = \begin{bmatrix} 0/1790 & -2/4580 & 2/5860 \\ 0/9410 & 0/1210 & -0/0960 \end{bmatrix},$$

بنابراین برای سیستم (۷۶.۳) ماتریس‌های پسخورد K و F به صورت زیر بدست می‌آیند،

$$K = \begin{bmatrix} -2/2841 & -0/3548 & 0/8705 \\ -0/9026 & 0/9055 & -1/0860 \end{bmatrix},$$

و

$$F = \begin{bmatrix} -0/1706 & -0/8048 & -0/2516 & 0/9464 & 1/4988 & 0/0371 & -0/0384 & 1/7564 \\ 0/5332 & -0/5217 & -0/0740 & 0/1263 & -0/1138 & 0/4715 & 0/0192 & 0/1211 \end{bmatrix},$$

جدول ۲.۳: مقایسه نرم ماتریس با روش‌های مختلف برای مثال ۳.۶.۳

روش	$\ K\ _F$	$\ F\ _F$	% کاهش $\ \cdot\ _F$
PEVA (کلاسیک)	۸/۸۴۴۰	۷/۰۸۲۶	
روش [۳۲]	۵/۲۱۲۶	۵/۸۸۵۹	۲۶٪
روش [۳۱]	۴/۱۰۸۰	۴/۱۶۴۳	۴۲٪
روش پیشنهادی	۲/۹۸۵۸	۲/۷۹۲۵	۵۸٪

با نرم‌های $\|K\|_F = ۲/۹۸۵۸$ و $\|F\|_F = ۲/۷۹۲۵$. مقایسه بین نرم‌های ماتریس پس‌خورد در جدول ۲.۳ آورده شده است. همچنین پاسخ سیستم در شکل‌های ۱۸.۳ و ۱۹.۳ نشان داده شده‌اند. از شکل موجود مشاهده می‌شود که سیستم (۷۶.۳) با بردار اولیه $x_0 = [-۳, ۲]^T$ به‌طور مجانبی پایدار است.

مقایسه روش‌ها

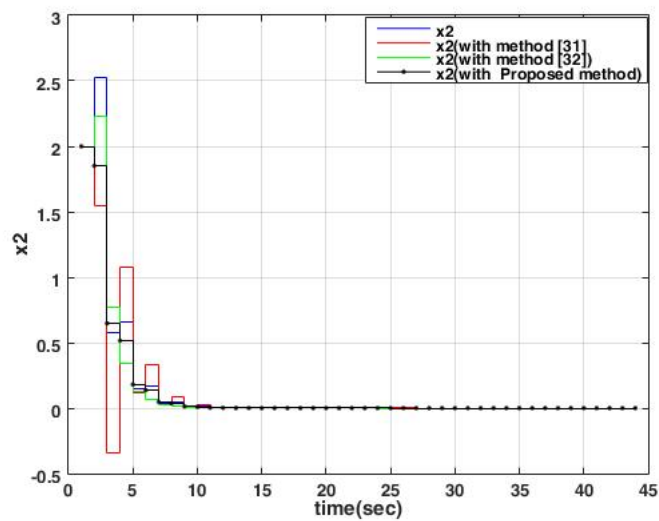
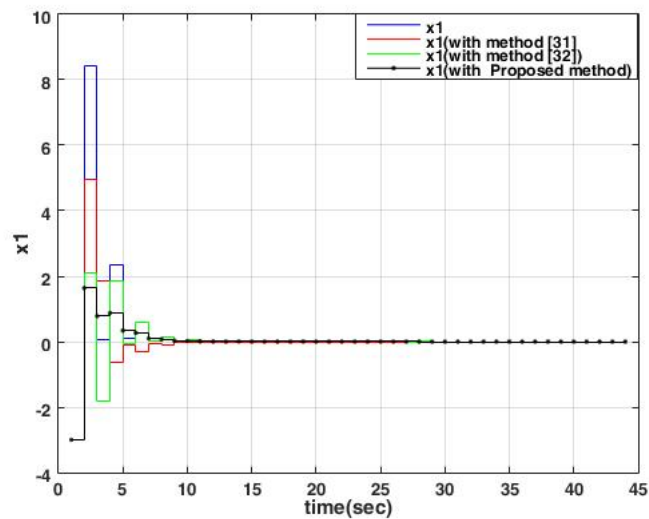
در این بخش، مزایای روش پیشنهادی را ارائه می‌دهیم و آن را با روش‌های موجود مقایسه می‌کنیم:

- مزیت روش پیشنهادی، سادگی الگوریتم و کاهش پیچیدگی محاسباتی نسبت به روش‌های ارائه شده در [۳۶، ۳۴، ۳۵، ۶۰، ۵۹] است و کاهش نرم ماتریس پس‌خورد حالت نسبت به روش‌های ارائه شده [۳۱، ۱۷].
- در بسیاری از مسائل مهندسی، محدودیت‌هایی روی متغیرهای کنترل یا ورودی اعمال می‌شود به‌عنوان مثال، ورودی i ام مضر بی از ورودی z ام باشد که با این کار با پارامتری‌سازی غیرخطی روش پیشنهادی امکان پذیر است و ماتریس پس‌خورد حالت را می‌توان طوری تعیین کرد که محدودیت‌های فوق به سیستم اعمال گردد. در بسیاری از مراجع از جمله [۳۵] محدودیتی برای ورودی‌های سیستم در نظر گرفته نمی‌شود است.
- ویژگی خاص روش PEVA در مقایسه با روش‌های [۱۷، ۳۱، ۳۲، ۵۹] و [۳۶، ۳۷] این است که تنها برای تعداد بسیار کمی از مقادیر ویژه نامطلوب سیستم در نظر گرفته می‌شود، بنابراین بعد سیستم کاهش یافته و دارای پیچیدگی محاسباتی کمتری هستیم و روشی موثر برای سیستم‌های بزرگ مقیاس است.
- با توجه به شکل‌های مثال ۳.۶.۳، کاهش مقدار نرم ماتریس بهره باعث کاهش دامنه‌ی نوسانات سیگنال‌های کنترلی و در نتیجه کاهش مصرف انرژی یا هزینه با قانون کنترل $U_k = FX_k$ می‌شود.

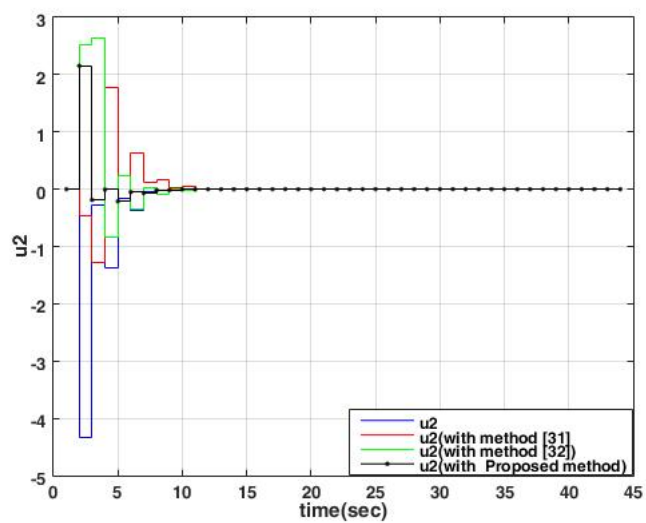
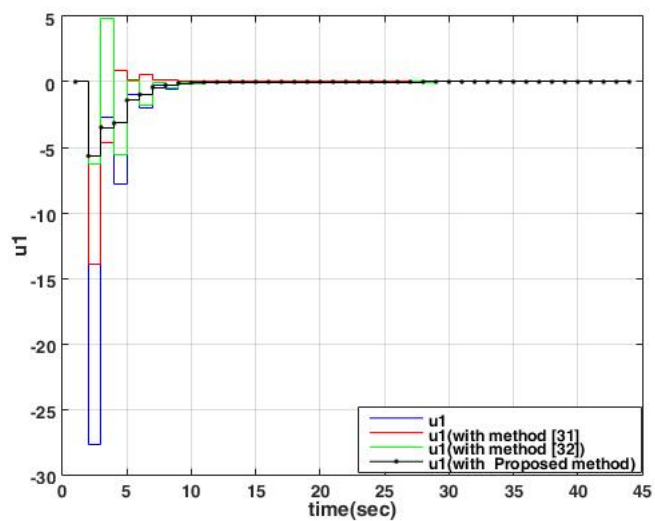
۷.۳ کنترل بهینه زمانی

سیستم خطی زمان-گسسته زیر را در نظر بگیرید،

$$x(k+1) = A_0 x(k) + A_1 x(k-h) + Bu(k), \quad (۷۸.۳)$$



شکل ۱۸.۳: مقایسه رفتار همگرایی مولفه‌های بردار حالت در مثال ۳.۶.۳



شکل ۱۹.۳: مقایسه رفتار همگرایی مولفه‌های بردار ورودی در مثال ۳.۶.۳

با تعریف بردار الحاقی به سیستم بدون تاخیر زیر منجر می‌شود،

$$X(k+1) = A_{aug}X(k) + Bu(k), \quad X(k) \in \mathbb{R}^{(h+1)n}, \quad (79.3)$$

قانون کنترل را $u(k) = KX(k)$ در نظر بگیرید. در کنترل بهینه زمانی^{۸۷} به دنبال ماتریس K به گونه‌ای هستیم که حالت دستگاه را در کوتاه‌ترین زمان (کمترین مرحله) مانند v به صفر (حالت تعادل) برساند. v را اندیس کنترل‌پذیری می‌نامیم و تعریف می‌کنیم

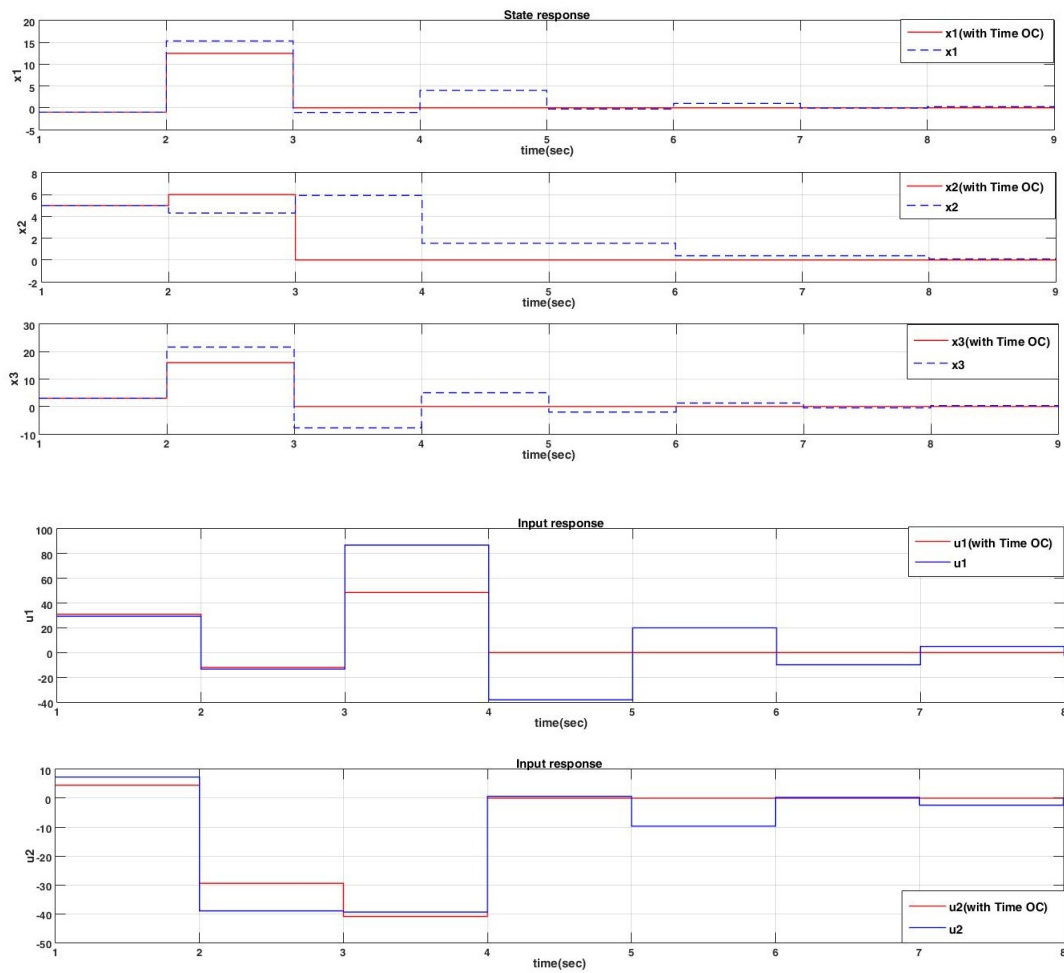
$$v = \max \{p_i | i = 1, \dots, m\}, \quad v < n. \quad (80.3)$$

که در آن p_i ناوردهای کرونگر هستند.

مثال ۱.۷.۳. سیستم (۷۸.۳) را در نظر بگیرید، که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

از شکل ۲۰.۳ مشاهده می‌شود که در مساله کنترل بهینه زمانی برای سیستم (۱.۷.۳) حداکثر طی $n = 3$ گام بردارهای حالت به سمت نقطه تعادل همگرا می‌شوند و سیستم پایدار مجانبی است. این کار با محاسبه ماتریس پس‌خورد اولیه F_p که مقادیر ویژه صفر را به سیستم حلقه بسته (۷۹.۳) اختصاص می‌دهد، صورت می‌گیرد. برای مطالعه بیشتر در مورد مساله کنترل بهینه زمانی سیستم‌های LTI خواننده علاقمند می‌تواند به [۶۱] مراجعه نماید.



شکل ۲۰.۳: رفتار همگرایی بردارهای حالت و ورودی در مثال ۱.۷.۳

فصل ۴

سیستم‌های مرتبه کسری

تعاریف و قضایای این بخش از مراجع [۶، ۷] گردآوری شده است.

سیستم‌های مرتبه کسری^۱ FOs به سیستم‌هایی اطلاق می‌شود که معادلات حاکم بر آن‌ها یک معادله دیفرانسیل کسری^۲ FDE است. این فصل به مطالعه سیستم‌های مذکور اختصاص دارد. به این منظور ابتدا در بخش ۲.۴ سیستم‌های LTI مرتبه کسری زمان-پیوسته معرفی می‌شوند و پایداری آن‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در بخش ۳.۴ به نمایش سیستم‌های زمان-گسسته پرداخته و پایداری مجانبی و عملی آن‌ها را بررسی می‌کنیم و شرایط پایداری سیستم‌های مثبت را در زیر بخش ۳.۳.۴ معرفی کرده و در انتها به پایداری عملی سیستم‌های زمان-گسسته می‌پردازیم.

۱.۴ تاریخچه

ابزار حسابان کسری بعد از تکمیل به دو طریق باعث بهبود کارایی سیستم‌های کنترلی شده است: ارتقا کیفیت مدلسازی و ارتقا کنترل‌گرها. این ابزار با فراهم کردن بستر وسیع‌تری برای مدل‌های دینامیکی به مدلسازی دقیق‌تر فرایندها کمک زیادی کرده است. اولین استفاده‌ها از حسابان کسری در مدلسازی پدیده‌های فیزیکی به دهه ۱۹۳۰ بر می‌گردد، از آن زمان تا به امروز این ابزار به وفور استفاده می‌شود. ایده اصلی طراحی اولین سیستم کنترلی مرتبه کسری به بود^۳ بر می‌گردد که به معرفی تابع تبدیل حلقه-باز ایده آل (تابع تبدیل مرتبه کسری) پرداخت. این ایده توسط تاستین^۴ در سال ۱۹۸۰ به‌طور عملی پیاده

¹Fractional Order Systems

³Bode

²Fractional Differential Equation

⁴Tustin

سازی شد. تا قبل از سال ۱۹۸۰ به دلیل ناکافی بودن دانش ریاضی در زمینه‌ی دینامیک‌های مرتبه‌کسری، مدل‌سازی و طراحی کنترل‌گرهای مرتبه‌کسری رشد چشمگیری نداشت، اما به تدریج در این دهه اوستالوپ^۵ نخستین فردی بود که کنترل‌گر کسری CRONE را معرفی کرد و در ادامه از سال ۲۰۰۰ به بعد شاهد مدل‌سازی‌های پیشرفته‌تر و کنترل‌گرهای کسری از جمله PID با ابزار حسابان کسری هستیم. خواننده علاقمند به مدل‌سازی سیستم‌های مرتبه‌کسری و کاربردهای آن می‌تواند به [۶، ۸، ۹، ۶۲] مراجعه نماید. در زمینه پایداری سیستم‌های کنترلی مرتبه‌کسری نخستین ایده توسط متیگنون^۶ در سال ۱۹۹۶ مطرح شد که در این فصل به آن خواهیم پرداخت. در ادامه اکثر روش‌های پایداری در دو حوزه فرکانسی و زمانی برای سیستم‌های مرتبه‌کسری بکار گرفته شده و تعمیم داده شدند از جمله کارهای انجام شده در حوزه زمانی می‌توان به پایداری زمان-متناهی^۷ (FTS) [۶۳، ۶۴]، پایداری مجانبی بر پایه LMI [۶۵]–[۶۸] و در حوزه فرکانسی به [۶۹] اشاره کرد.

۲.۴ سیستم‌های مرتبه‌کسری زمان-پیوسته

در این بخش ابتدا به پایداری و سپس کنترل‌پذیری سیستم‌های مرتبه‌کسری در زیر بخش‌های ۱.۲.۴ و ۲.۲.۴ می‌پردازیم و در بخش ۳.۲.۴ نیز اشاره‌ای به سیستم‌های مثبت و پایداری آن‌ها داریم.

۱.۲.۴ پایداری سیستم‌های مرتبه‌کسری

معادلات حالت زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_0, \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (1.4)$$

که در آن $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ، $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ و $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ است. در مدل (۱.۴) $u(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار ورودی، $y(t) \in \mathbb{R}^p$ بردار خروجی و $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت سیستم است. در واقع با توجه به مفهوم حالت در سیستم‌های دینامیکی می‌دانیم که در مدل (۱.۴) برای هر $t_0 \geq 0$ ، با داشتن مقدار این متغیرها در لحظه $t = t_0$ و اطلاع از ورودی سیستم برای $t \geq t_0$ می‌توان رفتار سیستم را برای تمام لحظات $t \geq t_0$ تعیین نمود. با جایگذاری عملگر مشتق مرتبه اول با عملگر مشتق مرتبه‌کسری در مدل (۱.۴) به مدلی می‌رسیم که برای نمایش مدل سیستم‌های مرتبه‌کسری می‌توان از آن بهره برد. به این منظور مدل مرتبه‌کسری،

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t), & 0 < \alpha < 1, \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (2.4)$$

را در نظر بگیرید. با توجه به شرایط وجود و یکتایی جواب معادلات دیفرانسیل کسری [۱۰]، در صورت مشخص بودن بردار شرایط اولیه $x(0) = [x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)]^T$ پاسخ مدل (۱.۴) به هر ورودی قابل تعیین خواهد بود. عملگر ${}^C D_t^\alpha(\cdot)$ بر خلاف عملگر کلاسیک $\frac{d}{dt}$ یک عملگر محلی نیست. در نتیجه

⁵Oustaloup
⁶Matignon

⁷FiniteTime Stability

برخلاف مدل (۱.۴) در مدل (۲.۴) با داشتن مقدار $x(t)$ در لحظه $t = t_0 > 0$ و اطلاع از ورودی سیستم برای $t \geq t_0$ نمی‌توان رفتار سیستم را برای تمام لحظات $t \geq t_0$ تعیین نمود و در این حالت برای تعیین رفتار سیستم تمامی اطلاعات $x(t)$ در بازه $[0, t_0]$ مورد نیاز است. بنابراین بردار $x(t) \in \mathbb{R}^n$ در مدل (۱.۴) برخلاف مدل (۲.۴) بردار حالت سیستم نیست. در واقع مدل توصیف شده توسط روابط یک سیستم LTI نامتناهی البعد بوده و نمی‌تواند دارای بردار حالتی با بعد محدود باشد، بنابراین بردار $x(t)$ را بردار شبه حالت^۸ نامیده و مدل مذکور را مدل سیستم در فضای شبه‌حالت می‌گوییم.

سیستم توصیف شده توسط معادلات (۲.۴) را می‌توان توسط تابع تبدیل مرتبه‌کسری نیز توصیف کرد. با فرض صفر بودن شرایط اولیه، این معادلات در حوزه لاپلاس به صورت،

$$\begin{cases} s^\alpha X(s) = AX(s) + BU(s), \\ Y(s) = CX(s) + DU(s). \end{cases} \quad (۳.۴)$$

و تابع تبدیل سیستم به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} G(s) = C(s^\alpha I - A)^{-1}B + D, \\ G(s) = \frac{b_n s^{n\alpha} + b_{n-1} s^{(n-1)\alpha} + \dots + b_1 s^\alpha + b_0}{s^{n\alpha} + a_{n-1} s^{(n-1)\alpha} + \dots + a_1 s^\alpha + a_0}. \end{cases} \quad (۴.۴)$$

پایداری مجانبی

سیستم زیر را در نظر بگیرید،

$${}^C D_t^\alpha x(t) = Ax(t), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (۵.۴)$$

قضیه ۱.۲.۴. فرض کنید $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ مقادیر ویژه ماتریس A در سیستم (۵.۴) باشند به طوری که در این صورت نقطه تعادل $x = 0$ برای این سیستم پایدار مجانبی است، اگر برای هر مقدار ویژه λ_i نامساوی $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{4}$ برقرار باشد. با توجه به قضیه فوق، نواحی پایداری و ناپایداری برای سیستم مرتبه‌کسری در شکل ۱.۴ نشان داده شده است.

پایداری ورودی کران دار-خروجی کران دار

سیستمی با ورودی $u(t)$ و خروجی $y(t)$ را پایدار ورودی کران دار-خروجی کران دار^۹ (BIBO) می‌نامیم اگر به ازای هر ورودی کران دار $u(t)$ ، خروجی $y(t)$ در این سیستم نیز کران دار باشد. توجه کنید مفهوم کران دار بودن ورودی و خروجی وابسته به نرم سیگنالی در نظر گرفته شده برای سیگنال‌هاست. که در اینجا نرم بی‌نهایت را مبنا قرار می‌دهیم.

فضای شبه‌حالت یک سیستم خطی مرتبه‌کسری را به صورت:

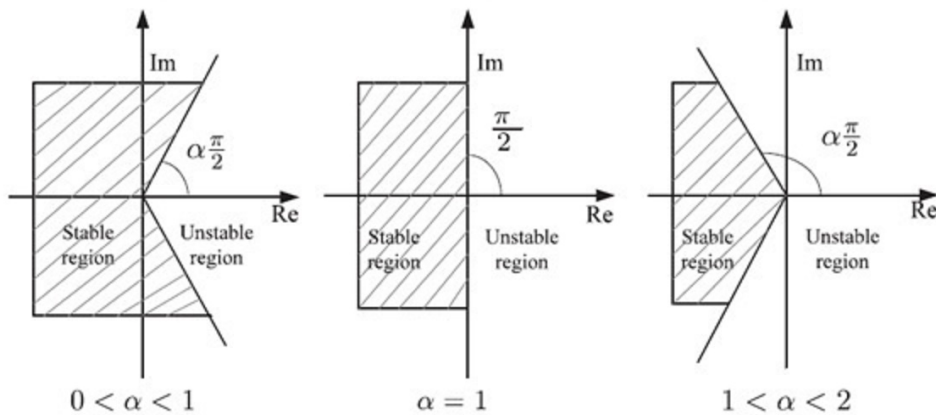
$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad 0 < \alpha < 1, \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (۶.۴)$$

را در نظر بگیرید که در آن $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^n$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ، همچنین $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$. فرض کنید سه‌تایی (A, B, C) کمینه^{۱۰} باشد، بنابراین ریشه‌های معادله فوق همان مقادیر ویژه ماتریس A خواهند بود.

^۸Pseudo-State

^{۱۰}Minimal

^۹Bounded Input-Bounded Output



شکل ۱.۴: نواحی پایداری برای سیستم (۵.۴)

قضیه ۲.۲.۴. [۷۰] سیستم مرتبه‌کسری (۶.۴) با سه‌تایی کمینه (A, B, C) پایدار BIBO است اگر و فقط اگر به ازای هر مقدار ویژه λ_i از ماتریس A داشته باشیم $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{4}$.

یادآوری: مقدار ویژه λ_k از ماتریس A را برای زوج (A, B) کنترل‌پذیر گویند هرگاه

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix} \lambda_k I - A & B \end{bmatrix}\right) = n,$$

همچنین این مقدار ویژه برای زوج (A, C) رویت‌پذیر است هرگاه

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix} \lambda_k I - A \\ C \end{bmatrix}\right) = n.$$

فرض کمینه بودن سه‌تایی (A, B, C) معادل کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری^{۱۱} سیستم (۶.۴) است. بنابراین در حالت کلی‌تر، سیستم (۶.۴) پایدار BIBO است اگر و فقط اگر تمامی مقادیر ویژه همزمان کنترل‌پذیر و رویت‌پذیر A شرط $|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{4}$ را برآورده سازد. با توجه به قضیه ۲.۲.۴ می‌توان قضیه زیر که به قضیه متیگنون معروف است را در مورد پایداری BIBO توابع تبدیل کسری نتیجه گرفت.

قضیه ۳.۲.۴. [۷۱] سیستم توصیف شده با تابع تبدیل

$$G(s) = \frac{N(s^\alpha)}{D(s^\alpha)}, \quad (۷.۴)$$

که در آن $\alpha \in (0, 1)$ است و چندجمله‌ای‌های $N(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{(n-1)} + \dots + b_1 s + b_0$ و $D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{(n-1)} + \dots + a_1 s + a_0$ نسبت به هم اول‌اند را در نظر بگیرید. این سیستم پایدار BIBO است اگر و فقط اگر $|\arg(p_k)| > \frac{\alpha\pi}{4}$ برای $k = 1, \dots, n$ که در آن p_1, p_2, \dots, p_k ریشه‌های چندجمله‌ای $D(s)$ هستند.

^{۱۱}Observability

۲.۲.۴ کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری سیستم‌های مرتبه‌کسری

تعریف ۱.۲.۴. سیستم (۲.۴) را کنترل‌پذیر می‌نامیم اگر به‌ازای هر شبه‌حالت اولیه $x(t_0) = x_0$ در لحظه اولیه t_0 و هر شبه‌حالت نهایی $x(t_f) = x_f$ در لحظه نهایی t_f سیگنال کنترلی $u(t)$ وجود داشته باشد که بتواند در زمان محدود $t \in [t_0, t_f]$ شبه‌حالت سیستم را از x_0 به x_f انتقال دهد.

برای سادگی تحلیل خود را محدود به سیستم‌های تک ورودی خواهیم کرد. به‌این منظور سیستم تک‌ورودی

$${}^C D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (۸.۴)$$

را که در آن $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ است، در نظر بگیرید. جهت بررسی کنترل‌پذیری سیستم بدون کاستن از کلیت مساله فرض می‌کنیم $t_0 = 0$ باشد. توصیف سیستم در حوزه لاپلاس عبارت است از

$$s^\alpha X(s) - s^{\alpha-1} x_0 = AX(s) + BU(s) \implies X(s) = (s^\alpha I - A)^{-1} s^{\alpha-1} x_0 + (s^\alpha I - A)^{-1} BU(s).$$

تساوی فوق را می‌توان به‌صورت زیر باز بینی نمود،

$$X(s) = (s^\alpha I - A)^{-1} s^{\alpha-1} x_0 + (s^\alpha I - A)^{-1} s^{\alpha-1} BU(s) s^{1-\alpha}, \quad (۹.۴)$$

با تعریف $\phi(t) = L^{-1}\{(s^\alpha I - A)^{-1} s^{\alpha-1}\}$ و $\hat{u}(t) = L^{-1}\{U(s) s^{1-\alpha}\}$ از تساوی (۹.۴) نتیجه می‌شود

$$x(t) = \phi(t)x_0 + \int_0^t \phi(t-\tau)B\hat{u}(\tau)d\tau. \quad (۱۰.۴)$$

با فرض $x(t_f) = x_f$ رابطه،

$$x_f - \phi(t_f)x_0 = \int_0^{t_f} \phi(t_f - \tau)B\hat{u}(\tau)d\tau, \quad (۱۱.۴)$$

به‌دست می‌آید. از سوی دیگر، با توجه به تعریف تابع $\phi(t)$ داریم

$$\phi(t) = E_{\alpha,1}(At^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)}. \quad (۱۲.۴)$$

با توجه به قضیه کیلی-همیلتون A^k ظاهر شده در مجموع سمت راست تساوی فوق را می‌توان به‌صورت یک ترکیب خطی از ماتریس‌های همانی و ماتریس‌های A, A^2, \dots, A^{n-1} نوشت. بنابراین تابع $\phi(t)$ را می‌توان به‌صورت $\phi(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t)A^i$ بازنویسی نمود که در آن توابع مشخصی $a_{n-1}(t), \dots, a_1(t), a_0(t)$ هستند. حال با جایگذاری تابع $\phi(t)$ در سمت راست تساوی (۱۲.۴) نتیجه می‌شود

$$x_f - \phi(t_f)x_0 = \int_0^{t_f} \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t_f - \tau)A^i B \hat{u}(\tau)d\tau = \sum_{i=0}^{n-1} A^i B \int_0^{t_f} a_i(t_f - \tau)\hat{u}(\tau)d\tau. \quad (۱۳.۴)$$

تساوی فوق به‌فرم ماتریسی،

$$x_f - \phi(t_f)x_0 = \Phi_c \Psi, \quad (۱۴.۴)$$

قابل بازنویسی است که در آن،

$$\Phi_c = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B], \quad \Psi = \begin{bmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \Psi_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (15.4)$$

و

$$\Psi_i = \int_0^{t_f} a_i(t_f - \tau) \hat{u}(\tau) d\tau, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (16.4)$$

است. معادله (۱۴.۴) دارای جواب یکتایی برای Ψ خواهد بود اگر و فقط اگر $rank(\Phi_c) = n$ باشد. جزئیات مربوط به چگونگی محاسبه $\hat{u}(t)$ را می‌توانید در [۶] ملاحظه کنید. چنانچه نشان داده شد شرط کنترل‌پذیری سیستم مرتبه‌کسری (۸.۴) آن است که ماتریس Φ_c دارای رتبه کامل باشد. این دقیقاً همان شرط کنترل‌پذیری سیستم کلاسیک $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ نیز است. به بیان دیگر، سیستم مرتبه‌کسری (۸.۴) و سیستم متناظر کلاسیک آن علی‌رغم تفاوت‌های بنیادی دارای شرایط کنترل‌پذیری یکسانی هستند.

تعریف ۲.۲.۴. سیستم (۲.۴) را رویت‌پذیر می‌نامیم اگر بتوان شبه حالت $x(t_0)$ را با توجه به اطلاعات مربوط به ورودی $u(t)$ و خروجی $y(t)$ در بازه زمانی $t \in [t_0, t_f]$ تعیین نمود.

مشابه کنترل‌پذیری، می‌توان نشان داد که شرط رویت‌پذیری سیستم‌های LTI مرتبه‌کسری معادل سیستم متناظر کلاسیک آن است و سیستم (۲.۴) رویت‌پذیر است اگر و تنها اگر $rank(\Phi_o) = n$ باشد که در آن،

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (17.4)$$

برای اطلاعات بیشتر در مورد کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری سیستم‌های مرتبه‌کسری به [۷۲] مراجعه نمایید.

مثال ۱.۲.۴. سیستم مرتبه‌کسری،

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -15 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & -15 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases} \quad (18.4)$$

را در نظر بگیرید. برای بررسی کنترل‌پذیری سیستم فوق ماتریس کنترل‌پذیری Φ_c را به دست می‌آوریم که عبارت است از

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -36 \\ 0 & 1 & -1 & -13 \\ 1 & -1 & -13 & 41 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(\Phi_c) = 4,$$

همچنین ماتریس رویت‌پذیری به صورت زیر است:

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -15 & -1 & 5 & 1 \\ 25 & -13 & -20 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank}(\Phi_o) = 4.$$

بنابراین سیستم هم کنترل‌پذیر و هم رویت‌پذیر است. تابع تبدیل متناظر سیستم فوق نیز عبارت است از

$$G(s) = \frac{s^{\circ/7} + 5}{s^{2/8} + 2s^{2/4} + 3 \circ s^{1/4} + 15s^{\circ/7} + 175},$$

همان‌گونه که با توجه به کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری همزمان سیستم (۱۸.۴) انتظار می‌رود، تابع تبدیل متناظر با این سیستم از درجه $2/8 = 4 \times \circ/7 = 2/8$ است. از آنجا که ریشه‌های چندجمله‌ای $s^4 + 2s^3 + 175s + 175$ عبارتند از $\{3 \circ s^2 + 15s + 175, -1/5 \pm 2/8 \circ 258 \pm 2/8 \circ 53j, -1/5 \pm 2/8 \circ 258 \pm 4/6 \circ 25j\}$ ، طبق قضیه ۳.۲.۴ سیستم (۱۸.۴) پایدار BIBO است.

۳.۲.۴ سیستم‌های مرتبه‌کسری مثبت

تعاریف و قضایای این بخش از مرجع [۷۳] گردآوری شده است. سیستم مرتبه‌کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t), & 0 < \alpha \leq 1, \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (19.4)$$

قضیه ۴.۲.۴. جوابی از معادله (۱۹.۴) به صورت زیر داده شده است:

$$x(t) = \Phi_\circ(t)x_\circ + \int_\circ^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau, \quad x(\circ) = x_\circ, \quad (20.4)$$

که در آن $\Phi_\circ(t) = E_\alpha(At^\alpha) = \sum_{k=0}^\infty \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}$ ، $\Phi(t) = \sum_{k=0}^\infty \frac{A^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]}$

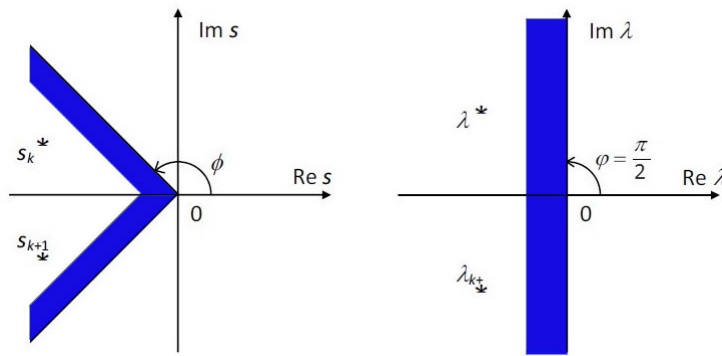
لم ۱.۲.۴. فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $0 < \alpha \leq 1$ در این صورت:

$$\begin{cases} \Phi_\circ(t) = \sum_{k=0}^\infty \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, & \forall t \geq 0 \\ \Phi(t) = \sum_{k=0}^\infty \frac{A^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma[(k+1)\alpha]} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

اگر و تنها اگر $A \in M_n$

قضیه ۵.۲.۴. سیستم کسری زمان-پیوسته (۱۹.۴) مثبت است، اگر و تنها اگر،

$$A \in M_n, \quad B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, \quad C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}, \quad D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}.$$



شکل ۲.۴: تصویرسازی نتیجه ۱.۲.۴

پایداری سیستم‌های مرتبه‌کسری مثبت

تعریف ۳.۲.۴. سیستم مثبت

$${}^C D_t^\alpha x(t) = Ax(t), \quad A \in M_n, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (21.4)$$

پایدار مجانبی نامیده می‌شود اگر و تنها اگر

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_\circ(t)x_\circ(t) = \circ, \quad \forall x_\circ \in \mathbb{R}_+^n.$$

چندجمله‌ای مشخصه (۲۱.۴) به صورت زیر است،

$$\det[I_n s^\alpha - A] = (s^\alpha)^n + a_{n-1}(s^\alpha)^{n-1} + \dots + a_1 s^\alpha + a_0 \quad (22.4)$$

با جایگذاری $\lambda = s^\alpha$ در رابطه بالا داریم:

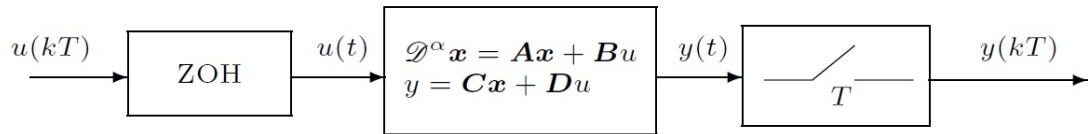
$$\det[I_n \lambda - A] = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0. \quad (23.4)$$

با فرض این که $\arg(s) = \Phi$ و $\arg(\lambda) = \varphi$ از رابطه $\lambda = s^\alpha$ داریم، $\varphi = \alpha\Phi$. حال از روابط فوق به‌ازای $\varphi = \frac{\pi}{4}$ نتیجه‌ی زیر را داریم،

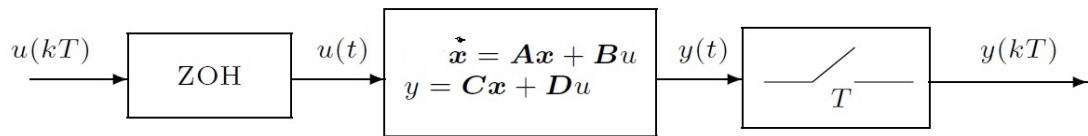
نتیجه ۱.۲.۴. اگر صفرهای چندجمله‌ای مشخصه در (۲۳.۴) در نیمه‌ی سمت چپ صفحه مختلط باشند، آن‌گاه صفرهای چندجمله‌ای مشخصه (۲۲.۴) در زاویه مشخص شده $\Phi = \frac{\pi}{4\alpha}$ در نیمه سمت چپ صفحه مختلط واقع می‌شوند (مطابق شکل ۲.۴).

قضیه ۶.۲.۴. صفرهایی از چندجمله‌ای مشخصه (۲۲.۴) در ناحیه $\Phi = \frac{\pi}{4\alpha}$ واقع است، اگر و تنها اگر در یکی از شرایط زیر صدق کند:

- (۱). همه ضرایب چندجمله‌ای مشخصه (۲۳.۴) مثبت باشند.
- (۲). تمام زیر ماتریس‌های اصلی، ماتریس $-A$ مثبت باشند.
- (۳). یک بردار مثبت $\lambda > 0$ وجود دارد به طوری که $A\lambda < 0$.



شکل ۳.۴: ترکیب سری یک نگهدارنده مرتبه صفر، سیستم کسری زمان-پیوسته و یک نمونه بردار



شکل ۴.۴: ترکیب سری یک نگهدارنده مرتبه صفر، سیستم صحیح زمان-پیوسته و یک نمونه بردار

۳.۴ سیستم‌های مرتبه‌کسری زمان-گسسته

این بخش به مطالعه سیستم‌های مرتبه‌کسری زمان-گسسته اختصاص دارد. در بخش ۱.۳.۴ نمایشی در فضای شبه‌حالت برای توصیف این سیستم‌ها ارائه می‌شود، در ادامه پایداری این سیستم‌ها در بخش ۲.۳.۴ مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش ۳.۳.۴ سیستم‌های مثبت و پایداری آن‌ها را بیان می‌کنیم، در انتها نیز پایداری عملی سیستم‌های زمان-گسسته در بخش ۴.۳.۴ معرفی می‌شود.

۱.۳.۴ نمایش سیستم‌های زمان-گسسته مرتبه‌کسری

ساختار شکل ۳.۴ یک سیستم زمان-گسسته مرتبه‌کسری را نشان می‌دهد که حاصل ترکیب سری یک نگهدارنده مرتبه صفر^{۱۲} یک سیستم مرتبه‌کسری زمان پیوسته و یک نمونه بردار^{۱۳} است. فرض می‌شود که نگهدارنده مرتبه صفر و نمونه بردار با فرکانس یکسان $f = \frac{1}{T}$ که T پریود نمونه برداری^{۱۴} است کار می‌کنند. در این بخش هدف یافتن یک مدل زمان-گسسته تقریبی برای سیستم نشان داده شده در شکل ۴.۴ است. برای رسیدن به این هدف، ابتدا یک روند ساده برای گسسته‌سازی در سیستم مرتبه-صحیح متناظر ۴.۴ را مرور کرده و سپس این روند را به سیستم مرتبه‌کسری شکل ۳.۴ تعمیم می‌دهیم. در سیستم مرتبه-صحیح شکل ۳.۴، اگر از تقریب

$$\dot{x}(kT) \simeq \frac{x((k+1)T) - x(kT)}{T}, \quad (24.4)$$

¹²Zero-Order Hold

¹⁴Sampling Period

¹³Sampler

برای محاسبه مشتق سیگنال $x(t)$ در لحظه $t = kT$ استفاده نماییم، خواهیم داشت،

$$\frac{x((k+1)T) - x(kT)}{T} = Ax(kT) + Bu(kT). \quad (25.4)$$

با توجه به رابطه (25.4)، نمایش فضای حالت زمان-گسسته زیر برای توصیف سیستم مرتبه-صحیح نشان داده شده در شکل 4.4 حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} x((k+1)T) = (AT + I)x(kT) + BTu(kT), \\ y(kT) = Cx(kT) + Du(kT). \end{cases} \quad (26.4)$$

در ادامه به طریق مشابه، نمایش فضای حالت یک سیستم مرتبه‌کسری زمان-گسسته به دست آورده می‌شود. به این منظور از تقریب مشتق مرتبه‌کسری با تعریف گرانوالد-لتنیکوف که به صورت،

$${}^{GL}D^\alpha x(kT) \simeq \frac{1}{T^\alpha} \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \binom{\alpha}{i} x((k+1-i)T). \quad (27.4)$$

بیان می‌شود، بهره می‌بریم. تقریب (27.4) را می‌توان به صورت،

$${}^{GL}D^\alpha x(kT) \simeq \frac{1}{T^\alpha} [x((k+1)T) - \binom{\alpha}{1} x(kT) + \sum_{i=2}^{k+1} (-1)^i \binom{\alpha}{i} x((k+1-i)T)] \quad (28.4)$$

بازنویسی نمود. حال با جایگذاری رابطه (28.4) در رابطه ${}^{GL}D^\alpha x(kT) = Ax(kT) + Bu(kT)$ نتیجه می‌شود،

$$x((k+1)T) = (AT^\alpha + \alpha I)x(kT) - \sum_{i=2}^{k+1} (-1)^i \binom{\alpha}{i} x((k+1-i)T) + BT^\alpha u(kT) \quad (29.4)$$

در ادامه جهت نمایش ساده‌تر مدل‌های زمان-گسسته، $x(k)$ با $x(kT)$ ، $u(k)$ با $u(kT)$ و $y(k)$ با $y(kT)$ نشان داده می‌شود. بنابراین مدل زمان-گسسته برای توصیف سیستم مرتبه‌کسری نشان داده در شکل 4.4 به صورت،

$$\begin{cases} x(k+1) = (AT^\alpha + \alpha I)x(k) - \sum_{i=2}^{k+1} (-1)^i \binom{\alpha}{i} x(k+1-i) + BT^\alpha u(k), \\ y(k) = Cx(k) + Du(k). \end{cases} \quad (30.4)$$

خواهد بود. همانطور که ملاحظه می‌شود در نمایش فوق با افزایش k تعداد جملات سمت راست معادله اول افزایش می‌یابد. به همین دلیل نمایش (30.4) را در مدل فضای شبه حالت سیستم مرتبه‌کسری نشان داده شده در شکل 4.4 می‌نامیم. نمایش دیگر برای بیان مدل سیستم مرتبه‌کسری، استفاده از عملگر تفاضلی پسرورتبه‌کسری است که در واقع تعمیمی برای عملگر پسرورتبه-صحیح است که چنین تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} \Delta^n x(k) = \Delta^{n-1} x(k) - \Delta^{n-1} x(k-1), & n \in \mathbb{N}, \\ \Delta^n x(k) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} x(k-i), & n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases} \quad (31.4)$$

توجه داریم که اگر برای k های منفی فرض کنیم $x(k) = 0$ ، آنگاه تساوی (۳۱.۴) را می‌توان به صورت،

$$\Delta^n x(k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{n}{i} x(k-i), \quad (32.4)$$

نیز نوشت. با توجه به اینکه می‌توان عملگر تفاضلی پسر را برای مرتبه‌های غیرصحیح مانند $\alpha \in (0, 1)$ نیز توسعه داد، با استفاده از عملگر تفاضلی توسعه یافته فوق، مدل (۳۰.۴) را به صورت:

$$\begin{cases} \Delta^\alpha x(k) = AT^\alpha x(k) + BT^\alpha u(k), \\ y(k) = Cx(k) + Du(k). \end{cases} \quad (33.4)$$

نیز می‌توان نمایش داد.

۲.۳.۴ پایداری سیستم‌های مرتبه‌کسری

در این بخش معادلات فضای شبه حالت سیستم مرتبه‌کسری زمان-گسسته (۳۰.۴) که در بخش قبل بدست آمد، به صورت مدل فضای نامتناهی البعد بیان می‌شود. سپس براساس این نمایش جدید شرایط لازم و کافی برای پایداری سیستم استخراج می‌شود.

معادلات (۳۰.۴) را در نظر بگیرید. به سادگی می‌توان این معادلات را به صورت زیر بازنویسی کرد،

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k) \\ x(k-1) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (AT^\alpha + \alpha I) & -I(-1)^2 \binom{\alpha}{2} & -I(-1)^3 \binom{\alpha}{3} & \dots \\ I & O & O & \dots \\ O & I & O & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-1) \\ x(k-2) \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BT^\alpha \\ O \\ O \\ \vdots \end{bmatrix} u(k), \\ y(k) = [C \ O \ O \ \dots] \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-1) \\ x(k-2) \\ \vdots \end{bmatrix} + Du(k). \end{cases} \quad (34.4)$$

که در آن I ماتریس همانی و O نشان دهنده ماتریس صفر با ابعاد مناسب است. با توجه به شرط پایداری سیستم‌های LTI زمان-گسسته و همچنین معادل بودن مدل‌های (۳۰.۴) و (۳۴.۴)، شرط لازم و کافی برای پایداری سیستم‌های زمان-گسسته مرتبه‌کسری در قضیه زیر ارائه می‌شود.

قضیه ۱.۳.۴. [۷۴] سیستم زمان-گسسته

$$x(k+1) = (AT^\alpha + \alpha I)x(k) - \sum_{i=2}^{k+1} (-1)^i \binom{\alpha}{i} x(k+1-i), \quad (35.4)$$

پایدار مجانبی خواهد بود، اگر و فقط اگر تمامی مقادیر ویژه ماتریس

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} (AT^\alpha + \alpha I) & -I(-1)^2 \binom{\alpha}{2} & -I(-1)^3 \binom{\alpha}{3} & \dots \\ I & \circ & \circ & \dots \\ \circ & I & \circ & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (36.4)$$

دارای اندازه کمتر از یک باشند.

با توجه به بی‌نهایت بعدی بودن ماتریس \hat{A} بررسی پایداری سیستم (۳۵.۴) کار ساده‌ای نخواهد بود. قضیه ۲.۳.۴ [۷۴] یک شرط کافی برای پایدار مجانبی بودن سیستم (۳۵.۴) وقتی $\alpha \in (0, 1)$ باشد، آن است که نامساوی،

$$\|AT^\alpha + \alpha I\|_2 < \alpha, \quad (37.4)$$

برقرار باشد.

مثال ۱.۳.۴. سیستم مرتبه‌کسری زمان-گسسته (۳۵.۴) را با

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -9 \end{bmatrix}, \quad \alpha = 0.9, \quad T = 0.05,$$

در نظر بگیرید، با توجه به قضیه ۲.۳.۴ داریم، $\|AT^\alpha + \alpha I\| \simeq 0.8366 < 0.9$ بنابراین سیستم مذکور پایدار مجانبی است.

۳.۳.۴ سیستم‌های مرتبه‌کسری مثبت

تعاریف و قضایای این بخش از مراجع [۷۵] و [۷۳] گردآوری شده است. سیستم خطی زمان-گسسته کسری با معادلات فضای حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \Delta^\alpha x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \\ y_k = Cx_k + Du_k \end{cases} \quad (38.4)$$

می‌توان معادله فوق را به‌صورت زیرنوشت،

$$\begin{cases} x_{k+1} + \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{k-j+1} = Ax_k + Bu_k, \\ y_k = Cx_k + Du_k \end{cases} \quad (39.4)$$

تعریف ۱.۳.۴. سیستم (۳۹.۴) سیستم مرتبه‌کسری مثبت نامیده می‌شود اگر و تنها اگر، به‌ازای هر شرط اولیه $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ و همه دنباله‌های ورودی $u_k \in \mathbb{R}_+^m$ داشته باشیم:

$$x_k \in \mathbb{R}_+^n, \quad y_k \in \mathbb{R}_+^p, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+.$$

قضیه ۳.۳.۴. جوابی از معادله (۳۹.۴) به‌صورت

$$x_k = \Phi_k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi_{k-i-1} B u_i, \quad (40.4)$$

است، که در آن Φ_k توسط معادله زیر تعیین می‌شود،

$$\begin{cases} \Phi_{k+1} = (A + I_n \alpha) \Phi_k + \sum_{i=2}^{k+1} (-1)^{i+1} \binom{\alpha}{i} \Phi_{k-i+1}, \\ \Phi_0 = I_n. \end{cases} \quad (41.4)$$

لم ۱.۳.۴. اگر $0 < \alpha \leq 1$ و $(A + \alpha I_n) \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ ، آن‌گاه برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، $\Phi_k \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$.

قضیه ۴.۳.۴. فرض کنید $0 < \alpha < 1$ ، سپس سیستم مرتبه‌کسری (۳۹.۴) مثبت است اگر و تنها اگر،

$$A + I_n \alpha \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, \quad C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}, \quad D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}. \quad (42.4)$$

۴.۳.۴ پایداری عملی

تعاریف و قضایای این بخش از [۷۳] گردآوری شده است.

از معادله‌ی (۴۰.۴)، ضرایب

$$c_j = c_j(\alpha) = (-1)^j \binom{\alpha}{j+1}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (43.4)$$

با افزایش j به شدت کاهش می‌یابند و به‌ازای $0 < \alpha < 1$ مثبت هستند. در مسائل کاربردی j توسط برخی از اعداد طبیعی h محدود در نظر گرفته می‌شود. در این صورت معادله (۳۹.۴) به صورت،

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_\alpha x_k + \sum_{j=1}^h c_j x_{k-j} + B u_k, & k \in \mathbb{Z}_+, \\ y_k = C x_k + D u_k, & A_\alpha = A + I_n \alpha. \end{cases} \quad (44.4)$$

است.

تعریف ۲.۳.۴. سیستم مرتبه‌کسری مثبت (۳۹.۴) پایدار عملی نامیده می‌شود اگر و تنها اگر سیستم

(۴۴.۴) پایدار مجانبی باشد.

اکنون مشابه بخش ۲.۳.۴ با تعریف

$$\tilde{x}_k = \text{col}\{x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-h}\}, \quad (45.4)$$

می‌توان معادلات (۴۴.۴) را به صورت

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k+1} = \tilde{A} \tilde{x}_k + \tilde{B} u_k, \\ y_k = \tilde{C} \tilde{x}_k + \tilde{D} u_k, \end{cases} \quad (46.4)$$

نوشت که در آن

$$\begin{cases} \tilde{A} = \begin{bmatrix} A_\alpha & c_1 I_n & c_2 I_n & \cdots & c_{h-1} I_n & c_h I_n \\ I_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{\tilde{n} \times \tilde{n}}, & \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{\tilde{n} \times m} \\ \tilde{C} = [C \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \in \mathbb{R}_+^{p \times \tilde{n}}, & \tilde{D} = D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}, \quad \tilde{n} = (1+h)n. \end{cases} \quad (47.4)$$

قضیه ۵.۳.۴. سیستم مثبت مرتبه‌کسری (۳۹.۴) پایدار عملی است اگر و تنها اگر در یکی از شرایط زیر

صدق کند:

(۱) مقادیر ویژه z_k ($k = 1, \dots, \tilde{n}$) از ماتریس \tilde{A} از اندازه‌ای کمتر از ۱ باشند.

(۲) $\det[I_{\tilde{n}}z - \tilde{A}] \neq 0$ برای $|z| \geq 1$.

(۳) $\rho(\tilde{A}) < 1$ که در آن $\rho(\tilde{A}) = \max_{1 \leq k \leq \tilde{n}} \{|\tilde{z}_k|\}$ شعاع طیفی ماتریس \tilde{A} است.

(۴) همه ضرایب \tilde{a}_i ($i = 0, 1, \dots, \tilde{n} - 1$) چندجمله‌ای مشخصه،

$$p_{\tilde{A}}(z) = \det[I_{\tilde{n}}(z+1) - \tilde{A}] = z^{\tilde{n}} + \tilde{a}_{\tilde{n}-1}z^{\tilde{n}-1} + \dots + \tilde{a}_1z + a_0, \quad (48.4)$$

از ماتریس $[\tilde{A} - I_{\tilde{n}}]$ مثبت باشند.

(۵) همه زیر ماتریس‌های اصلی ماتریس $\tilde{A} - I_{\tilde{n}}$ مثبت باشند.

(۶) یک بردار مثبت $\tilde{x}_i \in \mathbb{R}_+^{\tilde{n}}$ ($i = 0, 1, \dots, h$) وجود داشته باشد که در رابطه

$$\tilde{x}_0 < \tilde{x}_1, \quad \tilde{x}_1 < \tilde{x}_2, \quad \dots, \quad \tilde{x}_{h-1} < \tilde{x}_h$$

صدق کند، به طوری که

$$A_\alpha \tilde{x}_0 + c_1 \tilde{x}_1 + \dots + c_h \tilde{x}_h < \tilde{x}_0.$$

مثال ۲.۳.۴. پایداری عملی سیستم مرتبه‌کسری مثبت زیر را بررسی کنید.

$$\Delta^\alpha x_{k+1} = \circ/1 x_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, \quad \alpha = \circ/5, \quad h = 2 \quad (49.4)$$

داریم،

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_\alpha & c_1 & c_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{10} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

در این صورت چندجمله‌ای مشخصه (۴۸.۴) به صورت

$$p_{\tilde{A}}(z) = \det[I_{\tilde{n}}(z+1) - \tilde{A}] = \begin{vmatrix} z + \frac{4}{10} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \\ -1 & z+1 & 0 \\ 0 & -1 & z+1 \end{vmatrix}$$

$$= z^3 + 2/4 z^2 + 1/675 z + \circ/2125.$$

است که همه ضرایب چندجمله‌ای، مثبت هستند پس طبق قضیه (۴.۳.۴) سیستم پایدار عملی است.

قضیه ۶.۳.۴. سیستم مرتبه‌کسری مثبت (۳۹.۴) پایدار عملی است اگر و تنها اگر سیستم مثبت

$$x_{k+1} = A_\alpha x_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+ \quad (50.4)$$

پایدار مجانبی باشد.

نتیجه ۱.۳.۴. سیستم مرتبه‌کسری مثبت (۳۹.۴) برای هر h متناهی ناپایدار عملی است، اگر سیستم مثبت (۵۰.۴) ناپایدار مجانبی باشد.

قضیه ۷.۳.۴. سیستم مرتبه‌کسری مثبت (۳۹.۴) ناپایدار عملی است اگر و تنها اگر حداقل یک درایه قطری از ماتریس A_α بزرگ‌تر از ۱ باشد.

پایداری مجانبی از سیستم‌های مرتبه‌کسری مثبت

در این بخش پایدار عملی از سیستم‌های مثبت برای $h \rightarrow \infty$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۳.۳.۴. سیستم مرتبه‌کسری مثبت (۳۹.۴) پایدار مجانبی است، اگر سیستم به‌ازای $h \rightarrow \infty$ پایدار عملی باشد.

لم ۲.۳.۴. اگر $0 < \alpha < 1$ آنگاه $\sum_{j=1}^{\infty} c_j = 1 - \alpha$ که c_j ها ضرایب تعریف شده در رابطه (۴۳.۴) هستند.

قضیه ۸.۳.۴. سیستم مثبت (۳۹.۴) پایدار عملی است اگر و تنها اگر یک بردار مثبت $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که

$$[A_\alpha + \sum_{j=1}^h c_j I_n - I_n] \lambda < 0, \quad \lambda > 0. \quad (51.4)$$

فصل ۵

سیستم‌های تاخیری با مرتبه کسری

سیستم‌های تاخیری با مرتبه کسری^۱ (FOTDs) به سیستم‌هایی اطلاق می‌شود که معادلات حاکم بر آن‌ها یک معادله دیفرانسیل کسری با تاخیر زمانی است. در این فصل ابتدا در بخش ۱.۵ رده‌ای از سیستم‌های LTI مرتبه کسری زمان-گسسته را در نظر گرفته و پایداری آن‌ها مورد مطالعه قرار می‌دهیم و با روش PEVA به پایداری آن‌ها با کمینه‌سازی نرم ماتریس پسخورد می‌پردازیم. در ادامه در بخش ۲.۵ مساله طراحی سیستم‌های زمان-پیوسته در یک ناحیه مشخص از صفحه مختلط را مطرح می‌کنیم و مروری بر کارهای انجام شده داریم و با کمک تبدیلات تشابهی روشی برای پایداری آن‌ها پیشنهاد می‌دهیم و در پایان چندین مثال عددی برای نشان دادن کارایی روش‌های بیان شده ارائه می‌دهیم.

۱.۵ تاریخچه

سیستم LTI مرتبه کسری زمان-گسسته با q تأخیر در بردار ورودی و با p تأخیر در بردار حالت را به صورت،

$$\Delta^\alpha x_{k+1} = \sum_{i=0}^p A_i x_{k-i} + \sum_{j=0}^q B_j u_{k-j}, \quad (1.5)$$

و زمان-پیوسته

$$D^\alpha x(t) = \sum_{k=0}^p A_k x(t - d_k) + \sum_{l=0}^q B_l u(t - d_l). \quad (2.5)$$

¹Fractional Order Time Delay Systems

در نظر بگیرید. ونگ^۲ در سال ۲۰۰۶ الگوریتم عددی برای بررسی پایداری سیستم‌های کسری تأخیری ارائه کرد [۷۶]. کاکزورک در سال ۲۰۰۹ با اضافه کردن شرط مثبت بودن به سیستم (۱.۵) و با معرفی شرایط جدید به بررسی پایداری مجانبی و عملی پرداخت [۷۷]. در سال ۲۰۱۱ لازارویک^۳ برخی نتایج اساسی از معیار پایداری زمان-متناهی^۴ را با بکاربردن تعمیم لم بلمن-گرانوال^۵ را بیان کرد [۷۸]. در ادامه در سال ۲۰۱۴ لی^۶ به بررسی شرایط لازم و کافی پایداری رده‌ای از سیستم (۱.۵) با پارامترهای نامعین پرداخت [۷۹]. راد و همکارش روش جدیدی را با طراحی تنظیم‌کننده^۷ بهینه در سیستم (۱.۵) پیشنهاد کردند [۸۰]. پاکزاد و همکاران در سال ۲۰۱۵ روشی دقیق برای محاسبه ناحیه پایداری و مکان ریشه‌های ناپایدار سیستم (۱.۵) ارائه کردند [۸۱]. اخیراً امور^۸ و همکاران پایداری رده‌ای از سیستم (۱.۵) را با کمک SMC مورد مطالعه قرار دادند [۸۲]. خواننده علاقمند به مطالعه روش‌های ارائه شده اخیر می‌تواند به مراجع [۸۳]–[۸۹] مراجعه نماید.

۲.۵ سیستم‌های تأخیری مرتبه کسری زمان-گسسته

نتایج این بخش در مرجع [۹۰] به چاپ رسیده است.

سیستم (۱.۵) را در نظر بگیرید، ابتدا فرض می‌کنیم $\alpha = 1$. هدف، یافتن ماتریس پس‌خورده حالت K است به طوری که ماتریس حلقه-بسته سیستم (۱.۵) دارای مقادیر از پیش تعیین شده باشد. به این منظور ابتدا با استفاده از بردار حالت افزوده، سیستم با تأخیر زمانی روی بردار حالت و ورودی را به سیستم استاندارد تبدیل می‌کنیم. در نهایت با توجه به سیستم به دست آمده و روش EVA ماتریس پس‌خورده حالت محاسبه می‌شود.

اکنون بردار حالت افزوده را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$X_{k+1} = \text{col}\{x_{k+1}, x_k, \dots, x_{k-(p-1)}, u_k, \dots, u_{k-(q-1)}\}. \quad (3.5)$$

با جایگذاری (۳.۵) در سیستم (۱.۵) سیستم استاندارد زیر به دست می‌آید

$$X_{k+1} = \bar{A}X_k + \bar{B}u_k, \quad (4.5)$$

اکنون با قرار دادن مقادیر \bar{A} ، \bar{B} می‌توان ماتریس پس‌خورده حالت K را به گونه ای محاسبه کرد که ماتریس حلقه-بسته $(\bar{A} + \bar{B}K)$ دارای مقادیر ویژه‌ی مطلوب در فضای پایداری باشد. همچنین با فرض اینکه $0 < \alpha < 1$ و با کمک روابط بیان شده در بخش ۴.۳.۴ معادله (۱.۵) را می‌توان با تعریف بردار افزوده جدید به سیستم خطی با $\bar{p} + 1$ تأخیر در بردار حالت و q تأخیر در بردار ورودی در نظر گرفت و طبق روابط بالا قابل تبدیل به فرم استاندارد (۴.۵) است. با فرض این که $\text{rank}(\bar{B}) = m$ است، قانون کنترل پس‌خورده حالت $u_k = KX_k$ که $K \in \mathbb{R}^{m \times \bar{n}}$ ماتریس پس‌خورده حالت را در نظر می‌گیریم. با جایگذاری رابطه فوق داریم

$$X_{k+1} = (\bar{A} + \bar{B}K)X_k = \Gamma X_k,$$

که Γ سیستم حلقه-بسته است. با کمک روابط تعریف شده در بخش ۳.۱.۲ ماتریس پس‌خورده حالتی را محاسبه می‌کنیم به طوری که طیف سیستم حلقه-بسته که در دایره واحد قرار گیرد.

²Hwang

³Lazarevic

⁴Finite-Time

⁵Gronwall-Belmann

⁶Li

⁷Regulator

⁸Ammour

مثال ۱.۲.۵. سیستم تأخیری با مرتبه‌کسری زیر را

$$\Delta^{\circ/5} x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x_{k-1} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} u_{k-1} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_{k-2}, \quad (5.5)$$

با $h = 3$ را در نظر بگیرید، داریم $\bar{n} = n\bar{p} + m\bar{q} = 12$ ، ابتدا ماتریس \bar{A} و \bar{B} را تشکیل می‌دهیم،

$$A = \begin{bmatrix} 1/5 & -1 & 2/125 & -1 & 0/0625 & 0 & 0/0391 & 0 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1/5 & -1 & 2/125 & 0 & 0/0625 & 0 & 0/0391 & 4 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

مقادیر ویژه ماتریس حلقه- باز (\bar{A}) برابر،

$$\{2/5431, -2/6162, 0/9983, -0/8724, -0/0178 \pm 0/1580i, -0/0087 \pm 0/018i, 0, 0, 0, 0\}$$

حال با روش EVA ماتریس پس‌خورد حالتی که مقادیر ویژه صفر را به سیستم حلقه- بسته اختصاص می‌دهد به صورت زیر بدست می‌آید،

$$F = \begin{bmatrix} -0/8172 & -0/2575 & -1/3471 & 1/6304 & -0/0320 & 0/0207 & -0/0176 & 0/0148 & 1/6150 & 1/3630 & 0/4502 & 0/5447 \\ 0/6856 & -0/4385 & 0/4939 & -0/5171 & 0/0173 & -0/0099 & 0/0070 & -0/0042 & -0/5821 & -0/6167 & -0/1787 & 0/0052 \end{bmatrix},$$

و ماتریس پس‌خورد حالتی که مقادیر ویژه ماتریس حلقه- بسته را در طیف مطلوب

$$\Lambda = \{0, \pm 0/1, \pm 0/2, \pm 0/3, \pm 0/4, \pm 0/5, -0/6\}$$

قرار می‌دهد،

$$K = \begin{bmatrix} -1/0530 & -0/0154 & -1/3826 & 1/5263 & -0/0324 & 0/0131 & -0/0189 & 0/0131 & 1/4928 & 1/1209 & 0/4830 & 0/2316 \\ 0/6225 & -0/4103 & 0/5098 & -0/4917 & 0/0180 & -0/0094 & 0/0074 & -0/0034 & -0/5007 & -0/6449 & -0/1920 & 0/1282 \end{bmatrix}.$$

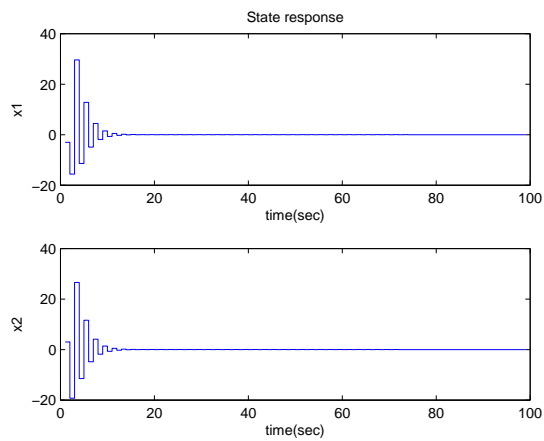
همان‌طور که در شکل‌های ۱.۵ و ۲.۵ مشاهده می‌شود، بردارهای حالت و ورودی، با شروع از بردار اولیه $x(0) = [-3, 3]^T$ به سمت بردار تعادل خود حرکت می‌کنند. همچنین می‌توان نرم ماتریس پس‌خورد ($\|K\|_F = 3/3083$) را با پارامتری‌سازی خطی کمینه کرد. به این منظور طبق الگوریتم ۱.۳.۲ با فرض عناصر غیر صفر $[g_{12}, g_{14}, g_{16}, g_{18}, g_{10}, g_{12}]$ داریم،

$$G_{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & -1/8006 & 0 & -3/1885 & 0 & -3/5617 & 0 & -1/3316 & 0 & -0/8717 & 0 & -0/1631 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

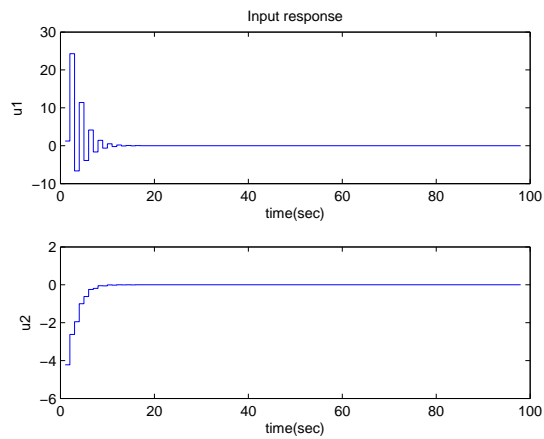
9

$$K = \begin{bmatrix} -0/2813 & -0/6146 & -0/1826 & -0/0685 & -0/0612 & -0/0179 & 0/0423 & -0/0940 & 0/1219 & -0/0804 & 0/0203 & -0/0380 \\ 0/6225 & -0/4103 & 0/5098 & -0/4917 & 0/0180 & -0/0094 & 0/0074 & -0/0034 & -0/5007 & -0/6449 & -0/1920 & 0/1282 \end{bmatrix}$$

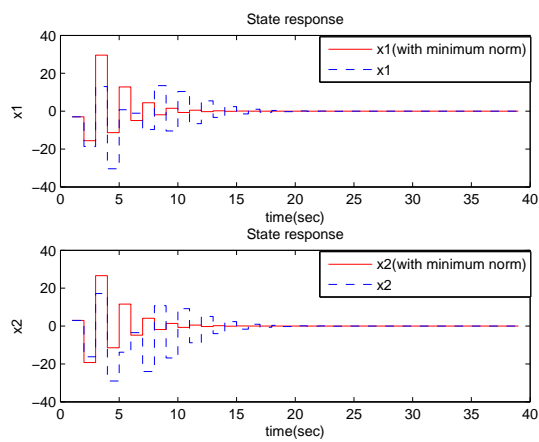
با نرم $1/5279$. از شکل ۳.۵ می‌توان اثر کاهش نرم را در رفتار همگرایی سیستم با بردار اولیه $x_0 = [-3, 3, 5, -3, 2, 4, -2, -4, 2, 4, 6, -3]^T$ مشاهده کرد.



شکل ۱.۵: رفتار همگرایی بردارهای حالت در مثال ۱.۲.۵



شکل ۲.۵: رفتار همگرایی بردارهای ورودی در مثال ۱.۲.۵



شکل ۳.۵: مقایسه رفتار همگرایی بردار حالت در مثال ۱.۲.۵

مثال ۲.۲.۵. سیستم زیر را با $h = 2$ در نظر بگیرید

$$\Delta^{\circ/25} x_{k+1} = A_0 x_k + A_1 x_{k-1} + B_0 u_k \quad (6.5)$$

با

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

سیستم استاندارد شده ناپایدار است زیرا

$$\Omega(A) = \{3/4216, 2/3728, -1/6621 + 0/8818i, -1/6621 - 0/8818i, 1/2558, -0/9273, -0/0311, -0/0093 + 0/0084i, -0/0093 - 0/0084i\}$$

هدف پایدارسازی با پس‌خورد حالتی با کمینه نرم که مقادیر مطلوب

$$\Lambda = \{-0/9, 0/5, -0/7, -0/5, 0/3, -0/3, 0/1, 0, -0/1\}$$

را به سیستم اختصاص دهد. با کمک روش EVA داریم

$$K = \begin{bmatrix} 5/2774 & -0/65 & -2/6387 & 6/1894 & -5/5328 & 0/4348 & 0/2248 & -0/1293 & -0/1109 \\ -3/4663 & 1/5 & -0/1169 & -3/0727 & 0/675 & -0/5105 & -0/1108 & 0 & 0/0281 \end{bmatrix},$$

با نرم $11/3528$. اکنون با کمک پارامتری‌سازی خطی و روش بیان شده در بخش ۱.۳.۲ داریم

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0_{2,9} \\ I_7, \quad O_{7,2} \end{bmatrix},$$

و فرض می‌کنیم

$$G_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & g_{12} & 0 & g_{14} & 0 & g_{16} & 0 & g_{18} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

در نتیجه

$$P = 1, \quad Q = \begin{bmatrix} 9/3119 & 1/3125 & 2/6172 & 0/0684 \\ 1/3125 & 1/25 & 0 & 0 \\ 2/6172 & 0 & 1/25 & 0 \\ 0/0684 & 0 & 0 & 1/25 \end{bmatrix},$$

و

$$H = \begin{bmatrix} -3/3880 & -1/72 & 2/3162 & -0/0389 \end{bmatrix},$$

و ماتریس پس‌خورد جدید،

$$K = \begin{bmatrix} -0/6776 & -0/65 & -1/3552 & 1/4118 & -0/4517 & 2/8226 & 0/0006 & -0/1293 & 0/0012 \\ -3/4663 & 1/5 & -0/1169 & -3/0727 & 0/675 & -0/5105 & -0/1108 & 0 & 0/0281 \end{bmatrix},$$

با نرم $6/119$.

۳.۵ پایداری عملی سیستم زمان-گسسته با کنترل گر پارامتریک

این بخش مساله طراحی کنترل گر سیستم‌های تاخیری مرتبه کسری زمان-گسسته با حداقل نرم را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ایده اصلی، تبدیل سیستم‌های مرتبه کسری با تاخیر زمانی به سیستم مرتبه-صحیح بدون تاخیر معادل است. در ابتدا با کمک روش PEVA ماتریس پس‌خورد حالت را محاسبه می‌کنیم. در ادامه برای رسیدن به کنترل‌گری که سیستم پایدار بماند و پارامترهای آن با حداقل نرم تعیین شوند محدودیت‌های مختلفی را در نظر گرفته و روشی را پیشنهاد می‌کنیم، در نهایت کارایی روش ارائه شده را با دو مثال عددی نشان می‌دهیم. نتایج این بخش در مرجع [۹۱] به چاپ رسیده است.

سیستم (۱.۵) را در نظر بگیرید، با کمک تعریف تفاضلات پس‌رو مشتق گراناوالد-لتنیکوف داریم:

$$\Delta_{k+1}^{\alpha} = \sum_{i=0}^p A_i x_{k-i} + \sum_{j=0}^q B_j u_{k-j}, \quad (7.5)$$

بنابراین

$$x_{k+1} \cong A_{\alpha} x_k + \sum_{j=1}^N (-1)^j \binom{\alpha}{j+1} x_{k-j} + \sum_{i=0}^p A_i x_{k-i} + \sum_{j=0}^q B_j u_{k-j}, \quad (8.5)$$

وقتی $A_{\alpha} = \alpha I_n + A$. تعریف می‌کنیم $C_j = (-1)^j \binom{\alpha}{j+1}$ برای $j \in \mathbb{N}$ که $\sum_{j=1}^{\infty} C_j = 1 - \alpha$ و $C_j \approx 0$ برای برخی $j > \bar{L}$ وقتی \bar{L} کران بالایی برای j که $N > \bar{L}$ در مسائل عملی فرض می‌شود که j کران دار با عدد N . با فرض $C_j = 0$ برای $j > L$ سیستم (۱.۵) به سیستم تاخیری

$$x_{k+1} = A_{\alpha} x_k + \sum_{j=1}^L \hat{A}_j x_{k-j} + \sum_{i=0}^p A_i x_{k-i} + \sum_{j=0}^q B_j u_{k-j}, \quad (9.5)$$

تبدیل می‌شود، که در آن $\hat{A}_j = C_j I$.

ملاحظه ۱.۳.۵. [۹۲] مدل توصیف شده با (۹.۵) را می‌توان با سیستم مرتبه-صحیح با تاخیرهای چندگانه $h_1 = 1, h_2 = 2, \dots, h_L = L$ در نظر گرفت. بنابراین سیستم (۹.۵) تشخیص عملی^۹ از سیستم مرتبه کسری (۱.۵) است.

با تعریف $\tilde{p} = \max(L, p)$, $\tilde{n} = mq + n(\tilde{p} + 1)$ به سیستم استاندارد زیر تبدیل می‌شود،

$$X_{k+1} = AX_k + Bu_k. \quad (10.5)$$

⁹Realization Practical

برای مثال، وقتی $\tilde{p} = L = p$ داریم:

$$X_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k-1} \\ \vdots \\ x_{k-\tilde{p}+1} \\ u_k \\ u_{k-1} \\ \vdots \\ u_{k-q+1} \end{bmatrix}_{\tilde{n} \times 1}, B = \begin{bmatrix} B_0 \\ \circ \\ \vdots \\ \circ \\ I_m \\ \circ \\ \vdots \\ \circ \end{bmatrix}_{\tilde{n} \times m}, \quad (11.5)$$

9

$$A = \begin{bmatrix} A_0 + A_\alpha & A_1 + \hat{A}_1 & \cdots & A_{\tilde{p}-1} + \hat{A}_{\tilde{p}-1} & A_{\tilde{p}} & B_1 & B_2 & \cdots & B_{q-1} & B_q \\ I_n & \circ & \cdots & \circ & \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ & \circ \\ \circ & I_n & \cdots & \circ & \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & \cdots & I_n & \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \cdots & \circ & \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \cdots & \circ & \circ & I_m & \circ & \cdots & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \cdots & \circ & \circ & \circ & I_m & \cdots & \circ & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & \cdots & \circ & \circ & \circ & \circ & \cdots & I_m & \circ \end{bmatrix}_{\tilde{n} \times \tilde{n}}$$

۱.۳.۵ پایداری عملی و مجانبی

سیستم (۱.۵) را که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ و $u \in \mathbb{R}^m$ بردارهای ورودی و حالت و $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B_j \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ماتریس‌های ثابت حقیقی هستند با فرض $rank(B_j) = m$ در نظر بگیرید.

تعریف ۱.۳.۵. سیستم (۱.۵) پایدار عملی است هرگاه سیستم (۹.۵) و یا به‌طور معادل سیستم (۱۰.۵) پایدار مجانبی باشد.

با تعریف بردار افزوده X_k ، سیستم (۱.۵) به سیستم استاندارد (۱۰.۵) تبدیل می‌شود و با تعریف قانون کنترل $U_k = FX_k$ وقتی F ماتریس بهره سیستم باشد، سیستم حلقه-بسته $X_{k+1} = \Gamma X_k$ را داریم.

تعریف ۲.۳.۵. سیستم (۱.۵) پایدار مجانبی است اگر سیستم (۹.۵) پایدار عملی باشد برای $L \rightarrow \infty$.

در مرجع [۹۳] برای نخستین بار مفهوم پایداری عملی معرفی گردید و شرایط لازم و کافی برای سیستم‌های مرتبه کسری مثبت در نظر گرفته شد و در شبیه‌سازی‌های عددی طول حافظه معمولاً $L = 2$ فرض می‌شد و کرانی برای آن در نظر گرفته نمی‌شد. در [۹۴] شرایط جدید برای پایداری عملی و مجانبی سیستم‌های مرتبه کسری زمان-گسسته در نظر گرفته شده است، قضیه زیر را ببینید.

قضیه ۱.۳.۵. سیستم (۱.۵) با طول مشخص از تشخیص عملی، به‌طور عملی پایدار است اگر و تنها اگر $W(z) \neq 0, |z| \geq 1$ که در آن

$$W(z) = \det\{Iz - A_\alpha - \sum_{j=1}^L C_j z^{-j}\}.$$

با کمک تعریف ۱.۳.۵ و قضیه ۱.۳.۵ برای $L \rightarrow \infty$ ، سیستم (۱.۵) پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر همه ریشه‌های معادله $W(z) = 0$ پایدار باشند. در [۹۵] روش عددی برای بررسی پایداری عملی براساس شرایط جدید و با تبدیل به یک مساله برنامه‌ریزی خطی ارائه شده است. در ادامه با کمک روش PEVA برای سیستم استاندارد شده (۱۰.۵) ماتریس پسخورد را به‌دست می‌آوریم. بدون اینکه از کلیت مسأله کاسته شود فرض می‌کنیم زوج ماتریس (B, A) کنترل پذیر و $rank(B) = m$ برای $m \leq \tilde{n}$.

طیف مقادیر ویژه ماتریس A را در نظر بگیرید

$$\Omega(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p; \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{\tilde{n}}\}.$$

فرض می‌کنیم $S = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ ، هدف یافتن ماتریس پسخورد حالتی است که

$$\Omega(\Gamma) = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p; \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{\tilde{n}}\}.$$

در ابتدا بردارهای ویژه چپ ماتریس A را به‌صورت $Y = (y_1, y_2, \dots, y_{\tilde{n}})$ در نظر بگیرید، اکنون ماتریس‌های $Y_1^H B$ و $\Lambda_1 = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ را در نظر گرفته، با کمک تبدیلات تشابهی فرم اشلون و همدم زوج مرتب $(Y_1^H B, \Lambda_1)$ را به‌دست می‌آوریم، داریم:

$$\widetilde{Y_1^H B} = \begin{bmatrix} (Y_1^H B)_{\circ_{m \times m}} \\ \circ \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\Lambda}_1 = \begin{bmatrix} G_{\circ_{(m \times p)}} \\ \dots \\ I_{p-m} \quad \circ_{(p-m) \times m} \end{bmatrix}.$$

اکنون ماتریس قطری $D = \text{diag}\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$ را در نظر گرفته و $A_\mu = \widetilde{\Gamma}_\circ + D$ را تعریف می‌کنیم. سپس با عملیات تشابهی که روی ماتریس A_μ انجام می‌دهیم به فرم همدم زیر می‌رسیم.

$$\widetilde{A}_\mu = \begin{bmatrix} G_{\mu_{(m \times p)}} \\ \dots \\ I_{p-m} \quad \circ_{(p-m) \times m} \end{bmatrix}.$$

بنابراین ماتریس پسخورد حالت به‌صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\widetilde{K} = ((Y_1^H B)_\circ)^{-1}(-G_\circ + G_\mu) = \widetilde{F}_p + \widetilde{K}_\mu \implies K = \widetilde{K}T^{-1}, F = K \times Y_1^H.$$

از آن جایی که ماتریس پسخورد یکتانگیز است و عموماً وابسته به پارامترهای آزاد است، بنابراین انتظار می‌رود برای سیستم‌های کنترلی بتوان ماتریس‌های مختلفی به‌دست آورد. کمینه‌سازی نرم و پارامتر سازی کنترل‌گرها باعث بهبود عملکرد سیستم و رفتار همگرایی بردارهای ورودی و حالت می‌شود و نیاز است نرم ماتریس پسخورد حداقل مقدار ممکن باشد. بنابراین ما فرض می‌کنیم،

$$K = B_\circ^{-1}(-G_\circ + G_\lambda)T^{-1} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1\tilde{n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{m1} & k_{m2} & \dots & k_{m\tilde{n}} \end{bmatrix},$$

با کمک معادلات (۳۴.۲)، مساله بهینه‌سازی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\bar{n}} k_{ij}^* \quad (12.5)$$

$$\text{subject to} \quad \begin{cases} f_1(g_{11}, g_{12}, \dots, g_{1\bar{n}}, g_{21}, \dots, g_{2\bar{n}}, \dots, g_{m1}, g_{m2}, \dots, g_{m\bar{n}}) = c_1 \\ f_2(g_{11}, g_{12}, \dots, g_{1\bar{n}}, g_{21}, \dots, g_{2\bar{n}}, \dots, g_{m1}, g_{m2}, \dots, g_{m\bar{n}}) = c_2 \\ \vdots \\ f_{\bar{n}}(g_{11}, g_{12}, \dots, g_{1\bar{n}}, g_{21}, \dots, g_{2\bar{n}}, \dots, g_{m1}, g_{m2}, \dots, g_{m\bar{n}}) = c_{\bar{n}}. \end{cases}$$

۲.۳.۵ الگوریتم

فرضیات: زوج کنترل‌پذیر (B, A) و $\text{rank}(B_j) = m$.

ورودی: ماتریس‌های A_i, B_j و α, h, L .

خروجی: ماتریس پس‌خورد حالت F با کمترین نرم به‌طوری که سیستم حلقه-بسته دارای مقادیر ویژه مطلوب باشد.

گام اول: تبدیل سیستم مرتبه‌کسری تاخیری (۱.۵) به سیستم استاندارد (۱۰.۵) و محاسبه ماتریس‌های A و B با کمک روابط (۳.۵) و (۱۱.۵).

گام دوم: محاسبه زوج مرتب $(Y_1^H B, \Lambda_1)$ و تخصیص مقادیر ویژه مطلوب $S = \{\mu_1, \dots, \mu_p\}$ به مقادیر نامطلوب $\Omega(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ با کمک روش PEVA.

گام سوم: محاسبه ماتریس‌های پس‌خورد K و $F = K \times Y_1^H$.

۳.۳.۵ مثال‌های عددی

در این بخش، دو مثال عددی برای نشان دادن کارایی و مقایسه روش پیشنهادی با نتایج قبلی ارائه می‌دهیم.

مثال ۱.۳.۵. سیستم زیر را در نظر بگیرید،

$$\Delta^{0.25} x_{k+1} = A_0 x_k + A_1 x_{k-1} + B_0 u_k, \quad (13.5)$$

که در آن

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

با $L = 2$. بر طبق روابط بیان شده قبلی داریم:

$$\bar{n} = 9, C_0 = 0.25, C_1 = 0.937, C_2 = 0.547, \dots, C_8 = 0.13, \dots, C_9 = 0.04$$

$$A = \begin{bmatrix} 1/25 & 0 & 1 & 2/0938 & 0 & 1 & 0/0547 & 0 & 0 \\ 0 & -0/75 & 1 & -1 & 2/0938 & -3 & 0 & 0/0547 & 0 \\ 0 & 0 & 2/25 & 0 & 3 & 4/0938 & 0 & 0 & 0/0547 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

این سیستم ناپایدار است،

$$\Omega(A) = \{3/738, 2/176, -1/943, -1/278\} \cup \{-0/0507 \pm 0/4534i, 0/1903, -0/0229, -0/0089\}.$$

بر طبق قضیه ۳.۱.۲ با انتخاب‌های مختلف برای L داریم:

$$\begin{cases} L = 2 \Rightarrow \tilde{n} = 9 \Rightarrow p = 4, L_1 = \{3/738, 2/176, -1/943, -1/278\} \\ L = 8 \Rightarrow \tilde{n} = 24 \Rightarrow p = 4, L_1 = \{3/739, 2/179, -1/945, -1/282\} \end{cases}$$

مشاهده می‌کنیم که برای L های بزرگتر، تعداد مقادیر ویژه نامطلوب ماتریس حلقه- باز همچنان ۴ تا است تنها با یک اختلاف ناچیز. از طرف دیگر، $C_j \approx 0$ برای $j > \bar{L}$ و ما می‌توانیم کران بالایی مانند $L = 20$ را در نظر بگیریم. بنابراین، با به کار بردن محدودیت بروی L به راحتی می‌توان پایداری مجانبی و عملی سیستم (۱۳.۵) را بررسی کرد.

اکنون برای پایداری، طیف دلخواه $S = \{-0/1, 0/1, 0/5, -0/5\}$ را در نظر می‌گیریم به طوری که مقادیر ویژه ماتریس $A + BF$ برابر $S \cup L_r$ باشد. داریم،

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 3/7384 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/1758 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/9435 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2778 \end{bmatrix}, \quad Y_1^H B = \begin{bmatrix} -0/1098 & -1/0589 \\ 0/0629 & 0/7794 \\ -0/4213 & 0/0304 \\ -0/3818 & 0/6742 \end{bmatrix},$$

ماتریس پس‌خورد K که همه مقادیر ویژه ماتریس $\Lambda_1 + Y_1^H B K$ را به S اختصاص می‌دهد به صورت زیر به دست می‌آید،

$$K = \begin{bmatrix} -205/3517 & -152/1044 & -23/9730 & 8/6629 \\ 31/6438 & 17/1821 & 7/2337 & -3/8144 \end{bmatrix},$$

در نتیجه داریم:

$$F^T = \begin{bmatrix} -۹۴/۲۱۸۴ & ۱۰/۳۱۴۴ \\ ۱۹/۷۷۶۱ & -۳/۹۸۵۶ \\ ۹۹/۱۱۹۳ & -۱۶/۳۹۱۶ \\ -۹۱/۷۶۴۴ & ۱۱/۵۳۷۵ \\ ۶۲/۹۲۱۵ & -۹/۵۶۷۵ \\ ۴۲/۲۳۴۶ & -۷/۶۷۱۳ \\ -۲/۳۹۶۴ & ۰/۲۹۸۹ \\ -۰/۰۵۳۳ & -۰/۰۰۰۰۲ \\ ۱/۱۸۴۲ & -۰/۱۷۴۳ \end{bmatrix}.$$

با نرم‌های $\|K\|_F = ۱۸۴/۲۲۳$, $\|F\|_F = ۲۵۹/۴۵۸$. برای کاهش نرم این ماتریس‌ها موارد زیر را در نظر می‌گیریم:

مورد اول: با کمک روش بیان شده در بخش ۱.۳.۲ داریم،

$$\tilde{\Gamma}_0 = \begin{bmatrix} & ۰/۲,۴ & \\ I_2 & & ۰/۲,۲ \end{bmatrix},$$

اکنون، ماتریس G_α را به صورت زیر در نظر می‌گیریم،

$$G_\alpha = \begin{bmatrix} ۰ & g_{۱۲} & ۰ & g_{۲۴} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix},$$

با کمک روابط بیان شده در [۳۱] داریم

$$G_\alpha = \begin{bmatrix} ۰ & -۱۰/۹۲۰۵ & ۰ & -۱۵/۳۶۵۸ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix},$$

در نتیجه

$$K = \begin{bmatrix} -۵۴/۴۴۲۲ & ۴۱/۱۵۹۲ & -۳۲/۴۵۹۷ & ۶/۴۶۵۱ \\ ۳۱/۶۴۳۸ & ۱۷/۱۸۲۱ & ۷/۲۳۳۷ & -۳/۸۱۴۴ \end{bmatrix},$$

۹

$$F^T = \begin{bmatrix} ۲۲/۷۰۵۷ & ۱۰/۳۱۴۴ \\ ۱۹/۷۷۶۱ & -۳/۹۸۵۶ \\ ۳۵/۱۹۷۰ & -۱۶/۳۹۱۶ \\ ۲۶/۰۹۶۱ & ۱۱/۵۳۷۵ \\ ۱۹/۳۹۶۱ & -۹/۵۶۷۵ \\ ۳۷/۳۳۰۸ & -۷/۶۷۱۳ \\ ۰/۶۱۳۳ & ۰/۲۹۸۹ \\ -۰/۱۲۶۶ & -۰/۰۰۰۰۲ \\ ۰/۴۳۹۰ & -۰/۱۷۴۳ \end{bmatrix}.$$

با نرم‌های $\|K\|_F = ۸۴/۳۶۱۷$ و $\|F\|_F = ۷۲/۶۰۴۷$

مورد دوم: در این مورد، هدف پیدا کردن ماتریس‌های پارامتری غیرخطی K و F با کمک روش بیان شده در بخش ۲.۳.۲ است. بنابراین، فرض می‌کنیم:

$$\tilde{A}_\lambda = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

با کمک رابطه (۳۴.۲) داریم،

$$\begin{cases} -(g_{11} + g_{22}) = 0 \\ g_{11}g_{24} - g_{12}g_{23} + g_{13}g_{22} - g_{14}g_{21} = 0 \\ -g_{13} - g_{24} + g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = -0.26 \\ g_{13}g_{24} - g_{14}g_{23} = 0.0025 \end{cases} \quad (14.5)$$

انتخاب‌های مختلفی می‌توان برای حل معادله غیر خطی بالا در نظر گرفت. برای مثال با انتخاب $g_{11} = g_{13} = g_{21} = -g_{23} = 1$ داریم:

$$G_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & -4.4825 & 1 & -2.74 \\ 1 & -1 & -1 & 2.7425 \end{bmatrix},$$

و

$$F^T = \begin{bmatrix} 14.8686 & 36.5208 \\ 21.3761 & -2.9886 \\ 42.3346 & -30.2949 \\ 8.2755 & 19.0156 \\ 14.7041 & -36.5706 \\ 22.9985 & -40.3697 \\ 0.1617 & 0.5014 \\ -0.0963 & 0.0416 \\ 0.3341 & -0.6931 \end{bmatrix}.$$

مشاهده می‌شود طیف مقادیر ویژه ماتریس $A + BF$ برابر $S \cup L_2$ و نرم ماتریس‌های پس‌خورد $\|F\|_F = 94.2015$ و $\|K\|_F = 131.4522$ هستند.

مورد سوم: با کمک روش پیشنهادی، ماتریس پس‌خورد پارامتری را به فرم زیر در نظر می‌گیریم،

$$K = (Y_1^H B)_0^{-1} (-G_0 + G_\lambda) T^{-1} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \end{bmatrix},$$

که در آن

$$\begin{cases} k_{11} = 47/2 g_{11} - 10/0 g_{12} + 12/6 g_{13} - 2/69 g_{14} - 176 \\ k_{12} = 54/3 g_{11} - 10/7 g_{12} + 25/0 g_{13} - 4/94 g_{14} - 118 \\ k_{13} = 2/82 g_{12} - 17/5 g_{11} + 9/01 g_{13} - 1/45 g_{14} - 34 \\ k_{14} = 12/1 g_{11} - 1/99 g_{12} - 9/46 g_{13} + 1/56 g_{14} + 15/4 \\ k_{21} = 47/2 g_{21} - 10/0 g_{22} + 12/6 g_{23} - 2/69 g_{24} + 37/5 \\ k_{22} = 54/3 g_{21} - 10/7 g_{22} + 25/0 g_{23} - 4/94 g_{24} + 23/4 \\ k_{23} = 2/82 g_{22} - 17/5 g_{21} + 9/01 g_{23} - 1/45 g_{24} + 5/47 \\ k_{24} = 12/1 g_{21} - 1/99 g_{22} - 9/46 g_{23} + 1/56 g_{24} - 2/54 \end{cases}$$

بنابراین، مساله بهینه‌سازی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 k_{ij}^2, \quad (15.5)$$

$$\text{subject to} \quad \begin{cases} -(g_{11} + g_{22}) = 0 \\ g_{11}g_{24} - g_{12}g_{23} + g_{13}g_{22} - g_{14}g_{21} = 0 \\ -g_{13} - g_{24} + g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = -0/26 \\ g_{13}g_{24} - g_{14}g_{23} = 0/0025. \end{cases}$$

با حل مساله برنامه‌ریزی غیرخطی فوق داریم،

$$G_{\lambda} = \begin{bmatrix} -19/6874 & -108/5316 & -8/0238 & -45/7001 \\ 3/5717 & 19/6874 & 1/4627 & 8/3306 \end{bmatrix},$$

بنابراین برای سیستم (۱۳.۵) ماتریس‌های پسخورد K و F به صورت زیر به دست می‌آیند،

$$K = \begin{bmatrix} 5/6925 & 3/5210 & -0/9830 & -1/7765 \\ 4/5036 & 1/2981 & -0/5242 & 0/5811 \end{bmatrix},$$

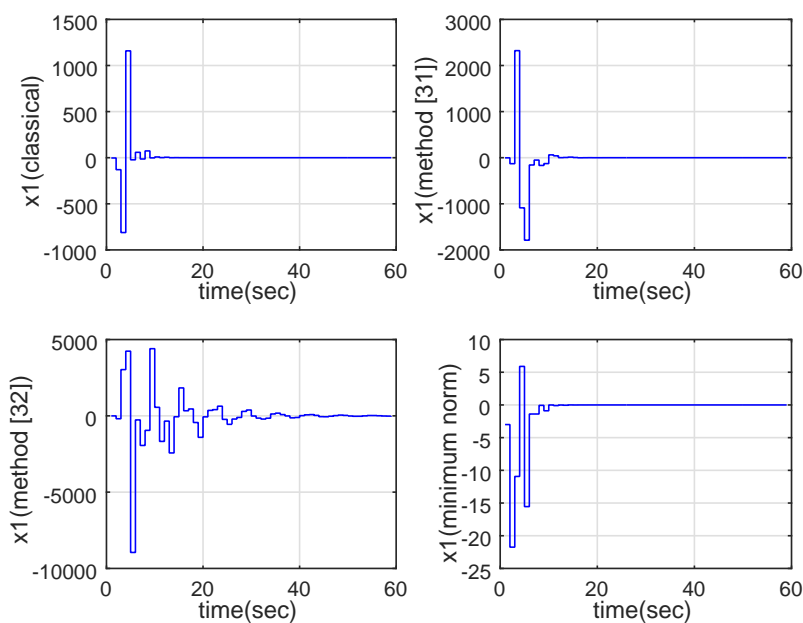
9

$$F^T = \begin{bmatrix} 1/5286 & 0/9840 \\ 0/6887 & -0/4139 \\ -3/0200 & -2/1828 \\ 3/9495 & 0/5883 \\ -3/0102 & -2/1276 \\ -2/7831 & -2/6484 \\ 0/0819 & 0/0141 \\ -0/0443 & -0/0019 \\ -0/0245 & -0/0374 \end{bmatrix}.$$

با نرم‌های $\|K\|_F = 8/4560$ ، $\|F\|_F = 7/8828$

جدول ۱.۵: مقایسه نرم ماتریس با روش‌های مختلف برای مثال ۱.۳.۵

روش	$\ K\ _F$	$\ F\ _F$	% کاهش $\ \cdot\ _F$
روش پیشنهادی	۸/۴۵۶۰	۷/۸۸۳۸	۹۶/۷۴ %
روش [۱۷]	۵۶/۲۳۸۰	۴۸/۵۹۴۱	۷۸/۳۲ %
روش [۳۱]	۸۴/۳۶۷	۷۲/۶۰۴۷	۶۷/۵ %
روش [۳۲]	۱۳۱/۴۵۲۲	۹۴/۲۰۱۵	۴۹/۳۳ %
PEVA	۲۵۹/۴۵۷۶	۱۸۴/۲۲۳۱	



شکل ۴.۵: مقایسه رفتار همگرایی مولفه بردار حالت x_1 در مثال ۱.۳.۵

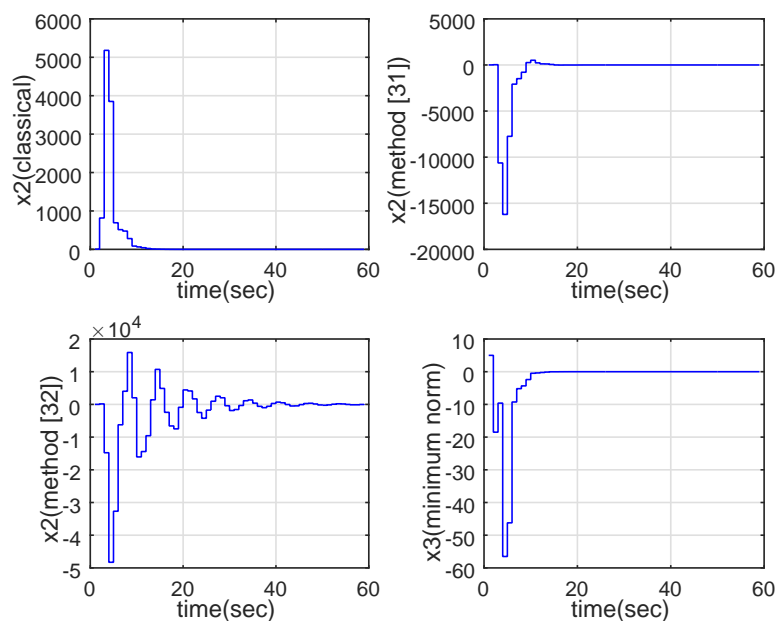
مقایسه بین نرم‌های ماتریس پسخورد در جدول ۱.۵ آورده شده است. همچنین رفتار همگرایی بردارهای حالت و ورودی در شکل‌های ۴.۵ الی ۸.۵ نشان داده شده اند. از شکل‌ها، مشاهده می‌شود که سیستم (۱۳.۵) با بردار اولیه $x_0 = [-3, 5, 4]^T$ به‌طور مجانبی پایدار است.

مثال ۲.۳.۵. سیستم خطی مرتبه کسری با تاخیرهای زمانی زیر را با $L = 3$ در نظر بگیرید،

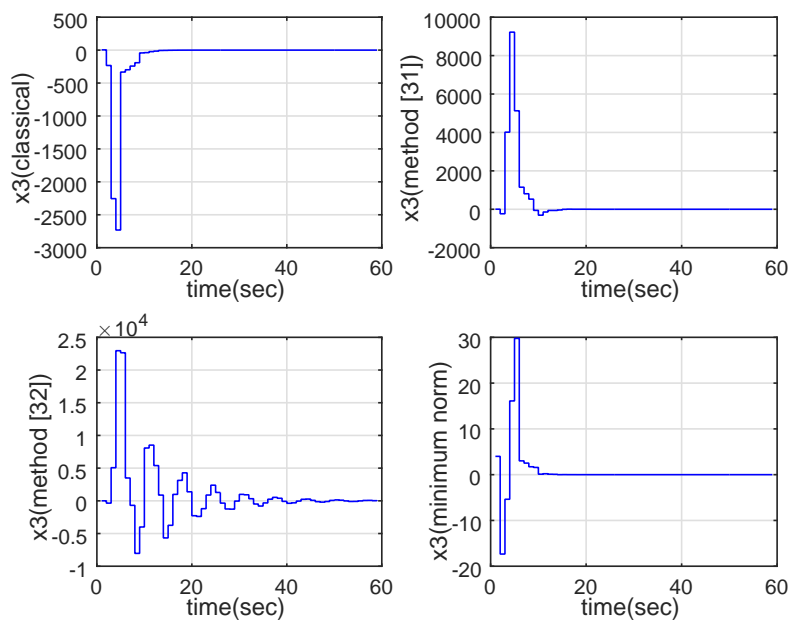
$$\Delta^{\alpha} x_{k+1} = A_0 x_k + A_1 x_{k-1} + B_0 u_k + B_1 u_{k-1} + B_2 u_{k-2}, \quad (16.5)$$

که در آن

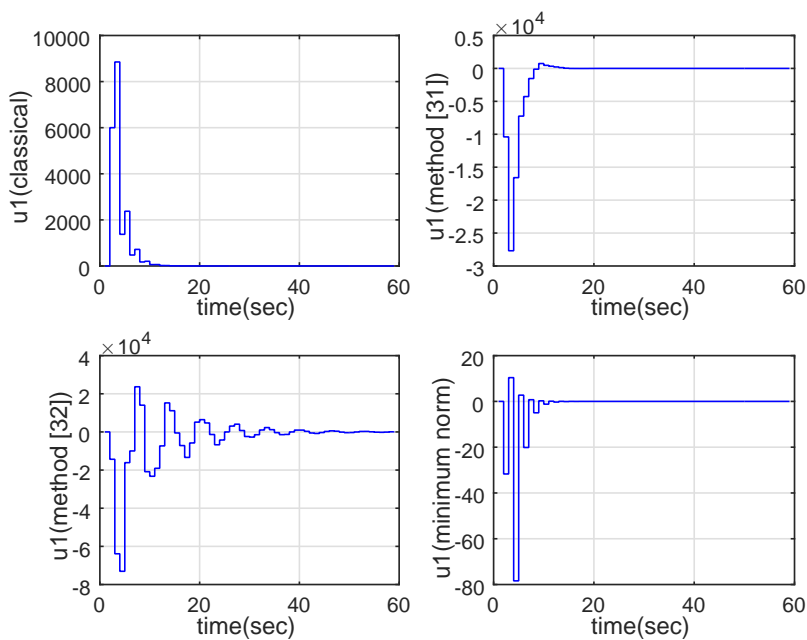
$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$



شکل ۵.۵: مقایسه رفتار همگرایی مولفه بردار حالت x_2 در مثال ۱.۳.۵



شکل ۶.۵: مقایسه رفتار همگرایی مولفه بردار حالت x_3 در مثال ۱.۳.۵



شکل ۷.۵: مقایسه رفتار همگرایی مولفه بردار ورودی u_1 در مثال ۱.۳.۵

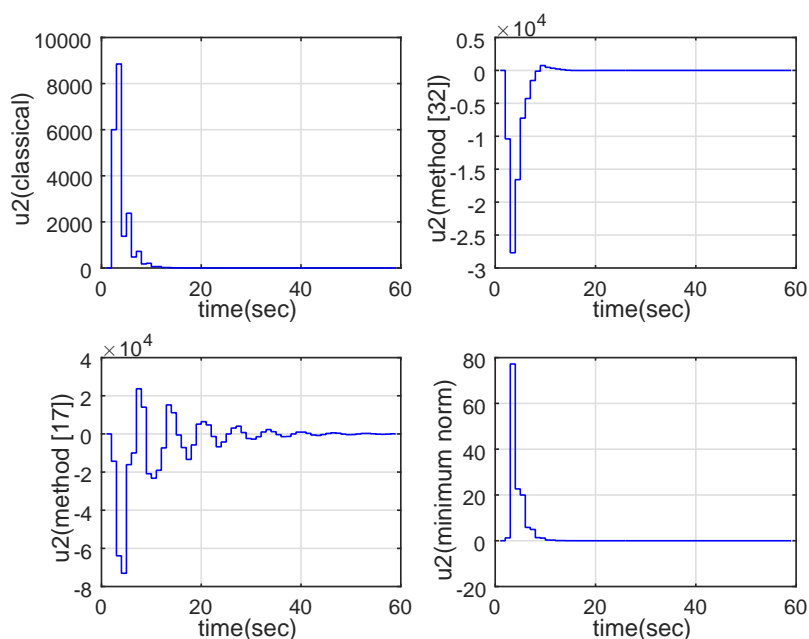
مقادیر ویژه ماتریس حلقه- باز به صورت زیر هستند:

$$\Omega(A) = L_1 \cup L_2 = \{2/9144, -1/4011 \pm 2/1711i\} \cup \{0/1349, 0/217 \pm 0/1555i, -0/1453 \pm 0/502i, 0, 0, 0, 0\}.$$

طیف دلخواه $S = \{-0/5, 0/5, 0/3\}$ را در نظر گرفته، طبق روش PEVA ماتریس های پسخورد به صورت زیر به دست می آیند،

$$F^T = \begin{bmatrix} -1/4493 & -0/5054 \\ 1/1496 & 1/9245 \\ 1/8313 & 1/9770 \\ 1/4981 & 1/5968 \\ -0/0188 & -0/0168 \\ -0/0290 & -0/0396 \\ -0/0121 & -0/0127 \\ -0/0243 & -0/0261 \\ 2/1954 & 2/4298 \\ -2/4704 & -1/3331 \\ -0/3090 & -0/3260 \\ 2/1854 & 2/3536 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} -2/4435 & 3/6140 + 0/2249i & 3/6140 - 0/2249i \\ -0/8970 & 2/8422 + 2/4487i & 2/8422 - 2/4487i \end{bmatrix}.$$



شکل ۸.۵: مقایسه رفتار همگرایی مولفه بردار ورودی u_2 در مثال ۱.۳.۵

با نرم‌های $\|F\|_F = ۶/۹۶۸۷$, $\|K\|_F = ۷/۸۱۹۶$ با کمک روش پیشنهادی مساله بهینه‌سازی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\text{minimize} \quad \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 k_{ij}^2,$$

$$\text{subject to} \quad \begin{cases} -g_{11} - g_{22} = -0.3 \\ g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} - g_{13} = -0.25 \\ g_{12}g_{22} - g_{12}g_{23} = 0.75 \end{cases}$$

با حل مساله برنامه‌ریزی غیرخطی، داریم:

$$G_\lambda = \begin{bmatrix} -1/0014 & -0/1480 & -0/9576 \\ 0/6458 & 1/3014 & 1/9249 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} -0/6356 & -0/1515 - 0/9076i & -0/1515 + 0/9076i \\ 1/0020 & 0/1451 + 1/1751i & 0/1451 - 1/1751i \end{bmatrix},$$

جدول ۲.۵: مقایسه نرم ماتریس با روش‌های مختلف برای مثال ۲.۳.۵

روش	$\ K\ _F$	% کاهش $\ .\ _F$
روش PEVA	۷/۸۱۹۶	
روش [۳۲]	۷/۶۷۳۸	
روش [۳۱]	۳/۰۲۵۳	۶۱/۳ %
روش پیشنهادی	۲/۴۳۰۱	۶۸/۹ %

و

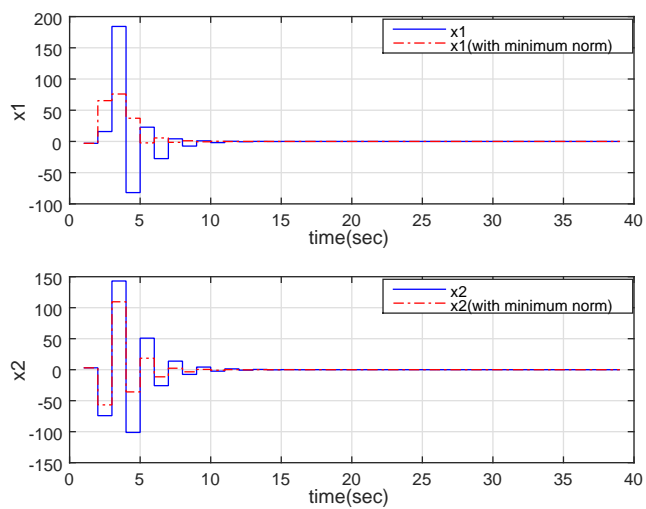
$$F^T = \begin{bmatrix} -۰/۳۰۰۱ & ۰/۴۵۷۲ \\ -۰/۳۹۷۴ & ۰/۴۷۶۴ \\ -۰/۴۴۴۶ & ۰/۶۱۷۵ \\ -۰/۳۱۹۱ & ۰/۴۳۱۵ \\ -۰/۰۰۱۳ & ۰/۰۰۳۱ \\ ۰/۰۰۹۳ & -۰/۰۱۲۲ \\ ۰/۰۰۰۳ & ۰/۰۰۰۴ \\ ۰/۰۰۴۵ & -۰/۰۰۵۸ \\ -۰/۴۹۵۲ & ۰/۶۶۴۹ \\ -۰/۰۷۶۹ & ۰/۱۰۹۴ \\ ۰/۰۰۸۰ & ۰/۰۱۰۱ \\ -۰/۵۴۹۰ & ۰/۷۶۹۴ \end{bmatrix}.$$

با نرم‌های $\|F\|_F = ۱/۷۷۴۸$ ، $\|K\|_F = ۲/۴۳۰۱$. مقایسه بین نرم‌های ماتریس پسخورد در جدول ۲.۵ آورده شده است، همچنین پاسخ سیستم در شکل‌های ۱۰.۵ و ۹.۵ نشان داده شده است که سیستم (۱۶.۵) با بردار اولیه $x_0 = [-۱, ۱]^T$ به طور مجانبی پایدار است. از شکل‌های مذکور نتیجه می‌شود که نرم کمتر منجر به کاهش نوسانات کنترلی و کاهش نرم می‌شود.

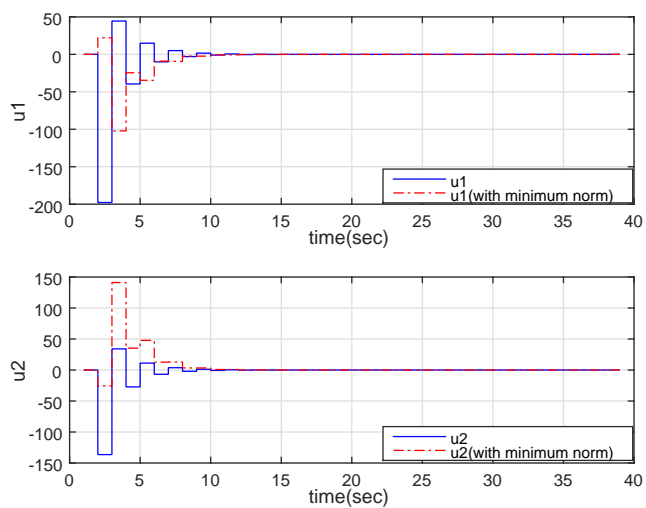
مقایسه روش‌ها

در این بخش، مزایای روش پیشنهادی را ارائه می‌دهیم و آن را با روش‌های موجود مقایسه می‌کنیم:

- مزیت روش پیشنهادی، سادگی الگوریتم و کاهش پیچیدگی محاسباتی نسبت به روش‌های ارائه شده در [۳۵، ۳۴، ۳۶، ۵۹، ۶۰] است کاهش نرم ماتریس پسخورد حالت نسبت به روش‌های ارائه شده [۳۱، ۱۷] است.
- در بسیاری از مسائل مهندسی، محدودیت‌هایی روی متغیرهای کنترل یا ورودی اعمال می‌شود بعنوان مثال، ورودی i ام مضرری از ورودی z ام باشد که با این کار با پارامتری‌سازی غیرخطی روش پیشنهادی امکان پذیر است و ماتریس پسخورد حالت را می‌توان طوری تعیین کرد که محدودیت‌های فوق به سیستم اعمال شود. در مرجع [۳۵] محدودیتی برای ورودی‌های سیستم در نظر گرفته



شکل ۹.۵: رفتار همگرایی مولفه‌های بردار حالت x در مثال ۲.۳.۵



شکل ۱۰.۵: رفتار همگرایی مولفه‌های بردار ورودی u در مثال ۲.۳.۵

نشده است.

- ویژگی خاص روش PEVA در مقایسه با روش‌های [۱۷، ۳۱، ۳۲، ۵۹] و [۳۶، ۳۷] این است که تنها برای تعداد بسیار کمی از مقادیر ویژه نامطلوب سیستم در نظر گرفته می‌شود بنابراین بعد سیستم کاهش یافته و دارای پیچیدگی محاسباتی کمتری هستیم و روشی موثر برای سیستم‌های بزرگ مقیاس است.
- با توجه به شکل‌های مثال ۲.۳.۵ کاهش مقدار نرم ماتریس بهره باعث کاهش دامنه‌ی نوسانات سیگنال‌های کنترلی و در نتیجه کاهش مصرف انرژی یا هزینه با قانون کنترل $U_k = FX_k$ می‌شود.

۴.۵ سیستم‌های تاخیری مرتبه کسری زمان-پیوسته

۱.۴.۵ پایداری سیستم‌های مثبت

تعاریف و قضایای این بخش از مراجع [۷۵] و [۷۳] گردآوری شده است.

سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} D_t^\alpha x(t) = \sum_{k=0}^q [A_k x(t-d_k) + B_k u(t-d_k)], \\ u(t) = Kx(t), \quad t \in [-d, 0], \quad d = \max_k d_k. \end{cases} \quad (17.5)$$

با جایگذاری، ماتریس حلقه-بسته را به صورت زیر به دست می‌آوریم،

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = \sum_{k=0}^q (A_k + B_k K)x(t-d_k), \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (18.5)$$

سیستم مرتبه کسری مثبت با تأخیر (۱۸.۵) پایدار مجانبی است اگر و تنها اگر سیستم مرتبه کسری مثبت بدون تأخیر،

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = (A + BK)x(t); \quad A = \sum_{k=0}^q A_k, \quad B = \sum_{k=0}^q B_k, \quad (19.5)$$

پایدار مجانبی باشد [۹۶].

بنابراین پایداری سیستم‌های خطی پیوسته زمانی با تأخیر، مستقل از تعداد و مقادیر تأخیر است. در واقع پایداری مجانبی در بخش‌های سمت چپ صفحه مختلط در نظر گرفته می‌شود. بنابراین، به دنبال ماتریس افزوده K هستیم به طوری که سیستم حلقه-بسته (۱۸.۵) مثبت باشد و همچنین صفرهای چندجمله‌ای مشخصه،

$$\det [I_n s^\alpha - (A + BK)] = (s^\alpha)^n + a_{n-1}(s^\alpha)^{n-1} + \dots + a_1 s^\alpha + a_0. \quad (20.5)$$

در ناحیه $\Phi = \frac{\pi}{\alpha}$ قرار بگیرند.

قضیه ۱.۴.۵. [۷۵] سیستم مرتبه کسری حلقه-بسته (۱۸.۵) مثبت است و صفرهای چندجمله‌ای (۲۰.۵) در ناحیه $\Phi = \frac{\pi}{\alpha}$ واقع شده‌اند اگر و تنها اگر یک ماتریس قطری،

$$\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]; \quad \lambda_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (21.5)$$

و ماتریس حقیقی $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$ موجود باشند که در شرایط زیر صدق کنند:

$$\begin{cases} A\Lambda + BD \in M_n \\ (A\Lambda + BD)_n < 0, \end{cases} \quad (22.5)$$

و ماتریس افزوده K به صورت $K = D\Lambda^{-1}$ است.

مثال ۱.۴.۵. سیستم مرتبه کسری (۱۸.۵) با $\alpha = 0.8$ و $q = 2$ و ماتریس‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & -0.2 \\ 0.2 & -1 & 0 \\ 0 & -0.2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & -0.3 \\ 0.1 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & -0.5 \\ 0.7 & -1.5 & 0 \\ 0 & -0.7 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 0 & 0 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \\ 0.3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 \\ 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

ماتریس افزوده K را طوری پیدا می‌کنیم که سیستم حلقه-بسته مثبت باشد و صفرهای چندجمله‌ای مشخصه در ناحیه $\phi = \frac{5}{8}\pi$ قرار گیرند.

چون ماتریس‌های A_0, A_1 و A_2 مؤلفه‌های غیرقطری منفی دارند، بنابراین سیستم مرتبه کسری مثبت نیست. در این صورت،

$$A = \sum_{k=0}^2 A_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2.5 \end{bmatrix}, \quad B = \sum_{k=0}^2 B_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (23.5)$$

با استفاده از قضیه ۱.۴.۵، ماتریس‌های زیر را انتخاب می‌کنیم:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0.5 & 2 & -0.3 \\ -4 & 0 & 1.4 \end{bmatrix}, \quad (24.5)$$

و شرایط (۲۲.۵) را بررسی می‌کنیم،

$$\left\{ \begin{array}{l} A\Lambda + BD = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0/4 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0/5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in M_3, \\ (A\Lambda + BD)\mathbf{1}_n = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0/4 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0/5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0/6 \\ -5 \\ -0/5 \end{bmatrix}. \end{array} \right.$$

در نتیجه داریم،

$$K = D\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} 0/5 & 2 & -3/5 \\ -4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0/5 & 1 & -3/5 \\ -4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

سیستم حلقه- بسته ما مثبت است، زیرا ماتریس

$$A_c = A + BK = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0/4 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0/5 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

یک ماتریس متزلزل است. چندجمله‌ای مشخصه

$$\det[I_n\lambda + A_c] = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -1 & -0/4 \\ -1 & \lambda + 3 & 0 \\ -0/5 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 13/8\lambda + 7/4,$$

دارای ضرایب مثبت است. بنابراین صفرهای چندجمله‌ای مشخصه از سیستم حلقه- بسته در ناحیه $\phi = \frac{5}{8}\pi$ واقع شده است.

۲.۴.۵ پایداری سیستم‌های زمان- پیوسته با استفاده از تبدیلات تشابهی

در این بخش مساله طراحی سیستم‌های تاخیری مرتبه کسری زمان- پیوسته با مقادیر ویژه حلقه- بسته در یک ناحیه مشخص از پایداری را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ایده اصلی، تبدیل سیستم‌های کسری با تاخیر زمانی به سیستم کسری بدون تاخیر معادل است. در ابتدا یک ماتریس پسخورد حالت محاسبه می‌کنیم که تمام مقادیر ویژه را به صفر می‌رساند، سپس با استفاده از روشی بر پایه تبدیلات تشابهی و اختصاص دادن مقادیر ویژه به سیستم‌های بدون تاخیر ماتریس پسخورد حالت را در یک بخش از صفحه مختلط محاسبه می‌کنیم. این روش با به کار بردن خواص فرم بردارهای همدم به دست می‌آید. در انتها چند مثال عددی برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی ارائه شده است. نتایج این بخش در مرجع [۹۹] به چاپ رسیده است.

تاریخچه

در اکثر برنامه‌های کاربردی پایداری سیستم‌های کنترل شده به تنهایی کافی نیست و نیاز است که قطب‌های سیستم حلقه- بسته در ناحیه مشخص از پایداری باشند، روش‌های مختلفی ارائه شده از جمله فروتا و کیم^{۱۰} [۹۷] روشی برای تخصیص قطب‌های حلقه- بسته در دیسک دلخواه معرفی کردند. چو^{۱۱} [۹۸] روشی دیگر برای تخصیص قطب با کمک شعاع طیفی و تابع انتقال پالسی پیشنهاد کرد، این روش ساده بود اما تنها برای بررسی موقعیت قطب‌های حلقه- بسته کاربرد داشت نه برای طراحی کنترل‌گر. فیگوریا^{۱۲} و همکاران [۱۰۰] یک رویکرد برای طراحی کنترل‌گر ارائه دادند که سعی در قرار دادن ریشه‌های چند جمله‌ای مشخصه در ناحیه مشخص از صفحه مختلط بود. این تحلیل براساس تابع تبدیل انجام گرفت، یوان^{۱۳} و همکاران [۱۰۱] مسأله تنظیم کننده درجه دوم خطی (LQR) با قیود ناحیه قطب‌های حلقه- بسته را معرفی کردند. بنر و همکارش^{۱۴} [۱۰۲] روشی برای پایداریسازی جزئی از سیستم‌های خطی زمان- گسسته بزرگ مقیاس پیشنهاد دادند. احسنی طهرانی [۱۰۳] روشی برای تخصیص مقادیر ویژه سیستم‌های زمان- گسسته در دیسک مشخص با استفاده از قضیه گرشگورین ارائه کرد و در [۱۰۴] پایداریسازی سیستم‌های زمان- پیوسته در بازه مشخص از صفحه مختلط را بررسی کرد. آیت‌اللهی [۱۰۵] یک روش برای تخصیص ماکزیمم و کمینه مقادیر ویژه حلقه- بسته برای سیستم‌های متناوب زمان- گسسته با پسخورد حالت به‌دست آورد. فرانک^{۱۵} [۱۰۶] رویکردی برای تخصیص مقادیر ویژه با پسخورد خروجی به منظور کاهش بهره ماتریس پسخورد پیشنهاد داد. برای اطلاعات بیشتر مراجع [۱۰۷]–[۱۰۹] را ببینید. با انگیزه از بحث‌های فوق، در این بخش، هدف ارائه یک روش با پیچیدگی محاسباتی کمتر برای محاسبه مقادیر ویژه در یک ناحیه مشخص شده از صفحه مختلط با کنترل‌گر پسخورد برای رده‌ای از سیستم‌های زمان- پیوسته خطی مرتبه‌کسری با تاخیر زمانی است.

سیستم کنترل‌پذیر مرتبه‌کسری با تاخیرهای زمانی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} D_t^\alpha x(t) = \sum_{k=0}^q [A_k x(t-d_k) + B_k u(t-d_k)], \\ x(t) = x_0(t), \quad t \in [-d, 0], \quad d = \max_k d_k. \end{cases} \quad (25.5)$$

که در آن $x(t) \in \mathbb{R}^n$ و $u(t) \in \mathbb{R}^m$ بردارهای حالت و ورودی هستند و $A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$ با $k = 0, 1, \dots, q$ ماتریس‌های ثابت حقیقی هستند، فرض می‌کنیم $k = 0, 1, \dots, q$ تاخیرهای زمانی با شرط $(d_k \geq 0, d_0 = 0)$ هستند و $rank(B_k) = m$. قانون کنترل را به صورت $u(t) = Kx(t)$ در نظر می‌گیریم، بنابراین سیستم حلقه- بسته به صورت زیر است،

$$D_t^\alpha x(t) = \sum_{k=0}^q (A_k + B_k K) x(t-d_k), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (26.5)$$

سیستم فوق با q تاخیر به طور مجانبی پایدار است اگر و تنها اگر سیستم بدون تاخیر آن پایدار مجانبی باشد. در واقع، سیستم تاخیری زمان پیوسته مستقل از تعداد و مقدار تاخیر است [۷۳، ۹۶]. بنابراین، سیستم حلقه- بسته کسری بدون تاخیر (۲۶.۵) را در نظر می‌گیریم،

$$D_t^\alpha x(t) = (A + BK)x(t); \quad A = \sum_{k=0}^q A_k, \quad B = \sum_{k=0}^q B_k. \quad (27.5)$$

¹⁰Furuta and Kim¹¹Chou¹²Figueroa¹³Yuan¹⁴Benner¹⁵Frank

هدف یافتن ماتریس K به طوری که ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه،

$$\det [I_n s^\alpha - (A + BK)] = (s^\alpha)^n + a_{n-1}(s^\alpha)^{n-1} + \dots + a_1 s^\alpha + a_0 \quad (28.5)$$

در زاویه مشخص شده قرار بگیرد. اکنون با تعریف $\lambda = s^\alpha$ داریم،

$$\det [I_n \lambda - (A + BK)] = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0. \quad (29.5)$$

فرض می‌کنیم $\arg(s) = \phi$ و $\arg(\lambda) = \varphi$. بنابراین $\varphi = \alpha\phi$ و برای $\varphi = \frac{\pi}{\alpha}$ نتیجه زیر را داریم:

نتیجه ۱.۴.۵. اگر صفرهای چند جمله‌ای (۲۹.۵) در سمت چپ صفحه مختلط قرار داشته باشند، آن‌گاه صفرهای چندجمله‌ای (۲۸.۵) در زاویه‌ی مشخص شده با $\phi = \frac{\pi}{\alpha}$ در سمت چپ صفحه قرار می‌گیرند (مطابق شکل ۲.۴).

هدف ما تخصیص مقادیر ویژه در بخش از پیش تعیین شده برای به دست آوردن ماتریس پس‌خورد حالت K که ایجاد یک سیستم حلقه-بسته با جواب مطلوب با تغییر قطب کنترل‌پذیر نقاط نامطلوب به نقاط مورد نظر است. در واقع K طوری انتخاب می‌شود که مقادیر ویژه سیستم حلقه-بسته در مجموعه از پیش تعریف شده $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ ، با این خاصیت که λ_i ها یا حقیقی‌اند یا به صورت مزدوج مختلط ظاهر می‌شوند، واقع شوند.

ابتدا سیستم کنترل‌پذیر (۲۵.۵) را در نظر می‌گیریم، مشابه روش EVA، فرض کنید که T تبدیل تشابه‌ی باشد که بردار حالت سیستم توسط ماتریس تبدیل T^{-1} به فضای جدید تبدیل شود، یعنی $x(t) = T\tilde{x}(t)$. بنابراین، با جایگذاری رابطه فوق در معادله حالت داریم،

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t),$$

ماتریس پس‌خوردی که همه مقادیر ویژه را به صفر می‌برد به صورت زیر به دست می‌آید،

$$u = -B_o^{-1}G_o\tilde{x} = \tilde{F}_p\tilde{x},$$

بنابراین، ماتریس پس‌خورد حالت اولیه برای زوج (\tilde{B}, \tilde{A}) به صورت $\tilde{F}_p = \tilde{F}T^{-1}$ است و ماتریس حلقه-بسته به فرم زیر است،

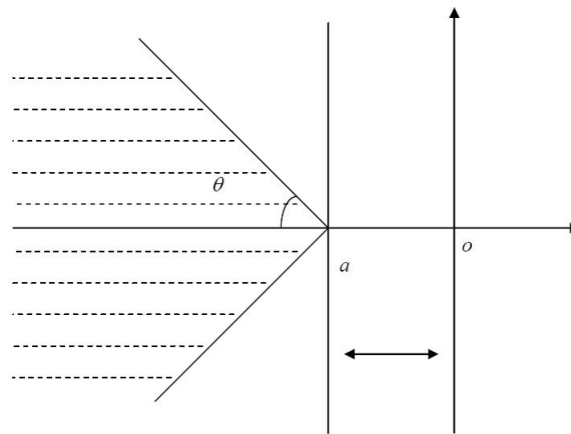
$$\tilde{\Gamma}_o = \begin{bmatrix} & O_{m,n} & & \\ I_{n-m} & & O_{n-m,m} & \end{bmatrix}.$$

قضیه ۲.۴.۵. فرض کنید D یک ماتریس قطری به صورت،

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & \circ & \dots & \circ \\ \circ & D_2 & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & D_k \end{bmatrix}, \quad (30.5)$$

باشد، که هر D_j ، $(j = 1, 2, \dots, k)$ به ازای مقادیر ویژه مزدوج مختلط $\alpha_j + i\beta_j$ به صورت،

$$D_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{bmatrix},$$



شکل ۱۱.۵: نمایش مقادیر ویژه در ناحیه مشخص

و به‌ازای مقادیر ویژه حقیقی به‌صورت $D_j = [d_j]$ باشد. اگر چنین ماتریس قطری D با مقادیر ویژه مزدوج مختلط به ماتریس حلقه بسته Γ اضافه شود، آنگاه مقادیر ویژه حاصل، مقادیر ویژه در طیف است.

نتیجه ۲.۴.۵. ماتریس پس‌خورده حالت از زوج (B, A) به‌صورت زیر است:

$$\tilde{K} = \tilde{F} + B_o^{-1} H_o = B_o^{-1} (-G_o + H_o).$$

قضیه ۳.۴.۵. ماتریس پس‌خورده حالت \tilde{K} مقادیر ویژه ماتریس حلقه-بسته $\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$ را در زاویه از پیش تعیین شده در سمت چپ صفحه مختلط شکل ۲.۴.۵ اختصاص می‌دهد، هرگاه

$$\begin{cases} \alpha_j = -k\lambda + a, & k \in \mathbb{N} \\ \beta_j = |\alpha_j - a| \tan(\theta) \cdot \lambda, \end{cases} \quad (31.5)$$

که در آن $\lambda = random(o, 1)$ و برای هر تخصیص مقادیر ویژه حقیقی در بخش از پیش تعیین شده، d_j را به‌صورت زیر انتخاب کنیم،

$$d_j = -k\lambda + a \quad k \in \mathbb{N}. \quad (32.5)$$

برهان. طبق رابطه (۳۰.۵) مقادیر ویژه ماتریس D در زاویه مشخص شده قرار می‌گیرند چون،

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K} &= \begin{bmatrix} G_o & & \\ I_{n-m} & O_{n-m \times m} & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_o & \\ O_{n-m \times m} & \end{bmatrix} [B_o^{-1} (-G_o + H_o)] \\ &= \begin{bmatrix} H_o & & \\ I_{n-m} & O_{n-m \times m} & \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

به‌وضوح $\tilde{\Gamma} = \tilde{H}_\lambda$. حال چون ماتریس \tilde{H}_λ با ماتریس \tilde{H} متشابه است و عملیات تشابهی مقادیر ویژه را تغییر نمی‌دهد، پس مقادیر ویژه ماتریس \tilde{H}_λ با مقادیر ویژه ماتریس \tilde{H} برابر است. بنابراین مقادیر ویژه ماتریس حلقه- بسته $\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$ در زاویه مشخص شده قرار می‌گیرد. □

ملاحظه ۱.۴.۵. چون \tilde{K} تخصیص مقادیر ویژه ماتریس حلقه- بسته $\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$ در زاویه تعیین شده است، به‌وضوح ماتریس کنترل گر پسخورد حالت

$$K = \tilde{K}T^{-1} = B_o^{-1}(-G_o + H_o)T^{-1},$$

تخصیص مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\Gamma = A + BK$ در زاویه تعیین شده است.

الگوریتم روش

ورودی: زوج کنترل پذیر (B, A) و ماتریس های F_p ، B_o^{-1} و T^{-1} که از الگوریتم بیان شده در بخش ۳.۱.۲ [۱۵] به‌دست می‌آیند و زاویه θ و a که فاصله رأس زاویه از مبدأ صفحه مختلط است.
خروجی: ماتریس پسخورد حالت F به‌طوری که سیستم حلقه- بسته دارای مقادیر ویژه مطلوب باشد.

گام اول: محاسبه ماتریس قطری D از روابط (۳۱.۵) و (۳۲.۵).

گام دوم: ماتریس $\tilde{H} = \tilde{\Gamma}_o + D$ را به‌دست می‌آوریم.

گام سوم: تبدیل \tilde{H} به‌فرم همدم برداری \tilde{H}_λ با استفاده از عملیات سطری و ستونی مقدماتی.

گام چهارم: محاسبه ماتریس پسخورد حالت $K = F_p + B_o^{-1}H_oT^{-1}$.

مثال‌های عددی

در این بخش، سه مثال عددی برای نشان دادن کارایی و مقایسه روش پیشنهادی با نتایج قبلی ارائه می‌دهیم.

مثال ۲.۴.۵. سیستم (۲۵.۵) با $\alpha = 0.8$ و $q = 2$ و ماتریس‌های،

$$A_o = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_o = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید $a = -2$, $\theta = \pi - \phi = \frac{3\pi}{\lambda}$, $\phi = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}} = \frac{5\pi}{\lambda} \rightarrow \theta = \pi - \phi = \frac{3\pi}{\lambda}$, $a = -2$ داریم،

$$A = \sum_{k=0}^2 A_k = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 8 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 8 & 3 & 7 & 7 \\ 8 & 5 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ 9 & 1 & 8 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 6 & 7 & 6 & 8 \\ 9 & 4 & 2 & 8 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \sum_{k=0}^2 B_k = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 & 0 \\ 9 & 2 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 9 \\ 7 & 4 & 0 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 9 & 0 \end{bmatrix}.$$

مقادیر ویژه ماتریس حلقه- باز برابر است با،

$$\Omega(A) = \{26/5923, 1/1651 \pm 6/3264i, -7/9665, -3/2591, 0/3031\},$$

هستند، که در تمام صفحه مختلط پخش شده‌اند، برای تخصیص مقادیر ویژه در زاویه سمت چپ صفحه مختلط از الگوریتم فوق استفاده می‌کنیم. برای این منظور ابتدا ماتریس پس‌خورد حالتی که مقادیر ویژه صفر را به سیستم حلقه- بسته اختصاص می‌دهد F_p را به دست می‌آوریم،

$$F_p = \begin{bmatrix} 1/7090 & -2/2856 & -2/4735 & -0/7208 & -1/9936 & -3/5693 \\ -3/3175 & 0/8086 & 1/540 & 0/2529 & 2/9120 & 2/6597 \\ -0/6196 & 0/5241 & 0/4805 & -0/3482 & -0/0022 & 0/6213 \\ -0/7398 & 0/5505 & 0/1069 & -0/0580 & -0/129 & 0/5683 \end{bmatrix}.$$

9

$$D = \begin{bmatrix} -10/3379 & 6/3831 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6/3831 & -10/3379 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -29/5564 & 2/2916 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2/2916 & -29/5564 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5/9487 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8/4865 \end{bmatrix},$$

اکنون با استفاده از الگوریتم، ماتریس پس‌خورد حالت برابر است با،

$$K = \begin{bmatrix} -9/7703 & 2/8729 & -5/6276 & 4/4782 & -10/6416 & 4/4390 \\ 1/6779 & -2/2603 & 5/4429 & -4/1907 & 9/6880 & -6/6785 \\ 2/1476 & -2/7068 & 0/2609 & 0/8267 & 2/5684 & -2/4490 \\ 3/2015 & -1/3293 & -1/8310 & -0/9612 & 0/7471 & 0/2805 \end{bmatrix}.$$

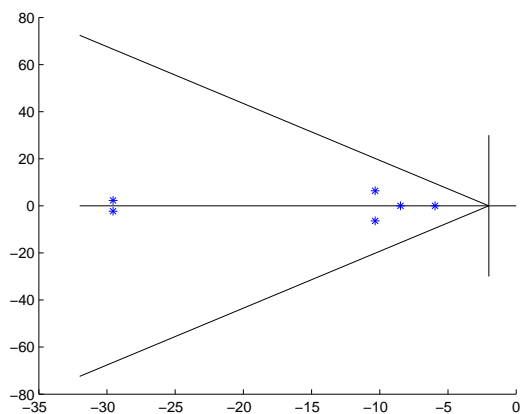
مقادیر ویژه ماتریس حلقه- بسته مطابق شکل ۱۲.۵ در زاویه مشخص شده در سمت چپ صفحه مختلط قرار می‌گیرند و پاسخ سیستم با بردار اولیه $x(0) = [2, 1, 4, -1, 4, 0]^T$ در شکل‌های ۱۳.۵ و ۱۴.۵ نشان داده شده است. طبق شکل‌های فوق بردارهای حالت و ورودی به نقطه تعادل (صفر) همگرا و سیستم پایدارمجبانی است.

مثال ۳.۴.۵. سیستم زیر را در نظر بگیرید،

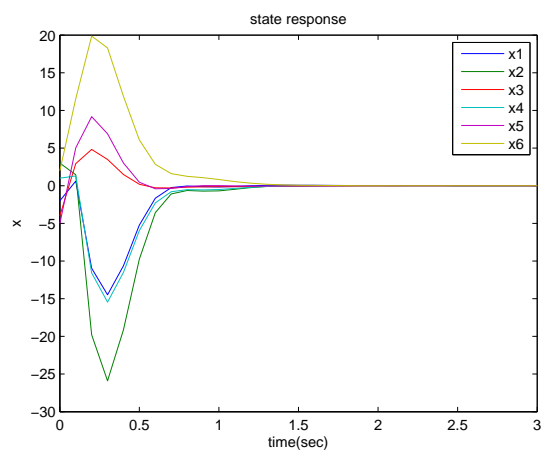
$$D^{\alpha} x(t) = \sum_{k=0}^2 [A_k x(t-k) + B_k u(t-k)], \quad (33.5)$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2/5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$



شکل ۱۲.۵: نمایش مقادیر ویژه در ناحیه مشخص از مثال ۲.۴.۵



شکل ۱۳.۵: رفتار همگرایی مولفه‌های بردار حالت در مثال ۲.۴.۵

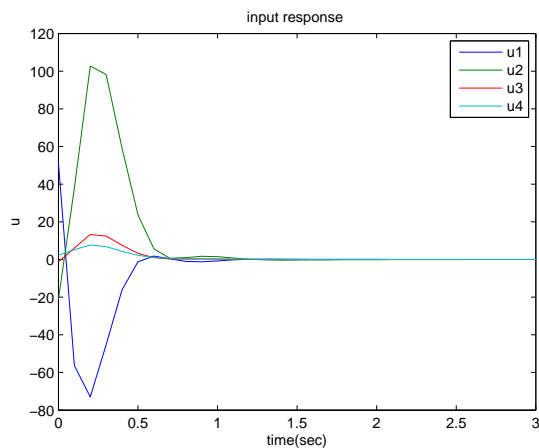
با استفاده از الگوریتم و با فرض اینکه $a = -2, \theta = \frac{2\pi}{V}$ ، ماتریس پس‌خورد به صورت زیر به دست می‌آید،

$$K = \begin{bmatrix} \circ & 1 & -10/941 \\ -7/2261 & -0/45 & 1 \end{bmatrix}.$$

مقادیر ویژه ماتریس حلقه- بسته $\{-6/3884, -2/8377, -8/4411\}$ هستند که همگی در ناحیه مشخص شده قرار دارند، برطبق شکل‌های ۱۵.۵ و ۱۶.۵ بردارهای حالت و ورودی به نقطه تعادل همگرا هستند و سیستم پایدار مجانبی است. همچنین بر طبق مرجع [۷۵] و تعریف سیستم‌های مثبت برای سیستم حلقه- بسته داریم،

$$A_c = A + BK = \begin{bmatrix} -6/2261 & 0/55 & \circ \\ 1 & -3 & \circ \\ \circ & \circ & -8/4411 \end{bmatrix} \in M_3, \quad B = \begin{bmatrix} \circ & 1 \\ \circ & \circ \\ 1 & \circ \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{3 \times 2}$$

از آنجا که سیستم (۳۳.۵) مثبت است، ما می‌توانیم روش پیشنهادی را با روش ارائه شده در [۱۱۰] مقایسه



شکل ۱۴.۵: رفتار همگرایی مولفه‌های بردار ورودی در مثال ۲.۴.۵

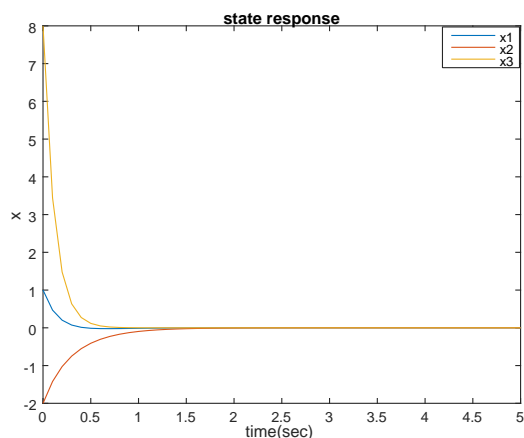
کنیم. با کمک قضیه ۱.۴.۵ و با انتخاب،

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0.5 & 2 & 3/5 \\ 4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix},$$

داریم،

$$A\Lambda + BD \in M_3, \quad (A\Lambda + BD) \mathbf{1}_3 < 0.$$

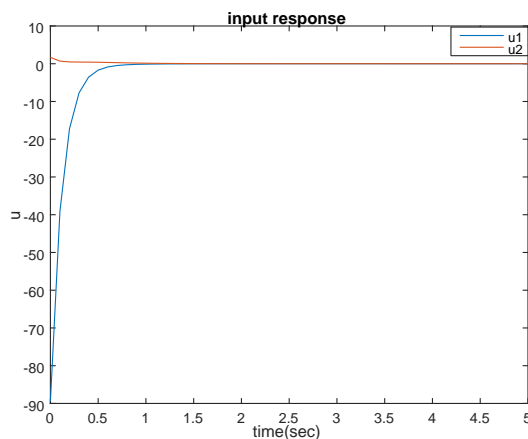
روش [۱۱۰] محدود به انتخاب ماتریس‌های D و Λ است اما روش پیشنهادی دارای الگوریتم ساده‌تر و پیچیدگی محاسباتی کمتری دارد.



شکل ۱۵.۵: رفتار همگرایی مولفه‌های بردار حالت در مثال ۳.۴.۵

مثال ۴.۴.۵. معادله حرکت ربات نیوکاسل به صورت زیر را در نظر بگیرید [۱۱۱]:

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + kq(t) = mu(t),$$



شکل ۱۶.۵: رفتار همگرایی مولفه‌های بردار ورودی در مثال ۳.۴.۵

که در آن جرم ($m = ۲۵۰۰ kg$)، ضریب اصطحاک دمپینگ ($c = ۳۲ Ns/mm$) و سختی خطی سنسور نیرو ($K = ۴۴/۵ N/mm$) و یا

$$\ddot{q}(t) + ۲\beta\dot{q}(t) + \omega^2 q(t) = u(t), \quad (۳۴.۵)$$

مدل ارائه شده به همراه تاخیر حالت مرتبه کسری کوچکی به صورت زیر در نظر گرفته شده است

$$\ddot{q}(t) + ۲\beta\dot{q}(t) + \omega^2 q(t) = \gamma q(t-h) + \psi q^\alpha(t-h) + u(t),$$

با شرایط اولیه

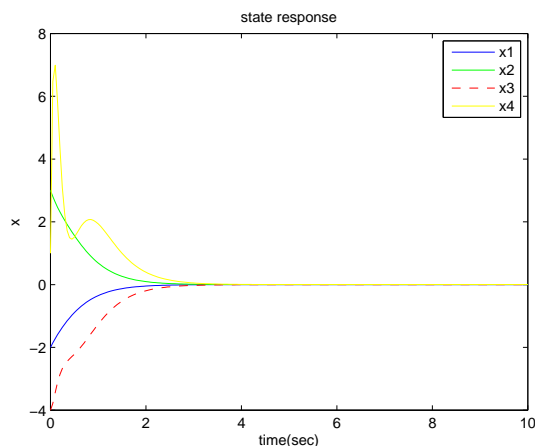
$$\begin{cases} q(t) = \phi(t) \neq 0, & -h \leq t \leq 0 \\ \dot{q}(t) = \varphi(t) = 0 & -h \leq t \leq 0 \\ q^\alpha(t) = \xi(t) = 0 & -h \leq t \leq 0. \end{cases}$$

اکنون، می‌توان براساس مشتق مرتبه کسری در طرف راست، معادلات سیستم را بیان کرد. با انتخاب متغیرهای حالت به صورت زیر، معادلات مرتبه کسری فضای حالت (۳۴.۵) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} x_1(t) = q(t), x_2(t) = q^\alpha(t), x_3(t) = \dot{q}(t), x_4(t) = q^{(\frac{\alpha}{\alpha-1})}(t) \\ D_t^\alpha x_1(t) = D_t^{\frac{1}{\alpha}} q(t) = x_2(t), \\ D_t^\alpha x_2(t) = x_3(t), \\ D_t^\alpha x_3(t) = x_4(t), \\ D_t^\alpha x_4(t) = D_t^{\frac{1}{\alpha}} x_4(t) = -۲\beta x_3(t) - \omega^2 x_1(t) + \gamma x_1(t-h) + \psi x_2(t-h) + u(t). \end{cases}$$

بنابراین معادله فضای حالت از مرتبه کسری به صورت زیر است:

$$D_t^{\alpha/\Delta} X(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 & -۲\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \psi & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-h) \\ x_2(t-h) \\ x_3(t-h) \\ x_4(t-h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$



شکل ۱۷.۵: رفتار همگرایی مولفه‌های بردار حالت در مثال ۴.۴.۵

همچنین، می‌توان به فرم زیر هم نمایش داد:

$$\begin{cases} D_t^{\frac{1}{2}} X(t) = AX(t) + A_d X(t-h) + Bu(t), \\ X(t) = \varphi_x(t), \quad -h \leq t \leq 0. \end{cases} \quad (35.5)$$

حال پارامترهای ربات را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\alpha = 0.5, \omega^2 = 17, 2\beta = 12, \gamma = 1, \psi = 3, h = 1, a = 1.$$

ماتریس پسخوردی که مقادیر $\{-2/0.729, -4/7942, -5/4560, -12/4845\}$ از سیستم حلقه-بسته را به سمت چپ صفحه مختلط انتقال می‌دهد به صورت زیر به دست می‌آید،

$$K = \begin{bmatrix} -658/9295 & -643/0463 & -189/2523 & -24/8076 \end{bmatrix}.$$

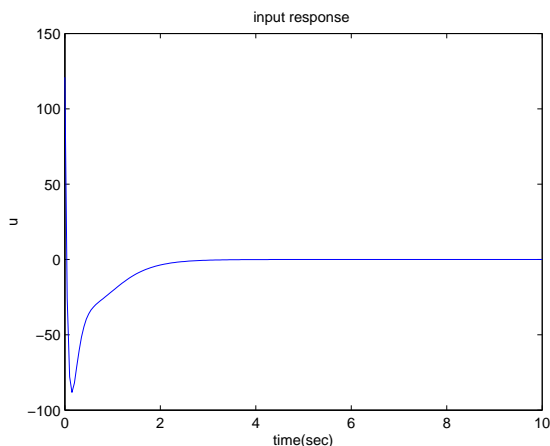
پاسخ سیستم در شکل ۱۷.۵ نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل‌های ۱۷.۵ و ۱۸.۵ مشاهده می‌شود، سیستم با بردار اولیه $x(0) = [-2, 3, -4, 1]^T$ پایدار مجانبی است.

ما این مثال را با روش ارائه شده در [۱۱۲، ۱۱۳] که براساس کنترل مد لغزشی است مقایسه می‌کنیم، روش پیشنهادی بدون پیدا کردن سطح لغزشی مناسب و بررسی شرایط پیچیده لازم و کافی مساله را حل می‌کند و پایدارسازی رده‌ای از سیستم‌های خطی مرتبه‌کسری تاخیری را بررسی می‌کند. همچنین با استفاده از تبدیلات تشابهی، ماتریس بهره به راحتی و با پیچیدگی محاسباتی کمتری به دست می‌آید.

مقایسه روش‌ها

در این بخش، مزایای روش پیشنهادی را ارائه می‌دهیم و آن را با روش‌های موجود مقایسه می‌کنیم:

- مزیت روش پیشنهادی، سادگی الگوریتم و کاهش پیچیدگی محاسباتی نسبت به روش‌های ارائه شده در [۱۱۰، ۱۱۳] است و همچنین با کمک روش پیشنهادی می‌توان ماتریس پسخورد با حداقل نرم را به دست آورد زیرا کمینه‌سازی ماتریس بهره باعث کاهش مصرف انرژی یا هزینه و کاهش نوسانات سیگنال‌های کنترلی و بهبود عملکرد سیستم می‌شود.



شکل ۱۸.۵: رفتار همگرایی مولفه‌های بردار ورودی در مثال ۴.۴.۵

- در مثال ۳.۴.۵، روش پیشنهادی را با روش [۱۱۰] برای سیستم‌های مثبت مقایسه کردیم، با توجه به مثبت بودن سیستم (۳۳.۵)، با کمک روش پیشنهاد شده، ماتریس پسخورد به آسانی به دست آمد. اما در روش بیان شده در [۱۱۰]، انتخاب مناسب و همزمان ماتریس‌های Λ و D آسان نیست. با این حال، این روش فقط برای سیستم‌های مثبت کاربرد دارد، اما روش پیشنهادی برای سیستم‌های خطی مرتبه کسری با تأخیر زمانی ثابت قابل اعمال است.
- در بسیاری از کاربردهای عملی در سیستم‌های کنترلی هدف، طراحی کنترلگری که باعث افزایش سرعت همگرایی به نقطه تعادل باشد، یکی از این روش‌ها تخصیص مقادیر ویژه در ناحیه مشخص شده در سمت چپ صفحه مختلط است به طوری که با روش پیشنهادی و انتخاب مناسب a می‌توان سرعت همگرایی را افزایش داد.
- برای سیستم‌های با مقیاس بزرگ نیز می‌توان، به راحتی با کمک روش پیشنهادی و روش PEVA، ماتریس پسخورد را به دست آورد، اما با روش [۱۱۰]، انتخاب مناسب ماتریس D ، با ابعاد بزرگ به راحتی امکان پذیر نیست. از شکل‌های ۱۲.۵ الی ۱۸.۵، مشاهده می‌شود که محدود کردن دامنه پایداری در یک بخش مشخص از صفحه مختلط و انتخاب درست a ، باعث افزایش سرعت همگرایی به نقطه تعادل و بهبود همگرایی سیستم حلقه- بسته می‌شود.

۵.۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادات

۱.۵.۵ نتیجه‌گیری

در این رساله مساله پایداری و کنترل رده‌ای از سیستم‌های تاخیری از مرتبه صحیح و کسری را مورد مطالعه و بررسی قرار دادیم. با توجه به اهمیت مساله پایداری در سیستم‌های تاخیری چندین روش ارائه شده را معرفی کردیم و برای سیستم‌های تاخیری روشی برپایه تبدیلات تشابهی پیشنهاد دادیم و به کمینه‌سازی نرم ماتریس پسخورد حالت به منظور کاهش هزینه و کاهش نوسانات سیگنال‌های ورودی سیستم پرداختیم. در ادامه رده‌ای از سیستم‌های تاخیری زمان-گسسته را معرفی و برای پایداری و کمینه‌سازی نرم ماتریس کنترل‌گر حل یک مساله برنامه‌ریزی غیرخطی را پیشنهاد کردیم. در انتها برای

رده‌ای از سیستم‌های زمان-پیوسته به بررسی پایداری سیستم در یک ناحیه مشخص از صفحه مختلط پرداختیم.

اکنون یک سوال منطقی پیش می‌آید. مزایای استفاده از روش پیشنهادی در مقایسه با دیگر روش‌های موجود برای پایداری سیستم‌های تاخیری چیست؟ برای پاسخ به این سوال برخی از مزیت‌های روش پیشنهادی به‌طور خلاصه بیان می‌شود:

(۱) سادگی الگوریتم و کاهش پیچیدگی محاسباتی روش PEVA برای پایداری نسبت به دیگر روش‌های ارائه شده از جمله تابع لامبرت، روش مستقیم لیاپانوف و غیره.

(۲) در بسیاری از مسائل مهندسی، محدودیت‌هایی روی متغیرهای کنترل اعمال می‌شود که این کار با پارامتری‌سازی ماتریس پسخورد حالت و روش پیشنهاد شده امکان پذیر است.

(۳) در بسیاری از مسائل مهندسی و عملی هدف طراحی کنترل‌گری است که باعث افزایش نرخ همگرایی به نقطه تعادل باشد. یکی از این روش‌ها تخصیص مقادیر ویژه در ناحیه مشخص از پایداری است که به کمک روش پیشنهادی و انتخاب مناسب a می‌توان به این هدف رسید.

(۴) مزیت روش PEVA نسبت به روش‌های دیگر این است که تنها برای تعداد بسیار کم از مقادیر ویژه نامطلوب سیستم در نظر گرفته می‌شود. بنابراین بعد سیستم را تا حد زیادی کاهش و پیچیدگی محاسباتی کمتری خواهیم داشت و روشی موثر برای سیستم‌های با مقیاس بزرگ خواهد بود.

(۵) کمینه‌سازی نرم ماتریس بهره باعث کاهش دامنه نوسانات سیگنال‌های کنترلی و در نتیجه کاهش مصرف انرژی یا هزینه می‌شود.

(۶) با تعریف بردار افزوده و تقریب مشتق گرانشالده-لتنیکوف سیستم‌های تاخیری مرتبه کسری گسسته-زمان به سیستم‌های مرتبه صحیح با تاخیر افزایشی تبدیل شد و با انتخاب مناسب طول حافظه سیستم فوق به سیستم استاندارد تبدیل شد، زیرا کار کردن با سیستم‌های استاندارد راحت‌تر است و با اعمال روش PEVA به راحتی پایداری رده‌ای از این سیستم‌ها بررسی می‌شود.

۲.۵.۵ پیشنهادات

برای کارهای آتی می‌توان،

- پایداری سیستم‌های تاخیری مرتبه صحیح و کسری در کمینه زمان
- کنترل بهینه زمانی سیستم‌های تاخیری مرتبه کسری
- پایداری سیستم‌های تاخیری مرتبه صحیح و کسری با پسخورد خروجی
- پایداری با کمینه نرم برای سیستم‌های توسعه یافته و دوبعدی مرتبه کسری
- کنترل سیستم‌های پیوسته-زمان متناوب مرتبه کسری در زاویه مشخص از صفحه مختلط
- گسسته سازی و شبیه سازی سیستم‌های زمان-پیوسته مرتبه کسری و بررسی پایداری آن‌ها

را پیشنهاد کرد.

مراجع

- [1] Quarteroni A. Sacco, R. and Saleri F. (2010), "Numerical mathematics", Springer Science, Business Media.
- [2] Datta B. N. (2010), "Numerical Linear Algebra and Applications", SIAM, 2th Edition.
- [3] Ogata K. (2010), "Modern Control Engineering", Prentice Hall, 5th Edition.
- [4] Datta B.N. (2003), "Numerical Methods for Linear Control Systems Design and Analysis" Academic Press, New York.
- [5] Kaczorek T. (2002), "Positive 1D and 2D systems", Springer Science, Business Media.
- [6] Monje C.A., Chen, Y.Q., Vinagre, B.M., Xue, D. and Batlle, V.F. (2010), "Fractional-order Systems and Controls: Fundamentals and Applications", Springer-Verlag, London.
- [7] م. ص. تواضعی و م. توکلی کاخکی، سیستم‌ها و کنترل کننده‌های مرتبه کسری، تهران، انتشارات دانشگاه خواجه نصیر الدین طوسی، ۱۳۹۴.
- [8] Vinagre M, Feliu V. (2002), "Modeling, and control of the dynamic system using fractional calculus, Application to electrochemical processes and exible structures", Process 41st IEEE Conference, **Decision and Control**, PP. 214-239.
- [9] Dzielinski A, Sierociuk D. and Sarwas G., (2010) "Some applications of fractional-order calculus" **Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical**, 58(4) pp. 583-592.
- [10] Das S., (2011), "Functional fractional calculus", Springer, Berlin, Germany.
- [11] Stanislawski R, Hunek WP. and Latawiec KJ, (2011) "Finite approximations of a discrete-time fractional derivative", **Proc. 16th Int. Conf. Methods and Models in Automation and Robotics 1** pp. 142-145.
- [12] Diethelm K., Ford N.J., Feed A.D. and Luchko Y., (2005) "Algorithms for the fractional calculus: A selection of numerical methods", **Computer methods in Applied Mechanics and Engineering**, 194 pp. 743-773.
- [13] Cmacho N.A., Mermoud M.A.D. and gallegas J.A., (2014) "Lyapunov functions for fractional-order systems", **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation** 19(9) pp. 2951-2957.

- [14] Wu C, (2017), PhD thesis, "Stability and control of caputo fractional-order systems", Waterloo, Ontario, Canada.
- [15] Karbassi S.M. and Bell D.J. (1993), "Parametric time-optimal control of linear discrete-time systems by state feedback-part 1: Regular kronecker invariants", **International journal of control** 57 pp. 817-830.
- [16] Karbassi S.M. and Bell D.J. (1993), "Parametric time-optimal control of linear discrete-time systems by state feedback-part 2: Irregular kronecker invariants", **International journal of control** 57 pp. 831-883.
- [17] Ataei M. and Enshae. A., (2011), "Eigenvalue assignment by a minimal state-feedback gain in LTI multivariable systems", **International journal of control** 84(12) pp. 1956–1964.
- [18] El-Ghezawi O.M., (2015) , "Simplified Methods for Eigenvalue Assignment ", **Advances in Pure Mathematics** 5 pp. 383-389.
- [19] El-Sayed M.E., Abdallah W.A. (2017), "On the Solution of the Eigenvalue Assignment Problem for Discrete-Time Systems" , **Journal of Applied Mathematics**, (doi:10.1155/2017/7256769).
- [20] Datta B. N. and Saad Y. (1991) "Arnoldi methods for large Sylvester-like observer matrix equation and partial pole placement" , **Linear Algebra and Application**, 154/156, pp. 225-244.
- [21] Saad Y. (1988) "Projection and deflation methods for partial pole assignment in linear state feedback", **IEEE Transactions on Automatic Control** 33(3) pp. 290-296.
- [22] Ramadan M. A. (1995) "On the projection methods for partial eigenvalue assignment in large systems" **Bulletin of the Faculty of Science. Assiut University**, 24 (2 – C), pp 103-112.
- [23] Ramadan MA, El Sayed EA. (2012), "A projection algorithm for partial eigenvalue assignment problem using the implicitly restarted Arnoldi method", **Journal of Vibration and Control** 19(3) pp. 367–375.
- [24] Zhang L. and Wang X.T., (2014), "Partial eigenvalue assignment for high-order system by multi-input control" , **Mechanical Systems and Signal Processing** 42 pp. 129–136.
- [25] Zhang L. (2016), "Multi-input partial eigenvalue assignment for high-order control systems with time delay" , **Mechanical Systems and Signal Processing** 72-73 pp. 376–382.
- [26] El-Sayed E.A and El Behady E.E. (2016), "Partial Eigenvalue Assignment for High-Order Linear Systems in a Time Delayed System" , **American Journal of Applied Sciences**, (doi: 10.3844/ajassp.2016.1006.1013).
- [27] Araujo J.M, (2018) "Partial eigenvalue assignment in linear time-invariant systems using state-derivative feedback and a left eigenvectors parametrization", **Journal Systems and Control Engineering**, (doi: 10.1177/0959651818811010).

- [28] Araujo J.M, (2018) "Robustness of the Quadratic Partial Eigenvalue Assignment using Spectrum Sensitivities for State and Derivative Feedback Designs", **Journal of Low Frequency Noise Vibration and Active Control**, doi: 10.1177/1461348418755614.
- [29] Datta, BN, Fellow, I and Sarkissian, DR. (2002), "Partial eigenvalue assignment in linear systems: existence, uniqueness and numerical solution", **Proceedings of the Mathematical Theory of Networks and Systems**, Notre Dame.
- [30] Katayama H, Ichikawa A. (1992), "pole assignment by state transition Graf" , **IEEE Transaction AC-37** pp. 1196–1201.
- [31] Karbassi S.M. (2001) "An Algorithm for Minimizing the Norm of State Feedback Controllers in Eigenvalue Assignment", **Computers and Mathematics with Applications** 41(10–11) pp. 1317-1326.
- [32] Karbassi S.M, Tehrani HA. (2002) "Parameterizations of the state feedback controllers for linear multivariable systems", **Computers and Mathematics with Applications** 44 pp. 1057-1065.
- [33] Bai, Zh, Datta, B.N and Wang, J. (2009) "Robust and minimum norm partial quadratic eigenvalue assignment in vibrating systems: A new optimization approach", **Mechanical Systems and Signal Processing**, (doi:10.1016/j.ymsp.2009.09.014).
- [34] Mao X, Dai H. (2013), "Minimum norm partial eigenvalue assignment of a high-order linear system with no spill-over", **Linear Algebra and its Applications** 438 pp. 213–2154.
- [35] Datta, S, Chakraborty, D. (2014), "Feedback Norm Minimization with Regional Pole Placement", **International Journal of Control** pp. 1–19, (doi:10.1080/0020717).
- [36] Kochetkov SA, Utkin VA. (2014), "Minimizing the Feedback Matrix Norm in Modal Control Problems", **Automation and Remote Control** 75(2) pp. 72–105.
- [37] Peretz, YJ. A , (2016) "Randomized approximation algorithm for the minimal-norm static-output-feedback problem", **Automatica** 63 pp. 221–234.
- [38] Datta, S. (2017), "Feedback Controller Norm Optimization for Linear Time-Invariant Descriptor Systems with Pole Region Constraint", **IEEE Transactions on Automatic Control** 62(6) pp. 2794–2806.
- [39] Rahimkhani P, Ordokhani Y. and Babolian E, (2017), "Muntz-Legendre wavelet operational matrix of fractional-order integration and its applications for solving the fractional pantograph differential equations", **Numerical Algorithms**, (doi:10.1007/s11075-017-0363-4).
- [40] Kim J.H. (2016), "Futher improvement Jensen inequality and application to stability of time-delyed systems", **Automatica** 64, pp. 121-125.

- [41] Seuret, A. (2017), "Wirtinger-like Lyapunov Krasovskii functionals for discrete-time delay systems", **IMA Journal of Mathematical Control and Information**, (doi: 10.1093/imamci/dnx002).
- [42] Park, M.J. Kwon, O.M. and Ryu, J.H., (2018) "Advanced stability criteria for linear systems with time-varying delays", **Journal of the Franklin Institute**, (doi: 10.1016/j.jfranklin.2017.11.029).
- [43] Zhang X.M, Hana, Q.L, Seuret A. and Gouaisbaut F. (2018) "An improved reciprocally convex inequality and an augmented Lyapunov–Krasovskii functional for stability of linear systems with time-varying delay", **Automatica**, (doi:10.1016/j.automatica.2017.04.048).
- [44] Li y. (2018) "Stabilization of Teleoperation Systems with Communication Delays: An IMC Approach", **Journal of Robotics**, (doi.org/10.1155/2018/1018086).
- [45] Roberto O and Fiorini P. (1998) "A Design and Control Environment for Internet-Based Telerobotics", **The International Journal of Robotics Research**.
- [46] Kharitonov Gu K. and Chen J. (2003), **Stability of Time-Delay Systems**, Birkhauser, Boston.
- [47] Fridman E. (2014), **Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control**, Springer, New York, London.
- [48] Liu Y-M and Fong I-K (2011), "On the controllability and observability of discretetime linear time-delay systems", **International Journal of Systems Science** 43(4) pp. 610–621.
- [49] Gu K, Niculescu SI (2001) "Further remarks on additional dynamics in various model transformations of linear delay systems" **IEEE Transactions on Automatic Control**, 46(3) pp. 497–500
- [50] Wu M, He Y, She JH (2010), **Stability analysis and robust control of time-delay systems**, Science Press/Springer.
- [51] Fridman E. (2002) "Stability of linear descriptor systems with delay: a Lyapunov-based approach", **Journal of Mathematical Analysis and Applications** 273 pp. 24-44.
- [52] Park P.G, Ko J, Jeong C. (2011) "Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays", **Automatica** 47 pp. 235-238.
- [53] Park, M.J. lee S.H, Kwon, O.M. and Ryu, O.J. (2017) "Augmented Lyapunov-Krasovskii Functional Approach to Stability of Discrete of large-scale systems", **IEEE Access, special section on analysis and synthesis**, (doi: 10.1109/ACCESS.2017.2767564).
- [54] Gielen, R.H. (2013) "Stability analysis and control of discrete-time systems with delay Eindhoven", **Technische Universiteit Eindhoven**, (doi:10.6100/IR747896).

- [55] Hetel L, Daafouz J. and Iung C. (2008) "Analysis and control of LTI and switched systems in digital loops via an event-based modelling", **International Journal of Control** 81(7) pp. 1125–1138.
- [56] Fridman E and Shaked U. (2005), "Stability and guaranteed cost control of uncertain discrete delay systems" **International Journal of Control** 78(4) pp. 235–246.
- [57] Tahmasbi N and Tehrani H. A., (2017), "Parameterization of Feedback Matrix in time-delay Systems", **The 9th Seminar on Linear Algebra and its Applications**, Tabriz, Iran, pp. 168-172.
- [58] Tahmasbi N. and Tehrani H. A., (2016), "Control and Stability of the Time-delay Linear Systems", **Journal of Information and Computing Science**, 11(4) pp. 291–297.
- [59] Schmid ,R. Pandey, A. and Nguyen, T. (2011), "Robust pole placement with Moore's algorithm".
- [60] Varga, A. (2000), "Robust and minimum norm pole assignment with periodic state feedback", **IEEE Transactions on Automatic Control** 45 pp. 1017-1022.
- [61] Bako, L., Chen D. and Lecoeuche S. (2011), "A numerical solution to the minimum-time control problem for linear discrete-time systems", arXiv:1109.3772v2.
- [62] Lei D, Liang Y, Xiao R. (2018), "A fractional model with parallel fractional Maxwell elements for amorphous thermoplastics", **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications** 490 pp. 465–475.
- [63] Lazarevic MP. (2009), "Finite-time stability analysis of fractional control of robotic time-delay systems: Gronwall's approach", **Mathematical and Computer Modelling** 49 pp. 475-481.
- [64] Misljen, M. Lazarevic M. (2015) "Non-Lyapunov Stability of the Fractional-Order Time-Varying Delay Systems", **Scientific Technical Review** 65(3) pp. 8-18.
- [65] Trigeassou J, Maamri N, Sabatier J, and Oustaloup A. (2011) "A Lyapunov approach to the stability of fractional differential equations", **Signal Process** 91 pp. 437-445.
- [66] Yang, Y. He, Y. Wang Y. and Wu, M. (2018) "Stability analysis of fractional-order neural networks: An LMI approach" , **Neurocomputing**, (doi:10.1016/j.neucom.2018.01.036).
- [67] Stanisławski, R., Rydel, M. and Latawiec, K.J. (2017), "Modeling of discrete-time fractional-order state space systems using the balanced truncation method", **Journal of the Franklin Institute** pp. 1–13.
- [68] Boukall, Y. Darouach. M. Zasadzinski, M. and Radhy, N.E. (2018), "Large-scale fractional-order systems: stability analysis and their decentralised functional observers design", **IET Control Theory and Applications**, (doi:10.1049/iet-cta.2017.0264).

- [69] Manisha K. Bhole M. and Patil D., (2012) ,"Time and Frequency Domain Analysis of the Linear Fractional-order Systems" ,**International Conference and Workshop On Emerging Trends In Technology**.
- [70] Caponetto R, Dongola G, Fortuna L and Peteras I, (2010), "Fractional order systems modeling and control application", **World Scientific**, singapor.
- [71] Matignon D. (1998), "Stability properties for generalized functional differential systems", **ESAIM proceedings** 5, pp. 145-158.
- [72] Bettayeb, M. and Djennoune, S. (2008), "New Results on the Controllability and Observability of Fractional Dynamical Systems", **Journal of Vibration and Control** 14 pp. 1531-1541.
- [73] Kaczorek T. (2011), **Selected Problems of Fractional Systems Theory**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [74] Guermah S, Djennoune S and Bettayab M, (2010), **Discrete-time fractional-order systems: modeling and stability**, chapter 8, pp. 183-212.
- [75] Kaczorek T. (2010) "Stability and stabilization of positive fractional linear systems by state-feedbacks", **Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences**, 58(4) pp. 537-554.
- [76] Hwang, C. and Cheng, Y.C. (2006), "A numerical algorithm for stability testing of fractional delay systems", **Automatica** 42(5) pp. 825-831.
- [77] Kaczorek, T. "Positivity and stabilization of fractional discrete-time systems with delays", **IEEE International Conference on Control and Automation Christchurch**, New Zealand, 9-11 Dec 2009.
- [78] Lazarevic, M. (2011), "Stability and stabilization of fractional order time-delay systems", **Scientific Technical Review** 61(1) pp. 31-44.
- [79] Li, H. Zhong, S.M. and Li, H.B. (2014), "stability analysis of fractional order systems with time-delay", **International Scholarly and scientific Research and Innovation** 8(4) pp. 660-663.
- [80] Rad, S. and Balochian, S. (2014), "An optimal regulator design for fractional order linear systems with input time-delay", **Mathematics and Computer Science**, 9 pp. 263-270.
- [81] Pakzad, M.A. Pakzad, S. and Nekoui, M.A. (2015), "Exact method for the stability analysis of time delayed linear time-invariant fractional-order systems", **IET Control Theory Application** 9(16) pp. 2357-2368.
- [82] Ammour, A.S. Djennoune, S. Aggoune, W. and Bettayeb, M. (2016) "Stabilization of fractional-order linear systems with state and input delay", **Asian Journal of Control** 18(1) pp. 1-9.

- [83] Hong, L. Zhong, S.M. Biao L.H. (2014), "Stability Analysis of Fractional Order Systems with Time Delay", **International Journal of Mathematical Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering** 8(4) pp. 660-663.
- [84] Misljen M, Lazarevic M. (2015), "Non-Lyapunov Stability of the Fractional-Order Time-Varying Delay Systems", **Scientific Technical Review** 65(3) pp. 8-18.
- [85] Hu J.B, Lu J.P, Zhang H.B. and Zhao L.D. (2015) "Lyapunov stability theorem about fractional system without and with delay", **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation** 20(3) pp. 905-913.
- [86] Cermak, J. Hornicek, J. and Kisela, T. (2016), "Stability for fractional differential systems with a time-delay", **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation** 31 pp. 108-123.
- [87] Zhang H, Ye R, Cao J, Ahmed A, Li X, et al. (2018), "Lyapunov Functional Approach to Stability Analysis of Riemann-Liouville Fractional Neural Networks with Time-Varying Delays", **Asian Journal of Control** 20(6) pp. 1938-1951.
- [88] Rihan F.A, Lakshmanan S, Hashish H.A and Ahmed E. (2018), "Fractional-order delayed predator-prey systems with Holling type-II functional response", **Nonlinear Dynamic**, (doi:10.1007/s11071-015-1905-8).
- [89] Naifar O, Nagy A.M, Ben Makhlouf A, Kharrat M and Hammami M.A (2018) "Finite-time stability of linear fractional-order time-delay systems" **International Journal of Robust Nonlinear Control** 19 pp. 1-8.
- [90] Tahmasbi N. and Tehrani H. A. (2017), "Norm Minimization Controller in Fractional Systems with delay", **The 9th Seminar on Linear Algebra and its Applications**, Tabriz University, Tabriz, Iran, pp. 173-177.
- [91] Tahmasbi N., Tehrani H. A. and Esmaeili J. (2019), "Practical stabilization of Time-delay fractional-order systems by parametric controllers", **ISA Transactions**, Accepted, In press.
- [92] Ruszewski A. (2016) "Practical and asymptotical stability of fractional discrete-time scalar systems described by a new model", **Archives of Control Sciences** 26(4) pp. 441-452.
- [93] Kaczorek T. (2008), "Practical stability of positive fractional discrete-time linear systems", **Bulletin of the polish academy of sciences technical science** 56(4).
- [94] Buslowicz M, and Ruszewski A. (2013) "Necessary and sufficient conditions for stability of fractional discrete-time linear state-space systems", **Bulliten Poland Academic Science Technical Science** 61(4) pp. 779-786.
- [95] Yang H and Jia Y, (2018) "New Conditions and Numerical Checking Method for the Practical Stability of Fractional Order Positive Discrete-Time Linear Systems", (doi:10.1515/ijnsns-2018-0063).

- [96] Kaczorek, T. (2009) "stability of positive continues-time linear systems with delays", **Bulletin of the polish academy of sciences technical science** 57(4) pp. 395-398.
- [97] Furuta K, and Kim S.B. (1987) "Pole assignment in a specified disk". **IEEE Transactions on Automatic Control** 32 pp. 423-427.
- [98] Chou J.H. (1991) "Pole assignment robustness in a specified disk", **Systems and Control Letters** 16 pp.41-44.
- [99] Tahmasbi N., Tehrani, H.A and Ordokhani Y. (2019), " Control a class of fractional-order systems with delay in a specified sector", **Journal of Solid and Fluid Mechanics**, Accepted.
- [100] Figueroa J.L, and Romagnoli J.A. (1994) "An algorithm for robust pole assignment via polynomial approach", **IEEE Transactions on Automatic Control** 3 pp. 831- 835.
- [101] Yuan, L. Achenie L.E.K and Jiang W. (1996) "Linear quadratic optimal output feedback control for systems with poles in a specified region", **International journal of control** 64 pp. 1151- 1164.
- [102] Benner P. and Castillo M. (2001) "Partial stabilization of large-scale discrete-time linear control systems", **Technical Report**, University of Bremen, Germany.
- [103] Tehrani H.A (2008) "Assignment of Eigenvalues in a Disc $D(c, r)$ of Complex Plane with Application of the Gerschgorin Theorem", **World Applied Sciences Journal** 5(5) pp. 576-581.
- [104] Ahsani Tehrani H. (2013) "Stabilization of dynamic systems by localization of eigenvalues in a specified Interval", **Journal of Mathematics and Computer Science** 7 pp. 144-153.
- [105] Ayatollahi M (2013) "Maximal and minimal eigenvalue assignment for discrete-time periodic systems by state feedback", **Optimization Letters** 7 pp. 1119-1123.
- [106] Franke M (2014) "Eigenvalue assignment by static output feedback on a new solvability condition and the computation of low gain feedback matrices", **International Journal of Control** 87 pp. 64-75.
- [107] Liu M, Jing Y and Zhang S (2004) "Regional pole assignment for uncertain delta-operator systems", **Journal of Control Theory and Applications** pp. 406-410.
- [108] Grammont L. and Largillier A. (2006) "Krylov method revisited with an application to the localization of eigenvalues", **Numerical Functional Analysis and Optimization** 27 pp. 583-618.
- [109] Ahsani Tehrani H, (2014) "Localization of Eigenvalues in Small Specified Regions of Complex Plane by State Feedback Matrix", **Journal of Sciences, Islamic Republic of Iran** 25(2) pp. 157-164.

- [110] Kaczorek T. (2010) "Stabilization of fractional positive continuous-time linear systems with delays in sectors of left half complex plane by state-feedbacks", **Control and Cybernetics** 39(3) pp. 783-795.
- [111] Lazarevic, MP (2006) "Finite time stability analysis of PD fractional control of robotic time-delay systems" **Mechanics Research Communications** 33 pp. 269-279.
- [112] Binazadeh T, Shafei M. (2013) "Output tracking of uncertain fractional-order nonlinear systems via a novel fractional-order sliding mode approach", **Mechatronics** 23 pp. 888–892.
- [113] Bandyopadhyay, B. and Kamal, S. (2015) **Stabilization and Control of Fractional Order Systems: A Sliding Mode Approach**, Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Augmented	افزوده
State Vector	بردار حالت
Output Vector	بردار خروجی
Left Eigenvector	بردار ویژه چپ
Asymptotically Stable	به‌طور مجانبی پایدار
Stability	پایداری
Stabilization	پایدارسازی
Bounded Input-Bounded Output Stability	پایداری ورودی کران دار-خروجی کران دار
Practical Stability	پایداری عملی
Parameterization	پارامتری‌سازی
Feedback	پس‌خورد
Time-Delay	تاخیر زمانی
Lyapunov Function	تابع لیاپانوف
Mittag-Leffler Function	تابع میتاگ-لفلر
Similarity Transformation	تبدیلات تشابهی
Assignment Eigenvalue	تخصیص مقدار ویژه
Time Varying	تغییرپذیر با زمان
Pade Approximation	تقریب پاده
Open-Loop	حلقه-باز
Closed-Loop	حلقه-بسته
Solution	جواب
Rank	رتبه
Continous-Time	زمان-پیوسته
Discrete-Time	زمان-گسسته
Fractional-Order System	سیستم مرتبه کسری
Positive Systems	سیستم مثبت
Memory Length	طول حافظه
Spectrum	طیف
Elementary Row Operations	عملیات سطری مقدماتی

Standard Echelon Form	فرم استاندارد اشلون
Vector Companion Form	فرم همدم برداری
Pesudo-State Space	فضای شبه حالت
Minimization	کمینه سازی
Cayley-Hamilton Theorem	قضیه کیلی-همیلتون
Controlability	کنترل پذیری
Controller	کنترل کننده
Convolution	کانولوشن
State Transition Graph	گراف انتقال حالت
State Feedback Matrix	ماتریس پسخورد حالت
Riccati Equation	معادله ریکاتی
Characteristic Equation	معادله مشخصه
Roth-Horwitz Criteria	معیار راث-هورویتز
Eigenvalue	مقدار ویژه
Delay-Independent	مستقل از تاخیر
Caputo Derivative	مشتق کاپوتو
Fractional-Order Drivative	مشتق مرتبه کسری
Observability	مشاهده پذیری
Riemann-Liouville Derivative	مشتق ریمان-لیوویل
Grunwaid-Letnikov	مشتق گرانوالد-لتنیکوف
Delay Differential Equations	معادلات دیفرانسیل تاخیری
Positive Definit	معین مثبت
unstable	ناپایدار
Linear Matrix Inequality	نامساوی ماتریسی خطی
Time Invariant	ناوردای زمانی
Kronecker Invariant	ناوردای کرونکر
Equilibrium Point	نقطه تعادل
Norm	نرم
Delay-Dependent	وابسته به تاخیر

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Assignment Eigenvalue	تخصیص مقادیر ویژه
Asymptotically Stability	به‌طور مجانبی پایدار
Augmented	افزوده
Bounded-Input Bounded-Output Stability	پایداری ورودی کران دار-خروجی کران دار
Cayley-Hamilton Theorem	قضیه کیلی-همیلتون
Characteristic Equation	معادله مشخصه
Caputo Derivative	مشتق کاپوتو
Closed-Loop	حلقه بسته
Control Law	کانولوشن
Controlability	کنترل پذیری
Controller	کنترل گر
Continous-Time	زمان-پیوسته
Delay Diffrential Equations	معادلات دیفرانسیل تاخیری
Delay-Independent	مستقل از تاخیر
Delay-Dependent	وابسته تاخیر
Descrit-Time	زمان-گسسته
Eigenvalue	مقدار ویژه
Elementary Row Operations	عملیات سطری مقدماتی
Equilibrium Poin	نقطه تعادل
Feedback	پس‌خورد
Fractional-Order Drivative	مشتق مرتبه کسری
Fractional-Order System	سیستم مرتبه کسری
Grunwaid-Letnikov Drivative	مشتق گرانوالد-لتنیکوف
Kronecker Invariant	ناوردای کرونگر
Left Eigenvector	بردار ویژه چپ
Linear Matrix Inequality	نامساوی ماتریس خطی
Lypunov Function	تابع لیاپانوف
Memory Length	طول حافظه
Minimization	کمینه‌سازی

Mittag-Leffler Function	تابع میتاگ- لفلر
Norm	نرم
Observability	مشاهده پذیری
Open-Loop	حلقه باز
Output Vector	بردار خروجی
Pade Approximation	تقریب پاده
Parameterization	پارامتری‌سازی
Pesudo-State Space	فضای شبه حالت
Positive Definit	معین مثبت
Positive Systems	سیستم مثبت
Practical Stability	پایداری عملی
Rank	رتبه
Riccati Equation	معادله ریکاتی
Riemann-Liouville Derivative	مشتق ریمان- لیوویل
Roth-Horwitz Criteria	معیار راث- هورویتز
Similarity Transformation	تبدیلات تشابهی
Solution	جواب
Spectrom	طیف
Stablity	پایداری
Stabilization	پایدارسازی
Standard Echelon Form	فرم استاندارد اشلون
State Vector	بردار حالت
State Feedback Matrix	ماتریس پس‌خورد حالت
State Transition Graph	گراف انتقال حالت
Time-Delay	تاخیر زمانی
Time Invariant	ناوردای زمانی
Time Varying	تغییرپذیر با زمان
Vector Companion Form	فرم همدم برداری
Unstable	ناپایدار

Abstract

This thesis considers a class of time-delayed fractional-order and integer-order systems and examines the stability and controller design methods for these systems. One of the phenomena that occur in most physical systems is the existence of time-delay, so stability analysis and controller design in the presence of delay are necessary. Also in controller design, since system input is costly, so to reduce costs and the amplitude of the control signal fluctuations, the parameter state feedback matrix, and determine the parameter values in such a way that the norm matrix of the feedback is minimized and the system time control is optimized. This thesis is organized into two parts. The first part examines some of the proposed methods in the field of stability analysis and controller design integer-order delay systems and fractional-order systems. In the second part, we propose a method based on similarity transforms for the stabilization of continuous and discrete-time systems, as well as the minimization of the norm feedback matrix, we do this by solving a nonlinear programming problem and comparing it with the methods presented. Finally, the advantages of the proposed methods using simulation are examined on different examples and the results show the simulation, effects, and efficiency of the proposed method.

keywords: Time delay, Fractional-order derivative, Practical stability, Partial eigenvalues, Norm minimum, Similarity transforms, State feedback



Shahrood University of Technology

Faculty of Mathematical Sciences

PhD Thesis in: Numerical Analysis and Control

**Time-optimal control and stabilization of
time-delay systems with fractional-order**

By: Narges Tahmasbi

Supervisors

Dr. Hojjat Ahsani Tehrani

Dr. Yadollah Ordokhani

Nov 2019