بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

رساله دکتری گراف و ترکیبیات

# بررسی شرایط عدم‌وجود همریختی در ابرگراف‌ها


نگارنده: سمانه طهماسبی


استادان راهنما

دکتر صادق رحیمی شعرباف
دکتر میثم علیشاهی

بهمن ۱۳۹۷

**تقدیم به**

**پدر و مادر عزیزم**

**و همه کسانی که درست اندیشیدن را به من آموختند.**

# سپاس‌گزاری...

از خداوند متعال سپاس‌گزارم که مرا یاری کرد تا به بهانه گردآوری این مجموعه از تمامی همراهان بزرگوار و ارجمندی که مرا از ابتدای راه و نیز در انجام این رساله همراهی و راهنمایی نموده اند تقدیر و تشکری کرده باشم. نخست از پدر و مادرم که مشوق همیشگی من بوده و هستند و شرایط و محیط را برایم فراهم کردند تا بتوانم این مسیر را با آرامش طی کنم و نیز دعای خیرشان همواره همراهم بوده، سپاس‌گزارم و برایشان آرزوی سلامتی و کامیابی دارم. همچنین از همسر و دختر خود سپاس‌گزارم که در این سال‌ها همراهم بودند و همگام با من سختی‌ها را تحمل نموده‌اند. سپس از همکاری صمیمانه و مساعدت تاثیرگذار جناب آقای دکتر میثم علیشاهی که به‌عنوان استاد راهنما مرا در تهیه این رساله یاری نمودند تشکر و قدردانی می‌نمایم و برای ایشان آرزوی توفیق و سربلندی دارم. همچنین از استاد راهنمای خود جناب آقای دکتر رحیمی تشکر می‌نمایم. در پایان وظیفه خود می‌دانم از همه عزیزانی که حمایت‌ها، کمک‌ها و راهنمایی‌شان در تمامی مراحل زندگی شامل حال من بوده است، کمال تشکر و قدردانی را بجا آورم.

**سمانه طهماسبی**

**بهمن ۱۳۹۷**

# تعهد نامه

اینجانب **سمانه طهماسبی** دانشجوی دکتری رشته **ریاضی کاربردی** **علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده رساله با عنوان **بررسی شرایط عدم‌وجود همریختی در ابرگراف‌ها** ، تحت راهنمایی **صادق رحیمی شعرباف** و **میثم علیشاهی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این رساله، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام "دانشگاه صنعتی شاهرود" یا " Shahrood University of Technology " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از رساله رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

**سمانه طهماسبی**
**بهمن ۱۳۹۷**

## مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این رساله بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

# چکیده

در این رساله، ما یک سری از پارامترهای جدید که تحت همریختی ابرگراف‌ها صعودی ـ پایا هستند را معرفی می‌کنیم. با استفاده از این پارامترها، با ارائه شرایط لازم برای وجود همریختی بین ابرگراف‌ها، نتایج جدیدی در این حوزه بدست می‌آوریم و همچنین بعضی از نتایج موجود را بهبود می‌بخشیم. به طور خاص، به‌عنوان تعمیمی از یک نتیجه در کنسر گراف‌ها، ثابت می‌کنیم که اگر تعداد راس‌های یک کنسر ابرگراف تعمیم‌یافته به اندازه کافی بزرگ باشد آنگاه عددرنگی و عددرنگی‌دوری آن یکسان است.

کلمات کلیدی: ابرگراف، همریختی، عدد رنگی دوری، عددرنگی آزاد، عدد رنگی کسری، مجموع رنگی، ابرگراف انتقال پذیر یالی و راسی.

# لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

1. M. Alishahi, S. Tahmasebi. On circular chromatic number and chromatic number of some generalized Kneser hypergraphs, Ars Combinatoria.

2. S. Tahmasebi, S. Rahimi Sherbaf. No-homomorphism conditions for hypergraphs, Algebraic Structures and Their Applications.

3. S. Tahmasebi, M. Alishahi. Studying some no-homomorphism conditions of some kneser graphs. 48th Annual Iranian Mathematics Conference, Bu-Ali Sina Univercity, August 22-25, 2017. Hamedan.

4. S. Tahmasebi, M. Alishahi. On chromatic and circular chromatic number of some kneser graphs KG(G,H). 48th Annual Iranian Mathematics Conference, Bu-Ali Sina Univercity, August 22-25, 2017. Hamedan.

# فهرست مطالب

# فهرست تصاویر

# پیش‌گفتار

نظریه گراف یکی از موضوع‌های مهم ریاضیات است که با ارائه مدلی ریاضی برای یک مجموعه، به بررسی ارتباط بین اعضای آن مجموعه می‌پردازد. اعضای این مجموعه می‌توانند اتم‌ها در یک مولکول باشند و ارتباط آن‌ها اتصال‌های شیمیایی باشد، یا اعضا می‌توانند مناطق مختلف زمین و ارتباط بین آن‌ها پل‌ها یا جاده‌هایی باشند که آن‌ها را به‌هم مرتبط می‌کنند. یک گراف از مجموعه‌ای ناتهی از اشیا به نام **راس**[1] که آن را با $V$ نشان داده و مجموعه‌ای از **یال‌ها**[2] که رئوس را به‌هم متصل می‌نماید و با $E$ نشان داده می‌شود، تشکیل شده است. درواقع هر یال را می‌توان به‌عنوان زیرمجموعه دو عضوی از $V$ درنظر گرفت. چنین گرافی با $G(V,E)$ نمایش داده می‌شود.

به‌هرحال در بسیاری از مسائل جهان واقعی، ارائه یک مجموعه موضوع‌های مرتبط پیچیده، با گراف‌های جهت‌دار یا غیرجهت‌دار کافی نمی‌باشد. برای روشن شدن این نکته مساله گروه‌بندی یک مجموعه از مقالات در موضوع‌های مختلف را درنظر بگیرید. یک مقاله را درنظر بگیرید. فرض کنید تنها اطلاعی که داریم این باشد که چه کسی این مقاله را نوشته است. یک راه این است که گراف غیرجهت‌دار بسازیم و دو راس را به یکدیگر متصل کنیم اگر حداقل یک نویسنده مشترک متناظر با مقالات وجود داشته باشد. به هر یال وزنی اختصاص داده می‌شود که برابر تعداد نویسندگان مشترک است. روش فوق ممکن است به ظاهر خوب باشد اما در این نمایش گرافی، این اطلاعات که آیا یک نویسنده سه مقاله یا بیشتر را نوشته است، وجود ندارد. اینجاست که مفهوم ابرگراف برای توصیف بیشتر و بهتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. ابرگراف به‌عنوان تعمیمی از مفهوم گراف عبارت است از زوج $\mathcal{H}(V,E)$ که در آن $V=\{v_1,\dots,v_n\}$ مجموعه متناهی از رئوس و $E=\{e_1,e_2,\dots,e_m\}$ مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های ناتهی $V$ است به‌طوری‌که، $\cup_{i=1}^{m} e_i = V$ . هر عضو E را یک یال گویند.

از اواسط قرن گذشته، نظریه گراف دارای اهمیت بسیاری در زمینه‌های مختلف از جمله تحقیق‌درعملیات، هندسه، نظریه اعداد، بهینه‌سازی، توپولوژی، جبرهای میانی و نظایر آن‌ها بوده است. برای حل مسائل ترکیبیاتی جدید لازم بود که مفهوم گراف توسعه داده شود. حدود سال ۱۹۶۰ بود که مفهوم ابرگراف پدیدار شد و بطور عمیق‌تر و وسیع‌تر در دهه‌های ۷۰

[1] vertex
[2] edge

و ۸۰ میلادی توسط شخصی بنام برج[۳] مورد‌مطالعه قرار گرفت. از سرشناس‌ترین افرادی که آغازگر مبحث ابرگراف‌ها هستند می‌توان به برج، بولوباس[۴] و تات [۵] اشاره کرد. یکی از اهداف ابتدایی، تعمیم بعضی از نتایج کلاسیک نظریه گراف بود. بعد از آن متخصصان متوجه شدند که این تعمیم ( تعمیم به ابرگراف)، بیشتر منجر به ساده‌سازی مطالب و مفاهیم مربوط به گراف می‌شود.

**همریختی**[۶] در نظریه گراف در سال‌های نه چندان دور اهمیت چندانی نداشت و ریاضیدانانی که در نظریه گراف کار می‌کردند، همریختی را جزء مباحث اصلی نظریه گراف نمی‌دانستند. اما در حال حاضر این دیدگاه تغییر کرده است و علت اصلی آن نیز کاربرد همریختی در بازسازی[۷] گراف‌ها، ضرب‌های[۸]گراف، عددرنگی‌دوری[۹]، عددرنگی‌کسری[۱۰] و به تازگی در فیزیک آماری[۱۱] است. ازطرف‌دیگر، همریختی گراف‌ها سبب ارتباط بیشتر میان نظریه گراف و دیگر شاخه‌های ریاضی می‌گردد و نظریه گراف را برای دیگر ریاضی‌دانان جذاب‌تر و قابل فهم‌تر می‌کند.

همریختی در گراف، یکی از مفاهیم مهم در تئوری گراف می‌باشد که به مسائل زیادی مربوط می‌شود [۳۰، ۲۸]. مطالعه همریختی در گراف‌ها به حدود پنجاه سال پیش برمی‌گردد. مفهوم همریختی برای اولین بار توسط سابیدوسی[۱۲] در اواخر دهه پنجاه و اوایل دهه شصت با نتایج منتشر شده در مقاله‌ای تحت عنوان مشتق‌های گراف[۱۳][۴۰] مورد‌مطالعه و توسط او در مقالات دیگر نیز مورد‌استفاده قرار گرفت[۳۹]. در طول سال‌ها مبحث همریختی در گراف‌ها در حال رشد و گسترش است و مفاهیم زیادی براساس همریختی تعریف شده‌اند. همریختی در گراف اغلب به‌عنوان ابزار، بویژه در مسائل رنگ‌آمیزی مورد‌استفاده قرار می‌گیرد. به‌عنوان مثال عددرنگی ابرگراف $G$، کوچکترین عدد طبیعی $n$ است که برای آن یک همریختی از ابرگراف $G$ به گراف کامل $K_n$ وجود داشته باشد. عددرنگی‌دوری ابرگراف تعمیمی از عددرنگی است و آن را نیز می‌توان به‌کمک همریختی تعریف کرد. گراف کامل دوری $K_{\frac{n}{d}}$ گرافی است با مجموعه رئوس $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ که در آن دو راس $i$ و $j$ به‌هم متصلند اگر $d \leq |i-j| \leq n-d$. عددرنگی‌دوری ابرگراف $\mathcal{G}$ که با $\chi_c(\mathcal{G})$ نشان داده می‌شود بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\chi_c(\mathcal{G}) = inf\{\frac{n}{d} \ : \ \text{یک همریختی از } \mathcal{G} \text{ به } K_{\frac{n}{d}} \text{ وجود دارد}\}$$

دقت شود که نقش گراف کامل دوری در معرفی عددرنگی‌دوری دقیقا همانند نقش گراف کامل

[3] Berge
[4] Bolobas
[5] Tutte
[6] Homomorphism
[7] reconstruction
[8] products
[9] circular chromatic number
[10] fractional chromatic number
[11] statistical physics
[12] Sabidussi
[13] Graph derivatives

در معرفی عددرنگی است. حال به بیان یک مثال برای کاربرد روزمره همریختی می‌پردازیم.
**مثال. زمان‌بندی.** چگونه می‌توان در کمترین زمان ممکن برنامه امتحان‌های یک دانشکده را برنامه‌ریزی کرد، به‌طوری‌که مجاز به قرار دادن امتحان دو درسی که یک دانشجو در هر دوی آن‌ها ثبت نام کرده است در یک ساعت نباشیم؟ برای این‌کار یک گراف $G$ درنظر بگیرید که مجموعه رئوس آن درس‌ها باشند و دو راس با یک یال به‌هم متصلند هرگاه دانشجویی در هر دو درس متناظر با آن‌ها ثبت‌نام کرده باشد. یک زمان‌بندی با $n$ بازه زمانی وجود دارد اگروتنهااگر بتوان با $n$ رنگ راس‌های گراف $G$ را رنگ کرد و یا به‌عبارت‌دیگر یک همریختی از $G$ به گراف کامل $K_n$ وجود داشته باشد.

مساله وجود و یا عدم‌وجود همریختی بین دو گراف بطور گسترده موردمطالعه قرار گرفته است و دارای اهمیت می‌باشد. در این رساله، چندین شرط عدم‌وجود همریختی بررسی و بیان می‌شود. همچنین برای بعضی از انواع رنگ‌آمیزی‌ها قضایایی اثبات شده است که بیانگر یک شرط عدم‌وجود همریختی نیز می‌باشند. برای دو گراف داده شده $G$ و $H$، ثابت شده است که در حالت کلی بررسی وجود همریختی بین این دو گراف کار ساده‌ای نیست [۲۹، ۲۸، ۱۱]. بنابراین یافتن شرایط لازم برای وجود همریختی بین دو گراف موردتوجه قرار گرفته است. در این زمینه دانشگر و حاجی ابوالحسن[۱۴][۱۲] شرایط لازم برای وجود همریختی بین دو گراف را با استفاده از ارتباط میان مساله همریختی و فضای ویژه ماتریس‌های متناظر با یک گراف، موردبررسی قرار داده‌اند. حاجی ابوالحسن در [۲۳] با استفاده از توان گراف[۱۵] و زیرتقسیم[۱۶] گراف و همچنین تعریف هلیکال گراف[۱۷] شرایطی را برای وجود همریختی در گراف مورد بررسی قرار داد. او همچنین در این مقاله مساله وجود همریختی در دورهای با طول فرد را بررسی نمود. همچنین نشان داد مساله وجود همریختی از گراف $G$ به دور فرد $C_{2k-1}$ معادل سه رنگ پذیر بودن گراف $G^{\frac{2k-1}{3}}$ است. نتیجه معروفی نیز وجود دارد که زمینه‌ساز ارتباط بین وجود همریختی و توان در گراف‌هاست. این نتیجه یک شرط لازم برای وجود همریختی برحسب توان‌های گراف را بیان می‌کند. اگر $G$ و $H$ دو گراف باشند و یک همریختی از $G$ به $H$ وجود داشته باشد، آنگاه برای هر عدد صحیح و مثبت $k$ از $G^k$ به $H^k$ نیز همریختی وجود دارد. حاجی ابوالحسن و طاهرخانی در [۲۶]، با بیان تعریف توان کسری و توان دوگان، نشان دادند که $G$ و $G^{\frac{2r+1}{2r+1}}$ همریخت هستند و نیز ثابت کردند برای هر گراف غیردوبخشی $G$ و اعداد گویای مثبت $\frac{2r+1}{2s+1} < \frac{2p+1}{2q+1} < og(G)$ داریم $G^{\frac{2r+1}{2s+1}} < G^{\frac{2p+1}{2q+1}}$ (یعنی همریختی از $G^{\frac{2r+1}{2s+1}}$ به $G^{\frac{2p+1}{2q+1}}$ وجود دارد اما همریختی از $G^{\frac{2p+1}{2q+1}}$ به $G^{\frac{2r+1}{2s+1}}$ وجود ندارد). اصلاحچی و رفیعی[۱۸][۱۵] مساله همریختی را در ابرگراف بررسی نموده و در این زمینه ارتباط میان عددرنگی، عددرنگی‌دوری و عددرنگی‌کسری

[14] Daneshgar and Hajiabolhassan
[15] Graph power
[16] Subdivision
[17] helical graph
[18] Eslahchi and Rafiey

ابرگراف‌ها را موردمطالعه قرار دادند. علیشاهی و حاجی ابوالحسن[19][۷] مفهوم عددرنگی‌آزاد را معرفی نموده و با استفاده از این تعریف شرایطی را برای عدم‌وجود همریختی بیان نمودند. در این راه شرایطی کافی برای برابری عددرنگی و عددرنگی‌دوری یک گراف موردمطالعه قرار گرفته است.

مساله برابری عددرنگی و عددرنگی‌دوری گراف دلخواه $G$ توسط وینس[20] مطرح شد[۴۶] و در [۵۵، ۵۴، ۵۳، ۵۲، ۵۱، ۵۰، ۴۷، ۴۶، ۴۳، ۲۷، ۲۱، ۲۰، ۱] موردبررسی قرار گرفت. گیچارد[21][۲۱] نشان داد که مساله تعیین برابری عددرنگی و عددرنگی‌دوری $NP$ـ سخت[22] است. پس می‌توان گفت که رده‌بندی کردن گراف‌هایی که عددرنگی و عددرنگی‌دوری یکسان دارند به‌طوری‌که این رده‌بندی به سادگی قابل بررسی باشد بسیار دشوار است. بنابراین به‌نظر می‌رسد یافتن شرط لازم و کافی موثر برای این مساله آسان نیست، لذا بررسی وجود شرایط لازم یا کافی برای این مساله ارزشمند است.

حاجی ابوالحسن و طاهرخانی در [۲۶] پارامتر $\theta(G)$ را تعریف کرده سپس با کمک این پارامتر یک شرط لازم برای وجود همریختی بین دو گراف بدست آوردند. سپس با محاسبه یک کران پایین برای این پارامتر، برای گراف‌های کامل دوری، یک شرط کافی برای تساوی عددرنگی و عددرنگی‌دوری گراف‌ها ارائه دادند. به‌علاوه، برای گراف غیردوبخشی $G$ ثابت کردند، که $\chi(G) \neq \chi_c(G)$، اگروتنهااگر عدد گویایی مانند $\frac{۲r+۱}{۲s+۱} < \frac{\chi(G)}{۳(\chi(G)-۲)}$ وجود داشته باشد که $\chi(G^{\frac{۲r+۱}{۲s+۱}}) = ۳$. جانسون، هالروید و استاهل[23][۳۲] عددرنگی کنسرگراف‌ها را بررسی کرده و اثبات کردند اگر $n \leq ۲k + ۲$ یا $n = ۲$، آنگاه $\chi_c(\mathrm{KG}(n,k)) = \chi(\mathrm{KG}(n,k))$. همچنین آن‌ها حدس زدند که اگر $n \geq ۲k + ۱$، آنگاه $\chi_c(\mathrm{KG}(n,k)) = \chi(\mathrm{KG}(n,k))$. حاجی ابوالحسن و ژو[24][۲۷] حدس بیان شده را برای $n$ به اندازه کافی بزرگ اثبات نمودند. بعدها، نشان داده شد که اگر $n$ یک عدد صحیح مثبت و زوج باشد، حدس فوق درست می‌باشد[۴۲، ۳۵]. همچنین آن‌ها ثابت کردند اگر $n$ نسبت به $k$ به اندازه کافی بزرگ باشد آنگاه $\chi_c(\mathrm{SG}(n,k)) = \chi(\mathrm{SG}(n,k))$. مونیر[25][۳۵] و به‌طورمستقل، سیمونی و تاردوش[26][۴۲] اثبات کردند که اگر $n$ به اندازه کافی بزرگ باشد آنگاه $\chi_c(\mathrm{KG}(n,k)) = \chi(\mathrm{KG}(n,k))$. یکی دیگر از راه‌های بررسی وجود همریختی در گراف‌ها استفاده از پارامترها می‌باشد. یکی از این پارامترها مجموع‌رنگی است. مفهوم مجموع‌رنگی ، برای اولین بار توسط کوبیکا[27] در سال ۱۹۸۷

[19] Alishahi and Hajiabolhassan
[20] Vince
[21] Guichard
[22] NP-hard
[23] Johnson, Holroyd and Stahl
[24] Hajiabolhassan and Zhu
[25] Meunier
[26] Simonyi and Tardos
[27] Kubicka

میلادی معرفی شد. نتایج مهم در سال ۱۹۸۹ در مقاله‌ای مشترک توسط کوبیکا و شوئنک[28]، تحت عنوان مقدمه‌ای بر مجموع‌رنگی[۳۴] آورده شده است. در این مقاله ثابت شده است که مساله محاسبه مجموع‌رنگی برای یک گراف دلخواه، $NP$ـ سخت است. مجموع‌رنگی در [۴۵، ۱۷، ۲۴، ۲۵، ۳۱، ۳۳] نیز موردبررسی قرار گرفته است. در [۴۵]، تامسون[29] کران‌هایی را برای مجموع‌رنگی در گراف‌ها بدست آورد. علیشاهی و طاهرخانی [۵] با استفاده از عددرنگی کسری، کرانی برای مجموع‌رنگی‌راسی بدست آوردند. همچنین آن‌ها با استفاده از مجموع‌رنگی‌راسی، شرایطی لازم برای وجود همریختی بین دو گراف را ارائه نمودند. رحیمی و عرفانی [۳۸]، مجموع‌رنگی مجموع‌ـ یالی[30] $\sum S(G)$ و مجموع‌رنگی تفاضل‌ـ یالی[31] $\sum D(G)$ را تعریف کرده و با استفاده از عددرنگی کسری کران بالا و پایین برای این پارامترها بدست آوردند. همچنین شرایطی لازم برای وجود همریختی بین دو گراف را ارائه نمودند. آن‌ها در این مقاله از جمله اثبات نمودند که اگر $\frac{\sum D(H)}{|E(H)|} > \frac{\sum D(G)}{|E(G)|}$ آنگاه همریختی از $G$ به $H$ وجود ندارد. همچنین اگر $\frac{\sum S(H)}{|E(H)|} > \frac{\sum S(G)}{|E(G)|}$ آنگاه هیچ همریختی از $G$ به $H$ وجود ندارد.

پارامتر دیگر چگالی[32] گراف می‌باشد. دانشگر و حاجی ابوالحسن [۱۴] چگالی گراف را تعریف نموده و با استفاده از آن شرایطی را برای وجود همریختی در گراف بررسی نمودند. همچنین با استفاده از این پارامتر، کرانی برای عددرنگی کسری گراف بدست آوردند.

در فصل اول این رساله، برخی تعاریف لازم که در ادامه مورداستفاده قرار می‌گیرد، آورده شده است.

در فصل دوم، مفهوم عددرنگی‌آزاد ابرگراف‌ها را تعریف نموده و براساس ارتباط بین عددرنگی و عددرنگی‌آزاد، شرایطی کافی برای برابری عددرنگی و عددرنگی‌دوری در برخی ابرگراف‌ها موردبررسی قرار گرفته می‌شود. در انتهای این فصل نیز عددرنگی برخی کنسرگراف‌ها موردبررسی قرار می‌گیرد.

در فصل سوم برخی پارامترها که از قبل تعریف شده به ابرگراف‌ها تعمیم داده و برخی پارامترهای جدید را نیز تعریف نموده و با استفاده از این پارامترها، شرایط لازم برای وجود همریختی در ابرگراف‌ها بررسی می‌شود.

---
[28] Schwenk
[29] Thomassen
[30] edge-sum sum coloring
[31] edge-difference sum coloring
[32] density

# فصل ۱

# تعاریف مقدماتی

در این فصل، تعاریفی که در سایر فصول موردنیاز خواهد بود، آورده‌شده‌است. فرض کنید $n$ عدد طبیعی باشد. ازاین‌به‌بعد، مجموعه $\{1,2,\ldots,n\}$ را با علامت $[n]$ نمایش می‌دهیم.

**تعاریف**

**تعریف ۱.۰.۱.** [۱۵] **ابرگراف**[1] $\mathcal{H}$ شامل دوتایی $(V,E)$ است که $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ مجموعه متناهی از نقاط به‌نام رئوس و $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های $V$ به‌نام یال‌های $\mathcal{H}$ را تشکیل می‌دهند. به‌عنوان مثال شکل (۱.۱) دارای ۸ راس و ۵ یال می‌باشد.

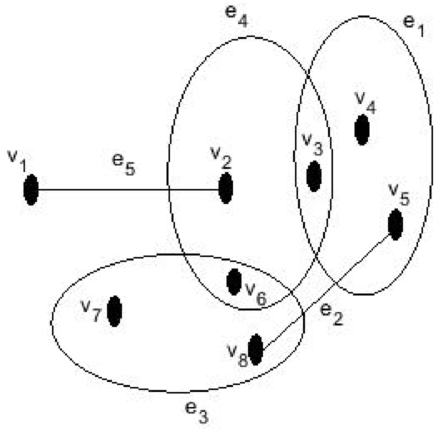
**تعریف ۲.۰.۱.** [۱۵] ابرگراف $\mathcal{H}$، $r$**ـ یکنواخت**[2] نامیده می‌شود هرگاه تمام یال‌های آن دارای اندازه $r$ باشند، یعنی روی هر یال $r$ راس قرار گرفته باشد. ابرگراف ۲ـ یکنواخت، **گراف**[3] نامیده می‌شود.

**تعریف ۳.۰.۱.** [۶] فرض کنید $\mathcal{H}=(V(\mathcal{H}),E(\mathcal{H}))$ یک ابرگراف باشد. $\mathcal{H}'$ را یک **زیرابرگراف**[4] $\mathcal{H}$ می‌نامیم هرگاه $V(\mathcal{H}')\subseteq V(\mathcal{H})$ و $E(\mathcal{H}')\subseteq E(\mathcal{H})$.

**تعریف ۴.۰.۱.** [۶] فرض کنید $\mathcal{H}$ یک ابرگراف باشد. هر زیرابرگراف از $\mathcal{H}$ شامل زیرمجموعه‌ای

[1] hypergraph
[2] r-uniform
[3] graph
[4] subhypergraph

شکل ۱.۱: نمایش یک ابرگراف




از رئوس $\mathcal{H}$ و تمام یال‌های متناظر با این مجموعه رئوس در ابرگراف $\mathcal{H}$ یک **زیرابرگراف‌القایی**[5] نامیده می‌شود. زیرابرگراف القا شده توسط رئوس $S \subseteq V(\mathcal{H})$، با نماد $\mathcal{H}[S]$ نشان داده می‌شود.

**تعریف ۱.۰.۵.** [۱۰] دو راس ابرگراف $\mathcal{H}$ **مجاورند**[6] هرگاه یالی از ابرگراف شامل هردوی این رئوس باشد. این رئوس با یکدیگر **همسایه** [7] می‌باشند.

**تعریف ۱.۰.۶.** [۱۰] **همسایگی** [8] یک راس را با $N(v)$ نشان می‌دهیم و شامل تمام همسایه‌های راس $v$ است. همسایگی بسته یک راس را با $N[v]$ نشان می‌دهیم که برابر است با $N(v) \cup \{v\}$.

به‌عنوان‌مثال، در شکل (۱.۱) همسایگی راس $v_۳$ برابر است با $N(v_۳) = \{v_۲, v_۶, v_۴, v_۵\}$.

**تعریف ۱.۰.۷.** [۱۰] در ابرگراف $\mathcal{H}$، **مسیر**[9] میان دو راس $v_۱$ و $v_{k+۱}$ دنباله

$$v_۱, e_۱, v_۲, \ldots, v_k, e_k, v_{k+۱}$$

---

[5] induced subhypergraph
[6] adjacent
[7] neighbor
[8] neighborhood
[9] path

است به‌طوری‌که

۱. $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$، رئوس متمایز از $\mathcal{H}$ باشند.
۲. $e_1, e_2, \ldots, e_k$، یال‌های متمایز از $\mathcal{H}$ باشند.
۳. $v_j, v_{j+1} \in e_j$، برای $j = 1, \ldots, k$.

دراین‌صورت این دنباله، مسیر با طول $k$ است.

به‌عنوان‌مثال، در شکل (۱.۱)، $v_2, e_4, v_3, e_1, v_5, e_2, v_8$، مسیری بطول ۳ بین دو راس $v_2$ و $v_8$ است.

**تعریف ۸.۰.۱.** [۱۰] در ابرگراف $\mathcal{H}$، **دور**[10] دنباله رئوس $v_1, e_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_{k+1}$ است به‌طوری‌که

۱. $v_1, v_2, \ldots, v_k$، رئوس متمایز از $\mathcal{H}$ باشند.
۲. $e_1, e_2, \ldots, e_k$، یال‌های متمایز از $\mathcal{H}$ باشند.
۳. $v_j, v_{j+1} \in e_j$، برای $j = 1, \ldots, k$.
۴. $v_1 = v_{k+1}$.

دراین‌صورت این دنباله از رئوس، دور با طول $k$ است.

به‌عنوان‌مثال، در شکل (۱.۱)، $v_2, e_4, v_3, e_1, v_5, e_2, v_8, e_3, v_6, e_4, v_2$، دوری به‌طول ۵ است.

**تعریف ۹.۰.۱.** [۱۵] برای دو ابرگراف $\mathcal{G}$ و $\mathcal{H}$، **همریختی**[11] از $\mathcal{G}$ به $\mathcal{H}$ نگاشتی است مانند $f : V(\mathcal{G}) \longrightarrow V(\mathcal{H})$ که برای هر یال $e \in E(\mathcal{G})$، یالی مانند $e' \in E(\mathcal{H})$ موجود باشد به‌قسمی‌که $e' \subseteq f(e)$ و می‌نویسیم $\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ (به‌ترتیب $\mathcal{G} \nrightarrow \mathcal{H}$)، اگر همریختی (به‌ترتیب عدم همریختی[12]) از $\mathcal{G}$ به $\mathcal{H}$ موجود باشد. اگر همریختی دوسویی باشد به آن **یکریختی**[13] گویند. یکریختی از ابرگراف $\mathcal{G}$ به خودش را **خودریختی**[14] گویند. مجموعه همه خودریختی‌های ابرگراف $\mathcal{G}$ را با $Aut(\mathcal{G})$ نشان می‌دهند.

**تعریف ۱۰.۰.۱.** [۶] **رنگ‌آمیزی‌مجاز**[15] یک ابرگراف شامل تخصیص رنگ‌ها (اعداد طبیعی) به رئوس ابرگراف است به‌قسمی‌که هر یال حداقل دو رنگ متفاوت دریافت نماید.

**تعریف ۱۱.۰.۱.** [۶] **$t$ـرنگ‌آمیزی**[16] یک ابرگراف، رنگ‌آمیزی است که در آن تعداد رنگ‌های مورداستفاده حداکثر $t$ رنگ باشد. **عددرنگی**[17] ابرگراف $\mathcal{H}$، که با $\chi(\mathcal{H})$ نشان داده می‌شود،

[10] cycle
[11] homomorphism
[12] no-homomorphism
[13] isomorphism
[14] automorphism
[15] coloring proper
[16] t-coloring
[17] chromatic number

کوچکترین عدد $t$ است به‌قسمی‌که ابرگراف $\mathcal{H}$ دارای یک $t$ـ رنگ‌آمیزی باشد. یا بطور معادل، عددرنگی ابرگراف $\mathcal{H}$ برابراست‌با

$$\chi(\mathcal{H}) = \min\{n \mid \mathcal{H} \longrightarrow K_n\}$$

**تعریف ۱.۰.۱۲.** [۱۵] فرض کنید $n \geq 2d$. **گراف‌کامل‌دوری** [18] $\mathrm{K}_{\frac{n}{d}}$، دارای مجموعه رئوس $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ می‌باشد و دو راس $i$ و $j$ با هم مجاورند هرگاه $d \leq |i-j| \leq n-d$.

**تعریف ۱.۰.۱۳.** [۱۵] **عددرنگی‌دوری** [19] ابرگراف $\mathcal{H}$ که با نماد $\chi_c(\mathcal{H})$ نمایش داده می‌شود، بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_c(\mathcal{H}) \overset{def}{=} \inf\left\{\frac{n}{d} | \mathcal{H} \longrightarrow K_{\frac{n}{d}}\right\}.$$

در [۱۵] ثابت شده است که اینفیمم را می‌توان با مینیمم جایگزین نمود. همچنین برای هر ابرگراف $\mathcal{H}$ داریم

$$\chi(\mathcal{H}) - 1 < \chi_c(\mathcal{H}) \leq \chi(\mathcal{H}).$$

**تعریف ۱.۰.۱۴.** [۱۵] زیرمجموعه $S \subseteq V(\mathcal{H})$ از ابرگراف $\mathcal{H}$ را **مستقل** [20] نامیم هرگاه شامل هیچ یالی نباشد. اندازه بزرگترین مجموعه مستقل ابرگراف $\mathcal{H}$ ( مجموعه مستقل با بیشترین تعداد رئوس ) را **عدد استقلال** ابرگراف گویند و با $\alpha(\mathcal{H})$ نشان می‌دهند.

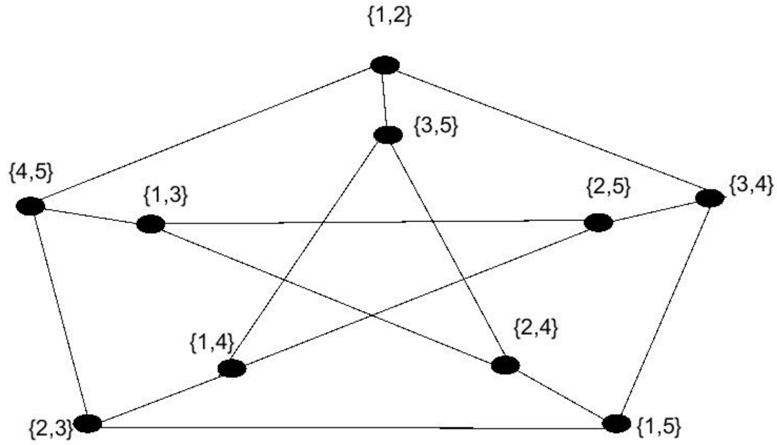
**تعریف ۱.۰.۱۵.** [۸] **ابرکنسرگراف** [21] $\mathrm{KG}^r(n,k)$ به‌صورت‌زیر تعریف شده است. فرض کنید، $n$، $k$ و $r$ اعداد صحیح مثبت باشند به‌قسمی‌که $n \geq rk$. هر زیرمجموعه $k$ عضوی از $[n]$ مجموعه رئوس ابرکنسرگراف را تشکیل داده و هر $r$ تایی از رئوس تشکیل یک یال را می‌دهند اگر اشتراک هر دوتایی از آن‌ها تهی باشد. به‌عبارت‌دیگر، $e = \{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ یک یال از ابرکنسر گراف $\mathrm{KG}^r(n,k)$ است هرگاه برای‌هر $1 \leq i,j \leq r$ داشته باشیم $A_i \cap A_j = \emptyset$.

همچنین $\mathrm{KG}^r(n,1)$ همان ابرگراف‌کامل $K_n^r$ است. اگر $r = 2$ ، آنگاه $K_n^2$ را با $K_n$ نشان می‌دهیم که همان گراف‌کامل $n$ راسی است. گراف پترسن $\mathrm{KG}^2(5,2)$ نمونه‌ای از ابرکنسرگراف است(شکل (۱.۲) را ملاحظه فرمایید).

**تعریف ۱.۰.۱۶.** [۱۵] ابر گراف $\mathcal{G}$ را **انتقال پذیر یالی(انتقال‌پذیرراسی )** [22] گویند هرگاه گروه خودریختی‌ها بطور انتقالی روی یال‌ها (راس‌ها)عمل کنند. به‌عبارت‌دیگر، برای هر دو یال $e_1, e_2 \in E(\mathcal{G})$ (برای هر دو راس $v_1, v_2 \in V(\mathcal{G})$) خودریختی $g$ وجود داشته باشد به‌قسمی‌که $g(e_1) = e_2$ ($g(v_1) = v_2$). گراف کامل $K_n$ و کنسرگراف $KG(m,n)$، نمونه‌هایی از گراف انتقال‌پذیرراسی و انتقال‌پذیریالی می‌باشند.

[18] circular complete graph
[19] circular chromatic number
[20] independent
[21] Kneser hypergraph
[22] Edge-Transitive(Vertex-Transitive)

شکل ۲.۱: گراف پترسن




**تعریف ۱.۰.۱۷. خوشه**[۲۳] در ابرگراف $r$ـیکنواخت $\mathcal{H}$، زیرمجموعه‌ای از رئوس است که هر $r$ تایی از رئوس در این زیرمجموعه تشکیل یال در $\mathcal{H}$ می‌دهند. اندازه بزرگترین خوشه، **عدد خوشه‌ای**[۲۴] نامیده می‌شود و با $\omega(\mathcal{H})$ نمایش داده می‌شود. درواقع $\omega(\mathcal{H})$ بزرگترین عدد $n$ است که در آن همریختی $K_n^r \longrightarrow \mathcal{H}$ وجود داشته باشد.

**تعریف ۱.۰.۱۸. عدد رنگی کسری**[۲۵] ابرگراف $\mathcal{H}$، با $\chi_f(\mathcal{H})$ نشان داده می‌شود و به‌صورت‌زیر تعریف می‌شود.

$$\chi_f(\mathcal{H}) = \inf \left\{ \frac{m}{n} \mid \mathcal{H} \longrightarrow \mathrm{KG}(m,n) \right\}.$$

مانند آنچه در گراف‌ها بیان شد، چون اینفیموم در مجموعه قرار دارد، می‌توان اینفیمم را با مینیمم جایگزین نمود. همچنین ازآنجاکه $\mathrm{KG}(m,۱) = K_m$، برای هر ابرگراف $\mathcal{H}$ داریم $\chi_f(\mathcal{H}) \leq \chi(\mathcal{H})$.

**تعریف ۱.۰.۱۹.** ابرگراف را **دوبخشی**[۲۶] گویند هرگاه با دو رنگ قابل رنگ‌آمیزی باشد.

---

[23] clique

[24] clique number

[25] fractional chromatic number

[26] Bipartite

# فصل ۲

# رنگ‌آمیزی‌آزاد ابرگراف‌ها و قضایای عدم‌وجودهمریختی

## ۱.۲ مقدمه

در این فصل مفهوم عددرنگی‌آزاد ابرگراف‌ها بیان می‌شود. عددرنگی‌آزاد گراف‌ها توسط علیشاهی و حاجی ابوالحسن در [۷] تعریف شده است. آن‌ها رنگ‌آمیزی‌آزاد گراف‌ها را به‌عنوان تعمیمی از رنگ‌آمیزی‌معمولی معرفی و ارتباط بین رنگ‌آمیزی‌آزاد و رنگ‌آمیزی‌دوری را موردمطالعه قرار دادند. سپس براساس عددرنگی‌آزاد شرایطی کافی برای تساوی عددرنگی و عددرنگی‌دوری را بیان نمودند. در این رساله، تعریف به ابرگراف‌ها تعمیم داده می‌شود و نشان داده می‌شود که اگر عددرنگی‌آزاد ابرگرافی به اندازه کافی بزرگ باشد، آنگاه آن ابرگراف عددرنگی وعددرنگی‌دوری یکسان دارد.

عددرنگی‌دوری کنسرگراف‌ها توسط جانسون[1]، هالیروید[2] و استاهل[3] در [۳۲] موردمطالعه قرار گرفت. در [۳۲] نشان داده شد که اگر $n \leq 2k+2$ و یا $k=2$، آنگاه $\chi(\mathrm{KG}(n,k)) = \chi_c(\mathrm{KG}(n,k))$. آن‌ها همچنین حدس زیر را مطرح نمودند.

[1] Johnson
[2] Holroyd
[3] Stahl

**حدس ۲.۱.۱.** اگر $n \geq 2k+1$، آنگاه $\chi(\mathrm{KG}(n,k)) = \chi_c(\mathrm{KG}(n,k))$.

این حدس در مقاله‌های زیادی از جمله [۱۳]، [۲۷]، [۳۵] و [۴۲] موردمطالعه قرار گرفت. حاجی ابوالحسن و ژو در [۱۳] درستی حدس فوق را برای $n$های به اندازه کافی بزرگ اثبات نمودند. این حدس در [۴۲، ۳۵] برای $n$های زوج به اثبات رسید.

**تعریف ۲.۱.۲.** یک مجموعه مستقل در ابرگراف $\mathcal{H}$، **آزاد**[۴] نامیده می‌شود هرگاه بتوان آن را به حداقل دو مجموعه مستقل ماکسیمال متمایز گسترش داد. بطورمعادل، مجموعه مستقل $I$ در ابرگراف $\mathcal{H}$ یک **مجموعه‌مستقل‌آزاد** [۵] است اگروتنهااگر یالی مانند $e \in E(\mathcal{H})$ موجود باشد به‌طوری‌که بتوان آن را به دو مجموعه $U$ و $V$ افراز نمود یعنی $e = U \cup V$، به‌قسمی‌که هردو مجموعه $I \cup U$ و $I \cup V$ مجموعه‌هایی مستقل در $\mathcal{H}$ باشند. دراین‌صورت گوییم یال $e$ مجموعه مستقل $I$ را **حمایت**[۶] می‌کند. مجموعه همه یال‌های حامی $I$ را با $Supp(I)$ نمایش می‌دهند.

**تعریف ۳.۱.۲.** اندازه بزرگترین مجموعه‌مستقل‌آزاد، **عدداستقلال‌آزاد** [۷] $\mathcal{H}$ نامیده می‌شود و با $\bar{\alpha}(\mathcal{H})$ نشان داده می‌شود.

ازآنجاکه هر مجموعه‌مستقل‌آزاد خود یک مجموعه‌مستقل است داریم $\bar{\alpha}(\mathcal{H}) \leq \alpha(\mathcal{H})$.

**تعریف ۴.۱.۲.** هرگاه هر راس ابرگراف $\mathcal{H}$ به یک مجموعه‌مستقل‌آزاد تعلق داشته باشد، آنگاه $\mathcal{H}$ را یک **ابرگراف آزاد**[۸] گوییم.

به‌عبارت‌دیگر، ابرگراف $\mathcal{H}$ آزاد است اگروتنهااگر بتوان $V(\mathcal{H})$ را به مجموعه‌های مستقل آزاد افراز نمود.

**تعریف ۵.۱.۲.** **عددرنگی‌آزاد** [۹] ابرگراف $\mathcal{H}$، برابر است با مینیمم اندازه افراز $V(\mathcal{H})$ به مجموعه‌های مستقل آزاد که با نماد $\Phi(\mathcal{H})$ نمایش داده می‌شود. اگر $\mathcal{H}$ آزاد نباشد، آنگاه تعریف می‌کنیم $\Phi(\mathcal{H}) = \infty$.

لم زیر تعمیمی از لم ۲ در [۷] به ابرگراف است که شرط کافی برای وجود همریختی بین دو ابرگراف را فراهم می‌آورد.

**لم ۱.۱.۲.** فرض کنید $\mathcal{H}$ یک ابرگراف باشد و $\chi_c(\mathcal{H}) = \frac{n}{d}$، که $(n,d) = 1$. اگر $\chi_c(\mathcal{H}) \neq \chi(\mathcal{H})$، آنگاه $\Phi(\mathcal{H}) \leq \lceil \chi_c(\mathcal{H})(1 + \frac{1}{d-1}) \rceil \leq 2\chi(\mathcal{H}) - 1$.

---

[4] free
[5] free independent set
[6] support
[7] free independent number
[8] free hypergraph
[9] free coloring number

**اثبات.** چون عددرنگی‌دوری ابرگراف برابر $\frac{n}{d}$ است پس همریختی $g$ از ابرگراف $\mathcal{H}$ به $\mathrm{K}_{\frac{n}{d}}$ وجود دارد. در [۱۵] ثابت شده است که هر یال $e=\{i,i+d\}$ در $\mathrm{K}_{\frac{n}{d}}$ توسط یالی مانند $f$ از $\mathcal{H}$ پوشش داده می‌شود. بنابراین، تصویر معکوس هر $d-۱$ راس متوالی $S_i=g^{-۱}(\{i+۱,\dots,i+d-۱\})$ از $\mathrm{K}_{\frac{n}{d}}$ مجموعه مستقل آزاد از $\mathcal{H}$ می‌باشد. برای اثبات، فرض کنید $U=f\cap g^{-۱}(\{i\})$ و $V=f\cap g^{-۱}(\{i+d\})$. هر دو مجموعه $U$ و $V$ مجموعه‌های غیرتهی بوده و داریم $U\cup V=f$. ازطرف‌دیگر، مجموعه‌های $S_i\cup U\subseteq g^{-۱}(\{i,\dots,i+d-۱\})$ و $S_i\cup V\subseteq g^{-۱}(\{i+۱,\dots,i+d\})$ مجموعه‌هایی مستقل در $\mathcal{H}$ می‌باشند. بنابراین از آنجا که افرازی از یال $f$ شامل $U$ و $V$ وجود دارد به‌قسمی‌که $S_i\cup U$ و $S_i\cup V$ مجموعه‌هایی مستقل می‌باشند، $S_i$ مجموعه مستقل آزاد در $\mathcal{H}$ است که توسط یال $f$ از $\mathcal{H}$ حمایت می‌شود. درنتیجه عددرنگی‌آزاد $\mathcal{H}$ حداکثر $\lceil\frac{n}{d-۱}\rceil$ است. باتوجه‌به‌اینکه $\chi_c(\mathcal{H})\neq\chi(\mathcal{H})$ است داریم $d\geq ۲$. بنابراین

$$\lceil\frac{n}{d-۱}\rceil=\lceil\frac{n}{d}\frac{d}{d-۱}\rceil=\lceil\chi_c(\mathcal{H})(۱+\frac{۱}{d-۱})\rceil\leq ۲\chi(\mathcal{H})-۱. \qquad \square$$

لم قبل شرط کافی تساوی عددرنگی و عددرنگی‌دوری ابرگراف‌ها را براساس رابطه بین عددرنگی و عددرنگی‌آزاد آن‌ها بیان می‌نماید. به علاوه، با استفاده از عددرنگی‌آزاد شرطی را برای عدم‌وجودهمریختی در ابرگراف بیان می‌کند. یعنی اگر $\Phi(\mathcal{H})\geq ۲\chi(\mathcal{H})$، آنگاه $\chi_c(\mathcal{H})=\chi(\mathcal{H})$. درنتیجه همریختی از ابرگراف $\mathcal{H}$ به $\mathrm{K}_{\frac{n}{d}}$ برای $d\geq ۲$ وجود ندارد.

با توجه به لم۱.۱.۲، یافتن کران بالا و پایین برای عددرنگی‌آزاد ابرگراف‌ها دارای اهمیت می‌باشد. ازآنجاکه رنگ‌آمیزی‌آزاد ابرگراف درواقع افراز به مجموعه‌های مستقل آزاد است لذا بوضوح داریم، $\chi(\mathcal{H})\leq\Phi(\mathcal{H})$. لم زیر از تعریف عدداستقلال‌آزاد بطور مستقیم نتیجه می‌شود.

**لم ۲.۱.۲.** فرض کنید $\mathcal{H}$ ابرگراف آزاد $n$ راسی باشد و $\bar{\alpha}(\mathcal{H})$ اندازه بزرگترین مجموعه مستقل آزاد در $\mathcal{H}$ باشد. دراین صورت داریم، $\Phi(\mathcal{H})\geq\frac{n}{\bar{\alpha}(\mathcal{H})}$.

**اثبات.** فرض کنید $(V_۱,\dots,V_{\Phi(\mathcal{H})})$ یک رنگ‌آمیزی‌آزاد $\mathcal{H}$ باشد به‌قسمی‌که $\alpha_i=|V_i|$. از طرفی برای هر $i$، داریم $\alpha_i\leq\bar{\alpha}(\mathcal{H})$ بنابراین داریم

$$\sum_{i=۱}^{\Phi(\mathcal{H})}\alpha_i=n,$$

$$\sum_{i=۱}^{\Phi(\mathcal{H})}\bar{\alpha}(\mathcal{H})\geq n,$$

$$\Phi(\mathcal{H})\geq\frac{n}{\bar{\alpha}(\mathcal{H})}.\square$$

### ۱.۱.۲ کاربردها

در این بخش ابرکنسرگراف‌تعمیم‌یافته را تعریف نموده و با استفاده از لم ۱.۱.۲، شرایط برابری عددرنگی و عددرنگی‌دوری آن مورد بررسی قرار می‌دهیم.

**تعریف ۶.۱.۲.** فرض کنید $n$، $k$، $r$ و $s$ اعداد صحیح مثبت باشند به‌قسمی‌که $n \geq rk > 0$. **ابرکنسرگراف‌تعمیم‌یافته**[10] $\mathrm{GKG}^r(n,k,s)$ ابرگرافی $r$ـ یکنواخت است که مجموعه رئوس آن تمام زیرمجموعه‌های $k$ عضوی از $[n]$ می‌باشد و مجموعه یال‌های آن شامل $r$تایی از رئوس است که اشتراک کلی آن‌ها حداکثر $s$ است. به‌عبارت‌دیگر، $e = \{A_1, A_2, \dots A_r\}$ یالی از ابرکنسرگراف است اگروتنهااگر $|\bigcap_{i=1}^{r} A_i| \leq s$ . اگر $s = 0$، آنگاه از $\mathrm{GKG}^r(n,k)$ به‌جای $\mathrm{GKG}^r(n,k,0)$ استفاده می‌کنیم. توجه داشته باشید که اگر $r = 2$، آنگاه داریم $\mathrm{GKG}^2(n,k) = \mathrm{KG}^2(n,k)$.

عددرنگی ابرکنسرگراف $\mathrm{KG}^r(n,k)$ در [۸] مورد مطالعه قرار گرفته و ثابت شده است که $\chi(\mathrm{KG}^r(n,k)) = \lceil \frac{n-r(k-1)}{r-1} \rceil$. اما عددرنگی ابرکنسرگراف $\mathrm{GKG}^r(n,k,s)$، یک مساله باز است. در لم زیر یک کران بالا برای عددرنگی $\mathrm{GKG}^r(n,k)$ ارائه داده می‌شود.

**لم ۳.۱.۲.** فرض کنید $n$، $r$ و $k$ اعداد صحیح مثبت باشند به‌قسمی‌که $n \geq rk$. دراین‌صورت

$$\chi(\mathrm{GKG}^r(n,k)) \leq n - k + 1.$$

**اثبات.** رنگ‌آمیزی زیر را درنظر می‌گیریم:

$$C : V(\mathrm{GKG}^r(n,k)) \longrightarrow \{1, 2, \dots, n-k+1\}$$ با ضابطه

$$A \longrightarrow \min\{A\}.$$

واضح است که $C$ یک رنگ‌آمیزی‌مجاز برای $\mathrm{GKG}^r(n,k)$ است. برای اثبات، فرض کنید $e = \{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ یالی از $\mathrm{GKG}^r(n,k)$ باشد. ازآنجاکه $\cap_{i=1}^{r} A_i = \emptyset$، پس $\{A_i\}_{i=1}^{r}$ها نمی‌توانند دارای مینیمم یکسان باشند. یعنی، $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$ وجود دارند که $c(A_i) \neq c(A_j)$. درنتیجه با توجه به رنگ‌آمیزی داده شده، یال $e$ حداقل دو رنگ متمایز دریافت می‌نماید. □

## ۲.۱.۲ تساوی عددرنگی و عددرنگی‌دوری ابرگراف‌ها

اگرچه مقدار دقیق $\chi(\mathrm{GKG}^r(n,k))$ در حالت کلی مشخص نمی‌باشد، با استفاده از عددرنگی‌آزاد نشان داده می‌شود که $\chi(\mathrm{GKG}^r(n,k)) = \chi_c(\mathrm{GKG}^r(n,k))$، اگر $n$ به اندازه کافی بزرگ باشد. توجه شود که عددرنگی $\mathrm{GKG}^r(n,k)$ مشخص نیست و تنها یک کران بالا از آن در دست است.

حاجی ابوالحسن و ژو [۲۷] نشان دادند که اگر $n \geq 2k^2(k-1)$، آنگاه $\chi(\mathrm{KG}(n,k)) = \chi_c(\mathrm{KG}(n,k))$. قضیه زیر می‌تواند به‌عنوان تعمیمی از این قضیه درنظر گرفته شود. علیشاهی و حاجی ابوالحسن [۷] ثابت کردند که اگر $n \geq 2k^2(k-1) - 2k + 3$، آنگاه $\chi(\mathrm{KG}(n,k)) = \chi_c(\mathrm{KG}(n,k))$.

[10] generalzed kneser hypergraph

**قضیه ۱.۱.۲.** فرض کنید $n$، $r$ و $k$ اعداد صحیح مثبت باشند که $n \geq rk$ و $k > 2$. اگر $n \geq k(k-1)(rk)(rk-1)$، آنگاه

$$\chi(\mathrm{GKG}^r(n,k)) = \chi_c(\mathrm{GKG}^r(n,k)).$$

**اثبات.** ابتدا نشان می‌دهیم که $\mathrm{GKG}^r(n,k)$ یک ابرگراف آزاد است. برای این‌کار ثابت می‌کنیم هر راس ابرگراف به یک مجموعه مستقل آزاد تعلق دارد.

$\mathrm{GKG}^r(n,k)$ انتقال‌پذیرراسی است. بنابراین راسی دلخواه از آن را درنظر می‌گیریم. فرض کنید $A = \{1,2,\ldots,k\} \in V(\mathrm{GKG}^r(n,k))$ راسی دلخواه از ابرگراف باشد. ادعا می‌کنیم که این راس به یک مجموعه مستقل آزاد تعلق دارد.

فرض کنید $T = \{B \subseteq [n] \mid 1,2 \in B \quad , \quad |B| = k\}$. از آنجا که تمام عضوهای $T$ دارای اشتراک می‌باشند، مجموعه $T$ شامل یال نبوده و یک مجموعه مستقل از اندازه $\binom{n-2}{k-2}$ است. همچنین $A \in T$. حال ثابت می‌کنیم مجموعه مستقل $T$ آزاد است. فرض کنید برای $i \in [r-1]$ داشته باشیم $|A_i| = k$ و $A_i \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{2,3,\ldots,k+1\}$، به‌قسمی‌که برای هر $i \in [r-1]$ داشته باشیم $1 \in A_i$، همچنین $A_r = \{2,3,\ldots,k+1\}$. ازآنجاکه $\bigcap_{i=1}^{r} A_i = \emptyset$، بنابراین $e = \{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$ یالی از ابرکنسرگراف است. ادعا می‌کنیم که این یال، مجموعه مستقل $T$ را حمایت می‌کند.

برای اثبات ادعا، افراز $e = U \cup V$ را درنظر بگیرید، که $U = \{A_r\}$ و $V = \{A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}\}$. حال از آنجا که به‌ازای‌هر $B \in T$، $B \cap U \neq \emptyset$ و $B \cap V \neq \emptyset$ بنابراین مجموعه‌های $U \cup B$ و $V \cup B$ برای هر $B \in T$ شامل یال نبوده و مستقل می‌باشند. بنابراین یال $e$ مجموعه مستقل $T$ را حمایت می‌کند و مجموعه مستقل $T$ آزاد و از اندازه $\binom{n-2}{k-2}$ است. درنتیجه هر راس $\mathrm{GKG}^r(n,k)$ به یک مجموعه مستقل آزاد تعلق دارد. پس $\mathrm{GKG}^r(n,k)$ یک ابرگراف آزاد بوده و عدد استقلال آزاد آن نیز حداقل $\binom{n-2}{k-2}$ است. واضح است که $r < \binom{n-2}{k-2}$.

حال فرض کنید $I$ یک مجموعه مستقل آزاد ماکسیمم در $\mathrm{GKG}^r(n,k)$ باشد. همچنین فرض کنید $e = \{B_1, B_2, \ldots, B_r\}$ یالی از ابرکنسرگراف باشد که مجموعه مستقل $I$ را حمایت می‌کند. یعنی افرازی از $e$ متشکل از دو بخش $U$ و $V$ وجود دارد به‌قسمی‌که مجموعه‌های $U \cup I$ و $V \cup I$ مستقل می‌باشند. اکنون فرض کنید $S = \cup_{i=1}^{r} B_i$. ادعا می‌کنیم برای هر $B \in I$ داریم $|B \cap S| \geq 2$.

برای اثبات، فرض کنید عضو $B \in I$ وجود داشته باشد به‌قسمی‌که $|B \cap S| \leq 1$. حال دو حالت زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

۱. اگر $|B \cap S| = 0$، آنگاه ازآنجاکه $B$ با هیچ یک از $B_i$ ها اشتراک ندارد، بنابراین یال $e$ به هر طریق که به دو قسمت $U$ و $V$ تقسیم شود $B$ با هیچ یک از این بخش‌ها اشتراک ندارد، درنتیجه با توجه به $|I| \geq r$ ، هریک از بخش‌های $U \cup I$ و $V \cup I$ شامل یال بوده و هیچ یک مستقل نیستند، و این با این حقیقت که یال $e$ مجموعه مستقل $I$ را حمایت می‌کند، در تناقض است.

۲. اگر $B\cap S=\{x\}$، آنگاه با توجه به اینکه $e$ یال است داریم $\cap_{i=1}^{r} B_i=\emptyset$. پس $x$ نمی‌تواند به همه $B_i$ها برای $i=1,\ldots,r$ تعلق داشته باشد. بنابراین حداقل یک $j\in[r]$ وجود دارد به‌قسمی‌که $x\notin B_j$. حال اگر یال $e$ به هر طریق به دو قسمت $U$ و $V$ تقسیم شود، $B_j$ به یکی از این قسمت‌ها تعلق خواهد داشت. بنابراین ازآنجاکه $B_j\cap B=\emptyset$ و $|I|\geq r$، حداقل یکی از مجموعه‌های $U\cup I$ یا $V\cup I$ شامل یال بوده و درنتیجه مستقل نمی‌باشد، که این نیز تناقض است.

بنابراین ادعا درست بوده و داریم

$$|I|\leq \binom{|S|}{2}\binom{n-2}{k-2}\leq \binom{rk}{2}\binom{n-2}{k-2} \tag{۱.۲}$$

از طرفی $\Phi(\mathrm{GKG}^r(n,k))\geq \frac{|V(\mathrm{GKG}^r(n,k))|}{\bar{\alpha}(\mathrm{GKG}^r(n,k))}$، با استفاده از نامساوی (۱.۲) داریم

$$\Phi(\mathrm{GKG}^r(n,k))\geq \frac{\binom{n}{k}}{\binom{rk}{2}\binom{n-2}{k-2}}. \tag{۲.۲}$$

با استفاده از لم ۳.۱.۲ داریم $\chi(\mathrm{GKG}^r(n,k))\leq n-1$. حال با استفاده از لم ۱.۱.۲، کافی است داشته باشیم

$$\frac{\Phi(\mathrm{GKG}^r(n,k))}{\chi(\mathrm{GKG}^r(n,k))}\geq 2.$$

یا بطور معادل با استفاده از نامساوی (۲.۲) کافی است داشته باشیم

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{rk}{2}\binom{n-2}{k-2}}\geq 2(n-1).$$

یا

$$\frac{2n(n-1)}{k(k-1)(rk)(rk-1)}\geq 2(n-1).$$

بنابراین، $n\geq k(k-1)(rk)(rk-1)$ . □

در قضیه زیر، قضیه ۱.۱.۲، به ابرکنسرگراف‌تعمیم‌یافته $\mathrm{GKG}^r(n,k,s)$ تعمیم داده می‌شود، بدون آنکه کرانی برای $n$ درنظر گرفته شود. ابتدا کرانی برای عددرنگی $\mathrm{GKG}^r(n,k,s)$ ارائه داده می‌شود.

**لم ۴.۱.۲.** فرض کنید $n$، $k$، $r$ و $s$ اعدادصحیح مثبت باشند به‌قسمی‌که $n\geq rk$ و $k\geq s+1$. دراین صورت

$$\chi(\mathrm{GKG}^r(n,k,s))\leq \binom{n}{s+1}\approx O(n^{s+1}).$$

**اثبات.** برای اثبات، متناظر با هر راس $A\in V(\mathrm{GKG}^r(n,k,s))$، زیرمجموعه دلخواه $B\subseteq A$ از اندازه $s+1$ را انتخاب کرده و قرار می‌دهیم $c(A)=B$. از آنجا که برای هر یال $e=\{A_1,A_2,\ldots,A_r\}$ داریم $|\bigcap_{i=1}^{r}A_i|\leq s$، بنابراین این رنگ‌آمیزی، یک رنگ‌آمیزی‌مجاز می‌باشد. به‌عبارتی $i,j\in\{1,2,\ldots,r\}$ وجود دارند به‌طوری‌که $c(A_i)\neq c(A_j)$. درنتیجه یال $e$ حداقل دو رنگ متمایز را دریافت می‌نماید. □

**قضیه ۲.۱.۲.** فرض کنید $n$، $k$، $r$ و $s$ اعدادصحیح مثبت باشند به‌قسمی‌که $n \geq rk$ و $k > s+۲$. اگر $n$ به اندازه کافی بزرگ باشد، آنگاه

$$\chi(\mathrm{GKG}^r(n,k,s)) = \chi_c(\mathrm{GKG}^r(n,k,s)).$$

**اثبات.** با اثباتی مشابه قضیه ۱.۱.۲، ابتدا نشان می‌دهیم که $\mathrm{GKG}^r(n,k,s)$ یک ابرگراف آزاد است، یعنی هر راس آن به یک مجموعه مستقل آزاد تعلق دارد. بدون‌کاستن‌ازکلیت، فرض کنید $A = \{۱,۲,\ldots,k\} \in V(\mathrm{GKG}^r(n,k,s))$ راسی از ابرگراف باشد. فرض کنید $T = \{B \subseteq [n] \mid ۱,\ldots,s+۲ \in B \quad , \quad |B| = k\}$. ازآنجاکه اشتراک رئوس در $T$ از $s$ بیشتر است، $T$ نمی‌تواند شامل یال باشد. بنابراین $T$ یک مجموعه مستقل از اندازه $\binom{n-s-۲}{k-s-۲}$ است. از طرفی $A \in T$. حال ثابت می‌کنیم مجموعه مستقل $T$ آزاد نیز می‌باشد.

فرض کنید $A_۱,\ldots,A_{r-۱} \subseteq \{۱,۲,\ldots,n\} \backslash \{s+۲,\ldots,k+۱\}$ به‌قسمی‌که برای هر $i \in [r-۱]$ داشته باشیم $\{۱,\ldots,s+۱\} \subseteq A_i$، همچنین $A_r = \{۲,\ldots,k+۱\}$. واضح‌است‌که $e = \{A_۱,\ldots,A_r\}$ یالی از $\mathrm{GKG}^r(n,k,s)$ است، زیرا $|\bigcap_{i=۱}^r A_i| \leq s$. همچنین این یال $T$ را حمایت می‌کند. زیرا افرازی از $e$ شامل دو مجموعه $U = \{A_r\}$ و $V = \{A_۱,A_۲,\ldots,A_{r-۱}\}$ وجود دارد به‌قسمی‌که $T \cup U$ و $T \cup V$ شامل هیچ یالی نیست. یعنی برای هر $B \in T$، $|B \cap U| > s$ و $|B \cap V| > s$.

درنتیجه هر دو مجموعه $T \cup U$ و $T \cup V$ مستقل هستند. بنابراین یال $e$ مجموعه مستقل $T$ را حمایت می‌کند. درنتیجه مجموعه مستقل $T$ آزاد است. از آنجا که هر راس ابرکنسرگراف به یک مجموعه مستقل آزاد تعلق دارد، $\mathrm{GKG}^r(n,k,s)$ یک ابرگراف آزاد بوده و عدد استقلال آزاد آن حداقل $\binom{n-s-۲}{k-s-۲}$ است. فرض کنید $n$ به اندازه کافی بزرگ باشد به‌قسمی‌که $\binom{n-s-۲}{k-s-۲} > r$.

فرض کنید $I$ یک مجموعه مستقل آزاد ماکسیمم در $\mathrm{GKG}^r(n,k,s)$ باشد که یال $e = \{B_۱,\ldots,B_r\}$ از ابرکنسرگراف آن را حمایت می‌کند. یعنی افرازی از $e$ شامل دو بخش $U$ و $V$ وجود دارد به‌قسمی‌که هر دو مجموعه $U \bigcup I$ و $V \bigcup I$ مستقل هستند. فرض کنید $S = \bigcup_{i=۱}^r B_i$. ادعا می‌کنیم برای هر $B \in I$ داریم $|B \bigcap S| \geq s+۲$. برای اثبات دو حالت زیر را درنظر بگیرید:

۱. اگر $|B \bigcap S| \leq s$، آنگاه از آنجا که اشتراک $B$ با هریک از $B_i$ها برای $i = ۱,۲,\ldots,r$ کمتر مساوی $s$ است، یال $e$ به هر طریق که به دو قسمت تقسیم شود اشتراک $B$ با هریک از این قسمت‌ها کمتر مساوی $s$ است. درنتیجه ازآنجاکه $|I| \geq r$، هریک از مجموعه‌های $U \bigcup I$ و $V \bigcup I$ شامل یال بوده و بنابراین مستقل نمی‌باشند، که این یک تناقض است.

۲. اگر $|B \bigcap S| = s+۱$، آنگاه ازآنجاکه $e$ یال است داریم $|\bigcap_{i=۱}^r B_i| \leq s$، بنابراین حداقل یک $j \in [r]$ وجود دارد به‌قسمی‌که $|B \bigcap B_j| \leq s$. حال اگر یال $e$ به هر طریق به دو قسمت $U$ و $V$ تقسیم شود یکی از این قسمت‌ها شامل $B_j$ بوده و ازآنجاکه $|B \bigcap B_j| \leq s$ و $|I| \geq r$، حداقل یکی از مجموعه‌های $U \bigcup I$ یا $V \bigcup I$ شامل یال بوده و بنابراین مستقل نمی‌باشند، که این یک تناقض است.

درنتیجه

$$|I| \leq \binom{rk}{s+۲}\binom{n-s-۲}{k-s-۲} \approx O(n^{k-s-۲}). \qquad (۳.۲)$$

از طرف دیگر با استفاده از نامساوی (۳.۲)

$$\Phi(\mathrm{GKG}^r(n,k,s)) \geq \frac{|V(\mathrm{GKG}^r(n,k,s))|}{\bar{\alpha}(\mathrm{GKG}^r(n,k,s))} \geq \frac{\binom{n}{k}}{\binom{rk}{s+۲}\binom{n-s-۲}{k-s-۲}} \approx O(n^{s+۲}). \qquad (۴.۲)$$

با استفاده از لم ۴.۱.۲ و نامساوی (۴.۲)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi(\mathrm{GKG}^r(n,k,s))}{\chi(\mathrm{GKG}^r(n,k,s))} > ۲.$$

حال با استفاده از لم ۱.۱.۲

$$\chi(\mathrm{GKG}^r(n,k,s)) = \chi_c(\mathrm{GKG}^r(n,k,s)). \qquad \square$$

### ۳.۱.۲ تساوی عددرنگی و عددرنگی‌دوری کنسر گراف $\mathrm{KG}(G,F)$

حال شرایط برابری عددرنگی و عددرنگی‌دوری کنسرگراف $\mathrm{KG(G,F)}$موردبررسی قرار می‌گیرد. در ابتدا چند تعریف که در ادامه مورداستفاده قرار خواهد گرفت، آورده‌شده‌است.

**تعریف ۷.۱.۲.** [۶] فرض کنید $F$ خانواده ای از گراف‌ها باشد. گراف $G$ یک گراف $F$ـ **آزاد**[۱۱] نامیده می‌شود هرگاه هیچ زیرگراف آن یکریخت با عضوی از $F$ نباشد.

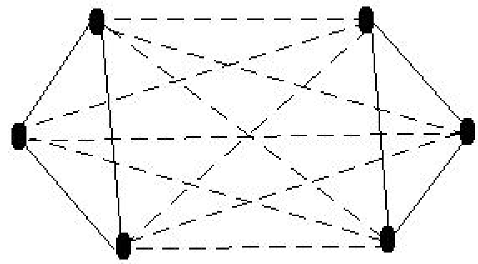
**تعریف ۸.۱.۲.** [۲۲] فرض کنید $F$ خانواده ای از گراف‌ها باشد. ماکسیمم تعداد یال‌های یک زیرگراف فراگیر $F$ـ آزاد از گراف $G$ را **عددتوران تعمیم‌یافته**[۱۲] $G$ می‌نامیم و با علامت $ex(G,F)$ نمایش می‌دهیم.

**تعریف ۹.۱.۲.** [۶] برای گراف $G$ و خانواده $F$ از گراف‌ها، **کنسر گراف** $\mathrm{KG(G,F)}$ گرافی است که مجموعه رئوس آن شامل همه زیرگراف‌های $G$ یکریخت با عضوی از $F$ می‌باشد و دو راس به‌هم متصلند اگراشتراک یالی نداشته باشند. رنگ‌آمیزی‌مجاز $\mathrm{KG(G,F)}$ به این صورت تعریف می‌شود که هریک از عضوهای $F$ را طوری رنگ‌آمیزی می‌کنیم که هر دو عضو یال مجزا دارای رنگ متفاوت باشند. کمترین تعداد رنگ‌های استفاده شده در یک رنگ‌آمیزی‌مجاز را عددرنگی کنسر گراف $\mathrm{KG(G,F)}$ گویند و با نماد $\chi(\mathrm{KG(G,F)})$ نشان داده می‌شود. به‌عنوان‌مثال در [۲۲] ثابت شده است که برای $n \geq ۱۶$ داریم $\lfloor\frac{(n-۱)^۲}{۴}\rfloor = \chi(\mathrm{KG}(K_n,C_۳))$. در ادامه شرایط برابری عددرنگی و عددرنگی‌دوری کنسرگراف $\mathrm{KG(G,F)}$ برای بعضی $G$ و $F$ موردبررسی قرار گرفته است.

اگر $F=\{H\}$، به‌جای $ex(G,F)$ و $\mathrm{KG}(G,F)$ به‌ترتیب از $ex(G,H)$ و $\mathrm{KG}(G,H)$ استفاده می‌شود. اردوش_استون و سیمنویت[۱۳] [۱۹، ۱۸] ثابت کردند که اگر $H$ یک گراف با حداقل

[11] F-Free
[12] Generalized Turán Number
[13] Erdos-Ston-Simnovits

شکل ۱.۲: عدد توران




یک یال باشد، آنگاه عددتوران $ex(G,H)$ به‌صورت‌زیر بدست می‌آید، به‌شرط‌آنکه $n$ به اندازه کافی بزرگ باشد.

**قضیه ۳.۱.۲.** برای گراف $H$ داریم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{ex(G,H)}{\binom{n}{۲}}=۱-\frac{۱}{\chi(H)-۱},$$

که $\chi(H)$ عددرنگی گراف $H$ و $G$ گرافی $n$ راسی است.

طبق نتیجه‌ای از [۶] کران بالای عددرنگی $\mathrm{KG}(G,F)$ به‌صورت‌زیر است.
**توجه.** فرض کنید که $G$ یک گراف و $F$ خانواده‌ای از گراف‌های ناتهی باشد. برای کنسرگراف $\mathrm{KG}(G,F)$ داریم،

$$\chi(\mathrm{KG}(G,F))\leq|E(G)|-ex(G,F). \quad (۵.۲)$$

**اثبات.** فرض کنید $K$ یک زیرگراف $F$ــآزاد باشد به‌قسمی‌که $|E(K)|=ex(G,F)$. یال‌های $E(G)-E(K)$ را مرتب کرده و تعریف می‌کنیم

$$c:V(KG(G,F))\longrightarrow E(G)-E(K)$$

به‌قسمی‌که $c(F)$ کوچکترین یال $F$ در $E(G)-E(K)$ باشد. □

در ادامه شرایطی برای برابری عددرنگی و عددرنگی‌دوری کنسرگراف $\mathrm{KG}(K_n, P_r)$ را بیان و اثبات می‌نماییم که $P_r$ مسیری $r$ راسی است. ابتدا لم زیر که در روند اثبات مورد استفاده قرار می‌گیرد، بیان و اثبات می‌شود.

**لم ۵.۱.۲.** فرض کنید $G$ گرافی $n$ راسی و $H$ زیرگرافی از $G$ با $r$ راس باشد. دراین‌صورت

$$\chi(\mathrm{KG}(G,H)) \leq n^{2} \quad , \quad \bar{\alpha}(\mathrm{KG}(G,H)) \leq O(n^{r-3}).$$

**اثبات.** فرض کنید $I$ مجموعه مستقل آزاد ماکسیمم در $\mathrm{KG}(G,H)$ باشد. همچنین فرض کنید $e=\{H_1,H_2\}$ یالی از $\mathrm{KG}(G,H)$ باشد که مجموعه $I$ را حمایت می‌کند. از آنجا که یال $e$ مجموعه مستقل $I$ را حمایت می‌کند، هریک از مجموعه‌های $I\cup H_1$ و $I\cup H_2$ مجموعه‌های مستقل بوده و شامل یال نمی‌باشند. یعنی هر راس در $I$ با هریک از $H_1$ و $H_2$ اشتراک یالی دارد. از طرفی، ازآنجاکه $e=\{H_1,H_2\}$ یالی از کنسرگراف است، $H_1$ و $H_2$ زیرگراف‌های یال مجزا از $G$ و یکریخت با $H$ می‌باشند. توجه داشته باشید که $H_1$ و $H_2$ ممکن است اشتراک راسی داشته باشند. بنابراین هر راس در $I$ که زیرگرافی از $G$ یکریخت با $H$ است، حداقل سه راس مشترک با $H_1 \bigcup H_2$ دارد. بنابراین

$$|I| \leq \binom{2r}{3}\binom{n-3}{r-3}\binom{\binom{r}{2}}{e(H)} \approx O(n^{r-3}), \tag{۶.۲}$$

با استفاده از نامساوی (۵.۲)،

$$\chi(\mathrm{KG}(G,H)) \leq |E(G)| - ex(G,H) \leq n^{2}.$$

درنتیجه اثبات کامل می‌شود. □

**لم ۶.۱.۲.** فرض کنید $n$ و $r$ اعداد صحیح مثبت باشند به‌قسمی‌که $r\geq 3$ و $n$ به اندازه کافی بزرگ باشد. دراین‌صورت، $\chi(\mathrm{KG}(K_n,P_r)) = \chi_c(\mathrm{KG}(K_n,P_r))$.

**اثبات.** تعداد زیرگراف‌های $P_r$ در $K_n$ برابر است با $\frac{n!}{2(n-r)!} \approx O(n^r)$. اکنون با استفاده از نامساوی‌های (۶.۲) و (۵.۲)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\phi(\mathrm{KG}(K_n,P_r))}{\chi(\mathrm{KG}(K_n,P_r))} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{|V(\mathrm{KG}(K_n,P_r))|}{\bar{\alpha}(\mathrm{KG}(K_n,P_r))} \cdot \frac{1}{\chi(\mathrm{KG}(K_n,P_r))}$$

$$> \lim_{n\to\infty} \frac{n^r}{n^{r-3}} \cdot \frac{1}{n^2} > 2.$$

با استفاده از لم ۱.۱.۲، اثبات کامل می‌شود. □

**لم ۷.۱.۲.** فرض کنید $n$ و $r$ اعداد صحیح مثبت باشند، که $n$ به اندازه کافی بزرگ است. دراین صورت داریم $\chi(\mathrm{KG}(K_n,C_r)) = \chi_c(\mathrm{KG}(K_n,C_r))$، که در آن $C_r$ دور $r$ راسی است.

**اثبات.** تعداد زیرگراف‌های $C_r$ در $K_n$ برابر است با $\frac{n!}{(n-r)!} \approx O(n^r)$. اکنون با استفاده از نامساوی‌های (۶.۲) و (۵.۲)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\phi(\mathrm{KG}(K_n,C_r))}{\chi(\mathrm{KG}(K_n,C_r))} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{|V(\mathrm{KG}(K_n,C_r))|}{\bar{\alpha}(\mathrm{KG}(K_n,C_r))} \cdot \frac{1}{\chi(\mathrm{KG}(K_n,C_r))}$$

$$> \lim_{n\to\infty} \frac{n^r}{n^{r-3}} \cdot \frac{1}{n^2} > 2.$$

با استفاده از لم ۱.۱.۲، اثبات کامل می‌شود. □

اگر تعداد یال‌های گراف $G$ به اندازه کافی بزرگ باشد، آنگاه در کنسرگراف $\mathrm{KG}(G, C_r)$، که $C_r$ دور $r$ راسی می‌باشد، عددرنگی و عددرنگی‌دوری با هم برابرند. ابتدا قضیه زیر که در فرآیند اثبات مورداستفاده قرار می‌گیرد، بیان می‌نماییم.

**قضیه ۴.۱.۲.** [۴۱، ۱۶] فرض کنید $r$ عددی صحیح و زوج باشد به‌قسمی‌که $r \geq 4$ و $\epsilon$ عددی مثبت باشد و $G$ گراف $n$ راسی و حداقل $\epsilon\binom{n}{2}$ یالی باشد. دراین‌صورت ثابت $\lambda_r$ وجود دارد به‌قسمی‌که برای $n \geq n(r,\epsilon)$، تعداد کپی‌های $C_r$ در $G$ حداقل $\lambda_r \epsilon^r n^r$ است.

**گزاره ۱.۱.۲.** فرض کنید $r$ عددی صحیح و زوج باشد به‌قسمی‌که $r \geq 4$ و $\epsilon$ عددی مثبت باشد. اگر $G$ گرافی $n$ راسی با حداقل $\epsilon\binom{n}{2}$ یال باشد، آنگاه $\chi(\mathrm{KG}(G, C_r)) = \chi_c(\mathrm{KG}(G, C_r))$، بشرط آنکه $n$ به اندازه کافی بزرگ باشد.

**اثبات.** با استفاده از قضیه ۴.۱.۲، ثابت $\lambda_r$ وجود دارد به‌قسمی‌که برای $n$ به اندازه کافی بزرگ، تعداد کپی‌های $C_r$ در $G$ حداقل $\lambda_r \epsilon^r n^r$ است. حال با استفاده از نامساوی‌های (۶.۲) و (۵.۲)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi(\mathrm{KG}(G,C_r))}{\chi(\mathrm{KG}(G,C_r))} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_r \epsilon^r n^r}{n^{r-3} . n^2} > 2.$$

با استفاده از لم ۱.۱.۲، اثبات کامل می‌شود. □

اگر $G$ گرافی $n$ راسی با تعداد یال‌های به اندازه کافی بزرگتر از عدد توران $ex(G,H)$ باشد، آنگاه گزاره زیر را درمورد تعداد کپی‌های $H$ در $G$ خواهیم داشت.

**گزاره ۲.۱.۲.** برای هر عدد حقیقی مثبت $r$ و $\epsilon$، $\delta$ای وجود دارد به‌طوری‌که شرایط زیر برقرار است.

اگر $G$ گراف $n$ راسی با حداقل $(1 - \frac{1}{r} + \epsilon)\frac{n^2}{2}$ یال باشد، آنگاه $G$ شامل حداقل $\delta n^{r+1}$ کپی از گراف کامل $K_{r+1}$ است.

ابتدا لم زیر را که در فرآیند اثبات مورداستفاده قرار می‌گیرد، بیان و اثبات می‌نماییم.

**لم ۸.۱.۲.** فرض کنید $\epsilon$ و $\delta$ دو عدد حقیقی باشند و $\epsilon < \delta$. دراین صورت $n_0$ای وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $n \geq n_0$، اگر $G$ گرافی با $n$ راس و حداقل $\delta\frac{n^2}{2}$ یال باشد، آنگاه $G$ دارای زیرگراف $G'$ با مینیمم درجه $(\delta - \epsilon)|V(G')|$ و حداقل تعداد رئوس $|V(G')| \geq \frac{\epsilon}{2} n$ است.

**اثبات.** فرض کنید $G_\circ = G$. حال در هر مرحله گراف $G_i$ برای $i = ۱,۲,\ldots$ را طوری خواهیم ساخت که در نهایت دارای ویژگی مذکور باشد.
اگر $G_i$ دارای مینیمم درجه حداقل $(\delta-\epsilon)|V(G_i)|$ باشد، کار تمام است. درغیراین‌صورت، فرض کنید $G_{i+۱}$ گراف بدست آمده از $G_i$ با حذف راس دلخواه با تعداد همسایگی کمتر از $(\delta-\epsilon)(n-i)$ باشد. توجه کنید که در مرحله $t$ داریم

$$e(G) \leq e(G_t) + \sum_{i=۱}^{t-۱}(\delta-\epsilon)(n-i)$$

$$\leq \frac{(n-t)^۲}{۲} + (\delta-\epsilon)\frac{n^۲-(n-t)^۲}{۲} + \frac{t}{۲}$$

$$\leq (\delta-\epsilon)\frac{n^۲}{۲} + (۱-\delta+\epsilon)\frac{(n-t)^۲}{۲} + \frac{t}{۲}.$$

ازآنجاکه $e(G) \geq \delta\frac{n^۲}{۲}$، داریم

$$\delta\frac{n^۲}{۲} \leq (\delta-\epsilon)\frac{n^۲}{۲} + (۱-\delta+\epsilon)\frac{(n-t)^۲}{۲} + \frac{t}{۲},$$
$$\frac{\epsilon}{۲}n^۲ \leq (۱-\delta+\epsilon)\frac{(n-t)^۲}{۲} + \frac{t}{۲}.$$

بنابراین اگر $\epsilon$ به اندازه کافی کوچک باشد و $n$ به اندازه کافی بزرگ، آنگاه $(n-t)^۲ > \frac{\epsilon}{۴}n^۲$. درنتیجه داریم $n-t > \frac{\sqrt{\epsilon}}{۲}n$. درنهایت با ادامه این روند، حداقل $n' \geq \frac{\sqrt{\epsilon}}{۲}n$ راس باقی می‌ماند که زیرگراف‌القایی روی این رئوس دارای مینیمم درجه حداقل $(\delta-\epsilon)n'$ است. □

**اثبات گزاره ۲.۱.۲.** با استفاده از لم ۸.۱.۲، زیرگراف $G' \subseteq G$ با $n' \geq \frac{\sqrt{\epsilon}}{۲}n$ راس و مینیمم درجه حداقل $(۱-\frac{۱}{r}+\frac{\epsilon}{۲})n'$ وجود دارد. در $G'$ هر $r$ـ تایی از رئوس حداقل $\frac{\epsilon r}{۲}n'$ همسایه مشترک دارند. بنابراین حداقل $\frac{\epsilon r}{۲}n'$ کپی از $K_{r+۱}$ وجود دارد. درنتیجه تعداد کپی‌های $K_{r+۱}$ در $G'$ حداقل

$$(\frac{\epsilon r}{۲}n')^{r+۱} \geq \frac{\epsilon^{۲r+۲}r^{r+۱}}{۸^{r+۱}}n^{r+۱}$$

است. □

اکنون با استفاده از گزاره ۲.۱.۲ و لم ۱.۱.۲، شرایطی برای برابری عددرنگی و عددرنگی‌دوری کنسرگراف $\mathrm{KG}(G,H)$ بدست خواهیم آورد.

**قضیه ۵.۱.۲.** فرض کنید $r$ عدد صحیح مثبت ثابت و $H$ گراف با $r+۱$ راس باشد. اگر $G$ گرافی $n$ راسی با حداقل $(۱-\frac{۱}{r}+\epsilon)\frac{n^۲}{۲}$ یال باشد، آنگاه $\chi(\mathrm{KG}(G,H)) = \chi_c(\mathrm{KG}(G,H))$، بشرط‌آنکه $n$ به اندازه کافی بزرگ باشد.

**اثبات.** اگر گراف $\mathrm{KG(G,H)}$ آزاد نباشد آنگاه با استفاده از لم ۱.۱.۲، چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. با استفاده از گزاره ۲.۱.۲، گراف $G$ شامل حداقل $\delta n^{r+۱}$ کپی از $K_{r+۱}$ و بنابراین $H$ است. بنابراین با استفاده از نامساوی (۶.۲) و گزاره ۲.۱.۲

$$\Phi(\mathrm{KG}(G,H)) \geq \frac{|V(\mathrm{KG}(G,H))|}{\bar{\alpha}(\mathrm{KG}(G,H))} \geq \frac{\delta n^{r+۱}}{n^{r-۲}} \approx O(n^۳) \qquad (۷.۲)$$

حال با استفاده از نامساوی‌های (۵.۲) و (۷.۲)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Phi(\mathrm{KG}(G,H))}{\chi(\mathrm{KG}(G,H))}>۲.$$

بنابراین با استفاده از لم ۱.۱.۲، اثبات کامل می‌شود.□

## ۲.۲ عددرنگی کنسرگراف $\mathrm{KG}(G,F)$

در این بخش، نتیجه بدست آمده توسط کوتانو و توزا[14] [۲۲] تعمیم داده می‌شود، همچنین عددرنگی $\mathrm{KG}(G,F)$ برای بعضی $G$ و $F$ بررسی می‌شود. در قسمت‌اول، $G$ و $F$ به‌ترتیب گراف کامل $K_n$ و خانواده همه زیرگراف‌های $K_n$ با حداقل درجه $\delta$ می‌باشند. قسمت‌دوم به مطالعه عددرنگی $\mathrm{KG}(G,F)$ که در آن $G=\mathrm{KG}(n,k)$ و $F=\{K_۳\}$ است، تخصیص داده می‌شود.

**الف- زمانی‌که $F$ خانواده زیرگراف‌های $K_n$ با حداقل درجه $\delta$ است**

کوتانو و توزا [۲۲] عددرنگی کنسرگراف $\mathrm{KG}(K_n,C_۴)$ را موردمطالعه قرار دادند. به‌عنوان تعمیمی از آن، عددرنگی کنسرگراف $\mathrm{KG}(K_n,F_\delta)$ موردبررسی قرار می‌گیرد که در آن $F_\delta$ خانواده‌ای از زیرگراف‌های $K_n$ با مینیمم درجه حداقل $\delta$ است.

**لم ۱.۲.۲.** فرض کنید $n$ عدد صحیح مثبت و $F_\delta$ خانواده تمام زیرگراف‌های $K_n$ با مینیمم درجه حداقل $\delta$ باشد، دراین‌صورت $ex(K_n,F_\delta)=\frac{(۲n-\delta)(\delta-۱)}{۲}$.

**اثبات.** فرض کنید $\mathrm{H}(n,\delta)$ گرافی $n$ راسی با مجموعه رئوس $\{v_۱,v_۲,...,v_n\}$ باشد به‌قسمی‌که دو راس $v_i$ و $v_j$ با هم مجاورند هرگاه داشته باشیم $|i-j|\le\delta-۱$. ادعا می‌کنیم $\mathrm{H}(n,\delta)$ زیرگرافی با مینیمم درجه حداقل $\delta$ ندارد، همچنین دارای $\frac{(۲n-\delta)(\delta-۱)}{۲}$ یال است. برای اثبات ادعا، به‌صورت‌زیر عمل می‌نماییم.

$v_۱$ با $\delta-۱$ راس $v_۲,v_۳,\dots,v_\delta$ مجاور است. راس $v_۲$ با $\delta$ راس $v_۱,v_۳,v_۴,\dots,v_{\delta+۱}$ مجاور است. راس $v_۳$ با $\delta+۱$ راس $v_۱,v_۲,v_۴,v_۵,\dots,v_{\delta+۲}$ مجاور است. به‌همین‌ترتیب تا راس $v_\delta$ با $۲\delta-۲$ راس $v_۱,v_۲,\dots,v_{\delta-۱},v_{\delta+۱},v_{\delta+۲},\dots,v_{۲\delta-۱}$ مجاور است. راس $v_{\delta+۱}$ نیز با $۲\delta-۲$ راس $v_۲,v_۳,\dots,v_\delta,v_{\delta+۲},v_{\delta+۳},\dots,v_{۲\delta}$ مجاور است.

به‌همین‌ترتیب تا راس $v_{n-\delta+۱}$ نیز با $۲\delta-۲$ راس

$$v_{n-۲\delta+۲},v_{n-۲\delta+۳},\dots,v_{n-\delta},v_{n-\delta+۲},v_{n-\delta+۳},\dots,v_n$$

مجاور است. راس $v_{n-\delta+۲}$ با $۲\delta-۳$ راس

$$v_{n-۲\delta+۳},v_{n-۲\delta+۴},\dots,v_{n-\delta+۱},v_{n-\delta+۳},v_{n-\delta+۳},\dots,v_n$$

[14] Kotoa and Tuza

مجاور است. به‌همین‌ترتیب راس $v_n$ با $\delta - ۱$ راس $v_{n-\delta+۱}, v_{n-\delta+۲}, \dots, v_{n-۱}$ مجاور است. بنابراین

$$\sum deg(v) = ۲|E(H)|,$$

$$۲(\delta-۱) + ۲(\delta) + ۲(\delta+۱) + \cdots + ۲(۲\delta-۳) + (n-۲(\delta-۱))(۲\delta-۲) = ۲|E(H)|,$$

$$\delta - ۱ + \delta + \delta + ۱ + \cdots + ۲\delta - ۳ + (\delta-۱)(n-۲\delta+۲) = |E(H)|,$$

$$(\delta-۱)\delta + \tfrac{(\delta-۱)(\delta-۴)}{۲} + (\delta-۱)(n-۲\delta+۲) = |E(H)|,$$

$$(\delta-۱)(\delta+n-۲\delta+۲+\tfrac{(\delta-۴)}{۲}) = |E(H)|,$$

$$\tfrac{(\delta-۱)(۲n-\delta)}{۲} = |E(H)|.$$

همچنین ازآنجاکه $\mathrm{H}(n,\delta)$ دارای راسی با درجه $\delta - ۱$ است، شامل زیرگرافی با مینیمم درجه حداقل $\delta$ نیست. بنابراین

$$ex(K_n, F_\delta) \geq \frac{(۲n-\delta)(\delta-۱)}{۲}. \tag{۸.۲}$$

از طرفی اگر $G$ شامل هیچ زیرگرافی با مینیمم درجه حداقل $\delta$ نباشد، آنگاه $G$ دارای راسی با مینیمم درجه کمتر از $\delta$ است. با حذف این راس و استقرا روی تعداد رئوس $G$، می‌توان نتیجه گرفت گراف $G$ دارای حداکثر $\frac{(۲n-\delta)(\delta-۱)}{۲}$ یال است. برای اثبات از طریق استقرا بصورت زیر عمل می‌کنیم.

فرض کنید برای $n = k$ قضیه درست باشد و $|E(G)| \leq \frac{(۲k-\delta)(\delta-۱)}{۲}$.

حال برای $n = k + ۱$ باید ثابت کنیم که $|E(G)| \leq \frac{(۲(k+۱)-\delta)(\delta-۱)}{۲}$. برای اثبات راس با مینیمم درجه کمتر از $\delta$ را حذف می‌کنیم. حال برای گراف باقی‌مانده با استفاده از فرض استقرا تعداد یال‌ها حداکثر $\frac{(۲k-\delta)(\delta-۱)}{۲}$ است. حال این راس را به گراف اضافه می‌کنیم. بنابراین تعداد یال‌های گراف حاصل حداکثر برابر است با

$$\frac{(۲k-\delta)(\delta-۱)}{۲} + (\delta-۱) = \frac{(\delta-۱)(۲k-\delta+۲)}{۲} = \frac{(\delta-۱)(۲(k+۱)-\delta)}{۲}.$$

درنتیجه

$$ex(K_n, F_\delta) \leq \frac{(۲n-\delta)(\delta-۱)}{۲}. \tag{۹.۲}$$

با استفاده از نامساوی‌های (۸.۲) و (۹.۲) داریم $ex(K_n, F_\delta) = \frac{(۲n-\delta)(\delta-۱)}{۲}$. □

برای گراف $G$ و خانواده $F$ از گراف‌ها، عددرنگی $\mathrm{KG}(G,F)$ در [۶] بررسی‌شده‌است.

**توجه.** فرض کنید $G$ یک گراف و $F$ خانواده‌ای از گراف‌های ناتهی باشد. برای کنسرگراف $\mathrm{KG}(G,F)$ داریم،

$$\chi(\mathrm{KG}(G,F)) \geq |E(G)| - ۲ \cdot ex(G,F). \qquad (۲.۱۰)$$

**اثبات.** فرض کنید $F'$ همه زیرگراف‌های $G$ با دقیقا $n = e(G,F) + ۱$ یال باشد. همریختی $g : \mathrm{KG}(G,F') \longrightarrow \mathrm{KG}(G,F)$ را درنظر بگیرید. فرض کنید $m = |E(G)|$. می‌توان چک کرد

$$\chi(\mathrm{KG}(G,F')) = \chi(\mathrm{KG}(m,n)) = |E(G)| - ۲ex(G,F) \leq \chi(\mathrm{KG}(G,F)).\square$$

در ادامه کران‌هایی برای عددرنگی کنسرگراف $\mathrm{KG}(K_n,F_\delta)$ بدست می‌آوریم.

**قضیه ۲.۲.۱.** اگر $n$ عدد صحیح مثبت و $F_\delta$ خانواده تمام زیرگراف‌های $K_n$ با مینیمم درجه حداقل $\delta$ باشد، آنگاه

$$\binom{n-۲\delta+۲}{۲} - (\delta-۱)^۲ \leq \chi(\mathrm{KG}(K_n,F_\delta)) \leq \binom{n-۲\delta+۲}{۲}.$$

**اثبات.** با استفاده از نامساوی (۲.۱۰) و لم ۲.۲.۱ داریم،

$$\begin{aligned}\chi(\mathrm{KG}(K_n,F_\delta)) &\geq \tbinom{n}{۲} - ۲ \cdot ex(K_n,F_\delta)\\ &= \tbinom{n}{۲} - (۲n-\delta)(\delta-۱)\\ &= \tbinom{n-۲\delta+۲}{۲} - (\delta-۱)^۲.\end{aligned}$$

حال فرض کنید $\chi_{n-۱} = \chi(\mathrm{KG}(K_{n-۱},F_\delta))$ و یک $\chi_{n-۱}$ ـرنگ‌آمیزی $c$ برای $\mathrm{KG}(K_{n-۱},F_\delta)$ موجود باشد. حال یک رنگ‌آمیزی برای $\mathrm{KG}(K_n,F_\delta)$ ارائه می‌دهیم. گراف کامل $K_n$ از $K_{n-۱}$ با اضافه نمودن راس جدید $u$ و اتصال آن به تمام رئوس $K_{n-۱}$ بدست می‌آید. فرض کنید $H$ راسی از $\mathrm{KG}(K_n,F_\delta)$ باشد. اگر $H$ زیرگرافی از $K_{n-۱}$ باشد، آنگاه رنگ $c(H)$ به آن اختصاص داده می‌شود. فرض کنید $U$ مجموعه تمام رئوس $\mathrm{KG}(K_n,F_\delta)$ باشند به‌طوری‌که با یال‌های جدید اشتراک دارند. واضح است که هر راس در $U$، حداقل در $\delta$ یال با $u$ برخورد دارد. بنابراین، همریختی از $\mathrm{KG}(K_n,F_\delta)[U]$ به کنسرگراف $\mathrm{KG}(\mathrm{n}-1,\delta)$ با عددرنگی $n-۲\delta+۱$، وجود دارد. یعنی می‌توان یک رنگ‌آمیزی‌مجاز برای $\mathrm{KG}(K_n,F_\delta)[U]$ با $n-۲\delta+۱$ رنگ، درنظرگرفت. بنابراین

$$\begin{aligned}&\chi_n \leq \chi_{n-۱} + n - ۲\delta + ۱\\ &\leq \chi_{n-۲} + (n-۲) - ۲\delta + ۲ + n - ۲\delta + ۱ = \chi_{n-۲} + n - ۲\delta + n - ۲\delta + ۱\\ &\leq \chi_{n-۳} + (n-۳) - ۲\delta + ۲ + n - ۲\delta + n - ۲\delta + ۱\\ &= \chi_{n-۳} + n - ۲\delta - ۱ + n - ۲\delta + n - ۲\delta + ۱\\ &\vdots\\ &\leq \chi_{۲\delta} + ۲ + ۳ + \cdots + n - ۲\delta + n - ۲\delta + ۱.\end{aligned}$$

یا به‌طورمعادل

$$\chi_n \leq \chi_{۲\delta} + \sum_{j=۲\delta}^{n-۱} (j - ۲\delta + ۲).$$

لازم به ذکر است که $\chi_{۲\delta} = ۱$ است. زیرا $\chi_{۲\delta} = \chi(\mathrm{KG}(K_{۲\delta}, F_\delta))$ و در کنسرگراف $\mathrm{KG}(K_{۲\delta}, F_\delta)$ هیچ دو راسی به یکدیگر متصل نمی‌باشند و بنابراین عددرنگی یعنی $\chi_{۲\delta}$ برابر یک است. برای اثبات بصورت زیر عمل می‌نماییم.

اگر برای هر $H_۱, H_۲ \in V(\mathrm{KG}(K_{۲\delta}, F_\delta))$ ،داشته باشیم $E(H_۱) \cap E(H_۲) \neq \emptyset$، دیگر چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. حال فرض کنید دو راس $H_۱, H_۲ \in V(\mathrm{KG}(K_{۲\delta}, F_\delta))$ وجود داشته باشند به‌قسمی‌که $E(H_۱) \cap E(H_۲) = \emptyset$. حال ازآنجاکه $H_۱$ و $H_۲$ زیرگراف‌های $K_{۲\delta}$ با حداقل درجه $\delta$ می‌باشند، بنابراین $|V(H_۱)|, |V(H_۲)| \geq \delta + ۱$. درنتیجه $V(H_۱) \cap V(H_۲) \neq \emptyset$. حال فرض کنید $x \in V(H_۱) \cap V(H_۲)$. دراین‌صورت ازآنجاکه $E(H_۱) \cap E(H_۲) = \emptyset$، داریم $N_{H_۱}(x) \cap N_{H_۲}(x) = \emptyset$. از طرفی $|N_{H_۱}(x)|, |N_{H_۲}(x)| \geq \delta$.

حال ازآنجاکه $\{x\} \cup N_{H_۱}(x) \cup N_{H_۲}(x) \subseteq V(H_۱) \cup V(H_۲) \subseteq V(K_{۲\delta})$، داریم

$$۲\delta + ۱ \leq |\{x\}| + |N_{H_۱}(x)| + |N_{H_۲}(x)| \leq |V(K_{۲\delta})| = ۲\delta,$$

که این یک تناقض است. بنابراین $\chi_{۲\delta} = ۱$. درنتیجه

$$\chi_n \leq \chi_{۲\delta} + \sum_{j=۲\delta}^{n-۱} (j - ۲\delta + ۲) = ۱ + \sum_{j=۲\delta}^{n-۱} (j - ۲\delta + ۲) = \binom{n - ۲\delta + ۲}{۲}. \square$$

**ب‌ـ زمانی‌که** $G = \mathrm{KG}(n, k)$ **و** $F = \{K_۳\}$

برای اثبات قضیه بعد نیاز به تخمین تعداد مثلث‌های یک زیرگراف از $\mathrm{KG}(n, k)$ است. نوردهاوس و استوارد[۱۵] [۳۷] و مون و موسر[۱۶] [۳۶] حداقل تعداد مثلث‌های یک گراف را در قضیه زیر بیان نمودند.

**قضیه ۲.۲.۲.** فرض کنید $G = (V, E)$ گرافی $n$ راسی و $e$ یالی باشد. دراین‌صورت حداقل تعداد کپی‌های $C_۳$ در $G$ برابراستبا $\frac{۴e^۲}{۳n} - \frac{en}{۳}$ .

در ادامه این نتیجه را تعمیم داده و حداقل تعداد مثلث‌ها را در یک زیرگراف از یک گراف منتظم بدست خواهیم آورد.

**لم ۲.۲.۲.** فرض کنید $G$ گرافی $t$ـ‌منتظم باشد، به‌قسمی‌که هر یال $G$ در $T$ مثلث قرار داشته باشد و $|V(G)| = n$. اگر $H$ زیرگرافی از $G$ با $e$ یال باشد، آنگاه $H$ دارای حداقل $\frac{۴e^۲}{۳n} - \frac{e(۲t-T)}{۳}$ مثلث است.

[15] Nordhaus and Steward
[16] Moon and Moser

**اثبات.** حداقل تعداد مثلث‌های $H$ برابر است با

$$\frac{1}{3}\sum_{uv\in E(H)}(d_H(u)+d_H(v)-d_G(u)-d_G(v)+|N_G(u)\bigcap N_G(v)|)$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{uv\in E(H)}(d_H(u)+d_H(v))-\frac{1}{3}\sum_{uv\in E(H)}(d_G(u)+d_G(v))+\frac{1}{3}\sum_{uv\in E(H)}(|N_G(u)\bigcap N_G(v)|)$$

توجه شود که هر راس به اندازه درجه‌اش در این مجموع ظاهر می شود. همچنین ازآنجاکه $G$ گرافی $t$ـ منتظم است، درجه هر راس در گراف $G$ برابر $t$ است و ازآنجاکه در گراف $G$ هر یال در $T$ مثلث قرار دارد بنابراین تعداد همسایه‌های مشترک دو سر یک یال در گراف $G$ برابر $T$ است. بنابراین عبارت فوق با عبارت زیر معادل می‌باشد.

$$\frac{1}{3}\sum_{u\in V(H)}(d_H(u))^2-\frac{1}{3}(e\cdot 2t-e\cdot T). \tag{۱۱.۲}$$

با استفاده از نامساوی کشی‌شوارتز داریم

$$(\sum_{u\in V(H)}d_H(u)\cdot 1)^2\leq\sum_{u\in V(H)}(d_H(u))^2\cdot\sum_{u\in V(H)}(1)^2,$$

$$\sum_{u\in V(H)}(d_H(u))^2\geq\frac{(\sum_{u\in V(H)}d_H(u))^2}{|V(H)|}$$

$$\geq\frac{(\sum_{u\in V(H)}d_H(u))^2}{|V(G)|}=\frac{(2|E(H)|)^2}{n}.$$

بنابراین حداقل مقدار عبارت (۱۱.۲) برابراستبا

$$\frac{1}{3}(\frac{(2e)^2}{n}-2et+eT).$$

بنابراین اثبات کامل می‌شود. □

با استفاده از لم قبل، نتیجه زیر بدست خواهد آمد.

**نتیجه ۱.۲.۲.** فرض کنید $B(\mathrm{KG}(n,k))$ تعداد یال‌های بزرگترین زیرگراف دوبخشی در $\mathrm{KG}(n,k)$ باشد. دراین‌صورت

$$\frac{\lfloor(\frac{(n-2k+2)^2}{4})\rfloor}{\binom{n-2k+2}{2}}\frac{1}{2}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}\leq B(\mathrm{KG}(n,k))\leq\frac{1}{4}\binom{n}{k}\left(2\binom{n-k}{k}-\binom{n-2k}{k}\right), \tag{۱۲.۲}$$

**اثبات.** از آنجا که گراف‌های دوبخشی دور با طول فرد ندارند، با استفاده از لم ۲.۲.۲ داریم

$$\frac{4(B(\mathrm{KG}(n,k)))^2}{3|V(\mathrm{KG}(n,k))|}-\frac{(B(\mathrm{KG}(n,k)))(2t-T)}{3}\leq 0,$$

توجه شود که کنسرگراف $\mathrm{KG}(n,k)$ یک گراف $t=\binom{n-k}{k}$ـ منتظم و با تعداد رئوس $\binom{n}{k}$ می‌باشد که هر یال آن در $T=\binom{n-2k}{k}$ مثلث قرار دارد. بنابراین با استفاده از نامساوی فوق، بیشترین تعداد یال‌های یک زیرگراف دوبخشی از کنسرگراف $\mathrm{KG}(n,k)$ بصورت زیر بدست می‌آید،

$$\frac{4(B(\mathrm{KG}(n,k)))^2}{3\binom{n}{k}}-\frac{(B(\mathrm{KG}(n,k)))(2\binom{n-k}{k}-\binom{n-2k}{k})}{3}\leq 0,$$

بنابراین

$$B(\mathrm{KG}(n,k))\leq \frac{1}{4}\binom{n}{k}\left(2\binom{n-k}{k}-\binom{n-2k}{k}\right).$$

برای بدست آوردن کران پایین بصورت زیر عمل می‌کنیم. عددرنگی $\mathrm{KG}(n,k)$ برابر $n-2k+2$ است. فرض کنید $n$ زوج باشد. حال این $n-2k+2$ کلاس را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم (این کار برای آن است که گراف دوبخشی بسازیم). فرض کنید متغیر تصادفی تعداد یال‌های وسط باشد. احتمال ظاهر شدن این یال $\frac{\binom{c-2}{\frac{c}{2}-1}}{\binom{c}{\frac{c}{2}}}$ است که در آن $c=n-2k+2$ و تعداد این یال‌ها نیز $\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}$ می‌باشد. ازآنجاکه هر متغیر تصادفی مقدار بیشتر مساوی میانگین خود را دریافت می‌کند بنابراین گراف دوبخشی با این تعداد یال‌ها وجود دارد.

**نتیجه ۲.۲.۲.** برای $n$ به اندازه کافی بزرگ داریم، $B(\mathrm{KG}(n,k))\approx \frac{1}{4}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}$، که در آن $B(\mathrm{KG}(n,k))$، تعداد یال‌های بزرگترین زیرگراف دوبخشی در $\mathrm{KG}(n,k)$ است.

**اثبات.** کافی است در نتیجه ۱.۲.۲، $n$ به اندازه کافی بزرگ درنظر گرفته شود.□

همان‌طور که قبلا بیان شد، کوتانو و توزا [۲۲]،عددرنگی $\mathrm{KG}(K_n,K_3)$ را بدست آوردند و ثابت کردند برای $n\geq 16$، $\chi(\mathrm{KG}(K_n,K_3))=\lfloor\frac{(n-1)^2}{4}\rfloor$.توجه شود که $\mathrm{KG}(K_n,1)=K_n$. به‌عنوان تعمیمی از این نتیجه، عددرنگی $\mathrm{KG}(KG(n,k),K_3)$ مورد مطالعه قرار خواهد گرفت. در ابتدا نیاز به آوردن چند تعریف می‌باشد.

**تعریف ۱.۲.۲.** [۲۲] خانواده‌ای از مثلث‌های یک گراف،**اشتراکی** [17] نامیده می‌شوند اگر هر دو مثلث در این خانواده اشتراک یالی داشته باشند. این خانواده**بدیهیا اشتراکی**[18] نامیده می‌شود اگر تمام مثلث‌های این خانواده در یک یال اشتراک داشته باشند. به چنین یالی**ستون**[19] خانواده گفته می‌شود. واضح است که هر خانواده اشتراکی غیربدیهی[20] از مثلث‌ها از اندازه حداکثر ۴ است.

**قضیه ۳.۲.۲.** برای اعداد صحیح مثبت $n$ و $k$ که $n\geq 2k$ داریم

$$\frac{1}{2}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}-\frac{1}{4}\binom{n}{k}\left(2\binom{n-k}{k}-\binom{n-2k}{k}\right)\leq\chi(\mathrm{KG}(KG(n,k),K_3))\leq\frac{1}{2}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}-\frac{\lfloor(\frac{(n-2k+2)^2}{4})\rfloor}{\binom{n-2k+2}{2}}\frac{1}{2}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k},$$

[17] Intersecting
[18] Trivially Intersecting
[19] Spine
[20] Non-Trivially Intersecting

به‌شرط‌آنکه $n$ به اندازه کافی بزرگ باشد.

**اثبات.** فرض کنید $\mathrm{KG}(KG(n,k),K_3)$ با $\chi$ رنگ، رنگ‌آمیزی شود و همچنین فرض کنید $s$ کلاس رنگی بدیها اشتراکی داشته باشیم. فرض کنید $m=\binom{n}{k}$ و $e=\frac{1}{2}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}$. اگر $s\geq\frac{1}{2}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}-\frac{1}{4}\binom{n}{k}(2\binom{n-k}{k}-\binom{n-2k}{k})$، آنگاه چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند و سمت چپ نامساوی فوق اثبات می‌شود.

بنابراین فرض کنید $s<\frac{1}{2}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}-\frac{1}{4}\binom{n}{k}(2\binom{n-k}{k}-\binom{n-2k}{k})$.همچنین فرض کنید $x=e-s$، بنابراین برای $n$ به اندازه کافی بزرگ داریم،

$$x=e-s>\frac{1}{4}\binom{n}{k}(2\binom{n-k}{k}-\binom{n-2k}{k})\approx\frac{m^2}{4}.$$

برای هر کلاس بدیها اشتراکی، یک یال که ستون آن کلاس است را درنظرگرفته و آن را از $\mathrm{KG}(n,k)$ حذف کنید. زیرگراف بدست آمده حداقل $x$ یال دارد. با استفاده از لم ۲.۲.۲، حداقل تعداد مثلث‌ها در این زیرگراف از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\frac{4}{3}\frac{(e-s)^2}{m}-\frac{(e-s)\Big(2\binom{n-k}{k}-\binom{n-2k}{k}\Big)}{3} \tag{۱۳.۲}$$

این مثلث‌ها به هیچ یک از کلاس‌های بدیها اشتراکی تعلق ندارند. بنابراین به کلاس اشتراکی غیربدیهی تعلق دارند. ازآنجاکه هر کلاس اشتراکی غیربدیهی شامل حداکثر ۴ مثلث است، تعداد کلاس های اشتراکی غیربدیهی حداقل یک چهارم مقدار بیان شده در (۱۳.۲) است. بنابراین

$$\chi\geq s+\frac{1}{3}\frac{(e-s)^2}{m}-\frac{(e-s)\Big(2\binom{n-k}{k}-\binom{n-2k}{k}\Big)}{12}$$

$$=e-x+\frac{1}{3}\frac{x^2}{m}-\frac{\Big(2\binom{n-k}{k}-\binom{n-2k}{k}\Big)}{12}x=p(x).$$

برای بدست آوردن مینیمم مقدار $p(x)$ کافی است از آن نسبت به $x$ مشتق گرفته سپس مساوی

صفر قرار دهیم.

$$p'(x) = \circ,$$

$$-\text{۱} + \frac{\text{۲}x}{\text{۳}m} - \frac{\left(\text{۲}\binom{n-k}{k} - \binom{n-\text{۲}k}{k}\right)}{\text{۱۲}} = \circ,$$

$$x = \left(\frac{\left(\text{۲}\binom{n-k}{k} - \binom{n-\text{۲}k}{k}\right)}{\text{۱۲}} + \text{۱}\right)\frac{\text{۳}m}{\text{۲}}$$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\binom{n}{k}\left(\frac{\left(\text{۲}\binom{n-k}{k} - \binom{n-\text{۲}k}{k}\right)}{\text{۴}}\right) + \frac{\text{۳}m}{\text{۲}} = \frac{m^{\text{۲}}}{\text{۸}} + \frac{\text{۳}m}{\text{۲}}$$

بنابراین $p(x)$ مینیمم مقدار خود را در $x = \frac{m^{\text{۲}}+\text{۱۲}m}{\text{۸}}$ بدست می‌آورد. برای $n$ به اندازه کافی بزرگ داریم، $L = \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\binom{n}{k}(\text{۲}\binom{n-k}{k} - \binom{n-\text{۲}k}{k}) \leq \frac{m^{\text{۲}}+\text{۱۲}m}{\text{۸}} = x$. بنابراین

$$\chi > p(L) = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k} - (\frac{\text{۱}}{\text{۴}}\binom{n}{k}(\text{۲}\binom{n-k}{k} - \binom{n-\text{۲}k}{k})) + \frac{\text{۱}}{\text{۳}}\frac{(\frac{\text{۱}}{\text{۴}}\binom{n}{k}(\text{۲}\binom{n-k}{k} - \binom{n-\text{۲}k}{k}))^{\text{۲}}}{\binom{n}{k}}$$

$$-\frac{\left(\text{۲}\binom{n-k}{k} - \binom{n-\text{۲}k}{k}\right)}{\text{۱۲}} \cdot \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\binom{n}{k}(\text{۲}\binom{n-k}{k} - \binom{n-\text{۲}k}{k}))$$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k} - \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\binom{n}{k}\left(\text{۲}\binom{n-k}{k} - \binom{n-\text{۲}k}{k}\right).$$

برای بدست آوردن کران بالا، با استفاده از نامساوی (۵.۲) داریم،

$$\chi(\mathrm{KG}(KG(n,k), K_{\text{۳}})) \leq |E(KG(n,k))| - ex(KG(n,k), K_{\text{۳}})$$

حال با استفاده از نتیجه ۱.۲.۲، ازآنجاکه گراف‌های دوبخشی دور با طول فرد ندارند و درنتیجه شامل $K_{\text{۳}}$ به‌عنوان زیرگراف نیستند، داریم

$$\chi(\mathrm{KG}(\mathrm{KG}(n,k), K_{\text{۳}})) \leq \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k} - \frac{\lfloor(\frac{(n-\text{۲}k+\text{۲})^{\text{۲}}}{\text{۴}})\rfloor}{\binom{n-\text{۲}k+\text{۲}}{\text{۲}}}\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}.$$

**تبصره.** اگر در قضیه ۳.۲.۲، $k = \text{۱}$ قرار دهیم، آنگاه نتیجه کوتانو و توزا بدست می‌آید. بنابراین این قضیه تعمیمی از نتیجه کوتانو و توزا است. زیرا

$$\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\binom{n}{\text{۱}}\binom{n-\text{۱}}{\text{۱}} - \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\binom{n}{\text{۱}}\left(\text{۲}\binom{n-\text{۱}}{\text{۱}} - \binom{n-\text{۲}}{\text{۱}}\right) \leq \chi(\mathrm{KG}(KG(n,\text{۱}), K_{\text{۳}})) \leq \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\binom{n}{\text{۱}}\binom{n-\text{۱}}{\text{۱}} - \frac{\lfloor(\frac{(n)^{\text{۲}}}{\text{۴}})\rfloor}{\binom{n}{\text{۲}}}\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\binom{n}{\text{۱}}\binom{n-\text{۱}}{\text{۱}},$$

بنابراین برای $n$ به اندازه کافی بزرگ داریم،

$$\chi(\mathrm{KG}(K_n, K_{\text{۳}})) = \lfloor\frac{(n-\text{۱})^{\text{۲}}}{\text{۴}}\rfloor.$$

**نتیجه ۳.۲.۲.** فرض کنید $n$ و $k$ اعداد صحیح مثبت باشند. اگر $n$ به اندازه کافی بزرگ باشد، آنگاه داریم

$$\chi(\mathrm{KG}(KG(n,k),K_{۳}))=\chi_c(\mathrm{KG}(KG(n,k),K_{۳})).$$

**اثبات.** ازآنجاکه کنسرگراف $\mathrm{KG}(n,k)$ یک گراف $\binom{n-k}{k}$ـ منتظم است و هر یال $\mathrm{KG}(n,k)$ در $\binom{n-۲k}{k}$ مثلث قرار دارد و $\mathrm{KG}(n,k)$ دارای $\frac{۱}{۲}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}$ یال است، با استفاده از لم ۲.۲.۲، گراف $\mathrm{KG}(n,k)$ دارای حداقل $\frac{۱}{۶}\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}\binom{n-۲k}{k}$ مثلث است. همچنین بااستفاده از قضیه۳.۲.۲، داریم $\chi(\mathrm{KG}(KG(n,k),K_{۳}))\approx O(n^{۲k})$. بنابراین

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Phi(\mathrm{KG}(KG(n,k),K_{۳}))}{\chi(\mathrm{KG}(KG(n,k),K_{۳}))}>۲.$$

بنابراین با استفاده از لم ۱.۱.۲، اثبات کامل می شود. □

# فصل ۳

# همریختی در ابرگراف‌های انتقال‌پذیرراسی و یالی

## ۱.۳ شرایط لازم وجود همریختی در ابرگراف‌ها با تعریف چند پارامتر

یکی از راه‌های بررسی وجود همریختی در ابرگراف‌ها استفاده از پارامترهایی مانند عددرنگی و یا عددرنگی‌دوری است. به‌عنوان‌مثال، فرض کنید $\mathcal{G}$ و $\mathcal{H}$ دو ابرگراف باشند. اگر $f : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ یک همریختی باشد آنگاه $\chi(\mathcal{G}) \leq \chi(\mathcal{H})$ و $\chi_c(\mathcal{G}) \leq \chi_c(\mathcal{H})$. لذا هریک از شرط‌های $\chi(\mathcal{G}) \leq \chi(\mathcal{H})$ یا $\chi_c(\mathcal{G}) \leq \chi_c(\mathcal{H})$، یک شرط لازم برای وجود همریختی از ابرگراف $\mathcal{G}$ به ابرگراف $\mathcal{H}$ می‌باشند. به‌طورمعادل، اگر $\chi(\mathcal{G}) > \chi(\mathcal{H})$ یا $\chi_c(\mathcal{G}) > \chi_c(\mathcal{H})$، همریختی از $\mathcal{G}$ به $\mathcal{H}$ وجود ندارد. بنابراین هرچه بتوان دامنه شروط لازم برای وجود همریختی بین دو ابرگراف را بیشتر گسترش داد، می‌توان دسته وسیع‌تری از ابرگراف‌هایی که بین آن‌ها همریختی وجود ندارد را بهتر تشخیص داد.

در این فصل، پارامترهایی را برای ابرگراف‌ها معرفی نموده و با استفاده از این پارامترها به بررسی شرایط لازم برای وجود همریختی بین دو ابرگراف خواهیم پرداخت. همچنین کران‌هایی برای این پارامترها بدست آورده می‌شود. بعضی نتایج بدست آمده در [۱۴، ۹، ۵] نیز به

ابرگراف‌ها تعمیم داده می‌شود. در ابتدا بعضی تعاریف لازم را ارائه می‌دهیم.

### ۱.۱.۳ مجموع‌رنگی‌راسی

**تعریف ۱.۱.۳.** فرض شود $\mathcal{H}$ یک ابرگراف و $c$ یک رنگ‌آمیزی‌مجاز برای $\mathcal{H}$ باشد. دراین‌صورت **رنگ آمیزی‌مجموع‌راسی**[1] $\mathcal{H}$ متناظر با رنگ‌آمیزی $c$ با $\sum_c(\mathcal{H}) = \sum_{v\in V(\mathcal{H})} c(v)$ تعریف می شود.
**مجموع رنگی راسی**[2] با نماد $\sum(\mathcal{H})$ نشان داده می شود و بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\sum(\mathcal{H}) = \min\left\{\sum_c(\mathcal{H}) \mid \text{یک رنگ آمیزی مجاز } \mathcal{H} \text{ } c\right\}.$$

قضیه زیر شرط لازم برای وجود همریختی در ابرگراف را فراهم می‌آورد که تعمیم قضیه‌ای در [۵] به ابرگراف است. در این مقاله علیشاهی و طاهرخانی با استفاده از مجموع رنگی راسی شرایط لازم برای وجود همریختی در گراف‌ها را فراهم آوردند. آن‌ها همچنین با استفاده از این پارامتر کران پایین برای عددرنگی‌کسری گراف بدست آوردند.

**قضیه ۱.۱.۳.** فرض کنید $\mathcal{G}$ و $\mathcal{H}$ دو ابرگراف باشند به‌قسمی‌که $\mathcal{H}$ ابرگراف انتقال‌پذیر راسی باشد. اگر $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ یک همریختی باشد، آنگاه

$$\frac{\sum(\mathcal{G})}{|V(\mathcal{G})|} \leq \frac{\sum(\mathcal{H})}{|V(\mathcal{H})|}.$$

**اثبات.** فرض کنید $Aut(\mathcal{H}) = \{f_۱, f_۲, \dots, f_t\}$ وهمچنین $\tilde{\mathcal{G}} = \bigcup_{i=۱}^{t} \mathcal{G}_i$، که هر $\mathcal{G}_i$ کپی یکریخت با $\mathcal{G}$ می‌باشد. تعریف می‌کنیم $g : \tilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{H}$ بقسمی که تحدید آن به هریک از $\mathcal{G}_i$ها برابراستبا $f_i o f$. واضح است که $g$ یک همریختی است، همچنین ازآنجاکه $\mathcal{H}$ ابرگراف انتقال‌پذیر راسی است برای هر راس $x \in V(\mathcal{H})$، $|g^{-۱}(x)|$ مقدار ثابتی است یعنی مستقل از $x$ می‌باشد. برای اثبات، توجه کنید برای هر دو راس $x, y \in V(\mathcal{H})$، همریختی $f_\circ \in Aut(\mathcal{H})$ وجود دارد به‌قسمی‌که $f_\circ(x) = y$. حال، با تغییر نام کپی‌های $\mathcal{G}$ در $\tilde{\mathcal{G}}$، واضح است که $f_\circ o g$ همان $g$ است. بنابراین $|g^{-۱}(x)| = |(f_\circ o g)^{-۱}(x)|$. از طرفی، چون $f_\circ(x) = y$، داریم

$$|g^{-۱}(x)| = |g^{-۱}(f_\circ^{-۱}(y))| = |(f_\circ o g)^{-۱}(y)| = |g^{-۱}(y)|.$$

بنابراین $|g^{-۱}(x)| = |g^{-۱}(y)|$. فرض کنید $|g^{-۱}(x)| = 3$. درنتیجه

$$|g^{-۱}(V(\mathcal{H}))| = \sum_{x\in V(\mathcal{H})} |g^{-۱}(x)| = 3 \cdot |V(\mathcal{H})|.$$

از طرفی $|g^{-۱}(V(\mathcal{H}))| = t \cdot |V(\mathcal{G})|$، که می‌توان نتیجه گرفت $3 = \frac{t\cdot|V(\mathcal{G})|}{|V(\mathcal{H})|}$. فرض کنید $c$ رنگ‌آمیزی‌مجاز $\mathcal{H}$ باشد، به‌قسمی‌که $\sum_c(\mathcal{H}) = \sum(\mathcal{H})$. برای هر راس $v \in V(\tilde{\mathcal{G}})$، قرار می‌دهیم

[1] vertex-sum coloring
[2] vertex-chromatic sum

$\tilde{c}(v) = c(g(v))$. $\tilde{c}$ یک رنگ‌آمیزی‌مجاز برای $\tilde{G}$ است. در نتیجه داریم $\sum_{\tilde{c}}(\tilde{G}) = \frac{t\cdot|V(\mathcal{G})|}{|V(\mathcal{H})|}\times\sum(\mathcal{H})$.
بنابراین اندیسی مانند $i$ وجود دارد به‌قسمی‌که $\sum_{\tilde{c}|_{\mathcal{G}_i}}(\mathcal{G}_i) \leq \frac{|V(\mathcal{G})|}{|V(\mathcal{H})|}\times\sum(\mathcal{H})$. ازآنجاکه $\mathcal{G}_i$ یکریخت با $\mathcal{G}$ است داریم $\sum(\mathcal{G}) \leq \frac{|V(\mathcal{G})|}{|V(\mathcal{H})|} \times \sum(\mathcal{H})$. بنابراین نتیجه بدست می‌آید.□

بنابراین اگر $\frac{\sum(\mathcal{G})}{|V(\mathcal{G})|} > \frac{\sum(\mathcal{H})}{|V(\mathcal{H})|}$، آنگاه همریختی از ابرگراف $\mathcal{G}$ به $\mathcal{H}$ وجود ندارد. در این قضیه شرط وجود همریختی به مفهوم مجموع‌رنگی مرتبط شده است. در قضایای بعد شرط وجود همریختی از ابرگراف $\mathcal{G}$ به ابرگراف انتقال‌پذیریالی و راسی را با مفاهیم جدید دیگر مرتبط خواهیم کرد.

مساله مجموع‌رنگی یک مساله $NP$_کامل است [۳۴]. بنابراین یافتن کران بالا یا پایین برای این مساله، مفید می‌باشد. حال یک کران بالا برای مجموع‌رنگی ابرگراف $\mathcal{H}$ ارائه داده می‌شود. فرض کنید $\mathcal{H}$ ابرگرافی با عددرنگی $\chi(\mathcal{H}) = n$ باشد. بنابراین همریختی از $\mathcal{H}$ به $K_n$ وجود دارد و با استفاده از قضیه ۱.۱.۳، داریم

$$\begin{aligned}\frac{\sum(\mathcal{H})}{|V(\mathcal{H})|} &\leq \frac{\sum(K_n)}{|V(K_n)|}\\ &= \frac{n(n+۱)}{۲n}\\ &= \frac{n+۱}{۲}\\ &= \frac{\chi(\mathcal{H})+۱}{۲}\end{aligned}$$

و بنابراین

$$\sum(\mathcal{H}) \leq \frac{\chi(\mathcal{H})+۱}{۲} \times |V(\mathcal{H})|.$$

### ۲.۱.۳ پارامتر $\alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{H})$

**تعریف ۲.۱.۳.** برای دو ابرگراف $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ تعریف می‌کنیم

$$\alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{H}) = \max\{|S| \mid S \subseteq V(\mathcal{H}),\ \mathcal{H}[S] \longrightarrow \mathcal{K}\}.$$

یعنی $\alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{H})$ بیشترین تعداد رئوس ابرگراف $\mathcal{H}$ است که زیرابرگراف‌القایی توسط این رئوس همریخت با $\mathcal{K}$ است.

توجه شود $\alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{H}) \geq ۱$، کافی است $S$ تک راس درنظر گرفته شود. همچنین $\alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{H}) \leq |V(\mathcal{H})|$.
در ادامه نتیجه بدست آمده توسط باندی و هل [۹] به ابرگراف تعمیم داده می‌شود.

**قضیه ۲.۱.۳.** فرض کنید $\mathcal{G}$ و $\mathcal{H}$ دو ابرگراف باشند به‌قسمی‌که $\mathcal{H}$ ابرگراف انتقال‌پذیرراسی باشد. برای هر ابرگراف $\mathcal{K}$ ، اگر $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ یک همریختی باشد، آنگاه

$$\frac{\alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{H})}{|V(\mathcal{H})|} \leq \frac{\alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{G})}{|V(\mathcal{G})|}.$$

**اثبات.** فرض کنید $\tilde{\mathcal{G}} = \bigcup_{i=1}^{|Aut(\mathcal{H})|} \mathcal{G}_i$، که هر $\mathcal{G}_i$ کپی یکریخت با $\mathcal{G}$ می‌باشد. تعریف می‌کنیم $g : \tilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{H}$ به‌قسمی‌که تحدید آن به هریک از $\mathcal{G}_i$ها برابر است با $f_i o f$، که $f_i \in Aut(\mathcal{H})$. واضح است که $g$ یک همریختی است و داریم

$$\alpha_{\mathcal{K}}(\tilde{\mathcal{G}}) = |Aut(\mathcal{H})| \times \alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{G}).$$

فرض کنید $S \subseteq V(\mathcal{H})$ باشد که $\mathcal{H}[S] \longrightarrow \mathcal{K}$ و $|S| = \alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{H})$. برای $S' = g^{-1}(S) \subseteq V(\tilde{\mathcal{G}})$، داریم $\tilde{\mathcal{G}}[S'] \longrightarrow \mathcal{K}$، زیرا $\tilde{\mathcal{G}}[S'] \longrightarrow \mathcal{H}[S] \longrightarrow \mathcal{K}$. بنابراین $|S'| \leq \alpha_{\mathcal{K}}(\tilde{\mathcal{G}})$. از طرف دیگر داریم

$$|S'| = \sum_{x \in S} |g^{-1}(x)| = |g^{-1}(x)| \cdot |S| \leq \alpha_{\mathcal{K}}(\tilde{\mathcal{G}}) = |Aut(\mathcal{H})| \times \alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{G}),$$

مانند آنچه در قضیه ۱.۱.۳ بیان شد برای هر $x \in V(\mathcal{H})$ داریم $|g^{-1}(x)| = |Aut(\mathcal{H})| \frac{|V(\mathcal{G})|}{|V(\mathcal{H})|}$. در نتیجه $|g^{-1}(x)| \cdot \alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{H}) \leq |Aut(\mathcal{H})| \cdot \alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{G})$، بنابراین $\frac{\alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{H})}{|V(\mathcal{H})|} \leq \frac{\alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{G})}{|V(\mathcal{G})|}$. □
توجه شود برای هر ابرگراف $\mathcal{H}$، داریم $\alpha_{K_1}(\mathcal{H}) = \alpha(\mathcal{H})$. زیرا

$$\alpha_{K_1}(\mathcal{H}) = \max\{|S| \mid S \subseteq V(\mathcal{H}),\ \mathcal{H}[S] \longrightarrow K_1\}.$$

بنابراین قضیه ۲.۱.۳، نامساوی معروف $\chi(\mathcal{H}) \geq \frac{|V(\mathcal{H})|}{\alpha(\mathcal{H})}$ را نتیجه می‌دهد. برای اثبات فرض کنید $\chi(\mathcal{H}) = n$، آنگاه همریختی از $\mathcal{H}$ به $K_n$ وجود دارد و با استفاده از قضیه ۲.۱.۳، داریم

$$\frac{\alpha_{K_1}(\mathcal{H})}{|V(\mathcal{H})|} \geq \frac{\alpha_{K_1}(K_n)}{|V(K_n)|},$$

$$\frac{\alpha(\mathcal{H})}{|V(\mathcal{H})|} \geq \frac{\alpha(K_n)}{|V(K_n)|},$$

$$\frac{\alpha(\mathcal{H})}{|V(\mathcal{H})|} \geq \frac{1}{n},$$

$$\frac{\alpha(\mathcal{H})}{|V(\mathcal{H})|} \geq \frac{1}{\chi(\mathcal{H})}.$$

به‌عنوان کاربردی از قضیه ۲.۱.۳، نتایج زیر را خواهیم داشت.

**نتیجه ۱.۱.۳.** فرض کنید $\mathcal{G}$ و $\mathcal{H}$ دو ابرگراف باشند، به‌قسمی‌که $\mathcal{H}$ انتقال‌پذیرراسی باشد و همریختی $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ موجود باشد. دراین‌صورت داریم

$$\frac{\alpha(\mathcal{H})}{|V(\mathcal{H})|} \leq \frac{\alpha(\mathcal{G})}{|V(\mathcal{G})|}.$$

**اثبات.** کافی در قضیه ۲.۱.۳ به‌جای $K$، $K_1$ قرار داده شود $(\alpha_{K_1}(\mathcal{H}) = \alpha(\mathcal{H}))$. □

**نتیجه ۲.۱.۳.** برای هر ابرگراف $r$ـیکنواخت $\mathcal{H}$، داریم $\omega(\mathcal{H}) \cdot \alpha(\mathcal{H}) \leq (r-1)|V(\mathcal{H})|$.

**اثبات.** اگر $\omega(\mathcal{H}) = n$، آنگاه همریختی از $K_n^r$ به $\mathcal{H}$ وجود دارد. حال با استفاده از قضیه۲.۱.۳، داریم

$$\frac{\alpha_{K_1}(\mathcal{H})}{|V(\mathcal{H})|} \leq \frac{\alpha_{K_1}(K_n^r)}{|V(K_n^r)|},$$

$$\frac{\alpha(\mathcal{H})}{|V(\mathcal{H})|} \leq \frac{\alpha(K_n^r)}{|V(K_n^r)|},$$

$$\frac{\alpha(\mathcal{H})}{|V(\mathcal{H})|} \leq \frac{r-1}{n},$$

$$\frac{\alpha(\mathcal{H})}{|V(\mathcal{H})|} \leq \frac{r-1}{\omega(\mathcal{H})}.\square$$

**نتیجه ۳.۱.۳.** برای هر ابرگراف $\mathcal{H}$، تعداد رئوس بزرگترین زیرابرگراف‌دوبخشی $\mathcal{H}$ بزرگتر از $\frac{|V(\mathcal{H})|}{\chi_f(\mathcal{H})}(1 - \frac{1}{\chi_f(\mathcal{H})})2$ می‌باشد.

**اثبات.** فرض کنید $\chi_f(\mathcal{H}) = \frac{m}{n}$. دراین‌صورت برای عدد صحیح مثبت $t$، همریختی از $\mathcal{H}$ به $\mathrm{KG}(tm, tn)$ وجود دارد. حال با استفاده از قضیه ۲.۱.۳، داریم

$$\frac{\alpha_{K_2}(\mathrm{KG}(tm, tn))}{|V(\mathrm{KG}(tm, tn))|} \leq \frac{\alpha_{K_2}(\mathcal{H})}{|V(\mathcal{H})|}. \tag{۱.۳}$$

که $\alpha_{K_2}(\mathcal{H})$ زیرابرگراف دوبخشی $\mathcal{H}$ با بیشترین تعداد رئوس است. حال تعریف می‌کنیم،

$$A = \{X \subseteq [tm] \mid |X| = tn,\ 1 \in X,\ 2 \notin X\}$$

و

$$B = \{X \subseteq [tm] \mid |X| = tn,\ 2 \in X,\ 1 \notin X\}.$$

فرض کنید $K_0$ زیرگراف‌القایی توسط رئوس $A \cup B$ در $\mathrm{KG}(tm, tn)$ باشد. $K_0$ دوبخشی است، بنابراین

$$2\binom{tm-2}{tn-1} = |V(K_0)| \leq \alpha_{K_2}(\mathrm{KG}(tm, tn))).$$

با استفاده از نامساوی (۱.۳)،

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_{K_۲}(\mathcal{H})}{|V(\mathcal{H})|} &\geq \frac{\alpha_{K_۲}(\mathrm{KG}(tm,tn))}{|V(\mathrm{KG}(tm,tn))|}\\
&\geq \frac{|V(K_۰)|}{|V(\mathrm{KG}(tm,tn))|}\\
&= \frac{۲\binom{tm-۲}{tn-۱}}{\binom{tm}{tn}}\\
&= \frac{۲n(tm-tn)}{m(tm-۱)}\\
&> \frac{۲n(m-n)}{m^۲}\\
&= ۲(۱-\frac{۱}{\chi_f(\mathcal{H})})\frac{۱}{\chi_f(\mathcal{H})}.\square
\end{aligned}$$

همانند نقشی که گراف کامل برای عددرنگی ایفا می کند، گراف کنسر برای عددرنگی‌کسری دارد. حال با استفاده از قضیه ۲.۱.۳، کران پایین برای عددرنگی‌کسری ابرگراف $\mathcal{H}$، ارائه خواهیم داد. برای هر گراف $G$ داریم، $\chi_f(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$. در ادامه با استفاده از قضیه ۲.۱.۳، این نتیجه به ابرگراف ها تعمیم داده می‌شود.

**توجه:** برای هر ابرگراف $\mathcal{H}$ داریم $\chi_f(\mathcal{H}) \geq \frac{|V(\mathcal{H})|}{\alpha(\mathcal{H})}$.

**اثبات.** فرض کنید $\chi_f(\mathcal{H}) = \frac{m}{n}$، آنگاه برای عدد صحیح مثبت $t$، همریختی از $\mathrm{KG}(tm, tn)$ به $\mathcal{H}$ وجود دارد. با استفاده از قضیه ۲.۱.۳،

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha(\mathcal{H})}{|V(\mathcal{H})|} &\geq \frac{\alpha(\mathrm{KG}(tm,tn))}{|V(\mathrm{KG}(tm,tn))|}\\
&= \frac{\binom{tm-۱}{tn-۱}}{\binom{tm}{tn}}\\
&= \frac{n}{m} = \frac{۱}{\chi_f(\mathcal{H})}.\square
\end{aligned}$$

## ۳.۱.۳ عدداستقلال‌آزاد ابرگراف $\mathcal{H}$ نسبت به ابرگراف دلخواه $\mathcal{K}$

همان‌طور که از قبل بیان شد، مجموعه‌مستقل‌آزاد در گراف‌ها توسط علیشاهی و حاجی ابوالحسن [۷]، به‌عنوان ابزاری برای مطالعه عددرنگی‌دوری کنسر گراف‌ها، معرفی شده است. این تعریف در [۴] به ابرگراف‌ها تعمیم داده شده است که شامل نتایجی برای عددرنگی‌دوری ابرکنسرگراف‌ها می‌باشد. برای ابرگراف $\mathcal{H}$، مجموعه $S \subseteq V(\mathcal{H})$ مجموعه‌مستقل‌آزاد نامیده می‌شود اگر دو مجموعه مستقل ماکسیمال متمایز $S_۱, S_۲ \subseteq V(\mathcal{H})$ وجود داشته باشند

به‌طوری‌که $S \subsetneq S_1$ و $S \subsetneq S_2$. اندازه بزرگترین مجموعه‌مستقل‌آزاد $\mathcal{H}$ با نماد $\bar{\alpha}(\mathcal{H})$ نشان داده می‌شود.

در ادامه $\bar{\alpha}_{\mathcal{K}}(\mathcal{H})$ را تعریف نموده و $\alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{H})$ به $\bar{\alpha}_{\mathcal{K}}(\mathcal{H})$ گسترش داده می‌شود به‌قسمی‌که، ازآنجاکه $\alpha_{\mathcal{K}}(\mathcal{H})$ تعمیم مجموعه‌مستقل است، $\bar{\alpha}_{\mathcal{K}}(\mathcal{H})$ تعمیم مجموعه‌مستقل‌آزاد است زیرا $\alpha_{K_1}(\mathcal{H}) = \alpha(\mathcal{H})$ و $\bar{\alpha}_{K_1}(\mathcal{H}) = \bar{\alpha}(\mathcal{H})$.

**تعریف ۳.۱.۳.** برای دو ابرگراف $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$، مجموعه $S \subseteq V(\mathcal{H})$ **آزاد نسبت به** $\mathcal{K}$ [3] نامیده می‌شود هرگاه دو مجموعه ماکسیمال و متمایز $S_1, S_2 \subseteq V(\mathcal{H})$ وجود داشته باشند به‌قسمی‌که $S \subsetneq S_1$ و $S \subsetneq S_2$.همچنین شرایط زیر برقرار باشد:

$$1.\mathcal{H}[S] \longrightarrow \mathcal{K},$$

$$2.\mathcal{H}[S_1] \longrightarrow \mathcal{K},$$

$$3.\mathcal{H}[S_2] \longrightarrow \mathcal{K}.$$

حال تعریف می‌کنیم

$$\bar{\alpha}_{\mathcal{K}}(\mathcal{H}) = \max\Big\{|S|:\ S \subseteq V(\mathcal{H}) \ \text{ و } \ S \text{ آزاد نسبت به } \mathcal{K}\Big\}.$$

اگر چنین مجموعه $S$ وجود نداشته باشد تعریف می‌کنیم $\bar{\alpha}_{\mathcal{K}}(\mathcal{H}) = 0$.

**قضیه ۳.۱.۳.** فرض کنید $\mathcal{G}$ و $\mathcal{H}$ دو ابرگراف باشند به‌قسمی‌که $\mathcal{H}$ انتقال‌پذیر راسی باشد. اگر $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ یک همریختی پوشای یالی باشد آنگاه

$$\frac{\bar{\alpha}_{\mathcal{K}}(\mathcal{H})}{|V(\mathcal{H})|} \leq \frac{\bar{\alpha}_{\mathcal{K}}(\mathcal{G})}{|V(\mathcal{G})|}.$$

اثبات. فرض کنید $\tilde{\mathcal{G}} = \bigcup_{i=1}^{|Aut(\mathcal{H})|} \mathcal{G}_i$، ابرگرافی باشد که از اجتماع مجزای $|Aut(\mathcal{H})|$ کپی از $\mathcal{G}$ ساخته شده است. تعریف می‌کنیم $g : \tilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{H}$، به‌قسمی‌که تحدید آن به هریک از $\mathcal{G}_i$ها برابر است با $f_i o f$، که $f_i \in Aut(\mathcal{H})$. واضح است که $g$ یک همریختی است و داریم

$$\bar{\alpha}_{\mathcal{K}}(\tilde{\mathcal{G}}) = |Aut(\mathcal{H})| \times \bar{\alpha}_{\mathcal{K}}(\mathcal{G}).$$

[3] free with respect to $\mathcal{K}$

فرض کنید مجموعه‌های متمایز $S_۱, S_۲ \subseteq V(\mathcal{H})$ و همچنین $S \subseteq V(\mathcal{H})$ موجود باشند به‌قسمی‌که

$$S \subsetneq S_۱, S \subsetneq S_۲,$$

$$\mathcal{H}[S] \longrightarrow \mathcal{K},$$

$$\mathcal{H}[S_i] \longrightarrow \mathcal{K}; \quad i = ۱,۲$$

و $|S| = \bar{\alpha}_{\mathcal{K}}(\mathcal{H})$. برای

$$S' = g^{-۱}(S) \subseteq V(\tilde{\mathcal{G}}),$$

$$S'_i = g^{-۱}(S_i) \subseteq V(\tilde{\mathcal{G}}), i = ۱,۲$$

داریم

$$\tilde{\mathcal{G}}[S'] \longrightarrow \mathcal{K},$$

$$\tilde{\mathcal{G}}[S'_i] \longrightarrow \mathcal{K}, i = ۱,۲,$$

زیرا

$$\tilde{\mathcal{G}}[S'] \longrightarrow \mathcal{H}[S] \longrightarrow \mathcal{K},$$

$$\tilde{\mathcal{G}}[S'_i] \longrightarrow \mathcal{H}[S_i] \longrightarrow \mathcal{K}, i = ۱,۲.$$

همچنین برای مجموعه‌های متمایز $S'_۱$ و $S'_۲$ و مجموعه $S'$ داریم $S' \subsetneq S'_۱, S' \subsetneq S'_۲$. بنابراین $|S'| \leq \bar{\alpha}_{\mathcal{K}}(\tilde{\mathcal{G}})$. ازطرف‌دیگر

$$|S'| = \sum_{x \in S} |g^{-۱}(x)| = |g^{-۱}(x)| \cdot |S| \leq \bar{\alpha}_{\mathcal{K}}(\tilde{\mathcal{G}}) = |Aut(\mathcal{H})| \times \bar{\alpha}_{\mathcal{K}}(\mathcal{G}),$$

که برای هر $x \in V(\mathcal{H})$ داریم $|g^{-۱}(x)| = |Aut(\mathcal{H})|\frac{|V(\mathcal{G})|}{|V(\mathcal{H})|}$. در نتیجه $|g^{-۱}(x)| \cdot \bar{\alpha}_{\mathcal{K}}(\mathcal{H}) \leq |Aut(\mathcal{H})| \cdot \bar{\alpha}_{\mathcal{K}}(\mathcal{G})$، بنابراین $\frac{\bar{\alpha}_{\mathcal{K}}(\mathcal{H})}{|V(\mathcal{H})|} \leq \frac{\bar{\alpha}_{\mathcal{K}}(\mathcal{G})}{|V(\mathcal{G})|}$. $\square$

**نتیجه ۴.۱.۳.** فرض کنید $\mathcal{G}$ و $\mathcal{H}$ دو ابرگراف باشند، به‌قسمی که $\mathcal{H}$ انتقال‌پذیرراسی باشد و همریختی پوشای‌یالی $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ موجود باشد. دراین‌صورت داریم

$$\frac{\bar{\alpha}(\mathcal{H})}{|V(\mathcal{H})|} \leq \frac{\bar{\alpha}(\mathcal{G})}{|V(\mathcal{G})|}.$$

**اثبات.** کافی است در قضیه ۳.۱.۳ به‌جای $\mathcal{K}$، $K_۱$ قرار داده شود $(\bar{\alpha}_{K_۱}(\mathcal{H}) = \bar{\alpha}(\mathcal{H}))$.$\square$

### ۴.۱.۳ چگالی ابرگراف

**تعریف ۴.۱.۳. چگالی**[۴] ابرگراف $\mathcal{H}$ ، با $\xi(\mathcal{H})$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\xi(\mathcal{H}) = \max\left\{\bar{e}(\mathcal{G}) \colon \mathcal{G} \leq \mathcal{H}\right\},$$

که

$$\bar{e}(\mathcal{G}) = \frac{|E(\mathcal{G})|}{|V(\mathcal{G})|}$$

و $\mathcal{G} \leq \mathcal{H}$ به این معناست که $\mathcal{G}$ زیرابرگراف‌القایی $\mathcal{H}$ است. توجه شود که زمانی‌که $\mathcal{G}$ گراف باشد (یعنی ابرگراف ۲ـ یکنواخت ) $۲\bar{e}(\mathcal{G})$ همان میانگین درجات $\mathcal{G}$ است.

**قضیه ۴.۱.۳.** فرض کنید $\mathcal{G}$ و $\mathcal{H}$ دو ابرگراف باشند به‌قسمی‌که $\mathcal{H}$ ابرگرافی $r$ـ یکنواخت و انتقال‌پذیرراسی و یالی باشد. اگر $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ یک همریختی باشد، آنگاه

$$\frac{\xi(\mathcal{H})}{\xi(\mathcal{G})} \leq \frac{\bar{e}(\mathcal{H})}{\bar{e}(\mathcal{G})}.$$

**اثبات.** فرض کنید $\tilde{\mathcal{G}} = \bigcup\limits_{i=۱}^{|Aut(\mathcal{H})|} \mathcal{G}_i$، ابرگرافی باشد که از اجتماع مجزای $|Aut(\mathcal{H})|$ کپی از $\mathcal{G}$ ساخته شده است. تعریف می‌کنیم $g : \tilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{H}$، بقسمی که تحدید آن به هریک از $\mathcal{G}_i$ ها برابراست‌با $f_i o f$، که $f_i \in Aut(\mathcal{H})$. واضح است که $g$ یک همریختی پوشای‌راسی و یالی است و برای هر $v \in V(\mathcal{H})$، داریم

$$|g^{-۱}(v)| = \frac{|V(\mathcal{G})| \times |Aut(\mathcal{H})|}{|V(\mathcal{H})|}.$$

بنابراین به وضوح

$$|V(\mathcal{G}')| = \frac{|V(\mathcal{G})| \times |Aut(\mathcal{H})|}{|V(\mathcal{H})|} \times |V(\mathcal{H}')|,$$

که $\mathcal{H}'$ زیرابرگراف $\mathcal{H}$ است به‌قسمی‌که

$$\xi(\mathcal{H}) = \bar{e}(\mathcal{H}') = \frac{|E(\mathcal{H}')|}{|V(\mathcal{H}')|}$$

و $\mathcal{G}'$ زیرابرگراف $\tilde{\mathcal{G}}$ القا شده توسط رئوس در $g^{-۱}(V(\mathcal{H}'))$ می‌باشد. حال برای هر یال $e \in E(\mathcal{H})$، فرض کنید

$$g^{-۱}(e) = \left\{e' \in E(\tilde{\mathcal{G}}) \colon e \subseteq g(e')\right\}.$$

ازآنجاکه $\mathcal{H}$ انتقال‌پذیریالی است، $|g^{-۱}(e)|$ مستقل از $e$ می‌باشد. برای اثبات، توجه کنید برای هر دو یال $e, e' \in E(\mathcal{H})$، همریختی $f_\circ \in Aut(\mathcal{H})$ وجود دارد به‌قسمی‌که $f_\circ(e) = e'$. حال، با تغییر نام کپی‌های $\mathcal{G}$ در $\tilde{\mathcal{G}}$، واضح‌است‌که $f_\circ o g$ همان $g$ است. بنابراین $|g^{-۱}(e)| = |(f_\circ o g)^{-۱}(e)|$. از طرفی، چون $f_\circ(e) = e'$، داریم

$$|g^{-۱}(e)| = |g^{-۱}(f_\circ^{-۱}(e'))| = |(f_\circ o g)^{-۱}(e')| = |g^{-۱}(e')|.$$

---
[4] density

بنابراین $|g^{-1}(e)| = |g^{-1}(e')|$.

فرض کنید $\zeta = |g^{-1}(e)|$. هر یال $e' \in E(\tilde{\mathcal{G}})$، برای یال‌های متفاوت $e \in E(\mathcal{H})$،در تعداد ثابت $g^{-1}(e)$ ظاهر می‌شود. فرض کنید این تعداد $\gamma$ باشد. به آسانی می‌توان بررسی نمود که

$$\frac{\zeta \times |E(\mathcal{H})|}{\gamma} = |E(\mathcal{G})| \times |Aut(\mathcal{H})|$$

و بنابراین

$$|E(\mathcal{G}')| \geq \frac{|E(\mathcal{H}')| \times \zeta}{\gamma} = \frac{|E(\mathcal{G})| \times |Aut(\mathcal{H})|}{|E(\mathcal{H})|} \times |E(\mathcal{H}')|.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\bar{e}(\mathcal{G}') &= \tfrac{|E(\mathcal{G}')|}{|V(\mathcal{G}')|} \\
&\geq \tfrac{|E(\mathcal{G})| \times |Aut(\mathcal{H})| \times |E(\mathcal{H}')|}{|E(\mathcal{H})|} \times \tfrac{|V(\mathcal{H})|}{|V(\mathcal{G})| \times |Aut(\mathcal{H})| \times |V(\mathcal{H}')|} \\
&= \tfrac{|E(\mathcal{G})|}{|V(\mathcal{G})|} \times \tfrac{|V(\mathcal{H})|}{|E(\mathcal{H})|} \times \tfrac{|E(\mathcal{H}')|}{|V(\mathcal{H}')|} \\
&= \bar{e}(\mathcal{G}) \times \tfrac{1}{\bar{e}(\mathcal{H})} \times \bar{e}(\mathcal{H}') \\
&= \tfrac{\bar{e}(\mathcal{G})}{\bar{e}(\mathcal{H})} \times \xi(\mathcal{H}).
\end{aligned}$$

متعاقبا

$$\frac{\bar{e}(\mathcal{G})}{\bar{e}(\mathcal{H})} \times \xi(\mathcal{H}) \leq \bar{e}(\mathcal{G}') \leq \xi(\mathcal{G}'),$$

که بدست می‌آوریم

$$\frac{\bar{e}(\mathcal{G})}{\bar{e}(\mathcal{H})} \leq \frac{\xi(\mathcal{G}')}{\xi(\mathcal{H})}.$$

از طرفی $\xi(\mathcal{G}') \leq \xi(\mathcal{G})$، زیرا $\bar{e}(\mathcal{G}') = \frac{|E(\mathcal{G}'_1)|+|E(\mathcal{G}'_2)|+\cdots+|E(\mathcal{G}'_t)|}{|V(\mathcal{G}'_1)|+|V(\mathcal{G}'_2)|+\cdots+|V(\mathcal{G}'_t)|}$، که $\mathcal{G}'_i = \mathcal{G}_i \cap g^{-1}(\mathcal{H}')$. حال فرض کنید برای هر $i = 1, 2, \ldots, t$ داشته باشیم $\frac{|E(\mathcal{G}'_s)|}{|V(\mathcal{G}'_s)|} \geq \frac{|E(\mathcal{G}'_i)|}{|V(\mathcal{G}'_i)|}$. بنابراین

$$\frac{|E(\mathcal{G}'_1)| + |E(\mathcal{G}'_2)| + \cdots + |E(\mathcal{G}'_t)|}{|V(\mathcal{G}'_1)| + |V(\mathcal{G}'_2)| + \cdots + |V(\mathcal{G}'_t)|} \leq \frac{|E(\mathcal{G}'_s)|}{|V(\mathcal{G}'_s)|} \leq \xi(\mathcal{G}'_s) \leq \xi(\mathcal{G}).$$

بنابراین

$$\frac{\bar{e}(\mathcal{G})}{\bar{e}(\mathcal{H})} \leq \frac{\xi(\mathcal{G})}{\xi(\mathcal{H})}.$$

یا بطور معادل

$$\frac{\xi(\mathcal{H})}{\xi(\mathcal{G})} \leq \frac{\bar{e}(\mathcal{H})}{\bar{e}(\mathcal{G})},$$

بنابراین اثبات کامل می‌شود. □

با استفاده از قضیه ۴.۱.۳، نتیجه زیر را خواهیم داشت.

**نتیجه ۵.۱.۳.** فرض کنید $\mathcal{G}$ یک ابرگراف باشد. دراین‌صورت داریم

$$\chi_f(\mathcal{G}) \geq (\frac{|E(\mathcal{G})|}{|V(\mathcal{G})|.\xi(\mathcal{G})}) + ۱.$$

**اثبات.** فرض کنید $\chi_f(\mathcal{G}) = \frac{m}{n}$. دراین‌صورت برای عدد صحیح مثبت $t$، همریختی از $\mathcal{G}$ به $\mathrm{KG}(tm, tn)$ وجود دارد. فرض کنید $K_۰$ زیرگراف‌القایی $\mathrm{KG}(tm, tn)$ توسط رئوس در $A \cup B$ باشد، که

$$A = \{X \subseteq [tm] \ \mid \ |X| = tn, \ \ ۱ \in X, \ ۲ \notin X\},$$

$$B = \{X \subseteq [tm] \ \mid \ |X| = tn, \ \ ۲ \in X, \ ۱ \notin X\}.$$

واضح‌است‌که $K_۰$ یک زیرگراف‌دوبخشی از $\mathrm{KG}(tm, tn)$ است. با توجه به تعریف چگالی داریم $\frac{|E(K_۰)|}{|V(K_۰)|} \leq \xi(\mathrm{KG}(tm, tn))$. نتیجتا با استفاده از قضیه ۴.۱.۳،

$$\begin{aligned}
\frac{|E(K_۰)|}{|V(K_۰)|} \times \frac{|V(\mathrm{KG}(tm,tn))|}{|E(\mathrm{KG}(tm,tn))|} &= \frac{\binom{tm-۲}{tn-۱}\binom{tm-tn-۱}{tn-۱}}{۲\binom{tm-۲}{tn-۱}} \times \frac{\binom{tm}{tn}}{\frac{۱}{۲}\binom{tm}{tn}\binom{tm-tn}{tn}} \\
&= \frac{\binom{tm-tn-۱}{tn-۱}}{\binom{tm-tn}{tn}} \\
&= \frac{tn}{tm-tn} \\
&= \frac{۱}{\frac{tm-tn}{tn}} \\
&= \frac{۱}{\frac{m}{n}-۱} \\
&= \frac{۱}{\chi_f(\mathcal{G})-۱} \\
&\leq \frac{\xi(\mathrm{KG}(tm,tn))}{\bar{e}(\mathrm{KG}(tm,tn))} \\
&\leq \frac{\xi(\mathcal{G})}{\bar{e}(\mathcal{G})} \\
&\leq \frac{|V(\mathcal{G})|\xi(\mathcal{G})}{|E(\mathcal{G})|},
\end{aligned}$$

بنابراین نتیجه بدست می‌آید.□

### ۵.۱.۳ پارامتر $\zeta(\mathcal{G},\mathcal{K})$

دانشگر و حاجی ابوالحسن در [۱۴] با استفاده از این پارامتر و توان گراف به بررسی شرایط لازم برای وجود همریختی در گراف‌ها پرداختند. همچنین به‌عنوان نتیجه، کران پایین برای عددرنگی‌کسری گراف بدست آوردند. در این رساله، این تعریف به ابرگراف تعمیم داده می‌شود و همچنین نشان داده می‌شود که این پارامتر نیز می‌تواند به‌عنوان معیاری برای عدم‌وجود همریختی در ابرگراف مورداستفاده قرار گیرد.

**تعریف ۵.۱.۳.** فرض کنید $\mathcal{G}$ و $\mathcal{K}$ دو ابرگراف باشند، در این صورت تعریف می‌کنیم

$$\zeta(\mathcal{G},\mathcal{K})=\max_{\mathcal{H}\leq\mathcal{G}}\left\{\frac{|E(\mathcal{H})|}{|V(\mathcal{H})|}:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{K}\right\}.$$

درواقع $\zeta(\mathcal{G},\mathcal{K})$ ماکسیمم چگالی زیرابرگراف‌های القایی $\mathcal{H}$ از $\mathcal{G}$ است که همریخت با ابرگراف $\mathcal{K}$ می‌باشند. با استفاده از قضیه زیر، نتیجه بدست آمده توسط دانشگر و حاجی ابوالحسن [۱۴] به ابرگراف تعمیم داده می‌شود.

**قضیه ۵.۱.۳.** فرض کنید $\mathcal{G}$ و $\mathcal{H}$ دو ابرگراف باشند، به‌قسمی‌که $\mathcal{H}$ یک ابرگراف $r$ـ یکنواخت و انتقال‌پذیرراسی و یالی باشد. اگر $f:\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{H}$ یک همریختی باشد، آنگاه داریم

$$\frac{\zeta(\mathcal{H},\mathcal{K})}{\bar{e}(\mathcal{H})}\leq\frac{\zeta(\mathcal{G},\mathcal{K})}{\bar{e}(\mathcal{G})}.$$

**اثبات.** مشابه اثبات قضیه ۴.۱.۳ می‌باشد. □

مشابه نتیجه ۵.۱.۳، نتیجه زیر را خواهیم داشت.

**نتیجه ۶.۱.۳.** فرض کنید $\mathcal{H}$ یک ابرگراف باشد. دراین‌صورت داریم:

$$\chi_f(\mathcal{H})\geq\left(\frac{|E(\mathcal{H})|}{|V(\mathcal{H})|\zeta(\mathcal{H},K_۲)}\right)+۱.$$

که $\zeta(\mathcal{H},K_۲)$ ماکسیمم چگالی زیرابرگراف‌های‌القایی‌دوبخشی از $\mathcal{H}$ می‌باشد.

**اثبات.** مشابه اثبات نتیجه ۵.۱.۳ می‌باشد. □

### ۶.۱.۳ پارامتر $\sum_m(\mathcal{G})$

**تعریف ۶.۱.۳.** فرض کنید $m$ عددی ثابت باشد، به‌قسمی‌که $n\geq mr$. دراین صورت تعریف می‌کنیم

$$\sum_m(\mathcal{G})=\min\left\{\sum_c(\mathcal{G})\mid c:\mathcal{G}\longrightarrow \mathrm{KG}^r(n,m)\right\},$$

که $\sum_c(\mathcal{G})=\sum_{v\in\mathcal{G}}\sum_{i\in c(v)}i$ .

درواقع پارامتر فوق تعمیمی از پارامتر مجموع‌رنگی ابرگراف می باشد. با فرض $m = ۱$ و $r = ۲$، قضیه زیر تعمیمی از نتیجه بدست آمده توسط علیشاهی و طاهرخانی [۵] به ابرگراف می‌باشد.

**قضیه ۶.۱.۳.** فرض کنید $\mathcal{G}$ و $\mathcal{H}$ دو ابرگراف باشند به‌قسمی‌که $\mathcal{H}$ یک ابرگراف‌انتقال‌پذیرراسی باشد. اگر $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ یک همریختی باشد، آنگاه

$$\frac{\sum_m(\mathcal{G})}{|V(\mathcal{G})|} \leq \frac{\sum_m(\mathcal{H})}{|V(\mathcal{H})|}.$$

**اثبات.** فرض کنید $\tilde{\mathcal{G}} = \bigcup_{i=۱}^{|Aut(\mathcal{H})|} \mathcal{G}_i$ ابرگرافی باشد که از اجتماع مجزای $|Aut(\mathcal{H})|$ کپی از $\mathcal{G}$ ساخته شده است. تعریف می‌کنیم $g : \tilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathcal{H}$، به‌قسمی‌که تحدید آن به هریک از $\mathcal{G}_i$ ها با $f_i o f$ برابر است که $f_i \in Aut(\mathcal{H})$. واضح‌است‌که $g$ یک همریختی است. فرض کنید رنگ‌آمیزی $c : \mathcal{H} \longrightarrow \mathrm{KG}^r(n, m)$ وجود داشته باشد به‌قسمی‌که $\sum_m(\mathcal{H}) = \sum_c(\mathcal{H})$. دراین صورت تعریف می‌کنیم $\tilde{c} : \tilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \mathrm{KG}^r(n, m)$ به‌قسمی‌که برای هر $v \in V(\tilde{\mathcal{G}})$، $\tilde{c}(v) = c(g(v))$. این یک رنگ‌آمیزی‌مجاز برای $\tilde{\mathcal{G}}$ است. درنتیجه $\sum_{\tilde{c}}(\tilde{\mathcal{G}}) = \mathfrak{Z} \times \sum_m(\mathcal{H})$، به‌قسمی‌که $\mathfrak{Z} = \frac{|Aut(\mathcal{H})| \cdot |V(\mathcal{G})|}{|V(\mathcal{H})|}$. بنابراین اندیسی مانند $i$ وجود دارد به‌قسمی‌که $\sum_{\tilde{c}|_{\mathcal{G}_i}}(\mathcal{G}_i) \leq \frac{|V(\mathcal{G})|}{|V(\mathcal{H})|} \times \sum(\mathcal{H})$ و از آنجا که $\mathcal{G}_i$ یکریخت با $\mathcal{G}$ است داریم $\sum_m(\mathcal{G}) \leq \frac{|V(\mathcal{G})|}{|V(\mathcal{H})|} \times \sum_m(\mathcal{H})$. بنابراین نتیجه بدست می‌آید.$\square$

# نتیجه گیری

در این رساله مفهوم عددرنگی‌آزاد ابرگراف تعریف شده است و با استفاده از ارتباط بین عددرنگی و عددرنگی‌آزاد، به بررسی شرایط کافی برای عدم‌وجود همریختی پرداخته شده است. در این راه شرایطی کافی برای برابری عددرنگی و عددرنگی‌دوری در برخی ابرکنسرگراف‌ها موردبررسی قرار گرفته است. همچنین برخی ابرکنسرگراف‌های جدید را تعریف نموده که یافتن عددرنگی و یا عددرنگی‌دوری آن‌ها می‌تواند موردبررسی قرار گیرد. به‌علاوه، عددرنگی برخی گراف‌ها نیز موردبررسی قرار گرفته است. همچنین برخی پارامترها را تعریف نموده و با استفاده از آن‌ها شرایط لازم برای وجود همریختی ( عدم‌وجود همریختی ) بین دو ابرگراف بیان شده است. به‌عنوان نتیجه‌ای از این شرایط، کران‌هایی برای عددرنگی‌کسری یک ابرگراف $\chi_f(\mathcal{H})$ارائه شده است. در فصل دوم این رساله، ابرکنسرگراف جدید تعریف شده است که یافتن عددرنگی و یا عددرنگی‌دوری آن‌ها می‌تواند بررسی شود.

همچنین می‌توان پارامترهای جدید را تعریف نمود و با استفاده از آن‌ها شرایطی برای عدم‌وجود همریختی به دست آورد.

# مراجع


[1] Abbott H. L. and Zhou B. (1993), "The star chromatic number of a graph", **Journal of Graph Theory** , 17, 349, pp 360.

[2] Albertson M. o. and Berman D. M. (1980), "The chromatic difference sequence of a graph" **Combinatorial Theory Series B**, 29, 1, pp 12.

[3] Albertson M. o. and Collins K. L. (1985), "Homomorphisms of 3-chromatic graphs" **Discrete Mathematics**, 54, 127, pp 132.

[4] Alishahi M. and Tahmasebi S. "On circular chromatic number and chromatic number of some generalized Kneser hypergraph," **Ars Combonatoria**, To appear.

[5] Alishahi M. and Taherkhani A. (2014), "A note on chromatic sum," **Ars Combonatoria**, 49, pp 54.

[6] Alishahi M. and Hajiabolhassan H. (2017), "Chromatic number via *Turán* number" **Discrete Mathematics**, 340, 2366, pp 2377.

[7] Alishahi M. and Hajiabolhassan H. (2010), "Circular coloring and mycielski construction" **Discrete Mathematics**, 310, 1544, pp 1550.

[8] Alon N. , Frankl P. and Lovasz L. (1986), "The chromatic number of Kneser hypergraphs," **American Mathematical Society**, 298, no. 1, 359, pp 370.

[9] Bondy J.A. and Hell P. (1990), "A note on the star chromatic number", **Graph Theory**, 14, 476, pp 482.

[10] Claude B. (1989), "**Hypergraphs**",45, **Combinatorics of finite sets**.

[11] Daneshgar A. and Hajiabolhassan H. (2003), "Graph Homomorphisms through random walks" **Graph Theory**, 44, 15, pp 38.

[12] Daneshgar A. and Hajiabolhassan H. (2006), "Graph Homomorphisms and nodal domains" **Linear Algebra and its Applications**, 418, 44, pp 52.

[13] Daneshgar A. and Hajiabolhassan H. (2007), "Circular coloring and algebraic no-homomorphism theorems," **European Journal of Combinatorics**, 28, no. 6, 1843, pp 1853.

[14] Daneshgar A. and Hajiabolhassan H. (2008), "Density and power graphs in graph homomorphism problem", **Discrete Mathematics**, 308, 4027, pp 4030.

[15] Eslahchi CH. and Rafiey A. (2004), "Circular Chromatic number of Hypergraphs", **Ars Combinatorics**.

[16] Erd$\ddot{o}$s P. and Simonovits M. (1984), "Cube supersaturated graphs and related problems, in:J.A. Bondy, U.S.R. Murty(Eds.), Progress in Graph theory" **AcadPress**.

[17] Erd$\ddot{o}$s P., Kubicka E. and Schwenk A. (1984),(1990), "Graphs that require many colors to achieve their chromatic sum," **In Proceeding of the Twentieth Southeastern conference on Combinatorics, Graph theory, and Computing(Boca Raton, FL,1989)**, 71, 17, pp 28.

[18] Erd$\ddot{o}$s P. and Simonovits M. (1966), "A limit theorem in graph theory" **Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica**, 1, 51, pp 57.

[19] Erd$\ddot{o}$s P. and Stone A.H. (1946), "On the structure of linear graphs" **Bulltian American Mathematics Society**, 52, 1087, pp 1091.

[20] Gao G. , Mendelsohn E. and Zhou H. , "Computing star chromatic number from related graph invariants", **JCMCC**, to appear.

[21] Guichard D. R. (1993), "Acyclic graph coloring and the complexity of the star chromatic number", **Journal of Graph Theory**, 17, 129, pp 134.

[22] Gyula O.H. , Katona O.H. and Tuza Z. ( 2013), "Color the cycles", **Discrete Mathematics**, 313, no. 19, 2026, pp 2033.

[23] Hajiabolhassan H. (2009), "On coloring of graph powers", **Discrete Mathematics**, 309, 4299,pp 4305.

[24] Hajiabolhassan H., Mehrabadi M.L. and Tusserkani R. (2000), "Minimal coloring and strength of graphs," **Discrete Mathematics**, 215, 265, pp 270.

[25] Hajiabolhassan H., Mehrabadi M.L. and Tusserkani R. (2005), "Tabular graphs and chromatic sum," **Discrete Mathematics**, 304, 11, pp 22.

[26] Hajiabolhassan H., and Taherkhani A. (2010), "Graph powers and graph homomorphisms," **Discrete Mathematics**, 304, no. 1-3, 11, pp 22.

[27] Hajiabolhassan H. and Zhu X. (2003), "Circular chromatic number of Kneser graphs" **Combinatorial Theory Series B**, 88, no. 2, 229, pp 303.

[28] Hahn G. , Tardif C. and Sabidussi G. (1997), "Graph Homomorphisms: Structure and Symmetry", **NATOAdv Science Seriece C Mathematical Physical Science**, 497, 107, pp 167.

[29] Hell P. (2003), "Algorithmic aspects of graph homomorphisms, in: C.D. Wensley", **Srvey in Combinatorics,London Mathematics Society Lecture Note Seriece, Cambridge University Press, Cambridge**, 307, 239, pp 276.

[30] Hell P. and Nesetril J. (2003), **Graph and Homomorphisms**, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications 28.

[31] Jiang T. and West D.B.. (1999), "Coloring of trees with minimum sum os colors", **Graph Theory**, 32, no. 4, 354, pp 358.

[32] Johnson A. , Holroyd F.C. and Stahl S. (1997), "Multichromatic numbers, star chromatic numbers and Kneser graphs", **Graph Theory**, 26(3), 137, pp 145.

[33] Kubicka E. ( 2004), "The chromatic sum of a graph: history and recent developments", **International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences**, (29-32), 1563, pp 1573.

[34] Kubicka E. and Schwenk A.J.( 1989), "An introduction to chromatic sums", **Proceedings of the 17th Conference on ACM Annual Computer Science Conference(New York, NY, USA), ACM**, 39, pp 45.

[35] Meunier F. (2005), (2005) "A topological lower bound for the circular chromatic number of Schriver graphs", **Journal of Graph Theory** , 49, no. 4, 257, pp 261.

[36] Moon J.W. and Moser L. (1962), "On a problem of Turan", **Magyar Akademic Mathematic Kutato International Kozl**, 7, 283, pp 286.

[37] Nordhaus E.A. and Steward B.M. (1963), ”Triangles in an ordinary graphs”, **Canadaian Journal of Mathematics**, 15, 33,pp 41.

[38] Rahimi S. and Erfani KH. (2017), ”On the edge-difference and edge-sum chromatic sum of the simple graphs”, **Algebraic Structures and their applications**, 4, 33,pp 42.

[39] Sabidussi G. (1964), ”Vertex-transitive graphs”, **Monatshefte fur Mathematik**, 68, 426, pp 438.

[40] Sabidussi G. ( 1961), ”Graph-derivatives”, **Mathematische Zeitschrift**, 76, 385, pp 401.

[41] Sidorenko A. ( 1993), ”A correlation inequality for bipartite graphs”, **Graphs and Combinatorics** , 9, 201, pp 204.

[42] Simonyi G. and Tardos G. (2006), ”Local chromatic number, Ky fan’s theorem and circular colorings”, **Combinatorica**, 26, no.5, 587, pp 626.

[43] Steffen E. and Zhu X. (1996), ”On the star chromatic numbers of graphs”, **Combinatorica**, 16, 439, pp 448.

[44] Tardif C. (1996), ”Graph products and the chromatic difference sequence of vertex transitive graphs, preprint, Universit´e de Montr´eal”, **Discrete Mathematics**, 54, 127,pp 132.

[45] Thomassen C., Erdös P., Alavi Y., Malde P.J. and Schwenk A.J. (1989), ”Tight bounds on the chromatic sum of a connected graph”, **Graph Theory**, 13, no. 3, 353, pp 357.

[46] Vince A. (1988), ”Star chromatic number”, **Graph Theory**, 12, 551, pp 559.

[47] Zhu B. (1997), ”Some theorems concerning the star chromatic number of a graph”, **Journal of Combinatorial Theory**, 70, 245, pp 258.

[48] Zhou H. (1993), ”Chromatic difference sequences and homomorphisms”, **Discrete Mathematics**, 113, 285, pp 292.

[49] Zhou H. (1993), ”The chromatic difference sequence of the cartesian product of graphs: Part II”, **Discrete Applied Mathematics**, 41, 263,pp 267.

[50] Zhu X. (1992), ”Star chromatic numbers and products of graphs”, **Journal of Graph Theory**, 16(6), 557, pp 569.

[51] Zhu X. (1996), ”Uniquely H-colorable graphs with large girth”, **Journal of Graph Theory**, 23, 33 pp 41.

[52] Zhu X. (1999), ”Construction of uniquely H-colorable graphs”, **Journal of Graph Theory**, 30, 1 pp 6.

[53] Zhu X. (1999), ”Graphs whose circular chromatic number equal the chromatic number”, **Combinatorica**, 19, 139, pp 149.

[54] Zhu X. ( 2001), ”Circular chromastic number:a survey”, **Discrete Mathematics**, 229, no. 1-3, 371, pp 410.

[55] Zhu X. (2006), ”Recent developments in circular coloring of graphs. In topics in discrete mathematics”, **Springer**, 26, 479 pp 550.

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

| | |
|---|---|
| ابرکنسرگراف | Kneser Hypergraph |
| ابرگراف | Hypergraph |
| ابرگراف آزاد | Free Hypergraph |
| ابرگراف یکنواخت | Uniform Hypergraph |
| ابرگراف انتقال پذیر راسی | Vertex Transitive Hypergraph |
| ابرگراف انتقال پذیر یالی | Edge Transitive Hypergraph |
| بدیها اشتراکی | Trivially Intersecting |
| چگالی | Density |
| حمایت کردن | Support |
| خودریختی | Automorphism |
| خوشه | Clique |
| رنگ آمیزی مجاز | Proper Coloring |
| رنگ آمیزی مجموع راسی | Vertex-Sum Coloring |
| زیرابرگراف القایی | Induced Subhypergraph |
| ستون | Spine |
| عدد توران تعمیم یافته | Generalized Turán Number |
| عدد رنگی آزاد | Free Chromatic Number |
| عدد رنگی دوری | Circular Chromatic Number |
| عدد رنگی کسری | Fractional Chromatic Number |
| مجاور | Adjacent |
| مجموع رنگی راسی | Vertex-Chromatic Sum |
| مجموعه مستقل آزاد | Free Independent set |
| مستقل | Independent |
| مینیموم برش | Minimum Cut |
| ناهمبند | Disconnected |
| همسایگی | Neighborhood |

همریختی ........................................ Homomorphism

یکریختی ........................................ Isomorphism

# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

| | |
|---|---|
| Adjacent | مجاور |
| Automorphism | خودریختی |
| Circular Chromatic Number | عدد رنگی دوری |
| Clique | خوشه |
| Density | چگالی |
| Disconnected | ناهمبند |
| Edge Transitive Hypergraph | ابرگراف انتقال پذیر یالی |
| Fractional Chromatic Number | عدد رنگی کسری |
| Free Chromatic Number | عدد رنگی آزاد |
| Free Hypergraph | ابرگراف آزاد |
| Free Independent set | مجموعه مستقل آزاد |
| Generalized Turán Number | عدد توران تعمیم یافته |
| Homomorphism | همریختی |
| Hypergraph | ابرگراف |
| Independent | مستقل |
| Induced Subhypergraph | زیرابرگراف القایی |
| Isomorphism | یکریختی |
| Kneser Hypergraph | ابرکنسرگراف |
| Minimum Cut | مینیموم برش |
| Neighborhood | همسایگی |
| Proper Coloring | رنگ آمیزی مجاز |
| Spine | ستون |
| Support | حمایت کردن |
| Trivially Intersecting | بدیها اشتراکی |
| Uniform Hypergraph | ابرگراف یکنواخت |
| Vertex-Chromatic Sum | مجموع رنگی راسی |

# نمایه

آ



چ



ح



خ



د



ر



ز

# علائم اختصاری

$\mathrm{GKG}^r(n,k,s)$:ابرکنسر گراف تعمیم یافته ۱۰

$B(\mathrm{KG}(n,k))$:اندازه بزرگترین زیرگراف دوبخشی در $\mathrm{KG}(n,k)$ ۲۴

$\xi(\mathcal{H})$: چگالی ابرگراف ۳۷

$C_k$: دور $k$ راسی۳

$\mathcal{H}[S]$: زیرابرگراف القایی توسط رئوس در مجموعه $S$ ۲

$\chi(\mathcal{H})$: عدد رنگی $\mathcal{H}$ ۳

$\chi_c(\mathcal{H})$: عدد رنگی دوری ۴

$\alpha(\mathcal{H})$:عدد استقلال ابرگراف ۴

$\omega(\mathcal{H})$ : عدد خوشه ای ابرگراف ۵

$\chi_f(\mathcal{H})$: عدد رنگی کسری ۵

$\bar{\alpha}(\mathcal{H})$:عدد استقلال آزاد ۸

$\Phi(\mathcal{H})$:عدد رنگی آزاد ۸

$\bar{\alpha}_{\mathcal{K}}(\mathcal{H})$:عدد استقلال آزاد ابرگراف $\mathcal{H}$ نسبت به ابرگراف دلخواه $\mathcal{K}$ ۳۵

$ex(G,F)$: عدد توران تعمیم یافته ۱۴

$\mathrm{K}_{\frac{n}{d}}$: گراف کامل دوری ۴

$P_k$: مسیر $k$ راسی۳

$\sum(\mathcal{H})$ : مجموع رنگی راسی۳۰

$N[v]$: همسایگی بسته راس $v$ ۲

**Aabstract**

In this dissertation, we introduced some new hypergraph homorphism-monotone parameters. Using this parameters, we investigate the existence of hypergraph homomorphism between two hypergraphs. In this regard, introducing some new necessary conditions for the existence of hypergraph homomorphism, we improve upon some coloring hypergraphs results and also present some new results in this area. In particular, generalizing a result for Kneser graphs, we prove that the chromatic number and circular chromatic number of generalized Kneser hypergraphs are equal if its number of vertices is sufficiently large.

**Key Words:** Hypergraph, Homomorphism, Circular chromatic number, Free chromatic number, Fractional chromatic number, Sum coloring, Vertex and edge transitive hypergraph.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in Graph and Combinatorics

# Study of no-homomorphism conditions in hypergaphs

By: Samaneh Tahmasebi

## Supervisors:

Dr. Sadegh Rahimi Sherbaf
Dr. Meysam Alishahi

February 2019