بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی، گرایش آنالیز

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

پوشش ریسک ارزش گذاری اختیار معامله در بازارهای بلک- شولز مارکوفی

نگارنده: مرتضی ضیاء خالو

استاد راهنما

دکتر الهام دسترنج

استاد مشاور

دکتر مجتبی میرلوحی

بهمن ۱۳۹۷

شماره:
تاریخ:

باسمه‌تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای **مرتضی ضیاء خالو** با شماره دانشجویی ۹۴۱۱۳۳۴ رشته ریاضی محض گرایش آنالیز تحت عنوان **پوشش ریسک ارزش گذاری اختیار معامله در بازارهای بلک‌شولز مارکوفی** که در تاریخ ۱۳۹۷/۱۱/۱۰ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه: عالی) ☑ مردود ☐	
نوع تحقیق: نظری ☑ عملی ☐	

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	دکتر الهام دسترنج	استاد یار	
۲- استادراهنمای دوم			
۳- استاد مشاور	دکتر مجتبی میرانوجی	استادیار	غایب
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر مهدی ایرانمنش	دانشیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر احمد محمد نژاد	دانشیار	
۶ـ استاد ممتحن دوم	دکتر عبدالمجید عبدالباقی	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم به

پدر و مادرم که پرتو مهرشان جاودانه است.

سپاس‌گزاری...

با سپاس از استاد ارجمندم سرکار خانم دکتر دسترنج، که همواره در تمامی مراحل انجام این پژوهش، صبورانه یاری‌ام نمودند. خانواده عزیزم که در دشواری‌های زندگی، برایم یاوری دلسوز و فداکار و پشتیبانی محکم و مطمئن بودند. دوستان عزیزم، آقایان مهندس عبدالله صباغی، شاهین قائد و وحید شکوری، که با همراهی بی‌دریغشان بسیاری از سختی‌ها را برایم آسان نمودند.

مرتضی ضیاء خالو
بهمن ۱۳۹۷

تعهد نامه

اینجانب **مرتضی ضیاء خالو** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی** **علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **پوشش ریسک ارزش گذاری اختیار معامله در بازارهای بلک‌ـ‌شولز مارکوفی** ، تحت راهنمایی **الهام دسترنج** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچجا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ’’ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مرتضی ضیاء خالو

بهمن ۱۳۹۷

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه با بازارهایي سروکار داریم که فرآیند قیمت آنها از مدل بلک ــ شولز تبعیت مي‌کند. یعني فرآیند قیمت آنها در معادله زیر صدق می‌کند:

$$dS_t = \mu\left(X_t\right) S_t dt + \sigma\left(X_t\right) S_t dW_t,$$

که در آن $\{W_t,\ t \geq ۰\}$ فرآیند براونی استاندارد و مستقل از زنجیر مارکوف و پارامترهای σ و μ به ترتیب دیریفت و تلاطم بازار را نشان می‌دهند. در این نوع بازارها به دنبال استراتژی می گردیم که ریسک را (به اصطلاح اقتصاددانان) پوشش می‌دهد.

کلمات کلیدی:
معادلات بلک ــ شولز، پوشش اختیار معامله، پرش ــ انتشار، اندازه مینیمم‌کننده مارتینگل، بازارهای مارکوفی ناقص

فهرست مطالب

فهرست تصاویر س

فهرست جداول ف

۱ تعاریف و مقدمات ۱
۱.۱ تعاریف و پیش‌نیازها ۱
۱.۱.۱ تقسیم‌بندی اختیارات معامله ۲
۲.۱.۱ ارزش گذاری اختیار معاملات ۵
۳.۱.۱ مدل بلک_شولز برای ارزش گذاری اختیار معامله ۶
۲.۱ فضای احتمال و متغیر تصادفی ۷
۳.۱ حرکت براونی ۱۲
۴.۱ انتگرال تصادفی ایتو ۱۳
۵.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ۱۴

۲ قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی در مدل پرش_انتشار ۱۷
۱.۲ مقدمه ۱۷
۲.۲ قیمت‌گذاری اختیار معامله ۲۰
۳.۲ معرفی طرح تفاضل متناهی صریح_ضمنی ۲۳
۴.۲ حل مدل پرش_انتشار با روش صریح_ضمنی ۲۴

۳ اختیار معامله اروپایی در بازارهای بلک_شولز مارکوفی ۲۷
۱.۳ مقدمه ۲۷
۲.۳ شرح مدل ۲۹
۳.۳ پوشش‌دهنده کوادراتیک ریسک در بازارهای ناقص ۳۴

۴ قیمت‌گذاری اختیارات با مانع و مرکب ۴۱
۱.۴ اختیارات با مانع ۴۱

۲.۴ اختیارات مرکب ۴۷

۵ نتایج عددی **۴۹**

مراجع **۵۷**

فهرست تصاویر

۱.۱ بازدهی حاصل از خرید یا فروش اختیار معاملات ۴

۱.۲ ناپیوستگی پرش فرآیند $\{X\}$ را در زمان t ۱۸

۱.۵ اختیار خرید اروپایی ۵۳
۲.۵ پوشش ریسک کوادراتیک اختیار خرید اروپایی با شرایط اولیه متفاوت . . ۵۴
۳.۵ اختیار خرید اروپایی صعود–و–خروج ۵۴
۴.۵ اختیار اروپایی خرید روی خرید ۵۵

فهرست جداول

۱.۱ تأثیر افزایش متغیرها بر قیمت اختیار معامله ۵

فصل ۱
تعاریف و مقدمات

در این فصل برخی مفاهیم و تعاریف مورد نیاز برای فصل‌های آتی آورده می‌شود. برای اکثر این مفاهیم به جز در مواردی که مشخص شده است از مرجع [۲] استفاده شده است.

۱.۱ تعاریف و پیش‌نیازها

در مدیریت مالی ریسک عبارت است از احتمال زیان ناشی از سرمایه گذاری. یکی از ساده‌ترین معیارها برای محاسبه ریسک، انحراف معیار است. به این صورت که هر چه انحراف معیار توزیع بازده بیشتر باشد، یعنی بازده دارایی وضعیت تصادفی‌تری دارد. مدیریت ریسک فرآیندی است که سازمان‌ها و موسسات مالی با استفاده از آن در جهت تبدیل ریسک‌های موجود در دنیای واقعی به ریسک‌های قابل کنترل، برای رسیدن به اهداف خاص خود از آن بهره می‌برند. فعالان بازارهای اقتصادی و سرمایه‌گذاري به دلیل شرایط حاکم بر بازارها، نوسانات و عدم اطمینان از وضعیت آتی بازار، همواره با ریسک‌هایی مواجه هستند که ممکن است آنها را در معرض زیان قرار دهد. به همین دلیل همواره تلاش شده است که راهکارهای مناسبی برای پوشش این ریسک‌ها اتخاذ شود و به عبارتی ریسک‌های پیش‌رو مدیریت شوند. یکی از ابزارهای این نوع مدیریت، اوراق مشتقه می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱. ابزار مشتقه، ابزارهایی مالی هستند که به طور عمده مبتنی یا مشتق از یک دارایی پایه است. به عبارت دیگر ارزش آنها وابسته به ارزش دارایی دیگری است. به عنوان

مثال‌هایی از این دارایی‌های پایه می‌توان انواع سهام، ابزارهای بهره‌ای و متأثر ازنوسانات نرخ بهره و انواع وام‌ها را نام برد [۱۴].

تعریف ۲.۱.۱. معامله‌گران در بازار به سه دسته تقسیم می‌شوند [۲۵]:

۱. پوشش دهندگان ریسک: کسانی که سعی دارند ریسک حاصل از نوسان قیمت را به حداقل برسانند.

۲. سفته بازان: کسانی که تمایل دارند حرکت آنی قیمت را پیش بینی کنند.

۳. آربیتراژگران: کسانی که از مزایای تفاوت قیمت بین دو یا چند بازار مختلف استفاده می‌کنند.

تعریف ۳.۱.۱. پرتفوی، مجموعه‌ای از تمام سهام‌ها، اختیارات و دیگر مشتقات مالی متعلق به معامله‌گر است.

تعریف ۴.۱.۱. آربیتراژ عبارت است از فرصت دستیابی به سود بدون ریسک، از طریق ورود همزمان در دو یا چند بازار.

اوراق مشتقه با توجه به موقعیت و شرایط بازار، به چهار نوع تقسیم می‌شوند:

۱. قرارداد آتی[۱]: به قراردادهایی که طی آن دو طرف ملزم به خرید و فروش دارایی خاصی در موعد مشخص و با قیمت از پیش تعیین شده هستند، قرارداد آتی می‌گویند.

۲. قرارداد سلف:[۲] این معاملات توافق برای خرید یا فروش یک نوع دارایی برای زمانی در آینده به مبلغ مشخص و معین است.

۳. قرارداد سوآپ[۳]: معاملات سوآپ، خرید و فروش و یا فروش و خرید همزمان یک کالا به سررسیدهای متفاوت است.

۴. قرارداد اختیار معامله[۴]: اختیار معامله ، قراردادی است که به دارنده آن، اختیار خرید یا فروش دارایی ذکر شده در قرارداد در تاریخ مشخص و با قیمت معین از پیش تعیین شده‌ای را می‌دهد. تاریخ مشخص شده در قرارداد را تاریخ اعمال یا انقضا و قیمت را نیز قیمت اعمال می‌نامند. از بزرگ‌ترین مزیت‌های این معاملات، زیان محدود و سود نامحدود است.

۱.۱.۱ تقسیم‌بندی اختیارات معامله

اختیارهای معامله را از جهات مختلفی می‌توان تقسیم‌بندی کرد:

---
[۱] Futures contract
[۲] Predecessor contract
[۳] Swap contract
[۴] Option contract

تقسیم بندی بر حسب موضع معاملاتی اتخاذ شده

تقسیم بندی اختیار معاملات بر حسب موضع معاملاتی اتخاذ شده به‌صورت زیر است:

۱. معاملات حق اختیار خرید: این معامله به صاحب آن حق می‌دهد که یک دارایی پایه را به قیمت مشخص در یک زمان معین در آینده خریداری کند اما الزامی برای انجام معامله برای وی وجود ندارد. این در حالی است که فروشنده اختیار خرید، در صورت اعمال حق از جانب خریدار اختیار خرید، ملزم به انجام معامله است. چنانچه قیمت نقدی دارایی مورد نظر در زمان اعمال، بالاتر از قیمت اعمال باشد، دارنده اختیار خرید، آنرا به موقع، به اجرا گذاشته و با قیمت اعمال کالا را می‌خرد و سپس در بازار به قیمت نقدی می‌فروشد و از این راه سود می‌برد و اگر قیمت نقدی پایین‌تر از قیمت اعمال باشد، اختیار خرید را رها کرده و از اعمال آن خودداری می‌نماید.

۲. معاملات حق اختیار فروش: برعکس معاملات اختیار خرید، معاملات اختیار فروش به خریدار یا دارنده آن حق فروش یک دارایی را به قیمت مشخص و در زمان معین می‌دهد و گرچه فروشنده اختیار فروش ملزم به انجام معامله است. لیکن این معاملات تعهدی برای خریدار ایجاد نمی‌کند. به همین دلیل منتشر کننده اختیار عمدتا در معرض خطر و زیانی احتمالی با مبلغ نامحدود است. این در حالی است که زیان خریدار در بدترین حالت منحصر به قیمتی است که برای خریداری اختیار پرداخته است. قیمتی را که خریدار باید برای خریداری اختیار خرید یا فروش بپردازد می‌توان نوعی حق بیمه تعبیر کرد که بابت انتقال ریسک به طرف مقابل، به وی پرداخت می‌شود.

در حالت کلی چهار موقعیت برای اختیار معامله موجود است:

۱. موقعیت خرید در قرارداد اختیار خرید.

۲. موقعیت خرید در قرارداد اختیار فروش.

۳. موقعیت فروش در قرارداد اختیار خرید.

۴. موقعیت فروش در قرارداد اختیار فروش.

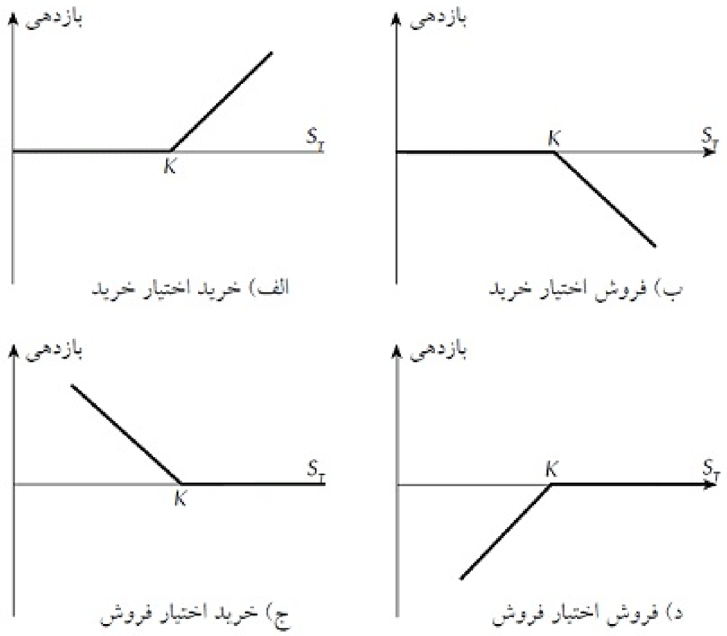
نمودارهای شکل ۵، بازدهی حاصل از خرید یا فروش اختیار معاملات را نشان می‌دهد که S_T قیمت دارایی پایه در زمان سررسید و K قیمت اعمال است.

تقسیم‌بندی بر مبنای زمان اعمال

تقسیم بندی اختیار معاملات بر حسب زمان اعمال به‌صورت زیر است:

۱. اختیار اروپایی: اختیارهایی که درست در زمان مشخص شده در قرارداد قابل اعمال هستند.

۲. اختیار آمریکایی: اختیار معامله ممکن است در روزهای قبل از سررسید معامله شود (امکان اعمال قبل از سررسید وجود دارد).



شکل ۱.۱: بازدهی حاصل از خرید یا فروش اختیار معاملات

اعمال اختیار آمریکایی صادره بر روی سهامی که سود پرداخت نمی‌کند، قبل از سررسید، بهینه نخواهد بود اما در حالت وجود سود، برخی اوقات، اعمال زودتر از موعد اختیار معامله قبل لز شروع تاریخ استحقاق سود سهام، بهینه خواهد بود زیرا سود پرداختی سهام باعث کاهش قیمت سهام و قیمت اختیار معامله می‌شود. اگر سود سهام پرداختی بزرگ باشد و اختیار خرید به اندازه کافی ارزشمند باشد، احتمالا صرف نظر از مدت زمان باقیمانده به سررسید اختیار معامله به جهت اجتناب از تأثیرات نامطلوب سود تقسیمی بر قیمت سهام، مطلوب‌تر خواهد بود.

انواع دیگر اختیارات عبارتند از: اختیارات آسیایی، اختیارات با مانع، اختیارات مرکب، اختیارات گزینش‌گر و ... .برای بدست آوردن اطلاعات بیشتر در مورد این اختیارات می‌توان به مرجع [۳۶] مراجعه کرد. اما به دلیل قیمت‌گذاری اختیارات با مانع در فصل چهارم لازم است تعریفی مختصر از این نوع اختیارات ارائه دهیم.

۳. اختیار با مانع: اختیارهایی که ارزش آنها وابسته به قیمت دارایی تا زمان سررسید است.

تقسیم بندی بر مبنای ارزش اختیار

این تقسیم بندی به شکل زیر است:

۱. اختیارهای سود آور: اختیار سود آور اختیاری است که برای دارنده آن در صورت اعمال

فوری این حق، جریان نقدی مثبتی به همراه دارد.

۲. اختیارهای سر به سر: اختیار سر به سر، اختیار معامله‌ای است که در صورت اجرای فوری آن، هیچ جریان نقدی مثبت و منفی عاید دارنده آن نمی‌شود.

۳. اختیارهای زیان‌ده: اختیار معامله زیان‌ده، در صورت اعمال فوری آن، جریان نقدی منفی برای دارنده اختیار به همرا دارد.

۲.۱.۱ ارزش گذاری اختیار معاملات

مهم‌ترین عواملی که بر قیمت اختیار معاملات تأثیر می‌گذارد عبارتند از: قیمت جاری سهام S، نرخ بهره بدون ریسک μ، نوسان‌پذیری قیمت سهام σ، مدت زمان باقیمانده تا سررسید T، قیمت توافقی K و سود تقسیمی مورد انتظار در طول عمر اختیار معامله.

به طور کلی ارزش یک قرارداد اختیار خرید با افزایش قیمت فعلی سهام، زمان باقیمانده تا سررسید، نوسان‌پذیری و نرخ بهره بدون ریسک افزایش یافته و با افزایش قیمت توافقی سود تقسیمی مورد انتظار کاهش می‌یابد. همچنین ارزش یک قرارداد اختیار فروش با افزایش قیمت توافقی، زمان باقیمانده تا سررسید، نوسان‌پذیری و سود تقسیمی مورد انتظار افزایش می‌یابد و با افزایش قیمت فعلی سهام و نرخ بهره بدون ریسک کاهش می‌یابد. تأثیر متغیرهای مختلف بر افزایش یا کاهش قیمت یک اختیار معامله از نوع اروپایی یا آمریکایی در جدول ۱.۱ نشان داده شده است. برای ارزش‌گذاری اختیار معاملات می‌توان از روش‌های مختلفی مانند

جدول ۱.۱: تأثیر افزایش متغیرها بر قیمت اختیار معامله

متغیر	اختیار خرید اروپایی	اختیار فروش اروپایی	اختیار خرید آمریکایی	اختیار فروش آمریکایی
قیمت فعلی سهام	+	−	+	−
قیمت توافقی	−	+	−	+
زمان تا سررسید			+	+
نوسان‌پذیری	+	+	+	+
نرخ بهره بدون ریسک	+	−	+	−
سود نقدی	−	+	−	+

مدل بلک_شولز و درخت دوجمله‌ای استفاده کرد. مدل بلک_شولز با توجه به فرآیند حرکت قیمت‌ها و بر این اساس که حرکت قیمت‌ها از یک گشت تصادفی پیروی می‌کند و در هر دوره زمانی دارای توزیع لگاریتم نرمال است، پایه‌گذاری شده است.

مدل درخت دوجمله‌ای به‌صورت یک دیاگرام است که مسیرهای مختلفی را که احتمال دارد سهام در طی عمر اختیار معامله طی کند، نشان می‌دهد. در این مدل فرض می‌شود که در هر واحد زمانی برای قیمت دو انتخاب وجود دارد. قیمت اولیه سهام در زمان صفر را با $S_۰$ نمایش داده و دو عدد مثبت u و d نیز وجود دارند که در آن $u > ۱$ و $d < ۱$ است. به این ترتیب قیمت سهام در یک زمان یا برابر $S_۰u$ و یا برابر $S_۰d$ است. در این مدل مشخص است که سهم در صورت افزایش یا کاهش قیمت دقیقا به چه مقداری خواهد رسید.

۳.۱.۱ مدل بلک_شولز برای ارزش گذاری اختیار معامله

این روش برای بار اول در سال ۱۹۷۳ توسط فیشر بلک[۵] و مایرون شولز[۶] ارائه گردید [۱۴]. این روش به دنبال تعیین قراردادهای اختیار خرید و فروش اوپایی است و در رابطه با قراردادهای خرید اختیار آمریکایی با محدودیت‌هایی مواجه بوده و برای اختیار فروش آمریکایی اصلا کاربرد ندارد. در الگوی اصلی این روش دارایی پایه فاقد هر نوع عایدی و تقسیم سود است که این محدودیت در الگوهای بعد اصلاح شده است [۳۸].

برای به‌دست آوردن فرمول قیمت‌گذاری بلک_شولز نیاز به فرضیات زیر داریم:

۱. رفتار قیمت سهام با مدل تابع لگاریتم نرمال مطابقت دارد.

۲. هیچ گونه هزینه معاملاتی یا مالیاتی وجود ندارد، کلیه اوراق بهدار به‌طور کامل قابل تفکیک و تجزیه هسند.

۳. سهام مورد نظر در طول عمر اختیار معامله ان سود پرداخت نمی‌کند.

۴. هیچ گونه فرصت سود بدون ریسک وجود ندارد.

۵. معاملات اوراق بهادار در هر زمانی امکان‌پذیر است.

۶. سرمایه‌گذاران می‌توانند با نرخ بهره بدون ریسک وام بگیرند و یا وام بدهند.

۷. نرخ بهره بدون ریسک کوتاه‌مدت (r)، ثابت است.

هدف نهایی تعیین قیمت اختیار یعنی $v\,(S,t)$ است که در آن S دارایی پایه است. در واقع این فرضیات اجازه می‌دهند تابع قیمت $v\,(S,t)$ جواب یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی باشد. معادله بلک_شولز به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$-\frac{\partial v}{\partial t}+rS\frac{\partial v}{\partial S}+\frac{۱}{۲}\sigma^۲S^۲\frac{\partial^۲ v}{\partial S^۲}-rv=۰, \qquad (۱.۱)$$

که در آن r نرخ بهره بدون ریسک، σ نوسان‌پذیری قیمت سهام، $S:=S\,(t)>۰$ برای $t\in(۰,T)$ و T مدت زمان باقیمانده تا سررسید است. معادله (۱.۱) معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی برای تابع $v\,(S,t)$ ناشی از اختیار است. برای معادله (۱.۱) یک جواب تحلیلی می‌توان به‌دست اورد که در آن قیمت دارایی پایه به‌صورت متغیر با توزیع احتمال نرمال در نظر گرفته می‌شود. با این روش، خود قیمت دارایی پایه دارای توزیع نرمال لگاریتمی خواهد بود.

[۵] Fischer Black

[۶] Myron Scholes

فیشر بلک و مایرون شولز نشان دادند که برای ارزش‌یابی خرید یک سهام، داشتن تخمینی منطقی از متغیرهای ارزش فعلی سهام (S) زمان اعمال اختیار (t)، نرخ واریانس ارزش سهام (σ)، ارزش اعمال اختیار یا قیمت توافقی (K) و نرخ بهره بدون ریسک (r) لازم و کافی هستند. ارزش اختیار خرید اروپایی با استفاده از معادله بلک_شولز به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$v_c(S,t) = SN(d_۱) - Ke^{-r(T-t)}N(d_۲),$$

که در آن

$$d_۱ = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right)+\left(r+\frac{۱}{۲}\sigma^۲\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_۲ = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right)+\left(r-\frac{۱}{۲}\sigma^۲\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_۱ - \sigma\sqrt{T-t}.$$

$N(.)$ تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد (تابع توزیع نرمال $(۰,۱)$) است. قیمت اختیار فروش اروپایی نیز به‌صورت زیر است:

$$v_p(S,t) = -SN(-d_۱) + Ke^{-r(T-t)}N(-d_۲).$$

۲.۱ فضای احتمال و متغیر تصادفی

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. منظور از یک توپولوژی روی X عبارت است از مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های X مانند $\mathcal{T}$ که دارای شرایط زیر باشد:

۱. $\phi, X \in \mathcal{T}$

۲. اجتماع هر تعداد دلخواه از عناصر $\mathcal{T}$ در $\mathcal{T}$ باشد.

۳. اشتراک تعداد متناهی از عناصر $\mathcal{T}$ در $\mathcal{T}$ باشد.

به عنوان مثال مجموعه $X = \{\phi, \mathcal{T}\}$ همواره یک توپولوژی روی X است که به آن توپولوژی بدیهی می‌گویند.

تعریف ۲.۲.۱. اگر X فضایی توپولوژیک با توپولوژی $\mathcal{T}$ باشد، زیر مجموعه U از X را یک مجموعهٔ باز X خوانیم هرگاه U متعلق به $\mathcal{T}$ باشد.

تعریف ۳.۲.۱. اگر Ω مجموعه‌ای داده شده باشد، در این صورت σ_میدان $\mathcal{F}$ روی Ω، یک خانواده از زیرمجموعه‌های Ω با خواص زیر است:

۱.اگر $A \in \mathcal{F}$ آنگاه $A^C \in \mathcal{F}$

۲. اگر $A_۱, A_۲, \ldots \in \mathcal{F}$ آنگاه $\bigcup\limits_{i=۱}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

زوج $(\Omega, \mathcal{F})$ فضای اندازه‌پذیر نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۲.۱. تابع $P : \mathcal{F} \to [۰,۱]$ روی فضای اندازه‌پذیر $(\Omega, \mathcal{F})$ را اندازه احتمال گویند، هرگاه:

۱. $P(\phi) = ۰$

۲. $P(\Omega) = ۱$

۳. اگر $A_۱, A_۲, \ldots \in \mathcal{F}$ و دو به دو مجزا باشند آنگاه $P\left(\bigcup\limits_{i=۱}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=۱}^{\infty} P(A_i)$

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید U خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های Ω باشد، در این صورت مجموعه زیر را کوچک‌ترین σـ میدان شامل U یا σـ میدان تولید شده توسط U می‌نامند.

$$\mathcal{H}_U = \bigcap \{\mathcal{H}; U \subset \mathcal{H}, \mathcal{H}\ is\, \sigma - algebra\ of\ \Omega\}$$

تعریف ۶.۲.۱. σـ میدان تولید شده توسط تمام مجموعه‌های باز را بورل می‌نامند و هر عضو از آنرا مجموعه بورل می‌نامند.

تعریف ۷.۲.۱. اگر $(\Omega, \mathcal{F})$ و $(\Omega', \mathcal{F}')$ دو فضای اندازه باشند، آنگاه تابع $X : \Omega \to \Omega'$ بردار نامیده می‌شود، اگر X، $\mathcal{F}$ اندازه‌پذیر باشد، یعنی

$$\forall A \in \mathcal{F}' \to X^{-۱}(A) \in \mathcal{F}.$$

در تعریف فوق اگر $(\Omega', \mathcal{F}') = (\mathcal{F}, \beta_۱)$ که بورل روی $\mathcal{F}$ است، آنگاه X را متغیر تصادفی می‌نامند.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید X_n دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد، در این صورت همگرایی‌های زیر را برای این دنباله داریم [۳۳]:

۱. همگرایی $a.s.$: می‌گوییم $X_n \overset{a.s.}{\to} X$ هرگاه

$$P\left(w : \lim_{n\to\infty} X_n(w) = X\right) = ۱.$$

این نوع همگرایی را همگرایی با احتمال ۱ نیز می‌نامند.

۲. همگرایی در احتمال: می‌نویسیم $X_n \overset{P}{\to} X$ ، اگر برای هر $\epsilon > ۰$

$$\lim_{n\to\infty} P(w : |X_n(w) - X(w)| > \epsilon) = ۰.$$

همگرایی در احتمال را همگرایی تصادفی نیز می‌نامند.

۳. همگرایی در L^p: فرض کنید $p > ۰$، گوییم $X_n \overset{L^p}{\to} X$ اگر

$$E(|X^p|) < \infty,$$

$$E(|X_n^p|) < \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty} E(|X_n(w) - X(w)|^p) = ۰.$$

۴. دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی X_n را در توزیع به X همگرا گوییم، هرگاه در تمام نقاط پیوستگی F_X داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

که در آن $F_X(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابع توزیع متغیر تصادفی X است و

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P(\{w\in\Omega : X(w)\le x\}).$$

تابع $F_X(x)$ یک تابع صعودی و از راست پیوسته است که

$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = ۰,$$

$$\lim_{x\to\infty} F_X(x) = ۱.$$

قضیه ۱.۲.۱. همگرایی $a.s.$ و همگرایی L^p هر دو همگرایی در احتمال را نتیجه می‌دهند [۴۱].

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنید T زیرمجموعه‌ای از خط حقیقی باشد. گردایه $\{X_t\}_{t\in T}$ از متغیرهای تصادفی

$$X_t : (\Omega, F)\to(R,\beta)$$

را فرآیند تصادفی می‌نامند. اگر T شمارش پذیر باشد، آنرا فرآیند تصادفی گسسته و اگر T ناشمارا باشد آنرا فرآیند تصادفی پیوسته می‌نامند. از آنجا که به طور معمول از اندیس T برای زمان استفاده می‌شود و فرآیند تصادفی را مدل ریاضی توصیف‌کننده یک پدیده در حال تحول طبیعی می‌گیرند،$T=[۰,\infty)$ اختیار می‌شود.

تعریف ۱۰.۲.۱. خانواده $\{\mathcal{F}_t : t\ge ۰\}$ از زیر σـ میدان‌های $\mathcal{F}$ را فیلتر می‌نامیم، اگر $s<t$، آنگاه $\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t$ [۷].

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنید $X=\{X_t : t>۰\}$ فرآیند تصادفی باشد، در این صورت برای هر $t\ge ۰$،$\mathcal{F}_t=\sigma(X_s : s\le t)$ کوچک‌ترین σـ میدان است که نسبت به آن هر X_s برای $s\le t$ اندازه‌پذیر است. واضح است که خانواده $\mathcal{F}_t=\sigma(X_s : s\le t)$ تشکیل یک فیلتر از σـ میدان‌های $\mathcal{F}$ می‌دهند.

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنید $(\Omega,\mathcal{F},P)$ فضای احتمال و X متغیر تصادفی روی این فضا و $\mathcal{G}$ زیر σـ میدان از $\mathcal{F}$ باشد. اگر $E(X)=\int\limits_{\Omega} XdP$ موجود باشد، آنگاه تابع $E(X|\mathcal{G}):(\Omega,\mathcal{F})\to(\mathbb{R},\mathcal{G})$ موجود است که $\int\limits_C XdP=\int\limits_C E(X|\mathcal{G})\,dP$ برای هر $C\in\mathcal{G}$. این تابع که تقریبا همه جا نسبت به P یکتاست، امید شرطی X به شرط $\mathcal{G}$ نامیده می‌شود.

اگر $\mathcal{G}=\mathcal{F}(Y)$ معمولا به جای $E(X|\mathcal{G})$ می‌نویسیم $E(X|Y)$ و آنرا امید شرطی X نسبت به Y می‌نامیم.

قضیه ۲.۲.۱. فرض کنید X و $X_۱$ و $X_۲$ متغیرهای تصادفی انتگرال‌پذیر روی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ دو زیرσـ میدان از $\mathcal{F}$ باشند. آنگاه [۳۴]

۱. $E\left(\alpha X_۱ + \beta X_۲ \left|\mathcal{D}\right.\right) = \alpha E\left(X_۱ \left|\mathcal{D}\right.\right) + \beta E\left(X_۲ \left|\mathcal{D}\right.\right), \;\; \alpha, \beta \in \mathbb{R},$

۲. $X_۱ < X_۲ \Rightarrow E\left(X_۱ \left|\mathcal{D}\right.\right) < E\left(X_۲ \left|D\right.\right),$

۳. اگر X و $\mathcal{D}$ اندازه‌پذیر باشند، آنگاه $E\left(X\left|\mathcal{D}\right.\right) = X$،

۴. اگر $\mathcal{F}\left(X\right)$ و $\mathcal{D}$ مستقل باشند $E\left(X\left|\mathcal{D}\right.\right) = E\left(X\right)$،

۵. $E\left(E\left(X\left|\mathcal{H}\right.\right)\left|\mathcal{D}\right.\right) = E\left(X\left|\mathcal{D}\right.\right)$.

همانطور که در ادامه خواهیم دید تعریف امید شرطی راه را برای تعریف مارتینگل باز مي‌کند.

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنید $X = \{X_t\}_{t\in T}$ و $Y = \{Y_t\}_{t\in T}$دو فرآیند تصادفی باشند. گوییم Y برگردان X است اگر برای هر $t \in T$ داشته باشیم:

$$P\left(\{w \in \Omega; X_t\left(w\right) = Y_t\}\right) = ۱.$$

علاوه بر این $t \to X_t$ که $[۰, \infty)$ را بتوی $\mathbb{R}$ می‌نگارد، مسیرهای نمونه‌ای فرآیند تصادفی X نامیده می‌شود.

تعریف ۱۴.۲.۱. (مارتینگل زمان پیوسته) خانواده $\{X_t, \mathcal{F}_t\}$ را مارتینگل می‌نامند، اگر

۱. برای هر $t \geq ۰$، X_t و $\mathcal{F}_t$ اندازه‌پذیر باشند.

۲. برای هر $t \in [۰, \infty)$، X_t انتگرال‌پذیر باشد، یعنی $E\left(|X_t|\right) < \infty$و

۳. برای هر $s \leq t$، $E\left(X_t\left|\mathcal{F}_s\right.\right) = X_s$.

اگر در ۳ تساوی را با $\leq$ جایگزین کنیم خانواده $\{X_t, \mathcal{F}_t\}$ فوق مارتینگل و اگر آنرا با $\geq$ جایگزین کنیم زیر مارتینگل خواهد بود.

تعریف ۱۵.۲.۱. گوییم فرآیند تصادفی X با فیلتر $\{F_t : t \in [۰, \infty)\}$ سازگار است اگر برای هر $t \in [۰, \infty)$، X_t و $\mathcal{F}_t$ اندازه‌پذیر باشد یعنی

$$\forall t \in [۰, \infty); \quad X_t \in \mathcal{F}_t.$$

تعریف ۱۶.۲.۱. فرض کنید $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq ۰}$ فیلتر باشد. تابع $T : \Omega \to [۰, \infty)$ را زمان توقف نسبت به فیلتر $\{F_t\}$ گوییم هرگاه $\{T \geq t\} \in \mathcal{F}_t$ برای هر $t \in [۰, \infty)$.

تعریف ۱۷.۲.۱. فرآیند تصادفی $\mathcal{F}_t$ سازگار X را نسبت به فیلتر $\mathcal{F}_t$ مارتینگل موضعی می‌نامیم هرگاه یک دنباله افزایشی از زمان‌های توقف τ_k موجود باشد که:

۱. هنگامی که $k \to \infty$ داشته باشیم $\tau_k \to \infty$.

۲. به ازای هر k، $X_{t\wedge\tau_k}$ یک $\mathcal{F}_t$ مارتینگل باشد.

تعریف ۱.۲.۱۸. فرض کنید $E \subset \mathbb{R}$ یک بازه باشد. تابع $f : E \to \mathbb{R}$، تابع کادلاگ[۷] نامیده می‌شود اگر برای هر $t \in E$ داشته باشیم:
۱. حد چپ $f(t^-) = \lim\limits_{s \to t^-} f(s)$ موجود باشد.
۲. حد راست $f(t^+) = \lim\limits_{s \to t^+} f(s)$ موجود باشد و برابر $f(t)$ باشد.
یعنی در تمام نقاط f پیوسته از راست و با حدود چپ باشد.

تعریف ۱.۲.۱۹. فرآیند تصادفی $X : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ نسبت به فیلتر $\{\mathcal{F}\}$ نیمه مارتینگل نامیده می‌شوداگر بتوان آنرا به‌صورت زیر تجزیه کرد

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,$$

که M مارتینگل محلی و A فرآیند کادلاگ سازگار (تقریبا همه جا دارای مسیرهای نمونه‌ای از راست پیوسته با حدود چپ) با تغییرات کراندار (تقریبا همه جا مسیرهای A روی هر بازه فشرده از $\mathbb{R}$ با تغییرات کراندار باشد) است. زمانی که M و A پیوسته باشند نیمه مارتینگل X نیز پیوسته خواهد بود، بعلاوه نمایش نیمه مارتینگل به‌صورت بالا یکتاست. [۱۲]
اکثر فرآیندهایی که ما آنها را می شناسیم نیمه مارتینگل هستند از جمله: فرآیندهای لوی، فرآیندهای وینر(حرکت براونی)، فرآیندهای با تغییرات کراندار یا مارتینگل های مربع انتگرال‌پذیر و ... .

تعریف ۱.۲.۲۰. فرآیند تصادفی حقیقی مقدار کادلاگ سازگار $L = \{L_t\}$ را با $L_0 = 0$، فرآیند لوی می‌نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:
۱. L دارای نموهای مستقل باشد. یعنی $L_t - L_s$ برای هر $0 \leq s < t \leq T$ مستقل از $\mathcal{F}_s$ باشند.
۲. L دارای نموهای ایستا باشد. یعنی برای هر $t, s \geq 0$، توزیع $L_{t+s} - L_t$ وابسته به t نباشد.
۳. L به صورت تصادفی پیوسته باشد. یعنی برای هر $t, \epsilon > 0$ داشته باشیم:

$$\lim_{s \to t} P(|L_t - L_s| > \epsilon) = 0.$$

تنها فرآیند لوی که دارای مسیرهای نمونه‌ای پیوسته است، حرکت براونی می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۲۱. یک دنباله از متغیرهای تصادفی زمان گسسته X_n را فرآیند مارکوف یا زنجیر مارکوف زمان گسسته گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$P\left(X_{n+1} = x_j \,|X_n = x_{i_n}\right) = P\left(X_{n+1} = x_j \,|X_1 = x_{i_1}, X_2 = x_{i_2}, ..., X_n = x_{i_n}\right).$$

خاصیت فوق را خاصیت مارکوفی از زنجیر مارکوف می‌نامند.

[۷] Cadlag

۳.۱ حرکت براونی

تعریف ۱.۳.۱. فرآیند تصادفی گاوسی $B=\{B_t\}$ با مقدار میانگین صفر و واریانس t و تابع کوواریانس

$$R(s,t)=Cov\{B_s,B_t\}=\min\{s,t\},$$

که $B_0=0$ را حرکت براونی استاندارد یا فرآیند وینر می‌نامیم.

گاهی اوقات حرکت براونی را با نماد $B=\{B_t\}$ نشان می‌دهند. این فرآیند دارای نموهای مستقل است به عبارت دیگر برای $t_1<t_2<...<t_n$ دلخواه، متغیرهای تصادفی

$$B_{t_2}-B_{t_1},...,B_{t_n}-B_{t_{n-1}}$$

مستقل هستند. در حقیقت به خاطر این که فرآیند گاوسی است کافی است تحقیق کنیم که نموها ناهمبسته هستند. اما اگر $s<t<u<c$، آنگاه داریم:

$$E[(B_t-B_s)(B_c-B_u)]=[R(t,c)-R(t,u)]-[R(s,c)-R(s,u)]=(t-t)-(s-s)=0.$$

همچنین نموهای این فرآیند ایستا می‌باشند. به عبارت دیگر برای هر $0\leq s<t<\infty$ متغیرهای تصادفی B_t-B_s و B_{t-s} دارای توزیع یکسان می‌باشند. اما با توجه به اینکه متغیرهای گاوسی با میانگین صفر هستند کافی است نشان دهیم که دارای واریانس‌های برابر هستند. اما

$$Var(B_t-B_s)=E\left[(B_t-B_s)^2\right]=E\left[B_t^2-2B_tB_s-B_s^2\right]=t-2s+s=t-s=Var(B_{t-s}).$$

اولین سوالی که در مورد حرکت براونی به ذهن می‌رسد این است که آیا چنین فرآیندی را می‌توان ساخت؟ جواب مثبت است و این کار را می‌توان توسط قضیه توسیع کلموگروف انجام داد. برای جزئیات بیشتر در مورد نحوه ساختن حرکت براونی خواننده را به [۷] ارجاع می‌دهیم. به آسانی می‌توان نشان داد حرکت براونی یک مارتیگل است و به علاوه بنابر معیار پیوستگی کلموگروف دارای برگردان پیوسته است. در ادامه برخی از خواص حرکت براونی را بیان می‌کنیم و برای اثبات آنها خواننده را به [۲۳] ارجاع می‌دهیم.

قضیه ۱.۳.۱. (خاصیت تغییر مقیاس) برای هر $t>0$ داریم:

$$B_{st}\stackrel{d}{=}\left\{t^{\frac{1}{2}}B_s\right\},\quad s\geq 0.$$

قضیه ۲.۳.۱. (پیوستگی مسیرهای حرکت براونی): مسیرهای حرکت براونی پیوسته و هولدر از مرتبه $\gamma<\frac{1}{2}$ هستند.

قضیه ۳.۳.۱. (مشتق‌ناپذیری مسیرهای حرکت براونی): تقریباً تمام مسیرهای حرکت براونی هیچ جا مشتق پذیر است، یعنی

$$P\left(\left\{\forall t \geq 0, \limsup_{h\to 0} \frac{B(t+h)-B(t)}{h} = +\infty\right\}\right) = 1.$$

به‌عنوان نتیجه‌ای از این قضیه می‌توان گفت: تقریباً هر مسیر نمونه‌ای حرکت براونی B_t دارای تغییرات نامتناهی روی بازه متناهی است.

۴.۱ انتگرال تصادفی ایتو

انتگرال تصادفی ایتو را می‌توان در سه مرحله زیر تعریف کرد:

مرحله ۱: تعریف انتگرال ایتو برای فرآیندهای تصادفی پلکانی

برای افراز $\Delta_n = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ از بازه $[a,b]$ که در آن $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ فرآیند تصادفی پلکانی f به‌شکل زیر تعریف می‌شود:

$$f(t,w) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}(w)\, \chi\left[t_{i-1}, t_i\right),$$

که در آن هر ξ_{i-1}، $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ـ اندازه‌پذیر است و $E\left[\xi_{i-1}^2\right] < \infty$. برای چنین فرآیندی ، انتگرال تصادفی ایتو به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}(w)\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right). \tag{۲.۱}$$

تعریف بالا در گزاره‌های زیر صدق می‌کند:

۱. متغیر تصادفی $I(f)$ خوش‌تعریف است.

۲. برای اعداد حقیقی a و b و فرآیندهای تصادفی پلکانی f و g داریم:

$$I(af+bg) = aI(f) + bI(g).$$

۳.

$$E\left[I(f)\right] = 0.$$

۴.

$$E\left[|I(f)|^2\right] = \int_a^b E\left[|f(t)|^2\right] dt.$$

مرحله ۲: تقریب هر $f \in L^2$ به فرآیندهای تصادفی پلکانی

برای تعمیم تعریف ارائه شده در مرحله ۱ به قضیه زیر که در آن شیوه تقریب زدن هر $f \in L^2([a,b]\times\Omega)$ به فرآیندهای تصادفی پلکانی ارائه می‌شود، نیاز داریم.

قضیه ۱.۴.۱. فرض کنید $f \in L^{۲}([a,b]\times\Omega)$. در این‌صورت دنباله‌ای مثل $\{f_n(t,w) : n \geq ۱\}$از فرآیندهای تصادفی پلکانی در $L^{۲}([a,b]\times\Omega)$ وجود دارد که:

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\left|f(t)-f_n(t)\right|^{۲}\right] dt = ۰. \tag{۳.۱}$$

مرحله ۳: تعریف انتگرال تصادفی ایتو در حالت کلی

اکنون با توجه به آنچه در مراحل ۱ و ۲ گفته شد، اتگرال تصادفی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\int_a^b f(t)\, dB_t, \qquad f \in L^{۲}([a,b]\times\Omega).$$

ابتدا با استفاده از قضیه مرحله ۱ دنباله $\{f_n(t,w) : n \geq ۱\}$ از فرآیندهای تصادفی پلکانی را در $L^{۲}([a,b]\times\Omega)$ پیدا می‌کنیم که

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b E\left[\left|f(t)-f_n(t)\right|^{۲}\right] dt = ۰. \tag{۴.۱}$$

برای هر f_n، انتگرال تصادفی $I(f_n)$ را به شیوه‌ای که در مرحله ۱ ارائه شد تعریف می‌کنیم.

$$E\left[\left|I(f_n)-I(f_m)\right|^{۲}\right] = \int_a^b E\left[\left|f_n(t)-f_m(t)\right|^{۲}\right] dt. \tag{۵.۱}$$

یعنی دنباله $\{I(f_n)\}$ دنباله کوشی در $L^{۲}(\mathcal{F})$ است و درنتیجه در این فضا به متغیر تصادفی $I(f)$ همگرا است.

همچنین می توان ثابت کرد که اگر دنباله $\{g_m\}$، دنباله‌ای دیگر از فرآیندهای تصادفی پلکانی باشد به‌طوری که $g_m \overset{L^{۲}[a,b]}{\to} f$، انگاه هر دو حد $\lim_{n\to\infty} I(f_n)$ و $\lim_{n\to\infty} I(g_n)$ در $L^{۲}(\mathcal{F})$ یکسان هستند. بنابراین اگر انتگرال تصادفی تابع $f \in L^{۲}([a,b]\times\Omega)$ را حد زیر در نظر بگیریم، خوش تعریف است.

$$\lim_{n\to\infty} I(f_n) \tag{۶.۱}$$

تعریف ۱.۴.۱. برای هر تابع $f \in L^{۲}([a,b]\times\Omega)$ ، حد به‌دست آمده در (۶.۱) را انتگرال تصادفی ایتو برای تابع f نامیده و آنرا با $\int_a^b f(t)\, dB_t$ نمایش می‌دهیم.

۵.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

تعریف ۱.۵.۱. معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، یک معادله شامل مشتقات تابع دلخواه

$$u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$$

است، که Ω زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^d\ (d \geq ۲)$ است [۲۶].

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در مدل کردن پدیده‌های فیزیکی مانند انتشار صدا یا گرما، الکترواستاتیک، الکترودینامیک، جریان سیالات و ... ظاهر می‌شوند.

صورت کلی یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی برای تابع u از دو متغیر مستقل x و y به صورت زیر می‌باشد [۱]:

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial}{\partial x}u, \frac{\partial}{\partial y}u, \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}u, \frac{\partial^{2}}{\partial x \partial y}u, \frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}u, \ldots\right) = 0. \qquad (7.1)$$

در صورتی که تابع F نسبت به u و مشتقات آن خطی باشد، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی تعریف شده در (۷.۱) یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی و در غیر این صورت یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی خواهد بود.

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را می‌توان با توجه به بیشترین مرتبه مشتق موجود در معادله نیز دسته‌بندی کرد.

صورت کلی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی مرتبه دو عبارت است از:

$$\begin{aligned} &A(x,y)\tfrac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}u + B(x,y)\tfrac{\partial^{2}}{\partial x \partial y}u + C(x,y)\tfrac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}u + D(x,y)\tfrac{\partial}{\partial x}u \\ &+E(x,y)\tfrac{\partial}{\partial y}u + F(x,y)u = G. \end{aligned} \qquad (8.1)$$

در صورتی که G در هر نقطه (x, y) از دامنه تعریف معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی برابر صفر باشد، معادله را همگن و در غیر این صورت معادله را ناهمگن می‌نامیم.

از سوی دیگر معادله (۸.۱) را در هر ناحیه مفروض از صفحه xy بر حسب اینکه مقدار

$$\Delta = B^{2} - 4AC$$

در سراسر ناحیه، مثبت، صفر و یا منفی باشد، به‌ترتیب به سه نوع اساسی هذلولوی، سهموی و بیضوی دسته‌بندی می کنند.

به عنوان مثال برای معادلات هذلولوی، معادله موج، برای معادلات سهموی، معادله گرما و برای معادلات بیضوی، معادله پواسون را می‌توان نام برد.

معادله موج:

$$\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}u - C^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}u = 0,$$

معادله گرما:

$$\frac{\partial}{\partial t}u - D\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}u = 0,$$

معادله پواسون:

$$-\Delta u = -\nabla^{2}u = -\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}u - \frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}u = f(x,y).$$

D و C ثابت‌های مثبت هستند.

به منظور تضمین یکتایی جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی روی دامنه Ω، معمولا شرایطی را روی مرز دامنه ($\Gamma := \partial\Omega$) اعمال می‌کنند. شرایطی که مقدار تابع جواب، مقدار

مشتق تابع جواب و یا ترکیبی از این دو را روی مرز بیان می‌کنند که به‌ترتیب شرایط مرزی دیریکله[۸]، نیومن[۹] و رابین[۱۰] نامیده می‌شوند. علاوه بر این‌ها در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی وابسته به زمان شرطی که مقدار تابع جواب را در زمان اولیه تعیین می‌کند، شرط اولیه نامیده می‌شود.

معمولا معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی روی فضاهای تابعی با بعد نامتناهی مدل‌بندی می‌شوند. در روش‌های عددی که برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ارائه شده است مانند روش تفاضل متناهی[۱۱]، روش حجم محدود[۱۲] و روش اجزای محدود، مساله را پس از گسسته‌سازی روی دامنه Ω، به مساله‌ای با بعد متناهی تبدیل می‌کنند.

[۸] Dirichlet

[۹] Neumann

[۱۰] Robin

[۱۱] Finite difference method

[۱۲] Finite volume method

فصل ۲

قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی در مدل پرش ـ انتشار

۱.۲ مقدمه

مدل انتشار محض ارائه شده توسط بلک و شولز نمی‌توانست دینامیک قیمت دارایی تحت حرکات ناگهانی بازار را توجیه کند، لذا مدل‌های کلی تری مانند مدل‌های نمائی لوی ارائه شده است. در مدل‌های نمائی لوی، S_τ برای $\tau \in [\circ, T]$ قیمت دارایی پایه و T زمان سررسید، به‌عنوان نمائی از فرایند لوی x_τ است. مدل ارزش دارایی زیر را روی فضای پالایش شده‌ی $(\Omega, \mathcal{F}_\tau, P)$ در نظر می‌گیریم:

$$S_\tau = S_\circ e^{X_\tau} \tag{۱.۲}$$

در مدل‌های پرش ـ انتشار لگ ـ قیمت دارایی پایه شامل جز انتشاری و جز پرشی است که در زمان‌های پواسون اتفاق می‌افتد.

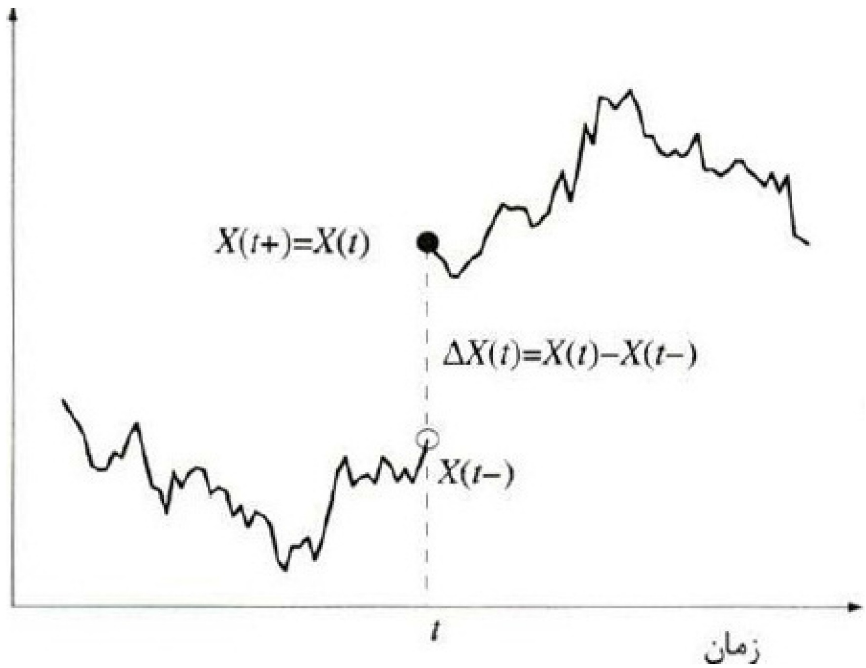
لذا در این فصل در نظر داریم مدل قیمت اختیاری را به‌دست آوریم که دارایی پایه‌ی آن از دو بخش انتشار و پرش تشکیل شده است. نظر به این‌که در حالت کلی فرآیند تغییر قیمت سهام فقط انتشاری نبوده و در بعضی حالات دارای جهش‌های بزرگ می‌باشد، همچنین در اکثر مواقع لگاریتم بازده‌ی سهام به‌صورت نرمال نیست، لذا مدل حرکت براونی هندسی نمی‌تواند

تصویر واقعی از مدل دارایی پایه داشته باشد، بدین ترتیب از مدل جایگزین، برای دارایی پایه استفاده می‌کنیم. از مزایای استفاده از روش پرش_انتشار، اول این‌که این مدل قادر است، خصوصیات مشاهده شده مهمی چون چولگی یا لبخند تلاطم را نشان دهد. دوم این‌که فرآیند پرش می‌تواند ناکاملی بازار مالی را توضیح دهد، بدین معنا که بازار واقعی نمی‌تواند در زمان کوتاهی به منظور جلوگیری از زیان واکنش نشان دهد. در نهایت این‌که حوادث (رویدادهای پیش‌بینی نشده) در بازار مالی نقش مهمی در تحلیل مالی بازی می‌کنند و استفاده از یک فرآیند پرشی برای مدل‌سازی حوادث می‌تواند مناسب باشد. مدل‌هایی که پرش‌های قابل توجهی را در قیمت‌ها و درآمدها وارد می‌کنند، می‌توانند عدم قطعیت و حوادث در بازار را توضیح دهند.

در ادامه برخی مفاهیم لازم برای این فصل آورده می‌شود:

تعریف ۱.۱.۲. تابع کادلاگ $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. اگر $t \in [0,T]$ یک نقطه ناپیوستگی تابع باشد، مقدار $\Delta f(t) = f(t) - f(t-)$ پرش تابع f در t نامیده می‌شود.

در تابع کادلاگ f، مجموعه نقاط ناپیوستگی، یعنی نقاط $\{t \in [0,T]; f(t) - f(t-) \neq 0\}$ شمارش‌پذیر است. فرآیند تصادفی کادلاگ می‌تواند تعداد متناهی پرش بزرگ $(|\Delta f(t)| > 1)$ و تعداد شمارش‌پذیر که ممکن است نامتناهی باشد، پرش کوچک داشته باشد. شکل ۱.۲ ناپیوستگی پرش فرآیند $\{X\}$ را در زمان t نشان می‌دهد.



شکل ۱.۲: ناپیوستگی پرش فرآیند $\{X\}$ را در زمان t

تعریف ۲.۱.۲. فرآیندها و متغیرهای مورد بحث در این جا روی یک فضای احتمال پالایش‌شده $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ تعریف شده‌اند.

اگر $\{T_n,\ n=0,1,2,...,\infty\}$ با شرط $T_0=0$، تقریبا به‌طور حتم یک دنباله اکیدا صعودی از متغیرهای تصادفی باشد، در این‌صورت

$$N(t)=\sum_{n\geq 1} 1_{\{t\geq T_n\}}, \tag{۲.۲}$$

فرآیند شمارشی وابسته به دنباله T_n است. اگر $T=Sup_n\{T_n\}=\infty$ تقریبا به‌طور حتم، N را بی‌انفجار می‌نامیم.

فرآیند شمارشی N را یک فرآیند پواسون گوییم اگر:

۱. $\mathcal{F}_t$ ـ سازگار،

۲. بی‌انفجار،

۳. دارای نموهای مانا و مستقل از گذشته باشد، یعنی $N(t)-N(s)$، با $N(t-s)$ هم‌توزیع بوده و از $\mathcal{F}_s$ مستقل باشد.

احتمال اینکه N دارای n جهش در بازه $[0,t)$ باشد برابر است با

$$P(N(t)=n)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}, \qquad n=0,1,2,... \tag{۳.۲}$$

که در آن $\lambda>0$ عدد ثابتی است. بنابراین متغیر تصادفی $N(t)$ دارای یک توزیع پواسون با پارامتر λt است.

میانگین، واریانس و تابع مشخصه فرآیند پواسون N با شدت $\lambda>0$ عبارتند از:

$$\begin{cases} E[N(t)]=\lambda t, \\ Var[N(t)]=\lambda t, \\ Cov[N(t),N(s)]=\lambda\min(s,t), \\ \varphi(u;t)=e^{-\lambda t\left(1-e^{\sqrt{-1}u}\right)}. \end{cases} \tag{۴.۲}$$

چون $E[N(t)]$ برابر با تعداد مورد انتظار پرش‌های N در زمان t است، لذا $\lambda=\frac{E[N(t)]}{t}$ نشانگر تعداد متوسط پرش‌ها در واحد زمان است و به شدت یا میانگین نرخ ورود N موسوم است.

متغیر تصادفی dq در فرآیند پواسون به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۳]

$$dq=\begin{cases} 0, & With\ \ probability\ \ (1-\lambda dt), \\ 1, & With\ \ probability\ \ (\lambda dt). \end{cases} \tag{۵.۲}$$

تعریف ۳.۱.۲. فرآیند پواسون مرکب با نرخ $\lambda>0$ و توزیع اندازه پرش f، یک فرآیند تصادفی $\{X_t\}$ است که به ازای هر $t>0$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X_t=\sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

که در آن اندازه‌های پرش Y_i مستقل و هم‌توزیع و $\{N_t\}$ یک فرآیند پواسون با نرخ λ و مستقل از $\{Y_i\}_{i>۱}$ است.

۲.۲ قیمت‌گذاری اختیار معامله

اگر فرآیند قیمت در لحظه t، ξ مقدار پرش داشته باشد، داریم:

$[dS]_{jump} = (\xi - ۱)\, Sdq$ برای قیمت‌گذاری مشتقات مالی تحت شرایط واقعی بازار به مدل‌های پیچیده‌تری نیازمندیم. در این بخش مدل پرش_انتشار را معرفی مي‌کنیم. اگر به نوسانات مدل بلک_شولز، پرش‌ها و سقوط‌هایی اضافه شود، مدل پرش_انتشار ایجاد می‌شود که تغییرات ناشی از قیمت ناگهانی سهام را بررسی می‌کند. در ادامه، مدل را بیان می‌کنیم.

فرض می‌کنیم دینامیک قیمت دارایی پایه (سهام) S از مدل حرکت براونی زیر تبعیت می‌کند:

$$dS = \mu S d\tau + \sigma S dw, \tag{۶.۲}$$

که $\tau \in [۰, T]$ و T زمان سررسید، σ ضریب نوسان، μ ضریب رانش و w فرآیند براونی هندسی است.

همچنین فرض می‌کنیم یک پرش در $[\tau, \tau + \Delta\tau]$ با احتمال $\lambda d\tau$ رخ داده شده باشد، به‌طوری که ارزش جدید دارایی پایه به میزان ξ_تا تغییر می‌کند. ξ (میزان پرش)، مثبت است. اندازه پرش مستقل از بازه زمانی ولی احتمال پرش رخ داده شده وابسته به زمان است.

تغییرات ناشی از پرش برای قیمت دارایی به‌صورت $[dS]_{jump} = (\xi - ۱)\, Sdq$ است. لذا اگر یک پرش رخ دهد، داریم:

$$\begin{aligned} S_{after\ jump} &= S_{before\ jump} + (dS)_{jump} \\ &= S_{before\ jump} + (\xi - ۱)\, S_{before\ jump} = \xi S_{before\ jump}, \end{aligned} \tag{۷.۲}$$

که در آن $S_{after\ jump}$ قیمت دارایی بعد از پرش، $S_{before\ jump}$ قیمت دارایی قبل از پرش و $(dS)_{jump}$ تغییرات ناشی از پرش است.

بنابراین قیمت دارایی، ترکیبی از انتشار و پرش به شکل زیر است:

$$dS = [\mu S d\tau + \sigma S dz] + [(\xi - ۱)\, Sdq]\,. \tag{۸.۲}$$

معادله فوق دینامیک قیمت دارایی تحت مدل پرش_انتشار را، نشان می‌دهد. بخش اول معادله ناشی از حرکت براونی و بخش دوم ناشی از پرش است. فرض می‌کنیم که $g(\xi)$ تابع

چگالی اندازه پرش باشد؛ لذا احتمال یک پرش در بازه $[\tau, \tau + d\tau]$، $g(\xi)$ می‌باشد. همچنین

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\, d\xi = \int_{\circ}^{\infty} g(\xi)\, d\xi = ۱.$$

اگر قرار دهیم $f = f(\xi)$ آنگاه داریم:

$$E(f) = \int_{\circ}^{\infty} f(\xi)\, g(\xi)\, d\xi. \tag{۹.۲}$$

فرض کنیم سبدی داریم که از یک اختیار خرید اروپایی C و از فروش استقراضی Δـ تا سهام تشکیل شده است. اگر Π ارزش سبد باشد، آنگاه $\Pi = C - \Delta S$. تغییرات ارزش سبد را در نظر میگیریم:

$$(d\Pi)_{total} = [d\Pi]_{brownian} + [d\Pi]_{jump}. \tag{۱۰.۲}$$

طبق لم ایتو داریم:

$$[d\Pi]_{brownian} = \left[\Pi_\tau + \mu S \Pi_s + \frac{۱}{۲} S^{۲} \sigma^{۲} \Pi_{ss}\right] d\tau + \sigma S \Pi_s dz. \tag{۱۱.۲}$$

با توجه به روابط (۱.۲) و (۱۱.۲) داریم:

$$[d\Pi]_{brownian} = \left[C_\tau + \mu S C_s + \frac{۱}{۲} S^{۲} \sigma^{۲} C_{ss}\right] d\tau + \sigma S (C_s - \Delta)\, dz. \tag{۱۲.۲}$$

با توجه به متناهی بودن اندازه پرش داریم:

$$[d\Pi]_{jump} = [C(\xi S, \tau) - C(S, \tau)]\, dq - \sigma S (\xi - ۱)\, \Delta S dq. \tag{۱۳.۲}$$

با انتخاب $\Delta = C_s$ می توان عامل تصادفی معادله (۱۲.۲) را حذف کرد. لذا معادله (۱۰.۲) به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$d\Pi = \left[C_\tau + \frac{۱}{۲} \sigma^{۲} S^{۲} C_{ss}\right] d\tau + [C(\xi S, \tau) - C(S, \tau)]\, dq - C_s (\xi - ۱)\, S dq. \tag{۱۴.۲}$$

تغییرات ارزش سبد هنوز دارای جز تصادفی dq است و نمی‌توان آن را پوشش داد، لذا با امید گرفتن از طرفین معادله فوق جز تصادفی را حذف می‌کنیم:

$$E[d\Pi] = \left[C_\tau + \frac{۱}{۲} \sigma^{۲} C_{ss}\right] d\tau + E[C(\xi S, \tau) - C(S, \tau)]\, E[dq] - C_s E[\xi - ۱]\, S E[dq]. \tag{۱۵.۲}$$

فرض کرده‌ایم که احتمال پرش و احتمال اندازه‌های پرش مستقل هستند. حال با انتخاب $E[\xi - ۱] = \kappa$ داریم:

$$E[d\Pi] = \left[C_\tau + \frac{۱}{۲} \sigma^{۲} C_{ss}\right] d\tau + E[C(\xi S, \tau) - C(S, \tau)]\, \lambda d\tau - C_s \kappa S \lambda d\tau. \tag{۱۶.۲}$$

پرش‌های اینگونه سبدها را ناهمبسته و واریانس آن را کوچک در نظر مي‌گیریم (ریسک کمی وجود دارد)؛ بنابراین بازده مورد انتظار باید به‌صورت زیر باشد:

$$E\left[d\Pi\right] = r\Pi\tau. \tag{۱۷.۲}$$

با جایگذاری معادله (۱۷.۲) در معادله (۱۶.۲) داریم:

$$C_\tau + \frac{1}{2}\sigma^2 C_{ss} + \left(rS - S\kappa\lambda\right)C_s - \left(r+\lambda\right)C + E\left[C\left(\xi S, \tau\right)\right]\lambda = 0. \tag{۱۸.۲}$$

با توجه به معادله (۱۸.۴) داریم:

$$C_\tau + \frac{1}{2}\sigma^2 C_{ss} + \left(rS - S\kappa\lambda\right)C_s - \left(r+\lambda\right)C + \lambda\int_0^\infty g\left(\xi\right)C\left(\xi S, \tau\right)d\xi = 0. \tag{۱۹.۲}$$

معادله فوق را یک معادله دیفرانسیل انتگرال جزئی تحت مدل پرش_انتشار می‌نامند. در این مدل، پرش‌ها دارای توزیع لگ نرمال با میانگین η و واریانس γ مي‌باشند. و تابع چگالی پرش‌ها عبارت است:

$$g\left(\xi\right) = \frac{e^{\frac{-\left(\log(\xi)-\eta\right)^2}{2\gamma^2}}}{\sqrt{2\pi\gamma^2}}. \tag{۲۰.۲}$$

برخلاف مدل بلک_شولز، برای حل مدل فوق باید از روش‌های عددی کمک بگیریم. برای این منظور با تغییر متغیرهای زیر معادله دیفرانسیل حاکم بر مدل را ساده‌تر می‌کنیم:

فرض کنید:

$$\begin{cases} S = Ke^x, \\ \xi = e^z, \\ t = T - \tau, \\ v\left(x+z, t\right) = C\left(Ke^{x+z}, T-\tau\right), \\ f\left(z\right) = e^z g\left(e^z\right), \end{cases}$$

که K قیمت توافقی است. از اینرو معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$v_t = \frac{1}{2}\sigma^2 v_{xx} + \left(r - \kappa\lambda - \frac{1}{2}\sigma^2\right)v_x - \left(r+\lambda\right)v + \lambda\int_0^\infty v\left(x+z, t\right)f\left(z\right)dz. \tag{۲۱.۲}$$

برای اختیار خرید اروپایی شرایط اولیه به‌صورت زیر است:

$$v\left(x, 0\right) = max\left(Ke^x - K, 0\right). \tag{۲۲.۲}$$

شرایط مرزی نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$v\left(x,t\right) \approx \begin{cases} 0, & x \to -\infty, \\ Ke^x - Ke^{-rt} & x \to \infty, \end{cases} \tag{۲۳.۲}$$

و $0 \le t \le T$.

در اینجا هدف محاسبه ارزش اختیار $v(x,t)$ در زمان $t=T$ است.
توجه داشته باشید که با اعمال تغییر متغیر $S=Ke^x$ بر روی تابع f داریم:

$$f(z)=e^z g(z)=\frac{e^{\frac{-(z-\eta)^2}{2\gamma^2}}}{\sqrt{2\pi\gamma^2}}.$$

تابع $f\geq 0$ تابع چگالی احتمال توزیع گاوسی است، لذا داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz=1. \tag{۲۴.۲}$$

برای حل مدل اختیار خرید اروپایی می‌توان از روش تفاضل متناهی صریح_ضمنی استفاده کرد. با استفاده از این روش بخش دیفرانسیلی معادله با روش ضمنی و بخش انتگرالی با روش صریح حل می‌شود [۴۲، ۳۵].

۳.۲ معرفی طرح تفاضل متناهی صریح_ضمنی

روش‌های عددی حل مدل‌های پرش_انتشار نسبت به مدل‌های انتشار از روش‌های نسبتاً جدید در ریاضیات مالی به شمار می‌روند. اگرچه معادله دیفرانسیل_انتگرالی جزئی شبیه به معادله بلک_شولز می‌باشد، ولی حل آن دشوارتر است.

در معادله (۲۱.۲) هم جمله دیفرانسیلی و هم جمله انتگرالی ظاهر شده است . همچنین معادله دیفرانسیل جزئی و عبارت انتگرالی روی بازه نامتناهی $(-\infty,+\infty)$ تعریف شده‌اند، که برای حل عددی آن ابتدا بازه نامتناهی را به یک ساختار شبکه‌بندی تفاضلات متناهی محدود می‌کنیم. بخش دیفرانسیلی را با استفاده از روش تفاضلات متناهی ضمنی و بخش انتگرالی را با روش تفاضلات متناهی صریح گسسته‌سازی می‌کنیم.

طرح فوق را که ژانگ [۲۷] برای قیمت‌گذاری اختیار پیشنهاد کرد، طرح تفاضلات متناهی صریح_ضمنی می‌گویند. روش صریح برای حل معادله دیفرانسیل_ انتگرالی جزئی، ناپایدار و همگرایی ضعیفی در جواب دارد. روش ضمنی نسبت به روش صریح پایدارتر و همگرایی بهتری دارد، ویلی چون ماتریس پر (ماتریسی که دارای درایه‌های ناصفر هستند) است، بدست آوردن وارون ماتریس آن مشکل است. لذا از ترکیب این دو روش استفاده می‌شود.

معادله دیفرانسیل_انتگرال جزئی زیر را در نظر بگیرید:

$$v_t=Dv+Iv,$$

که در آن D عملگر دیفرانسیلی و I عملگر انتگرالی است. طبق معادله دیفرانسیل_انتگرالی جزئی (۲۱.۲) روی $(-\infty,+\infty)\times[0,T]$ به‌صورت زیر داده شده است:

$$v_t=av_{xx}+bv_x-(r+\lambda)v+\lambda(v*f),$$

که در آن

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}\sigma^{2} > 0, \\ \\ b = r - \lambda\kappa - \frac{1}{2}\sigma^{2}. \end{cases} \tag{۲۵.۲}$$

لذا بخش دیفرانسیلی و بخش انتگرالی به ترتیب به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} Dv = av_{xx} + bv_{x} - (r+\lambda)\, v, \\ \\ Iv = \lambda \int_{0}^{\infty} v\,(x+z)\, f\,(z)\, dz. \end{cases}$$

از آنجا که عملگر انتگرالی معمولا دستگاه را پر می‌کند، از طرح تفاضل متناهی صریح_ضمنی برای اجتناب از محاسبه وارون ماتریس‌های پر استفاده مي‌کنیم. برای پیاده‌سازی روش تفاضل متناهی صریح_ضمنی، ابتدا بازه زمانی $[0,]$ را به J گام زمانی تقسیم می‌کنیم که

$$t_{j} = j\Delta t, \qquad \Delta t = \frac{T}{J}, \qquad , j = 0, 1, 2, ..., J.$$

فرض مي‌کنیم $v_{l,j}$ تقریبی از گام مکانی x_{l} برای $l = 1, 2, ..., L_{0} - 1$ (L_{0} طول بازه مکانی است) و گام زمانی t_{j} برای $j = 1, 2, ..., J$ باشد، آنگاه طرح صریح_ضمنی را که در آن بخش دیفرانسیلی را با روش ضمنی و بخش انتگرالی را با روش صریح برای $j = 0, 1, 2, ..., J - 1$ اعمال می‌کنیم:

$$\frac{v_{l,j+1} - v_{l,j}}{\Delta t} = Dv_{l,j+1} + Iv_{l,j},$$

یا به طور معادل:

$$v_{l,j+1} - \Delta t D v_{l,j+1} = v_{l,j} + \Delta t I v_{l,j}, \tag{۲۶.۲}$$

که در آن $v_{l,j}$ بیانگر $v\,(x_{l}, t_{j})$ می‌باشد.

هدف یافتن ارزش اختیار $v_{l,J}$ در سررسیدهای $v_{1,J}, v_{2,J}, ..., v_{L_{0}-1,J}$ است. در هر گام زمانی معادله خطی (۲۶.۲) با تعیین بردار $v_{l,j+1}$ حل می‌شود. توجه کنید که مقدار $v_{l,0}$ از شرط اولیه (۲۲.۲) و $v_{L_{0},j}$ از شرایط مرزی (۲۳.۲) به‌دست می‌آیند.

۴.۲ حل مدل پرش_انتشار با روش صریح_ضمنی

معادله دیفرانسیل_انتگرال جزئی (۲۱.۲) روی $[0, T] \times (-\infty, +\infty)$ به‌صورت زیر داده شده است:

$$\begin{cases} v_{t} = av_{xx} + bv_{x} - (r+\lambda)\, v + \lambda\,(v * f)\,, \\ \\ t \in [0, T]\,, \qquad x \in (-\infty, +\infty)\,, \end{cases} \tag{۲۷.۲}$$

که در آن

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}\sigma^2 > 0, \\ \\ b = r - \lambda\kappa - \frac{1}{2}\sigma^2. \end{cases} \qquad (۲۸.۲)$$

و

$$(v * f)(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x+z,t) f(z)\, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} v(y,t) f(y-x)\, dy.$$

فرض کنید $v_{l,j}$ و $(v*f)_{l,j}$ در گام lام و در سطح زمان jام، $j = 1, 2, ..., J$ باشد. با اعمال طرح تفاضل متناهی صریح_ضمنی داریم:

$$\frac{v_{l,j+1} - v_{l,j}}{\Delta t} = a(v_{xx})_{l,j+1} + b(v_x)_{l,j+1} - (r+\lambda)\, v_{l,j+1} + \lambda(v*f)_{l,j},$$

و در نتیجه داریم

$$-a\Delta t(v_{xx})_{l,j+1} - b\Delta t(v_x)_{l,j+1} + (1 + (r+\lambda)\Delta t)\, v_{l,j+1} = v_{l,j} + \lambda\Delta t(v*f)_{l,j}. \qquad (۲۹.۲)$$

فصل ۳

اختیار معامله اروپایی در بازارهای بلک_شولز مارکوفی

۱.۳ مقدمه

در این فصل ما به معرفی کلاسی از اختیار معامله در بازارهای بلک_شولز مارکوفی می‌پردازیم. این کلاس با این واقعیت مشخص می شود که اختیارات وابسته به مسیری ضعیف هستند. موارد دقیق‌تر متعلق به این کلاس وابسته به مسیر هستند، اما قیمت آنها را می‌توان از طریق معادلات دیفرانسیل بلک_شولز بدون معرفی هیچ متغیر مستقل اضافی تعیین کرد [۳۷].

فرض کنید وضعیت بازار با استفاده از زنجیر مارکوف $\{Y_t, t \geq ۰\}$ در زمان پیوسته با مقادیر $\{۱,۲,...,k\}$ تعریف شده باشد. اگر $Y_t = i$ باشد، آنگاه نرخ بهره $r(i)$ خواهد بود. فرآیند قیمت سهام $\{S_t, t \geq ۰\}$ توسط یک مارکوف هندسی با حرکت براونی به دست می‌آید، که در آن $\{S_t, t \geq ۰\}$ توسط معادله دیفرانسیل تصادفی زیر به‌دست می‌آید:

$$dS_t = \mu(Y_t) S_t dt + \sigma(Y_t) S_t dW_t,$$

که در آن $\{W_t, t \geq ۰\}$ حرکت براونی مستقل از زنجیر مارکوف $\{Y_t, t \geq ۰\}$ است و μ و σ توابعی مناسب هستند. قیمت‌گذاری اختیار در یک چارچوب رژیم سوئیچینگی توسط نویسندگان

مختلف با استفاده از روش های مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است: بوفینگتون[۱] و الیوت[۲] [۲۴]، دی‌ماسی[۳] و همکاران [۱۵]، گو[۴] [۴۳]، گو ژانگ[۵] [۴۴]، مامون[۶] و رادریگو[۷] [۴۰]، جوبرت[۸] و راگرس[۹] [۵]، تسویی[۱۰] و همکاران [۶] و یائو[۱۱] وهمکاران [۱۰]. قیمت گذاری اختیار برای دارایی با سود سهام مدول مارکوفی در [۱۶] مورد بررسی قرار گرفته است. مسئله بهینه‌سازی سبد سرمایه در بازار رژیم سوئیچینگی به‌طور مفصل بررسی شده است [۱۸، ۴۵]

از آنجائیکه بازار رژیم سوئیچینگی ناقص است، قیمت گذاری اختیار اغلب پیچیده و مبهم است. در یک بازار کامل هر ادعای مشروطی می تواند توسط یک استراتژی خود تامین مالی تکرار شود. بنابراین هر اختیاری را می‌توان به‌طور کامل پوشش داد. در همان زمان، از آنجا که اندازه مارتینگل معادل یکتایی وجود دارد، قیمت هر اختیار به‌طور یکتا توسط شرط انتظار قیمت با تخفیف از سرمایه نسبت به اندازه مارتینگل معادل تعیین می‌شود. اما این ویژگی در بازارهای ناقص وجود ندارد. در یک بازار ناقص مطالبات موکول به آینده که قابل دسترسی توسط استراتژی‌های خود تامین مالی باشند وجود ندارد. بنابراین، پوشش کامل امکان‌پذیر نیست. در عین حال، از آنجا که اندازه‌های معادل چندگانه وجود دارد، قیمت اختیار منحصر به فرد نیست. برای غلبه بر این مشکل، قیمت گذاری اختیار در بازارهای ناقص با روش‌های مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد. یکی از رویکردهای در این راستا این است که وجود یک اندازه خنثی را بپذیریم و کل تحلیل را تحت چنین اندازه‌گیری انجام دهیم. اندازه ریسک خنثی نوع خاص از معیار معادل است به طوری که قیمت هر معامله در بازار یک مارتینگل نسبت به داده‌های σ_میدان است. از آنجا که اختیار نیز یک معامله در بازار است، قیمت کنونی آن انتظاری شرطی نسبت به اندازه ریسک خنثی از تخفیف قیمت بازپرداخت نهایی است. یادآور می‌شود وجود اندازه ریسک خنثی در جهان ایده آل، در حالی که قیمت سهام در دنیای واقعی تکامل یافته است، ممکن است. به عنوان یک نتیجه، پارامترهای مدل رژیم تغییر بازار مانند λ_{ij}، $\sigma(i)$ و غیره باید با استفاده از مفاهیم صریح اندازه ریسک خنثی مانند اوراق قرضه فدرال، صورت‌حساب خزانه و غیره تخمین زده شود. در این روش پوشش اختیار مورد تاکید نیست. مقاله‌هایی که از این روش استفاده کرده‌اند عبارتند از [۲۴، ۴۰، ۵، ۱۰].

روش دوم برای حل یک بازار ناقص، ایجاد بازار با ارائه اوراق بهادار اضافی شناخته شده به

[۱] Buffington
[۲] Elliott
[۳] DiMasi
[۴] Guo
[۵] Zhang
[۶] Mamon
[۷] Rodrigo
[۸] Jobert
[۹] Rogers
[۱۰] Tsoi
[۱۱] Yao

عنوان اوراق بهادار $Arrow - Debreu$ است [۸، ۹]. در مرجع [۴۳] کارهایی برای بازار رژیم سوئیچینگی انجام گرفته است. رویکرد سوم در این زمینه شامل سوپرپروپلیت[۱۲] بندی نمونه کارها و پوشش بالای قیمت‌ها است [۲۲]. اگر چه این روش از یک منظر ریاضی بسیار عالی است، اما تنها کران‌هایی روی آربیتراژ آزاد قیمت اختیار را می دهد. به نظر ما این رویکرد برای مدل رژیم سوئیچینگی تاکنون مورد مطالعه قرار نگرفته است.

پوشش میانگین_واریانس یک روش قدرتمند در پوشش ادعاهای غیر قابل دستیابی در یک بازار ناقص است [۲۸]. پوشش میانگین_واریانس دو نوع دارد: پوشش مینیمم‌سازی واریانس و پوشش مینیمم‌سازی ریسک. پوشش مینیمم‌سازی واریانس تنها شامل استراتژی‌های خود تأمین_مالی[۱۳] است. از آنجایی که روش مینیمم‌سازی واریانس اساسا بر اساس استراتژی خود تأمین مالی است، اجازه کناره‌گیری قبل از سررسید را نمی‌دهد. این یک محدودیت در کاربرد این روش است. نکته مثبت در پوشش مینیمم‌سازی ریسک برای بازارهای ناقص توسط فولمر[۱۴] و ساندرمن[۱۵] ارائه شده است [۲۰، ۱۹]. با استفاده تابع باقیمانده کوادراتیک ریسک، آنها فرمولی را برای مینیمم‌سازی ریسک قیمت اختیار با استفاده از اندازه مارتینگل P^* به‌دست آوردند. علاوه بر این در [۱۹] نشان داده شده است که اگر تخفیف قیمت سهام قابل قبول باشد، تجزیه خاصی که به عنوان تجزیه فلومر_شویزر تحت احتمال P بازار شناخته می شود، می تواندعبارت‌هایی برای استراتژی پوشش و باقی‌مانده ریسک را بدست آورد. در مرجع [۱۱] دو روش مینیمم‌سازی واریانس و مینیمم‌سازی ریسک مقایسه شده‌اند.

در این فصل، ما از این روش قدرتمند برای مطالعه قیمت اختیار در بازار رژیم سوئیچینگی استفاده می کنیم. ابتدا، مینیمال اندازه مارتینگل P^* را برای مدل رژیم سوئیچینگی محاسبه کرده و نشان می‌دهیم که استراتژی پوشش ریسک برای کلاس خاصی از اختیارات تحت مینیمم‌سازی اندازه مارتینگل P^* است. قیمت مینیمم ریسک محلی از مسیر ضعیف وابسته به اختیار خارجی را می‌توان با استفاده از معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی بلک_شولز زیر با شرایط مرزی مناسب به‌دست آورد:

$$\frac{\partial \varphi(t,s,i)}{\partial t} + \frac{۱}{۲}\sigma(i)^{۲} s^{۲} \frac{\partial^{۲} \varphi(t,s,i)}{\partial s^{۲}} + r(i)\, s \frac{\partial \varphi(t,s,i)}{\partial s} + \sum_{j=۱}^{k} \lambda_{ij}\varphi(t,s,j) = r(i)\,\varphi(t,s,i). \quad (۱.۳)$$

۲.۳ شرح مدل

فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال کامل باشد. فرض کنید که وضعیت بازار $Y = \{Y_t\}_{t\geq ۰}$ یک زنجیر مارکوف تحویل‌ناپذیر روی فضای وضعیت متناهی $\mathfrak{X} = \{۱, ۲, ..., k\}$ با نرخ انتقال

[۱۲] Superreplicating
[۱۳] Self-financing
[۱۴] Föllmer
[۱۵] Sondermann

زیر باشد:

$$P\left(Y_{t+\delta t}=j\left|Y_t=i\right.\right)=\lambda_{i,j}\delta t+o\left(\delta t\right),\quad i\neq j, \tag{۲.۳}$$

که

$$\begin{cases}\lambda_{ij}\geq ۰, & i\neq j,\\ \lambda_{ii}=-\sum\limits_{j=۱}^{k}\lambda_{ij}.\end{cases}$$

فرض کنید $\Lambda=[\lambda_{ij}]$، Q_ماتریس ساخته شده از زنجیر باشد. ما نرخ بهره شناور را به عنوان پایه مدل دارایی ریسک می‌پذیریم و فرض می‌کنیم که نرخ بهره شناور آزاد بدون ریسک r_t، با توجه به شرایط بازار، با گذشت زمان، تکامل یابد. همچنین فرض می‌کنیم که r_t فقط به حالت فعلی Y_t در بازار بستگی داشته باشد، از این رو $r_t=r\left(Y_t\right)$ به‌صورت $\{r\left(i\right):i\in\mathfrak{X}\}$ و یک زنجیر مارکوف با Q_ماتریس Λ است.

فرض کنید $\{B_t\}_{t\geq ۰}$ مقدار پول در حساب بازار در زمان t با نرخ بهره شناور $r\left(Y_t\right)$ باشد. فرض کنید $B_۰=۱$، داریم:

$$B_t=e^{\int_۰^t r(Y_u)du}. \tag{۳.۳}$$

درنتیجه

$$dB_t=r\left(Y_t\right)B_tdt,\quad B_۰=۱. \tag{۴.۳}$$

فرض کنید $\{S_t\}_{t\geq ۰}$ فرایند قیمت سهام باشد که توسط حرکت براونی هندسی مدولار مارکوف اداره می شود. مقدار S_t به‌صورت زیر خواهد بود

$$dS_t=S_t\left(\mu\left(Y_t\right)dt+\sigma\left(Y_t\right)dW_t\right),\quad S_۰>۰, \tag{۵.۳}$$

که $W=\{W_t\}_{t\geq ۰}$ فرآیند وینر استاندارد مستقل از $Y=\{Y_t\}_{t\geq ۰}$، $\mu:\mathfrak{X}\to\mathbb{R}$ ضریب شناور و $\sigma:\mathfrak{X}\to(۰,\infty)$ تلاطم است. فرض کنید $\mathcal{F}_t=\sigma\left(S_u,Y_u,u\leq t\right)$. بدون از دست دادن کلیت مسئله می‌توان فرض کرد که $\{\mathcal{F}_t\}$ از راست پیوسته است . این فرض فیلتر پایه مدل را می‌سازد. مناسب‌تر است زنجیر مارکوف$\{Y_t\}$ به عنوان یک انتگرال تصادفی با توجه به اندازه تصادفی پوآسون است نمایش داده شود.

تعریف ۱.۲.۳. یک فضای پولیش[۱۶] $\mathcal{C}$ یک فضای توپولوژیکی جداپذیر و دارای یک متر سازگار d است به‌طوری‌که $(\mathcal{C},d)$ یک فضای متریک کامل باشد.

برای یک فضای پولیش $\mathcal{C}$ فرض کنید $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ سیگما میدان برل و $\mathcal{M}\left(\mathcal{C}\right)$ مجموعه‌ای از اندازه‌های سیگما میدان صحیح نامنفی روی $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ باشد. فرض کنید $\mathcal{M}_\sigma\left(\mathcal{C}\right)$ کوچک‌ترین

[۱۶] Polish

سیگما میدان رو $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ بوسیله نگاشت $\alpha_B : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ تعریف شده با $\alpha_B(\mu) := \mu(B)$ و برای هر $B \in \mathcal{B}(\mathcal{C})$ اندازه‌پذیر باشد. فرض شده است که $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ متصف[۱۷] با سیگما میدان $\mathcal{M}_\sigma(\mathcal{C})$ است.

برای $i \neq j \in \mathfrak{X}$، فرض کنید Λ_{ij} به‌طور متوالی (نسبت به ترتیب الفبایی روی $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$) بازه‌های از خط حقیقی از چپ بسته و از راست باز باشند و هرکدام دارای طول λ_{ij}. با نشاندن $\mathfrak{X}$ در $\mathbb{R}^k$ بوسیله مشخصه i با $e_i \in \mathbb{R}^k$ تعریف شده بوسیله تابع $h : \mathfrak{X}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ و

$$h(i,z) := \begin{cases} j-i, & if \;\; z \in \Lambda_{ij}, \\ \circ, & O.W. \end{cases} \tag{۶.۳}$$

درنتیجه

$$Y_t = Y_\circ + \int_\circ^t \int_R h(Y_{u-}, z)\,\varsigma(du, dz), \tag{۷.۳}$$

که انتگرال‌گیری روی بازه $(\circ, t]$ و $\varsigma(du, dz)$ اندازه پواسون $\mathcal{M}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ـ مقدار با شدت $dtdz$ است. $\varsigma(du, dz)$، $Y_\circ$، W و $S_\circ$ روی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ تعریف شده و مستقل هستند.

تعریف ۲.۲.۳. فرض کنید S جواب معادله (۵.۳) باشد. در این‌صورت مولد بینهایت کوچک S به‌صورت یک عملگر مانند $\mathcal{A}$ روی تابع مناسب (به شرطی که حد زیر موجود باشد) f به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{A}f(y) = \lim_{t\to\circ} \frac{E^y[f(S_t)] - f(y)}{t}.$$

از معادلات (۵.۳) و (۷.۳) به وضوح می‌توان دید که فرآیند (S_t, Y_t) تعریف شده روی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فرآیند مارکوف است. اکنون به محاسبه مولد بینهایت کوچک فرآیند مارکوف (S_t, Y_t) از معادلات (۵.۳) و (۷.۳) می‌پردازیم.

فرض کنید $\varphi : \mathbb{R}_+ \times Y \to \mathbb{R}$ تابعی هموار باشد. در این صورت با استفاده از فرمول ایتو [۳۰] داریم

$$\begin{aligned} d\varphi(S_t, Y_t) &= \int_{\mathbb{R}} \{\varphi(S_t, Y_{t-} + h(Y_{t-}, z)) - \varphi(S_t, Y_{t-})\}\,\varsigma(dt, dz) \\ &\quad + \tfrac{\partial}{\partial s}\varphi(S_t, Y_{t-})\,dS_t + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2}{\partial s^2}\varphi(S_t, Y_{t-})\,d\langle S, S\rangle_t \\ &= \mu(Y_{t-})\,S_t \tfrac{\partial}{\partial s}\varphi(S_t, Y_{t-})\,dt + \tfrac{1}{2}\sigma^2(Y_{t-})\,S_t^2 \tfrac{\partial^2}{\partial s^2}\varphi(S_t, Y_{t-})\,dt \\ &\quad + \sum_{j\in\mathfrak{X}} \varphi(S_t, j)\lambda_{Y_{t-},j}\,dt + d\tilde{M}_t, \end{aligned} \tag{۸.۳}$$

[۱۷] Endowed

که $\tilde{M}_t$ یک مارتینگل است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned}\tilde{M}_t &= \tilde{M}_0 + \int_0^t S_u \sigma\left(Y_{u-}\right) \frac{\partial}{\partial s}\varphi\left(S_u, Y_{u-}\right) dW_u \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left\{\varphi\left(S_u, Y_{u-} + h\left(Y_{u-}, z\right)\right) - \varphi\left(S_u, Y_{u-}\right)\right\} \hat{\varsigma}\left(du, dz\right),\end{aligned} \tag{۹.۳}$$

که $\hat{\varsigma}\left(du, dz\right) := \varsigma\left(du, dz\right) - dtdz$ اندازه پواسون جریمه است.

فرض کنید $\mathcal{A}$ مولد بینهایت کوچک از $\left(S_t, Y_t\right)$ باشد، از (۸.۳) داریم:

$$\mathcal{A}\varphi\left(S, i\right) = \mu\left(i\right) s \frac{\partial}{\partial s}\varphi\left(S, i\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\left(i\right) s^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2}\varphi\left(S, i\right) + \sum_{j\in\mathfrak{X}} \lambda_{ij}\varphi\left(S_t, j\right). \tag{۱۰.۳}$$

حال به مسئله ارزش اختیار می‌پردازیم. فرض کنید $T > 0$ زمان سررسید و H ادعای احتمال اروپایی در زمان سرسید T باشد. ما می‌خواهیم که قیمت آزاد آربیتراژ در هر زمان $0 \le t < T$ برآورد کنیم. برای این منظور ابتدا نشان می‌دهیم که اندازه مارتینگل معادلی برای قیم تخفیف سهام S_t^* وجود دارد. که $S_t^* := B_t^{-1} S_t$ که B_t و S_t در (۳.۳) و (۵.۳) امده است. توجه کنید که

$$S_t = S_0 e^{\left[\int_0^t \sigma(Y_u) dW_u + \int_0^t \left(\mu(Y_u) - \frac{1}{2}\sigma^2(Y_u) du\right)\right]}$$

جواب معادله (۵.۳) است. همچنین S_t^* در معادله زیر صدق می‌کند:

$$dS_t^* = \sigma\left(Y_t\right) S_t^* dW_t + \left(\mu\left(Y_t\right) - r\left(Y_t\right)\right) S_t^* dt. \tag{۱۱.۳}$$

برای $i \in \mathfrak{X}$ فرض کنید $\gamma\left(i\right) = \frac{\mu(i) - r(i)}{\sigma(i)}$، که در آن $\gamma\left(i\right)$ قیمت ریسک بازار در رژیم یا مد i است. فرض کنید

$$\begin{cases} \rho_t := e^{\left[-\int_0^t \gamma(Y_u) dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t \gamma(Y_u)^2 du\right]}, \quad t \le T, \\ \\ dP^* := \rho_T dP, \\ \\ W_t^* := W_t + \int_0^t \gamma\left(Y_u\right) du. \end{cases} \tag{۱۲.۳}$$

توجه کنید که $\{\rho_t\}_{0 \ge t \ge T}$ P_مارتینگل مربع انتگرال‌پذیر و P^* اندازه احتمال و معادل با P است. تحت اندازه جدید P^*، $\{W_t^*\}_{0 \ge t \ge T}$ یک فرآیند $\mathcal{F}$_وینر است و S_t در معادله زیر صدق می‌کند

$$dS_t = S_t\left(r\left(Y_t\right) dt - \sigma\left(Y_t\right) dW_t^*\right).$$

همچنین تحت P^*

$$dS_t^* = S_t^* \sigma\left(Y_t\right) dW_t^*. \tag{۱۳.۳}$$

بنابراین $\{S_t^*\}$ یک مارایتگل تحت P^* است. بنابراین P^* اندازه مارتینگل معادل[۱۸] EMM است. این نشان می‌دهد که بازار در نظر گرفته شده یک آربیتراژ آزاد است. P^* ساخته شده در (۱۲.۳) دارای ویژگی‌های خاصی است از جمله اینکه اندازه مارتینگل مینیمال است [۱۹].
برای این منظور توجه کنید که $\{S_t^*\}$ یک نیمه_مارتینگل تحت P است و

$$M_t := \int_\circ^t \sigma\left(Y_u\right) S_u^* dW_u \tag{۱۴.۳}$$

بخش مارتینگل از $\{S_t^*\}$ تحت P است. حال طبق مرجع [۱۹] EMM مینیمال از $\{S_t^*\}$ با استفاده از P_مارتینگل $M = \{M_t\}_{\circ \leq t \leq T}$ را تعریف می‌کنیم:

تعریف ۳.۲.۳. EMM، $P' \equiv P$ را مینیمال می‌نامند هرگاه $P' = P$ روی $\mathcal{F}_\circ$ و اگر برای هر P_مارتینگل مربع انتگرال‌پذیر که بر M تحت P عمود است باقیمانده مارتینگل تحت P' باشد.

لم ۱.۲.۳. EMM، P^* تعریف شده در (۱۲.۳) اندازه مارتینگل مینیمال یکتا است.

برهان. فرض کنید $h_t := \frac{\gamma(Y_{t-})}{\sigma(Y_{t-})S_t^*} = \frac{\mu(Y_{t-})-r(Y_{t-})}{\sigma^۲(Y_{t-})S_t^*}$ فرآیند قابل پیش‌بینی باشد، و A_t فرآیند تغییرات کران‌دار زیر باشد:

$$dA_t = h_t d\langle M, M\rangle_t, \qquad A_\circ = \circ. \tag{۱۵.۳}$$

در این‌صورت S_t^* را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} S_t^* &= S_\circ + M_t + A_t \\ &= S_\circ + \int_\circ^t \sigma\left(Y_u\right) S_u^* dW_u + \int_\circ^t \left(\mu\left(Y_u\right) - r\left(Y_u\right)\right) S_u^* du. \end{aligned}$$

این تجزیه کانونی نیمه مارتینگل $\{S_t^*\}$ تحت P است که مشابه (۱۱.۳) است. فرض کنید P' اندازه مارتینگل معادل باشد. P_مارتینگل $L = \{L_t\}_{\circ \geq t \geq T}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_t := E\left[\frac{dP'}{dP} | \mathcal{F}_t\right].$$

که P' یک EMM است و داریم [۳۹]

$$dA_t + \frac{۱}{L_{t-}} d\langle L, M\rangle_t = \circ. \tag{۱۶.۳}$$

فرض کنید $V = \{V_t\}_{\circ \geq t \geq T}$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد

$$dV_t = \frac{۱}{L_{t-}} dL_t, \qquad V_\circ = \circ. \tag{۱۷.۳}$$

[۱۸] equivalent martingale measure

باز تحت P با استفاده از تجزیه کونیتا_واتاناب، تجزیه V به‌صورت $V = U + Z$ است که U برای فرآیند قابل پیش‌بینی $\{\alpha_t\}$ به‌شکل $dU_t = \alpha_t dM_t$ است که در شرط زیر صدق می‌کند

$$E\left[\int_{\circ}^{T} \alpha_s^{۲} d\langle M\rangle_s\right] < \infty,$$

و Z مارتینگل مربع انترال‌پذیر تحت P و عمود بر M است. حال اگر P'، EMM مینیمال باشد، آنگاه Z نیز P' مارتینگل و $ZL = \{Z_t, L_t\}_{\circ\leq t\leq T}$ نیز یک P_ماترتینگل است. پس Z و L نیز P_مارتینگل هستند. از اینرو $\langle Z, L\rangle_t = \circ$ و از این نتیجه می شود که $\langle Z, V\rangle_t = \circ$ و سرانجام $\langle Z, Z\rangle_t = \circ$. بنابراین $Z = \circ$. از رابطه‌های (۱۶.۳) و (۱۷.۳) داریم:

$$dA_t = -d\langle V, M\rangle_t = -d\langle U, M\rangle_t = -\alpha d\langle M, M\rangle_t. \qquad (۱۸.۳)$$

حال از آنجا که $Z = \circ$، از (۱۵.۳) و (۱۸.۳) داریم $dV_t = dU_t = -h_t dM_t$. بنابراین L_t در رابطه زیر صدق می‌کند

$$dL_t = -L_t h_t dM_t, \quad EL_T = ۱. \qquad (۱۹.۳)$$

باز P_مارتینگل $\{\rho_t\}_{\circ\geq t\geq T}$ در (۱۲.۳) در رابطه زیر صدق می‌کند

$$d\rho_t = -\rho_t h_t dM_t, \quad E\rho_T = ۱. \qquad (۲۰.۳)$$

معادله‌های (۱۹.۳) و (۲۰.۳) یکسان هستند. از اینرو یکتایی جواب $L_t = \rho_t$ برای $\circ \leq t \leq T$ ثابت می‌شود به شرطی که $P' = P^*$ درنتیجه P^* اندازه مارتینگل مینیمال یکتا است. □

اگر ادعای تصادفی H در دسترس باشد آنگاه با استفاده از EMM، P^* قیمت بدون آربیتراژ برای ادعای تصادفی H در زمان t به‌صورت زیر است:

$$B_t E^*\left[B_T^{-۱} H \,|\mathcal{F}_t\right] = E^*\left[e^{-\int_{\circ}^{T} r(Y_u)du} H \,|\mathcal{F}_t\right], \qquad (۲۱.۳)$$

که E^* انتظار تحت P^* است. از آنجا که بازار مدولار مارکوف تعریف شده در بالا کامل نیست، ممکن است ادعای H قابل دستیابی نباشد. از اینرو خریدار اختیار به تنهایی نمی‌تواند آنرا به‌طور کامل پوشش دهد و درنتیجه برای قیمت اختیار لازم است که خریدار مراقب ریسک متناظر با استراتژی پوشش باشد. از اینرو به دنبال کاهش ریسک قیمت اختیار هستیم که در بخش بعد تعریف می‌کنیم.

۳.۳ پوشش‌دهنده کوادراتیک ریسک در بازارهای ناقص

فرض کنید H ادعای تصادفی با زمان سررسید T در $L^{۲}(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ باشد. به منظور تکرار این ادعا در T در مدل بازار تعریف شده در بخش قبل، فرض کنید $\pi = \{\pi_t\}_{\circ\leq t\leq T} = \{\xi_t, \eta_t\}_{\circ\leq t\leq T}$

یک استراتژی باشد که در آن ξ_t و η_t به ترتیب مقدار سرمایه در S_t و B_t را مشخص می‌کند. در زمان t فرآیند $\xi = \{\xi_t\}_{\circ \leq t \leq T}$ قابل پیش‌بینی فرض شده است و

$$E\left[\int_{\circ}^{T} \xi_t^{2} \sigma^{2}\left(Y_t\right) S_t^{2} dt + \left(\int_{\circ}^{T} \left|\xi_t\right| \left|\mu\left(Y_t\right)\right| dt\right)^{2}\right] < \infty. \qquad (۲۲.۳)$$

$\eta = \{\eta_t\}_{\circ \geq t \geq T}$ فرآیند سازگار[۱۹] و در شرط زیر نیز صدق می‌کند:

$$E\left(\eta_t^{2}\right) < \infty.$$

مقدار سبد سرمایه[۲۰] در زمان t تحت استراتژی π بوسیله

$$V_t\left(\pi\right) := \xi_t S_t + \eta_t B_t$$

تعریف می‌شود. از اینرو ارزش تنزیل‌یافته از سبد سرمایه به‌شکل زیر تبدیل می شود

$$V_t^{*}\left(\pi\right) = \xi_t S_t^{*} + \eta_t.$$

فرض کنید $\tilde{G}_t\left(\pi\right) := \int_{\circ}^{t} \xi_u dS_u^{*}$ فرآیند سود تنزیل‌یافته باشد. فرآیند انتگرال‌پذیر مربعی سمت راست $\tilde{G}_t\left(\pi\right)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\tilde{C}_t\left(\pi\right) := V_t^{*}\left(\pi\right) - \int_{\circ}^{t} \xi_u dS_u^{*}, \qquad \circ \leq t \leq T, \qquad (۲۳.۳)$$

که فرآیند هزینه تنزیل‌یافته نامیده می‌شود و هزینه اضافی انباشته شده در جریان تا زمان t است.

استراتژی π خود تامین مالی است، اگر $\tilde{C}_t\left(\pi\right)$ مقداری ثابت باشد.

استراتژی کسب π استراتژی پوشش قابل قبول نامیده می‌شود، اگر برای هر $c < \infty$،داشته باشیم $P\left\{V_t^{*}\left(\pi\right) \leq c, \ \forall t\right\} = ۱$ و $V_T\left(\pi\right) = H$.

یک ادعای تصادفی قابل دسترس نامیده می‌شود، اگر استراتژی پوششی خود تامین مالی باشد و از آنجا که بازار در نظر گرفته شده کامل نیست تمام ادعاهای تصادفی H نمی‌توانند قابل دسترس باشند و از اینرو به جای استراتژی خود تامین مالی ما به دنبال مینیمم کردن استراتژی π در هر زمان t هستیم. ریسک باقیمانده با استفاده از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$R_t\left(\pi\right) := E\left[\left(\tilde{C}_T\left(\pi\right) - \tilde{C}_t\left(\pi\right)\right)^{2} | \mathcal{F}_t\right] \qquad (۲۴.۳)$$

که روی تمام استراتژی‌های پوشش‌دهنده قابل قبول داده شده است. استراتژی پوشش‌دهنده π^{*} مینیمم‌کننده ریسک است اگر برای هر استراتژی قابل قبول π داشته باشیم:

$$\circ \leq R_t\left(\pi^{*}\right) \leq R_t\left(\pi\right).$$

---
[۱۹] process Adapted

[۲۰] Portfolio

واضح است که H قابل دسترس است اگر و تنها اگر استراتژی π^* موجود و قابل قبول باشد به‌طوری‌که $\tilde{C}(\pi^*)$ مقداری ثابت باشد و یا به‌طور معادل برای هر t داشته باشیم $R_t(\pi^*) = 0$.
اگرچه مفهوم استراتژی مینیمم‌کننده پوشش ریسک کاملا طبیعی است، به‌طور تکنیکی کار کردن با آن زمانی که اندازه بازار P خود اندازه مارتینگل نباشد سخت است [۲۹]. این باعث می‌شود که مفهوم ضعیف‌تری از استراتژی مینیمم‌کننده ریسک را تعریف کنیم [۲۹].

تعریف ۱.۳.۳. استراتژی $\Delta = \{\delta_t, \varepsilon_t\}_{0\le t\le T}$ اخلال کوچک نامیده می‌شود اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱. δ کران‌دار باشد.

۲. $\int_0^T |\delta_u|\, d|A|_u$ کران‌دار باشد که در آن A_t فرآیندی از تغییرات کران‌دار متناظر با تجزیه نیمه مارتینگل از S_t است.

۳. $\delta_t = \varepsilon_t = 0$.

فرض کنید π استراتژی، Δ اخلال کوچک و $\mathcal{P} = (t_i)_{0\le t\le T}$ افرازی از $[0, T]$ باشد. R_نسبت زیر را تعریف می‌کنیم

$$Q^{\mathcal{P}}[\pi, \Delta] := \sum_{t_i\in\mathcal{P}} \frac{R_{t_i}\left(\pi + \left(\delta_t I_{(t_i,t_{i+1}]}, \varepsilon_t I_{(t_i,t_{i+1})}\right)\right) - R_{t_i}(\pi)}{E\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} \sigma^2(Y_t)\, S_t^{*2} dt \,|\mathcal{F}_{t_i}\right]} I_{(t_i,t_{i+1})}(t).$$

استراتژی قابل قبول π مینیمم‌کننده ریسک محلی نامیده می‌شود اگر برای هر اخلال کوچک Δ و هر دنباله افزایشی $\mathcal{P}_n$ از افراز $[0, T]$ با $\|\mathcal{P}_n\| \to 0$ داشته باشیم:

$$\lim_{x\to\infty} \inf\ Q^{\mathcal{P}_n}[\pi, \Delta] \ge 0.$$

در مرجع [۲۹] نشان داده شده است که استراتژی قابل قبول π^* مینیمم‌کننده ریسک محلی است اگر و تنها اگر $\left\{\tilde{C}(\pi^*)\right\}$ مارتینگل انتگرال‌پذیر مربعی عمود بر $\{M_t\}$ باشد و این منجر به ارائه تعریف زیر می‌شود.

تعریف ۲.۳.۳. استراتژی قابل قبول π^* بهینه[۲۱] (یعنی مینیمم‌کننده ریسک محلی) نامیده می‌شود اگر ارزش تنزیل‌یافته $\left\{\tilde{C}(\pi^*)\right\}$ تعریف شده در (۲۳.۳) مارتینگل انتگرال‌پذیر مربعی عمود بر $\{M_t\}$ (تعریف شده در (۱۴.۳)) باشد.

فرض کنید $H^* := B_T^{-1} H$. در مرجع [۱۹] فلومر و شویزر نشان داده‌اند که وجود استراتژی بهینه برای پوشش H معادل است با وجود تجزیه فلومر_شویزر از H^* که به فرم زیر است:

$$H^* = H_0 + \int_0^T \xi_u^{H^*} dS_u^* + L_T^{H^*}, \tag{۲۵.۳}$$

که $H_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$، $\xi^{H^*} = \{\xi_t^{H^*}\}$ در رابطه (۲۲.۳) صدق می‌کند و $L^{H^*} = \{L_t^{H^*}\}_{0\le t\le T}$ مارتینگل انتگرال‌پذیر مربعی عمود بر M تعریف شده در (۱۴.۳) است. ξ^{H^*} ظاهر شده در

[۲۱] Optimal

تجزیه (۲۵.۳) استراتژی بهینه را می‌سازد. در واقع استراتژی بهینه $\pi = (\xi, \eta)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} \xi_t := \xi_t^{H^*}, \\ V_t^* := H_\circ + \int_\circ^t \xi_u^{H^*} dS_u^* + L_t^{H^*}, \\ \eta_t := V_t^* - \xi_t S_t^* \end{cases} \tag{۲۶.۳}$$

بنابراین ارزش تنزیل‌یافته $\left\{\tilde{C}_t(\pi)\right\}$ متناظر با استراتژی بهینه π به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\left\{\tilde{C}_t(\pi)\right\} = H_\circ + L_t^{H^*}. \tag{۲۷.۳}$$

از آنجا که P^* مارتینگل مینیمال است، $\{L_t^{H^*}\}$ مارتینگل تحت P^* خواهد بود. بنابراین V_t^* موجود در (۲۶.۳) مارتینگل تحت P^* است که ریسک قیمت تنزیل‌یافته از H در زمان t را مینیمم می‌کند و این فورا این نتیجه را موجب می‌شود که ریسک قیمت اختیار محلی ادعای H داده شده در (۲۱.۳) مینیمم شده است. بنابراین بیان یکسانی برای ریسک قیمت اختیار محلی مینیمم شده قابل دسترس و غیر قابل دسترس وجود دارد. برای ادعای قابل دسترس ریسک باقیمانده برابر صفر است در حال که برای ادعای غیر قابل دسترس ریسک باقیمانده اکیدا مثبت است. وجود تجزیه فلومر_شویزر برای انتگرال مربعی ادعای تصادفی در مدل بازار موجود، لم و قضیه بعد تضمین می‌شود.

تعریف ۳.۳.۳. فرض کنید X یک نیمه مارتینگل به شکل $X = X_\circ + M + \int d\langle M\rangle \hat{\lambda}$ باشد. فرآیند میانگین[۲۲] واریانس[۲۳] مصالحه[۲۴] (MVT)، $\hat{K}$ از X و بوسیله Θ فضای فرآیندهای قابل پیش‌بینی ν به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\hat{K} = \int \hat{\lambda} d\langle M\rangle \hat{\lambda},$$

که انتگرال تصادفی $G(\nu) = \int \nu dX$ یک نیمه مارتینگل انتگرال‌پذیر مربعی است.

لم ۱.۳.۳. اگر فرایند میانگین واریانس مصالحه (MVT)، $\hat{K}$ پیوسته و کران‌دار باشد، آنگاه برای هر $H \in L^{۲}(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ تجزیه فلومر_شویزر زیر وجود دارد

$$H = H_\circ + \int_\circ^T \xi_s^H dX_s + L_T^H$$

که $H_\circ \in \mathbb{R}$، $\xi^H \in \Theta$ و L^H استراتژی عمود بر M با $E\left[L_\circ^H\right] = \circ$ است.

[۲۲] Mean
[۲۳] Variance
[۲۴] Tradeof

برهان. چون $\hat{K}$ کران‌دار است پس داریم $\Theta = L^{۲}(M)$. نگاشت های $J : \Theta \to \Theta$ و ν بتوی تابع زیر انتگرال ψ از M در تجزیه گالچهوک[۲۵]ـ کونیتا[۲۶]ـ واتاناب[۲۷] از $H - \int_{\circ}^{T} \nu_s dA_s$ را در نظر بگیرید. یعنی

$$H - \int_{\circ}^{T} \nu_s dA_s = E\left[H - \int_{\circ}^{T} \nu_s dA_s\right] + \int_{\circ}^{T} \psi_s dM_s + L_T(\nu)$$

$$:= H_{\circ}(\nu) + \int_{\circ}^{T} \psi_s dM_s + L_T(\nu).$$

واضح است که تجزیه فلومرـشویزر معادل با یافتن نقطه ثابت J است. برای هر $\beta > \circ$ قرار می‌دهیم

$$\|\nu\|_{\beta} := \left\| \left(\int_{\circ}^{T} e^{\beta \hat{K}_s} \nu_s^{۲} \sigma_s dB_s \right)^{\frac{۱}{۲}} \right\|_{L^{۲}(P)}.$$

نرم روی Θ را معادل با نرم $\|.\|_{L^{۲}(M)}$ تعریف می‌کنیم.حال با استفاده از گزاره ۳ از مرجع [۲۱] با شرایط زیر

$$\begin{aligned}
&\beta > \mu^{۲},\\
&\nu = \nu^{۱} - \nu^{۲},\\
&\psi = J\left(\nu^{۱}\right) - J\left(\nu^{۲}\right),\\
&V_{\circ} = H_{\circ}\left(\nu^{۱}\right) - H_{\circ}\left(\nu^{۲}\right),\\
&L = L\left(\nu^{۱}\right) - L\left(\nu^{۲}\right)
\end{aligned}$$

و توجه به این نکته که $V_T = \circ$ داریم:

$$\left\| J\left(\nu^{۱}\right) - J\left(\nu^{۲}\right) \right\|_{\beta}^{۲} = E\left[\int_{\circ}^{T} e^{\beta \hat{K}_s} \psi_s^{۲} \sigma_s dB_s\right]$$

$$\leq \frac{۱}{\mu^{۲}} E\left[\int_{\circ}^{T} e^{\beta \hat{K}_s} \nu_s^{۲} \sigma_s dB_s\right]$$

$$= \frac{۱}{\mu^{۲}} \left\|\nu^{۱} - \nu^{۲}\right\|_{\beta}^{۲}.$$

بنابراین J انقباض روی $\left(\Theta, \|.\|_{\beta}\right)$ است. □

قضیه ۱.۳.۳. برای هر ادعای تصادفی $H \in L^{۲}(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ در مدل بازار ارائه شده در (۲.۳)، (۴.۳) و (۵.۳)، ادعای تنزیل‌یافته H^* در تجزیه فلومرـشویزر (۲۵.۳) صدق می‌کند.

[۲۵] Galtchouk
[۲۶] Kunita
[۲۷] Watanabe

برهان. واضح است که $H^* \in L^{(\Omega,\mathcal{F}_T,P)}$ برای هر $H \in L^{(\Omega,\mathcal{F}_T,P)}$. تحت مدل بازار (۲.۳)، (۴.۳) و (۵.۳) فرآیند MVT، $\hat{K}$ به شکل زیر است

$$\hat{K}_t = \int_{\circ}^{t} \left(\frac{\mu\left(Y_s\right) - r\left(Y_s\right)}{\sigma\left(Y_s\right)} \right)^{\text{۲}} ds. \tag{۲۸.۳}$$

از رابطه(۲۸.۳) نتیجه می‌شود که $\hat{K}$ در $[\circ, T]$ پیوسته و کران‌دار است. از اینرو طبق لم قبل نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

فصل ۴

قیمت‌گذاری اختیارات با مانع و مرکب

۱.۴ اختیارات با مانع

در این بخش به بررسی قیمت اختیارات با مانع مختلف با استفاده از روش ارائه‌شده در فصل قبل می‌پردازیم. از آنجا که انواع مختلفی از قیمت‌های اختیار با مانع مربوط به قیمت اختیار خرید و فروش اروپایی است، ابتدا به مینیمم کرده ریسک قیمت اختیار خرید اروپایی می‌پردازیم.

قیمت اختیار خرید اروپایی روی $\{S_t\}$ با قیمت اکید K و زمان سررسید t را در نظر بگیرید. در این حالت ادعای تنزیل‌یافته H داده شده با

$$H = (S_T - K)^+ \tag{۱.۴}$$

در این مورد برای بدست آوردن استراتژی بهینه (۲۶.۳)، ابتدا تجزیه (۲۵.۳) را بدست می آوریم. برای این منظور سیستم معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (۱.۳) را برای $t < T$ و $i = ۱,۲,..,k$ با شرط انتهایی زیر در نظر می‌گیریم:

$$\varphi\left(T, s, i\right) = \left(s - K\right)^+, \quad \forall i. \tag{۲.۴}$$

توجه داریم که معادله (۱.۳) یک معادله انتگرو_دیفرانسیل با مشتقات جزئی به‌صورت زیر

است:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,s,i)+r(i)\,s\frac{\partial}{\partial s}\varphi(t,s,i)+\frac{1}{2}\sigma^{2}(i)\,s^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial s^{2}}\varphi(t,s,i)$$

$$+\int_{\mathbb{R}}\left[\varphi(t,s,i+h(i,z))-\varphi(t,s,i)\right]dz=r(i)\,\varphi(t,s,i)\,,$$

که h در (۶.۳) تعریف شده است.

مسئله کوشی (۱.۳)ـ(۲.۱.۴) دارای جواب یکتای $\{\varphi(t,s,i)\,,\ i=1,2,...,k\}$ در کلاسی از توابع $C([0,T]\times\mathbb{R})\cap C^{1,2}((0,T)\times\mathbb{R})$ دارای چندجمله‌ای‌های افزایشی است [۳۱]. این منجر به قضیه بعدی می‌شود.

قضیه ۱.۱.۴. فرض کنید $\{\varphi(t,s,i)\,,\ i=1,2,...,k\}$ جواب یکتای مسئله کوشی (۱.۳)ـ(۲.۱.۴) در کلاس توابع فوق باشد. آنگاه:

۱. $\varphi_c(t,S_t,Y_t)$ مینیمم کننده ریسک قیمت اختیار در زمان t است.

۲. استراتژی بهینه $\pi^*=\{\xi_t^*,\eta_t^*\}$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\xi_t^*=\frac{\partial\varphi_c(t,S_t,Y_{t-})}{\partial s},\tag{۳.۴}$$

$$\eta_t^*=V_t^*-\xi_t^*S_t^*,\tag{۴.۴}$$

که

$$V_t^*=\varphi_c(0,Y_0,S_0)+\int_0^t\frac{\partial\varphi_c(u,S_u,Y_{u-})}{\partial s}dS_u^*+\int_0^t e^{-\int_0^u r(Y_v)dv}$$
$$\int_{\mathbb{R}}\left[\varphi_c(u,S_u,Y_{u-}+h(Y_{u-},z))-\varphi_c(u,S_u,Y_{u-})\right]\hat{\zeta}(du,dz)\,.\tag{۵.۴}$$

۳. ریسک باقیمانده در زمان t به صورت زیر است:

$$R_t(\pi^*)=E\left[\int_0^T e^{-2\int_0^u r(Y_v)dv}\sum_{j\neq Y_u}\lambda_{Y_{uj}}\left(\varphi_c(u,S_u,j)-\varphi_c(u,S_u,Y_u)\right)^2du\,|\mathcal{F}_t\right].\tag{۶.۴}$$

برهان. فرض کنید $0\leq t\leq T$، با استفاده از فرمول ایتو برای $e^{-\int_0^t r(Y_u)du}\varphi_c(t,S_t,Y_t)$ تحت اندازه P و استفاده از (۸.۳)، (۱۱.۳) و (۱.۳) و بعد از مرتب سازی مناسب جملات داریم:

$$e^{-\int_0^t r(Y_u)du}\varphi_c(t,S_t,Y_t)=\varphi_c(0,S_0,Y_0)+\int_0^t\frac{\partial\varphi_c(u,S_u,Y_{u-})}{\partial s}dS_u^*$$
$$+\int_0^t e^{-\int_0^u r(Y_v)dv}\int_{\mathbb{R}}\left[\varphi_c(u,S_u,Y_{u-}+h(Y_{u-},z))-\varphi_c(u,S_u,Y_{u-})\right]\hat{\zeta}(du,dz)\,.\tag{۷.۴}$$

فرض کنید $t\uparrow T$، بنابراین داریم:

$$B_T^{-1}(S_T-K)^+=\varphi_c(0,S_0,Y_0)+\int_0^T\frac{\partial\varphi_c(u,S_u,Y_{u-})}{\partial s}dS_u^*$$
$$+\int_0^t e^{-\int_0^u r(Y_v)dv}\int_R\left[\varphi_c(u,S_u,Y_{u-}+h(Y_{u-},z))-\varphi_c(u,S_u,Y_{u-})\right]\hat{\zeta}(du,dz)\,.\tag{۸.۴}$$

از قضیه ۱.۳.۳ می‌دانیم که $B_T^{-1}(S_T-K)^+$ در تجزیه فلومرـشویزر صدق می‌کند. حال می‌توان از قضیه ۳.۱۴ مرجع [۱۹] استفاده کرد و ۱. به‌دست می‌آید. با استفاده از تجزیه (۸.۴) می توان ۲. را ثابت کرد. برای ۳.، طبق ایزومتری ایتو ریسک باقیمانده در زمان t به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

(۹.۴)

$$R_t(\pi^*) = E\left[\int_0^T \int_R e^{-\int_0^u r(Y_v)dv}\left\{\varphi_c(u,S_u,Y_{u-}+h(Y_{u-},z))-\varphi_c(u,S_u,Y_{u-})\right\}|F_t\right]$$

$$= E\left[\int_0^T \int_R e^{-2\int_0^u r(Y_v)dv}\{\varphi_c(u,S_u,Y_{u-}+h(Y_{u-},z))-\varphi_c(u,S_u,Y_{u-})\}^2\hat{\zeta}(du,dz)|F_t\right]$$

$$= E\left[\int_0^T e^{-2\int_0^u r(Y_v)dv}\sum_{j\neq Y_u}\lambda_{Y_{uj}}(\varphi_c(u,S_u,j)-\varphi_c(u,S_u,Y_u))^2 du\,|F_t\right].$$

□

نکته

i) می‌توان نشان داد که تحت P^*، (S_t,Y_t) به طور مشترک مارکوف هستند و مولد $\tilde{A}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\tilde{A}\varphi(s,i) = r(i)\,s\frac{\partial}{\partial s}\varphi(s,i)+\frac{1}{2}\sigma^2(i)\,s^2\frac{\partial^2}{\partial s^2}\varphi(s,i)+\sum_{j=1}^{k}\lambda_{ij}\varphi(s,i).$$

از اینرو معادله (۱.۳) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,s,i)+\tilde{A}\varphi(t,s,i)=r(i)\,\varphi(t,s,i)\,.$$

بنابراین با استفاده از فرمول فینمنـکاک[۱] جواب (۱.۳)ـ(۲.۱.۴) به‌ص.رت زیر به‌دست می‌آید:

$$\varphi(t,S_t,Y_t)=E^*\left[e^{-\int_t^T r(Y_u)du}(S_T-K)^*\,|\mathcal{F}_t\right]. \qquad (۱۰.۴)$$

ii) **مقایسه روش مورد مطالعه با کارهای قبلی**

از آنجا که قیمت اختیار در مدل رژیم‌های سویچینگی مورد نظر است، ضروری است که روش مورد مطالعه را با کارهای موجود مقایسه کنیم ما در این پایان‌نامه به مطالعه قیمت اختیار اروپایی نامتعارف[۲] با استفاده از پوشش‌دهنده کوادراتیک در چهارچوب فلومر و شویزر در مرجع [۱۹] پرداخته‌ایم. بسیاری از مقالات به مطالعه قیمت اختیار خرید اروپایی با استفاده از روش‌های متنوع پرداخته‌اند. گو در مرجع [۴۳] مسئله را در بازارهای کامل با استفاده از وثیقه مرتبط با قیمت سویچینگی در نظر گرفته است. قیمت اختیار در [۴۳] متفاوت از شکل

[۱] Feynman-Kac
[۲] Exotic

کلی مسئله مورد نظر ماست.
توجه کنید که در [۴۳] قیمت اختیار وابسته به پارامترهای دریفت از قیمت سهام است. در حالی که فرمول قیمت اختیار ما به‌طور صریح وابسته به این پارامترها نیست.
در مراجع [۲۴] و [۴۰] حرکت‌های کامل تحت اندازه ریسک خنثی تعریف شده است. بویژه در [۲۴] نویسندگان دریف $\mu(Y_t)$ فرآیندهای سهام $\{S_t\}$ متفاوت از سود آنی $r(Y_t)$ است. با این حال در [۴۰] نویسندگان فرض کرده‌اند که $\mu(Y_t) = r(Y_t)$.
بنابراین فرمول قیمت اختیار در [۲۴] به‌طور صریح وابسته به μ است در حالی که فرمول قیمت اختیار در [۴۰] مشابه چیزی است که ما در این پایان‌نامه در نظر گرفته‌ایم.
هرچند تفاوت اصلی میان تعبیر [۴۰] از فرمول قیمت اختیار با تعبیر ما از این فرمول است که در [۱۵] نیز آمده است. فرمول قیمت اختیار ما تخت احتمال بازار دنیای واقعی P معتبر است ولی فرمول مرجع [۴۰] در دنیای کامل ریسک ایده‌آل برقرار است. درنتیجه در مدل ما پارامترهای λ_{ij}، $\sigma(i)$، $r(i)$ و غیره را می‌توان به‌طور مستقیم با استفاده از داده‌های بازار تخمین زد در حالی که در [۴۰] تخمین این پارامترها با استفاده از ابزارهای کامل مانند اوراق بهادار، اسناد خزانه و غیره صورت می‌گیرد.
حال به بررسی اختیار با مانع اروپایی روی $\{S_t\}$ از انواع مختلف می‌پردازیم. شکل‌های اساسی اختیار با مانع نزول‌ـو‌ـخروج[۳]، صعود‌ـو‌ـخروج[۴]، نزول‌ـو‌ـورود[۵] و صعود‌ـو‌ـورود[۶] است. ابتدا هر کدام را مرور می‌کنیم.
فرض کنید مانع $b > 0$ داده شده باشد. اختیارات با مانع مختلف عبارتند از:

نزول‌ـو‌ـخروج

در این نوع اختیار، قیمت اولیه بیشتر از مانع است و اگر قیمت به اندازه مانع پایین برود و به مانع برخورد کند اختیار ارزش خود را از دست می‌دهد.

صعود‌ـو‌ـخروج

در این نوع اختیار، قیمت اولیه کمتر از مانع است و اگر قیمت به اندازه مانع بالا برود و به مانع برخورد کند اختیار ارزش خود را از دست می‌دهد.

نزول‌ـو‌ـورود

در این نوع اختیار، قیمت اولیه بیشتر از مانع است و قرارداد اختیار زمانی ارزش پیدا می‌کند که قیمت دارایی پایه کمتر از مانع شود.

صعود‌ـو‌ـورود

در این نوع اختیار، قیمت اولیه کمتر از مانع است و اگر قیمت به اندازه مانع بالا نرود، اختیار ارزش پیدا نخواهد کرد.

[۳] Down-and-out
[۴] Up-and-Out
[۵] Down-and-in
[۶] Up-and-in

این چهار نوع از شرایط مانع می‌تواند برای هر نوعی از اختیارات استفاده شود چه از نوع اختیار خرید اروپایی باشد و چه از نوع اختیار فروش اروپایی. فرض کنید φ_c^{do}، φ_c^{uo}، φ_c^{di} و φ_c^{ui} به‌ترتیب مینیمم‌کننده ریسک محلی قیمت خرید نزول–و–خروج، صعود–و–خروج، نزول–و–ورود و صعود–و–خروج باشند.

حاصل‌جمع دو اختیار یکی از نوع نزول–و–خروج و دیگری از نوع نزول–و–ورود با، مانع، قیمت و سررسید یکسان معادل با یکی از انواع اختیار با پارامترهای یکسان اما بدون مانع است. بویژه

$$\varphi_c^{do} + \varphi_c^{di} = \varphi_c,$$

که φ_c قیمت اختیار خرید اروپایی است. برای مانع‌های از نوع صعود نیز نتایج یکسان است و داریم:

$$\varphi_c^{uo} + \varphi_c^{ui} = \varphi_c.$$

حال طبق نتایج فوق مقدار φ_c^{uo} را تعریف می‌کنیم. در این حالت ادعای تنزیل‌یافته به‌صورت زیر است:

$$H = (S_T - K)^+ I \left\{ \max_{[\circ,T]} S_t < b \right\},$$

که در آن K قیمت تصادفی، b مانع و T زمان سررسید است. از اینرو $H \in L^{۲}(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$. فرض کنید

$$\tau := mim\left\{t : S_t = b\right\}.$$

توجه داریم که زمان توقف τ در $\mathcal{F}_t$ است و $\tau < \infty$. اگر $S_\circ < b$ آنگاه H را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$H = (S_T - K)^+ I_{\tau > T}. \tag{۱۱.۴}$$

حال معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی (۱.۳) را در نظر می‌گیریم که روی

$$\mathcal{D}_- := \left\{(t,s,i) \in (\circ, T) \times (\circ, b) \times \mathbf{X}\right\}, \tag{۱۲.۴}$$

با شرط انتهایی

$$\varphi(T,S,i) = (s-K)^+; \quad s < b; \quad i = ۱,۲,...,k, \tag{۱۳.۴}$$

و شرط مرزی

$$\varphi(t,b,i) = \circ, \quad \forall t \in (\circ,]; \quad i = ۱,۲,...,k, \tag{۱۴.۴}$$

تعریف شده است.

قضیه ۲.۱.۴. مسئله (۱.۳)، (۱۳.۴) و (۱۴.۴) دارای جواب یکتا در کلاس توابع متعلق به $C(\mathcal{D}_-) \cap C^{۱,۲}(\mathcal{D}_-)$ است.

برهان. با استفاده از تبدیل لگاریتم استاندارد، می‌توان معادله (۱.۳) را به سیستمی از معادلات سهموی یکنواخت با کوپلینگ ضیف تبدیل کرد. حال با استفاده از بسط روتین روش‌های استاندارد حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌توان نتیجه را بدست آورد [۴]. □

قضیه ۳.۱.۴. فرض کنید $\varphi(t,s,i)$ جواب یکتای (۱.۳)، (۱۳.۴) و (۱۴.۴) باشد. در این‌صورت:

۱. $\varphi(t,S_t,Y_t)\,I_{\tau>t}$ مینیمم‌کننده قیمت ریسک محلی در زمان t برای اختیار خرید اروپایی صعود–و–خروج با قیمت ریسک K، مانع b و زمان سررسید T است.

۲. استراتژی بهینه $\pi^*=\{\xi_t^*,\eta_t^*\}$ به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} \xi_t^* = \frac{\partial}{\partial s}\varphi(t,S_t,Y_{t-})\,I_{\tau>t}, \\ \\ \eta_t^* = V_t^* - \xi_t^* S_t^*, \end{cases} \tag{۱۵.۴}$$

که

$$V_t^* = \varphi(\circ,S_\circ,Y_\circ) + \int_\circ^t \frac{\partial}{\partial s}\varphi(u,S_u,Y_{u-})\,I_{\tau>u}dS_u^*$$

$$+\int_\circ^{t\wedge\tau}\int_{\mathbb{R}} e^{-\int_\circ^u r(Y_v)dv}\left\{\varphi(u,S_u,Y_{u-}+h(Y_{u-},z))-\varphi(u,S_u,Y_{u-})\right\}\hat{\zeta}(du,dz).$$

۳. ریسک باقیمانده در زمان t به‌صورت زیر است:

$$R(\pi^*) = E\left[\int_\circ^T e^{-۲\int_\circ^u r(Y_v)dv}\sum_{j\neq Y_u}\lambda_{X_{uj}}(\varphi(u,S_u,j)-\varphi(u,S_u,Y_u))^۲ I_{\tau>u}du\,|F_t\right].$$

برهان. فرض کنید $\circ\leq t\leq T$، از آنجا که $\varphi(\tau,S_\tau,Y_\tau)=\circ$ پس

$$N_t := e^{-\int_\circ^t r(Y_u)du}\varphi(t,S_t,Y_t)\,I_{\tau>u}$$

$$= e^{-\int_\circ^{t\wedge\tau} r(Y_u)du}\varphi(t\wedge\tau,S_{t\wedge\tau},Y_{t\wedge\tau}).$$

بنابراین

$$N_T = B_T^{-۱}(S_T-K)^+ I_{\tau>t} = B_T^{-۱}H,$$

که H در (۱۱.۴) تعریف شده است.

از آنجا که φ یک $C(\mathcal{D}_-)\cap C^{۱,۲}(\mathcal{D}_-)$ تابع است که در (۱.۳)، (۱۳.۴) و (۱۴.۴) صدق می‌کند پس با استفاده از فرمول ایتو–دینکین[۷] و (۸.۳)، (۱۰.۳)، (۱۱.۳) و (۱.۳)، تحت P داریم:

$$N_t = \varphi(\circ,S_\circ,Y_\circ) + \int_\circ^t \frac{\partial}{\partial s}\varphi(u,S_u,Y_{u-})\,I_{\tau>t}dS_u^* + \int_\circ^{t\wedge\tau}\int_{\mathbb{R}}^{-\int_\circ^u r(Y_v)dv}$$

$$\times\left\{\varphi(u,S_u,Y_{u-}+h(Y_{u-},z))-\varphi(u,S_u,Y_{u-})\right\}\hat{\zeta}(du,dz). \tag{۱۶.۴}$$

$$e^{-\int_\circ^t r(Yu)du}\varphi(t,S_t,Y_t)\,I_{\tau>u}$$

[۷] Ito-Dynkin

با استفاده از قضیه نمونه‌برداری، جمله آخر سمت راست معادله فوق یک $\mathcal{F}_t$ـ مارتینگل انتگرال پذیر مربعی تحت P و عمود بر $\{M_t\}$ است. حال با استفاده از قضیه ۱.۱.۴، N_T دارای تجزیه فلومرـشویزر است. از اینرو اگر $t \uparrow T$، رابطه فوق تجزیه فلومرـشویزر N_T را به ما می‌دهد. و این نتایج ۱.، ۲. و ۳. را ثابت می‌کند. □

۲.۴ اختیارات مرکب

در این بخش در مورد اختیارات مرتبه دوم بحث می‌کنیم که در آن اختیار روی اختیار است. در عمل قیمت اختیار مرتبه دوم وابسته به قیمت بازاری از اختیار پایه است. اما برای مدل‌بندی ما فرض می‌کنیم که قیمت نظری و قیمت بازاری از اختیار پایه یکسان باشند. اختیارات مرتبه دوم را می توان به چهار نوع تقسیم کرد: ۱. خرید روی خرید، ۲. خرید روی فروش، ۳. فروش روی خرید و ۴. فروش روی فروش.

ما در اینجا تنها اختیار خرید روی خرید را در نظر می‌گیریم. سه نوع دیگر نیز مشابه اختیار خرید روی خرید هستند. فرض کنید T_1 و K_1 به ترتیب زمان انقضا و قیمت ریسک اختیار پایه باشند. همچنین فرض کنید $T_2\ (< T_1)$ و K_2 به ترتیب زمان انقضا و قیمت ریسک اختیار مرکب خرید روی خرید باشد. بنابراین ادعای تصادفی در T_2 به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$H = \left(\varphi_c\left(T_2, S_{T_2}, X_{T_2} - K_2\right)\right)^+ .$$

که $\varphi\left(t, S_t, X_t\right)$ مینیمم‌کننده قیمت ریسک محلی از اختیار فروش پایه با سررسید T_1 و قیمت توافقی K_1 است. به عبارت دیگر $\varphi\left(t, s, i\right)$ جواب یکتای مسئله کوشی (۱.۳) برای $t < T_1$ و $i = 1, 2, ..., k$ با شرط انتهایی زیر است:

$$\varphi_c\left(T_1, s, i\right) = \left(s - K_1\right)^+ , \qquad \forall i. \tag{۱۷.۴}$$

برای یافتن استراتژی پوشش بهینه برای اختیار خرید روی خرید اروپایی مسئله کوشی (۱.۳) برای $t < T_2$ و $i = 1, 2, ..., k$ با شرط انتهایی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\varphi_c\left(T_2, s, i\right) = \left(\varphi_c\left(T_2, s, i\right) - K_2\right)^+ , \qquad \forall i. \tag{۱۸.۴}$$

این مسئله کوشی روی کلاسی از توابع زیر با چندجمله‌ای‌های افزایشی دارای جواب یکتا است [۳۱].

$$C\left([0, T_2] \times \mathbb{R}\right) \cap C^{1,2}\left((0, T_2) \times \mathbb{R}\right).$$

بنابراین نتیجه زیر را می‌توان نوشت.

قضیه ۱.۲.۴. فرض کنید $\varphi_{cc}\left(t, s, i\right)$ جواب یکتای (۱.۳) و (۱۸.۴)باشد. در این صورت داریم:

۱. $\varphi_{cc}\left(t, S_t, Y_t\right)$ مینیمم‌کننده قیمت اختیار ریسک محلی در زمان t برای اختیار اروپایی خرید

روی خرید با قیمت توافقی $K_۲$ و زمان سررسید $T_۲$ است.

۲. استراتژی بهینه $\pi^* = \{\xi_t^*, \eta_t^*\}_{t\leq T_۲}$ به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} \xi_t^* = \frac{\partial}{\partial s}\varphi_{cc}\left(t, S_t, Y_{t-}\right) I_{\tau>t}, \\ \\ \eta_t^* = V_t^* - \xi_t^* S_t^*, \end{cases} \tag{۱۹.۴}$$

که

$$V_t^* = \Big[\varphi_{cc}\left(\circ, S_\circ, Y_\circ\right) + \int_\circ^t \frac{\partial}{\partial s}\varphi_{cc}\left(u, S_u, Y_{u-}\right) I_{\tau>u} dS_u^*$$

$$+ \int_\circ^t \int_{\mathbb{R}} e^{-\int_\circ^u r(Y_v)dv} \left\{\varphi_{cc}\left(u, S_u, Y_{u-} + h\left(Y_{u-}, z\right)\right)\right.$$

$$\left. - \varphi\left(u, S_u, Y_{u-}\right)\right\} \hat{\zeta}\left(du, dz\right)\Big].$$

۳. ریسک باقیمانده در زمان t به‌صورت زیر است:

$$R_t\left(\pi^*\right) = E\left[\int_\circ^{T_۲} e^{-۲\int_\circ^u r(Y_v)dv} \sum_{j\neq Y_u} \lambda_{Y_{uj}} (\varphi_{cc}\left(u, S_u, j\right) - \varphi_{cc}\left(u, S_u, Y_u\right))^۲ I_{\tau>u} du \,|F_t\right].$$

فصل ۵

نتایج عددی

در این فصل به بررسی نتایج عددی برای محاسبه قیمت اختیار می‌پردازیم. برای این منظور دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مربوط را با روش تفاضلات متناهی کرانک‌ـ نیکلسون[1] حل می کنیم [۱۷]. در ادامه به بررسی پایداری روش می‌پردازیم.

با تبدیل $t = T - v$ و $s = e^z$ به سادگی می توان سیستم (۱.۳) را به سیستمی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی سهموی یکنواخت از v و s با ضرایب ثابت زیر تبدیل کرد:

$$-\frac{\partial\varphi(v,z,i)}{\partial v} + \left(r\left(i\right) - \frac{1}{2}\sigma(i)^2\right)\frac{\partial\varphi(v,z,i)}{\partial z} + \frac{1}{2}\sigma(i)^2\,\frac{\partial^2\varphi(v,z,i)}{\partial z^2}$$
$$+\sum_{j=1}^{k}\lambda_{ij}\varphi\left(v,z,j\right) = r\left(i\right)\varphi\left(v,z,i\right) \qquad (۱.۵)$$

روی دامنه $(0,T)\times\mathbb{R}$ با

$$\varphi\left(0,z,i\right) = \left(e^z - K\right)^+. \qquad (۲.۵)$$

فرض کنید Δt طول شبکه بندی زمان و Δz طول شبکه بندی سرمایه (سهام) در مقیاس لگاریتمی باشد. فرض کنید:

$$t_n = n\Delta t, \qquad n = 0,1,2,...,[\tfrac{T}{\Delta t}]$$
$$z_m = z_0 + m\Delta z, \qquad m = 0,1,2,...,$$

[1] Crank-Nicholson

$z_\circ$ عددی منفی و بزرگ است. ما از تقریب تفاضلات متناهی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial t}u\left(t_n,z_m\right)\approx\frac{u\left(t_{n+1},z_m\right)-u\left(t_n,z_m\right)}{\Delta t},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}u\left(t_n,z_m\right)\approx\frac{1}{2}\left(\frac{u\left(t_{n+1},z_{m+1}\right)-u\left(t_{n+1},z_{m-1}\right)}{2\Delta z}+\frac{u\left(t_n,z_{m+1}\right)-u\left(t_n,z_{m-1}\right)}{2\Delta z}\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}u\left(t_n,z_m\right)\approx\frac{1}{2}\left(\frac{u\left(t_{n+1},z_{m+1}\right)-2u\left(t_{n+1},z_m\right)+u\left(t_{n+1},z_{m-1}\right)}{\left(\Delta z\right)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{u\left(t_n,z_{m+1}\right)-2u\left(t_n,z_m\right)+u\left(t_n,z_{m-1}\right)}{\left(\Delta z\right)^2}\right),$$

برای $n\leq N-1$ و $m\geq 1$. فرض کنید

$$\varphi_m^n\left(i\right):=\varphi\left(n\Delta t,z_\circ+m\Delta z,i\right),$$

که $\varphi\left(t,s,i\right)$ جواب (۱.۵) و (۲.۵) است. گسسته‌سازی سیستم (۱.۵) با استفاده از تقریب بالا به‌صورت زیر خواهد بود:

$$-\frac{\varphi_m^{n+1}(i)-\varphi_m^n(i)}{\Delta t}+\frac{r(i)-\frac{1}{2}\sigma^2(i)}{4\Delta z}\left\{\varphi_{m+1}^{n+1}\left(i\right)-\varphi_{m-1}^{n+1}\left(i\right)+\varphi_{m+1}^{n}\left(i\right)-\varphi_{m-1}^{n}\left(i\right)\right\}$$

$$+\frac{\sigma^2(i)}{4(\Delta z)^2}\left\{\varphi_{m+1}^{n+1}\left(i\right)-2\varphi_m^{n+1}\left(i\right)+\varphi_{m-1}^{n+1}\left(i\right)+\varphi_{m+1}^{n}\left(i\right)-2\varphi_m^{n}\left(i\right)+\varphi_{m-1}^{n}\left(i\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{jj=1}^{k}\lambda_{ij}\left(\varphi_m^{n+1}\left(j\right)+\varphi_m^n\left(j\right)\right)=\frac{r(i)}{2}\left(\varphi_m^{n+1}\left(i\right)+\varphi_m^n\left(i\right)\right).$$

فرض کنید $a\left(i\right):=\frac{\sigma^2(i)\Delta t}{4(\Delta z)^2}$.در این‌صورت معادله فوق را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:
(۳.۵)

$$\varphi_{m+1}^{n+1}\left(i\right)\left[a\left(i\right)\left(\frac{r(i)}{\sigma^2(i)}-\frac{1}{2}\right)\Delta z+a\left(i\right)\right]+\varphi_m^{n+1}\left(i\right)\left[-1-2a\left(i\right)+\left(\lambda_{ii}-r\left(i\right)\right)\frac{\Delta t}{2}\right]$$

$$+\varphi_{m+1}^{n+1}\left(i\right)\left[-a\left(i\right)\left(\frac{r(i)}{\sigma^2(i)}-\frac{1}{2}\right)\Delta z+a\left(i\right)\right]+\frac{\Delta z}{2}\sum_{j\neq i}\lambda_{ij}\varphi_m^{n+1}\left(j\right)$$

$$=\varphi_{m+1}^{n}\left(i\right)\left[-a\left(i\right)\left(\frac{r(i)}{\sigma^2(i)}-\frac{1}{2}\right)\Delta z-a\left(i\right)\right]+\varphi_m^{n}\left(i\right)\left[-1+2a\left(i\right)-\left(\lambda_{ii}-r\left(i\right)\right)\frac{\Delta t}{2}\right]$$

$$+\varphi_{m-1}^{n}\left(i\right)\left[a\left(i\right)\left(\frac{r(i)}{\sigma^2(i)}-\frac{1}{2}\right)\Delta z+a\left(i\right)\right]-\frac{\Delta z}{2}\sum_{j\neq i}\lambda_{ij}\varphi_m^{n}\left(j\right).$$

شرط نهایی (۲.۵) نیز به‌صورت زیر تبدیل می شود:

$$\varphi_m^\circ=\left(e^{z_\circ+m\Delta z}-K\right)^+.$$

فرض کنید

$$\varphi^n := \left[\varphi_0^n(1), ..., \varphi_0^n(k), \varphi_1^n(1), ..., \varphi_M^n(1), ..., \varphi_m^n(k)\right] \in \mathbb{R}^{k(M+1)}.$$

فرض کنید φ_{km+i}^n درآیه $km+i$ــام از φ^n باشد، بنابراین $\varphi_{km+i}^n = \varphi_m^n(i)$. بنابراین معادله گسسته (۳.۵) را می‌توان به‌صورت سیستم خطی زیر در نظر گرفت:

$$A\varphi^{n+1} = (-2I - A)\varphi^n, \tag{۴.۵}$$

که A یک ماتریس حقیقی مقدار $k(M+1) \times k(M+1)$ بلوکی به‌صورت زیر است:

$$A := \begin{bmatrix} A2 & A3 & & \cdots & & & \\ A1 & A2 & A3 & \cdots & & & \\ & A1 & A2 & A3 & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & A1 & A2 & A3 \\ & & & \cdots & A1 & A2 & A3 \\ & & & \cdots & & A1 & A2 \end{bmatrix},$$

که در آن

$$A1 = Diag\Big(a(i)\Big[1 - \Big(\tfrac{r(i)}{\sigma^2(i)} - \tfrac{1}{2}\Big)\Delta z\Big]\Big)_{k\times k},$$

$$A2 = \tfrac{\Delta t}{2}\Lambda - I_k - Diag\Big(2a(i) + \tfrac{\Delta t}{2}r(i)\Big)_{k\times k},$$

$$A3 = Diag\Big(a(i)\Big[1 + \Big(\tfrac{r(i)}{\sigma^2(i)} - \tfrac{1}{2}\Big)\Delta z\Big]\Big)_{k\times k}.$$

قضیه ۱.۰.۵. روش ارائه شده در (۴.۵) پایدار است، هرگاه

$$\Delta z < \min_i \left|\frac{2\sigma^2(i)}{2r(i) - \sigma^2(i)}\right|.$$

برهان. فرض کنید λ_A یک مقدار ویژه A باشد. با استفاده از قضیه دایره گریشگورین[۲] [۱۷]، برای Δz به اندازه کافی کوچک، که در شرط زیر صدق کند

$$\Delta z < \min_i \left|\frac{2\sigma^2(i)}{2r(i) - \sigma^2(i)}\right|,$$

داریم:

$$\mathrm{R}(\lambda_A) \le -1 - \frac{\Delta t}{2}r(i),$$

[۲] Gerschgorin

که $\mathrm{R}\left(\lambda_A\right)$ قسمت حقیقی λ_A است. بنابراین قسمت حقیقی تمام مقادیر ویژه ماتریس A کمتر از ۱− است و این ایجاب می‌کند که

$$\left|\frac{۲}{\lambda_A}+۱\right|<۱.$$

از اینرو مدول‌های تمام مقادیر ویژه ماتریس $\left(-۲A^{-۱}-I\right)$ کمتر از ۱ است و این پایداری روش تکراری (۴.۵) را نتیجه می‌دهد. □

حال به بررسی این روش عددی روی مسائل فصل‌های قبل می‌پردازیم. برای این منظور بازارهای مارکوفی با سه رژیم را در نظر می‌گیریم. فضای حالت به‌صورت $\mathbf{X}=\{۱,۲,۳\}$ خواهد بود. ضرایب دریفت، تلاطم و نرخ لحظه‌ای در هر رژیم به‌صورت زیر انتخاب می‌شود:

$$\left(\mu\left(i\right),\sigma\left(i\right),r\left(i\right)\right):=\begin{cases}\left(۰/۲,\ ۰/۲,\ ۰/۲\right), & if\ \ i=۱,\\ \left(۰/۶,\ ۰/۴,\ ۰/۵\right), & if\ \ i=۲,\\ \left(۰/۸,\ ۰/۳,\ ۰/۷\right), & if\ \ i=۳.\end{cases}$$

ماتریس نسبت گذار $\Lambda=\left(\lambda_{ij}\right)$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\left(\lambda_{ij}\right)=\begin{bmatrix}-۱ & \frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳}\\ ۱ & -۲ & ۱\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & -۱\end{bmatrix}.$$

برای این حالت اختیارات مختلف اروپایی در بازارهای مارکوفی را در نظر می‌گیریم.

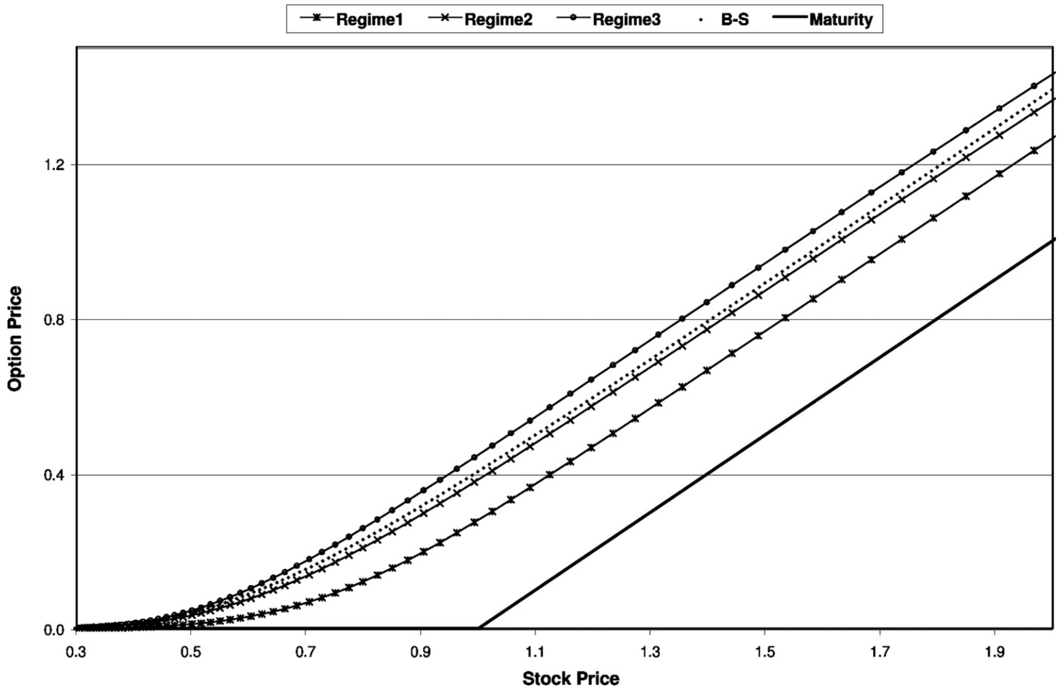
خرید اروپایی

فرض کنید قیمت توافقی $K=۱$، زمان سررسید $T=۱$، $\Delta t=۰/۰۱$ و $\Delta z=۰/۰۳۱$ باشد. s را محور افقی در نظر گرفته و مقدار $\varphi\left(۰,s,i\right)$ را در امتداد محور عمودی رسم می کنیم. در شکل ۱.۵ خط پررنگ قیمت اختیار خرید اروپایی را در زمان سررسید T نشان می‌دهد در حالی که سه منحنی دیگر قیمت اختیار خرید اروپایی را در زمان صفر برای سه رژیم اولیه مختلف نشان می‌دهد. نمودار نقطه‌دار قیمت بلک_شولز اختیار خرید با نرخ بهره $r=r\left(۲\right)$، تلاطم $\sigma=\sigma\left(۲\right)$ و با سررسید و قیمت توافقی یکسان را نمایش می‌دهد. مطابق استراتژی پوشش بهینه π، ریسک باقیمانده کوادراتیک در زمان صفر به‌صورت زیر است:

$$R_{۰}\left(\pi\right)=E\left[\left(\tilde{C}_T\left(\pi\right)-\tilde{C}_{۰}\left(\pi\right)\right)^{۲}|S_{۰},Y_{۰}\right].$$

فرض کنید

$$R_{۰}\left(\pi\right)\left(s,i\right):=E\left[\left(\tilde{C}_T\left(\pi\right)-\tilde{C}_{۰}\left(\pi\right)\right)^{۲}|S_{۰}=s,Y_{۰}=i\right].$$

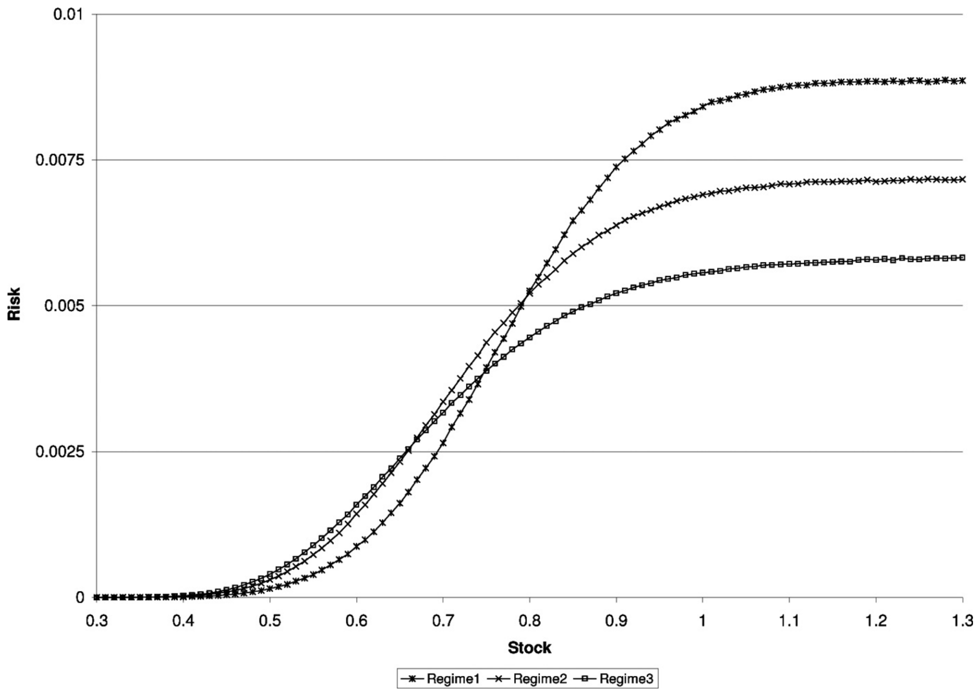


شکل ۱.۵: اختیار خرید اروپایی

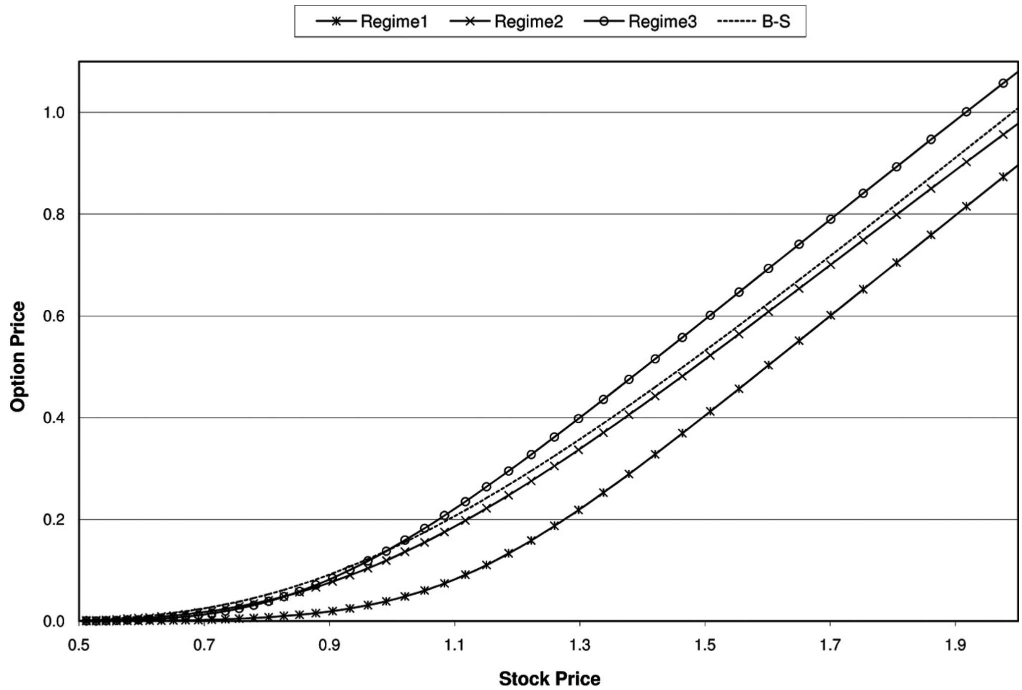
ما $R_{\circ}(\pi)$ را با استفاده از (۶.۴) برای ۱/۳ $\leq s \leq$ ۰/۳ و $i =$ ۱,۲,۳ شبیه سازی می‌کنیم. (۶.۴) شامل امید شرطی است. ما ۱۰۱ نقطه گره‌ای متساوی‌الفاصله را در بازه [۰/۱,۱/۳] که شامل قیمت توافقی $K =$ ۱ است در نظر می‌گیریم. برای هر نقطه گره‌ای s و هر $i =$ ۱,۲,۳ امید شرطی را محاسبه می‌کنیم. در شکل ۲.۵ برای هر i تابع $R_{\circ}(\pi)(s,i)$ را رسم کرده‌ایم. نمودارهای $R_{\circ}(\pi)(s,$۱$)$، $R_{\circ}(\pi)(s,$۲$)$ و $R_{\circ}(\pi)(s,$۳$)$ نیز برای مقایسه بهتر آمده است. به وضوح دیده می‌شود که در بازارهای ناقص ریسک باقیمانده کوادراتیک در $t =$ ۰ صفر نیست. بعلاوه این نمودار نکته مهم دیگری را نیز نشان می‌دهد که رابطه بین $R_{\circ}(\pi)$ در رژیم‌های مختلف است.

اختیار با مانع

شکل ۳.۵ اختیار با مانع صعود–و–خروج را با پارامترهای یکسان با بخش قبل و مانع $b =$ ۵ نشان می‌دهد. ما $\Delta t =$ ۰/۰۰۲ و $\Delta z =$ ۰/۰۲۳۱ قرار داده‌ایم. قیمت اختیار صعود–و–خروج در $s = b$ صفر می‌شود. قیمت توافقی برابر با ۱ است.بنابراین قیمت روی دامنه [۱,۲/۵] تقریبا خطی افزایش می‌یابد که ۲.۵ نصف مانع است. برای $s >$ ۰/۵ $\times b$ شانس برخورد–خروج افزایش می‌یابد. بنابراین قیمت اختیار با مانع صعود–و–خروج کاهش می‌یابد.



شکل ۲.۵: پوشش ریسک کوادراتیک اختیار خرید اروپایی با شرایط اولیه متفاوت

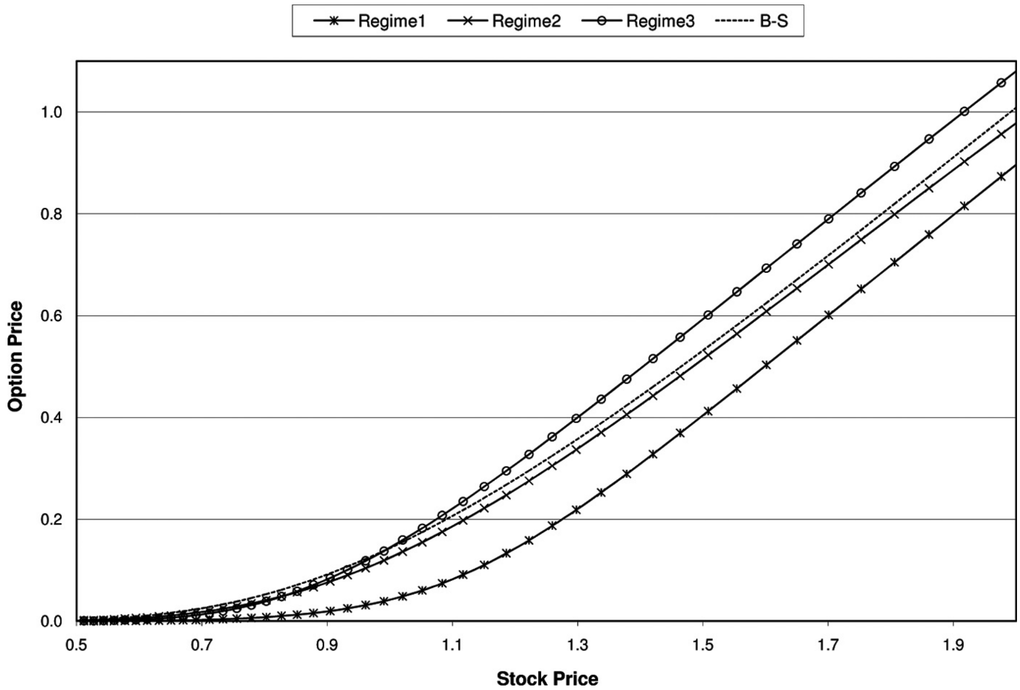


شکل ۳.۵: اختیار خرید اروپایی صعود_و_خروج

اختیار مرکب

شکل ۴.۵ یک مثال عددی از قیمت اختیار خرید روی خرید را نشان می دهد. قیمت توافقی اختیار خرید مرکب را $K_1 = ۰/۵$ و زمان سررسید را $T_1 = ۰/۵$ در نظر گرفته‌ایم. از طرف دیگر

اختیار خرید پایه دارای قیمت توافقی $K_۲ = ۱$ و زمان سررسید $T_۲ = ۱$ است. گراف نقطه‌دار قیمت بلک_شولز استاندارد را نشان می‌دهد با این فرض که بازار رژیم ثابت ۲ باشد.



شکل ۴.۵: اختیار اروپایی خرید روی خرید

مراجع

[۱] آلن، مایرن. بی و آیزاکسون، الی. ال. (۱۳۸۰)، ”آنالیز عددی برای علوم کاربردی“. مترجم دکتر سیدمحمد حسینی. دانشگاه تربیت مدرس.

[۲] جان هال، (۱۳۸۴) ” مبانی مهندسی مالی و مدیریت ریسک“، مترجمان: سجاد سیاح و علی صالح آبادی، تهران: گروه رایانه تدبیر پرداز.

[۳] جلوداری ممقانی، محمد و بادامچی‌زاده، عبدالرحیم ، (۱۳۸۹)، ”آنالیز تصادفی“، انتشارات دانشگاه علامه طباطبائی، ۲۷۵-۲۷۳.

[4] A. Bensoussan, Stochastic Control by Functional Analysis Methods. North-Holland, Amsterdam (1982).

[5] A. Jobert and L. C. G. Rogers, Option pricing with Markov-modulated dynamics. SIAM J. Control Optim. 44, 2063–2078 (2006).

[6] A. H. Tsoi, H. Yang and S. N. Yeung, European option pricing when the risk free interest rate follows a jump process. Comm. Statist. Stoch. Models 16, 143–166 (2000).

[7] B. Oksendal, Stochastic Differential Equation: An Introduction with Application, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 6th Edition, (2005).

[8] D. Duffie and C. F. Huang, Implementing Arrow-Debreu equilibria by continuous trading of few long-lived securities. Econometrica 53 1337–1356 (1985).

[9] D. Duffie and C. F. Huang, Multiperiod security markets with differential information: martingales and resolutions times. J. Math. Econ. 15 283–303 (1986).

[10] D. D. Yao, Q. Zhang and X. Y. Zhou, A Regime-Switching Model for European Options. Stochastic Processes, Optimization, and Control Theory: Applications in Financial Engineering, Queueing Networks, and Manufacturing Systems. 281–300. Internat. Ser.Oper. Res. Management Science, Vol. 94, Springer, New York (2006).

[11] D. Heath, E. Platen and M. Schweizer, A comparison of two quadratic approaches to hedging in incomplete markets. Math. Finance 11, 385–413 (2001).

[12] D. Revuz, M. Yor, Continous Martingales and Brownian Motion, Springer-Verlag, Heidelberg, (1994).

[13] D. W. Stroock, S. R. S. Varadhan, Multidimensional Diffusion Processes. Springer-Verlag, (1979).

[14] F. Black, M. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, The Journal of Political Economy. 81 637–654 (1973).

[15] G. B. DiMasi,M. Yu. Kabanov anf W. J. Runggaldier, Mean-Variance hedging of options on stocks with Markov volatitlity. Theory Probab. Appl. 39, 173–181 (1994).

[16] G. D. Grazino and L. C. G. Rogers, Barrier option pricing for assets with Markov modulated dividends. Working paper (2005).

[17] G.D. Smith, Numerical Solution of Partial Differential Equations. Oxford University Press, Oxford, UK (1987).

[18] G. Yin and X. Y. Zhou, 2004. Markowitz's mean variance portfolio selection with regime switching: From discrete-time models to their continuous-time models. IEEE Trans. Autom. Control 49, 349–359 (2004).

[19] H. Föllmer and M. Schweizer, Hedging of contingent claims under incomplete information. Applied Stochastic Analysis, Stochastic Monographs 5, 389–414 (1991).

[20] H. Föllmer and D. Sonderman, Hedging of non-redundant contingent claims. In Contributions to Mathematical Economics in Honor of G. Debreu, Hildenbrand, W., Mas-Collel, A. (eds.), North-Holland, Amsterdam, 205–223 (1986).

[21] H. Pham, T. Rheinländer and M. Schweizer, Mean-variance hedging for continuous processes: new proofs and examples. Finance Stoch. 2: 173–198 (1998).

[22] I. Karatzas and S. E. Shreve, Methods of Mathematical Finance. Springer, New York (1998).

[23] I. Karatzas, S. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer-Verlag, (1988).

[24] J. Buffington and R. J. Elliott, American options with regime switching. Intl. J.Theor. Appl. Finance 5, 497–514 (2002).

[25] J.C. Hull, Options Future and Other Derivatives, Sixth Edition, Pearson Prentice Hall, Toronto (2006).

[26] J. Jost, Partial Differential Equations, 2nd ed, Graduate Texts in Mathematics 214, New York, Springer, (2007).

[27] J. Zhang and Sun, Haiwei. , High order compact scheme with multigrid local mesh refinement procedure for convection diffusion problems, Department of mathematics and statistics, 23, 5–6 (2001).

[28] M. Musiela and M. R. Rutkowski, Martingale Methods in Financial Modelling. Springer, New York (1998).

[29] M. Schweizer, Option hedging for semi-martingales. Stochastic Processes and their Applications, 339–363 (1991).

[30] N. Ikeda and S. Watanabe, Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. 2nd ed. North-Holland, Amsterdam (1989).

[31] O. A. Ladyzhenskaya, N.N. Uralceva and V.A. Solonnikov, Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, Translation of Math. Monograph 23, AMS, Providence, RI (1968).

[32] O. Kallenberg, Foundations of Modern Probability. New York: Springer-Verlag, (1997).

[33] P. E. Kloeden, E. Platen, Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Springer-verlag, Heidelberg, (1992); Second Revised Printing (1999).

[34] P. Sousi, Advanced Probability, University of Cambridge, Cambridge, UK, October 13, (2013).

[35] P. Tirtha, Timsina, Sensitivities in option pricing models., Doctor of philosoply in mathematics. Comput. Phys., 22, 23–28 (2007).

[36] P. Wilmott, J. Dewynne, S. Howison, Option Pricing, Oxford Financial Press, (2000).

[37] P. Wilmott, Paul Wilmott On Quantitative Finance, Vol. 2, 2nd ed. John Wiley,Chichester, UK (2006).

[38] R. C. Merton, Theory of rational option pricing. Bell. J. Econ. Manage. Sci. 4, 141–183 (1973).

[39] R. L. Karandikar and G. Kallianpur, Introduction to Option Pricing Theory. Birkhäuser, Boston (2006).

[40] R, S. Mamon and M. R. Rodrigo, Explicit solutions to European options in a regime switching economy. Operations Research Letters 33, 581–586 (2005).

[41] S. I. Resnick, A Probability Path, Boston, MA: Birkhauser Boston Inc. (1999).

[42] T. Lee, D. Spike and M. Sun, Hai-wei, Fourth order compact scheme with local mesh refinement for option pricing in jump-diffusion, Department of mathematics, 18 (2009).

[43] X. Guo, Information and option pricing. Quantitative Finance 1, 38–44 (2002).

[44] X. Guo, Q. Zhang, Closed form solutions for perpetual American put options with regime switching. SIAM J. Appl. Math 39, 173–181 (2004).

[45] X. Y. Zhou and G. Yin, Markowitz's mean-variance portfolio selection withregime switching: a continuous-time model. SIAM J. Control Optimiz. 42, 1466–1482 (2003).

Aabstract

In this thesis, we deal with markov markets that are priced according to the Black-Scholes model. That is, their price process applies to the equation below:

$$dS_t = \mu\left(X_t\right) S_t dt + \sigma\left(X_t\right) S_t dW_t,$$

Where $\{W_t,\ t \geq 0\}$ the standardized and independent brainstorming process of the Markov chain and the parameters σ and μ respectively indicate dirift and turbulence of the market. . In these types of markets, we are looking for a strategy that hedging the risk (so-called economists).

Keywords: Black-Scholes equations, Hedging option Pricing, jump-diffusion, Minimal martingale measure, Incomplete Markov markets

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Analysis

Hedging Option Pricing under Markovian Black-scholes Market

By: Morteza Ziakhalo

Supervisor

Elham Dastranj

Advisor

Mojtaba Mirlawhi

Jan 2019