

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده علوم ریاضی

رساله دکتری آنالیز عددی

# پایداری سیستم‌های توسیع یافته و کسری توسیع یافته

نگارنده: سکینه بیگم میراسدی

استاد راهنما

دکتر حجت احسنی طهرانی

تیر ۱۳۹۸

۲۷۶-۲۱۲-۲۱

شماره:

۸۸ / ۳ / ۲۳

تاریخ:

ویرایش:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۱۲: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

(ویژه دانشجویان ورودی های ۹۴ و ما قبل)

بدینوسیله گواهی می شود خانم سکینه بیگم میراسدی دانشجوی دکتری رشته ریاضی کاربردی به شماره دانشجویی ۹۲۴۶۲۷۵ ورودی بهمن ماه سال ۱۳۹۲ در تاریخ ۱۳۹۸/۴/۱۰ از رساله نظری خود با عنوان: پایداری سیستم های توسیع یافته و کسری توسیع یافته دفاع و با اخذ نمره ۱۹/۱۷ به درجه عالی نائل گردید.

<input checked="" type="checkbox"/> الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰	<input type="checkbox"/> ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ - ۱۷
<input type="checkbox"/> ج) درجه خوب: نمره ۱۶/۹۹ - ۱۵	<input type="checkbox"/> د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد
<input type="checkbox"/> ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد	

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱	دکتر حجت احسنی طهرانی	استاد راهنما	دانشیار	
۲	دکتر حسین جعفری	استاد مدعو خارجی	استاد	
۳	دکتر علیرضا ناظمی	استاد مدعو داخلی	دانشیار	
۴	دکتر محمدهادی نوری اسکندری	استاد مدعو داخلی	استادیار	
۵	دکتر ابراهیم هاشمی	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	استاد	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی خانم سکینه بیگم میراسدی بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:



تقدیم به مقدس ترین واژه در لغت نامه دلم،

مادر مهربانم که زندگیم را دیون مهر و عطفوت

اومی دانم.

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند و سلام و دورد بر محمد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وام‌دار وجودشان است و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز... بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه‌ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می‌کند و سلامت امانت‌هایی را که به دستش سپرده‌اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب، من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر الله عز و جل، از پدر و مادر عزیزم... این دو معلم بزرگوام... که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یآوری بی‌چشم‌داشت برای من بوده‌اند؛ از استاد با کمالات و شایسته؛ جناب آقای دکتر حجت احسنی طهرانی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند و از استادان فرزانه و دلسوز؛ جناب آقایان دکتر حسین جعفری، دکتر علیرضا ناظمی و دکتر محمدهادی نوری اسکندری که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند؛ کمال تشکر و قدردانی را دارم. باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

سکینه بیگم میراسدی

تیر ۱۳۹۸

## تعهد نامه

اینجانب سکینه بیگم میراسدی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان پایداری سیستم‌های توسعه یافته و کسری توسعه یافته، تحت راهنمایی حجت احسنی طهرانی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سکینه بیگم میراسدی

تیر ۱۳۹۸

### مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

## چکیده

در این رساله، روش‌های تخصیص مقادیر ویژه برپایه‌ی تبدیلات تشابهی، مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی و روش تخصیص مقادیر ویژه جزئی با استفاده از بردارهای ویژه برای پایدارسازی و یافتن جواب در سیستم‌های توسعه‌یافته گسسته-زمان و پیوسته-زمان و کسری توسعه‌یافته گسسته-زمان و روش تخصیص با تبدیلات تشابهی برای سیستم‌های کسری دوبعدی راسر استفاده می‌شود. برای پایدارسازی سیستم‌های کسری توسعه‌یافته ابتدا این سیستم‌ها به سیستم‌های با تأخیر افزایشی نامحدود تبدیل می‌شوند که کنترل این سیستم‌ها بسیار مشکل می‌باشد. با محدود کردن تأخیرها با توجه به این که ضرایب تأخیرها کاهش می‌دهند و تعاریف جدیدی از ماتریس‌ها در نهایت به سیستم‌های معادل استاندارد ولی با بعد بزرگتر دست خواهیم یافت.

در روش تخصیص با تبدیلات تشابهی و مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی به ترتیب، در سیستم‌های گسسته-زمان با محاسبه ماتریس پس‌خورد حالت و خروجی پیشرو یا پس‌خورد حالت و خروجی پیشرو و گزاره‌ای و در پیوسته-زمان با محاسبه پس‌خورد حالت و خروجی مشتق یا پس‌خورد حالت و خروجی مشتق و گزاره‌ای، ماتریس حلقه‌بسته را به گونه‌ای می‌یابیم که دارای مقادیر ویژه مطلوب باشد. در تخصیص با تبدیلات تشابهی ماتریس حلقه‌بسته با استفاده از ماتریس پس‌خورد حالت و در تخصیص با مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی ماتریس پس‌خورد خروجی با استفاده از ماتریس حلقه‌بسته محاسبه شده به دست می‌آیند. روش دوم برای مواردی کاربردی‌تر است که خروجی سیستم اهمیت بیشتری داشته باشد.

تخصیص مقادیر ویژه با دو هدف پایدارسازی سیستم‌های ناپایدار و تخصیص مقادیر ویژه‌ی خواسته شده انجام می‌شود. در روش تخصیص مقادیر ویژه جزئی، این تخصیص محدود به تخصیص مقادیر ویژه نامطلوب در ماتریس حلقه باز سیستم استاندارد می‌شود در حالی که مقادیر ویژه مطلوب تغییری نمی‌کند در نتیجه سیستمی با اندازه کوچکتر خواهیم داشت. روش تخصیص جزئی با بردارهای ویژه نسبت به روش معرفی شده با روابط متعامد دارای برتری‌هایی می‌باشد که در این رساله به آن پرداخته‌ایم.

روش‌های دیگری مانند وارون درزین، الگوریتم شوفل، تجزیه وایراشتراس و روش کاکزورک برای سیستم‌های کسری توسعه‌یافته معرفی و با روش‌های تخصیص مقادیر ویژه مقایسه می‌شوند.

**کلمات کلیدی:** سیستم‌های گسسته-زمان، پیوسته-زمان، پایدارسازی، کسری توسعه‌یافته، دوبعدی راسر

# لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1- S. B. Mirassadi and H. A. Tehrani, (August 2016), *Partial eigenvalue assignment in continuous -time descriptor systems via derivative state feedback*, **International Journal of Applied and Computational Mathematics**, DOI 10.1007/s40819-016-0229-9.

2- S. B. Mirassadi and H. A. Tehrani, (Fall 2016), *Partial eigenvalue assignment in discrete-time descriptor systems via derivative state feedback*, **Amirkabir International Journal of Science and Research Modeling, Identification, Simulation and Control**, Vol. 48, No. 2, pp. 65–74.

3- S. B. Mirassadi and H. A. Tehrani, (Fall 2017), *Partial eigenvalue assignment in descriptor systems via derivative and propositional state feedback*, **Journal of Information and Computing Science**, Vol. 12, No. 3, pp. 220–233.

4- S. B. Mirassadi and H. A. Tehrani, (2019), "*Partial eigenvalue assignment for stabilization of descriptor fractional discrete-time linear systems*", **Journal of Mathematical Modeling**, Vol. 7, No. 2, pp. 199–220.

5- S. B. Mirassadi and H. A. Tehrani, (2019), "*Matrix inverse eigenvalue problem for stabilization of fractional descriptor discrete-time linear systems by forward and propositional output feedback*", **Computational Methods for Differential Equations**, Accepted, Not published.

6- S. B. Mirassadi and H. A. Tehrani, (2019), "*Partial eigenvalue assignment of descriptor fractional discrete-time linear systems by parametric state feedback*", **Computational Methods for Differential Equations**, Submitted on May 23th.

## Conference articles

1- S. B. Mirassadi and H. A. Tehrani, (2015), *A new approach for eigenvalue assignment in descriptor systems via output feedback matrix*, **The 46th Annual Iranian Mathematics Conference**, Yazd University, Yazd, Iran, 25-28 August, pp. 575–578.

2- S. B. Mirassadi and H. A. Tehrani, (2015), *Descriptor systems controller, with minimizing the norm of state feedback matrix*, **The 46th Annual Iranian Mathematics Conference**, Yazd University, Yazd, Iran, 25-28 August, pp. 596–599.

3- S. B. Mirassadi and H. A. Tehrani, (2017), *Stabilization of fractional discrete-time systems via output feedback*, **The 9th Seminar on Linear Algebra and its Applications**, Tabriz University, Tabriz, East Azarbayjan, Iran, 5-6 July, pp. 20–23.



---

4- S. B. Mirassadi and H. A. Tehrani, (2017), *Eigenvalue assignment in fractional two-dimensional Roesser systems*, **The 9th Seminar on Linear Algebra and its Applications**, Tabriz University, Tabriz, East Azarbayjan, Iran, 5-6 July, pp. 24–27.

# فهرست مطالب

ش	لیست تصاویر
۱	۱ مقدمات
۱	۱.۱ تعاریف و قضایا
۵	۲.۱ مدارهای الکتریکی و قوانین کیرشهف
۶	۱.۲.۱ اصطلاحات رایج در مدارهای الکتریکی
۷	۲.۲.۱ قوانین کیرشهف
۹	۳.۲.۱ کاربرد قوانین مداری کیرشهف
۹	۳.۱ سیستم‌های استاندارد و پایداری آن‌ها
۹	۱.۳.۱ سیستم‌های استاندارد پیوسته-زمانی
۱۰	۲.۳.۱ سیستم‌های استاندارد گسسته-زمانی
۱۲	۳.۳.۱ کنترل‌پذیری
۱۳	۴.۳.۱ ناورداهای کرونگر
۱۴	۵.۳.۱ پایداری
۱۷	۲ تخصیص مقادیر ویژه در سیستم‌های استاندارد
۱۷	۱.۲ مقدمه
۱۸	۲.۲ تخصیص مقادیر ویژه با استفاده از تبدیلات تشابهی در سیستم‌های استاندارد
۱۸	۱.۲.۲ فرم استاندارد اشلون
۲۰	۲.۲.۲ فرم همدم برداری
۲۲	۳.۲.۲ تخصیص مقادیر ویژه به وسیله‌ی ماتریس پس‌خورد حالت
۲۵	۴.۲.۲ الگوریتم روش تبدیلات تشابهی
	۳.۲ تخصیص مقادیر ویژه با استفاده از مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی در
۲۶	سیستم‌های استاندارد
	۱.۳.۲ ارتباط بین مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی و مسئله تخصیص
۲۷	مقادیر ویژه

۲۰۳.۲	حل مسئله تخصیص مقادیر ویژه با پس خورد خروجی با استفاده
۳۰	از مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی
۳۲	روش تکراری
۴۰۳.۲	الگوریتم محاسبه پس خورد خروجی با روش مقدار ویژه معکوس
۳۴	ماتریسی
۴.۲	تخصیص مقادیر ویژه جزئی با استفاده از بردارهای ویژه در سیستم‌های
۳۵	استاندارد
۳۶	وجود و یکتایی جواب برای مسئله تخصیص مقادیر ویژه
۳۷	روش تخصیص مقادیر ویژه جزئی با استفاده از بردار ویژه
۵.۲	تخصیص مقادیر ویژه جزئی با استفاده از روابط متعامد در سیستم‌های
۳۹	استاندارد
۴۰	انتخاب $\beta$
۴۱	محاسبه $\beta$
۴۲	الگوریتم تخصیص مقادیر ویژه جزئی تک‌ورودی
۴۵	<b>۳ سیستم‌های توسیع یافته</b>
۴۵	مقدمه
۴۷	کاربردها
۴۹	سیستم‌های خطی توسیع یافته مثبت
۴۹	سیستم‌های خطی توسیع یافته پیوسته-زمانی مثبت
۵۰	سیستم‌های خطی توسیع یافته گسسته-زمانی مثبت
۵۰	مثبت بودن سیستم‌های توسیع یافته با زوج مدادی منظم
۵۰	سیستم‌های توسیع یافته پیوسته-زمانی همگن
۵۲	سیستم‌های توسیع یافته گسسته-زمانی همگن
۵۴	سیستم‌های توسیع یافته پیوسته-زمانی ناهمگن
۵۵	سیستم‌های توسیع یافته گسسته-زمانی ناهمگن
۵۶	پایداری مجانی سیستم‌های توسیع یافته همگن مثبت
۵۶	سیستم‌های پیوسته-زمانی همگن
۵۷	سیستم‌های گسسته-زمانی همگن
۵۸	پایدارسازی سیستم‌های توسیع یافته با استفاده از تبدیلات تشابهی
۱.۶.۳	پایدارسازی سیستم‌های توسیع یافته پیوسته-زمانی با استفاده از
۵۸	پس خورد حالت مشتق
۲.۶.۳	پایدارسازی سیستم‌های توسیع یافته پیوسته-زمانی با استفاده از
۶۰	پس خورد حالت مشتق و گزاره‌های

۳.۶.۳	پایدارسازی سیستم‌های توسعه یافته گسسته-زمانی با استفاده از	
۶۲	پس خورد حالت پیشرو	۶۲
۴.۶.۳	پایدارسازی سیستم‌های توسعه یافته گسسته-زمانی با استفاده از	
۶۴	پس خورد حالت پیشرو و گزاره‌ای	۶۴
۷.۳	پایدارسازی سیستم‌های توسعه یافته با استفاده از تخصیص مقادیر ویژه	
۶۶	جزئی و پس خورد حالت	۶۶
۱.۷.۳	پایدارسازی سیستم‌های توسعه یافته پیوسته-زمانی با تخصیص	
۶۷	مقادیر ویژه جزئی و پس خورد حالت مشتق	۶۷
۲.۷.۳	پایدارسازی سیستم‌های توسعه یافته پیوسته-زمانی با تخصیص	
۷۰	مقادیر ویژه جزئی و پس خورد حالت مشتق و گزاره‌ای	۷۰
۳.۷.۳	پایدارسازی سیستم‌های توسعه یافته گسسته-زمانی با تخصیص	
۷۵	مقادیر ویژه جزئی و پس خورد حالت پیشرو	۷۵
۴.۷.۳	پایدارسازی سیستم‌های توسعه یافته گسسته-زمانی با تخصیص	
۷۹	مقادیر ویژه جزئی و پس خورد حالت پیشرو و گزاره‌ای	۷۹
۸.۳	پایدارسازی سیستم‌های توسعه یافته با مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی	
۱.۸.۳	پایدارسازی سیستم‌های توسعه یافته پیوسته-زمانی با استفاده از	
۸۳	پس خورد خروجی مشتق	۸۳
۲.۸.۳	پایدارسازی سیستم‌های توسعه یافته پیوسته-زمانی با استفاده از	
۸۵	پس خورد خروجی مشتق و گزاره‌ای	۸۵
۳.۸.۳	پایدارسازی سیستم‌های توسعه یافته گسسته-زمانی با استفاده از	
۸۷	پس خورد خروجی پیشرو	۸۷
۴.۸.۳	پایدارسازی سیستم‌های توسعه یافته گسسته-زمانی با استفاده از	
۸۹	پس خورد خروجی پیشرو و گزاره‌ای	۸۹
۹۳	<b>سیستم‌های کسری توسعه یافته</b>	۴
۹۳	مقدمه	۱.۴
۹۶	کاربردها	۲.۴
	تبدیل سیستم‌های کسری توسعه یافته به سیستم‌های استاندارد با الگوریتم	۳.۴
۹۸	شوفل	
۱۰۰	یافتن جواب در سیستم‌های استاندارد معادل	۱.۳.۴
۱۰۲	حل سیستم‌های کسری توسعه یافته با وارون درزین	۴.۴
۱۰۲	جواب معادله حالت	۱.۴.۴
۱۰۵	حل سیستم‌های کسری توسعه یافته با تجزیه وایراشترانس	۵.۴
۱۰۵	یافتن جواب	۱.۵.۴

۱۰۹	حل سیستم‌های کسری توسیع‌یافته با روش کاکزورک	۶.۴
۱۰۹	فرمول‌بندی مسئله	۱.۶.۴
۱۱۰	حل مسئله	۲.۶.۴
۱۱۵	پایداری و یافتن جواب در سیستم‌های کسری توسیع‌یافته با تخصیص مقادیر ویژه	۷.۴
۱۱۷	پایداری و یافتن جواب با استفاده از تبدیلات تشابهی و پس‌خورد	۱.۷.۴
۱۱۷	حالت پیشرو	۲.۷.۴
۱۱۸	پایداری و یافتن جواب با روش تخصیص مقادیر ویژه جزئی و	۳.۷.۴
۱۲۰	پس‌خورد حالت پیشرو و گزاره‌ای	۴.۷.۴
۱۲۴	ماتریسی و پس‌خورد خروجی پیشرو	۵.۷.۴
۱۲۵	پایداری و یافتن جواب با استفاده از مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی و پس‌خورد خروجی پیشرو و گزاره‌ای	۵.۷.۴
۱۳۱	<b>۵ سیستم‌های کسری دوبعدی مدل راسر</b>	
۱۳۱	مقدمه	۱.۵
۱۳۳	پایداری سیستم‌های کسری دوبعدی	۲.۵
۱۳۳	پایداری عملی سیستم‌های کسری دوبعدی	۱.۲.۵
۱۳۷	پایداری مجانی سیستم‌های کسری دوبعدی	۲.۲.۵
۱۳۹	سیستم‌های کسری دوبعدی مدل راسر	۳.۵
۱۴۰	یافتن جواب در سیستم‌های کسری دوبعدی مدل راسر با تبدیل	۱.۳.۵
۱۴۰	$T_{pq}$	
۱۴۲	پایداری مجانی سیستم‌های کسری دوبعدی مثبت مدل راسر	۲.۳.۵
۱۴۶	تبدیلات تشابهی در سیستم‌های کسری دوبعدی گسسته-زمانی مدل راسر	۴.۵
۱۴۷	پایداری سیستم‌های کسری دوبعدی گسسته-زمانی مدل راسر	۱.۴.۵
۱۴۷	یافتن جواب در سیستم‌های کسری دوبعدی مدل راسر با تبدیلات تشابهی	۲.۴.۵
۱۴۸	تشریح تشابهی	
۱۵۱	یافتن جواب در مدل راسر دوبعدی توسیع‌یافته با وارون درزین	۵.۵
۱۵۹	<b>۶ نتیجه‌گیری</b>	
۱۶۳	<b>مراجع</b>	

# لیست تصاویر

۶	.....	نمونه‌ای از یک مدار الکتریکی	۱.۱
۷	.....	قانون اول کیرشهف	۲.۱
۸	.....	قانون دوم کیرشهف	۳.۱
۸	.....	مدار مقاومتی	۴.۱
۴۸	.....	مدار الکتریکی مثال ۱.۲.۳	۱.۳
۴۸	.....	مدار الکتریکی مثال ۲.۲.۳	۲.۳
۶۰	.....	پایداری بردارهای حالت و ورودی در مثال ۱.۶.۳	۳.۳
۶۳	.....	پایداری بردارهای حالت و ورودی در مثال ۲.۶.۳	۴.۳
۶۴	.....	پایداری بردارهای حالت و ورودی در مثال ۳.۶.۳	۵.۳
۶۶	.....	پایداری بردارهای حالت و ورودی در مثال ۴.۶.۳	۶.۳
۷۱	.....	پایداری بردارهای حالت و ورودی در مثال ۱.۷.۳	۷.۳
۷۴	.....	پایداری بردارهای حالت و ورودی در مثال ۲.۷.۳	۸.۳
۷۸	.....	پایداری بردارهای حالت و ورودی در مثال ۳.۷.۳	۹.۳
۸۲	.....	پایداری بردارهای حالت و ورودی در مثال ۴.۷.۳	۱۰.۳
۸۴	.....	پایداری بردارهای حالت، ورودی و خروجی در مثال ۱.۸.۳	۱۱.۳
۸۶	.....	پایداری بردارهای حالت، ورودی و خروجی در مثال ۲.۸.۳	۱۲.۳
۸۸	.....	پایداری بردارهای حالت، ورودی و خروجی در مثال ۳.۸.۳	۱۳.۳
۹۱	.....	پایداری بردارهای حالت، ورودی و خروجی در مثال ۴.۸.۳	۱۴.۳
۹۶	.....	مدار الکتریکی مثال ۱.۲.۴	۱.۴
۹۷	.....	مدار الکتریکی مثال ۲.۲.۴	۲.۴
۱۲۱	.....	پایداری بردارهای حالت و ورودی در مثال ۱.۷.۴	۳.۴
۱۲۴	.....	پایداری بردارهای حالت و ورودی در مثال ۲.۷.۴	۴.۴
۱۲۹	.....	پایداری بردارهای حالت، ورودی و خروجی در مثال ۳.۷.۴	۵.۴
۱۵۰	.....	پایداری بردارهای حالت و ورودی در مثال ۱.۴.۵	۱.۵

# فصل ۱

## مقدمات

### ۱.۱ تعاریف و قضایا

**تعریف ۱.۱.۱.** فرض کنیم  $A$  یک ماتریس  $n \times n$  باشد. مجموعه ریشه‌های چندجمله‌ای

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I), \quad (1.1)$$

که به چندجمله‌ای مشخصه<sup>۱</sup> ماتریس  $A$  موسوم است، طیف<sup>۲</sup> ماتریس  $A$  نامیده می‌شود و اغلب با نماد  $\Omega(A)$  نشان داده می‌شود. به هر عضو از  $\Omega(A)$  مقدار ویژه<sup>۳</sup> ماتریس  $A$  گفته می‌شود.

**تعریف ۲.۱.۱.** رتبه<sup>۴</sup> ماتریس  $A$  برابر با ماکزیمم تعداد سطرها یا ستون‌های مستقل خطی در آن ماتریس است که با  $\text{rank}(A)$  نشان داده می‌شود.

**قضیه ۱.۱.۱.** فرض کنیم که  $A$  یک ماتریس  $n \times n$  باشد. آن‌گاه شرایط زیر هم‌ارزند.

$$\det(A) \neq 0. \quad ۱.$$

---

<sup>۱</sup>Characteristic polynomial

<sup>۲</sup>Spectrum

<sup>۳</sup>Eigenvalue

<sup>۴</sup>Rank

$$\text{rank}(A) = n \quad ۲.$$

۳. که  $\lambda_i \neq 0, i = 1, \dots, n$  یک مقدار ویژه‌ی ماتریس  $A$  است.

**تعریف ۳.۱.۱.** فرض کنید  $A$  ماتریسی  $n \times n$  باشد. فضای پوچ ماتریس  $A$  که با  $\text{null}(A)$  یا  $\ker(A)$  نمایش داده می‌شود، برابر است با مجموعه تمام  $x$  هایی که در معادله  $Ax = 0$  صدق کند و داریم:

$$\text{rank}(A) + \text{null}(A) = n.$$

**ملاحظه ۱.۱.۱.** برای ماتریس حقیقی  $A_{n \times n}$  معادله مشخصه  $\det(\lambda I - A) = 0$  یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی است. بنابراین کلیه مقادیر ویژه به صورت حقیقی یا به صورت مزدوج مختلط  $\alpha \pm i\beta$  است.

**لم ۱.۱.۱.** [۶۳، ۶۴] ماتریس  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  را با  $\text{rank}(M) = n$  و مقادیر ویژه  $\lambda_n, \dots, \lambda_1$  در نظر بگیرید. آن گاه مقادیر ویژه  $M^{-1}$  به صورت  $\lambda_n^{-1}, \dots, \lambda_1^{-1}$  خواهد بود.

**ملاحظه ۲.۱.۱.** فرض کنید  $\lambda = a + bi$  مقدار ویژه‌ای از ماتریس  $M$  با رتبه کامل باشد، آن گاه بنابر **لم ۱.۱.۱**،

$$\lambda^{-1} = (a + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i,$$

مقدار ویژه  $M^{-1}$  خواهد بود.

**تعریف ۴.۱.۱.** [۸۸] فرض کنید  $A$  ماتریسی  $n \times n$  باشد. اسکالر  $\lambda$ ، یک مقدار ویژه و بردار ستونی ناصفر  $x$  بردار ویژه راست متناظر با  $\lambda$  نامیده می‌شود اگر

$$Ax = \lambda x. \quad (۲.۱)$$

**تعریف ۵.۱.۱.** ترانهاده مزدوج یا هرمیتی ماتریس  $A_{m \times n}$  با درایه‌های مختلط به صورت  $A_{n \times m}^*$  یا  $A^H$  تعریف می‌شود و درایه‌های آن به صورت  $a_{ij}^* = \bar{a}_{ji}$  محاسبه می‌شود. اگر  $a_{ij} = m + ni$ ، آن گاه  $\bar{a}_{ij} = m - ni$  به عبارت دیگر داریم،  $A^H = (\bar{A})^t$ .

**تعریف ۶.۱.۱.** [۸۸] فرض کنید  $A$  ماتریسی  $n \times n$  باشد. اسکالر  $\lambda$ ، یک مقدار ویژه و بردار ستونی ناصفر  $y$  که در

$$y^H A = \lambda y^H, \quad (۳.۱)$$

صدق کند، بردار ویژه چپ متناظر با  $\lambda$  نامیده می‌شود که  $y^H$  ترانهاده مزدوج بردار  $y$  است.

**تعریف ۷.۱.۱.** [۸۸] زوج‌های  $(\lambda, x)$  و  $(\lambda, y)$  در تعریف‌های **۴.۱.۱** و **۶.۱.۱**، به ترتیب زوج‌های مرتب راست و چپ  $A$  نامیده می‌شوند.



**قضیه ۲.۱.۱.** [۹۱، ۱۳] (تعامد بردارهای ویژه ماتریس  $A$ ) فرض کنید  $\lambda_n, \dots, \lambda_1$  مقادیر ویژه ماتریس  $A$ ،  $X$  و  $Y$  به ترتیب بردارهای ویژه راست و چپ،  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \cap \{\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n\} = \emptyset$ ، و  $(X_1, X_2)$  و  $(Y_1, Y_2)$  افزایشی از  $X$  و  $Y$  باشند که  $X_1 = (x_1, \dots, x_m)$ ،  $X_2 = (x_{m+1}, \dots, x_n)$ ،  $Y_1 = (y_1, \dots, y_m)$  و  $Y_2 = (y_{m+1}, \dots, y_n)$  آن گاه

$$Y_1^H X_2 = 0, \quad Y_1^H A X_2 = 0. \quad (4.1)$$

علاوه بر آن اگر  $A$  ماتریس متقارن حقیقی باشد آن گاه

$$X_1^t X_2 = 0, \quad X_1^t A X_2 = 0. \quad (5.1)$$

**تعریف ۸.۱.۱.** اگر  $A$  یک ماتریس مربعی باشد، آنگاه کهاد درایه‌ی سطر  $i$  ام و ستون  $j$  ام با  $M_{i,j}$  نمایش داده می‌شود که ماتریسی است که از حذف سطر  $i$  ام و ستون  $j$  ام به دست می‌آید.

**تعریف ۹.۱.۱.** اگر  $A$  ماتریسی مربعی باشد، آنگاه ترانهاده ماتریس  $M_{i,j}^{i+j}(-1)$  را ماتریس الحاقی<sup>۵</sup> ماتریس  $A$  می‌نامند و با  $adj(A)$  نشان می‌دهند.

**تعریف ۱۰.۱.۱.** ماتریس مربعی که توان طبیعی  $n$  وجود داشته باشد به طوری که  $A^n = 0$  و  $A^{n-1} \neq 0$  را ماتریس پوچ توان می‌نامند.

**تعریف ۱۱.۱.۱.** [۳۰] ماتریس  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  یک ماتریس متزله<sup>۶</sup> نامیده می‌شود اگر همه‌ی درایه‌های خارج قطر اصلی نامنفی باشند. یعنی:

$$\forall i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n : a_{ij} \geq 0.$$

**تعریف ۱۲.۱.۱.** دو ماتریس  $A$  و  $B$  را متشابه نامیده می‌شوند اگر ماتریس نامنفرد  $T$  وجود داشته باشد به طوری که

$$B = T^{-1}AT.$$

یک خاصیت مهم از ماتریس‌های متشابه داشتن مقادیر ویژه یکسان است.

**قضیه ۳.۱.۱.** [۱] (قضیه کیلی-همیلتون<sup>۷</sup>) فرض کنید  $A$  ماتریسی با درایه‌های حقیقی و  $I_n$  ماتریس همانی با بعد  $n$  باشند. اگر  $p(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$  معادله مشخصه ماتریس  $A$  باشد، آن گاه  $p(A) = 0$ .

**تعریف ۱۳.۱.۱.** [۸۷] فرض کنید  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ، آن گاه  $A^\dagger$  شبه وارون مور-پنروز<sup>۸</sup>  $A$  است اگر داشته باشیم:

$$AA^\dagger A = A, \quad A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger, \quad (AA^\dagger)^t = AA^\dagger, \quad (A^\dagger A)^t = A^\dagger A. \quad (6.1)$$

علاوه بر آن  $A^\dagger$  همیشه وجود دارد و یکتاست.

<sup>۵</sup> Adjugate matrix

<sup>۶</sup> Metzler matrix

<sup>۷</sup> Cayley-Hamilton

<sup>۸</sup> Moore-Penrose Pseudoinverse

**مثال ۱.۱.۱.** ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  را در نظر بگیرید. شبه‌وارون  $A^\dagger = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$ ، شبه‌وارون مور-پنروز است چون در تمام شرایط (۶.۱) صدق می‌کند. اما شبه‌وارون  $\begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}$  مور-پنروز نیست چون در شرط سوم از (۶.۱) برقرار نیست.

**تعریف ۱۴.۱.۱.** [۳۰] کوچکترین عدد صحیح نامنفی  $q$  که در

$$\text{rank}(A^q) = \text{rank}(A^{q+1}), \quad (7.1)$$

صدق کند را شاخص ماتریس  $A$  می‌نامند.

**تعریف ۱۵.۱.۱.** [۳۰، ۸] ماتریس  $A^D$  وارون درزین ماتریس  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  نامیده می‌شود اگر شرایط زیر برقرار باشند:

$$AA^D = A^D A, \quad A^D AA^D = A^D, \quad A^D A^{q+1} = A^q, \quad (8.1)$$

که  $q$  شاخص  $A$  است.

**لم ۲.۱.۱.** [۳۰، ۸] وارون درزین  $A^D$  از ماتریس مربعی  $A$  همیشه وجود دارد و یکتاست. به‌علاوه اگر  $\det(A) \neq 0$  آن‌گاه  $A^D = A^{-1}$ .

**لم ۳.۱.۱.** [۳۰] اگر ماتریس‌های  $E$  و  $A$  طوری باشند که  $EA = AE$ ، آن‌گاه

$$E^D A = AE^D, \quad EA^D = A^D E, \quad E^D A^D = A^D E^D. \quad (9.1)$$

**ملاحظه ۳.۱.۱.** [۶۱] (فرآیند محاسبه ماتریس‌های وارون درزین) برای محاسبه وارون درزین  $A^D$  از ماتریس  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  فرآیند زیر پیشنهاد می‌شود.

• (مرحله یک). زوج ماتریس‌های  $V \in \mathbb{R}^{n \times r}$  و  $W \in \mathbb{R}^{r \times n}$  را چنان بیابید که

$$A = VW, \quad \text{rank}(V) = \text{rank}(W) = \text{rank}(A) = r,$$

که مشابه با  $r$  ستون (سطر) از ماتریس  $V$  ( $W$ ) می‌توان  $r$  ستون (سطر) مستقل خطی از ماتریس  $A$  اختیار نمود.

• (مرحله دو). ماتریس نامنفرد  $WAV \in \mathbb{R}^{r \times r}$  را محاسبه نمایید.

• (مرحله سه). ماتریس وارون درزین مطلوب به‌صورت  $A^D = V[WAV]^{-1}W$  به‌دست می‌آید.

**ملاحظه ۴.۱.۱.** اعمال سطری مقدماتی (ستونی مقدماتی نظیر) به‌صورت زیر در فصل‌های بعدی استفاده خواهند شد:

• ضرب (تقسیم) عدد حقیقی  $c$  در سطر (ستون)  $i$  ام که با نماد  $L[i \times c]$  ( $R[i/c]$ ) نشان داده می‌شود.

- جمع سطر  $i$  ام با سطر  $j$  ام که در عدد حقیقی  $c$  ضرب شده است، (تفاضل مضرب  $c$  از ستون  $i$  ام از ستون  $j$  ام) که با نماد  $L[i + j \times c]$   $R[j - i \times c]$  نشان داده می‌شود.
- جابجایی سطر (ستون)  $i$  ام و  $j$  ام که با نماد  $L[i, j]$   $R[i, j]$  نشان داده می‌شود.

**تعریف ۱۶.۱.۱.** [۹۳] همگشت<sup>۹</sup> دو تابع  $f$  و  $g$  که با نماد  $f * g$  نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau.$$

**قضیه ۴.۱.۱.** [۹۴] (قضیه همگشت<sup>۱۰</sup>) فرض کنید  $f$  و  $g$  دو تابع با همگشت  $f * g$  و  $F\{f\}$  و  $F\{g\}$  به ترتیب تبدیلات فوریه دو تابع  $f$  و  $g$  باشند، آنگاه:

$$F\{f.g\} = F\{f\} * F\{g\}, \quad F\{f * g\} = F\{f\}.F\{g\},$$

که نشان‌دهنده‌ی ضرب نقطه‌ای است.

**لم ۴.۱.۱.** [۳۸] اگر  $0 < \alpha < 1$ ، آن‌گاه

$$(-1)^j \binom{\alpha}{j+1} > 0, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (10.1)$$

که

$$\binom{\alpha}{j} = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-j+1)}{j!} & j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (11.1)$$

**تعریف ۱۷.۱.۱.** [۸۶] مشتق مرتبه کسری گرانوالد-لتنیکوف<sup>۱۱</sup> تابع  $f = f(t)$  بر بازه  $[a, b]$  و با مرتبه کسری  $\alpha$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}_a\Delta_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh), \quad a \leq t \leq b,$$

که  $[\cdot]$  جزء صحیح عدد  $x$  است.

## ۲.۱ مدارهای الکتریکی و قوانین کیرشهف

در این بخش، مدارهای الکتریکی و قوانین کیرشهف در آن‌ها تعریف و بیان می‌شوند.

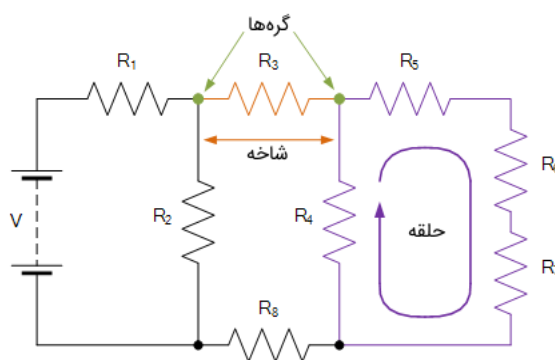
<sup>۹</sup>Convolution

<sup>۱۰</sup>Convolution Theorem

<sup>۱۱</sup>Grunwald-Letnikov

## ۱.۲.۱ اصطلاحات رایج در مدارهای الکتریکی

- مدار<sup>۱۲</sup> : یک مدار، مسیر هادی حلقه بسته‌ای است که جریان الکتریکی در آن برقرار می‌شود.
- مسیر<sup>۱۳</sup> : یک خط از عناصر یا منابع متصل به هم است.
- گره<sup>۱۴</sup> : یک اتصال یا پیوند از مدار است که در آن، دو یا بیشتر از دو عنصر مدار به هم متصل هستند. گره را با یک نقطه مشخص می‌کنیم.
- شاخه<sup>۱۵</sup> : شاخه، یک یا گروهی از اجزای مدار مانند مقاومت یا منبع است که بین دو گره وصل شده‌اند.
- حلقه<sup>۱۶</sup> : حلقه، یک مسیر بسته در مدار است که اگر از یک نقطه شروع کنیم و به همان جا برگردیم، بیش از یک بار از هر عنصر عبور نکرده باشیم.
- مش<sup>۱۷</sup> : مش، ساده‌ترین حلقه مدار است که شاخه‌ای در آن نیست.



شکل ۱.۱: نمونه‌ای از یک مدار الکتریکی

<sup>۱۲</sup>Circuit

<sup>۱۳</sup>Path

<sup>۱۴</sup>Node

<sup>۱۵</sup>Branch

<sup>۱۶</sup>Loop

<sup>۱۷</sup>Mesh

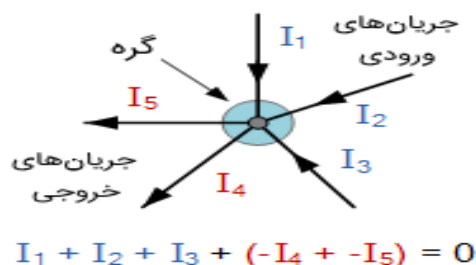
## ۲.۲.۱ قوانین کیرشهف

گاهی استفاده از قانون اهم برای به دست آوردن ولتاژ و جریان مدارهای پیچیده، دشوار است. در نتیجه، برای انجام محاسبات مربوط به این مدارها به قوانینی نیاز داریم که بتوانیم بر اساس آن، معادلات مدار را به دست آوریم. قانون مداری کیرشهف، یکی از راه‌حل‌های مناسب برای این کار است.

در سال ۱۸۷۵، فیزیکدان آلمانی، گوستاو کیرشهف<sup>۱۸</sup>، دو قانون بیان کرد که مربوط به جریان و انرژی در مدارهای الکتریکی بود. قانون جریان کیرشهف<sup>۱۹</sup> که مربوط به جریان در یک مدار بسته است و قانون ولتاژ کیرشهف<sup>۲۰</sup> که به ولتاژهای یک مدار بسته می‌پردازد.

### قانون اول کیرشهف، قانون جریان

قانون جریان کیرشهف یا  $KCL$  بیان می‌کند: جریان یا بار الکتریکی وارد شده به یک گره دقیقاً برابر با بار یا جریانی است که از آن خارج می‌شود. به عبارت دیگر، مجموع جبری تمام جریان‌های وارد شده به یک گره باید برابر صفر باشد. این ایده کیرشهف، با نام پایستگی یا بقای بار نیز شناخته می‌شود. وقتی با تحلیل مدارهای موازی سر و کار داریم، می‌توانیم از قانون جریان کیرشهف استفاده کنیم.



شکل ۲.۱: قانون اول کیرشهف

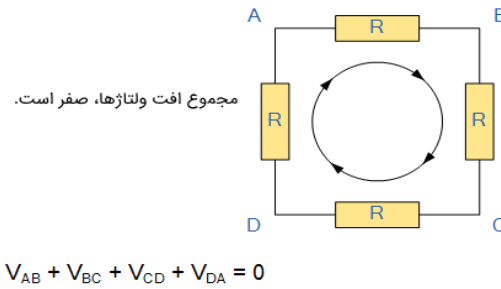
### قانون دوم کیرشهف، قانون ولتاژ

قانون ولتاژ کیرشهف یا  $KVL$  بیان می‌کند: در هر شبکه حلقه بسته، کل ولتاژ حلقه برابر با مجموع تمام افت ولتاژهای موجود در آن است. به عبارت دیگر، مجموع تمام ولتاژهای حلقه باید برابر با صفر باشد. این ایده کیرشهف، به عنوان بقا یا پایستگی انرژی نیز شناخته می‌شود.

<sup>۱۸</sup>Gustav Kirchhof

<sup>۱۹</sup>Kirchhoffs Current Law

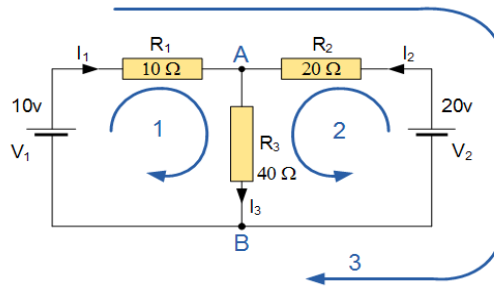
<sup>۲۰</sup>Kirchhoffs Voltage Law



شکل ۳.۱: قانون دوم کیرشهف

برای نوشتن معادله بر ولتاژ حلقه، باید از یک نقطه آن شروع کنیم، در یک جهت یکسان همه افت ولتاژها را بنویسیم و به همان نقطه اول باز گردیم. این نکته مهم است که وقتی افت ولتاژها را می‌نویسیم تغییر جهت ندهیم، زیرا با تغییر جهت، دیگر مجموع ولتاژها صفر نخواهد بود. از قانون ولتاژ کیرشهف می‌توان در مدارهای سری استفاده کرد.

**مثال ۱.۲.۱.** در مدار شکل زیر، جریان گذرنده از مقاومت  $R_3$  را به دست آورید.



شکل ۴.۱: مدار مقاومتی

مدار الکتریکی در این مثال ۳ شاخه، ۲ گره  $A$  و  $B$  و ۲ حلقه مستقل دارد. با استفاده از قانون جریان کیرشهف، در گره  $A$  و  $B$  معادلات زیر را داریم:

$$I_1 + I_2 = I_3, \quad (۱۲.۱)$$

$$I_3 = I_1 + I_2. \quad (۱۲.۱ ب)$$

قانون ولتاژ کیرشهف نیز برای حلقه‌های ۱، ۲ و ۳ منجر به معادلات زیر می‌شود:

$$R_1 I_1 + R_3 I_3 = 10 I_1 + 40 I_3 = 10, \quad (۱۳.۱)$$

$$R_2 I_2 + R_3 I_3 = 20 I_2 + 40 I_3 = 20, \quad (۱۳.۱ ب)$$

$$10 I_1 - 20 I_2 = 10 - 20 = -10. \quad (۱۳.۱ ج)$$

بنابر معادله (۱۱۲.۱) یا (۱۲.۱ب)، می‌توان معادلات (۱۳.۱) را به صورت

$$10I_1 + 40(I_1 + I_2) = 50I_1 + 40I_2 = 10, \quad (114.1)$$

$$20I_2 + 40(I_1 + I_2) = 40I_1 + 60I_2 = 20, \quad (14.1)$$

بازنویسی کرد. اکنون دو معادله داریم که می‌توانیم با استفاده از آن‌ها  $I_1$  و  $I_2$  را به دست آوریم. اگر محاسبات لازم را انجام دهیم، مقدار  $I_1 = 0/143$  و  $I_2 = +0/429$  آمپر به دست می‌آیند و بنابر (۱۱۲.۱) یا (۱۲.۱ب)  $I_3 = 0/286$  به دست می‌آید و ولتاژ دو سر مقاومت  $R_3$  نیز برابر  $11/44 = 0/286 \times 40$  است. علامت منفی جریان  $I_1$  به این معنی است که جهت اولیه جریان برای این حلقه اشتباه انتخاب شده بود. در حقیقت، باتری  $20$  ولتی، باتری  $10$  ولتی را شارژ می‌کند.

### ۳.۲.۱ کاربرد قوانین مداری کیرشهف

با کمک دو قانون مداری کیرشهف می‌توان مقادیر ولتاژ و جریان مدار را پیدا کرد. روند اصلی استفاده از این قوانین به صورت زیر است:

- فرض کنید همه ولتاژها و مقاومت‌ها داده شده‌اند (اگر داده نشده باشند، آن‌ها را نامگذاری کنید، به‌طور مثال  $V_1, V_2, \dots$  و  $R_1, R_2, \dots$ ).
- هر شاخه مدار را به عنوان شاخه جریان در نظر بگیرید و نامگذاری کنید. ( $\dots, I_2, I_1$ )
- معادلات قانون اول کیرشهف را برای هر گره بنویسید.
- معادلات قانون دوم کیرشهف را برای حلقه‌های مستقل مدار بنویسید.
- از معادلات خطی به دست آمده استفاده کرده و جریان‌های نامعلوم را بیابید.

## ۳.۱ سیستم‌های استاندارد و پایداری آن‌ها

در این بخش، تعریف‌ها و قضیه‌های مربوط به پایداری سیستم‌های استاندارد پیوسته-زمانی و گسسته-زمانی ارائه می‌شود.

### ۱.۳.۱ سیستم‌های استاندارد پیوسته-زمانی

سیستم خطی استاندارد پیوسته-زمانی [۱۹، ۳۲]

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad (115.1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (15.1)$$

را در نظر بگیرید که  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ،  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  و بردارهای حالت، ورودی و خروجی هستند و  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ،  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ،  $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$  و  $D \in \mathbb{R}^{r \times m}$ .

**تعریف ۱.۳.۱.** [۳۲، ۱۹] سیستم (۱۵.۱) مثبت نامیده می‌شود اگر برای هر شرط ابتدایی  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}_+^n$  و تمام ورودی‌های  $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$ ،  $t \geq 0$  داشته باشیم  $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$  و  $y(t) \in \mathbb{R}_+^r$ .

**قضیه ۱.۳.۱.** [۳۲، ۱۹] سیستم (۱۵.۱) مثبت است اگر و تنها اگر

$$A \in M_n, \quad B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, \quad C \in \mathbb{R}_+^{r \times n}, \quad D \in \mathbb{R}_+^{r \times m}. \quad (۱۶.۱)$$

که  $M_n$  مجموعه ماتریس‌های متزلز  $n \times n$  است.

**قضیه ۲.۳.۱.** [۳۲، ۱۹] سیستم مثبت (۱۵.۱) (با فرض  $u = 0$ ) پایدار مجانی است اگر و تنها اگر تمام ضرایب چندجمله‌ای

$$\det(I_n s - A) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, \quad (۱۷.۱)$$

مثبت باشند، یعنی برای  $i = 0, 1, \dots, n-1$  داشته باشیم  $a_i > 0$ .

**تعریف ۲.۳.۱.** [۳۲، ۱۹] سیستم (۱۵.۱) (با فرض  $u = 0$ ) پایدار مجانی نامیده می‌شود اگر برای  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  جواب  $x(t) = e^{At} x_0$  از معادله

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad t \geq 0, \quad (۱۸.۱)$$

در شرط زیر صدق کند:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (۱۹.۱)$$

## ۲.۳.۱ سیستم‌های استاندارد گسسته-زمانی

سیستم خطی استاندارد گسسته-زمانی

$$x_{i+1} = Ax_i + Bu_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (۱۲۰.۱)$$

$$y_i = Cx_i + Du_i, \quad (۲۰.۱)$$

را در نظر بگیرید که  $x_i \in \mathbb{R}^n$ ،  $u_i \in \mathbb{R}^m$  و بردارهای حالت، ورودی و خروجی هستند و  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ،  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ،  $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$  و  $D \in \mathbb{R}^{r \times m}$ .

**تعریف ۳.۳.۱.** [۳۲، ۱۹] سیستم (۲۰.۱) مثبت نامیده می‌شود اگر برای هر شرط ابتدایی نامنفی ثابت  $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$  و تمام ورودی‌های  $u_i \in \mathbb{R}_+^m$ ،  $i \in \mathbb{Z}_+$  داشته باشیم

$$x_i \in \mathbb{R}_+^n, \quad y_i \in \mathbb{R}_+^r, \quad i \in \mathbb{Z}_+.$$

**قضیه ۳.۳.۱.** [۳۲، ۱۹] سیستم (۲۰.۱) مثبت است اگر و تنها اگر

$$A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, \quad C \in \mathbb{R}_+^{r \times n}, \quad D \in \mathbb{R}_+^{r \times m}. \quad (۲۱.۱)$$



قضیه ۴.۳.۱. [۱۹، ۳۶] برای سیستم مثبت (۲۰.۱) (با فرض  $u = 0$ ) عبارات زیر معادل یکدیگر هستند:

۱. سیستم پایدار مجانی است.
۲. قدر مطلق مقادیر ویژه  $z_1, z_2, \dots, z_n$  از ماتریس  $A$  کمتر از یک است یعنی، برای  $i = 1, \dots, n$   $|z_i| < 1$ .
۳. برای  $|z| \geq 1$  داریم:  $\det[I_n - zA] \neq 0$ .
۴. برای شعاع طیفی ماتریس  $A$  که به صورت  $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |z_i|$  تعریف می‌شود، داریم  $\rho(A) < 1$ .
۵. تمام ضرایب  $\hat{a}_i, i = 0, 1, \dots, n-1$  از چندجمله‌ای مشخصه ماتریس  $\hat{A} = A - I_n$  که به صورت زیر تعریف می‌شوند مثبت هستند.

$$p_{\hat{A}}(z) = \det[I_n z - \hat{A}] = z^n + \hat{a}_{n-1} z^{n-1} + \dots + \hat{a}_1 z + \hat{a}_0. \quad (22.1)$$

۶. تمام کهادهای اصلی ماتریس

$$\bar{A} = I_n - A = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \dots & \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \dots & \bar{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2} & \dots & \bar{a}_{nn} \end{bmatrix}, \quad (23.1)$$

مثبت هستند، یعنی

$$|\bar{a}_{11}| > 0, \quad \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \det(\bar{A}) > 0. \quad (24.1)$$

۷. بردار به‌طور اکید مثبت  $\bar{x} > 0$  وجود دارد به‌طوری‌که

$$[A - I_n] \bar{x} < 0. \quad (25.1)$$

قضیه ۵.۳.۱. [۱۹، ۳۲] سیستم مثبت (۲۰.۱) (با فرض  $u_i = 0, i \in \mathbb{Z}_+$ ) پایدار مجانی است اگر و تنها اگر تمام ضرایب چندجمله‌ای

$$\det[I_n(z+1) - A] = z^n + \bar{a}_{n-1} z^{n-1} + \dots + \bar{a}_1 z + \bar{a}_0, \quad (26.1)$$

مثبت باشند، یعنی برای  $i = 0, 1, \dots, n-1$  داشته باشیم  $\bar{a}_i > 0$ .

تعریف ۴.۳.۱. [۱۹، ۳۲] سیستم (۲۰.۱) (با فرض  $u_i = 0, i \in \mathbb{Z}_+$ ) پایدار مجانی نامیده می‌شود اگر برای هر  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  جواب  $x_i = A^i x_0$  از معادله

$$x_{i+1} = A x_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (27.1)$$

در شرط زیر صدق کند:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0. \quad (28.1)$$

قضیه ۶.۳.۱. اگر حداقل یک درایه قطری ماتریس  $A$  بزرگتر از یک باشد، آن‌گاه سیستم مثبت (۲۷.۱) ناپایدار است.

### ۳.۳.۱ کنترل پذیری

دستگاه‌های توصیف شده با معادلات (۱۵.۱) و (۲۰.۱) کنترل پذیر<sup>۲۱</sup> نامیده می‌شوند، اگر با شروع از حالت اولیه  $x(0)$ ، با انتخاب ورودی مناسب  $u(t)$ ، در زمان متناهی  $t_1$  بتوان سیستم را به گام نهایی  $x_1 = x_1(t)$  هدایت کرد. کنترل پذیری یک سیستم اهمیت اساسی دارد زیرا در مسائلی که هدف انتقال سیستم از حالت اولیه دلخواهی به حالت تعادل باشد کنترل پذیری سیستم شرط لازم برای وجود جواب است.

**ملاحظه ۱.۳.۱.** کنترل پذیری سیستم‌های (۱۱۵.۱) و (۱۲۰.۱)، اغلب به کنترل پذیری زوج  $(B, A)$  اشاره دارد.

**ملاحظه ۲.۳.۱.** برای سیستم‌های توصیف شده با معادلات (۱۱۵.۱) و (۱۲۰.۱) ماتریس کنترل-پذیری را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Q = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \quad (۲۹.۱)$$

#### قضیه ۷.۳.۱ [۱۵] (معیار کنترل پذیری)

فرض کنید  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ،  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  و  $(m \leq n)$ ، آنگاه عبارات‌های زیر معادل هستند:

۱. دستگاه‌های (۱۱۵.۱) و (۱۲۰.۱) کنترل پذیر هستند.

۲. ماتریس کنترل پذیری  $Q_{n \times nm}$  رتبه کامل است، یعنی  $\text{rank}(Q) = n$ .

۳. اگر  $(\lambda, x)$  زوج مرتب راست ماتریس  $A^t$  باشد، به این معنی که  $x^t A = \lambda x^t$ ، آن‌گاه:  $x^t B \neq 0$ .

۴. برای هر مقدار ویژه  $\lambda$  از ماتریس  $A$ ،

$$\text{rank}(A - \lambda I, B) = n.$$

۵. با انتخاب مناسب ماتریس  $K$ ، مقادیر ویژه ماتریس  $A + BK$  را می‌توان به مقادیر دلخواه تخصیص داد.

**قضیه ۸.۳.۱.** (شرط بردار ویژه برای کنترل پذیری) سیستم (۱۱۵.۱) یا به طور معادل زوج ماتریس  $(B, A)$  نسبت به مقدار ویژه  $\lambda$  از  $A$  کنترل پذیر است اگر برای تمام  $y \neq 0$  داشته باشیم  $y^H B \neq 0$  به طوری که  $y^H A = \lambda y^H$ .

**تعریف ۵.۳.۱.** سیستم (۱۱۵.۱) یا زوج ماتریس  $(B, A)$  نسبت به زیرمجموعه‌ی  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  از مجموعه مقدار ویژه  $A$  به طور جزئی کنترل پذیر است اگر نسبت به هر مقدار ویژه  $\lambda_j, j = 1, \dots, p$  کنترل پذیر باشد.

<sup>۲۱</sup>Controllable

**تعریف ۶.۳.۱.** سیستم (۱۵.۱) یا زوج ماتریس  $(B, A)$  به طور کامل کنترل پذیر است اگر نسبت به هر مقدار ویژه  $A$  کنترل پذیر باشد.

**ملاحظه ۳.۳.۱.** قضیه ۸.۳.۱ و تعریف‌های ۵.۳.۱ و ۶.۳.۱ برای سیستم (۲۰.۱) نیز برقرار هستند.

**تعریف ۷.۳.۱.** [۷۴] زوج ماتریس  $(C, A)$  را به طور کامل مشاهده پذیر می‌نامند اگر ماتریس مشاهده پذیری

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix},$$

دارای رتبه کامل باشد که در آن  $A$  ماتریسی  $n \times n$ ،  $C$  ماتریسی  $l \times n$  و رتبه کامل است و  $l \leq n$ . به طور معادل می‌توان گفت اگر ماتریس

$$\begin{bmatrix} A - sI_n \\ C \end{bmatrix}, \quad (۳۰.۱)$$

برای هر مقدار ویژه  $s$  از  $A$  دارای رتبه کامل باشد، آن گاه زوج ماتریس  $(C, A)$  به طور کامل مشاهده پذیر است. ماتریس (۳۰.۱) نیز ماتریس مشاهده پذیری نامیده می‌شود.

زوج ماتریس  $(B, A)$  که  $B$  ماتریسی  $n \times m$  و دارای رتبه کامل است را به طور کامل کنترل پذیر نامند اگر و تنها اگر زوج ماتریس  $(B^t, A^t)$  به طور کامل مشاهده پذیر باشد.

**قضیه ۹.۳.۱.** [۷۴] برای هر مجموعه  $L$  داده شده، اگر زوج ماتریس  $(B, A)$  به طور کامل کنترل پذیر باشند و  $\Omega(A)$  مجموعه مقادیر ویژه ماتریس  $A$  را نشان دهد، آن گاه ماتریس حقیقی  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  وجود دارد به طوری که

$$\Omega(A + BK) = L.$$

همچنین اگر زوج ماتریس  $(B, A)$  به طور کامل مشاهده پذیر باشند، آن گاه ماتریس حقیقی  $K_o \in \mathbb{R}^{n \times r}$  وجود دارد به طوری که

$$\Omega(A + K_o C) = L.$$

## ۴.۳.۱ ناوردهای کرونکر

ماتریس کنترل پذیری (۲۹.۱) را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم  $b_1, b_2, \dots, b_m$  به ترتیب ستون‌های اول تا  $m$ ام ماتریس  $B$  باشند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$Q = \begin{bmatrix} b_1 \cdots b_m & Ab_1 \cdots Ab_m \cdots A^{n-1}b_1 \cdots A^{n-1}b_m \end{bmatrix}. \quad (۳۱.۱)$$

چون دستگاه کنترل پذیر است، پس می توان  $n$  ستون از اولین ستون های ماتریس  $Q$  را طوری به دست آورد که مستقل خطی باشند. برای نمایش آسان تر، ستون های  $Q$  را در یک بلوک مستطیلی که  $n$  سطر و  $m$  ستون دارد به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$\begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_m \\ Ab_1 & \cdots & Ab_m \\ A^2 b_1 & \cdots & A^2 b_m \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A^{n-1} b_1 & \cdots & A^{n-1} b_m \end{bmatrix}. \quad (32.1)$$

با شروع از گوشه سمت چپ بالای بلوک به طرف راست و پایین، بردارهایی که با بردار قبلی وابسته خطی اند، از بلوک حذف می کنیم و اگر بردار حذف شد همه ی بردارهای واقع در زیر آن بلوک حذف می شوند و این عمل را تا جایی ادامه می دهیم که تعداد بردارهای مستقل خطی  $n$  بردار باشد. در این حالت همه ی بردارهای باقی مانده غیر از  $n$  بردار به دست آمده را از بلوک حذف می کنیم. اگر این  $n$  بردار مستقل خطی را به ترتیب ستون های ماتریس  $T$  قرار دهیم آن گاه  $T$  معکوس پذیر خواهد بود و تبدیل مورد نظر به صورت زیر به دست می آید:

$$T = [b_1 \cdots b_m \quad Ab_1 \cdots Ab_m \cdots A^{p_1-1} b_1 \cdots A^{p_m-1} b_m]. \quad (33.1)$$

**تعریف ۸.۳.۱.** در رابطه (۳۳.۱) به هر ستون از بلوک متناظر با ستونی از ماتریس  $B$  عددی صحیح مانند  $p_i$  مربوط می شود که در رابطه زیر صدق می کند:

$$1 \leq p_i \leq n \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (34.1)$$

این  $p_i$  ها را ناوردهای کرونگر می نامیم. از طرفی  $p_i$  تعداد بردارهای باقی مانده در ستون  $i$  ام بلوک است، پس تعداد بردارهای واقع در ستون های بلوک برابر است با:

$$n = p_1 + p_2 + \cdots + p_m. \quad (35.1)$$

**تعریف ۹.۳.۱.** ناوردهای کرونگر  $(B, A)$  را منظم گوییم هرگاه اختلاف بین حداقل و حداکثر آن ها حداکثر یک باشد. در غیر این صورت ناوردهای کرونگر را نامنظم گویند.

## ۵.۳.۱ پایداری

تعاریف و قضایای این بخش از مراجع [۱] و [۱۵] انتخاب شده اند.

**تعریف ۱۰.۳.۱.** معادله دیفرانسیل  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$  را در نظر بگیرید. نقطه  $x_e$  را نقطه تعادل می نامند، هرگاه  $f(t, x_e) = 0$ .

**تعریف ۱۱.۳.۱.** سیستم دینامیکی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (36.1)$$

نقطه تعادل  $x_e$  را به مفهوم لیاپانوف<sup>۲۲</sup> پایدار گوییم، اگر به‌ازای هر  $t_0$  و  $\epsilon > 0$

$$\exists \delta > 0; \|x(t_0) - x_e\| < \delta \longrightarrow \|x(t) - x_e\| \leq \epsilon, \quad t \geq t_0.$$

**تعریف ۱۲.۳.۱.** معادله دیفرانسیل (۳۶.۱) پایدار مجانی است اگر

(الف) پایدار به مفهوم لیاپانوف باشد.

(ب) برای کلیه مقادیر  $t_0$

$$\exists \rho(t_0) > 0; \|x(t_0) - x_e\| < \rho(t_0) \longrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0.$$

**تعریف ۱۳.۳.۱.** نقطه تعادل معادله دیفرانسیل (۳۶.۱) را پایدار سراسری یا مجانی فراگیر گویند اگر:

(الف) پایدار به مفهوم لیاپانوف باشد.

(ب) برای هر  $x(t_0)$  و هر  $t_0$  داشته باشیم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0.$$

**ملاحظه ۴.۳.۱.** اگر سیستم، پایدار مجانی یا لیاپانوف نباشد آن‌گاه پایدار نیست.



## فصل ۲

# تخصیص مقادیر ویژه در سیستم‌های استاندارد

### ۱.۲ مقدمه

مسئله تخصیص مقادیر ویژه، یکی از مسائل اصلی در طراحی سیستم‌های کنترلی است که از هر دو دیدگاه تئوری و محاسباتی تحقیقات گسترده‌ای بر روی آن انجام شده است. این مسئله با دو هدف انجام می‌شود. اولین هدف، پایدارسازی سیستم‌های ناپایدار و دومین، تخصیص مقادیر ویژه مورد دلخواه به سیستمی که شاید پایدار یا ناپایدار باشد. در تمامی مسائل تخصیص مقادیر ویژه، محاسبات به گونه‌ای انجام می‌شود که ماتریس حلقه بسته از سیستم مربوطه دارای مقادیر ویژه مطلوب باشد. تخصیص می‌تواند با پس‌خورد حالت یا خروجی انجام شود. در بخش ۲.۲ ما با استفاده از پس‌خورد حالت و تبدیلات تشابهی، ماتریس حلقه بسته را محاسبه می‌کنیم در حالی که در بخش ۳.۲ پس‌خورد خروجی را، با استفاده از روش مقدار ویژه معکوس ماتریسی و ماتریس حلقه بسته به دست می‌آوریم.

در کاربردهای عملی بسیاری مانند طراحی سازه‌های اسپارس و بزرگ، شبکه‌های عصبی، سیستم‌های قدرتی، شبکه‌های کامپیوتری و سایر موارد، با سیستم‌هایی سروکار داریم که بعد ماتریس‌ها در آن‌ها بزرگ و اسپارس است و ممکن است روش تخصیص مقادیر ویژه برای آن‌ها کارآمد نباشد. علاوه بر آن در اغلب این کاربردها تنها تعداد کمی از مقادیر ویژه که باعث

ناپایداری این سیستم‌ها می‌شوند، نیاز به تخصیص دوباره دارند. روش تخصیص مقادیر ویژه جزئی این تخصیص دوباره را انجام خواهد داد در حالی که بقیه مقادیر ویژه ثابت نگه داشته شوند. واضح است که با این روش، بعد ماتریس‌ها کاهش یافته و محاسبات بکمتری انجام خواهد شد.

مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی در مراجع [۱۱، ۹۰] مورد بحث قرار گرفته است و شرایط وجود و یکتایی جواب در مسئله تک‌ورودی و چندورودی در زیربخش ۱.۴.۲ ارائه می‌شود [۹۰]. دو روش تخصیص مقادیر ویژه جزئی به ترتیب با استفاده از بردارهای ویژه و روابط متعامد در این فصل ارائه می‌شود. در روش دوم، نیاز به وجود فرضیاتی هستیم که برقراری آن‌ها در تمام سیستم‌ها امکان‌پذیر نیست که این مشکل با استفاده از روش اول تخصیص جزئی برطرف می‌شود. همچنین نشان می‌دهیم ماتریس‌ها و یا بردارهای پس‌خورد، حقیقی هستند. در تمامی روش‌های بیان‌شده با پس‌خوردهای حالت و خروجی در این فصل، سیستم‌های استاندارد پیوسته-زمانی (۱۵.۱) و گسسته-زمانی (۲۰.۱) مورد استفاده قرار می‌گیرند و تمامی روش‌ها را می‌توان برای سیستم‌های استاندارد با هر دو نوع گسسته-زمانی و پیوسته-زمانی به کار برد.

## ۲.۲ تخصیص مقادیر ویژه با استفاده از تبدیلات تشابهی در سیستم‌های استاندارد

در این بخش، ابتدا به بیان فرم استاندارد اشلون<sup>۱</sup> و همدم برداری<sup>۲</sup> زوج  $(B, A)$  می‌پردازیم. سپس چگونگی محاسبه ماتریس پس‌خورد حالت را برای تخصیص مقادیر ویژه صفر و تخصیص مقادیر ویژه دلخواه در ماتریس حلقه بسته بیان می‌کنیم. در انتها، حل مسئله اولیه با تخصیص مقادیر ویژه و با استفاده از تبدیلات تشابهی بیان شده مطرح می‌شود.

### ۱.۲.۲ فرم استاندارد اشلون

فرض کنید که  $T$  تبدیل تشابهی باشد که بر فضای  $\mathbb{R}^n$  تعریف شده است. معادله حالت سیستم استاندارد پیوسته-زمانی را به صورت (۱۵.۱) در نظر می‌گیریم. حال فرض می‌کنیم بردار حالت دستگاه توسط ماتریس تبدیل  $T^{-1}$  به فضای جدید تبدیل شود، یعنی:

$$\hat{x}(t) = T^{-1}x(t) \quad \text{یا} \quad x(t) = T\hat{x}(t). \quad (1.2)$$

<sup>۱</sup>Echelon

<sup>۲</sup>vector companion



با جایگذاری رابطه (۱.۲) در معادله حالت (۱۵.۱) داریم:

$$T\dot{\hat{x}}(t) = AT\hat{x}(t) + Bu(t) \rightarrow \dot{\hat{x}}(t) = T^{-1}AT\hat{x}(t) + T^{-1}Bu(t). \quad (۲.۲)$$

حال با در نظر گرفتن  $\hat{B} = T^{-1}B$  و  $\hat{A} = T^{-1}AT$  در معادله (۲.۲) داریم:

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t). \quad (۳.۲)$$

ماتریس تبدیل  $T$  را می‌توان به صورت منحصر به فردی با استفاده از ماتریس کنترل پذیری مشخص کرد. به این ترتیب که اولین  $n$  ستون مستقل خطی ماتریس  $Q$  را ستون‌های ماتریس تبدیل  $T$  قرار می‌دهیم.

$$T = [b_1 \cdots b_m \quad Ab_1 \cdots Ab_m \cdots A^{q-1}b_1 \cdots A^{q-1}b_r \quad A^{q-1}b_{r+1} \cdots A^{q-1}b_m \quad A^q b_1 \cdots A^q b_r].$$

ماتریس افزوده  $[B, A]$  که دارای  $n$  سطر و  $n+m$  ستون است را تشکیل می‌دهیم و فرم استاندارد اشلون را به صورت  $[T^{-1}B, T^{-1}AT]$  تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} T^{-1}[B, AT] &= T^{-1}[B, A(B, AB, \dots, A^{q-1}B, A^q b_1, \dots, A^q b_r)] \\ &= T^{-1} \begin{bmatrix} B, AB, \dots, A^q b_1 \cdots A^q b_r & A^q b_{r+1} \cdots A^q b_m & A^{q+1} b_1 & \cdots & A^{q+1} b_r \end{bmatrix} \\ &= T^{-1} \begin{bmatrix} T & A^q b_{r+1} & \cdots & A^q b_m & A^{q+1} b_1 & \cdots & A^{q+1} b_r \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I & T^{-1}A^q(b_{r+1} & \cdots & b_m & Ab_1 & \cdots & Ab_r) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_{n \times n} & V_{n \times m} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (۴.۲)$$

اکنون تبدیلات تشابهی سطری و ستونی نظیر را به صورت ملاحظه ۴.۱.۱ در نظر می‌گیریم. در صورتی که بخواهیم زوج  $(B, A)$  را به فرم استاندارد اشلون  $[I_n, V_{n \times m}]$  تبدیل نماییم، ابتدا ماتریس افزوده  $\bar{Q} = [B, A, I_n]$  را تشکیل می‌دهیم. سپس با استفاده از عملیات سطری مقدماتی روی ماتریس  $\bar{Q}$  و ستونی مقدماتی نظیر روی ماتریس  $A$  حاصل در هر مرحله،  $n$  ستون اول ماتریس  $\bar{Q}$  را به  $I_n$  تبدیل می‌کنیم، در این صورت ماتریس افزوده  $\hat{Q}$  به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, T^{-1}] = [I_n, V_{n \times m}, T^{-1}], \quad (۵.۲)$$

که ماتریس‌های  $\hat{B}$  و  $\hat{A}$  به صورت زیر هستند:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0_{m \times m} & 0 & \cdots & 0_{m \times r} & \nu_{m \times m}^{(1)} \\ I_m & 0 & \cdots & 0 & \nu_{m \times m}^{(2)} \\ 0_{m \times m} & I_m & \cdots & 0 & \nu_{m \times m}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \nu_{m \times m}^{(q)} \\ 0_{r \times m} & 0_{r \times m} & \cdots & I_r & \nu_{r \times m}^{(q+1)} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} I_m \\ 0_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \\ 0_{m \times m} \\ 0_{r \times m} \end{bmatrix}. \quad (۶.۲)$$

مثال ۱.۲.۲. فرم استاندارد اشلون زوج  $(B, A)$  را در دستگاه (۱۵.۱) با ماتریس‌های

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

به دست آورید.

حل.

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \vdots & -2 & 3 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & -2 & -1 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[\frac{c(1)+c(2) \rightarrow c(1) \text{ on } (A)}{r(2)-r(1) \rightarrow r(2) \text{ on } (\bar{Q})}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \vdots & 0 & 2 & 2 & \vdots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & -3 & -1 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[\frac{-\frac{1}{2}r(2) \rightarrow r(2) \text{ on } (\bar{Q})}{-2c(2) \rightarrow c(2) \text{ on } (A)}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \vdots & 1 & -2 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & -1 & \vdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & -3 & 2 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[\frac{c(2)+2c(1) \rightarrow c(2) \text{ on } (A)}{r(1)-2r(2) \rightarrow r(1) \text{ on } (\bar{Q})}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 1 & -4 & 2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & -1 & \vdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & -3 & -4 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[\frac{-\frac{1}{2}r(3) \rightarrow r(3) \text{ on } (\bar{Q})}{-3c(3) \rightarrow c(3) \text{ on } (A)}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 1 & -4 & -6 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & \frac{4}{3} & 3 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[\frac{c(3)+c(1) \rightarrow c(3) \text{ on } (A)}{r(1)-r(3) \rightarrow r(1) \text{ on } (\bar{Q})}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & -\frac{16}{3} & -9 & \vdots & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & \frac{4}{3} & 4 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \hat{Q} = [I, V, T^{-1}]. \end{aligned}$$

## ۲.۲.۲ فرم همدم برداری

یک ماتریس تبدیل خطی تشابهی مانند  $S$  را در نظر می‌گیریم که بر فضای  $\mathbb{R}^n$  تعریف شده است. اکنون بردار حالت سیستم که در بخش ۱.۲.۲ آن را به فرم استاندارد اشلون در آوریم را توسط ماتریس تبدیل  $S^{-1}$  به فضای جدید تبدیل می‌کنیم:

$$\hat{x}(t) = S^{-1} \hat{x}(t) = S^{-1} T^{-1} x(t) \quad \text{یا} \quad \hat{x}(t) = S \tilde{x}(t). \quad (7.2)$$

با جایگذاری معادله فوق در معادله (۳.۲) داریم:

$$S\dot{\tilde{x}}(t) = \hat{A}S\tilde{x}(t) + \hat{B}u(t) \rightarrow \dot{\tilde{x}}(t) = S^{-1}\hat{A}S\tilde{x}(t) + S^{-1}\hat{B}u(t). \quad (۸.۲)$$

با در نظر گرفتن  $\tilde{B} = S^{-1}\hat{B} = S^{-1}T^{-1}B$  و  $\tilde{A} = S^{-1}\hat{A}S = S^{-1}T^{-1}ATS$  در معادله (۸.۲) داریم:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t). \quad (۹.۲)$$

زوج  $(\tilde{B}, \tilde{A})$ ، فرم همدم برداری زوج  $(B, A)$  است [۲۰]. از آن جایی که معادلات (۱۱۵.۱) و (۹.۲) هم‌ارز یکدیگر هستند، جواب آن‌ها نیز یکسان است.

در صورتی که بخواهیم زوج  $(\hat{B}, \hat{A})$  را به فرم همدم برداری  $(\tilde{B}, \tilde{A})$  تبدیل نماییم، ماتریس افزوده  $\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, T^{-1}]$  را در نظر می‌گیریم. سپس با استفاده از عملیات ستونی مقدماتی روی ماتریس  $\hat{A}$  و سطری مقدماتی نظیر روی ماتریس  $\hat{Q}$ ، ماتریس  $\tilde{Q}$  را به فرم  $\tilde{Q} = [\tilde{B}, \tilde{A}, S^{-1}T^{-1}]$  تبدیل می‌کنیم. اگر ناوردهای کرونکر منظم باشند، ماتریس‌های  $\tilde{A}$  و  $\tilde{B}$  به صورت زیر هستند:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} G_0 & & \\ & \dots & \\ I_{n-m} & & O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_0 \\ \dots \\ O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix}, \quad (۱۰.۲)$$

که  $G_0$  یک ماتریس  $m \times n$  و  $B_0$  یک ماتریس  $m \times m$  بالا مثلثی است. حال اگر ناوردهای کرونکر نامنظم باشند، برخی از ستون‌های  $I_{n-m}$  از ماتریس  $\tilde{A}$ ، در پایین قطر اصلی پخش می‌شوند.

مثال ۲.۲.۲. برای مثال ۱.۲.۲، فرم همدم برداری را به دست آورید.

حل.

$$\hat{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & -\frac{16}{3} & -9 & \vdots & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & \frac{4}{3} & 4 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 \xrightarrow[\text{on}(A)]{c(3)-4c(1)\rightarrow c(3)} \\
 \xrightarrow[\text{on}(\hat{Q})]{r(1)+4r(3)\rightarrow r(1)} \\
 \xrightarrow[\text{on}(A)]{c(2)-\frac{4}{3}c(1)\rightarrow c(2)} \\
 \xrightarrow[\text{on}(\hat{Q})]{r(1)+\frac{4}{3}r(2)\rightarrow r(1)}
 \end{array}
 \left[ \begin{array}{ccccccc}
 1 & 0 & \vdots & 0 & -\frac{16}{3} & -9 & \vdots & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\
 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\
 0 & 0 & \vdots & 1 & \frac{4}{3} & 0 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\
 \\ 
 1 & 0 & \vdots & 4 & 0 & -9 & \vdots & 0 & 1 & -1 \\
 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\
 0 & 0 & \vdots & 1 & \frac{4}{3} & 0 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\
 \\ 
 1 & 0 & \vdots & 4 & -\frac{16}{3} & -9 & \vdots & 0 & 1 & -1 \\
 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\
 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\
 \\ 
 1 & \frac{4}{3} & \vdots & 4 & -\frac{16}{3} & -5 & \vdots & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\
 0 & 1 & \vdots & 0 & 2 & 3 & \vdots & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\
 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3}
 \end{array} \right].$$

بنابراین

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{16}{3} & -5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S^{-1}T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

### ۳.۲.۲ تخصیص مقادیر ویژه به وسیله‌ی ماتریس پس‌خورد حالت

برای معادلات (۱۱۵.۱) و (۳.۲) قانون کنترل را به ترتیب به صورت  $u(t) = Kx(t)$  و  $u(t) = \tilde{K}\tilde{x}(t)$  تعریف می‌کنیم که  $\tilde{K}$  ماتریس پس‌خورد حالت معادله تبدیل شده به فرم همدم برداری است. با جایگذاری  $S^{-1}T^{-1}x(t)$  به جای  $\tilde{x}(t)$  خواهیم داشت:

$$u(t) = \tilde{K}S^{-1}T^{-1}x(t). \quad (11.2)$$

هدف ما در این زیربخش، یافتن ماتریس پس‌خورد حالت

$$K = \tilde{K}S^{-1}T^{-1}, \quad (12.2)$$

است به طوری که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته  $A + BK$ ، مجموعه از پیش تعیین شده  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  باشند. با این خاصیت که  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  یا حقیقی هستند و یا به صورت زوج‌های مزدوج مختلط ظاهر می‌شوند. این مسئله را تخصیص مقادیر ویژه می‌نامند.

در صورتی که تعاریف

$$\tilde{F} = -B_o^{-1}G_o, \quad F_p = -B_o^{-1}G_o S^{-1}T^{-1}, \quad \Gamma_p = A + BF_p,$$

را داشته باشیم، آن‌گاه مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته  $\tilde{\Gamma}_0 = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F}$  صفر هستند. چون:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_0 &= \begin{bmatrix} G_0 & & \\ & \dots & \\ I_{n-m} & & O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix}_{n \times n} + \begin{bmatrix} B_0 & \\ & \dots \\ & & O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix}_{n \times m} (-B_0^{-1}G_0) \\ &= \begin{bmatrix} O_{m \times n} & & \\ & \dots & \\ I_{n-m} & & O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix}_{n \times n}. \end{aligned} \quad (13.2)$$

**نتیجه ۱.۲.۲.** به دلیل مشابه بودن  $\tilde{\Gamma}_0$  با  $\Gamma_p$ ، تمامی مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته  $\Gamma_p$  نیز صفر هستند. چون:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_0 &= S^{-1}T^{-1}ATS + S^{-1}T^{-1}B(-B_0^{-1}G_0) = S^{-1}T^{-1}ATS + S^{-1}T^{-1}B(F_pTS) \\ &= S^{-1}T^{-1}(A + BF_p)TS = (TS)^{-1}(A + BF_p)TS = (TS)^{-1}\Gamma_pTS. \end{aligned}$$

**قضیه ۱.۲.۲.** فرض کنید  $D$  یک ماتریس قطری به صورت

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & \circ & \dots & \circ \\ \circ & D_2 & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & D_k \end{bmatrix}, \quad (14.2)$$

باشد که هر  $j = 1, 2, \dots, k$  به‌ازای مقادیر ویژه مزدوج مختلط  $\alpha_j \pm i\beta_j$  به صورت

$$D_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{bmatrix}, \quad (15.2)$$

و به‌ازای مقادیر ویژه حقیقی به صورت  $D_j = [d_j]$  باشد. اگر چنین ماتریس قطری  $D$  با مقادیر ویژه مزدوج مختلط به ماتریس حلقه بسته  $\tilde{\Gamma}_0$  اضافه شود، آنگاه مقادیر ویژه حاصل، مقادیر ویژه از پیش تعیین شده و مطلوب است.

برهان. طبق رابطه (۱۳.۲) که فرم جردن اولیه در مورد ناوردهای کرونکر است داریم:

$$\begin{aligned} \tilde{H} = \tilde{\Gamma}_0 + D &= \begin{bmatrix} & O_{m \times n} & & & & & & \\ I_{n-m} & & & & & & & \\ & & O_{(n-m) \times m} & & & & & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 & \circ & \dots & \circ & & & & \\ \circ & D_2 & \dots & \circ & & & & \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & & & \\ \circ & \circ & \dots & D_k & & & & \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} D_1 & \circ & \dots & \circ & \circ & \dots & \circ & \\ \circ & D_2 & \dots & \circ & \circ & \dots & \circ & \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \circ & \circ & \dots & D_l & \circ & \dots & \circ & \\ I_1 & \circ & \dots & \circ & D_{l+1} \dots & \dots & \circ & \\ \vdots & \dots & \dots & \circ & \circ & \dots & \vdots & \\ \circ & \dots & I_r & \circ & \circ & \dots & D_k & \end{bmatrix}, \quad (16.2) \end{aligned}$$

که  $I_s, s = 1, 2, \dots, r$  ماتریس واحد از اندازه ۲ است در صورتی که  $(n - m)$  زوج باشد و در صورتی که  $(n - m)$  فرد باشد  $I_s$  تنها یک فرم ماتریس واحد از اندازه ۱ دارد. با گسترش  $\det(\tilde{H} - \lambda I_n)$  در امتداد سطر اول واضح است که مقادیر ویژه  $\tilde{H}$  همان مقادیر ویژه ماتریس  $D$  است. برای حالتی که ناوردهای کرونکر نامنظم باشند [۶۴] همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم تنها برخی از ستون‌های  $I_{n-m}$  در پایین قطر اصلی پخش می‌شوند. اثبات این حالت هم به روش مشابه است. بنابراین  $\tilde{H}_\lambda$  می‌تواند از  $\tilde{H}$  با استفاده از عملیات تشابهی مقدماتی

$$\begin{aligned} c(j) - \lambda_j c(i) &\rightarrow c(j), & j = n, n-1, \dots, m+1, \\ r(i) + \lambda_j r(j) &\rightarrow r(i), & i = j-m, \end{aligned} \quad (17.2)$$

به فرم همدم برداری به صورت

$$\tilde{H}_\lambda = \begin{bmatrix} & G_\lambda & & \\ I_{n-m} & & & \\ & & O_{n-m,m} & \end{bmatrix}, \quad (18.2)$$

به دست آید که  $G_\lambda$  یک ماتریس  $m \times n$  است. همچنین طبق عملیات تشابهی، مقادیر ویژه از ماتریس  $\tilde{H}_\lambda$  همان مقادیر ویژه ماتریس  $\tilde{H}$  است. □

**قضیه ۲.۲.۲.** اگر ماتریس پس‌خورد حالت را برای تخصیص مقادیر ویژه مطلوب  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  برای زوج  $(\tilde{B}, \tilde{A})$  به صورت

$$\tilde{K} = \tilde{F} + B_o^{-1} G_\lambda = B_o^{-1} (-G_o + G_\lambda), \quad (19.2)$$

تعریف کنیم، آن‌گاه مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته  $\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$  مجموعه از پیش تعیین شده  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  است.

برهان.

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K} &= \begin{bmatrix} G_0 & \\ I_{n-m} & O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 \\ O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} [B_0^{-1}(-G_0 + G_\lambda)] \\ &= \begin{bmatrix} G_0 - B_0 B_0^{-1} G_0 + B_0 B_0^{-1} G_\lambda & \\ I_{n-m} & O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} G_\lambda & \\ I_{n-m} & O_{(n-m) \times m} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (۲۰.۲)$$

به وضوح  $\tilde{\Gamma} = \tilde{H}_\lambda$ . حال چون ماتریس  $\tilde{H}_\lambda$  با ماتریس  $\tilde{H}$  متشابه است و عملیات تشابهی مقادیر ویژه را تغییر نمی‌دهد، پس مقادیر ویژه ماتریس  $\tilde{H}_\lambda$  با مقادیر ویژه ماتریس  $\tilde{H}$  برابر است. بنابراین مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته  $\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$  یا  $\Gamma = A + BK$ ، مجموعه از پیش تعیین شده  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  است که  $K = \tilde{K}S^{-1}T^{-1}$ .  $\square$

## ۴.۲.۲ الگوریتم روش تبدیلات تشابهی

در این بخش الگوریتمی ارائه می‌کنیم که با تبدیل زوج  $(B, A)$  به فرم اشلون  $(\hat{B}, \hat{A})$  و فرم همدم برداری  $(\tilde{B}, \tilde{A})$ ، ابتدا مقادیر ویژه صفر و سپس با تعریف ماتریس پس خورد  $\tilde{K}$  مقادیر ویژه مطلوب و از پیش تعیین شده  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  را به سیستم حلقه بسته  $\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K}$  یا به طور معادل سیستم حلقه بسته  $\Gamma = A + BK$  اختصاص دهد.

• **ورودی داده‌ها:** زوج کنترل‌پذیر  $(B, A)$  و مقادیر ویژه مطلوب  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$

• **خروجی:** ماتریس پس خورد حالت  $K$

• **گام اول:** ( فرم استاندارد اشلون ) تشکیل ماتریس افزوده  $\bar{Q} = [B, A, I_n]$  و تبدیل به  $\hat{Q} = [I_n, V_{n,m}, T^{-1}]$  با عملیات سطری و ستونی مقدماتی نظیر آن به ترتیب بر روی ماتریس‌های  $Q$  و  $A$ .

• **گام دوم:** ( فرم همدم برداری ) محاسبه ماتریس افزوده  $\tilde{Q} = [\tilde{B}, \tilde{A}, S^{-1}T^{-1}]$  از  $\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, T^{-1}]$  در گام اول با عملیات ستونی و سطری مقدماتی نظیر آن به ترتیب بر روی ماتریس‌های  $\hat{A}$  و  $\hat{Q}$  و محاسبه  $G_0$  و  $B_0$  با استفاده از (۱۰.۲).

• **گام سوم:** محاسبه ماتریس  $\tilde{H}$  با تشکیل ماتریس قطری  $D$  از مقادیر ویژه  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  و افزودن آن به ماتریس  $\tilde{\Gamma}_0$  به فرم (۱۶.۲) که  $\tilde{\Gamma}_0 = \tilde{A} + \tilde{B}(-B_0^{-1}G_0)$ .

• **گام چهارم:** انجام عملیات سطری و ستونی مقدماتی (۱۷.۲) روی ماتریس  $\tilde{H}$  و محاسبه  $G_\lambda$  به فرم (۱۸.۲).

• گام پنجم: محاسبه ماتریس پس خورد حالت  $\tilde{K}$  و  $K$  با استفاده از (۱۹.۲) و (۱۲.۲).

**مثال ۳.۲.۲.** برای محاسبه ماتریس پس خورد حالت در مثال ۲.۲.۲ با تخصیص مقادیر ویژه  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \{-1 \pm i, -2\}$  نتایج زیر به دست می‌آید:

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} -4 & \frac{16}{3} & 9 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad F_p = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} -1-i & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1+i \end{bmatrix}, \quad \tilde{H}_\lambda = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_\lambda = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

و ماتریس پس خورد حالت برابر است با:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -6 & \frac{11}{3} \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

## ۳.۲ تخصیص مقادیر ویژه با استفاده از مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی در سیستم‌های استاندارد

برای تمام مطالب ۳.۲ از منابع [۷۴، ۷۶] استفاده شده است.

مسئله تخصیص مقادیر ویژه با پس خورد خروجی، مسئله یافتن ماتریس  $K_0$  است به طوری که برای مجموعه‌ای از سه ماتریس  $A$ ،  $B$  و  $C$ ، ماتریس  $A + BK_0C$  مقادیر ویژه مطلوب را داشته باشد [۱۷، ۶۷].

مسائل مقدار ویژه معکوس ماتریسی و تخصیص مقادیر ویژه را می‌توان به یکدیگر تبدیل کرد. در مرجع [۷۵]، مسئله تخصیص مقادیر ویژه به مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی تبدیل می‌شود و سپس معادلات غیرخطی به دست آمده با روش نیوتن حل می‌شود. در این بخش روش تکراری مؤثرتری به جای روش نیوتن به کار می‌رود. با استفاده از این روش تکراری معادلات غیرخطی تبدیل به معادلات خطی شده و نیازی به محاسبه و ذخیره ماتریس ژاکوبین در روش نیوتن نیست.

همچنین تبدیل عکس این مسائل یعنی تبدیل مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی به مسئله تخصیص مقادیر ویژه با پس خورد خروجی در این بخش مورد بحث قرار می‌گیرد و قضیه وجودی ماتریس مورد نظر ارائه می‌شود. لازم به ذکر است که برای وارون ماتریس‌ها در این بخش از وارون مور-پنروز استفاده می‌شود.

نوع ابتدایی مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی را می‌توان در طراحی شبکه‌های عصبی



## ۱.۳.۲ ارتباط بین مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی و مسئله تخصیص مقادیر ویژه

**تعریف ۱.۳.۲.** [۷۴] (مسئله‌ی مقدار ویژه معکوس ماتریسی) دو مجموعه مستقل خطی از بردارهای  $n$  بعدی حقیقی  $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  و  $\{y_1, y_2, \dots, y_p\}$  که در آن  $p \leq n$  و مجموعه‌ی دلخواه از اعداد مختلط  $L = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  را در نظر بگیرید. هدف از مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی، یافتن ماتریس حقیقی  $\Gamma_{n \times n}$  است به طوری که:

$$\Gamma x_i = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (21.2)$$

و طیف مقادیر ویژه‌ی ماتریس  $\Gamma$  برابر با مجموعه‌ی داده‌شده‌ی  $L$  باشد، یعنی:

$$\Omega(\Gamma) = L. \quad (22.2)$$

در این مسئله فرض می‌شود که مجموعه  $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  مستقل خطی و  $L$  تحت اعداد مختلط بسته است، یعنی:

$$\lambda \in L \iff \bar{\lambda} \in L. \quad (23.2)$$

به‌وسیله قضیه زیر یک مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی به یک مسئله تخصیص مقادیر ویژه تبدیل می‌شود.

**قضیه ۱.۳.۲.** (قضیه وجود) فرض کنید  $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p]$ ،  $Y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_p]$  و  $X$  ماتریس رتبه کامل باشد، آن‌گاه مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی برای هر  $L$  قابل حل است اگر ماتریس  $Y - sX$  برای  $s \in \Omega(YX^\dagger)$  رتبه کامل باشد که  $X^\dagger$  وارون مور-پنروز  $X$  است.

برهان. با استفاده از فرضیات مسئله و معادله (۲۱.۲) داریم:

$$\Gamma X = Y. \quad (24.2)$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$\Gamma = YX^\dagger + W, \quad (25.2)$$

که  $W$  ماتریس دلخواه  $n \times n$  و  $WX = 0$ . برای ساخت  $W$  ابتدا تجزیه  $QR$  را برای  $X$  به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$X = [Q_1 \ Q_2] \begin{bmatrix} R' \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (26.2)$$

که  $[Q_1 \ Q_2]$  ماتریسی متعامد و  $R'_{p \times p}$  ماتریسی وارون پذیر است. اگر تعریف کنیم  $W = ZQ_2^T$  که  $Z$  ماتریسی  $n \times (n-p)$  خواهد بود، می‌توان (۲۵.۲) را به صورت

$$\Gamma = YX^\dagger + ZQ_2^T, \quad (27.2)$$

نوشت. حال اگر ثابت کنیم زوج ماتریس‌های  $Q_1^T$  و  $YX^\dagger$  به‌طور کامل مشاهده‌پذیر هستند، بنابه قضیه ۹.۳.۱، ماتریس  $K = Z$  موجود است به‌طوری‌که

$$\Omega(YX^\dagger + ZQ_1^T) = \Omega(\Gamma) = L, \quad (28.2)$$

و در نتیجه ماتریس  $\Gamma$  پیدا شده و مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی حل می‌شود. توجه کنید که رتبه ماتریس مشاهده‌پذیری

$$\begin{bmatrix} YX^\dagger - sI_n \\ Q_1^T \end{bmatrix}, \quad (29.2)$$

همان رتبه ماتریس

$$\begin{bmatrix} Y - sX & * \\ \circ & I_{n-p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} YX^\dagger - sI_n \\ Q_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Q_2 \end{bmatrix}, \quad (30.2)$$

است. حال چون  $\begin{bmatrix} X & Q_2 \end{bmatrix}$  طبق فرضیات قضیه رتبه کامل است، پس اگر  $Y - sX$  رتبه کامل باشد آن‌گاه زوج ماتریس‌های  $Q_1^T$  و  $YX^\dagger$  به‌طور کامل مشاهده‌پذیر هستند و در نتیجه مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی قابل حل است.  $\square$

روش‌های متعددی برای محاسبه  $Z$  وجود دارد. کاوسکی<sup>۴</sup>، نیکلز<sup>۵</sup> و فن دارن<sup>۶</sup>، مسئله تخصیص مقادیر ویژه را معرفی [۶۵] و روشی پایدار برای محاسبه  $Z$  ارائه کردند. بعد از آن بایرز<sup>۷</sup> و همکارانش [۷] این روش را با ارائه الگوریتمی دقیق‌تر و اقتصادی‌تر ارتقا بخشیدند. لی<sup>۸</sup> و چو<sup>۹</sup> نیز الگوریتمی ارتقایافته برای مسئله تخصیص مقادیر ویژه با پس‌خورد خروجی ارائه دادند [۷۲].

در قضیه قبلی، ابتدا مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی به یک مسئله تخصیص مقادیر ویژه تبدیل شده و سپس یک شرط برای حل‌پذیر بودن مسئله مقدار ویژه معکوس بیان کردیم. قابل توجه است که مسئله تخصیص مقادیر ویژه نیز می‌تواند به مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی تبدیل شود.

فرض کنید زوج ماتریس‌های  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  و  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  به‌طور کامل کنترل‌پذیر و  $B$  رتبه کامل باشد. با تجزیه  $QR$  برای ماتریس  $B$  به‌صورت

$$B = \begin{bmatrix} U_0 & U_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ \circ \end{bmatrix}, \quad (31.2)$$

<sup>۴</sup>Kaustsky

<sup>۵</sup>Nichols

<sup>۶</sup>Van Dooren

<sup>۷</sup>Byers

<sup>۸</sup>Li

<sup>۹</sup>Chu

که در آن  $[U_0 \ U_1]$  ماتریس‌هایی متعامد،  $R$  ماتریسی بالامتثلی و نامنفرد و  $U_1^T$  بردار پایه فضای پوچ ماتریس  $B^T$  است.

چون  $(B, A)$  به‌طور کامل کنترل‌پذیر فرض شده و  $[B \ U_1]$  رتبه کامل است، پس از

$$\begin{bmatrix} * & A^T U_1 - s U_1 \\ I_m & \circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T - s I_n \\ B^T \end{bmatrix} [B \ U_1], \quad (32.2)$$

داریم  $A^T U_1 - s U_1$  نیز رتبه کامل است. بنابر قضیه ۱.۳.۲ مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی برای ماتریس  $A^T U_1$ ، ماتریس رتبه کامل  $U_1$  و مقدار ویژه  $s \in \Omega(A^T U_1 U_1^T) = \Omega(A^T)$  قابل حل است. یعنی ماتریس  $\Gamma$  موجود است به‌طوری‌که

$$\Gamma U_1 = A^T U_1, \quad \Omega(\Gamma) = L. \quad (33.2)$$

در نتیجه با قرار دادن  $\Gamma = A + BK$  که در آن  $A$  و  $B$  به‌طور کامل کنترل‌پذیر هستند، ماتریس پس‌خورد حالت برای سیستم حلقه بسته به‌صورت

$$K = B^\dagger (\Gamma - A), \quad (34.2)$$

به‌دست می‌آید که در آن  $B^\dagger$  معکوس مور-پنروز ماتریس  $B$  است. محاسبات مستقیم زیر نشان می‌دهد که  $K$  همان ماتریس مورد نیاز است.

$$\begin{aligned} A + BK &= A + BB^\dagger (\Gamma - A) \\ &= A + U_0 U_0^T (\Gamma - A) \\ &= A + \Gamma - A \\ &= \Gamma, \end{aligned} \quad (35.2)$$

که در آن  $U_0 U_0^T = I$  و رابطه  $B = U_0 R$ ،  $B^\dagger = R^{-1} U_0^T$  برقرار است. همچنین، فرض کنید زوج ماتریس‌های  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  و  $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$  به‌طور کامل مشاهده‌پذیر و  $C$  رتبه کامل باشد. با تجزیه  $QR$  برای ماتریس  $C$  به‌صورت

$$C = \begin{bmatrix} S & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0^T \\ V_1^T \end{bmatrix}, \quad (36.2)$$

$V_1$  نتیجه می‌شود که ستون‌های آن، مؤلفه متعامد بر زیرفضای بسط داده‌شده با سطرهای  $C$  است. همچنین داریم  $C^\dagger = V_0 S^{-1}$ . چون زوج  $(C, A)$  به‌طور کامل مشاهده‌پذیر فرض شده و  $[C^\dagger \ V_1]$  رتبه کامل است، پس ماتریس

$$\begin{bmatrix} * & A V_1 - s V_1 \\ I_1 & \circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - s I_n \\ C \end{bmatrix} [C^\dagger \ V_1], \quad (37.2)$$

نیز رتبه کامل است. بنابراین ماتریس  $A V_1 - s V_1$  نیز رتبه کامل است. با استفاده از قضیه ۱.۳.۲، ماتریس  $\Gamma$  وجود دارد که

$$\Gamma V_1 = A V_1, \quad \Omega(\Gamma) = L. \quad (38.2)$$

در نتیجه ماتریس  $K$  با معادله

$$K = (\Gamma - A)C^\dagger, \quad (39.2)$$

به دست می‌آید. محاسبات مستقیم زیر نشان می‌دهد که  $K$  همان ماتریس مورد نیاز است.

$$\begin{aligned} A + KC &= A + (\Gamma - A)C^\dagger C \\ &= A + (\Gamma - A)V_0 V_0^T \\ &= A + (\Gamma - A)(I_n - V_1 V_1^T) \\ &= \Gamma - (\Gamma - A)V_1 V_1^T \\ &= \Gamma. \end{aligned} \quad (40.2)$$

در بخش بعدی، ابتدا مسئله تخصیص مقادیر ویژه با پس خورد خروجی و مسئله‌ی مقدار ویژه معکوس ماتریسی برای چهار مجموعه مستقل خطی را تعریف می‌کنیم سپس به بیان روش ارائه شده در این بخش می‌پردازیم.

## ۲.۳.۲ حل مسئله تخصیص مقادیر ویژه با پس خورد خروجی با استفاده از مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی

**تعریف ۲.۳.۲.** (مسئله تخصیص مقادیر ویژه با پس خورد خروجی) سیستم کنترل پذیر مستقل از زمان با پس خورد خروجی گسسته-زمانی (پیوسته-زمانی) به صورت

$$x_{i+1} = Ax_i + Bu_i, \quad (\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),) \quad (41.2)$$

$$y_i = Cx_i, \quad (y(t) = Cx(t),) \quad (42.2)$$

را در نظر بگیرید که  $x_i(x(t))$  بردار حالت،  $u_i(u(t))$  بردار ورودی،  $y_i(y(t))$  بردار خروجی،  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ،  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ،  $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$  و  $1 \leq m \leq n$ . هدف در این مسئله، یافتن ماتریس پس خورد خروجی  $K$  است به طوری که سیستم حلقه بسته

$$x_{i+1} = (A + BKC)x_i, \quad (\dot{x}(t) = (A + BKC)x(t),) \quad (43.2)$$

دارای مقادیر ویژه از پیش تعیین شده  $L = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  باشد.

**تعریف ۳.۳.۲.** (مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی برای چهار مجموعه از بردارها) چهار مجموعه مستقل خطی از بردارهای  $n$  بعدی حقیقی به صورت

$$\{x_1, x_2, \dots, x_p\}, \quad \{y_1, y_2, \dots, y_p\}, \quad \{x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{p+q}\}, \quad \{y_{p+1}, y_{p+2}, \dots, y_{p+q}\},$$

با  $p + q \leq n$  و مجموعه‌ای از اعداد مختلط  $L = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  را در نظر بگیرید. مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی، یافتن ماتریس حقیقی  $\Gamma_{n \times n}$  است به طوری که

$$\Gamma x_i = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (44.2)$$

$$\Gamma^T x_j = y_j, \quad j = p+1, \dots, p+q, \quad (45.2)$$

طیف مقادیر ویژه ماتریس  $\Gamma$  برابر با مجموعه داده شده  $L$  باشد و مجموعه  $L$  تحت اعداد مختلط بسته باشد.

فرض کنید

$$X_r = [x_1, x_2, \dots, x_p], \quad X_l = [x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{p+q}],$$

$$Y_r = [y_1, y_2, \dots, y_p], \quad Y_l = [y_{p+1}, y_{p+2}, \dots, y_{p+q}].$$

بدیهی است که اگر ماتریس  $\Gamma$  وجود داشته باشد، آن‌گاه شرط سازگاری

$$X_l^T Y_r = Y_l^T X_r, \quad (46.2)$$

باید برقرار باشد.

قضیه زیر شرط لازم و کافی برای وجود ماتریس  $\Gamma$  را ارائه می‌دهد [۷۵].

**قضیه ۲.۳.۲.** اگر شرط سازگاری، یعنی معادله (۴۶.۲)، برقرار باشد، آن‌گاه شرط لازم و کافی برای وجود ماتریس  $\Gamma$  این است که بردارهای  $u_i \in S_u^i$  و  $v_i \in S_v^i$  موجود باشند به طوری که

$$u_i^T v_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (47.2)$$

که  $S_u^i$  و  $S_v^i$  به ترتیب فضاهای پوچ  $(\lambda_i X_l^T - Y_l^T)$  و  $(\lambda_i X_r^T - Y_r^T)$  هستند. اگر چنین  $u_i$  موجود باشد، آن‌گاه می‌توان  $\Gamma$  را با استفاده از معادله

$$\Gamma = T \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} T^{-1}, \quad (48.2)$$

به دست آورد که  $T = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ .

اگر بردارهای پایه  $S_u^i$  و  $S_v^i$  را به ترتیب با  $S_u^i$  و  $S_v^i$  نشان دهیم، آن‌گاه می‌توان بردارهای  $u_i$  و  $v_i$  را به شکل

$$u_i = S_u^i x_i, \quad v_i = S_v^i y_i, \quad (49.2)$$

به دست آورد که  $x_i$  و  $y_i$  به ترتیب بردارهای ستونی با همان ابعاد فضاهای  $S_u^i$  و  $S_v^i$  می‌باشند. با جایگذاری (۴۹.۲) در (۴۷.۲) داریم:

$$x_i^T (S_u^i)^T S_v^j y_j = \delta_{i,j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (50.2)$$

حال مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی تبدیل به سیستمی با  $n^2$  معادله خطی شده است. چون ابعاد  $S_u^i$  و  $S_v^i$  به ترتیب بزرگتر مساوی  $n-p$  و  $n-q$  هستند، پس تعداد مجهولات در معادله (۵۰.۲) بزرگتر مساوی  $n(n-p) + n(n-q) = 2n^2 - n(p+q)$  و چون داریم  $p+q \leq n$ ، پس تعداد مجهولات بزرگتر مساوی  $n^2$  خواهد بود. بنابراین معادله (۵۰.۲) دارای جواب خواهد بود [۲۴].

حال نشان می‌دهیم که مسئله تخصیص مقادیر ویژه با پس خورد خروجی می‌تواند به مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی تبدیل شود.

فرض کنید  $U_1$  و  $V_1$  به ترتیب ماتریس‌های به دست آمده از بردارهای پایه‌ی فضای پوچ  $B^T$  و  $C$  باشند، آن‌گاه داریم:

$$\Gamma_o V_1 = (A + BK_o C) V_1 = A V_1, \quad (51.2)$$

$$U_1^T \Gamma_o = U_1^T (A + BK_o C) = U_1^T A. \quad (52.2)$$

با در نظر گرفتن  $Y_r = A V_1$ ,  $Y_l = A^T U_1$ ,  $X_r = V_1$ ,  $X_l = U_1$  داشتن مجموعه  $L$ ، مسئله تخصیص مقادیر ویژه با پس خورد خروجی تبدیل به مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی خواهد شد که هدف در آن یافتن ماتریس  $\Gamma_o$  است به طوری که دارای مقادیر ویژه  $L = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  باشد و

$$\Gamma_o V_1 = A V_1, \quad \Gamma_o^T U_1 = A^T U_1. \quad (53.2)$$

واضح است که مسئله در شرط سازگاری صدق می‌کند:

$$X_l^T Y_r = U_1^T \Gamma_o V_1 = Y_l^T X_r.$$

ماتریس‌های  $U_1$  و  $V_1$  را می‌توان با تجزیه‌های  $QR$  از ماتریس‌های  $B$  و  $C$  به شکل

$$B = \begin{bmatrix} U_o & U_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ o \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} S & o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_o^T \\ V_1^T \end{bmatrix}, \quad (54.2)$$

به دست آورد که  $\begin{bmatrix} U_o & U_1 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} V_o & V_1 \end{bmatrix}$  ماتریس‌هایی متعامد هستند. اگر چنین ماتریس  $\Gamma_o$  ای وجود داشته باشد آن‌گاه ماتریس  $K_o$  را می‌توان با معادله

$$K_o = B^\dagger (\Gamma_o - A) C^\dagger, \quad (55.2)$$

به دست آورد که  $B^\dagger$  و  $C^\dagger$  به ترتیب وارون‌های مور-پنروز  $B$  و  $C$  هستند. با در نظر گرفتن  $B^\dagger = R^{-1} U_o^T$  و  $C^\dagger = V_o S^{-1}$  می‌توان نشان داد که همان ماتریس مورد نظر است [۲۵].

یعنی،

$$\begin{aligned} A + BK_o C &= A + B B^\dagger (\Gamma_o - A) C^\dagger C \\ &= A + U_o U_o^T (\Gamma_o - A) V_o V_o^T \\ &= A + (I - U_1 U_1^T) (\Gamma_o - A) (I - V_1 V_1^T) \\ &= \Gamma_o. \end{aligned}$$

### ۳.۳.۲ روش تکراری

همان‌طور که در بخش ۲.۳.۲ بحث شد، جواب‌های مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی یا تخصیص مقادیر ویژه با پس خورد خروجی وابسته به جواب‌های سیستم معادلات خطی

$$x_i^T (S_u^i)^T S_v^j y_j = \delta_{i,j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (56.2)$$

$$x_i^T S_{i,j} y_j = \delta_{i,j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (57.2)$$

خواهد بود که  $S_{i,j} = (S_u^i)^T S_v^j$ . روش تکراری برای حل سیستم فوق به صورت زیر است. در ابتدا، مقادیر ابتدایی تصادفی را برای تمام  $y_j$  ها در نظر می‌گیریم. سپس، سیستم فوق تبدیل به  $n$  سیستم با معادلات خطی

$$x_i^T [S_{i,1} y_1, S_{i,2} y_2, \dots, S_{i,n} y_n] = e_i^T \quad \text{یا} \quad x_i^T M_i = e_i^T,$$

می‌شود که  $e_i$  ستون  $i$  ام از ماتریس همانی  $n \times n$  است. هرچند این معادلات ممکن است جواب نداشته باشند ولی همیشه می‌توان بهترین تقریب را با استفاده از وارون مور-پنروز به دست آورد [۲۵]. پس:

$$x_i^T = e_i M_i^\dagger.$$

اگر  $x_i$  با  $y_j$  فرض شده جوابی از معادله (57.2) باشد، فرآیند را متوقف می‌کنیم. در غیر این صورت  $x_i$  به دست آمده به وسیله‌ی مقادیر تقریبی را در (57.2) قرار می‌دهیم. آن‌گاه  $n$  سیستم با معادلات خطی با  $y_j$  های مجهول به صورت

$$[x_1^T S_{1,j}, x_2^T S_{2,j}, \dots, x_n^T S_{n,j}] y_j = e_j \quad \text{یا} \quad N_j y_j = e_j,$$

نتیجه می‌شود. به طور مشابه می‌توان بهترین تقریب برای  $y_j$  ها را با معادله

$$y_j = N_j^\dagger e_j,$$

به دست آورد.

این فرآیند را تا جایی ادامه می‌دهیم که خطای

$$\left( \sum_{i,j} (x_i^T S_{i,j} y_j - \delta_{i,j})^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

کمتر از خطای مطلوب و مورد نظر باشد.

در تبدیل مسئله تخصیص مقادیر ویژه با پس‌خورد خروجی به مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی، فضاهاى پوچ  $B^T$  و  $C$  نقش مهمی خواهند داشت. دلیل اول این است که مقدار ماتریس  $K_o$  مهم نیست زیرا در معادلات  $\Gamma_o V_1 = A V_1$  و  $\Gamma_o^T U_1 = A^T U_1$  حذف می‌شود. دلیل دیگر این است که اگر یک بردار ویژه از  $A$  در یکی از این فضاها باشد، آن‌گاه مقدار ویژه متناظر با این بردار ویژه نمی‌تواند با کنترل پس‌خورد تغییر کند. برای مثال اگر  $Av = \mu v$  و  $v \in \text{null}(C)$  آن‌گاه

$$\Gamma_o v = Av + BK_o C v = Av = \mu v.$$

بنابراین اگر  $\mu$  دارای قسمت حقیقی مثبت باشد این حالت برقرار نخواهد بود. به نتیجه زیر توجه کنید.

**قضیه ۳.۳.۲.** سیستم (۴۱.۲) و (۴۲.۲) به طور کامل کنترل پذیر است اگر و تنها اگر هیچ بردار ویژه سمت چپ ناصفری از  $A$  وجود نداشته باشد که در فضای پوچ  $B^T$  باشد. به طور مشابه،

سیستم به‌طور کامل مشاهده‌پذیر است اگر و تنها اگر هیچ بردار ویژه سمت راست ناصفری از  $A$  وجود نداشته باشد که در فضای پوچ  $C$  باشد.

برهان. اگر بردار ناصفر  $U$  وجود داشته باشد به‌طوری‌که  $U^T A = \lambda U^T$  و  $U^T B = 0$ ، آن‌گاه

$$\begin{aligned} U^T [B, AB, \dots, A^{n-1} B] &= \\ [U^T B, \lambda U^T B, \dots, \lambda^{n-1} U^T B] &= 0. \end{aligned} \quad (58.2)$$

بنابراین، رتبه ماتریس  $[B, AB, \dots, A^{n-1} B]$  کمتر از  $n$  خواهد بود و سیستم به‌طور کامل کنترل‌پذیر نخواهد بود.

به‌طور عکس اگر سیستم به‌طور کامل کنترل‌پذیر نباشد، آن‌گاه می‌توان بردار ناصفری را یافت به‌طوری‌که

$$U^T [B, AB, \dots, A^{n-1} B] = [U^T B, U^T AB, \dots, U^T A^{n-1} B] = 0.$$

پس:

$$(A^T U)^T [B, AB, \dots, A^{n-1} B] = [U^T AB, U^T A^2 B, \dots, U^T A^n B] = 0.$$

با توجه به قضیه کیلی همیلتون داریم [۲۹]:

$$A^n = a_1 A^{n-1} + \dots + a_n I,$$

بنابراین  $U^T A^n B = 0$ . پس  $A^T U$  نیز در این زیرفضا قرار دارد. بنابراین باید بردار ویژه ناصفر  $U$  از  $A^T$  یا بردار ویژه چپی از  $A$  در زیرفضایی با  $U^T B = 0$  وجود داشته باشد.

اثبات قسمت دوم قضیه مشابه با قسمت اول خواهد بود. □

## ۴.۳.۲ الگوریتم محاسبه پس‌خورد خروجی با روش مقدار ویژه معکوس ماتریسی

با انجام این الگوریتم مسئله‌ای با معادلات مرتبه دوم به مسئله‌ای با معادلات خطی تبدیل می‌شود. تعداد مجهولات به‌طور تقریبی برابر با  $n^2$  تا است درحالی‌که با انجام این الگوریتم تنها نیاز است  $n$  سیستم خطی  $n \times n$  در هر مرحله حل شود. بنابراین مقدار کلی محاسبات نسبت به روش نیوتن به‌صورت قابل توجهی کاهش خواهد یافت و فضای حافظه کمتری مورد نیاز است زیرا در روش نیوتن، در هر مرحله از تکرار یک ماتریس ژاکوبین  $n^2 \times n^2$  و سیستم خطی  $n^2 \times n^2$  از معادلات را باید محاسبه و حل نمود.

- (ورودی داده‌ها): ماتریس‌های  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و مقادیر ویژه  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ .
- (آماده‌سازی): فضاهای پوچ  $X_l$  و  $X_r$  را به‌ترتیب برای ماتریس‌های  $B^T$  و  $C$  به‌دست آورید.  $Y_l = A^T X_l$  و  $Y_r = A X_r$  را محاسبه کنید. فضاهای پوچ را برای  $(\lambda_i X_l - Y_l)$  و  $(\lambda_i X_r - Y_r)$  بیابید.



• (فرآیند تکرار): مقادیر تصادفی را برای  $y_j$  در نظر بگیرید و فرآیند موجود در روش تکراری را شروع کنید. فرآیند را تا وقتی به خطای مورد قبول برسید ادامه دهید.

• (ماتریس پس‌خورد خروجی): با تشکیل ماتریس  $T = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ ، ماتریس‌های

$$\Gamma_o = T \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} T^{-1}, \quad K_o = B^\dagger (\Gamma_o - A) C^\dagger,$$

را به‌دست آورید.

مثال ۱.۳.۲. ماتریس‌های  $A$  و  $B$  را همانند مثال ۱.۲.۲، ماتریس  $C$  را به‌صورت

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix},$$

و مقادیر ویژه را به‌صورت  $\{-1 \pm i, -2\}$  در نظر بگیرید. نتایج زیر برای محاسبه ماتریس پس‌خورد خروجی به‌دست می‌آیند:

$$X_l = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_r = \begin{bmatrix} 0.75 \\ -0.22 \\ 0.61 \end{bmatrix}, \quad Y_l = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad Y_r = \begin{bmatrix} -0.22 \\ -0.92 \\ 0.57 \end{bmatrix},$$

$$T = 10^{-15} \times \begin{bmatrix} 0.01 - 0.1i & -0.03 & 0.06 - 0.8i \\ 0.13i & 0.11 & -0.09 + 0.09i \\ -0.01i & 0 & -0.01i \end{bmatrix}, \quad K_o = \begin{bmatrix} -8.27 & 4.66 \\ 6.99 & -4.35 \end{bmatrix},$$

$$\Omega(\Gamma_o) = \{-1 \pm i, -2\}.$$

## ۴.۲ تخصیص مقادیر ویژه جزئی با استفاده از بردارهای ویژه در سیستم‌های استاندارد

مجموعه

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \quad (59.2)$$

از اعداد مختلط که تحت مزدوج مختلط بسته هستند، مفروض است. مسئله تخصیص مقادیر ویژه برای سیستم کنترل خطی (۱۵.۱) یافتن ماتریس حقیقی  $K$ ، ماتریس پس‌خورد حالت، است به‌طوری که مجموعه مقادیر ویژه ماتریس  $A + BK$  برابر (۵۹.۲) باشد.

زوج  $(B, A)$  را در نظر بگیرید که  $\Omega(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p; \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$  و  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  و  $\{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$  به‌ترتیب مقادیر ویژه نامطلوب و مطلوب برای ماتریس  $A$  باشند و مجموعه  $\{\mu_1, \dots, \mu_p\}$  تحت زوج مختلط بسته باشد. مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی عبارت است از یافتن ماتریس پس‌خورد  $K_{par}$  به‌طوری که  $\Omega(A + BK_{par}) = \{\mu_1, \dots, \mu_p; \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$

در زیربخش ۱.۴.۲ شرایط لازم و کافی جدیدی برای وجود و یکتایی جواب مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی بیان و اثبات شده است. همچنین روشی برپایه اثبات قضیه اصلی وجود و

یکتابی تخصیص جزئی برای روش تخصیص مقادیر ویژه جزئی در بخش ۲.۴.۲ ارائه می‌شود. برای تمام مطالب آورده‌شده در بخش‌های ۱.۴.۲ و ۲.۴.۲ از [۱۶] استفاده شده است.

## ۱.۴.۲ وجود و یکتایی جواب برای مسئله تخصیص مقادیر ویژه

در این بخش، یک نتیجه معروف برای وجود و یکتایی جواب مسئله تخصیص مقادیر ویژه بیان می‌شود.

**قضیه ۱.۴.۲.** [۱۵] (وجود و یکتایی برای مسئله تخصیص مقادیر ویژه) مسئله تخصیص مقادیر ویژه با هر مجموعه دلخواه (۵۹.۲) برای زوج  $(B, A)$  حل پذیر است اگر و تنها اگر  $(B, A)$  به طور کامل کنترل پذیر باشد. جواب یکتاست اگر و تنها اگر سیستم تک‌ورودی باشد، یعنی  $B$  یک بردار باشد. در مورد چندورودی، تعداد نامتناهی جواب وجود دارد اگر یک جواب وجود داشته باشد.

حال نتیجه‌ای مشابه با قضیه ۱.۴.۲ را برای وجود و یکتایی مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی اثبات می‌شود.

**قضیه ۲.۴.۲.** (وجود و یکتایی برای مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی) فرض کنید  $\Lambda = A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  از  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ماتریسی قطری شامل مقادیر ویژه  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  و  $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$  باشد، مجموعه‌های  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  و  $\{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$  مجزا باشند، مقادیر ویژه  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  به  $\{\mu_1, \dots, \mu_p\}$  تغییر کند و بقیه مقادیر ویژه بدون تغییر باقی بمانند. آن‌گاه مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی با هر انتخاب از مقادیر ویژه حلقه بسته  $\{\mu_1, \dots, \mu_p\}$  برای زوج  $(B, A)$  حل پذیر است اگر و تنها اگر زوج  $(B, A)$  نسبت به مجموعه  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  به طور جزئی کنترل پذیر باشد. جواب یکتاست اگر و تنها اگر سیستم تک‌ورودی و به طور کامل کنترل پذیر باشد. در مورد سیستم‌های چندورودی و سیستم‌های تک‌ورودی که به طور کامل کنترل پذیر نیستند، تعداد نامتناهی جواب وجود دارد اگر یک جواب موجود باشد.

برهان. ابتدا قسمت لزوم را اثبات می‌کنیم. فرض کنید زوج  $(B, A)$  نسبت به تعدادی  $\lambda_j, 1 \leq j \leq p$  کنترل پذیر نباشد. پس بردار  $y \neq 0$  وجود دارد به طوری که  $y^H(A - \lambda_j I) = 0$  و  $y^H B = 0$ . این یعنی برای هر  $K_{par}$ ،  $y^H(A + BK_{par} - \lambda_j I) = 0$  که نتیجه می‌دهد برای هر  $K_{par}$  یک مقدار ویژه  $A + BK_{par}$  است و بنابراین  $\lambda_j$  نمی‌تواند دوباره تخصیص داده شود.

حال قسمت کفایت را اثبات می‌کنیم.  $\Lambda_1 = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  و  $\Lambda_2 = \text{diag}\{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$  را در نظر بگیرید. باید ثابت شود که ماتریس پس‌خورد  $K_{par}$  وجود دارد به طوری که مقادیر ویژه را به طور دلخواه در  $\Lambda_1$  تخصیص دهد و بقیه مقادیر ویژه ثابت بمانند. فرض کنید  $X = (x_1, \dots, x_n)$  و  $Y = (y_1, \dots, y_n)$ ، به ترتیب ماتریس‌های بردار ویژه راست و چپ  $A$  باشند و  $Y_1 = (y_1, \dots, y_p)$ . چون  $Y^H X = I$  و  $Y^H A X = \text{diag}\{\Lambda_1, \Lambda_2\}$ ، پس کنترل پذیری جزئی زوج ماتریس  $(B, A)$  نسبت به مقادیر ویژه در  $\Lambda_1$ ، کنترل پذیری جزئی زوج  $(Y^H B, \text{diag}\{\Lambda_1, \Lambda_2\})$

نسبت به همان مقادیر ویژه را ایجاب می‌کند. بنابراین، زوج  $(Y^H B, \Lambda_1)$  به‌طور کامل کنترل‌پذیر است زیرا  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} \cap \{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\} = \emptyset$ .

بنا به قضیه ۱.۴.۲، ماتریس پس‌خورد  $K$  وجود دارد به‌طوری‌که ماتریس حلقه بسته  $\Lambda_1 + Y^H B K$  دارای مقادیر ویژه مطلوب  $\mu_1, \dots, \mu_p$  باشد.

$$K_{par} = K Y_1^H, \quad (۶۰.۲)$$

را تعریف می‌کنیم. آن‌گاه مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته به‌طور دقیق همان مقادیر ویژه مورد نیاز است که به طریق زیر قابل مشاهده است:

$$\begin{aligned} \{\mu_1, \dots, \mu_p; \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\} &= \Omega(\text{diag}\{\Lambda_1, \Lambda_2\} + Y^H B(K, \circ)) = \\ \Omega(Y^H(A + B((K, \circ)Y^H))X) &= \Omega(A + B(KY_1^H, \circ)). \end{aligned} \quad (۶۱.۲)$$

یکتابودن جواب در سیستم‌های تک‌ورودی که به‌طور کامل کنترل‌پذیر باشند و وجود تعداد نامتناهی جواب در مورد چندورودی‌ها به‌طور مستقیم از قضیه ۱.۴.۲ نتیجه می‌شود.

برای کامل شدن اثبات باید نشان دهیم وقتی  $B$  یک بردار باشد (مورد تک‌ورودی)، تعداد نامتناهی جواب برای مسئله تخصیص مقادیر ویژه ممکن است و یک مقدار ویژه کنترل‌پذیر  $\lambda_k, k > p$  وجود دارد (که متناظر با  $k$  امین بردار ویژه راست  $y_k$  است به‌طوری‌که  $y_k^H A - \lambda_k y_k^H = 0$  و  $y_k^H B = 0$ ).

فرض کنید  $K_{par}$  جواب مسئله تخصیص مقادیر ویژه باشد. بردارهای ویژه چپ و راست ماتریس حلقه بسته  $A_c = A + B K_{par}$  را با  $X_c$  و  $Y_c$  نمایش می‌دهیم. واضح است که  $y_k^H A_c = \lambda_k y_k^H$  و بنابراین  $y_k^H(A + B K_{par}) = \lambda_k y_k^H$  است. فرض کنید  $K_\beta = \beta y_k^H$  که در آن  $\beta$  اسکالری دلخواه است. مشابه با آنچه در (۶۱.۲) نشان داده شد می‌توان اثبات کرد که مقادیر ویژه  $\mu_1, \dots, \mu_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$  از ماتریس  $A_c$  با بکار بردن پس‌خورد  $K_\beta$  بدون تغییر باقی می‌مانند. علاوه بر آن، مقادیر ویژه  $\lambda_k$  از  $A_c$  نیز با بکارگیری پس‌خورد  $K_\beta$  تغییری نمی‌کند چون طبق قسمت لزوم این قضیه زوج  $(B, A)$  نسبت به مقدار ویژه  $\lambda_k$  کنترل‌پذیر نیست. بنابراین

$$\Omega(A + B K_{par}) = \Omega(A_c) = \Omega(A_c + B K_\beta) = \Omega(A + B(K_{par} + \beta y_k^H)),$$

□ که اگر  $K_{par}$  یک جواب باشد آن‌گاه  $K_{par} + \beta y_k^H$  نیز برای هر مقدار دلخواه  $\beta$  جواب است.

## ۲.۴.۲ روش تخصیص مقادیر ویژه جزئی با استفاده از بردار ویژه

این روش با استفاده از برهان قضیه ۲.۴.۲ توضیح داده می‌شود. فرض کنید

$$\Omega(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p; \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}, \quad (۶۲.۲)$$

که  $p$  تعداد مقادیر ویژه نامطلوب از  $\Omega(A)$  برای زوج  $(B, A)$ ، مجموعه  $\{\mu_1, \dots, \mu_p\}$  تحت مزدوج مختلط بسته و  $\text{rank}(B) = m \leq p$  هدف یافتن ماتریس پس‌خورد حالت  $K_{par}$  است که

$$\Omega(A + B K_{par}) = \{\mu_1, \dots, \mu_p; \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}, \quad (۶۳.۲)$$

و مجموعه‌های  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  و  $\{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$  مجزا باشند. یعنی، ماتریس پس‌خورد حالت را طوری بیابیم که مقادیر ویژه  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  به مقادیر مناسب تغییر پیدا کند درحالی‌که مجموعه  $\{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$  بدون تغییر باقی بماند.

ابتدا بردار ویژه چپ ماتریس  $A$  را به صورت  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  به دست می‌آوریم. سپس، ستون‌های  $y_1, \dots, y_p$  از  $Y$  را که متناظر با مقادیر ویژه  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  هستند را در  $Y_1$  قرار می‌دهیم. بنابراین

$$Y_1 = (y_1, \dots, y_p) = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1p} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{np} \end{bmatrix}_{n \times p} \quad (64.2)$$

حال زوج  $(Y_1^H B, \Lambda_1)$  را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$Y_1^H B = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{21} & \dots & y_{n1} \\ y_{12} & y_{22} & \dots & y_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1p} & y_{2p} & \dots & y_{np} \end{bmatrix}_{p \times n} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m}, \quad (65.2)$$

$$\Lambda_1 = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \lambda_2 & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & \lambda_p \end{bmatrix}_{p \times p}.$$

در این مرحله، ماتریس پس‌خورد حالت  $K$  را برای زوج  $(Y_1^H B, \Lambda_1)$  با استفاده از روش‌های تخصیص مقادیر ویژه، چنان می‌یابیم که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته  $\Lambda_1 + Y_1^H B K$  برابر با  $\{\mu_1, \dots, \mu_p\}$  باشد، آن‌گاه کافی است ماتریس پس‌خورد حالت  $K_{par}$  برای زوج  $(B, A)$  را به صورت

$$K_{par} = K Y_1^H, \quad (66.2)$$

تعریف کنیم. بنابراین، داریم  $\Omega(A + B K_{par}) = \{\mu_1, \dots, \mu_p; \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$ .

مثال ۱.۴.۲. سیستم (۱۵.۱) را با ماتریس‌های مفروض

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 10 & 3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & -1 & 7 & 9 & 2 & -1 \\ 9 & -3 & 7 & 3 & 1 & 2 & 4 & -2 \\ 8 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & -3 & 1 & 3 & 2 & 6 & 0 & 1 \\ 1 & 17 & 0 & 3 & 9 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 & -1 & 0 & -15 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 7 \\ -2 & 5 \\ 13 & 7 \\ 0 & 7 \\ 3 & 1 \\ 8 & 5 \\ -11 & 1 \end{bmatrix},$$

در نظر بگیرید. تخصیص مقادیر ویژه جزئی را در صورت پایدار نبودن سیستم انجام دهید. داریم:

$$\Omega(A) = \{-14/3, -2/87 \pm 2/44i, -1/55 \pm 1/44i, 4/36, 12/73, 21/06\}.$$

با تخصیص مقادیر ویژه  $\{-1, -1, -1\}$  به جای مقادیر ویژه  $\{4/36, 12/73, 21/06\}$  و محاسبه زوج  $(Y_1^H B, \Lambda_1)$  به صورت

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 21/06 & 0 & 0 \\ 0 & 12/73 & 0 \\ 0 & 0 & 4/36 \end{bmatrix}, \quad Y_1^H B = \begin{bmatrix} -7/93 & -11/04 \\ 0/18 & -3/64 \\ -3/68 & 1/14 \end{bmatrix},$$

ماتریس‌های پس‌خورد حالت  $K$  و  $K_{par}$  به شکل زیر محاسبه می‌شوند.

$$K = \begin{bmatrix} 3/48 & -6/98 & -0/5 \\ 0/06 & 3/67 & 0/03 \end{bmatrix}, \quad \Omega(\Lambda_1 + Y_1^H B K) = \{-1, -1, -1\},$$

$$K_{par} = \begin{bmatrix} 1/17 & -4/17 & 3/71 & 1/29 & -1/91 & -2/15 & 0/53 & -0/29 \\ -1/64 & 1/63 & -2/56 & -1/12 & -0/1 & 0/49 & -0/62 & 0/15 \end{bmatrix},$$

$$\Omega(A + BK_{par}) = \{-14/3, -2/87 \pm 2/44i, -1/55 \pm 1/44i, -1, -1, -1\}.$$

## ۵.۲ تخصیص مقادیر ویژه جزئی با استفاده از روابط متعامد

### در سیستم‌های استاندارد

برای تمام مطالب آورده شده در بخش ۵.۲ از [۸۸] استفاده شده است.

در این بخش، مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی را برای

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (67.2)$$

با استفاده از روابط متعامد (۴.۱) حل می‌کنیم.

فرض کنید  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  یک ماتریس نامتقارن باشد، مسئله مقدار ویژه  $Ax_i = \lambda_i x_i, i = 1, 2, \dots, n$  را می‌توان به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$AX - X\Lambda = 0, \quad (68.2)$$

که  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{C}^{n \times n}, X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  و  $\lambda_i$  ها متمایز هستند. همچنین،  $p$  عدد مختلط  $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$  که تحت مزدوج مختلط بسته هستند،  $p \leq n$  و بردار  $b \in \mathbb{R}^n$  مفروض هستند، باید  $f_{par} \in \mathbb{R}^n$  را به گونه‌ای بیابیم که ماتریس  $(A + bf_{par}^T)$  دارای مجموعه مقادیر ویژه  $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p; \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$  باشد.

افزای  $X$  و  $Y$  که به ترتیب ماتریس‌های بردارهای ویژه راست و چپ  $n \times n$  و همچنین  $\Lambda$  که ماتریس بردار ویژه  $n \times n$  است را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1^H \\ Y_2^H \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \text{diag}\{\Lambda_1, \Lambda_2\},$$

که  $\Lambda_1 = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  و  $\Lambda_2 = \text{diag}\{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$ ،  $X_1 = (x_1, \dots, x_p)$ ،  $X_2 = (x_{p+1}, \dots, x_n)$ ،  $Y_1 = (y_1, \dots, y_p)$ ،  $Y_2 = (y_{p+1}, \dots, y_n)$

**قضیه ۱.۵.۲.** [۸۸] اگر  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} \cap \{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\} = \emptyset$  و بردار پس خورد  $f_{par}$  به صورت

$$f_{par}^T = -\beta Y_1^H A, \quad (69.2)$$

تعریف شود، آن گاه برای هر انتخاب  $\beta$ ،  $n-p$  مقدار ویژه آخر یعنی  $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_n$  از ماتریس  $(A + bf_{par}^T)$  همان مقادیر ویژه ماتریس  $A$  هستند.

## ۱.۵.۲ انتخاب $\beta$

با استفاده از قضیه ۱.۵.۲ برای حل مسئله تخصیص مقادیر ویژه جزئی، نیاز به انتخاب  $\beta$  داریم که در صورت امکان  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$  از ماتریس  $A$  را به  $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$  در  $(A + bf_{par}^T)$  حرکت دهد. اگر چنین  $\beta$  وجود داشته باشد، آن گاه ماتریس بردار ویژه  $Z \in \mathbb{C}^{n \times p}$  به صورت

$$Z = (z_1, z_2, \dots, z_p), \quad z_j \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, p,$$

و ماتریس  $D = \text{diag}\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$  وجود دارند به طوری که

$$(A + bf_{par}^T)Z - ZD = 0. \quad (70.2)$$

با جایگذاری (۶۹.۲) در (۷۰.۲) داریم:

$$AZ - b\beta Y_1^H AZ - ZD = 0.$$

پس

$$AZ - ZD = b\beta Y_1^H AZ = b\beta W^H = bc^H, \quad (71.2)$$

که  $c = W\beta^H$  و  $W^H = Y_1^H AZ$  برداری است که به انتخاب مقیاس برای بردار ویژه در  $Z$  وابسته است. برای محاسبه  $Z$ ، بردار  $c$  را به صورت  $c = (1, 1, \dots, 1)^T$  انتخاب می‌کنیم. آن گاه برای

معادله (۷۱.۲) داریم

$$AZ - ZD = b(1, 1, \dots, 1).$$

می‌توان هر بردار ویژه  $z_j$  را با معادلات

$$(A - \mu_j I)z_j = b, \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad (72.2)$$

حل کنیم.

بنابراین بردارهای ویژه  $Z$  را به دست می‌آوریم و ماتریس  $W$  را از  $W^H = Y_1^H A Z$  محاسبه می‌کنیم. سیستم خطی مرتبه دوم  $p \times p$ ,

$$W\beta^H = (1, 1, \dots, 1)^T,$$

را برای  $\beta^H$  حل می‌کنیم، پس می‌توان بردار  $f_{par}$  را تعیین نمود.

## ۲.۵.۲ محاسبه $\beta$

در قضیه بعدی با استفاده از تنها اطلاعات جزئی از مقادیر ویژه  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$  و بردارهای ویژه چپ متناظر با آن‌ها از ماتریس  $A$ ، یعنی  $\{y_1, \dots, y_p\}$ ، عبارت واضحی برای محاسبه  $\beta$  به دست می‌آوریم.

**قضیه ۲.۵.۲.** [۸۸] فرض کنید  $Ax_i = \lambda_i x_i, 1 \leq i \leq n$  به شکل (۶۸.۲) و  $f_{par}$  همان‌طور که در (۶۹.۲) آمده با مؤلفه‌های  $\beta_j$  از  $\beta$  به صورت

$$\beta_j = \frac{1}{b^T \bar{y}_j} \frac{\lambda_j - \mu_j}{\lambda_j} \prod_{i=1, i \neq j}^p \frac{\lambda_j - \mu_i}{\lambda_j - \lambda_i}, \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad (73.2)$$

انتخاب شده باشند، آن‌گاه ماتریس  $(A + b f_{par}^T)$  دارای مجموعه مقادیر ویژه  $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$  است و اولین  $p$  بردار آن می‌تواند به گونه‌ای انتخاب شوند که در  $(A - \mu_j I)z_j = b$  برقرار باشند.  $b, j = 1, 2, \dots, p$ .

در قضیه بعدی نشان می‌دهیم بردار پس‌خورد  $f_{par}$  برداری حقیقی است.

**قضیه ۳.۵.۲.** [۸۸] فرض کنید  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$  مجموعه‌ای از اعداد مختلط باشد که تحت مزدوج مختلط بسته هستند. همچنین بردارهای  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p\}$  و  $\{y_1, y_2, \dots, y_p\}$  را در نظر بگیرید به طوری که برای  $j = 1, 2, \dots, p, j \neq k$  و  $\bar{y}_k = y_j$  و  $\beta_k = \bar{\beta}_j$  هرگاه  $\bar{\lambda}_j = \lambda_k$ . آن‌گاه

۱. ماتریس نامنفرد  $T \in \mathbb{C}^{p \times p}$  وجود دارد به طوری که

$$T^{-1} = T^H, \quad \beta_R = \beta T^H, \quad Y_{\setminus R}^H = T Y_{\setminus R}^H, \quad (74.2)$$

که  $Y_{\setminus R}^H$  و  $\beta_R$  و  $Y_{\setminus R} = \{y_1, y_2, \dots, y_p\} \in \mathbb{C}^{n \times p}$ ،  $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p\} \in \mathbb{C}^{r \times p}$  حقیقی هستند.

۲. بردار پس‌خورد حقیقی  $f_{par}$  وجود دارد به طوری که

$$f_{par}^T = -\beta_R Y_{\setminus R}^H A. \quad (75.2)$$

### ۳.۵.۲ الگوریتم تخصیص مقادیر ویژه جزئی تک‌ورودی

- (ورودی داده‌ها): ماتریس ثابت نامتقارن حقیقی  $A$ ،  $n$  بردار  $b$  و ماتریس قطری  $D = \text{diag}\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$  که مقادیر ویژه  $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\}$  در آن تحت مزدوج مختلط بسته باشد.
- (فرضیات): اعداد  $\lambda_n, \dots, \lambda_1, \mu_p, \dots, \mu_1$  متمایز از هم و تحت مزدوج مختلط بسته و  $\lambda_n, \dots, \lambda_1$  مقادیر ویژه ماتریس  $A$  هستند.
- (خروجی): بردار پس‌خورد  $f_{par}$  به‌طوری‌که مجموعه مقادیر ویژه ماتریس  $(A + bf_{par}^T)$ ،  $\{\mu_1, \dots, \mu_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$  باشد که  $\lambda_n, \dots, \lambda_{p+1}$  مقدار ویژه آخر  $A$  هستند.
- (مرحله اول): مقدار ویژه اول  $\lambda_p, \dots, \lambda_1$  از ماتریس  $A$  که نیاز به تخصیص دوباره دارند و بردارهای ویژه چپ متناظر با آن‌ها، یعنی  $y_1, \dots, y_p$ ، را به‌دست آورید.
- (مرحله دوم): مقدار واضح برای  $\beta$  که مؤلفه‌های آن به‌صورت زیر باشند را محاسبه کنید.

$$\beta_j = \frac{1}{b^T \bar{y}_j} \frac{\lambda_j - \mu_j}{\lambda_j} \prod_{i=1, i \neq j}^p \frac{\lambda_j - \mu_i}{\lambda_j - \lambda_i}, \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

- (مرحله سوم): پس‌خورد  $f_{par}$  را به‌صورت  $f_{par}^T = -\beta Y_1^H A$  به‌دست آورید.

مثال ۱.۵.۲. ماتریس  $A_{8 \times 8}$  و بردار  $b$  که درایه‌های آن به‌طور تصادفی انتخاب شده‌اند را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 0/۸۲۱۴ & 0/۹۳۵۵ & 0/۱۳۸۹ & 0/۴۴۵۱ & 0/۸۳۸۱ & 0/۳۰۴۶ & 0/۳۷۸۴ & 0/۸۱۸۰ \\ 0/۴۴۴۷ & 0/۹۱۶۹ & 0/۲۰۲۸ & 0/۹۳۱۸ & 0/۰۱۹۶ & 0/۱۸۹۷ & 0/۸۶۰۰ & 0/۶۶۰۲ \\ 0/۶۱۵۴ & 0/۴۱۰۳ & 0/۱۹۸۷ & 0/۴۶۶۰ & 0/۶۸۱۳ & 0/۱۹۳۴ & 0/۸۵۳۷ & 0/۳۴۲۰ \\ 0/۷۹۱۹ & 0/۸۹۳۶ & 0/۶۰۳۸ & 0/۴۱۸۶ & 0/۳۷۹۵ & 0/۶۸۲۲ & 0/۵۹۳۶ & 0/۲۸۹۷ \\ 0/۹۲۱۸ & 0/۰۵۷۹ & 0/۲۷۲۲ & 0/۸۴۶۲ & 0/۸۳۱۳ & 0/۳۰۲۸ & 0/۴۹۶۶ & 0/۳۴۱۲ \\ 0/۷۳۸۲ & 0/۳۵۲۹ & 0/۱۹۸۸ & 0/۵۲۵۲ & 0/۵۰۲۸ & 0/۵۴۱۷ & 0/۸۹۹۸ & 0/۵۳۴۱ \\ 0/۱۷۶۳ & 0/۸۱۳۲ & 0/۰۱۵۳ & 0/۲۰۲۶ & 0/۷۰۹۵ & 0/۱۵۰۹ & 0/۸۲۱۶ & 0/۷۲۷۱ \\ 0/۴۰۵۷ & 0/۰۰۹۹ & 0/۷۴۶۸ & 0/۶۷۲۱ & 0/۴۲۸۹ & 0/۶۹۷۹ & 0/۶۴۴۹ & 0/۳۰۹۳ \end{bmatrix}$$



$$b = \begin{bmatrix} 0/9501 \\ 0/2311 \\ 0/6068 \\ 0/4860 \\ 0/8913 \\ 0/7621 \\ 0/4565 \\ 0/0185 \end{bmatrix}.$$

مقادیر ویژه ماتریس  $A$  در جدول زیر نشان داده شده است.

مقادیر ویژه $A$
$-0.2035 + 0.6192i$
$-0.2035 - 0.6192i$
$0.6823 + 0.2225i$
$0.6823 - 0.2225i$
۴.۱۶۳۳
۰.۳۳۲۳
۰.۰۸۶۲
$-0.6793$

به جای  $p = 2$  مقدار ویژه اول، یعنی  $\lambda_2, \lambda_1$ ، زوج مختلط  $-3 \pm i$  را تخصیص می‌دهیم. با استفاده از فرمول آشنای (۷۳.۲) داریم:

$$\beta = \begin{bmatrix} -40/0110 - 6/1360i & -40/0110 + 6/1360i \end{bmatrix}.$$

همچنین بردار پس‌خورد  $f_{par}$  با استفاده از (۶۹.۲) به صورت

$$f_{par} = \begin{bmatrix} 11/2789 \\ 8/8118 \\ -12/5617 \\ -20/7621 \\ 8/3749 \\ -2/4033 \\ 12/7117 \\ -4/1311 \end{bmatrix},$$

به دست می‌آید. همان‌طور که در قضیه ۲.۵.۲ ثابت شد، برداری حقیقی است. مقادیر ویژه ماتریس‌های  $A$  و  $(A + bf_{par}^T)$  در جدول زیر نشان داده شده است.

مقادیر ویژه $(A + bf_{par}^T)$	مقادیر ویژه $A$
$-۳.۰۰۰۰+۱.۰۰۰۰i$	$-۰.۲۰۳۵+۰.۶۱۹۲i$
$-۳.۰۰۰۰-۱.۰۰۰۰i$	$-۰.۲۰۳۵-۰.۶۱۹۲i$
$۰.۶۸۲۳+۰.۰۲۲۵i$	$۰.۶۸۲۳+۰.۰۲۲۵i$
$۰.۶۸۲۳-۰.۰۲۲۵i$	$۰.۶۸۲۳-۰.۰۲۲۵i$
۴.۱۶۳۳	۴.۱۶۳۳
۰.۳۳۲۳	۰.۳۳۲۳
۰.۰۸۶۲	۰.۰۸۶۲
$-۰.۶۷۹۳$	$-۰.۶۷۹۳$

# فصل ۳

## سیستم‌های توسیع‌یافته

### ۱.۳ مقدمه

سیستم‌های توسیع‌یافته<sup>۱</sup> یا سیستم‌های منفرد<sup>۲</sup>، سیستم‌های عمومی‌تر و مناسب‌تری نسبت به سیستم‌های استاندارد برای مدل‌سازی زمینه‌های مختلفی مانند شبکه‌های عصبی مصنوعی، مدارهای الکترونیکی، فرآیندهای شیمیایی، زیست‌شناسی، سیستم‌های چندبدنه مکانیکی و بسیاری از موارد دیگر است [۱۰، ۲۱، ۲۸، ۷۱، ۹۲، ۹۹]. نمونه‌ای از مقالات و کتاب‌ها در مورد سیستم‌های توسیع‌یافته را می‌توانید در مراجع [۲، ۳، ۴، ۸، ۱۰، ۱۸، ۱۹، ۲۳، ۳۰، ۳۳، ۳۹، ۵۱، ۵۲، ۹۶، ۹۷] بیابید.

تخصیص مقادیر ویژه با پس‌خوردهای حالت و خروجی به‌وسیله‌ی فهمی<sup>۳</sup> و اریل<sup>۴</sup> [۱۸]، گانتماشر<sup>۵</sup> [۲۳]، کاکزورک<sup>۶</sup> [۳۳] و کاکزورک و زاگالاک<sup>۷</sup> [۶۹] و مسئله سیستم‌های

---

<sup>۱</sup>descriptor

<sup>۲</sup>singular

<sup>۳</sup>Fahmy

<sup>۴</sup>O'reill

<sup>۵</sup>Gantmacher

<sup>۶</sup>Kaczorek

<sup>۷</sup>Zagalak

توسعه یافته مثبت پیوسته-زمانی با تأخیر توسط کاکزورک در [۳۹] به کار گرفته شد. محاسبات متعارف کاکزورک از زوج مدادی منظم<sup>۸</sup> به وسیله فن دارن<sup>۹</sup> در سال ۱۹۷۹ [۹۶] بررسی شد و شرط وابسته تأخیری برای رده سیستم‌های توسعه یافته با تأخیر که در بازه تغییر می‌کند توسط وانگ<sup>۱۰</sup> ارائه شد [۹۸]. سیستم‌های خطی توسعه یافته مثبت با استفاده از وارون درزین<sup>۱۱</sup> به وسیله برو<sup>۱۲</sup> و همکارانش [۳۳]، کمپبل<sup>۱۳</sup> و همکارانش [۹]، و همچنین کاکزورک [۳۰، ۵۲، ۵۳] معرفی و بررسی شده است. کاکزورک با استفاده از الگوریتم شوفل<sup>۱۴</sup>، مثبت بودن سیستم‌های توسعه یافته را در [۵۱] مورد مطالعه قرار داد. پایداری این سیستم‌ها توسط ورینک<sup>۱۵</sup> در [۹۷] بررسی شد. کاکزورک در مورد کنترل و می‌نیم سازی انرژی در سیستم‌های توسعه یافته نیز بحث کرده است [۶۹، ۹۶]. سیستم‌های غیرخطی توسعه یافته پیوسته-زمانی و گسسته-زمانی با پس‌خوردهای حالت در [۵۶] و مثبت بودن و خطی سازی سیستم‌های گسسته-زمانی غیرخطی با پس‌خورد حالت در [۶۰] بررسی شده‌اند. کنترل‌پذیری سیستم‌های دینامیکی در [۶۸] مورد بحث قرار گرفته است.

در این فصل از رساله، کاربرد سیستم‌های توسعه یافته در بخش ۲.۳، معرفی سیستم‌های خطی توسعه یافته مثبت در بخش ۳.۳ و شرایط مثبت بودن این سیستم‌ها در دو حالت همگن و ناهمگن در بخش ۴.۳ بیان می‌شود. در بخش ۵.۳ پایداری مجانبی سیستم‌های توسعه یافته را مورد بحث قرار می‌دهیم. همچنین نتایج تحقیقات خود را در پایداری سازی و یافتن جواب در سیستم‌های توسعه یافته پیوسته-زمانی و گسسته-زمانی با استفاده از روش تبدیلات تشابهی، تخصیص مقادیر ویژه جزئی با بردار ویژه و مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی با پس‌خورد خروجی به ترتیب در بخش‌های ۶.۳، ۷.۳ و ۸.۳ توضیح می‌دهیم. پایداری سازی در روش تبدیلات تشابهی با پس‌خورد حالت پیشرو و پس‌خورد پیشرو و گزاره‌ای در حالت گسسته-زمانی و با پس‌خورد حالت مشتق و پس‌خورد مشتق و گزاره‌ای در حالت پیوسته-زمانی مورد مقایسه قرار می‌گیرند و این پایداری‌سازی‌ها را با روش تخصیص مقادیر ویژه جزئی بهبود می‌بخشیم. همچنین پایداری سازی و یافتن جواب سیستم‌های توسعه یافته با پس‌خورد خروجی مشتق و پس‌خورد خروجی مشتق و گزاره‌ای در حالت پیوسته-زمانی و پس‌خورد خروجی پیشرو و پس‌خورد خروجی پیشرو و گزاره‌ای در حالت گسسته-زمانی را مورد بحث قرار می‌دهیم. تفاوت پس‌خوردهای خروجی و حالت در فصل ۲ توضیح داده شده است.

<sup>۸</sup>Regular pencil

<sup>۹</sup>Van Dooren

<sup>۱۰</sup>Wang

<sup>۱۱</sup>Drazin

<sup>۱۲</sup>Bru

<sup>۱۳</sup>Campbell

<sup>۱۴</sup>Shuffle

<sup>۱۵</sup>Virink

در ادامه تعریف کلی دو نوع سیستم توسعه یافته پیوسته-زمانی و گسسته-زمانی که در این فصل مورد استفاده قرار می‌گیرند را بیان می‌کنیم.

**تعریف ۱.۱.۳ [۵۱]** سیستم خطی توسعه یافته پیوسته-زمانی به صورت

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1.3)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (1.3 \text{ ب})$$

تعریف می‌شود که  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ،  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  و  $y(t) \in \mathbb{R}^r$  بردارهای حالت، ورودی و خروجی،  $rank(E) < n$  و  $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ،  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ،  $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

**تعریف ۲.۱.۳ [۵۱]** سیستم خطی توسعه یافته گسسته-زمانی به صورت

$$Ex_{i+1} = Ax_i + Bu_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.3)$$

$$y_i = Cx_i, \quad (2.3 \text{ ب})$$

تعریف می‌شود که  $x_i \in \mathbb{R}^n$ ،  $u_i \in \mathbb{R}^m$  و  $y_i \in \mathbb{R}^r$  بردارهای حالت، ورودی و خروجی،  $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ،  $rank(E) < n$  و  $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ،  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

**تعریف ۳.۱.۳ [۵۱]** زوج مدادی  $(E, A)$  در سیستم‌های (۱.۳) و (۲.۳) منظم است هرگاه برای حداقل یک  $z \in \mathbb{C}$  داشته باشیم

$$\det(Ez - A) \neq 0. \quad (3.3)$$

در غیر این صورت زوج مدادی را نامنظم می‌نامند.

در این فصل رساله فرض می‌شود زوج مدادی  $(E, A)$  منظم است و  $rank(E) < n$ .

## ۲.۳ کاربردها

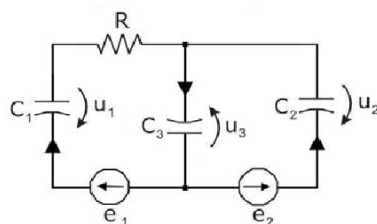
**مثال ۱.۲.۳.** مدار الکتریکی نشان داده شده در شکل ۱.۳ را با مقاومت  $R$ ، مخازن  $C_1$ ،  $C_2$  و  $C_3$  و منابع ولتاژهای  $e_1$  و  $e_2$  مفروض در نظر بگیرید. با استفاده از قانون کیرشهف برای مدارهای الکتریکی می‌توان معادلات زیر را نوشت.

$$\begin{aligned} e_1 &= RC_1 \frac{du_1}{dt} + u_1 + u_3, \\ C_1 \frac{du_1}{dt} + C_2 \frac{du_2}{dt} - C_3 \frac{du_3}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$e_2 = u_2 + u_3.$$

معادلات (۴.۳) می‌توانند به شکل زیر نوشته شوند

$$\begin{bmatrix} RC_1 & 0 & 0 \\ C_1 & C_2 & -C_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$



شکل ۱.۳: مدار الکتریکی مثال ۱.۲.۳

در این مثال داریم

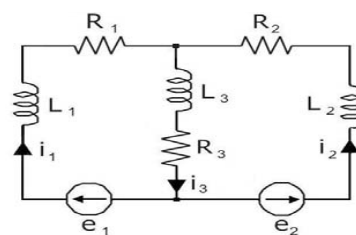
$$E = \begin{bmatrix} RC_1 & \circ & \circ \\ C_1 & C_2 & -C_3 \\ \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & \circ & -1 \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

توجه کنید که ماتریس  $E$  منفرد است چون  $\det(E) = \circ$ . اما زوج مدادی  $(E, A)$  منظم است چون معادله

$$\det(Es - A) = \begin{vmatrix} RC_1s + 1 & \circ & 1 \\ C_1s & C_2s & -C_3s \\ \circ & 1 & 1 \end{vmatrix} = (RC_1s + 1)(C_2 + C_3)s + C_1s, \quad (7.3)$$

دارای حداقل یک جواب نسبت به  $s$  است. بنابراین، مدار الکتریکی در این مثال، یک سیستم خطی توسیع‌یافته با زوج مدادی منظم است.

مثال ۲.۲.۳. مدار الکتریکی نشان داده شده در شکل ۲.۳ را با مقاومت‌های  $R_1$ ،  $R_2$  و  $R_3$ ، سیم‌پیچ‌های  $L_1$ ،  $L_2$  و  $L_3$  و منابع ولتاژ  $e_1$  و  $e_2$  مفروض در نظر بگیرید.



شکل ۲.۳: مدار الکتریکی مثال ۲.۲.۳

با استفاده از قانون کیرشهف برای مدارهای الکتریکی می‌توان معادلات زیر را نوشت.

$$\begin{aligned} e_1 &= R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + R_3 i_3 + L_3 \frac{di_3}{dt}, \\ e_2 &= R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + R_3 i_3 + L_3 \frac{di_3}{dt}, \\ i_1 + i_2 - i_3 &= \circ. \end{aligned} \quad (8.3)$$

معادلات (۸.۳) می‌توانند به شکل زیر نوشته شوند

$$\begin{bmatrix} L_1 & \circ & L_3 \\ \circ & L_2 & L_3 \\ \circ & \circ & \circ \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 & \circ & -R_3 \\ \circ & -R_2 & -R_3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}. \quad (9.3)$$

در این مثال داریم

$$E = \begin{bmatrix} L_1 & \circ & L_3 \\ \circ & L_2 & L_3 \\ \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -R_1 & \circ & -R_3 \\ \circ & -R_2 & -R_3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \\ \circ & \circ \end{bmatrix}. \quad (10.3)$$

توجه کنید که ماتریس  $E$  منفرد است چون  $\det(E) = \circ$ . اما زوج مدادی  $(E, A)$  منظم است چون معادله

$$\det(Es - A) = \begin{vmatrix} L_1s + R_1 & \circ & L_3s + R_3 \\ \circ & L_2s + R_2 & L_3s + R_3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = [L_1(L_2 + L_3) + L_2L_3]s^2 \quad (11.3)$$

$$+ [(L_2 + L_3)R_1 + (L_1 + L_3)R_2 + (L_1 + L_2)R_3]s + R_1(R_2 + R_3) + R_2R_3,$$

دارای حداقل یک جواب نسبت به  $s$  است. بنابراین، مدار الکتریکی ارائه شده در این مثال، یک سیستم خطی توسعه یافته با زوج مدادی منظم است.

## ۳.۳ سیستم‌های خطی توسعه یافته مثبت

برای تمام مطالب آورده شده در بخش ۳.۳ از [۵۱] استفاده شده است.

### ۱.۳.۳ سیستم‌های خطی توسعه یافته پیوسته-زمانی مثبت

سیستم خطی توسعه یافته پیوسته-زمانی (۱.۳) را در نظر بگیرید.

**تعریف ۱.۳.۳.** سیستم (۱.۳) مثبت نامیده می‌شود اگر برای هر شرط ابتدایی نامنفی ثابت  $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ ، هر ورودی نامنفی  $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$  برای  $k = 1, \dots, q-1$  و  $t > \circ$  داشته باشیم  $u^k(t) = \frac{d^k u(t)}{dt^k} \in \mathbb{R}_+^m$ ،  $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$  و  $y(t) \in \mathbb{R}_+^r$  که  $q$  شاخص زوج مدادی  $(E, A)$  است.

سیستم (۱.۳) می‌تواند به طور معادل به صورت معادلات

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}_0 u(t) + \bar{B}_1 u^{(1)}(t) + \dots + \bar{B}_{q-1} u^{(q-1)}(t), \quad (12.3)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (ب) \quad (12.3)$$

نوشته شود که  $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ،  $\bar{B}_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$  و  $k = \circ, 1, \dots, q-1$  [۵۱].

قضیه ۱.۳.۳. [۵۱] سیستم خطی پیوسته-زمانی (۱۲.۳) مثبت است اگر و تنها اگر

$$\bar{A} \in M_n, \quad \bar{B}_k \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, \quad k = 0, 1, \dots, q-1, \quad C \in \mathbb{R}_+^{r \times n}, \quad (13.3)$$

که  $M_n$  مجموعه ماتریس‌های متزلز  $n \times n$  است.

### ۲.۳.۳ سیستم‌های خطی توسیع یافته گسسته-زمانی مثبت

سیستم خطی توسیع یافته گسسته-زمانی (۲.۳) را در نظر بگیرید.

تعریف ۲.۳.۳. سیستم (۲.۳) مثبت نامیده می‌شود اگر برای هر شرط ابتدایی نامنفی ثابت

$x_0 \in \mathbb{R}_+^n$  و هر ورودی نامنفی  $u_i \in \mathbb{R}_+^m$ ,  $i \in \mathbb{Z}_+$  داشته باشیم  $x_i \in \mathbb{R}_+^n$  و  $y_i \in \mathbb{R}_+^r$  که  $i \in \mathbb{Z}_+$ .

سیستم (۲.۳) می‌تواند به‌طور معادل به‌صورت معادلات

$$x_{i+1} = \bar{A}x_i + \bar{B}_0 u_i + \bar{B}_1 u_{i+1} + \dots + \bar{B}_{q-1} u_{i+q-1}, \quad (14.3)$$

$$y_i = Cx_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (14.3)$$

نوشته شود که  $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\bar{B}_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$  و  $k = 0, 1, \dots, q-1$  که شاخص زوج مدادی  $(E, A)$  است [۵۱].

قضیه ۲.۳.۳. [۵۱] سیستم خطی گسسته-زمانی (۱۴.۳) مثبت است اگر و تنها اگر

$$\bar{A} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad \bar{B}_k \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, \quad k = 0, 1, \dots, q-1, \quad C \in \mathbb{R}_+^{r \times n}. \quad (15.3)$$

## ۴.۳ مثبت بودن سیستم‌های توسیع یافته با زوج مدادی

### منظم

برای تمام مطالب آورده شده در بخش ۴.۳ از [۵۹] استفاده شده است.

### ۱.۴.۳ سیستم‌های توسیع یافته پیوسته-زمانی همگن

سیستم خطی توسیع یافته پیوسته-زمانی همگن

$$E\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0, \quad (16.3)$$

را در نظر بگیرید که  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  بردار حالت است و  $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

با انتخاب  $s = c$  به طوری که  $\det(Ec - A) \neq 0$  و ضرب از سمت چپ در ماتریس  $[Ec - A]^{-1}$

در (۱۶.۳) به دست می‌آوریم

$$\hat{E}\dot{x}(t) = \hat{A}x(t), \quad (17.3)$$



که

$$\hat{E} = [Ec - A]^{-1}E, \quad \hat{A} = [Ec - A]^{-1}A. \quad (18.3)$$

به راحتی می‌توان بررسی نمود [۳۰] که

$$\hat{E}\hat{A} = \hat{A}\hat{E}, \quad (19.3)$$

چون  $\hat{A} = \hat{E}c - I_n$  و  $\hat{E}c - \hat{A} = [Ec - A]^{-1}[Ec - A] = I_n$ .

قضیه ۱.۴.۳. [۸، ۳۰] جواب معادله (۱۷.۳) به شکل

$$x(t) = e^{\hat{E}^D \hat{A} t} \hat{E}^D \hat{E} v, \quad (20.3)$$

است که  $v \in \mathbb{R}^n$  دلخواه و  $\hat{E}^D$  وارون درزین ماتریس  $\hat{E}$  است.

توجه کنید که (۲۰.۳) جواب معادله دیفرانسیلی

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t), \quad x(0) \in im(\bar{F}), \quad (21.3)$$

است که در آن

$$\bar{A} = \hat{E}^D \hat{A}, \quad \bar{F} = \hat{E}^D \hat{E}, \quad x(t) = e^{\bar{A}t} \bar{F} v, \quad (22.3)$$

و  $im(\bar{F})$  تصویر  $\bar{F}$  را نشان می‌دهد. بنابراین سیستم توسیع‌یافته (۱۷.۳) معادل با سیستم استاندارد (۲۱.۳) است.

قضیه ۲.۴.۳. برای سیستم استاندارد (۲۱.۳) موارد زیر برقرار است.

$$\bar{A}\bar{F} = \bar{F}\bar{A}, \quad (23.3)$$

$$x(t) = \bar{F}x(t), \quad t \geq 0.$$

برهان. با استفاده از (۲۲.۳)، تعریف ۱۵.۱.۱ و لم ۳.۱.۱ به دست می‌آوریم

$$\bar{A}\bar{F} = \hat{E}^D \hat{A} \hat{E}^D \hat{E} = \hat{E}^D \hat{E} \hat{A} \hat{E}^D = \hat{E}^D \hat{E} \hat{E}^D \hat{A} = \bar{F}\bar{A}, \quad (24.3)$$

و

$$\bar{F}x(t) = \hat{E}^D \hat{E} e^{\hat{E}^D \hat{A} t} \hat{E}^D \hat{E} v = e^{\hat{E}^D \hat{A} t} \hat{E}^D \hat{E} \hat{E}^D \hat{E} v = e^{\hat{E}^D \hat{A} t} \hat{E}^D \hat{E} v = x(t), \quad (25.3)$$

چون  $\hat{E}^D \hat{E} \hat{E}^D = \hat{E}^D$  و  $\hat{E}^D \hat{E} e^{\hat{E}^D \hat{A} t} = e^{\hat{E}^D \hat{A} t} \hat{E}^D \hat{E}$  □

تعریف ۱.۴.۳. سیستم توسیع‌یافته (۱۶.۳) مثبت نامیده می‌شود اگر برای همه  $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$  و

$$x(t) \in \mathbb{R}_+^n, \quad t \geq 0$$

قضیه ۳.۴.۳. سیستم توسیع‌یافته پیوسته-زمانی (۱۶.۳) مثبت است اگر و تنها اگر

$$\hat{E}^D \hat{A} \in M_n, \quad im(\hat{E}^D \hat{E}) \in \mathbb{R}_+^n. \quad (26.3)$$

برهان. با استفاده از قضیه ۱.۳.۱ سیستم خطی پیوسته-زمانی استاندارد (۲۱.۳) مثبت است

اگر و تنها اگر  $\bar{A} \in M_n$ . سیستم توسیع‌یافته (۱۷.۳) و همچنین (۱۶.۳) مثبت است اگر و تنها

اگر سیستم استاندارد معادل آن، (۲۱.۳) مثبت باشد یعنی (۲۶.۳) برقرار باشد. □

مثال ۱.۴.۳. سیستم توسیع یافته (۱۶.۳) را با ماتریس‌های

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (27.3)$$

در نظر بگیرید. زوج مدادی  $(E, A)$  در (۲۷.۳) منظم است و برای  $c = 1$  به دست می‌آوریم

$$[Ec - A]^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0/5 & 0/25 & 0 \\ 0 & 0/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (28.3)$$

و

$$\hat{E} = [Ec - A]^{-1} E = \begin{bmatrix} 0/5 & 0/25 & 0 \\ 0 & 0/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (29.3)$$

$$\hat{A} = [Ec - A]^{-1} A = \begin{bmatrix} 0/5 & 0/25 & 0 \\ 0 & 0/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0/5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

با استفاده از روش ارائه شده در ملاحظه ۳.۱.۱ و ارون درزین  $\hat{E}$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{E}^D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (30.3)$$

و

$$\bar{A} = \hat{E}^D \hat{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{F} = \hat{E}^D \hat{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (31.3)$$

با استفاده از قضیه ۳.۴.۳ سیستم توسیع یافته (۱۷.۳) با (۲۹.۳) و همچنین سیستم (۱۶.۳) با (۲۷.۳) مثبت هستند.

### ۲.۴.۳ سیستم‌های توسیع یافته گسسته-زمانی همگن

سیستم خطی توسیع یافته گسسته-زمانی همگن

$$E' x_{i+1} = A' x_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (32.3)$$

را در نظر بگیرید که  $x_i \in \mathbb{R}^n$  بردارهای حالت هستند و  $E', A' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

با انتخاب  $s = c$  به طوری که  $\det(E'c - A') \neq 0$  و ضرب از سمت چپ در ماتریس  $[E'c - A']^{-1}$

در (۳۲.۳) به دست می‌آوریم

$$\hat{E}' x_{i+1} = \hat{A}' x_i, \quad (33.3)$$

که

$$\hat{E}' = [E'c - A']^{-1} E', \quad \hat{A}' = [E'c - A']^{-1} A'. \quad (34.3)$$

به روشی مشابه با (۱۷.۳) می‌توان نشان داد که

$$\hat{E}' \hat{A}' = \hat{A}' \hat{E}'. \quad (35.3)$$

قضیه ۴.۴.۳. [۸، ۳۰] جواب معادله (۳۳.۳) به شکل

$$x_i = (\hat{E}'^D \hat{A}')^i \hat{E}'^D \hat{E}' v, \quad (36.3)$$

که  $v \in \mathbb{R}^n$  دلخواه است.

توجه کنید که (۳۶.۳) جواب معادله دیفرانسیلی

$$x_{i+1} = \bar{A}' x_i, \quad (37.3)$$

که

$$\bar{A}' = \hat{E}'^D \hat{A}', \quad \bar{F}' = \hat{E}'^D \hat{E}', \quad x_i = (\bar{A}')^i \bar{F}' v. \quad (38.3)$$

بنابراین، سیستم توسیع‌یافته (۳۳.۳) معادل با سیستم استاندارد (۳۷.۳) است.

قضیه ۵.۴.۳. برای سیستم استاندارد (۳۷.۳) موارد زیر برقرار است.

$$\bar{A}' \bar{F}' = \bar{F}' \bar{A}', \quad (39.3)$$

$$x_i = \bar{F}' x_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+.$$

برهان. مشابه با برهان قضیه ۲.۴.۳ است. □

تعریف ۲.۴.۳. سیستم توسیع‌یافته (۳۲.۳) مثبت نامیده می‌شود اگر برای همه  $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$  و  $x_i \in \mathbb{R}_+^n, i \in \mathbb{Z}_+$  داشته باشیم  $x_0 \in \text{im}(\bar{F}')$

قضیه ۶.۴.۳. سیستم توسیع‌یافته گسسته-زمانی (۳۲.۳) مثبت است اگر و تنها اگر

$$\hat{E}'^D \hat{A}' \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad \text{im}(\hat{E}'^D \hat{E}') \in \mathbb{R}_+^n. \quad (40.3)$$

برهان. مشابه با برهان قضیه ۳.۴.۳ است. □

مثال ۲.۴.۳. سیستم توسیع‌یافته (۳۲.۳) را با ماتریس‌های

$$E' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 0/5 & 0/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad (41.3)$$

در نظر بگیرید. زوج مدادی  $(E', A')$  در (۴۱.۳) منظم است و برای  $c = 1$  به دست می‌آوریم

$$[E'c - A']^{-1} = \begin{bmatrix} 0/5 & -0/5 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0/5 \\ 1 & 1 & 0/5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (42.3)$$

و

$$\hat{E}' = [E'c - A']^{-1} E' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0/5 \\ 1 & 1 & 0/5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (43.3)$$

$$\hat{A}' = [E'c - A']^{-1} A' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0/5 \\ 1 & 1 & 0/5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0/5 & 0/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

با استفاده از روش ارائه شده در ملاحظه ۳.۱.۱ و ارون درزین  $\hat{E}'$  به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\hat{E}'^D = \begin{bmatrix} 0/5 & -0/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (44.3)$$

و

$$\bar{A}' = \hat{E}'^D \hat{A}' = \begin{bmatrix} 0/5 & -0/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/5 & 0/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (45.3)$$

$$\bar{F}' = \begin{bmatrix} 0/5 & -0/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

با استفاده از قضیه ۶.۴.۳ سیستم توسعه یافته (۳۳.۳) با (۴۳.۳) و همچنین سیستم (۳۲.۳) با (۴۱.۳) مثبت هستند.

### ۳.۴.۳ سیستم‌های توسعه یافته پیوسته-زمانی ناهمگن

سیستم خطی توسعه یافته پیوسته-زمانی ناهمگن (۱۱.۳) را در نظر بگیرید.

قضیه ۷.۴.۳. [۸، ۳۰] جواب معادله (۱۱.۳) به شکل

$$x(t) = e^{\hat{E}^D \hat{A} t} \hat{E}^D \hat{E} v + \int_0^t e^{\hat{E}^D \hat{A} (t-\tau)} \hat{E}^D \hat{B} u(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^{q-1} (\hat{E}^D \hat{E} - I_n) (\hat{E}^D \hat{A}^D)^k \hat{A}^D \hat{B} u^{(k)}(t), \quad (46.3)$$

است که  $\hat{E}, \hat{A}$  به وسیله (۱۸.۳) تعریف می شوند،

$$\hat{B} = [Ec - A]^{-1} B, \quad (47.3)$$

و  $v \in \mathbb{R}^n$  دلخواه است.

**تعریف ۳.۴.۳.** سیستم توسعه یافته (۱۱.۳) مثبت نامیده می شود اگر برای هر  $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$

و ورودی های  $u^{(k)}(t) \in \mathbb{R}_+^m$  که  $t \geq 0$  و  $k = 0, 1, \dots, q-1$  داشته باشیم

$$.x(t) \in \mathbb{R}_+^n$$

قضیه ۸.۴.۳. سیستم توسیع‌یافته پیوسته-زمانی (۱۱.۳) مثبت است اگر و تنها اگر برای  $k = 0, 1, \dots, q-1$  داشته باشیم:

$$\hat{E}^D \hat{A} \in M_n, \quad \hat{E}^D \hat{B} \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, \quad (\hat{E}^D \hat{E} - I_n)(\hat{E}^D \hat{A}^D)^k \hat{A}^D \hat{B} \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, \quad (48.3)$$

$$im[H_0, H_1, \dots, H_q] \in \mathbb{R}_+^n, \quad (49.3)$$

که

$$H_k = \begin{cases} (\hat{E}^D \hat{E} - I_n)(\hat{E}^D \hat{A}^D)^k \hat{A}^D \hat{B}, & k = 0, 1, \dots, q-1, \\ \hat{E}^D \hat{E}, & k = q. \end{cases} \quad (50.3)$$

برهان. واضح است که اگر  $E = I_n$ ، سیستم خطی استاندارد پیوسته-زمانی (۱۱.۳) مثبت است اگر و تنها اگر  $A \in M_n$  و  $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$  [۳۲]. توجه کنید که برای هر  $u(t) \in \mathbb{R}_+^m$  و  $t \geq 0$  داریم

$$\int_0^t e^{\hat{E}^D \hat{A}(t-\tau)} \hat{E}^D \hat{B} u(\tau) d\tau \in \mathbb{R}_+^n, \quad (51.3)$$

اگر و تنها اگر  $\hat{E}^D \hat{A} \in M_n$  و  $\hat{E}^D \hat{B} \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$ . بنابراین سیستم توسیع‌یافته (۱۱.۳) مثبت است اگر و تنها اگر شرایط (۴۸.۳) و (۴۹.۳) برقرار باشند.  $\square$

### ۴.۴.۳ سیستم‌های توسیع‌یافته گسسته-زمانی ناهمگن

سیستم خطی توسیع‌یافته گسسته-زمانی ناهمگن

$$E' x_{i+1} = A' x_i + B' u_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (52.3)$$

را در نظر بگیرید که  $x_i \in \mathbb{R}^n$  و  $u_i \in \mathbb{R}^m$  بردارهای حالت و ورودی هستند و  $E', A' \in \mathbb{R}^{n \times n}$  و  $B' \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

قضیه ۹.۴.۳. [۳۰، ۸] جواب معادله (۵۲.۳) به شکل

$$x_i = \hat{E}'^D \hat{A}'^i \hat{E}'^D \hat{E}' v + \sum_{k=0}^{i-1} (\hat{E}'^D \hat{A}')^{i-k-1} \hat{E}'^D \hat{B}' u_k \quad (53.3)$$

$$+ \sum_{k=0}^{q-1} (\hat{E}'^D \hat{E}' - I_n)(\hat{E}'^D \hat{A}'^D)^k \hat{A}' \hat{B}' u_{i+k},$$

است که  $\hat{E}', \hat{A}'$  به وسیله (۳۴.۳) تعریف می‌شوند

$$\hat{B}' = [E'c - A']^{-1} B', \quad (54.3)$$

و  $v \in \mathbb{R}_+^n, i \in \mathbb{Z}_+$  است.

تعریف ۴.۴.۳. سیستم توسیع‌یافته (۵۲.۳) مثبت نامیده می‌شود اگر برای تمام  $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ ،  $x_i \in \mathbb{R}_+^n, i \in \mathbb{Z}_+$  و تمام ورودی‌های  $u_i \in \mathbb{R}_+^m, i \in \mathbb{Z}_+$  داشته باشیم  $x_0 \in im(\bar{F}')$ .

قضیه ۱۰.۴.۳. سیستم توسیع‌یافته گسسته-زمانی (۵۲.۳) مثبت است اگر و تنها اگر برای  $k = 0, 1, \dots, q-1$  داشته باشیم

$$\hat{E}'^D \hat{A}' \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad \hat{E}'^D \hat{B}' \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, \quad (\hat{E}'^D \hat{E}' - I_n)(\hat{E}'^D \hat{A}'^D)^k \hat{A}' \hat{B}' \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, \quad (55.3)$$

$$im[H'_0, H'_1, \dots, H'_q] \in \mathbb{R}_+^n, \quad (۵۶.۳)$$

که

$$H'_k = \begin{cases} (\hat{E}'^D \hat{E}' - I_n)(\hat{E}' \hat{A}'^D)^k \hat{A}' \hat{B}', & k = 0, 1, \dots, q-1, \\ \hat{E}'^D \hat{E}', & k = q. \end{cases} \quad (۵۷.۳)$$

برهان. واضح است که اگر  $E' = I_n$ ، سیستم خطی استاندارد گسسته-زمانی (۵۲.۳) مثبت است اگر و تنها اگر  $A' \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$  و  $B' \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$  [۳۲]. توجه کنید که برای تمام  $u_i \in \mathbb{R}_+^m$  و  $i \in \mathbb{Z}_+$  داریم

$$\sum_{k=0}^{i-1} (\hat{E}'^D \hat{A}')^{i-k-1} \hat{E}' \hat{B}' u_k \in \mathbb{R}_+^n, \quad (۵۸.۳)$$

اگر و تنها اگر  $\hat{E}'^D \hat{A}' \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$  و  $\hat{E}'^D \hat{B}' \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$ . بنابراین، سیستم توسیع یافته (۵۲.۳) مثبت است اگر و تنها اگر شرایط (۵۵.۳) و (۵۶.۳) برقرار باشند.  $\square$

## ۵.۳ پایداری مجانی سیستم‌های توسیع یافته همگن مثبت

برای تمام مطالب آورده شده در بخش ۵.۳ از [۵۹] استفاده شده است.

### ۱.۵.۳ سیستم‌های پیوسته-زمانی همگن

تعریف ۱.۵.۳. سیستم توسیع یافته مثبت (۱۷.۳) (و همچنین (۱۶.۳)) پایدار مجانی نامیده می‌شود اگر برای هر  $x(0) \in im(\hat{E}^D \hat{E})$  و  $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$  داشته باشیم

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (۵۹.۳)$$

قضیه ۱.۵.۳. سیستم توسیع یافته مثبت (۱۶.۳) پایدار مجانی است اگر و تنها اگر تمام ضرایب چندجمله‌ای

$$\det(I_n s - \hat{E}^D \hat{A}) = s^p (s^{n-p} + a_{n-p-1} s^{n-p-1} + \dots + a_1 s + a_0), \quad (۶۰.۳)$$

مثبت باشند، یعنی برای  $k = 0, 1, \dots, n-p-1$  داشته باشیم  $a_k > 0$  که

$$p = n - rank(\hat{E}^D \hat{A}). \quad (۶۱.۳)$$

برهان. با استفاده از قضیه ۱۳.۱.۱ سیستم استاندارد پیوسته-زمانی مثبت (۱۵.۱) پایدار مجانی است اگر و تنها اگر تمام ضرایب چندجمله‌ای (۱۷.۱) مثبت باشند. با استفاده از این حقیقت و تعریف ۱.۵.۳ نتیجه می‌شود که سیستم توسیع یافته مثبت (۱۶.۳) پایدار مجانی است اگر و تنها اگر تمام ضرایب چندجمله‌ای (۶۰.۳) مثبت باشند.  $\square$

مثال ۱.۵.۳. (ادامه مثال ۱.۴.۳) ماتریس  $\hat{E}^D \hat{A}$  به شکل

$$\hat{E}^D \hat{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (۶۲.۳)$$

و چندجمله‌ای مشخصه آن متناظر با (۶۰.۳) به صورت

$$\det[I_{\mathfrak{F}} s - \hat{E}^D \hat{A}] = \begin{vmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} = s^2(s+1), \quad (۶۳.۳)$$

است. شرایط قضیه ۱.۵.۳ برقرار هستند و سیستم توسیع‌یافته مثبت با ماتریس‌های (۲۷.۳) پایدار مجانی است.

### ۲.۵.۳ سیستم‌های گسسته-زمانی همگن

تعریف ۲.۵.۳. سیستم توسیع‌یافته مثبت (۳۲.۳) پایدار مجانی نامیده می‌شود اگر برای تمام

$$x_0 \in \mathbb{R}_+^n \text{ و } x_0 \in \text{im}(\hat{E}^D \hat{E}')$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0. \quad (۶۴.۳)$$

قضیه ۲.۵.۳. سیستم توسیع‌یافته مثبت (۳۲.۳) پایدار مجانی است اگر و تنها اگر تمام ضرایب چندجمله‌ای

$$\det[I_n(z+1) - \hat{E}^D \hat{A}'] = (z+1)^{\bar{p}}(z^{n-\bar{p}} + \bar{a}_{n-\bar{p}-1} z^{n-\bar{p}-1} + \dots + \bar{a}_1 z + \bar{a}_0), \quad (۶۵.۳)$$

مثبت باشند، یعنی برای  $k = 0, 1, \dots, n - \bar{p} - 1$  داشته باشیم  $\bar{a}_k > 0$  که

$$\bar{p} = n - \text{rank}(\hat{E}^D \hat{A}'). \quad (۶۶.۳)$$

برهان. با استفاده از قضیه ۵.۳.۱ سیستم استاندارد گسسته-زمانی مثبت (۱۲۰.۱) پایدار مجانی است اگر و تنها اگر تمام ضرایب چندجمله‌ای (۲۶.۱) مثبت باشند. با استفاده از این حقیقت و تعریف ۲.۵.۳ نتیجه می‌شود که سیستم توسیع‌یافته مثبت (۳۲.۳) پایدار مجانی است اگر و تنها اگر تمام ضرایب چندجمله‌ای (۶۵.۳) مثبت باشند.  $\square$

مثال ۲.۵.۳. (ادامه مثال ۲.۴.۳) ماتریس  $\hat{E}^D \hat{A}'$  به شکل

$$\hat{E}^D \hat{A}' = \begin{bmatrix} 0/5 & 0/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (۶۷.۳)$$

و چندجمله‌ای مشخصه آن متناظر با (۶۵.۳) به صورت

$$\det[I_{\mathfrak{F}}(z+1) - \hat{E}^D \hat{A}'] = \begin{vmatrix} z+0/5 & -0/5 & 0 \\ 0 & z+1 & 0 \\ 0 & 0 & z+1 \end{vmatrix} = (z+1)^2(z+0/5), \quad (۶۸.۳)$$

است. شرایط قضیه ۲.۵.۳ برقرار هستند و سیستم توسیع‌یافته مثبت با ماتریس‌های (۴۱.۳) پایدار مجانی است.

## ۶.۳ پایدارسازی سیستم‌های توسیع‌یافته با استفاده از تبدیلات تشابهی

سیستم‌های توسیع‌یافته پیوسته-زمانی و گسسته-زمانی (۱.۳) و (۲.۳) را در نظر بگیرید. هدف به ترتیب، به دست آوردن ماتریس پس‌خورد حالت مشتق و گزاره‌ای و ماتریس پس‌خورد حالت پیشرو و گزاره‌ای با استفاده از روش تبدیلات تشابهی است به طوری که با تخصیص مقادیر ویژه  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  در سیستم حلقه بسته، به تخصیص مقادیر ویژه مطلوب و یا پایدارسازی سیستم ناپایدار پردازیم که در آن  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ،  $\lambda_i \neq 0$  و  $i = 1, \dots, n$ . برای پایدارسازی سیستم‌های توسیع‌یافته پیوسته-زمانی کافی است پس‌خوردها را طوری به دست آوریم که مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته در سمت چپ صفحه مختلط قرار بگیرند و برای پایدارسازی سیستم‌های توسیع‌یافته گسسته-زمانی کافی است پس‌خوردها را طوری به دست آوریم که مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته در داخل دایره واحد قرار بگیرند. همچنین، برتری استفاده از پس‌خورد حالت مشتق و گزاره‌ای بر پس‌خورد حالت مشتق و همچنین پس‌خورد حالت پیشرو و گزاره‌ای بر پس‌خورد حالت پیشرو توضیح داده می‌شود.

## ۱.۶.۳ پایدارسازی سیستم‌های توسیع‌یافته پیوسته-زمانی با استفاده از پس‌خورد حالت مشتق

نتایج این زیربخش در مرجع [۷۸] به چاپ رسیده است.

سیستم (۱.۳) را با قانون پس‌خورد حالت مشتق

$$u(t) = K'_{de} \dot{x}(t), \quad (۶۹.۳)$$

در نظر بگیرید. برای رسیدن به نتایج مطلوب، فرضیات زیر را در نظر می‌گیریم:

$$I) \text{rank}(E|B) = n, \quad II) \text{rank}(A) = n, \quad III) \text{rank}(B) = m. \quad (۷۰.۳)$$

اگر فرضیات (۷۰.۳) برقرار باشند،  $K'_{de}$  وجود دارد به طوری که [۵]

$$\text{rank}(E - BK'_{de}) = n. \quad (۷۱.۳)$$

با شرط برقراری شرط (۷۱.۳) برای  $K'_{de}$  و با قرار دادن عبارت (۶۹.۳) در (۱.۳)، می‌توان نوشت:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + BK'_{de}\dot{x}(t) \Rightarrow (E - BK'_{de})\dot{x}(t) = Ax(t).$$



بنابراین سیستم استاندارد معادل به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\dot{x}(t) = (E - BK'_{de})^{-1}Ax(t), \quad (72.3)$$

که با داشتن رابطه (71.3) قابل تعریف است.

قضیه 1.6.3. ماتریس‌های  $N'$  و  $M'$  را به صورت

$$N' = A^{-1}E, \quad M' = -A^{-1}B, \quad (73.3)$$

و مجموعه مقادیر ویژه  $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که زوج  $(M', N')$  کنترل‌پذیر باشد. همچنین، فرض کنید  $K'_{de}$  ماتریس پس‌خورد حالت مشتقی باشد که مقادیر ویژه  $\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$  را به سیستم حلقه بسته

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = N'z(t) + M'w(t), \\ w(t) = K'_{de}z(t), \end{cases} \quad (74.3)$$

تخصیص دهد،  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ،  $\lambda_i \neq 0$  و  $i = 1, \dots, n$ . در این صورت  $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ، مقادیر ویژه سیستم کنترل شده (71.3) با پس‌خورد حالت مشتق  $K'_{de}$  است و شرط (71.3) برقرار است.

برهان. فرض کنید زوج  $(M', N')$  کنترل شده باشد، آن‌گاه می‌توان ماتریس پس‌خورد حالت  $K'_{de}$  را به گونه‌ای یافت که سیستم کنترل شده با قانون کنترل (74.3) به صورت

$$\dot{z}(t) = (N' + M'K'_{de})z(t), \quad (75.3)$$

دارای مقادیر ویژه  $\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$  باشد. با جایگذاری (73.3) در (75.3) خواهیم داشت:

$$(N' + M'K'_{de})^{-1} = (A^{-1}(E - BK'_{de}))^{-1}.$$

بنابراین،

$$(N' + M'K'_{de})^{-1} = (E - BK'_{de})^{-1}A,$$

و از (75.3) و لم 1.1.1 نتیجه می‌شود که مجموعه مقادیر ویژه  $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ، مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته  $(E - BK'_{de})^{-1}A$  است که بنابر (72.3)، ماتریس حلقه بسته سیستم (71.3) با قانون پس‌خورد (69.3) نیز است. پس، (71.3) برقرار است و مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته (71.3) با قانون پس‌خورد (69.3) برابر با  $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  است.  $\square$

مثال 1.6.3. سیستم توسیع‌یافته

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t),$$

را با مقادیر ویژه مطلوب  $\lambda_1 = -0.5$  و  $\lambda_{2,3} = -0.5 \pm 0.5i$  در نظر بگیرید. با استفاده از روش

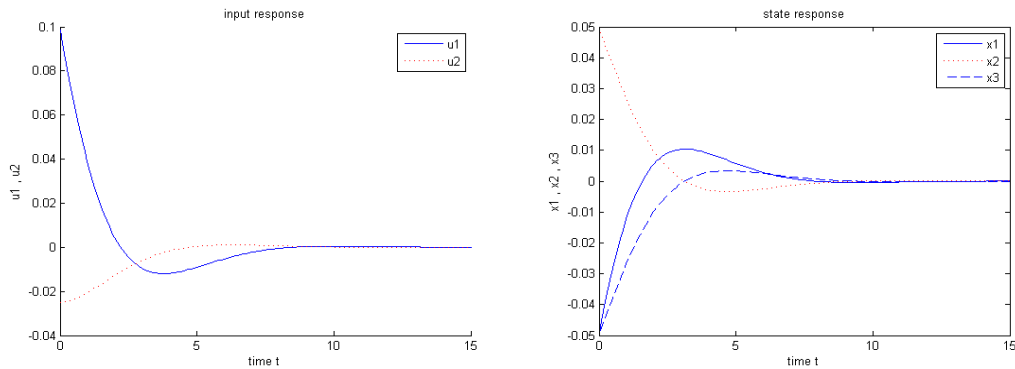
تبدیلات تشابهی در بخش 2.2، نتایج به صورت

$$N' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad K'_{de} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

به دست می‌آید و داریم:

$$\Omega((E - BK'_{de})^{-1}A) = \{-\omega/\delta \pm \omega/\delta i, -\omega/\delta\}.$$

شکل‌های ۱.۶.۳ نتایج به دست آمده را نشان می‌دهند.



شکل ۳.۳: پایداری بردارهای حالت و ورودی در مثال ۱.۶.۳

واضح است که شرط دوم در (۷۰.۳) تنها در سیستم‌های خاصی برقرار است و اگر ماتریس  $A$  منفرد باشد، نمی‌توان از پس‌خورد حالت مشتق برای پایداری سازی سیستم استفاده نمود. این مشکل با استفاده از پس‌خورد حالت مشتق و گزاره‌ای برطرف می‌شود.

### ۲.۶.۳ پایداری سازی سیستم‌های توسعه یافته پیوسته-زمانی با استفاده از پس‌خورد حالت مشتق و گزاره‌ای

سیستم (۱۱.۳) را با قانون پس‌خورد حالت مشتق و گزاره‌ای

$$u(t) = K_{de}\dot{x}(t) + K_{pr}x(t), \quad (۷۶.۳)$$

در نظر بگیرید. برای رسیدن به نتایج مطلوب، فرضیات زیر را در نظر می‌گیریم:

$$I) \text{rank}(E|B) = n, \quad II) \text{rank}(B) = m. \quad (۷۷.۳)$$

اگر فرضیات (۷۷.۳) برقرار باشند،  $K_{de}$  وجود دارد به طوری که [۵]

$$\text{rank}(E - BK_{de}) = n. \quad (۷۸.۳)$$

با شرط برقراری شرط (۷۸.۳) برای  $K_{de}$  و با قرار دادن عبارت (۷۶.۳) در (۱۱.۳)، می‌توان نوشت:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + BK_{de}\dot{x}(t) + BK_{pr}x(t) \Rightarrow (E - BK_{de})\dot{x}(t) = (A + BK_{pr})x(t).$$

بنابراین سیستم استاندارد معادل به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\dot{x}(t) = (E - BK_{de})^{-1}(A + BK_{pr})x(t), \quad (۷۹.۳)$$

که با داشتن رابطه (۷۸.۳) قابل تعریف است.

ملاحظه ۱.۶.۳. وقتی از پس‌خورد مشتق و گزاره‌ای به‌جای پس‌خورد حالت مشتق استفاده می‌کنیم نیازی به برقراری شرط رتبه کامل بودن ماتریس  $A$  در سیستم توسیع‌یافته (۱.۳) نداریم و این مطلب نشان‌دهنده‌ی برتر بودن پس‌خورد حالت مشتق و گزاره‌ای نسبت به پس‌خورد حالت مشتق است.

برای محاسبه  $K_{pr}$  و  $K_{de}$  در (۷۶.۳)، ابتدا پس‌خورد حالت گزاره‌ای  $K_{pr}$  را با استفاده از روش تبدیلات تشابهی روی سیستم

$$\begin{cases} \dot{g}(t) = Ag(t) + Bv(t), \\ v(t) = K_{pr}g(t), \end{cases} \quad (۸۰.۳)$$

به‌دست می‌آوریم به‌طوری‌که مقادیر ویژه ناصفر مطلوب  $\Omega = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$  را به این سیستم اختصاص دهد.

سپس، پس‌خورد حالت مشتق  $K_{de}$  را با استفاده از همان روش تبدیلات تشابهی روی سیستم (۸۲.۳) با اختصاص وارون مقادیر ویژه مطلوب برای سیستم (۱.۳) یعنی،  $\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$  به‌دست می‌آوریم. برای درک بهتر این مطلب قضیه ۲.۶.۳ را ببینید.

قضیه ۲.۶.۳. ماتریس‌های  $M$  و  $N$  را به‌صورت

$$N = (A + BK_{pr})^{-1}E, \quad M = -(A + BK_{pr})^{-1}B, \quad (۸۱.۳)$$

و مجموعه مقادیر ویژه  $\Omega$  را برای محاسبه ماتریس پس‌خورد حالت گزاره‌ای  $K_{pr}$  به‌گونه‌ای تعریف می‌کنیم که زوج  $(M, N)$  کنترل‌پذیر باشد. همچنین، فرض کنید  $K_{de}$  ماتریس پس‌خورد حالت مشتقی باشد که مقادیر ویژه  $\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$  را به سیستم حلقه بسته

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Nz(t) + Mw(t), \\ w(t) = K_{de}z(t), \end{cases} \quad (۸۲.۳)$$

تخصیص دهد،  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ،  $\lambda_i \neq 0$  و  $i = 1, \dots, n$ . آن‌گاه  $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ، مقادیر ویژه سیستم کنترل‌شده (۱.۳) با قانون پس‌خورد مشتق و گزاره‌ای (۷۶.۳) است و شرط (۷۸.۳) برقرار است.

برهان. فرض کنید زوج  $(M, N)$  کنترل‌شده باشد، آن‌گاه می‌توان ماتریس پس‌خورد حالت  $K_{de}$  را به‌گونه‌ای یافت که سیستم کنترل‌شده با قانون کنترل (۸۲.۳) به‌صورت

$$\dot{z}(t) = (N + MK_{de})z(t), \quad (۸۳.۳)$$

دارای مقادیر ویژه  $\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$  باشد. با جایگذاری (۸۱.۳) در (۸۳.۳) خواهیم داشت:

$$(N + MK_{de})^{-1} = ((A + BK_{pr})^{-1}(E - BK_{de}))^{-1}.$$

بنابراین،

$$(N + MK_{de})^{-1} = (E - BK_{de})^{-1}(A + BK_{pr}),$$

و از (۸۳.۳) و لم ۱.۱.۱ نتیجه می‌شود که مجموعه مقادیر ویژه  $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ، مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته  $(E - BK_{de})^{-1}(A + BK_{pr})$  است که بنابر (۷۲.۳)، ماتریس حلقه بسته سیستم (۱۱.۳) با قانون پس‌خورد (۷۶.۳) نیز است. پس، (۷۸.۳) برقرار است و مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته (۱۱.۳) با قانون پس‌خورد (۷۶.۳) برابر با  $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  است. □

**ملاحظه ۲.۶.۳.** سیستم (۱۱.۳) با پس‌خورد حالت مشتق و گزاره‌ای (۷۶.۳) و سیستم (۸۲.۳) را در نظر بگیرید. همان‌طور که در برهان قضیه ۲.۶.۳ توضیح داده شد و بنابر (۷۹.۳)، ماتریس‌های حلقه بسته این دو سیستم به ترتیب به صورت  $(E - BK_{de})^{-1}(A + BK_{pr})$  و  $(A + (E - BK_{de})^{-1}(A + BK_{pr}))$  هستند. بنابراین با تخصیص وارون مقادیر ویژه مطلوب یعنی،  $\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$  روی سیستم (۸۲.۳)، مقادیر ویژه سیستم توسیع‌یافته (۱۱.۳) با قانون پس‌خورد (۷۶.۳) به صورت  $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  خواهد بود.

**مثال ۲.۶.۳.** مثال ۱.۶.۳ را با ماتریس  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  در نظر بگیرید که ماتریسی منفرد است.

با استفاده از روش تبدیلات تشابهی در بخش ۲.۲، ماتریس پس‌خورد حالت گزاره‌ای

$$K_{pr} \text{ با تخصیص مقادیر ویژه } \{-1, -1, -1\} \text{ به شکل}$$

$$K_{pr} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix},$$

و نتایج محاسبات برای سیستم (۸۲.۳)، با تخصیص مقادیر ویژه  $L = \{-\omega/5 \pm \omega/5i, -\omega/5\}$  به صورت زیر است:

$$N = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad K_{de} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

شکل‌های ۲.۶.۳ نتایج به دست آمده را نشان می‌دهند.

### ۳.۶.۳ پایدارسازی سیستم‌های توسیع‌یافته گسسته-زمانی با استفاده

#### از پس‌خورد حالت پیشرو

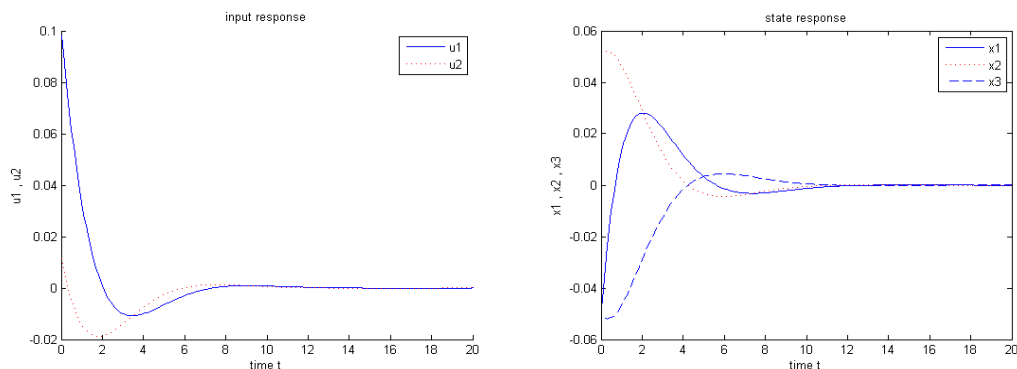
سیستم (۱۲.۳) را با قانون پس‌خورد حالت پیشرو

$$u_i = K'_f x_{i+1}, \quad (۸۴.۳)$$

در نظر بگیرید. برای رسیدن به نتایج مطلوب، فرضیات (۷۰.۳) را در نظر می‌گیریم. اگر

فرضیات (۷۰.۳) برقرار باشند،  $K'_f$  وجود دارد به طوری که [۵]

$$\text{rank}(E - BK'_f) = n. \quad (۸۵.۳)$$



شکل ۴.۳: پایداری بردارهای حالت و ورودی در مثال ۲.۶.۳

با شرط برقراری (۸۵.۳) برای  $K'_f$  و با قرار دادن عبارت (۸۴.۳) در (۱۲.۳)، می‌توان نوشت:

$$Ex_{i+1} = Ax_i + BK'_f x_{i+1} \Rightarrow (E - BK'_f)x_{i+1} = Ax_i.$$

بنابراین سیستم استاندارد معادل به صورت زیر خواهیم داشت:

$$x_{i+1} = (E - BK'_f)^{-1} Ax_i, \quad (۸۶.۳)$$

که با داشتن رابطه (۸۵.۳) قابل تعریف است.

**قضیه ۳.۶.۳.** ماتریس‌های  $N'$  و  $M'$  را به صورت (۷۳.۳) و مجموعه مقادیر ویژه  $L$  را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که زوج  $(M', N')$  کنترل پذیر باشد. همچنین، فرض کنید  $K'_f$  ماتریس پس خورد حالت پیشرو باشد که مقادیر ویژه  $\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$  را به سیستم حلقه بسته

$$\begin{cases} z_{i+1} = N'z_i + M'w_i, \\ w_i = K'_f z_i, \end{cases} \quad (۸۷.۳)$$

تخصیص دهد،  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ،  $\lambda_i \neq 0$  و  $i = 1, \dots, n$ . آن‌گاه  $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ، مقادیر ویژه سیستم کنترل شده (۱۲.۳) با پس خورد حالت پیشرو  $K'_f$  است و شرط (۸۵.۳) برقرار است.

برهان. مشابه با برهان قضیه ۱.۶.۳ است. □

**مثال ۳.۶.۳.** سیستم توسیع‌یافته

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ x_{3i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ x_{3i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} u_i,$$

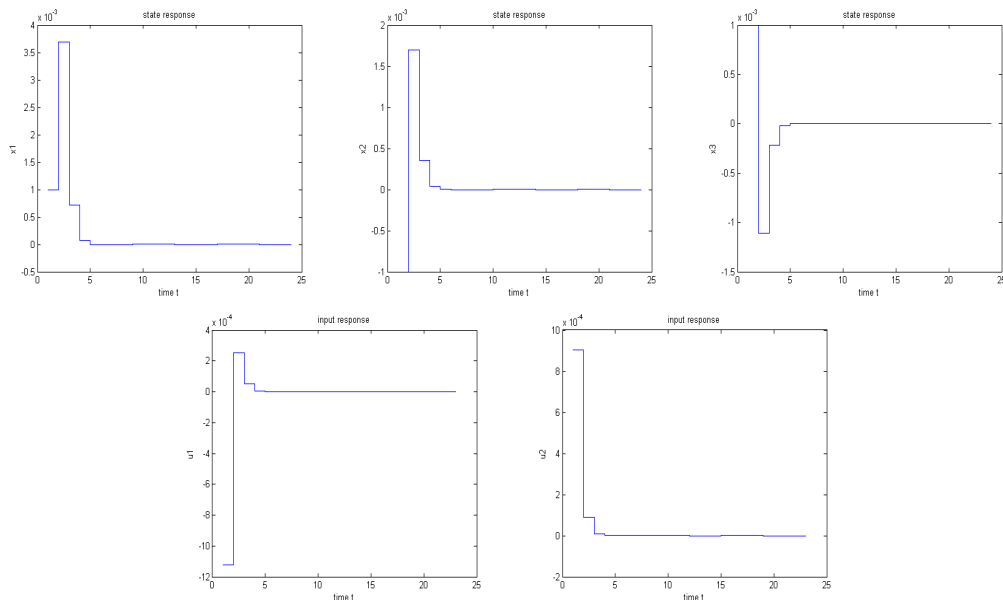
را با مقادیر ویژه مطلوب  $\lambda_1 = 0/1$  و  $\lambda_{2,3} = 0/1 \pm 0/1i$  در نظر بگیرید. با استفاده از روش تبدیلات تشابهی در بخش ۲.۲، نتایج به صورت

$$N' = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 0 \\ -3 & 1/5 & 0 \\ 1 & -0/5 & 0 \end{bmatrix}, \quad M' = \begin{bmatrix} 13 & 32 \\ 7 & 17 \\ -4 & -7 \end{bmatrix}, \quad K'_f = \begin{bmatrix} -10/29 & 16/87 & -7/29 \\ 2/59 & -2/93 & 3/28 \end{bmatrix},$$

به دست می‌آید و داریم:

$$\Omega((E - BK_f')^{-1}A) = \{0/\pm 0/i, 0/\pm\}.$$

شکل‌های ۳.۶.۳ نتایج به دست آمده را نشان می‌دهند.



شکل ۵.۳: پایداری بردارهای حالت و ورودی در مثال ۳.۶.۳

واضح است که شرط دوم در (۷۰.۳) تنها در سیستم‌های خاصی برقرار است و اگر ماتریس  $A$  منفرد باشد، نمی‌توان از پس‌خورد حالت پیشرو برای پایدارسازی سیستم استفاده نمود. این مشکل با استفاده از پس‌خورد حالت پیشرو و گزاره‌ای برطرف می‌شود.

### ۴.۶.۳ پایدارسازی سیستم‌های توسیع یافته گسسته-زمانی با استفاده

#### از پس‌خورد حالت پیشرو و گزاره‌ای

سیستم (۱۲.۳) را با قانون پس‌خورد حالت پیشرو و گزاره‌ای

$$u_i = K_f x_{i+1} + K_p x_i, \quad (۸۸.۳)$$

در نظر بگیرید. برای رسیدن به نتایج مطلوب، فرضیات (۷۷.۳) را در نظر می‌گیریم. اگر فرضیات (۷۷.۳) برقرار باشند،  $K_f$  وجود دارد به طوری که [۵]

$$\text{rank}(E - BK_f) = n. \quad (۸۹.۳)$$

با شرط برقراری شرط (۸۹.۳) برای  $K_f$  و با قرار دادن عبارت (۸۸.۳) در (۱۲.۳)، می‌توان نوشت:

$$E x_{i+1} = A x_i + BK_f x_{i+1} + BK_p x_i \Rightarrow (E - BK_f) x_{i+1} = (A + BK_p) x_i.$$

بنابراین سیستم استاندارد معادل به صورت زیر خواهیم داشت:

$$x_{i+1} = (E - BK_f)^{-1}(A + BK_p)x_i, \quad (90.3)$$

که با داشتن رابطه (۸۹.۳) قابل تعریف است.

**ملاحظه ۳.۶.۳.** وقتی از پس‌خورد پیشرو و گزاره‌ای به جای پس‌خورد حالت پیشرو استفاده می‌کنیم نیازی به برقراری شرط رتبه کامل بودن ماتریس  $A$  در سیستم توسیع‌یافته (۲.۳) نداریم و این مطلب نشان‌دهنده‌ی برتر بودن پس‌خورد حالت پیشرو و گزاره‌ای نسبت به پس‌خورد حالت پیشرو است.

برای محاسبه  $K_f$  و  $K_p$  در (۸۸.۳)، ابتدا پس‌خورد حالت گزاره‌ای  $K_p$  را با استفاده از روش تبدیلات تشابهی روی سیستم

$$\begin{cases} g_{i+1} = Ag_i + Bv_i, \\ v_i = K_p g_i, \end{cases} \quad (91.3)$$

به دست می‌آوریم به طوری که مقادیر ویژه ناصفر مطلوب  $\Omega = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$  را به این سیستم اختصاص دهد.

سپس، پس‌خورد حالت پیشرو  $K_f$  را با استفاده از همان روش تبدیلات تشابهی روی سیستم (۹۳.۳) با اختصاص وارون مقادیر ویژه مطلوب برای سیستم (۲.۳)، یعنی  $\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$ ، به دست می‌آوریم. برای درک بهتر این مطلب قضیه ۴.۶.۳ را ببینید.

**قضیه ۴.۶.۳.** ماتریس‌های  $M$  و  $N$  را به صورت

$$N = (A + BK_p)^{-1}E, \quad M = -(A + BK_p)^{-1}B, \quad (92.3)$$

و مجموعه مقادیر ویژه  $\Omega$  را برای محاسبه ماتریس پس‌خورد حالت گزاره‌ای  $K_p$  به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که زوج  $(M, N)$  کنترل‌پذیر باشد. همچنین، فرض کنید  $K_f$  ماتریس پس‌خورد حالت پیشروی باشد که مقادیر ویژه  $\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$  را به سیستم حلقه بسته

$$\begin{cases} z_{i+1} = Nz_i + Mw_i, \\ w_i = K_f z_i, \end{cases} \quad (93.3)$$

تخصیص دهد،  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ،  $\lambda_i \neq 0$  و  $i = 1, \dots, n$ . آن‌گاه  $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ، مقادیر ویژه سیستم کنترل‌شده (۲.۳) با قانون پس‌خورد پیشرو و گزاره‌ای (۸۸.۳) است و شرط (۸۹.۳) برقرار است.

□ برهان. مشابه با برهان قضیه ۲.۶.۳ است.

**مثال ۴.۶.۳.** مثال ۳.۶.۳ را با ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  در نظر بگیرید که ماتریسی منفرد

است. با استفاده از روش تبدیلات تشابهی در بخش ۲.۲، ماتریس پس‌خورد حالت گزاره‌ای

$K_p$  با تخصیص مقادیر ویژه  $\{1^\circ \pm 1^\circ i, 1^\circ\}$  به شکل

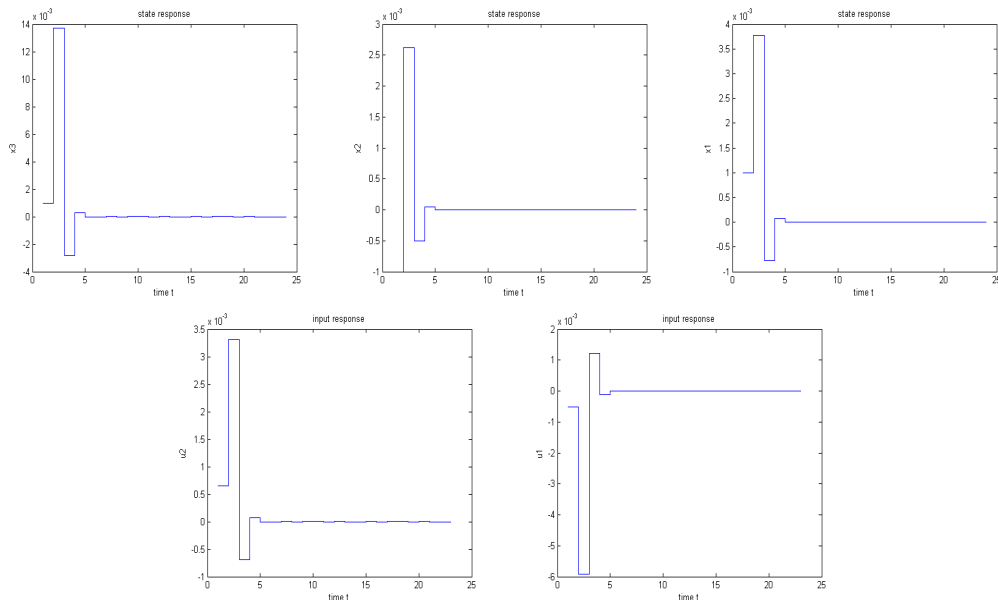
$$K_p = \begin{bmatrix} -53/51 & -22/39 & 11/23 \\ 4/16 & -0/18 & -0/86 \end{bmatrix},$$

و نتایج محاسبات برای سیستم (۹۳.۳)، با تخصیص مقادیر ویژه  $L = \{-1^\circ \pm 1^\circ i, -1^\circ\}$  به صورت زیر هستند:

$$N = \begin{bmatrix} 0/26 & 0/13 & 0 \\ -0/18 & 0 & 0 \\ 0/86 & 0/63 & 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0/04 & 0/4 \\ 0/02 & 0/27 \\ 0/14 & 2/39 \end{bmatrix},$$

$$K_f = 10^4 \times \begin{bmatrix} 0/7194 & 1/2261 & -0/022 \\ 0/0039 & 0 & -0/0011 \end{bmatrix}.$$

شکل‌های ۴.۶.۳ نتایج به دست آمده را نشان می‌دهند.



شکل ۴.۳: پایداری بردارهای حالت و ورودی در مثال ۴.۶.۳

## ۷.۳ پایداری سیستم‌های توسیع‌یافته با استفاده از تخصیص مقادیر ویژه جزئی و پس‌خورد حالت

در این بخش، با استفاده از روش تخصیص مقادیر ویژه جزئی در زیربخش ۲.۴.۲، به پایداری سیستم‌های توسیع‌یافته پیوسته-زمانی با پس‌خورد حالت مشتق و پس‌خورد حالت مشتق و گزاره‌ای و همچنین به پایداری سیستم‌های توسیع‌یافته گسسته-زمانی با پس‌خورد حالت



پیشرو و پس خورد حالت پیشرو و گزاره‌ای می‌پردازیم. در این بخش مانند بخش ۶.۳ از روش تبدیلات تشابهی برای محاسبه پس خوردها استفاده می‌شود ولی نیازی به تخصیص تمام مقادیر ویژه نداریم. یعنی، تنها مقادیر ویژه مطلوبی را به جای مقادیر ویژه‌ای که باعث ناپایداری سیستم‌های مورد نظر می‌شوند تخصیص می‌دهیم و بقیه مقادیر ویژه را ثابت نگه می‌داریم. این روش به خصوص برای سیستم‌هایی با ابعاد بزرگ بسیار سودمند خواهد بود زیرا در این روش سیستم‌ها به سیستم‌هایی با بعد تعداد مقادیر ویژه نامطلوب تبدیل می‌شوند که بعد این سیستم‌های جدید از سیستم‌های اولیه کوچکتر خواهد بود. روش تخصیص مقادیر ویژه با بردار ویژه در زیربخش ۲.۴.۲ در زیربخش‌های ۱.۷.۳ تا ۴.۷.۳ استفاده می‌شود.

### ۱.۷.۳ پایداری سیستم‌های توسعه یافته پیوسته-زمانی با تخصیص مقادیر ویژه جزئی و پس خورد حالت مشتق

در این بخش، برای پایداری سیستم‌های توسعه یافته پیوسته-زمانی از پس خورد حالت مشتق استفاده می‌کنیم. مطالب نوشته شده در این زیربخش در [۷۹] به چاپ رسیده است. برای تخصیص مقادیر ویژه  $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  روی سیستم توسعه یافته پیوسته-زمانی (۱.۳)، بنابر توضیحات زیربخش ۱.۶.۳، کافی است وارون این مقادیر ویژه، یعنی  $\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$  را به سیستم استاندارد (۷۴.۳) تخصیص دهیم. ادامه فرآیند حل و پایداری را طبق روش زیربخش ۲.۴.۲ انجام خواهیم داد.

سیستم (۷۴.۳) را در نظر بگیرید. فرض کنید مقادیر ویژه ماتریس حلقه باز این سیستم، یعنی  $N'$ ، به صورت  $\Omega(N') = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$  با  $p$  مقدار ویژه نامطلوب، مجموعه  $\{\mu_1, \dots, \mu_p\}$  تحت مزدوج مختلط بسته،  $rank(M') = rank(B) = m \leq p$  و مجموعه‌های  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  و  $\{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$  مجزا باشند. هدف محاسبه ماتریس پس خورد حالت مشتق  $K'_{de}$  است طوری که داشته باشیم:

$$\Omega(N' + M'K'_{de}) = \{\mu_1, \dots, \mu_p; \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}.$$

یعنی، ماتریس پس خورد  $K'_{de}$  را به گونه‌ای محاسبه کنیم که مقادیر ویژه  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  را به طور دلخواه دوباره تخصیص دهد و مقادیر ویژه  $\{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$  ثابت باقی بمانند. برای این کار بنابر قضیه ۱.۶.۳ کافی است مقادیر ویژه‌ای از ماتریس  $N'$  را که وارون آن‌ها در سمت چپ صفحه مختلط نیستند را دوباره تخصیص دهیم. این تخصیص می‌تواند با استفاده از روش تبدیلات تشابهی در بخش ۲.۲ یا روش مقادیر ویژه معکوس در بخش ۳.۲ انجام شود. اگر زوج و ماتریس مورد نظر برای تخصیص مقادیر ویژه  $\{\mu_1, \dots, \mu_p\}$  را با  $(Y_1^H M', \Lambda_1)$  و  $K$  نشان دهیم که تعاریف آن‌ها در (۶۵.۲) آمده است، آن‌گاه ماتریس پس خورد حالت مشتق به صورت

$$K'_{de} = KY_1^H, \quad (94.3)$$

تعریف می‌شود که  $Y_1$  شامل  $p$  ستون متناظر با مقادیر ویژه  $\lambda_p, \dots, \lambda_1$  از بردار ویژه چپ ماتریس

$N'$  است.

مثال ۱.۷.۳. سیستم توسیع‌یافته پیوسته-زمانی (۱.۳) را با ماتریس‌های

$$E = \begin{bmatrix} 0 & -7 & 4 & 6 & 3 & 3 & 16 & 2 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 0 & -7 & 3 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 6 & 6 & 2 & 3 & 1 & 3 & -7 & 3 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 7 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & -7 & -17 & 4 & 3 & 1 & 2 & -7 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & -7 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 & -7 \\ 12 & 0 & 3 & 6 & -7 & 3 & -7 & 7 & 6 & 0 \\ -7 & 1 & 3 & 7 & 3 & 1 & 0 & 2 & 7 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & 6 & 1 & 14 & 4 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{10 \times 10}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 & 6 & 3 & 3 & -6 & 12 & 6 & 8 \\ 3 & 7 & 6 & 8 & 5 & 9 & 10 & -8 & 1 & 4 \\ 6 & 6 & 2 & 9 & 1 & 3 & 5 & 9 & 0 & 9 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 7 & 8 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 5 & 4 & 9 & 1 & 2 & 5 & 8 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 15 & 2 & 3 & 4 & 2 & 9 & 5 \\ 2 & 8 & 9 & 6 & -5 & 3 & 5 & 7 & -16 & 0 \\ 5 & 1 & 9 & 17 & 9 & 1 & 0 & 2 & 7 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & 6 & 1 & 4 & 4 & 9 & 2 & 5 \\ 7 & 6 & 0 & 7 & 1 & 8 & 6 & 6 & 5 & 5 \end{bmatrix}_{10 \times 10}$$

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 9 & 2 & 2 \\ 11 & 3 & -5 \\ 9 & 6 & 4 \\ 6 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -9 & -11 \\ 5 & 2 & 5 \\ 9 & -1 & -2 \\ 9 & 2 & 6 \end{bmatrix}_{10 \times 3}$$

در نظر بگیرید. در این مثال از ماتریس پس‌خورد حالت مشتق استفاده می‌کنیم. زوج  $(M', N')$

در سیستم (۷۴.۳) با تعاریف (۷۳.۳) به صورت

$$N'_1 = \begin{bmatrix} -۳/۸۸ & ۰/۰۹ & -۱/۳۸ & ۰/۲۵ & ۰/۷۷ \\ -۱/۴۶ & -۰/۶۴ & -۲/۸۲ & -۰/۶۶ & ۰/۳۴ \\ ۱/۹۲ & -۰/۸۲ & -۲/۹۴ & ۰/۲۳ & ۰/۲۴ \\ -۰/۴۸ & ۰/۳۹ & ۲/۰۳ & -۰/۲۴ & -۰/۲۲ \\ -۱/۸۴ & ۰/۲۲ & ۲/۴۷ & ۱/۱۷ & -۰/۴۵ \\ ۰/۷۸ & -۰/۵ & ۱/۷۸ & ۰/۸ & -۰/۶۷ \\ ۲/۳۱ & ۱ & ۱/۱۵ & -۰/۵۸ & -۰/۵۴ \\ ۱/۳۷ & -۰/۴۵ & ۰/۵۵ & ۰/۴۱ & -۰/۱۲ \\ ۰/۹۸ & -۰/۶۷ & -۲/۵ & -۰/۸۵ & ۰/۵۵ \\ ۱/۵۷ & ۰/۸۵ & -۰/۴۱ & ۰/۳ & ۰/۲۳ \end{bmatrix},$$

$$N'_2 = \begin{bmatrix} -۴/۴۱ & -۴/۹۲ & -۰/۶۱ & -۱/۰۳ & ۲/۵۷ \\ -۲/۶۲ & -۳/۱۸ & -۰/۹۵ & -۱/۰۵ & ۰/۷۴ \\ ۴/۳۵ & -۱/۱۲ & -۰/۵۱ & -۱/۲۱ & -۴/۹ \\ -۱/۶۵ & ۱/۲ & ۰/۷ & ۱/۲۸ & ۱/۸۶ \\ -۳/۰۴ & ۲/۲۸ & ۰/۲۳ & ۱/۷۷ & ۵/۳ \\ ۲/۱۲ & ۲/۸۷ & ۰/۵۲ & ۰/۸۲ & -۰/۷۳ \\ ۱/۵۲ & ۲/۱۵ & ۰/۳۳ & ۰/۴۶ & -۰/۵۶ \\ ۱/۴۷ & ۲/۴۵ & ۰/۳۴ & ۰/۸۲ & -۰/۴۶ \\ ۲/۲۴ & -۰/۳۷ & -۰/۷۳ & -۱/۱۲ & -۳/۵۳ \\ ۳/۰۳ & -۱/۱۹ & ۰/۰۵ & -۱/۱۷ & -۲/۲۲ \end{bmatrix},$$

$$M' = \begin{bmatrix} -۰/۰۹ & -۰/۱۲ & -۲/۴۵ \\ ۰/۶۷ & ۱/۱۱ & -۰/۰۷ \\ ۱/۳۳ & ۳/۸۹ & ۳/۳ \\ -۰/۱۹ & -۱/۷۶ & -۱/۳۵ \\ -۲/۰۳ & -۳/۳۲ & -۳/۲۴ \\ -۰/۶۴ & ۰/۰۳ & -۰/۴۶ \\ -۰/۸۲ & -۱/۱۶ & ۰/۸ \\ -۰/۵۴ & -۰/۲۹ & ۰/۳۴ \\ ۱/۱۴ & ۲/۰۶ & ۱/۶۴ \\ -۰/۲۷ & ۱/۲ & ۲/۵۸ \end{bmatrix},$$

به دست می‌آیند که  $N' = [N'_1 \ N'_2]$  داریم:

$$\Omega(N') = \{-۶/۴۹, -۲/۸۴, -۰/۸۶, -۰/۱۸ \pm ۰/۹۸i, -۰/۰۱ \pm ۰/۳۶i, ۰, ۱/۸۵ \pm ۰/۷۴i\}.$$

بنابراین  $p = 3$ ،

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 1/85 + 0/74i & 0 & 0 \\ 0 & 1/85 - 0/74i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y_1^H M' = \begin{bmatrix} 0/09 + 0/05i & -0/01 - 0/09i & 0/44 - 0/09i \\ 0/09 - 0/05i & -0/01 + 0/09i & 0/44 + 0/09i \\ 0/5 & 0/11 & 0/33 \end{bmatrix}.$$

با تخصیص مقادیر ویژه  $\{-1, -1, -1\}$  به جای  $\{0, 1/85 - 0/74i, 1/85 + 0/74i\}$  ماتریس پس خورد  $K$  و  $K'_{de}$  به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$K = \begin{bmatrix} 0/43 - 3/68i & 0/43 + 3/68i & -1/9 \\ 7/46 - 10/87i & 7/46 + 10/87i & -1/53 \\ -3/13 - 1/89i & -3/13 + 1/89i & 0/38 \end{bmatrix}, K'_{de} = KY_1^H = [(KY_1^H)_1 \quad (KY_1^H)_2],$$

که

$$(KY_1^H)_1 = \begin{bmatrix} 0/5 & 0/71 & 0/41 & 1/63 & 0/39 \\ -1/44 & 1/94 & -3/28 & -0/18 & 1/92 \\ 1/88 & -0/72 & 0/46 & -1/22 & -1/06 \end{bmatrix},$$

$$(KY_1^H)_2 = \begin{bmatrix} 1/35 & 0/1 & 0/96 & 0/56 & 1/22 \\ -7/86 & -8/76 & -0/85 & 0/71 & -3/25 \\ 1/91 & 3/76 & -0/15 & -2/2 & 6/73 \end{bmatrix}.$$

داریم:

$$\Omega(N' + M'K'_{de}) = \{-6/49, -2/84, -0/86, -0/18 \pm 0/98i, -0/01 \pm 0/36i, -1, -1, -1\},$$

و همچنین برای مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته سیستم (۱۱.۳) با قانون پس خورد حالت مشتق (۶۹.۳) داریم:

$$\Omega((E - BK'_{de})^{-1}A) = \{-0/09 \pm 2/73i, -0/18 \pm 0/97i, -1/15, -0/35, -0/15, -1, -1, -1\}.$$

شکل ۷.۳ نتایج به دست آمده را نشان می‌دهد وقتی که

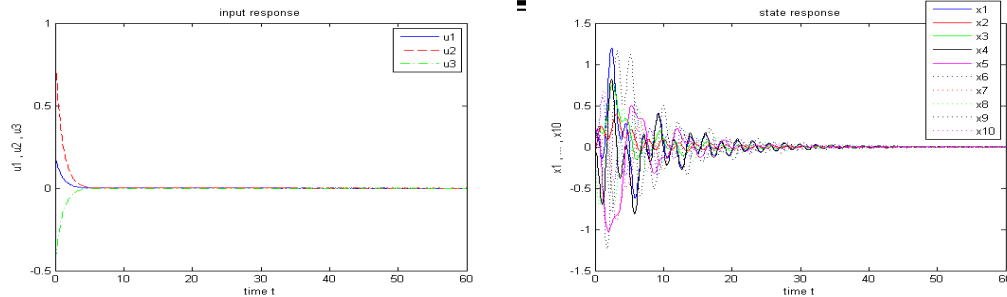
$$x_0 = \begin{bmatrix} 0/05 & -0/05 & 0/05 & -0/05 & 0/05 & -0/05 & 0/05 & -0/05 & 0/05 & -0/05 \end{bmatrix}^T.$$

## ۲.۷.۳ پایدارسازی سیستم‌های توسیع یافته پیوسته-زمانی با تخصیص

### مقادیر ویژه جزئی و پس خورد حالت مشتق و گزاره‌ای

در این بخش، برای پایدارسازی سیستم‌های توسیع یافته پیوسته-زمانی از پس خورد حالت مشتق و گزاره‌ای استفاده می‌کنیم. مطالب نوشته شده در این زیربخش در [۸۳] به چاپ رسیده

## پایداری سیستم‌های توسیع‌یافته با استفاده از تخصیص مقادیر ویژه جزئی و پس‌خورد حالت ۷۱



شکل ۷.۳: پایداری بردارهای حالت و ورودی در مثال ۱.۷.۳

است.

برای تخصیص مقادیر ویژه  $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  روی سیستم توسیع‌یافته پیوسته-زمانی (۱۱.۳)، بنابر توضیحات زیربخش ۲.۶.۳، کافی است وارون این مقادیر ویژه، یعنی  $\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$  را به سیستم استاندارد (۸۲.۳) تخصیص دهیم. ادامه فرآیند حل و پایداری را طبق روش زیربخش ۲.۴.۲ انجام می‌دهیم. لازم به ذکر است که برای تخصیص مقادیر ویژه برای سیستم (۸۰.۳) کافی است مقادیر ویژه را دلخواه ولی مخالف صفر در نظر گرفت و به راحتی ماتریس پس‌خورد  $K_{pr}$  را محاسبه نمود.

سیستم (۸۲.۳) را در نظر بگیرید. فرض کنید مقادیر ویژه ماتریس حلقه باز این سیستم، یعنی  $N$ ، به صورت  $\Omega(N) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$  با  $p$  مقدار ویژه نامطلوب، مجموعه  $\{\mu_1, \dots, \mu_p\}$  تحت مزدوج مختلط بسته،  $rank(M) = rank(B) = m \leq p$  و مجموعه‌های  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  و  $\{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$  مجزا باشند. هدف محاسبه ماتریس پس‌خورد حالت مشتق  $K_{de}$  است طوری که داشته باشیم:

$$\Omega(N + MK_{de}) = \{\mu_1, \dots, \mu_p; \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}.$$

یعنی، ماتریس پس‌خورد  $K_{de}$  را به گونه‌ای محاسبه کنیم که مقادیر ویژه  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  را به طور دلخواه دوباره تخصیص دهد و مقادیر ویژه  $\{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$  ثابت باقی بمانند. برای این کار بنابر قضیه ۲.۶.۳ کافی است مقادیر ویژه‌ای از ماتریس  $N$  را که وارون آن‌ها در سمت چپ صفحه مختلط نیستند را دوباره تخصیص دهیم. این تخصیص می‌تواند با استفاده از روش تبدیلات تشابهی در بخش ۲.۲ یا روش مقادیر ویژه معکوس در بخش ۳.۲ انجام شود. اگر زوج و ماتریس مورد نظر برای تخصیص مقادیر ویژه  $\{\mu_1, \dots, \mu_p\}$  را با  $(Y_1^H M, \Lambda_1)$  و  $K$  نشان دهیم که تعاریف آن‌ها در (۶۵.۲) آورده شده است. آن‌گاه ماتریس پس‌خورد حالت مشتق به صورت

$$K_{de} = KY_1^H, \quad (۹۵.۳)$$

تعریف می‌شود که  $Y_1$  شامل  $p$  ستون متناظر با مقادیر ویژه  $\lambda_p, \dots, \lambda_1$  از بردار ویژه چپ ماتریس  $N$  است.

مثال ۲.۷.۳. سیستم توسیع‌یافته پیوسته-زمانی (۱.۳) را با ماتریس‌های

$$E = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 4 & 6 & 3 & 3 & 6 & 2 & -6 & 0 \\ 1 & -7 & 4 & 6 & 3 & 3 & 6 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 3 & 1 & 3 & -7 & 3 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 7 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -7 & -7 & 4 & 3 & 1 & 2 & -7 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 2 & -7 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 & -7 \\ 1 & 0 & 3 & 6 & -7 & 3 & 7 & 7 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 7 & 3 & 1 & 0 & 2 & 7 & 7 \\ -4 & 1 & 3 & 6 & 1 & 4 & 4 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{10 \times 10},$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 & -6 & 3 & 3 & -6 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & -7 & -6 & 8 & 5 & -9 & 0 & 8 & 1 & -4 \\ 0 & -6 & 2 & -9 & 1 & 3 & 5 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 7 & 8 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 5 & 4 & -9 & 1 & 2 & 5 & 8 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 2 & 3 & 4 & 2 & -9 & 7 \\ 0 & 0 & -9 & 6 & 5 & 3 & 5 & 7 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -9 & 7 & -9 & 1 & 0 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 1 & 4 & 4 & -9 & 2 & 8 \\ 0 & -6 & 0 & -7 & 1 & 0 & 6 & 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}_{10 \times 10}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \\ 1 \\ -9 \\ 6 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ -9 \\ -9 \end{bmatrix}_{10 \times 1},$$

در نظر بگیرید که  $rank(A) = 9 < 10$ . در این مثال از پس‌خورد حالت مشتق و گزاره‌ای استفاده می‌کنیم.

$$\Omega(A) = \{-13/06, 6/46 \pm 10/22i, -5/47 \pm 3/11i, 0, 2/35, 6/38 \pm 3/4i, 20/81\}.$$

بنابراین  $p = 5$ ,

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 20/81 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6/38 + 3/4i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6/38 - 3/4i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_1^H B = \begin{bmatrix} 8/91 \\ 7/99 - 3/19i \\ 7/99 + 3/19i \\ 8/56 \\ 10/05 \end{bmatrix}.$$

با تخصیص مقادیر ویژه  $\{-20, -10 \pm 5i, -10, -5\}$  به جای  $\{0, 2/35, 6/38 \pm 3/4i, 20/81\}$  ماتریس پس‌خورد  $K$  و  $K_{pr}$  به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$K = \begin{bmatrix} -42/02 & 19/77 - 44/03i & 19/77 + 44/03i & 34/73 & 0 \end{bmatrix},$$

پایدارسازی سیستم‌های توسیع‌یافته با استفاده از تخصیص مقادیر ویژه جزئی و پس‌خورد حالت ۷۳

$$K_{pr} = KY_1^H = [(KY_1^H)_1 \quad (KY_1^H)_2],$$

که

$$(KY_1^H)_1 = [-0/59 \quad -1/86 \quad 19/56 \quad 1/3 \quad 21/16],$$

$$(KY_1^H)_2 = [16/06 \quad 37/44 \quad -11/86 \quad 14/42 \quad 13/72].$$

زوج  $(M, N)$  در سیستم (۸۲.۳) با تعاریف (۸۱.۳) به صورت

$$N_1 = \begin{bmatrix} 1/17 & -16/23 & -20/28 & 47/75 & -32/08 \\ -0/13 & 0/3 & -0/31 & 0/98 & -0/39 \\ -0/12 & -0/84 & -0/67 & -0/71 & 0 \\ -0/07 & -0/84 & -0/24 & -0/43 & -0/25 \\ -0/15 & 0/37 & 0/52 & 0/76 & -0/1 \\ -0/49 & -0/24 & -0/3 & -2/35 & -1/06 \\ 0/31 & -0/2 & -0/5 & 0/77 & -0/36 \\ -0/05 & -0/36 & -0/24 & -0/94 & -0/15 \\ 0/08 & -0/33 & -0/15 & 0/95 & -0/21 \\ 0/05 & 0/92 & 0/93 & 0/93 & 1/09 \end{bmatrix},$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 39/5 & 24/16 & 10/37 & 6/4 & -7/73 \\ 0/31 & 0/97 & -0/22 & -0/16 & 1/66 \\ -0/27 & -0/29 & -0/59 & -0/48 & -1/15 \\ -0/23 & -0/08 & -0/06 & 0/21 & -1/13 \\ 0/59 & 0/79 & 0/57 & 0 & -0/04 \\ -1/27 & -0/99 & 0/15 & -0/38 & -2/74 \\ 0/52 & 0/23 & -0/13 & 0/4 & 1/3 \\ -0/4 & 0/02 & -0/2 & -0/1 & -0/72 \\ 0/1 & 0/23 & -0/04 & -0/1 & 0/29 \\ 0/86 & 0/66 & 0/44 & 0/32 & 0/46 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1/67 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

به دست می‌آیند که  $N = [N_1 \quad N_2]$  داریم:

$$\Omega(N) = \{-1/28, -1/09 \pm 3/78i, -0/78, -0/43, 0, 0/35 \pm 0/35i, 0/54, 2/81\}.$$

بنابراین  $p = 5$ ،

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 2/81 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0/35 - 0/35i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0/54 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0/35 + 0/35i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Y_1^H M = \begin{bmatrix} -0/06 \\ -0/02 \\ -0/02 \\ -0/02 \\ -0/01 \end{bmatrix} .$$

با تخصیص مقادیر ویژه  $\{-0/25, -0/2, -0/16, -0/12 \pm 0/09i\}$  به جای  $\{0, 0/35 \pm 0/35i\}$ ،  
 ماتریس پس خورد  $K$  و  $K_{de}$  به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$K = \begin{bmatrix} 97/76 & 1/65 - 12/96i & -46/36 & 1/65 + 12/96i & 0/02 \end{bmatrix},$$

$$K_{de} = KY_1^H = \left[ (KY_1^H)_3 \quad (KY_1^H)_4 \right],$$

که

$$(KY_1^H)_3 = \begin{bmatrix} -2/94 & 3/03 & 28/57 & -29/82 & 42/25 \end{bmatrix},$$

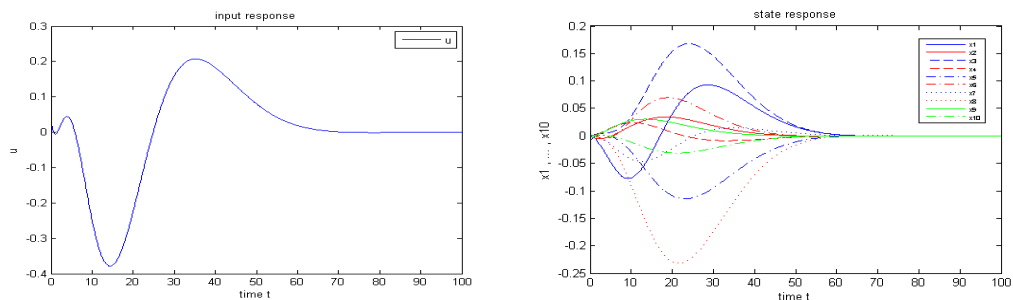
$$(KY_1^H)_4 = \begin{bmatrix} -23/98 & -18/54 & -7/48 & -22/55 & 21/1 \end{bmatrix}.$$

داریم:

$$\begin{aligned} \Omega((E - BK_{de})^{-1}(A + BK_{pr})) &= \Omega((N + MK_{de})^{-1}) \\ &= \{-6, -5 \pm 4i, -5, -4, -2/3, -1/27, -0/77, -0/07 \pm 0/24i\}, \end{aligned}$$

شکل ۸.۳ نتایج به دست آمده را نشان می‌دهد وقتی که

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0/001 & -0/001 & 0/001 & -0/001 & 0/001 & -0/001 & 0/001 & -0/001 \\ 0/001 & -0/001 \end{bmatrix}^T.$$



شکل ۸.۳: پایداری بردارهای حالت و ورودی در مثال ۲.۷.۳



### ۳.۷.۳ پایدارسازی سیستم‌های توسیع‌یافته گسسته-زمانی با تخصیص مقادیر ویژه جزئی و پس‌خورد حالت پیشرو

در این بخش، برای پایدارسازی سیستم‌های توسیع‌یافته گسسته-زمانی از پس‌خورد حالت پیشرو استفاده می‌کنیم. مطالب نوشته‌شده در این زیربخش در [۸۰] به چاپ رسیده است.

برای تخصیص مقادیر ویژه  $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  روی سیستم توسیع‌یافته گسسته-زمانی (۱۲.۳)، بنابر توضیحات زیربخش ۳.۶.۳، کافی است وارون این مقادیر ویژه، یعنی  $\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$  را به سیستم استاندارد (۸۷.۳) تخصیص دهیم. ادامه فرآیند حل و پایدارسازی را طبق روش زیربخش ۲.۴.۲ انجام خواهیم داد.

سیستم (۸۷.۳) را در نظر بگیرید. فرض کنید مقادیر ویژه ماتریس حلقه باز این سیستم، یعنی  $N'$ ، به صورت  $\Omega(N') = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$  با مقدار ویژه نامطلوب، مجموعه  $\{\mu_1, \dots, \mu_p\}$  تحت مزدوج مختلط بسته،  $rank(M') = rank(B) = m \leq p$  و مجموعه‌های  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  و  $\{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$  مجزا باشند. هدف محاسبه ماتریس پس‌خورد حالت پیشرو  $K'_f$  است طوری که داشته باشیم:

$$\Omega(N' + M'K'_f) = \{\mu_1, \dots, \mu_p; \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}.$$

یعنی، ماتریس پس‌خورد  $K'_f$  را به‌گونه‌ای محاسبه کنیم که مقادیر ویژه  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  را به‌طور دلخواه دوباره تخصیص دهد و مقادیر ویژه  $\{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$  ثابت باقی بمانند. برای این کار بنابر قضیه ۳.۶.۳ کافی است مقادیر ویژه‌ای از ماتریس  $N'$  را که وارون آن‌ها در داخل دایره واحد نیستند را دوباره تخصیص دهیم. اگر زوج و ماتریس مورد نظر برای تخصیص مقادیر ویژه  $\{\mu_1, \dots, \mu_p\}$  را با  $(Y_1^H M', \Lambda_1)$  و  $K$  نشان دهیم که تعاریف آن‌ها در (۶۵.۲) آورده شده است. آن‌گاه ماتریس پس‌خورد حالت پیشرو به‌صورت

$$K'_f = KY_1^H, \quad (۹۶.۳)$$

تعریف می‌شود که  $Y_1$  شامل  $p$  ستون متناظر با مقادیر ویژه  $\lambda_p, \dots, \lambda_1$  از بردار ویژه چپ ماتریس  $N'$  است.

مثال ۳.۷.۳. سیستم توسیع‌یافته گسسته-زمانی (۱۲.۳) را با ماتریس‌های

$$E = \begin{bmatrix} -7 & 4 & -3 & 3 & 3 & -6 & 2 & 6 & -7 \\ 3 & -6 & 0 & -7 & 3 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -9 & 8 & -4 & 2 & 7 & 0 & 2 & 0 \\ -7 & -7 & 4 & 3 & 1 & 2 & 7 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -7 & 2 & -3 & 4 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 3 & 6 & -7 & 3 & -7 & 7 & 6 & 0 \\ 6 & 3 & 7 & 3 & 1 & 0 & 2 & 7 & 7 \\ 2 & 2 & 6 & -4 & 6 & -6 & 2 & 7 & -3 \end{bmatrix}_{9 \times 9},$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 & 4 & 3 & -6 & 2 & 6 & -4 \\ 2 & 6 & -4 & -2 & 9 & 0 & -4 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 9 & 1 & 3 & -2 & 9 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 5 & -2 & 4 & 1 & 2 & 5 & 5 & 4 & -5 \\ 4 & 2 & -2 & 2 & 4 & 2 & 9 & 5 & -4 \\ 0 & 6 & -5 & -2 & 2 & -2 & 6 & 0 & 7 \\ 1 & -3 & 9 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 4 & -1 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}_{9 \times 9}, \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -4 \\ 9 & 6 & 3 \\ 6 & -4 & -8 \\ 0 & -1 & 6 \\ 2 & -9 & 7 \\ 5 & 2 & 2 \\ 9 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{9 \times 3},$$

در نظر بگیرید. در این مثال از ماتریس پس‌خورد حالت پیشرو استفاده می‌کنیم. زوج  $(M', N')$  در سیستم (۸۷.۳) با تعاریف (۷۳.۳) به صورت

$$N' = \begin{bmatrix} -5/21 & -3/16 & -0/45 & 0/1 & 0/65 & -0/7 & 1/03 & -2/77 & -3/13 \\ -4/58 & -3/22 & 4/97 & -2/02 & 2/62 & -2/12 & 2/94 & 0/74 & -0/96 \\ 0/51 & -0/51 & 2/12 & -0/48 & 0/96 & -0/89 & 0/83 & 0/87 & 0/54 \\ 2/96 & 1/19 & -3/03 & 1/47 & -2/19 & 4/08 & -3/25 & -0/55 & 1/16 \\ 3/82 & 1/15 & -1/7 & -0/31 & -0/63 & 0/96 & -1/74 & 0/7 & 0/71 \\ -0/27 & -1/41 & 3/01 & 0/53 & 0/5 & 0/92 & 1/09 & 0/78 & 1/85 \\ 0/75 & 0/52 & 0/36 & -0/44 & 0/14 & -0/45 & 0/32 & 0/75 & -0/52 \\ 2/98 & 3/81 & -2/82 & 2/51 & -2/11 & 1/28 & -0/64 & 0/9 & 2/74 \\ 2/59 & 1/97 & -1/71 & 1/12 & -1/56 & 1/72 & -1/31 & 0/06 & 2/32 \end{bmatrix},$$

پایدارسازی سیستم‌های توسیع‌یافته با استفاده از تخصیص مقادیر ویژه جزئی و پس‌خورد حالت ۷۷

$$M' = \begin{bmatrix} 0/24 & 1/81 & 5/02 \\ -2/49 & 1/57 & 2 \\ -1/2 & 0/33 & 0/42 \\ 2/31 & -4/97 & -2/74 \\ -0/38 & -1/27 & -2/4 \\ -1/7 & -0/61 & -0/36 \\ -0/52 & 0/86 & -0/9 \\ 2/73 & -1/5 & -2/53 \\ 1/73 & -1/8 & -1/84 \end{bmatrix},$$

به‌دست می‌آیند. داریم:

$$\Omega(N') = \{-6/66, -0/51 \pm 1/92i, 0, 0/24 \pm 0/47i, 0/72, 1/86, 3/61\}.$$

بنابراین  $p = 4$

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 0/72 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0/24 + 0/47i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0/24 - 0/47i \end{bmatrix},$$

$$Y_1^H M' = \begin{bmatrix} 0/28 & 0/03 & 0/24 \\ 0/05 & 0/05 & 0/23 \\ -0/32i & 0/2 + 0/5i & 0/33 + 0/19i \\ 0/32i & 0/2 - 0/5i & 0/33 - 0/19i \end{bmatrix}.$$

با تخصیص مقادیر ویژه  $\{ \pm 1, \pm 5 \}$  به جای  $\{ 0, 0/24 \pm 0/47i, 0/72 \}$  ماتریس پس‌خورد  $K$  و  $K'_f$  به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$K = 10^2 \times \begin{bmatrix} 0/03 & -7/29 & 2/85 + 0/65i & 2/85 - 0/65i \\ 0/18 & -0/09 & -0/1 - 0/07i & -0/1 + 0/07i \end{bmatrix},$$

$$K'_f = 10^2 \times$$

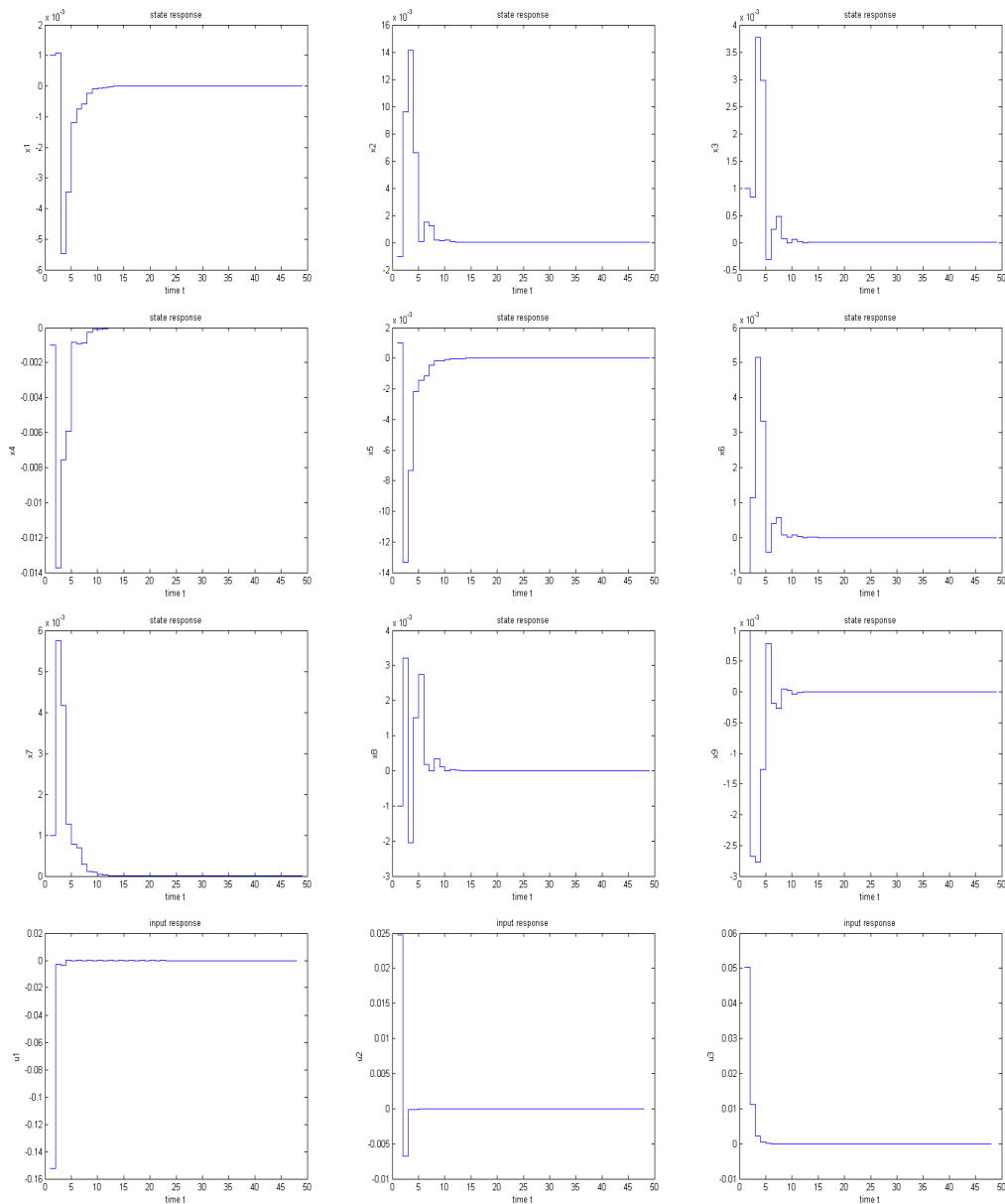
$$\begin{bmatrix} -1/32 & -1/03 & -0/17 & -0/1 & -1/25 & -0/04 & -1/73 & -0/26 & -1/72 \\ -0/06 & 0 & -0/14 & -0/06 & -0/02 & 0/02 & -0/13 & -0/04 & 0/04 \\ -0/09 & -0/01 & -0/17 & -0/05 & -0/04 & 0/02 & -0/16 & -0/03 & -0/03 \end{bmatrix}.$$

داریم:

$$\begin{aligned} \Omega((E - BK'_f)^{-1}A) &= \Omega((N' + M'K'_f)^{-1}) \\ &= \{-0/15, -0/12 \pm 0/48i, 0/27, 0/53, \pm 0/1, \pm 0/2\}. \end{aligned}$$

شکل ۹.۳ نتایج به دست آمده را نشان می‌دهد وقتی که

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0/01 & -0/01 & 0/01 & -0/01 & 0/01 & -0/01 & 0/01 & -0/01 & 0/01 \end{bmatrix}^T.$$



شکل ۹.۳: پایداری بردارهای حالت و ورودی در مثال ۳.۷.۳

## ۴.۷.۳ پایدارسازی سیستم‌های توسیع‌یافته گسسته-زمانی با تخصیص مقادیر ویژه جزئی و پس‌خورد حالت پیشرو و گزاره‌ای

در این بخش، برای پایدارسازی سیستم‌های توسیع‌یافته گسسته-زمانی از پس‌خورد حالت پیشرو و گزاره‌ای استفاده می‌کنیم. برای تخصیص مقادیر ویژه  $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  روی سیستم توسیع‌یافته پیوسته-زمانی (۲.۳)، بنابر توضیحات زیربخش ۴.۶.۳، کافی است وارون این مقادیر ویژه، یعنی  $\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$ ، را به سیستم استاندارد (۹۳.۳) تخصیص دهیم. ادامه فرآیند حل و پایدارسازی را طبق روش زیربخش ۲.۴.۲ انجام خواهیم داد. لازم به ذکر است که برای تخصیص مقادیر ویژه برای سیستم (۹۱.۳) کافی است مقادیر ویژه را دلخواه ولی مخالف صفر در نظر گرفت و به راحتی ماتریس پس‌خورد  $K_p$  را محاسبه نمود.

سیستم (۹۳.۳) را در نظر بگیرید. فرض کنید مقادیر ویژه ماتریس حلقه باز این سیستم، یعنی  $N$ ، به صورت  $\Omega(N) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$  با  $p$  مقدار ویژه نامطلوب، مجموعه  $\{\mu_1, \dots, \mu_p\}$  تحت مزدوج مختلط بسته،  $rank(M) = rank(B) = m \leq p$  و مجموعه‌های  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  و  $\{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$  مجزا باشند. هدف محاسبه ماتریس پس‌خورد حالت پیشرو  $K_f$  است طوری که داشته باشیم:

$$\Omega(N + MK_f) = \{\mu_1, \dots, \mu_p; \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}.$$

یعنی، ماتریس پس‌خورد  $K_f$  را به گونه‌ای محاسبه کنیم که مقادیر ویژه  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  را به طور دلخواه دوباره تخصیص دهد و مقادیر ویژه  $\{\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}$  ثابت باقی بمانند. برای این کار بنابر قضیه ۴.۶.۳ کافی است مقادیر ویژه‌ای از ماتریس  $N$  را که وارون آن‌ها در داخل دایره واحد نیستند را دوباره تخصیص دهیم. اگر زوج و ماتریس مورد نظر برای تخصیص مقادیر ویژه  $\{\mu_1, \dots, \mu_p\}$  را با  $(Y_1^H M, \Lambda_1)$  و  $K$  نشان دهیم که تعاریف آن‌ها در (۶۵.۲) آورده شده است. آن‌گاه ماتریس پس‌خورد حالت پیشرو به صورت

$$K_f = KY_1^H, \quad (۹۷.۳)$$

تعریف می‌شود که  $Y_1$  شامل  $p$  ستون متناظر با مقادیر ویژه  $\lambda_p, \dots, \lambda_1$  از بردار ویژه چپ ماتریس  $N$  است.

مثال ۴.۷.۳. سیستم توسیع‌یافته گسسته-زمانی (۱۱.۳) را با ماتریس‌های

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 4 & 5 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 3 & 2 & -6 & 7 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 5 & -6 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ -5 & 9 & 2 & -4 & 5 & -2 & -1 & 3 & 7 \\ 9 & 3 & -2 & 4 & 5 & -6 & 7 & 6 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 4 & -5 & 6 & 5 & -6 & 3 \\ -3 & 4 & 9 & -9 & 2 & 3 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 4 & 9 & 3 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}_{9 \times 9},$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 & 5 & -2 & 8 & 3 \\ -2 & -3 & 4 & 1 & 10 & -5 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 9 & -4 & 8 & 7 & -6 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -1 & 7 & 4 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & -2 & 5 & 8 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & -3 & 2 & 5 & -8 & 4 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 9 & -6 & 7 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 4 & 9 & 5 & -2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 3 & 5 & -2 & 8 & 3 \end{bmatrix}_{9 \times 9}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & -3 \\ -4 & 7 \\ 5 & -4 \\ 3 & 2 \\ 6 & -1 \\ -4 & 0 \\ 2 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}_{9 \times 2},$$

در نظر بگیرید که  $rank(A) = 8 < 9$ . در این مثال از ماتریس پس‌خورد حالت پیشرو و گزاره‌ای استفاده می‌کنیم. با تخصیص مقادیر ویژه دلخواه مخالف صفر برای  $K_p$  داریم:

$$K_p = \begin{bmatrix} 0/56 & 0/06 & 0 & -0/16 & 0/04 & 0/19 & -0/44 & 0/15 & -0/2 \\ 3/98 & -0/41 & -1/04 & 1/2 & -0/17 & 1/52 & 1/08 & -0/33 & -4/69 \end{bmatrix}.$$

زوج  $(M, N)$  در سیستم (۹۳.۳) با تعاریف (۹۲.۳) به صورت

$$N_1 = \begin{bmatrix} -4/76 & 1/2 & -2/33 & -1/15 & 6/17 \\ -6/35 & 0/6 & -3/72 & -0/68 & 7/93 \\ -8/19 & 0/49 & -3/47 & -1/44 & 7/6 \\ 4/88 & 0/47 & 2/55 & 0/2 & -3/96 \\ 5/01 & -0/2 & 2/18 & 0/69 & -4/95 \\ 7/01 & 0/6 & 3 & 0/88 & -6/34 \\ -0/63 & -0/21 & -0/17 & 0/42 & -0/46 \\ -5/19 & -1/34 & -1/64 & -0/3 & 3/74 \\ 2/19 & 1/24 & 0/76 & 0/11 & -0/47 \end{bmatrix},$$

پایدارسازی سیستم‌های توسیع‌یافته با استفاده از تخصیص مقادیر ویژه جزئی و پس‌خورد حالت ۸۱

$$N_2 = \begin{bmatrix} 1/59 & -5/93 & 1/68 & -4/9 \\ 2/16 & -10/57 & 4 & -6/5 \\ 3/2 & -12/5 & 3/56 & -7/88 \\ -2/77 & 6/17 & 0/52 & 4/23 \\ -2/25 & 5/95 & -1/84 & 5/81 \\ -4/03 & 9/59 & -1/57 & 8/41 \\ 0/74 & -0/5 & -0/8 & 0/19 \\ 4/02 & -6/78 & 0/08 & -5/68 \\ -1/76 & 3/56 & 0/02 & 2/17 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 3/05 & -0/08 \\ 3/98 & 0/15 \\ 4/77 & 0/28 \\ -4/2 & -9/09 \\ -4/36 & -0/08 \\ -6/45 & -0/12 \\ -1/03 & 0/02 \\ 5/28 & 0/13 \\ -2/24 & 0 \end{bmatrix},$$

به‌دست می‌آیند که  $N = [N_1 \ N_2]$  داریم:

$$\Omega(N) = \{-10/44, -4/14, -0/87 \pm 1/38i, 1/24, 0/28 \pm 0/26i, 0, -0/1\}.$$

بنابراین  $p = 4$

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 0/28 - 0/26i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0/28 + 0/26i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0/1 \end{bmatrix},$$

$$Y_1^H M = \begin{bmatrix} 0/51 - 0/16i & -0/12 \\ 0/51 + 0/16i & -0/12 \\ -0/39 & 0/13 \\ -0/18 & 0/02 \end{bmatrix}.$$

با تخصیص مقادیر ویژه  $\{\pm 10, 10 \pm 10i\}$  به جای  $\{0/28 \pm 0/26i, 0, -0/1\}$  ماتریس پس‌خورد  $K_f$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$K_f = 10^3 \times [(K_f)_1 \ (K_f)_2],$$

که

$$(K_f)_1 = \begin{bmatrix} 0/12 & 0/32 & -0/04 & 0/69 & 1/25 \\ -0/23 & -0/82 & -0/02 & -2/07 & -4/93 \end{bmatrix},$$

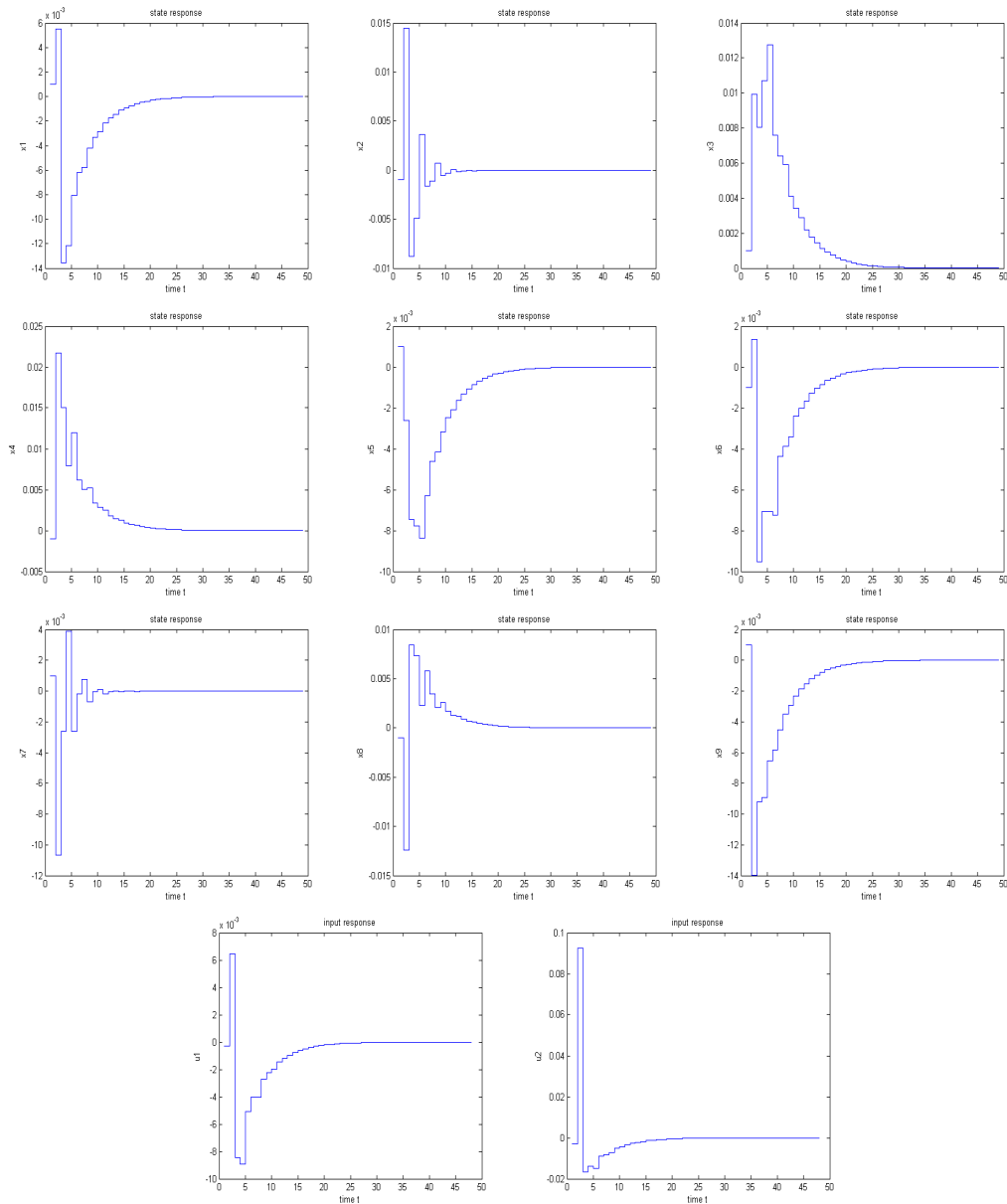
$$(K_f)_2 = \begin{bmatrix} -1/11 & 1 & -0/07 & 0/38 \\ 4/97 & -3/52 & 1/29 & -1/22 \end{bmatrix}.$$

داریم:

$$\begin{aligned} \Omega((E - BK_{de})^{-1}(A + BK_{pr})) &= \Omega((N + MK_{de})^{-1}) \\ &= \{-10/44, -4/14, -0/87 \pm 1/38i, 1/24, \pm 10, 10 \pm 10i\}, \end{aligned}$$

شکل ۱۰.۳ نتایج به دست آمده را نشان می‌دهد وقتی که

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0/000 & -0/000 & 0/000 & -0/000 & 0/000 & -0/000 & 0/000 & -0/000 & 0/000 \end{bmatrix}^T .$$



شکل ۱۰.۳: پایداری بردارهای حالت و ورودی در مثال ۴.۷.۳



## ۸.۳ پایدارسازی سیستم‌های توسیع‌یافته با مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی

در این بخش، به پایدارسازی سیستم‌های توسیع‌یافته پیوسته-زمانی (۱.۳) و گسسته-زمانی (۲.۳) می‌پردازیم. در حالت پیوسته-زمانی، پس‌خورد خروجی مشتق و پس‌خورد خروجی مشتق و گزاره‌ای و در حالت گسسته-زمانی، پس‌خورد خروجی پیشرو و پس‌خورد خروجی پیشرو و گزاره‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد و برتری این پس‌خوردها نسبت به هم بیان می‌شود. هدف اصلی در این بخش، یافتن ماتریس‌های پس‌خورد خروجی است به طوری که ماتریس حلقه بسته سیستم‌ها دارای مقادیر ویژه مطلوب، یعنی داخل دایره واحد و سمت چپ صفحه مختلط، به ترتیب برای حالت‌های گسسته-زمانی و پیوسته-زمانی باشند.

### ۱.۸.۳ پایدارسازی سیستم‌های توسیع‌یافته پیوسته-زمانی با استفاده از پس‌خورد خروجی مشتق

نتایج این زیربخش در مرجع [۷۷] به چاپ رسیده است.

سیستم (۱.۳) را با قانون پس‌خورد خروجی مشتق

$$u(t) = K'_{de} \dot{y}(t) = K'_{de} C \dot{x}(t), \quad (98.3)$$

در نظر بگیرید. برای رسیدن به نتایج مطلوب، فرضیات (۷۰.۳) را در نظر می‌گیریم. اگر فرضیات (۷۰.۳) برقرار باشند،  $K'_{de}$  وجود دارد به طوری که [۵]

$$\text{rank}(E - BK'_{de}C) = n. \quad (99.3)$$

با شرط برقراری شرط (۹۹.۳) برای  $K'_{de}$  و با قرار دادن عبارت (۹۸.۳) در (۱۱.۳)، می‌توان نوشت:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + BK'_{de}C\dot{x}(t) \Rightarrow (E - BK'_{de}C)\dot{x}(t) = Ax(t).$$

بنابراین سیستم استاندارد معادل به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\dot{x}(t) = (E - BK'_{de}C)^{-1}Ax(t), \quad (100.3)$$

که با داشتن رابطه (۹۹.۳) قابل تعریف است.

**قضیه ۱.۸.۳.** ماتریس‌های  $N'$  و  $M'$  را به صورت (۷۳.۳) و مجموعه مقادیر ویژه  $L$  را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که زوج  $(M', N')$  کنترل‌پذیر باشد. همچنین، فرض کنید  $K'_{de}$  ماتریس پس‌خورد خروجی مشتقی باشد که مقادیر ویژه  $\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$  را به سیستم حلقه بسته

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = N'z(t) + M'w(t), \\ w(t) = K'_{de}Cz(t), \end{cases} \quad (101.3)$$

تخصیص دهد،  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ،  $\lambda_i \neq 0$  و  $i = 1, \dots, n$ . آن‌گاه  $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ، مقادیر ویژه سیستم کنترل‌شده (۱.۳) با پس‌خورد خروجی مشتق  $K'_{de}$  است و شرط (۹۹.۳) برقرار است.

□

برهان. مشابه با برهان قضیه ۱.۶.۳ است.

مثال ۱.۸.۳. سیستم توسیع‌یافته

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t),$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix},$$

را با مقادیر ویژه مطلوب  $\lambda_1 = -0.5$  و  $\lambda_{2,3} = -0.5 \pm 0.5i$  در نظر بگیرید. با استفاده از روش مقدار ویژه معکوس ماتریسی در بخش ۳.۲ برای زوج ماتریسی  $(M', N')$  به صورت

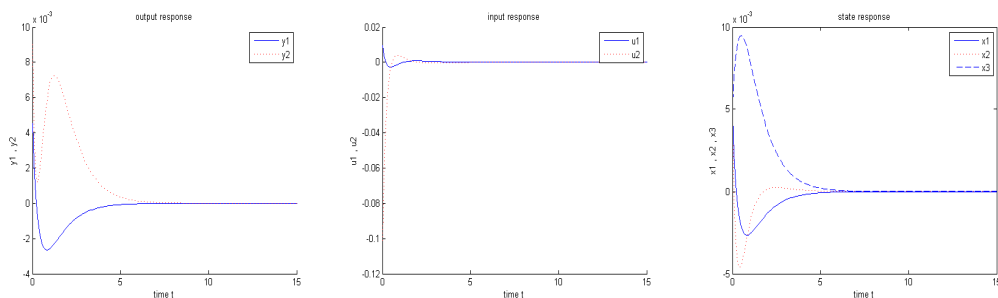
$$N' = \begin{bmatrix} 0/33 & 0 & 0/66 \\ 0/33 & 0 & 0/66 \\ -0/33 & 1 & -1/66 \end{bmatrix}, \quad M' = \begin{bmatrix} -0/33 & 0 \\ 1/33 & 0 \\ -1/33 & -1 \end{bmatrix},$$

نتیجه می‌شود:

$$\Gamma_o = N' + M'K'C = \begin{bmatrix} 0/44 & -0/09 & 0/54 \\ 0/78 & -0/37 & 0/17 \\ -2/1 & 0/29 & -1/81 \end{bmatrix},$$

$$T = 10^8 \times \begin{bmatrix} 0/97 & -0/93 & -0/49 \\ -0/49 & 3/02 & -2/8 \\ -2/69 & 2/15 & 0/14 \end{bmatrix}, \quad K'_{de} = \begin{bmatrix} 0/15 & -0/18 \\ 1/88 & -1 \end{bmatrix}.$$

شکل ۱۱.۳ نتایج به‌دست آمده را نشان می‌دهد وقتی که  $x_o = [0/005 \quad 0/005 \quad 0/005]^T$ .



شکل ۱۱.۳: پایداری بردارهای حالت، ورودی و خروجی در مثال ۱.۸.۳

واضح است که شرط دوم در (۷۰.۳) تنها در سیستم‌های خاصی برقرار است و اگر ماتریس  $A$  منفرد باشد، نمی‌توان از پس‌خورد خروجی مشتق برای پایدارسازی سیستم استفاده نمود. این مشکل با استفاده از پس‌خورد خروجی مشتق و گزاره‌ای برطرف می‌شود.

### ۲.۸.۳ پایدارسازی سیستم‌های توسیع‌یافته پیوسته-زمانی با استفاده از پس‌خورد خروجی مشتق و گزاره‌ای

سیستم (۱.۳) را با قانون پس‌خورد خروجی مشتق و گزاره‌ای

$$u(t) = K_{de}\dot{y}(t) + K_{pr}y(t) = K_{de}C\dot{x}(t) + K_{pr}Cx(t), \quad (102.3)$$

در نظر بگیرید. برای رسیدن به نتایج مطلوب، فرضیات (۷۷.۳) را در نظر می‌گیریم. اگر فرضیات (۷۷.۳) برقرار باشند،  $K_{de}$  وجود دارد به طوری که [۵]

$$\text{rank}(E - BK_{de}C) = n. \quad (103.3)$$

با شرط برقراری شرط (۱۰۳.۳) برای  $K_{de}$  و با قرار دادن عبارت (۱۰۲.۳) در (۱.۳)، می‌توان نوشت:

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + BK_{de}C\dot{x}(t) + BK_{pr}Cx(t) \Rightarrow (E - BK_{de}C)\dot{x}(t) = (A + BK_{pr}C)x(t).$$

بنابراین سیستم استاندارد معادل به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\dot{x}(t) = (E - BK_{de}C)^{-1}(A + BK_{pr}C)x(t), \quad (104.3)$$

که با داشتن رابطه (۱۰۳.۳) قابل تعریف است.

برای محاسبه  $K_{pr}$  و  $K_{de}$  در (۱۰۲.۳)، ابتدا پس‌خورد خروجی گزاره‌ای  $K_{pr}$  را با استفاده از روش مقدار ویژه معکوس ماتریسی روی سیستم

$$\begin{cases} \dot{g}(t) = Ag(t) + Bv(t), \\ v(t) = K_{pr}Cg(t), \end{cases} \quad (105.3)$$

به دست می‌آوریم به طوری که مقادیر ویژه ناصفر مطلوب  $\Omega = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$  را به این سیستم اختصاص دهد.

سپس، پس‌خورد خروجی مشتق  $K_{de}$  را با استفاده از همان روش مقدار ویژه معکوس ماتریسی روی سیستم (۱۰۷.۳) با اختصاص وارون مقادیر ویژه مطلوب برای سیستم (۱.۳)، یعنی  $\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$ ، به دست می‌آوریم. برای درک بهتر این مطلب قضیه ۲.۸.۳ را ببینید.

**قضیه ۲.۸.۳.** ماتریس‌های  $M$  و  $N$  را به صورت

$$N = (A + BK_{pr}C)^{-1}E, \quad M = -(A + BK_{pr}C)^{-1}B, \quad (106.3)$$

و مجموعه مقادیر ویژه  $\Omega$  را برای محاسبه ماتریس پس‌خورد خروجی گزاره‌ای  $K_{pr}$  به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که زوج  $(M, N)$  کنترل‌پذیر باشد. همچنین، فرض کنید  $K_{de}$  ماتریس پس‌خورد

خروجی مشتقی باشد که مقادیر ویژه  $\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$  را به سیستم حلقه بسته

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Nz(t) + Mw(t), \\ w(t) = K_{de}Cz(t), \end{cases} \quad (107.3)$$

تخصیص دهد،  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ،  $\lambda_i \neq 0$  و  $i = 1, \dots, n$ . آن‌گاه  $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ، مقادیر ویژه سیستم کنترل‌شده (۱.۳) با قانون پس‌خورد مشتق (۱۰۲.۳) است و شرط (۱۰۳.۳) برقرار است.

برهان. مشابه با برهان قضیه ۲.۶.۳ است.  $\square$

مثال ۲.۸.۳. مثال ۱.۸.۳ را با  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  که ماتریسی منفرد است، در نظر بگیرید.

ماتریس پس‌خورد خروجی گزاره‌ای  $K_{pr}$  با تخصیص مقادیر ویژه  $\{-2, -3, -4\}$  به صورت

$$K_{pr} = \begin{bmatrix} 8/53 & -1/43 \\ 5/6 & -0/8 \end{bmatrix},$$

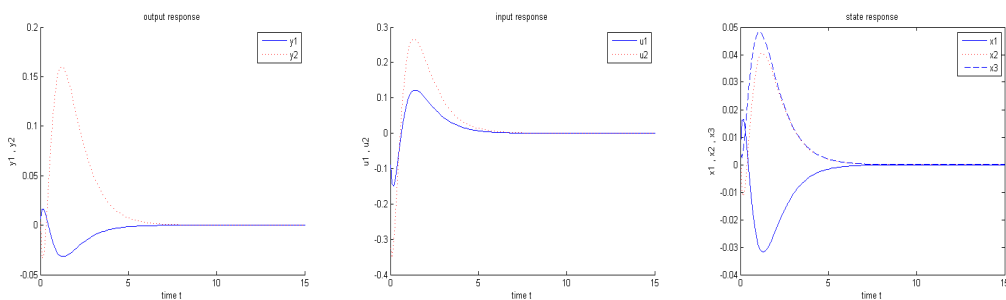
و ماتریس پس‌خورد خروجی مشتق  $K_{de}$  با نتایج

$$T = \begin{bmatrix} -0/03 & -0/05 & 0/14 \\ 0/04 & 0/07 & -0/17 \\ 0/04 & 0/06 & -0/12 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_o = N + MK_{de}C = \begin{bmatrix} 6/36 & 4/46 & 1/47 \\ -8/69 & -6/22 & -1/78 \\ -11/05 & -8/02 & -1/89 \end{bmatrix},$$

به صورت زیر به دست می‌آید:

$$K_{de} = \begin{bmatrix} -25/84 & -6/38 \\ -58/29 & -14/21 \end{bmatrix}.$$

شکل ۱۲.۳ نتایج به دست آمده را نشان می‌دهد وقتی که  $x_0 = [0/01 \quad -0/01 \quad 0/01]^T$ .



شکل ۱۲.۳: پایداری بردارهای حالت، ورودی و خروجی در مثال ۲.۸.۳

### ۳.۸.۳ پایدارسازی سیستم‌های توسیع‌یافته گسسته-زمانی با استفاده از پس‌خورد خروجی پیشرو

سیستم (۲.۳) را با قانون پس‌خورد خروجی پیشرو

$$u_i = K_f' y_{i+1} = K_f' C x_{i+1}, \quad (108.3)$$

در نظر بگیرید. برای رسیدن به نتایج مطلوب، فرضیات (۷۰.۳) را در نظر می‌گیریم. اگر فرضیات (۷۰.۳) برقرار باشند،  $K_f'$  وجود دارد به طوری که [۵]

$$\text{rank}(E - BK_f' C) = n. \quad (109.3)$$

با شرط برقراری شرط (۱۰۹.۳) برای  $K_f'$  و با قرار دادن عبارت (۱۰۸.۳) در (۱۰۹.۳)، می‌توان نوشت:

$$E x_{i+1} = A x_i + BK_f' C x_{i+1} \Rightarrow (E - BK_f' C) x_{i+1} = A x_i.$$

بنابراین سیستم استاندارد معادل به صورت زیر خواهیم داشت:

$$x_{i+1} = (E - BK_f' C)^{-1} A x_i, \quad (110.3)$$

که با داشتن رابطه (۱۰۹.۳) قابل تعریف است.

**قضیه ۳.۸.۳.** ماتریس‌های  $N'$  و  $M'$  را به صورت (۷۳.۳) و مجموعه مقادیر ویژه  $L$  را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که زوج  $(M', N')$  کنترل‌پذیر باشد. همچنین، فرض کنید  $K_f'$  ماتریس پس‌خورد خروجی پیشرو باشد که مقادیر ویژه  $\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$  را به سیستم حلقه بسته

$$\begin{cases} z_{i+1} = N' z_i + M' w_i, \\ w_i = K_f' C z_i, \end{cases} \quad (111.3)$$

تخصیص دهد،  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ،  $\lambda_i \neq 0$  و  $i = 1, \dots, n$ . آن‌گاه  $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  مقادیر ویژه سیستم کنترل‌شده (۲.۳) با پس‌خورد خروجی پیشرو  $K_f'$  است و شرط (۱۰۹.۳) برقرار است.

□

برهان. مشابه با برهان قضیه ۱.۶.۳ است.

**مثال ۳.۸.۳.** سیستم توسیع‌یافته

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t),$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix},$$

را با مقادیر ویژه مطلوب  $\lambda_1 = 0/4$  و  $\lambda_{2,3} = \pm 0/2$  در نظر بگیرید. با استفاده از روش مقدار ویژه معکوس ماتریسی در بخش ۳.۲، ماتریس پس‌خورد خروجی پیشرو با نتایج

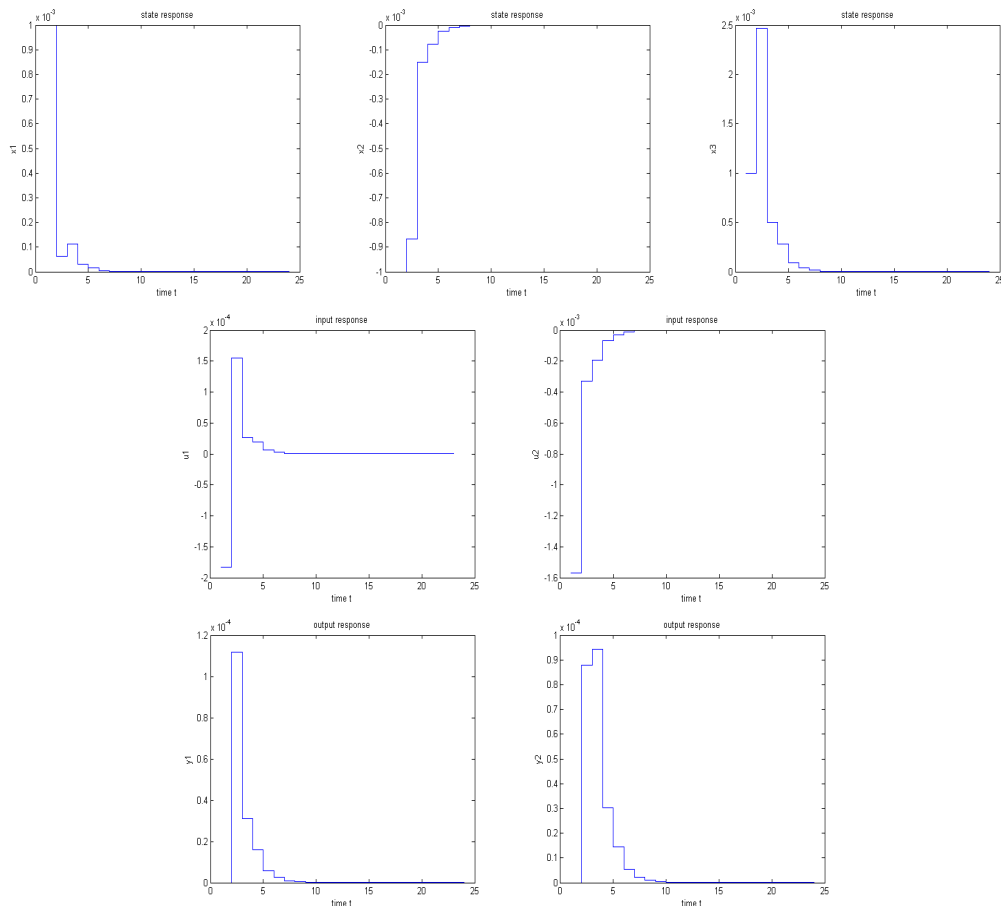
$$T = \begin{bmatrix} -1/07 & 1/21 & -1/69 \\ -1/65 & 5/44 & -3/16 \\ -6/89 & -4/61 & 9/87 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_o = \begin{bmatrix} -1/97 & 2/18 & 1/21 \\ -8/87 & 8/72 & 2/87 \\ 25/74 & -11/46 & -4/25 \end{bmatrix},$$

به صورت

$$K_f' = \begin{bmatrix} -3/96 & 2/94 \\ -15/29 & 1/57 \end{bmatrix},$$

به دست می‌آید. شکل ۱۳.۳ نتایج به دست آمده را نشان می‌دهد وقتی که

$$x_o = \begin{bmatrix} 0/001 & -0/001 & 0/001 \end{bmatrix}^T.$$



شکل ۱۳.۳: پایداری بردارهای حالت، ورودی و خروجی در مثال ۳.۸.۳

واضح است که شرط دوم در (۷۰.۳) تنها در سیستم‌های خاصی برقرار است و اگر ماتریس  $A$  منفرد باشد، نمی‌توان از پس‌خورد خروجی پیشرو برای پایدارسازی سیستم استفاده نمود.

این مشکل با استفاده از پس‌خورد خروجی پیشرو و گزاره‌ای برطرف می‌شود.

### ۴.۸.۳ پایدارسازی سیستم‌های توسیع‌یافته گسسته-زمانی با استفاده

#### از پس‌خورد خروجی پیشرو و گزاره‌ای

سیستم (۲.۳) را با قانون پس‌خورد خروجی پیشرو و گزاره‌ای

$$u_i = K_f y_{i+1} + K_p y_i = K_f C x_{i+1} + K_p C x_i, \quad (112.3)$$

در نظر بگیرید. برای رسیدن به نتایج مطلوب، فرضیات (۷۷.۳) را در نظر می‌گیریم. اگر فرضیات (۷۷.۳) برقرار باشند،  $K_f$  وجود دارد به طوری که [۵]

$$\text{rank}(E - BK_f C) = n. \quad (113.3)$$

با شرط برقراری شرط (۱۱۳.۳) برای  $K_f$  و با قرار دادن عبارت (۱۱۲.۳) در (۲.۳)، می‌توان نوشت:

$$E x_{i+1} = A x_i + BK_f C x_{i+1} + BK_p C x_i \Rightarrow (E - BK_f C) x_{i+1} = (A + BK_p C) x_i.$$

بنابراین سیستم استاندارد معادل به صورت زیر خواهیم داشت:

$$x_{i+1} = (E - BK_f C)^{-1} (A + BK_p C) x_i, \quad (114.3)$$

که با داشتن رابطه (۱۱۳.۳) قابل تعریف است.

برای محاسبه  $K_f$  و  $K_p$  در (۱۱۲.۳)، ابتدا پس‌خورد خروجی گزاره‌ای  $K_p$  را با استفاده از روش مقدار ویژه معکوس ماتریسی روی سیستم

$$\begin{cases} g_{i+1} = A g_i + B v_i, \\ v_i = K_p C g_i, \end{cases} \quad (115.3)$$

به دست می‌آوریم به طوری که مقادیر ویژه ناصفر مطلوب  $\Omega = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$  را به این سیستم اختصاص دهد.

سپس، پس‌خورد خروجی پیشرو  $K_f$  را با استفاده از همان روش مقدار ویژه معکوس ماتریسی روی سیستم (۱۱۷.۳) با اختصاص وارون مقادیر ویژه مطلوب برای سیستم (۲.۳)، یعنی  $\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$ ، به دست می‌آوریم. برای درک بهتر این مطلب قضیه ۴.۸.۳ را ببینید.

**قضیه ۴.۸.۳.** ماتریس‌های  $M$  و  $N$  را به صورت

$$N = (A + BK_p C)^{-1} E, \quad M = -(A + BK_p C)^{-1} B, \quad (116.3)$$

و مجموعه مقادیر ویژه  $\Omega$  را برای محاسبه ماتریس پس‌خورد خروجی گزاره‌ای  $K_p$  به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که زوج  $(M, N)$  کنترل‌پذیر باشد. همچنین، فرض کنید  $K_f$  ماتریس پس‌خورد خروجی پیشروی باشد که  $\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}\}$  مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته

$$\begin{cases} z_{i+1} = N z_i + M w_i, \\ w_i = K_f C z_i, \end{cases} \quad (117.3)$$

هستند،  $\lambda_i \in \mathbb{C}$ ،  $\lambda_i \neq 0$  و  $i = 1, \dots, n$ . آن‌گاه  $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ، مقادیر ویژه سیستم کنترل‌شده (۲.۳) با قانون پس‌خورد خروجی پیشرو و گزاره‌ای (۱۱۲.۳) است و شرط (۱۱۳.۳) برقرار است.

برهان. مشابه با برهان قضیه ۲.۶.۳ است.  $\square$

مثال ۴.۸.۳. مثال ۳.۸.۳ را با  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  در نظر بگیرید که منفرد است. با تخصیص

مقادیر ویژه  $\{0/1, 0/2, 0/3\}$  ماتریس پس‌خورد خروجی گزاره‌ای  $K_p$  به صورت

$$K_p = \begin{bmatrix} 2/11 & 0/52 \\ 1 & -0/47 \end{bmatrix},$$

به دست می‌آید. همچنین با تخصیص  $\{0/5, \pm 0/4\}$  ماتریس پس‌خورد خروجی پیشرو  $K_f$  به صورت

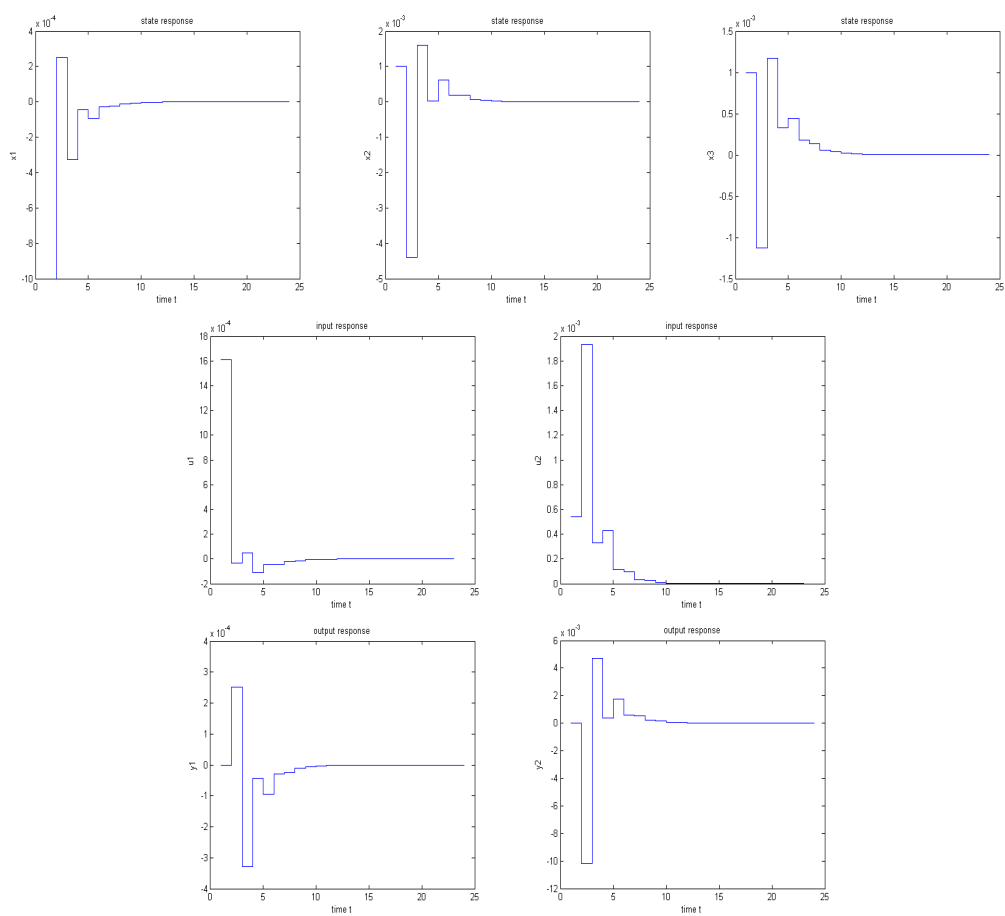
$$K_f = \begin{bmatrix} -3/33 & -0/24 \\ -10/28 & -0/3 \end{bmatrix},$$

محاسبه می‌شود که در آن

$$T = \begin{bmatrix} -40/16 & 115/62 & 19/57 \\ 341/98 & -879/47 & -233/52 \\ 241/28 & -365/32 & -138/15 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_o = \begin{bmatrix} -5 & 0/37 & -1/7 \\ 57/91 & -0/16 & 12/71 \\ 26/3 & -0/55 & 7/17 \end{bmatrix}.$$

شکل ۱۴.۳ نتایج به دست آمده را نشان می‌دهد وقتی که  $x_o = [-0/001 \quad 0/001 \quad 0/001]^T$ .





شکل ۱۴.۳: پایداری بردارهای حالت، ورودی و خروجی در مثال ۴.۸.۳



# فصل ۴

## سیستم‌های کسری توسیع یافته

### ۱.۴ مقدمه

در طول سه دهه اخیر موضوع حسابان کسری<sup>۱</sup> اهمیت و جایگاه ویژه‌ای یافته است و دلیل اصلی آن کاربردهای متنوع آن در زمینه‌های مختلف علم و صنعت است. پیدایش موضوع حسابان کسری به سال ۱۶۱۵ میلادی بازمی‌گردد زمانی که هوییتال<sup>۲</sup> در نامه‌ای از لایبنیتز<sup>۳</sup> معنای نماد  $\frac{d^n}{dx^n}$  را به‌ازای  $n = \frac{1}{p}$  می‌پرسد. پاسخ لایبنیتز این است که این مساله به ظاهر متناقض در آینده نتایج ارزنده‌ای خواهد داشت. پس از پیدایش حساب کسری این مسئله توسط دانشمندان بسیاری مورد مطالعه دقیق قرار گرفت. اویلر<sup>۴</sup> در سال ۱۷۳۰ بیان کرد که با وجود آن که ریاضیات کسری تعبیر فیزیکی خاصی ندارد اما می‌توان آن را از تعمیم دادن ریاضیات صحیح به دست آورد. لاپلاس<sup>۵</sup> در ۱۸۱۲ تعریفی را برای نوع خاصی از مشتق کسری ارائه و فوریه در ۱۸۲۲ تعمیم رابطه فوریه را به مشتق کسری آن به وجود آورد. لیوویل<sup>۶</sup> در

---

<sup>۱</sup>Fractional Calculus

<sup>۲</sup>Hopital

<sup>۳</sup>Leibniz

<sup>۴</sup>Euler

<sup>۵</sup>Laplace

<sup>۶</sup>Liouville

سال ۱۸۳۲ با استفاده از رابطه  $(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x)^2$  برخی مسائل زمین‌شناسی و مکانیک را حل کرد. در سال ۱۸۴۱ ریمن<sup>۷</sup> بسط تیلور را به حوزه سیستم‌های مرتبه کسری تعمیم داد. لیتنیکوف<sup>۸</sup> در سال ۱۸۶۸ رابطه  $[D^q D^p f(x)] = [D^{q+p}]f(x)$  را ثابت نمود (در آن  $D^q$  نماد عملگر مرتبه کسری است).

با این وجود معادلات دیفرانسیل کسری تنها در دهه اخیر به صورت ویژه مورد توجه قرار گرفته است. علی‌رغم این که در زمان مطرح شدن آن کاربردهای عملی خاصی برای آن یافت نشده بود، امروزه کاربردهای آن در بسیاری از زمینه‌ها دیده می‌شود و نیز مشخص شده است که بسیاری از سیستم‌ها می‌توانند به‌طور مناسبی توسط تئوری سیستم‌های مرتبه کسری<sup>۹</sup> توضیح داده شوند که از جمله آن می‌توان به هدایت گرما<sup>۱۰</sup>، امواج الکترومغناطیس<sup>۱۱</sup>، سیستم‌های ویسکوالاستیک<sup>۱۲</sup>، معادلات دیفرانسیلی و انتگرالی، جریان‌های سیالی، تغییر شکل و جریان مواد، الکتروشیمی خوردگی، نورشناسی، پردازش سیگنال و همچنین به دو کاربرد معروف سرمایه‌گذاری کمی<sup>۱۳</sup> و انتشار امواج<sup>۱۴</sup> اشاره کرد.

سیستم‌های توسیع‌یافته با مرتبه کسری سیستم‌هایی با معادلات دیفرانسیل نه لزوماً مرتبه صحیح هستند که در دنیای حقیقی و به‌طور عملی کاربردی‌تر از سیستم‌هایی با مرتبه صحیح هستند. در حال حاضر سه نوع از مشتقات کسری که اغلب استفاده می‌شوند مشتق کسری گرانولد-لتنیکوف که در سال‌های ۱۸۶۷ و ۱۸۶۸ گرانولد<sup>۱۵</sup> از پاراگوئه و لتنیکوف از مسکو معرفی کردند، مشتق کسری ریمن-لیوویل در سال ۱۹۷۴ توسط اولدهام<sup>۱۶</sup> و اسپانیر<sup>۱۷</sup> و در سال ۱۹۹۳ توسط میلر<sup>۱۸</sup> و راس<sup>۱۹</sup> معرفی شدند و مشتق کسری کاپوتو<sup>۲۰</sup> که توسط کاپوتو در سال ۱۹۷۶ معرفی شد هستند. لازم به‌ذکر است که مشتق کسری کاپوتو تعریف بسیار کاربردی‌تری در زمینه علوم و مهندسی دارد.

در سال‌های اخیر سیستم‌های کسری توسیع‌یافته توجه بسیاری از محققین را به خود

<sup>۷</sup>Riemann

<sup>۸</sup>Letnikov

<sup>۹</sup>Fractional Order Systems

<sup>۱۰</sup>Heat Conduction

<sup>۱۱</sup>Electro Magnetic Waves

<sup>۱۲</sup>Viscoelastic

<sup>۱۳</sup>Quantative Finance

<sup>۱۴</sup>Diffusion Wave

<sup>۱۵</sup>Grunwald

<sup>۱۶</sup>Oldham

<sup>۱۷</sup>Spanier

<sup>۱۸</sup>Miller

<sup>۱۹</sup>Ross

<sup>۲۰</sup>Caputo

جلب کرده است، چون این سیستم‌ها در زمینه‌های بسیاری مانند فیزیک، مهندسی برق، سیستم‌های کنترلی، رباتیک، فرآیندهای سیگنالی، ترکیبات شیمیایی، مهندسی شیمی و موارد بسیار دیگری کاربرد دارند [۸، ۲۳، ۳۰، ۳۲، ۳۳، ۴۷، ۵۲، ۵۴].

کنترل و می‌نیم‌سازی انرژی سیستم‌های مورد بحث، توسط کاکزورک در [۵۸] و تبدیل و تجزیه این سیستم‌ها در حالت گسسته-زمانی در [۵۲] بررسی شده است. همچنین کاکزورک، کلاس جدیدی از این سیستم‌ها در [۵۴] ارائه داده است.

استفاده از الگوریتم شوفل برای تبدیل سیستم‌های کسری توسیع‌یافته به سیستم‌های استاندارد و حل آن‌ها در بخش ۳.۴ و یافتن جواب با استفاده از وارون درزین، تجزیه و ایراشتراوس<sup>۲۱</sup>، روش کاکزورک و همچنین روشی شبیه به روش‌های برپایه تخصیص مقادیر ویژه که کار اصلی این رساله است در بخش‌های ۴.۴ تا ۷.۴ آورده می‌شود. پایدارسازی و یافتن جواب با روش‌های تخصیص مقادیر ویژه بیان‌شده در فصل ۲ شامل روش‌هایی برپایه تبدیلات تشابهی، تخصیص مقادیر ویژه جزئی با بردار ویژه و مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی در بخش ۷.۴ به‌طور کامل توضیح داده می‌شود. تمامی روش‌های بحث‌شده در بخش آخر همراه با مثال‌های عددی است.

در ادامه تعریف سیستم‌های خطی کسری توسیع‌یافته پیوسته-زمانی و گسسته-زمانی و مشتق مرتبه کسری مورد استفاده در این فصل را ارائه می‌کنیم، اما تمرکز این فصل بر روی سیستم‌های خطی کسری توسیع‌یافته گسسته-زمانی است.

**تعریف ۱.۱.۴ [۵۶]** سیستم خطی کسری توسیع‌یافته پیوسته-زمانی با معادلات فضای حالت به‌صورت

$$E\Delta^\alpha \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad (1.4)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (1.4b)$$

تعریف می‌شود که  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ،  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  و بردار حالت، ورودی و خروجی هستند،  $A, E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ،  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ،  $C \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ،  $D \in \mathbb{R}^{r \times m}$  و  $\alpha$  مرتبه مشتق کسری است.

**تعریف ۲.۱.۴ [۵۰]** سیستم خطی کسری توسیع‌یافته گسسته-زمانی با معادلات فضای حالت به‌صورت

$$E\Delta^\alpha x_{i+1} = Ax_i + Bu_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.4)$$

$$y_i = Cx_i + Du_i, \quad (2.4b)$$

تعریف می‌شود که  $x_i \in \mathbb{R}^n$ ،  $u_i \in \mathbb{R}^m$  و بردار حالت، ورودی و خروجی هستند،  $A, E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ،  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ،  $C \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ،  $D \in \mathbb{R}^{r \times m}$  و  $\alpha$  مرتبه مشتق کسری است.

<sup>۲۱</sup>Weierstrass

**تعریف ۳.۱.۴.** [۵۵] زوج مدادی  $(E, A)$  در سیستم‌های (۱.۴) و (۲.۴) منظم است هرگاه حداقل یک  $z \in \mathbb{C}$  داشته باشیم به طوری که

$$\det(Ez - A) \neq 0. \quad (3.4)$$

در غیر این صورت زوج مدادی را نامنظم می‌نامند.

**ملاحظه ۱.۱.۴.** مشتق مرتبه کسری در این فصل با استفاده از تعریف ۱۷.۱.۱ برای سیستم‌های گسسته-زمانی به صورت [۵۰]

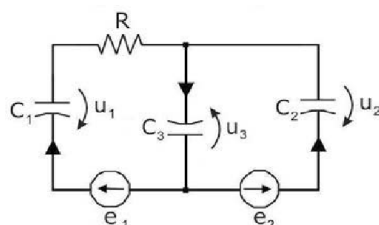
$$\Delta^\alpha x_i = \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{i-j}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (4.4)$$

در نظر گرفته می‌شود که  $\alpha \in \mathbb{R}$  مرتبه مشتق کسری است و  $\binom{\alpha}{j}$  در (۱۱.۱) تعریف می‌شود.

**ملاحظه ۲.۱.۴.** در این فصل رساله فرض می‌شود زوج مدادی  $(E, A)$  منظم است و  $\text{rank}(E) < n$ .

## ۲.۴ کاربردها

**مثال ۱.۲.۴.** مدار الکتریکی کسری نشان داده شده در شکل ۱.۴ را با مقاومت  $R$ ، مخازن  $C_1$ ،  $C_2$  و  $C_3$  و منابع ولتاژهای  $e_1$  و  $e_2$  مفروض در نظر بگیرید.



شکل ۱.۴: مدار الکتریکی مثال ۱.۲.۴

با استفاده از قانون کیرشهف برای مدارهای الکتریکی می‌توان معادلات زیر را نوشت.

$$\begin{aligned} e_1 &= RC_1 \frac{d^\alpha u_1}{dt^\alpha} + u_1 + u_3, \\ C_1 \frac{d^\alpha u_1}{dt^\alpha} + C_2 \frac{d^\alpha u_2}{dt^\alpha} - C_3 \frac{d^\alpha u_3}{dt^\alpha} &= 0, \\ e_2 &= u_2 + u_3. \end{aligned} \quad (5.4)$$

معادلات (۵.۴) می‌توانند به شکل زیر نوشته شوند:

$$\begin{bmatrix} RC_1 & 0 & 0 \\ C_1 & C_2 & -C_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

که

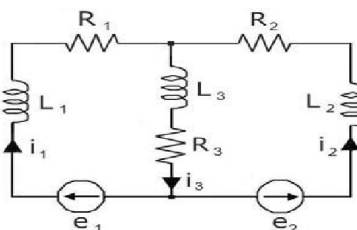
$$E = \begin{bmatrix} RC_1 & 0 & 0 \\ C_1 & C_2 & -C_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.4)$$

توجه کنید که ماتریس  $E$  منفرد است چون  $\det(E) = 0$ . اما زوج مدادی  $(E, A)$  منظم است چون معادله

$$\det[Es^\alpha - A] = \begin{vmatrix} RC_1 s^\alpha + 1 & 0 & 1 \\ C_1 s^\alpha & C_2 s^\alpha & -C_3 s^\alpha \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (RC_1 s^\alpha + 1)(C_2 + C_3)s^\alpha + C_1 s^\alpha, \quad (8.4)$$

دارای حداقل یک جواب نسبت به  $s^\alpha$  است. بنابراین مدار الکتریکی (۵.۴) یک سیستم خطی کسری توسعه یافته با زوج مدادی منظم است.

**مثال ۲.۲.۴.** مدار الکتریکی نشان داده شده در شکل ۲.۴ را با مقاومت‌های  $R_1$ ،  $R_2$  و  $R_3$ ، سیم‌پیچ‌های  $L_1$ ،  $L_2$  و  $L_3$  و منابع ولتاژ  $e_1$  و  $e_2$  مفروض در نظر بگیرید.



شکل ۲.۴: مدار الکتریکی مثال ۲.۲.۴

با استفاده از قانون کیرشهف برای مدارهای الکتریکی می‌توان معادلات زیر را نوشت.

$$\begin{aligned} e_1 &= R_1 i_1 + L_1 \frac{d^\beta i_1}{dt^\beta} + R_3 i_3 + L_3 \frac{d^\beta i_3}{dt^\beta}, \\ e_2 &= R_2 i_2 + L_2 \frac{d^\beta i_2}{dt^\beta} + R_3 i_3 + L_3 \frac{d^\beta i_3}{dt^\beta}, \\ i_1 + i_2 - i_3 &= 0. \end{aligned} \quad (9.4)$$

معادلات (۹.۴) می‌توانند به شکل زیر نوشته شوند:

$$\begin{bmatrix} L_1 & 0 & L_3 \\ 0 & L_2 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d^\beta}{dt^\beta} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1 & 0 & -R_3 \\ 0 & -R_2 & -R_3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}, \quad (10.4)$$

که

$$E = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & L_3 \\ 0 & L_2 & L_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -R_1 & 0 & -R_3 \\ 0 & -R_2 & -R_3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (11.4)$$

توجه کنید که ماتریس  $E$  منفرد است چون  $\det(E) = \circ$ . اما زوج مدادی  $(E, A)$  منظم است چون معادله

$$\det(Es^\beta - A) = \begin{vmatrix} L_1 s^\beta + R_1 & \circ & L_3 s^\beta + R_3 \\ \circ & L_2 s^\beta + R_2 & L_3 s^\beta + R_3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = [L_1(L_2 + L_3) + L_2 L_3] s^{2\beta} + [(L_2 + L_3)R_1 + (L_1 + L_3)R_2 + (L_1 + L_2)R_3] s^\beta + R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3, \quad (12.4)$$

دارای حداقل یک جواب نسبت به  $s^\beta$  است. بنابراین مدار الکتریکی (۹.۴) یک سیستم خطی کسری توسیع یافته با زوج مدادی منظم است.

## ۳.۴ تبدیل سیستم‌های کسری توسیع یافته به سیستم‌های استاندارد با الگوریتم شوفل

برای تمام مطالب بخش ۳.۴ از مرجع [۵۷] استفاده شده است. سیستم‌های کسری توسیع یافته (۱۲.۴) را در نظر بگیرید. با جایگذاری (۴.۴) در (۱۲.۴) داریم:

$$Ex_{i+1} = A_\alpha x_i - Ec_\gamma x_{i-1} - \dots - Ec_i x_1 - Ec_{i+1} x_0 + Bu_i, \quad (13.4)$$

که  $A_\alpha = A + E\alpha$ ,  $i \in \mathbb{Z}$  و

$$c_j = (-1)^j \binom{\alpha}{j}, \quad j = \circ, 1, \dots, i+1. \quad (14.4)$$

قضیه ۱.۳.۴. اگر زوج مدادی سیستم کسری توسیع یافته (۱۲.۴) منظم باشد (۳.۴) برقرار باشد، آن گاه سیستم می‌تواند با استفاده از الگوریتم شوفل به شکل استاندارد معادل

$$x_{i+1} = \bar{A}_i x_i + \bar{A}_{i-1} x_{i-1} + \dots + \bar{A}_\circ x_0 + \bar{B}_\circ u_i + \bar{B}_i u_{i+1} + \dots + \bar{B}_q u_{i+q}, \quad (15.4)$$

تبدیل شود که

$$\bar{A}_k \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, k = \circ, 1, \dots, i, \quad \bar{B}_j \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, j = \circ, 1, \dots, q, \quad (16.4)$$

و  $q$  شاخص شوفل است.

برهان. با انجام اعمال سطری مقدماتی در ملاحظه ۴.۱.۱ روی صورت منظم

$$\begin{bmatrix} E & A_\alpha & -Ec_\gamma & \dots & -Ec_{i+1} & B \end{bmatrix}, \quad (17.4)$$

و یا به طور معادل روی (۱۳.۴) داریم:

$$\begin{bmatrix} E_1 & A_{\alpha 1} & -E_1 c_\gamma & \dots & -E_1 c_{i+1} & B_1 \\ \circ & A_{\alpha 2} & \circ & \dots & \circ & B_2 \end{bmatrix}, \quad (18.4)$$



$$E_1 x_{i+1} = A_{\alpha 1} x_i - E_1 c_2 x_{i-1} - E_1 c_3 x_{i-2} - \dots - E_1 c_{i+1} x_0 + B_1 u_i, \quad (19.4)$$

$$\circ = A_{\alpha 2} x_i + B_2 u_i. \quad (20.4)$$

با جایگذاری  $i+1$  در (20.4) به جای  $i$  به دست می‌آوریم:

$$-A_{\alpha 2} x_{i+1} = B_2 u_{i+1}. \quad (21.4)$$

معادلات (19.4) و (21.4) می‌توانند به صورت زیر نوشته شوند:

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ -A_{\alpha 2} \end{bmatrix} x_{i+1} = \begin{bmatrix} A_{\alpha 1} \\ \circ \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} -E_1 c_2 \\ \circ \end{bmatrix} x_{i-1} + \dots + \begin{bmatrix} -E_1 c_{i+1} \\ \circ \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} B_1 \\ \circ \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} \circ \\ B_2 \end{bmatrix} u_{i+1}. \quad (22.4)$$

صورت منظم

$$\begin{bmatrix} E_1 & A_{\alpha 1} & -E_1 c_2 & \dots & -E_1 c_{i+1} & B_1 & \circ \\ -A_{\alpha 2} & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & B_2 \end{bmatrix}, \quad (23.4)$$

می‌تواند با انجام یک شوفل از (17.4) به دست آید. اگر ماتریس  $\begin{bmatrix} E_1 \\ -A_{\alpha 2} \end{bmatrix}$  نامنفرد باشد، آن‌گاه

با حل کردن معادله (22.4) سیستم استاندارد

$$x_{i+1} = \begin{bmatrix} E_1 \\ -A_{\alpha 2} \end{bmatrix}^{-1} \left( \begin{bmatrix} A_{\alpha 1} \\ \circ \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} -E_1 c_2 \\ \circ \end{bmatrix} x_{i-1} + \dots + \begin{bmatrix} -E_1 c_{i+1} \\ \circ \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} B_1 \\ \circ \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} \circ \\ B_2 \end{bmatrix} u_{i+1} \right), \quad (24.4)$$

را به دست می‌آوریم.

اگر ماتریس منفرد باشد، آن‌گاه با انجام اعمال سطری مقدماتی روی (23.4) به دست

می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} E_2 & A'_{\alpha 2} & -E_2 c_2 & \dots & -E_2 c_{i+1} & B'_2 & B_4 \\ \circ & A_{\alpha 3} & \circ & \dots & \circ & B_3 & B_5 \end{bmatrix}, \quad (25.4)$$

که  $E_2$  رتبه سطری کامل دارد و  $rank(E_2) \geq rank(E_1)$ . با جایگذاری  $i+1$  به جای  $i$  در

$$\circ = A_{\alpha 3} x_i + B_3 u_i + B_5 u_{i+1}$$

$$-A_{\alpha 3} x_{i+1} = B_3 u_{i+1} + B_5 u_{i+2}. \quad (26.4)$$

معادلات  $E_2 x_{i+1} = A'_{\alpha 2} x_i - E_2 c_2 x_{i-1} - \dots - E_2 c_{i+1} x_0 + B'_2 u_i + B_4 u_{i+1}$  و (26.4) می‌توانند

به صورت زیر نوشته شوند:

$$\begin{bmatrix} E_2 \\ -A_{\alpha 3} \end{bmatrix} x_{i+1} = \begin{bmatrix} A'_{\alpha 2} \\ \circ \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} -E_2 c_2 \\ \circ \end{bmatrix} x_{i-1} + \dots + \begin{bmatrix} -E_2 c_{i+1} \\ \circ \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} B'_2 \\ \circ \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} B_4 \\ B_3 \end{bmatrix} u_{i+1} + \begin{bmatrix} \circ \\ B_5 \end{bmatrix} u_{i+2}. \quad (27.4)$$

صورت منظم

$$\begin{bmatrix} E_{\gamma} & A'_{\alpha\gamma} & -E_{\gamma}c_{\gamma} & \dots & -E_{\gamma}c_{i+1} & B'_{\gamma} & B_{\gamma} & \circ \\ -A_{\alpha\gamma} & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & B_{\gamma} & B_{\delta} \end{bmatrix}, \quad (28.4)$$

می‌تواند با یک شوفل از (25.4) به دست آورده شود. اگر ماتریس  $\begin{bmatrix} E_{\gamma} \\ -A_{\alpha\gamma} \end{bmatrix}$  نامنفرد باشد، می‌توانیم  $x_{i+1}$  را از (27.4) به دست آورد که در این صورت نیازی به تکرار فرآیند برای (28.4) نیست. اگر زوج مدادی منظم باشد، بعد از  $q$  مرحله می‌توان ماتریس نامنفرد  $\begin{bmatrix} E_q \\ -A_{\alpha(q+1)} \end{bmatrix}$  و معادله (15.4) را به دست آورد. □

### ۱.۳.۴ یافتن جواب در سیستم‌های استاندارد معادل

برای یافتن جواب  $x_i$  از سیستم خطی استاندارد گسسته-زمانی (15.4) و (16.4)، روش تبدیلات  $Z$  را به کار خواهیم برد.

فرض کنید  $Z[x_i]$ ، تبدیل  $Z$  از  $x_i$  باشد و به صورت

$$Z[x_i] = \sum_{i=0}^{\infty} x_i z^{-i}, \quad (29.4)$$

تعریف شود. با توجه به این که

$$Z[x_{i-p}] = z^{-p} X(z) + z^{-p} \sum_{j=-1}^{-p} x_j z^{-j}, \quad p = 1, 2, \dots, \quad (30.4)$$

$$Z[x_{i+p}] = z^p X(z) - \sum_{l=0}^{p-1} x_l z^{p-l}, \quad p = 1, 2, \dots, \quad (30.4)$$

و با استفاده از تبدیلات  $Z$  روی معادله (15.4) داریم:

$$Z[x_{i+1}] = \sum_{k=0}^i \bar{A}_{i-k} Z[x_{i-k}] + \sum_{j=0}^q \bar{B}_j Z[u_{i+j}], \quad (31.4)$$

و

$$zX(z) - zx_0 = \sum_{k=0}^i \bar{A}_{i-k} z^{-k} X(z) + \sum_{j=0}^q \bar{B}_j z^q \left[ U(z) - \sum_{l=0}^{j-1} u_l z^{-l} \right], \quad (32.4)$$

که  $U(z) = Z[u_i]$  و  $x_j = 0, j = -1, \dots, -k$

با ضرب  $z^{-1}$  در (32.4) و حل آن نسبت به  $X(z)$  به دست می‌آوریم

$$X(z) = \left[ I_n - \sum_{k=0}^i \bar{A}_{i-k} z^{-(k+1)} \right]^{-1} \left[ x_0 + \sum_{j=0}^q \bar{B}_j z^{q-1} \left[ U(z) - \sum_{l=0}^{j-1} u_l z^{-l} \right] \right]. \quad (33.4)$$

با جایگذاری بسط

$$\left[ I_n - \sum_{k=0}^i \bar{A}_{i-k} z^{-(k+1)} \right]^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j z^{-j}, \quad (34.4)$$

در (۳۳.۴) نتیجه می‌شود

$$X(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j z^{-j} \left[ x_0 + \sum_{j=0}^q \bar{B}_j z^{q-1} \left[ U(z) - \sum_{l=0}^{j-1} u_l z^{-l} \right] \right]. \quad (35.4)$$

با استفاده از تعریف ماتریس وارون داریم:

$$\left[ I_n - \sum_{k=0}^i \bar{A}_{i-k} z^{-(k+1)} \right] \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j z^{-j} \right] = \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j z^{-j} \right] \left[ I_n - \sum_{k=0}^i \bar{A}_{i-k} z^{-(k+1)} \right] = I_n. \quad (36.4)$$

با مقایسه ضرایب با توان‌های یکسان از  $z^{-k}, k = 0, 1, \dots$  در (۳۶.۴) نتیجه می‌شود  $\Phi_0 = I_n$ ،  
 $k = 1, 2, \dots$  و به‌طور کلی برای  $\Phi_3 = \bar{A}_i \Phi_2 + \bar{A}_{i-1} \Phi_1 + \bar{A}_{i-2} \Phi_0$ ،  $\Phi_2 = \bar{A}_i \Phi_1 + \bar{A}_{i-1} \Phi_0$ ،  $\Phi_1 = \bar{A}_i$   
 داریم:

$$\begin{aligned} \Phi_k &= \bar{A}_i \Phi_{k-1} + \bar{A}_{i-1} \Phi_{k-2} + \dots + \bar{A}_{i-k+1} \Phi_0 \\ &= \Phi_{k-1} \bar{A}_i + \Phi_{k-2} \bar{A}_{i-1} + \dots + \Phi_0 \bar{A}_{i-k+1}. \end{aligned} \quad (37.4)$$

با استفاده از وارون تبدیلات  $Z$  و قضیه همگشت [۵۳] روی (۳۵.۴)، جواب مطلوب

$$x_i = \Phi_i x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \Phi_{i-k-1} \left[ \sum_{j=0}^q \bar{B}_j u_{j+k} \right], \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (38.4)$$

به‌دست می‌آید. بنابراین قضیه زیر اثبات شده است.

**قضیه ۲.۳.۴.** جواب معادله (۱۵.۴) به‌صورت (۳۸.۴) است که ماتریس‌های  $\Phi_k$  در (۳۷.۴) تعریف شده‌اند.

**تعریف ۱.۳.۴.** سیستم کسری گسسته-زمانی (۱۲.۴) را مثبت می‌نامند اگر برای هر ثابت  $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$  و تمام ورودی‌های  $u_i \in \mathbb{R}_+^m, i \in \mathbb{Z}_+$  داشته باشیم  $x_i \in \mathbb{R}_+^n$ .

**قضیه ۳.۳.۴.** سیستم کسری توسیع‌یافته (۱۲.۴) مثبت است اگر و تنها اگر ماتریس‌های سیستم استاندارد معادل (۱۵.۴) در شرایط

$$\bar{A}_k \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, k = 0, 1, \dots, i, \quad \bar{B}_j \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, j = 0, 1, \dots, q, \quad (39.4)$$

برقرار باشند.

برهان. واضح است که بردار حالت سیستم کسری توسیع‌یافته (۱۲.۴) و سیستم استاندارد معادل (۱۵.۴) یکسان است. با استفاده از تعریف ۱.۳.۴، سیستم کسری توسیع‌یافته (۱۲.۴) مثبت است اگر و تنها اگر سیستم استاندارد (۱۵.۴) مثبت باشد. اگر شرایط (۳۹.۴) برقرار باشند،  $x_0 \in \mathbb{R}_+^n, u_i \in \mathbb{R}_+^m$  و از (۳۸.۴) نتیجه می‌شود که  $x_i \in \mathbb{R}_+^n, i \in \mathbb{Z}_+$ . لزوم شرط (۳۹.۴) از این حقیقت نتیجه می‌شود که برای هر ثابت  $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$  و  $u_i \in \mathbb{R}_+^m, i \in \mathbb{Z}_+$  دلخواه داریم  $x_i \in \mathbb{R}_+^n$ .  $\square$

## ۴.۴ حل سیستم‌های کسری توسیع یافته با وارون درزین

برای تمام مطالب بخش ۴.۴ از مرجع [۵۵] استفاده شده است. سیستم‌های کسری توسیع یافته (۲.۴) را در نظر بگیرید. با جایگذاری (۴.۴) در (۲.۴) داریم:

$$Ex_{i+1} = Fx_i - \sum_{j=0}^i Ec_{j+1}x_{i-j} + Bu_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (۴۰.۴)$$

که  $F = A - Ec_1$  و تعریف  $c_j$  در (۱۴.۴) آورده شده است. با فرض این که برای حداقل یک  $c \in \mathbb{C}$  داشته باشیم  $\det(Ec - F) \neq 0$  و ضرب از سمت چپ  $[Ec - F]^{-1}$  در (۴۰.۴) به دست می‌آوریم

$$\bar{E}x_{i+1} = \bar{F}x_i - \sum_{j=0}^i \bar{E}c_{j+1}x_{i-j} + \bar{B}u_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (۴۱.۴)$$

که

$$\bar{E} = [Ec - F]^{-1}E, \quad \bar{F} = [Ec - F]^{-1}F, \quad \bar{B} = [Ec - F]^{-1}B. \quad (۴۲.۴)$$

لم ۱.۴.۴. [۸، ۳۰] ماتریس‌های  $\bar{E}$  و  $\bar{F}$  که در (۴۲.۴) تعریف شده‌اند، در معادلات زیر برقرار هستند:

$$\bar{F}\bar{E} = \bar{E}\bar{F}, \quad \bar{F}^D\bar{E} = \bar{E}\bar{F}^D, \quad \bar{E}^D\bar{F} = \bar{F}\bar{E}^D, \quad \bar{F}^D\bar{E}^D = \bar{E}^D\bar{F}^D, \quad (۴۳.۴)$$

$$\text{null}(\bar{F}) \cap \text{null}(\bar{E}) = \{0\}, \quad (۴۳.۴)$$

$$\bar{E} = T \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} T^{-1}, \quad \bar{F} = T \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} T^{-1}, \quad \bar{E}^D = T \begin{bmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1}, \quad (۴۳.۴)$$

$$\det(T) \neq 0, \quad J \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}, \quad N \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}, \quad A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}, \quad A_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2},$$

$$n_1 + n_2 = n, \quad (I_n - \bar{E}\bar{E}^D)\bar{F}\bar{F}^D = I_n - \bar{E}\bar{E}^D, \quad (I_n - \bar{E}\bar{E}^D)(\bar{E}\bar{F}^D)^q = 0, \quad (۴۳.۴)$$

که  $J$  نامنفرد و  $N$  پوچ توان است.

### ۱.۴.۴ جواب معادله حالت

در این زیربخش، جواب معادله حالت (۲.۴) با استفاده از وارون‌های درزین ماتریس‌های  $\bar{E}$  و  $\bar{F}$  ارائه می‌شود.

قضیه ۱.۴.۴. جواب معادله (۴۱.۴) با شرط ابتدایی شدنی  $x_0$  به صورت

$$x_i = (\bar{E}^D \bar{F})^i \bar{E}^D \bar{E} x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \bar{E}^D (\bar{E}^D \bar{F})^{i-k-1} [\bar{B} u_k - \sum_{j=1}^k \bar{E} c_{j+1} x_{k-j}] + (\bar{E} \bar{E}^D - I_n) \sum_{k=0}^{q-1} (\bar{E} \bar{F}^D)^k \bar{F}^D \bar{B} u_{i+k}, \quad (44.4)$$

است که  $q$  شاخص  $\bar{E}$  است.

برهان. با استفاده از (۸.۱)، (۴۳.۴) و (۴۴.۴) به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \bar{E} x_{i+1} &= \bar{E} (\bar{E}^D \bar{F})^{i+1} \bar{E}^D \bar{E} x_0 + \sum_{k=0}^i \bar{E} \bar{E}^D (\bar{E}^D \bar{F})^{i-k} [\bar{B} u_k - \sum_{j=1}^k \bar{E} c_{j+1} x_{k-j+1}] \\ &+ \bar{E} (\bar{E} \bar{E}^D - I_n) \sum_{k=0}^{q-1} (\bar{E} \bar{F}^D)^k \bar{F}^D \bar{B} u_{i+k+1} \\ &= \bar{F} (\bar{E}^D \bar{F})^i \bar{E}^D \bar{E} x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} (\bar{E}^D \bar{F})^{i-k} [\bar{B} u_k - \sum_{j=1}^k \bar{E} c_{j+1} x_{k-j}] \\ &+ (I_n - \bar{E} \bar{E}^D) \sum_{k=0}^{q-1} (-\bar{F}^D \bar{E})^k \bar{F} \bar{F}^D \bar{B} u_{i+k}, \end{aligned} \quad (45.4)$$

و

$$\begin{aligned} \bar{F} x_i &= \bar{F} (\bar{E}^D \bar{F})^i \bar{E}^D \bar{E} x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \bar{F} \bar{E}^D (\bar{E}^D \bar{F})^{i-k-1} [\bar{B} u_k - \sum_{j=1}^k \bar{E} c_{j+1} x_{k-j}] \\ &+ \bar{F} (\bar{E} \bar{E}^D - I_n) \sum_{k=0}^{q-1} (\bar{E} \bar{F}^D)^k \bar{F}^D \bar{B} u_{i+k}. \end{aligned} \quad (46.4)$$

بنابراین

$$\bar{E} x_{i+1} - \bar{F} x_i - \sum_{k=1}^j \bar{E} c_{k+1} x_{i-k} = \bar{B} u_i. \quad (47.4)$$

□

پس، جواب (۴۴.۴) در معادله (۴۱.۴) برقرار است.

از (۴۴.۴) برای  $i = 0$  داریم

$$x_0 = \bar{E}^D \bar{E} x_0 + (\bar{E} \bar{E}^D - I_n) \sum_{k=0}^{q-1} (\bar{E} \bar{F}^D)^k \bar{F}^D \bar{B} u_k. \quad (48.4)$$

مجموعه شرایط ابتدایی  $x_0$  برای ورودی  $u_i$  مفروض در (۴۸.۴) آورده شده است. در حالت خاصی که  $u_i = 0, i \in \mathbb{Z}_+$  داریم  $x_0 = \bar{E}^D \bar{E} x_0$ . بنابراین معادله  $\bar{E} x_{i+1} = A x_i$  جواب یکتا دارد اگر و تنها اگر  $x_0 \in \text{Im}(\bar{E} \bar{E}^D)$  که نشان‌دهنده‌ی قسمت موهومی است.

مثال ۱.۴.۴. جواب  $x_i$  برای معادله (۲.۴) با  $\alpha = 0.5$  و ماتریس‌های

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad (49.4)$$

و شرایط شدنی را برای ورودی‌های مفروض  $u_i, i \in \mathbb{Z}_+$  بیابید. زوج مدادی (۴۹.۴) منظم است چون

$$\det[Ez - A] = \begin{vmatrix} z & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2z, \quad F = A - Ec_1 = A + E\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad q = 1. \quad (50.4)$$

برای  $c = 1$  ماتریس‌های (۴۲.۴) به شکل

$$\begin{aligned} \bar{E} &= [Ec - F]^{-1}E = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2(1 - \alpha)} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{F} &= [Ec - F]^{-1}F = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2(1 - \alpha)} \begin{bmatrix} 2\alpha & 0 \\ 1 & -2(1 - \alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \\ \bar{B} &= [Ec - F]^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2(1 - \alpha)} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 - 2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (51.4)$$

هستند.

با استفاده از (۴۳.۴) و (۵۱.۴) به دست می‌آوریم

$$\bar{E} = T^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{E}^D = T^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (52.4)$$

توجه کنید که

$$\det(\bar{F}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \quad \bar{F}^D = \bar{F}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (53.4)$$

با توجه به این که

$$\bar{E}^D \bar{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{E} \bar{E}^D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (54.4)$$

و با استفاده از (۴۴.۴) به دست می‌آوریم

$$x_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} x_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^{i-k-1} \quad (55.4)$$

$$\times \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} u_k - \sum_{j=1}^k \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} c_{j+1} x_{k-j} \right\} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u_i,$$

که ضرایب  $c_j$  برای  $\alpha = 0.5$  در (۱۴.۴) تعریف شده‌اند.

از (۵۵.۴) برای  $i = 0$  داریم

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} u_0. \quad (56.4)$$

بنابراین برای  $u_0$  مفروض، شرط ابتدایی شدنی  $x_0$  باید در (۵۶.۴) برقرار باشد.

## ۵.۴ حل سیستم‌های کسری توسیع‌یافته با تجزیه وایراشتر اوس

برای تمام مطالب بخش ۵.۴ از مرجع [۵۴] استفاده شده است.

سیستم‌های خطی کسری توسیع‌یافته با معادله حالت (۱۲.۴) را در نظر بگیرید.

لم ۱.۵.۴. [۲۳] اگر فرضیات ملاحظه ۲.۱.۴ برقرار باشند، آن‌گاه ماتریس‌های نامفرد  $P, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  وجود دارند به طوری که

$$PEQ = \begin{bmatrix} I_{n_1} & \circ \\ \circ & N \end{bmatrix}, \quad PAQ = \begin{bmatrix} A_1 & \circ \\ \circ & I_{n_2} \end{bmatrix}, \quad (57.4)$$

که  $N \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$  ماتریسی پوچ‌توان با مشخصه  $\mu$  (یعنی  $N^\mu = \circ$  و  $N^{\mu-1} \neq \circ$ )،  $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ،  $n_1$  درجه چندجمله‌ای

$$\det(Es - A) = a_{n_1} z^{n_1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad (58.4)$$

و  $n_1 + n_2 = n$ .

روشی برای محاسبه ماتریس‌های  $P$  و  $Q$  در [۹۶] آورده شده است.

با استفاده از لم ۱.۵.۴، جواب  $x_i$  از معادله (۱۲.۴) را با شرایط مفروض ابتدایی  $x_0$  و بردار

ورودی  $u_i, i \in \mathbb{Z}_+$  به دست می‌آوریم.

### ۱.۵.۴ یافتن جواب

با ضرب ماتریس  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  از سمت چپ در معادله (۱۲.۴) و معرفی بردار حالت جدید

$$\bar{x}_i = \begin{bmatrix} \bar{x}_i^{(1)} \\ \bar{x}_i^{(2)} \end{bmatrix} = Q^{-1} x_i, \quad \bar{x}_i^{(1)} \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad \bar{x}_i^{(2)} \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (59.4)$$

به دست می‌آوریم:

$$\bar{x}_i = PEQQ^{-1} \Delta^\alpha x_{i+1} = PEQ \Delta^\alpha Q^{-1} x_{i+1} = PAQQ^{-1} x_i + PBu_i \quad (60.4)$$

و بعد از آن با استفاده از (۵۷.۴) و (۵۹.۴) داریم

$$\begin{bmatrix} I_{n_1} & \circ \\ \circ & N \end{bmatrix} \Delta^\alpha \begin{bmatrix} \bar{x}_{i+1}^{(1)} \\ \bar{x}_{i+1}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \circ \\ \circ & I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_i^{(1)} \\ \bar{x}_i^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+ \quad (61.4)$$

که

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = PB, \quad B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}, \quad B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}. \quad (62.4)$$

با توجه به (۴.۴)، از (۶۱.۴) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \bar{x}_{i+1}^{(1)} &= - \sum_{k=1}^{i+1} (-1)^k \binom{\alpha}{k} \bar{x}_{i-k+1}^{(1)} + A_1 \bar{x}_i^{(1)} + B_1 u_i \\ &= A_{1\alpha} \bar{x}_i^{(1)} + \sum_{k=2}^{i+1} (-1)^{k-1} \binom{\alpha}{k} \bar{x}_{i-k+1}^{(1)} + B_1 u_i, \end{aligned} \quad (63.4)$$

$$N[\bar{x}_{i+1}^{(2)} + \sum_{k=1}^{i+1} (-1)^k \binom{\alpha}{k} \bar{x}_{i-k+1}^{(2)}] = \bar{x}_i^{(2)} + B_{21} u_i, \quad (64.4)$$

$$A_{1\alpha} = A_1 + I_{n_1} \alpha$$

جواب  $\bar{x}_i^{(1)}$  برای معادله (۶۳.۴) به راحتی با استفاده از قضیه زیر به دست می‌آید.

قضیه ۱.۵.۴. [۴۲] جواب  $\bar{x}_i^{(1)}$  برای معادله (۶۳.۴) با رابطه

$$\bar{x}_i^{(1)} = \Phi_i \bar{x}_0^{(1)} + \sum_{k=0}^{i-1} \Phi_{i-k-1} B_{11} u_k, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (65.4)$$

به دست می‌آید که ماتریس‌های  $\Phi_i$  به وسیله‌ی معادله

$$\Phi_{i+1} = \Phi_i A_{1\alpha} + \sum_{k=2}^{i+1} (-1)^{k-1} \binom{\alpha}{k} \Phi_{i-k+1}, \quad \Phi_0 = I_{n_1}, \quad (66.4)$$

محاسبه می‌شوند.

برای یافتن جواب  $\bar{x}_i^{(2)}$  از معادله (۶۴.۴) برای  $N \neq 0$ ، فرض می‌شود

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (67.4)$$

با استفاده از (۶۷.۴) می‌توان معادله (۶۴.۴) را به صورت

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \left( \sum_{j=0}^{i+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \begin{bmatrix} \bar{x}_{i-j+1}^{(21)} \\ \bar{x}_{i-j+1}^{(22)} \\ \vdots \\ \bar{x}_{i-j+1}^{(2, n_2)} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \bar{x}_i^{(21)} \\ \bar{x}_i^{(22)} \\ \vdots \\ \bar{x}_i^{(2, n_2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \\ \vdots \\ B_{2, n_2} \end{bmatrix} u_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (68.4)$$



نوشت. از (۶۸.۴) داریم:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i^{(21)} &= -B_{21}u_i, \\ \bar{x}_i^{(22)} &= \sum_{j=0}^{i+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \bar{x}_{i-j+1}^{(21)} - B_{22}u_i = -\sum_{j=0}^{i+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} B_{21}u_{i-j+1} - B_{22}u_i, \\ \bar{x}_i^{(23)} &= \sum_{j=0}^{i+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \bar{x}_{i-j+1}^{(22)} - B_{23}u_i \\ &= -\sum_{j=0}^{i+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \sum_{k=0}^{i-j+2} (-1)^k \binom{\alpha}{k} B_{21}u_{i-j-k+2} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{i+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} B_{22}u_{i-j+1} - B_{23}u_i, \\ &\vdots \\ \bar{x}_i^{(2, n_2)} &= \sum_{j=0}^{i+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \bar{x}_{i-j+1}^{(2, n_2-1)} - B_{2, n_2}u_i. \end{aligned} \tag{69.4}$$

اگر  $N = 0$ ، آن‌گاه از (۶۴.۴) نتیجه می‌شود

$$\bar{x}_i^{(2)} = -B_2 u_i. \tag{70.4}$$

این روش می‌تواند به راحتی برای

$$N = \text{blkdiag} [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_h], \tag{71.4}$$

بسط داده شود که  $N_k \in \mathbb{R}^{n_k}$  به شکل (۶۷.۴) است و  $\sum_{k=1}^h n_k = n_2$ .

اگر ماتریس  $N$  به شکل

$$\bar{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \tag{72.4}$$

باشد، فرضیات به طور مشابه خواهند بود.

توجه کنید که ماتریس‌های (۶۷.۴) و (۷۲.۴) به وسیله  $N = S\bar{N}S$  با هم مرتبط هستند

که

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

با داشتن  $\bar{x}_i^{(1)}$  و  $\bar{x}_i^{(2)}$  می‌توان جواب مطلوب معادله (۱۲.۴) را با استفاده از (۵۹.۴) به صورت

$$x_i = Q \begin{bmatrix} \bar{x}_i^{(1)} \\ \bar{x}_i^{(2)} \end{bmatrix}, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (73.4)$$

به دست آورد.

**مثال ۱.۵.۴.** جواب برای سیستم کسری توسیع یافته (۱۲.۴) با ماتریس‌های

$$E = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0/8 & 1/7 & 2/8 \\ 0/4 & 0/8 & 1/4 \\ 2/2 & 4/6 & 2/2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (74.4)$$

و  $u_i = u, i \in \mathbb{Z}_+, \alpha = 0/5$  به دست آورید.

به راحتی می‌توان بررسی کرد که فرضیات  $\det(E) = 0$  و منظم بودن  $(E, A)$  در ماتریس‌های

(۷۴.۴) برقرار هستند. در چنین حالتی ماتریس‌های  $P$  و  $Q$  به شکل

$$P = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (75.4)$$

محاسبه می‌شوند و

$$\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} = PEQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} = PAQ = \begin{bmatrix} 0/1 & 1 & 0 \\ 0 & 0/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad A_{1\alpha} = A_1 + I_{n_1}\alpha = \begin{bmatrix} 0/6 & 1 \\ 0 & 0/7 \end{bmatrix}, \quad n_1 = 2, \quad n_2 = 1.$$

معادلات (۶۳.۴) و (۶۴.۴) به شکل‌های

$$\bar{x}_{i+1}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0/6 & 1 \\ 0 & 0/7 \end{bmatrix} \bar{x}_i^{(1)} + \sum_{k=2}^{i+1} (-1)^{k-1} \binom{0/5}{k} \bar{x}_{i-k+1}^{(1)} - \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} u_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (76.4)$$

و

$$\bar{x}_i^{(2)} = -B_2 u_i = -\frac{6}{11} u_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (77.4)$$

خواهند بود.

جواب  $\bar{x}_i^{(1)}$  از معادله (۷۶.۴) به صورت

$$\bar{x}_i^{(1)} = \Phi_i \bar{x}_0^{(1)} + \sum_{k=0}^{i-1} \Phi_{i-k-1} B_1 u_k, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (78.4)$$

به دست می‌آید که

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Phi_1 = A_{1\alpha} = \begin{bmatrix} 0/6 & 1 \\ 0 & 0/7 \end{bmatrix}, \\ \Phi_2 &= A_{1\alpha}^2 - I_{n_1} \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} = \begin{bmatrix} 0/48 & 1/300 \\ 0 & 0/615 \end{bmatrix}, \quad \dots \end{aligned} \quad (79.4)$$

و

$$\bar{x}_0 = Q^{-1}x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}_0^{(2)} = [-1]. \quad (80.4)$$

جواب مطلوب سیستم کسری توسیع‌یافته به وسیله (73.4) به صورت

$$x_i = Q\bar{x}_i = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_i^{(1)} \\ \bar{x}_i^{(2)} \end{bmatrix}, \quad (81.4)$$

به دست می‌آید که  $\bar{x}_i^{(1)}$  و  $\bar{x}_i^{(2)}$  به ترتیب توسط (65.4) و (77.4) تعیین می‌شوند.

## ۶.۴ حل سیستم‌های کسری توسیع‌یافته با روش کاکزورک

برای تمام مطالب این بخش از مرجع [۶۲] استفاده شده است.

### ۱.۶.۴ فرمول‌بندی مسئله

سیستم خطی کسری توسیع‌یافته (2.4) و تعاریف (4.4) و (11.1) را در نظر بگیرید. با جایگذاری (4.4) در (2.4) داریم

$$Ex_{i+1} = A_\alpha x_i + \sum_{j=1}^{i+1} c_j^* Ex_{i-j+1} + Bu_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (82.4)$$

که

$$A_\alpha = A + \alpha E, \quad c_j^* = (-1)^j \begin{pmatrix} \alpha \\ j+1 \end{pmatrix}. \quad (83.4)$$

فرض می‌شود  $rank(E) = r < n$  و  $rank(B) = m$ . در مسائل عملی فرض می‌شود که  $j$  با عدد طبیعی  $h = k+1 > n$  کراندار شده است. پس می‌توان معادله (82.4) را به شکل

$$\bar{E}X_{i+1} = \bar{A}X_i + \bar{B}U_i, \quad (84.4)$$

نوشت که

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_\alpha & c_1 E & c_2 E & \dots & c_{h-1} E & c_h E \\ I_n & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ \\ \circ & I_n & \circ & \dots & \circ & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \dots & I_n & \circ \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times \bar{n}}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ \circ \\ \circ \\ \vdots \\ \circ \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times m},$$

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} E & \circ & \circ & \dots & \circ \\ \circ & I_n & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \circ & I_n & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \circ & \dots & I_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\bar{n} \times \bar{n}}, \quad X_i = \begin{bmatrix} x_i \\ x_{i-1} \\ x_{i-2} \\ \vdots \\ x_{i-h} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}, \quad \bar{n} = n(h+1), \quad i \in \mathbb{Z}_+.$$

(۸۵.۴)

سیستم (۸۲.۴) را با قانون پس خورد حالت

$$U_i = K_1 X_{i+1} + K_2 X_i, \quad (۸۶.۴)$$

در نظر بگیرید که  $U_i \in \mathbb{R}^m$  بردار ورودی جدید و  $K_1, K_2 \in \mathbb{R}^{m \times \bar{n}}$  ماتریس‌های مورد نیاز هستند. با جایگذاری (۸۶.۴) در (۸۴.۴) معادله

$$(\bar{E} - \bar{B}K_1)X_{i+1} = (\bar{A} + \bar{B}K_2)X_i, \quad (۸۷.۴)$$

به دست می‌آید. پس مسئله می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$B, A, E$  و  $\alpha \in (0, 1)$  مفروض است،  $K_1$  و  $K_2$  را چنان بیابید که سیستم حلقه بسته مقادیر ویژه مطلوب  $z_1, \dots, z_n$  را با شرط  $|z_k| < 1, k = 1, \dots, n$  دارا باشد.

## ۲.۶.۴ حل مسئله

مسئله با استفاده از فرآیندی با دو مرحله زیر حل می‌شود.

- مرحله ۱. (زیرمسئله ۱)  $K_1$  را چنان بیابید که داشته باشیم  $\bar{E} - \bar{B}K_1 = I_{\bar{n}}$ .
- مرحله ۲. (زیرمسئله ۲)  $K_2$  را چنان بیابید که  $\bar{A} + \bar{B}K_2$  دارای مقادیر ویژه دلخواه باشد.

زیرمسئله اول دارای جواب است اگر و تنها اگر [۶]

$$\text{rank}(\bar{E}|\bar{B}) = \bar{n}, \quad \text{rank}(\bar{B}) = m. \quad (۸۸.۴)$$

قضیه ۱.۶.۴. اگر شرایط (۸۸.۴) برقرار باشند، آن‌گاه معادله

$$\bar{E} - \bar{B}K_1 = I_{\bar{n}}, \quad (۸۹.۴)$$

دارای جوابی به صورت

$$K_1 = \{[\bar{B}^T \bar{B}]^{-1} \bar{B}^T + F[I_{\bar{n}} - \bar{B}[\bar{B}^T \bar{B}]^{-1} \bar{B}^T]\}(\bar{E} - I_{\bar{n}}), \quad (90.4)$$

است که  $F$  یک ماتریس دلخواه است.

برهان. از (۸۹.۴) داریم

$$\bar{B}K_1 = \bar{E} - I_{\bar{n}}. \quad (91.4)$$

اگر شرایط (۹۸.۴) برقرار باشند، آن‌گاه شبه‌معکوس چپ ماتریس  $\bar{B}$  که با رابطه [۳۱]

$$\bar{B}_L = [\bar{B}^T \bar{B}]^{-1} \bar{B}^T + F[I_{\bar{n}} - \bar{B}[\bar{B}^T \bar{B}]^{-1} \bar{B}^T], \quad (92.4)$$

تعریف می‌شود وجود خواهد داشت و

$$K_1 = \bar{B}_L(\bar{E} - I_{\bar{n}}) = \{[\bar{B}^T \bar{B}]^{-1} \bar{B}^T + F[I_{\bar{n}} - \bar{B}[\bar{B}^T \bar{B}]^{-1} \bar{B}^T]\}(\bar{E} - I_{\bar{n}}), \quad (93.4)$$

□

معادل با (۹۰.۴) است.

ملاحظه ۱.۶.۴. در حالت خاصی که  $F = 0$  داریم:

$$K_1 = [\bar{B}^T \bar{B}]^{-1} \bar{B}^T (\bar{E} - I_{\bar{n}}) = \begin{bmatrix} [\bar{B}^T \bar{B}]^{-1} \bar{B}^T (\bar{E} - I_{\bar{n}}) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (94.4)$$

و بنابراین

$$K_1 X_{i+1} = [\bar{B}^T \bar{B}]^{-1} \bar{B}^T (\bar{E} - I_{\bar{n}}) x_{i+1}. \quad (95.4)$$

زیرمسئله‌ی دوم با جایگذاری (۹۰.۴) در (۸۷.۴) حل خواهد شد. پس داریم:

$$X_{i+1} = (\bar{A} + \bar{B}K_1)X_i. \quad (96.4)$$

قضیه ۲.۶.۴. [۳۰] ماتریس  $K_1$  وجود دارد به طوری که ماتریس  $\bar{A} + \bar{B}K_1$  دارای مقادیر ویژه مطلوب  $\lambda_k, k = 1, \dots, \bar{n}$  باشد اگر و تنها اگر زوج  $(\bar{B}, \bar{A})$  کنترل پذیر باشد.

برای حل مسئله، یکی از روش‌های [۳۰] می‌تواند استفاده شود. برای ساده کردن نمایش

سیستم تک‌ورودی (۹۶.۴) آن را با زوج کنترل پذیر  $(\bar{B}, \bar{A})$  در نظر می‌گیریم. بنابر [۳۰]، ماتریس

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_1 \bar{A} \\ \vdots \\ p_1 \bar{A}^{\bar{n}-1} \end{bmatrix}, \quad (97.4)$$

وجود دارد که زوج کنترل پذیر  $(\bar{B}, \bar{A})$  را به شکل استاندارد

$$\tilde{A} = P\bar{A}P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\tilde{a}_0 & -\tilde{a}_1 & -\tilde{a}_2 & \dots & -\tilde{a}_{\bar{n}-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = P\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (98.4)$$

تبدیل می‌کند. بردار  $p_1$  در (۹۷.۴)، سطر  $\bar{n}$  ام از ماتریس

$$\left[ \bar{B} \quad \bar{A}\bar{B} \quad \dots \quad \bar{A}^{\bar{n}-1}\bar{B} \right]^{-1} \quad (۹۹.۴)$$

است. چندجمله‌ای مشخصه ماتریس  $\tilde{A}$  به شکل

$$\det[I_{\bar{n}}z - \tilde{A}] = z^{\bar{n}} + \tilde{a}_{\bar{n}-1}z^{\bar{n}-1} + \dots + \tilde{a}_1z + \tilde{a}_0, \quad (۱۰۰.۴)$$

و چندجمله‌ای مشخصه ماتریس  $\tilde{A} + \tilde{B}K_1$  به شکل

$$\det[I_{\bar{n}}z - \tilde{A} - \tilde{B}K_1] = z^{\bar{n}} + \tilde{d}_{\bar{n}-1}z^{\bar{n}-1} + \dots + \tilde{d}_1z + \tilde{d}_0, \quad (۱۰۱.۴)$$

است. ماتریسی که در (۱۰۱.۴) برقرار است به صورت

$$K_1 = \begin{bmatrix} -\tilde{d}_0 - \tilde{a}_0 & -\tilde{d}_1 - \tilde{a}_1 & \dots & -\tilde{d}_{\bar{n}-1} - \tilde{a}_{\bar{n}-1} \end{bmatrix}, \quad (۱۰۲.۴)$$

محاسبه می‌شود. فرضیات می‌تواند به راحتی برای سیستم‌های چندورودی بسط داده شود [۳۰]

با استفاده از مطالب بالا، فرآیند زیر را داریم.

• **مرحله ۱.** با دانستن  $E, B, A$  و  $h > n, \alpha$  را انتخاب کنید و ماتریس‌های  $\bar{A}$ ،  $\bar{B}$  و  $\bar{E}$  که در (۸۵.۴) تعریف شده‌اند را به دست آورید.

• **مرحله ۲.** شرط (۸۸.۴) را بررسی کنید، سپس با استفاده از  $\bar{E}$  و  $\bar{B}$ ،  $K_1$  را که در (۹۰.۴) تعریف شده است را محاسبه کنید. در حالت خاصی که  $F = 0$ ، می‌توان ماتریس‌های  $\bar{B}$  و  $\bar{E}$  (۹۴.۴) را ببینید) را استفاده نمود.

• **مرحله ۳.** با استفاده از یکی از روش‌های آشنای [۳۰]،  $\bar{A}$  و  $\bar{B}$ ،  $K_1$  را چنان بیابید که ماتریس  $\bar{A} + \bar{B}K_1$  دارای مقادیر ویژه مطلوب  $\lambda_k, k = 1, \dots, \bar{n}$  که  $re(\lambda_k) < 0$  باشد. روشی برای سیستم‌های تک‌ورودی که در بالا ارائه شد می‌تواند استفاده شود.

**مثال ۱.۶.۴.** سیستم خطی کسری توسیع یافته گسسته-زمانی (۱۲.۴) را با ماتریس‌های

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (۱۰۳.۴)$$

و  $\alpha = 0.5$  در نظر بگیرید.  $K_1$  و  $K_2$  را چنان بیابید که سیستم حلقه بسته دارای مقادیر ویژه  $\lambda_k = 0, k = 1, \dots, 9$  باشد. با استفاده از فرآیند فوق نتایج زیر را داریم.

مرحله ۱. با انتخاب  $h = 2$  و (۸۵.۴) داریم:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0/5 & 1 & 0 & 0/125 & 0 & 0 & 0/0625 & 0 & 0 \\ 0 & 0/5 & 1 & 0 & 0/125 & 0 & 0 & 0/0625 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (104.4)$$

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

مرحله ۲. شرایط (۸۸.۴) برقرار هستند. با استفاده از (۱۰۴.۴) در (۹۰.۴) وقتی  $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، ماتریس مورد محاسبه اول را به دست می آوریم:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

به راحتی می توان بررسی کرد که  $\bar{E} - \bar{B}K_1 = I_9$ .

مرحله ۳. با استفاده از الگوریتم ارائه‌شده برای سیستم‌های تک‌ورودی، ماتریس

$$[\bar{B} \quad \bar{A}\bar{B} \quad \dots \quad \bar{A}^{n-1}\bar{B}] =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -0/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -0/5 \\ -13/5 & 0/5 & 0 & 5/5 & 10/5 & -0/5 & 2/4 & 3/1 & 5/4 \\ 54 & 52 & 0 & -48 & -96 & -52 & 3/3 & 22/7 & 9/2 \\ 82 & 370 & 0 & -2 & -248 & -370 & -49/3 & -104/8 & -29/2 \\ -688 & -1656 & 0 & 3761 & 1776 & 1656 & 114 & 84 & -174 \\ 384 & 1056 & 0 & -160 & -984 & -1056 & -104 & -156 & 24 \\ -1024 & -2368 & 0 & 5761 & 2560 & 2368 & 160 & 112 & 224 \\ 640 & 1408 & 0 & -384 & -1600 & -1408 & -80 & -16 & 176 \end{bmatrix},$$

را محاسبه می‌کنیم. بردار به‌شکل

$$[640 \quad 1408 \quad 0 \quad -384 \quad -1600 \quad -1408 \quad -80 \quad -16 \quad 176], \quad (105.4)$$

است. با استفاده از (۹۷.۴) ماتریس

$$P =$$

$$\begin{bmatrix} 640 & 1408 & 0 & -384 & -1600 & -1408 & -80 & -16 & 176 \\ -64 & -256 & 0 & 0 & 160 & 256 & 40 & -88 & 40 \\ -32 & -32 & 0 & 32 & 56 & 32 & -4 & -16 & -4 \\ 16 & 8 & 0 & -8 & -20 & -8 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0/5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0/5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -0/1 & 0 & 0 & -0/1 & 0 \\ 0/5 & 0/9 & 0 & 0/1 & -0/1 & 0/1 & 0/1 & 0 & 0/1 \\ 0/4 & 0/9 & 1 & 0/1 & 0/1 & 0/1 & 0 & 0/1 & 0 \end{bmatrix},$$



را محاسبه می‌کنیم که زوج  $(\bar{B}, \bar{A})$  را به شکل استاندارد (۹۸.۴) را ببینید)

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.002 & -0.0117 & -0.0234 & -0.0781 & 1/125 & -0.5 & 1/5 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T.$$

تبدیل می‌کند. با استفاده از (۱۰۲.۴) دومین ماتریس مورد محاسبه را به دست می‌آوریم:

$$K_2 = [0 \ 0 \ -0.002 \ -0.0117 \ -0.0234 \ -0.0781 \ 1/125 \ -0.5 \ 1/5].$$

ماتریس سیستم حلقه بسته به صورت

$$\tilde{A} + \tilde{B}K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

به دست می‌آید و دارای مقادیر ویژه مطلوب  $\lambda_k = 0, k = 1, \dots, 9$  است.

## ۷.۴ پایدارسازی و یافتن جواب در سیستم‌های کسری

### توسیع‌یافته با تخصیص مقادیر ویژه

سیستم‌های خطی کسری توسیع‌یافته گسسته-زمانی (۲.۴) را در نظر بگیرید که  $D = 0$ ,

$$rank(C) = r, rank(B) = m, 1 \leq m \leq n$$

تعریف ۱.۷.۴ [۳۸] سیستم کسری توسیع‌یافته گسسته-زمانی (۲.۴) را به طور مجانی پایدار

می‌نامند اگر و تنها اگر برای هر  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  و  $u_i = 0$  داشته باشیم  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0$ .

با جایگذاری (۴.۴) در (۲.۴) داریم

$$E \left( x_{i+1} + \sum_{j=1}^{i+1} (-1)^j \binom{\alpha}{j} x_{i-j+1} \right) = Ax_i + Bu_i, \quad (106.4)$$

$$y_i = Cx_i. \quad (106.4 \text{ ب})$$

با توجه به (۴.۴) و لم ۴.۱.۱ نتیجه می‌شود که ضرایب  $c_j^*$  تعریف شده در (۸۳.۴) به‌طور قوی کاهش می‌یابند وقتی که  $j$  افزایش یابد و برای  $0 < \alpha < 1$  مثبت هستند. در مسائل عملی  $j$  را با عدد طبیعی  $h$  کراندار در نظر می‌گیریم و با جایگذاری در (۱۰۶.۴) داریم

$$Ex_{i+1} = A_\alpha x_i + \sum_{j=1}^h c_j^* Ex_{i-j} + Bu_i, \quad (107.4)$$

$$y_i = Cx_i, \quad (107.4 \text{ ب})$$

که  $A_\alpha$  در (۸۳.۴) تعریف شده است. با تعریف بردار حالت جدید

$$X_i = \begin{bmatrix} x_i \\ x_{i-1} \\ x_{i-2} \\ \vdots \\ x_{i-h} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}, \quad (108.4)$$

می‌توان معادله (۱۰۷.۴) را به‌شکل

$$\bar{E}X_{i+1} = \bar{A}X_i + \bar{B}U_i, \quad (109.4)$$

$$Y_i = \bar{C}X_i, \quad (109.4 \text{ ب})$$

نوشت که  $\bar{A}$ ،  $\bar{B}$  و  $\bar{E}$  در (۸۵.۴) تعریف شده‌اند و

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times \bar{n}}, \quad Y_i = \begin{bmatrix} y_i \\ y_{i-1} \\ y_{i-2} \\ \vdots \\ y_{i-h} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^r, \quad (110.4)$$

و  $U_i \in \mathbb{R}^m$  بردار ورودی است. همچنین ماتریس  $\bar{E}$  به دلیل منفرد بودن ماتریس  $E$  و (۸۵.۴) منفرد است.

**تعریف ۲.۷.۴.** [۵۰] سیستم کسری توسیع یافته گسسته-زمانی (۲.۴) به‌طور عملی پایدار نامیده می‌شود اگر و تنها اگر سیستم توسیع یافته با تأخیر (۱۰۷.۴) یا به‌طور معادل سیستم استاندارد (۱۰۹.۴) به‌طور مجانی پایدار باشد.

هدف از تخصیص مقادیر ویژه، یافتن پس‌خورد حالت پیشرو یا حالت پیشرو و گزاره‌ای یا خروجی پیشرو و یا خروجی پیشرو و گزاره‌ای است به‌گونه‌ای که سیستم حلقه بسته از سیستم (۱۰۹.۴) دارای مقادیر ویژه مطلوب و داخل دایره واحد باشد. در زیربخش‌های ۱.۷.۴ و ۴.۷.۴ نشان می‌دهیم که استفاده از پس‌خورد حالت پیشرو و خروجی پیشرو برای پایدارسازی و حل کردن سیستم‌های کسری توسیع‌یافته امکان‌پذیر نیست.

## ۱.۷.۴ پایدارسازی و یافتن جواب با استفاده از تبدیلات تشابهی و پس‌خورد حالت پیشرو

سیستم (۱۰۹.۴) را با قانون پس‌خورد حالت پیشرو

$$U_i = K'_f X_{i+1}, \quad (111.4)$$

در نظر بگیرید. اگر فرضیات

$$I) \text{rank}(\bar{E}|\bar{B}) = n, \quad II) \text{rank}(\bar{A}) = n, \quad III) \text{rank}(\bar{B}) = m, \quad (112.4)$$

برقرار باشند، ماتریس پس‌خورد حالت  $K'_f$  وجود دارد به‌طوری که [۵]

$$\text{rank}(\bar{E} - \bar{B}K'_f) = \bar{n}. \quad (113.4)$$

با فرض برقراری (۱۱۳.۴) و با جایگذاری (۱۱۱.۴) در (۱۰۹.۴) به‌صورت

$$\bar{E}X_{i+1} = \bar{A}X_i + \bar{B}K'_f X_{i+1} \Rightarrow (\bar{E} - \bar{B}K'_f)X_{i+1} = \bar{A}X_i,$$

سیستم استاندارد حلقه بسته

$$X_{i+1} = (\bar{E} - \bar{B}K'_f)^{-1} \bar{A}X_i, \quad (114.4)$$

را داریم.

**قضیه ۱.۷.۴.** [۱۹] سیستم خطی استاندارد گسسته-زمانی (۱۱۴.۴) به‌طور مجانی پایدار است اگر و تنها اگر مقادیر ویژه  $(\bar{E} - \bar{B}K'_f)^{-1} \bar{A}$  در داخل دایره واحد باشند.

**ملاحظه ۱.۷.۴.** در بخش ۶.۳ از فصل ۳ مشاهده کردید که ممکن است ماتریس‌های حلقه باز در سیستم‌های استاندارد تبدیل‌شده از سیستم‌های توسیع‌یافته گسسته-زمانی منفرد باشند. بنابراین از پس‌خورد‌های حالت پیشرو و گزاره‌ای برای رفع این مشکل استفاده شد. اما در این فصل، بنابر تعریف ماتریس حلقه باز در سیستم‌های استاندارد تبدیل‌شده از سیستم‌های کسری توسیع‌یافته در (۱۰۹.۴) این ماتریس همواره منفرد است زیرا ماتریس شامل  $n$  سطر اول و  $n$  ستون آخر، یعنی  $c_h E$ ، منفرد است و این مطلب اتفاق می‌افتد چون  $E$  منفرد است. پس از روش تبدیلات تشابهی و پس‌خورد حالت پیشرو برای پایدارسازی و یافتن جواب در سیستم‌های کسری توسیع‌یافته نمی‌توان استفاده نمود.

## ۲.۷.۴ پایدارسازی و یافتن جواب با استفاده از تبدیلات تشابهی و پس خورد حالت پیشرو و گزاره‌ای

سیستم (۱۱۰۹.۴) را با قانون پس خورد حالت پیشرو و گزاره‌ای

$$U_i = K_f X_{i+1} + K_p X_i, \quad (115.4)$$

در نظر بگیرید. اگر فرضیات

$$I) \text{rank}(\bar{E}|\bar{B}) = n, \quad II) \text{rank}(\bar{B}) = m, \quad (116.4)$$

برقرار باشند، ماتریس پس خورد حالت  $K_f$  وجود دارد به طوری که [۵]

$$\text{rank}(\bar{E} - \bar{B}K_f) = \bar{n}. \quad (117.4)$$

با فرض برقراری (۱۱۷.۴) و با جایگذاری (۱۱۵.۴) در (۱۱۰۹.۴) به صورت

$$\bar{E}X_{i+1} = \bar{A}X_i + \bar{B}K_f X_{i+1} + \bar{B}K_p X_i \Rightarrow (\bar{E} - \bar{B}K_f)X_{i+1} = (\bar{A} + \bar{B}K_p)X_i,$$

سیستم استاندارد حلقه بسته

$$X_{i+1} = (\bar{E} - \bar{B}K_f)^{-1}(\bar{A} + \bar{B}K_p)X_i, \quad (118.4)$$

را داریم.

**قضیه ۲.۷.۴.** [۱۹] سیستم خطی استاندارد گسسته-زمانی (۱۱۸.۴) به طور مجانی پایدار است اگر و تنها اگر مقادیر ویژه  $(\bar{E} - \bar{B}K_f)^{-1}(\bar{A} + \bar{B}K_p)$  در داخل دایره واحد باشند.

برای محاسبه پس خوردهای  $K_p$  و  $K_f$  در (۱۱۵.۴)، ابتدا پس خورد حالت گزاره‌ای  $K_p$  را با

استفاده از روش تبدیلات تشابهی روی سیستم

$$\begin{cases} g_{i+1} = \bar{A}g_i + \bar{B}v_i, \\ v_i = K_p g_i, \end{cases} \quad (119.4)$$

به دست می‌آوریم به طوری که مقادیر ویژه ناصفر مطلوب  $\Omega = \{\mu_1, \dots, \mu_{\bar{n}}\}$  را به این سیستم اختصاص دهد.

سپس، پس خورد حالت پیشرو  $K_f$  را با استفاده از همان روش تبدیلات تشابهی روی

سیستم (۱۲۱.۴) با اختصاص وارون مقادیر ویژه مطلوب برای سیستم (۱۱۰۹.۴)، یعنی  $L^{-1} =$

$\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_{\bar{n}}^{-1}\}$ ، به دست می‌آوریم. برای درک بهتر این مطلب قضیه ۲.۷.۴ را ببینید.

**قضیه ۳.۷.۴.** ماتریس‌های  $N$  و  $M$  را به صورت

$$N = (\bar{A} + \bar{B}K_p)^{-1} \bar{E}, \quad M = -(\bar{A} + \bar{B}K_p)^{-1} \bar{B}, \quad (120.4)$$

و مجموعه مقادیر ویژه  $L$  را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که زوج  $(M, N)$  کنترل‌پذیر باشد.

همچنین، فرض کنید  $K_f$  ماتریس پس خورد حالت پیشرویی باشد که مقادیر ویژه  $L^{-1} =$

$\{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_{\bar{n}}^{-1}\}$  را به سیستم حلقه بسته

$$\begin{cases} z_{i+1} = Nz_i + Mw_i, \\ w_i = K_f z_i, \end{cases} \quad (121.4)$$



$$K_p = \begin{bmatrix} -1/12 & -0/47 & -0/2 & -0/03 & 0/08 & -0/01 & 0/01 & -0/03 & 0 \\ -1/17 & 0/21 & 1/49 & -0/02 & -0/01 & -0/04 & 0 & 0 & 0 \\ 0/3 & -0/74 & -0/66 & 0 & -0/05 & 0 & 0 & 0/02 & 0 \end{bmatrix}.$$

ماتریس‌های سیستم (۱۲۱.۴) و ماتریس پس‌خورد پیشرو  $K_f$  نیز به صورت زیر به دست آمده‌اند:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 392/57 & -261/71 & 0 & -113/67 & 31/64 & -9/37 & 8/74 & -6/24 & 10 \\ -363/93 & 1131/51 & 0 & 21/48 & -92/57 & 71/87 & -4/58 & 13/74 & -3/33 \\ 248/69 & -721/35 & 0 & -3/9 & 30/46 & -81/24 & 3/02 & -1/56 & 10/83 \end{bmatrix},$$

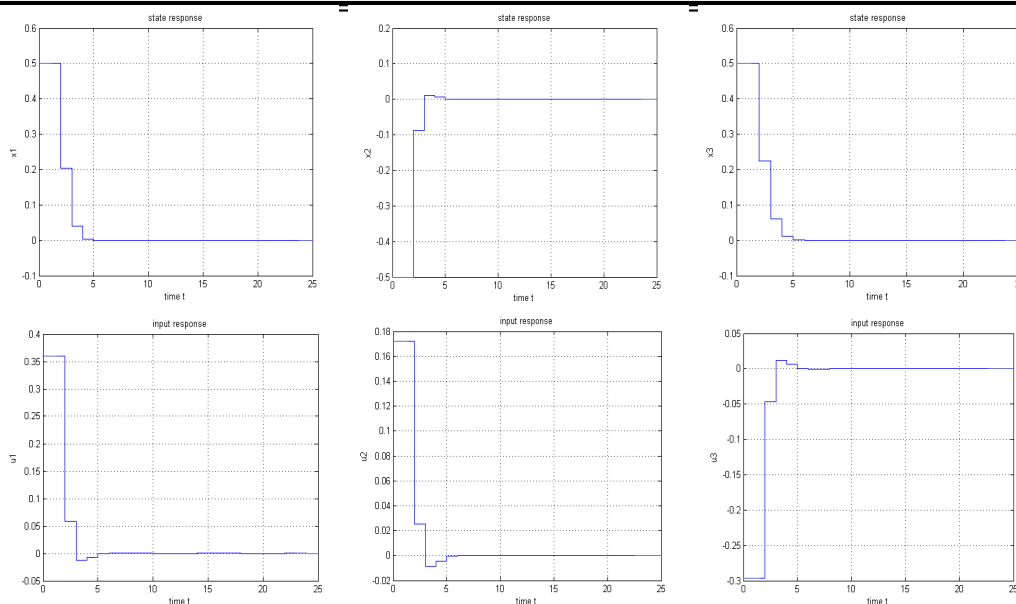
$$M = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -0/06 & -1 \\ 1 & -0/18 & -0/33 \\ -0/5 & -0/12 & 0/33 \end{bmatrix},$$

$$K_f = \begin{bmatrix} 0/25 & -0/71 & -0/25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0/25 & -0/34 & -0/25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0/25 & 0/59 & 0/25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

شکل ۳.۴ همگرایی بردارهای حالت و ورودی به صفر را نشان می‌دهد.

## ۳.۷.۴ پایدارسازی و یافتن جواب باروش تخصیص مقادیر ویژه جزئی و پس‌خورد حالت پیشرو و گزاره‌ای

نتایج این زیربخش در مرجع [۸۴] به چاپ رسیده است.



شکل ۳.۴: پایداری بردارهای حالت و ورودی در مثال ۱.۷.۴

همان‌طور که در زیربخش ۱.۷.۴ توضیح داده شد، پایداری سیستم‌های کسری توسیع‌یافته با پس‌خورد حالت پیشرو امکان‌پذیر نیست چون ماتریس حلقه باز سیستم استاندارد معادل با سیستم کسری توسیع‌یافته همواره منفرد است.

الگوریتم متناظر با روش تخصیص مقادیر ویژه جزئی در بخش ۲.۴.۲ در سیستم (۱۲.۴) را برای محاسبه پس‌خوردهای حالت گزاره‌ای و پیشرو به صورت زیر بیان می‌کنیم.

#### ورودی داده‌ها:

•  $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  مجموعه  $\{\mu_1, \dots, \mu_p\}$  که تحت زوج مختلط بسته باشند.

#### محاسبه پس‌خورد حالت گزاره‌ای:

- ماتریس‌های  $\bar{E}, \bar{A}$  و  $\bar{B}$  را با استفاده از (۸۵.۴) محاسبه نمایید.
- مقادیر ویژه ناصفر را به سیستم (۱۱۹.۴) با استفاده از روش تبدیلات تشابهی در بخش ۲.۲ یا روش تخصیص مقادیر ویژه جزئی مشابه با مرحله بعدی همین الگوریتم تخصیص دهید.

#### محاسبه پس‌خورد حالت پیشرو:

- ماتریس‌های  $M$  و  $N$  را با استفاده از (۱۲۰.۴) محاسبه نمایید.
- مقادیر ویژه نامطلوب  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  از ماتریس حلقه باز  $N$  و بردار ویژه چپ آن به صورت  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  را تعیین کنید.

- ماتریس‌های  $\Lambda_1 = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  و  $Y_1 = (y_1, \dots, y_p)$  را تشکیل دهید.
- مقادیر ویژه  $\{\mu_1, \dots, \mu_p\}$  را به زوج ماتریسی  $(Y_1^H M, \Lambda_1)$  با استفاده از یکی از روش‌های تخصیص مقادیر ویژه تخصیص دهید به طوری که  $\Omega(\Lambda_1 + Y_1^H M K) = \{\mu_1, \dots, \mu_p\}$ .
- ماتریس پس‌خورد حالت پیشرو را با استفاده از  $K_f = K Y_1^H$  به دست آورید.

مثال ۲.۷.۴. سیستم (۱۲.۴) را با  $\alpha = 0/3$ ،  $h = 2$  و ماتریس‌های

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

در نظر بگیرید.

ماتریس‌های  $\bar{A}$ ،  $\bar{B}$  و  $\bar{E}$  به وسیله‌ی (۱۵.۴) به صورت زیر محاسبه شده‌اند:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1/8 & -2/7 & -2/5 & -0/42 & 0/1 & 0/52 & 0/23 & -0/05 & -0/29 \\ 5/4 & 1/6 & -0/1 & 0/84 & 0/21 & 0/31 & -0/47 & -0/11 & -0/17 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{E} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

با تخصیص مقادیر ویژه  $\{0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1\}$  به سیستم (۱۱۹.۴)، ماتریس پس‌خورد حالت گزاره‌ای به صورت

$$K_p = \begin{bmatrix} -3/07 & 0/57 & -0/5 & 0/68 & 0/21 & 0/4 & -0/13 & 0 & 0/06 \\ -0/46 & 0/6 & 1/53 & -0/69 & -0/29 & -0/65 & 0/14 & 0/04 & 0/07 \end{bmatrix},$$



زوج ماتریسی  $(M, N)$  از سیستم (۱۲۱.۴) به صورت زیر محاسبه شده‌اند:

$$N = 10^7 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 10^{-7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-7} \\ 0/01 & 0/05 & 0/18 & -0/01 & 0 & -0/01 & 0 & 0 & 0 \\ -0/1 & -0/37 & -1/18 & 0/07 & 0/03 & 0/09 & 0 & 0 & 0/01 \\ 0/03 & 0/11 & 0/34 & -0/02 & -0/01 & -0/02 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M = 10^6 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0/75 & -0/78 \\ 4/95 & 5/16 \\ -1/46 & -1/52 \end{bmatrix}.$$

داریم:

$$\Omega(N) = \{34/6 \pm 40/14i, -33/53, 24/81 \pm 18i, 4/77, -0/04 \pm 0/92i, 0\}.$$

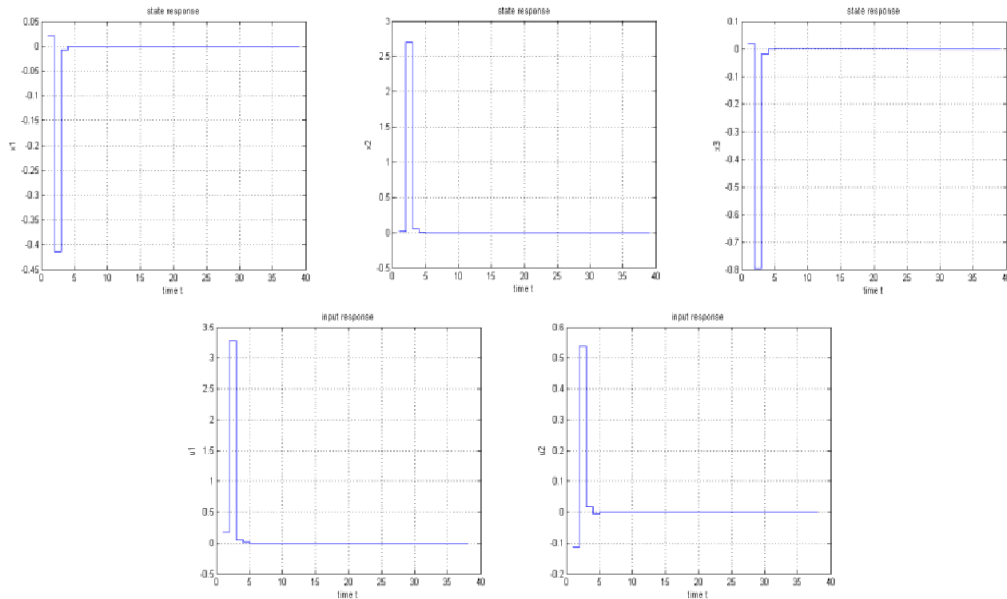
بنابراین  $p = 3$  و زوج ماتریسی  $(Y_1^H M, \Lambda_1)$  به صورت

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} -0/04 - 0/92i & 0 & 0 \\ 0 & -0/04 + 0/92i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_1^H M = \begin{bmatrix} 0/25 - 0/38i & 0/59 - 0/5i \\ 0/25 + 0/38i & 0/59 + 0/5i \\ -0/33 & -0/67 \end{bmatrix},$$

به دست می‌آیند و با تخصیص مقادیر ویژه  $\{10 \pm 10i, 10\}$  به جای  $\{-0/04 \pm 0/92i, 0\}$  ماتریس پس‌خورد حالت پیشرو به صورت

$$K_f = \begin{bmatrix} -0/53 & 0/31 & 1/32 & -0/23 & -0/13 & -0/32 & 0/07 & 0/04 & 0/11 \\ -0/02 & -0/13 & -0/42 & 0/1 & 0/05 & 0/13 & -0/02 & -0/01 & -0/02 \end{bmatrix}$$

محاسبه می‌شود. شکل ۴.۴ همگرایی بردارهای حالت و ورودی به صفر را نشان می‌دهد.



شکل ۴.۴: پایداری بردارهای حالت و ورودی در مثال ۲.۷.۴

## ۴.۷.۴ پایداری و یافتن جواب با استفاده از مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی و پس‌خورد خروجی پیشرو

سیستم کسری توسیع‌یافته گسسته-زمانی (۱۰۹.۴) را با قانون پس‌خورد خروجی پیشرو

$$U_i = K'_{fo} Y_{i+1} = K'_{fo} \bar{C} X_{i+1}, \quad (123.4)$$

در نظر بگیرید. برای رسیدن به هدف مسئله تخصیص مقادیر ویژه، فرضیات (۱۱۲.۴) را در نظر می‌گیریم. اگر فرض اول از (۱۱۲.۴) برقرار باشد، آنگاه ماتریس پس‌خورد خروجی پیشرو  $K'_{fo}$  وجود دارد به طوری که

$$\text{rank}(\bar{E} - \bar{B}K'_{fo}\bar{C}) = \bar{n}. \quad (124.4)$$

با جایگذاری (۱۲۳.۴) در (۱۰۹.۴) داریم

$$\bar{E}X_{i+1} = \bar{A}X_i + \bar{B}K'_{fo}\bar{C}X_{i+1}.$$

بنابراین سیستم استاندارد حلقه بسته

$$X_{i+1} = (\bar{E} - \bar{B}K'_{fo}\bar{C})^{-1} \bar{A}X_i, \quad (125.4)$$

نتیجه می‌شود.

**قضیه ۴.۷.۴.** [۱۹] سیستم خطی استاندارد گسسته-زمانی (۱۲۵.۴) به طور مجانی پایدار است اگر و تنها اگر مقادیر ویژه  $(\bar{E} - \bar{B}K'_{fo}\bar{C})^{-1} \bar{A}$  در داخل دایره واحد باشند.

**ملاحظه ۲.۷.۴.** بنابر فرض منفرد بودن ماتریس  $E$  در سیستم (۲.۴) و تعریف (۸۵.۴) برای ماتریس‌های  $\bar{E}$  و  $\bar{A}$  نتیجه می‌شود ماتریس‌های  $\bar{E}$  و  $\bar{A}$  نیز منفرد هستند. بنابراین شرط دوم

در (۱۱۲.۴) برقرار نیست و نمی‌توان از پس‌خورد خروجی پیشرو برای پایدارسازی و یافتن جواب در سیستم‌های کسری توسیع‌یافته (۲.۴) استفاده نمود. این مشکل در زیربخش بعدی حل می‌شود.

ملاحظه ۳.۷.۴. نتایج این زیربخش در حالتی که ماتریس  $E$  را برابر با ماتریس همانی در نظر بگیریم، یعنی سیستم فقط کسری باشد، در [۸۱] به چاپ رسیده است. توجه کنید که در سیستم‌های کسری گسسته-زمانی می‌توان از پس‌خورد خروجی پیشرو استفاده نمود زیرا بنابر تعریف ماتریس  $\bar{A}$  در (۸۵.۴) و بنابر فرض همانی در نظر گرفتن ماتریس  $E$ ، ماتریس  $\bar{A}$  نامنفرد خواهد بود.

## ۵.۷.۴ پایدارسازی و یافتن جواب با استفاده از مسئله مقدار ویژه معکوس ماتریسی و پس‌خورد خروجی پیشرو و گزاره‌ای

نتایج این زیربخش در مرجع [۸۵] به چاپ رسیده است.

اگر سیستم (۱۰۹.۴) را با پس‌خورد خروجی پیشرو و گزاره‌ای

$$\begin{aligned} U_i &= K_{fo}Y_{i+1} + K_{po}Y_i \\ &= K_{fo}\bar{C}X_{i+1} + K_{po}\bar{C}X_i, \end{aligned} \quad (۱۲۶.۴)$$

در نظر بگیریم، نیازی به برقراری شرط دوم از فرضیات (۱۱۲.۴) نیست و به‌طور مشابه با زیربخش ۴.۷.۴ با برقراری شرط اول، ماتریس پس‌خورد خروجی پیشرو  $K_{fo}$  وجود دارد به‌طوری‌که

$$\text{rank}(\bar{E} - \bar{B}K_{fo}\bar{C}) = \bar{n}. \quad (۱۲۷.۴)$$

با جایگذاری (۱۲۶.۴) در معادله (۱۰۹.۴) داریم

$$\bar{E}X_{i+1} = \bar{A}X_i + \bar{B}K_{fo}\bar{C}X_{i+1} + \bar{B}K_{po}\bar{C}X_i.$$

که سیستم استاندارد حلقه بسته

$$X_{i+1} = (\bar{E} - \bar{B}K_{fo}\bar{C})^{-1}(\bar{A} + \bar{B}K_{po}\bar{C})X_i, \quad (۱۲۸.۴)$$

را نتیجه می‌دهد.

قضیه ۵.۷.۴. [۱۹] سیستم خطی استاندارد گسسته-زمانی (۱۲۸.۴) به‌طور مجانی پایدار است اگر و تنها اگر مقادیر ویژه  $(\bar{E} - \bar{B}K_{fo}\bar{C})^{-1}(\bar{A} + \bar{B}K_{po}\bar{C})$  در داخل دایره واحد باشند.

برای محاسبه پس‌خوردهای  $K_{fo}$  و  $K_{po}$  در (۱۲۶.۴)، ابتدا پس‌خورد حالت گزاره‌ای  $K_{po}$  را با استفاده از روش مقدار ویژه معکوس ماتریسی روی سیستم

$$\begin{cases} g_{i+1} = \bar{A}g_i + \bar{B}v_i, \\ p_i = \bar{C}g_i, \end{cases} \quad (۱۲۹.۴)$$

با قانون پس‌خورد خروجی

$$v_i = K_{po}p_i, \quad (130.4)$$

به‌دست می‌آوریم به‌طوری‌که مقادیر ویژه ناصفر مطلوب  $\Omega = \{\mu_1, \dots, \mu_{\bar{n}}\}$  را به این سیستم اختصاص دهد.

سپس، پس‌خورد حالت پیشرو  $K_{fo}$  را با استفاده از همان روش مقدار ویژه معکوس ماتریسی روی سیستم (۱۳۲.۴) با پس‌خورد خروجی (۱۳۳.۴)، با اختصاص وارون مقادیر ویژه مطلوب برای سیستم (۱۰۹.۴)، یعنی  $L^{-1} = \{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_{\bar{n}}^{-1}\}$ ، به‌دست می‌آوریم. برای درک بهتر این مطلب قضیه زیر را ببینید.

**قضیه ۶.۷.۴.** ماتریس‌های  $M$  و  $N$  را به‌صورت

$$N = (\bar{A} + \bar{B}K_{po}\bar{C})^{-1}\bar{E}, \quad M = -(\bar{A} + \bar{B}K_{po}\bar{C})^{-1}\bar{B}, \quad (131.4)$$

و مجموعه مقادیر ویژه  $L$  را به‌گونه‌ای تعریف می‌کنیم که زوج  $(M, N)$  کنترل‌پذیر باشد. همچنین، فرض کنید  $K_{fo}$  ماتریس پس‌خورد خروجی پیشرویی باشد که مقادیر ویژه  $L^{-1} = \{\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_{\bar{n}}^{-1}\}$  را به سیستم حلقه بسته

$$\begin{cases} z_{i+1} = Nz_i + Mw_i, \\ q_i = \bar{C}z_i, \end{cases} \quad (132.4)$$

با قانون پس‌خورد خروجی

$$w_i = K_{fo}q_i, \quad (133.4)$$

تخصیص دهد،  $\lambda_k \in \mathbb{C}$ ،  $\lambda_k \neq 0$  و  $k = 1, \dots, \bar{n}$ . آن‌گاه  $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{\bar{n}}\}$ ، مقادیر ویژه سیستم کنترل‌شده (۱۰۹.۴) با قانون پس‌خورد خروجی پیشرو و گزاره‌ای (۱۲۶.۴) است و شرط (۱۲۴.۴) برقرار است.

□

برهان. مشابه با برهان قضیه ۲.۶.۳ است.

**مثال ۳.۷.۴.** سیستم کسری توسیع‌یافته (۲.۴) را با  $\alpha = 0.7$ ،  $h = 2$  و ماتریس‌های

$$E = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

در نظر بگیرید.

برای سیستم (۱۲۹.۴) با قانون پس‌خورد خروجی (۱۳۰.۴) و مقادیر ویژه

$$\Omega = \{0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5\},$$

نتایج به صورت زیر خواهد بود:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1/6 & 0/1 & 0/3 & -0/21 & 0/31 & -0/1 & 0/09 & -0/13 & 0/04 \\ 1/7 & -3/1 & 3/8 & 0/1 & -0/31 & 0/42 & -0/04 & 0/13 & 0/18 \\ 3/4 & -6/1 & 1/7 & 0/21 & -0/31 & 0/1 & -0/09 & 0/13 & -0/04 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_{po} = \begin{bmatrix} -0/27 & -0/03 \\ 0/38 & 0/14 \end{bmatrix}.$$

مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته سیستم (۱۲۹.۴) با قانون پس خورد خروجی (۱۳۰.۴) برابر

با

$$\{0/1, 0/15, 0/2, 0/25, 0/3, 0/35, 0/4, 0/45, 0/5\},$$

است.

نتایج برای سیستم (۱۳۲.۴) با قانون پس خورد خروجی (۱۳۳.۴) با تخصیص وارون مقادیر

ویژه

$$L = \{-0/1, -0/15, -0/2, -0/25, -0/3, -0/35, -0/4, -0/45, -0/5\},$$

به صورت زیر است:

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 513/04 & -942/67 & 660/45 & -1124/52 & 1551/91 \\ 597/23 & -1230/24 & 1078/88 & -855/46 & 1176/37 \\ 386/07 & -859/16 & 846/48 & -302/89 & 415/34 \end{bmatrix},$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1078/97 & 119/59 & -179/27 & 137/38 \\ -842/73 & 86/18 & -130/43 & 108 \\ -322/32 & 33/32 & -52/08 & 49/42 \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -130/64 & -307/32 \\ -317/29 & -924/34 \\ -436/96 & -888/53 \end{bmatrix}, \quad K_{fo} = \begin{bmatrix} 1/23 & -0/09 \\ -1/09 & -0/03 \end{bmatrix},$$

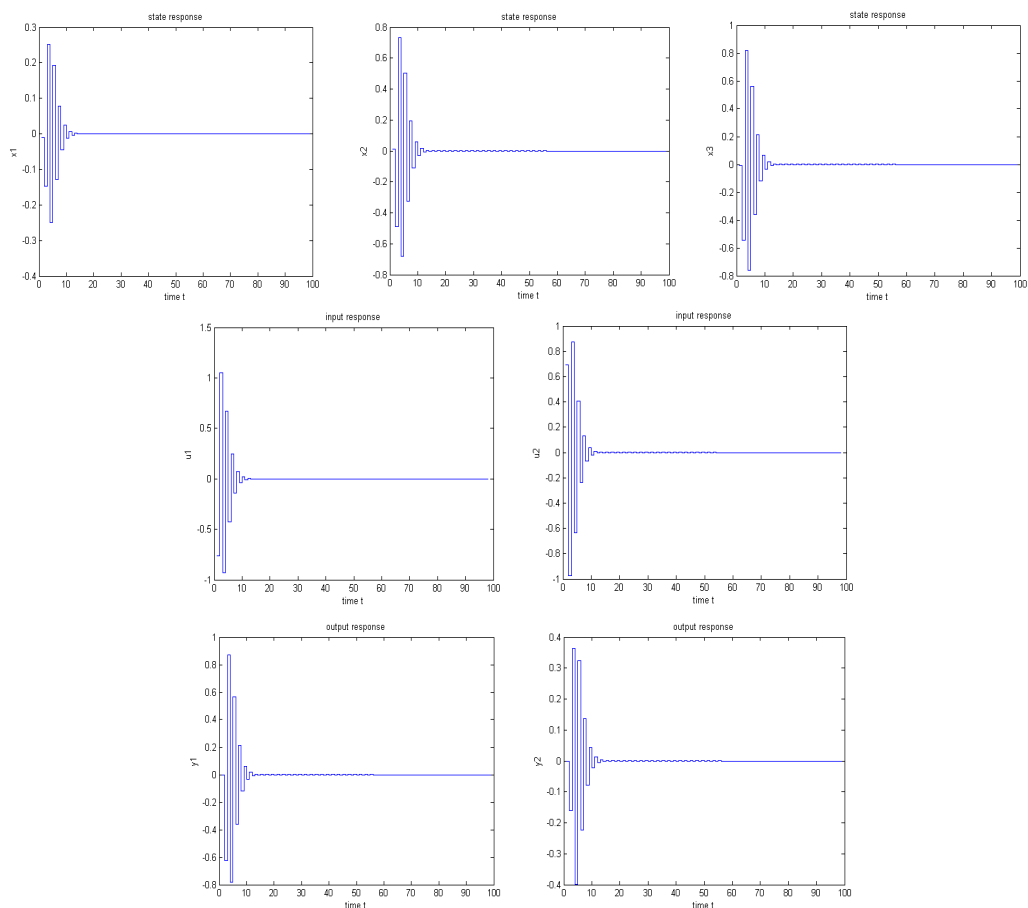
که  $N = [N_1 \ N_2]$  مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته سیستم (۱۳۲.۴) با قانون پس خورد خروجی (۱۳۳.۴) به صورت  $(\bar{E} - \bar{B}K_{fo}\bar{C})^{-1}(\bar{A} + \bar{B}K_{po}\bar{C})$  برابر با  $\{-0/1, -0/15, -0/2, -0/25, -0/3, -0/35, -0/4, -0/45, -0/5\}$ ,

است.

پایداری و یافتن جواب در سیستم‌های کسری توسیع یافته با تخصیص مقادیر ویژه ۱۲۹

شکل ۵.۴ همگرایی بردارهای حالت، ورودی و خروجی به صفر را نشان می‌دهد وقتی که

$$X_0 = [-0.1 \ 0.1 \ -0.1 \ 0.1 \ -0.1 \ 0.1 \ -0.1 \ 0.1 \ -0.1]^T.$$



شکل ۵.۴: پایداری بردارهای حالت، ورودی و خروجی در مثال ۳.۷.۴





# فصل ۵

## سیستم‌های کسری دوبعدی مدل راسر

### ۱.۵ مقدمه

در اوایل دهه ۱۹۷۰ مدل‌های دوبعدی توجه بسیاری از دانشمندان را در نظریه سیستم‌های دینامیکی به خود جلب کرد. از رایج‌ترین مدل‌های دوبعدی می‌توان به مدل‌هایی مانند کرک<sup>۱</sup> [۷۰]، فرناسینی-مارکسینی<sup>۲</sup> [۲۲] و راسر<sup>۳</sup> [۸۹] اشاره نمود. این مدل‌ها برای سیستم‌های مثبت در [۳۲، ۳۴، ۹۵] بسط داده شده است.

مفهوم جدیدی از پایداری عملی سیستم‌های کسری دوبعدی مثبت توسط کاکزورک در [۴۸] ارائه و در آن نشان داده شد پایداری در این سیستم‌ها می‌تواند با بررسی پایداری سیستم‌های خطی یک‌بعدی مثبت متناظر با آن تقلیل داده شود. روش  $LMI$  در [۵۰] به کار می‌رود تا ماتریس‌های پس‌خورد حالت برای مدل راسر کسری محاسبه شوند به طوری که سیستم‌ها مثبت و به‌طور مجانی پایدار باشند. همچنین شرایط لازم برای حل‌پذیری مسئله نیز توضیح داده می‌شود.

در این فصل، ابتدا پایداری مجانی و عملی سیستم‌های کسری دوبعدی در بخش ۲.۵ آورده می‌شود. سپس، حل سیستم‌های کسری دوبعدی مدل راسر با روش تبدیل  $T_{pq}$  در

<sup>۱</sup>Kurk

<sup>۲</sup>Fornasini-Marchesini

<sup>۳</sup>Roesser

بخش ۱.۳.۵ بیان می‌شود. روش تخصیص مقادیر ویژه با تبدیلات تشابهی برای سیستم‌های کسری دوبعدی مدل راسر نیز در بخش ۴.۵ توضیح داده می‌شود که نتیجه اصلی کار رساله است. در بخش آخر، روش وارون درزین برای یافتن جواب در سیستم‌های دوبعدی راسر توسیع یافته به کار می‌رود.

**تعریف ۱.۱.۵.** [۴۹] سیستم خطی کسری با مرتبه‌های  $(\alpha, \beta)$  با معادله حالت

$$\Delta^{\alpha, \beta} x_{i+1, j+1} = A_0 x_{ij} + A_1 x_{i+1, j} + A_2 x_{i, j+1} + B_0 u_{ij} + B_1 u_{i+1, j} + B_2 u_{i, j+1}, \quad (1.5)$$

$$y_{ij} = C x_{ij} + D u_{ij}, \quad (1.5 \text{ ب})$$

را شکل کلی سیستم‌های کسری دوبعدی می‌نامند که  $x_{ij} \in \mathbb{R}^n$ ،  $u_{ij} \in \mathbb{R}^m$  و  $y_{ij} \in \mathbb{R}^r$  بردارهای حالت، ورودی و خروجی،  $A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ،  $B_k \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ،  $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ ،  $D \in \mathbb{R}^{r \times m}$ ،  $k = 0, 1, 2$ ،  $n_1 - 1 < \alpha < n_1$  و  $n_2 - 1 < \beta < n_2$ ،  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ .

**تعریف ۲.۱.۵.** [۴۹] با فرض  $B_1 = B_2 = 0$  در (۱.۵)، مدل کسری دوبعدی نوع اول از مدل فرانسینی-مارکسینی به صورت

$$\Delta^{\alpha, \beta} x_{i+1, j+1} = A_0 x_{ij} + A_1 x_{i+1, j} + A_2 x_{i, j+1} + B u_{ij},$$

و با فرض  $A_0 = B_0 = 0$ ، مدل کسری دوبعدی نوع دوم از مدل فرانسینی-مارکسینی به صورت

$$\Delta^{\alpha, \beta} x_{i+1, j+1} = A_1 x_{i+1, j} + A_2 x_{i, j+1} + B_1 u_{i+1, j} + B_2 u_{i, j+1},$$

نتیجه می‌شود.

**تعریف ۳.۱.۵.** [۴۳] مشتق کسری با مرتبه‌های  $(\alpha, \beta)$  از تابع دوبعدی  $x_{i, j}$  با رابطه

$$\Delta^{\alpha, \beta} x_{ij} = \sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j c_{\alpha, \beta}(k, l) x_{i-k, j-l}, \quad (2.5)$$

$$n_1 - 1 < \alpha < n_1, \quad n_2 - 1 < \beta < n_2,$$

$$n_1, n_2 \in \mathbb{N},$$

تعریف می‌شود که  $\Delta^{\alpha, \beta} x_{ij} = \Delta_i^\alpha \Delta_j^\beta$  و

$$c_{\alpha, \beta}(k, l) = \begin{cases} 1 & k=0, \quad l=0 \\ (-1)^{k+l} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)\beta(\beta-1)\dots(\beta-l+1)}{k!l!} & k, l \geq 0, \quad k+l > 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

با استفاده از تعریف ۳.۱.۵، می‌توان معادله (۱.۵) را به شکل

$$\begin{aligned} x_{i+1, j+1} &= \bar{A}_0 x_{ij} + \bar{A}_1 x_{i+1, j} + \bar{A}_2 x_{i, j+1} \\ &\quad - \sum_{k, l \in D_{i+1, j+1} | D_1} c_{\alpha, \beta}(k, l) x_{i-k+1, j-l+1} \\ &\quad + B_0 u_{ij} + B_1 u_{i+1, j} + B_2 u_{i, j+1}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

نوشت که  $\bar{A}_1 = A_1 + I_n \beta$ ،  $\bar{A}_0 = A_0 - I_n \alpha \beta$ ،  $D_{pq} = \{(i, j) : 0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq q, i, j \in \mathbb{Z}_+\}$  و  $\bar{A}_2 = A_2 + I_n \alpha$

شرایط مرزی برای معادله (۴.۵) با رابطه زیر مفروض است

$$x_{i^{\circ}}, i \in \mathbb{Z}_+, \quad x_{\circ j}, j \in \mathbb{Z}_+. \quad (5.5)$$

**تعریف ۴.۱.۵.** [۵۰] سیستم (۱.۵) (یا (۴.۵) و (۱.۵ ب))، سیستم کسری دوبعدی مثبت نامیده می‌شود اگر برای هر شرط مرزی  $x_{i^{\circ}} \in \mathbb{R}_+^n, i \in \mathbb{Z}_+$  و  $x_{\circ j} \in \mathbb{R}_+^n, j \in \mathbb{Z}_+$  و تمام دنباله‌های ورودی  $u_{ij} \in \mathbb{R}_+^m, i, j \in \mathbb{Z}_+$  داشته باشیم  $x_{ij} \in \mathbb{R}_+^n$  و  $y_{ij} \in \mathbb{R}_+^r$  که  $i, j \in \mathbb{Z}_+$ .

همان‌طور که در [۴۳] اثبات شده است، داریم:

• اگر  $0 < \alpha < 1$  و  $1 < \beta < 2$ ، آن‌گاه

$$\begin{aligned} c_{\alpha, \beta}(k, l) &< 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad l = 2, 3, \dots, \\ c_{\alpha, \beta}(k, 1) &> 0, \quad k = 1, 2, \dots, \\ c_{\alpha, \beta}(0, l) &> 0, \quad l = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (6.5)$$

• اگر  $1 < \alpha < 2$  و  $0 < \beta < 1$ ، آن‌گاه

$$\begin{aligned} c_{\alpha, \beta}(k, l) &< 0, \quad k = 2, 3, \dots, \quad l = 1, 2, \dots, \\ c_{\alpha, \beta}(k, 0) &> 0, \quad k = 2, 3, \dots, \\ c_{\alpha, \beta}(1, l) &> 0, \quad l = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7.5)$$

**قضیه ۱.۱.۵.** [۴۳] سیستم خطی کسری دوبعدی (۱.۵) برای  $0 < \alpha < 1$  و  $1 < \beta < 2$  (یا  $1 < \alpha < 2$  و  $0 < \beta < 1$ ) مثبت است اگر و تنها اگر

$$\begin{aligned} \bar{A}_k \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad B_k \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, \quad k = 0, 1, 2, \\ C \in \mathbb{R}_+^{r \times n}, \quad D \in \mathbb{R}_+^{r \times m}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

## ۲.۵ پایداری سیستم‌های کسری دوبعدی

در این بخش نشان می‌دهیم که پایداری عملی و مجانی در سیستم‌های کسری دوبعدی مثبت می‌تواند با بررسی پایداری سیستم‌های خطی یک‌بعدی مثبت متناظر با آن تقلیل داده شود. برای تمام مطالب آورده‌شده در بخش ۲.۵ از [۵۰] استفاده شده است.

### ۱.۲.۵ پایداری عملی سیستم‌های کسری دوبعدی

توجه کنید سیستم (۴.۵) سیستم خطی دوبعدی با تعدادی تأخیر در بردار حالت است که وقتی  $i, j \rightarrow \infty$ ، تعداد تأخیرها به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

از (۳.۵) نتیجه می‌شود که ضرایب

$$c_{k, l} = -c_{\alpha, \beta}(k, l) = (-1)^{k+l-1} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1) \beta(\beta-1) \dots (\beta-l+1)}{k!l!}, \quad k+l > 0. \quad (9.5)$$

با افزایش  $k$  و  $l$  کاهش می‌یابند. در مسائل عملی فرض می‌شود  $k$  و  $l$  با اعداد طبیعی  $L_1$  و  $L_2$  کراندار هستند. معادله (۴.۵) با فرض این که  $B_0 = B_1 = B_2 = 0$  به شکل زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} x_{i+1,j+1} &= \bar{A}_0 x_{ij} + \bar{A}_1 x_{i+1,j} + \bar{A}_2 x_{i,j+1} \\ &+ \sum \sum_{k,l \in D_{L_1, L_2} | D_{L_1}} c_{k,l} x_{i-k+1, j-l+1}, \end{aligned} \quad (10.5)$$

که  $D_{L_1, L_2} = \{(i, j) : 0 \leq i \leq L_1, 0 \leq j \leq L_2, i, j \in \mathbb{Z}_+\}$

معادله (۱۰.۵) یک سیستم خطی دوبعدی با تعداد متناهی تأخیر در بردار حالت است. سیستم (۱۰.۵) با صرف نظر کردن از تأخیرهای سیستم (۴.۵)، برای  $i > L_1$  و  $j > L_2$  به دست آورده می‌شود.

بردار حالت جدید

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{ij} &= [x_{ij}^T \quad x_{i-1,j}^T \quad \dots \quad x_{i-L_1,j}^T \quad x_{i,j-1}^T \quad \dots \quad x_{i-L_1,j-1}^T \quad x_{i,j-2}^T \quad \dots \quad x_{i-L_1,j-2}^T \\ &\dots \quad x_{i-L_1,j-L_2}^T] \in \mathbb{R}^{\tilde{N}}, \\ \tilde{N} &= (L_1 + 1)(L_2 + 1)n, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned} \quad (11.5)$$

را تعریف کنید. می‌توان معادله (۱۰.۵) را به صورت

$$\tilde{x}_{i+1,j+1} = \tilde{A}_0 \tilde{x}_{ij} + \tilde{A}_1 \tilde{x}_{i+1,j} + \tilde{A}_2 \tilde{x}_{i,j+1}, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+, \quad (12.5)$$

نوشت که

$$\tilde{A}_0 = \begin{bmatrix} & & & & & & \tilde{A}_0^* & & & & & & & \\ \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \\ \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \\ \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & \circ & \dots & \circ & \circ & I_n c_{\circ 2} & \dots & \circ & \circ & I_n c_{\circ 3} & \dots & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ \\ I_n & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \circ & \circ & \dots & I_n & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \dots & \circ & I_n & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} \bar{A}_2 & I_n c_{2 \circ} & \dots & I_n c_{L_1, \circ} & I_n c_{L_1+1, \circ} & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ \\ I_n & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \circ & \circ & \dots & I_n & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & I_n & \circ \end{bmatrix}, \quad (13.5)$$

و

$$\tilde{A}_\circ^* = [\bar{A}_\circ \quad I_n c_{\circ 1} \quad \dots \quad I_n c_{L_1, 1} \quad I_n c_{L_1+1, 1} \quad I_n c_{12} \quad \dots \quad I_n c_{L_1, 2} \\ I_n c_{L_1+1, 2} \quad I_n c_{13} \quad \dots \quad I_n c_{L_1, L_2+1} \quad I_n c_{L_1+1, L_2+1}].$$

بنابراین، سیستم دوبعدی مثبت با تأخیر (۴.۵) به یک سیستم دوبعدی استاندارد بدون تأخیر ولی با بعد بزرگتر تبدیل می‌شود.

**قضیه ۱.۲.۵.** سیستم دوبعدی (۱۲.۵) مثبت است اگر و تنها اگر

$$\bar{A}_k \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad k = \circ, 1, 2. \quad (14.5)$$

برهان. اثبات از (۱۲.۵)، (۱۳.۵) و این حقیقت که سیستم مثبت است اگر و تنها اگر تمام ماتریس‌ها دارای درایه‌های نامنفی باشند، نتیجه می‌شود. □

**تعریف ۱.۲.۵.** سیستم کسری دوبعدی مثبت (۱.۵) به‌طور عملی پایدار است اگر سیستم توضیح داده‌شده با معادله (۱۰.۵) به‌طور مجانی پایدار باشد.

**قضیه ۲.۲.۵.** [۴۵، ۴۰] سیستم کسری دوبعدی مثبت (۱.۵) به‌طور عملی پایدار است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

• برای هر  $(z_1, z_2)$  در مجموعه  $B = \{(z_1, z_2) : |z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1\}$  داشته باشیم:

$$\det(I_{\tilde{N}} - \tilde{A}_0 z_1 z_2 - \tilde{A}_1 z_2 - \tilde{A}_2 z_1) \neq 0. \quad (15.5)$$

• بردار به‌طور اکید مثبت  $\lambda \in \mathbb{R}_+^{\tilde{N}}$  وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$[\tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 - I_{\tilde{N}}]\lambda < 0. \quad (16.5)$$

• سیستم یک‌بعدی مثبت

$$x_{i+1} = (\tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2)x_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (17.5)$$

به‌طور مجانی پایدار باشد.

• سیستم یک‌بعدی مثبت

$$x_{i+1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 & \tilde{A}_0 \\ I_{\tilde{N}} & 0 \end{bmatrix} x_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (18.5)$$

به‌طور مجانی پایدار باشد.

**قضیه ۳.۲.۵.** [۴۵، ۴۰] اگر سیستم دوبعدی مثبت (۱۲.۵) به‌طور مجانی پایدار باشد، آن‌گاه سیستم کسری دوبعدی مثبت (۱.۵) به‌طور عملی پایدار است.

از قضیه ۳.۲.۵ نتیجه زیر را داریم.

**نتیجه ۱.۲.۵.** اگر سیستم دوبعدی مثبت (۱۲.۵) ناپایدار باشد، آن‌گاه سیستم کسری دوبعدی مثبت (۱.۵) برای  $L_1$  و  $L_2$  متناهی ناپایدار است.

**قضیه ۴.۲.۵.** اگر حداقل یک درایه قطری ماتریس  $\bar{A}_1 + \bar{A}_2$  بزرگتر از یک باشد، آن‌گاه سیستم کسری دوبعدی مثبت (۱.۵) ناپایدار است.

برهان. سیستم یک‌بعدی مثبت (۱۸.۵) به‌طور مجانی ناپایدار است اگر حداقل یک درایه قطری ماتریس  $\bar{A}_1 + \bar{A}_2$  بزرگتر از یک باشد [۲۲]. از ساختارهای ماتریس‌های  $\bar{A}_1$  و  $\bar{A}_2$  که در (۱۳.۵) تعریف شده‌اند، نتیجه می‌شود که یک درایه قطری ماتریس  $\bar{A}_1 + \bar{A}_2$  بزرگتر از یک است اگر و تنها اگر حداقل یک درایه قطری از ماتریس  $\bar{A}_1 + \bar{A}_2$  بزرگتر از یک باشد. طبق قضیه ۲.۲.۵ سیستم دوبعدی کسری مثبت (۱.۵) به‌طور عملی پایدار است اگر و تنها اگر سیستم یک‌بعدی مثبت (۱۸.۵) به‌طور مجانی پایدار باشد.  $\square$

**قضیه ۵.۲.۵.** سیستم کسری دوبعدی مثبت (۱.۵) ناپایدار است اگر

$$A_k \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad k = 1, 2. \quad (19.5)$$

برهان. بنابر قضیه ۱.۱.۵، سیستم کسری دوبعدی مثبت (۱.۵) برای  $0 < \alpha < 1$  و  $1 < \beta < 2$  (یا  $1 < \alpha < 2$  و  $0 < \beta < 1$ ) مثبت است اگر و تنها اگر (۸.۵) برقرار باشد. از (۴.۵) نتیجه می‌شود که ماتریس

$$\bar{A}_1 + \bar{A}_2 = A_1 + A_2 + (\alpha + \beta)I_n, \quad (20.5)$$

دارای درایه‌های قطری بزرگتر از یک است اگر (۲۲.۵) برقرار باشد. پس بنابر قضیه ۴.۲.۵ سیستم کسری دوبعدی مثبت (۱.۵) ناپایدار است. □

## ۲.۲.۵ پایداری مجانی سیستم‌های کسری دوبعدی

در این بخش، پایداری مجانی سیستم‌های خطی کسری دوبعدی مثبت را وقتی که  $L_1 \rightarrow \infty$  و  $L_2 \rightarrow \infty$  بررسی خواهیم کرد.

**تعریف ۲.۲.۵.** سیستم خطی کسری دوبعدی مثبت (۱.۵) به‌طور مجانی پایدار است اگر سیستم وقتی  $L_1 \rightarrow \infty$  و  $L_2 \rightarrow \infty$  به‌طور عملی پایدار باشد.

در اثبات نتیجه اصلی این بخش، لم و قضیه زیر استفاده می‌شوند.

**لم ۱.۲.۵.** [۵۰] اگر  $0 < \alpha < 1$  و  $1 < \beta < 2$  (یا  $1 < \alpha < 2$  و  $0 < \beta < 1$ )، آن‌گاه

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{\alpha, \beta}(k, l) = 0. \quad (21.5)$$

**قضیه ۶.۲.۵.** [۴۰، ۳۵] مدل کلی سیستم دوبعدی مثبت با تأخیر به‌صورت

$$x_{i+1, j+1} = \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^q (A_{kl}^{\circ} x_{i-k, j-l} + A_{kl}^1 x_{i-k+1, j-l} + A_{kl}^2 x_{i-k, j-l+1}), \quad i, j \in \mathbb{Z}_+, \quad (22.5)$$

که  $x_{ij} \in \mathbb{R}_+^n$  بردار حالت و  $A_{kl}^t \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$  برای  $k = 0, 1, \dots, p$  و  $l = 0, 1, \dots, q$  و  $t = 0, 1, 2$  به‌طور مجانی پایدار است اگر و تنها اگر سیستم یک‌بعدی مثبت

$$x_{i+1} = \left( \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^q (A_{kl}^{\circ} + A_{kl}^1 + A_{kl}^2) \right) x_i, \quad x_i \in \mathbb{R}_+^n, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (23.5)$$

به‌طور مجانی پایدار باشد.

**قضیه ۷.۲.۵.** سیستم کسری دوبعدی مثبت (۱.۵) به‌طور مجانی پایدار است اگر و تنها اگر سیستم یک‌بعدی مثبت

$$x_{i+1} = (\hat{A} + I_n)x_i, \quad \hat{A} = A_0 + A_1 + A_2, \quad x_i \in \mathbb{R}_+^n, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (24.5)$$

به‌طور مجانی پایدار باشد.

برهان. از (۱.۵) با فرض  $B_0 = B_1 = B_2 = 0$  به‌دست می‌آید

$$x_{i+1, j+1} = A_0 x_{i, j} + A_1 x_{i+1, j} + A_2 x_{i, j+1} + \sum_{k=0}^{i+1} \sum_{l=0, k+l > 0}^{j+1} c_{k, l} x_{i-k+1, j-l+1}, \quad (25.5)$$

که  $c_{k, l} = -c_{\alpha}(k, l)$  وقتی  $k + l > 0$ .

طبق قضیه ۶.۲.۵، سیستم دوبعدی مثبت با تأخیر به‌طور مجانی پایدار است اگر و تنها

اگر سیستم یک‌بعدی مثبت

$$x_{i+1} = \left( \hat{A} + \sum_{k=0}^{i+1} \sum_{\substack{l=0 \\ k+l > 0}}^{j+1} c_{k,l} I_n \right) x_i, \quad x_i \in \mathbb{R}_+^n, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad (26.5)$$

به‌طور مجانی پایدار باشد. از (۳.۵) داریم  $c_{0,0} = -1$  و از (۲۱.۵) به‌دست می‌آوریم

$$\sum_{k=0}^{i+1} \sum_{\substack{l=0 \\ k+l > 0}}^{j+1} c_{k,l} I_n = I_n. \quad (27.5)$$

با جایگذاری (۲۷.۵) در (۲۶.۵)، (۲۴.۵) نتیجه می‌شود. □

**قضیه ۸.۲.۵.** [۲۲، ۴۱، ۴۴] سیستم کسری دوبعدی مثبت (۱.۵) به‌طور مجانی پایدار است اگر و تنها اگر یکی از شرایط معادل زیر برقرار باشد:

- اندازه مقادیر ویژه  $z_1, \dots, z_n$  از ماتریس  $\hat{A} + I_n$  کمتر از یک باشد.
- تمام ضرایب چندجمله‌ای مشخصه ماتریس  $\hat{A}$  مثبت باشند.
- تمام کهادهای اصلی ماتریس  $-\hat{A}$  مثبت باشند.

**قضیه ۹.۲.۵.** سیستم کسری دوبعدی مثبت (۱.۵) ناپایدار است اگر حداقل یک درایه قطری ماتریس  $\hat{A}$  مثبت باشد.

برهان. اگر حداقل یک درایه قطری ماتریس  $\hat{A}$  مثبت باشد، آن‌گاه حداقل یک درایه قطری ماتریس  $\hat{A} + I_n$  بزرگتر از یک است و واضح است که سیستم (۲۴.۵) ناپایدار است [۲۲، ۳۵، ۳۷]. □

**مثال ۱۰.۲.۵.** با استفاده از قضیه ۸.۲.۵، پایداری مجانی سیستم کسری دوبعدی مثبت (۱.۵)

را با  $\alpha = 0.3$ ،  $\beta = 0.2$  و ماتریس‌های

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.2 & -1/1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad (28.5)$$

بررسی کنید. توجه کنید که سیستم کسری مثبت است چون ماتریس‌های

$$\bar{A}_0 = A_0 - I_n \alpha \beta = \begin{bmatrix} 0.04 & 0 \\ 0.1 & 0.14 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_1 = A_1 + I_n \beta = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad (29.5)$$

$$\bar{A}_2 = A_2 + I_n \alpha = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix},$$

درایه‌های نامنفی دارند.

داریم:

$$\hat{A} = A_0 + A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} -0.8 & 0 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}. \quad (30.5)$$



اولین شرط قضیه ۸.۲.۵ برقرار است چون ماتریس

$$\hat{A} + I_n = \begin{bmatrix} 0/2 & 0 \\ 0/5 & 0/5 \end{bmatrix}, \quad (31.5)$$

دارای مقادیر ویژه  $z_1 = 0/2$  و  $z_2 = 0/5$  است که اندازه آن‌ها کمتر از یک است. شرط دوم قضیه ۸.۲.۵ نیز برقرار است چون چندجمله‌ای مشخصه ماتریس (۳۰.۵) به صورت

$$\det(I_n z - \hat{A}) = \begin{vmatrix} z + 0/8 & 0 \\ -0/5 & z + 0/5 \end{vmatrix} = z^2 + 1/3z + 0/4, \quad (32.5)$$

دارای ضرایب مثبت است.

تمام کهادهای اصلی ماتریس

$$-\hat{A} = \begin{bmatrix} 0/8 & 0 \\ -0/5 & 0/5 \end{bmatrix}, \quad (33.5)$$

مثبت هستند، یعنی  $\Delta_1 = 0/8$  و  $\Delta_2 = 0/4$ .

بنابراین هر سه شرط قضیه ۸.۲.۵ برقرار هستند و سیستم کسری دوبعدی مثبت با ماتریس‌های (۲۸.۵) به طور مجانی پایدار است.

**مثال ۲.۲.۵.** با استفاده از قضیه ۹.۲.۵، نشان می‌دهیم که سیستم کسری دوبعدی مثبت

(۱.۵) با  $\alpha = 0/5$ ،  $\beta = 1/2$  و ماتریس‌های

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0/6 & 0/1 \\ 0/1 & 0/7 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -0/1 & 0/3 \\ 0 & -0/2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0/4 & 0/2 \\ 0 & -0/5 \end{bmatrix}, \quad (34.5)$$

ناپایدار است. ماتریس

$$\hat{A} = A_0 + A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} 0/1 & 0/6 \\ 0/1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (35.5)$$

یک درایه قطری مثبت دارد. بنابراین، طبق قضیه ۹.۲.۵ سیستم کسری مثبت ناپایدار است. همین نتیجه با استفاده از یکی از شرایط قضیه ۸.۲.۵ به دست می‌آید.

## ۳.۵ سیستم‌های کسری دوبعدی مدل راسر

برای تمام مطالب آورده شده در بخش ۳.۵ از [۵۰] و مشتق‌های کسری افقی و عمودی تابع دوبعدی [۴۶] استفاده می‌شود.

**تعریف ۱.۳.۵.** مشتق کسری افقی مرتبه  $\alpha$  از تابع دوبعدی  $x_{ij}$ ،  $i, j \in \mathbb{Z}_+$  با رابطه

$$\Delta_\alpha^h x_{ij} = \sum_{k=0}^i c_\alpha(k) x_{i-k, j}, \quad (36.5)$$

تعریف می‌شود که  $\alpha \in \mathbb{R}$ ،  $n_1 - 1 < \alpha < n_1 \in \mathbb{N}$  و

$$c_\alpha(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ (-1)^k \binom{\alpha}{k} = (-1)^k \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} & k > 0 \end{cases} \quad (37.5)$$

تعریف ۲.۳.۵. مشتق کسری عمودی مرتبه  $\beta$  از تابع دوبعدی  $x_{ij}$ ،  $i, j \in \mathbb{Z}_+$  با رابطه

$$\Delta_\beta^v x_{ij} = \sum_{l=0}^j c_\beta(l) x_{i,j-l}, \quad (38.5)$$

تعریف می‌شود که  $\beta \in \mathbb{R}$ ،  $n_2 - 1 < \beta < n_2 \in \mathbb{N}$  و

$$c_\beta(l) = \begin{cases} 1 & l = 0 \\ (-1)^l \binom{\beta}{l} = (-1)^l \frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-l+1)}{l!} & l > 0 \end{cases} \quad (39.5)$$

لم ۱.۳.۵. [۳۸] اگر  $0 < \alpha < 1$ ،  $0 < \beta < 1$ ، آن‌گاه

$$c_\alpha(k) < 0 \quad (c_\beta(k) < 0), \quad k = 1, 2, \dots$$

سیستم خطی کسری دوبعدی بیان شده مدل راسر با معادلات حالت

$$\begin{bmatrix} \Delta_\alpha^h x_{i+1,j}^h \\ \Delta_\beta^v x_{i,j+1}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_{ij}, \quad (40.5)$$

$$y_{ij} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{bmatrix} + D u_{ij}, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+, \quad (40.5)$$

را در نظر بگیرید که  $x_{ij}^v \in \mathbb{R}^{n_2}$  و  $x_{ij}^h \in \mathbb{R}^{n_1}$  به ترتیب بردارهای حالت افقی و عمودی در نقطه  $(i, j)$ ،  $u_{ij}$  بردار ورودی،  $y_{ij}$  بردار خروجی در نقطه  $(i, j)$ ،  $A_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ ،  $A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ ،  $B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}$ ،  $A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ ،  $A_{21} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$  و  $C_2 \in \mathbb{R}^{r \times n_2}$ ،  $C_1 \in \mathbb{R}^{r \times n_1}$ ،  $B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}$ ،  $D \in \mathbb{R}^{r \times m}$ .

با استفاده از تعاریف ۱.۳.۵ و ۲.۳.۵، می‌توان معادله (۴۰.۵) را به شکل

$$\begin{bmatrix} x_{i+1,j}^h \\ x_{i,j+1}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & A_{12} \\ A_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{k=2}^{i+1} c_\alpha(k) x_{i-k+1,j}^h \\ \sum_{l=2}^{j+1} c_\beta(l) x_{i,j-l+1}^h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_{ij}, \quad (41.5)$$

نوشت که  $\bar{A}_{22} = A_{22} + \beta I_{n_2}$  و  $\bar{A}_{11} = A_{11} + \alpha I_{n_1}$ .

## ۱.۳.۵ یافتن جواب در سیستم‌های کسری دوبعدی مدل راسر با

### تبدیل $T_{pq}$

رابطه (۴۱.۵)، سیستم‌های دوبعدی با تأخیری را نشان می‌دهد که با افزایش  $i$  و  $j$ ، تأخیرها نیز افزایش می‌یابند. از (۳۷.۵) و (۳۹.۵) نتیجه می‌شود که ضرایب  $c_\alpha(k)$  و  $c_\beta(l)$  در (۴۱.۵)

با افزایش  $l$  و  $k$  به‌طور اکید کاهش می‌یابند. بنابراین، در مسائل عملی فرض می‌کنیم  $k$  و  $l$  دارای کران‌های اعداد طبیعی  $L_1$  و  $L_2$  هستند. پس (۴۱.۵) به‌شکل

$$\begin{bmatrix} x_{i+1,j}^h \\ x_{i,j+1}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & A_{12} \\ A_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{k=2}^{L_1+1} c_\alpha(k)x_{i-k+1,j}^h \\ \sum_{l=2}^{L_2+1} c_\beta(l)x_{i,j-l+1}^h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_{ij}, \quad (42.5)$$

تبدیل می‌شود. شرایط مرزی برای معادلات (۴۰.۵)، (۴۱.۵) و (۴۲.۵) به‌شکل

$$x_{\circ j}^h, j \in \mathbb{Z}_+, \quad x_{i \circ}^h, i \in \mathbb{Z}_+, \quad (43.5)$$

مفروض است.

قضیه ۱.۳.۵. [۴۶] جواب معادله (۴۱.۵) با شرایط مرزی (۴۳.۵) به‌صورت

$$\begin{bmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{bmatrix} = \sum_{p=\circ}^i T_{i-p,j} \begin{bmatrix} \circ \\ x_{p\circ}^v \end{bmatrix} + \sum_{q=\circ}^j T_{i,j-q} \begin{bmatrix} x_{\circ q}^h \\ \circ \end{bmatrix} + \sum_{p=\circ}^i \sum_{q=\circ}^j (T_{i-p-1,j-q} B^{1\circ} + T_{i-p,j-q-1} B^{\circ 1}) u_{pq}, \quad (44.5)$$

است که

$$B^{1\circ} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \circ \end{bmatrix}, \quad B^{\circ 1} = \begin{bmatrix} \circ \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad (45.5)$$

و ماتریس‌های تبدیل  $T_{pq} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  با رابطه

$$\begin{cases} I_n & p = \circ, q = \circ, \\ H & p + q > \circ, (p, q \in \mathbb{Z}_+), \\ \circ & p < \circ, q < \circ (p < \circ \text{ or } q < \circ), \end{cases} \quad (46.5)$$

تعریف می‌شود و داریم

$$H = T_{1\circ} T_{p-1,q} + T_{\circ 1} T_{p,q-1} - \sum_{k=2}^p [c_\alpha(k) I_{N_1} \quad \circ] T_{p-k,q} - \sum_{l=2}^q \begin{bmatrix} \circ & c_\beta(l) I_{N_2} \end{bmatrix} T_{p,q-l},$$

که

$$T_{1\circ} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & A_{12} \\ \circ & \circ \end{bmatrix}, \quad T_{\circ 1} = \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ A_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}. \quad (47.5)$$

سیستم کران‌دار شده (۴۲.۵) با دو عدد طبیعی  $L_1, L_2$  و

$$\bar{G}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} I_{N_1} - z_1^{-1} \bar{A}_{11} + \sum_{k=2}^{L_1} c_\alpha(k) z_1^{-k} I_{N_1} & -z_1^{-1} A_{12} \\ -z_1^{-1} A_{21} & I_{N_2} - z_2^{-1} \bar{A}_{22} + \sum_{l=2}^{L_2} c_\beta(l) z_2^{-k} I_{N_2} \end{bmatrix}, \quad (48.5)$$

را در نظر بگیرید و فرض کنید

$$\det(\bar{G}(z_1, z_2)) = \sum_{p=\circ}^{N_1} \sum_{q=\circ}^{N_2} a_{N_1-p, N_2-q}(k) z_1^{-p} z_2^{-q}, \quad (49.5)$$

که  $N_2, N_1 \in \mathbb{Z}_+$  با اعداد  $L_2$  و  $L_1$  در (۴۲.۵) تعریف می‌شوند.

قضیه ۲.۳.۵. [۴۶] اگر (۴۹.۵) چندجمله‌ای مشخصه سیستم (۴۲.۵) باشد، آن گاه ماتریس‌های  $T_{pq}$  در معادله

$$\sum_{p=0}^{N_1} \sum_{q=0}^{N_2} a_{pq} T_{pq} = 0, \quad (50.5)$$

صدق می‌کنند.

قضیه ۲.۳.۵، یک بسط از قضیه کیلی-همیلتون برای سیستم‌های کسری دوبعدی بیان شده به‌وسیله معادله راسر (۴۱.۵) است.

## ۲.۳.۵ پایداری مجانبی سیستم‌های کسری دوبعدی مثبت مدل راسر

تعریف ۳.۳.۵. [۵۰] سیستم (۴۰.۵)، سیستم کسری دوبعدی مثبت نامیده می‌شود اگر و تنها اگر برای هر شرط مرزی  $x_{i0}^v \in \mathbb{R}_+^{n_2}, i \in \mathbb{Z}_+$  و  $x_{i0}^h \in \mathbb{R}_+^{n_1}, j \in \mathbb{Z}_+$  و تمام ورودی‌های  $u_{ij} \in \mathbb{R}_+^r, i, j \in \mathbb{Z}_+$  داشته باشیم:  $x_{ij}^h \in \mathbb{R}_+^{n_1}, x_{ij}^v \in \mathbb{R}_+^{n_2}$  و برای  $y_{ij} \in \mathbb{R}_+^r$ .

قضیه ۳.۳.۵. [۴۶] سیستم کسری دوبعدی (۴۱.۵) برای  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  و  $0 < \alpha < 1$  و  $0 < \beta < 1$  مثبت است اگر و تنها اگر

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & A_{12} \\ A_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, \quad [C_1 \ C_2] \in \mathbb{R}_+^{r \times n}, \quad D \in \mathbb{R}_+^{r \times m}. \quad (51.5)$$

مدل راسر دوبعدی (۴۱.۵) را با پس‌خورد حالت

$$u_{ij} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{bmatrix}, \quad (52.5)$$

در نظر بگیرید که  $K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  با  $K_j \in \mathbb{R}^{m \times n_j}, j = 1, 2$ ، ماتریس هدف برای محاسبه است.

در حقیقت ما به دنبال ماتریس  $K$  هستیم به‌طوری که سیستم حلقه بسته

$$\begin{bmatrix} x_{i+1,j}^h \\ x_{i,j+1}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} + B_1 K_1 & A_{12} + B_1 K_2 \\ A_{21} + B_2 K_1 & \bar{A}_{22} + B_2 K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_{k=2}^{i+1} c_\alpha(k) x_{i-k+1,j}^h \\ \sum_{l=2}^{j+1} c_\beta(l) x_{i,j-l+1}^h \end{bmatrix}, \quad (53.5)$$

مثبت و به‌طور مجانبی پایدار باشد.

قضیه ۴.۳.۵. [۴۶] سیستم حلقه بسته دوبعدی (۵۳.۵)، مثبت و به‌طور مجانبی پایدار است اگر و تنها اگر ماتریس قطری قطعه‌ای

$$\Lambda = \text{blockdiag}(\Lambda_1, \Lambda_2), \quad (54.5)$$

$$\Lambda_k = \text{diag}(\Lambda_{k1}, \dots, \Lambda_{kn_k}), \quad \Lambda_{kj} > 0, \quad k = 1, 2, \quad j = 1, \dots, n_k,$$

وجود داشته باشد و ماتریس حقیقی

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \end{bmatrix}, \quad D_k \in \mathbb{R}^{m \times n_k}, \quad k = 1, 2, \quad (55.5)$$

در شرایط

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11}\Lambda_1 + B_1D_1 & A_{12}\Lambda_2 + B_1D_2 \\ A_{21}\Lambda_1 + B_2D_1 & \bar{A}_{22}\Lambda_2 + B_2D_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \quad (56.5)$$

و

$$\begin{bmatrix} A_{11}\Lambda_1 + B_1D_1 & A_{12}\Lambda_2 + B_1D_2 \\ A_{21}\Lambda_1 + B_2D_1 & A_{22}\Lambda_2 + B_2D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{n_1} \\ \lambda_{n_2} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (57.5)$$

برقرار باشد که  $\lambda_{n_k} = [1 \dots 1]^T \in \mathbb{R}_+^{n_k}, k = 1, 2$

ماتریس  $K$  با رابطه

$$K = [K_1 \ K_2] = [D_1 \ D_2] \Lambda^{-1} = [D_1\Lambda_1^{-1} \ D_2\Lambda_2^{-1}], \quad (58.5)$$

محاسبه می‌شود.

واضح است که سیستم حلقه بسته دوبعدی مثبت (53.5) به‌طور مجانی پایدار است اگر

و تنها اگر سیستم یک‌بعدی مثبت با ماتریس

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} + B_1K_1 & A_{12} + B_1K_2 \\ A_{21} + B_2K_1 & \bar{A}_{22} + B_2K_2 \end{bmatrix} = \sum_{k=2}^{\infty} \begin{bmatrix} I_{n_1}c_{\alpha}(k) & 0 \\ 0 & I_{n_2}c_{\beta}(k) \end{bmatrix}, \quad (59.5)$$

به‌طور مجانی پایدار باشد [46, 40].

با توجه به این که

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_{\alpha}(k) = \alpha - 1, \quad \sum_{k=2}^{\infty} c_{\beta}(k) = \beta - 1,$$

$$\bar{A}_{11} = A_{11} + \alpha I_{n_1}, \quad \bar{A}_{22} = A_{22} + \beta I_{n_2},$$

می‌توان ماتریس (59.5) را به‌شکل

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_{11} + B_1K_1 & A_{12} + B_1K_2 \\ A_{21} + B_2K_1 & \hat{A}_{22} + B_2K_2 \end{bmatrix} = A + BK, \quad (60.5)$$

نوشت که  $\hat{A}_{22} = A_{22} + I_{n_2}, \hat{A}_{11} = A_{11} + I_{n_1}$  و

$$A = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & A_{12} \\ A_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad B = [B_1 \ B_2]. \quad (61.5)$$

مثال 1.3.5. مدل راسر کسری دوبعدی با  $\alpha = 0.4, \beta = 0.5$  و

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.1 \\ 0.1 & 0.01 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.1 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} -0.3 & -0.1 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad (62.5)$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} -1 & -0.1 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix},$$

مفروض است. ماتریس  $K = [K_1 \ K_2] \in \mathbb{R}^{1 \times 2}, i = 1, 2$  را طوری بیابید که سیستم حلقه بسته مثبت و به‌طور مجانی پایدار باشد.

مدل راسر کسری دوبعدی با ماتریس‌های مفروض در (۶۲.۵) مثبت نیست، چون ماتریس‌ها درایه‌های منفی دارند.

همچنین این مدل ناپایدار است، چون ماتریس

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0/5 & -0/1 & -0/1 & -0/1 \\ 0/1 & 0/01 & 0/2 & 0/1 \\ -0/3 & -0/1 & -1 & -0/1 \\ 0/2 & 0/1 & 0/4 & 0/1 \end{bmatrix}, \quad (63.5)$$

درایه‌های قطری مثبت دارد.

با انتخاب

$$D = [D_1 \ D_2], \quad D_1 = [-0/4 \ -0/2], \quad D_2 = [-0/4 \ -0/2], \quad (64.5)$$

به دست می‌آوریم:

$$\Lambda = \text{blockdiag}(\Lambda_1, \Lambda_2), \quad \Lambda_1 = \begin{bmatrix} 0/4 & 0 \\ 0 & 0/4 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{bmatrix} 0/2258 & 0 \\ 0 & 0/2413 \end{bmatrix}. \quad (65.5)$$

با استفاده از (۵۸.۵)، ماتریس  $K$  به صورت

$$K = [K_1 \ K_2] = [D_1 \Lambda_1^{-1} \ D_2 \Lambda_2^{-1}] = [-1 \ -0/5 \ -1/7712 \ -0/8239], \quad (66.5)$$

به دست می‌آید.

سیستم حلقه بسته مثبت است چون تمام ماتریس‌های

$$\bar{A}_{11} + B_1 K_1 = \begin{bmatrix} 0/1 & 0 \\ 0 & 0/36 \end{bmatrix}, \quad A_{12} + B_1 K_2 = \begin{bmatrix} 0/2542 & 0/0658 \\ 0/0229 & 0/0171 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} + B_2 K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0/05 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{22} + B_2 K_2 = \begin{bmatrix} 0/0313 & 0/1487 \\ 0/0458 & 0/4342 \end{bmatrix},$$

درایه‌های نامنفی دارند.

سیستم حلقه بسته به طور مجانی پایدار است چون چندجمله‌ای مشخصه

$$\det \begin{bmatrix} I_{n_1} z - (\bar{A}_{11} + B_1 K_1) & -(A_{12} + B_1 K_2) \\ -(A_{21} + B_2 K_1) & I_{n_2} z - (\bar{A}_{22} + B_2 K_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} z + 0/3 & 0 & -0/2542 & -0/0658 \\ 0 & z + 0/4 & 0/0229 & -0/0171 \\ 0 & -0/05 & z + 0/4687 & -0/1487 \\ 0 & 0 & 0/0458 & z + 0/0658 \end{vmatrix}$$

$$= z^4 + 0/8744 z^3 + 0/2166 z^2 + 0/0141 z + 0/0003,$$

ضرایب مثبت دارد.

مثال ۲.۳.۵. مدل راسر کسری دوبعدی با  $\alpha = 0/4$ ،  $\beta = 0/9$  و

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -0/4 & 0/01 \\ 0/03 & 0/001 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0/01 & 0/01 \\ 0/01 & 0/2 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 0/01 & 0/2 \\ 0 & 0/01 \end{bmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} -0/9 & 0/01 \\ 0/01 & -0/8 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0/001 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0/002 \end{bmatrix}, \quad (67.5)$$

مفروض است. ماتریس  $K = [K_1 \ K_2]$ ،  $K_i \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ ،  $i = 1, 2$  را طوری بیابید که سیستم حلقه بسته مثبت و به‌طور مجانی پایدار باشد.

مدل راسر کسری دوبعدی با ماتریس‌های مفروض در (۶۷.۵) ناپایدار است، چون ماتریس

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0/4 & 0/01 & 0/01 & 0/01 \\ 0/03 & 0/001 & 0/01 & 0/2 \\ 0/01 & 0/2 & -0/9 & 0/01 \\ 0 & 0/01 & 0/01 & -0/8 \end{bmatrix}, \quad (68.5)$$

درایه‌های قطری مثبت دارد.

با انتخاب

$$D = [D_1 \ D_2], \quad D_1 = [0/13 \quad -0/37], \quad D_2 = [-3/19 \quad -0/11], \quad (69.5)$$

به‌دست می‌آوریم:

$$\Lambda = \text{blockdiag}(\Lambda_1, \Lambda_2), \quad \Lambda_1 = \begin{bmatrix} 0/0554 & 0 \\ 0 & 0/0755 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{bmatrix} 0/8659 & 0 \\ 0 & 0/0032 \end{bmatrix}. \quad (70.5)$$

با استفاده از (۵۸.۵)، ماتریس  $K$  به‌صورت

$$K = [K_1 \ K_2] = [D_1 \Lambda_1^{-1} \ D_2 \Lambda_2^{-1}] = [2/3460 \quad -4/9035 \quad -3/6840 \quad -34/1058], \quad (71.5)$$

به‌دست می‌آید.

سیستم حلقه بسته مثبت است چون تمام ماتریس‌های

$$\bar{A}_{11} + B_1 K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0/01 \\ 0/0323 & 0/3961 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{12} + B_1 K_2 = \begin{bmatrix} 0/01 & 0/01 \\ 0/0063 & 0/1659 \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_{21} + B_2 K_1 = \begin{bmatrix} 0/01 & 0/2 \\ 0/0047 & 0/0002 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{22} + B_2 K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0/01 \\ 0/0026 & 0/0318 \end{bmatrix},$$

درایه‌های نامنفی دارند.

سیستم حلقه بسته به‌طور مجانی پایدار است چون چندجمله‌ای مشخصه

$$\det \begin{bmatrix} I_{n_1} z - (\bar{A}_{11} + B_1 K_1) & -(A_{12} + B_1 K_2) \\ -(A_{21} + B_2 K_1) & I_{n_2} z - (\bar{A}_{22} + B_2 K_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} z + 0/4 & -0/1 & -0/01 & -0/01 \\ -0/0323 & z + 0/0039 & -0/0063 & -0/1659 \\ -0/01 & -0/2 & z + 0/9 & -0/01 \\ -0/0047 & -0/0002 & -0/0026 & z + 0/8682 \end{vmatrix}$$

$$= z^4 + 2/1721z^3 + 1/4953z^2 + 0/3159z + 0/0004,$$

ضرایب مثبت دارد.

## ۴.۵ تبدیلات تشابهی در سیستم‌های کسری دوبعدی گسسته-زمانی مدل راسر

سیستم خطی کسری دوبعدی مدل راسر گسسته-زمانی (۴.۵) را در نظر بگیرید که  $1 \leq m \leq \min\{n_1, n_2\}$ .

قضیه ۱.۴.۵. [۶۶] اگر  $0 < \alpha < 1$  و  $m \in \mathbb{N}$ ، داریم

$$D^{m+\alpha} x_{ij} = D^m D^\alpha x_{ij}.$$

با توجه به قضیه فوق، می‌توان همواره برای مرتبه‌های کسری در سیستم‌های کسری دوبعدی فرض نمود  $0 < \alpha < 1$  و  $0 < \beta < 1$ .

تعریف ۱.۴.۵. سیستم خطی کسری دوبعدی مدل راسر (۴.۵)، پایدار مجانی نامیده می‌شود اگر برای تمام شرایط مرزی  $x_{ij}^h \in \mathbb{R}^{n_1}$  و  $x_{ij}^v \in \mathbb{R}^{n_2}$  و ورودی‌های صفر  $u_{ij} = 0$  داشته باشیم

$$\lim_{i,j \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} x_{ij}^h \\ x_{ij}^v \end{bmatrix} = 0.$$

حال از تعاریف ۱.۳.۵ و ۲.۳.۵ استفاده نموده و معادله (۴.۵) را به شکل (۴.۵) می‌نویسیم. این معادله سیستم خطی دوبعدی گسسته-زمانی با تأخیر نامحدود در بردارهای حالت افقی و عمودی را نشان می‌دهد. برای این که این سیستم کنترل پذیر باشد، باید این سیستم به سیستم خطی استاندارد دوبعدی گسسته-زمانی تبدیل شود. هرچند سیستم‌های استاندارد تبدیل شده ممکن است ماتریس‌هایی با ابعاد بزرگتر داشته باشد ولی پایداری این سیستم‌ها اثبات شده است [۲۶]. نتایج بخش ۴.۵ در [۸۲] به چاپ رسیده است.



## ۱.۴.۵ پایداری سیستم‌های کسری دوبعدی گسسته-زمانی مدل راسر

بنابر لم ۱.۳.۵ ضرایب  $-c_\alpha(k)$  و  $-c_\beta(l)$  مثبت هستند و با افزایش  $k$  و  $l$  کاهش می‌یابند. با فرض  $c_\alpha(k) = 0$  برای  $k > L_1 + 1$  و  $c_\beta(l) = 0$  برای  $l > L_2 + 1$ ، سیستم با تأخیر نامحدود (۴۱.۵) به سیستمی با تأخیرهای محدود  $L_1 + 1$  و  $L_2 + 1$  به شکل (۴۲.۵) تبدیل می‌شود. به‌طور معادل این سیستم را می‌توان به‌صورت سیستم استاندارد دوبعدی گسسته-زمانی

$$\begin{bmatrix} X_{i+1,j}^h \\ X_{i,j+1}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{ij}^h \\ X_{ij}^v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix} U_{ij}, \quad (72.5)$$

نوشت که

$$X_{ij}^h = \begin{bmatrix} x_{ij}^h \\ x_{i-1,j}^h \\ \vdots \\ x_{i-L_1+1,j}^h \\ x_{i-L_1,j}^h \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_1}, \quad X_{ij}^v = \begin{bmatrix} x_{ij}^v \\ x_{i,j-1}^v \\ \vdots \\ x_{i,j-L_2+1}^v \\ x_{i,j-L_2}^v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_2},$$

$$\tilde{A}_{11} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & -c_\alpha(N)I_{n_1} & \dots & -c_\alpha(L_1)I_{n_1} & -c_\alpha(L_1+1)I_{n_1} \\ I_{n_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_{n_1} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_1},$$

$$\tilde{A}_{12} = \begin{bmatrix} A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_2}, \quad \tilde{A}_{21} = \begin{bmatrix} A_{21} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_1},$$

$$\tilde{A}_{22} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{22} & -c_\beta(N)I_{n_2} & \dots & -c_\beta(L_2)I_{n_2} & -c_\beta(L_2+1)I_{n_2} \\ I_{n_2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_{n_2} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_2},$$

$$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ \circ \\ \vdots \\ \circ \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_1 \times m}, \quad \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 \\ \circ \\ \vdots \\ \circ \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N_2 \times m}, \quad U_{ij} = u_{ij} \in \mathbb{R}^m,$$

$$N_1 = n_1(L_1 + 1), \quad N_2 = n_1(L_2 + 1), \quad n = N_1 + N_2. \quad (۷۳.۵)$$

**تعریف ۲.۴.۵.** [۵۰] سیستم خطی کسری دوبعدی گسسته-زمانی (۴۰.۵) پایدار عملی نامیده می‌شود اگر سیستم با تأخیر (۴۲.۵) یا به‌طور معادل سیستم (۷۲.۵) پایدار مجانی باشد.

سیستم استاندارد دوبعدی مدل راسر (۷۲.۵) با قانون پس‌خورد حالت

$$U_{ij} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{ij}^h \\ X_{ij}^v \end{bmatrix}, \quad (۷۴.۵)$$

را در نظر بگیرید که  $K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ،  $K_1 \in \mathbb{R}^{m \times N_1}$  و  $K_2 \in \mathbb{R}^{m \times N_2}$ . با جایگذاری قانون پس‌خورد حالت  $K$  در سیستم (۷۲.۵) داریم:

$$\begin{bmatrix} X_{i+1,j}^h \\ X_{i,j+1}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} + \tilde{B}_1 K_1 & \tilde{A}_{12} + \tilde{B}_1 K_2 \\ \tilde{A}_{21} + \tilde{B}_2 K_1 & \tilde{A}_{22} + \tilde{B}_2 K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{ij}^h \\ X_{ij}^v \end{bmatrix}. \quad (۷۵.۵)$$

## ۲.۴.۵ یافتن جواب در سیستم‌های کسری دوبعدی مدل راسر با تبدیلات تشابهی

سیستم یک‌بعدی

$$X_{i+1,j+1} = A' X_{ij} + B' U_{ij}, \quad (۷۶.۵)$$

معادل با سیستم (۷۲.۵) را در نظر بگیرید که

$$X_{i+1,j+1} = \begin{bmatrix} X_{i+1,j}^h \\ X_{i,j+1}^v \end{bmatrix}, \quad X_{ij} = \begin{bmatrix} X_{ij}^h \\ X_{ij}^v \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad B' = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix}. \quad (۷۷.۵)$$

با در نظر گرفتن قانون پس‌خورد حالت

$$U_{ij} = K X_{ij}, \quad (۷۸.۵)$$

و جایگذاری آن در سیستم (۷۶.۵) نتیجه می‌شود

$$X_{i+1,j+1} = (A' + B'K) X_{ij}. \quad (۷۹.۵)$$

بنابراین ماتریس حلقه بسته سیستم (۷۶.۵) با قانون پس‌خورد حالت (۷۸.۵) به شکل

$$\Gamma = A' + B'K, \quad (۸۰.۵)$$

است.

قضیه ۲.۴.۵. [۲۷] سیستم خطی استاندارد یک‌بعدی گسسته-زمانی (۷۹.۵) یا سیستم معادل (۷۵.۵) به‌طور مجانی پایدار است اگر و تنها اگر مقادیر ویژه  $A' + B'K$  در دایره واحد باشند.

بنابر قضیه فوق برای پایدارسازی و یافتن جواب در سیستم‌های کسری دوبعدی مدل راسر (۱۴۰.۵)، کافی است به‌جای تخصیص مقادیر ویژه  $L_1 = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N_1}\}$  و  $L_2 = \{\lambda_{N_1+1}, \lambda_{N_1+2}, \dots, \lambda_n\}$  به سیستم حلقه بسته (۷۵.۵) و محاسبه ماتریس‌های پس‌خورد حالت  $K_1$  و  $K_2$ ، تخصیص مقادیر ویژه  $L = \{\lambda_1, \dots, \lambda_{N_1}, \lambda_{N_1+1}, \dots, \lambda_n\}$  به سیستم حلقه بسته (۷۹.۵) را انجام دهیم که  $\lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, n$  و تحت زوج مختلط بسته هستند. مراحل الگوریتم موجود در زیربخش ۴.۲.۲ را بر روی سیستم (۷۹.۵) اعمال کرده و به‌راحتی ماتریس پس‌خورد  $K$  را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۱.۴.۵. سیستم کسری دوبعدی گسسته-زمانی مدل راسر (۱۴۰.۵) را با  $\alpha = 0.5, \beta = 0.8$  و ماتریس‌های  $L_1 = L_2 = 2$ ،

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -0.5 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 1/3 & -0.9 \end{bmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} -0.7 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.5 \\ -0.8 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.9 \end{bmatrix},$$

در نظر بگیرید.

نتایج به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$c_{0.5}(2) = -0.125, \quad c_{0.5}(3) = -0.0625,$$

$$c_{0.8}(2) = -0.08, \quad c_{0.5}(3) = -0.032,$$

$$\bar{A}_{11} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2 \\ -0.5 & 1/7 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{22} = \begin{bmatrix} 0.1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_{11} = \begin{bmatrix} 1/5 & 2 & 0.125 & 0 & 0.0625 & 0 \\ -0.5 & 1/7 & 0 & 0.125 & 0 & 0.0625 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{12} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}_{21} = \begin{bmatrix} 1/3 & -0.9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_{22} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.08 & 0.032 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} -0/4 & 0/5 \\ -0/8 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} -0/3 & 0/9 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$n = 9$  مقدار ویژه را به سیستم (۷۹.۵) یا  $N_1 = 6$  و  $N_2 = 3$  مقدار ویژه را به سیستم (۷۵.۵) تخصیص می‌دهیم. مجموعه مقادیر ویژه  $L$  را به صورت

$$L = \{0/1 \pm 0/1i, 0/1, 0/2 \pm 0/2i, 0/2, 0/3 \pm 0/3i, 0/3\},$$

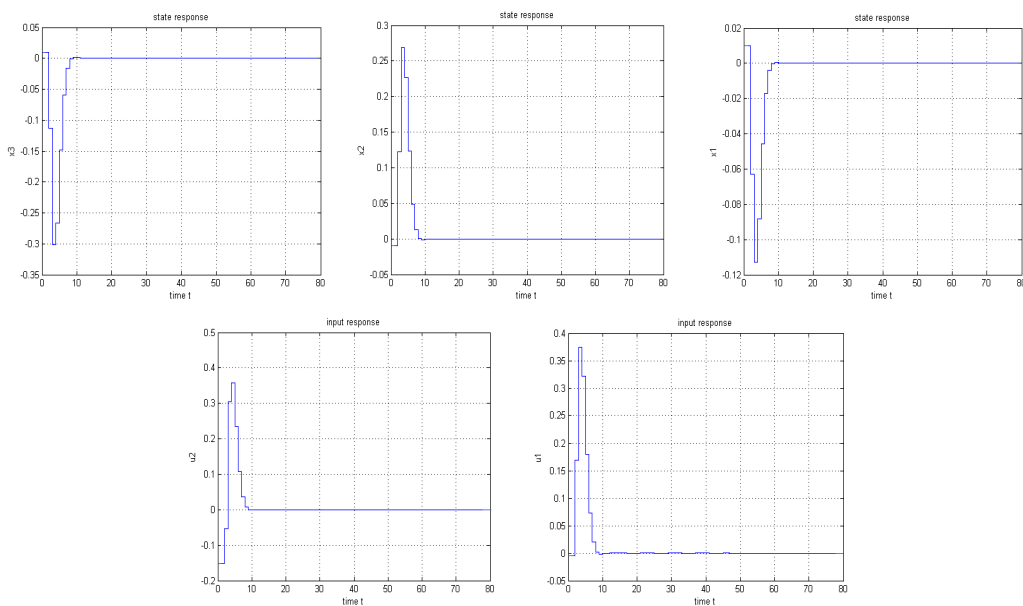
در نظر می‌گیریم که  $L_2 = \{0/3 \pm 0/3i, 0/3\}$  و  $L_1 = \{0/1 \pm 0/1i, 0/1, 0/2 \pm 0/2i, 0/2\}$  با ماتریس‌های  $K_2$  و  $K_1$  به صورت

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0/85 & 1/89 & 0/24 & -0/15 & -0/02 & 0/07 \\ -0/1 & -0/09 & -1/48 & 8/8 & 1/49 & -0/7 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0/08 & -0/17 & 0/04 \\ 0/38 & 6/6 & -0/94 \end{bmatrix},$$

محاسبه می‌شود. شکل ۱.۵ نتایج را نشان می‌دهد هرگاه

$$X_{0j}^h = [0/01 \quad -0/01 \quad 0/01 \quad -0/01 \quad 0/01 \quad -0/01]^T, \quad X_{i0}^v = [0/01 \quad -0/01 \quad 0/01]^T.$$



شکل ۱.۵: پایداری بردارهای حالت و ورودی در مثال ۱.۴.۵

## ۵.۵ یافتن جواب در مدل راسر دوبعدی توسیع یافته با وارون درزین

برای مطالب این بخش از [۶۱] استفاده شده است.  
مدل راسر توسیع یافته

$$E \begin{bmatrix} x_{i+1,j}^h \\ x_{i,j+1}^v \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{i,j}^h \\ x_{i,j}^v \end{bmatrix} + Bu_{i,j}, \quad (۸۱.۵)$$

را در نظر بگیرید که  $x_{i,j}^h \in \mathbb{R}^{n_1}$  و  $x_{i,j}^v \in \mathbb{R}^{n_2}$  بردارهای حالت افقی و عمودی،  $u_{i,j} \in \mathbb{R}^m$  بردار ورودی،  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ،  $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  و  $n = n_1 + n_2$ .

فرض می‌شود  $\det(E) = 0$ ، اما برای حداقل یک  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  داریم

$$\det \begin{bmatrix} E \begin{bmatrix} I_{n_1} z_1 & 0 \\ 0 & I_{n_2} z_2 \end{bmatrix} - A \end{bmatrix} \neq 0. \quad (۸۲.۵)$$

با ضرب از سمت چپ ماتریس  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  از اعمال سطری مقدماتی در (۸۱.۵) و همچنین معرفی بردار حالت جدید

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{i+1,j}^h \\ \bar{x}_{i,j+1}^v \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} x_{i,j}^h \\ x_{i,j}^v \end{bmatrix}, \quad Q \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \det(Q) \neq 0 \quad (۸۳.۵)$$

می‌توان معادله (۸۱.۵) را به دو صورت زیر نوشت:

**مورد اول.**

$$\begin{bmatrix} E_h & 0 \\ 0 & E_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{i+1,j}^h \\ \bar{x}_{i,j+1}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{i,j}^h \\ \bar{x}_{i,j}^v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_{i,j}, \quad (۸۴.۵)$$

**مورد دوم.**

$$\begin{bmatrix} E_h & 0 \\ 0 & E_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{i+1,j}^h \\ \bar{x}_{i,j+1}^v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_{i,j}^h \\ \bar{x}_{i,j}^v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u_{i,j}, \quad (۸۵.۵)$$

که

$$\begin{bmatrix} E_h & 0 \\ 0 & E_v \end{bmatrix} = PEQ^{-1}, \quad E_h \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}, \quad (۸۶.۵)$$

$$E_v \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}, \quad \det(E_h) = 0, \quad \det(E_v) = 0,$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = PAQ^{-1}, \quad A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}, \quad (۸۷.۵)$$

$$A_{21} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}, \quad A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2},$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} = PAQ^{-1}, \quad A_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}, \quad (۸۸.۵)$$

$$A_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}, \quad A_{22} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2},$$

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = PB, \quad B_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}, B_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}. \quad (۸۹.۵)$$

در مورد اول، از (۸۴.۵) داریم

$$E_h \bar{x}_{i+1,j}^h = A_{11} \bar{x}_{i,j}^h + B_1 u_{i,j}, \quad (۹۰.۵)$$

$$E_v \bar{x}_{i,j+1}^v = A_{21} \bar{x}_{i,j}^h + A_{22} \bar{x}_{i,j}^v + B_2 u_{i,j}, \quad (۹۱.۵)$$

و در مورد دوم، از (۸۵.۵) داریم

$$E_h \bar{x}_{i+1,j}^h = A_{11} \bar{x}_{i,j}^h + A_{12} \bar{x}_{i,j}^v + B_1 u_{i,j}, \quad (۹۲.۵)$$

$$E_v \bar{x}_{i,j+1}^v = A_{22} \bar{x}_{i,j}^v + B_2 u_{i,j}. \quad (۹۳.۵)$$

با توجه به فرض (۸۲.۵) برای حالت اول برای تعدادی  $z_1 \in \mathbb{C}$ ، نتیجه می‌شود

$$\det(E_h z_1 - A_{11}) \neq 0. \quad (۹۴.۵)$$

بنابراین، عدد  $c_1 \in \mathbb{C}$  موجود است به طوری که  $\det(E_h c_1 - A_{11}) \neq 0$  و با ضرب از سمت

چپ  $(E_h c_1 - A_{11})^{-1}$  در (۹۰.۵) داریم

$$\bar{E}_h \bar{x}_{i+1,j}^h = \bar{A}_{11} \bar{x}_{i,j}^h + \bar{B}_1 u_{i,j}, \quad (۹۵.۵)$$

که

$$\bar{E}_h = (E_h c_1 - A_{11})^{-1} E_h,$$

$$\bar{A}_{11} = (E_h c_1 - A_{11})^{-1} A_{11}, \quad (۹۶.۵)$$

$$\bar{B}_1 = (E_h c_1 - A_{11})^{-1} B_1.$$

فرض کنید  $\bar{E}_h^D (\bar{A}_{11}^D)$  وارون درزین ماتریس  $\bar{E}_h (\bar{A}_{11})$  باشد، آن‌گاه از قضیه ۹.۴.۳ داریم

$$\bar{x}_{i,j}^h = (\bar{E}_h^D \bar{A}_{11})^i \bar{E}_h^D \bar{E}_h v_1 + \sum_{k=0}^{i-1} \bar{E}_h^D (\bar{E}_h^D \bar{A}_{11})^{i-k-1} \bar{B}_1 u_{k,j} \quad (۹۷.۵)$$

$$+ (\bar{E}_h \bar{E}_h^D - I_{n_1}) \sum_{k=0}^{q_1-1} (\bar{E}_h \bar{A}_{11}^D)^k \bar{A}_{11}^D \bar{B}_1 u_{i+k,j},$$

که  $q_1$  شاخص  $\bar{E}_h$  و  $v_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$  دلخواه و وابسته به  $j$  است.

با جایگذاری (۹۷.۵) در (۹۱.۵) نتیجه می‌شود

$$E_v \bar{x}_{i,j+1}^v = A_{22} \bar{x}_{i,j}^v + \hat{u}_{i,j} + \hat{w}_i, \quad (۹۸.۵)$$

که

$$\hat{u}_{i,j} = \sum_{k=0}^{i-1} A_{21} \bar{E}_h^D (\bar{E}_h^D \bar{A}_{11})^{i-k-1} \bar{B}_1 u_{k,j} \quad (۹۹.۵)$$

$$+ A_{21} (\bar{E}_h \bar{E}_h^D - I_{n_1}) \times \sum_{k=0}^{q_1-1} (\bar{E}_h \bar{A}_{11}^D)^k \bar{A}_{11}^D \bar{B}_1 u_{i+k,j} + B_2 u_{i,j},$$

و

$$\hat{w}_i = A_{21} \bar{E}_h^D (\bar{E}_h^D \bar{A}_{11})^i \bar{E}_h^D \bar{E}_h v_1. \quad (۱۰۰.۵)$$

از فرض (۸۲.۵) نتیجه می شود برای تعدادی  $z_{\gamma} \in \mathbb{C}$ ,

$$\det(E_v z_{\gamma} - A_{\gamma\gamma}) \neq 0. \quad (101.5)$$

بنابراین عدد  $c_{\gamma} \in \mathbb{C}$  موجود است به طوری که  $\det(E_v c_{\gamma} - A_{\gamma\gamma}) \neq 0$  و با ضرب از سمت

چپ  $(E_v c_{\gamma} - A_{\gamma\gamma})^{-1}$  در (۹۸.۵) به دست می آوریم

$$\bar{E}_v \bar{x}_{i,j+1}^v = \bar{A}_{\gamma\gamma} \bar{x}_{i,j}^v + \bar{B}_{\gamma} (\hat{u}_{i,j} + \hat{w}_i), \quad (102.5)$$

که

$$\bar{E}_v = (E_v c_{\gamma} - A_{\gamma\gamma})^{-1} E_v,$$

$$\bar{A}_{\gamma\gamma} = (E_v c_{\gamma} - A_{\gamma\gamma})^{-1} A_{\gamma\gamma}, \quad (103.5)$$

$$\bar{B}_{\gamma} = (E_v c_{\gamma} - A_{\gamma\gamma})^{-1}.$$

فرض کنید  $\bar{E}_v^D (\bar{A}_{\gamma\gamma}^D)$  وارون درزین ماتریس  $\bar{E}_v (\bar{A}_{\gamma\gamma})$  باشد، آن گاه از قضیه ۹.۴.۳ داریم

$$\begin{aligned} \bar{x}_{i,j}^v = & (\bar{E}_v^D \bar{A}_{\gamma\gamma}^D)^j \bar{E}_v^D \bar{E}_v v_{\gamma} + \sum_{l=0}^{j-1} \bar{E}_v^D (\bar{E}_v^D \bar{A}_{\gamma\gamma}^D)^{j-l-1} \bar{B}_{\gamma} \hat{u}_{i,l} \\ & + (\bar{E}_v \bar{E}_v^D - I_{n_{\gamma}}) \sum_{l=0}^{q_{\gamma}-1} (\bar{E}_v \bar{A}_{\gamma\gamma}^D)^l \times \bar{A}_{\gamma\gamma}^D \bar{B}_{\gamma} (\hat{u}_{i,j+l} + \hat{w}_i), \end{aligned} \quad (104.5)$$

که  $q_{\gamma}$  شاخص  $\bar{E}_v$  و  $v_{\gamma} \in \mathbb{R}^{n_{\gamma}}$  دلخواه و وابسته به  $i$  است.

با معلوم بودن  $\bar{x}_{i,j}^v$  و  $\bar{x}_{i,j}^h$  می توان جواب معادله (۸۴.۵) تا (۸۹.۵) را با استفاده از (۸۳.۵)

یافت و همچنین

$$\begin{bmatrix} x_{i,j}^h \\ x_{i,j}^v \end{bmatrix} = Q^{-1} \begin{bmatrix} \bar{x}_{i,j}^h \\ \bar{x}_{i,j}^v \end{bmatrix}, \quad (105.5)$$

را به دست آورد.

قضیه ۱.۵.۵. جواب معادله (۸۴.۵) به صورت (۱۰۵.۵) است و بردارهای  $\bar{x}_{i,j}^v$  و  $\bar{x}_{i,j}^h$  به ترتیب

توسط (۹۷.۵) و (۱۰۴.۵) تعریف شده اند.

با توجه به فرض (۸۲.۵) برای حالت دوم برای تعدادی  $z_{\gamma} \in \mathbb{C}$ ، نتیجه می شود

$$\det(E_v z_{\gamma} - A_{\gamma\gamma}) \neq 0. \quad (106.5)$$

بنابراین، عدد  $c_{\gamma} \in \mathbb{C}$  موجود است به طوری که  $\det(E_v c_{\gamma} - A_{\gamma\gamma}) \neq 0$  و با ضرب از سمت

چپ  $(E_v c_{\gamma} - A_{\gamma\gamma})^{-1}$  در (۸۵.۵) داریم

$$\bar{E}_v \bar{x}_{i,j+1}^v = \bar{A}_{\gamma\gamma} \bar{x}_{i,j}^v + \bar{B}_{\gamma} u_{i,j}, \quad (107.5)$$

که

$$\bar{E}_v = (E_v c_{\gamma} - A_{\gamma\gamma})^{-1} E_v,$$

$$\bar{A}_{\gamma\gamma} = (E_v c_{\gamma} - A_{\gamma\gamma})^{-1} A_{\gamma\gamma}, \quad (108.5)$$

$$\bar{B}_{\gamma} = (E_v c_{\gamma} - A_{\gamma\gamma})^{-1} B_{\gamma}.$$

فرض کنید  $\bar{E}_v^D(\bar{A}_{\gamma\gamma})$  وارون درزین ماتریس  $\bar{E}_v(\bar{A}_{\gamma\gamma})$  باشد، آن گاه از قضیه ۹.۴.۳ داریم

$$\begin{aligned} \bar{x}_{i,j}^v &= (\bar{E}_v^D \bar{A}_{\gamma\gamma})^j \bar{E}_v^D \bar{E}_v v_{\gamma} + \sum_{l=0}^{j-1} \bar{E}_v^D (\bar{E}_v^D \bar{A}_{\gamma\gamma})^{j-l-1} \bar{B}_{\gamma} u_{i,l} \\ &+ (\bar{E}_v \bar{E}_v^D - I_{n_{\gamma}}) \sum_{l=0}^{q_{\gamma}-1} (\bar{E}_v \bar{A}_{\gamma\gamma}^D)^l \bar{A}_{\gamma\gamma}^D \bar{B}_{\gamma} u_{i,j+1}, \end{aligned} \quad (109.5)$$

که  $q_{\gamma}$  شاخص  $\bar{E}_v$  و  $v_{\gamma} \in \mathbb{R}^{n_{\gamma}}$  دلخواه است.

با جایگذاری (۱۰۹.۵) در (۹۲.۵) نتیجه می‌شود

$$E_h \bar{x}_{i+1,j}^h = A_{11} \bar{x}_{i,j}^h + \tilde{u}_{i,j} + \tilde{w}_j, \quad (110.5)$$

که

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i,j} &= \sum_{l=0}^{j-1} A_{\gamma 1} \bar{E}_v^D (\bar{E}_v^D \bar{A}_{\gamma\gamma})^{j-l-1} \bar{B}_{\gamma} u_{i,l} \\ &+ A_{1\gamma} (\bar{E}_v \bar{E}_v^D - I_{n_{\gamma}}) \sum_{l=0}^{q_{\gamma}-1} (\bar{E}_v \bar{A}_{\gamma\gamma}^D)^l \times \bar{A}_{\gamma\gamma}^D \bar{B}_{\gamma} u_{i,j+1} + B_1 u_{i,j}, \end{aligned} \quad (111.5)$$

و

$$\tilde{w}_j = A_{1\gamma} (\bar{E}_v^D \bar{A}_{\gamma\gamma})^j \bar{E}_v^D \bar{E}_v v_{\gamma}. \quad (112.5)$$

از فرض (۸۲.۵) نتیجه می‌شود برای تعدادی  $z_1 \in \mathbb{C}$

$$\det(E_h z_1 - A_{11}) \neq 0. \quad (113.5)$$

بنابراین عدد  $c_1 \in \mathbb{C}$  موجود است به طوری که  $\det(E_h c_1 - A_{11}) \neq 0$  و با ضرب از سمت

چپ  $(E_h c_1 - A_{11})^{-1}$  در (۱۱۰.۵) به دست می‌آوریم

$$\tilde{E}_h \bar{x}_{i+1,j}^h = \tilde{A}_{11} \bar{x}_{i,j}^h + \tilde{B}_1 (\tilde{u}_{i,j} + \tilde{w}_j), \quad (114.5)$$

که

$$\begin{aligned} \tilde{E}_h &= (E_h c_1 - A_{11})^{-1} E_h, \\ \tilde{A}_{11} &= (E_h c_1 - A_{11})^{-1} A_{11}, \\ \tilde{B}_1 &= (E_h c_1 - A_{11})^{-1}. \end{aligned} \quad (115.5)$$

فرض کنید  $\tilde{E}_h^D(\tilde{A}_{11})$  وارون درزین ماتریس  $\tilde{E}_h(\tilde{A}_{11})$  باشد، آن گاه از قضیه ۹.۴.۳ داریم

$$\begin{aligned} \bar{x}_{i,j}^h &= (\tilde{E}_h^D \tilde{A}_{11})^i \tilde{E}_h^D \tilde{E}_h v_{\gamma} + \sum_{k=0}^{i-1} \tilde{E}_h^D (\tilde{E}_h^D \tilde{A}_{11})^{i-k-1} \tilde{B}_1 (\tilde{u}_{k,j} + \tilde{w}_j) \\ &+ (\tilde{E}_h \tilde{E}_h^D - I_{n_1}) \sum_{k=0}^{q_1-1} (\tilde{E}_h \tilde{A}_{11}^D)^k \times \tilde{A}_{11}^D \tilde{B}_1 (\tilde{u}_{i+k,j} + \tilde{w}_j), \end{aligned} \quad (116.5)$$

که  $q_1$  شاخص  $\tilde{E}_h$  و  $v_{\gamma} \in \mathbb{R}^{n_1}$  دلخواه است.

با معلوم بودن  $\bar{x}_{i,j}^v$  و  $\bar{x}_{i,j}^h$  جواب معادله (۸۵.۵) را با استفاده از (۱۰۵.۵) به دست می‌آید.

بنابراین نتیجه زیر اثبات شده است.



قضیه ۲.۵.۵. جواب معادله (۸۵.۵) با استفاده از (۱۰۵.۵) به دست می آید که بردارهای  $\bar{x}_{i,j}^h$  و  $\bar{x}_{i,j}^v$  به وسیله (۱۱۶.۵) و (۱۰۹.۵) تعریف می شوند.

مثال ۱.۵.۵. مدل دوبعدی راسر توسیع یافته گسسته-زمانی (۸۱.۵) را با ماتریس های

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0/5 & 0/5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad (117.5)$$

در نظر بگیرید. با ضرب از سمت چپ ماتریس

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad (118.5)$$

و اعمال سطری مقدماتی  $L[1 \times 2]$ ،  $L[2 + 1 \times (-1)]$ ،  $L[3 \times (-1)]$  و  $L[4 + 3 \times 2]$  در معادله (۸۱.۵) با فرضیات (۱۱۷.۵) و همچنین معرفی بردار حالت جدید (۸۳.۵) با

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (119.5)$$

معادله (۸۴.۵) با نتایج

$$\begin{bmatrix} E_h & 0 \\ 0 & E_v \end{bmatrix} = PEQ^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = PB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad (120.5)$$

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = PAQ^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

به دست می آید.

برای  $c_1 = 0$  از (۹۶.۵) داریم

$$\begin{aligned}\bar{E}_h &= (-A_{11})^{-1} E_h = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{A}_{11} &= (-A_{11})^{-1} A_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ \bar{B}_1 &= (-A_{11})^{-1} B_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{۱۲۱.۵}$$

با در نظر گرفتن فرآیند موجود در ملاحظه ۳.۱.۱ داریم:

$$\bar{E}_h = VW, \quad V = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

همچنین

$$\begin{aligned}\bar{E}_h^D &= V[W\bar{E}_hV]^{-1}W \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \left[ \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right]^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{A}_{11}^D &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{۱۲۲.۵}$$

شاخص  $q_1$  از ماتریس (۱۲۱.۵) برابر با یک است. با استفاده از (۹۷.۵) و با توجه به این که

$$\begin{aligned}\bar{E}_h^D \bar{A}_{11} &= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{E}_h^D \bar{E}_h &= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},\end{aligned}\tag{۱۲۳.۵}$$

داریم:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{i,j}^h &= (\bar{E}_h^D \bar{A}_{11})^i \bar{E}_h^D \bar{E}_h v_1(j) + \sum_{k=0}^{i-1} \bar{E}_h^D (\bar{E}_h^D \bar{A}_{11})^{i-k-1} \bar{B}_1 u_{k,j} + (\bar{E}_h \bar{E}_h^D - I_{n_1}) \bar{A}_{11}^D \bar{B}_1 u_{i,j} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} v_1(j) + \sum_{k=0}^{i-1} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}^{i-k-1} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u_{k,j} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u_{i,j} \\ &= \begin{bmatrix} 3^i & 0 \\ 2(3)^i & 0 \end{bmatrix} v_1(j) + \sum_{k=0}^{i-1} \begin{bmatrix} 3^{i-k-1} \\ 2(3)^{i-k-1} + 1 \end{bmatrix} u_{k,j} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_{i,j}, \end{aligned} \tag{۱۲۴.۵}$$

که  $v_1(j)$  تابع دلخواهی از  $j$  است.

با جایگذاری (۱۲۴.۵) در معادله (۹۱.۵)، (۹۸.۵) را با

$$E_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{u}_{i,j} = \sum_{k=0}^{i-1} \begin{bmatrix} 3^{i-k-1} \\ 2(3)^{i-k-1} + 1 \end{bmatrix} u_{k,j}, \quad \hat{w}_i = \begin{bmatrix} 3^i & 0 \\ 2(3)^i & 0 \end{bmatrix} v_1(j),$$

به دست می آوریم. اگر انتخاب کنیم  $c_2 = 0$ ، با استفاده از (۱۰۲.۵) داریم

$$\bar{E}_v \bar{x}_{i,j+1}^v = \bar{A}_{22} \bar{x}_{i,j}^v + \bar{B}_2 (\hat{u}_{i,j} + \hat{w}_i), \tag{۱۲۵.۵}$$

که

$$\bar{E}_v = (-A_{22})^{-1} E_v = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_{22} = (-A_{22})^{-1} A_{22} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{۱۲۶.۵}$$

$$\bar{B}_2 = (-A_{22})^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

با توجه به فرآیند موجود در ملاحظه ۳.۱.۱ داریم:

$$\bar{E}_v = VW, \quad V = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{۱۲۷.۵}$$

همچنین

$$\begin{aligned}\bar{E}_v^D &= V[W\bar{E}_vV]^{-1}W \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left[ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right]^{-1} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{A}_{22}^D &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{۱۲۸.۵}$$

با توجه به (۱۰۴.۵) و (۱۲۸.۵) نتیجه می‌شود

$$\bar{x}_{i,j}^v = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}^i v_2(i) + \sum_{l=0}^{j-1} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}^{j-l-1} (\hat{u}_{i,l} + \hat{w}_i) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (\hat{u}_{i,l} + \hat{w}_i), \tag{۱۲۹.۵}$$

که  $v_2(i) \in \mathbb{R}^{n_2}$  تابع دلخواهی از  $i$  است. مؤلفه‌های  $\bar{x}_{i,j}^h$ ، یعنی  $\bar{x}_{i,j}^{h1}$  و  $\bar{x}_{i,j}^{h2}$  با استفاده از (۱۲۴.۵) تعیین می‌شوند.

با معلوم بودن بردارهای (۱۲۴.۵)، (۱۲۹.۵) و ماتریس (۱۱۹.۵) می‌توان جواب معادله (۸۱.۵) با مفروضات (۱۱۷.۵) را با استفاده از (۱۰۵.۵) به دست آورد.

# فصل ۶

## نتیجه‌گیری

در این فصل از رساله به بیان نتایج فصل‌های قبلی رساله و همچنین پیشنهادهایی برای ادامه تحقیقات رساله می‌پردازیم.

در **فصل ۲**، روش‌های تخصیص مقادیر ویژه با تبدیلات تشابهی (پس‌خورد حالت)، تخصیص مقادیر ویژه با مسئله مقدار ویژه معکوس (پس‌خورد خروجی)، تخصیص مقادیر ویژه جزئی با استفاده از بردار ویژه و تخصیص مقادیر ویژه جزئی با روابط متعامد برای سیستم‌های استاندارد ارائه شده است.

در تخصیص مقادیر ویژه با تبدیلات تشابهی، با تخصیص مقادیر ویژه مطلوب پس‌خورد حالت را محاسبه و سپس ماتریس حلقه بسته سیستم را به دست می‌آوریم.

در تخصیص مقادیر ویژه با مسئله مقدار ویژه معکوس، با تخصیص مقادیر ویژه مطلوب ابتدا ماتریس حلقه بسته سیستم محاسبه شده و از آن ماتریس پس‌خورد خروجی به دست می‌آید.

در روش تخصیص مقادیر ویژه جزئی با روابط متعامد، نیاز به برقراری فرضیات زیر هستیم. در غیر این صورت محاسبه  $\beta_j, j = 1, \dots, m$  در الگوریتم موجود در بخش ۳.۵.۲ ممکن نیست و این روش قابل استفاده نیست.

- مقادیر ویژه  $\lambda_j, j = 1, \dots, p$  باید متمایز باشند.

- مقادیر ویژه  $\lambda_j, j = 1, \dots, p$  نمی‌توانند نزدیک صفر باشند.
- بردار  $b$  نمی‌تواند عمود بر  $\bar{y}_j$  باشد.

در روش تخصیص مقادیر ویژه جزئی با بردار ویژه می‌توان تخصیص دوباره را بر روی

■ مقادیر ویژه تکراری

■ مقادیر ویژه نزدیک به صفر و یا خود صفر

انجام داد.

برتری روش تخصیص مقادیر ویژه جزئی نسبت به روش تخصیص در آن است که نیاز به تخصیص مجدد مقادیر ویژه مطلوب از ماتریس حلقه باز نیست و فقط مقادیر ویژه نامطلوب از ماتریس حلقه باز سیستم استاندارد دوباره تخصیص داده می‌شوند. بنابراین، در سیستم‌های استاندارد با ماتریس‌هایی با ابعاد بزرگ و در سیستم‌های کسری توسیع‌یافته با ماتریس‌های تبدیل‌شده بزرگ در حالت سیستم معادل استاندارد با آن، دارای جواب‌های بهتر هستیم و محاسبات بسیار کمتری خواهیم داشت.

در **فصل ۳**، سه روش اول ارائه‌شده در فصل ۲ برای پایداری و حل سیستم‌های توسیع‌یافته پیوسته-زمانی و گسسته-زمانی در استفاده شده است. ابتدا با ماتریس‌های پس‌خورد حالت و خروجی مشتق و حالت و خروجی پیشرو، پایدارسازی سیستم‌های توسیع‌یافته انجام شده است. اما ممکن است ماتریس حلقه باز سیستم استاندارد که معادل با سیستم توسیع‌یافته است، منفرد باشد. به همین دلیل پس‌خوردهای حالت و خروجی مشتق و گزاره‌ای و حالت و خروجی پیشرو و گزاره‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای بهتر شدن جواب‌ها در سیستم‌های توسیع‌یافته با ابعاد بزرگ نیز روش تخصیص مقادیر ویژه جزئی با چهار پس‌خورد حالت پیشرو، پیشرو و گزاره‌ای، مشتق و مشتق و گزاره‌ای مورد بررسی قرار گرفته است.

در **فصل ۴**، علاوه بر روش‌های تخصیص و تخصیص جزئی روش‌های دیگری به شرح ذیل برای پایدارسازی و یافتن جواب در سیستم‌های کسری توسیع‌یافته گسسته-زمانی معرفی می‌شوند:

تبدیل سیستم کسری توسیع‌یافته به سیستم استاندارد با الگوریتم شوفل با  $q$  مرحله که  $q \leq n$  و یافتن جواب در آن با تبدیلات  $Z$  در زیربخش ۳.۴ توضیح داده شده است.

حل این سیستم‌ها با وارون درزین، تجزیه وایراشترائوس و روش کاکزورک در زیربخش‌های ۴.۴ تا ۶.۴ معرفی شده‌اند که در آن‌ها نیاز به محاسبه وارون درزین، ماتریس‌های نامفرد  $P$  و  $Q$  و ماتریس‌های  $K_1$  و  $K_2$  هستیم.

اما در روش تخصیص مقادیر ویژه با پس خورد حالت و خروجی و تخصیص جزئی با بردار ویژه، ابتدا سیستم را با استفاده از تعریف مشتق کسری به سیستم توسعه یافته تبدیل کرده و بعد با روش‌های موجود در فصل ۳ به پایداری و یافتن جواب در آن پرداخته‌ایم. همچنین شکل‌های پایداری بردارهای حالت به نقطه تعادل با ذکر مثال عددی نشان داده شده است. نکته قابل توجه در این فصل این است که سیستم استاندارد معادل با این سیستم‌ها، همواره دارای ماتریس حلقه باز منفرد است. بنابراین، تنها پس‌خوردهای حالت و خروجی پیشرو و گزاره‌ای قابل استفاده است.

در **فصل ۵**، سیستم‌های کسری دوبعدی معرفی و پایداری مجانی و عملی آن‌ها بررسی شده است. سپس مدل راسر از این سیستم‌ها مورد تمرکز قرار گرفته و تبدیل  $T_{pq}$  و وارون درزین به ترتیب برای یافتن جواب در سیستم‌های کسری دوبعدی راسر و دوبعدی توسعه یافته مدل راسر ارائه شده است. همچنین، روش تبدیلات تشابهی برای پایدارسازی و یافتن جواب در سیستم‌های کسری دوبعدی راسر بررسی شده و پایداری این سیستم‌ها به نقطه تعادل صفر در قالب مثال عددی آورده شده است.

### پیشنهادهایی برای ادامه تحقیقات رساله:

در ادامه کار این رساله می‌توان پایدارسازی و یافتن جواب در سیستم‌های

- کسری دوبعدی توسعه یافته
- کسری توسعه یافته پیوسته زمانی
- کسری توسعه یافته با تأخیر زمانی
- کسری توسعه یافته متغیر با زمان

را مورد بررسی قرار داد.





# مراجع

- [۱] خاکی صدق ع، اصول کنترل مدرن، (۱۳۸۶)، چاپ چهارم، تهران، انتشارات دانشگاه تهران.
- [2] Bru R., Coll C. and Sanchez E., (2000), "About positively discrete-time singular systems, in N.E. Mastorakis (Ed.) **System and Control: Theory and Applications**", Electrical and Computer Engineering Series, World Scientific and Engineering Society, Athens, pp. 44–48.
- [3] Bru R., Coll C. and Sanchez E., (2002), "Structural properties of positive linear time-invariant difference-algebraic equations", **Linear Algebra and Applications**, Vol. 349, No. 3, pp. 1–10.
- [4] Bru R., Coll C., Romero-Vivo S. and Sanchez E., (2003), "Some problems about structural properties of positive descriptor systems", in L. Benvenuti, A. Santis and L. Farina (Eds.), **Positive Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences**, Vol. 294, Springer, Berlin, pp. 233–240.
- [5] Bunse-Gerstner A., Nichols N. and Mehrmaqqn V., (1992), "Partial eigenvalue assignment in descriptor systems via derivative and propositional state feedback", **Journal of Information and Computing Science**, Vol. 12, No. 3, pp. 220–233.
- [6] Bunse-Gerstner A., Nichols N. and Mehrmaqqn V., (1992), "Regularization of descriptor systems by derivative and proportional state feedback", **SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications**, Vol. 13, No. 1, pp. 46–67.
- [7] Byers R. and Nash S. G., (1989), "Approach to robust pole assignment", **International Journal of Control**, Vol. 49, pp. 97–117.
- [8] Campbell S. L., Meyer C. D. and Rose N. J., (1976), "Applications of the Drazin inverse to linear systems of differential equations with singular constructions", **SIAM Journal on Applied Mathematics**, Vol. 31, No. 3, pp. 411–425.

- 
- [9] Commalut C. and Marchand N., (2006), "Positive Systems", **Lecture Notes in Control and Information Sciences**, Vol. 341, Springer-Verlag, Berlin.
- [10] Dai L., (1989), "Singular Control Systems, **Lectures Notes in Control and Information Sciences**, Vol. 118, Springer-Verlag, Berlin.
- [11] Datta B. N. and Saad Y., (1991), "Arnoldi methods for large Sylvester-like observer matrix equations, and an associated algorithm for partial spectrum assignment", **Linear Algebra and its Applications**, Vol. 154, pp. 225–244.
- [12] Datta B. N., Elhay S.Y. and Ram M., (1997), "Ortogonal and partial pole assignment for the symmetric definite quadratic pencil", **Linear Algebra and Applications**, Vol. 257, pp. 29–48.
- [13] Datta B. N., (1998), "**Numerical linear algebra and applications methods for linear control systems design and analysis**", Pacific Grove, California.
- [14] Datta B. N., (1999), "Recent developements on nonmodel and partial model approaches for control of vibration", **Applied Numerical Mathematics**, Vol. 30, pp. 41–52.
- [15] Datta B. N., (2002), "**Numerical methods for linear control systems design and analysis**", Academic Press, New York.
- [16] Datta B. N. and Sarkissian, D. R., (2002), "**Partial Eigenvalue Assignment in Linear Systems: Existence, Uniqueness and Numerical Solution**", Mathematical Theory of Networks and Systems, Notre Dame.
- [17] Davison E. J. and Wang S. H., (1975), "**Auto Control**", Institute of Electrical and Electronics Engineers, Transactions on Automatic Control, Vol. 20, pp. 516–518.
- [18] Fahmy M. H., and OReill J., (1989), "Matrix pencil of closed-loop descriptor systems: Infinite-eigenvalues assignment, **International Journal of Control**, Vol. 49, No. 4, pp. 1421–1431.
- [19] Farina L. and Rinaldi S. (2000), "**Positive linear systems**", J. Willey, New York.
- [20] Fateh M. M., Tehrani H. A. and Karbassi S. M., (2013), "Repetitive control of electrically driven robot manipulators", **International Journal of Systems Science**, Vol. 4, No. 4, pp. 775–785.

- [21] Fletcher L. R., (1988), "Eigenstructure Assignment by output feedback in descriptor systems", **Institute of Electrical and Electronics Engineers, Transactions on Automatic Control**, Vol. 135, No. 4, pp. 302–308.
- [22] Fornasini E. and Marchesini G., (1978), "Double indexed dynamical systems", **Mathematical systems theory**, Vol. 12, pp. 59–72.
- [23] Gantmacher F.R., (1960), "**The Theory of Matrices**", Chelsea Publishing Co., New York, NY.
- [24] Garcia C. B. and Li T. Y., (1980), "**On the numbers of solutions to polynomial systems of equations**", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 17, No. 4, pp. 540–546.
- [25] Golub G. H. and Van Loan C. F., (1989), "**Matrix computations**", John Hopkins, Baltimore.
- [26] Guermah S., Djennoune S. and Bettayeb M., (2010), "**A new approach for stability analysis of linear discrete-time fractional orders systems**", *New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications*, pp. 151–162, Springer.
- [27] Halanay A. and Rasvan V., (2000), "**Stability and stable oscillations in discrete-time systems**", Gordon and Breach Science Publisher, Australia, pp. 21–23.
- [28] Hopfield J. J., (1982), "Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities", **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America**, Vol. 79, No. 8, pp. 2554–2558.
- [29] Householder A. S., (1964), "The theory of matrices in numerical analysis", Dover Publications, New York.
- [30] Kaczorek T., (1992), **Linear Control Systems**, Research Studies Press, J. Wiley, New York.
- [31] Kaczorek, T., (1998), "**Vectors and matrices in automation and electrotechnics**", WNT, Warszawa.
- [32] Kaczorek T., (2001), "**Positive 1D and 2D Systems**", Springer-Verlag, London.

- 
- [33] Kaczorek T., (2004), "Infinite eigenvalue assignment by an output feedback for singular systems", **International Journal of Applied Mathematics and Computer Science**, Vol. 14, No. 1, pp. 19–23.
- [34] Kaczorek T., (2005), "Reachability and minimum energy control of positive 2D systems with delays", **Control and Cybernetics**, Vol. 34, No. 2, pp. 411–423.
- [35] Kaczorek T., (2006), "Positive 2D systems with delays", **12th IEEE IFAC International Conference of Methods in Automation and Robotics**, MMAR.
- [36] Kaczorek T., (2007), "Choice of forms of Lyapunov functions for positive 2D Roesser model", **International Journal of Applied Mathematics and Computer Science**, Vol. 17, No. 4, pp. 471–475.
- [37] Kaczorek T., (2007), "Reachability and controllability to zero of cone fractional linear systems", **Archives of Control Sciences**, Vol. 17, No. 3, pp. 357–367.
- [38] Kaczorek T., (2007), "Reachability and controllability to zero of positive fractional discrete-time systems", **Machine Intelligence and Robotics Control**, Vol. 6, No. 4, pp. 130–143.
- [39] Kaczorek T., (2007), "Realization problem for singular positive continuous-time systems with delays", **Control and Cybernetics**, Vol. 36, No. 1, pp. 47–57.
- [40] Kaczorek T., (2008), "Asymptotic stability of positive 1D and 2D linear systems", **Recent Advances in Control and Automation**, Vol. 1, pp. 41–52.
- [41] Kaczorek T., (2008), "Asymptotic stability of positive 2D linear systems", **Proceedings 13th Scientific Conference Computer Applications in Electrical Engineering**.
- [42] Kaczorek T., (2008), "Fractional positive continuous-time linear systems and their reachability", **International Journal of Applied Mathematics and Computer Science**, Vol. 18, No. 2, pp. 223–228.
- [43] Kaczorek T., (2008), "Positive different orders fractional 2D linear systems", **Acta Mechanica et Automatica**, Vol. 2, No. 2, pp. 51–58.
- [44] Kaczorek T., (2008), "Practical stability of positive fractional discretetime linear systems", **Bulletin of the Polish Academy of Technology**, Vol. 56, No. 4, pp. 313–317.

- [45] Kaczorek T., (2009), "Asymptotic stability of positive 2D linear systems with delays", **Bulletin of the Polish Academy of Technology**, Vol. 57, No. 2, pp. 133–138.
- [46] Kaczorek T. and Rogowski K., (2009), "**Positivity and stabilization of fractional 2D linear systems described by Roesser model**", Proceedings Conference of Methods and Models in Automation and Robotics 1.
- [47] Kaczorek T., (2010), "Positive linear systems with different fractional orders", **Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences**, Vol. 58, No. 3, pp. 453–458.
- [48] Kaczorek T., (2010), "Practical stability and asymptotic stability of positive fractional 2D linear systems", **Asian Journal of Control**, Vol. 12, No. 2, pp. 200–207.
- [49] Kaczorek T., (2010), "Practical stability of positive fractional 2D linear systems", **Multidimensional Systems and Signal Processing**, Vol. 21, No. 3, pp. 231–238.
- [50] Kaczorek T., (2010), "Stability and stabilization of positive fractional linear systems by state-feedbacks", **Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences**, Vol. 58, No. 4, pp. 537–554.
- [51] Kaczorek T., (2011), "Checking of the positivity of descriptor linear systems by the use of the shuffle algorithm", **Archives of Control Sciences**, Vol. 21, No. 3, pp. 287–298.
- [52] Kaczorek T., (2011), "Reduction and decomposition of singular fractional discrete-time linear systems", **Acta Mechanica et Automatica**, Vol. 5, No. 4, pp. 62–66.
- [53] Kaczorek T., (2011), "**Selected Problems of Fractional Systems Theory**", Springer-Verlag, Berlin.
- [54] Kaczorek T., (2011), "Singular fractional discrete-time linear systems, **Control and Cybernetics**, Vol. 40, No. 3, pp. 753–761.
- [55] Kaczorek T., (2013), "Application of the drazin inverse to the analysis of descriptor fractional discrete-time linear systems with regular pencils", **International Journal of Applied Mathematics and Computer Science**, Vol. 23, No. 1, pp. 29–33.

- 
- [56] Kaczorek T., (2014), "Descriptor positive discrete-time and continuous-time nonlinear systems, **Proceedings of SPIE**, Vol. 92, pp. 1–11.
- [57] Kaczorek T., (2014), "Minimum energy control of fractional descriptor positive discrete-time-time linear systems with bounded inputs, **Proceeding of the 19th World Congress**, The International Federation of Automatic Control, Cape Town, South Africa, August 24–29.
- [58] Kaczorek T., (2014), "Minimum energy control of positive fractional descriptor continuous-time linear systems, **IET Control Theory and Applications**, Vol. 8, No. 4, pp. 219–225.
- [59] Kaczorek T., (2011), "Positivity and asymptotic stability of descriptor linear systems with regular pencils", **Archives of Control Sciences**, Vol. 24, No. 2, pp. 193–205.
- [60] Kaczorek T., (2014), "Positivity and linearization of a class of nonlinear discrete-time systems by state feedbacks, **Logistyka**, Vol. 6, pp. 5078–5083.
- [61] Kaczorek T., (2015), "Analysis of the descriptor roesser model with the use of the drazin inverse, **International Journal of Applied Mathematics and Computer Science**, Vol. 25, No. 3, pp. 539–546.
- [62] Kaczorek T. and Borawski K., (2017), "Eigenvalue assignment in fractional descriptor discrete-time linear systems", **Archives of Control Sciences**, Vol. 27, No. 1, pp. 119–128.
- [63] Karbassi S. M., Bell D. J., (1993), "Parametric time-optimal control of linear discrete-time systems by state feedback-part 1: Regular kronecker invariants", **International journal of control**, Vol. 57, pp. 831–883.
- [64] Karbassi S. M., Bell D. J., (1993), "Parametric time-optimal control of linear discrete-time systems by state feedback-part 2: Irregular kronecker invariants", **International journal of control**, Vol. 57, pp. 817–830.
- [65] Kautsky J., Nichols N. K. and Van Dooren P., (1985), "Robust pole assignment in linear state feedback", **International Journal of Control**, Vol. 41, pp. 1129–1155.
- [66] Kilbas A., Srivastava H. M. and Trujillo J. J., (2006), "**Theory and applications of fractional differential equations**", Amsterdam, Elsevier.

- 
- [67] Kimura H., (1975), "Pole assignment by gain output feedback", **Institute of Electrical and Electronics Engineers, Transactions on Automatic Control**, Vol. 20, pp. 509–518.
- [68] Klamka J., (2013), "Controllability of dynamical systems", **Bulletin of the Polish Academy of Technology**, Vol. 61, No. 2, pp. 221–229.
- [69] Kucera V. and Zagalak P., (1988), "Fundamental theorem of state feedback for singular systems", **Automatica**, Vol. 24, No. 5, pp. 653–658.
- [70] Kurek J., (1985), "The general state-space model for a two-dimensional linear digital systems", **Institute of Electrical and Electronics Engineers, Transactions on Automatic Control.**, Vol. 30, pp. 600–602.
- [71] Lewis F. L., (1986), "A Survey of Linear Singular Systems", **Circuits Systems Signal Process**, Vol. 5, No. 1, pp. 3–36.
- [72] Li N., Chu E., (1992), "Applying Levenberg-Marquardt method to output feedback pole assignment problems", **Monash University Applied Mathematics Reports and Preprints**, Vol. 92, No. 23.
- [73] Li N., Chu E., (1994), "Designing the Hopfield neural network via pole assignment", **International Journal of Systems Science**, Vol. 25, pp. 669–681.
- [74] Li N., (1997), "A matrix inverse eigenvalue problem and its applications", **Linear Algebra and its Applications**, Vol. 266, pp. 143–152.
- [75] Li N., (2000), "An inverse eigenvalue problem and feedback control", **Proceedings of the 4th Biennial Engineering Mathematics and Applications Conference**, Melbourne, Australia, 10-13 September, pp. 183–186.
- [76] Li N., (1997), "An iterative method for pole assignment", **Linear Algebra and its Applications**, Vol. 23, pp. 77–83.
- [77] Mirassadi S. B. and Tehrani H. A., (2015), "A new approach for eigenvalue assignment in descriptor systems via output feedback matrix", **The 46th Annual Iranian Mathematics Conference**, Yazd University, Yazd, Iran, 25-28 August, pp. 575–578.

- 
- [78] Mirassadi S. B. and Tehrani H. A., (2015), "Descriptor systems controller, with minimizing the norm of state feedback matrix", **The 46th Annual Iranian Mathematics Conference**, Yazd University, Yazd, Iran, 25-28 August, pp. 596–599.
- [79] Mirassadi S. B. and Tehrani H. A., (August 2016), "Partial eigenvalue assignment in continuous-time descriptor systems via derivative state feedback", **International Journal of Applied and Computational Mathematics**, DOI 10.1007/s40819-016-0229-9.
- [80] Mirassadi S. B. and Tehrani H. A., (Fall 2016), "Partial eigenvalue assignment in discrete-time descriptor systems via derivative state feedback", **Amirkabir International Journal of Science and Research Modeling, Identification, Simulation and Control**, Vol. 48, No. 2, pp. 65–74.
- [81] Mirassadi S. B. and Tehrani H. A., (2017), "Stabilization of fractional discrete-time systems via output feedback", **The 9th Seminar on Linear Algebra and its Applications**, Tabriz University, Tabriz, East Azarbayjan, Iran, 5-6 July, pp. 20–23.
- [82] Mirassadi S. B. and Tehrani H. A., (2017), "Eigenvalue assignment in fractional two-dimensional Roesser systems", **The 9th Seminar on Linear Algebra and its Applications**, Tabriz University, Tabriz, East Azarbayjan, Iran, 5-6 July, pp. 24–27.
- [83] Mirassadi S. B. and Tehrani H. A., (Fall 2017), "Partial eigenvalue assignment in descriptor systems via derivative and propositional state feedback", **Journal of Information and Computing Science**, Vol. 12, No. 3, pp. 220–233.
- [84] Mirassadi S. B. and Tehrani H. A., (2019), "Partial eigenvalue assignment for stabilization of descriptor fractional discrete-time linear systems", **Journal of Mathematical Modeling**, Vol. 7, No. 2, pp. 199–220.
- [85] Mirassadi S. B. and Tehrani H. A., (2019), "Matrix inverse eigenvalue problem for stabilization of fractional descriptor discrete-time linear systems by forward and propositional output feedback", **Computational Methods for Differential Equations**, Accepted, Not published.



- [86] Ostalczyk P., (2008), "A note on the Grnwald-Letnikov fractional-order backward difference", **3rd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications**, Cankaya University, Ankara, pp. 5–7.
- [87] Quarteroni A., Sacco R. and Saleri F., (2000), "**Numerical mathematics**", Pringer-Verlag, New York, Inc.
- [88] Ramadan M. A. and El-Sayed E. A., (2006), "Partial eigenvalue assignment problem of linear control systems using orthogonality relations", **Acta Montanistica Slovaca, Rocnik**, Vol. 11, No. 1, pp. 16–25.
- [89] Roesser R. P., (1975), "A discrete state-space model for linear image processing", **Institute of Electrical and Electronics Engineers, Transactions on Automatic Control**, Vol. 20, No. 1, pp. 1–10.
- [90] Saad Y., (1988), "Projection and deflation methods for partial pole assignment in linear state feedback", **Institute of Electrical and Electronics Engineers, Transactions on Automatic Control**, Vol. 33, pp. 290–297.
- [91] Sarkissian D. R., (2001), "**Theory and computations of partial eigenvalue and eigenstructure assignment problems in matrix second-order and distributed-parameter systems**", Ph.D. thesis, Department of mathematics, Northern Illiois University, IL.
- [92] Schmidt T. and Hou M., (2002), "**Bollringetriebel**", Internal Rep., Sicherheitstechnische Regelungs- und MeBtechnik, Bergische Univ., GH Wuppertal, Wuppertal, FRG.
- [93] Sobolev V. I., (2001), "**Convolution of functions**", in Hazewinkel, Michiel, Encyclopaedia of Mathematics, Springer.
- [94] Stein E. and Weiss G., (1971), "**Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces**", Princeton University Press.
- [95] Valcher M. E., (1997), "On the internal stability and asymptotic behavior of 2D positive systems", **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, Vol. 44, No. 7, pp. 602–613.
- [96] Van Dooren P., (1979), "The computation of Kroneckers canonical form of a singular pencil", **Linear Algebra and Its Applications**, Vol. 27, pp. 103–140.

- 
- [97] Virnik E., (2008), "Stability analysis of positive descriptor systems", **Linear Algebra and Its Applications**, Vol. 429, No. 10, pp. 2640–2659.
- [98] Wang C., (2012), "New delay-dependent stability criteria for descriptor systems with interval time delay", **Asian Journal of Control**, Vol. 14, No. 1, pp. 197–206.
- [99] Zhoua L. and Lub G., (2009), "Detection and stabilization for discrete-time descriptor systems via a limited capacity", **Atomtica**, Vol. 45, No. 10, pp. 2272–2277.

## **Aabstract**

In this thesis, the eigenvalue assignment methods on the basis of similarity transformation, matrix inverse eigenvalue problem, and the method of partial eigenvalue assignment by the use of eigenvectors are applied to investigate and to find the solution of discrete-time and continuous-time descriptor and discrete-time descriptor fractional systems. The first case is focused in two-dimensional fractional Roesser systems. For stabilization of descriptor fractional systems, these systems are first converted to systems with unlimited increasing delays and controllability of this form is not applicable. By limiting delays because the coefficient of delays are descending and using new definition of matrices will arrive standard systems but with bigger scale.

The eigenvalue assignment methods via similarity transformation and matrix inverse eigenvalue problem is applied in discrete-time systems by obtaining forward state and output feedback matrix and forward and propositional state and output feedback matrix and in continuous-time systems by obtaining derivative state and output feedback matrix and derivative and propositional state and output feedback matrix. And the closed-loop matrix with desired eigenvalues is calculated. The eigenvalue assignment using similarity transformation, closed-loop matrix is calculated by the use of state feedback matrix. Otherwise, the eigenvalue assignment using similarity transformation, output feedback matrix is obtained by calculated closed-loop matrix. The second one is more applicable when output of system is more important.

Eigenvalue assignment is done with two aims. First, stabilization of unstable systems. Second, desired eigenvalue assigning. In partial eigenvalue assignment, just assigning of undesired eigenvalue of standard systems is needed while other ones, desired eigenvalues, are invariant. Therefore, smaller scale of systems will be concerned. Partial eigenvalue assignment by eigenvectors has some superiorities rather than using orthogonality relations.

Further manners like drazin inverse, shuffle algorithm, Weierstrass decomposition, and Kaczorek form are introduced and compared with eigenvalue assignment methods.

**Keywords:** Discrete-time systems, Continuous-time, Stabilization, Descriptor fractional, Roesser 2D



Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in Numerical Analysis

# **Stability of the Descriptor and Fractional Descriptor Systems**

By: Ms. Sakineh Bigom Mirassadi

Supervisor:

**Dr. Hojjat Ahsani Tehrani**

July 2019