

الحمد لله
الذي هدانا لهذا
الذي كنا لنهتدي لولا
أن هدانا الله



دانشکده علوم ریاضی

رساله دکتری آنالیز عددی - آنالیز عددی و کنترل

تقریب جواب‌های مساله کنترل بهینه تحت معادله برگر به روش شبه طیفی چبیشف

نگارنده: فاطمه محمدی زاده سوروئی

استاد راهنما
دکتر حجت احسنی طهرانی

استاد مشاور
دکتر محمد هادی نوری اسکندری

تیر ماه ۱۳۹۸



فرم شماره 12: صورت جلسه دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

بدینوسیله گواهی می شود خانم فاطمه محمدی زاده سورونی دانشجوی دکتری رشته ریاضی کاربردی - آنالیز عددی و کنترل به شماره دانشجویی 9301335 ورودی مهر سال 93 در تاریخ 98/4/1 از رساله خود با عنوان: تقریب جواب های مساله کنترل بهینه تحت معادله برگز به روش شبه طیفی چیشف دفاع و با اخذ نمره 19.7 به درجه عالی نائل گردید.

<input checked="" type="checkbox"/> الف) درجه عالی: نمره 19-20	<input type="checkbox"/> ب) درجه بسیار خوب: نمره 18/99 - 17
<input type="checkbox"/> ج) درجه خوب: نمره 16/99 - 15	<input type="checkbox"/> د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد
<input type="checkbox"/> ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد	

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبیه علمی	امضاء
1	دکتر حجت احسنی طهرانی	استاد راهنما	دانشیار	
2	دکتر محمد هادی نوری اسکندری	استاد مشاور	استادیار	
3	دکتر سهراب عفتی	استاد مدعو خارجی	استاد	
4	دکتر علیرضا ناظمی	استاد مدعو داخلی	دانشیار	
5	دکتر مهدی قوتمند	استاد مدعو داخلی	استادیار	
6	دکتر ابراهیم هاشمی	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	استاد	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم بعمل آید.

رئیس دانشکده و رئیس هیأت داوران: دکتر ابراهیم هاشمی
تاریخ و امضاء:



تقدیم به

پدرم، که برای بالندگی ام خمید...

مادرم، که برای سگوفایی ام پشرد...

آنان که توانشان رفت تا به توانایی برسم و مویشان سپید گشت تا رویم
سپید بماند.

استاد مشاور بزرگوارم، به دلیل یاری ها و راهنمایی های بی چشم داشت
ایشان...

در برابرشان زانوی ادب بر زمین می نهم.

تشکر و قدردانی

تشکر و سپاس از استاد فرزانه جناب آقای دکتر احسنی طهرانی که به عنوان استاد راهنما در مراحل مختلف این پایان نامه همواره با صبر و کوشش و روحیه در کنار من بود و در طول مدت تحصیل از راهنمایی‌های اخلاقی و علمی ایشان بهره‌جستامم. جناب آقای دکتر نورعلی اسکندری به عنوان استاد مشاور و مسئولیت سنگینی را قبول زحمت فرمودند و مطمئنم بدون حمایت‌ها، راهنمایی‌ها و روحیه بخش‌های ایشان، انجام بخش مهمی از این رساله میسر نمی‌شد. امیدوارم بتوانم در آینده نزدیک پاسخگویی محبت‌هایشان بوده و موجبات افتخار ایشان به شاگرد خود را فراهم نمایم. بدین وسیله از بزرگواری، حسن سلوک و حمایت بی‌دریغ ایشان تشکر کرده و برای ایشان طول عمر توام با سربلندی را آرزو مندم.

از اساتید گرانقدر جناب آقای دکتر عنفتی از دانشگاه فردوسی مشهد، آقای دکتر ناظمی و آقای دکتر قوت‌مند از دانشگاه صنعتی شاهرود که زحمت داورمی این رساله را بر عهده گرفتند نهایت سپاسگذاری را به‌عل آورده و از نظرات سودمندانه ایشان کمال تشکر را دارم.

از سازه‌مختاری و سایر دوستان عزیزم که همراهم، همیشگی من بوده‌اند و اوقات خوشی را در کنار هم سپری کرده‌ایم، سپاسگزارم. و در پایان از تمامی عزیزانی که در این دوره مرایاری کرده‌اند نهایت تشکر و قدردانی را ابراز می‌نمایم.

فاطمه محمدی زاده سوروئی

تیر ماه ۱۳۹۸

تعمدنامه

اینجانب فاطمه محمدی زاده سوروئی دانشجوی دکتری رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان تقریب جواب‌های مساله کنترل بهینه تحت معادله برگر به روش شبه طیفی چبیشف، تحت راهنمایی حجت احسنی طهرانی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فاطمه محمدی زاده سوروئی

تیر ماه ۱۳۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

با توجه به اهمیت معادله برگر و کاربرد آن در فیزیک و مهندسی و ماهیت غیرخطی این معادله با مشتقات جزئی، در این رساله ابتدا یک روش عددی کارا براساس روش شبه طیفی چبیشف برای این معادله ارائه می‌دهیم، سپس، مساله کنترل بهینه تحت این معادله را در نظر گرفته و شرایط بهینگی متناظر این مساله را بیان می‌کنیم. در ادامه، با روش شبه طیفی چبیشف و شرایط بهینگی به دست آمده یک جواب بهینه تقریبی برای مساله به دست می‌آوریم. همچنین در این رساله، همگرایی روش شبه طیفی چبیشف برای معادله برگر و کنترل بهینه آن را نیز مورد بررسی قرار می‌دهیم. به‌علاوه، جواب‌های تقریبی برای معادله برگر کسری با روش شبه طیفی چبیشف کسری به دست می‌آوریم. در نهایت، به‌ترتیب به مطالعه و آنالیز یکتایی و وجود جواب‌های معادله برگر کسری و مساله کنترل بهینه تحت این معادله می‌پردازیم و قضایای مرتبط با آن را ثابت می‌کنیم.

کلمات کلیدی: روش شبه طیفی چبیشف، معادله برگر، کنترل بهینه معادله برگر، همگرایی، شرایط بهینگی، معادله برگر کسری.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1- Fatemeh Mohammadizadeh, Hojjat Ahsani Tehrani, Svetlin. G. Georgiev and Mohammad Hadi Noori Skandari, "On an optimal control problem associated to a class of fractional Burgers' equations", Asian-European Journal of Mathematics, 13(1), (2020).

2-Fatemeh Mohammadizadeh, Hojjat Ahsani Tehrani and Mohammad Hadi Noori Skandari, "Chebyshev pseudo-spectral method for optimal control problem of Burgers' equation", Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization, (2019) Accepted.

3- Svetlin. G. Georgiev, Fatemeh Mohammadizadeh, Hojjat Ahsani Tehrani and Mohammad Hadi Noori Skandari, "A Novel Proof on the Uniqueness of the Solution of Fractional Control Problem Governed by Burgers Equations", Journal of Partial Differential Equations, 32, (2019) Accepted.

4- Svetlin. G. Georgiev, Fatemeh Mohammadizadeh, Hojjat Ahsani Tehrani and Mohammad Hadi Noori Skandari (2018), "On the solution of fractional Burgers' equation and its optimal control problem", Analysis in Theory and Applications, (2019) Accepted.

5- Mohammad Hadi Noori Skandari, Fatemeh Mohammadizadeh, Hojjat Ahsani Tehrani and Svetlin. G. Georgiev, "A convergent spectral collocation method for Burgers equation", submitted.

Conference articles

1-Fatemeh Mohammadizadeh, Hojjat Ahsani Tehrani and Mohammad Hadi Noori Skandari (2017), An approximate solution for Burgers-Fisher equation, 48th Annual Iranian Mathematics Conference, Bu-Alisina University, Hamedan, Iran.

2-Fatemeh Mohammadizadeh, Hojjat Ahsani Tehrani and Mohammad Hadi Noori Skandari (2017), An approximate solution for optimal control problem of Burgers equation, The 1th National Seminar on Control and Optimization, Ferdowsi University of Mashhad, Iran.

3-Svetlin. G. Georgiev, Fatemeh Mohammadizadeh, Hojjat Ahsani Tehrani and Mohammad Hadi Noori Skandari (2018), On the optimal control problem associated to fractional partial differential equation, The 7th International Conference on Pure and Applied Mathematics, Budapest, Hungary.

فهرست مطالب

م	فهرست تصاویر
س	فهرست جداول
۱	پیش‌نیازها از حسابان کسری و معرفی چند جمله‌ای‌های مرتبه کسری
۱	۱.۱ تاریخچه‌ای از حسابان کسری
۳	۲.۱ توابع پرکاربرد در حسابان کسری
۴	۳.۱ انواع مشتق و انتگرال کسری
۵	۱.۳.۱ انتگرال و مشتق ریمن-لیوویل
۶	۲.۳.۱ انتگرال و مشتق لیوویل
۶	۳.۳.۱ مشتق کسری کاپاتو
۷	۴.۳.۱ مشتق و انتگرال ریمن-لیوویل اصلاح‌شده یا جوماری
۸	۵.۳.۱ مشتق و انتگرال گرانوالد-لتنیکوف
۹	۶.۳.۱ مشتق و انتگرال کاپاتو-فابریسیو
۱۰	۴.۱ خواص انتگرال و مشتقات کسری
۱۰	۱.۴.۱ خواص مشتق و انتگرال مرتبه کسری ریمن-لیوویل
۱۱	۲.۴.۱ خواص مشتق کسری کاپاتو
۱۳	۵.۱ چند جمله‌ای‌های لاگرانژ مرتبه کسری
۱۴	۶.۱ چند جمله‌ای‌های چبیشف
۱۵	۱.۶.۱ تعامد چند جمله‌ای‌های چبیشف
۱۵	۲.۶.۱ انواع نقاط هم‌محلی و درونیابی
۱۷	۲ انواع مختلف معادله برگر و حل آنها به روش شبه طیفی چبیشف
۱۷	۱.۲ مقدمه
۱۸	۲.۲ معادله برگر
۱۹	۱.۲.۲ روش شبه طیفی چبیشف برای معادله برگر
۲۱	۳.۲ همگرایی روش

۲۷	مثال‌های عددی	۴.۲
۳۹		مساله کنترل بهینه معادله برگر	۳
۳۹	مقدمه	۱.۳
۴۰	مساله کنترل بهینه تحت معادله برگر	۲.۳
۴۰	شرایط بهینگی	۳.۳
		روش شبه طیفی چبیشف برای تقریب جواب‌های بهینه مساله	۴.۳
۴۴	کنترل بهینه	
۴۶	همگرایی روش	۵.۳
۵۱	مثال‌های عددی	۶.۳
۶۱		وجود جواب و یکتایی مساله کنترل بهینه برگر کسری	۴
۶۱	مقدمه	۱.۴
۶۲	مقدمات و تعاریف	۲.۴
۶۵	نتایج اصلی	۳.۴
۶۵	بیان مساله ۱.۳.۴	
۶۶	جواب مساله ۲.۳.۴	
۷۷		حل معادله برگر کسری به روش شبه طیفی چبیشف کسری	۵
۷۷	مقدمه	۱.۵
۷۸	معادلات برگر کسری	۲.۵
۷۸	روش شبه طیفی چبیشف کسری	۳.۵
۸۰	مثال‌های عددی	۴.۵
۹۰		مراجع	
۹۱		مراجع	

فهرست تصاویر

۲۸	۱.۴.۲	جواب تقریبی مثال	۱.۲
۲۹	۱.۴.۲	خطای مطلق $E(.,.)$ مثال	۲.۲
			جواب‌های دقیق و تقریبی برای $t = -0/1, -0/05, -0/03$ مثال	۳.۲
۲۹	۱.۴.۲		
۳۰	۱.۴.۲	خطاهای $E_{\bar{t}}$ مثال	۴.۲
۳۰	۲.۴.۲	جواب تقریبی مثال	۵.۲
۳۱	۲.۴.۲	خطای مطلق $E(.,.)$ مثال	۶.۲
۳۱	۲.۴.۲	خطاهای $E_{\bar{t}}$ مثال	۷.۲
۳۳	۳.۴.۲	جواب تقریبی مثال	۸.۲
۳۳	۳.۴.۲	خطای مطلق $E(.,.)$ مثال	۹.۲
۳۴	۳.۴.۲	جواب‌های دقیق و تقریبی برای $t = 2, 6, 10$ مثال	۱۰.۲
۳۴	۳.۴.۲	خطاهای $E_{\infty}(\bar{t})$ مثال	۱۱.۲
۳۵	۴.۴.۲	جواب تقریبی مثال	۱۲.۲
۳۵	۴.۴.۲	خطای مطلق $E(.,.)$ برای مثال	۱۳.۲
۳۶	۴.۴.۲	جواب‌های دقیق و تقریبی برای $t = 2, 6, 10$ مثال	۱۴.۲
۳۷	۵.۴.۲	جواب تقریبی مثال	۱۵.۲
۳۷	۵.۴.۲	خطای مطلق $E(.,.)$ مثال	۱۶.۲
۳۸	۵.۴.۲	جواب‌های دقیق و تقریبی مثال	۱۷.۲
۵۲	۱.۶.۳	تقریبی از متغیر حالت بهینه $\nu = 0/05$ مثال	۱.۳
۵۳	۱.۶.۳	تقریبی از متغیر کنترل بهینه $\nu = 0/05$ مثال	۲.۳
۵۴	۲.۶.۳	تقریبی از متغیر حالت بهینه مثال	۳.۳
۵۵	۲.۶.۳	تقریبی از متغیر کنترل بهینه مثال	۴.۳
۵۷	۳.۶.۳	حالت بهینه تقریبی مثال	۵.۳
۵۸	۳.۶.۳	کنترل بهینه تقریبی مثال	۶.۳
۵۹	۴.۶.۳	حالت بهینه تقریبی مثال	۷.۳
۶۰	۴.۶.۳	کنترل بهینه تقریبی مثال	۸.۳

۸۱	۱.۴.۵	مثال $N = ۸$ و $\alpha = ۵\%$	جواب تقریبی برای	۱.۵
۸۲	۱.۴.۵	مثال آمده	خطای مطلق جواب تقریبی به دست	۲.۵
۸۳	۲.۴.۵	مثال $N = ۱۰$ و $\alpha = ۵\%$	جواب تقریبی برای	۳.۵
۸۴	۲.۴.۵	مثال $N = ۱۰$ و $\alpha = ۵\%$	خطای مطلق برای	۴.۵
۸۵	۲.۴.۵	مثال $N = ۱۵$ و $\alpha = ۷.۵\%$	خطای مطلق برای	۵.۵
۸۶	۲.۴.۵	مثال $N = ۲۵$ و $\alpha = ۹\%$	خطای مطلق برای	۶.۵
۸۶	۳.۴.۵	مثال $N = ۱۵$ و $\alpha = ۷.۵\%$	جواب تقریبی برای	۷.۵
۸۶	۳.۴.۵	مثال	خطای مطلق	۸.۵
۸۷	۴.۴.۵	مثال $N = ۱۰$ و $\alpha = ۸\%$	جواب تقریبی برای	۹.۵
۸۷	۴.۴.۵	مثال $N = ۱۲$ و $\alpha = ۷\%$	خطای مطلق برای	۱۰.۵
۸۸	۴.۴.۵	مثال $N = ۱۰$ و $\alpha = ۸\%$	خطای مطلق برای	۱۱.۵
۸۸	۴.۴.۵	مثال $N = ۷$ و $\alpha = ۹\%$	خطای مطلق برای	۱۲.۵

فهرست جداول

۲۸	۱.۴.۲	مقایسه خطای $E_{\gamma}(\bar{t})$ برای مثال	۱.۲
۳۰	۲.۴.۲	مقایسه خطای $E_{\gamma}(\bar{t})$ برای مثال	۲.۲
۳۲	۳.۴.۲	مقایسه خطای $E_{\infty}(\bar{t})$ برای مثال	۳.۲
۳۵	۴.۴.۲	مقایسه خطای $E_{\infty}(\bar{t})$ برای مثال	۴.۲
۳۶	۵.۴.۲	مقایسه خطاهای $E_{\gamma}(\bar{t})$ و $E_{\infty}(\bar{t})$ برای مثال	۵.۲
۵۱	۱.۶.۳	مقایسه مقادیر تابع هدف مثال	۱.۳
۵۶	۲.۶.۳	مقادیر تقریبی تابع هدف مثال	۲.۳
۵۶	۳.۶.۳	مقادیر تقریبی تابع هدف مثال	۳.۳
۵۶	۴.۶.۳	مقادیر تقریبی تابع هدف مثال	۴.۳
۸۱	۱.۴.۵	مقایسه خطای $E_{\infty}(t)$ برای مثال	۱.۵
۸۳	۲.۴.۵	مقایسه خطای $E_{\infty}(t)$ برای مثال	۲.۵
۸۴	۳.۴.۵	مقایسه خطای $E_{\infty}(t)$ برای مثال	۳.۵
۸۵	۴.۴.۵	خطای $E_{\infty}(t)$ برای مثال	۴.۵

فصل ۱

پیش‌نیازها از حسابان کسری و معرفی چند جمله‌ای‌های مرتبه کسری

حساب کسری بر پایه تعمیمی از مشتق‌ها و انتگرال‌های مرتبه صحیح به مرتبه غیر صحیح است. چون مدل‌های مرتبه کسری اغلب مناسب‌تر از مدل‌های مرتبه صحیح برای توصیف سیستم‌های فیزیکی هستند، رشد قابل توجهی در این حوزه طی دهه‌های اخیر ایجاد شده است [۱]–[۳].

۱.۱ تاریخچه‌ای از حسابان کسری

تاریخچه نظریه مشتقات از مرتبه غیر صحیح و یا کسری به یادداشت لایبنیتز^۱ برای هوپیتال^۲ در ۳۰ سپتامبر ۱۹۶۵ باز می‌گردد. در این یادداشت، معنای مشتق مرتبه $\frac{1}{2}$ مورد بحث قرار گرفته است. در سال ۱۷۷۲ لاگرانژ^۳ قاعده‌ی زیر را برای عملگر دیفرانسیلی از مرتبه صحیح توسعه داد

$$\frac{d^m}{dx^m} \frac{d^n}{dx^n} = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}.$$

¹Leibniz

²Hopital

³Lagrange

اویلر^۴ در سال ۱۷۸۳ روی تصاعد اعداد کار کرد و برای اولین بار تابع گاما را به عنوان تعمیم فاکتوریل معرفی کرد. در سال ۱۸۱۲، لاپلاس^۵ مفهوم مشتق کسری را با استفاده از انتگرال تعریف کرد و در سال ۱۸۱۹ اولین نماد مشتق از مرتبه دلخواه معرفی شد. در این سال ریاضیدانی به نام لاکرویکس^۶ با شروع از تابع $y = x^m$ ، $m \in \mathbb{N}$ مشتقات کسری با مرتبه دلخواه را با تعمیم فرمول مشتق معمولی زیر مورد توجه قرار داد

$$\frac{d^m x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

که تعمیم آن برای هر m و ν به صورت زیر است

$$\frac{d^\nu x^m}{dx^\nu} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\nu+1)} x^{m-\nu}.$$

فوریه^۷ در ۱۸۲۲ عملگرهای کسری را با نمایش تابع انتگرالی تابع $f(x)$ به صورت زیر معرفی کرد

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du \int_{-\infty}^{\infty} \cos(t(x-u)) dt,$$

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du \int_{-\infty}^{\infty} t^n \cos(t(x-u)) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} n\pi dt,$$

که n می‌تواند هم مثبت و هم منفی باشد. این اولین تعریف مناسب از مشتق کسری برای هر تابع خوش تعریف بود. تا این زمان، کاربردی از مشتق و یا انتگرال کسری شناخته شده نبود، اما آبل^۸ با استفاده از این ابزار جدید به حل معادله انتگرالی به دست آمده از مساله خم‌همزمانی پرداخت و گامی اساسی در جهت بیان کاربردهای حسابان کسری برداشت. این مساله که اهمیت زیادی در فیزیک پیدا کرده بود شامل تعیین یک منحنی در صفحه (x, y) است به طوری که زمان لازم برای رسیدن ذره در حال لغزش به پایین‌ترین نقطه تحت جاذبه گرانشی زمین، مستقل از نقطه شروع (x_0, y_0) بر روی منحنی باشد. بعد از آبل، مطالعات وسیعی را لیوویل^۹ در حسابان کسری انجام داد. در سال ۱۸۴۷ ریمن^{۱۰} تحقیقاتی را روی تعمیم سری تیلور انجام داد. او تعریف انتگرال کسری از مرتبه α از تابع مفروض $f(x)$ را به صورت زیر پیشنهاد کرد

$$D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt + \psi(x). \quad (1.1)$$

⁴Euler

⁵Laplace

⁶Lacroix

⁷Fourier

⁸Abel

⁹Liouville

¹⁰Riemann

وجود تابع $\psi(x)$ به علت ابهام در حد پایین انتگرال است. امروزه رابطه (۱.۱) بدون تابع $\psi(x)$ رایج‌ترین تعریف از انتگرال‌گیری کسری است که انتگرال کسری ریمن-لیوویل نام گرفته است. در اوایل قرن بیستم مارچاد^{۱۱}، واتانابه^{۱۲} و ریس^{۱۳} در زمینه تعریف و تعمیم حسابان کسری پژوهش‌هایی انجام دادند. با گذشت زمان و پیدایش کاربردهای مختلفی از حسابان کسری تعاریف متعددی از مشتق و انتگرال کسری که متناسب با مدل‌های فیزیکی بودند بیان شد. تا نیمه قرن بیستم حسابان کسری تا حدی رشد پیدا کرد که اولین کنفرانس در سال ۱۹۷۴ فقط مربوط به نظریات و کاربردهای حسابان کسری برگزار شد.

۲.۱ توابع پرکاربرد در حسابان کسری

در این بخش به معرفی توابع خاص از جمله تابع گاما، بتا و تابع میتاگ-لفلر^{۱۴} که نقش بسیار مهمی در حسابان کسری دارند، می‌پردازیم [۴].

تابع گاما

تابع گاما، $\Gamma(z)$ ، با انتگرال $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ تعریف می‌شود که در نیمه راست صفحه مختلط ($\Re(z) > 0$) همگرا است. برخی از خواص تابع گاما عبارتند از

(۱) با استفاده از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = \lim_{t \rightarrow \infty} [-e^{-t} t^z]_{t=0} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z),$$

که $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$. برای هر $n \in \mathbb{N}$ می‌توان نتیجه گرفت $\Gamma(n+1) = n!$ از اینجا می‌توان تابع گاما را تعمیم مفهوم فاکتوریل در نظر گرفت.

(۲) با استفاده از خاصیت اول به راحتی می‌توان نشان داد

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+m)}{z(z+1)\cdots(z+m-1)}, \quad -m < \Re(z) < -m+1, \quad (2.1)$$

که $m \in \mathbb{Z}^+$ و $z \neq \{0, -1, -2, \dots\}$.

(۳) تابع گاما دارای نمایش حدی زیر است

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}, \quad \Re(z) > 0.$$

¹¹Marchaud

¹²Watanabe

¹³Riesz

¹⁴Mittag-Leffler

تابع بتا

در بسیاری موارد، استفاده از تابعی به نام تابع بتا، به جای ترکیب خاصی از مقادیر تابع گاما مناسب‌تر است. تابع بتا به صورت زیر تعریف می‌شود

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt, \quad (\Re(z) > 0, \Re(w) > 0).$$

لم ۱.۲.۱. [۴] رابطه بین تابع بتا و تابع گاما به صورت زیر است

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

تابع میتاگ-لفلر

تابع میتاگ-لفلر به افتخار ریاضیدان سوئدی تابع میتاگ-لفلر [۵، ۶] نامیده شده است و تابع مهمی است که در زمینه حساب کسری مورد استفاده قرار می‌گیرد. این تابع تعمیم تابع نمایی است. همان‌طور که تابع نمایی نقش مهمی در حل معادلات دیفرانسیل مرتبه غیرصحیح ایفا می‌کند، تابع میتاگ-لفلر نیز نقش مهمی در جواب معادلات دیفرانسیل مرتبه غیرصحیح دارد. تابع میتاگ-لفلر در دو نوع تابع تک پارامتری و دو پارامتری به صورت زیر تعریف می‌شود

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

چند حالت خاص از توابع تک پارامتری و دو پارامتری در زیر بیان شده است

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z,$$

$$E_{2,1}(-z^2) = \cos(z),$$

$$E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z},$$

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z).$$

۳.۱ انواع مشتق و انتگرال کسری

مفهوم انتگرال مرتبه کسری از اولین مفاهیمی است که در مبحث حسابان کسری درباره آن صحبت می‌شود. تعریف انتگرال مرتبه کسری، در واقع تعمیمی از فرمول کوشی^{۱۵} برای محاسبه انتگرال‌های مرتبه صحیح است. از طرف دیگر یکی از مهم‌ترین مفاهیم در سیستم‌های مرتبه کسری، تعریف مشتق است که برخلاف انتگرال مرتبه کسری می‌توان تعریف‌های متفاوتی از آن ارائه نمود [۴].

¹⁵Cauchy

۱.۳.۱ انتگرال و مشتق ریمن-لیوویل

فرض کنید $a \in \mathbb{R}$ عددی بر روی محور حقیقی \mathbb{R} باشد. تابع $f(t)$ که به ازای $t > a$ تعریف شده است را در نظر بگیرید. انتگرال مرتبه n تابع $f(t)$ طبق فرمول کشی برابر است با

$$\begin{aligned} {}^R I_t^n f(t) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \cdots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

از طرفی با توجه به تعریف تابع گاما، (۳.۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$${}^R I_t^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad n \in \mathbb{N}.$$

با الهام گرفتن از فرمول کشی و جانشینی عدد حقیقی $\alpha > 0$ به جای عدد صحیح n ، ${}^R I_t^\alpha f(t)$ و ${}^R I_b^\alpha f(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} {}^R I_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (t > a), \\ {}^R I_b^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (t < b). \end{aligned} \quad (4.1)$$

این انتگرال‌ها به ترتیب انتگرال‌های چپ و راست ریمن-لیوویل نامیده می‌شوند [۷].

قضیه ۱.۳.۱. [۸] فرض کنید $f \in L_1[a, b]$ و $\alpha > 0$. در این صورت ${}^R I_t^\alpha f(t)$ تقریباً همه جا روی $t \in [a, b]$ وجود دارد و متعلق به $L_1[a, b]$ است.

تعریف ۱.۳.۱. فضای $AC^n(\Omega)$ عبارت است از مجموعه تمام توابعی مانند f که روی بازه‌ی Ω تا مرتبه $(n-1)$ ام، مشتقات پیوسته دارند و مشتق $(n-1)$ ام آنها مطلقاً پیوسته است. به عبارت دیگر تابع $g \in L_1[0, 1]$ موجود است به طوری که

$$f^{(n-1)}(t) = f^{(n-1)}(0) + \int_0^t g(\tau) d\tau.$$

فرض کنید $n-1 \leq \alpha < n$ و $f \in AC^n([a, b])$ که $n = [\mathcal{R}(\alpha)] + 1$. مشتقات چپ و راست ریمن-لیوویل از مرتبه α که $\mathcal{R}(\alpha) \geq 0$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} {}^R D_t^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n ({}^R I_t^{n-\alpha} f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (t > a), \\ {}^R D_b^\alpha f(t) &= \left(-\frac{d}{dt}\right)^n ({}^R I_b^{n-\alpha} f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (t < b). \end{aligned} \quad (5.1)$$

۲.۳.۱ انتگرال و مشتق لیوویل

در این قسمت مشتق و انتگرال کسری لیوویل روی \mathbb{R}^+ بررسی می‌شود. مشتق و انتگرال کسری ریمن-لیوویل روی بازه متناهی $[a, b]$ تعریف می‌شوند که قابل تعمیم به بازه \mathbb{R}^+ هستند. انتگرال‌های کسری لیوویل متناظر با (۴.۱) در بازه \mathbb{R}^+ عبارت است از

$$\begin{aligned} {}_0^L I_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (t > 0, \mathcal{R}(\alpha) > 0), \\ {}_t^L I_\infty^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty (\tau-t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (t > 0, \mathcal{R}(\alpha) > 0). \end{aligned} \quad (۶.۱)$$

مشتقات کسری متناظر با (۵.۱) به ازای $\mathcal{R}(\alpha) \geq 0$ به صورت

$$\begin{aligned} {}_0^L D_t^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n ({}_0^L I_t^{n-\alpha} f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (n = [\mathcal{R}(\alpha)] + 1; t > 0), \\ {}_t^L D_\infty^\alpha f(t) &= \left(-\frac{d}{dt}\right)^n ({}_t^L I_\infty^{n-\alpha} f)(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^\infty (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (n = [\mathcal{R}(\alpha)] + 1; t > 0), \end{aligned}$$

تعریف می‌شوند. به‌طور مشابه می‌توان مشتق و انتگرال لیوویل را روی محور حقیقی \mathbb{R} تعریف کرد. برای جزئیات بیشتر [۷] را ببینید.

۳.۳.۱ مشتق کسری کاپاتو

ایده تعریف مشتق کاپاتو بسیار مشابه با همان ایده‌ای است که در تعریف مشتق ریمن-لیوویل به کار گرفته شد. در این تعریف مانند تعریف ریمن-لیوویل، مشتق بر اساس مفهوم انتگرال مرتبه کسری توسعه پیدا می‌کند. تفاوت این دو تعریف در توالی عملگرهای مشتق مرتبه صحیح و عملگر انتگرال مرتبه کسری است. در مشتق کسری کاپاتو برعکس مشتق کسری ریمن-لیوویل ابتدا مشتق مرتبه صحیح از تابع گرفته شده و سپس انتگرال‌گیری مرتبه کسری انجام می‌شود. به بیان ریاضی اگر $\alpha \in \mathbb{R}^+$ عدد مثبت ناصحیحی باشد و $n = [\alpha]$ مشتق کسری کاپاتو از مرتبه α به صورت زیر تعریف می‌شود

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a I_t^{n-\alpha} \{f^{(n)}(t)\}.$$

بنابراین مشتق کسری چپ و راست کاپاتو به ترتیب عبارت است از

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \\ {}_t^C D_b^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

که $f \in AC^n[a, b]$ و $n = [\mathcal{R}(\alpha)] + 1$.

۴.۳.۱ مشتق و انتگرال ریمن-لیوویل اصلاح شده یا جوماری

مشتقات کسری ریمن-لیوویل و کاپاتو به دلیل سادگی تعاریف و منطبق بودن آنها با حالت صحیح (جز در موارد خاص) از جمله مهم ترین و پرکاربردترین تعاریف از مشتقات کسری هستند. البته این تعاریف دارای ایراداتی نیز هستند. ایراد اساسی مشتق ریمن-لیوویل این است که مشتق تابع ثابت در آن صفر نیست. در واقع اگر $f(t) = C$ تابع ثابت باشد و $0 < \alpha < 1$ ، داریم

$${}^R D_t^\alpha f(t) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.$$

همچنین برای محاسبه مشتق کاپاتو از مرتبه $0 < \alpha < 1$ ، لازم است که تابع f مشتق پذیر باشد. برای این منظور جوماری^{۱۶} [۹] تعریف جدیدی از مشتق و انتگرال کسری ارائه داد. انتگرال جوماری به صورت زیر تعریف می شود

$${}^J I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (f(\tau) - f(a)) d\tau, \quad \alpha > 0.$$

به ازای $0 < \alpha < 1$ مشتق کسری جوماری به صورت

$${}^J D_t^\alpha f(t) = D_a^J I_t^{\alpha-1} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right) \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (f(\tau) - f(a)) d\tau,$$

و به ازای $n-1 \leq \alpha < n$ و $n \geq 1$ به صورت

$${}^J D_t^\alpha f(t) = D_a^{nJ} I_t^{\alpha-n} f(t),$$

محاسبه می شود. با توجه به تعریف ارائه شده، مشتق کسری جوماری از عدد ثابت صفر است و برای محاسبه مشتق کسری به ازای $0 < \alpha < 1$ لزومی به وجود مشتق مرتبه اول تابع f نیست. تبدیل لاپلاس از مشتق جوماری به صورت زیر است

$$\mathcal{L}[{}^J D_t^\alpha f(t)](s) = s^\alpha \mathcal{L}[f(t)](s) - s^{\alpha-1} f(0), \quad 0 < \alpha < 1.$$

جوماری همچنین بسط تیلور یک تابع بر حسب مشتق کسری جدید خود را با لم زیر بیان کرد.

لم ۱.۳.۱. فرض کنید تابع پیوسته $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ دارای مشتقات کسری از مرتبه $k\alpha$ برای مقدار مثبت k و مقدار دلخواه $0 < \alpha < 1$ باشد، در این صورت رابطه زیر برقرار است

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)} {}^J D^{k\alpha} f(x).$$

۵.۳.۱ مشتق و انتگرال گرانوالد-لتنیکوف

فرض کنید f تابعی پیوسته باشد. در این صورت مشتق مرتبه اول تابع f به صورت زیر تعریف می‌شود

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}.$$

با به‌کارگیری تعریف بالا، مشتق مرتبه دوم به صورت زیر به دست می‌آید

$$f''(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}.$$

در حالت کلی برای مشتق مرتبه صحیح و مثبت n ، رابطه زیر را داریم

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t-rh), \quad n \in \mathbb{N}.$$

بنابراین می‌توان مشتق کسری مرتبه α ام را به صورت زیر تعمیم داد

$${}^G D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t-kh), \quad \alpha > 0, \quad (7.1)$$

که $a \leq t \leq b$ ، $nh = t - a$ و $[\alpha] = n$. می‌توان با جابجایی $-\alpha$ و α در رابطه (7.1)، انتگرال کسری گرانوالد-لتنیکوف^{۱۷} از مرتبه α را تعریف کرد. یعنی با فرض $nh = t - a$ داریم

$$\begin{aligned} {}^G I_t^\alpha f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{-\alpha}{k} f(t-kh), \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)} f(t-kh), \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

قضیه ۲.۳.۱ [۱۰] فرض کنید تابع $f(t)$ دارای مشتقات مرتبه اول تا مرتبه $n-1$ پیوسته بوده و $f^{(n)}(t)$ انتگرال پذیر باشد. همچنین فرض کنید $n-1 < \alpha < n$ ، $n \in \mathbb{N}$. در این صورت مشتق مرتبه α با تعریف گرانوالد-لتنیکوف تابع $f(t)$ با مشتق مرتبه α ریمن-لیوویل این تابع برابر خواهد بود، یعنی

$${}^G D_t^\alpha f(t) = {}_a D_t^\alpha f(t).$$

با فرض برقراری شرایط مطرح شده در قضیه ۲.۳.۱ تعاریف گرانوالد-لتنیکوف و ریمن-لیوویل معادل بوده و بنابراین خواص مشتق مرتبه کسری ریمن-لیوویل برای مرتبه کسری گرانوالد-لتنیکوف نیز برقرار است. با توجه به ماهیت تعریف مشتق

¹⁷Grunwald-Letnikov

کسری گرانوالد-لتنیکوف، از این تعریف در روش‌های عددی محاسبه مشتقات مرتبه کسری و همچنین گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری استفاده فراوانی می‌شود. همچنین برای تقریب مشتق کسری (۷.۱) در روش‌های عددی، از این تعریف با مجموع متناهی استفاده می‌شود.

تقریباً در تمامی تعاریف مشتقات کسری مشهور موجود، قاعده حاصل ضرب و قاعده زنجیره‌ای در محاسبه مشتق ترکیب توابع برقرار نیست. البته جوماری در [۱۱، ۱۲، ۱۳] روابطی را برای مشتق ریمان-لیوویل اصلاح شده به صورت تقریبی در این زمینه بیان و اثبات نمود اما پس از آن چند مثال در نقض برقراری روابط مطرح شده توسط وی بیان گردید.

۶.۳.۱ مشتق و انتگرال کاپاتو-فابریسیو

تعریفی که کاپاتو از مشتق کسری ارائه داد به صورت زیر است

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (۸.۱)$$

این تعریف دارای یک نقطه تکین در $t = \tau$ است. برای رفع این مشکل در (۸.۱) کاپاتو و فابریسیو^{۱۸} تعریف جدیدی را ارائه دادند [۱۴]. با تغییر هسته $(t-\tau)^{-\alpha}$ به تابع $\exp(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau))$ و $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$ به $\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}$ تعریف جدید از مشتق کسری را می‌توان به صورت زیر نوشت

$${}_a^{CF} D_t^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t \exp(-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}) f'(\tau) d\tau, \quad 0 < \alpha < 1,$$

که $M(\alpha)$ تابع نرمال شده^{۱۹} بر حسب α است به طوری که $M(0) = M(1) = 1$. این تعریف مشتق چپ کاپاتو-فابریسیو است. مشتق راست کاپاتو-فابریسیو به صورت زیر تعریف می‌شود

$${}_t^{CF} D_b^\alpha f(t) = -\frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_t^b \exp(-\frac{\alpha(\tau-t)}{1-\alpha}) f'(\tau) d\tau, \quad 0 < \alpha < 1.$$

طبق تعریف جدید واضح است که اگر f تابعی ثابت باشد، مشابه تعریف کاپاتو ${}_a^{CF} D_t^\alpha f = 0$. تفاوت اصلی بین مشتق جدید و مشتق کاپاتو این است که مشتق جدید در نقطه $t = \tau$ دارای نقطه تکین نیست. از طرفی می‌دانید که تبدیلات لاپلاس نقش مهمی را در مطالعه معادلات دیفرانسیل ایفا می‌کنند. تبدیل لاپلاس در مورد تعریف جدید به صورت زیر است

$$\mathcal{L}[{}_a^{CF} D_t^\alpha f(t)](s) = \frac{(2-\alpha)M(\alpha)}{2(s+\alpha(1-s))} (s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0)), \quad s > 0.$$

¹⁸Fabrizio

¹⁹Normalization Function

۴.۱ خواص انتگرال و مشتقات کسری

در این بخش برخی از خواص مهم انتگرال و مشتقات ذکر شده در بخش قبل و همچنین قضایای مورد استفاده در این رساله بیان می‌شود.

۱.۴.۱ خواص مشتق و انتگرال مرتبه کسری ریمن-لیوویل

انتگرال و مشتق مرتبه کسری ریمن-لیوویل عملگر خطی هستند. یعنی برای تمام توابع $f(t)$ و $g(t)$ و تمام اسکالرهای حقیقی λ و γ می‌توان نشان داد

$${}^R I_a^\alpha (\lambda f(t) + \gamma g(t)) = \lambda {}^R I_a^\alpha f(t) + \gamma {}^R I_a^\alpha g(t),$$

$${}^R D_a^\alpha (\lambda f(t) + \gamma g(t)) = \lambda {}^R D_a^\alpha f(t) + \gamma {}^R D_a^\alpha g(t).$$

برای انتگرال مرتبه کسری داریم

$${}^R I_a^\alpha {}^R I_a^\beta f(t) = {}^R I_a^\beta {}^R I_a^\alpha f(t) = {}^R I_a^{\alpha+\beta} f(t), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\},$$

$${}^R I_b^\alpha {}^R I_b^\beta f(t) = {}^R I_b^\beta {}^R I_b^\alpha f(t) = {}^R I_b^{\alpha+\beta} f(t), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

این تساوی بدان معناست که عملگر انتگرال مرتبه کسری خواص جمع‌پذیری^{۲۰} و جابجایی‌پذیری^{۲۱} را داراست. اما عملگرهای مشتق مرتبه کسری ریمن-لیوویل در حالت کلی جابجایی‌پذیر و جمع‌پذیر نیستند. یعنی تساوی‌های

$${}^R D_a^\alpha ({}^R D_a^\beta f(t)) = {}^R D_a^\beta ({}^R D_a^\alpha f(t)), \quad (9.1)$$

$${}^R D_a^\alpha ({}^R D_a^\beta f(t)) = {}^R D_a^{\alpha+\beta} f(t),$$

در حالت کلی برقرار نیستند. از طرفی با توجه به اینکه

$${}^R D_a^\alpha ({}^R D_a^\beta f(t)) = {}^R D_a^\beta ({}^R D_a^\alpha f(t)) + \sum_{k=0}^{\beta-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha-\beta+k}}{\Gamma(-\alpha-\beta+k+1)},$$

می‌توان نشان داد که یک شرط کافی برای برقراری تساوی‌های (۹.۱) این است که برای

$$k = 0, 1, \dots, r-1, \quad r = \max\{\alpha, \beta\},$$

داشته باشیم $f^{(k)}(a) = 0$.

قضیه ۱.۴.۱ [۷] عملگر مشتق کسری ریمن-لیوویل از مرتبه α معکوس چپ عملگر انتگرال کسری از همان مرتبه α است. یعنی

$${}^R D_a^\alpha ({}^R I_a^\beta f(t)) = f(t), \quad {}^R D_b^\alpha ({}^R I_b^\beta f(t)) = f(t).$$

²⁰Additivity Property

²¹Commutative Property

اما عملگر مشتق کسری ریمن-لیوویل یک معکوس راست عملگر انتگرال کسری ریمن-لیوویل نیست. یعنی

$${}^R I_t^\alpha ({}^R D_t^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^n [{}^R D_t^{\alpha-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)},$$

$${}^R I_b^\alpha ({}^R D_b^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} [{}^R D_b^{\alpha-j} f(t)]_{t=b} \frac{(b-t)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)},$$

قواعد اساسی انتگرال و مشتق مرتبه کسری ریمن-لیوویل

الف- فرض کنید $\beta \in \mathbb{C}$ ، $\beta > 0$ و $\mathcal{R}(\alpha) \geq 0$ ، آنگاه

$$({}^R I_t^\alpha (t-a)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha-1}, \quad (\mathcal{R}(\alpha) > 0),$$

$$({}^R D_t^\alpha (t-a)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha-1}, \quad (\mathcal{R}(\alpha) \geq 0),$$

و

$$({}^R I_b^\alpha (b-t)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (b-t)^{\beta+\alpha-1}, \quad (\mathcal{R}(\alpha) > 0),$$

$$({}^R D_b^\alpha (b-t)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta+\alpha-1}, \quad (\mathcal{R}(\alpha) \geq 0).$$

در حالت خاص اگر $\beta = 1$ و $\mathcal{R}(\alpha) \geq 0$ ، آنگاه در حالت کلی مشتق کسری ریمن-لیوویل از تابع ثابت، صفر نیست. یعنی

$$({}^R D_t^\alpha 1)(t) = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad ({}^R D_b^\alpha 1)(t) = \frac{(b-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

ب- فرض کنید $c \in \mathbb{R}$ در این صورت

$${}^R I_a^\alpha e^{ct} = t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(ct), \quad {}^R D_t^\alpha (e^{ct}) = t^{-\alpha} E_{1, 1-\alpha}(ct),$$

$${}^R I_a^\alpha (\sin(ct)) = ct^{\alpha+1} E_{\alpha+1, \alpha+2}(-ct), \quad {}^R D_t^\alpha (\sin(ct)) = ct^{1-\alpha} E_{\alpha, \alpha-1}((ct)),$$

$${}^R I_a^\alpha (\cos(ct)) = t^{\alpha+1} E_{\alpha+1, \alpha+1}(-ct), \quad {}^R D_t^\alpha (\cos(ct)) = t^{-\alpha} E_{\alpha, \alpha-1}(-ct).$$

۲.۴.۱ خواص مشتق کسری کاپاتو

مشتق مرتبه کسری کاپاتو یک عملگر خطی است، یعنی برای تمام توابع $f(t)$ و $g(t)$ و تمام اسکالرهای حقیقی λ و γ می توان نشان داد

$${}^C D^\alpha (\lambda f(t) + \gamma g(t)) = \lambda {}^C D^\alpha f(t) + \gamma {}^C D^\alpha g(t).$$

برخلاف مشتق کسری ریمن-لیوویل مشتق کسری کاپاتو از تابع ثابت صفر است، یعنی برای هر تابع ثابت C داریم ${}^C D^\alpha C = 0$.

مشتق کسری کاپاتو جابجایی‌پذیر است، یعنی

$${}_a^C D_t^m {}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^C D_t^\alpha {}_a^C D_t^m f(t) = {}_a^C D_t^{m+\alpha} {}_a^C D_t^\alpha f(t), \quad n-1 < \alpha < n,$$

اگر و تنها اگر

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad (k = n, n+1, \dots, m).$$

اگر $\alpha > 0$ و $f(t) \in L_p(a, b)$ که $(1 \leq p \leq \infty)$ ، آنگاه

$${}_a^C D_t^\alpha ({}_a I_t^\alpha f(t)) = f(t), \quad {}_t^C D_b^\alpha ({}_t I_b^\alpha f(t)) = f(t).$$

این نشان می‌دهد عملگر مشتق کسری ریمن-لیوویل معکوس چپ برای عملگر انتگرال کسری ریمن-لیوویل از همان مرتبه است. اما عملگر مشتق کسری ریمن-لیوویل معکوس راست عملگر انتگرال کسری ریمن-لیوویل نیست، یعنی

$$\begin{aligned} {}_a^R I_t^{\alpha C} D_t^\alpha f(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k, \\ {}_t^R I_b^{\alpha C} D_b^\alpha f(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k. \end{aligned}$$

رابطه بین مشتق‌های کسری ریمن-لیوویل و کاپاتو به صورت زیر بیان می‌شود

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^\alpha f(t) &= {}_a^R D_t^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} \frac{f^{(k)}(a^+)}{k-\alpha+1} (t-a)^{k-\alpha}, \\ {}_t^C D_b^\alpha f(t) &= {}_t^R D_b^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(b^-)}{k-\alpha+1} (b-t)^{k-\alpha}. \end{aligned} \quad (10.1)$$

قواعد اساسی مشتق مرتبه کسری کاپاتو

الف- فرض کنید $\beta \in \mathbb{C}$ ، $\beta > 0$ و $\mathcal{R}(\alpha) \geq 0$ ، در این صورت

$$\begin{aligned} ({}_a^C D_t^\alpha (t-a)^{\beta-1})(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}, \quad (\mathcal{R}(\alpha) \geq 0), \\ ({}_t^C D_b^\alpha (b-t)^{\beta-1})(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}, \quad (\mathcal{R}(\alpha) \geq 0), \end{aligned} \quad (11.1)$$

ب- فرض کنید $c \in \mathbb{R}$ در این صورت

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^\alpha (e^{ct}) &= c^n t^{n-\alpha} E_{\lambda, n-\alpha+1}(ct), \\ {}_a^C D_t^\alpha (\sin(ct)) &= -\frac{1}{i} i(c)^n t^{n-\alpha} [E_{\lambda, n-\alpha+1}(ict) - (-1)^n E_{\lambda, n-\alpha+1}(-ict)], \\ {}_a^C D_t^\alpha (\cos(ct)) &= \frac{1}{i} i(c)^n t^{n-\alpha} [E_{\lambda, n-\alpha+1}(ict) + (-1)^n E_{\lambda, n-\alpha+1}(-ict)]. \end{aligned}$$

۵.۱ چندجمله‌ای‌های لاگرانژ مرتبه کسری

فرض کنید $\{t_j\}_{j=0}^{N-1}$ نقاط درونیایی باشند. در این صورت j امین چندجمله‌ای لاگرانژ $L_j(t)$ از مرتبه $N-1$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۵]

$$L_j(t) = \prod_{i=0, i \neq j}^N \frac{t - t_i}{t_j - t_i}, \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (12.1)$$

j امین چندجمله‌ای لاگرانژ کسری می‌تواند به صورت زیر تعریف شود

$$h_j^\alpha(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N+1} \frac{t^\alpha - t_i^\alpha}{t_j^\alpha - t_i^\alpha}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad (13.1)$$

مشابه چندجمله‌ای‌های لاگرانژ خاصیت دلتای کرونکر برای چندجمله‌ای لاگرانژ کسری برقرار است

$$h_j^\alpha(t) = \begin{cases} 1, & t = t_j, \\ 0, & t \neq t_j. \end{cases}$$

مشتق معمولی $h_j^\alpha(t)$ به صورت زیر به دست می‌آید. داریم

$$h_j^\alpha(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N+1} \frac{t^\alpha - t_i^\alpha}{t_j^\alpha - t_i^\alpha} = \left(\frac{t^\alpha - t_0^\alpha}{t_j^\alpha - t_0^\alpha} \right) \left(\frac{t^\alpha - t_1^\alpha}{t_j^\alpha - t_1^\alpha} \right) \dots \left(\frac{t^\alpha - t_{j-1}^\alpha}{t_j^\alpha - t_{j-1}^\alpha} \right) \left(\frac{t^\alpha - t_{j+1}^\alpha}{t_j^\alpha - t_{j+1}^\alpha} \right) \dots \left(\frac{t^\alpha - t_{N+1}^\alpha}{t_j^\alpha - t_{N+1}^\alpha} \right),$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} h_j^{\alpha'}(t) &= \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{t_j^\alpha - t_0^\alpha} \left(\frac{t^\alpha - t_1^\alpha}{t_j^\alpha - t_1^\alpha} \right) \left(\frac{t^\alpha - t_2^\alpha}{t_j^\alpha - t_2^\alpha} \right) \dots \left(\frac{t^\alpha - t_{j-1}^\alpha}{t_j^\alpha - t_{j-1}^\alpha} \right) \left(\frac{t^\alpha - t_{j+1}^\alpha}{t_j^\alpha - t_{j+1}^\alpha} \right) \dots \left(\frac{t^\alpha - t_{N+1}^\alpha}{t_j^\alpha - t_{N+1}^\alpha} \right) \\ &+ \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{t_j^\alpha - t_1^\alpha} \left(\frac{t^\alpha - t_0^\alpha}{t_j^\alpha - t_0^\alpha} \right) \left(\frac{t^\alpha - t_2^\alpha}{t_j^\alpha - t_2^\alpha} \right) \dots \left(\frac{t^\alpha - t_{j-1}^\alpha}{t_j^\alpha - t_{j-1}^\alpha} \right) \left(\frac{t^\alpha - t_{j+1}^\alpha}{t_j^\alpha - t_{j+1}^\alpha} \right) \dots \left(\frac{t^\alpha - t_{N+1}^\alpha}{t_j^\alpha - t_{N+1}^\alpha} \right) \\ &+ \dots + \\ &+ \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{t_j^\alpha - t_{N+1}^\alpha} \left(\frac{t^\alpha - t_0^\alpha}{t_j^\alpha - t_0^\alpha} \right) \left(\frac{t^\alpha - t_1^\alpha}{t_j^\alpha - t_1^\alpha} \right) \dots \left(\frac{t^\alpha - t_{j-1}^\alpha}{t_j^\alpha - t_{j-1}^\alpha} \right) \left(\frac{t^\alpha - t_{j+1}^\alpha}{t_j^\alpha - t_{j+1}^\alpha} \right) \dots \left(\frac{t^\alpha - t_{N-1}^\alpha}{t_j^\alpha - t_{N-1}^\alpha} \right) \\ &= \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^{N+1} \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{t_j^\alpha - t_r^\alpha} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j \\ i \neq r}}^{N+1} \frac{t^\alpha - t_i^\alpha}{t_j^\alpha - t_i^\alpha}. \end{aligned} \quad (14.1)$$

۶.۱ چندجمله‌ای‌های چبیشف

چندجمله‌ای‌های چبیشف^{۲۲} [۱۶، ۱۷] از سری چندجمله‌ای‌های متعامد هستند که نقش مهمی در نظریه تقریب ایفا می‌کنند و به صورت زیر بیان می‌شوند

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 4x^3 - 3x, \dots$$

که می‌توان آنها را از رابطه بازگشتی زیر به دست آورد

$$T_{j+1}(x) = 2xT_j(x) - T_{j-1}(x), j \geq 1$$

نتایج مفیدی که از رابطه بازگشتی به دست می‌آوریم به صورت زیر بیان می‌شوند

$$2T_n(x) = \frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1}T'_{n-1}(x); \quad n \geq 2$$

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x); \quad T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$$

$$|T_n(x)| \leq 1, \quad |T'_n(x)| \leq n^2$$

$$(1-x^2)T'_n(x) = \frac{n}{2}T_{n-1}(x) - \frac{n}{2}T_{n+1}(x)$$

$$2T_m(x)T_n(x) = T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x); \quad m \geq n \geq 0$$

$$T'_n(\pm 1) = (\pm 1)^{n-1} n^2$$

$$T''_n(\pm 1) = \frac{1}{3}(\pm 1)^n n^2 (n^2 - 1)$$

شکل صریح چندجمله‌ای‌های چبیشف به صورت زیر است

$$T_j(x) = \cos\{j \arccos x\}.$$

به سادگی می‌توان نشان داد که n ریشه $T_n(x)$ درون بازه $[-1, 1]$ قرار دارد

$$T_n(x) = \cos\{n \arccos x\} = 0 \rightarrow n \arccos x = (2k-1)\frac{\pi}{2}$$

و از این رو ریشه‌های چندجمله‌ای‌های چبیشف $T_n(x)$ به صورت زیر هستند

$$\bar{x}_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2N}; \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (15.1)$$

همچنین به آسانی می‌توان اکستریم‌های چندجمله‌ای چبیشف را که به صورت زیر هستند، به دست آورد

$$\hat{x}_k = \cos \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

۱.۶.۱ تعامد چند جمله‌ای‌های چبیشف

چند جمله‌ای‌های چبیشف روی بازه $[-1, 1]$ و نسبت به تابع وزن $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ متعامد هستند، یعنی

$$\int_{-1}^1 \frac{T_i(x)T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{\pi}{2} & i = j \neq 0 \\ \pi & i = j = 0 \end{cases}$$

علاوه بر این، ویژگی تعامد بیان شده برای چند جمله‌ای‌های چبیشف در حالت گسسته به صورت زیر می‌باشد

$$\sum_{k=1}^n T_i(\bar{x}_k)T_j(\bar{x}_k) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{n}{2} & i = j \neq 0 \\ n & i = j = 0 \end{cases}$$

که \bar{x}_k ها ریشه‌های چند جمله‌ای چبیشف $T_n(x)$ هستند که در رابطه (۱۵.۱) محاسبه شده است.

۲.۶.۱ انواع نقاط هم‌محلی و درونیابی

در روش شبه طیفی چبیشف از مجموعه گره‌ها (نقاط هم‌محلی و درونیابی) و وزن‌های $\{x_j, w_j\}_{j=0}^N$ استفاده می‌شود که به صورت زیر دسته‌بندی می‌شوند [۱۸]

۱- چبیشف-گوس (CG) ^{۲۳}

$$x_j = -\cos \frac{(2j+1)\pi}{2N+2}, \quad w_j = \frac{\pi}{N+1}, \quad j = 0, 1, \dots, N,$$

۲- چبیشف-گوس-رادو (CGR) ^{۲۴}

$$x_j = -\cos \frac{2\pi j}{2N+1}, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (16.1)$$

$$w_0 = \frac{\pi}{2N+1}, \quad w_j = \frac{2\pi}{2N+1}, \quad 1 \leq j \leq N,$$

۳- چبیشف-گوس-لوباتو (CGL) ^{۲۵}

$$x_j = -\cos \frac{\pi j}{N}, \quad w_j = -\frac{\pi}{c_j N}, \quad j = 0, 1, \dots, N,$$

²³Chebyshev-Gauss

²⁴Chebyshev-Gauss-Radau

²⁵Chebyshev-Gauss-Lobatto

$$\bar{c}_j = \begin{cases} 2, & j = 0, N, \\ 1, & j = 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

در فصل بعد، انواع معادله برگر را بیان نموده و سپس روش شبه طیفی چبیشف را برای این معادله به کار می‌بریم. همگرایی این روش را نیز مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فصل ۲

انواع مختلف معادله برگر و حل آنها به روش شبه طیفی چبیشف

۱.۲ مقدمه

معادلات مشتقات جزئی^۱ (PDE) ابزارهای مقاومی برای مدل‌بندی کاربردهای دنیای واقعی در بسیاری از شاخه‌های علوم و مهندسی هستند. به همین دلیل، جواب PDE ها برای مشاهده رفتار توابع نامعلوم و متغیرهای وابسته در مدل‌های مختلف بسیار مهم هستند. از آنجا که به دست آوردن جواب تحلیلی PDE های غیرخطی در حالت کلی امکان‌پذیر نیست، برخی روش‌های عددی کلاسیک مانند روش‌های تفاضل متناهی^۲ (FDM) و عناصر متناهی^۳ (FEM) پیشنهاد شده‌اند [۱۹]. قابل ذکر است که روش‌های کلاسیک ذکر شده، برای برخی سیستم‌های PDE دارای برخی مشکلات می‌باشند. از جمله FDM ها در مقایسه با روش‌های شبه طیفی^۴ برای مسایل هموار، دقت کمتری دارند. به علاوه، اگرچه FEM ها دقت خوبی دارند، اما محاسبات نرم افزاری پیچیده‌ای دارند. تلاش‌های فراوانی برای بهبود بخشیدن به روش‌های

¹Partial Differential Equations

²Finite Difference Methods

³Finite Element Methods

⁴Pseudo-Spectral Methods

عددی تقریبی که برای حل PDE به کار می‌روند، انجام شده است. یکی از دقیق‌ترین روش‌های محاسباتی برای حل PDE های با شرایط اولیه و مرزی، روش‌های شبه طیفی می‌باشد که از ویژگی‌های آنها دقت بالا و اجرای نرم افزاری ساده می‌باشد و همچنین برای تقریب مسائل مختلف مانند معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی پیچیده به کار می‌رود.

۲.۲ معادله برگر

معادله با مشتقات جزئی زیر، اولین بار توسط بتمن^۵ و بعدها توسط برگر^۶ معرفی گردید [۲۰، ۲۱]

$$V_t(t, x) + \alpha V(t, x)V_x(t, x) = \nu V_{xx}(t, x); \quad x \in [a, b], \quad t \in [T_0, T_1] \quad (1.2)$$

که α یک عدد ثابت مثبت است و $\nu = \frac{1}{R} > 0$ که R عدد رینولدز^۷ می‌باشد و اغلب در مدل‌بندی ریاضی برای حل مسائل دینامیک سیالات شامل آشفتگی‌ها استفاده می‌شود. به دلیل همگرایی کند آن، جواب تحلیلی را فقط برای مقادیر محدودی از R می‌توان محاسبه کرد. که در این موارد، لازم است که تکنیک‌های عددی را در نظر بگیریم [۲۲].

مهمترین انواع معادله برگر^۸ در ادامه معرفی می‌گردند.

• برای $V(.,.)$ و ضریب نفوذ ν ، فرم کلی معادله برگر-ویسکوز^۹ به صورت زیر است

$$V_t(t, x) + V(t, x)V_x(t, x) - \nu V_{xx}(t, x) = 0; \quad x \in [a, b], \quad t > 0 \quad (2.2)$$

• معادله برگر-فیشر^{۱۰} یک PDE غیرخطی مرتبه دوم به صورت زیر است

$$V_t(t, x) + \alpha(t)V(t, x)V_x(t, x) - V_{xx}(t, x) = \beta(t)V(t, x)(1 - V(t, x)); \quad x \in [a, b], \quad t \geq 0$$

که $\alpha(.)$ و $\beta(.)$ توابع دلخواه داده شده هستند. این معادله نقش مهمی در زمینه‌های متعددی مانند دینامیک گاز، ریاضیات کاربردی و مالی دارد.

⁵Bateman

⁶Burger

⁷Reynolds Number

⁸Burgers Equation

⁹Viscous

¹⁰Fisher

- معادله برگر-هاکسلی^{۱۱} که اولین بار توسط ساتسوما^{۱۲} در سال ۱۹۸۶ پیشنهاد شد و به صورت زیر بیان می شود [۲۳]

$$V_t(t, x) + \alpha V^\delta(t, x) V_x(t, x) - \beta V_{xx}(t, x) = \gamma V(t, x)(1 - V^\delta(t, x)) \quad (۴.۲)$$

$$(V^\delta(t, x) - \eta) ; x \in [0, 1], t \geq 0$$

که $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ و η ثابت‌های داده شده هستند. معادله برگر-هاکسلی یک *PDE* غیرخطی است که برای توصیف متقابل بین مکانیزم‌های واکنش و ... به کار می‌رود.

در اینجا حالت کلی معادله برگر را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$V_t = \phi(t, x, V, V_x, V_{xx}). \quad (۵.۲)$$

با شرایط اولیه و مرزی

$$\begin{cases} V(0, x) = f(x), & a \leq x \leq b, \\ V(t, a) = g_1(t), & t \in [T_0, T_1], \\ V(t, b) = g_2(t), & t \in [T_0, T_1]. \end{cases} \quad (۶.۲)$$

۱.۲.۲ روش شبه طیفی چبیشف برای معادله برگر

روش شبه طیفی چبیشف^{۱۳} (*CPS*) یکی از موثرترین روش‌های عددی برای حل مسائل پیوسته است که به طور قابل ملاحظه‌ای در حل مسائل خطی و غیرخطی پیشرفت داشته است. به نظر می‌رسد که روش *CPS* از روش‌های موجود بهتر است. همچنین، فضای چندجمله‌ای‌های اصلی روش، توسط چندجمله‌ای‌های متعامد چبیشف ساخته می‌شود. در این روش از نقاط *CGL* روی بازه $[-1, 1]$ استفاده می‌شود، بنابراین متغیرهای معادله برگر (۵.۲) را با انتقال‌های خطی زیر به بازه $[-1, 1]$ انتقال می‌دهیم

$$\begin{cases} t = \frac{T_1 - T_0}{\tau} \bar{t} + \frac{T_1 + T_0}{\tau}, & t \in [T_0, T_1], \bar{t} \in [-1, 1], \\ x = \frac{b-a}{\tau} \bar{x} + \frac{b+a}{\tau}, & x \in [a, b], \bar{x} \in [-1, 1]. \end{cases} \quad (۷.۲)$$

¹¹Huxley

¹²Satsuma

¹³Chebyshev Pseudo-Spectral Method

لذا، معادله برگر (۵.۲) و (۶.۲) به صورت زیر تبدیل می شود

$$\begin{cases} U_{\bar{t}} = \psi(\bar{t}, U(\bar{t}, \bar{x}), U_{\bar{x}}(\bar{t}, \bar{x}), U_{\bar{x}\bar{x}}(\bar{t}, \bar{x})), \\ U(-1, \bar{x}) = F(\bar{x}), \\ U(\bar{t}, -1) = G_1(\bar{t}), \\ U(\bar{t}, 1) = G_2(\bar{t}), \end{cases} \quad (۸.۲)$$

که در آن

$$\psi(\bar{t}, U, U_{\bar{x}}, U_{\bar{x}\bar{x}}) = \frac{T_1 - T_0}{2} \phi \left(\frac{T_1 - T_0}{2} \bar{t} + \frac{T_1 + T_0}{2}, V, \frac{2}{b-a} V_x, \left(\frac{2}{b-a} \right)^2 V_{xx} \right)$$

$$U(\bar{t}, \bar{x}) = V \left(\frac{T_1 - T_0}{2} \bar{t} + \frac{T_1 + T_0}{2}, \frac{b-a}{2} \bar{x} + \frac{b+a}{2} \right),$$

$$F(\bar{x}) = f \left(\frac{b-a}{2} \bar{x} + \frac{b+a}{2} \right),$$

$$G_1(\bar{t}) = g_1 \left(\frac{T_1 - T_0}{2} \bar{t} + \frac{T_1 + T_0}{2} \right),$$

$$G_2(\bar{t}) = g_2 \left(\frac{T_1 - T_0}{2} \bar{t} + \frac{T_1 + T_0}{2} \right).$$

برای گسسته‌سازی سیستم (۸.۲)، از نقاط CGL که همان ریشه‌های $(1 - \bar{t}^2) \frac{dT_N}{dt}$ است، استفاده می‌کنیم. در روش CPS ، برای تقریب جواب معادله برگر (۸.۲)، از چند جمله‌ای‌های درونیاب زیر استفاده می‌کنیم

$$U^N(\bar{t}, \bar{x}) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \bar{a}_{ij}^N L_i(\bar{t}) L_j(\bar{x}). \quad (۹.۲)$$

با استفاده از خاصیت کرونگر چند جمله‌ای‌های لاگرانژ تعریف شده در (۱۲.۱) داریم

$$U^N(\bar{t}_i, \bar{x}_j) = \bar{a}_{ij}^N. \quad (۱۰.۲)$$

برای محاسبه مشتقات $U_{\bar{t}}^N(\cdot, \cdot)$ و $U_{\bar{x}}^N(\cdot, \cdot)$ در نقاط \bar{t}_k ، می‌توانیم از ماتریس ضرایب $D = (D_{kj})$ استفاده کنیم. بنابراین داریم

$$\begin{cases} U_{\bar{t}}^N(\bar{t}_p, \bar{x}_k) = \sum_{i=0}^N \bar{a}_{ik}^N D_{pi}, \\ U_{\bar{x}}^N(\bar{t}_p, \bar{x}_k) = \sum_{j=0}^N \bar{a}_{pj}^N D_{kj}, \\ U_{\bar{x}\bar{x}}^N(\bar{t}_p, \bar{x}_k) = \sum_{j=0}^N \bar{a}_{pj}^N \hat{D}_{kj}, \end{cases} \quad (۱۱.۲)$$

که

$$D_{kj} = L'_j(\bar{t}_k) = \begin{cases} \frac{\mu_k (-1)^{k+j}}{\mu_j} \frac{1}{\bar{t}_k - \bar{t}_j}, & j \neq k, \\ \frac{\bar{t}_k}{2 - 2\bar{t}_k}, & 0 \leq j = k \leq N-1, \\ \frac{2N^2 + 1}{6}, & j = k = 0, \\ \frac{2N^2 + 1}{6}, & j = k = N. \end{cases} \quad (12.2)$$

که

$$\mu_j = \begin{cases} 2, & \text{if } j = 0, N, \\ 1, & \text{if } 1 \leq j \leq N-1, \end{cases}$$

و $\hat{D} = D \cdot D = (\hat{D}_{kj})$ که $\hat{D}_{kj} = \sum_{l=0}^N D_{kl} D_{lj}$, $k, j = 0, 1, \dots, N$ است. حال با استفاده از روابط (۱۰.۲) و (۱۱.۲)، سیستم (۸.۲) می‌تواند به سیستم معادلات جبری زیر تبدیل شود

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^N \bar{a}_{ik}^N D_{pi} - \psi(\bar{t}_p, \bar{a}_{pk}^N, \sum_{j=0}^N \bar{a}_{pj}^N D_{kj}, \sum_{j=0}^N \bar{a}_{pj}^N \hat{D}_{kj}) = 0, \\ \bar{a}_{0k}^N = F(\bar{x}_k), \bar{a}_{p0}^N = G_1(\bar{t}_p), \bar{a}_{pN}^N = G_2(\bar{t}_p); \quad k, p = 0, 1, \dots, N. \end{cases} \quad (13.2)$$

با حل سیستم بالا نسبت به متغیر \bar{a}_{pk}^N ($p, k = 0, 1, \dots, N$) می‌توانیم به ترتیب جواب‌های تقریبی پیوسته و نقطه‌ای (۹.۲) و (۱۰.۲) را به دست آوریم.

۳.۲ همگرایی روش

ابتدا تعریف پیمان پیوستگی^{۱۴} بیان می‌شود و سپس همگرایی روش ارائه شده تحلیل می‌گردد.

فرض کنید $\bar{\Omega} = [-1, 1] \times [-1, 1]$ باشد. فضای توابع با مشتقات پیوسته از مرتبه r را با $C^r(\bar{\Omega})$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۳.۲ [۲۴] تابع $W : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ با خواص زیر یک پیمان پیوستگی گفته می‌شود

(۱) W صعودی است،

(۲) $\lim_{z \rightarrow 0} W(z) = 0$

¹⁴Modulus of Continuity

(۳) برای هر $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^+$ داشته باشیم $W(z_1 + z_2) \leq W(z_1) + W(z_2)$ ،

(۴) یک ثابت c موجود باشد که برای همه $0 < z \leq 2$ داشته باشیم $c W(z) \geq z$.

یکی از مهمترین پیمانه‌های پیوستگی می‌تواند به صورت زیر تعریف شود

$$W(z) = z^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (14.2)$$

حال فرض کنید که B^2 یک دایره واحد در \mathbb{R}^2 باشد. می‌گوییم تابع پیوسته $f(\cdot, \cdot)$ روی $\bar{\Omega}$ ، تابع $W(\cdot)$ را به عنوان پیمانه پیوستگی می‌پذیرد، اگر مقدار زیر متناهی باشد

$$|f(\cdot, \cdot)|_W = \sup \left\{ \frac{|f(\bar{t}, \bar{x}) - f(\tilde{t}, \tilde{x})|}{W(\|(\bar{t}, \bar{x}) - (\tilde{t}, \tilde{x})\|_\infty)} : (\bar{t}, \bar{x}), (\tilde{t}, \tilde{x}) \in \bar{\Omega}, (\bar{t}, \bar{x}) \neq (\tilde{t}, \tilde{x}) \right\}. \quad (15.2)$$

فرض کنید فضای $C_W^1(B^2)$ شامل همه توابع $f(\cdot, \cdot)$ روی B^2 با اولین مرتبه مشتق پیوسته باشد و به نرم زیر مجهز باشد

$$\|f(\cdot, \cdot)\|_{1,W} = \|f(\cdot, \cdot)\|_\infty + \|f_{\bar{t}}(\cdot, \cdot)\|_\infty + \|f_{\bar{x}}(\cdot, \cdot)\|_\infty + |f_{\bar{t}}(\cdot, \cdot)|_W + |f_{\bar{x}}(\cdot, \cdot)|_W. \quad (16.2)$$

همچنین، فضای $C_W^1(\bar{\Omega})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$C_W^1(\bar{\Omega}) = \left\{ f(\cdot, \cdot) \in C^1(\bar{\Omega}) : \forall (\tilde{t}, \tilde{x}) \in \bar{\Omega}, \exists \text{map } \phi : B^2 \rightarrow \bar{\Omega}, \text{ s.t.} \right. \\ \left. (\tilde{t}, \tilde{x}) \in \text{int}(\phi(B^2)) \text{ and } f \circ \phi(\cdot, \cdot) \in C_W^1(B^2) \right\}. \quad (17.2)$$

می‌توان ثابت کرد برای توابع ϕ_1, \dots, ϕ_l با فرض $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^l \text{int}(\phi_i(B^2))$ داریم $f(\cdot, \cdot) \in C_W^1(\bar{\Omega})$ اگر و تنها اگر برای هر $i = 1, \dots, l$ ، $f \circ \phi_i(\cdot, \cdot) \in C_W^1(B^2)$ ، به علاوه، با نرم

$$\|f(\cdot, \cdot)\|_{1,W} = \sum_{i=1}^l \|f \circ \phi_i(\cdot, \cdot)\|_{1,W}, \quad (18.2)$$

یک فضای باناخ است (برای جزئیات بیشتر [۲۴] را ببینید). در ادامه فرض می‌کنیم فضای $Pol(N, N, \bar{\Omega})$ همه چندجمله‌ای‌های از درجه حداکثر $2N$ روی $\bar{\Omega}$ است، یعنی

$$Pol(N, N, \bar{\Omega}) = \left\{ \eta(\tilde{t}, \tilde{x}) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \gamma_{ij} \tilde{t}^i \tilde{x}^j : (\tilde{t}, \tilde{x}) \in \bar{\Omega}, \gamma_{ij} \in \mathbb{R} \right\}.$$

قضیه ۱.۳.۲. برای هر $f(\cdot, \cdot) \in C_W^1(\bar{\Omega})$ یک چندجمله‌ای $\eta(\cdot, \cdot) \in Pol(N, N, \bar{\Omega})$ وجود دارد به طوری که

$$\|f(\cdot, \cdot) - \eta(\cdot, \cdot)\|_\infty \leq \frac{c_0 c_1}{2^N} W\left(\frac{1}{2^N}\right), \quad (19.2)$$

که $c_1 = \|f(\cdot, \cdot)\|_{1,W}$ و c_0 یک ثابت وابسته به $W(\cdot)$ و مستقل از N است.

□ برهان. اثبات این قضیه، نتیجه‌ای از قضیه ۱.۲ در [۲۴] است.

حال، برای تضمین وجود جواب سیستم معادلات جبری (۱۳.۲) آن را به صورت زیر تبدیل می‌کنیم

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \sum_{i=\circ}^N \bar{a}_{ik}^N D_{pi} - \psi \left(\bar{t}_p, \bar{a}_{pk}^N, \sum_{j=\circ}^N \bar{a}_{pj}^N D_{kj}, \sum_{j=\circ}^N \bar{a}_{pj}^N \hat{D}_{kj} \right) \right| \\ \leq \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N-1}} W\left(\frac{1}{\sqrt{N-1}}\right), \quad p, k = 1, 2, \dots, N-1, \\ \left| \bar{a}_{p\circ}^N - G_1(\bar{t}_p) \right| \leq \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N-1}} W\left(\frac{1}{\sqrt{N-1}}\right), \\ \left| \bar{a}_{pN}^N - G_2(\bar{t}_p) \right| \leq \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N-1}} W\left(\frac{1}{\sqrt{N-1}}\right), \quad p = \circ, 1, \dots, N, \\ \left| \bar{a}_{\circ k}^N - F(\bar{x}_k) \right| \leq \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N-1}} W\left(\frac{1}{\sqrt{N-1}}\right), \quad k = \circ, 1, \dots, N, \end{array} \right. \quad (20.2)$$

که N به اندازه کافی بزرگ و $W(\cdot)$ یک پیمانانه پیوستگی داده شده است. از آنجایی که

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N-1}} W\left(\frac{1}{\sqrt{N-1}}\right) = \circ,$$

هنگامی که N به سمت بی‌نهایت میل کند، هر جواب $\bar{a}_N = (\bar{a}_{pk}^N; p, k = \circ, 1, \dots, N)$ برای سیستم نامعادلات جبری (۲۰.۲) یک جواب برای سیستم معادلات جبری (۱۳.۲) است.

فرض می‌کنیم که ψ دارای مشتقات کراندار و پیوسته نسبت به متغیرهایش باشد و ثابت M وجود داشته باشد طوری که

$$|\psi(\bar{t}, U, U_{\bar{x}}, U_{\bar{x}\bar{x}}) - \psi(\bar{t}, \tilde{U}, \tilde{U}_{\bar{x}}, \tilde{U}_{\bar{x}\bar{x}})| \leq M|U - \tilde{U}|. \quad (21.2)$$

در ادامه نشان می‌دهیم که سیستم (۲۰.۲) شدنی است و حداقل یک جواب \bar{a}_N دارد.

قضیه ۲.۳.۲. فرض کنید $U(\cdot, \cdot)$ یک جواب برای سیستم (۸.۲) باشد که در $C_W^1(\bar{\Omega})$ قرار دارد. در این صورت، یک عدد صحیح مثبت K وجود دارد که برای هر $N \geq K$ ، سیستم (۲۰.۲) دارای یک جواب به شکل زیر است

$$\bar{a}_N = (\bar{a}_{pk}; p, k = \circ, 1, \dots, N), \quad (22.2)$$

که در رابطه زیر صدق می‌کند

$$|U(\bar{t}_p, \bar{x}_k) - \bar{a}_{pk}^N| \leq \frac{L}{\sqrt{N-1}} W\left(\frac{1}{\sqrt{N-1}}\right), \quad p, k = \circ, 1, \dots, N, \quad (23.2)$$

و L یک ثابت مثبت مستقل از N است.

برهان. فرض کنید $\eta(\cdot, \cdot)$ در $Pol(N-1, N, \bar{\Omega})$ بهترین تقریب چندجمله‌ای $U_{\bar{t}}(\cdot, \cdot)$ باشد. با استفاده از قضیه ۱.۳.۲ داریم

$$\|U_{\bar{t}}(\bar{t}, \bar{x}) - \eta(\bar{t}, \bar{x})\|_{\infty} \leq \frac{\gamma}{\sqrt{N-1}} W\left(\frac{1}{\sqrt{N-1}}\right), \quad (\bar{t}, \bar{x}) \in \bar{\Omega}, \quad (24.2)$$

که γ یک ثابت مستقل از N است. تعریف می‌کنیم

$$\tilde{U}(\bar{t}, \bar{x}) = U(-1, \bar{x}) + \int_{-1}^{\bar{t}} \eta(\tau, \bar{x}) d\tau, \quad (\bar{t}, \bar{x}) \in \bar{\Omega} \quad (25.2)$$

و

$$\bar{a}_{pk}^N = \tilde{U}(\bar{t}_p, \bar{x}_k); \quad p, k = 0, 1, \dots, N. \quad (26.2)$$

نشان می‌دهیم که $\bar{a}_N = (\bar{a}_{pk}^N; p, k = 0, 1, \dots, N)$ در سیستم (۲۰.۲) صدق می‌کند. با استفاده از معادلات (۲۴.۲)، (۲۵.۲) و (۲۶.۲)، برای $(\bar{t}, \bar{x}) \in \bar{\Omega}$ ، داریم

$$\begin{aligned} |U(\bar{t}, \bar{x}) - \tilde{U}(\bar{t}, \bar{x})| &= \left| \int_{-1}^{\bar{t}} (U_{\bar{t}}(\tau, \bar{x}) - \eta(\tau, \bar{x})) d\tau \right| & (27.2) \\ &\leq \int_{-1}^{\bar{t}} |U_{\bar{t}}(\tau, \bar{x}) - \eta(\tau, \bar{x})| d\tau \\ &\leq \frac{\gamma}{\sqrt{N-1}} W\left(\frac{1}{\sqrt{N-1}}\right) \int_{-1}^{\bar{t}} d\tau \\ &\leq \frac{\sqrt{2}\gamma}{\sqrt{N-1}} W\left(\frac{1}{\sqrt{N-1}}\right). \end{aligned}$$

حال، با استفاده از رابطه (۲۵.۲)، به ازای هر $\bar{x} \in [-1, 1]$ تابع $\tilde{U}(\cdot, \bar{x})$ یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر N است. لذا، مشتقات در نقاط $\bar{t}_0, \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_N$ به طور دقیق با مقادیر چندجمله‌ای در نقاط ضرب شده توسط ماتریس مشتق D ، که در رابطه (۱۲.۲) تعریف شده، برابر است. بنابراین، داریم

$$\sum_{i=0}^N \bar{a}_{ik}^N D_{pi} = \tilde{U}_{\bar{t}}(\bar{t}_p, \bar{x}_k); \quad p, k = 0, 1, \dots, N. \quad (28.2)$$

حال با استفاده از روابط (۲۱.۲) و (۲۷.۲) داریم

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{i=\circ}^N a_{ik}^N D_{pi} - \psi \left(\bar{t}_p, \bar{a}_{pk}^N, \sum_{j=\circ}^N \bar{a}_{pj}^N D_{kj}, \sum_{j=\circ}^N \bar{a}_{pj}^N \hat{D}_{kj} \right) \right| \quad (۲۹.۲) \\
 & \leq \left| \tilde{U}_{\bar{t}}(\bar{t}_p, \bar{x}_k) - U_{\bar{t}}(\bar{t}_p, \bar{x}_k) \right| + \\
 & \left| U_{\bar{t}}(\bar{t}_p, \bar{x}_k) - \psi \left(\bar{t}_p, \bar{a}_{pk}^N, \sum_{j=\circ}^N \bar{a}_{pj}^N D_{kj}, \sum_{j=\circ}^N \bar{a}_{pj}^N \hat{D}_{kj} \right) \right| \\
 & = |\eta(\bar{t}_p, \bar{x}_k) - U_{\bar{t}}(\bar{t}_p, \bar{x}_k)| + \\
 & \left| \psi \left(\bar{t}_p, U(\bar{t}_p, \bar{x}_k), U_{\bar{x}}(\bar{t}_p, \bar{x}_k), U_{\bar{x}\bar{x}}(\bar{t}_p, \bar{x}_k) \right) - \psi \left(\bar{t}_p, \bar{a}_{pk}^N, \sum_{j=\circ}^N \bar{a}_{pj}^N D_{kj}, \sum_{j=\circ}^N \bar{a}_{pj}^N \hat{D}_{kj} \right) \right| \\
 & \leq |\eta(\bar{t}_p, \bar{x}_k) - U_{\bar{t}}(\bar{t}_p, \bar{x}_k)| + M |U(\bar{t}_p, \bar{x}_k) - \bar{a}_{pk}^N| \\
 & \leq \frac{\gamma}{\sqrt{N-1}} W\left(\frac{1}{\sqrt{N-1}}\right) + M \frac{\sqrt{2}\gamma}{\sqrt{N-1}} W\left(\frac{1}{\sqrt{N-1}}\right) \\
 & = \frac{\gamma(\sqrt{2}M+1)}{\sqrt{N-1}} W\left(\frac{1}{\sqrt{N-1}}\right), \quad p, k = 1, \dots, N-1,
 \end{aligned}$$

که M ثابتی است که در (۲۱.۲) صدق می‌کند. به‌علاوه، برای شرایط مرزی، داریم

$$\begin{aligned}
 \left| \tilde{U}(-1, \bar{x}_k) - F(\bar{x}_k) \right| & \leq \left| \tilde{U}(-1, \bar{x}_k) - U(-1, \bar{x}_k) \right| + |U(-1, \bar{x}_k) - F(\bar{x}_k)| \quad (۳۰.۲) \\
 & \leq \frac{\sqrt{2}\gamma}{\sqrt{N-1}} W\left(\frac{1}{\sqrt{N-1}}\right), \quad k = \circ, 1, \dots, N.
 \end{aligned}$$

همچنین، برای $p = \circ, 1, \dots, N$ داریم

$$\begin{aligned}
 \left| \tilde{U}(\bar{t}_p, -1) - G_1(\bar{t}_p) \right| & = \left| \tilde{U}(\bar{t}_p, -1) - U(\bar{t}_p, -1) \right| \leq \frac{\sqrt{2}\gamma}{\sqrt{N-1}} W\left(\frac{1}{\sqrt{N-1}}\right) \quad (۳۱.۲) \\
 \left| \tilde{U}(\bar{t}_p, 1) - G_2(\bar{t}_p) \right| & = \left| \tilde{U}(\bar{t}_p, 1) - U(\bar{t}_p, 1) \right| \leq \frac{\sqrt{2}\gamma}{\sqrt{N-1}} W\left(\frac{1}{\sqrt{N-1}}\right). \quad (۳۲.۲)
 \end{aligned}$$

از این رو، اگر K را به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که

$$\max\{\gamma(\sqrt{2}M+1), \sqrt{2}\gamma\} \leq \sqrt{N},$$

آنگاه برای هر $N \geq K$ ، با استفاده از (۲۹.۲)–(۳۲.۲)، \bar{a}_N در سیستم (۲۰.۲) صدق می‌کند. \square

اکنون، نشان می‌دهیم که دنباله جواب‌های سیستم (۲۰.۲) و دنباله چندجمله‌ای‌های درونیاب آنها به جواب سیستم (۸.۲) همگرا می‌شود.

قضیه ۳.۳.۲. اگر $\{\bar{a}_N = \bar{a}_{pk}^N; p, k = 0, 1, \dots, N\}_{N=K}^\infty$ یک دنباله از جواب‌های سیستم (۲۰.۲) باشد و $\{U^N(\cdot, \cdot)\}_{N=K}^\infty$ دنباله چندجمله‌ای‌های درونیاب آنها باشد که توسط رابطه (۹.۲) تعریف شده است. همچنین، فرض می‌کنیم که برای هر \bar{x} در $[-1, 1]$ ، دنباله $\{(U^N(-1, \bar{x}), U_t^N(\cdot, \cdot))\}_{N=K}^\infty$ دارای یک زیردنباله $\{(U^{N_i}(-1, \bar{x}), U_t^{N_i}(\cdot, \cdot))\}_{i=0}^\infty$ باشد که به طور یکنواخت به $(\phi^\infty(\bar{x}), \lambda(\cdot, \cdot))$ همگرا است که در آن $\lambda(\cdot, \cdot) \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ ، $\phi^\infty(\cdot) \in C^\alpha([-1, 1])$ و $\lim_{i \rightarrow \infty} N_i = \infty$ در این صورت

$$\tilde{U}(\bar{t}, \bar{x}) = \lim_{i \rightarrow \infty} U^{N_i}(\bar{t}, \bar{x}), \quad (33.2)$$

برای $(\bar{t}, \bar{x}) \in \bar{\Omega}$ یک جواب سیستم (۸.۲) است.

برهان. با توجه به فرضیات، داریم

$$\tilde{U}(\bar{t}, \bar{x}) = \phi^\infty(\bar{x}) + \int_{-1}^{\bar{t}} \lambda(\tau, \bar{x}) d\tau. \quad (34.2)$$

ابتدا نشان می‌دهیم که $\tilde{U}(\bar{t}, \bar{x})$ برای هر $\bar{t} \in [-1, 1]$ و برای هر $\bar{x} = x_k$ ($k = 0, 1, \dots, N$) در سیستم (۸.۲) صدق می‌کند. فرض کنیم که برای برخی از مقادیر $k = 0, 1, \dots, N-1$ در اولین معادله (۸.۲) صدق نکند. در این صورت یک τ در $(-1, 1)$ وجود دارد که

$$\tilde{U}_{\bar{t}}(\tau, \bar{x}_k) - \psi(\bar{t}_p, \tilde{U}(\tau, \bar{x}_k), \tilde{U}_{\bar{x}}(\tau, \bar{x}_k), \tilde{U}_{\bar{x}\bar{x}}(\tau, \bar{x}_k)) \neq 0.$$

از آنجا که نقاط CGL ، $\{\bar{t}_p\}_{p=0}^N$ وقتی $N \rightarrow \infty$ در $[-1, 1]$ چگال هستند، یک دنباله $\{\bar{t}_{l_{N_i}}\}_{i=1}^\infty$ وجود دارد طوری که $0 < l_{N_i} < N_i$ و $\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{t}_{l_{N_i}} = \tau$ بنابراین

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\tilde{U}_{\bar{t}}(\bar{t}_{l_{N_i}}, \bar{x}_k) - \psi(\bar{t}_p, \tilde{U}(\bar{t}_{l_{N_i}}, \bar{x}_k), \tilde{U}_{\bar{x}}(\bar{t}_{l_{N_i}}, \bar{x}_k), \tilde{U}_{\bar{x}\bar{x}}(\bar{t}_{l_{N_i}}, \bar{x}_k)) \right) = \tilde{U}_{\bar{t}}(\tau, \bar{x}_k) - \psi(\bar{t}_p, \tilde{U}(\tau, \bar{x}_k), \tilde{U}_{\bar{x}}(\tau, \bar{x}_k), \tilde{U}_{\bar{x}\bar{x}}(\tau, \bar{x}_k)) \neq 0. \quad (35.2)$$

از سوی دیگر، از آنجا که $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{N_i}}{\sqrt{N_i-1}} W(\frac{1}{\sqrt{N_i-1}}) = 0$ ، با استفاده از (۲۰.۲) داریم

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\tilde{U}_{\bar{t}}(\bar{t}_{l_{N_i}}, \bar{x}_k) - \psi(\bar{t}_p, \tilde{U}(\bar{t}_{l_{N_i}}, \bar{x}_k), \tilde{U}_{\bar{x}}(\bar{t}_{l_{N_i}}, \bar{x}_k), \tilde{U}_{\bar{x}\bar{x}}(\bar{t}_{l_{N_i}}, \bar{x}_k)) \right) = 0,$$

که با (۳۵.۲) تناقض دارد. بنابراین $\tilde{U}(\bar{t}, \bar{x})$ برای هر $\bar{t} \in [-1, 1]$ و برای هر $k = 0, 1, \dots, N$

در اولین معادله (۸.۲) صدق می‌کند. همچنین، به سادگی می‌توان ثابت کرد که $\tilde{U}(\cdot, \bar{x}_k)$ برای $k = 0, 1, \dots, N$ در شرایط مرزی صدق می‌کند. برای مثال نشان می‌دهیم که برای $k = 0, 1, \dots, N$ داریم

$$0 \leq |\tilde{U}(-1, \bar{x}_k) - F(\bar{x}_k)| = \left| \lim_{i \rightarrow \infty} U^{N_i}(-1, \bar{x}_k) - F(\bar{x}_k) \right| = \quad (36.2)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |U^{N_i}(-1, \bar{x}_k) - F(\bar{x}_k)| = \lim_{i \rightarrow \infty} |\bar{a}_{0k}^{N_i} - F(\bar{x}_k)| \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{N_i}}{\sqrt{N_i-1}} W(\frac{1}{\sqrt{N_i-1}}) = 0.$$

از این رو برای هر $k = 0, 1, \dots, N$ $\tilde{U}(-1, \bar{x}_k) = F(\bar{x}_k)$ است. از آنجا که می‌دانیم نقاط $\{\bar{x}_k\}_{k=0}^N$ وقتی $N \rightarrow \infty$ در $[-1, 1]$ چگال هستند، بنابراین $\tilde{U}(\cdot, \cdot)$ تعریف شده در رابطه (۳۳.۲) یک جواب سیستم (۸.۲) روی $\bar{\Omega} = [-1, 1] \times [-1, 1]$ است. \square

۴.۲ مثال‌های عددی

در مثال‌های زیر، از روش لونبرگ-مارکوادت^{۱۵} (یک روش شبه-نیوتن^{۱۶}) در دستور FSOLVE نرم افزار متلب برای حل سیستم جبری (۱۳.۲) استفاده کرده‌ایم. خطاهای $E_\infty(\bar{t})$ و $E_\tau(\bar{t})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$E_\tau(\bar{t}) = \| U(\bar{t}, \cdot) - U^N(\bar{t}, \cdot) \|_\tau = \left(\sum_{j=0}^N | U(\bar{t}, x_j) - U^N(\bar{t}, x_j) |^\tau \right)^{\frac{1}{\tau}},$$

$$E_\infty(\bar{t}) = \| U(\bar{t}, \cdot) - U^N(\bar{t}, \cdot) \|_\infty = \max_{0 \leq j \leq N} | U(\bar{t}, x_j) - U^N(\bar{t}, x_j) |, \quad (37.2)$$

که $x_j, j = 0, 1, \dots, N$ نقاط هم‌محلی، $\bar{t} \in [-1, 1]$ و $U(\cdot, \cdot)$ و $U^N(\cdot, \cdot)$ به ترتیب جواب‌های تحلیلی و دقیق هستند. همچنین خطای مطلق به صورت زیر به دست می‌آید

$$E_1(\bar{t}, \bar{x}) = | U(\bar{t}, \bar{x}) - U^N(\bar{t}, \bar{x}) |, \quad (\bar{t}, \bar{x}) \in [-1, 1] \times [-1, 1].$$

مثال ۱.۴.۲. معادله برگر-فیشر (۳.۲) را در نظر بگیرید، که $T_0 = 0, T_1 = -0.2$ ، $\alpha(t) = 24, b = 0, a = -1$ و برای $\beta(t) = -48, t \in [T_0, T_1]$ است. همچنین، با شرایط مرزی

$$U(t, -1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \tanh[6(-1 - 8t)],$$

$$U(t, 0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \tanh[6(-8t)],$$

و شرط اولیه

$$U(-0.2, x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \tanh[6(x + 1/6)],$$

جواب دقیق به صورت زیر است

$$U(t, x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \tanh[6(x - 8t)].$$

¹⁵Levenberg-Marquardt

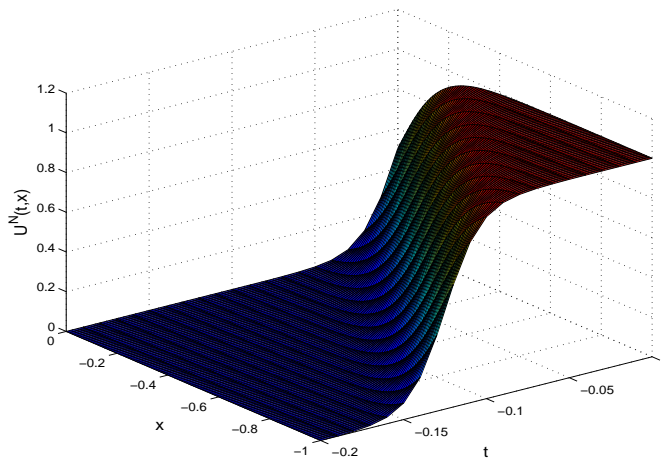
¹⁶Quasi-Newton

۲۸ انواع مختلف معادله برگر و حل آنها به روش شبه طیفی چبیشف

نتایج عددی با استفاده از روش CPS در نقاط $t = -0.1, -0.05, -0.04, -0.035, -0.03$ برای $N = 30 \times 30$ در جدول ۱.۲ آمده است. مشاهده می‌شود که نتایج عددی به دست آمده در این رساله، از نتایج روش‌های MMPDE [۲۵]، که برای $\Delta t = 10^{-6}$ و $\Delta x = \frac{1}{60}$ (یا $N = 20000 \times 60$) محاسبه شده، بهتر هستند. در این جدول، خطای $E_T(\bar{t})$ نیز بیان شده است. در شکل‌های ۱.۲ و ۲.۲، به ترتیب جواب تقریبی و خطای مطلق نشان داده شده است. در شکل ۳.۲، جواب‌های دقیق و تقریبی برای $t = -0.1, -0.05, -0.03$ نمایش داده شده است. همچنین، خطاهای $E_T(\bar{t})$ در شکل ۱.۲ نمایش داده شده‌اند.

جدول ۱.۲: مقایسه خطای $E_T(\bar{t})$ برای مثال ۱.۴.۲

روش	N	$T = -0.1$	$T = -0.05$	$T = -0.04$	$T = -0.035$	$T = -0.03$
روش CPS	30×30	1.8293×10^{-4}	1.1920×10^{-4}	1.2691×10^{-4}	1.4053×10^{-4}	1.4187×10^{-4}
الگوریتم (۱) [۲۵]	60×20000	2.1×10^{-3}	2.9×10^{-3}	3.4×10^{-3}	3.7×10^{-3}	4.2×10^{-3}
الگوریتم (۲) [۲۵]	60×20000	2.7×10^{-3}	8×10^{-3}	7.9×10^{-3}	7.6×10^{-3}	7.1×10^{-3}
الگوریتم (۳) [۲۵]	60×20000	2.1×10^{-3}	2.4×10^{-3}	2.4×10^{-3}	2.4×10^{-3}	2.5×10^{-3}

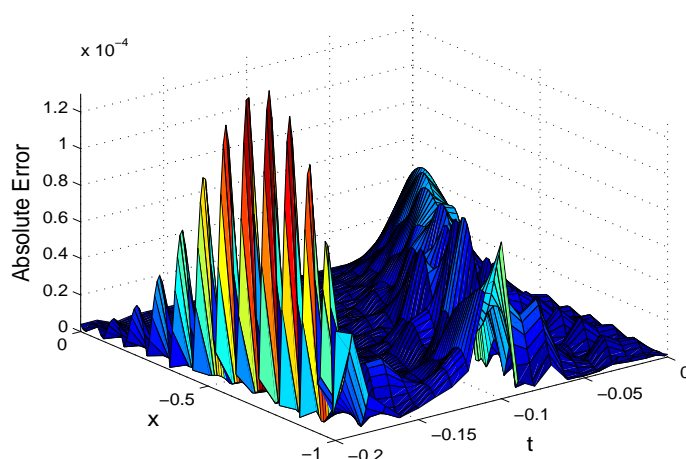


شکل ۱.۲: جواب تقریبی مثال ۱.۴.۲

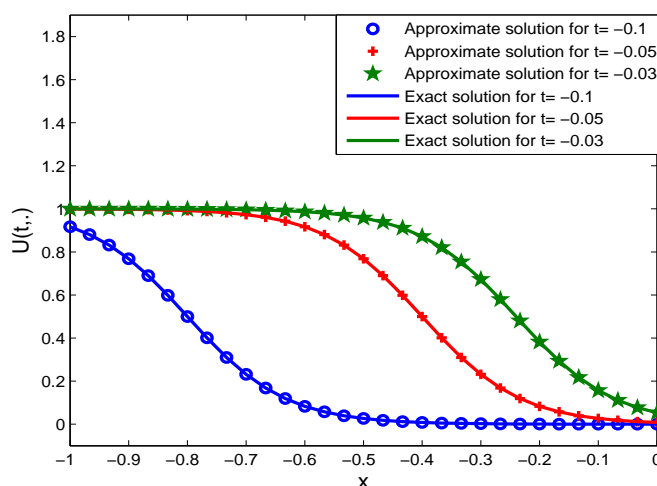
مثال ۲.۴.۲. معادله برگر-فیشر (۳.۲) را در نظر بگیرید که $T_1 = 0.05$, $T_0 = -0.05$ با شرایط مرزی $\alpha(t) = 20$, $b = 0$, $a = -1$ و $\beta(t) = -1 + 3 \sin t$.

$$U(t, -1) = \frac{\cosh[-1 - 3 \cos t] + \sinh[-1 - 3 \cos t] - \sqrt{5}}{-4 \cosh[-1 - 3 \cos t] + 6 \sinh[-1 - 3 \cos t]},$$

$$U(t, 0) = \frac{\cosh[-3 \cos t] + \sinh[-3 \cos t] - \sqrt{5}}{-4 \cosh[-3 \cos t] + 6 \sinh[-3 \cos t]},$$



شکل ۲.۲: خطای مطلق $E(.,.)$ مثال ۱.۴.۲



شکل ۳.۲: جواب‌های دقیق و تقریبی برای $t = -0.1, -0.05, -0.03$ مثال ۱.۴.۲

و شرط اولیه

$$U(-0.05, x) = \frac{\cosh[x - 3 \cos(-0.05)] + \sinh[x - 3 \cos(-0.05)] - \sqrt{5}}{-4 \cosh[x - 3 \cos(-0.05)] + 6 \sinh[x - 3 \cos(-0.05)]},$$

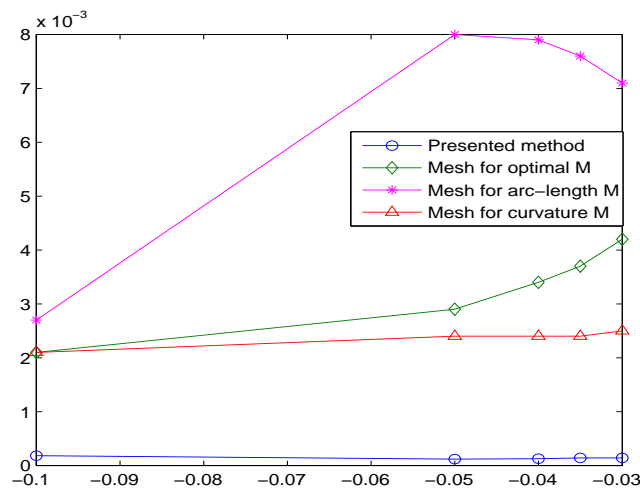
و جواب دقیق به صورت زیر است

$$U(t, x) = \frac{\cosh[x - 3 \cos t] + \sinh[x - 3 \cos t] - \sqrt{5}}{-4 \cosh[x - 3 \cos t] + 6 \sinh[x - 3 \cos t]}.$$

سیستم (۱۳.۲) را با شرایط این مثال حل می‌کنیم. خطاهای $E_T(\bar{t})$ در نقاط

$t = -0.05, -0.25, 0,$

$0.25, 0.5$ برای روش CPS و روش‌های $MMPDE$ [۲۵] را در جدول ۲.۲ آورده‌ایم.

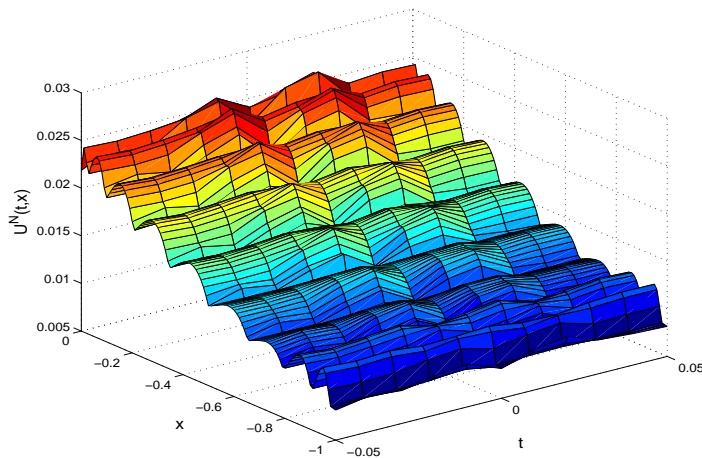


شکل ۴.۲: خطاهای $E_T(\bar{t})$ مثال ۱.۴.۲

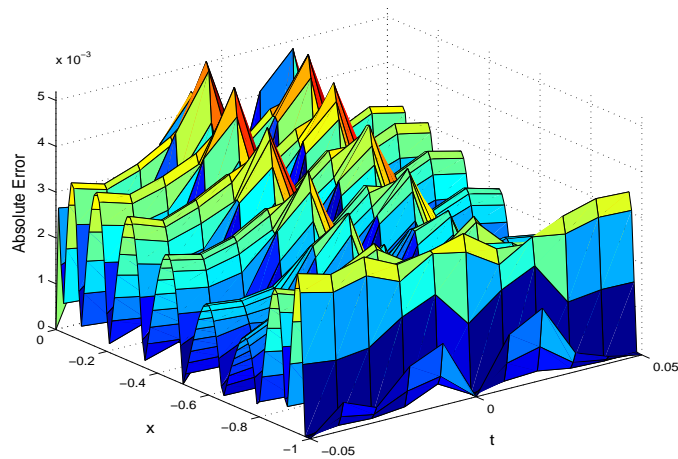
نتایج عددی روش CPS برای $N = 10 \times 10$ (یا همان $\Delta x = 0.1$ و $\Delta t = 0.01$) و نتایج روش های $MMPDE$ برای $\Delta x = \frac{1}{40}$ و $\Delta t = 10^{-4}$ (یا به طور معادل $N = 40 \times 1000$) به دست آمده‌اند. در شکل های ۵.۲، ۶.۲ و ۷.۲ به ترتیب جواب تقریبی، خطای مطلق و خطای $E_T(\bar{t})$ رسم شده است.

جدول ۲.۲: مقایسه خطای $E_T(\bar{t})$ برای مثال ۲.۴.۲

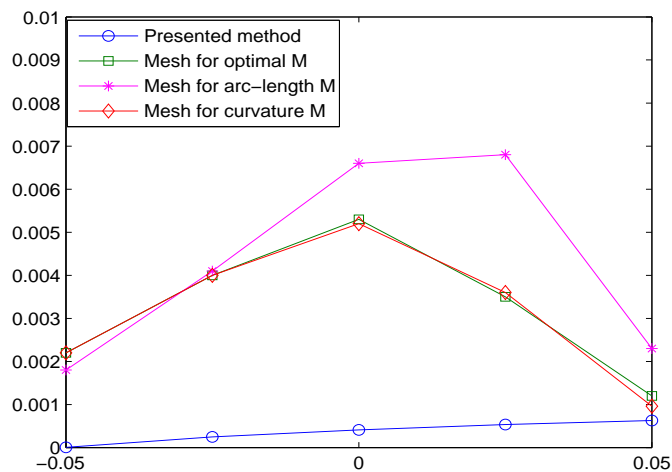
$T = 0.05$	$T = 0.25$	$T = 0$	$T = -0.25$	$T = -0.05$	N	روش
6.2951×10^{-4}	5.3422×10^{-4}	4.1079×10^{-4}	2.4602×10^{-4}	4.8044×10^{-6}	10×10	روش CPS
1.2×10^{-3}	3.5×10^{-3}	5.3×10^{-3}	4×10^{-3}	2.2×10^{-3}	40×1000	الگوریتم (۱) [۲۵]
2.3×10^{-3}	6.8×10^{-3}	6.6×10^{-3}	4.1×10^{-3}	1.8×10^{-3}	40×1000	الگوریتم (۲) [۲۵]
9.6×10^{-4}	3.6×10^{-3}	5.2×10^{-3}	4×10^{-3}	2.2×10^{-3}	40×1000	الگوریتم (۳) [۲۵]



شکل ۵.۲: جواب تقریبی مثال ۲.۴.۲



شکل ۶.۲: خطای مطلق $E(.,.)$ مثال ۲.۴.۲



شکل ۷.۲: خطاهای $E_T(\bar{t})$ مثال ۲.۴.۲

مثال ۳.۴.۲. معادله برگر-هاکسلی (۴.۲) را با مقادیر $\alpha = 1$ ، $\delta = 2$ و $\gamma = 0$ به صورت زیر در نظر بگیرید

$$U_t + U^2 U_x - \beta U_{xx} = 0, \quad (38.2)$$

که $T_0 = 1$ ، $T_1 = 1$ و $a = 0$ و $b = 1$ ، با شرایط مرزی

$$U(t, 0) = 0,$$

$$U(t, 1) = \frac{1}{t + \frac{t\sqrt{t}}{c_0} \exp(\frac{1}{\sqrt{\beta t}})}, \quad (39.2)$$

و شرط اولیه

$$U(1, x) = \frac{x}{1 + \frac{1}{c_0} \exp(\frac{x^\gamma}{\beta})}, \quad (40.2)$$

که $0 < c_0 < 1$ و جواب دقیق به صورت زیر است

$$U(t, x) = \frac{\frac{x}{t}}{1 + \frac{\sqrt{t}}{c_0} \exp(\frac{x^\gamma}{\beta t})}.$$

مثال را برای $c_0 = 0.5$ و $\beta = 0.1$ حل می‌نماییم. خطاهای $E_\infty(\bar{t})$ محاسبه شده با روش CPS و روش‌های بیان شده در [۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹] برای نقاط $t = 2, 4, 6$ با $N = 9 \times 9$ در جدول ۳.۲ نشان داده شده‌اند. شکل‌های ۸.۲ و ۹.۲ به ترتیب جواب‌های تقریبی و خطای مطلق را نشان می‌دهند. جواب‌های دقیق و تقریبی برای $t = 2, 6, 10$ در شکل ۱۰.۲ نشان داده شده است. علاوه بر این خطای $E_\infty(\bar{t})$ در شکل ۱۱.۲ نشان داده شده است.

جدول ۳.۲: مقایسه خطای $E_\infty(\bar{t})$ مثال ۳.۴.۲

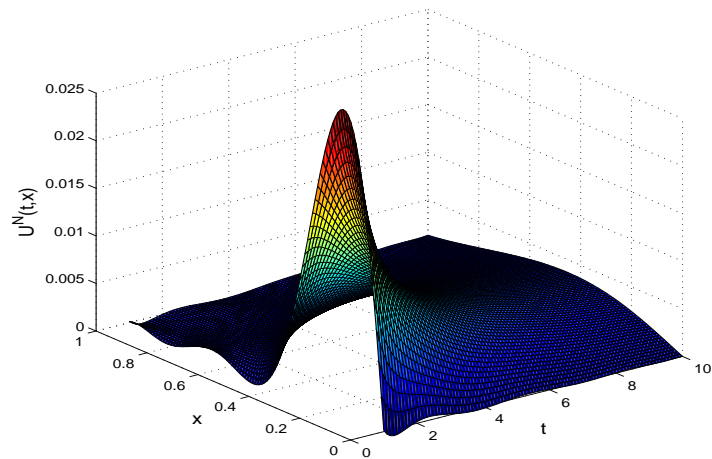
روش	N	$T=2$	$T=6$	$T=10$
روش CPS	9×9	$5/5673 \times 10^{-4}$	$4/4466 \times 10^{-4}$	$3/0034 \times 10^{-4}$
روش معادله گرما [۲۶]	16×900	$7/5978 \times 10^{-4}$	$4/6335 \times 10^{-4}$	$1/16480 \times 10^{-3}$
روش QBC [۳۰]	200×900	$1/21698 \times 10^{-3}$	$7/2249 \times 10^{-4}$	$1/28124 \times 10^{-3}$
روش SBC [۲۷]	50×900	$1/70309 \times 10^{-3}$	$7/6105 \times 10^{-4}$	$1/80239 \times 10^{-3}$
روش QBCA۱ [۲۸]	200×900	$8/1680 \times 10^{-4}$	$5/2579 \times 10^{-4}$	$1/28125 \times 10^{-3}$
روش QBCA۲ [۲۸]	200×900	$8/2212 \times 10^{-4}$	$5/2579 \times 10^{-4}$	$1/28125 \times 10^{-3}$
روش SBC۱ [۲۹]	200×900	$8/2934 \times 10^{-4}$...	$1/28127 \times 10^{-3}$
روش SBC۲ [۲۹]	200×900	$8/2734 \times 10^{-4}$...	$1/28127 \times 10^{-3}$

مثال ۴.۴.۲. معادله برگر (۳۸.۲) را برای $x \in [0, 1/3]$ و شرایط

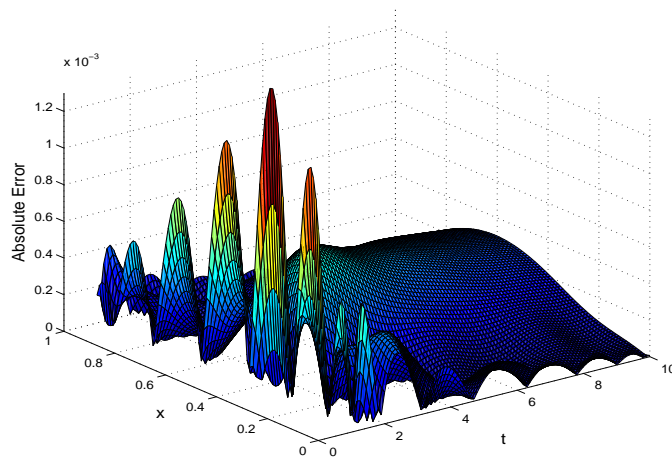
$$\begin{cases} U(t, 0) = 0, \\ U(t, 1) = \frac{1/3}{t + \frac{t\sqrt{t}}{c_0} \exp(\frac{1/69}{\beta t})}, \\ U(1, x) = \frac{x}{1 + \frac{1}{c_0} \exp(\frac{x^\gamma}{\beta})}, \end{cases}$$

در نظر بگیرید.

نتایج عددی و مقایسه خطای $E_\infty(\bar{t})$ آن با سایر روش‌ها [۲۶، ۲۹] برای مقادیر متفاوت t در جدول ۴.۲ نشان داده شده است. در شکل‌های ۱۲.۲ و ۱۳.۲ به ترتیب جواب تقریبی و خطای مطلق رسم شده‌اند. همچنین، جواب‌های دقیق و تقریبی برای $t = 2, 6, 10$ در شکل ۱۴.۲ نشان داده شده است.



شکل ۸.۲: جواب تقریبی مثال ۳.۴.۲



شکل ۹.۲: خطای مطلق $E(.,.)$ مثال ۳.۴.۲

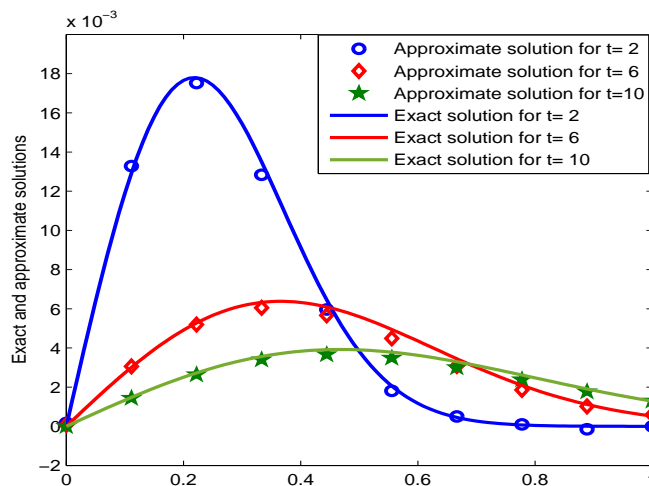
مثال ۵.۴.۲. معادله برگر (۲.۲) را با $a = 0, T_1 = 5, T_0 = 1$ و $b = 8$ و $\varepsilon = 0.5$ در نظر بگیرید. شرط اولیه

$$U(1, x) = \frac{x}{1 + \exp(\frac{1}{\varepsilon}(x^2 - \frac{1}{4}))}, \quad (41.2)$$

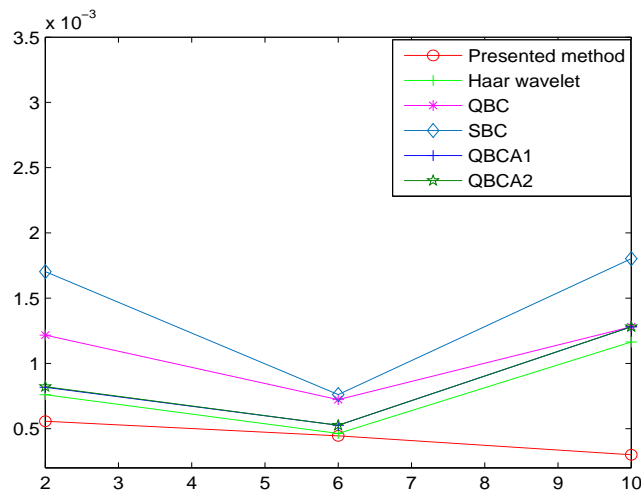
و شرایط مرزی

$$U(t, 0) = 0,$$

$$U(t, 8) = \frac{8}{t + t(\frac{t}{\exp(\frac{1}{\lambda\varepsilon})})^{\frac{1}{\varepsilon}} \exp(\frac{16}{\varepsilon t})}. \quad (42.2)$$



شکل ۱۰.۲: جواب‌های دقیق و تقریبی برای $t = 2, 6, 10$ مثال ۳.۴.۲



شکل ۱۱.۲: خطاهای $E_\infty(t)$ مثال ۳.۴.۲

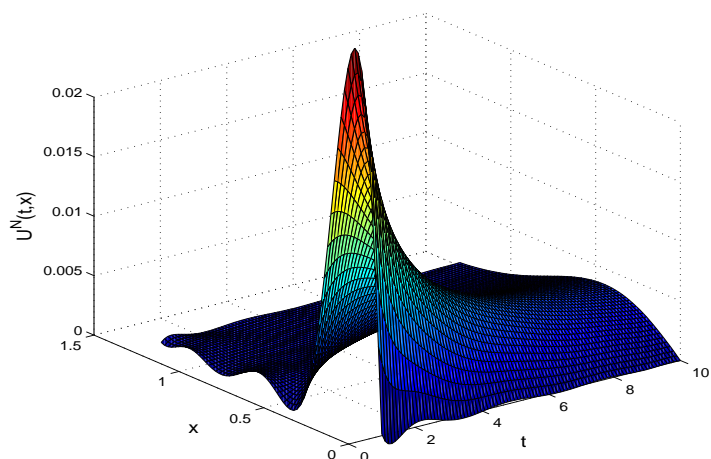
برای این مساله برقرارند. جواب تحلیلی مساله به صورت زیر است

$$U(t, x) = \frac{\frac{x}{t}}{1 + \left(\frac{t}{\exp(\frac{1}{\lambda \varepsilon})}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \exp\left(\frac{x^2}{\sqrt{\varepsilon} t}\right)}$$

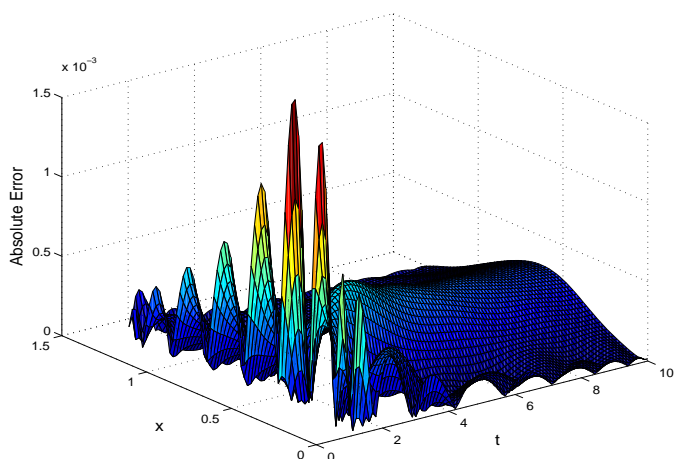
در شکل‌های ۱۵.۲ و ۱۶.۲، جواب تقریبی و خطای مطلق نشان داده شده‌اند. مقایسه بین جواب دقیق و جواب عددی به دست آمده از روش بیان شده در این رساله، در شکل ۱۷.۲ آمده است. خطاهای $E_\infty(t)$ و $E_T(t)$ محاسبه شده با روش CPS و سایر روش‌ها [۳۱] در جدول ۵.۲ مقایسه شده است و مشاهده می‌شود که نتایج روش CPS برای $N = 30 \times 30$ از نتایج روش ارائه شده در [۳۱] برای $N = 320 \times 40000$ بهتر است.

جدول ۴.۲: مقایسه خطای $E_{\infty}(t)$ مثال ۴.۴.۲

$T = 10$	$T = 6$	$T = 2$	N	روش
$3/166 \times 10^{-4}$	$4/294 \times 10^{-4}$	$5/306 \times 10^{-4}$	10×10	روش CPS
$3/2374 \times 10^{-4}$	$4/5606 \times 10^{-4}$	$7/2890 \times 10^{-4}$	16×900	روش معادله گرما [۲۶]
$3/2723 \times 10^{-4}$...	$8/2934 \times 10^{-4}$	260×900	روش $SBC1$ [۲۹]
$3/2337 \times 10^{-4}$...	$8/2734 \times 10^{-4}$	260×900	روش $SBC2$ [۲۹]

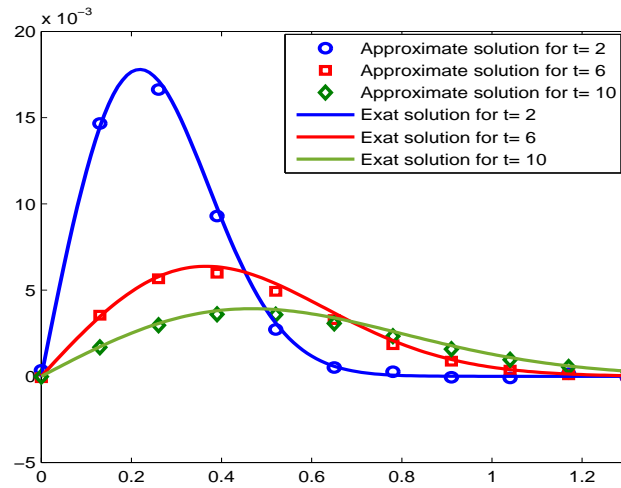


شکل ۱۲.۲: جواب تقریبی مثال ۴.۴.۲



شکل ۱۳.۲: خطای مطلق $E(.,.)$ برای مثال ۴.۴.۲

در ادامه، مساله کنترل بهینه تحت این معادله را در نظر می‌گیریم، شرایط بهینگی متناظر مساله را بیان می‌کنیم و سپس با روش شبه طیفی چبیشف و شرایط بهینگی به دست آمده تقریبی از متغیرهای حالت و کنترل بهینه برای این مساله به دست

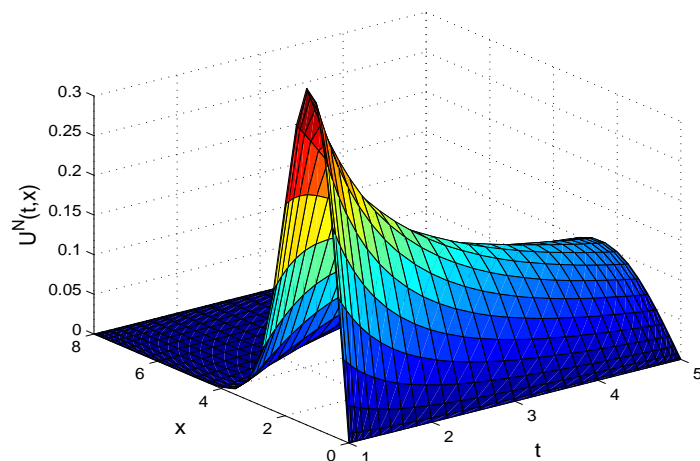


شکل ۱۴.۲: جواب‌های دقیق و تقریبی برای $t = 2, 6, 10$ مثال ۴.۴.۲

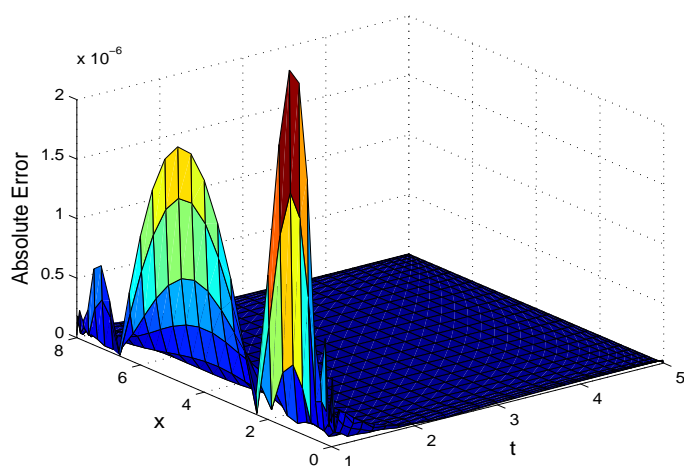
جدول ۵.۲: مقایسه خطاهای $E_T(\bar{t})$ و $E_\infty(\bar{t})$ مثال ۵.۴.۲

$E_\infty(\bar{t})$	$E_T(\bar{t})$	N	T	روش
$1/2611 \times 10^{-7}$	$3/2025 \times 10^{-8}$	30×30	$T = 1/5$	روش CPS
$1/8 \times 10^{-5}$	$2/1 \times 10^{-5}$	320×40000	$T = 1/5$	روش $I - EFD$ [۳۱]
$1/9 \times 10^{-5}$	$2/2 \times 10^{-5}$	320×40000	$T = 1/5$	روش $FI - EFD$ [۳۱]
$6/9546 \times 10^{-9}$	$3/2026 \times 10^{-8}$	30×30	$T = 3$	روش CPS
$3/8 \times 10^{-5}$	$2/2 \times 10^{-5}$	320×40000	$T = 3$	روش $I - EFD$ [۳۱]
$1/8 \times 10^{-5}$	$2/3 \times 10^{-5}$	320×40000	$T = 3$	روش $FI - EFD$ [۳۱]
$1/6022 \times 10^{-9}$	$3/2028 \times 10^{-8}$	30×30	$T = 4/5$	روش CPS
$7/43 \times 10^{-4}$	$4/08 \times 10^{-4}$	320×40000	$T = 4/5$	روش $I - EFD$ [۳۱]
$7/43 \times 10^{-4}$	$4/08 \times 10^{-4}$	320×40000	$T = 4/5$	روش $FI - EFD$ [۳۱]

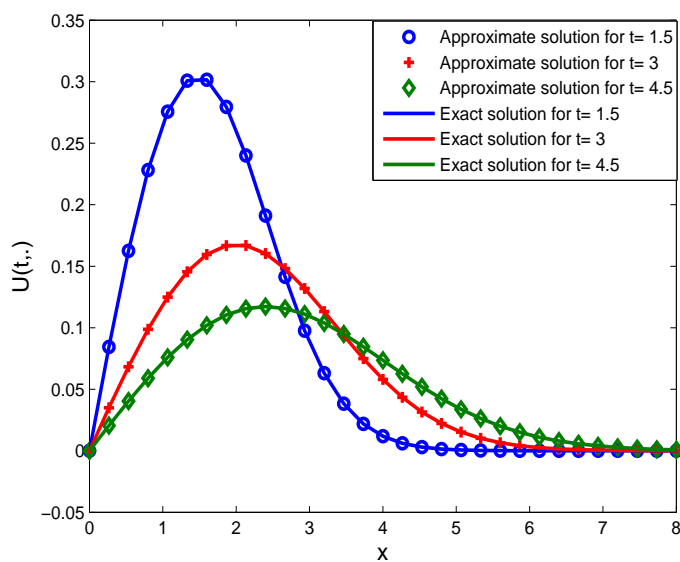
می‌آوریم. همچنین، همگرایی روش را نیز مورد بررسی قرار می‌دهیم.



شکل ۱۵.۲: جواب تقریبی مثال ۵.۴.۲



شکل ۱۶.۲: خطای مطلق $E(.,.)$ مثال ۵.۴.۲



شکل ۱۷.۲: جواب‌های دقیق و تقریبی مثال ۵.۴.۲

فصل ۳

مساله کنترل بهینه معادله برگر

۱.۳ مقدمه

معادلات PDE وابسته به زمان، نقش مهمی در زمینه‌های مختلف از جمله دینامیک سیالات، الکترومغناطیس یا انتقال گرما دارند. اغلب این معادلات دیفرانسیل شامل جملات غیرخطی هستند که به صورت تحلیلی قابل حل نیستند. علاوه بر این، در کاربردهای مهندسی، اغلب مشتاقیم که جواب بهینه مساله PDE در نظر گرفته شده را نسبت به یک تابع هدف معین بیابیم. این موضوع ما را به بخشی از ریاضیات سوق می‌دهد که PDE و قید بهینه سازی داریم به طوری که تابع هدف مینیمم شود و PDE به عنوان یک محدودیت در نظر گرفته می‌شود [۳۲، ۳۳، ۳۴].

کنترل بهینه شاخه‌ای از ریاضیات است که به مسائل کاربردی می‌پردازد و با اصول تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل سروکار دارد. کنترل بهینه در بسیاری از رشته‌های مختلف از قبیل مهندسی، اقتصاد و علوم زیستی کاربردهای زیادی دارد. در کنترل بهینه منظور از کنترل این است که عاملی روی نحوه عملکرد سیستم تاثیر بگذارد تا عملکرد مطلوبی حاصل شود. این اثرگذاری و کنترل می‌تواند توسط خود سیستم و یا خارج و مستقل از سیستم انجام شود. نظریه کنترل در سیستم‌های خطی و غیرخطی کاربرد دارد. در یک مساله کنترل بهینه، هدف پیدا کردن ورودی یک سیستم به عنوان کنترل کننده است که در شرایط فیزیکی دستگاه صدق کند و

تابع هدف را کمینه یا بیشینه کند. در این فصل ابتدا مساله کنترل بهینه معادله برگر معرفی می شود و شرایط بهینگی مساله و همگرایی آن مورد بررسی قرار می گیرد. سپس مساله کنترل بهینه را با روش شبه طیفی چبیشف حل می نماییم.

۲.۳ مساله کنترل بهینه تحت معادله برگر

مساله کنترل بهینه برای معادله برگر را می توان به صورت زیر بیان کرد

$$\text{Minimize } J[y, u] = \frac{1}{\gamma} \int_0^T \int_a^b (y(t, x) - z(t, x))^2 dx dt \quad (1.3)$$

$$+ \frac{\alpha}{\gamma} \int_0^T \int_a^b u^2(t, x) dx dt$$

subject to

$$y_t(t, x) + y(t, x)y_x(t, x) - \nu y_{xx}(t, x) = \Phi(u), \quad (t, x) \in Q = [0, T] \times [a, b], \quad (2.3)$$

$$y(t, a) = y(t, b) = 0, \quad t \in \Sigma = [0, T], \quad (3.3)$$

$$y(0, x) = y_0(x), \quad x \in \Omega = [a, b], \quad (4.3)$$

که $y(\cdot, \cdot)$ متغیر حالت، $u(\cdot, \cdot)$ متغیر کنترل، $\alpha > 0$ پارامتر منظم سازی، $\nu > 0$ پارامتر ویسکوزیتی و Φ یک تابع داده شده است. یک انتخاب رایج تابع Φ به صورت زیر است

$$\Phi(u) = \begin{cases} u, & \text{in } \bar{\Omega}, \\ 0, & \text{in } \Omega \setminus \bar{\Omega}, \end{cases} \quad (5.3)$$

که $\bar{\Omega}$ مجموعه کنترل های فعال^۱ است [۲۶، ۲۷، ۳۵]. ابتدا شرایط بهینگی برای مساله (۱.۳) - (۴.۳) بیان می شود و سپس روش را به طور غیرمستقیم برای رسیدن به یک جواب بهینه تقریبی استفاده می کنیم.

۳.۳ شرایط بهینگی

تعریف می کنیم $\Omega = [0, 1]$ ، $T > 0$ ، $Q = [0, T] \times [0, 1]$ و $\Sigma = [0, T] \times \partial\Omega$. فرض می کنیم $H = L^2(\Omega)$ و $V = H_0^1(\Omega)$ فضاهای هیلبرت باشند. حال، تعریف می کنیم

$$W(0, T) = \{\varphi \in L^2(0, T; V); \varphi_t \in L^2(0, T; V^*)\},$$

¹Active Controls

که فضای دوگان V^* فضای هیلبرت V با ضرب داخلی طبیعی در H به صورت زیر است

$$(\varphi, \psi)_V = (\varphi', \psi')_H, \quad \varphi, \psi \in V.$$

معادله برگر را به صورت

$$y_t + yy_x - \nu y_{xx} = \Phi(u) \quad (t, x) \in Q$$

با شرایط مرزی دیریکله همگن

$$y(t, 0) = y(t, 1) = 0,$$

و شرط اولیه

$$y(0, x) = y_0, \quad x \in \Omega$$

در نظر می گیریم که توسط (۵.۳) بیان می شود [۲۶، ۳۲، ۳۳، ۳۵].
برای معادله برگر با شرایط مرزی و اولیه متناظر، یک جواب ضعیف $y \in W(0, T)$ وجود دارد که در رابطه زیر صدق می کند

$$\langle y_t(t), \varphi \rangle_{V^*, V} + \nu (y_t(t), \varphi)_V + (y(t)y_x(t), \varphi)_H = (\Phi(u)(t), \varphi)_H,$$

که $\varphi \in V$ ، $t \in [0, T]$ و برای هر $\chi \in H$ ، $(y(0), \chi)_H = (y_0, \chi)$ است.
حال مساله کنترل بهینه برگر به صورت زیر بیان می گردد

$$\text{Minimize } J[y, u] = \frac{1}{\beta} \|y(\cdot, \cdot) - z(\cdot, \cdot)\|^2 + \frac{\alpha}{\beta} \|u(\cdot, \cdot)\|^2 \quad (6.3)$$

$$\text{subject to } \begin{cases} y_t(t, x) + y(t, x)y_x(t, x) - \nu y_{xx}(t, x) = \Phi(u), & (t, x) \in Q \\ y(t, 0) = y(t, 1) = 0, & t \in \Sigma \\ y(0, x) = y_0, & x \in \Omega \end{cases}$$

که $y(\cdot, \cdot)$ تابع حالت، $u(\cdot, \cdot)$ تابع کنترل، $z(\cdot, \cdot)$ تابع مطلوب، $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ پارامترهای منظم سازی هستند. همچنین برای هر $\eta(\cdot, \cdot)$ روی Ω داریم

$$\|\eta(\cdot, \cdot)\|^2 = \int_0^T \int_0^1 \eta^2(t, x) dx dt$$

برای آنکه وجود جواب های بهینه را نشان دهیم، نگاشت $e: X \rightarrow Y$ به صورت زیر تعریف می شود [۳۳، ۳۴]

$$e(y, u) = (e_1(y, u), e_2(y, u)) = (y_t + yy_x - \nu y_{xx} - \Phi(u), y(0) - y_0),$$

که $Y = L^2(V) \times H$ و $Y^* = L^2(V^*) \times H$ دوگان Y است. $X = W(V) \times L^2(\bar{\Omega})$ را با $L^2(\circ, T; V)$ نشان می‌دهیم. حال می‌توان سیستم کنترل بهینه‌ی بالا را به صورت یک مساله مینیمم سازی با قیود تساوی زیر تعبیر کرد [۳۳، ۳۵]

$$\text{Minimize } J(y, u), \text{ subject to } e(y, u) = \circ.$$

اگر (y, u) جواب بهینه (۶.۳) و (۷.۳) باشد، ضرایب لاگرانژ p و λ در شرایط بهینگی لازم مرتبه اول زیر صدق می‌کنند [۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۷]

$$L'(y, u, p, \lambda) = \circ, \quad e(y, u) = \circ,$$

که در آن

$$L(y, u, p, \lambda) = J(y, u) - (e_1(y, u), p)_{L^2(V^*), L^2(V)} - (e_2(y, u), \lambda)_H$$

در اینجا، روند شرایط بهینگی برای مساله کنترل بهینه (۱.۳) – (۴.۳) به طور خلاصه بیان می‌شود.

فرض کنید $L^1_{loc}(\Omega)$ مجموعه همه توابعی باشد که روی هر زیرمجموعه فشرده Ω انتگرال پذیر لبگ باشد و $W^{k,2}(\Omega)$ فضای خطی همه توابع $w \in L^2(\Omega)$ با مشتقات ضعیف $D^\alpha w$ در $L^2(\Omega)$ برای هر α چند اندیسه با طول $|\alpha| \leq k$ باشد. فرض کنید $C^\infty(\Omega)$ فضای توابع مشتق‌پذیر از هر مرتبه دلخواه روی Ω باشد. بستار $C^\infty(\Omega)$ در $W^{k,p}(\Omega)$ با $W^{k,p}(\Omega)$ نمایش داده می‌شود. به علاوه، تعریف می‌کنیم $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$.

تعریف ۱.۳.۳. اگر $y \in L^1_{loc}(\Omega)$ و برخی α های چند اندیسه داده شده باشند و تابع $\omega \in L^1_{loc}(\Omega)$ در رابطه

$$\int_{\Omega} y(x) D^\alpha v(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \omega(x) v(x) dx, \quad \forall v \in C^\infty(\Omega),$$

صدق کند، آنگاه ω مشتق ضعیف y (نسبت به α) نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۳.۳. هر تابع $y \in W(\circ, T)$ که در رابطه زیر صدق کند، یک جواب ضعیف برای معادله برگر (۲.۳) و شرایط (۳.۳) و (۴.۳) نامیده می‌شود

$$\begin{cases} \langle y_t(t), \phi \rangle_{V^*, V} + \nu \langle y_t(t), \phi \rangle_V + \langle y(t) y_x(t), \phi \rangle_H = \langle (\Phi(u))(t), \phi \rangle_H, \\ \phi \in V, t \in [\circ, T], \langle y(\circ), \chi \rangle_H = \langle y_\circ, \chi \rangle, \chi \in H, \end{cases}$$

که

$$\langle y_t(t), \phi \rangle_{V^*, V} = \int_{\Omega} \eta \cdot \phi dx + \int_{\Omega} \eta' \cdot \phi' dx, \quad \eta \in V.$$

قضیه ۱.۳.۳. فرض کنید (y^*, u^*) جواب بهینه (۱.۳)–(۴.۳) باشد. در این صورت، ضرایب لاگرانژ $\mathfrak{H} : [\circ, T] \times \Omega \rightarrow \mathfrak{H}$ و p^* و λ^* وجود دارند که در شرایط بهینگی لازم مرتبه اول زیر صدق می کنند

$$L'(y^*, u^*, p^*, \lambda^*) = \circ, \quad e(y^*, u^*) = \circ,$$

که تابع لاگرانژ به صورت زیر بیان می شود

$$L(y, u, p, \lambda) = J(y, u) - (e_1(y, u), p)_{L^r(V^*), L^r(V)} - (e_2(y, u), \lambda)_H.$$

از این رو، شرایط بهینگی مرتبه اول به سیستم زیر منجر می شود ([۳۷، ۳۶، ۳۵، ۳۴] را ببینید)

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_t - \nu y_{xx} + yy_x = \Phi(u), & (t, x) \in Q, \\ p_t + \nu p_{xx} + yp_x = z - y, & (t, x) \in Q, \\ y(t, a) = y(t, b) = \circ, & t \in \Sigma, \\ y(\circ, x) = y_\circ, & x \in \Omega, \\ p(t, a) = p(t, b) = \circ, & t \in \Sigma, \\ p(T, x) = \circ, & x \in \Omega, \\ \alpha u + p = \circ, & (t, x) \in Q. \end{array} \right. \quad (۷.۳)$$

از آخرین معادله سیستم (۷.۳) داریم

$$u = -\frac{1}{\alpha}p. \quad (۸.۳)$$

که با استفاده از (۸.۳) می توان سیستم (۷.۳) را به صورت زیر بیان نمود

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_t - \nu y_{xx} + yy_x = \Phi(-\frac{1}{\alpha}p), & (t, x) \in Q, \\ p_t + \nu p_{xx} + yp_x = z - y, & (t, x) \in Q, \\ y(t, a) = y(t, b) = \circ, & t \in \Sigma, \\ p(t, a) = p(t, b) = \circ, & t \in \Sigma, \\ y(\circ, x) = y_\circ(x), & x \in \Omega, \\ p(T, x) = \circ, & x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (۹.۳)$$

اکنون، می توان روش CPS را برای حل شرایط بهینگی (۹.۳) به کار برد و جواب بهینه تقریبی برای مساله کنترل بهینه (۱.۳)–(۴.۳) را به دست آورد.

۴.۳ روش شبه طیفی چبیشف برای تقریب جواب‌های بهینه مساله کنترل بهینه

برای استفاده از روش CPS برای حل مساله کنترل بهینه تحت معادله برگر، ابتدا متغیرهای سیستم (۹.۳) را به بازه $[-1, 1]$ انتقال داده و در نتیجه شرایط بهینگی (۹.۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\left\{ \begin{array}{ll} Y_{\bar{t}} = \psi_1 (Y(\bar{t}, \bar{x}), P(\bar{t}, \bar{x}), Y_{\bar{x}}(\bar{t}, \bar{x}), Y_{\bar{x}\bar{x}}(\bar{t}, \bar{x})), & (\bar{t}, \bar{x}) \in [-1, 1] \times [-1, 1], \\ P_{\bar{t}} = \psi_2 (Y(\bar{t}, \bar{x}), P(\bar{t}, \bar{x}), P_{\bar{x}}(\bar{t}, \bar{x}), P_{\bar{x}\bar{x}}(\bar{t}, \bar{x})), & (\bar{t}, \bar{x}) \in [-1, 1] \times [-1, 1], \\ Y(\bar{t}, -1) = Y(\bar{t}, 1) = \circ, & \bar{t} \in [-1, 1], \\ P(\bar{t}, -1) = P(\bar{t}, 1) = \circ, & \bar{t} \in [-1, 1], \\ Y(-1, \bar{x}) = Y_0(\bar{x}), & \bar{x} \in [-1, 1], \\ P(1, \bar{x}) = \circ, & \bar{x} \in [-1, 1]. \end{array} \right.$$

(۱۰.۳)

که

$$Y(\bar{t}, \bar{x}) = y\left(\frac{T}{\nu}\bar{t} + \frac{T}{\nu}, \frac{b-a}{\nu}\bar{x} + \frac{b+a}{\nu}\right),$$

$$P(\bar{t}, \bar{x}) = p\left(\frac{T}{\nu}\bar{t} + \frac{T}{\nu}, \frac{b-a}{\nu}\bar{x} + \frac{b+a}{\nu}\right),$$

$$Y_d(\bar{t}, \bar{x}) = y_d\left(\frac{T}{\nu}\bar{t} + \frac{T}{\nu}, \frac{b-a}{\nu}\bar{x} + \frac{b+a}{\nu}\right),$$

$$Y_0(\bar{x}) = y_0\left(\frac{b-a}{\nu}\bar{x} + \frac{b+a}{\nu}\right),$$

$$\psi_1 (Y, P, Y_{\bar{x}}, Y_{\bar{x}\bar{x}}) = \frac{T}{\nu} \left(\left(\frac{\nu}{b-a}\right)^2 \nu Y_{\bar{x}\bar{x}} - \frac{\nu}{b-a} Y Y_{\bar{x}} - \Phi\left(-\frac{1}{\alpha} P\right) \right),$$

$$\psi_2 (Y, P, P_{\bar{x}}, P_{\bar{x}\bar{x}}) = \frac{T}{\nu} \left(-\left(\frac{\nu}{b-a}\right)^2 \nu P_{\bar{x}\bar{x}} - \frac{\nu}{b-a} Y P_{\bar{x}} + Y_d - Y \right).$$

فرض می‌کنیم ψ_1 و ψ_2 دارای مشتقات کراندار و پیوسته نسبت به متغیرهایشان باشند و ثابت‌های M_1 و M_2 وجود داشته باشند طوری که

$$|\psi_1 (Y, P, Y_{\bar{x}}, Y_{\bar{x}\bar{x}}) - \psi_1 (\tilde{Y}, \tilde{P}, \tilde{Y}_{\bar{x}}, \tilde{Y}_{\bar{x}\bar{x}})| \leq M_1 (|Y - \tilde{Y}| + |P - \tilde{P}|), \quad (۱۱.۳)$$

$$|\psi_2 (Y, P, P_{\bar{x}}, P_{\bar{x}\bar{x}}) - \psi_2 (\tilde{Y}, \tilde{P}, \tilde{P}_{\bar{x}}, \tilde{P}_{\bar{x}\bar{x}})| \leq M_2 (|Y - \tilde{Y}| + |P - \tilde{P}|).$$

اکنون، برای تقریب جواب بهینه، چند جمله‌ای‌های درونیاب زیر را استفاده می‌کنیم

$$\begin{cases} Y^N(\bar{t}, \bar{x}) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \bar{a}_{ij}^N L_i(\bar{t}) L_j(\bar{x}), \\ P^N(\bar{t}, \bar{x}) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \bar{b}_{ij}^N L_i(\bar{t}) L_j(\bar{x}), \end{cases} \quad (12.3)$$

که \bar{a}_{ij}^N و \bar{b}_{ij}^N ، $i, j = 0, 1, \dots, N$ ضرایب مجهول هستند. بنابر (12.1) داریم

$$\begin{cases} Y^N(\bar{t}_i, \bar{x}_j) = \bar{a}_{ij}^N, \\ P^N(\bar{t}_i, \bar{x}_j) = \bar{b}_{ij}^N, \end{cases} \quad (13.3)$$

که

$$\bar{t}_i = -\cos\left(\frac{\pi i}{N}\right), \quad \bar{x}_j = -\cos\left(\frac{\pi j}{N}\right).$$

با استفاده از ماتریس مشتق $D = (D_{kj})$ (12.2) مشتقات $Y_{\bar{t}}^N(\cdot, \cdot)$ ، $Y_{\bar{x}}^N(\cdot, \cdot)$ ، $Y_{\bar{x}\bar{x}}^N(\cdot, \cdot)$ ، $P_{\bar{t}}^N(\cdot, \cdot)$ ، $P_{\bar{x}}^N(\cdot, \cdot)$ و $P_{\bar{x}\bar{x}}^N(\cdot, \cdot)$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$\begin{cases} Y_{\bar{t}}^N(\bar{t}_p, \bar{x}_k) = \sum_{i=0}^N \bar{a}_{ik}^N D_{pi}, \\ Y_{\bar{x}}^N(\bar{t}_p, \bar{x}_k) = \sum_{j=0}^N \bar{a}_{pj}^N D_{kj}, \\ Y_{\bar{x}\bar{x}}^N(\bar{t}_p, \bar{x}_k) = \sum_{j=0}^N \bar{a}_{pj}^N \hat{D}_{kj}, \\ P_{\bar{t}}^N(\bar{t}_p, \bar{x}_k) = \sum_{i=0}^N \bar{b}_{ik}^N D_{pi}, \\ P_{\bar{x}}^N(\bar{t}_p, \bar{x}_k) = \sum_{j=0}^N \bar{b}_{pj}^N D_{kj}, \\ P_{\bar{x}\bar{x}}^N(\bar{t}_p, \bar{x}_k) = \sum_{j=0}^N \bar{b}_{pj}^N \hat{D}_{kj}. \end{cases} \quad (14.3)$$

حال با استفاده از روابط (12.3)، (13.3) و (14.3)، شرایط (9.3) را به صورت گسسته زیر می‌نویسیم

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^N \bar{a}_{ik}^N D_{pi} - \psi_1 \left(\bar{a}_{pk}^N, \bar{b}_{pk}^N, \sum_{j=0}^N \bar{a}_{pj}^N D_{kj}, \sum_{j=0}^N \bar{a}_{pj}^N \hat{D}_{kj} \right) = 0, \\ \sum_{i=0}^N \bar{b}_{ik}^N D_{pi} - \psi_2 \left(\bar{a}_{pk}^N, \bar{b}_{pk}^N, \sum_{j=0}^N \bar{b}_{pj}^N D_{kj}, \sum_{j=0}^N \bar{b}_{pj}^N \hat{D}_{kj} \right) = 0, \\ \bar{a}_{p0}^N = \bar{a}_{pN}^N = 0, \quad \bar{b}_{p0}^N = \bar{b}_{pN}^N = 0, \\ \bar{a}_{0k}^N = Y_0(\bar{x}_k), \quad \bar{b}_{Nk}^N = 0, \quad k, p = 0, 1, \dots, N. \end{cases} \quad (15.3)$$

با حل سیستم معادلات جبری (15.3)، می‌توان جواب‌های بهینه تقریبی پیوسته و نقطه‌ای را به ترتیب به فرم (12.3) و (13.3) به دست آورد. همچنین، با استفاده از رابطه (8.3)، کنترل بهینه تقریبی را به شکل زیر می‌توان نوشت

$$U^N(\bar{t}, \bar{x}) = \frac{-1}{\alpha} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \bar{b}_{ij}^N L_i(\bar{t}) L_j(\bar{x}), \quad (\bar{t}, \bar{x}) \in [-1, 1] \times [-1, 1].$$

و مقدار بهینه تابع هدف (۱.۳) را با توجه به فرمول کلنشاو- کورتیس^۲ می توان تقریب زد [۳۸، ۳۹]

$$J_N = \frac{T}{\lambda} \sum_{k=0}^N \sum_{p=0}^N w_k w_p [\bar{a}_{pk}^N - z \left(\frac{T}{\gamma} (\bar{t}_p + 1), \frac{b-a}{\gamma} \bar{x}_k + \frac{b+a}{\gamma} \right) + \alpha \bar{c}_{pk}^{N\gamma}] \quad (۱۶.۳)$$

که $\bar{c}_{pk}^N = -\frac{1}{\alpha} \bar{b}_{pk}^N$ و w_s ($s = 0, 1, \dots, N$) وزن های درجه دوم تقریب عددی (۱۶.۳) هستند. برای N زوج، وزن ها به صورت

$$\begin{cases} w_0 = w_N = \frac{1}{N^{\frac{\gamma}{2}}} \\ w_s = w_{N-s} = \frac{\gamma}{N} \sum_{j=0}^{\frac{N''}{\gamma}} \frac{1}{1-\gamma j^{\frac{\gamma}{2}}} \cos\left(\frac{\gamma \pi j s}{N}\right), s = 1, 2, \dots, \frac{N}{\gamma}, \end{cases} \quad (۱۷.۳)$$

و برای N فرد به صورت زیر بیان می شوند

$$\begin{cases} w_0 = w_N = \frac{1}{N^{\frac{\gamma}{2}}} \\ w_s = w_{N-s} = \frac{\gamma}{N} \sum_{j=0}^{\frac{N-1}{\gamma}} \frac{1}{1-\gamma j^{\frac{\gamma}{2}}} \cos\left(\frac{\gamma \pi j s}{N}\right), s = 1, 2, \dots, \frac{N-1}{\gamma}. \end{cases} \quad (۱۸.۳)$$

// در سیگما به این معناست که جملات اول و آخر سیگما باید نصف گردند.

۵.۳ همگرایی روش

با استفاده از مقدمات بیان شده در بخش ۳.۲ برای تضمین وجود جواب معادلات جبری (۱۵.۳)، آن را به فرم زیر می نویسیم

$$\begin{cases} \left| \sum_{i=0}^N \bar{a}_{ik}^N D_{pi} - \psi_1 \left(\bar{a}_{pk}^N, \bar{b}_{pk}^N, \sum_{i=0}^N \bar{a}_{ik}^N D_{pi}, \sum_{j=0}^N \bar{a}_{pj}^N D_{kj}, \sum_{j=0}^N \bar{a}_{pj}^N \hat{D}_{kj} \right) \right| \\ \leq \frac{\sqrt{N}}{\gamma^{\frac{1}{2}} N^{\frac{\gamma}{2}-1}} W\left(\frac{1}{\gamma^{\frac{1}{2}} N^{\frac{\gamma}{2}-1}}\right), p, k = 1, 2, \dots, N-1 \\ \left| \sum_{i=0}^N \bar{b}_{ik}^N D_{pi} - \psi_2 \left(\bar{a}_{pk}^N, \bar{b}_{pk}^N, \sum_{i=0}^N \bar{b}_{ik}^N D_{pi}, \sum_{j=0}^N \bar{b}_{pj}^N D_{kj}, \sum_{j=0}^N \bar{b}_{pj}^N \hat{D}_{kj} \right) \right| \\ \leq \frac{\sqrt{N}}{\gamma^{\frac{1}{2}} N^{\frac{\gamma}{2}-1}} W\left(\frac{1}{\gamma^{\frac{1}{2}} N^{\frac{\gamma}{2}-1}}\right), p, k = 1, 2, \dots, N-1 \\ |\bar{a}_{p0}^N| \leq \frac{\sqrt{N}}{\gamma^{\frac{1}{2}} N^{\frac{\gamma}{2}-1}} W\left(\frac{1}{\gamma^{\frac{1}{2}} N^{\frac{\gamma}{2}-1}}\right), |\bar{a}_{pN}^N| \leq \frac{\sqrt{N}}{\gamma^{\frac{1}{2}} N^{\frac{\gamma}{2}-1}} W\left(\frac{1}{\gamma^{\frac{1}{2}} N^{\frac{\gamma}{2}-1}}\right), p = 0, 1, \dots, N, \\ |\bar{b}_{p0}^N| \leq \frac{\sqrt{N}}{\gamma^{\frac{1}{2}} N^{\frac{\gamma}{2}-1}} W\left(\frac{1}{\gamma^{\frac{1}{2}} N^{\frac{\gamma}{2}-1}}\right), |\bar{b}_{pN}^N| \leq \frac{\sqrt{N}}{\gamma^{\frac{1}{2}} N^{\frac{\gamma}{2}-1}} W\left(\frac{1}{\gamma^{\frac{1}{2}} N^{\frac{\gamma}{2}-1}}\right), p = 0, 1, \dots, N, \\ |\bar{a}_{0k}^N - Y_0(\bar{x}_k)| \leq \frac{\sqrt{N}}{\gamma^{\frac{1}{2}} N^{\frac{\gamma}{2}-1}} W\left(\frac{1}{\gamma^{\frac{1}{2}} N^{\frac{\gamma}{2}-1}}\right), |\bar{b}_{Nk}^N| \leq \frac{\sqrt{N}}{\gamma^{\frac{1}{2}} N^{\frac{\gamma}{2}-1}} W\left(\frac{1}{\gamma^{\frac{1}{2}} N^{\frac{\gamma}{2}-1}}\right), k = 0, 1, \dots, N, \end{cases} \quad (۱۹.۳)$$

که N به اندازه کافی بزرگ و $W(\cdot)$ یک پیمانانه پیوستگی داده شده است. از آنجایی که

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{N}}{\gamma^{\frac{1}{2}} N^{\frac{\gamma}{2}-1}} W\left(\frac{1}{\gamma^{\frac{1}{2}} N^{\frac{\gamma}{2}-1}}\right) = 0$$

²Clenshaw-Curtis

هنگامی که N به سمت بی‌نهایت میل کند، هر جواب $(\bar{a}, \bar{b})_N = ((\bar{a}_{pk}^N, \bar{b}_{pk}^N); p, k = 0, 1, \dots, N)$ برای سیستم نامعادلات جبری (۱۹.۳) یک جواب برای سیستم معادلات جبری (۱۵.۳) است. در ادامه، نشان می‌دهیم که سیستم (۱۹.۳) شدنی است و حداقل یک جواب $(\bar{a}, \bar{b})_N$ دارد.

قضیه ۱.۵.۳. فرض کنید $(Y(\cdot, \cdot), P(\cdot, \cdot))$ یک جواب برای سیستم (۱۰.۳) باشد که $Y(\cdot, \cdot)$ و $P(\cdot, \cdot)$ در $C_W^1(\bar{\Omega})$ است. در این صورت، یک عدد صحیح مثبت K وجود دارد که برای هر $N \geq K$ ، سیستم نامعادلات (۱۹.۳) دارای یک جواب به شکل زیر است

$$(\bar{a}, \bar{b})_N = ((\bar{a}_{pk}, \bar{b}_{pk}); p, k = 0, 1, \dots, N). \quad (20.3)$$

که در شرایط زیر صدق می‌کند

$$\begin{cases} |Y(\bar{t}_p, \bar{x}_k) - \bar{a}_{pk}^N| \leq \frac{L}{\sqrt{N-1}} W\left(\frac{1}{\sqrt{N-1}}\right), p, k = 0, 1, \dots, N, \\ |P(\bar{t}_p, \bar{x}_k) - \bar{b}_{pk}^N| \leq \frac{L}{\sqrt{N-1}} W\left(\frac{1}{\sqrt{N-1}}\right), p, k = 0, 1, \dots, N, \end{cases} \quad (21.3)$$

که L یک ثابت مثبت مستقل از N می‌باشد.

برهان. فرض کنید $\eta_1(\cdot, \cdot)$ و $\eta_2(\cdot, \cdot)$ در $Pol(N-1, N, \bar{\Omega})$ به ترتیب بهترین تقریب‌های چندجمله‌ای‌های $Y_{\bar{t}}(\cdot, \cdot)$ و $P_{\bar{t}}(\cdot, \cdot)$ باشند. با استفاده از قضیه ۱.۳.۲ داریم

$$\begin{cases} \|Y_{\bar{t}}(\bar{t}, \bar{x}) - \eta_1(\bar{t}, \bar{x})\|_{\infty} \leq \frac{\gamma_1}{\sqrt{N-1}} W\left(\frac{1}{\sqrt{N-1}}\right), (\bar{t}, \bar{x}) \in \bar{\Omega}, \\ \|P_{\bar{t}}(\bar{t}, \bar{x}) - \eta_2(\bar{t}, \bar{x})\|_{\infty} \leq \frac{\gamma_2}{\sqrt{N-1}} W\left(\frac{1}{\sqrt{N-1}}\right), (\bar{t}, \bar{x}) \in \bar{\Omega}, \end{cases} \quad (22.3)$$

که γ_1 و γ_2 ثابت‌های مستقل از N هستند. تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} \tilde{Y}(\bar{t}, \bar{x}) = Y(-1, \bar{x}) + \int_{-1}^{\bar{t}} \eta_1(\tau, \bar{x}) d\tau, (\bar{t}, \bar{x}) \in \bar{\Omega} \\ \tilde{P}(\bar{t}, \bar{x}) = P(-1, \bar{x}) + \int_{-1}^{\bar{t}} \eta_2(\tau, \bar{x}) d\tau, (\bar{t}, \bar{x}) \in \bar{\Omega}, \end{cases} \quad (23.3)$$

و

$$\bar{a}_{pk}^N = \tilde{Y}(\bar{t}_p, \bar{x}_k), \quad \bar{b}_{pk}^N = \tilde{P}(\bar{t}_p, \bar{x}_k); \quad p, k = 0, 1, \dots, N. \quad (24.3)$$

نشان می‌دهیم که $(\bar{a}, \bar{b})_N = ((\bar{a}_{pk}^N, \bar{b}_{pk}^N); p, k = 0, 1, \dots, N)$ در سیستم نامعادلات (۱۹.۳) صدق می‌کند. با استفاده از (۲۲.۳)، (۲۳.۳) و (۲۴.۳) برای $(\bar{t}, \bar{x}) \in \bar{\Omega}$ داریم

$$|Y(\bar{t}, \bar{x}) - \tilde{Y}(\bar{t}, \bar{x})| = \left| \int_{-1}^{\bar{t}} (Y_{\bar{t}}(\tau, \bar{x}) - \eta_1(\tau, \bar{x})) d\tau \right| \quad (25.3)$$

$$\leq \int_{-1}^{\bar{t}} |Y_{\bar{t}}(\tau, \bar{x}) - \eta_1(\tau, \bar{x})| d\tau \quad (26.3)$$

$$\leq \frac{\gamma_1}{\sqrt{N-1}} W\left(\frac{1}{\sqrt{N-1}}\right) \int_{-1}^{\bar{t}} d\tau$$

$$\leq \frac{\gamma_1}{\sqrt{N-1}} W\left(\frac{1}{\sqrt{N-1}}\right).$$

به طور مشابه برای $(\bar{t}, \bar{x}) \in \bar{\Omega}$ داریم

$$|P(\bar{t}, \bar{x}) - \tilde{P}(\bar{t}, \bar{x})| \leq \frac{\gamma_2}{\gamma_N - 1} W\left(\frac{1}{\gamma_N - 1}\right). \quad (27.3)$$

حال، بنا بر رابطه (۲۳.۳)، توابع $\tilde{Y}(\cdot, \bar{x})$ و $\tilde{P}(\cdot, \bar{x})$ برای هر $\bar{x} \in [-1, 1]$ چند جمله‌ای‌های از درجه حداکثر $2N$ هستند. از این رو، مشتقات در نقاط $\bar{t}_0, \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_N$ با مقادیر چند جمله‌ای در نقاط ضرب شده توسط ماتریس مشتق D ، که در رابطه (۱۲.۲) تعریف شده، برابر است. بنابراین، داریم

$$\sum_{i=0}^N \bar{a}_{ik}^N D_{pi} = \tilde{Y}_{\bar{t}}(\bar{t}_p, \bar{x}_k), \quad \sum_{i=0}^N \bar{b}_{ik}^N D_{pi} = \tilde{P}_{\bar{t}}(\bar{t}_p, \bar{x}_k); \quad p, k = 0, 1, \dots, N. \quad (28.3)$$

بنابراین، با استفاده از روابط (۱۱.۳) و (۲۵.۳) داریم

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=0}^N a_{ik}^N D_{pi} - \psi_1 \left(\bar{a}_{pk}^N, \bar{b}_{pk}^N, \sum_{j=0}^N \bar{a}_{pj}^N D_{kj}, \sum_{j=0}^N \bar{a}_{pj}^N \hat{D}_{kj} \right) \right| \quad (29.3) \\ & \leq \left| \tilde{Y}_{\bar{t}}(\bar{t}_p, \bar{x}_k) - Y_{\bar{t}}(\bar{t}_p, \bar{x}_k) \right| + \\ & \left| Y_{\bar{t}}(\bar{t}_p, \bar{x}_k) - \psi_1 \left(\bar{a}_{pk}^N, \bar{b}_{pk}^N, \sum_{j=0}^N \bar{a}_{pj}^N D_{kj}, \sum_{j=0}^N \bar{a}_{pj}^N \hat{D}_{kj} \right) \right| \\ & = |\eta_1(\bar{t}_p, \bar{x}_k) - Y_{\bar{t}}(\bar{t}_p, \bar{x}_k)| + \\ & \left| \psi_1(Y(\bar{t}_p, \bar{x}_k), P(\bar{t}_p, \bar{x}_k), Y_{\bar{x}}(\bar{t}_p, \bar{x}_k), Y_{\bar{x}\bar{x}}(\bar{t}_p, \bar{x}_k)) - \psi_1 \left(\bar{a}_{pk}^N, \bar{b}_{pk}^N, \sum_{j=0}^N \bar{a}_{pj}^N D_{kj}, \sum_{j=0}^N \bar{a}_{pj}^N \hat{D}_{kj} \right) \right| \\ & \leq |\eta_1(\bar{t}_p, \bar{x}_k) - Y_{\bar{t}}(\bar{t}_p, \bar{x}_k)| + M_1 (|Y(\bar{t}_p, \bar{x}_k) - \bar{a}_{pk}^N| + |P(\bar{t}_p, \bar{x}_k) - \bar{b}_{pk}^N|) \\ & \leq \frac{\gamma_1}{\gamma_N - 1} W\left(\frac{1}{\gamma_N - 1}\right) + M_1 \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_N - 1} W\left(\frac{1}{\gamma_N - 1}\right) + \frac{\gamma_2}{\gamma_N - 1} W\left(\frac{1}{\gamma_N - 1}\right) \right) \\ & = \frac{\gamma_1(\gamma_2 M_1 + 1) + \gamma_2 M_1 \gamma_1}{\gamma_N - 1} W\left(\frac{1}{\gamma_N - 1}\right), \quad p, k = 1, \dots, N-1, \end{aligned}$$

که M_1 و M_2 به ترتیب ثابت‌هایی هستند که در روابط (۱۱.۳) صدق می‌کنند. به طور مشابه داریم

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=0}^N b_{ik}^N D_{pi} - \psi_2 \left(\bar{a}_{pk}^N, \bar{b}_{pk}^N, \sum_{j=0}^N \bar{b}_{pj}^N D_{kj}, \sum_{j=0}^N \bar{b}_{pj}^N \hat{D}_{kj} \right) \right| \quad (30.3) \\ & \leq \frac{\gamma_2(\gamma_2 M_2 + 1) + \gamma_2 M_2 \gamma_1}{\gamma_N - 1} W\left(\frac{1}{\gamma_N - 1}\right), \quad p, k = 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

برای شرایط مرزی، داریم

$$\begin{aligned} |\tilde{Y}(-1, \bar{x}_k) - Y_0(\bar{x}_k)| &\leq |\tilde{Y}(-1, \bar{x}_k) - Y(-1, \bar{x}_k)| + |Y(-1, \bar{x}_k) - Y_0(\bar{x}_k)| \quad (۳۱.۳) \\ &\leq \frac{\gamma_1}{\gamma_{N-1}} W\left(\frac{1}{\gamma_{N-1}}\right), \quad k = 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

(۳۲.۳)

همچنین، برای $p, k = 0, 1, \dots, N$ داریم

$$|\tilde{P}(1, \bar{x}_k)| = |\tilde{P}(1, \bar{x}_k) - P(1, \bar{x}_k)| \leq \frac{\gamma_2}{\gamma_{N-1}} W\left(\frac{1}{\gamma_{N-1}}\right), \quad (۳۳.۳)$$

$$|\tilde{Y}(\bar{t}_p, -1)| = |\tilde{Y}(\bar{t}_p, -1) - Y(\bar{t}_p, -1)| \leq \frac{\gamma_1}{\gamma_{N-1}} W\left(\frac{1}{\gamma_{N-1}}\right), \quad (۳۴.۳)$$

$$|\tilde{Y}(\bar{t}_p, 1)| = |\tilde{Y}(\bar{t}_p, 1) - Y(\bar{t}_p, 1)| \leq \frac{\gamma_1}{\gamma_{N-1}} W\left(\frac{1}{\gamma_{N-1}}\right), \quad (۳۵.۳)$$

$$|\tilde{P}(\bar{t}_p, -1)| = |\tilde{P}(\bar{t}_p, -1) - P(\bar{t}_p, -1)| \leq \frac{\gamma_2}{\gamma_{N-1}} W\left(\frac{1}{\gamma_{N-1}}\right), \quad (۳۶.۳)$$

$$|\tilde{P}(\bar{t}_p, 1)| = |\tilde{P}(\bar{t}_p, 1) - P(\bar{t}_p, 1)| \leq \frac{\gamma_2}{\gamma_{N-1}} W\left(\frac{1}{\gamma_{N-1}}\right). \quad (۳۷.۳)$$

از این رو اگر K را به گونه‌ای انتخاب کنیم که برای $N \geq K$

$$\max\{\gamma_1(2M_1 + 1) + 2M_1\gamma_2, \gamma_2(2M_2 + 1) + 2M_2\gamma_1, \gamma_1, \gamma_2\} \leq \sqrt{N},$$

□ آنگاه بنابر روابط (۲۹.۳) - (۳۷.۳) زوج $(\bar{a}, \bar{b})_N$ در سیستم (۱۹.۳) صدق می‌کند.

حال نشان می‌دهیم که دنباله جواب‌های مساله (۱۹.۳) و دنباله چندجمله‌ای‌های درونیاب آنها به جواب مساله (۱۰.۳) همگرا می‌شود.

قضیه ۲.۵.۳. اگر $\{(\bar{a}, \bar{b})_N = ((\bar{a}_{pk}^N, \bar{b}_{pk}^N); p, k = 0, 1, \dots, N)\}_{N=K}^\infty$ یک دنباله از جواب‌های سیستم (۱۹.۳) باشد و $\{Y^N(\cdot, \cdot), P^N(\cdot, \cdot)\}_{N=K}^\infty$ دنباله چندجمله‌ای‌های درونیاب آنها باشد که در رابطه (۱۲.۳) تعریف شده است و برای هر \bar{x} در $[-1, 1]$ ، دنباله

$$\{Y^N(-1, \bar{x}), P^N(-1, \bar{x}), Y_{\bar{t}}^N(\cdot, \cdot), P_{\bar{t}}^N(\cdot, \cdot)\}_{N=K}^\infty$$

دارای یک زیردنباله

$$\{Y^{N_i}(-1, \bar{x}), P^{N_i}(-1, \bar{x}), Y_{\bar{t}}^{N_i}(\cdot, \cdot), P_{\bar{t}}^{N_i}(\cdot, \cdot)\}_{i=0}^\infty$$

باشد که به طور یکنواخت به $(\phi_1^\infty(\bar{x}), \phi_2^\infty(\bar{x}), \lambda_1(\cdot, \cdot), \lambda_2(\cdot, \cdot))$ همگرا است که $\lambda_1(\cdot, \cdot), \lambda_2(\cdot, \cdot) \in C^2(\bar{\Omega})$ و $\phi_1^\infty(\cdot) \in C^2([-1, 1])$ ، $\phi_2^\infty(\cdot) \in C^2(\bar{\Omega})$ است. آنگاه زوج

$$(\tilde{Y}(\bar{t}, \bar{x}), \tilde{P}(\bar{t}, \bar{x})) = \left(\lim_{i \rightarrow \infty} Y^{N_i}(\bar{t}, \bar{x}), \lim_{i \rightarrow \infty} P^{N_i}(\bar{t}, \bar{x}) \right), \quad (۳۸.۳)$$

برای $(\bar{t}, \bar{x}) \in \bar{\Omega}$ جواب سیستم (۱۰.۳) است.

برهان. با توجه به فرضیات داریم

$$\begin{cases} \tilde{Y}(\bar{t}, \bar{x}) = \phi_1^\infty(\bar{x}) + \int_{-1}^{\bar{t}} \lambda_1(\tau, \bar{x}) d\tau, \\ \tilde{P}(\bar{t}, \bar{x}) = \phi_2^\infty(\bar{x}) + \int_{-1}^{\bar{t}} \lambda_2(\tau, \bar{x}) d\tau. \end{cases} \quad (39.3)$$

ابتدا نشان می‌دهیم که $(\tilde{Y}(\bar{t}, \bar{x}), \tilde{P}(\bar{t}, \bar{x}))$ برای $\bar{t} \in [-1, 1]$ و $\bar{x} = x_k$ ($k = 0, 1, \dots, N$) در سیستم (۱۰.۳) صدق می‌کند. فرض کنیم برای برخی مقادیر $k = 1, \dots, N-1$ در اولین معادله (۱۰.۳) صدق نکند. آنگاه یک τ در $(-1, 1)$ وجود دارد که

$$\tilde{Y}_{\bar{t}}(\tau, \bar{x}_k) - \psi_1 \left(\tilde{Y}(\tau, \bar{x}_k), \tilde{P}(\tau, \bar{x}_k), \tilde{Y}_{\bar{x}}(\tau, \bar{x}_k), \tilde{Y}_{\bar{x}\bar{x}}(\tau, \bar{x}_k) \right) \neq 0.$$

وقتی $N \rightarrow \infty$ ، نقاط $\{\bar{t}_p\}_{p=0}^N$ در $[-1, 1]$ چگال هستند و یک زیر دنباله $\{\bar{t}_{l_{N_i}}\}_{i=1}^\infty$ وجود دارد که $0 < l_{N_i} < N_i$ و $\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{t}_{l_{N_i}} = \tau$ برقرار است. بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\tilde{Y}_{\bar{t}}(\bar{t}_{l_{N_i}}, \bar{x}_k) - \psi_1 \left(\tilde{Y}(\bar{t}_{l_{N_i}}, \bar{x}_k), \tilde{P}(\bar{t}_{l_{N_i}}, \bar{x}_k), \tilde{Y}_{\bar{x}}(\bar{t}_{l_{N_i}}, \bar{x}_k), \tilde{Y}_{\bar{x}\bar{x}}(\bar{t}_{l_{N_i}}, \bar{x}_k) \right) \right) & (40.3) \\ = \tilde{Y}_{\bar{t}}(\tau, \bar{x}_k) - \psi_1 \left(\tilde{Y}(\tau, \bar{x}_k), \tilde{P}(\tau, \bar{x}_k), \tilde{Y}_{\bar{x}}(\tau, \bar{x}_k), \tilde{Y}_{\bar{x}\bar{x}}(\tau, \bar{x}_k) \right) & \neq 0. \end{aligned}$$

به عبارت دیگر، از آنجایی که

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{N_i}}{\sqrt{N_i-1}} W\left(\frac{1}{\sqrt{N_i-1}}\right) = 0$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\tilde{Y}_{\bar{t}}(\bar{t}_{l_{N_i}}, \bar{x}_k) - \psi_1 \left(\tilde{Y}(\bar{t}_{l_{N_i}}, \bar{x}_k), \tilde{P}(\bar{t}_{l_{N_i}}, \bar{x}_k), \tilde{Y}_{\bar{x}}(\bar{t}_{l_{N_i}}, \bar{x}_k), \tilde{Y}_{\bar{x}\bar{x}}(\bar{t}_{l_{N_i}}, \bar{x}_k) \right) \right) = 0,$$

که با (۴۰.۳) تناقض دارد. بنابراین $(\tilde{Y}(\bar{t}, \bar{x}), \tilde{P}(\bar{t}, \bar{x}))$ برای $\bar{x} = \bar{x}_k$ ($k = 1, \dots, N-1$) و $\bar{t} \in [-1, 1]$ در اولین معادله (۱۰.۳) صدق می‌کند. با همین روند، می‌توان نشان داد که در معادله دوم نیز صدق می‌کند. همچنین، به سادگی می‌توان ثابت کرد که $(\tilde{Y}(\cdot, \bar{x}_k), \tilde{P}(\cdot, \bar{x}_k))$ برای $k = 0, 1, \dots, N$ در شرایط مرزی صدق می‌کند. به عنوان مثال، نشان می‌دهیم که برای $k = 0, 1, \dots, N$ $\tilde{Y}(-1, \bar{x}_k) = 0$ است. داریم

$$\begin{aligned} 0 & \leq |\tilde{Y}(-1, \bar{x}_k)| = \left| \lim_{i \rightarrow \infty} Y^{N_i}(-1, \bar{x}_k) \right| = \lim_{i \rightarrow \infty} |Y^{N_i}(-1, \bar{x}_k)| \quad (41.3) \\ & = \lim_{i \rightarrow \infty} |\bar{a}_{0k}^{N_i}| \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{N_i}}{\sqrt{N_i-1}} W\left(\frac{1}{\sqrt{N_i-1}}\right) = 0. \end{aligned}$$

بنابراین، برای همه $k = 0, 1, \dots, N$ $\tilde{Y}(-1, \bar{x}_k) = 0$ است. حال، می‌دانیم نقاط $\{\bar{x}_k\}_{k=0}^N$ وقتی $N \rightarrow \infty$ در $[-1, 1]$ چگال است. بنابراین زوج $(\tilde{Y}(\cdot, \cdot), \tilde{P}(\cdot, \cdot))$ که در رابطه (۳۸.۳) تعریف شده، یک جواب برای (۱۰.۳) روی $\bar{\Omega} = [-1, 1] \times [-1, 1]$ است. \square

۶.۳ مثال های عددی

مثال ۱.۶.۳. مسائل (۱.۳)–(۴.۳) را با $T = 1$ ، $\alpha = 1$ ، $\nu = 0.1$ ، 0.5 ، $y_0 = 0$ ، $\Phi(u) = u \sin(4\pi x)$ و $z(t, x) = 0$ در نظر بگیرید. مقدار تقریبی تابع هدف به روش CPS محاسبه شده و با مقادیر روش شبه طیفی لژاندر (LPS) $[40]$ به ازای $\nu = 0.1$ ، 0.5 ، 1 و برای $N = 10, 20, 30, 40$ در جدول ۱.۳ آمده است. مشاهده می شود که نتایج عددی روش CPS بهتر از نتایج روش LPS هستند. شکل های ۱.۳ و ۲.۳، تقریبی از متغیرهای حالت و کنترل بهینه به دست آمده برای مقادیر مختلف N و $\nu = 0.5$ را نشان می دهند. ملاحظه می شود که با افزایش N جواب های تقریبی به سمت یک تابع همگرا هستند و روش وضعیت پایداری دارد.

جدول ۱.۳: مقایسه مقادیر تابع هدف مثال ۱.۶.۳

$\nu = 0.5$	$\nu = 0.5$	$\nu = 0.1$	$\nu = 0.1$	
روش LPS [40]	روش CPS	روش LPS [40]	روش CPS	N
0.1590006952876	0.16911085761598	0.0828638100277	0.033014881174862	10
0.1519309308076	0.13730446517693	0.0620867108909	0.04040356851832	20
0.1519227846689	0.15082505388501	0.0466282421253	0.0297281232559725	30
0.1519176630695	0.15073940981453	0.0463124455511	0.029005091596013	40

مثال ۲.۶.۳. مساله کنترل بهینه (۱.۳)–(۴.۳) را در نظر بگیرید. فرض کنید $T = 1$ ، $\alpha = 0.5$ ، $\nu = 0.1$ و $z(t, x) = y_0(x)$ که

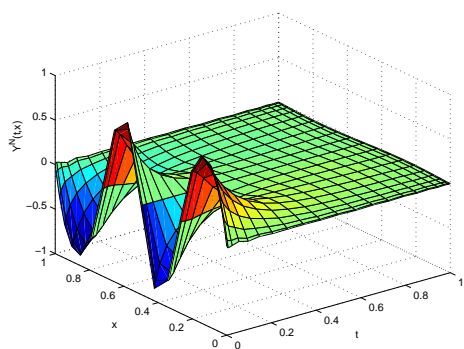
$$y_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \frac{1}{4}], \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

شرط اولیه و

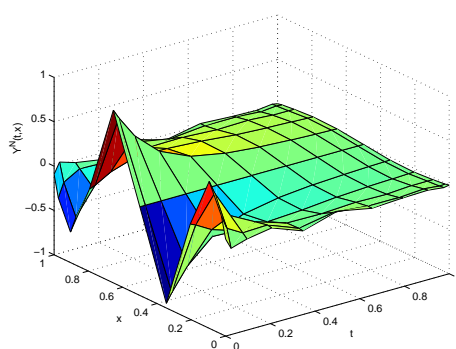
$$\Phi(u) = \begin{cases} u, & (0, T) \times (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), \\ 0, & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

در جدول ۲.۳ مقدار تقریبی تابع هدف به روش CPS برای مقادیر مختلف N نشان داده شده است. در شکل های ۳.۳ و ۴.۳، به ترتیب، تقریبی از متغیرهای حالت و کنترل بهینه نمایش داده شده اند.

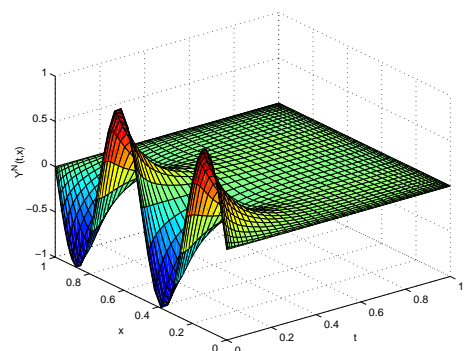
مثال ۳.۶.۳. مساله کنترل بهینه (۱.۳)–(۴.۳) را در نظر بگیرید. فرض کنید که $T = 1$ ، $\alpha = 1$ و $\Phi(u) = u$ ، $z(t, x) = y_0(x)$ که همان شرط اولیه تعریف شده



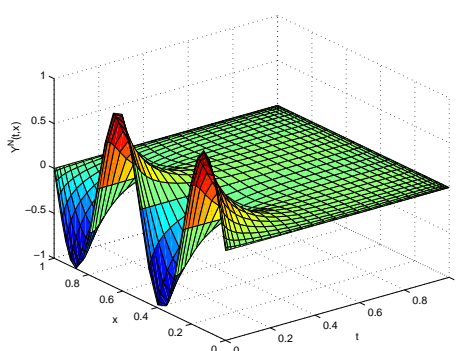
(۲) تقریبی از متغیر حالت بهینه $N = 20$



(۱) تقریبی از متغیر حالت بهینه $N = 10$

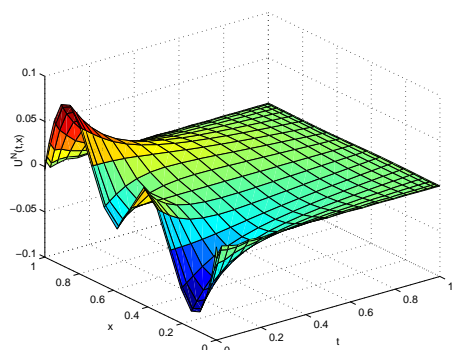


(۴) تقریبی از متغیر حالت بهینه $N = 40$

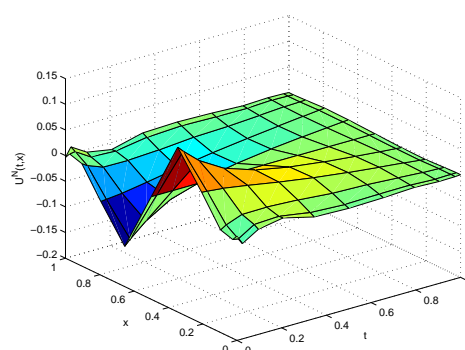


(۳) تقریبی از متغیر حالت بهینه $N = 30$

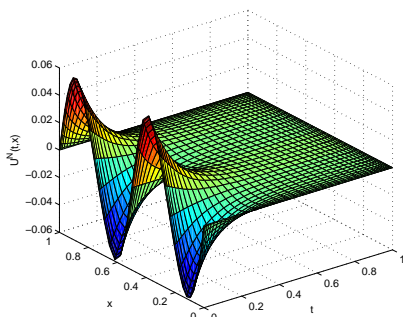
شکل ۱.۳: تقریبی از متغیر حالت بهینه $\nu = 0.05$ مثال ۱.۶.۳



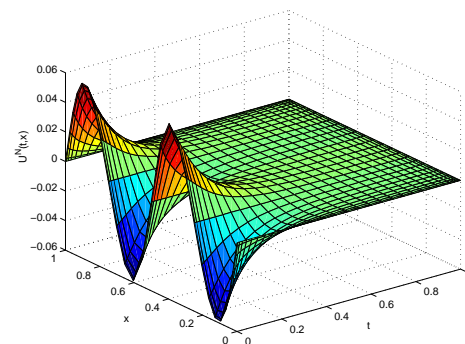
(۲) تقریبی از متغیر کنترل بهینه $N = 20$



(۱) تقریبی از متغیر کنترل بهینه $N = 10$

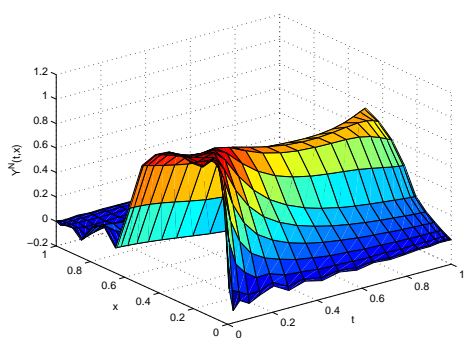


(۴) تقریبی از متغیر کنترل بهینه $N = 40$

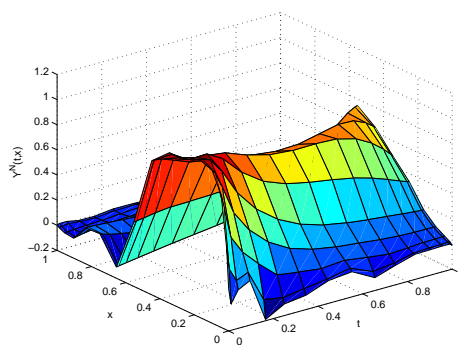


(۳) تقریبی از متغیر کنترل بهینه $N = 30$

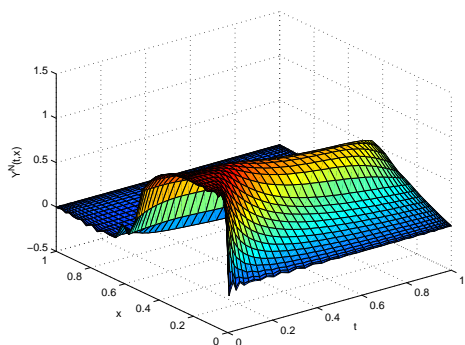
شکل ۲.۳: تقریبی از متغیر کنترل بهینه $\nu = 5\%$ مثال ۱.۶.۳



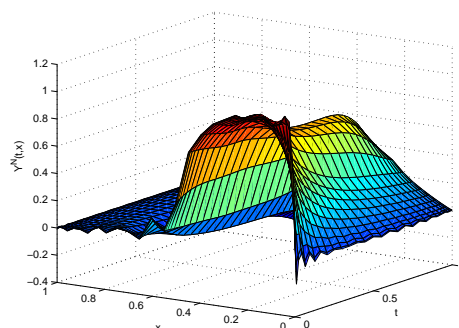
(۲) تقریبی از متغیر حالت بهینه $N = 20$



(۱) تقریبی از متغیر حالت بهینه $N = 15$

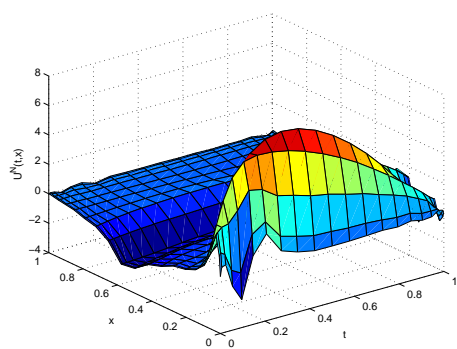


(۴) تقریبی از متغیر حالت بهینه $N = 40$

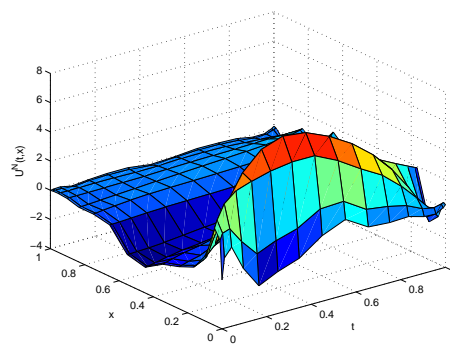


(۳) تقریبی از متغیر حالت بهینه $N = 30$

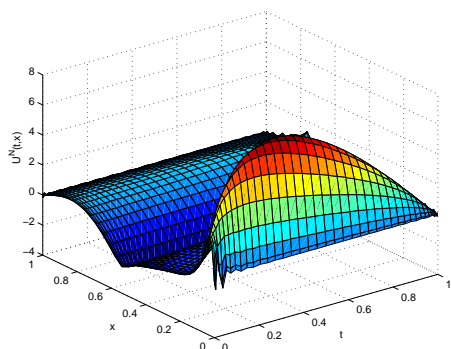
شکل ۳.۳: تقریبی از متغیر حالت بهینه مثال ۲.۶.۳



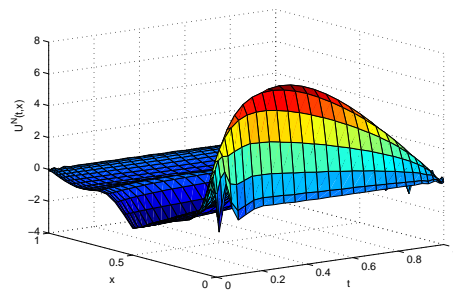
(۲) تقریبی از متغیر کنترل بهینه $N = 20$



(۱) تقریبی از متغیر کنترل بهینه $N = 15$



(۴) تقریبی از متغیر کنترل بهینه $N = 40$



(۳) تقریبی از متغیر کنترل بهینه $N = 30$

شکل ۴.۳: تقریبی از متغیر کنترل بهینه مثال ۲.۶.۳

جدول ۲.۳: مقادیر تقریبی تابع هدف مثال ۲.۶.۳.

J_N	N
۰/۱۰۶۴۱۶۵۸۸۹۶۵۲۵۹	۲۰
۰/۰۸۵۷۳۹۳۶۵۹۷۱۸۹۵	۲۵
۰/۰۸۳۱۲۹۶۳۱۶۳۴۷۱۵	۳۰

در مثال ۲.۶.۳ است. روش CPS را برای حل این مساله به کار می‌بریم. در جدول ۳.۳، مقادیر تابع هزینه با استفاده از روش مذکور برای مقادیر مختلف N محاسبه شده است. شکل‌های ۵.۳ و ۶.۳، تقریبی از متغیرهای حالت و کنترل بهینه به دست آمده را نشان می‌دهند.

جدول ۳.۳: مقادیر تقریبی تابع هدف مثال ۳.۶.۳.

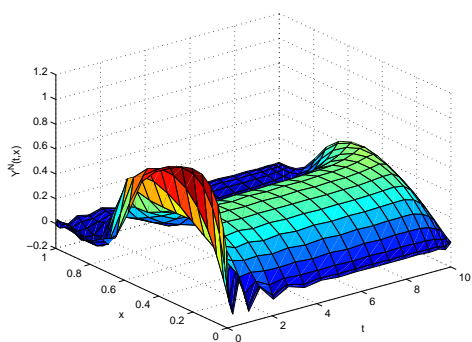
J_N	N
۰/۷۹۵۵۰۲۲۳۱۷۰۵۷۵۷	۱۰
۰/۷۳۲۶۴۹۳۷۳۲۹۱۹۰۸	۲۰
۰/۶۰۵۰۰۳۱۹۴۷۸۳۷۴۳	۳۰

مثال ۴.۶.۳. مساله کنترل بهینه معادله برگر (۱.۳)–(۴.۳) برای مقادیر داده شده $z(t, x) = y_0(x)$ مطلوب $\Phi(u) = u$ ، $\nu = 0/01$ ، $\alpha = 0/1$ ، $T = 10$ که $y_0(x) = \exp(-x)\sin(2\pi x)$ است را در نظر بگیرید. نتایج عددی در جدول ۴.۳ برای مقادیر مختلف N بیان شده است. در شکل‌های ۷.۳ و ۸.۳، تقریبی از متغیرهای حالت و کنترل بهینه نمایش داده شده است.

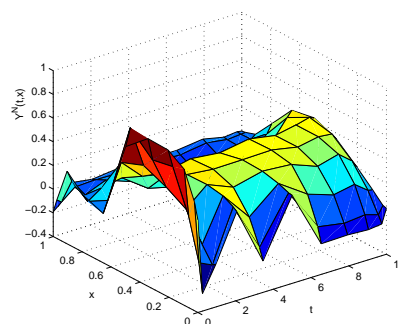
جدول ۴.۳: مقادیر تقریبی تابع هدف مثال ۴.۶.۳.

J_N	N
۰/۱۲۱۰۸۱۸۵۱۰۳۷۱۹۹	۲۰
۰/۱۱۶۹۸۰۷۲۱۰۶۷۹۵۸	۳۰
۰/۱۱۵۸۵۲۰۰۵۲۱۷۲۳۸	۴۰

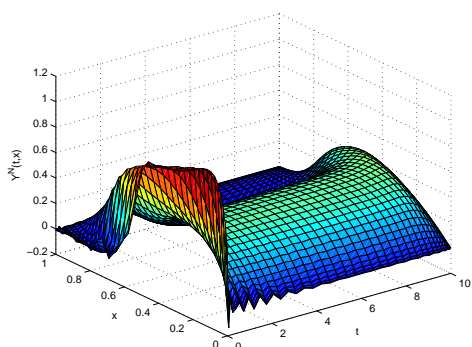
در فصل چهارم، قضایای مربوط به یکتایی جواب معادله برگر کسری و وجود جواب مساله کنترل بهینه تحت این معادله را ثابت می‌کنیم.



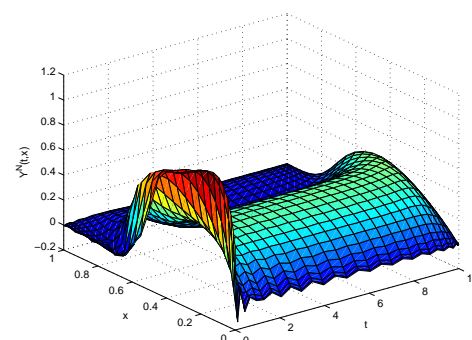
(۲) تقریبی از متغیر حالت بهینه $N = 20$



(۱) تقریبی از متغیر حالت بهینه $N = 10$

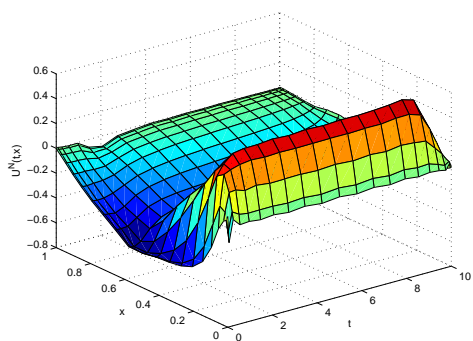


(۴) تقریبی از متغیر حالت بهینه $N = 40$

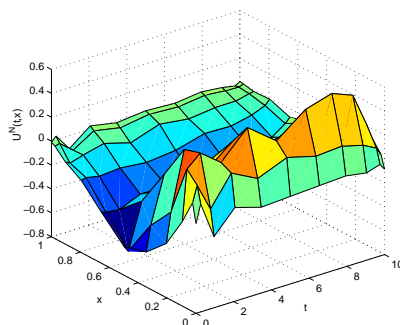


(۳) تقریبی از متغیر حالت بهینه $N = 30$

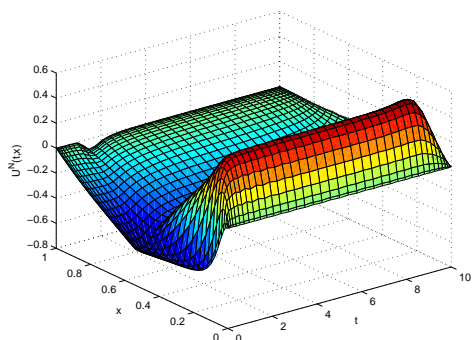
شکل ۵.۳: حالت بهینه تقریبی مثال ۳.۶.۳



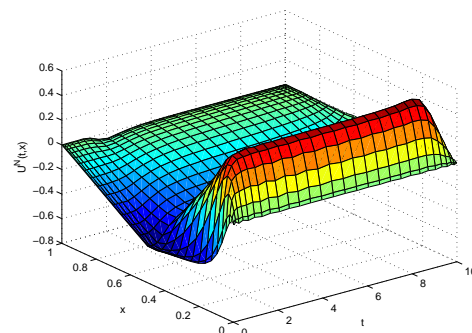
(۲) تقریبی از متغیر کنترل بهینه $N = 20$



(۱) تقریبی از متغیر کنترل بهینه $N = 10$

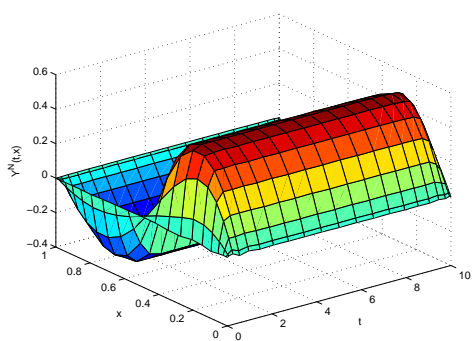


(۴) تقریبی از متغیر کنترل بهینه $N = 40$

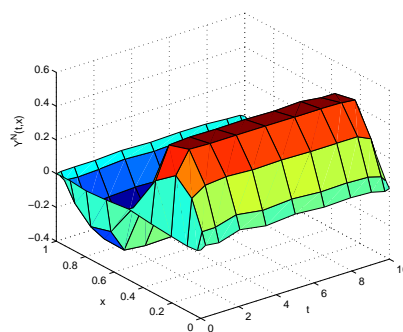


(۳) تقریبی از متغیر کنترل بهینه $N = 30$

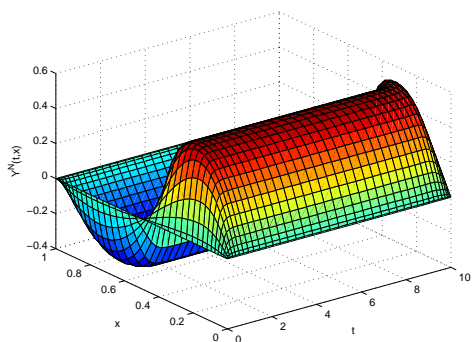
شکل ۶.۳: کنترل بهینه تقریبی مثال ۳.۶.۳



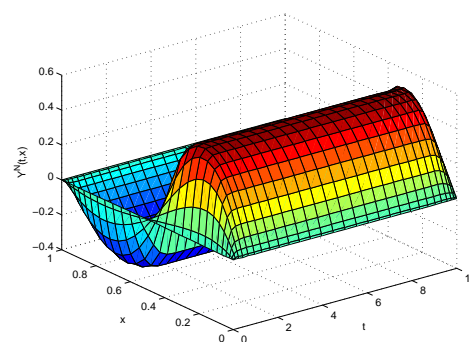
(۲) تقریبی از متغیر حالت بهینه $N = 20$



(۱) تقریبی از متغیر حالت بهینه $N = 10$

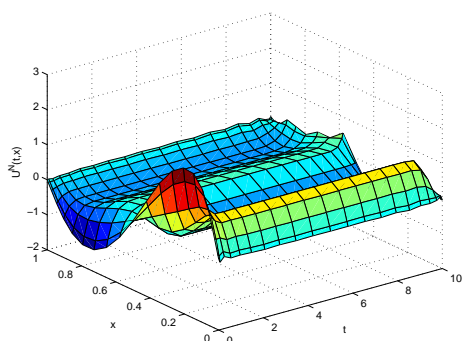


(۴) تقریبی از متغیر حالت بهینه $N = 40$

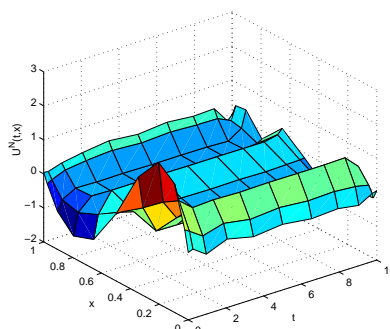


(۳) تقریبی از متغیر حالت بهینه $N = 30$

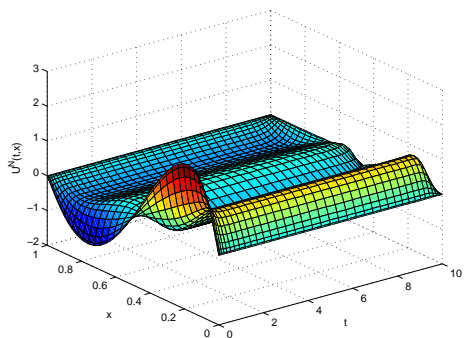
شکل ۷.۳: حالت بهینه تقریبی مثال ۴.۶.۳



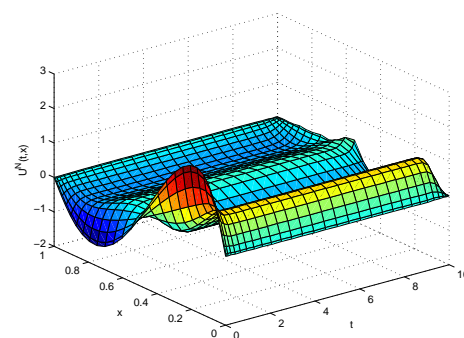
(۲) تقریبی از متغیر کنترل بهینه $N = 20$



(۱) تقریبی از متغیر کنترل بهینه $N = 10$



(۴) تقریبی از متغیر کنترل بهینه $N = 40$



(۳) تقریبی از متغیر کنترل بهینه $N = 30$

شکل ۸.۳: کنترل بهینه تقریبی مثال ۴.۶.۳

فصل ۴

وجود جواب و یکتایی مساله کنترل بهینه برگر کسری

۱.۴ مقدمه

تحلیل و کاربردهای معادلات مشتقات جزئی کسری در زمینه‌های مختلف، رشد وسیعی داشته است [۴۱]. با استفاده از ابزارهای متنوع حسابان کسری، می‌توان پدیده‌های زیادی شامل مکانیک سیالات، شیمی، فیزیک و ... را با دقت بالا مدل‌بندی نمود. تاکنون، بسیاری از محققان معادله برگر کسری را با روش‌های مختلفی از قبیل روش هموتویی، روش ماتریس عملیاتی و ... حل نموده‌اند [۴۱]. آلام خان^۱ از روش آشفته‌گی هموتویی^۲ و روش تبدیل دیفرانسیلی تعمیم یافته^۳ برای حل معادله برگر کسری استفاده کرده است [۴۲]. سعد و الشریف^۴ با استفاده از روش تکرار وردشی^۵ جواب‌های تقریبی معادله برگر کسری را مورد بررسی قرار داده‌اند [۴۳]. در این فصل نشان می‌دهیم که معادلات برگر کسری تحت شرایط ویژه دارای جواب

¹Alam Khan

²Homotopy Perturbation Method

³Generalized Differential Transform Method

⁴ Saad and Al-Sharif

⁵Variational Iteration Method

یکتا است. به علاوه، ثابت می‌کنیم مساله کنترل بهینه تحت معادله برگر کسری حداقل دارای یک جواب بهینه می‌باشد.

۲.۴ مقدمات و تعاریف

تعریف ۱.۲.۴ [۴۴] فرض کنید X فضای خطی نرم دار باشد. تابع خطی \mathbb{T} روی X کراندار گفته می‌شود اگر یک $M \geq 0$ وجود داشته باشد طوری که به ازای هر $f \in X$ داشته باشیم

$$|\mathbb{T}(f)| \leq M\|f\|.$$

کمینه M هایی که در معادله بالا صدق می‌کنند، نرم \mathbb{T} گفته می‌شود و با $\|\mathbb{T}\|_*$ نشان داده می‌شود. مجموعه توابع خطی کراندار روی X با X^* نشان داده می‌شود که فضای دوگان X نامیده می‌شود و یک فضای خطی است.

تعریف ۲.۲.۴ [۴۴] عملگر خطی $\mathbb{J} : X \rightarrow (X^*)^*$ که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbb{J}(x)[\psi] = \psi(x), \quad x \in X, \psi \in X^*,$$

نشاندن طبیعی X به توی $(X^*)^*$ گفته می‌شود. همچنین، فضای X بازتابی Y نامیده می‌شود اگر $\mathbb{J}(X) = (X^*)^*$ باشد. معمولاً $(X^*)^*$ را با X^{**} نشان می‌دهند و X^{**} دوگان دوم X گفته می‌شود.

تعریف ۳.۲.۴ [۴۴] فضای خطی نرم دار X تفکیک پذیر^۸ گفته می‌شود اگر X یک زیرمجموعه شمارا داشته باشد که در X چگال است.

قضیه ۱.۲.۴ [۴۴] اگر مجموعه E اندازه پذیر باشد، فضای خطی نرم دار $L^p(E)$ که $1 \leq p < \infty$ ، تفکیک پذیر است.

تعریف ۴.۲.۴ [۴۴] فضای باناخ یک فضای خطی نرم دار است که نسبت به متریک به دست آمده از نرمش، یک فضای متریک کامل است.

فرض کنید Y یک فضای باناخ حقیقی و Y^* فضای دوگان آن باشد.

تعریف ۵.۲.۴ [۴۵] عملگر $B : Y \rightarrow Y^*$ کراندار نامیده می‌شود اگر مجموعه‌های کراندار Y را به زیرمجموعه‌های کراندار Y^* تصویر نماید.

⁶Natural Embedding

⁷Reflexive

⁸Seperable

تعریف ۶.۲.۴ [۴۵]. عملگر $B : Y \rightarrow Y^*$ نیم-پیوسته^۹ نامیده می‌شود اگر برای هر $z_1, z_2, w \in Y$ تابع

$$f(\lambda) = \langle B(z_1 + \lambda z_2), w \rangle, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

پیوسته باشد.

تعریف ۷.۲.۴ [۴۵]. عملگر $B : Y \rightarrow Y^*$ یکنوا^{۱۰} نامیده می‌شود اگر برای هر $z_1, z_2 \in Y$ داشته باشیم

$$\langle B(z_1) - B(z_2), z_1 - z_2 \rangle \geq 0.$$

همچنین، اگر برای $z_1 \neq z_2$ داشته باشیم

$$\langle B(z_1) - B(z_2), z_1 - z_2 \rangle > 0.$$

B اکیداً یکنوا گفته می‌شود.

تعریف ۸.۲.۴ [۴۶]. دنباله $\{x_n\}$ در فضای نرم دار X همگرای قوی^{۱۱} گفته می‌شود هرگاه $x \in X$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

تعریف ۹.۲.۴ [۴۶]. دنباله $\{x_n\}$ در فضای نرم دار X همگرای ضعیف^{۱۲} گفته می‌شود هرگاه $x \in X$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر تابع خطی پیوسته T در X^* داشته باشیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = T(x).$$

تعریف ۱۰.۲.۴ [۴۵]. عملگر کراندار $B : Y \rightarrow Y^*$ شبه-یکنوا^{۱۳} گفته می‌شود هرگاه

۱. اگر $j \rightarrow \infty$ ، آنگاه $u_j \rightarrow u$ همگرای ضعیف در Y باشد،

۲. $\limsup_{j \rightarrow \infty} \langle B(u_j), u_j - u \rangle \leq 0$ نتیجه دهد که $\lim_{j \rightarrow \infty} \langle B(u_j), u_j - u \rangle = 0$.

،^۰

۳. اگر $j \rightarrow \infty$ ، آنگاه $B(u_j) \rightarrow B(u)$ همگرای ضعیف در Y^* باشد.

قضیه ۲.۲.۴ [۴۵]. فرض کنید Y فضای باناخ بازتابی و $B : Y \rightarrow Y^*$ کراندار، نیم-پیوسته و یکنوا باشد، در این صورت B شبه-یکنوا است.

⁹Hemi-Continuous

¹⁰Monotone

¹¹Strongly Convergent

¹²Weakly Convergent

¹³Pseudo-Monotone

تعریف ۱۱.۲.۴. [۴۵] عملگر $B : Y \rightarrow Y^*$ اجباری^{۱۴} گفته می‌شود اگر

$$\lim_{\|z\| \rightarrow \infty} \frac{\langle B(z), z \rangle}{\|z\|} = \infty.$$

اکنون، عملگر $B : Y \rightarrow Y^*$ را به گونه‌ای در نظر بگیرید که

$$B(z) = F, \quad (1.4)$$

که $F \in Y^*$ و دلخواه است.

تعریف ۱۲.۲.۴. [۴۴] (نامساوی هولدر^{۱۵}) فرض کنید $1 < p, q < \infty$ و q مزدوج p باشد. اگر $f \in L^p$ و $g \in L^q$ آن‌گاه $f.g \in L^1$ و

$$\int |f.g| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

قضیه ۳.۲.۴. [۴۵] فرض کنید Y فضای باناخ تفکیک پذیر بازتابی و $B : Y \rightarrow Y^*$ شبه-یکنوا و اجباری باشد، در این صورت برای هر $F \in Y^*$ دلخواه، معادله (۱.۴) یک جواب $z \in Y$ دارد. به علاوه، اگر B اکیداً یکنوا باشد، آنگاه جواب یکتا است.

لم ۱.۲.۴. (لم مازور^{۱۶} [۴۷]) فرض کنید $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ یک دنباله در Y باشد که به $u_0 \in Y$ همگرای ضعیف باشد. در این صورت یک تابع $N : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ وجود دارد به گونه‌ای که دنباله $\{\bar{u}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ در Y که به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\bar{u}_n = \sum_{k=n}^{N(n)} \lambda_k u_k,$$

که در آن $\sum_{k=n}^{N(n)} \lambda_k = 1$ است و برای $k = n, \dots, N(n)$ ، $\lambda_k \geq 0$ می‌باشد، همگرای قوی به u_0 است.

قضیه ۴.۲.۴. (قضیه همگرایی مغلوب لبگ^{۱۷}) فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله توابع اندازه پذیر روی مجموعه اندازه پذیر Λ باشد، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، تقریباً همه جا به طور نقطه‌ای $f_n \rightarrow f$ و برای هر n ، $|f_n| \leq g$ است، که g تابع انتگرال پذیر روی Λ است. در این صورت f روی Λ انتگرال پذیر است و

$$\int_{\Lambda} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Lambda} f_n d\mu.$$

¹⁴Coercive

¹⁵Holder Inequality

¹⁶Mazur's Lemma

¹⁷Lebesgue's Dominated Convergence Theorem

قضیه ۵.۲.۴. [۴، ۷] فرض کنید $\circ, T > 0, u \in C^m([0, T])$ ، $\alpha \in (m-1, m)$ ، $m \in \mathbb{N}$ و $v \in C^1([0, T])$ در این صورت برای $t \in [0, T]$ داریم

$$۱. \quad {}^R D_t^\alpha v(t) = \frac{d}{dt} {}^R I_t^{1-\alpha} v(t), \quad m = 1,$$

$$۲. \quad {}^R D_t^\alpha {}^R I_t^\alpha v(t) = v(t),$$

$$۳. \quad {}^R I_t^\alpha {}^R D_t^\alpha u(t) = u(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} u^{(k)}(0),$$

$$۴. \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} {}^R D_t^\alpha u(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} {}^R I_t^\alpha u(t) = 0.$$

تعریف ۱۳.۲.۴. [۴۸] فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ ، $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ، $1 \leq p \leq \infty$ و $k \in \mathbb{N}$ باشد. فضای سوبولف^{۱۸} $W^{k,p}(\Omega)$ ، مجموعه همه توابع f روی Ω است به گونه‌ای که برای هر α چند اندیسه با $|\alpha| \leq k$ ، مشتقات جزئی ترکیبی

$$f^{(\alpha)} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (۲.۴)$$

در مفهوم ضعیف موجود باشد و به علاوه

$$\|f^{(\alpha)}\|_{L^p(\Omega)} < \infty. \quad (۳.۴)$$

در اینجا عدد طبیعی k را مرتبه فضای سوبولف $W^{k,p}(\Omega)$ گوئیم و نرم فضای $W^{k,p}(\Omega)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|f^{(\alpha)}\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|f^{(\alpha)}\|_{L^\infty(\Omega)}, & p = \infty. \end{cases} \quad (۴.۴)$$

۳.۴ نتایج اصلی

۱.۳.۴ بیان مساله

فرض کنید $\circ, \nu \geq \circ, p > 1, T > \circ, \Omega = [0, 1], \Sigma = [0, T], Q = [0, T] \times [0, 1]$ ، $\beta \geq \circ$ ، $a > \circ$ و $b > \circ$. همچنین، فرض کنید که $f \in L^\infty(Q)$ و $y_0 \in L^\infty(\Omega)$ باشد به گونه‌ای که تقریباً همه جا در Ω داشته باشیم $|y_0| \leq a$ و $y_0(0) = y_0(1) = \circ$. مساله کنترل بهینه تحت معادله برگر کسری زیر را در نظر می‌گیریم

$$\text{Minimize}_{(y,u) \in X} J(y, u) = \beta \|y - y_d\|_{L^p(Q)}^p + \gamma \|u\|_{L^p(Q)}^p, \quad (۵.۴)$$

¹⁸Sobolev Space

که $y_d \in W^{1,p}(Q)$ یک مقدار مطلوب از قبل تعیین شده است

$$\begin{cases} {}^R D_t^\alpha y(t, x) + y(t, x) \frac{\partial y}{\partial x}(t, x) - \nu \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(t, x) = f(t, x) + u(t, x) & (t, x) \in Q, \\ y(t, 0) = y(t, 1) = 0, & t \in \Sigma, \\ y(0, x) = y_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (۶.۴)$$

و

$$X = \{(y, u) \in (L^\infty(Q))^2 : |y| \leq a, |u| \leq b \text{ a.e. } (t, x) \in Q\}. \quad (۷.۴)$$

۲.۳.۴ جواب مساله

در ادامه، ابتدا نشان می‌دهیم که تحت شرایط مناسب برای ν و a ، مساله (۶.۴) برای هر $u \in L^\infty(Q)$ دارای جواب یکتا است به گونه‌ای که در Q تقریباً همه جا $|u| \leq b$ است، و سپس ثابت می‌کنیم که مساله کنترل بهینه (۵.۴) حداقل دارای یک جواب بهینه است.

قضیه ۱.۳.۴. فرض کنید $T > 0$ ، $p > 1$ ، $\alpha \in (0, 1)$ و $b > 0$ به دلخواه انتخاب گردند و به علاوه ν ، a و K ثابت‌های مثبت باشند که در

$$\nu K - \frac{T^{2-\alpha+\frac{p-2}{p}}}{(p(1-\alpha)+1)^{\frac{1}{p}} \Gamma(2-\alpha)} - 2aT^{\frac{p-2}{p}} > 0 \quad (۸.۴)$$

صدق می‌کنند. فرض کنید که $y_0 \in L^\infty(\Omega)$ ، $y_0(0) = y_0(1) = 0$ ، تقریباً همه جا در Ω ، $|y_0| \leq a$ باشد و y'_0 و y''_0 تقریباً همه جا در Ω وجود داشته باشد. در این صورت، برای هر $u \in L^\infty(Q)$ که در $|u| \leq b$ صدق کند، مساله (۶.۴) دارای جواب یکتا در $W^{1,p}(Q)$ است.

برهان. فرض کنید $q > 1$ به گونه‌ای که $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ باشد. بدون آن که از کلیت مساله کاسته شود، فرض می‌کنیم $y_0 = 0$ باشد، در غیر این صورت از تغییر متغیر $z = y - y_0$ استفاده می‌کنیم. فرض کنید V زیر فضای نرم دار خطی بسته از فضای سوبولف $W^{1,p}(Q)$ باشد، طوری که $0 \in V$ است و برای هر $y_1, y_2 \in V$ داشته باشیم

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial y_1}{\partial x} - \frac{\partial y_2}{\partial x} \right)^2 (s, z) dz ds &\geq K \left(\int_0^T \int_0^1 |y_1 - y_2|^p (s, z) dz ds \right. \\ &\left. + \int_0^T \int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial t} (y_1 - y_2) \right|^p (s, z) dz ds + \int_0^T \int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial x} (y_1 - y_2) \right|^p (s, z) dz ds \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

و برای هر $y \in V$ داشته باشیم

$$y(0, x) = y(T, x) = y(t, 0) = y(t, 1) = 0, \quad |y| \leq a \text{ a.e. } (t, x) \in Q$$

به ویژه چون $\circ \in V$ است، برای هر $y \in V$ داریم

$$y(\circ, x) = y(T, x) = \circ, \quad x \in \Omega,$$

$$\int_{\circ}^T \int_{\circ}^1 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 (s, z) dz ds \geq K \left(\int_{\circ}^T \int_{\circ}^1 |y|^p (s, z) dz ds + \int_{\circ}^T \int_{\circ}^1 \left| \frac{\partial y}{\partial t} \right|^p (s, z) dz ds + \int_{\circ}^T \int_{\circ}^1 \left| \frac{\partial y}{\partial x} \right|^p (s, z) dz ds \right)^{\frac{2}{p}}.$$

در این صورت $V \neq \{\circ\}$. برای اثبات ادعا فرض کنید $T = 1$ ، $p > 1$ و $a = 2\circ$ باشد و $\alpha \in (\circ, 1)$ به دلخواه انتخاب شود. تعریف می‌کنیم

$$f(t, x) = \begin{cases} \frac{16}{(t+1)^2(x+1)^2}, & (t, x) \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right] \times \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right], \\ \circ, & (t, x) \in Q \setminus \left(\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right] \times \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right] \right), \end{cases}$$

$$L = \|f\|_{W^{1,p}(Q)}^2, \tag{۹.۴}$$

$$M = 1024 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{(s+1)^4(z+1)^4} dz ds.$$

توجه داشته باشید که L و M مثبت هستند. اکنون $\nu > \circ$ را طوری در نظر می‌گیریم که

$$\frac{1}{\nu} \left(4\circ + \frac{1}{(p(1-\alpha)+1)^{\frac{1}{p}} \Gamma(2-\alpha)} \right) < \frac{M}{2L}$$

و تعریف می‌کنیم

$$K = \frac{M}{2L}.$$

از این رو، ν ، a و K در (۸.۴) صدق می‌کنند. به علاوه داریم

$$\int_{\circ}^1 \int_{\circ}^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 (s, z) dz ds = 1024 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{(s+1)^4(z+1)^4} dz ds = M,$$

و

$$\begin{aligned} & K \left(\int_{\circ}^1 \int_{\circ}^1 |f|^p (s, z) dz ds + \int_{\circ}^1 \int_{\circ}^1 \left| \frac{\partial f}{\partial t} f \right|^p (s, z) dz ds + \int_{\circ}^1 \int_{\circ}^1 \left| \frac{\partial f}{\partial x} f \right|^p (s, z) dz ds \right)^{\frac{2}{p}} \\ &= KL \\ &= \frac{M}{2} \\ &< \int_{\circ}^1 \int_{\circ}^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 (s, z) dz ds, \end{aligned}$$

تقریباً همه جا در Q ، $|f| \leq a$ است، در نتیجه $f \in V$ می باشد یعنی $\circ \neq \{0\}$. همچنین اگر در Q ، $g(t, x) = lf(t, x)$ ، $|l| < 1$ ، آنگاه $g \in V$ است. حال مساله زیر را در نظر بگیرید

$${}^R D_t^\alpha y + y \frac{\partial y}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f + u, \quad (t, x) \in Q, \quad (10.4)$$

$$y(t, \circ) = y(t, 1) = \circ, \quad t \in \Sigma, \quad (11.4)$$

$$y(\circ, x) = \circ, \quad x \in \Omega. \quad (12.4)$$

تابع $v \in V$ را در نظر می گیریم، اگر طرفین رابطه (۱۰.۴) را در v ضرب کنیم و روی Q انتگرال بگیریم، داریم

$$\int_Q ({}^R D_t^\alpha y)v \, dxdt + \int_Q y \frac{\partial y}{\partial x} v \, dxdt - \nu \int_Q \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} v \, dxdt = \int_Q (f + u)v \, dxdt.$$

با استفاده از انتگرالگیری جزء به جزء، شرط (۱۱.۴) و قضیه (۵.۲.۴) داریم

$$\begin{aligned} & \int_Q \frac{\partial}{\partial t} ({}^R I_t^{1-\alpha} y) v \, dxdt - \int_Q y \left(\frac{\partial y}{\partial x} v + y \frac{\partial v}{\partial x} \right) dxdt + \nu \int_Q \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dxdt \\ & = \int_Q (f + u)v \, dxdt, \end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned} & - \int_Q ({}^R I_t^{1-\alpha} y) \frac{\partial v}{\partial t} dxdt - \int_Q y \left(\frac{\partial y}{\partial x} v + y \frac{\partial v}{\partial x} \right) dxdt + \nu \int_Q \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dxdt \\ & = \int_Q (f + u)v \, dxdt. \end{aligned} \quad (13.4)$$

با استفاده از (۱۲.۴) به دست می آوریم

$$\begin{aligned} {}^R I_t^{1-\alpha} y &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\circ}^t (t-s)^{-\alpha} y(s, x) ds \\ &= -\frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_{\circ}^t \frac{\partial}{\partial s} (t-s)^{1-\alpha} y(s, x) ds \\ &= -\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} (t-s)^{1-\alpha} y(s, x) \Big|_{s=\circ}^{s=t} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_{\circ}^t (t-s)^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial s} y(s, x) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_{\circ}^t (t-s)^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial s} y(s, x) ds. \end{aligned}$$

از اینجا و معادله (۱۳.۴) داریم

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_Q \left(\int_{\circ}^t (t-s)^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial s} y(s, x) ds \right) \frac{\partial v}{\partial t} dxdt \\ & - \int_Q y \left(\frac{\partial y}{\partial x} v + y \frac{\partial v}{\partial x} \right) dxdt + \nu \int_Q \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dxdt \\ & = \int_Q (f + u)v \, dxdt. \end{aligned} \quad (14.4)$$

حال فرض کنید که $F : V \rightarrow V^*$ و $A : V \rightarrow V^*$ دو تابعی باشند طوری که

$$\begin{aligned} \langle F(u), v \rangle &= \int_0^T \int_0^1 (f + u)v dx dt, \quad u, v \in V, \\ \langle A(y), v \rangle &= -\frac{1}{\Gamma(\Upsilon - \alpha)} \int_0^T \int_0^1 \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial s} y(s, x) ds \frac{\partial v}{\partial t} dx dt \\ &\quad - \int_0^T \int_0^1 y \left(\frac{\partial y}{\partial x} v + y \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dt + \nu \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx dt, \quad y \in V, \end{aligned}$$

برای کامل کردن اثبات کافی است که با استفاده از (۱۴.۴) و مساله (۱۰.۴)–(۱۲.۴)، نشان دهیم که $A(y) = F$ دارای جواب یکتای $y \in W^{1,p}(Q)$ است. دو حالت $p > 2$ و $1 < p \leq 2$ را به ترتیب در نظر می‌گیریم.

حالت I: $p > 2$. ابتدا نشان می‌دهیم که A یک عملگر خطی کراندار، نیم-پیوسته، یکنوا و اجباری است.

۱. $A : V \rightarrow V^*$ یک عملگر خطی کراندار است. برای اثبات ادعا فرض کنید $y \in V$ باشد. با استفاده از نامساوی هولدر داریم

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\Upsilon - \alpha)} \left(\int_0^T \int_0^1 \left| \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial s} y(s, x) ds \right|^q dx dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\Upsilon - \alpha)} \left(\int_0^T \int_0^1 \left(\int_0^t (t-s)^{p(1-\alpha)} ds \right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_0^t \left| \frac{\partial}{\partial s} y(s, x) \right|^q ds \right) dx dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \frac{T^{1-\alpha+\frac{1}{p}}}{(p(1-\alpha)+1)^{\frac{1}{p}} \Gamma(\Upsilon - \alpha)} \left(\int_0^T \int_0^1 \int_0^t \left| \frac{\partial}{\partial s} y(s, x) \right|^q ds dx dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \frac{T^{1-\alpha+\frac{1}{p}}}{(p(1-\alpha)+1)^{\frac{1}{p}} \Gamma(\Upsilon - \alpha)} \left(\int_0^T \int_0^1 \int_0^T \left| \frac{\partial}{\partial s} y(s, x) \right|^q ds dx dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \frac{T^{\Upsilon-\alpha}}{(p(1-\alpha)+1)^{\frac{1}{p}} \Gamma(\Upsilon - \alpha)} \left(\int_0^T \int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial s} y(s, x) \right|^q ds dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \frac{T^{\Upsilon-\alpha}}{(p(1-\alpha)+1)^{\frac{1}{p}} \Gamma(\Upsilon - \alpha)} \left(\int_0^T \int_0^1 ds dx \right)^{\frac{p-\Upsilon}{(p-1)q}} \left(\int_0^T \int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial s} y(s, x) \right|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{(p-1)q}} \\ & \leq \frac{T^{\Upsilon-\alpha+\frac{p-\Upsilon}{p}}}{(p(1-\alpha)+1)^{\frac{1}{p}} \Gamma(\Upsilon - \alpha)} \|y\|_V. \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\Gamma(\Upsilon - \alpha)} \left| \int_0^T \int_0^1 \left(\int_0^t (t-s)^{\Upsilon-\alpha} \frac{\partial}{\partial s} y(s,x) ds \right) \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) dx dt \right| \quad (15.4) \\
 & \leq \frac{1}{\Gamma(\Upsilon - \alpha)} \int_0^T \int_0^1 \left| \int_0^t (t-s)^{\Upsilon-\alpha} \frac{\partial}{\partial s} y(s,x) ds \right| \left| \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) \right| dx dt \\
 & \leq \frac{1}{\Gamma(\Upsilon - \alpha)} \left(\int_0^T \int_0^1 \left| \int_0^t (t-s)^{\Upsilon-\alpha} \frac{\partial}{\partial s} y(s,x) ds \right|^q dx dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
 & \times \left(\int_0^T \int_0^1 \left| \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) \right|^p dx dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
 & \leq \frac{T^{\Upsilon-\alpha+\frac{p-\Upsilon}{p}}}{(p(\Upsilon - \alpha) + 1)^{\frac{1}{p}} \Gamma(\Upsilon - \alpha)} \|y\|_V \|v\|_V.
 \end{aligned}$$

به علاوه

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^T \int_0^1 y(t,x) \frac{\partial y}{\partial x}(t,x) v(t,x) dx dt \right| \leq \int_0^T \int_0^1 |y(t,x)| \left| \frac{\partial y}{\partial x}(t,x) \right| |v(t,x)| dx dt \\
 & \leq a \left(\int_0^T \int_0^1 \left| \frac{\partial y}{\partial x}(t,x) \right|^q dx dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^T \int_0^1 |v(t,x)|^p dx dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
 & \leq a \left(\int_0^T \int_0^1 \left| \frac{\partial y}{\partial x}(t,x) \right|^q dx dt \right)^{\frac{1}{q}} \|v\|_V \\
 & \leq a \|v\|_V \left(\int_0^T \int_0^1 \left| \frac{\partial y}{\partial x}(t,x) \right|^{q(p-1)} dx dt \right)^{\frac{1}{(p-1)q}} \left(\int_0^T \int_0^1 dx dt \right)^{\frac{p-\Upsilon}{(p-1)q}} \\
 & \leq a T^{\frac{p-\Upsilon}{p}} \|y\|_V \|v\|_V. \quad (16.4)
 \end{aligned}$$

داریم

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^T \int_0^1 (y(t,x))^{\Upsilon} \frac{\partial v}{\partial x}(t,x) dx dt \right| \leq \int_0^T \int_0^1 |y(t,x)| |y(t,x)| \left| \frac{\partial v}{\partial x}(t,x) \right| dx dt \quad (17.4) \\
 & \leq a \left(\int_0^T \int_0^1 |y(t,x)|^q dx dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^T \int_0^1 \left| \frac{\partial v}{\partial x}(t,x) \right|^p dx dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
 & \leq a \|v\|_V \left(\int_0^T \int_0^1 |y(t,x)|^{(p-1)q} dx dt \right)^{\frac{1}{(p-1)q}} \left(\int_0^T \int_0^1 dx dt \right)^{\frac{p-\Upsilon}{(p-1)q}} \\
 & \leq a T^{\frac{p-\Upsilon}{p}} \|y\|_V \|v\|_V.
 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & \nu \left| \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial y}{\partial x}(t, x) \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) dx dt \right| \leq \nu \int_0^T \int_0^1 \left| \frac{\partial y}{\partial x}(t, x) \right| \left| \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) \right| dx dt \\ & \leq \nu \left(\int_0^T \int_0^1 \left| \frac{\partial y}{\partial x}(t, x) \right|^q dx dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^T \int_0^1 \left| \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) \right|^p dx dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \nu \left(\int_0^T \int_0^1 dx dt \right)^{\frac{p-\gamma}{(p-1)q}} \left(\int_0^T \int_0^1 \left| \frac{\partial y}{\partial x}(t, x) \right|^{q(p-1)} dx dt \right)^{\frac{1}{q(p-1)}} \|v\|_V \\ & \leq \nu T^{\frac{p-\gamma}{p}} \|y\|_V \|v\|_V. \end{aligned}$$

با استفاده از (۱۵.۴) - (۱۸.۴) داریم

$$\begin{aligned} & | \langle A(y), v \rangle | \\ & = \left| \frac{1}{\Gamma(\Upsilon - \alpha)} \int_0^T \int_0^1 \left(\int_0^t (t-s)^{\Upsilon-\alpha} \frac{\partial}{\partial s} y(s, x) ds \right) \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) dx dt \right. \\ & \quad + \int_0^T \int_0^1 y(t, x) \frac{\partial y}{\partial x}(t, x) v(t, x) dx dt + \int_0^T \int_0^1 (y(t, x))^{\Upsilon} \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) dx dt \\ & \quad \left. - \nu \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial y}{\partial x}(t, x) \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) dx dt \right| \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\Upsilon - \alpha)} \left| \int_0^T \int_0^1 \left(\int_0^t (t-s)^{\Upsilon-\alpha} \frac{\partial}{\partial s} y(s, x) ds \right) \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) dx dt \right| \\ & \quad + \left| \int_0^T \int_0^1 y(t, x) \frac{\partial y}{\partial x}(t, x) v(t, x) dx dt \right| + \left| \int_0^T \int_0^1 (y(t, x))^{\Upsilon} \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) dx dt \right| \\ & \quad + \nu \left| \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial y}{\partial x}(t, x) \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) dx dt \right| \\ & \leq \frac{T^{\Upsilon-\alpha+\frac{p-\gamma}{p}}}{(p(\Upsilon - \alpha) + 1)^{\frac{1}{p}} \Gamma(\Upsilon - \alpha)} \|y\|_V \|v\|_V + a T^{\frac{p-\gamma}{p}} \|y\|_V \|v\|_V \\ & \quad + a T^{\frac{p-\gamma}{p}} \|y\|_V \|v\|_V + \nu T^{\frac{p-\gamma}{p}} \|y\|_V \|v\|_V \\ & = \left(\frac{T^{\Upsilon-\alpha+\frac{p-\gamma}{p}}}{(p(\Upsilon - \alpha) + 1)^{\frac{1}{p}} \Gamma(\Upsilon - \alpha)} \|y\|_V + \Upsilon a T^{\frac{p-\gamma}{p}} \|y\|_V + \nu T^{\frac{p-\gamma}{p}} \|y\|_V \right) \|v\|_V. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\|A(y)\|_{V^*} \leq \frac{T^{\Upsilon-\alpha+\frac{p-\gamma}{p}}}{(p(\Upsilon - \alpha) + 1)^{\frac{1}{p}} \Gamma(\Upsilon - \alpha)} \|y\|_V + \Upsilon a T^{\frac{p-\gamma}{p}} \|y\|_V + \nu T^{\frac{p-\gamma}{p}} \|y\|_V.$$

بنابراین $A : V \rightarrow V^*$ کراندار است.

۲. $A: V \rightarrow V^*$ نیم-پیوسته است. فرض کنید $y_1, y_2, v \in V$ باشند، تابع زیر را تعریف کنید

$$\phi(\lambda) = \langle A(y_1 + \lambda y_2), v \rangle, \lambda \in \mathbb{R}.$$

به علاوه فرض کنید $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ یک دنباله در \mathbb{R} باشد که وقتی $k \rightarrow \infty$ داشته باشیم $\lambda_k \rightarrow \lambda$ داریم

$$\begin{aligned} & \langle A(y_1 + \lambda_k y_2), v \rangle = \\ & - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T \int_0^1 \left(\int_0^t (t-s)^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial s} (y_1(s, x) + \lambda_k y_2(s, x)) ds \right) \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) dx dt \\ & - \int_0^T \int_0^1 (y_1(t, x) + \lambda_k y_2(t, x)) \frac{\partial}{\partial x} (y_1(t, x) + \lambda_k y_2(t, x)) v(t, x) dx dt \\ & - \int_0^T \int_0^1 (y_1(t, x) + \lambda_k y_2(t, x))^2 \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) dx dt \\ & + v \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial y_1}{\partial x}(t, x) + \lambda_k \frac{\partial y_2}{\partial x}(t, x) \right) \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) dx dt. \end{aligned}$$

چون

$$\begin{aligned} & \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial s} (y_1(s, x) + \lambda_k y_2(s, x)) ds \rightarrow \\ & \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial s} (y_1(s, x) + \lambda y_2(s, x)) ds, \quad (t, x) \in Q, \end{aligned}$$

$$y_1 + \lambda_k y_2 \rightarrow y_1 + \lambda y_2,$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial y_2}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial y_1}{\partial x} + \lambda \frac{\partial y_2}{\partial x}, \quad \text{as } k \rightarrow \infty, \quad (t, x) \in Q.$$

از آنجا که $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ در \mathbb{R} یک دنباله کراندار است، داریم

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial s} (y_1(s, x) + \lambda_k y_2(s, x)) ds \right|^q \\ & \leq c \left(\left| \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial s} y_1(s, x) ds \right|^q + \left| \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} \frac{\partial}{\partial s} y_2(s, x) ds \right|^q \right), \quad (t, x) \in Q, \\ & |y_1 + \lambda_k y_2|^q \left| \frac{\partial (y_1 + \lambda_k y_2)}{\partial x} \right|^q \leq c (|y_1|^q + |y_2|^q) \left(\left| \frac{\partial y_1}{\partial x} \right|^q + \left| \frac{\partial y_2}{\partial x} \right|^q \right), \quad (18.4) \\ & |y_1 + \lambda_k y_2|^{2q} \leq c (|y_1|^{2q} + |y_2|^{2q}), \\ & \left| \frac{\partial y_1}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial y_2}{\partial x} \right|^q \leq c \left(\left| \frac{\partial y_1}{\partial x} \right|^q + \left| \frac{\partial y_2}{\partial x} \right|^q \right) \quad \text{in } Q. \end{aligned}$$

لذا با استفاده از قضیه همگرایی مغلوب لبگ (۴.۲.۴)، نتیجه می گیریم که

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle A(y_1 + \lambda_k y_2), v \rangle = \langle A(y_1 + \lambda y_2), v \rangle.$$

۳. $A : V \rightarrow V^*$ یکنوا است اگر $y_1, y_2 \in V$ و $y_1 \neq y_2$ باشد، آنگاه برای $y = v = y_1 - y_2$ داریم

$$\begin{aligned}
 & \langle A(y_1 - y_2), y_1 - y_2 \rangle = \\
 & - \frac{1}{\Gamma(\Upsilon - \alpha)} \int_0^T \int_0^1 \int_0^t (t-s)^{\Upsilon-\alpha} \frac{\partial}{\partial s} (y_1(s, x) - y_2(s, x)) ds \\
 & \times \left(\frac{\partial y_1}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial y_2}{\partial t}(t, x) \right) dx dt \\
 & - \int_0^T \int_0^1 (y_1(t, x) - y_2(t, x))^{\Upsilon} \frac{\partial}{\partial x} (y_1(t, x) - y_2(t, x)) dx dt \\
 & - \int_0^T \int_0^1 (y_1(t, x) - y_2(t, x))^{\Upsilon} \left(\frac{\partial y_1}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial y_2}{\partial x}(t, x) \right) dx dt \\
 & + \nu \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial y_1}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial y_2}{\partial x}(t, x) \right)^{\Upsilon} dx dt \\
 & \geq - \frac{1}{\Gamma(\Upsilon - \alpha)} \left| \int_0^T \int_0^1 \int_0^t (t-s)^{\Upsilon-\alpha} \frac{\partial}{\partial s} (y_1(s, x) - y_2(s, x)) ds \right. \\
 & \times \left. \left(\frac{\partial y_1}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial y_2}{\partial t}(t, x) \right) dx dt \right| \\
 & - \left| \int_0^T \int_0^1 (y_1(t, x) - y_2(t, x))^{\Upsilon} \frac{\partial}{\partial x} (y_1(t, x) - y_2(t, x)) dx dt \right| \\
 & - \left| \int_0^T \int_0^1 (y_1(t, x) - y_2(t, x))^{\Upsilon} \left(\frac{\partial y_1}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial y_2}{\partial x}(t, x) \right) dx dt \right| \\
 & + \nu \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial y_1}{\partial x}(t, x) - \frac{\partial y_2}{\partial x}(t, x) \right)^{\Upsilon} dx dt \\
 & \geq - \frac{T^{\Upsilon-\alpha+\frac{p-\Upsilon}{p}}}{(p(\Upsilon-\alpha)+1)^{\frac{1}{p}} \Gamma(\Upsilon-\alpha)} \|y_1 - y_2\|_V^{\Upsilon} - \Upsilon a T^{\frac{p-\Upsilon}{p}} \|y_1 - y_2\|_V^{\Upsilon} \\
 & + \nu K \left(\int_0^T \int_0^1 |y_1(t, x) - y_2(t, x)|^p dx dt \right. \\
 & + \int_0^T \int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial t} (y_1(t, x) - y_2(t, x)) \right|^p dx dt \\
 & \left. + \int_0^T \int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial x} (y_1(t, x) - y_2(t, x)) \right|^p dx dt \right)^{\frac{\Upsilon}{p}} \\
 & \geq - \frac{T^{\Upsilon-\alpha+\frac{p-\Upsilon}{p}}}{(p(\Upsilon-\alpha)+1)^{\frac{1}{p}} \Gamma(\Upsilon-\alpha)} \|y_1 - y_2\|_V^{\Upsilon} - \Upsilon a T^{\frac{p-\Upsilon}{p}} \|y_1 - y_2\|_V^{\Upsilon} \\
 & + \nu K \|y_1 - y_2\|_V^{\Upsilon} \\
 & = \left(\nu K - \frac{T^{\Upsilon-\alpha+\frac{p-\Upsilon}{p}}}{(p(\Upsilon-\alpha)+1)^{\frac{1}{p}} \Gamma(\Upsilon-\alpha)} - \Upsilon a T^{\frac{p-\Upsilon}{p}} \right) \|y_1 - y_2\|_V^{\Upsilon}.
 \end{aligned}$$

از اینجا و از شرط (۸.۴)، نتیجه می‌گیریم که $A : V \rightarrow V^*$ اکیداً یکنوا است.

۴. $A : V \rightarrow V^*$ یک تابعک اجباری است. برای $y \in V$ داریم

$$\langle A(y), y \rangle \geq \left(\nu K - \frac{T^{\gamma-\alpha+\frac{p-\gamma}{p}}}{(p(1-\alpha)+1)^{\frac{1}{p}} \Gamma(\gamma-\alpha)} - \gamma a T^{\frac{p-\gamma}{p}} \right) \|y\|_V^{\gamma}.$$

بنابراین،

$$\frac{\langle A(y), y \rangle}{\|y\|_V} \geq \left(\nu K - \frac{T^{\gamma-\alpha+\frac{p-\gamma}{p}}}{(p(1-\alpha)+1)^{\frac{1}{p}} \Gamma(\gamma-\alpha)} - \gamma a T^{\frac{p-\gamma}{p}} \right) \|y\|_V,$$

و

$$\lim_{\|y\|_V \rightarrow \infty} \frac{\langle A(y), y \rangle}{\|y\|_V} = \infty.$$

از آنجا که $A : V \rightarrow V^*$ کراندار، نیم-پیوسته و یکنوا است، بنابر قضیه ۲.۲.۴، نتیجه می‌گیریم که A شبه یکنوا است. بدین ترتیب، $A : V \rightarrow V^*$ اکیداً یکنوا، شبه یکنوا و اجباری است و بنا بر قضیه ۳.۲.۴ معادله $A(y) = F$ دارای جواب یکتا در V است و $y \in W^{1,p}(Q)$ است.

حالت II: $1 < p \leq 2$. Q کراندار است و برای $r_1 \geq 2$ و $r_2 \in (1, 2]$ داریم

$$W^{1,r_1}(Q) \hookrightarrow W^{1,r_2}(Q)$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که برای هر $p > 1$ ، داریم $y \in W^{1,p}(Q)$ است و اثبات کامل می‌شود.

□

قضیه ۲.۳.۴. فرض کنید $T > 0$ ، $p > 1$ و $b > 0$ باشند و $\alpha \in (0, 1)$ به دلخواه انتخاب شده باشد، و ν ، a و K ثابت‌های مثبتی باشند که در (۸.۴) صدق می‌کنند. همچنین، فرض کنید که $y_0 \in L^\infty(Q)$ ، تقریباً همه جا در Ω ، $|y_0| \leq a$ باشد، $y_0(0) = y_0(1) = 0$ و y'_0 و y''_0 تقریباً همه جا در Ω وجود داشته باشند. آنگاه مساله (۵.۴)–(۶.۴) حداقل دارای یک جواب بهینه است.

برهان. از آنجا که روی X تعریف شده در (۷.۴)، $J(y, u) \geq 0$ است، پس $J(y, u)$ از پایین کراندار است. بنابراین، $\inf(J)$ موجود است. ثابت می‌کنیم که $\inf(J)$ در نقطه $(\bar{y}, \bar{u}) \in X$ اتفاق می‌افتد.

فرض کنید $\{(y_k, u_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ دنباله مینیمم کننده (۵.۴) باشد به طوری که وقتی $k \rightarrow \infty$ داشته باشیم

$$J(y_k, u_k) \rightarrow \inf(J).$$

به علاوه زیر دنباله‌ای به همین صورت در $(L^\infty(Q))^2$ در نظر می‌گیریم که همگرایی ضعیف به یک عضو $(\bar{y}, \bar{u}) \in X$ است. همچنین فرض کنید \bar{y}_d و y_{d_l} به ترتیب، جواب‌های یکتای (۵.۴) برای $u = \bar{u}$ و $u = u_l$ باشند، طوری که در $L^p(Q)$ داریم $y_{d_l} \rightarrow \bar{y}_d$. با استفاده از لِم مازور ۱.۲.۴، دنباله‌های $\{z_k\}_{k=1}^{N_k}$ و $\{v_k\}_{k=1}^{N_k}$ وجود دارند به گونه‌ای که

$$z_k = \sum_{l=k}^{N_k} \lambda_l y_l, \quad v_k = \sum_{l=k}^{N_k} \mu_l u_l,$$

که $k \rightarrow \infty$ در $L^p(Q)$ به طور قوی داریم $z_k \rightarrow \bar{y}$ و $v_k \rightarrow \bar{u}$. بنابراین

$$\begin{aligned} \inf(J) &\leq J(\bar{y}, \bar{u}) = \beta \|\bar{y} - \bar{y}_d\|_{L^p(Q)}^p + \gamma \|\bar{u}\|_{L^p(Q)}^p \\ &= \beta \limsup_{k \rightarrow \infty} \|z_k - \bar{y}_d\|_{L^p(Q)}^p + \gamma \limsup_{k \rightarrow \infty} \|v_k\|_{L^p(Q)}^p \\ &= \beta \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{l=k}^{N_k} \lambda_l y_l - \bar{y}_d \right\|_{L^p(Q)}^p + \gamma \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{l=k}^{N_k} \mu_l u_l \right\|_{L^p(Q)}^p \\ &\leq \beta \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\| \sum_{l=k}^{N_k} \lambda_l (y_l - \bar{y}_d) \right\|_{L^p(Q)}^p + \gamma \limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=k}^{N_k} \mu_l \|u_l\|_{L^p(Q)}^p \\ &\leq \beta \limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=k}^{N_k} \lambda_l \|y_l - \bar{y}_d\|_{L^p(Q)}^p + \gamma \limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=k}^{N_k} \mu_l \|u_l\|_{L^p(Q)}^p \\ &= \beta \limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=k}^{N_k} \lambda_l \|y_l - y_{d_l} + y_{d_l} - \bar{y}_d\|_{L^p(Q)}^p + \gamma \limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=k}^{N_k} \mu_l \|u_l\|_{L^p(Q)}^p \\ &\leq \beta \limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=k}^{N_k} \lambda_l \left(\|y_l - y_{d_l}\|_{L^p(Q)} + \|y_{d_l} - \bar{y}_d\|_{L^p(Q)} \right)^p \\ &\quad + \gamma \limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=k}^{N_k} \mu_l \|u_l\|_{L^p(Q)}^p \\ &= \inf(J). \end{aligned}$$

از این رو، $\inf_{(y,u) \in X} (J(y, u)) = J(\bar{y}, \bar{u})$ و اثبات تمام است. \square

در فصل آخر، جواب‌های تقریبی معادله برگر کسری را با استفاده از روش شبه طیفی چبیشف کسری به دست می‌آوریم.

فصل ۵

حل معادله برگر کسری به روش شبه طیفی چبیشف کسری

۱.۵ مقدمه

اخیراً، پدیده‌های مهمی در سیستم‌های دینامیکی، انتشار موج، انتقال حرارت، سیستم‌های سلولی، نظریه کنترل و سایر موضوعات علوم و مهندسی با استفاده از معادلات دیفرانسیل با مرتبه کسری مدل‌بندی شده است [۴]. در این راستا، پژوهشگران روش‌های مختلفی برای یافتن جواب‌های تقریبی این معادلات ارائه کرده‌اند. یکی از این معادلات مهم معادله برگر کسری است که توسط بسیاری از محققان با روش‌های تحلیلی و تقریبی حل شده است. میسکینیس^۱ صورت صریح یک جواب تحلیلی خاص برای تعمیم کسری معادله برگر یک بعدی را ارائه کرد [۴۹]. هریس^۲ و گارا^۳ جواب‌های تحلیلی معادلات برگر کسری غیرخطی را با استفاده از روش زیرفضای پایا پیشنهاد کردند [۵۰]. ایسن^۴ و تسبوزن^۵ مثال‌های عددی معادله برگر کسری با شرایط مرزی و

¹Miskinis

²Harris

³Garra

⁴Esen

⁵Tasbozan

اولیه را با روش هم‌محلی با استفاده از توابع پایه‌ای B - اسپلاین مکعبی حل نمودند [۵۲، ۵۱]. در این فصل، با استفاده از روش CPS جواب‌های تقریبی معادله برگر کسری را محاسبه نموده‌ایم.

۲.۵ معادلات برگر کسری

در این بخش، ابتدا فرم کلی معادلات برگر کسری با شرط اولیه و شرایط مرزی را به صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha U(t, x) + K_1(t, x) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t, x) + K_2(t, x) U(t, x) + K_3(t, x) \frac{\partial U}{\partial x}(t, x) + \\ K_4(t, x) U(t, x) \frac{\partial U}{\partial x}(t, x) = f(t, x) \quad t, x \in [0, 1] \times [0, 1], \\ U(t, 0) = g_0(t) \quad t \in [0, 1], \\ U(t, 1) = g_1(t) \quad t \in [0, 1], \\ U(0, x) = u_0(x), \quad x \in [0, 1], \end{cases} \quad (1.5)$$

که $K_1(t, x)$, $K_2(t, x)$, $K_3(t, x)$, $K_4(t, x)$ و توابع پیوسته هستند و $0 < \alpha < 1$ است. در این فصل می‌خواهیم، جواب‌های تقریبی این معادله را بیابیم. در بخش بعد، روش شبه طیفی چبیشف کسری را برای معادله (۱.۵) پیاده‌سازی می‌کنیم.

۳.۵ روش شبه طیفی چبیشف کسری

در این بخش، روش شبه طیفی چبیشف کسری را برای یافتن جواب تقریبی معادله (۱.۵) معرفی و پیاده‌سازی می‌کنیم. روش شبه طیفی چبیشف کسری [۳۸، ۵۴، ۵۳] یکی از بهترین روش‌های عددی برای حل معادلات زمان-پیوسته است. در این روش، با استفاده از چند جمله‌ای‌های درونیاب لاگرانژ معمولی و کسری، جواب معادله برگر کسری (۱.۵) را با چند جمله‌ای درونیاب زیر تقریب می‌زنیم

$$U^N(t, x) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N a_{ij}^N h_i^\alpha(t) h_j(x). \quad (2.5)$$

که در آن

$$h_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^N \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (3.5)$$

$$h_j^\alpha(t) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{N+1} \frac{t^\alpha - t_i^\alpha}{t_j^\alpha - t_i^\alpha}, \quad j = 0, 1, \dots, N-1,$$

و $\{t_i\}_{i=0}^N$ و $\{x_j\}_{j=0}^N$ نقاط CGL انتقال یافته به بازه $[0, 1]$ هستند. با توجه به خاصیت دلتای کرونکر داریم

$$U^N(t_i, x_j) = a_{ij}^N \quad (4.5)$$

برای محاسبه مشتقات ${}^C D_t^\alpha U^N(\cdot, \cdot)$ ، $U_x^N(\cdot, \cdot)$ و $U_{xx}^N(\cdot, \cdot)$ داریم

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha U^N(t, x) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N a_{ij}^N {}^C D_t^\alpha h_i^\alpha(t) h_j(x), \\ U_x^N(t, x) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N a_{ij}^N h_i^\alpha(t) h_j'(x), \\ U_{xx}^N(t, x) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N a_{ij}^N h_i^\alpha(t) h_j''(x), \end{cases} \quad (5.5)$$

که

$${}^C D_t^\alpha h_i^\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{h_i^{\alpha'}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha}, \quad 0 < t \leq 1, \quad (6.5)$$

$${}^C D_T^\alpha h_i^\alpha(t) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^T \frac{h_i^{\alpha'}(\tau) d\tau}{(\tau-t)^\alpha}, \quad 0 \leq t < 1. \quad (7.5)$$

همان گونه که در فصل اول بیان شد

$$h_j^{\alpha'}(t) = \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^N \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{t_j^\alpha - t_r^\alpha} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq r \\ i \neq j}}^N \frac{t^\alpha - t_i^\alpha}{t_j^\alpha - t_i^\alpha}, \quad 0 < t \leq 1. \quad (8.5)$$

حال با توجه به خاصیت دلتای کرونکر، معادلات (5.5) در نقاط (t_p, x_k) به صورت زیر بیان می‌شوند

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha U^N(t_p, x_k) = \sum_{i=0}^N a_{ik}^N D_{pi}^\alpha, \\ U_x^N(t_p, x_k) = \sum_{j=0}^N a_{pj}^N D_{kj}, \\ U_{xx}^N(t_p, x_k) = \sum_{j=0}^N a_{pj}^N \hat{D}_{kj}, \end{cases} \quad (9.5)$$

که D همان ماتریس بیان شده در (12.2)، $\hat{D} = D \cdot D = (\hat{D}_{kj}) = \sum_{l=0}^N D_{kl} D_{lj}$ ، ماتریس مشتق کسری است که برای محاسبه آن باید از رابطه زیر استفاده نمود

$$h_j^{\alpha'}(t_k) = \sum_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^N \frac{\alpha t_k^{\alpha-1}}{t_j^\alpha - t_r^\alpha} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq r \\ i \neq j}}^N \frac{t_k^\alpha - t_i^\alpha}{t_j^\alpha - t_i^\alpha}, \quad \begin{cases} k = 1, 2, \dots, N, \\ j = 0, 1, \dots, N, \end{cases} \quad (10.5)$$

برای محاسبه ماتریس D^α داریم

$$D_{k,j+1}^\alpha = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_k} \frac{h_j^{\alpha'}(\tau) d\tau}{(t_k - \tau)^\alpha}, \quad \begin{cases} k = 1, 2, \dots, N, \\ j = 0, 1, \dots, N, \end{cases} \quad (11.5)$$

حال، انتگرال منفرد (۱۱.۵) را تقریب می‌زنیم که برای این تقریب، ابتدا از انتقال $\tau = \frac{t_k}{\Psi}(s+1)$ استفاده کرده و داریم

$$D_{k,j+1}^\alpha = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{t_k}{\Psi}\right)^{1-\alpha} \int_{-1}^1 (1-s)^{-\alpha} h_j^{\alpha'}\left(\frac{t_k}{\Psi}(s+1)\right) ds. \quad (12.5)$$

سپس انتگرال (۱۱.۵) با استفاده از قضیه ۲۵.۳ در [۱۸] به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$D_{k,j+1}^\alpha \approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{t_k}{\Psi}\right)^{(1-\alpha)} \sum_{p=1}^N w_p^{(-\alpha,0)} h_j^{\alpha'}\left(\frac{t_k}{\Psi}(s_p^{(-\alpha,0)} + 1)\right), \quad (13.5)$$

که $w_p^{(\gamma_1, \gamma_2)}$ و $s_p^{(\gamma_1, \gamma_2)}$ به ترتیب وزن‌ها و گره‌های چندجمله‌ای ژاکوبی $J_N^{(\gamma_1, \gamma_2)}(\cdot)$ برای $p = 1, 2, \dots, N$ هستند [۱۸].

حال، با استفاده از روابط (۴.۵) و (۹.۵)، سیستم (۱.۵) را می‌توان به صورت سیستم معادلات جبری زیر نوشت

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^N a_{ik}^N D_{pi}^\alpha + K_1(t_p, x_k) \sum_{j=0}^N a_{pj}^N \hat{D}_{kj} + K_2(t_p, x_k) a_{pk}^N + K_3(t_p, x_k) \\ \sum_{j=0}^N a_{pj}^N D_{kj} + K_4(t_p, x_k) a_{pk}^N \sum_{j=0}^N a_{pj}^N D_{kj} = f(t_p, x_k), \\ a_{p0}^N = g_0(t_p), \quad a_{pN}^N = g_1(t_p), \quad a_{0k}^N = u_0(x_k), \quad k, p = 0, 1, \dots, N. \end{cases} \quad (14.5)$$

که با حل این سیستم نسبت به متغیرهای $(a_{pk}^N; p, k = 0, 1, \dots, N)$ می‌توان جواب‌های تقریبی پیوسته و نقطه‌ای (۲.۵) و (۴.۵) را به دست آورد.

۴.۵ مثال‌های عددی

مثال ۱.۴.۵. معادله برگر کسری (۱.۵) با شرایط مرزی

$$U(t, 0) = t^\lambda,$$

$$U(t, 1) = et^\lambda, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

و شرط اولیه

$$U(0, x) = 0,$$

را در نظر بگیرید که

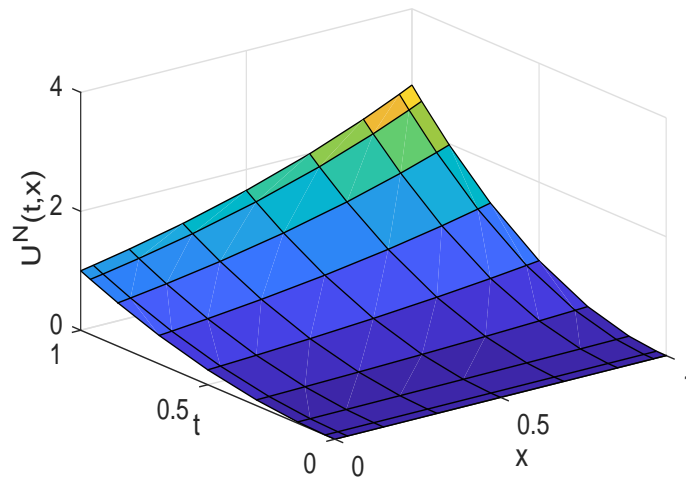
$$f(t, x) = \frac{2t^{2-\alpha}e^x}{\Gamma(3-\alpha)} + t^4 e^{2x} - t^2 e^x,$$

$$K_1(t, x) = -1, K_2(t, x) = K_3(t, x) = 0, K_4(t, x) = 1.$$

جواب دقیق به صورت زیر است

$$U(t, x) = t^2 e^x.$$

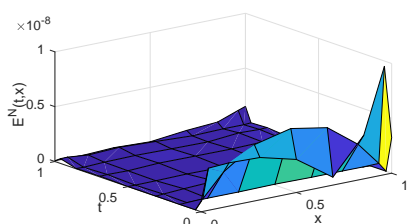
سیستم (۱۴.۵) را برای $\alpha = 0.25, 0.5, 0.75, 0.9$ با روش CPS حل می‌کنیم. جواب تقریبی به دست آمده برای $N = 8$ و $\alpha = 0.5$ در شکل ۱.۵ نشان داده شده است. همچنین، شکل ۲.۵ خطای مطلق جواب تقریبی به دست آمده را برای $N = 8, 10$ و $\alpha = 0.25, 0.5, 0.75, 0.9$ نمایش می‌دهد. خطای $E_\infty(t)$ و مقایسه آن با روش بیان شده در [۵۱، ۵۲] در جدول ۱.۵ آمده است.



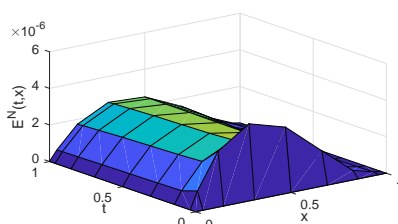
شکل ۱.۵: جواب تقریبی برای $\alpha = 0.5$ و $N = 8$ مثال ۱.۴.۵

جدول ۱.۵: مقایسه خطای $E_\infty(t)$ برای مثال ۱.۴.۵

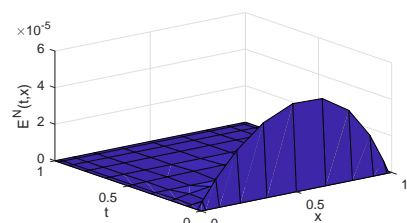
$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.25$	روش
10×10	8×8	8×8	8×8	N در روش ارائه شده
40×4000	40×4000	80×4000	40×4000	N در روش [۵۱، ۵۲]
4.7521×10^{-5}	4.1575×10^{-5}	9.8768×10^{-9}	4.0561×10^{-6}	خطای روش ارائه شده
2.32565×10^{-4}	2.24523×10^{-4}	1.33125×10^{-4}	2.32645×10^{-4}	خطای روش در [۵۱، ۵۲]



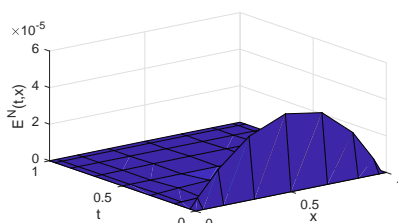
خطای مطلق برای $\alpha = 0.5$, $N = 8$



خطای مطلق برای $\alpha = 0.25$ و $N = 8$



خطای مطلق برای $\alpha = 0.9$, $N = 10$



خطای مطلق برای $\alpha = 0.75$ و $N = 8$

شکل ۲.۵: خطای مطلق جواب تقریبی به دست آمده مثال ۱.۴.۵

مثال ۲.۴.۵. معادله برگر کسری (۱.۵) را با شرایط مرزی و اولیه زیر در نظر بگیرید

$$U(t, 0) = t^\alpha, \quad (15.5)$$

$$U(t, 1) = -t^\alpha, \quad 0 \leq t < 1, \quad (16.5)$$

$$U(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

که عبارت $f(t, x)$ ضرایب معادله (۱.۵) و جواب دقیق مساله به صورت زیر هستند

$$f(t, x) = \frac{\Gamma(\alpha) t^{\alpha-1} \cos(\pi x)}{\Gamma(\alpha)} - \pi t^{\alpha-1} \cos(\pi x) \sin(\pi x) + \pi^\alpha t^{\alpha-1} \cos(\pi x), \quad (17.5)$$

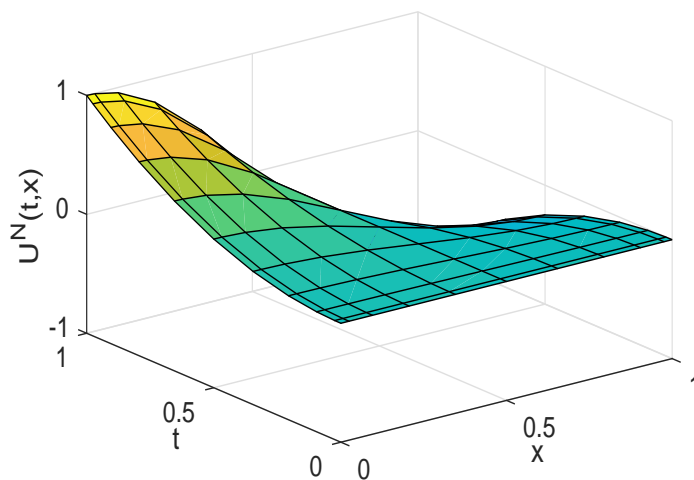
$$K_1(t, x) = -1, \quad K_2(t, x) = K_3(t, x) = 0, \quad K_4(t, x) = 1,$$

$$U(t, x) = t^\alpha \cos(\pi x). \quad (18.5)$$

با روش CPS سیستم (۱۴.۵) را نسبت به a_{ij}^N برای $i, j = 0, 1, \dots, N$ و $\alpha = 0.5, 0.75, 0.9$ حل نموده‌ایم. شکل ۳.۵ جواب تقریبی به دست آمده برای $\alpha = 0.5$ و $N = 10$ را نمایش می‌دهد. خطاهای مطلق در شکل‌های ۴.۵، ۵.۵ و ۶.۵ نمایش داده شده‌اند و مقایسه خطای $E_\infty(t)$ این مثال با روش ارائه شده در [۵۱، ۵۲] جدول ۲.۵ آورده شده است.

جدول ۲.۵: مقایسه خطای $E_{\infty}(t)$ برای مثال ۲.۴.۵

$\alpha = 0/9$	$\alpha = 0/75$	$\alpha = 0/5$	روش
25×25	15×15	10×10	N روش ارائه شده
80×4000	80×4000	80×4000	N روش [۵۱، ۵۲]
$5/1574 \times 10^{-7}$	$6/7610 \times 10^{-7}$	$9/2905 \times 10^{-7}$	خطای روش ارائه شده
$4/065 \times 10^{-6}$	$3/443 \times 10^{-6}$	$4/192 \times 10^{-6}$	خطای روش در [۵۱، ۵۲]



شکل ۳.۵: جواب تقریبی برای $\alpha = 0/5$ و $N = 10$ مثال ۲.۴.۵

مثال ۳.۴.۵. معادله (۱.۵) را با شرایط مرزی و اولیه زیر در نظر بگیرید

$$U(t, 0) = U(t, 1) = 0, \quad t \geq 0 \quad (19.5)$$

$$U(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

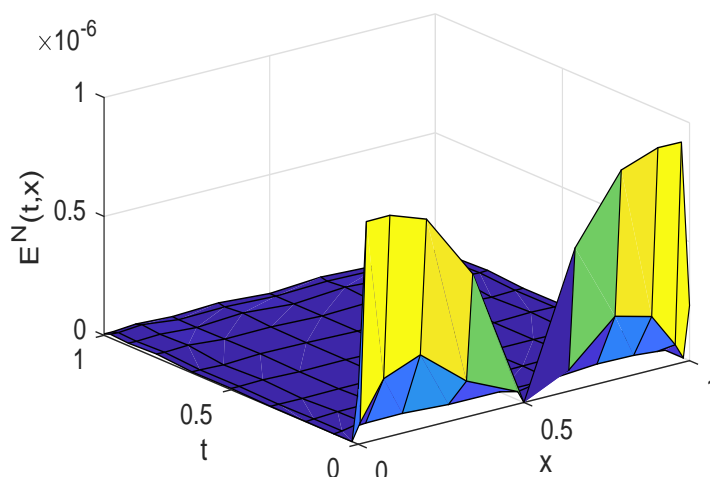
که جمله $f(t, x)$ ، ضرایب و جواب دقیق $U(t, x)$ به صورت زیر داده شده‌اند

$$f(t, x) = \frac{2t^{2-\alpha} \sin(2\pi x)}{\Gamma(3-\alpha)} + 2\pi t^4 \sin(2\pi x) \cos(2\pi x) + 4\nu\pi^2 t^2 \sin(2\pi x) \quad (20.5)$$

$$K_1(t, x) = -1, \quad K_2(t, x) = K_3(t, x) = 0, \quad K_4(t, x) = 1, \quad (21.5)$$

$$U(t, x) = t^2 \sin(2\pi x).$$

معادله برگر کسری (۱.۵) را با روش CPS برای مقادیر مختلف $\alpha = 0/75, 0/9$ و $N = 15$ حل می‌کنیم، که جواب تقریبی برای $N = 15$ و $\alpha = 0/75$ در شکل ۷.۵ و



شکل ۴.۵: خطای مطلق برای $\alpha = 0.5$ و $N = 10$ مثال ۲.۴.۵

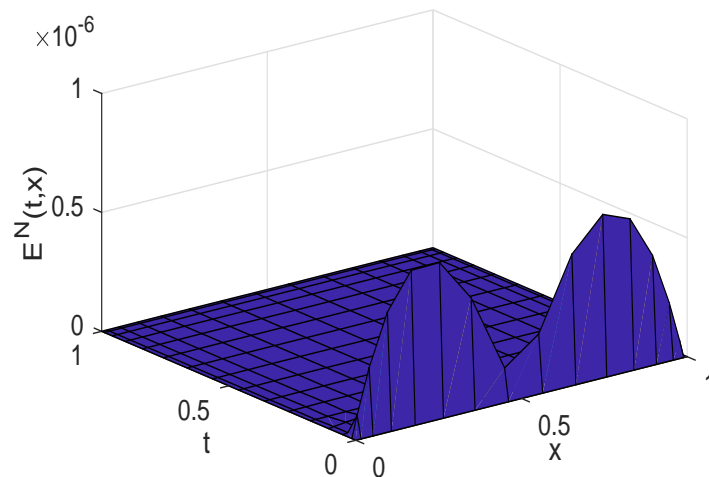
خطاهای مطلق در شکل ۸.۵ نمایش داده شده‌اند. همچنین، خطای $E_\infty(t)$ و مقایسه آن در جدول ۳.۵ نشان داده شده است.

جدول ۳.۵: مقایسه خطای $E_\infty(t)$ برای مثال ۳.۴.۵

$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.75$	روش
15×15	15×15	N روش ارائه شده
80×4000	80×4000	N روش [۵۱، ۵۲]
$2/91875 \times 10^{-6}$	$8/1966 \times 10^{-7}$	خطای روش ارائه شده
$3/735 \times 10^{-5}$	$3/3291 \times 10^{-5}$	خطای روش [۵۱، ۵۲]

مثال ۴.۴.۵. معادله برگر کسری زیر را در نظر بگیرید [۵۵]

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha U(t, x) + (1 + xt) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t, x) + x^2 U(t, x) + (1 + x) \frac{\partial U}{\partial x}(t, x) - \\ t \sin x U(t, x) \frac{\partial U}{\partial x}(t, x) = f(t, x), \\ U(t, 0) = U(t, 1) = 0, \quad x \in [0, 1], \\ U(0, x) = 0, \quad x \in [0, 1], \end{cases} \quad (22.5)$$



شکل ۵.۵: خطای مطلق برای $\alpha = 0.75$ و $N = 15$ مثال ۲.۴.۵

که

$$f(t, x) = \frac{(x^2 - x)t\pi}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(-1 - \alpha)} + 2(tx + 1)t^{1+\alpha} + (x^4 - x^3)t^{1+\alpha} \quad (23.5)$$

$$+ (1 + x)(2x - 1)t^{1+\alpha} - t \sin x (x^2 - x)t^{2+2\alpha}(2x - 1).$$

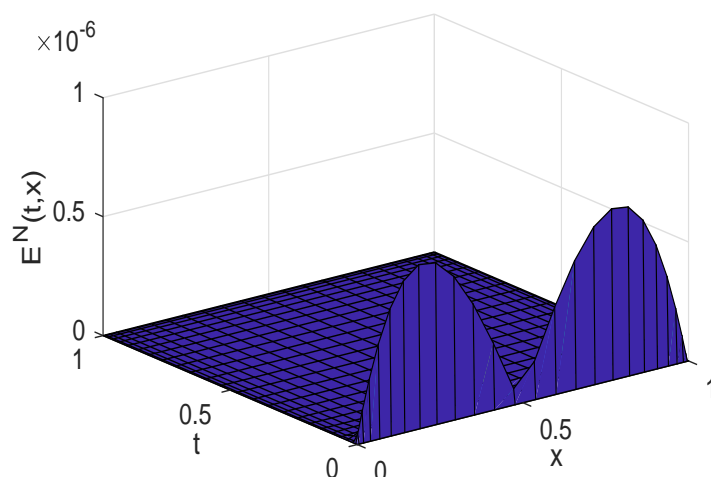
جواب دقیق مساله به صورت زیر است

$$U(t, x) = (x^2 - x)t^{1+\alpha}. \quad (24.5)$$

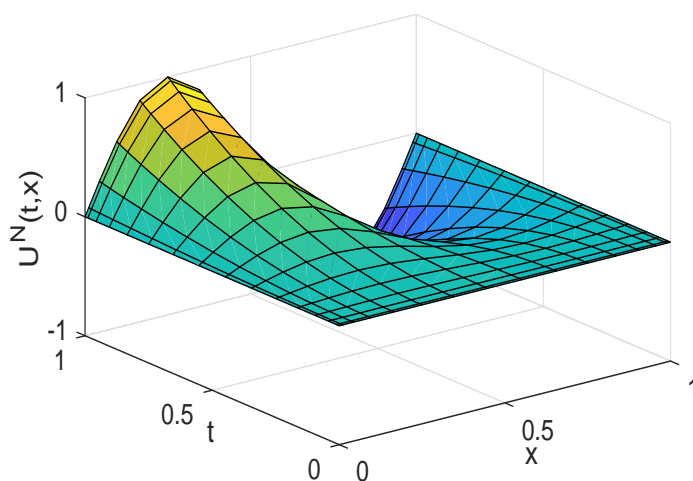
سیستم (۱۴.۵) را با روش CPS برای $\alpha = 0.7, 0.8, 0.9$ حل کردیم. شکل ۹.۵ جواب تقریبی به دست آمده برای $N = 10$ و $\alpha = 0.8$ است. خطاهای مطلق در شکل‌های ۱۰.۵، ۱۱.۵ و ۱۲.۵ نمایش داده شده‌اند و خطای $E_\infty(t)$ برای $N = 4, 6, 8$ در جدول ۴.۵ آورده شده است.

جدول ۴.۵: خطای $E_\infty(t)$ مثال ۴.۴.۵

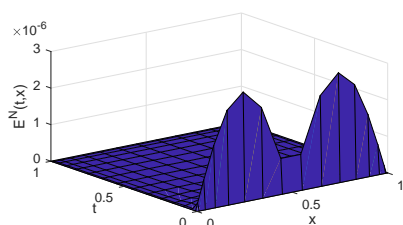
$N = 8$	$N = 6$	$N = 4$	خطای $E_\infty(t)$ روش CPS
$5/9362 \times 10^{-6}$	$1/5731 \times 10^{-5}$	$5/8695 \times 10^{-5}$	$\alpha = 0.7$
$8/0334 \times 10^{-6}$	$2/0170 \times 10^{-5}$	$5/9185 \times 10^{-5}$	$\alpha = 0.8$
$4/5865 \times 10^{-5}$	$3/3079 \times 10^{-5}$	$4/8515 \times 10^{-5}$	$\alpha = 0.9$



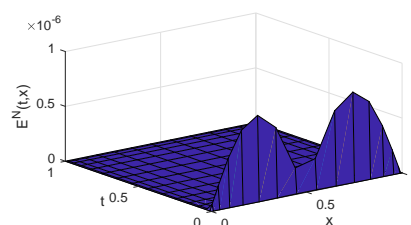
شکل ۶.۵: خطای مطلق برای $\alpha = 0.9$ و $N = 25$ مثال ۲.۴.۵



شکل ۷.۵: جواب تقریبی برای $\alpha = 0.75$ و $N = 15$ مثال ۳.۴.۵

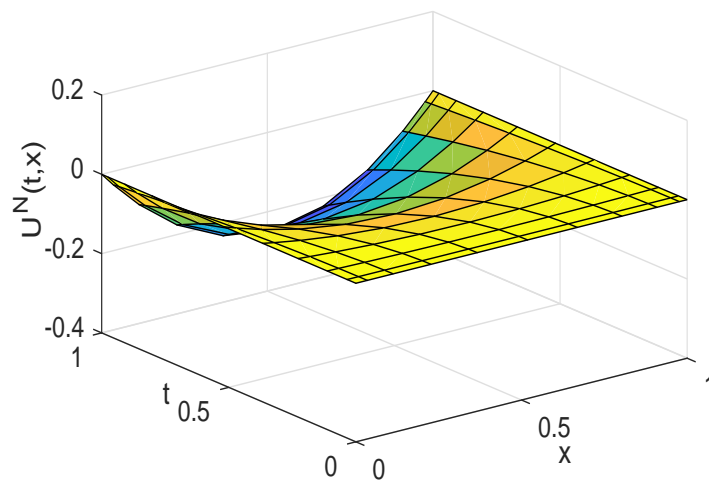


خطای مطلق برای $\alpha = 0.9$ و $N = 15$

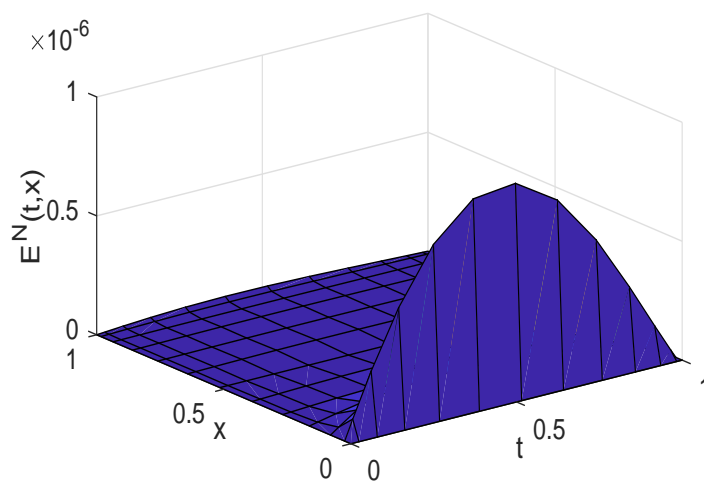


خطای مطلق برای $\alpha = 0.75$ و $N = 15$

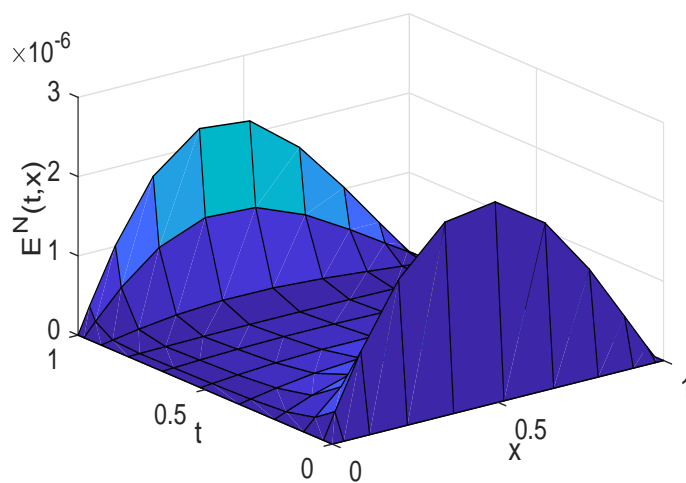
شکل ۸.۵: خطای مطلق مثال ۳.۴.۵



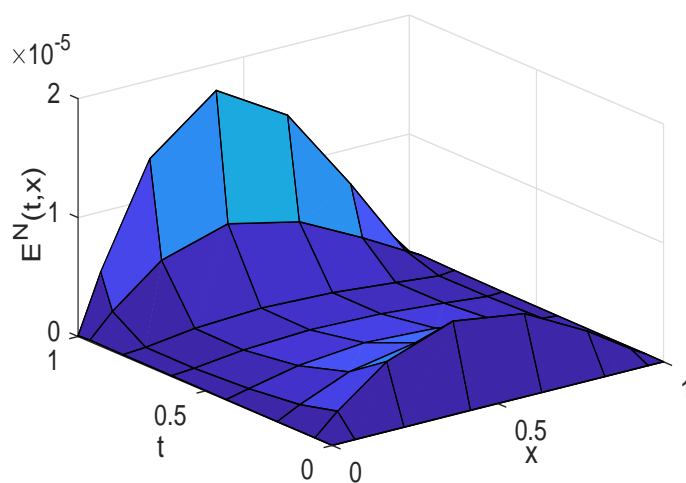
شکل ۹.۵: جواب تقریبی برای $\alpha = 0.8$ و $N = 10$ مثال ۴.۴.۵



شکل ۱۰.۵: خطای مطلق برای $\alpha = 0.7$ و $N = 12$ مثال ۴.۴.۵



شکل ۱۱.۵: خطای مطلق برای $\alpha = 0.8$ و $N = 10$ مثال ۴.۴.۵



شکل ۱۲.۵: خطای مطلق برای $\alpha = 0.9$ و $N = 7$ مثال ۴.۴.۵

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این تحقیق، نشان دادیم که روش CPS کارایی خوبی در حل عددی مسئله کنترل بهینه برگر در مقایسه با سایر روش‌های عددی معروف دیگر از جمله روش شبه طیفی لژاندر دارد، مشاهده شد که با تعداد نقاط هم محلی کمتر و در نتیجه پیچیدگی محاسباتی کمتر توانستیم جواب‌های تقریبی بهتری نسبت به روش‌های مذکور به دست آوریم. همچنین، نشان دادیم که با به کارگیری شرایط بهینگی برای مسئله کنترل بهینه تحت معادله برگر و حل عددی معادلات به دست آمده با روش CPS جواب‌های تقریبی قابل قبولی حاصل می‌شود. علاوه بر این، با به کارگیری توابع لاگرانژ کسری، روش CPS را برای معادله برگر کسری تعمیم دادیم و جواب‌های تقریبی قابل قبولی برای این معادله نیز حاصل گردید. در ادامه، اثبات کردیم که معادله برگر کسری تحت شرایطی خاص دارای یک جواب منحصر بفرد می‌باشد. در نهایت، ثابت نمودیم که مسئله کنترل بهینه تحت معادله برگر کسری دارای حداقل یک جواب بهینه می‌باشد. در کارهای آتی، پیشنهاد می‌شود که روش به کار گرفته شده در این رساله، برای حل عددی و تقریبی سایر مسائل کنترل بهینه تحت معادلات PDE خاص از جمله معادله انتشار موج، معادله حرارت و ... و نوع کسری این معادلات به کار گرفته شود. می‌توان روش مذکور را برای حل معادلات PDE کلاسیک و کسری تاخیری و کنترل بهینه تحت این نوع از معادلات پیاده‌سازی کرد. همچنین، می‌توان پایداری معادله کنترلی برگر و معادله کنترلی برگر کسری را در کارهای آتی مورد مطالعه قرار داد. علاوه بر پیشنهادات فوق، با توجه به اهمیت معادلات PDE از نوع کسری مرتبه متغیر و کاربردهای اخیر آنها در فیزیک و مهندسی، پیشنهاد می‌شود روش CPS برای حل عددی این معادلات و مسائل کنترل بهینه مرتبط با آنها به کار گرفته شود.

مراجع

- [1] Magin R. L. (2006), "**Fractional Calculus in Bioengineering**", Begell House Publishers.
- [2] Hilfer R. (2000), "**Applications of Fractional Calculus in Physics**", Word Scientific, Singapore.
- [3] Torvik P. J. and Bagley R. L. (1984), "On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials", **Journal of Applied Mechanics**, 51(2), 294-298.
- [4] Podlubny I. (1999), "**Fractional differential equations**", Mathematics in Science and Engineering, Academic Press Inc, San Diego, CA.
- [5] Mittag-Leffler G. M. (1904), "Sopra la funzione $E_\alpha(x)$ ", **Rend Accad Lincei, ser.**, 5(13), 3-5.
- [6] Mittag-Leffler G. M. (1905), "Sur la representation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogone", **Acta Mathematica**, 29, 101-182.
- [7] Kilbas A. A. and Srivastava H. M. and Trujillo J. J. (2006), "**Theory and Applications of Fractional Differential Equations**", North-Holland Mathematics Studies, Elsevier Science B.V., Amsterdam.
- [8] Diethelm K. (2010), "**The Analysis of Fractional Differential Equations**", Springer.
- [9] Jumarie G. (2008), "Modeling fractional stochastic systems as non-random fractional dynamics driven by Brownian motions", **Applied Mathematical Modelling**, 32, 836-859.
- [10] Baleanu D., Deftferli O. and Agrawal O. P. (2009), "A Central Difference Numerical Scheme for Fractional Optimal Control Problems", **Journal of Vibration and Control**, 15(4), 583-597.

- [11] Jumarie G. (2006), "Modified Riemann-Liouville Derivative and Fractional Taylor Series of Nondifferentiable Functions Further Results", **Computers and Mathematics with Applications**, 51, 1367-1376.
- [12] Jumarie G. (2007), "Lagrangian mechanics of fractional order, Hamilton- Jacobi fractional PDE and Taylors series of non differentiable functions", **Chaos Solitons Fractals**, 32(3), 969-987.
- [13] Jumarie G. (2009), "Table of some basic fractional calculus formulae derived from a modified Riemann-Liouville derivative for non-differentiable funtions", **Applied Mathematics Letters**, 22, 378-385.
- [14] Caputo M. and Fabrizio M. (2015), " A New Definition of Fractional Derivative without Singular Kernel", **Progress in Fractional Differentiation and Applications**, 1-13.
- [15] Ejlali N. and Hosseini S. M. (2017), "A Pseudospectral Method for Fractional Optimal Control Problems", **Journal of Optimization Theory and Applications**, 174, 83-107.
- [16] Press W. H., Flannery B. P., Teutolsky S. A. and Vetterling W. T. (1990), "**Numerical recipes: The Art of Scientific Computing**", Cambridge University Press.
- [17] Abramowitz M. and Stegun I. A. (1964), "**Handbook of Mathematical Functions**", United States Department of Commerce.
- [18] Shen J., Tang T. and Wang L. L. (2011), "**Spectral Methods**", Springer.
- [19] Tohidi E. and Zak M. K. (2016), "A New Matrix Approach For Solving Second-Order Linear Matrix Partial Differential Equations", **Mediterranean Journal of Mathematics**, 13, 1353-1376.
- [20] Asaithambi A. (2010), "Numerical solution of the Burger's equation by automatic differentiation", **Applied Mathematics and Computation**, 216, 2700-2708.
- [21] Arora G. and Singh B. K. (2013), "Numerical solution of Burger's equation with modified cubic-B-spline differential quadrature method", **Applied Mathematics and Computation**, 224, 166-177.

- [22] Caldwell J., Wanless P. and Cook A. E. (1987), "Solution of Burger's equation for large Reynolds number using finite elements with moving nodes", **Applied Mathematical Modelling**, 11, 211-214.
- [23] Ismail H. N. A., Raslan K. and Abd Rabboh A. A. (2004), "Adomian decomposition method for Burger's-Huxley and Burger's-Fisher equations", **Applied Mathematics and Computation**, 159, 291-301.
- [24] Ragozin D. L. (1970), "Polynomial approximation on compact manifolds and homogeneous spaces", **Transactions of the American Mathematical Society**, 150, 41-53.
- [25] Soheili A. R., Kerayechian A. and Davoodi N. (2012), "Adaptive numerical method for Burgers'-type nonlinear equations", **Applied Mathematics and Computation**, 219(8), 3486-3495.
- [26] Oruc O., Bulut F. and Esen A. (2015), "A Haar wavelet-finite difference hybrid method for the numerical solution of the modified Burgers' equation", **Journal of Mathematical Chemistry**, 53(7), 1592-1607.
- [27] Ramadan M. A. El-Danaf, T. S. and Abd Alaal F. E. I. (2005), "A numerical solution of the Burgers' equation using septic B-splines", **Chaos, Solitons and Fractals** 26(3), 795-804.
- [28] Saka B. and Dag I. (2008), "A numerical study of the Burgers' equation", **Journal of the Franklin Institute** 345(4), 328-348.
- [29] Irk D. (2009), "Sextic B-spline collocation method for the modified Burgers' equation", **Emerald Group Publishing Limited**, 38(9), 1599-1620.
- [30] Ramadan M. A. and El-Danaf T. S. (2005), "Numerical treatment for the modified Burgers' equation", **Mathematics and Computers in Simulation** 70(2), 90-98.
- [31] Inan B. and Bahadir A. R. (2013), "Numerical solution of the one-dimensional Burgers' equation: Implicit and fully implicit exponential finite difference methods", **Indian Academy of Sciences**, 81(4), 547-556.
- [32] Tröltzsch F. and Volkwein S. (2001), "The SQP method for control constrained optimal control of the Burgers equation", **ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations**, 6, 649-674.

- [33] Yilmaz F. and Karasozen B. (2011), "Solving optimal control problems for the unsteady Burgers' equation in COMSOL Multiphysics", **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 235, 4839-4850.
- [34] Volkwein S. (1997), "Mesh-independence of an augmented Lagrangian-SQP method in Hilbert spaces and control problems for the Burgers equation", **Dissertation at the University of Technology Berlin**.
- [35] Volkwein S. (2001), "Distributed control problems for the Burgers' equation", **Computational Optimization and Applications**, 18(2), 115-140.
- [36] Troltsch F. and Volkwein S. (2001), "The SQP method for control constrained optimal control of the Burgers' equation", **ESAIM Control Optimisation and Calculus of Variations**, 6, 649-674.
- [37] Hinze M. and Volkwein S. (2002), "Analysis of instantaneous control for the Burgers equation", **Nonlinear Analysis**, 50, 1-26.
- [38] Fahroo F. and Ross I. M. (2002), "Direct trajectory optimization by a Chebyshev pseudo-spectral method ", **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, 25, 160-166.
- [39] Gong Q., Ross I. M., Kang W. and Fahroo F. (2008), "Connections between the covector mapping theorem and convergence of pseudo-spectral methods for optimal control", **Computational Optimization and Applications** 41(3), 307-335.
- [40] Sabeh Z., Shamsi M. and Dehghan M.(2016), "Distributed optimal control of the viscous Burgers' equation via a Legendre pseudo-spectral approach", **Mathematical Methods in the Applied Sciences**.
- [41] Singh J., Kumar D. and Swroop R. (2016), "Numerical solution of time- and space-fractional coupled Burgers' equation via homotopy algorithm", **Alexandria Engineering Journal**, 55, 1753-1763.
- [42] Alam Khan N., Ara A. and Mahmood A. (2012), "Numerical solutions of time-fractional Burgers' equations: A comparison between generalized differential transformation technique and homotopy perturbation method", **International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow**, 22.2, 175-193.

- [43] Saad K. and Al-Sharif E. (2017), "Analytical study for time and time-space fractional Burgers equation", **Advances in Difference Equations**.
- [44] Royden H. and Fitzpatrick P. (2010), "**Real Analysis**", Pearson, Fourth Edition.
- [45] Skubachevskii A. L. (1997), "**Elliptic Functional Differential Equation and Applications**", Birkhäuser Basel.
- [46] Troltzsch F. (2010), "**Optimal Control of Partial Differential Equations: Theory, Methods and Applications**", American Mathematical Society Providence, Rhode Island.
- [47] Renardy M. and Rogers R. (2004), "**An Introduction to Partial Differential Equations**", Springer.
- [48] Adams R. and Fournier J. (2003), "**Sobolev Spaces**", Pure and Applied Mathematics Academic Press, Second Edition.
- [49] Miskinis P. (2002), "Some properties of fractional Burgers' equation", **Mathematical Modelling and Analysis**, 7(1), 151-158.
- [50] Harris P. A. and Garra R. (2013), "Analytic solution of nonlinear fractional Burgers'-type equation by invariant subspace method", **Nonlinear Studies**, 20(4), 471-481.
- [51] Esen A. and Tasbozan O. (2016), "Numerical Solution of Time Fractional Burgers' Equation by Cubic B-spline Finite Elements", **Mediterranean Journal of Mathematics**, 13, 1325-1337.
- [52] Esen A. and Tasbozan O. (2015), "Numerical solution of time fractional Burgers' equation", **An International Scientific Journal of Sapientia University**, 7(2), 167-185.
- [53] Gong Q. , Ross I. M. and Fahroo F. (2009), "A Chebyshev pseudo-spectral method for nonlinear constrained optimal control problems", **The Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control, and the 28th Chinese Control Conference, Shanghai, P.R. China**.
- [54] Elnegar G. N. and Kazemi M. A. (1998), "Pseudo-spectral Chebyshev optimal control of constrained nonlinear dynamical systems", **Computational Optimization and Applications**, 11, 195-217.

- [55] Sakar M. G., Saldır O. and Erdogan F. (2018), "Numerical solution of time-fractional Burgers equation in reproducing kernel space", **Arxiv**.

Aabstract

The Burgers equation is a non-linear partial differential equation of great importance marked by, among others, its applications to physics and engineering. In this thesis, we first solve the equation numerically using the Chebyshev Pseudo-Spectral (CPS) method. Then, we consider its optimal control problem and express the optimality conditions. We apply the CPS method in order to obtain an approximate optimal solution. At this point, we also prove the convergence of the method. Subsequently, we approximate the solution to the fractional Burgers equation with the fractional CPS method. We also show the uniqueness of this solution and the existence of the solution to the optimal control problem over the fractional Burgers equation.

Keywords: Chebyshev Pseudo-Spectral method, Burgers equation, Optimal control of Burgers equation, Convergence, Optimality conditions, Fractional Burgers equation.



Faculty of Mathematical Sciences

PhD Thesis in Numerical Analysis and Control

**Approximating the solution of optimal
control problem over the Burgers equation
via Chebyshev Pseudo-Spectral method**

By: **Fatemeh Mohammadizadeh Sorouei**

Supervisor:

Dr. Hojjat Ahsani Tehrani

Advisor:

Dr. Mohammad Hadi Noori Skandari

June 2019