بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی محض، گرایش جبر

رساله دکتری

بررسی گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم‌یافته روی حلقه‌های ناجابه‌جایی

نگارنده: مرضیه یزدانفر

استاد راهنما

دکتر ابراهیم هاشمی

بهمن ۱۳۹۷

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

باسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۱۲: صورت جلسه دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

بدینوسیله گواهی می شود خانم **مرضیه یزدانفر** دانشجوی دکتری رشته **ریاضی محض-جبر** به شماره دانشجویی **۹۳-۱۵۶۵** ورودی **مهر** ماه سال **۹۳** در تاریخ **۹۷/۱۱/۱** از رساله خود با عنوان : **بررسی گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم‌یافته روی حلقه‌های ناجابه‌جایی** دفاع و با اخذ نمره ......۱۹/۹۰...... به درجه : ......عالی...... نائل گردید.

الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹ ☑	ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ – ۱۷ ☐
ج) درجه خوب: نمره ۱۶/۹۹ – ۱۵ ☐	د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد ☐
ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد ☐	

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱	دکتر ابراهیم هاشمی	استاد راهنما	استاد	
۲	دکتر علی اکبر استاجی	استاد مدعو خارجی	دانشیار	علی اکبر استاجی
۳	دکتر سیدحیدر جعفری	استاد مدعو داخلی	استادیار	
۴	دکتر عبدالله آل‌هوز	استاد مدعو داخلی	استادیار	AA
۵	دکتر مهدی قوتمند	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	استادیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم بعمل آید.

رئیس دانشکده و رئیس هیأت داوران: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء:

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشکده ریاضی

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

به‌خاطر همه‌ی تلاش‌های محبت آمیزی که

در دوران مختلف زندگی‌ام انجام داده‌اند.

سپاس‌گزاری...

اکنون که به یاری پروردگار و یاری و راهنمایی اساتید بزرگوار موفق به انجام این رساله شده‌ام وظیفه‌ی خود دانسته که نهایت سپاسگزاری را از تمامی عزیزانی که در این راه به من کمک کرده‌اند به‌عمل آورم:

در آغاز از استاد بزگوار جناب آقای **دکتر ابراهیم هاشمی** که در کمال صبر و فروتنی از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و راهنمایی این رساله را بر عهده داشتند، کمال تشکر را دارم.

هم‌چنین، از داوران گرامی، آقایان **دکتر علی اکبر استاجی**، **دکتر سید حیدر جعفری** و **دکتر عبداللّه آل‌هوز** که زحمت داوری و تصحیح این رساله را برعهده داشتند سپاسگزارم.

در پایان، این رساله را تقدیم می‌کنم به خانواده عزیزم که همیشه یار و همراه من بوده‌اند.

مرضیه یزدانفر
بهمن ۱۳۹۷

تعهد نامه

اینجانب **مرضیه یزدانفر** دانشجوی دکتری رشته **ریاضی محض** دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده رساله با عنوان **بررسی گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم‌یافته روی حلقه‌های ناجابه‌جایی** ، تحت راهنمایی **دکترابراهیم هاشمی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این رساله، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود ” یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از رساله رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مرضیه یزدانفر
بهمن ۱۳۹۷

مالکیت نتایج و حق نشر

چکیده

یکی از ساختارهای مهم جبری که اخیراً مورد توجه بسیاری قرار گرفته، حلقه‌ی سری‌های توانی اریب تعمیم‌یافته است که تعمیمی از ساختارهای مهم از جمله حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب، حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب لوران، حلقه‌ی سری‌های توانی اریب، حلقه‌ی سری‌های توانی اریب لوران، حلقه‌ی گروهی اریب و ... می‌باشد. در این رساله قصد داریم ضمن بررسی برخی خواص پوچ‌سازی حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم یافته مانند مک‌کوی بودن، زیپ بودن، خاصیت (A) و خاصیت قویاً_AB، به بررسی گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم‌یافته و برخی حالات خاص آن بپردازیم. هم‌چنین برای حلقه‌ی مونوئیدی اریب که حالت خاصی از حلقه‌ی سری‌های توانی اریب تعمیم‌یافته است، ساختار عناصری چون عناصر خودتوان، یکه، تمیز و تمیز_ پوچ را مشخص کرده و سپس با استفاده از نتایج بدست آمده زیرگراف‌های مقسوم‌علیه صفر القابی مربوط به آن‌ها را مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم.

کلمات کلیدی: گراف مقسوم‌علیه صفر؛ حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم یافته؛ قطر؛ حلقه‌ی برگشت‌پذیر؛ عنصرخودتوان؛ عنصر پوچ‌توان؛ عنصر یکه؛ عنصر تمیز.

لیست مقالات مستخرج از رساله

1. Hashemi, E., Yazdanfar, M. and Alhevaz. A., On generalized power series rings with some restrictions on zero-divisoes. *J. Algebra Appl.* **17**(3) (2018), Article Id: 1850040, 21 pp.

2. Hashemi, E. and Yazdanfar, M., On clean and nil clean elements in skew t.u.p. monoid rings. *Bull. Korean Math. Soc.*, **56**(1) (2019), 57-71.

3. Hashemi, E., Yazdanfar, M. and Alhevaz. A., Directed zero-divisor graph and skew power series rings. *Trans. Comb.*, **7**(4) (2018), 43-57.

4. Yazdanfar, M. and Hashemi, E., On constant products of elements in skew t.u.p. monoid rings. *First Local Conference of Mathematical Science and Applications*, Shahid Chamran University of Ahvaz, December 20, 2017.

فهرست مطالب

۱ مقدمه **۱**

۲ گراف مقسوم‌علیه صفر جهت‌دار و حلقه‌ی سری های توانی اریب **۷**

۱.۲ مقدمات و تعاریف ۷

۲.۲ گراف مقسوم‌علیه صفر جهت‌دار ۱۰

۳ حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم‌یافته و گراف مقسوم‌علیه صفر **۲۷**

۱.۳ مقدمات و تعاریف ۲۸

۲.۳ برخی ویژگی‌های پوچ‌سازی حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم یافته ۳۳

۳.۳ گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم‌یافته ۴۷

۴ عناصر تمیز و تمیز_پوچ در حلقه‌ی .t.u.p_ مونوئیدی اریب **۵۷**

۱.۴ مقدمات و تعاریف ۵۸

۲.۴ عناصر خودتوان در حلقه‌ی مونوئیدی اریب روی حلقه‌های نیم‌جابه‌جایی . ۶۰

۳.۴ مونوئیدهای دارای دو عضو حاصل‌ضرب یکتا ۶۶

۴.۴ عناصر یکه در حلقه‌ی مونوئیدی اریب روی حلقه‌های برگشت‌پذیر یا دوو راست ۶۷

۵.۴ زیرگراف‌های القایی $\Gamma(\mathrm{Idem}(R))$ و $\Gamma(\mathrm{cln}(R))$ ۷۷

مراجع **۸۳**

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی **۹۱**

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی **۹۳**

نمایه **۹۶**

فصل ۱

مقدمه

برای حلقه‌ی مفروض R و مونوئید مرتب اکید S، ساختار حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم‌یافته‌ی $R[[S]]$ توسط الیوت[1] و ریبنبویم[2] در مرجع [۲۶]، معرفی شد. مازورک[3] و ژیمبوسکی[4] [۶۵] این ساختار را به حالت اریب آن تعمیم دادند. اهمیت این ساختار در این است که رده‌ی بسیار وسیعی از حلقه‌ها از جمله حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها (اریب)، حلقه‌ی سری‌های توانی (اریب)، حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های (اریب) لوران، حلقه‌ی مونوئیدی (اریب) و ...را در بردارد. از این‌رو هر نتیجه‌ای که برای حلقه‌ی سری‌های توانی اریب تعمیم‌یافته برقرار باشد، برای این رده از حلقه‌ها نیز برقرار خواهد بود. به همین دلیل اخیراً مطالعات وسیعی در این زمینه انجام شده است. به عنوان مثال، مازورک وژیمبوسکی در مرجع [۶۵]، شرایط لازم و کافی برای اینکه حلقه‌ی سری‌های توانی اریب تعمیم‌یافته‌ی $R[[S,\omega]]$ فون نیومن منظم باشد را بیان کردند و نشان دادند که تحت آن شرایط، حلقه‌ی $R[[S,\omega]]$ فون نیومن منظم است اگر و تنها اگر نیم‌ساده باشد. هم‌چنین، در مرجع [۶۱]، خاصیت (S,ω)ـ‌آرمنداریز، که تعمیمی از خاصیت آرمنداریز روی چندجمله‌ای‌ها به سری‌های توانی اریب تعمیم‌یافته است، مورد مطالعه قرار گرفت. علاوه بر این، نشان داده شد که تحت چه شرایطی حلقه‌ی سری‌های توانی اریب تعمیم‌یافته کاهشی و یا نیم‌جابه‌جایی است. آل‌هوز و

[1] Eliott

[2] Ribenboim

[3] Mazurek

[4] Ziembowski

هاشمی در مرجع [۱]، مطالعه‌ی ساختار عناصر پوچ‌توان در ساختارهای حلقه‌ای ناجابه‌جایی را ادامه دادند. آن‌ها به دنبال یافتن پاسخی برای این سؤال بودند که آیا حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم‌یافته روی حلقه‌ی ضرایب پوچ، پوچ خواهد بود یا خیر. هم‌چنین، آن‌ها برخی ویژگی پوچ‌سازی در حلقه‌ی سری‌های توانی اریب تعمیم‌یافته را، که تعمیمی از شرایط آرمندارِیز گونه و مک‌کوی گونه است، مورد بررسی و مطالعه قرار دادند (برای مطالعه‌ی بیشتر در زمینه‌ی نتایج به‌دست آمده روی حلقه‌ی سری‌های توانی اریب تعمیم‌یافته به مراجع [۱، ۶۱، ۶۲، ۷۲، ۶۴] مراجعه شود).

در این رساله مطالعه روی حلقه‌ی سری‌های توانی اریب تعمیم‌یافته را ادامه داده و به بررسی برخی خواص پوچ‌سازی آن مانند خاصیت مک‌کوی، خاصیت زیپ، خاصیت قویاً- AB و خاصیت (A) می‌پردازیم. هم‌چنین، ساختار عناصر خودتوان، یکه، تمیز و تمیز- پوچ را درحلقه‌ی مونوئیدی اریب، که حالت خاصی از حلقه‌ی سری‌های توانی اریب تعمیم‌یافته است، مطالعه و بررسی می‌کنیم. علاوه بر این، قصد داریم برخی مفاهیم حلقه‌ای و مفاهیم گرافی رابه هم مرتبط کرده و به مطالعه‌ی گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم‌یافته بپردازیم.

مرتبط کردن مفاهیم موجود بین شاخه‌های مختلف ریاضیات یکی از روش‌های کارآمد برای بررسی کردن آن مفاهیم می‌باشد. نسبت دادن شئ ترکیبیاتی به شئ جبری دارای پیشینه‌ی نسبتاً طولانی می‌باشد. یکی از قدیمی‌ترین این تناظرها نسبت دادن گراف کیلی به یک گروه می‌باشد که توسط آرتور کیلی[۵] انجام گرفت و نتایج بسیاری از این تناظر به‌دست آمد. اولین ارتباط بین حلقه‌ها و گراف‌ها توسط بک[۶] [۱۳] برقرار شد. بک به حلقه‌ی جابه‌جایی R، گراف مقسوم‌علیه صفر R، که با $\Gamma(R)$ نمایش داده می‌شود، را نسبت داد. در این گراف، تمام عناصر حلقه به عنوان مجموعه رئوس گراف در نظر گرفته شده بودند و دو عنصر متمایز a و b با یکدیگر مجاور بودند اگر $ab = 0$. البته تمرکز اصلی بک مشخص کردن عدد رنگی این گراف بود. در ادامه، اندرسون[۷] و لیوینگستون[۸] [۸] تعریف این گراف را اصلاح کردند و مجموعه رئوس گراف را مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌ی R که ناصفر هستند، در نظر گرفتند. سؤال مهم محققان این زمینه این بود که چگونه خواص حلقه‌ی R، ویژگی‌های گرافی $\Gamma(R)$ را مشخص می‌کند و بالعکس. پاسخ دادن به این سؤال بسیار جذاب بود چرا که از روش‌های ساده محاسباتی تا مسایل پیشرفته در نظریه‌ی حلقه‌ها به کمک حل این مسائل آمدند. در خیلی از موضوعات، تمام حلقه‌هایی که گراف‌های آن‌ها دارای ویژگی خاصی بودند، رده‌بندی شدند. همان‌طور که انتظار می‌رفت بعد از نسبت دادن این گراف به حلقه، پژوهشگران زیادی به‌خصوص از شاخه‌ی جبر جذب این موضوع شدند و به مرور گراف‌های مختلفی که ایده‌ی اصلی آن‌ها گراف مقسوم‌علیه صفر بود به ساختارهای دیگر جبری نسبت

[5] Arthur Cayley
[6] Beck
[7] Anderson
[8] Livingston

داده شد.

مطالعات بعدی در این راستا، در دو سبک مختلف دنبال شد. عده‌ای مفهوم گراف مقسوم‌علیه صفر را به ساختارهای دیگر جبری تعمیم دادند. به عنوان مثال در [۲۳] و [۱۴] گراف مقسوم‌علیه صفر نیم‌گروه‌ها و مدول‌ها معرفی و بررسی شدند. عده‌ای دیگر نیز به نسبت دادن گراف‌های جدید به ساختارهای جبری پرداختند که در این‌جا به ذکر دو نمونه از آن‌ها می‌پردازیم:

۱. گراف‌های هم بیشین[۹] که توسط شارما [۱۰] و باتوادکار[۱۱] در [۷۳] معرفی شد.در این گراف تمام عناصر حلقه R به عنوان رئوس گراف در نظر گرفته شدند و دو عنصر متمایز a و b به یکدیگر متصل هستند اگر $aR + bR = R$.

۲. گراف تام[۱۲] یک حلقه جابه‌جایی که توسط اندرسون و بداوی[۱۳] در مرجع [۴] معرفی شد. در این گراف نیز تمام اعضای حلقه‌ی R به عنوان رئوس گراف در نظر گرفته شده‌اند و دو رأس متمایز a و b به یکدیگر متصل هستند اگر $a+b$ مقسوم‌علیه صفری از R باشد.

بر اساس تعریف اندرسون و لیوینگستون [۸]، گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی جابه‌جایی R، که با نماد $\Gamma(R)$ نشان داده می‌شود، گرافی است که مجموعه رئوس آن مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌ی R، که ناصفر هستند، می‌باشد و دو رأس متمایز a و b با هم مجاورند اگر و تنها اگر $ab = ۰$. اندرسون و لیوینگستون در مرجع [۸، قضیه ۲.۳] ثابت کردند که گراف $\Gamma(R)$ همیشه همبند است و $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) \leq ۳$. آن‌ها این قضیه را با این نتیجه‌ی نظریه گراف که اگر گراف Γ شامل دور باشد، آن‌گاه $\mathrm{gr}(\Gamma) \leq ۲\mathrm{diam}(\Gamma) + ۱$، ترکیب کردند و نتیجه گرفتند $\mathrm{gr}(\Gamma(R)) \leq ۷$. آن‌ها [۸، قضیه ۲.۴] همچنین نشان دادند اگر R یک حلقه‌ی آرتینی، جابه‌جایی و شامل دور باشد، آن‌گاه $\mathrm{gr}(\Gamma(R)) \leq ۴$ و حدس زدند که این نتیجه برای هر حلقه‌ی جابه‌جایی دلخواه برقرار است. حدس آن‌ها توسط مولای[۱۴] [۶۷] و دیمیر[۱۵] [۲۴] به‌طور جداگانه اثبات شد.

مفهوم گراف مقسوم‌علیه صفر توسط ردموند[۱۶] در مرجع [۷۷]، به حلقه‌های کلی و نه لزوماً جابه‌جایی گسترش داده شد. فرض کنیم $Z(R)$ بر مجموعه‌ی تمام مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌ی R و همچنین $Z(R)^*$ بر مجموعه‌ی (ناتهی) مقسوم‌علیه‌های صفر که ناصفر می‌باشند، دلالت دارد. در مرجع [۷۷]، ردموند گراف مقسوم‌علیه صفر بدون جهت

[9] Comaximal graph
[10] Sharma
[11] Bhatwadekar
[12] Total graph
[13] Badawi
[14] Mulay
[15] DeMeyer
[16] Redmond

حلقه‌ناجابه‌جایی R، که با نماد $\overline{\Gamma}(R)$ نمایش داده است، را به این‌صورت تعریف کرد که در آن $Z(R)^*$ مجموعه‌ی رئوس گراف بوده و برای رئوس متمایز a و b از $Z(R)^*$، یالی بین a و b وجود دارد اگر و تنها اگر $ab = ۰$ یا $ba = ۰$. ردموند در مرجع [۷۷] ثابت کرد که گراف $\Gamma(R)$ همیشه همبند است و $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) \leq ۳$.

گراف مقسوم‌علیه صفر در واقع یک نمایش گرافی از حلقه است که برخی خواص جدید جبری حلقه که از دید جبردانان دور مانده است را می‌توان از آن استخراج کرد. برای مثال، با استفاده از مفهوم گراف مقسوم‌علیه صفر در مرجع [۷۶] ثابت شده است که برای هر حلقه‌ی متناهی R، مجموع $\sum_{x\in R} |r_R(x) - \ell_R(x)|$ عددی زوج است، که درآن $r_R(x)$ و $\ell_R(x)$ به‌ترتیب پوچساز راست و چپ عنصر x در حلقه‌ی R می‌باشند.

در مطالعاتی که در این راستا انجام شده است، علاقه‌ی قابل توجهی وجود دارد که بدانیم آیا یک خاصیت گرافی مفروض برای حلقه‌ی مدنظر، تحت توسیع‌های حلقه‌ای مختلف، حفظ می‌شود یا خیر. ابتدایی‌ترین توسیع‌هایی که در این راستا بررسی می‌شود توسیع حلقه‌ای چندجمله‌ای‌ها و نیز حلقه‌ی سری‌های توانی می‌باشد. آکستل[17]، کویکندال[18] و استیکلس[19] در مرجع [۱۲]، محفوظ ماندن قطر و کمر گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی جابه‌جایی R تحت توسیع‌های چندجمله‌ای و سری‌های توانی را مورد بررسی قرار داده‌اند. در ادامه‌ی این کار افرادی چون لوکاس[20] در مرجع [۵۹]، و همچنین اندرسون و مولای در مرجع [۶]، این ویژگی را مورد بررسی و مطالعه‌ی بیشتر قرار داده‌اند. هاشمی[21] و امیرجان[22] در مرجع [۳۸]، این نتایج را به حالت ناجابه‌جایی گسترش دادند. آن‌ها برای حلقه‌ی برگشت‌پذیر و σـ سازگار R، گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی سری‌های توانی اریب $R[[x;\sigma]]$ را مورد مطالعه قرار دادند و هم‌چنین، مقایسه‌ای از مقادیر ممکن برای قطر و کمر گراف‌های $\Gamma(R)$، $\Gamma(R[x;\sigma,\delta])$ و $\Gamma(R[[x;\sigma]])$ ارائه نمودند. آن‌ها در مرجع [۳۷] مطالعات خود را در این زمینه ادامه داده و به بررسی رابطه‌ی بین خواص حلقه‌ای حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب $R[x;\sigma,\delta]$ و خواص گرافی گراف مقسوم‌علیه صفر آن پرداخته‌اند. هم‌چنین برای یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر و (σ,δ)ـ سازگار یک دسته‌بندی کاملی از مقادیر ممکن برای قطر گراف $\Gamma(R[x;\sigma,\delta])$ متناسب با قطر گراف $\Gamma(R)$ ارائه کرده‌اند.

این رساله شامل ۳ فصل به‌صورت زیر می‌باشد:

در فصل اول، بین برخی مفاهیم گرافی و حلقه‌ای ارتباط برقرار کرده و به بررسی ارتباط بین ویژگی‌های حلقه‌ای حلقه‌ی سری‌های توانی اریب $R[[x;\sigma]]$ و ویژگی‌های گرافی گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(R[[x;\sigma]])$ می‌پردازیم. برای این منظور، دسته بندی کاملی از مقادیر

[17] Axtel
[18] Coykendall
[19] Stickles
[20] Lucas
[21] Hashemi
[22] Amirjan

ممکن برای قطر گراف جهت‌دار $\Gamma(R[[x;\sigma]])$ ارائه می‌دهیم که در آن R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، نوتری راست و σـ سازگار است. هم‌چنین، چندین مثال برای نشان دادن ضرورت شرایط اعمال شده ارائه می‌دهیم.

در فصل دوم، ابتدا قصد داریم برخی خواص پوچ‌سازی یکی از ساختارهای مهم حلقه‌ای در نظریه‌ی حلقه‌ای ناجابه‌جایی را مورد مطالعه قرار دهیم. فرض کنیم R حلقه‌ای دلخواه، $(S,\leq)$ مونوئید (جزئاً) مرتب اکید و نیز $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ یک همریختی مونوئیدی باشد. حلقه‌ی سری‌های توانی اریب تعمیم‌یافته $R[[S,\omega,\leq]]$ شامل تمام توابع از مونوئید S به حلقه‌ی ضرایب R خواهد بود که محمل آن‌ها نه شامل زنجیرهای نزولی نامتناهی و نه پاد زنجیرهای نامتناهی، با جمع نقطه‌ای و ضرب پیچشی اریب که توسط عمل ω از مونوئید S روی حلقه‌ی ضرایب R داده شده است، می‌باشد. نتایج ما در این فصل درواقع توسیعی از نتایجی است که در فصل قبل برای حلقه‌ی سری‌های توانی اریب بدست آوردیم. ابتدا برخی خواص پوچ‌سازی حلقه‌ی سری‌های توانی اریب تعمیم‌یافته مانند خاصیت مک کوی، خاصیت (A)، خاصیت زیپ و خاصیت قویاً‌ـ AB را برای رده‌ی خاصی از حلقه‌ها و مونوئیدهای مرتب اکید بیان کنیم. هم‌چنین، ارتباط میان ویژگی‌های حلقه‌ای حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم‌یافته و ویژگی‌های گرافی گراف مقسوم‌علیه صفر آن را مورد بررسی و مطالعه قرار می‌دهیم و دسته بندی کاملی از مقادیر ممکن برای قطر گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(R[[S,\omega]])$، در حالتی‌که ω همریختی همانی است، ارائه می‌دهیم.

در فصل سوم، به مطالعه‌ی ساختار بعضی از عناصر یکی از ساختارهای حلقه‌ای در نظریه‌ی حلقه‌های ناجابه‌جایی می‌پردازیم. فرض کنیم R حلقه، M مونوئید و $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی باشد. حلقه‌ی مونوئیدی اریب $R * S$ شامل تمام ترکیبات به فرم $\sum_{i=۱}^{n} a_i g_i$ با جمع نقطه‌ای و ضرب پیچشی است که توسط عمل ω از مونوئید S به روی حلقه‌ی ضرایب R داده شده است. در این فصل ساختار عناصر خودتوان، یکه، تمیز و تمیزـ پوچ در حلقه‌ی مونوئیدی اریب را بررسی می‌کنیم. در ابتدا نشان می‌دهیم برای یک حلقه‌ی نیم‌جابه‌جایی، عناصر خودتوان حلقه‌ی مونوئیدی اریب $R * S$ دقیقاً عناصر خودتوان R می باشند. هم‌چنین نشان می‌دهیم عنصر ناصفر $\alpha = a_۱ g_۱ + a_۲ g_۲ + \cdots + a_n g_n$ از $R * S$ یکه است اگر و تنها اگر $۱ \leq i_۰ \leq n$ وجود داشته باشد که $g_{i_۰} = e$ (عنصر همانی مونوئید S)، $a_{i_۰}$ در R یکه باشد و برای هر $i \neq i_۰$، a_i پوچ‌توان است، که در آن R حلقه‌ای برگشت‌پذیر یا دوو راست است. سپس با استفاده از نتایج بدست آمده، ساختار عناصر تمیز و تمیزـ پوچ حلقه‌ی مونوئیدی اریب $R * S$ و ارتباط آن با عناصر تمیز و تمیزـ پوچ حلقه‌ی پایه‌ی R را مشخص می‌کنیم. علاوه براین، زیرگراف‌های القایی $\Gamma(\mathrm{Idem}(R))$ و $\Gamma(\mathrm{cln}(R))$ از $\Gamma(R)$ هم‌چنین زیرگراف‌های القایی $\Gamma(\mathrm{Idem}(R * S))$ و $\Gamma(\mathrm{cln}(R * S))$ از $\Gamma(R * S)$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

فصل ۲

گراف مقسوم‌علیه صفر جهت‌دار و حلقه‌ی سری های توانی اریب

در این فصل بین برخی مفاهیم گرافی و حلقه‌ای ارتباط برقرار کرده و به بررسی ارتباط بین ویژگی‌های حلقه‌ای حلقه‌ی سری‌های توانی اریب $R[[x;\sigma]]$ و ویژگی‌های گرافی گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(R[[x;\sigma]])$ می‌پردازیم. برای این منظور، دسته بندی کاملی از مقادیر ممکن برای قطر گراف جهت‌دار $\Gamma(R[[x;\sigma]])$ ارائه می‌دهیم که در آن R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، نوتری راست و σـ سازگار است. هم‌چنین، چندین مثال برای نشان دادن ضرورت شرایط اعمال شده ارائه می‌دهیم.

مطالب این فصل برگرفته از مرجع [۳۴] می‌باشد.

۱.۲ مقدمات و تعاریف

مفهوم گراف مقسوم‌علیه صفر اولین بار توسط بک [۱۳] برای حلقه‌های جابه‌جایی بیان شد. این تعریف توسط اندرسون و لیوینگستون [۸] بازسازی شد. نتایج اساسی بسیاری در این زمینه به‌دست آمده است که می‌توان آن‌ها را در مرجع [۸] مشاهده کرد. مقالات بسیاری به مطالعه‌ی روابط بین خواص گرافی در گراف مقسوم‌علیه صفر و خواص جبری حلقه‌های جابه‌جایی اختصاص یافته‌اند (برای مشاهده‌ی برخی مقالات و نتایج در این زمینه مراجع

[۱۰، ۳، ۸، ۶] را ببینید).

همان‌طور که پیش‌تر گفته شد، ردموند در مرجع [۷۷]، این مفهوم را از حلقه‌های جابه‌جایی به حلقه‌های کلی (نه لزوماً جابه‌جایی) گسترش داد و دو گراف مقسوم علیه صفر غیرجهت‌دار و جهت‌دار را روی حلقه‌ی R تعریف کرد.

او گراف مقسوم‌علیه صفر جهت‌دار حلقه‌ی R را به این‌صورت تعریف کرد که در آن مجموعه رئوس گراف همان $Z^*(R)$ بوده و برای هر دو رأس متمایز a و b، $a \longrightarrow b$ یالی از گراف است اگر و تنها اگر $ab = ۰$.

یادآوری می‌کنیم یک گراف را همبند[1] می‌گوییم اگر برای هر جفت از رأس‌های متمایز u و v دنباله‌ای متناهی از رئوس متمایز $u = v_۱, v_۲, \dots, v_n = v$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که هر جفت $\{v_i, v_{i+۱}\}$ یک یال است. چنین دنباله‌ای را مسیر[2] می‌گوییم و برای هر دو رأس متمایز a و b در گراف ساده Γ، فاصله[3] بین a و b، که با نماد $d(a,b)$ نمایش داده می‌شود، را طول کوتاهترین مسیر بین a و b در نظر می‌گیریم. اگر چنین مسیری وجود نداشته باشد قرار می‌دهیم $d(a,b) = \infty$. همچنین یادآوری می‌کنیم قطر[4] گراف $\Gamma(R)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = \sup\{d(a,b) | \text{ هستند } \Gamma(R) \text{ و } b \text{ رأس‌های متمایز از } a \}.$$

اگر گراف فقط شامل رأس تنها باشد قطر آن صفر درنظر گرفته می‌شود و یک گراف همبند با بیش از یک رأس دارای قطر یک است اگر و تنها اگر کامل باشد. به عبارت دیگر هر جفت از رئوس متمایز Γ با هم مجاور باشند. کمر[5] گراف $\Gamma(R)$، که با نماد $\operatorname{gr}(\Gamma(R))$ نمایش داده می‌شود، طول کوتاهترین دور در $\Gamma(R)$ تعریف می‌شود، درصورتی‌که $\Gamma(R)$ شامل دور باشد. در غیر این‌صورت $\operatorname{gr}(\Gamma(R)) = \infty$.

در این فصل قصد داریم گراف مقسوم‌علیه صفر جهت‌دار را برای حلقه‌ی سری‌های توانی اریب مورد مطالعه قرار دهیم. برای این منظور ابتدا به بیان برخی ویژگی‌های پوچ‌سازی حلقه‌ی سری‌های توانی اریب می‌پردازیم. یکی از این خواص، خاصیت مک‌کوی[6] می‌باشد. بر اساس آن‌چه نیلسن[7]در مرجع [۷۰] معرفی کرده است، حلقه‌ی R را حلقه‌ای مک‌کوی چپ می‌گوییم اگر $f(x)$ و $g(x)$ عناصر ناصفری از $R[x]$ باشند که $f(x)g(x) = ۰$، آن‌گاه عنصر ناصفر $r \in R$ وجود داشته باشد که $rg(x) = ۰$. حلقه‌ی مک‌کوی راست به‌طور مشابه تعریف می‌شود. اگر حلقه‌ی R هم مک‌کوی چپ و هم مک‌کوی راست باشد، آن‌گاه حلقه‌ی R را حلقه‌ای مک‌کوی می‌گوییم. علت نامگذاری حلقه‌ی مک‌کوی به این دلیل است که مک‌کوی

[1]Connected
[2]Path
[3]Distance
[4]Diameter
[5]Girth
[6]McCoy
[7]Nielsen

[۶۶، قضیه ۲] برای اولین بار ثابت کرد که اگر R حلقه‌ای جابه‌جایی و $f(x)$ مقسوم‌علیه صفری از حلقه چندجمله‌ای‌های $R[x]$ باشد، آن‌گاه $0 \neq r \in R$ وجود دارد که $f(x)r = 0$.
یانگ[8]، سونگ[9] و لیو[10] در مرجع [۷۹]، مفهوم مک‌کوی را به حلقه‌ی سری‌های توانی روی حلقه‌ی ناجابه‌جایی گسترش دادند و مفهوم حلقه‌ی مک‌کوی نسبت به سری‌های توانی را معرفی کردند. در ادامه‌ی مطالعه‌ی حلقه‌های مک‌کوی، آل هوز[11] و کیانی[12] در مرجع [۲]، مفهوم حلقه‌ی σـ مک‌کوی نسبت به سری‌های توانی را معرفی کردند. حلقه‌ی R با درونریختی σ را حلقه‌ی σـ مک‌کوی راست نسبت به سری‌های توانی می‌گوییم هرگاه برای عناصر ناصفر $f(x), g(x) \in R[[x;\sigma]]$ که $f(x)g(x) = 0$، عنصر ناصفر $c \in R$ وجود داشته باشد که $f(x)c = 0$. حلقه‌ی σـ مک‌کوی چپ نسبت به سری‌های توانی به‌طور مشابه تعریف می‌شود. اگر حلقه‌ی R هم σ ـ مک‌کوی راست و هم σ ـ مک‌کوی چپ نسبت به سری‌های توانی باشد، می‌گوییم R حلقه‌ی σ ـ مک‌کوی نسبت به سری‌های توانی است.

کلاس حلقه‌های مورد مطالعه‌ی ما به صورت زیر تعریف می‌شوند. حلقه‌ی R را متقارن[13] می‌گوییم هرگاه برای هر $a, b, c \in R$، $abc = 0$ اگر و تنها اگر $acb = 0$. درصورتی‌که حلقه‌ای R یکدار باشد و حاصل‌ضرب تعدادی از عناصر آن صفر باشد، هر جایگشتی از آن‌ها همچنان صفرخواهد بود. حلقه‌ی R برگشت‌پذیر[14] نامیده می‌شود در صورتی‌که برای هر $a, b \in R$، اگر $ab = 0$، آن‌گاه $ba = 0$. به وضوح هر حلقه‌ی یکدار و متقارن برگشت‌پذیر است. یک حلقه را دوو[15] راست (متناظراً، دوو چپ) می‌نامیم اگر و تنها اگر هر ایدآل راست (متناظراً، ایدآل چپ) آن دو طرفه باشد. حلقه‌ی R را نیم‌جابه‌جایی[16] می‌گوییم در صورتی‌که برای هر $a, b \in R$، اگر $ab = 0$، آن‌گاه $aRb = 0$. به راحتی می‌توان نشان داد که حلقه‌های دوو و برگشت‌پذیر، نیم جابه‌جایی هستند. مارکز در مرجع [۶۰، مثال ۵]، با ارائه مثالی نشان داد که حلقه‌های برگشت‌پذیر لزماً دوو و یا متقارن نیستند. همچنین، هر حلقه‌ی کاهشی (حلقه‌ای که فاقد عنصر پوچ‌توان ناصفر است) یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر است.

در این فصل، ابتدا شرایطی که تحت آن حلقه‌ی ناجابه‌جایی R حلقه‌ای σـ مک‌کوی نسبت به سری‌های توانی است را بیان می‌کنیم و سپس به‌عنوان کاربردی از آن ، برخی خواص پوچ‌سازی حلقه‌ی سری‌های توانی اریب $R[[x;\sigma]]$ را بیان می‌کنیم. به‌علاوه، قصد داریم محفوظ ماندن قطر گراف مقسوم‌علیه صفرجهت‌دار حلقه‌ی ناجابه‌جایی R را تحت توسیع سری‌توانی اریب مورد بررسی قرار دهیم و دسته بندی کاملی از مقادیر ممکن

---

[8] Yang
[9] Song
[10] Liu
[11] Alhevaz
[12] Kiani
[13] Symmetric
[14] Reversible
[15] Duo
[16] Semicommutative

برای قطر گراف مقسوم‌علیه صفر جهت‌دار $\Gamma(R[[x;\sigma]])$ ارائه دهیم، که در آن R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، نوتری راست و σـ سازگار است.

در سرتاسر این رساله، R را حلقه‌ای شرکت‌پذیر[۱۷] و یکدار در نظر می‌گیریم مگر آن‌که خلاف آن صراحتاً ذکر شود. برای $X \subseteq R$، ایدال راست تولید شده توسط X با نماد $\langle X\rangle_r$ نشان داده می‌شود و

$$\ell_R(X) = \{a \in R \,|\, ax = 0 \text{ ،}x \in X \text{ برای هر}\}$$

هم‌چنین

$$r_R(X) = \{a \in R \,|\, xa = 0 \text{ ،}x \in X \text{ برای هر}\}.$$

توجه کنید که اگر R حلقه‌ی برگشت‌پذیر باشد و $X \subseteq R$، آن‌گاه $\ell_R(X) = r_R(X)$ ایدآلی از R است که با نماد $ann(X)$ نشان داده می‌شود. نمادهای $Z_\ell(R)$ و $Z_r(R)$ به ترتیب نشان‌دهنده‌ی مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم‌علیه‌های چپ صفر و مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های راست صفر می‌باشد. بوضوح، اگر R حلقه‌ای برگشت‌پذیر باشد، آن‌گاه $Z_\ell(R) = Z_r(R)$. مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر R، با نماد $Z(R)$ نمایش داده می‌شود و

$$Z(R) = Z_\ell(R) \cup Z_r(R).$$

۲.۲ گراف مقسوم‌علیه صفر جهت‌دار

یادآوری می‌کنیم بر اساس مرجع [۱۱]، درونریختی σ از حلقه‌ی R را سازگار[۱۸] می‌گوییم، هرگاه برای هر a و b در R، $ab = 0$، اگر و تنها اگر $a\sigma(b) = 0$. در این‌صورت R را حلقه‌ای σـ سازگار می‌گوییم. هم‌چنین، بنابر مرجع [۵۶]، درونریختی σ از R را صلب[۱۹] می‌گوییم، هرگاه برای هر $a \in R$، $a\sigma(a) = 0$ اگر و تنها اگر $a = 0$. در این‌صورت حلقه‌ی R را حلقه‌ی σـ صلب می‌گوییم. هاشمی و موسوی در مرجع [۴۴]، ثابت کرده‌اند که حلقه‌ی R حلقه‌ای σـ صلب است اگر و تنها اگر R کاهشی و σـ سازگار باشد.

این بخش را با مثال‌هایی از حلقه‌های σ ـ سازگار شروع می‌کنیم.

مثال ۱.۲.۲. فرض کنیم S حلقه‌ای کاهشی باشد. حلقه‌ی برگشت‌پذیر

$$R = \{(a,b) \,|\, a,b \in S\}$$

با جمع نقطه‌ای و ضرب $(a,b)(c,d) = (ac, ad+bc)$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $\sigma : R \longrightarrow R$ خودریختی با تعریف $\sigma((a,b)) = (a,-b)$ باشد. نشان می‌دهیم R حلقه‌ای σ

[17] Associative
[18] Compatible
[19] Rigid

ـ سازگار است. برای این منظور، فرض کنیم $(a,b)(c,d)=0$. بنابراین $ac=ad+bc=0$. چون S حلقه‌ای کاهشی است، داریم $ca=0$. حال عبارت $ad+bc=0$ را ازسمت چپ در c ضرب می‌کنیم. داریم $cad+cbc=0$ و در نتیجه $cbc=0$. بنابراین $(bc)^2=bcbc=0$ و چون S حلقه‌ی کاهشی است $bc=ad=0$. لذا $(a,b)\sigma((c,d))=(ac,bc-ad)=(0,0)$. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد از اینکه $(a,b)\sigma((c,d))=(0,0)$، نتیجه می‌شود $(a,b)(c,d)=(0,0)$. بنابراین R حلقه‌ای σ ـ سازگار است.

مثال ۲.۲.۲. فرض کنیم R_1 حلقه‌ای دلخواه، D دامنه‌ای دلخواه، $R=R_1\oplus D[y]$ و $\sigma: D[y]\longrightarrow D[y]$ تکریختی باشد. فرض کنیم $\overline{\sigma}: R\to R$ درونریختی باشد که برای هر $a\in R_1$ و $f(y)\in D[y]$ به‌صورت $\overline{\sigma}(a\oplus f(y))=a\oplus\sigma(f(y))$ تعریف می‌شود. در این صورت، چون D دامنه و σ تکریختی است، به راحتی می‌توان نشان داد R حلقه‌ای $\overline{\sigma}$ ـ سازگار است.

لم زیر، که در مرجع [۴۴، لم‌های ۱.۲ و ۳.۲] اثبات شده است، نقش مهمی در اثبات نتایج اصلی ما دارد.

لم ۳.۲.۲. فرض کنیم R حلقه‌ای σ ـ سازگار باشد. در این‌صورت داریم:

(الف) اگر برای $a,b\in R$ داشته باشیم $ab=0$، آن‌گاه برای هر عدد صحیح مثبت n داریم $a\sigma^n(b)=\sigma^n(a)b=0$.

(ب) اگر برای $a,b\in R$ و عدد صحیح مثبت k داشته باشیم $\sigma^k(a)b=0$، آن‌گاه $ab=0$.

(ج) اگر $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i\in R[[x;\sigma]]$ و $r\in R$، آن‌گاه $f(x)r=0$ اگر و فقط اگر برای هر i، داشته باشیم $a_ir=0$.

(د) اگر $f(x)\in R[[x;\sigma]]$ و $r\in R$، آن‌گاه $rf(x)=0$ اگر و فقط اگر $rxf(x)=0$.

برای سری توانی اریب $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i\in R[[x;\sigma]]$، مجموعه‌ی تمام ضرایب $f(x)$ در R را با C_f نمایش می‌دهیم.

لم ۴.۲.۲. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، σ ـ سازگار و نوتری راست باشد و هم‌چنین $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{\infty}b_jx^j$ عناصری ناصفر از $R[[x;\sigma]]$ باشند که $f(x)g(x)=0$. فرض کنیم $C_fR=\langle a_0,a_1,\dots,a_p\rangle$ و $C_gR=\langle b_0,b_1,\dots,b_q\rangle$. در این صورت اعداد صحیح و نامنفی $t_0,t_1,\cdots,t_q$ و $\ell_0,\ell_1,\cdots,\ell_p$ وجود دارند که برای هر $0\le m\le p$ و $0\le n\le q$ داریم

$$a_0^{\ell_0}a_1^{\ell_1}\dots a_{m-1}^{\ell_{m-1}}a_m^{\ell_m}g(x)\neq 0=a_0^{\ell_0}a_1^{\ell_1}\dots a_{m-1}^{\ell_{m-1}}a_m^{\ell_m+1}g(x)$$

و

$$f(x)b_n^{t_n}b_{n-1}^{t_{n-1}}\dots b_1^{t_1}b_0^{t_0}\neq 0=f(x)b_n^{t_n+1}b_{n-1}^{t_{n-1}}\dots b_1^{t_1}b_0^{t_0}.$$

برهان. با استفاده از استقرا روی m نشان می‌دهیم که اعداد صحیح و نامنفی ℓ_i وجود دارد که $0 \leq i \leq p$ و $a_0^{\ell_0} \dots a_{m-1}^{\ell_{m-1}} a_m^{\ell_m} g(x) \neq 0$، اما $a_0^{\ell_0} \dots a_{m-1}^{\ell_{m-1}} a_m^{\ell_m+1} g(x) = 0$. ادعا می‌کنیم برای هر $0 \leq j \leq q$، $a_0^{j+1} b_j = 0$. ضریب جمله‌ی درجه‌ی i در $fg = 0$ به‌صورت $\sum_{j=0}^{i} a_{i-j}\sigma^{i-j}(b_j) = 0$ می‌باشد. به‌ویژه، برای جمله‌ی درجه‌ی صفر داریم $a_0 b_0 = 0$. چون R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و σ ـ سازگار است، $a_0 a_1 \sigma(b_0) = 0$. حال عبارت $a_0 b_1 + a_1 \sigma(b_0) = 0$ را از سمت چپ در a_0 ضرب می‌کنیم. بنابراین $a_0^2 b_1 = 0$. بنا به استقرا فرض می‌کنیم برای هر $\ell < k$، داریم $a_0^{\ell+1} b_\ell = 0$. به‌ویژه، $a_0^k b_\ell = 0$ و در نتیجه بنابر σ ـ سازگاری و برگشت‌پذیر بودن R، برای هر $\ell < k$ داریم $a_0^k a_{k-\ell} \sigma^{k-\ell}(b_\ell) = 0$. عبارت $\sum_{\ell=0}^{k} a_{k-\ell}\sigma^{k-\ell}(b_\ell) = 0$ (جمله‌ی درجه‌ی k در $f(x)g(x) = 0$) را از سمت چپ در a_0^k ضرب می‌کنیم. بنابراین $a_0^{k+1} b_k = -\sum_{\ell=0}^{k-1} a_0^k a_{k-\ell}\sigma^{k-\ell}(b_\ell) = 0$ و لذا $a_0^{k+1} b_k = 0$ و در نتیجه ادعا اثبات می شود. چون $C_g R = < b_0, b_1, \dots, b_q >$، $a_0^{q+1} g(x) = 0$. لذا عدد صحیح و نامنفی ℓ_0 وجود دارد به‌طوری‌که $a_0^{\ell_0} g(x) \neq 0$ اما $a_0^{\ell_0+1} g(x) = 0$. فرض کنیم اعداد ℓ_0، ℓ_1، $\dots$، ℓ_m را با استفاده از استقرا بدست آورده‌ایم به‌طوری‌که در شرط گفته شده صدق کنند و $r = a_0^{\ell_0} \dots a_{m-1}^{\ell_{m-1}}$ و $rg(x) \neq 0$. چون R برگشت‌پذیر است، $g(x)r \neq 0$. حال با قرار دادن $g'(x) := g(x)r$ داریم $f(x)g'(x) = (\sum_{i=m}^{\infty} a_i x^i) g'(x) = 0$. با توجه به گام اول استقرا، عدد صحیح و نامنفی ℓ_m وجود دارد که $a_m^{\ell_m} g'(x) \neq 0$ اما $a_m^{\ell_m+1} g'(x) = 0$. بنابراین $a_0^{\ell_0} a_1^{\ell_1} \dots a_{m-1}^{\ell_{m-1}} a_m^{\ell_m} g(x) \neq 0$ اما $a_0^{\ell_0} a_1^{\ell_1} \dots a_{m-1}^{\ell_{m-1}} a_m^{\ell_m+1} g(x) = 0$، که در آن اعداد $\ell_m, \dots, \ell_1, \ell_0$ صحیح و نامنفی هستند. به روش مشابه و با اندکی تغییرات، می‌توان عبارت دوم را اثبات کرد. □

قضیه ۵.۲.۲. فرض کنیم σ درونریختی سازگار از حلقه‌ی برگشت‌پذیر و نوتری راست R باشد و $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ عناصر ناصفری از $R[[x;\sigma]]$ باشند. اگر $f(x)g(x) = 0$، آن‌گاه عناصر ناصفر $r, s \in R$ وجود دارند به‌طوری‌که $g(x)r \neq 0 \neq sf(x)$ و برای هر i, j، داریم $a_i b_j r = 0 = s a_i b_j$.

برهان. چون R نوتری راست است، $C_f R = \langle a_0, \dots, a_p \rangle$ و $C_g R = \langle b_0, \dots, b_q \rangle$ و اعداد صحیح و نامنفی $\ell_p, \dots \ell_1, \ell_0$ وجود دارد که در شرط لم ۴.۲.۲ صدق می‌کنند. قرار می‌دهیم

$$r = a_0^{\ell_0} a_1^{\ell_1} \dots a_{p-1}^{\ell_{p-1}} a_p^{\ell_p} \neq 0.$$

پس $rg(x) \neq 0$. بنابراین $g(x)r \neq 0$. بنا به لم ۴.۲.۲، برای هر $1 \leq i \leq p$ داریم $a_0^{\ell_0} a_1^{\ell_1} \cdots a_i^{\ell_i} g(x) \neq 0$ اما $a_0^{\ell_0} a_1^{\ell_1} \cdots a_i^{\ell_i+1} g(x) = 0$. چون R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و σـ سازگار است، پس

$$a_i g(x) a_0^{\ell_0} a_1^{\ell_1} \cdots a_{i-1}^{\ell_{i-1}} a_i^{\ell_i} = 0.$$

لذا $a_i g(x) a_0^{\ell_0} \dots a_p^{\ell_p} = 0$. از این‌رو برای $t > p$، داریم $a_t g(x) a_0^{\ell_0} \dots a_p^{\ell_p} = 0$، زیرا $a_t \in C_f R$. بنابراین $gr \neq 0$ اما برای هر i, j، $a_i b_j r = 0$.

به‌طور مشابه، با استفاده از لم ۴.۲.۲ می‌توان نشان داد عنصر ناصفر $s \in R$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که $sf(x) \neq 0$ اما برای هر i, j، $s a_i b_j = 0$. □

نتیجه‌ی زیر به‌طور مستقیم از قضیه‌ی ۵.۲.۲ نتیجه می‌شود.

نتیجه ۶.۲.۲. اگر R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، σـ سازگار و نوتری راست باشد، آن‌گاه R حلقه‌ی σـ مک‌کوی نسبت به سری‌های توانی است.

برهان. فرض کنیم $f(x)=\sum_{i=\circ}^{\infty} a_i x^i$ و $g(x)=\sum_{j=\circ}^{\infty} b_j x^j$ سری‌های توانی ناصفر در $R[[x;\sigma]]$ باشند. اگر $f(x)g(x)=\circ$، آن‌گاه بنابه قضیه‌ی ۵.۲.۲، عناصر ناصفر $r,s\in R$ وجود دارند که $g(x)r\neq\circ\neq sf(x)$ و برای هر i,j، داریم $sa_ib_j=\circ=a_ib_jr$. چون $g(x)r\neq\circ\neq sf(x)$، پس i,j وجود دارد که $sa_i\neq\circ\neq b_jr$. با درنظر گرفتن $a=sa_i$ و $b=b_ir$ داریم $ag=\circ=fb$ و درنتیجه R حلقه‌ای σ ـ مک‌کوی نسبت به سری‌های توانی است. $\square$

مثال بعدی نشان می‌دهد که در غیاب شرط نوتری، نتیجه‌ی ۶.۲.۲ در حالت کلی برقرار نیست.

مثال ۷.۲.۲. [۲۹، مثال ۳] فرض کنیم K حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار و $\{Y,X_\circ,X_۱,\ldots,X_t,\ldots\}$ مجموعه‌ای از متغیرها روی K باشد؛ حلقه‌ی

$$R=K[Y,\{X_i\}_{i=\circ}^{\infty}]/\langle X_\circ Y,\{X_i-X_{i+۱}Y\}_{i=\circ}^{\infty}\rangle$$

و خودریختی همانی σ از R را در نظر می‌گیریم. بوضوح، R حلقه‌ای σـ سازگار و جابه‌جایی است. چند جمله‌ای $f(x)=\overline{Y}-x$ را در نظر می‌گیریم. از آن‌جایی که ضریب x در $f(x)$ یکه است، پس برای هر عنصر ناصفر $r\in R$، داریم $rf(x)\neq\circ$. حال $g(x)=\sum_{i=\circ}^{\infty}\overline{X_i}x^i$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین $g(x)\neq\circ$ و $f(x)g(x)=\circ$. اما برای هر عنصر ناصفر $r\in R$، $rf(x)\neq\circ$.

مثال بعدی نشان می‌دهد که در غیاب شرط سازگاری، نتیجه‌ی ۶.۲.۲ لزوماً برقرار نیست.

مثال ۸.۲.۲. [۲، مثال ۳.۲] فرض کنیم S حلقه‌ای کاهشی، نوتری و ناصفر باشد. حلقه‌ی $R=S\oplus S$ را با جمع و ضرب معمولی در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $\sigma:R\longrightarrow R$ خودریختی با تعریف $\sigma((a,b))=(b,a)$ باشد. R حلقه‌ای کاهشی است اما σ ـ سازگار نیست، زیرا $(۱,\circ)(\circ,۱)=\circ$ اما $(۱,\circ)\sigma((\circ,۱))=(۱,\circ)\neq(\circ,\circ)$. عناصر

$$f(x)=(۱,\circ)+(۱,\circ)x+(۱,\circ)x^۲+\ldots$$

و

$$g(x)=(\circ,۱)-(۱,\circ)x$$

در $R[[x;\sigma]]\setminus\{\circ\}$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین $f(x)g(x)=\circ$. اگر $R\ni c=(a,b)$ وجود داشته باشد که $f(x)c=\circ$، آن‌گاه $a=b=\circ$ و در نتیجه $c=\circ$. لذا R حلقه‌ی σـ مک‌کوی نسبت به سری‌های توانی نیست.

یادآوری می‌کنیم ایدآل سره‌ی P از حلقه‌ی R کاملاً اول است اگر برای $a, b \in R$ که $ab \in P$، بتوان نتیجه گرفت $a \in P$ یا $b \in P$.

تذکر ۹.۲.۲. [۳۸، تذکر ۳.۲ و نتیجه ۳.۴] فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و نوتری راست باشد. در این‌صورت $Z(R) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$، که در آن هر P_i ایدآل اولی از R است و $P_i = ann_R(a_i)$ که $a_i \in Z(R)$. هم‌چنین می‌توان هر P_i را نسبت به رابطه‌ی شمول در $Z(R)$ ماکسیمال در نظر گرفت. فرض کنیم $a, b \in R$ که $ab \in P_i = ann_R(a_i)$ اما $a \notin P_i$. بنابراین $aa_i \neq 0$ اما $baa_i = 0$. پس $b \in ann_R(aa_i) = ann_R(a_i)$. لذا $ba_i = 0$ و در نتیجه $b \in P_i$. بنابراین هر P_i ایدآل کاملاً اولی از R است.

کاپلانسکی [۵۰، قضیه ۸] برای حلقه‌ی جابه‌جایی دلخواه R ثابت کرد که اگر $J_1, \ldots, J_n$ ایدآل‌هایی از R باشند و S زیرحلقه‌ای از R باشد که مشمول در $J_1 \cup \ldots \cup J_n$ باشد و حداقل $n-2$ تا از J_iـ ها اول باشند، آنگاه برای برخی k، زیرحلقه‌ی S مشمول در J_k است. در ادامه توسیعی از این قضیه به حالت ناجابه‌جایی را ارائه می‌دهیم که به روش مشابه اثبات می‌شود.

قضیه ۱۰.۲.۲. فرض کنیم $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ایدآل‌های کاملاً اولی از حلقه‌ی R و S زیر حلقه‌ای از آن باشد به‌طوری‌که مشمول در $P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n$ باشد. در این‌صورت برای برخی k، $S \subseteq P_k$.

برهان. برای هر k فرض کنیم

$$S \nsubseteq P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup \hat{P}_k \cup \cdots \cup P_n \qquad (*)$$

(نماد $\hat{P}_k$ به این معنی است که P_k حذف شده است). x_k را عنصری از S در نظر می‌گیریم که مشمول در سمت راست رابطه‌ی $(*)$ نمی‌باشد. بنابراین $x_k \in P_k$ اما برای هر $i \neq k$، $x_k \notin P_i$. با استقرا روی n عمل می‌کنیم. اگر $n = 1$، بوضوح نتیجه برقرار است. برای $n = 2$ قرار می‌دهیم $y = x_1 + x_2$. چون S زیرحلقه‌ای از R است، پس $y \in S$. اگر $y \in P_1$، آن‌گاه $x_2 \in P_1$، که تناقض است. اگر $y \in P_2$، آن‌گاه $x_1 \in P_2$، که تناقض است. بنابراین $S \subseteq P_1$ یا $S \subseteq P_2$. برای $n > 2$ قرار می‌دهیم $y = x_1 + x_2 x_3 \cdots x_n$. از آن‌جایی‌که S زیرحلقه است، پس $y \in S$. اما $y \notin P_1$، زیرا در این‌صورت $x_1 x_2 \cdots x_n \in P_1$. چون P_1 کاملاً اول است، پس $2 \leq i \leq n$ وجود دارد که $x_i \in P_1$، که تناقض است. به همین ترتیب می‌توان نشان داد که برای هر $1 \leq i \leq n$، $y \notin P_i$، که تناقض است. بنابراین برای برخی k، $S \subseteq P_k$. □

نتیجه ۱۱.۲.۲. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و نوتری راست باشد که $Z(R) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$. اگر S زیر حلقه‌ای از R باشد که مشمول در $Z(R)$ است، آن‌گاه برای برخی k، $S \subseteq P_k$.

برهان. چون R برگشت‌پذیر و نوتری راست است، بنا به تذکر ۹.۲.۲، برای هر i، P_i ایدآل کاملاً اولی از R است. بنابراین نتیجه از قضیه‌ی ۱۰.۲.۲ حاصل می‌شود. □

براساس [۴۳]، ایدآل I از حلقه‌ی R را σـ سازگار می‌گوییم، هرگاه برای a و b در R، $ab \in I$ اگر و تنها اگر $a\sigma(b) \in I$.

تذکر ۱۲.۲.۲. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، σ ـ سازگار و نوتری راست باشد. بنابر تذکر ۹.۲.۲ ، $Z(R) = \cup_{i=1}^{n} P_i$ که هر $P_i = ann_R(a_i)$ ایدآلی کاملاً اول است. فرض کنیم برای $a, b \in R$، $ab \in P_i$. بنابراین $aba_i = 0$. چون R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و σـ سازگار است، پس $0 = a_iab = a_ia\sigma(b) = a\sigma(b)a_i$. بنابراین $a\sigma(b) \in ann_R(a_i) = P_i$. از این‌رو P_i ایدآلی σـ سازگار است. لذا $P_i[[x;\sigma]]$ ایدآلی از $R[[x;\sigma]]$ است. به‌راحتی می‌توان نشان داد که $\frac{R}{P_i}[[x;\sigma]] \cong \frac{R[[x;\sigma]]}{P_i[[x;\sigma]]}$. از آن‌جایی‌که P_i کاملاً اول است، پس $\frac{R}{P_i}$ دامنه است و در نتیجه با استفاده از نتیجه‌ی ۶.۲.۲، $\frac{R[[x;\sigma]]}{P_i[[x;\sigma]]}$ نیز دامنه است. لذا $P_i[[x;\sigma]]$ ایدال کاملاً اولی از $R[[x;\sigma]]$ است.

بوضوح اگر R حلقه‌ای برگشت‌پذیر باشد، آن‌گاه $Z_r(R) = Z_\ell(R)$. کیم[20] و لی[21] در مرجع [۵۳] نشان دادند که حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها روی حلقه‌ی برگشت‌پذیر، لزوماً برگشت‌پذیر نیست. لذا حلقه‌ی سری‌های توانی روی حلقه‌ی برگشت‌پذیر، در حالت کلی برگشت‌پذیر نمی‌باشد. با این وجود، در ادامه نشان می‌دهیم که برای حلقه‌ی برگشت‌پذیر، σ ـ سازگارو نوتری راست R، مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر راست و مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر چپ حلقه‌ی سری‌های توانی اریب $R[[x;\sigma]]$ با هم برابر است.

لم ۱۳.۲.۲. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، σ ـ سازگار و نوتری راست باشد. بنابراین $Z_r(R[[x;\sigma]]) = Z_\ell(R[[x;\sigma]]) = Z(R[[x;\sigma]])$.

برهان. چون R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و نوتری راست است بنا به تذکر ۹.۲.۲ داریم $Z(R) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ که در آن برای هر $1 \leq i \leq n$، P_i ایدآل کاملاً اولی از حلقه‌ی R است که $P_i = ann_R(a_i)$ و $a_i \in Z(R)$. چون R حلقه‌ی σ ـ سازگار است، $P_i[[x;\sigma]] \subseteq ann_{R[[x;\sigma]]}(a_i)$. همچنین برای هر $1 \leq i \leq n$، $ann_{R[[x;\sigma]]}(a_i) \subseteq P_i[[x;\sigma]]$. از این‌رو $P_i[[x;\sigma]] = ann_{R[[x;\sigma]]}(a_i)$. بنابراین

$$\bigcup_{i=1}^{n} P_i[[x;\sigma]] \subseteq Z_\ell(R[[x;\sigma]]) \cap Z_r(R[[x;\sigma]]).$$

فرض کنیم $f(x) \in Z_\ell(R[[x;\sigma]])$. با استفاده از نتیجه ۶.۲.۲، عنصر ناصفر $r \in R$ وجود دارد به‌گونه‌ای‌که $f(x)r = 0$. بنابراین $C_fR \subseteq ann(r) \subseteq Z(R)$. بنا به نتیجه‌ی ۱۱.۲.۲، برای برخی $1 \leq k \leq n$، $C_fR \subseteq P_k$. از این‌رو $f(x) \in P_k[[x;\sigma]]$ و لذا $Z_\ell(R[[x;\sigma]]) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i[[x;\sigma]]$. پس $Z_\ell(R[[x;\sigma]]) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i[[x;\sigma]]$.

به روش مشابه می‌توان نشان داد $Z_r(R[[x;\sigma]]) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i[[x;\sigma]]$. □

[20] Kim

[21] Lee

گراف مقسوم‌علیه صفر جهت‌دار حلقه‌ی ناجابه‌جایی که توسط ردموند [۷۷] معرفی شد، لزوماً همبند نیست. در قضیه‌ی زیر شرایط لازم برای همبند بودن گراف $\Gamma(R)$ بیان می‌شود.

قضیه ۱۴.۲.۲. [۷۷، قضیه ۲.۳] برای حلقه‌ی دلخواه R، گراف $\Gamma(R)$ همبند است اگر و تنها اگر $Z_\ell(R) = Z_r(R)$. به‌علاوه، اگر $\Gamma(R)$ همبند باشد، آن‌گاه $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) \leq ۳$.

فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، σ ـ سازگار و نوتری راست باشد. بنابر لم ۱۳.۲.۲، $Z_r(R[[x;\sigma]]) = Z_\ell(R[[x;\sigma]])$. بنابراین طبق قضیه‌ی ۱۴.۲.۲، گراف $\Gamma(R[[x;\sigma]])$ همبند است و $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]])) \leq ۳$.

گزاره‌ی بعدی نقش مهمی در اثبات نتایج اصلی ما دارد.

گزاره ۱۵.۲.۲. فرض کنیم R حلقه‌ای متقارن، σ ـ سازگار و نوتری راست باشد و $f(x)$ و $g(x)$ عناصری از $R[[x;\sigma]]$ باشند. عبارات زیر معادلند:

(الف) $\ell_{R[[x;\sigma]]}(f(x)) \cap \ell_{R[[x;\sigma]]}(g(x)) \neq ۰$.

(ب) $\ell_{R[[x;\sigma]]}(f(x)) \cap r_{R[[x;\sigma]]}(g(x)) \neq ۰$.

(ج) $r_{R[[x;\sigma]]}(f(x)) \cap \ell_{R[[x;\sigma]]}(g(x)) \neq ۰$.

(د) $r_{R[[x;\sigma]]}(f(x)) \cap r_{R[[x;\sigma]]}(g(x)) \neq ۰$.

برهان. (الف) $\longleftarrow$ (ب)، (ج)، (د). فرض کنیم $۰ \neq h(x) \in \ell_{R[[x;\sigma]]}(f(x)) \cap \ell_{R[[x;\sigma]]}(g(x))$. بنابراین $f(x), g(x) \in r_{R[[x;\sigma]]}(h(x))$. با استفاده از لم ۶.۲.۲، $Z(R[[x;\sigma]]) = \bigcup_{i=۱}^{n} P_i[[x;\sigma]]$. لذا $r_{R[[x;\sigma]]}(h(x)) \subseteq \bigcup_{i=۱}^{n} P_i[[x;\sigma]]$. با استفاده از تذکر ۱۲.۲.۲، برای هر $۱ \leq i \leq n$، $P_i[[x;\sigma]]$ ایدآل کاملاً اولی از $R[[x;\sigma]]$ است. بنا بر قضیه‌ی ۱۰.۲.۲، برای برخی $۱ \leq k \leq n$،

$$r_{R[[x;\sigma]]}(h(x)) \subseteq P_k[[x;\sigma]].$$

چون $P_k[[x;\sigma]] = ann_{R[[x;\sigma]]}(a_k)$، بنابراین $f(x), g(x) \in ann_{R[[x;\sigma]]}(a_k)$ و از این‌رو

$$g(x)a_k = a_k g(x) = a_k f(x) = f(x)a_k = ۰.$$

(الف)، (ب)، (ج) $\longrightarrow$ (د). فرض کنیم $۰ \neq h(x) \in r_{R[[x;\sigma]]}(f(x)) \cap r_{R[[x;\sigma]]}(g(x))$. بنابراین $f(x), g(x) \in \ell_{R[[x;\sigma]]}(h(x))$. با استفاده از لم ۶.۲.۲، $Z(R[[x;\sigma]]) = P_i[[x;\sigma]]$. لذا $\ell_{R[[x;\sigma]]}(h(x)) \subseteq \cup_{i=۱}^{n} P_i[[x;\sigma]]$. با استفاده از تذکر ۱۲.۲.۲، برای هر i، $P_i[[x;\sigma]]$ ایدآل کاملاً اولی از $R[[x;\sigma]]$ است. پس با استفاده از قضیه‌ی ۱۰.۲.۲، برای برخی $۱ \leq k \leq n$،

$$\ell_{R[[x;\sigma]]}(h(x)) \subseteq P_k[[x;\sigma]] = ann_{R[[x;\sigma]]}(a_k).$$

بنابراین $f(x), g(x) \in ann(a_k)$ و از این‌رو $g(x)a_k = a_k g(x) = a_k f(x) = f(x)a_k = ۰$.

(د) $\longrightarrow$ (ب). فرض کنیم $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$ و $g(x)=\sum_{i=0}^{\infty}b_ix^i$ عناصری از $R[[x;\sigma]]$ باشند. همچنین فرض کنیم $0\neq h(x)=\sum_{i=0}^{\infty}c_ix^i$ عنصری از $\ell_{R[[x;\sigma]]}(f(x))\cap r_{R[[x;\sigma]]}(g(x))$ باشد. با استفاده از لم ۵.۲.۲، عنصر ناصفر $c\in R$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $ch(x)\neq 0$ و برای هر i,j، $cc_ia_j=0$. چون R برگشت‌پذیر است، $h(x)c\neq 0$، و بنا به متقارن بودن حلقه‌ی R، برای هر i,j داریم $a_jc_ic=0$. لذا

$$h(x)c\in r_{R[[x;\sigma]]}(f(x))\cap r_{R[[x;\sigma]]}(g(x)).$$

(د) $\longrightarrow$ (ج) فرض کنیم $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$ و $g(x)=\sum_{i=0}^{\infty}b_ix^i$ عناصری از $R[[x;\sigma]]$ باشند. همچنین فرض کنیم $0\neq h(x)=\sum_{i=0}^{\infty}c_ix^i$ عنصری از $r_{R[[x;\sigma]]}(f(x))\cap \ell_{R[[x;\sigma]]}(g(x))$ باشد. در این‌صورت $h(x)g(x)=0=f(x)h(x)$. بنا به لم ۵.۲.۲، عنصرناصفر $c\in R$ وجود دارد که $ch(x)\neq 0$ و برای هر i,j داریم $cc_ib_j=0$. چون R برگشت‌پذیر است $h(x)c\neq 0$ و بنا به متقارن بودن حلقه‌ی R، برای هر i,j، $b_jc_ic=0$. از این‌رو

$$h(x)c\in r_{R[[x;\sigma]]}(f(x))\cap r_{R[[x;\sigma]]}(g(x)).$$

$\square$

در اینجا مجموعه‌ی همه‌ی عناصر پوچتوان از حلقه‌ی R را با $\mathrm{nil}(R)$ نشان می‌دهیم.

لم ۱۶.۲.۲. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، σــ سازگار و نوتری راست باشد. همچنین $f(x)\in Z(R[[x;\sigma]])$ و $g(x)\in \mathrm{nil}(R[[x;\sigma]])$، در این‌صورت $r_{R[[x;\sigma]]}(f(x))\cap\ell_{R[[x;\sigma]]}(g(x))\neq\{0\}$ و $f(x)+g(x)\in Z(R[[x;\sigma]])$.

برهان. چون $f(x)\in Z(R[[x;\sigma]])$، بنا به نتیجه‌ی ۶.۲.۲، عنصر ناصفر $c\in R$ وجود دارد که $f(x)c=0=cf(x)$. فرض کنیم m کوچکترین عدد صحیحی باشد که $cg(x)^m=0$. بنابراین $0\neq cg(x)^{m-1}\in r_{R[[x;\sigma]]}(f(x))\cap\ell_{R[[x;\sigma]]}(g(x))$ و لذا بنا به گزاره‌ی ۱۵.۲.۲، $f(x)+g(x)$ مقسوم‌علیه صفری از $R[[x;\sigma]]$ است. $\square$

قضیه ۱۷.۲.۲. فرض کنیم R حلقه‌ای متقارن، σــ سازگار و نوتری راست باشد که کاهشی نیست. اگر مقسوم‌علیه های صفر $f(x),g(x)\in R[[x;\sigma]]$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $\ell_{R[[x;\sigma]]}(f(x))\cap\ell_{R[[x;\sigma]]}(g(x))=\{0\}$، آن‌گاه $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]]))=3$.

برهان. بنا به لم ۱۳.۲.۲، $Z_\ell(R[[x;\sigma]])=Z_r(R[[x;\sigma]])$. از این‌رو بنا به قضیه‌ی ۱۴.۲.۲، $\Gamma(R[[x;\sigma]])$ همبند است و $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]]))\leq 3$. عناصر $\alpha,\beta\in Z(R[[x;\sigma]])$ را چنان می یابیم که $\alpha\beta\neq 0\neq\beta\alpha$، و بنابه گزاره‌ی ۱۵.۲.۲، α و β پوچساز مشترک ناصفر نداشته باشند. فرض کنیم $f(x),g(x)\in Z(R[[x;\sigma]])$ به‌طوری‌که $\ell_{R[[x;\sigma]]}(f(x))\cap\ell_{R[[x;\sigma]]}(g(x))=\{0\}$. بنا به گزاره ۱۵.۲.۲، $f(x)$ و $g(x)$ پوچساز مشترک ناصفر ندارند و درنتیجه $d(f(x),g(x))\neq 2$. با استفاده از گزاره ۱۵.۲.۲ و لم ۱۶.۲.۲، هیچ یک از عناصر $f(x)$ و $g(x)$ نمی‌توانند پوچتوان

باشد. فرض کنیم $f(x)g(x)=0$. ادعا می‌کنیم $f(x)^2$ و $g(x)^2$ پوچساز مشترک ناصفر ندارند. عنصر ناصفر

$$h(x)\in \ell_{R[[x;\sigma]]}(f(x)^2)\cap r_{R[[x;\sigma]]}(g(x)^2)$$

را در نظر می‌گیریم. چون $f(x)$ و $g(x)$ پوچساز مشترک ناصفر ندارند، بنابراین $h(x)f(x)\neq 0$ یا $g(x)h(x)\neq 0$. فرض کنیم $h(x)f(x)\neq 0$. در این‌صورت

$$0\neq h(x)f(x)\in \ell_{R[[x;\sigma]]}(f(x))\cap \ell_{R[[x;\sigma]]}(g(x))$$

که تناقض است. همچنین اگر $g(x)h(x)\neq 0$، آن‌گاه

$$g(x)h(x)\in r_{R[[x;\sigma]]}(f(x))\cap r_{R[[x;\sigma]]}(g(x))$$

که تناقض است. پس f^2 و g^2 پوچساز مشترک ناصفر ندارند. بنابراین بدون کاستن از کلیت مسئله، می‌توان فرض کرد عنصر پوچتوان $a\in R$ وجود دارد که $ag(x)^2\neq 0$. چون R برگشت‌پذیر، σـسازگار و a پوچتوان است، با استفاده از لم ۳.۲.۲، $ag(x)$ پوچتوان است. بنابراین طبق لم ۱۶.۲.۲، $f(x)+ag(x)\in Z(R[[x;\sigma]])$. حال جفت عناصر $f(x)+ag(x)$ و $g(x)$ را درنظر می‌گیریم. اگر

$$k(x)\in r_{R[[x;\sigma]]}(f(x)+ag(x))\cap r_{R[[x;\sigma]]}(g(x))$$

آن‌گاه

$$k(x)\in r_{R[[x;\sigma]]}(f(x))\cap r_{R[[x;\sigma]]}(g(x))$$

و لذا $k(x)=0$. بنابراین جفت عناصر $f(x)+ag(x)$ و $g(x)$ پوچساز مشترک ناصفر ندارند و $(f(x)+ag(x))g(x)=ag(x)^2\neq 0$. قرار می‌دهیم $f_1(x)=g(x)$ و $g_1(x)=f(x)+ag(x)$. در این‌صورت f_1 و g_1 پوچساز مشترک ناصفر ندارند و $g_1f_1\neq 0$. بدون کاستن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $f(x),g(x)\in Z(R[[x;\sigma]])$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(x)g(x)=0$ اما $g(x)f(x)\neq 0$. عنصر پوچتوان $a\in R$ وجود دارد که $ag(x)^2\neq 0$ و $axg(x)^2\neq 0$. حال جفت عناصر $(f(x)+ag(x),g(x))$ و $(f(x)+axg(x),g(x))$ را در نظر می‌گیریم. بوضوح $f(x)+ag(x)$ و $g(x)$ (متناظراً، $f(x)+axg(x)$ و $g(x)$) پوچساز مشترک ناصفر ندارند و

$$(f(x)+ag(x))g(x)=ag(x)^2\neq 0$$

(متناظراً، $(f(x)+axg(x))g(x)=axg(x)^2\neq 0$). ادعا می‌کنیم $g(x)(f(x)+ag(x))\neq 0$ یا $g(x)(f(x)+axg(x))\neq 0$. فرض کنیم

$$g(x)(f(x)+ag(x))=g(x)(f(x)+axg(x))=0.$$

بنابراین

$$g(x)a-g(x)ax\in \ell_{R[[x;\sigma]]}(g(x))\cap r_{R[[x;\sigma]]}(f(x))=\{0\}.$$

پس $g(x)a = g(x)ax$ که تناقض است. لذا $g(x)(f(x)+ag(x)) \neq 0$ یا $g(x)(f(x)+axg(x)) \neq 0$. با در نظر گرفتن $\alpha = f(x)+ag(x)$ و $\beta = g(x)$ یا $\alpha = f(x)+axg(x)$ و $\beta = g(x)$ نتیجه برقرار است. $\square$

هاشمی، امیرجان و آل هوز در مرجع [۳۷] گراف مقسوم علیه صفر روی حلقه‌ی برگشت‌پذیر را مورد مطالعه قرار داده‌اند و دسته بندی کاملی از مقادیر ممکن برای قطر گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(R)$ در حالتی که R حلقه‌ای برگشت‌پذیر است، ارائه کرده‌اند.

قضیه ۱۸.۲.۲. [۳۷، قضیه ۲.۵] فرض کنیم $R \not\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ حلقه‌ای برگشت‌پذیر باشد.

(۱) $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = 0$ اگر و تنها اگر $|Z(R)| = 2$.

(۲) $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = 1$ اگر و تنها اگر برای هر جفت متمایز از مقسوم‌علیه های صفر x و y در R داشته باشیم $xy = 0$ و R حداقل دو مقسوم‌علیه صفر، که ناصفر هستند، داشته باشد.

(۳) $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = 2$ اگر و تنها اگر یا (الف) R حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایدآل اول مینیمال باشد و حداقل دو مقسوم‌علیه صفر که ناصفر هستند داشته باشد، یا (ب) $Z(R)$ ایدآلی از R است که مربع آن $\{0\}$ نیست و هر جفت از مقسوم‌علیه‌های صفر متمایز پوچساز مشترک ناصفر دارند.

(۴) $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = 3$ اگر و فقط اگر مقسوم‌علیه‌های صفر $a \neq b$ وجود داشته باشند که $ann_R(\{a,b\}) = 0$ و یا (الف) R حلقه‌ای کاهشی با بیشتر از دو ایدآل اول مینیمال است، یا (ب) R غیرکاهشی است.

براساس آن‌چه که هوکابا[۲۲] و کیلر[۲۳] در مرجع [۴۷] بیان کرده است، حلقه‌ی جابه‌جایی R دارای خاصیت (A)[۲۴] است، هرگاه هر ایدآل با تولید متناهی از R که به‌طور کامل مشمول در $Z(R)$ است، پوچساز ناصفر داشته باشد. خاصیت (A) ابتدا توسط کونتل[۲۵] [۷۵] مورد مطالعه قرار گرفت (که در [۷۵] به‌عنوان شرط (C) معرفی شده است). هوکابا و کیلر [۴۷] ثابت کردند که اگر R حلقه باشد، حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های $R[x]$ در شرط (A) صدق می‌کند. هانگ [۲۶] و همکارانش در مرجع [۴۶] مفهوم خاصیت (A) را به حلقه‌های ناجابه‌جایی گسترش دادند که بدین صورت تعریف می‌شود:
حلقه‌ی R دارای خاصیت (A) راست (متناظراً، خاصیت (A) چپ) است اگر هر ایدآل دوطرفه‌ی باتولید متناهی که به‌طور کامل مشمول در مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم‌علیه‌های

[22] Huckaba
[23] Keller
[24] Property (A)
[25] Quentel
[26] Hong

صفر چپ (متناظراً، مقسوم‌علیه‌های صفر راست) است، دارای پوچساز راست (متناظراً، پوچساز چپ) ناصفر باشد. می‌گوییم حلقه‌ی R دارای خاصیت (A) است، اگر هم خاصیت (A) راست و هم خاصیت (A) چپ داشته باشد.

قضیه ۱۹.۲.۲. [۳۹، قضیه ۲.۶] فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و نوتری راست باشد. در این‌صورت R دارای خاصیت (A) راست است.

قضیه ۲۰.۲.۲. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، σـ سازگار و نوتری راست باشد. در این‌صورت $Z(R[[x;\sigma]])$ ایدآلی از $R[[x;\sigma]]$ است، اگر و تنها اگر $Z(R)$ ایدآلی از R باشد.

برهان. فرض کنیم $Z(R)$ ایدآلی از R و $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{\infty}b_jx^j$ مقسوم علیه‌های صفری از $R[[x;\sigma]]$ باشند که ناصفر هستند. بنابه نتیجه ۶.۲.۲، عناصر ناصفر $r,s\in R$ وجود دارند که $rf(x)=0=g(x)s$. چون R نوتری راست است، پس $C_fR=\langle a_0,\ldots,a_n\rangle$ و $C_gR=\langle b_0,\ldots,b_m\rangle$. از آن‌جایی‌که R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و $Z(R)$ ایدآلی از R است، بنابراین

$$\langle a_0,\ldots,a_n,b_0,\ldots,b_m\rangle\subseteq Z(R).$$

بنا به قضیه‌ی ۱۹.۲.۲ ، R دارای خاصیت (A) راست است، بنابراین $0\neq t\in R$ وجود دارد که $\langle a_0,\ldots,a_n,b_0,\ldots,b_m\rangle t=0$. با استفاده از لم ۳.۲.۲ داریم $\langle f(x),g(x)\rangle t=0$ و لذا $f(x)+g(x)\in Z(R[[x;\sigma]])$. حال فرض کنیم $f(x)\in Z(R[[x;\sigma]])$ و $h(x)\in R[[x;\sigma]]$. بنا به نتیجه‌ی ۶.۲.۲، عنصر ناصفر $r\in R$ وجود دارد که $rf(x)=0$. بنابراین برای هر i، $ra_i=0$ و لذا بنا به لم ۳.۲.۲ برای هر i,j داریم

$$ra_i\sigma^i(b_j)=0=b_j\sigma^j(a_i)r.$$

بنابراین مطابق لم ۳.۲.۲، $h(x)f(x)r=0=f(x)h(x)r$ و درنتیجه $Z(R[[x;\sigma]])$ ایدآلی از $R[[x;\sigma]]$ است.

بالعکس، فرض کنیم $Z(R[[x;\sigma]])$ ایدآلی از $R[[x;\sigma]]$ باشد. به راحتی می‌توان نشان داد که $Z(R)$ ایدآلی از R است. $\square$

مثال بعدی، که در مرجع [۱۲، مثال ۳.۳] بیان شده است، نشان می‌دهد که قضیه‌ی ۲۰.۲.۲ در غیاب شرط نوتری در حالت کلی برقرار نیست.

مثال ۲۱.۲.۲. فرض کنیم K میدان و $R=K[Y,\{X_i\}_{i=0}^{\infty}]/\langle X_0Y,\{X_i-X_{i+1}Y\}_{i=0}^{\infty}\rangle$ حلقه‌ی تعریف شده در مثال ۷.۲.۲ باشد. در این‌صورت، R دارای خاصیت (A) و $Z(R)$ ایدآلی از R است اما $Z(R[[x]])$ ایدآل نیست.

برهان. به‌وضوح، R حلقه‌ای جابه‌جایی و غیرنوتری است. X_0 همه‌ی متغیرهای دیگر را پوچ می‌کند، زیرا $\overline{X_0Y}=0$ و $\overline{X_0X_i}=\overline{X_0X_{i+1}Y}=0$. در R، متغیر $\overline{X_1}$ همه‌ی متغیرها به جز $\overline{Y}$ را پوچ می‌کند، زیرا $\overline{X_1X_i}=\overline{X_1X_{i+1}Y}=\overline{X_0X_{i+1}}=0$ اما $\overline{X_1Y}=\overline{X_0}\neq 0$. هم‌چنین $\overline{X_2}$ همه‌ی متغیرهای دیگر به جز $\overline{Y}$ را پوچ می‌کند، زیرا $\overline{X_2X_i}=\overline{X_2X_{i+1}Y}=\overline{X_1X_{i+1}}=0$ اما $\overline{X_2Y}=\overline{X_1}\neq 0$. با ادامه‌ی این روند خواهیم دید که $\overline{X_i}$ (برای $i\geq 1$) همه‌ی متغیرها به جز $\overline{Y}$ را پوچ می‌کند. مشاهده می‌شود که $\overline{X_iY}=\overline{X_{i-1}}$، $\overline{X_iY^{i+r}}=\overline{X_0Y^r}=0$، $\overline{X_iY^i}=\overline{X_0}$ و $\overline{X_{i+r}Y^i}=\overline{X_r}$. بنابراین هر عنصری از R را می‌توان به‌صورت

$$r=k_0+\sum_{j=1}^{\infty}l_j\overline{Y}^j+\sum_{i=0}^{\infty}k_{i+1}\overline{X_i}$$

نوشت که در آن $k_i,\ell_j\in K$ و همه به جز تعداد متناهی از k_i' ها و l_j' ها صفر هستند. توجه کنید که اگر $r\in Z(R)$، آن‌گاه r جمله‌ی ثابت ندارد. لذا R دارای خاصیت (A) و $Z(R)$ ایدآلی از R است، زیرا $\overline{X_0}$ همه‌ی متغیرها را پوچ می‌کند. عنصر $f(x)=\overline{Y}-x$ را در نظر بگیرید. با توجه به مثال ۷.۲.۲، عنصر $f(x)$ مقسوم‌علیه صفر ناصفری از $R[[x]]$ می‌باشد. هم‌چنین $\overline{Y}\in Z^*(R[[x]])$، اما $f(x)-\overline{Y}\notin Z(R[[x]])$. بنابراین $Z(R[[x]])$ ایدآلی از $R[[x]]$ نیست. □

قضیه ۲۲.۲.۲. [۴۳، قضیه ۲.۲۰] اگر P ایدآل کاملاً اول و σــسازگاری از حلقه‌ی دلخواه R باشد، آن‌گاه $P[[x;\sigma]]$ ایدال کاملاً اولی از $R[[x;\sigma]]$ است.

تذکر ۲۳.۲.۲. فرض کنیم R حلقه و σ درونریختی از R باشد. در این‌صورت بنا به [۵۶، نتیجه ۳.۵]، حلقه‌ی $R[[x;\sigma]]$ کاهشی است اگر و تنها اگر R کاهشی و σــصلب باشد. از آن‌جایی که بنا به [۴۴، لم ۲.۲]، حلقه‌ی R حلقه‌ای σــصلب است اگر و تنها اگر σــسازگار و کاهشی باشد، پس حلقه‌ی سری‌های توانی $R[[x;\sigma]]$ کاهشی است اگر و تنها اگر R کاهشی و σــسازگار باشد. یادآوری می‌کنیم اگر R حلقه‌ای کاهشی باشد، آن‌گاه بنا به [۵۶، نتیجه ۱.۴] ، هر ایدآل اول مینیمال از R کاملاً اول است. هم‌چنین بنا به [۵۶، نتیجه ۱.۵]، هر ایدآل اول مینیمال از R به‌صورت اجتماعی از پوچ‌سازها است. فرض کنیم P ایدآل اول مینیمالی از حلقه‌ی کاهشی و σــسازگار R باشد و $y\in\sigma(P)$. بنابراین $x\in P$ و $a\in R$ وجود دارد که $y=\sigma(x)$ و $x\in ann_R(a)$. پس $0=xa=\sigma(x)a=ya$ و در نتیجه $y\in ann_R(a)\subseteq P$. از اینرو $\sigma(P)\subseteq P$ و لذا $P[[x;\sigma]]$ ایدآلی از $R[[x;\sigma]]$ است. حال فرض می‌کنیم a و b عناصری از R باشند که $ab\in P$. بنابراین عنصر x در R وجود دارد که $ab\in ann_R(x)$. پس $0=abx=xab=xa\sigma(b)$ و در نتیجه $a\sigma(b)\in ann_R(x)\subseteq P$. بنابراین $a\sigma(b)\in P$. بالعکس، فرض کنیم $a\sigma(b)\in P$. بنابراین $x\in R$ وجود دارد که $xa\sigma(b)=0$. چون R حلقه‌ای σــسازگار است، پس $xab=0$ و در نتیجه $ab\in ann_R(x)\subseteq P$. لذا P ایدآلی σــسازگار از R است.

بنابراین اگر P ایدآل اول مینیمالی از حلقه‌ی کاهشی و σــسازگار R باشد، آن‌گاه بنا به قضیه‌ی ۲۲.۲.۲، $P[[x;\sigma]]$ ایدآل کاملاً اول از $R[[x;\sigma]]$ است.

قضیه ۲۴.۲.۲. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و σـ سازگار باشد که $Z(R) \neq 0$. در این‌صورت $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]])) \geq 1$. به‌خصوص $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]])) = 1$ اگر و فقط اگر R حلقه‌ای غیرکاهشی باشد و $Z(R)^2 = 0$.

برهان. فرض کنیم a مقسوم‌علیه صفری از R باشد که ناصفر است. بنابراین $0 \neq b \in R$ وجود دارد که $ab = 0$ و $ax \neq bx^2$ و درنتیجه بنا به لم ۳.۲.۲، $(ax)(bx^2) = 0$. پس $d(ax, bx^2) = 1$ و بنابراین $\operatorname{diam}\Gamma(R[[x;\sigma]]) \geq 1$.

حال فرض کنیم R حلقه‌ای غیرکاهشی است به‌طوری‌که $Z(R)^2 = 0$. ادعا می‌کنیم $Z(R[[x;\sigma]]) \subseteq Z(R)[[x;\sigma]]$. فرض کنیم

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in Z(R[[x;\sigma]]) \setminus Z(R)[[x;\sigma]].$$

بنابراین $0 \neq g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \in R[[x;\sigma]]$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(x)g(x) = 0$. بدون کاستن از کلیت مسئله، می‌توان فرض کرد $a_0 \neq 0 \neq b_0$. ابتدا نشان می‌دهیم $g(x) \notin Z(R)[[x;\sigma]]$. فرض کنیم $g(x) \in Z(R)[[x;\sigma]]$. چون $f(x)g(x) = 0$، پس $a_0 b_0 = 0$ و درنتیجه $a_0 \in Z(R)$. قرار می‌دهیم $\mathcal{D} := \{a_i | a_i \notin Z(R)\}$. چون $f(x) \notin Z(R)[[x;\sigma]]$، پس $\mathcal{D} \neq \emptyset$. بنابراین $f(x)$ را می‌توان به‌صورت $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ نوشت که $f_1(x) \in Z(R)[[x;\sigma]]$ و همه‌ی ضرایب f_2 متعلق به $\mathcal{D}$ باشند. چون $g(x) \in Z(R)[[x;\sigma]]$، $Z(R)^2 = 0$ و R حلقه‌ی σـسازگار است، پس $f_1(x)g(x) = 0$ و در نتیجه $f_2(x)g(x) = 0$. فرض کنیم a ضریب جمله با کمترین درجه در $f_2(x)$ باشد. چون R حلقه‌ای σـ سازگار است، $ab_0 = 0$ که تناقض است (زیرا $a \in \mathcal{D}$). بنابراین $g(x) \notin Z(R)[[x;\sigma]]$.

می‌توان $g(x)$ را به‌صورت $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$ نوشت که در آن $g_1(x) \in Z(R)[[x;\sigma]]$ و هیچ یک از ضرایب g_2 در $Z(R)$ نیست. چون R حلقه‌ای σـ سازگار و $Z(R)$ ایدآلی از R است، پس $f_1(x)g_1(x) = 0$ و

$$f_1(x)g_2(x) + f_2(x)g_1(x) \in Z(R)[[x;\sigma]].$$

بنابراین $f_2(x)g_2(x) \in Z(R)[[x;\sigma]]$. فرض کنیم a, b به ترتیب ضرایب غیر صفر جمله‌ی با کمترین درجه در $f_2(x)$ و $g_2(x)$ باشند. در این‌صورت، $ab \in Z(R)$. بنابراین عنصر ناصفر $r \in R$ وجود دارد که $abr = 0$. اگر $br \neq 0$، آن‌گاه $a \in Z(R)$ که تناقض است. بنابراین $br = 0$ و در نتیجه $b \in Z(R)$ که تناقض است. بنابراین

$$Z(R[[x;\sigma]]) \subseteq Z(R)[[x;\sigma]].$$

حال فرض کنیم $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ دو مقسوم‌علیه صفر متمایز در $R[[x;\sigma]]$ باشند که ناصفر هستند. بنابراین برای هر i, j، داریم $a_i, b_j \in Z(R)$. چون $Z(R)^2 = 0$ و R حلقه‌ای σـسازگار است پس $f(x)g(x) = 0$. لذا $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]])) = 1$.

بالعکس، فرض کنیم $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]])) = 1$ و $a,b \in Z(R)$. بنابراین ax و bx^2 مقسوم‌علیه‌های صفر متمایزی از $R[[x;\sigma]]$ هستند. بنابراین $(ax)(bx^2) = a\sigma(b)x^3 = 0$ و در نتیجه $ab = 0$، زیرا R حلقه‌ای σــسازگار است. لذا $Z(R)^2 = 0$ و R غیرکاهشی است. □

نتیجه ۲۵.۲.۲. فرض کنیم $R \ncong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ حلقه‌ای برگشت‌پذیر و σــسازگار باشد به‌طوری‌که $|Z(R)| \geq 3$. در این‌صورت $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = 1$ اگر و فقط اگر $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]])) = 1$.

برهان. بنا به [۳۷، تذکر ۲.۲] ، چون $R \ncong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$، پس $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = 1$ اگر و فقط اگر برای هر $x,y \in Z(R)$ داشته باشیم $xy = 0$. بنابراین طبق قضیه ۲۴.۲.۲، $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = 1$ اگر و فقط اگر $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]])) = 1$. □

در قضیه‌ی بعدی، برای حلقه‌ی برگشت‌پذیر، σــسازگار و نوتری راست R، دسته بندی کاملی از مقادیر ممکن برای قطر $\Gamma(R[[x;\sigma]])$ ارائه می‌دهیم.

قضیه ۲۶.۲.۲. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، σــ سازگار و نوتری راست باشد به‌طوری‌که $Z(R) \neq 0$. در این‌صورت

(۱) $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]])) = 2$ اگر و تنها اگر $|Z(R)| \geq 3$ و (الف) R حلقه‌ی کاهشی با دقیقاً دو ایدآل اول مینیمال باشد، یا (ب) $Z(R)$ ایدآلی از R باشد که $Z(R)^2 \neq 0$.

(۲) $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]])) = 3$ اگر و فقط اگر R حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایدآل اول مینیمال نباشد و $Z(R)$ ایدآلی از R نباشد.

برهان. فرض کنیم R حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایدآل اول مینیمال P و Q باشد. بنابراین $Z(R) = P \cup Q$ و $P \cap Q = 0$. بنابه قضیه‌ی ۱۸.۲.۲، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = 2$. با استفاده از تذکر ۲۳.۲.۲، $R[[x;\sigma]]$ حلقه‌ای کاهشی و $P[[x;\sigma]]$ و $Q[[x;\sigma]]$ دو ایدآل اول از $R[[x;\sigma]]$ هستند. چون $PQ = 0$، پس $P[[x;\sigma]] \cup Q[[x;\sigma]] \subseteq Z(R[[x;\sigma]])$. فرض کنیم $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ مقسوم‌علیه صفری از $R[[x;\sigma]]$ باشد. بنا به نتیجه‌ی ۶.۲.۲، عنصر ناصفر $s \in R$ وجود دارد که $fs = 0$. بنابراین $C_f R s = 0$ و در نتیجه

$$C_f R \subseteq ann(s) \subseteq Z(R) = P \cup Q.$$

بنا به نتیجه‌ی ۱۱.۲.۲، $C_f R \subseteq P$ یا $C_f R \subseteq Q$. بنابراین $Z(R[[x;\sigma]]) \subseteq P[[x;\sigma]] \cup Q[[x;\sigma]]$ و در نتیجه

$$Z(R[[x;\sigma]]) = P[[x;\sigma]] \cup Q[[x;\sigma]].$$

فرض کنیم $f,g \in Z(R[[x;\sigma]])$. اگر $f,g \in P[[x;\sigma]]$، آن‌گاه برای هر $t \in Q$، داریم $tf = 0 = tg$ و چون R کاهشی و σــ سازگار است، پس $ft = 0$ و $tg = 0$. به‌طور مشابه، اگر $f,g \in Q[[x;\sigma]]$، آن‌گاه می‌توان نشان داد که برای هر $p \in P$، داریم $fp = 0 = pg$. از این‌رو

$d(f,g)=۲$. اگر $f\in P[[x;\sigma]]$ و $g\in Q[[x;\sigma]]$، آن‌گاه $fg=\circ$. زیرا $P\cap Q=\circ$ و $\sigma(Q)\subseteq Q$.
بنابراین $d(f,g)=۱$. لذا $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]]))=۲$.

فرض کنیم $Z(R)$ ایدآلی از R باشد که $Z(R)^۲\neq\circ$. همچنین فرض کنیم $f,g\in Z(R[[x;\sigma]])$، $C_fR=\langle a_\circ,\ldots,a_n\rangle$ و $C_gR=\langle b_\circ,\ldots,b_m\rangle$. بنا به نتیجه‌ی ۶.۲.۲، $Z(R[[x;\sigma]])\subseteq Z(R)[[x;\sigma]]$. چون $Z(R)$ ایدآل است، پس

$$\langle a_\circ,\ldots,a_n,b_\circ,\ldots,b_m\rangle\subseteq Z(R).$$

از آن‌جایی‌که R برگشت‌پذیر و نوتری راست است، بنا به قضیه‌ی ۱۹.۲.۲، R دارای خاصیت (A) راست است. لذا عنصر ناصفر $r\in R$ وجود دارد که $\langle a_\circ,\ldots,a_n,b_\circ,\ldots,b_m\rangle r=\circ$. بنابراین با استفاده از لم ۳.۲.۲، f و g یک پوچساز مشترک غیر صفر دارند. پس $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]]))\leq ۲$.
از آن‌جایی‌که $Z(R)^۲\neq\circ$، بنا به قضیه ۲۴.۲.۲، $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]]))\geq ۲$ و در نتیجه $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]]))=۲$.

بالعکس، فرض کنیم $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]]))=۲$. بنابراین $Z(R[[x;\sigma]])^۲\neq\circ$ و از آن‌جایی‌که بنا به نتیجه‌ی ۶.۲.۲، $Z(R[[x;\sigma]])\subseteq Z(R)[[x;\sigma]]$، پس $Z(R)^۲\neq\circ$. فرض کنیم R حلقه‌ای کاهشی با دقیقا دو ایدآل اول مینیمال نباشد. بنابراین R حلقه‌ای کاهشی با بیش از دو ایدآل اول مینیمال است، یا R کاهشی نیست. اگر مقسوم‌علیه‌های صفر a و b از R وجود داشته باشند که پوچساز مشترک ندارند، آن‌گاه بنا به قضیه‌ی ۱۸.۲.۲، $\mathrm{diam}(\Gamma(R))=۳$ و در نتیجه $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]]))=۳$ که تناقض است. بنابراین برای هر a,b از $Z(R)$، $a+b\in Z(R)$.
بوضوح اگر $a\in Z(R)$، آن‌گاه $ar\in Z(R)$. بنابراین $Z(R)$ ایدآلی از R است.

(۲) بنا به گزاره‌ی (۱) و قضیه‌ی ۲۴.۲.۲، نتیجه به‌وضوح برقرار است. □

نتیجه ۲۷.۲.۲. فرض کنیم $R\ncong\mathbb{Z}_۲\times\mathbb{Z}_۲$ حلقه‌ای برگشت‌پذیر، σـ سازگار و نوتری راست باشد که $|Z(R)|\geq ۳$. در این‌صورت

(۱) $\mathrm{diam}(\Gamma(R))=۲$ اگر و فقط اگر $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]]))=۲$.

(۲) $\mathrm{diam}(\Gamma(R))=۳$ اگر و فقط اگر $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]]))=۳$.

برهان. (۱) بنا به قضیه‌ی ۱۸.۲.۲ و قضیه‌ی ۲۶.۲.۲ (۱)، $\mathrm{diam}(\Gamma(R))=۲$ اگر و فقط اگر $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]]))=۲$.

(۲) فرض کنیم $\mathrm{diam}(\Gamma(R))=۳$. چون $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]]))\leq ۳$ و $\Gamma(R)$ زیر گرافی از $\Gamma(R[[x;\sigma]])$ است، پس $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]]))=۳$. حال فرض کنیم $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]]))=۳$.
بنابر قضیه‌ی ۲۶.۲.۲، R حلقه‌ی کاهشی با دقیقاً دو ایدال اول مینیمال نیست و $Z(R)$ ایدآلی از حلقه‌ی R نیست. بنابراین مقسوم‌علیه‌های صفر متمایز $a,b\in R$ وجود دارد که ناصفر هستند و $ann(\{a,b\})=\circ$ و R حلقه‌ی کاهشی با بیش از دو ایدآل اول مینیمال است، یا R حلقه‌ی غیرکاهشی است. لذا بنا بر قضیه‌ی ۱۸.۲.۲، $\mathrm{diam}(\Gamma(R))=۳$. □

مثال بعدی نشان می‌دهد که با حذف شرط نوتری، قضیه‌ی ۲۶.۲.۲ در حالت کلی برقرار نیست.

مثال ۲۸.۲.۲. [۵۹، مثال ۵.۶] فرض کنیم $R=\mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}_{p^\infty}$ توسیع بدیهی $\mathbb{Z}$ـ مدول $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ با جمع $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ و ضرب $(a,b)(c,d)=(ac,ad+bc)$ باشد. بوضوح R حلقه‌ی جابه‌جایی و غیرکاهشی است. به‌راحتی می‌توان نشان داد $Z(R)=p\mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}_{p^\infty}$ ایدآلی از R است. از آن‌جایی‌که عنصر $(\circ,\overline{1/p})$ پوچساز ناصفری از $Z(R)$ است، لذا R دارای خاصیت (A) است.

دو عنصر

$$g=(\circ,\overline{(1/p)})+(\circ,\overline{(1/p^2)})x+(\circ,\overline{(1/p^3)})x^2+(\circ,\overline{(1/p^4)})x^3+\cdots$$

و

$$f=(p,\circ)-(1,\circ)x$$

از $R[[x]]$ را در نظر می‌گیریم. بوضوح $fg=\circ$. هم‌چنین $(p,\circ)$ مقسوم‌علیه صفری از R است. بنابراین $(p,\circ)\in Z(R[[x]])$. اما $f-(p,\circ)=(1,\circ)x$ مقسوم‌علیه صفری از $R[[x]]$ نمی‌باشد. بنابراین $Z(R[[x]])$ ایدآل نیست و در نتیجه بنا به [۵۹، نتیجه ۲.۵]، $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x]]))=3$.

در ادامه به مطالعه‌ی رابطه‌ی بین قطر گراف‌های $\Gamma(R)$ و $\Gamma(R[[x;\sigma]])$، در حالتی که R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، σـ سازگار و نوتری راست است، می‌پردازیم.

قضیه ۲۹.۲.۲. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، σـ سازگار و نوتری راست باشد. تمام حالت‌های ممکن برای $\mathrm{diam}(\Gamma(R))$ و $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]]))$ به‌صورت زیر است:

(۱) $\mathrm{diam}(\Gamma(R))=\circ$ و $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]]))=1$ اگر و فقط اگر $|Z(R)|=2$.

(۲) $\mathrm{diam}(\Gamma(R))=\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]]))=1$ اگر و فقط اگر R حلقه‌ی غیرکاهشی با بیش از یک مقسوم‌علیه صفر، که ناصفر هستند، باشد و $Z(R)^2=\circ$.

(۳) $\mathrm{diam}(\Gamma(R))=1$ و $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]]))=2$ اگر و فقط اگر R با $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ یکریخت باشد.

(۴) $\mathrm{diam}(\Gamma(R))=\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]]))=2$ اگر و فقط اگر یا (الف) R حلقه‌ی کاهشی با دقیقاً دو ایدآل اول مینیمال باشد که بیش از دو مقسوم‌علیه صفری، که ناصفر هستند، داشته باشد، یا (ب) $Z(R)$ ایدآلی از R است که $Z(R)^2\neq\circ$ و R خاصیت (A) راست دارد.

(۵) $\mathrm{diam}(\Gamma(R))=\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]]))=3$ اگر و فقط اگر R حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایدآل اول مینیمال نباشد و یک جفت از مقسوم‌علیه‌های صفر مانند a و b در R وجود داشته باشد که پوچساز مشترک غیرصفر ندارند.

برهان. فرض کنیم $|Z(R)| = ۲$. بوضوح $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = ۰$. بنابراین $Z(R) = \{۰, a\}$ و در نتیجه ax و $ax^۲$ مقسوم‌علیه‌های صفر متمایزی از $R[[x;\sigma]]$ هستند. چون R حلقه‌ای σـ سازگار است، پس $(ax)(ax^۲) = ۰$. بنابراین $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]])) \geq ۱$. اگر $f(x) = \sum_{i=۰}^{\infty} a_i \in Z(R[[x;\sigma]])$، آن‌گاه بنا به نتیجه‌ی ۶.۲.۲، عنصر ناصفر $c \in R$ وجود دارد که $f(x)c = ۰$. بنابراین برای هر i، $a_i \in Z(R)$ و از این‌رو $Z(R[[x;\sigma]])^۲ = ۰$ لذا $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]])) = ۱$.

بالعکس، اگر $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = ۰$ و $\mathrm{diam}(\Gamma(R[x;\sigma])) = ۱$، بوضوح $|Z(R)| = ۲$.

(۲) بنا به قضایای ۱۸.۲.۲ (۲) و ۲۴.۲.۲ نتیجه حاصل است.

(۳) فرض کنیم $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = ۱$ و $\mathrm{diam}(\Gamma(R[x;\sigma])) = ۲$.، چون $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = ۱$، پس برای هر دو مقسوم‌علیه صفر متمایز a و b در R، $ab = ۰$. چون $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]])) = ۲$، بنابراین $Z(R)^۲ \neq ۰$. بنا به [۳۷، تذکر۲.۲] ، داریم $R \cong \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$.

بالعکس، فرض کنیم $R \cong \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$. به‌وضوح $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = ۱$ و R حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایدآل اول مینیمال است. بنابراین طبق قضیه‌ی ۲۶.۲.۲، $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x;\sigma]])) = ۲$.

(۴) توجه می‌کنیم اگر $Z(R)$ ایدآلی از R باشد و هر جفت از مقسوم‌علیه‌های صفر و متمایز R پوچساز غیر صفر داشته باشند، آن‌گاه R دارای خاصیت (A) است. بنابراین نتیجه از قضایای ۱۸.۲.۲(۳) و ۲۶.۲.۲(۲) حاصل می‌شود.

(۵) از قضایای ۱۸.۲.۲(۴) و ۲۶.۲.۲ (۲) نتیجه بدست می آید. □

فصل ۳

حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم‌یافته و گراف مقسوم‌علیه صفر

در این فصل ابتدا قصد داریم برخی خواص پوچ‌سازی یکی از ساختارهای مهم حلقه‌ای در نظریه‌ی حلقه‌ای ناجابه‌جایی را مورد مطالعه قرار دهیم. فرض کنیم R حلقه‌ای دلخواه، $(S, \leq)$ مونوئید (جزئاً) مرتب اکید و نیز $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی باشد. حلقه‌ی سری‌های توانی اریب تعمیم‌یافته $R[[S, \omega, \leq]]$ شامل تمام توابع از مونوئید S به حلقه‌ی ضرایب R خواهد بود که محمل آن‌ها نه شامل زنجیرهای نزولی نامتناهی و نه پاد زنجیرهای نامتناهی، با جمع نقطه‌ای و ضرب پیچشی اریب که توسط عمل ω از مونوئید S روی حلقه‌ی ضرایب R داده شده است، می‌باشد. نتایج ما در این فصل در واقع توسیعی از نتایجی است که در فصل قبل برای حلقه‌ی سری‌های توانی اریب بدست آوردیم. ابتدا برخی خواص پوچ‌سازی حلقه‌ی سری‌های توانی اریب تعمیم‌یافته مانند خاصیت مک کوی، خاصیت (A)، خاصیت زیپ و خاصیت قویاً‌ـ AB را برای رده‌ی خاصی از حلقه‌ها و مونوئیدهای مرتب اکید بیان می‌کنیم. هم‌چنین، ارتباط میان ویژگی‌های حلقه‌ای حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم یافته و ویژگی‌های گرافی گراف مقسوم‌علیه صفر آن را مورد بررسی و مطالعه قرار می‌دهیم و دسته بندی کاملی از مقادیر ممکن برای قطر گراف مقسوم‌علیه صفر $\Gamma(R[[S, \omega]])$، در حالتی‌که ω همریختی مونوئیدی بدیهی باشد، ارائه می‌دهیم.

مطالب این فصل برگرفته از مرجع [۳۲] می‌باشد.

۱.۳ مقدمات و تعاریف

گروه G گروه حاصل‌ضرب یکتا[۱] نامیده می‌شود، هرگاه برای هر دو زیر مجموعه‌ی متناهی و ناتهی A و B از گروه G عنصری مانند $g \in G$ موجود باشد به‌گونه‌ای که بتوان آن را به‌طور منحصر به‌فرد به فرم $g = ab$ نوشت که $a \in A$ و $b \in B$. در این صورت گروه G را u.p.ـ گروه می نامیم. این رده از گروه‌ها معمولاً در ارتباط با حدس مقسوم‌علیه صفر[۲] مورد مطالعه قرار می‌گیرند، به این‌صورت که اگر R حلقه‌ی شرکت‌پذیر باشد که هیچ مقسوم‌علیه صفر غیر صفری نداشته باشد و G گروهی فارغ از تاب[۳] باشد، آن‌گاه حلقه‌ی گروهی $F[G]$ نیز فاقد مقسوم‌علیه صفر غیرصفر می‌باشد. حدس مقسوم‌علیه صفر در حالتی که G گروه حاصل‌ضرب یکتا می‌باشد، دارای جواب مثبت است. حال با تعمیم مفهوم فوق از گروه‌ها به مونوئیدها(به نیم‌گروه‌های با عنصر یکانی که لزوماً جابه‌جایی نمی باشند)، می‌توان مفهوم مونوئید حاصل‌ضرب یکتا[۴] (u.p.ـ مونوئید) را تعریف کرد، که این مفهوم در مطالعه‌ی پوچسازهای حلقه‌های مونوئیدی ابزاری بسیار سودمند می‌باشند.کلاس مونوئیدهای حاصل‌ضرب یکتا شامل مونوئیدهای کاملاً مرتب راست و چپ، زیرمونوئیدهای گروه‌های آزاد و گروه‌های پوچ‌توان فارغ از تاب است. حال قصد داریم نوعی از مونوئید حاصل‌ضرب یکتا را معرفی کنیم، که از آن برای تعریف ساختار حلقه‌ی سری‌های توانی اریب تعمیم‌یافته استفاده خواهیم کرد. در سرتاسر این رساله، تمامی مونوئیدها حاصل‌ضربی بوده و منظور از یک ترتیب، ترتیب جزئی [۵] می‌باشد.

یادآوری می‌کنیم که مونوئید حاصل‌ضربی S که به ترتیب جزئی $\leq$ مجهز می‌باشد، مونوئید مرتب[۶] نامیده می‌شود هر گاه برای هر $s_۱, s_۲, t \in S$، از این‌که $s_۱ \leq s_۲$ بتوان نتیجه گرفت که $s_۱ t \leq s_۲ t$ و $ts_۱ \leq ts_۲$. به‌علاوه، اگر $s_۱ < s_۲$ نتیجه دهد که $s_۱ t < s_۲ t$ و $ts_۱ < ts_۲$، آن‌گاه $(S, \leq)$ مونوئید مرتب اکید[۷] نامیده می‌شود. مونوئید S را حذف پذیر[۸] می نامیم هرگاه برای هر $a_۱, a_۲, b \in S$ از این‌که $a_۱ b = a_۲ b$ یا $ba_۱ = ba_۲$ بتوان نتیجه گرفت که $a_۱ = a_۲$. هم‌چنین مونوئید S فارغ از تاب[۹] نامیده می‌شود هرگاه برای هر $s, t \in S$ و هر عدد صحیح $k \geq ۱$، از این‌که $s^k = t^k$ بتوان نتیجه گرفت $s = t$.

فرض کنیم $(S, \leq)$ مجموعه‌ی مرتب جزئی باشد. مجموعه‌ی مرتب $(S, \leq)$ آرتینی[۱۰]

[1] Uniqu product group
[2] Zero-Divisor Conjecture
[3] Torsion free
[4] Unique Product monoid
[5] Partial order
[6] Ordered monoid
[7] Strictly ordered monoid
[8] Cancellative
[9] Torsion free
[10] Artinian

نامیده می‌شود هرگاه هر دنباله نزولی اکید از عناصر S متناهی باشد و $(S,\leq)$ باریک[۱۱] نامیده می‌شود هرگاه هر زیر مجموعه‌ی S متشکل از عناصر دو به دو غیرقابل‌مقایسه، متناهی باشد. به راحتی می‌توان دید که $(S,\leq)$ آرتینی و باریک است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از S حداقل یکی و فقط تعدادی متناهی عنصر مینیمال داشته باشد. مجموعه‌هایی که دارای خاصیت فوق می‌باشند مجموعه‌های خوش‌ترتیب جزئی[۱۲] نامیده می‌شوند و از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار بوده و کابردهای وسیعی در نظریه‌ی زبان‌ها و ماشین‌ها و هم‌چنین در نظریه‌ی پیچیدگی محاسبات دارند.

اگر A و B زیرمجموعه‌هایی ناتهی از مونوئید S باشند، آن‌گاه عنصر

$$s_\circ \in AB = \{ab \,|\, a \in A, b \in B\}$$

عنصر حاصل ضرب یکتا[۱۳] (عضو .u.p) در AB نامیده می‌شود هرگاه به‌صورت منحصربه‌فرد به فرم $s_\circ = ab$ نمایش داده شود که در آن $a \in A$ و $b \in B$. برای یک مجموعه‌ی مرتب جزئی S، مجموعه‌ی همه‌ی عناصر مینیمال S را با علامت $\min(S)$ نشان می‌دهیم.

حلقه‌ی سری‌های توانی اریب تعمیم‌یافته[۱۴] که در مرجع [۶۵] معرفی شده‌است، رده‌ی بسیار وسیعی از ساختارهای حلقه‌ای را به‌عنوان حالات خاص در برداشته که از آن جمله می‌توان به حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب (جایی که $\sigma = \circ$)، حلقه سری‌های توانی اریب، حلقه چندجمله‌ای‌های لوران اریب، حلقه سری‌های توانی لوران اریب، حلقه گروهی اریب، حلقه‌ی سری‌های لوران مالچوـ نیومن[۱۵] و بسیاری از رده‌ی حلقه‌های دیگر اشاره کرد. در واقع ایده‌ی ساختن این حلقه شبیه به ساختارهای حلقه‌ی گروهی اریب می‌باشد، با این تفاوت که به‌جای توابعی از گروه G به حلقه‌ی R که دارای محمل[۱۶] متناهی می‌باشند، اینجا با توابعی سر و کار داریم که از مونوئید مرتب اکید $(S,\leq)$ به حلقه‌ی R تعریف شده و دارای محمل آرتینی و باریک می‌باشند. حال قصد داریم رده‌ای خاص، اما بسیار مهم از مونوئیدهای حاصل‌ضرب یکتا را تعریف کنیم.

تعریف ۱.۱.۳. [۶۲] مونوئید مرتب $(S,\leq)$ را مونوئید حاصل‌ضرب یکتای آرتینی و باریک[۱۷] (یا به اختصار .a.n.u.pـ مونوئید) می‌گوییم، هرگاه برای هر دو زیر مجموعه‌ی آرتینی و باریک A و B از S، یک عضو حاصل‌ضرب یکتا در حاصل‌ضرب AB موجود باشد. مونوئید مرتب $(S,\leq)$ را مونوئید حاصل‌ضرب یکتای آرتینی و باریک مینیمال[۱۸] (یا به اختصار .m.a.n.u.pـ مونوئید) می‌گوییم، هرگاه برای هر دو زیر مجموعه‌ی آرتینی و باریک A و B از S،

[11] Narrow
[12] Well-partialy-ordered
[13] Unique product element
[14] Skew generalized power series ring
[15] Mal'cev-Neumann
[16] Support
[17] Artinian narrow unique product monoid
[18] Minimal artinian narrow unique product monoid

عنصر $a \in \min(A)$ و $b \in \min(B)$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای‌که ab عضو حاصل‌ضرب یکتا در حاصل‌ضرب AB باشد. هم‌چنین مونوئید مرتب $(S, \leq)$ را کاملاً مرتب[۱۹] می‌گوییم، اگر $\leq$ یک ترتیب کامل روی S باشد (هر دو عنصر متفاوت از S قابل مقایسه باشند). مونوئید $(S, \leq)$ را کاملاً مرتب موضعی[۲۰] می‌نامیم (و $\leq$ یک ترتیب کامل موضعی روی S نامیده می‌شود) اگر $\leq$ قابل تظریف به یک ترتیب $\preceq$ باشد به‌گونه‌ای‌که $(S, \preceq)$ مونوئید کاملاً مرتب باشد.

توجه کنید که هر زیر مجموعه‌ی متناهی از یک مجموعه‌ی مرتب، هم آرتینی و هم باریک است، و لذا هر مونوئید حاصل‌ضرب یکتای آرتینی و باریک یک مونوئید حاصل‌ضرب یکتا می‌باشد. هم‌چنین به‌راحتی می‌توان دید که مونوئیدهای حاصل‌ضرب یکتا دقیقاً مونوئیدهای حاصل‌ضرب یکتای آرتینی و باریک می‌باشند که در آن‌ها ترتیب بدیهی[۲۱] لحاظ شده است، یعنی ترتیبی که تحت آن هیچ دو عضو متمایز از S قابل مقایسه نمی‌باشند. مارکس، مازورک و ژیمبوسکی [۶۲] نشان دادند که برای مونوئید مرتب $(S, \leq)$ روابط زیر برقرار است:

S مونوئید جابه‌جایی، فارغ از تاب و حذف پذیر است

$\Downarrow$

$(S, \leq)$ مونوئید کاملاً مرتب موضعی است

$\Downarrow$

$(S, \leq)$ m.a.n.u.p.ــ مونوئید است

$\Downarrow$

$(S, \leq)$ a.n.u.p.ــ مونوئید است

$\Downarrow$

S u.p.ــ مونوئید است.

هم‌چنین آن‌ها با ارائه‌ی مثال‌هایی در مرجع [۶۲] نشان دادند که عکس روابط بالا در حالت کلی برقرار نیست. با این وجود، اگر ترتیب $\leq$ را ترتیب بدیهی روی S در نظر بگیریم دو نتیجه‌ی پایانی در نمودار فوق معادل خواهند بود.

حال قصد داریم که به‌طور دقیق ساختار حلقه‌ی سری‌های توانی اریب تعمیم‌یافته، که توسط مازورک و ژیمبوسکی در مرجع [۶۵] معرفی شده است، را شرح دهیم.

فرض کنیم R یک حلقه، $(S, \leq)$ مونوئید مرتب اکید و $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی باشد، که در آن $\mathrm{End}(R)$ مونوئید متشکل از درونریختی‌های حلقه‌ای R می‌باشد. برای هر $s \in S$ فرض کنیم که ω_s دلالت بر تصویر s تحت ω داشته باشد، یعنی داریم $\omega_s = \omega(s)$. فرض کنیم A مجموعه‌ی تمام توابع $f : S \longrightarrow R$ باشد به‌گونه‌ای که محمل آن، یعنی

$$\mathrm{supp}(f) = \{s \in S | f(s) \neq \circ\}$$

[19] Totally ordered

[20] Quasitotally ordered

[21] Trivial order

آرتینی و باریک است. در این صورت برای هر $s \in S$ و $f, g \in A$، مجموعه‌ی

$$X_s(f,g) = \{(x,y) \in \mathrm{supp}(f) \times \mathrm{supp}(g) | s = xy\}$$

متناهی است. لذا می‌توان حاصل‌ضرب $fg : S \longrightarrow R$ را برای $f, g \in A$ به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$fg(s) = \sum_{(x,y) \in X_s(f,g)} f(x)\omega_x(g(y))$$

و اگر $X_s(f,g) = \emptyset$ آن‌گاه $fg(s) = ۰$. با عمل جمع نقطه به نقطه و عمل ضرب تعریف شده در بالا، مجموعه A ساختار یک حلقه پیدا می‌کند، که این حلقه را حلقه‌ی سری‌های توانی اریب تعمیم یافته گوییم و با نماد $R[[S,\omega,\leq]]$ یا $R[[S,\omega]]$ نمایش می‌دهیم.
ما از نماد ۱ برای نمایش عناصر همانی حلقه‌ی R و حلقه‌ی $R[[S,\omega,\leq]]$ استفاده می‌کنیم. هم‌چنین عنصر همانی مونوئید S را با نماد e نمایش می‌دهیم. گوییم زیرمجموعه‌ی $P \subset R$ مجموعه‌ای Sـ پایا[22] می‌باشد هرگاه برای هر $s \in S$، مجموعه P تحت ω_s پایا باشد، یعنی داشته باشیم $\omega_s(P) \subset P$. برای هر $r \in R$ و هر $s \in S$، عناصر c_r و e_x را در $R[[S,\omega,\leq]]$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$c_r(x) = \begin{cases} r & x = e \\ ۰ & x \in S \setminus \{e\} \end{cases} \quad \text{و} \quad e_s(x) = \begin{cases} ۱ & x = s \\ ۰ & x \in S \setminus \{s\} \end{cases}$$

به‌وضوح می‌توان دید که $r \mapsto c_r$ یک نشاندن حلقه‌ای R به‌توی $R[[S,\omega,\leq]]$ و هم‌چنین $s \mapsto e_s$ یک نشاندن از مونوئید S به مونوئید ضربی $R[[S,\omega,\leq]]$ می باشد و داریم $e_s c_r = c_{\omega_s(r)} e_s$. به‌علاوه، برای هر زیرمجموعه‌ی ناتهی X از R، قرارداد می‌کنیم که

$$X[[S,\omega,\leq]] = \{f \in R[[S,\omega,\leq]] | f(s) \in X \cup \{۰\}, \forall s \in S\}$$

و برای هر زیرمجموعه‌ی ناتهی Y از حلقه‌ی $R[[S,\omega,\leq]]$، قرار می‌دهیم:

$$C_Y = \{g(t) | g \in Y, t \in S\}.$$

حال به برخی از حالات خاص این ساختار اشاره می‌کنیم:

- در حالتی که $S = \mathbb{N} \cup \{۰\}$ با عمل جمع معمولی و $\leq$ و ω هر دو بدیهی باشند، آن‌گاه با حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های معمولی سروکار داریم، یعنی $R[[S,\omega,\leq]] \cong R[x]$.
- در حالتی که S دلخواه باشد و $\leq$ و ω هر دو بدیهی باشند، آن‌گاه با حلقه‌ی مونوئیدی سر و کار داریم، یعنی $R[[S,\omega,\leq]] \cong R[S]$.

[22] S-invariant

- در حالتی‌که $S = \mathbb{N} \cup \{0\}$ با عمل جمع معمولی، $\leq$ ترتیب بدیهی باشد و $\omega_1 = \sigma$ برای یک $\sigma \in End(R)$، در این صورت با حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب $R[x;\sigma]$ سر و کار داریم، یعنی $R[[S,\omega,\leq]] \cong R[x;\sigma]$.

- اگر $S = \mathbb{Z}$ با عمل جمع معمولی و $\leq$ ترتیب بدیهی باشد و برای یک $\sigma \in \mathrm{Aut}(R)$، $\omega_1 = \sigma$، در این‌صورت با حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران اریب $R[x,x^{-1};\sigma]$ سر و کار داریم، یعنی $R[[S,\omega,\leq]] \cong R[x,x^{-1};\sigma]$.

- در حالتی که S و ω دلخواه باشند و فقط ترتیب $\leq$ بدیهی باشد، در این صورت با حلقه‌ی مونوئیدی اریب سر و کار داریم.

- در حالتی‌که $S = \mathbb{N} \cup \{0\}$ با عمل جمع معمولی، $\leq$ را ترتیب معمولی لحاظ کنیم و $\omega_1 = \sigma$ برای یک $\sigma \in \mathrm{End}(R)$، در این صورت با حلقه‌ی سری‌های توانی اریب سر وکار داریم، یعنی $R[[S,\omega,\leq]] \cong R[[x;\sigma]]$.

- حالتی‌که $S = \mathbb{Z}$ با عمل جمع معمولی، $\leq$ را ترتیب معمولی لحاظ کنیم و $\omega_1 = \alpha$ برای یک $\sigma \in \mathrm{Aut}(R)$، در این صورت با حلقه‌ی سری‌های توانی لوران اریب سر وکار داریم، یعنی $R[[S,\omega,\leq]] \cong R[[x,x^{-1};\sigma]]$.

- در حالتی‌که $(S,\circ,\leq)$ گروهی کاملاً مرتب و ω بدیهی باشد، در این صورت با ساختار مالچو_نیومن سر و کار داریم.

- در حالتی‌که $(S,\circ,\leq)$ گروهی کاملاً مرتب باشد، در این صورت با ساختار مالچو_نیومن حلقه‌های سری‌های لوران پیچشی[۲۳] سر و کار داریم.(برای مشاهده جزئیات این ساختار به [۵۷] مراجعه کنید).

- در حالتی‌که ω بدیهی باشد، در این صورت با ساختار حلقه‌های سری‌های توانی تعمیم یافته سر و کار داریم.(برای مشاهده جزئیات این ساختار به مرجع [۷۸] مراجعه کنید)

یکی از ویژگی‌های مهم حلقه‌های جابه‌جایی توسط مک کوی [۶۶] در سال ۱۹۴۲ بیان و اثبات شد. او نشان داد که اگر دو چندجمله‌ای ناصفر روی یک حلقه‌ی جابه‌جایی یکدیگر را پوچ کنند، در این‌صورت هر یک از چندجمله‌ای‌ها یک پوچ‌ساز ناصفر در حلقه‌ی زمینه دارد. نیلسن در مرجع [۷۰] این ویژگی را به حلقه‌های ناجابه‌جایی تعمیم داد. حلقه‌ی R حلقه‌ی مک‌کوی راست نامیده می‌شود اگر برای $f(x), g(x) \in R[x]$ که $0 \neq f(x), g(x)$ که $f(x)g(x) = 0$، بتوان نتیجه گرفت عنصر ناصفر $c \in R$ وجود دارد که $f(x)c = 0$. حلقه‌های مک‌کوی چپ به‌طور مشابه تعریف می‌شوند. در مرجع [۷۰]، نیلسن نشان داد که همه‌ی حلقه‌های برگشت‌پذیر مک‌کوی هستند، اما مثالی ارائه داد که نشان می‌دهد حلقه‌های نیم جابه‌جایی مک‌کوی

[23] Twisted Laurent series rings

نیستند. اخیراً تعمیم‌های مختلفی از حلقه‌های مک‌کوی تعریف شده است. تمامی این تعمیم‌ها توسط هاشمی و آل هوز به‌صورت یک‌پارچه درآمده [۱]، و این تعمیم یک‌پارچه را حلقه‌ی (S,ω)ـ مک‌کوی نامیدند، که در آن $(S,\leq)$ مونوئید مرتب اکید و $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی است. حلقه‌ی R حلقه‌ی (S,ω)ـ مک‌کوی راست نامیده می‌شود، هرگاه برای عناصر ناصفر $f,g \in R[[S,\omega]]$ که $fg = \circ$، آن‌گاه عنصر ناصفر $r \in R$ وجود داشته باشد که $fr = \circ$. حلقه‌ی (S,ω)ـ مک‌کوی چپ به‌طور مشابه تعریف می‌شود. اگر حلقه‌ی R حلقه‌ی (S,ω)ـ مک‌کوی راست و چپ باشد، در این‌صورت R را حلقه‌ی (S,ω)ـ مک‌کوی می‌نامیم. اگر ω را همریختی مونوئیدی بدیهی در نظر بگیریم تعریف فوق به حلقه‌ی Sـ مک‌کوی نسبت به سری‌های توانی تعمیم یافته تبدیل می‌شود که در ادامه بیان می‌شود.

در این فصل ω را همریختی مونوئیدی بدیهی در نظر می‌گیریم. هدف اول ما در این فصل،تعمیم نتایج بدست آمده در مورد خاصیت مک‌کوی روی حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های معمولی به ساختار حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم‌یافته است. سپس قصد داریم ارتباط میان حلقه‌های مک‌کوی نسبت به سری‌های توانی تعمیم‌یافته و برخی ویژگی‌های حلقه‌ای مانند خاصیت زیپ، خاصیت (A) و خاصیت قویاًـAB را برای حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم‌یافته بیان کنیم. علاوه بر این، با استفاده از خاصیت مک‌کوی برخی خاصیت‌های پوچسازی حلقه‌ی سری‌توانی تعمیم یافته را بررسی می‌کنیم که نقش مهمی در اثبات ویژگی‌های گرافی گراف مقسوم‌علیه صفر آن، که در بخش آخر بیان می‌شوند، دارند. هم‌چنین، به بررسی قطر گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم‌یافته $R[[S]]$ می پردازیم، که در آن R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و نوتری راست و S m.a.n.u.p.ـ مونوئید می‌باشد.

۲.۳ برخی ویژگی‌های پوچسازی حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم یافته

مازورک و ژیمبوسکی در [۶۳] نشان دادند که اگر R حلقه‌ای برگشت‌پذیر یا دوو راست، S u.pـ مونوئید و $\alpha = \sum_{i=1}^{m} a_i s_i, \beta = \sum_{j=1}^{n} b_j t_j$ عناصر ناصفری از حلقه‌ی مونوئیدی $R[S]$ باشند به‌طوری‌که $\alpha\beta = \circ$، آنگاه عنصر ناصفر $r \in R$ وجود دارد که $\beta r \neq \circ$ و برای هر $i \in \{1,\ldots,m\}$ و $j \in \{1,\ldots,n\}$، $a_i b_j r = \circ$. فرض کنیم σ درونریختی سازگاری از حلقه‌ی برگشت‌پذیر و نوتری راست R باشد. در فصل قبل نشان داده شد که اگر $f(x) = \sum_{i=\circ}^{\infty} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=\circ}^{\infty} b_j x^j$ عناصر ناصفری از حلقه‌ی سری‌های توانی اریب $R[[x;\sigma]]$ باشند به‌گونه‌ای‌که $f(x)g(x) = \circ$، آنگاه عناصر ناصفر $r,s \in R$ وجود دارد که $g(x)r \neq \circ \neq sf(x)$ و هم‌چنین برای هر i,j، داریم $a_i b_j r = \circ = s a_i b_j$. در ادامه این نتایج را به حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم یافته $R[[S]]$ روی حلقه‌ی برگشت‌پذیر و نوتری راست R توسیع می‌دهیم.

قضیه ۱.۲.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و نوتری راست، $(S,\leq)$ m.a.n.u.p.ـ مونوئید و f و g عناصر ناصفری از $R[[S]]$ باشند. اگر $fg=0$، آن‌گاه عناصر ناصفر a و c در R وجود دارند که $af\neq 0\neq gc$ و برای هر $s\in \operatorname{supp}(f)$ و $t\in\operatorname{supp}(g)$، $af(s)g(t)=0=f(s)g(t)c$.

برهان. فرض کنیم f,g عناصر ناصفری از $R[[S]]$ باشند که $fg=0$. چون R نوتری راست است، عنصر ناصفر $a\in R$ وجود دارد که $af\neq 0$ و $r_R(af)$ عنصر ماکسیمال از مجموعه‌ی $\{r_R(af)\,|\,af\neq 0, a\in R\}$ است. چون $\operatorname{supp}(g)$ آرتینی و باریک است، پس تعداد مینیمال‌های آن متناهی است. بنابراین فرض کنیم $\min(\operatorname{supp}(g))=\{t_1,t_2,\dots,t_n\}$ مجموعه‌ی همه‌ی عناصر مینیمال از $\operatorname{supp}(g)$ باشد و $b_1=g(t_1)$، $b_2=g(t_2)$، …، $b_n=g(t_n)$. ادعا می‌کنیم

$(*)$ $1\leq j\leq n$ وجود دارد که برای برخی اعداد صحیح و مثبت k، $b_j^k(af)=0$.

ابتدا فرض می‌کنیم که ادعا درست باشد. فرض کنیم $1\leq j\leq n$ و k کوچکترین عدد صحیح مثبتی باشد که $b_j^k(af)=0$. اگر $k>1$، آن‌گاه $b_j^{k-1}(af)\neq 0$. چون $r_R(af)\subseteq r_R(b_j^{k-1}(af))$ و $r_R(af)$ ماکسیمال است، داریم $r_R(af)=r_R(b_j^{k-1}(af))$. از آن‌جایی‌که R برگشت‌پذیر است و $b_j^k(af)=0$، پس $b_j^{k-1}afb_j=0$. بنابراین $b_j\in r_R(b_j^{k-1}af)$ و در نتیجه بنا به ماکسیمال بودن $r_R(af)$، $b_j(af)=0=(af)b_j$، که تناقض است. بنابراین $k=1$. لذا برای هر $s\in\operatorname{supp}(f)$، $b_jaf(s)=0$. قرار می‌دهیم

$$h_1(s):=\begin{cases} b_j & s=t_j\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

فرض کنیم $g_1=g-h_1\in R[[S]]$. بنابراین $(af)g=(af)g_1=0$. به روش مشابه می‌توان نشان داد $t\in\min(\operatorname{supp}(g_1))$ وجود دارد که $g_1(t)af=0$. چون $\min(\operatorname{supp}(g_1))\subseteq\operatorname{supp}(g)$، بنابراین با تکرار روند قبل، برای هر $t\in\operatorname{supp}(g)$، $g(t)af=0$. از اینرو بنا به برگشت‌پذیر بودن R، برای هر $s\in\operatorname{supp}(f)$ و $t\in\operatorname{supp}(g)$ داریم $af(s)g(t)=0$.

برای اثبات ادعای $(*)$، فرض می‌کنیم برای هر $1\leq j\leq n$ و هر عدد صحیح مثبت m_j، $b_j^{m_j}(af)\neq 0$. بنا به ماکسیمال بودن $r_R(af)$، $r_R(b_j^{m_j}af)=r_R(af)$. چون $b_{j_2}^{m_{j_2}}af\neq 0$ و R برگشت‌پذیر است، $b_{j_1}^{m_{j_1}}b_{j_2}^{m_{j_2}}af\neq 0$. با ادامه‌ی این روند، برای هر عدد صحیح و مثبت m_{j_i} و هر $t_{j_i}\in\min(\operatorname{supp}(g))$، داریم $b_{j_i}=g(t_{j_i})$ و

$$(b_{j_1}^{m_{j_1}}b_{j_2}^{m_{j_2}}\dots b_{j_n}^{m_{j_n}})(af)\neq 0$$

و در نتیجه بنا به برگشت‌پذیر بودن R، برای هر $q\geq 1$، داریم $(b_1b_2\dots b_n)^qaf\neq 0$. چون R نوتری راست است، عدد صحیح و مثبت m وجود دارد که برای هر $\ell\geq m$،

$$r_R((b_1b_2\dots b_n)^m)=r_R((b_1b_2\dots b_n)^\ell).$$

از اینرو $(b_1b_2\dots b_n)^maf\neq 0$ و $(b_1b_2\dots b_n)^m(af)g=0$ زیرا $fg=0$. از آن‌جایی‌که S m.a.n.u.p.ـ مونوئید است، عنصر $s_p\in\min(\operatorname{supp}((b_1b_2\dots b_n)^maf))$ و $t_p\in\min(\operatorname{supp}(g))$

وجود دارد که s_pt_p در حاصل‌ضرب $\mathrm{supp}((b_1b_2\dots b_n)^m af)\mathrm{supp}(g)$ به‌طور منحصر به‌فرد نمایش داده می‌شود. لذا

$$0 = (b_1b_2\dots b_n)^m afg(s_pt_p) = ((b_1b_2\dots b_n)^m af(s_p))g(t_p).$$

یعنی $(b_1b_2\dots b_n)^m(af(s_p))b_p = 0$. در نتیجه بنا به برگشت‌پذیر بودن R، داریم

$$b_p(b_1b_2\dots b_n)^m(af(s_p)) = 0.$$

چون هر حلقه‌ی برگشت‌پذیر نیم‌جابه‌جایی است، پس $(b_1b_2\dots b_n)^{m+1}af(s_p) = 0$. از آن‌جایی‌که

$$r_R((b_1b_2\dots b_n)^m) = r_R((b_1b_2\dots b_n)^{m+1})$$

پس $(b_1b_2\dots b_n)^m af(s_p) = 0$، که تناقض است، زیرا $s_p \in \min(\mathrm{supp}((b_1b_2\dots b_n)^m af))$. بنابراین فرض اینکه برای هر $1 \le j \le n$، $b_j^{m_j}(af) \neq 0$ نادرست است. پس $1 \le j \le n$ وجود دارد که برای برخی اعداد صحیح و مثبت k، $b_j^k(af) = 0$.

به روش مشابه، با تغییرات جزئی، می‌توان نشان داد که یک عنصر ناصفر $c \in R$ وجود دارد که $gc \neq 0$ و برای هر $s \in \mathrm{supp}(f)$ و $t \in \mathrm{supp}(g)$ خواهیم داشت $f(s)g(t)c = 0$. □

نتایج زیر توسیعی از [۲۹، قضیه ۵] به حالت ناجابه‌جایی است.

نتیجه ۲.۲.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، نوتری راست و عناصر $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i$ و $g = \sum_{j=0}^{\infty} b_jx^j$ سری‌های توانی ناصفر از $R[[x]]$ باشند. اگر $fg = 0$، آن‌گاه عناصر غیر صفر $r, s \in R$ وجود دارند که $gr \neq 0 \neq sf$ و برای هر i, j، $a_ib_jr = 0 = sa_ib_j$.

حلقه‌ی R و مونوئید جمعی $S = \mathbb{Z}$ را با ترتیب معمولی در نظر می‌گیریم. در این صورت، حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم یافته $R[[S]]$ با سری‌های توانی لوران $R[[x, x^{-1}]]$ یکریخت است.

نتیجه ۳.۲.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای نوتری راست، برگشت‌پذیر باشد و $f = \sum_{i=-m}^{\infty} a_ix^i$ و $g = \sum_{j=-n}^{\infty} b_jx^j$ عناصری از حلقه‌ی سری‌های توانی لوران $R[[x, x^{-1}]]$ باشند که $fg = 0$. آن‌گاه عناصر ناصفر $r, s \in R$ وجود دارند که $gr \neq 0 \neq sf$ و برای هر $-n \le i$ و $-m \le j$، داریم $a_ib_jr = 0 = sa_ib_j$.

فرض کنیم R حلقه و $(G, \le)$ یک گروه مرتب باشد. یادآوری می‌کنیم زیر مجموعه‌ی $S \subseteq G$ خوش‌ترتیب[۲۴] است اگر هر زیر مجموعه‌ی ناتهی از S دارای کوچکترین عضو باشد. مجموعه‌ی همه‌ی مجموع‌های (نه لزوماً متناهی) $\alpha = \sum_{g\in G} \alpha_g g$ که در آن α_gها عناصر R هستند را در نظر بگیرید. هر یک از مجموع‌های $\alpha = \sum_{g\in G} \alpha_g g$ را می‌توان به‌عنوان یک تابع

[24] Well ordered

$\alpha : G \to R$ در نظر گرفت که برای هر $g \in G$، به‌صورت $\alpha(g) = \alpha_g$ تعریف می‌شود. برای هر α، محمل α را به صورت $\mathrm{supp}(\alpha) := \{g \in G \,|\, \alpha_g \neq ۰\}$ تعریف می‌کنیم. در این‌صورت مجموعه‌ی $R((G)) = \{\alpha = \sum_{g\in G} \alpha_g g \,|\, \text{خوش‌ترتیب است}\ \mathrm{supp}(\alpha) \subseteq G\}$ که درآن جمع و ضرب عناصر از قوانین زیر پیروی می‌کند:

$$\sum_{g\in G} \alpha_g g + \sum_{g\in G} \beta_g g = \sum_{g\in G} (\alpha_g + \beta_g) g,$$

$$(\sum_{g\in G} \alpha_g g)(\sum_{h\in G} \beta_h h) = \sum_{u} (\sum \alpha_g \beta_h) u.$$

تشکیل حلقه می‌دهد که به آن حلقه‌ی مالچو_نیومن[۲۵] گفته می‌شود. توجه شود در ضرب عناصر این حلقه، مجموع آخر روی همه‌ی (g, h)هایی است که $u = gh$ (برای جزئیات بیشتر به [۵۷، p.242] مراجعه کنید).

فرض کنیم R حلقه و G گروه کاملاً مرتب باشد. در این صورت حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم یافته $R[[G]]$ با حلقه‌ی $R((G))$ یکریخت است.

قضیه ۴.۲.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و نوتری راست، $(G, \leq)$ گروه کاملاً مرتب اکید باشد و f, g عناصری از $R((G))$ باشند که $fg = ۰$. در این‌صورت عناصر ناصفر $a, c \in R$ وجود دارند که $af \neq ۰ \neq gc$ اما برای هر $s \in \mathrm{supp}(f)$ و $t \in \mathrm{supp}(g)$،

$$af(s)g(t) = ۰ = f(s)g(t)c.$$

برهان. چون $\{\mathrm{supp}(f) \subseteq G\ \text{خوش‌ترتیب است}\,|\, R((G)) = \{f : G \longrightarrow R$ پس $s_۰ \in \mathrm{supp}(f)$ و $t_۰ \in \mathrm{supp}(g)$ وجود دارند به‌طوری‌که $s_۰$ و $t_۰$ به ترتیب کوچکترین عنصر از $\mathrm{supp}(f)$ و $\mathrm{supp}(g)$ هستند. بنابراین $s_۰ t_۰$ در حاصل‌ضرب $\mathrm{supp}(f)\mathrm{supp}(g)$ به‌طور منحصر به فرد نشان داده می‌شود، زیرا $\leq$ ترتیب اکید می‌باشد. حال، به روش مشابهی که در اثبات لم ۱.۲.۳ استفاده شده، میتوان به نتیجه مطلوب رسید. □

در ادامه مثالی را ارائه می‌دهیم که نشان می‌دهد در قضیه‌ی ۱.۲.۳، وجود یک عنصر u در حاصل‌ضرب $\mathrm{supp}(f)\mathrm{supp}(g)$ که به‌صورت منحصر به فرد به فرم $u = ab$ نشان داده می‌شود، که در آن $a \in \mathrm{supp}(f)$ و $b \in \mathrm{supp}(g)$، ضروری است.

برای ساختن مثال مورد نظر، ساختار زیر را برای تعریف یک ترتیب اکید روی مونوئیدها معرفی می‌کنیم.

ساختار ۵.۲.۳. [۶۲، ساختار ۲.۳] فرض کنیم S مونوئیدی دلخواه و $\mathcal{X}$ زیر مجموعه‌ای از $S \times S$ باشد. برای عناصر $u_۱, u_۲ \in S$، می‌نویسیم $u_۱ \curvearrowright u_۲$ اگر عنصر $(x, y) \in \mathcal{X}$ و عناصر $v, w \in S$ وجود داشته باشند که

$$u_۱ = vxw \qquad \text{و} \qquad u_۲ = vyw.$$

[۲۵] Mul'civ-Neumann

برای عناصر $s,t\in S$ می‌نویسیم $s\leq t$ اگر $s=t$ یا یک مجموعه‌ی متناهی از عناصر $u_1,u_2,\dots,u_n$ در S وجود داشته باشد که

(الف) $u_0=s$ و $u_n=t$، و

(ب) برای هر $i\in\{0,1,\dots,n-1\}$، $u_i\curvearrowright u_{i+1}$.

توجه کنید که هر ترتیب روی S را با این روش می‌توان بدست آورد. اگر $(S,\leq)$ مونوئید مرتب باشد، آن‌گاه با درنظر گرفتن $\mathcal{X}=\{(a,b)\in S\times S\,|\,a\leq b\}$، ساختار ۵.۲.۳ با ترتیب $\leq$ یکسان است.

لم ۶.۲.۳. [۶۲، لم ۲.۴] در ساختار ۵.۲.۳، فرض کنیم برای هر مجموعه‌ی متناهی از عناصر $u_0,u_1,\dots,u_n\in S$ که در آن برای هر $i\in\{0,1,\dots,n-1\}$، $u_i\curvearrowright u_{i+1}$، داشته باشیم $u_0\neq u_n$. در این‌صورت $(S,\leq)$ مونوئید مرتب اکید است.

مثال ۷.۲.۳. [۶۲، مثال ۲.۶] مثالی از یک مونوئید کاملاً مرتب ارائه می‌دهیم که a.n.u.p. نیست. فرض کنیم S مونوئید تولید شده توسط $\{x_i:i\in\mathbb{N}\}\cup\{X_j:j\in\mathbb{N}\}$ با روابط زیر باشد:

$$x_iX_j=\begin{cases} x_{i-2}X_{i-2} & \text{اگر } i\geq 3 \text{ و } j=i+(-1)^{i+1}\\ x_jX_i & \text{درغیر این‌صورت.}\end{cases}$$

بنابراین برای هر $i\neq j$، $x_iX_j=x_jX_j$ به‌جز در موارد زیر:

$$x_3X_4=x_1X_1,\qquad x_4X_3=x_2X_2,\qquad x_5X_6=x_3X_3,\qquad x_6X_5=x_4X_4,\dots$$

منظور از طول یک عضو از S، تعداد اعضایی از مجموعه‌ی $\{x_i:i\in\mathbb{N}\}\cup\{X_j:j\in\mathbb{N}\}$ می‌باشد که در نمایش آن عضو ظاهر شده است.

ابتدا نشان می‌دهیم با یک ترتیب مناسب $\preccurlyeq$، مونوئید S مونوئید کاملاً مرتب است. فرض کنیم U مجموعه‌ی همه‌ی عناصری از S به فرم x_iX_j باشد. مشاهده می‌شود که با استفاده از روابط تعریف شده، می‌توان هر عضو $u\in U$ را دقیقاً به دو روش به فرم x_iX_j نوشت. فرمی از u که در آن مقدار j کمترین مقدار باشد را فرم نرمال می‌نامیم و به‌صورت $[u]$ نشان می‌دهیم. بنابراین

$$x_iX_j=\begin{cases} x_{i-2}X_{i-2} & \text{اگر } i\geq 3 \text{ و } j=i+(-1)^{i+1}\\ x_{\max\{i,j\}}X_{\min\{i,j\}} & \text{درغیر این‌صورت}\end{cases}$$

حال مفهوم فرم نرمال را به همه‌ی عناصر S توسیع می‌دهیم. فرض کنیم T زیر مونوئیدی از S باشد که توسط $\{x_i:i\in\mathbb{N}\}$ تولید شده است و Z زیر مونوئیدی از S باشد که توسط $\{X_i:i\in\mathbb{N}\}$ تولید شده است. قرار می‌دهیم $V=T\cup Z\cup TZ$ (یعنی؛ V شامل جملات با

طول صفر، x_iها، X_jها و جملاتی است که حاصل‌ضربی از x_iها و X_jها است). در این‌صورت هر عضو $s \in S$ را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$s = v_1 \qquad \text{یا} \qquad s = v_1 u_1 v_2 u_2 \dots v_{n-1} u_{n-1} v_n$$

که در آن برای هر k، $v_k \in V$ و $u_k \in U$. برای عنصر $s \in S$ دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد: الف) اگر در نمایش s حداقل یک u_k ظاهر شود، آن‌گاه نمایش یکتای s که در آن هر u_k به فرم نرمال $[u_k]$ نوشته شده است را فرم نرمال s می‌گوییم. ب) اگر در نمایش s هیچ u_k ظاهر نشود، آن‌گاه نمایش یکتای s به‌عنوان یک عضو بر اساس مجموعه‌ی $\{x_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{X_j : j \in \mathbb{N}\}$، شکل نرمال s در نظر گرفته می‌شود.

حال آماده‌ایم تا یک ترتیب کامل روی S تعریف کنیم. ابتدا با مرتب کردن مولدهای S شروع می‌کنیم:

$$\dots \prec x_6 \prec x_4 \prec x_2 \prec x_1 \prec x_3 \prec x_5 \prec \dots \prec X_6 \prec X_4 \prec X_2 \prec X_1 \prec X_3 \prec X_5 \prec \dots$$

این ترتیب را به همه‌ی عناصر S توسیع می‌دهیم، بدین صورت که برای هر $s,t \in S$، داریم $s \preccurlyeq t$ اگر و فقط اگر $s = t$ یا طول s کمتر از طول t باشد، یا اگر s و t دارای طول‌های یکسان بودند، فرم نرمال S از فرم نرمال t با ترتیب لغت‌نامه ای کوچکتر باشد.

برای درک بهتر این تعریف، سه عنصر زیر از S را مقایسه می‌کنیم:

$$s_1 = X_5 x_6 x_4 X_3 X_5 x_5 X_2 x_5 X_6 X_8 X_3 x_1,$$
$$s_2 = x_4 X_1 x_5 X_8 x_9 x_2 X_1 x_3 x_3,$$
$$s_3 = X_5 x_6 x_2 X_2 X_5 x_2 X_5 x_3 X_3 X_3 x_4 X_7.$$

چون طول s_2 کمتر از طول s_1 و s_3 است، داریم $s_2 \prec s_1$ و $s_2 \prec s_3$. چون s_1 و s_3 دارای طول‌های یکسان هستند، برای مقایسه‌ی این عناصر فرم نرمال آن‌ها را در نظر می‌گیریم:

$$s_1 = X_5 x_6 x_2 X_2 X_5 x_5 X_2 x_3 X_3 X_8 X_3 x_1,$$
$$s_3 = X_5 x_6 x_2 X_2 X_5 x_5 X_2 x_3 X_3 X_3 x_7 X_4.$$

حال اولین مؤلفه‌ی متفاوت از سمت چپ فرم نرمال s_1 و s_3 را در نظر می‌گیریم. چون $X_8 \prec X_3$، پس $s_3 \prec s_1$. بنابراین $s_2 \prec s_1 \prec s_3$.

واضح است که رابطه‌ی $\preccurlyeq$ یک ترتیب کامل روی مجموعه‌ی S است. برای اثبات اینکه ترتیب $\preccurlyeq$ اکیداست، کافی است نشان دهیم برای هر i، j و k،

$$x_i \prec x_j \Longrightarrow x_i X_k \prec x_j X_k \quad (1) \qquad \text{و} \qquad X_i \prec X_j \Longrightarrow x_k X_i \prec x_k X_j \qquad (2)$$

رابطه‌ی (۱) را اثبات می‌کنیم. رابطه‌ی (۲) به‌طور مشابه اثبات می‌شود.

فرض کنیم $x_i \prec x_j$. با توجه به تعریف ترتیب $\preccurlyeq$، حالتی که هم‌زمان i فرد و j زوج باشد اتفاق نمی‌افتد. علاوه بر این، روابط زیر برقرار است:

$(*)$ اگر i و j فرد باشند $\Longleftarrow$ $i < j$؛ اگر i و j زوج باشند $\Longleftarrow$ $i > j$.

برای این‌که نشان دهیم $x_iX_k \prec x_jX_k$، بر اساس فرم نرمال x_iX_k و x_jX_k، چهار حالت زیر را درنظر می‌گیریم.

حالت ۱. فرض کنیم $[x_iX_k] = x_{i-۲}X_{i-۲}$ و $[x_jX_k] = x_{j-۲}X_{j-۲}$. بنابراین $k = i+(-۱)^{i+۱}$ و $k = j+(-۱)^{j+۱}$. از اینرو، اگر i و j از نظر زوج و فردبودن متفاوت باشند، آن‌گاه k هم زوج و هم فرد است که تناقض است. بنابراین یا هر دو زوج یا هر دو فرد هستند و در نتیجه $i = j$ که تناقض است. بنابراین حالت ۱ اتفاق نمی‌افتد.

حالت ۲. فرض کنیم $[x_iX_k] = x_{i-۲}X_{i-۲}$ و $[x_jX_k] = x_{\max\{j,k\}}X_{\min\{j,k\}}$. در این‌صورت برای اثبات این‌که $x_iX_k \prec x_jX_k$، کافی است نشان دهیم

$$x_{i-۲} \prec x_{\max\{j,k\}}.$$

اگر i و j هر دو فرد باشند، آن‌گاه $k = i+۱$ و بنا به رابطه‌ی $(*)$، $i-۲ < j = \max\{j,k\}$. چون j و $i-۲$ فرد هستند، پس $x_{i-۲} \prec x_{\max\{j,k\}}$ و در نتیجه رابطه‌ی (۱) بدست می‌آید. اگر i و j هر دو زوج باشند، آن‌گاه $k = i-۱$. بنابر رابطه‌ی $(*)$، $\max\{j,k\}$ فرد است اما $i-۲$ زوج است پس رابطه‌ی ۱ بدست می‌آید. بالاخره، اگر i زوج و j فرد باشد، آن‌گاه $k = i-۱$ و بنابراین $\max\{j,k\}$ فرد است در حالی‌که $i-۲$ زوج است، و در نتیجه رابطه‌ی (۱) برقرار می‌باشد.

حالت ۳. فرض کنیم $[x_iX_k] = x_{\max\{i,k\}}X_{\min\{i,k\}}$ و $[x_jX_k] = x_{j-۲}X_{j-۲}$. مشابه آن‌چه که در حالت ۲ بیان شد، اگر i و j زوج باشند، آن‌گاه $\max\{i,k\} = i > j-۲$ و اگر j فرد باشد، آن‌گاه $\max\{i,k\}$ زوج است. بنابراین $x_{\max\{i,k\}} \prec x_{j-۲}$ و در نتیجه $x_iX_k \prec x_jX_k$.

حالت ۴. فرض کنیم $[x_iX_k] = x_{\max\{i,k\}}X_{\min\{i,k\}}$ و $[x_jX_k] = x_{\max\{j,k\}}X_{\min\{j,k\}}$ اگر $k \geq i$ و $k \geq j$، آن‌گاه $[x_iX_k] = x_iX_k$ و $[x_jX_k] = x_jX_k$. از آن‌جایی‌که $x_i \prec x_j$، پس $x_iX_k \prec x_jX_k$. اگر $k \leq i$ و $k \leq j$، آن‌گاه $[x_iX_k] = x_kX_i$ و $[x_jX_k] = x_kX_j$. چون $X_i \prec X_j \Leftrightarrow x_i \prec x_j$، پس $[x_iX_k] \prec [x_jX_k]$ و لذا $x_iX_k \prec x_jX_k$. اگر $i > k > j$، آن‌گاه i نمی‌تواند فرد باشد، زیرا $x_i \prec x_j$. بنابراین i زوج است و در نتیجه $x_i \prec x_k$. لذا $x_iX_k = [x_iX_k] \prec [x_jX_k] = x_kX_j$. از اینرو $x_iX_k \prec x_jX_k$. اگر $i > k > j$، آن‌گاه j نمی‌تواند زوج باشد. از این‌که j فرد است داریم $x_k \prec x_j$. در نتیجه $x_kX_i = [x_iX_k] \prec [x_jX_k] = x_jX_k$. لذا $x_iX_k \preceq x_jX_k$.

بنابراین، $(S, \leq)$ مونوئید کاملاً مرتب اکید است (به‌علاوه، S u.p.ـ مونوئید است). حال یک ترتیب اکید $\leq$ روی S تعریف می‌کنیم به‌طوری‌که $(S, \leq)$ a.n.u.p.ـ مونوئید نیست. قرار می‌دهیم

$$\mathcal{X} = \{(x_i, x_{i+۲}) : i \in \mathbb{N}\} \cup \{(X_i, X_{i+۲}) : i \in \mathbb{N}\},$$

و ترتیب $\leq$ را ترتیب تعریف شده در ساختار ۵.۲.۳ در نظر می‌گیریم.

برای این‌که نشان دهیم $(S, \leq)$ مونوئید مرتب اکید است، لم ۶.۲.۳ را به‌کار می‌بریم. فرض کنیم $u_0, u_1, \ldots, u_n \in S$ به‌طوری‌که برای هر $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$، $u_i \curvearrowright u_{i+1}$، که در آن $n \in \mathbb{N}$. برای این‌که نشان دهیم $u_0 \neq u_n$، کافی است حالتی ار در نظر بگیریم که هر u_k به مجموعه‌ی U، متشکل از تمام عناصر S به فرم x_iX_j، تعلق داشته باشد. همان‌طور که پیش از این مشاهده شد، هر عضو $u \in U$ را می‌توان به‌صورت منحصر به فرد در حالت نرمال به فرم x_iX_j نوشت. با توجه به فرم نرمال u ارتفاع u را به‌صورت $h(u) = i + j$ تعریف می‌کنیم که در آن $[u] = x_iX_j$. توجه کنید که اگر $u_0 = u_n$، دنباله‌ی تناوبی نامتناهی به‌صورت زیر خواهیم داشت

$$u_0 \curvearrowright u_1 \curvearrowright \ldots \curvearrowright u_n = u_0 \curvearrowright u_1 \curvearrowright \ldots \curvearrowright u_{n-1} \curvearrowright u_n = u_0 \curvearrowright \ldots$$

از این‌رو، با استفاده از تناوب این دنباله و حذف برخی جملات ابتدایی در صورت لزوم، می‌توان فرض کرد $n \geq 3$ و $h(u_0) = \max\{h(u_0), h(u_1), \ldots, h(u_n)\}$. اما این با ادعای زیر تناقض دارد.

ادعا: برای هر $u_0, u_1, u_2, u_3 \in U$ اگر $u_0 \curvearrowright u_1$، $u_1 \curvearrowright u_2$ و $u_2 \curvearrowright u_3$، آن‌گاه $h(u_0) < h(u_1)$ یا $h(u_0) < h(u_2)$ یا $h(u_0) < h(u_3)$.

برای اثبات ادعا ابتدا برای $u, u' \in U$ که $u \curvearrowright u'$، رابطه‌ی بین $h(u)$ و $h(u')$ را بررسی می‌کنیم. چهار حالت اتفاق می‌افتد:

حالت۱. فرض کنیم $[u] = x_iX_j$ که $i > j+3$ یا $i = j+2$. بنابراین یا $u = x_iX_j$ یا $u = x_jX_i$. پس تنها حالات ممکن برای فرم نرمال u' به‌صورت $x_{i+2}X_j$ و $x_{j+2}X_i$ است. در نتیجه $h(u') = h(u) + 2$.

حالت۲. فرض کنیم $[u] = x_jX_j$. بنابراین سه حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

(الف) $u = x_jX_j$. که در این‌صورت تنها حالت ممکن برای فرم نرمال u' به فرم $x_{j+2}X_j$ است. بنابراین $h(u') = h(u) + 2$ که همان حالت ۱ اتفاق می‌افتد.

(ب) $u = x_{j+2}X_{j+1}$ و j زوج باشد. با در نظر گرفتن $(x_{j+2}, x_{j+4}) \in \mathcal{X}$ و $v = 1, w = X_{j+1}$ در ساختار ۵.۲.۳، داریم $[u'] = u' = x_{j+4}X_{j+1}$. اگر $(X_{j+1}, X_{j+3}) \in \mathcal{X}$ و $v = x_{j+2}, w = 1$ را در ساختار ۵.۲.۳ در نظر بگیریم، $u' = x_{j+2}X_{j+3}$ و در نتیجه فرم نرمال u' به‌صورت $[u'] = x_{j+3}X_{j+2}$ خواهد بود که در هر دو صورت $h(u') = h(u) + 5$.

(ج) $u = x_{j+2}X_{j+3}$ و j فرد باشد. با در نظر گرفتن $(x_{j+2}, x_{j+4}) \in \mathcal{X}$ و $v = 1, w = X_{j+3}$ در ساختار ۵.۲.۳، داریم $[u'] = u' = x_{j+4}X_{j+3}$. اگر $(X_{j+3}, X_{j+5}) \in \mathcal{X}$ و $v = x_{j+2}, w = 1$ را در ساختار ۵.۲.۳ در نظر بگیریم، $u' = x_{j+2}X_{j+5}$ که فرم نرمال آن به‌صورت $[u'] = x_{j+5}X_{j+2}$ می‌باشد و در نتیجه در هر دو صورت $h(u') = h(u) + 7$.

حالت ۳. فرض کنیم $[u] = x_{j+3}X_j$. دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

(الف) $u = x_{j+3}X_j$. با در نظر گرفتن $(x_{j+3}, x_{j+5}) \in \mathcal{X}$ و $v = 1, w = X_j$ در ساختار ۵.۲.۳ داریم $[u'] = u' = x_{j+5}X_j$ و در نتیجه $h(u') = h(u) + 2$ که در حالت ۱ قرار می‌گیرد.

اگر $(X_j, X_{j+2}) \in \mathcal{X}$ و $v = x_{j+3}, w = 1$ را در ساختار ۵.۲.۳ در نظر بگیریم، درایم $u' = x_{j+3}X_{j+2}$. در این حالت اگر j فرد باشد، بنا به روابط بیان شده بین اعضای S، فرم نرمال u' به‌صورت $[u'] = x_{j+1}X_{j+1}$ خواهد بود و در نتیجه $h(u') = h(u) - 1$. اما اگر j زوج باشد، فرم نرمال u' همان $x_{j+3}X_{j+2}$ خواهد بود و در نتیجه $h(u') = h(u) + 2$.

(ب) $u = x_jX_{j+3}$. با در نظر گرفتن $(x_j, x_{j+2}) \in \mathcal{X}$ و $v = 1, w = X_{j+3}$ در ساختار ۵.۲.۳ داریم: $u' = x_{j+2}X_{j+3}$. در این حالت اگر j فرد باشد، بنا به روابط بیان شده بین اعضای S، فرم نرمال u' به‌صورت $[u'] = x_jX_j$ و در نتیجه $h(u') = h(u) - 3$. اما اگر j زوج باشد فرم نرمال u' به‌صورت $[u'] = x_{j+3}X_{j+2}$ و در نتیجه $h(u') = h(u) + 2$.

حالت ۴. فرض کنیم $[u] = x_{j+1}X_j$. بنابراین دو حالت زیر اتفاق می افتد:

(الف) $u = x_{j+1}X_j$. با در نظر گرفتن $(x_{j+1}, x_{j+3}) \in \mathcal{X}$ و $v = 1, w = X_j$ در ساختار ۵.۲.۳ فرم نرمال u' به‌صورت $[u'] = u' = x_{j+3}X_j$ خواهد بود و در نتیجه $h(u') = h(u) + 2$.
اگر $(X_j, X_{j+2}) \in \mathcal{X}$ و $v = x_{j+1}, w = 1$ را در ساختار ۵.۲.۳ در نظر بگیریم، داریم $u' = x_{j+1}X_{j+2}$. اگر j زوج باشد، بنابر روابط بیان شده برای اعضای S، فرم نرمال u' به‌صورت $[u'] = x_{j-1}X_{j-1}$ خواهد بود و در نتیجه $h(u') = h(u) - 3$. اگر j فرد باشد، فرم نرمال u' به‌صورت $x_{j+2}X_{j+1}$ خواهد بود و در نتیجه $h(u') = h(u) + 2$.

(ب) اگر $u = x_jX_{j+1}$، با در نظر گرفتن $(x_j, x_{j+2}) \in \mathcal{X}$ و $v = 1, w = X_{j+1}$ در ساختار ۵.۲.۳، داریم $u' = x_{j+2}X_{j+1}$. در این صورت اگر j زوج باشد، بنا به روابط بیان شده برای اعضای S، فرم نرمال u' به‌صورت $[u'] = x_jX_j$ خواهد بود و در نتیجه $h(u') = h(u) - 1$. اگر j فرد باشد، فرم نرمال u' به‌صورت $[u'] = x_{j+2}X_{j+1}$ خواهد بود و بنابراین $h(u') = h(u) + 2$. حال اگر $(X_{j+1}, X_{j+3}) \in \mathcal{X}$ و $v = x_j, w = 1$ را در ساختار ۵.۲.۳، در نظر بگیریم، u' به‌صورت x_jX_{j+3} خواهد بود که فرم نرمال آن به‌صورت $[u'] = x_{j+3}X_j$ خواهد بود و بنابراین $h(u') = h(u) + 2$ که در حالت ۱ قرار می‌گیرد.

حال آماده‌ایم تا ادعای خود را ثابت کنیم. اگر $h(u_0) \geq h(u_1)$، آن‌گاه $h(u_1) = h(u_0) - 3$ یا $h(u_1) = h(u_0) - 1$ (حالت ۳ و ۴)، که در هر دو مورد فرم نرمال u_1 به فرمی است که در حالت ۲ بیان شد. بنابراین طبق حالت ۲ داریم $h(u_2) \geq h(u_1) + 5$ (در صورتی‌که u_1 در حالت ۲ (ب) یا (ج) قرار بگیرد) و لذا $h(u_2) > h(u_0)$ یا $h(u_2) = h(u_1) + 2$ و u_2 در حالت ۱ قرار می‌گیرد (در صورتی‌که در حالت ۲ (الف) قرار بگیرد). اگر حالت ۱ برای u_2 اتفاق بیفتد، آن‌گاه $h(u_3) = h(u_2) + 2$ و بنابراین $h(u_3) > h(u_0)$. پس ادعا اثبات شد. لذا $u_n \neq u_0$. بنابراین طبق لم ۶.۲.۳، $(S, \leq)$ مونوئید مرتب اکید است.

بالأخره، نشان می‌دهیم $(S, \leq)$ a.n.u.p.–مونوئید نیست. برای این منظور مجموعه‌های $A = \{x_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{X_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ را در نظر می‌گیریم. هر یک از عناصر A در یکی از دنباله‌های افزایشی زیر قرار می‌گیرد:

$$x_1 < x_3 < x_5 < \cdots \qquad \text{یا} \qquad x_2 < x_4 < x_6 < \cdots$$

بنابراین A آرتینی و باریک است و به‌طور مشابه B نیز آرتینی و باریک است. با توجه به روابط تعریف شده روی اعضای S، هیچ عضوی از AB نمایش منحصر به‌فرد ندارد. بنابراین S .a.n.u.p ـ مونوئید نیست.

مثال ۸.۲.۳. فرض کنیم S مونوئید تعریف شده در مثال ۷.۲.۳ باشد. نشان دادیم روی S یک ترتیب کاملاً مرتب اکید وجود دارد. بنابراین S .u.p ـ مونوئید است اما .a.n.u.p ـ مونوئید نیست. فرض کنیم R میدانی از مشخصه‌ی ۲ باشد و نگاشت‌های $f, g : S \longrightarrow R$ به صورت زیر تعریف شده باشند:

$$f(s) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر برای برخی } i \in \mathbb{N}\text{، } s = x_i \\ ۰ & \text{درغیر این‌صورت,} \end{cases} \qquad g(s) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر برای برخی } j \in \mathbb{N}\text{، } s = X_j \\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت.} \end{cases}$$

بنا به مثال ۷.۲.۳، مجموعه‌های $\{x_i | i \in \mathbb{N}\}$ و $\{X_j | j \in \mathbb{N}\}$ آرتینی و باریک هستند. بنابراین $f, g \in R[[S]]$. برای هر $(s, t) \in \operatorname{supp}(f) \times \operatorname{supp}(g)$، دو جفت (x_i, X_j) وجود دارد که $x_i X_j = st$؛ بنابراین $fg = ۰$ اما برای هر $s \in \operatorname{supp}(f)$ و $t \in \operatorname{supp}(g)$ و هر عنصر ناصفر $r \in R$،

$$f(s)g(t)r = ۱.r = r \neq ۰.$$

تعریف ۹.۲.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای دلخواه و $(S, \leq)$ مونوئید مرتب دلخواهی باشد. حلقه‌ی R را مک‌کوی راست نسبت به سری‌های توانی تعمیم یافته وابسته به S[۲۶] (یا S ـ مک‌کوی راست نسبت به سری‌های توانی تعمیم یافته) می‌گوییم، هرگاه برای عناصر ناصفر $f, g \in R[[S]]$ که $fg = ۰$، عنصر ناصفر $r \in R$ وجود داشته باشد که $fr = ۰$. مک‌کوی چپ نسبت به سری‌های توانی تعمیم یافته وابسته به S(یا S ـ مک‌کوی چپ نسبت به سری‌های توانی تعمیم یافته) به‌طور مشابه تعریف می‌شود. اگر حلقه‌ی R هم S ـ مک‌کوی راست و هم S ـ مک‌کوی چپ نسبت به سری‌های توانی تعمیم یافته باشد، آن‌گاه می‌گوییم R حلقه‌ی S ـ مک‌کوی نسبت به سری‌های توانی تعمیم یافته است.

به‌عنوان یک نتیجه از قضیه‌ی ۱.۲.۳، نتیجه‌ی بعدی را خواهیم داشت.

نتیجه ۱۰.۲.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و نوتری راست و $(S, \leq)$ .m.a.n.u.p ـ مونوئید باشد. در این‌صورت R حلقه‌ی S ـ مک‌کوی نسبت به سری‌های توانی تعمیم یافته است.

همانطور که در مثال ۷.۲.۲ نشان داده شد، نتیجه‌ی ۱۰.۲.۳ در غیاب شرط نوتری، در حالت کلی برقرار نمی‌باشد.
فایت در مرجع [۲۷]، حلقه‌ی R را حلقه‌ی زیپ راست[۲۷] نامید هرگاه برای هر $X \subseteq R$ که

[26] Right power-serieswise S-McCoy
[27] Right zip

$r_R(X)=0$، یک زیر مجموعه متناهی $Y\subseteq X$ وجود داشته باشد که $r_R(Y)=0$. به‌طور معادل، برای هر ایدآل چپ L از R که $r_R(L)=0$، ایدآل با تولید متناهی L_1 وجود داشته باشد که $L_1\subseteq L$ و $r_R(L_1)=0$. زلمانوویچ[28] در [۸۰] نشان داد که حلقه‌ای که در شرط زنجیر کاهشی روی پوچسازها صدق می‌کند، حلقه‌ی زیپ راست است. هم‌چنین نشان داد حلقه‌های زیپ جابه‌جایی وجود دارند که در شرط زنجیر نزولی روی پوچسازها صدق نمی‌کنند. فایت ثابت کرد که اگر R حلقه‌ی جابه‌جایی و زیپ و S گروهی آبلی و متناهی باشد، آن‌گاه $R[S]$ زیپ است. هم‌چنین سی دو[29] نشان داد که اگر M یک گروه آبلی متناهی باشد، یک دامنه‌ی R (که یک حلقه‌ی زیپ راست است) وجود دارد که $R[S]$ زیپ راست نیست [۱۷، مثال ۸]. در مرجع [۴۵]، توسیع‌هایی از حلقه‌های زیپ مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت و نشان داده شد که اگر R حلقه‌ای کاهشی و S u.p.ـ مونوئید، یا R حلقه‌ای کاهشی و S u.p.ـ مونوئید باشد که شامل تعداد نامتناهی زیرمونوئید دوری است، آن‌گاه R حلقه‌ی زیپ راست است اگر و تنها اگر $R[S]$ حلقه‌ی زیپ راست باشد [۴۵، گزاره ۱۴ و قضیه ۱۶]. هاشمی در مرجع [۴۱، قضیه ۱.۲۵] نشان داد که اگر R حلقه‌ی برگشت‌پذیر و S مونوئید مرتب اکید باشد، آن‌گاه R حلقه‌ی زیپ راست است اگر و فقط اگر $R[S]$ حلقه‌ی زیپ راست باشد. هم‌چنین آل هوز و کیانی [۲]، این نتایج را به حلقه‌های مونوئیدی اریب توسیع دادند.

حال، به بررسی رابطه‌ی بین خاصیت زیپ یک حلقه‌ی R و حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم‌یافته‌ی آن، $R[S]$، می‌پردازیم. به عنوان کاربردی از حلقه‌های Sـ مک‌کوی نسبت به سری‌های توانی تعمیم‌یافته، قضیه‌ی زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۱۱.۲.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و نوتری راست و $(S,\leq)$ m.a.n.u.p.ـ مونوئید باشد. در این‌صورت R حلقه‌ی زیپ است اگر و فقط اگر $R[[S]]$ حلقه‌ی زیپ باشد.

برهان. فرض کنیم R حلقه‌ی زیپ راست و $A\subseteq R[[S]]$ که $r_{R[[S]]}(A)=0$. قرار می‌دهیم $C_A=\{f(s)\mid f\in A \text{ و } s\in \operatorname{supp}(f)\}$. اگر $a\in r_R(C_A)$، در این‌صورت $a\in r_{R[[S]]}(A)$. بنابراین $r_R(C_A)=0$، زیرا $r_{R[[S]]}(A)=0$. چون R حلقه‌ی زیپ راست است، زیرمجموعه‌ی متناهی $B=\{a_1,\dots,a_n\}\subseteq C_A$ وجود دارد که $r_R(B)=0$. برای هر $1\leq i\leq n$، عنصر $f_i\in A$ و $s_{j_i}\in \operatorname{supp}(f_i)$ وجود دارد که $f_i(s_{j_i})=a_i$. حال قرار می‌دهیم $Y=\{f_1,f_2,\dots,f_n\}$. فرض کنیم $g\in r_{R[[S]]}(Y)$. چون $f_1g=0$، با استفاده از قضیه‌ی ۱.۲.۳، عنصر ناصفر $r_1\in R$ وجود دارد که $gr_1\neq 0$ و برای هر $s\in \operatorname{supp}(f_2)$ و $t\in \operatorname{supp}(gr_1)$، $f_1(s)g(t)r_1=0$. چون $f_2gr_1=0$، مجدداً با استفاده از قضیه‌ی ۱.۲.۳، عنصر ناصفر $r_2\in R$ وجود دارد که $gr_1r_2\neq 0$، اما برای هر $s\in \operatorname{supp}(f_2)$ و $t\in \operatorname{supp}(gr_1r_2)$، داریم $f_2(s)g(t)r_1r_2=0$. باتکرار این روند و استفاده از قضیه‌ی ۱.۲.۳، عنصر ناصفر $r\in R$ بدست می‌آید که $gr\neq 0$ اما برای هر $s\in \operatorname{supp}(f_i)$، $t\in \operatorname{supp}(g)$ و $1\leq i\leq n$، $f_i(s)g(t)r=0$. بنابراین، برای هر $1\leq i\leq n$ و برای

[28] Zelmanowitz

[29] Cedó

هر $t \in \operatorname{supp}(gr)$، داریم $a_i g(t)r = 0$. از آن‌جایی‌که $gr \neq 0$، عنصر $t_0 \in \operatorname{supp}(gr)$ وجود دارد که برای هر $1 \leq i \leq n$، $a_i g(t_0)r = 0$. بنابراین $g(t_0)r \in r_R(B) = 0$. از اینرو $g(t_0)r = 0$، که تناقض است. بنابراین $r_{R[[S]]}(Y) = 0$ و $R[[S]]$ زیپ راست است.

فرض کنیم $R[[S]]$ زیپ راست و $A \subseteq R$ که $r_R(A) = 0$. چون $r_{R[[S]]}(A) \cap R = r_R(A) = 0$، پس $r_{R[[S]]}(A) = 0$. بنابراین زیر مجموعه‌ی متناهی $B \subseteq A$ وجود دارد که $r_{R[[S]]}(B) = 0$. پس $r_R(B) = r_{R[[S]]}(B) \cap R = 0$ و لذا R حلقه‌ی زیپ راست است.

به روش مشابه، میتوان نشان داد که R حلقه‌ی زیپ چپ است اگر و فقط اگر $R[[S]]$ زیپ چپ باشد. $\square$

مفهوم حلقه‌های کراندار اولین بار توسط جیکوبسن[30] [۴۹] معرفی شد. ایدآل راست از حلقه‌ی R کراندار[31] است، اگر شامل ایدآلی غیرصفر از R باشد. فایت در مرجع [۲۸] به معرفی حلقه‌های قویاً_کراندار پرداخته است. بر این اساس، حلقه‌ی R قویاً_کراندار راست[32] (متناظراً، قویاً_کراندار چپ[33]) نامیده می‌شود، اگر هر ایدآل راست (متناظراً، ایدآل چپ) ناصفر از آن کراندار باشد. هانگ و همکارانش [۴۸] مفهوم حلقه‌های قویاً_AB یک‌طرفه، که توسیعی از حلقه‌های نیم‌جابه‌جابی و حلقه‌های کراندرا یک‌طرفه هستند، را معرفی کردند. حلقه‌ی R قویاً_AB راست[34] (متناظراً، قویاً_AB چپ) نامیده می‌شود اگر هر پوچساز راست (متناظراً، پوچساز چپ) ناصفر از R کراندار باشد. حلقه‌ی R قویاً_AB نامیده می‌شود اگر هم قویاً_AB راست و هم قویاً_AB چپ باشد.

قضیه ۱۲.۲.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و $(S, \leq)$ مونوئید مرتب اکید باشد. اگر حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم یافته‌ی $R[[S]]$ قویاً_AB راست (متناظراً، قویاً_AB چپ) باشد، آن‌گاه R نیز قویاً_AB راست (متناظراً، قویاً_AB چپ) است.

برهان. فرض کنیم $R[[S]]$ قویاً_AB راست باشد و $A \subseteq R$ به‌گونه‌ای‌که $r_R(A) \neq 0$. چون $r_R(A) = r_{R[[S]]}(A) \cap R$، داریم $r_{R[[S]]}(A) \neq 0$. از آن‌جایی‌که $R[[S]]$ قویاً_AB راست است، ایدآل ناصفر I در حلقه‌ی R وجود دارد که $I \subseteq r_{R[[S]]}(A)$. بنابراین $C_I A = 0$، که در آن C_I ایدآل ناصفر از R است که توسط همه‌ی ضرایب همه‌ی عناصر I تولید می‌شود. لذا R قویاً_AB راست است. حالتی که $R[[S]]$ قویاً_AB چپ است به طور مشابه اثبات می‌شود. $\square$

فرض کنیم R حلقه‌ای دلخواه، I ایدآلی از R و S مونوئید مرتب باشد. در این‌صورت $I[[S]] = \{f \in R[[S]] | f(s) \in I$، برای هر $s \in \operatorname{supp}(f)\}$ ایدآلی از $R[[S]]$ است.

[30]Jacobson
[31]Bounded
[32]Strongly right bounded
[33]Strongly left bounded
[34]Right strongly AB

قضیه ۱۳.۲.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و نوتری راست و $(S,\leq)$ یک m.a.n.u.p.ـ مونوئید باشد. در این‌صورت R حلقه‌ی قویاًـ AB است اگر و تنها اگر $R[[S]]$ قویاًـ AB باشد.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم R حلقه‌ای قویاًـ AB چپ باشد و $A \subseteq R[[S]]$ به‌طوری‌که $\ell_{R[[S]]}(A) \neq 0$. فرض کنیم $f \in \ell_{R[[S]]}(A)$. بنابراین برای هر $g \in A$، $fg = 0$. بنا به آن‌چه در اثبات قضیه‌ی ۱.۲.۳، بیان شد، عنصر ناصفر $a \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $r_R(af)$ در مجموعه‌ی $\{r_R(af) \,|\, af \neq 0\}$ ماکسیمال است و برای هر $s \in \mathrm{supp}(f)$ و $t \in \mathrm{supp}(g)$، $af(s)g(t) = 0$. چون $af \neq 0$، عنصر $s_0 \in \mathrm{supp}(f)$ وجود دارد که برای هر $t \in \mathrm{supp}(g)$، $af(s_0)g(t) = 0$. از اینرو برای هر $g \in A$، $af(s_0)g = 0$. بنابراین $af(s_0) \in \ell_R(C_A)$. بنابراین ایدآل ناصفر I از R وجود دارد که $I \subseteq \ell_R(C_A)$. بنابراین $I[[S]]$ ایدآلی از R است که مشمول در $\ell_{R[[S]]}(A)$ می‌باشد. به روش مشابه می‌توان نشان داد که $R[[S]]$ قویاًـ AB راست است.

حال فرض کنیم $R[[S]]$ قویاًـ AB باشد، با استفاده از ۱۲.۲.۳، نتیجه حاصل می‌شود. □

گزاره ۱۴.۲.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای و $(S,\leq)$ یک a.n.u.p.ـ مونوئید باشد. در این‌صورت R دامنه است اگر و تنها اگر $R[[S]]$ دامنه باشد.

برهان. اگر در [۶۲، گزاره ۳.۲]، ω را همریختی مونوئیدی بدیهی در نظر بگیریم، نتیجه حاصل است. □

تذکر ۱۵.۲.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و نوتری راست، S یک a.n.u.p.ـ مونوئید باشد. طبق تذکر ۹.۲.۲، $Z(R) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ به‌طوری‌که هر P_i ایدآل کاملاً اولی از R است. بنابراین برای هر i، R/P_i دامنه است و در نتیجه بنا به گزاره‌ی ۱۴.۲.۳، $(R/P_i)[[S]]$ نیز دامنه است. به سادگی می‌توان نشان داد $(R/P_i)[[S]] \cong R[[S]]/P_i[[S]]$. بنابراین $P_i[[S]]$ ایدآل کاملاً اولی از $R[[S]]$ می‌باشد.

بوضوح، اگر R حلقه‌ای برگشت‌پذیر باشد، آن‌گاه $Z_\ell(R) = Z_r(R)$. کیم و لی [۵۳] با استفاده از یک مثال نشان دادند که حلقه‌ی چند جمله‌ای‌ها روی حلقه‌ی برگشت‌پذیر لزوماً برگشت‌پذیر نیست و در نتیجه حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم یافته در حالت کلی برگشت‌پذیر نیست. اما در ادامه نشان می‌دهیم که برای حلقه‌ی برگشت‌پذیر و نوتری راست R و m.a.n.u.p.ـ مونوئید S، $Z_\ell(R[[S]]) = Z_r(R[[S]])$.

لم ۱۶.۲.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و نوتری راست و $(S,\leq)$ یک a.n.u.p.ـ مونوئید باشد. اگر R حلقه‌ی Sـ مک‌کوی نسبت به سری‌های توانی تعمیم یافته باشد،آن‌گاه

(الف) $Z_r(R[[S]]) = Z_\ell(R[[S]]) = Z(R[[S]])$.

(ب) $Z(R[[S]]) = \bigcup_{i=1}^{n} Q_i$ که در آن Q_i ایدآل کاملاً اول از $R[[S]]$ است و برای برخی $a_i \in R$ و $1 \leq i \leq n$، $Q_i = ann_{R[[S]]}(a_i)$.

برهان. (الف) چون R برگشت‌پذیر و نوتری راست است بنا به تذکر ۹.۲.۲، $Z(R) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ که در آن هر P_i کاملاً اول است و برای برخی $a_i \in Z(R)$، $P_i = ann_R(a_i)$. بوضوح $P_i[[S]] = ann_{R[[S]]}(a_i)$. بنابراین

$$\bigcup_{i=1}^{n} P_i[[S]] \subseteq Z_\ell(R[[S]]) \cap Z_r(R[[S]]).$$

اگر $f \in Z_\ell(R[[S]])$، آن‌گاه عنصر ناصفر $g \in R[[S]]$ وجود دارد که $fg = 0$. چون R حلقه‌ی Sــ مک‌کوی نسبت به سری‌های توانی تعمیم یافته است، عنصر ناصفر $r \in R$ وجود دارد که $fr = 0$. بنابراین

$$C_f R \subseteq ann_R(r) \subseteq Z(R)$$

و در نتیجه بنا به قضیه‌ی ۱۱.۲.۲، برای برخی k، داریم $C_f R \subseteq P_k$. بنابراین $f \in P_k[[S]]$ و در نتیجه $Z_\ell(R[[S]]) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i[[S]]$. لذا $Z_\ell(R[[S]]) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i[[S]]$. به روش مشابه می‌توان نشان داد $Z_r(R[[S]]) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i[[S]]$.

(ب) با استفاده از گزاره‌ی (۱) و تذکر ۱۵.۲.۳ داریم $Z(R[[S]]) = \bigcup_{i=1}^{n} P_i[[S]]$، که در آن $P_i[[S]]$ ایدآل کاملاً اولی از $R[[S]]$ است. □

با استفاده از نتیجه‌ی ۱۰.۲.۳، اگر R برگشت‌پذیر و نوتری راست و $(S, \leq)$ یک m.a.n.u.p. باشد، آن‌گاه R حلقه‌ی Sــ مک‌کوی نسبت به سری‌های توانی تعمیم یافته است. بنابراین نتیجه‌ی زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۱۷.۲.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و نوتری راست و $(S, \leq)$ یک m.a.n.u.p.ــ مونوئید باشد. آن‌گاه

(الف) $Z_r(R[[S]]) = Z_\ell(R[[S]]) = Z(R[[S]])$.

(ب) $Z(R[[S]]) = \bigcup_{i=1}^{n} Q_i$ که در آن Q_i ایدآل کاملاً اول از $R[[S]]$ است و برای برخی $a_i \in R$ و $1 \leq i \leq n$، $Q_i = ann_{R[[S]]}(a_i)$.

قضیه ۱۸.۲.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و نوتری راست و $(S, \leq)$ m.a.n.u.p.ــ مونوئید باشد. آن‌گاه برای هر $f \in R[[S]]$ شرایط زیر معادلند:

(الف) عنصر f مقسوم‌علیه صفری در $R[[S]]$ است.

(ب) برای بعضی ایدآل‌های اول $P \subseteq Z(R)$ داریم $f \in P[[S]]$.

(ج) عنصر ناصفر $c \in R$ وجود دارد که $cf = fc = 0$.

برهان. بنا به نتیجه‌ی ۱۷.۲.۳، نتیجه برقرار است. □

گزاره ۱۹.۲.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و نوتری راست و $(S,\leq)$ a.n.u.p.ـ مونوئید باشد. اگر R حلقه‌ی Sـ مک‌کوی نسبت به سری‌های توانی تعمیم یافته باشد، آن‌گاه

(الف) هر ایدآل چپ از $R[[S]]$ که به‌طور کامل مشمول در مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های راست باشد یک پوچساز چپ ناصفر دارد.

(ب) هر ایدآل راست از $R[[S]]$ که به‌طور کامل مشمول در مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های چپ باشد یک پوچساز راست ناصفر دارد.

(ج) $R[[S]]$ دارای خاصیت (A) است.

برهان. (الف) فرض کنیم I ایدآل چپی از $R[[S]]$ باشد به‌طوری‌که $I\subseteq Z_r(R[[S]])$. فرض کنیم C_I مجموعه‌ی همه‌ی ضرایب همه‌ی عناصر I باشد. چون R برگشت‌پذیر و Sـ مک‌کوی نسبت به سری‌های توانی تعمیم‌یافته است و بنا به تذکر ۹.۲.۲ داریم $C_IR\subseteq Z(R)=\cup_{i=1}^{n}P_i$، که در آن هر P_i ایدآل کاملاً اولی است و برای برخی $a_i\in Z(R)$، $P_i=ann_R(a_i)$. بنا به قضیه‌ی ۱۱.۲.۲، برای برخی $1\leq k\leq n$، داریم $C_IR\subseteq P_k=ann_R(a_k)$ که $a_k\in Z(R)$. بنابراین $a_kI=0$.

(ب) مشابه قسمت (الف) اثبات می‌شود.

(ج) با استفاده از دو قسمت قبل، $R[[S]]$ دارای خاصیت (A) چپ و راست می‌باشد. لذا $R[[S]]$ خاصیت (A) دارد. □

نتیجه ۲۰.۲.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و نوتری راست باشد. در این‌صورت $R[[x]]$ دارای خاصیت (A) است.

برهان. از نتیجه‌ی ۱۰.۲.۳ و گزاره ۱۹.۲.۳ نتیجه حاصل می‌شود. □

۳.۳ گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم‌یافته

آکستل و همکارانش در مرجع [۱۲] و لوکاس در مرجع [۵۹] قطر و کمر گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌های جابه‌جایی تحت توسیع‌هایی همچون حلقه‌ی چند جمله‌ای‌ها و سری‌های توانی را مورد مطالعه و بررسی قرار دادند. در [۳۷] هاشمی و همکارانش این نتایج را به حلقه‌ی چند جمله‌ای‌های اریب روی حلقه‌ی برگشت‌پذیر توسیع دادند. در این بخش، ما این نتایج را به حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم یافته‌ی $R[[S]]$ توسیع می‌دهیم که در آن R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و نوتری راست و S m.a.n.u.p.ـ مونوئید می باشد.

گزاره ۱.۳.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای متقارن و نوتری راست و $(S,\leq)$ m.a.n.u.p.ـ مونوئید باشد و $f,g\in R[[S]]$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) $\ell_{R[[S]]}(f) \cap \ell_{R[[S]]}(g) \neq ۰$.

(۲) $\ell_{R[[S]]}(f) \cap r_{R[[S]]}(g) \neq ۰$.

(۳) $r_{R[[S]]}(f) \cap \ell_{R[[S]]}(g) \neq ۰$.

(۴) $r_{R[[S]]}(f) \cap r_{R[[S]]}(g) \neq ۰$.

برهان. (۱) $\Longleftarrow$ (۲)_(۴). فرض کنیم $h \in \ell_{R[[S]]}(f) \cap \ell_{R[[S]]}(g) \neq ۰$. بنابراین $f, g \in r_{R[[S]]}(h) \subseteq Z(R[[S]])$. با استفاده از نتیجه‌ی ۱۷.۲.۳، داریم $Z(R[[S]]) = \cup_{i=۱}^{n} P_i[[S]]$ که برای هر i، $P_i[[S]]$ ایدآل کاملاً اولی از $R[[S]]$ است. بنابراین با استفاده از قضیه‌ی ۱۰.۲.۲، برای برخی $۱ \leq k \leq n$، $r_{R[[S]]}(h) \subseteq P_k[[S]]$. چون $P_k[[S]] = ann_{R[[S]]}(a_k)$، $f, g \in ann(a_k)$ و در نتیجه

$$ga_k = a_k g = ۰ = a_k f = f a_k.$$

به روش مشابه می‌توان (۳) − (۱) $\Longrightarrow$ (۴) را اثبات کرد.

(۲)$\Longleftarrow$(۴). فرض کنیم $h \neq ۰$ عضوی از $\ell_{R[[S]]}(f) \cap r_{R[[S]]}(g)$ باشد. بنا به قضیه‌ی ۱.۲.۳، عنصر ناصفر $c \in R$ وجود دارد که $ch \neq ۰$ و برای هر $s \in \mathrm{supp}(f)$ و $t \in \mathrm{supp}(h)$، $ch(t)f(s) = ۰$. چون R برگشت‌پذیر است، $hc \neq ۰$ و برای هر $s \in \mathrm{supp}(f)$ و $t \in \mathrm{supp}(h)$، $f(s)h(t)c = ۰$. از اینرو

$$hc \in r_{R[[S]]}(f) \cap r_{R[[S]]}(g).$$

به روش مشابه می‌توان (۳) $\Longleftarrow$ (۴) را اثبات کرد. $\square$

لم ۲.۳.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و نوتری راست و $(S, \leq)$ m.a.n.u.p.−مونوئید باشد. اگر $f \in Z(R[[S]])$ و $g \in \mathrm{nil}(R[[S]])$، آن‌گاه $r_{R[[S]]}(f) \cap \ell_{R[[S]]}(g) \neq \{۰\}$ و $f + g \in Z(R[[S]])$.

برهان. چون $f \in Z(R[[S]])$، از اینرو بنا به نتیجه‌ی ۱۰.۲.۳، عنصر ناصفر $c \in R$ وجود دارد که $fc = ۰ = cf$. فرض کنیم m کوچکترین عدد صحیحی باشد که $cg^m = ۰$. بنابراین

$$۰ \neq cg^{m-۱} \in r_{R[[S]]}(f) \cap \ell_{R[[S]]}(g)$$

و در نتیجه بنا به گزاره ۱.۳.۳، $f + g \in Z(R[[S]])$. $\square$

مونوئید مرتب $(S, \leq)$، مونوئید مرتب مثبت[۳۵] نامیده می‌شود اگر برای $e \neq s \in S$ داشته باشیم $e < s$. اگر مونوئید مرتب S هم مونوئید مرتب اکید و هم مونوئید مرتب مثبت باشد، می‌گوییم S مونوئید مرتب اکید مثبت[۳۶] است.

[35] Positively ordered monoid

[36] Positive strictly ordered momoid

قضیه ۳.۳.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای متقارن، نوتری راست و غیرکاهشی و $(S, \leq)$ m.a.n.u.p.ــ مونوئید اکید مثبت باشد. اگر مقسوم‌علیه‌های صفر $f, g \in R[[S]]$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $\ell_{R[[S]]}(f) \cap \ell_{R[[S]]}(g) = \{\circ\}$، آن‌گاه $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[S]])) = ۳$.

برهان. کافی است $f', g' \in Z(R[[S]])$ را چنان بیابیم که f', g' پوچ‌ساز مشترک ناصفر نداشته باشند و $f'g' \neq \circ \neq g'f'$.

فرض کنیم $f, g \in Z(R[[S]])$ به‌طوری‌که $\ell_{R[[S]]}(f) \cap \ell_{R[[S]]}(g) = \{\circ\}$. بنا به گزاره ۱.۳.۳، f و g پوچ‌ساز مشترک غیر صفر ندارند و در نتیجه $d(f, g) \neq ۲$. بنا به گزاره ۱.۳.۳ و لم ۲.۳.۳، هیچ یک از عناصر f و g نمی‌توانند پوچ‌توان باشند. فرض کنیم $fg = \circ$. ادعا می‌کنیم $f^۲$ و $g^۲$ پوچ‌ساز مشترک غیر صفر ندارند. عنصر $\circ \neq h \in \ell_{R[[S]]}(f^۲) \cap r_{R[[S]]}(g^۲)$ را در نظر می‌گیریم. چون f و g پوچ‌ساز مشترک غیر صفر ندارند، داریم $gh \neq \circ$ یا $hf \neq \circ$. اگر $hf \neq \circ$، آن‌گاه

$$\circ \neq hf \in \ell_{R[[S]]}(f) \cap \ell_{R[[S]]}(g)$$

که تناقض است. همچنین اگر $gh \neq \circ$، آن‌گاه

$$gh \in r_{R[[S]]}(f) \cap r_{R[[S]]}(g)$$

که تناقض است. بنابراین بدون کاستن از کلیت مسئله، می‌توان فرض کرد عنصر پوچ‌توان $a \in R$ وجود دارد که $ag^۲ \neq \circ$. بنابراین ag پوچ‌توان است. بنا به لم ۲.۳.۳، $f + ag \in Z(R[[S]])$. حال جفت عناصر g و $f + ag$ را در نظر می‌گیریم. اگر

$$k \in r_{R[[S]]}(f + ag) \cap r_{R[[S]]}(g)$$

آن‌گاه $k \in r_{R[[S]]}(f) \cap r_{R[[S]]}(g)$، در نتیجه $k = \circ$. بنابراین $(f + ag)$ و g و پوچ‌ساز مشترک ناصفر ندارند و $(f + ag)g = ag^۲ \neq \circ$. فرض کنیم $f_۱ = g$ و $g_۱ = f + ag$. بنابراین $f_۱$ و $g_۱$ پوچ‌ساز مشترک ناصفر ندارند و $g_۱ f_۱ \neq \circ$.

بنابراین بدون کاستن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد که $f, g \in Z(R[[S]])$ به‌طوری‌که f, g پوچ‌ساز مشترک ناصفر ندارند و $gf \neq \circ = fg$. عنصر پوچ‌توان $a \in R$ وجود دارد که $ag^۲ \neq \circ$. بنابراین برای برخی $e \neq u \in S$، داریم $aug^۲ \neq \circ$. حال جفت عناصر $(f + ag, a)$ و $(f + aug, g)$ را در نظر می‌گیریم. بوضوح $f + ag$ و g (متناظراً، $f + aug$ و g) پوچ‌ساز مشترک ناصفر ندارد و $(f + ag)g = ag^۲ \neq \circ$ (متناظراً $(f + aug)g = aug^۲ \neq \circ$). ادعا می‌کنیم که $g(f + ag) \neq \circ$ یا $g(f + aug) \neq \circ$. فرض کنیم $g(f + aug) = \circ = g(f + ag)$. بنابراین

$$(ga - gau) \in \ell_{R[[S]]}(g) \cap r_{R[[S]]}(f) = \{\circ\}.$$

از اینرو $ga = gau$. فرض کنیم $s_\circ$ عضو مینیمالی از $\operatorname{supp}(ga)$ باشد. بنابراین $s_j \in \operatorname{supp}(ga)$ وجود دارد که $s_\circ = s_j u$. چون S مونوئید مرتب اکید مثبت است، داریم $s_j = s_j e < s_j u = s_\circ$.

بنابراین $s_j = s_0$ و در نتیجه $u = e$، که تناقض است. بنابراین $g(f + ag) \neq 0$ یا $g(f + aug) \neq 0$. با در نظر گرفتن ($f' = f + ag$ و $g' = g$) یا ($f' = f + aug$ و $g' = g$) نتیجه حاصل است. $\square$

قضیه ۴.۳.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای نوتری راست، برگشت‌پذیر و $(S, \leq)$ m.a.n.u.p.ـ مونوئیدی باشد که $\leq$ بدیهی نیست. بنابراین $Z(R[[S]])$ ایدآلی از $R[[S]]$ است اگر و فقط اگر $Z(R)$ ایدآلی از R باشد.

برهان. فرض کنیم $Z(R)$ ایدآلی از R و $f, g \in Z(R[[S]]) \neq 0$ باشد. بنا به نتیجه‌ی ۱۰.۲.۳، عناصر ناصفر $a, c \in R$ وجود دارد که $af = 0 = gc$. چون R نوتری راست است، پس برای برخی $t_1, \ldots, t_n \in \operatorname{supp}(f)$ و $s_1, \ldots, s_m \in \operatorname{supp}(g)$، داریم

$$C_f R = \langle f(t_1), \ldots, f(t_n) \rangle \qquad \text{و} \qquad C_g R = \langle g(s_1), \ldots, g(s_m) \rangle.$$

چون R برگشت‌پذیر و $Z(R)$ ایدآل است ، پس

$$\langle f(t_1), \ldots, f(t_n), g(s_1), \ldots, g(s_m) \rangle \subseteq Z(R).$$

از آن‌جایی‌که بنا به قضیه‌ی ۱۹.۲.۲، حلقه‌ی R دارای خاصیت (A) است، عنصر ناصفر $r \in R$ وجود دارد که

$$\langle f(t_1), \ldots, f(t_n), g(s_1), \ldots, g(s_m) \rangle r = 0.$$

بنابراین $\langle f, g \rangle r = 0$ و در نتیجه $f + g \in Z(R[[S]])$. حال فرض کنیم $f \in Z(R[[S]])$ و $h \in R[[S]]$. با استفاده از نتیجه‌ی ۱۰.۲.۳، عنصر ناصفر $r \in R$ وجود دارد که $rf = 0$. بنابراین برای هر $s \in \operatorname{supp}(f)$، $rf(s) = 0$ و درنتیجه برای هر $s \in \operatorname{supp}(f)$ و $t \in \operatorname{supp}(h)$،

$$rf(s)h(t) = 0 = h(t)f(s).$$

پس $fhr = 0 = hfr$. لذا $Z(R[[S]])$ ایدآلی از $R[[S]]$ است.
بالعکس، فرض کنیم $Z(R[[S]])$ ایدآلی از $R[[S]]$ باشد. به‌وضوح $Z(R)$ ایدالی از R است. $\square$

مثال ۲۱.۲.۲ نشان می‌دهند که قضیه‌ی ۴.۳.۳، در غیاب شرط نوتری برقرار نمی‌باشد.

تذکر ۵.۳.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای دلخواه، $(S, \leq)$ a.n.u.p.ـ مونوئید و $\omega : S \longrightarrow \operatorname{End}(R)$ یک همریختی مونوئیدی باشد. مارکس و همکارانش در [۶۲][قضیه ۳.۹] نشان دادند که حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم‌یافته اریب $R[[S; \omega]]$ کاهشی است اگر و تنها اگر برای هر $s \in S$، ω_s درونریختی صلب باشد. اگر در این قضیه ω را همریختی مونوئیدی بدیهی در نظر بگیریم،در این‌صورت R کاهشی است اگر و تنها اگر $R[[S]]$ کاهشی باشد.

قضیه ۶.۳.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر باشد که $Z(R) \neq 0$ و $(S, \leq)$ a.n.u.p.ـ مونوئید باشد. در این‌صورت $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[S]])) \geq 1$. بویژه $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[S]])) = 1$ اگر و فقط اگر R غیرکاهشی باشد و $Z(R)^2 = 0$.

برهان. فرض کنیم a مقسوم‌علیه صفری از R باشد که ناصفر است. بنابراین برای برخی عناصر ناصفر $b \in R$، $ab = 0$. بنابراین $c_a e_s$ و $c_b e_{s^2}$ عناصر متمایزی در $R[[S]]$ هستند و $(c_a e_s)(c_b e_{s^2}) = 0$. بنابراین $d(c_a e_s, c_b e_{s^2}) = 1$ و در نتیجه $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[S]])) \geq 1$.

حال فرض کنیم $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[S]])) = 1$. فرض کنیم a و b مقسوم‌علیه‌های صفری از حلقه‌ی R باشند که ناصفر هستند. بنابراین $c_a e_s$ و $c_b e_{s^2}$ مقسوم‌علیه‌های صفر متمایزی در $R[[S]]$ هستند. چون $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[S]])) = 1$، پس $(c_a e_s)(c_b e_{s^2}) = 0$. بنابراین برای هر $a, b \in Z(R)$، $ab = 0$ و در نتیجه $Z(R)^2 = 0$.

بالعکس، فرض کنیم R حلقه‌ای کاهشی باشد به‌طوری‌که $Z(R)^2 = 0$. ادعا می‌کنیم $Z(R[[S]]) \subseteq Z(R)[[S]]$. فرض کنیم $f \in Z(R[[S]]) \setminus Z(R)[[S]]$. عنصر ناصفر $g \in R[[S]]$ وجود دارد که $fg = 0$. نشان می‌دهیم که $g \notin Z(R)[[S]]$. برای این منظور فرض می‌کنیم $g \in Z(R)[[S]]$. قرار می‌دهیم

$$\mathcal{D} := \{s \in \mathrm{supp}(f) \mid f(s) \in Z(R)\}.$$

دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت(۱): فرض کنیم $\mathcal{D}$ تهی باشد. چون S a.n.u.p.ـ مونوئید است، عناصر $s \in \mathrm{supp}(f)$ و $t \in \mathrm{supp}(g)$ وجود دارد به‌طوری‌که st در حاصل‌ضرب $\mathrm{supp}(f)\mathrm{supp}(g)$ به‌طور منحصر به فرد نمایش داده می‌شود. بنابراین $f(s)g(t) = fg(st) = 0$ و در نتیجه $f(s) \in Z(R)$، که تناقض است.

حالت (۲) فرض کنیم $\mathcal{D}$ تهی نباشد. قرار می‌دهیم

$$h(s) := \begin{cases} f(s) & s \in \mathcal{D} \\ 0 & s \notin \mathcal{D} \end{cases} \qquad \text{و} \qquad k(s) := \begin{cases} f(s) & s \notin \mathcal{D} \\ 0 & s \in \mathcal{D} \end{cases}$$

بنابراین $h, k : S \longrightarrow R$ نگاشت‌هایی هستند که $\mathrm{supp}(h) = \mathcal{D}$ و $\mathrm{supp}(k) = S \setminus \mathcal{D} \cap \mathrm{supp}(f)$. بوضوح $h, k \in R[[S]]$ و $f = h + k$. چون $g \in Z(R)[[S]]$ و $Z(R)^2 = 0$، برای هر $u, v \in S$ داریم $h(u)g(v) = 0$. بنابراین $hg = 0$، در نتیجه $kg = 0$.

بنابراین $s \in \mathrm{supp}(k)$ و $t \in \mathrm{supp}(g)$ وجود دارد به‌طوری‌که st در حاصل‌ضرب $\mathrm{supp}(k)\mathrm{supp}(g)$ نمایش منحصر به‌فرد دارد. از اینرو $k(s)g(t) = kg(st) = 0$ و در نتیجه $k(s) \in Z(R)$، که تناقض است. بنابراین $g \notin Z(R)[[S]]$ و در نتیجه $\mathcal{B} := \{s \in \mathrm{supp}(g) \mid g(s) \notin Z(R)\}$ تهی نیست. قرار می‌دهیم

$$h'(s) := \begin{cases} g(s) & s \notin \mathcal{B} \\ 0 & s \in \mathcal{B} \end{cases} \qquad \text{و} \qquad k'(s) := \begin{cases} g(s) & s \in \mathcal{B} \\ 0 & s \notin \mathcal{B} \end{cases}$$

بنابراین $h', k' : S \longrightarrow R$ عناصری از $R[[S]]$ هستند و $g = h' + k'$. چون $Z(R)^{۲} = ۰$ و $h, h' \in Z(R)[[S]]$ و $fg = ۰$، پس $hh' = ۰$ و $hk' + kh' \in Z(R)[[S]]$. بنابراین $kk' \in Z(R)[[S]]$. چون S مونوئید a.n.u.p. است، عنصر $u \in \mathrm{supp}(k)$ و $v \in \mathrm{supp}(k')$ وجود دارد به‌طوری‌که uv در حاصل‌ضرب $\mathrm{supp}(k)\mathrm{supp}(k')$ به‌طور منحصر به فرد نمایش داده می‌شود. از این‌رو

$$kk'(uv) = k(u)k'(v) \in Z(R)$$

و در نتیجه $k(u) \in Z(R)$ یا $k'(v) \in Z(R)$، که تناقض است. بنابراین $Z(R[[S]]) \subseteq Z(R)[[S]]$.

حال فرض می‌کنیم $f, g \neq ۰$ دو عنصر متمایز از $Z(R[[S]])$ باشند. بنابراین برای هر $s \in S$، $f(s), g(s) \in Z(R)$. چون $Z(R)^{۲} = ۰$، پس برای هر $s \in S$،

$$fg(s) = \sum_{(x,y) \in X_s(f,g)} f(x)g(y) = ۰$$

و لذا $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[S]])) = ۱$. $\square$

نتیجه ۷.۳.۳. فرض کنیم $R \ncong \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$ حلقه‌ای برگشت‌پذیر باشد به‌طوری‌که $|Z(R)| \geq ۳$ و $(S, \leq)$ a.n.u.p.ـ مونوئید باشد. در این‌صورت $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[S]])) = ۱$ اگر و فقط اگر $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = ۱$.

برهان. از قضایای ۶.۳.۳ و ۱۸.۲.۲ نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

نتیجه ۸.۳.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر باشد که $Z(R) \neq ۰$. در این‌صورت

(الف) $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x]])) = ۱$ اگر و فقط اگر R غیرکاهشی باشد و $Z(R)^{۲} = ۰$.

(ب) $\mathrm{diam}(\Gamma(R[x])) = ۱$ اگر و فقط اگر R حلقه‌ی غیرکاهشی باشد و $Z(R)^{۲} = ۰$.

نتیجه ۹.۳.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای دلخواه و $Z(R) \neq ۰$ و G گروه کاملاً مرتب باشد. در این‌صورت $\mathrm{diam}(\Gamma(R(G))) = ۱$ اگر و فقط اگر R غیرکاهشی باشد و $Z(R)^{۲} = ۰$.

نتیجه ۱۰.۳.۳. فرض کنیم $R \ncong \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$ حلقه‌ای برگشت‌پذیر و $|Z(R)| \geq ۳$. در این‌صورت شرایط زیر معادلند:

(الف) $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) = ۱$.

(ب) $\mathrm{diam}(\Gamma(R[x])) = ۱$.

(ج) $\mathrm{diam}(\Gamma(R[[x]])) = ۱$.

قضیه ۱۱.۳.۳. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و نوتری راست باشد که $Z(R) \neq ۰$ و $(S, \leq)$ m.a.n.u.p.ـ مونوئید باشد. در این‌صورت

(۱) $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[S]]))=۲$ اگر و فقط اگر (الف) R حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایدآل اول مینیمال است. یا (ب) $Z(R)$ ایدآلی از R است که $Z(R)^۲\neq ۰$.

(۲) $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[S]]))=۳$ اگر و فقط اگر R حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایدآل اول مینیمال نباشد و $Z(R)$ ایدآلی از R نیست.

برهان. فرض کنیم R حلقه‌ای کاهشی با دقیقاً دو ایدآل اول مینیمال P و Q باشد. بنابراین $Z(R)=P\cup Q$ و $P\cap Q=۰$. بنابه قضیه‌ی ۱۸.۲.۲، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma(R))=۲$. با استفاده از تذکر ۵.۳.۳ و ۱۵.۲.۳، $R[[S]]$ حلقه‌ی کاهشی و $P[[S]]$ و $Q[[S]]$ دو ایدآل اول از $R[[S]]$ هستند. چون $PQ=۰$، پس $P[[S]]\cup Q[[S]]\subseteq Z(R[[S]])$. فرض کنیم $f\in Z(R[[S]])$. بنا به نتیجه‌ی ۱۰.۲.۳، عنصر ناصفر $c\in R$ وجود دارد که $fc=۰$. بنابراین $C_fRc=۰$ و در نتیجه

$$C_fR\subseteq ann(c)\subseteq Z(R)=P\cup Q.$$

بنا به قضیه‌ی ۱۱.۲.۲، $C_fR\subseteq P$ یا $C_fR\subseteq Q$. بنابراین $Z(R[[S]])\subseteq P[[S]]\cup Q[[S]]$ و در نتیجه $Z(R[[S]])=P[[S]]\cup Q[[S]]$. فرض کنیم $f,g\in Z(R[[S]])$. اگر $f,g\in P[[S]]$، آن‌گاه برای هر $t\in Q$، داریم $tf=۰=tg$ و چون R کاهشی است، پس $ft=۰=tg$. به‌طور مشابه، اگر $f,g\in Q[[S]]$، آن‌گاه می‌توان نشان داد که برای هر $p\in P$، داریم $fp=۰=pg$. از اینرو $d(f,g)=۲$. اگر $f\in P[[S]]$ و $g\in Q[[S]]$، آن‌گاه $fg=۰$. زیرا $P\cap Q=۰$، بنابراین $d(f,g)=۱$. لذا $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[S]]))=۲$.

فرض کنیم $Z(R)$ ایدآلی از R باشد که $Z(R)^۲\neq ۰$. هم‌چنین فرض کنیم $f,g\in Z(R[[S]])$، $C_fR=\langle a_۰,\dots,a_n\rangle$ و $C_gR=\langle b_۰,\dots,b_m\rangle$. بنا به نتیجه‌ی ۱۰.۲.۳، $Z(R[[S]])\subseteq Z(R)[[S]]$. بنابراین

$$\langle a_۰,\dots,a_n,b_۰,\dots,b_m\rangle\subseteq Z(R).$$

چون R برگشت‌پذیر و نوتری راست است، بنا به قضیه‌ی ۱۹.۲.۲، R دارای خاصیت (A) است. لذا عنصر ناصفر $r\in R$ وجود دارد که $\langle a_۰,\dots,a_n,b_۰,\dots,b_m\rangle r=۰$. بنابراین f و g یک پوچساز مشترک غیر صفر دارند. پس $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[S]]))\leq ۲$. از آن‌جایی‌که $Z(R)^۲\neq ۰$، بنا به قضیه ۶.۳.۳، $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[S]]))\geq ۲$ و در نتیجه $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[S]]))=۲$.

بالعکس، فرض کنیم $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[S]]))=۲$. بنابراین $Z(R[[S]])^۲\neq ۰$ و از آن‌جایی‌که بنا به نتیجه‌ی ۱۰.۲.۳، $Z(R[[S]])\subseteq Z(R)[[S]]$، پس $Z(R)^۲\neq ۰$. فرض کنیم R حلقه‌ی کاهشی با دقیقا دو ایدآل اول مینیمال نباشد. بنابراین R حلقه‌ی کاهشی با بیش از دو ایدآل اول مینیمال است، یا R کاهشی نیست. اگر مقسوم‌علیه‌های صفر متمایز a و b در R وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $ann(\{a,b\})=۰$، آن‌گاه بنا به قضیه‌ی ۱۸.۲.۲(د)، داریم $\operatorname{diam}(\Gamma(R))=۳$ و در نتیجه $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[S]]))=۳$، که تناقض است. بنابراین هر جفت از مقسوم‌علیه‌های صفر R که ناصفر هستند یک پوچساز مشترک ناصفر در R دارند و لذا $Z(R)$ ایدآلی از R است و اثبات تمام است.

(۲) بنا به از گزاره‌ی (۱) و قضیه‌ی ۶.۳.۳، بوضوح نتیجه برقرار است. □

نتیجه ۱۲.۳.۳. فرض کنیم $R \ncong \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$ حلقه‌ای نوتری راست و برگشت‌پذیر باشد که $|Z(R)| \geq ۳$ و $(S, \leq)$ m.a.n.u.p.ـ مونوئید باشد. در این‌صورت

(الف) $\operatorname{diam}(\Gamma(R) = ۲$ اگر و فقط اگر $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[S]])) = ۲$.

(ب) $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = ۳$ اگر و فقط اگر $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[S]])) = ۳$.

برهان. چون R برگشت‌پذیر و نوتری راست است، بنا به قضیه‌ی ۱۹.۲.۲، R دارای خاصیت (A) راست است. حال نتیجه از قضایای ۶.۳.۳، ۱۱.۳.۳ و ۱۸.۲.۲ حاصل می‌شود. □

مجموعه‌ی ناتهی I و خانواده‌ی مجموعه‌های مرتب $(S_i, \leq_i)$ (که $i \in I$) را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $S = \sqcap_{i \in I} S_i$. مطابق [۷۸]، ترتیب حاصل‌ضرب $\leq$ روی S به صورت مؤلفه‌ای تعریف می‌شود:

اگر $\bar{s} = (s_i)_i$ و $\bar{t} = (t_i)_i$، آن‌گاه $\bar{s} \leq \bar{t}$ هرگاه برای هر $i \in I$، $s_i \leq_i t_i$.

حال مونوئید مرتب $S = \mathbb{N}^n$ را با ترتیب حاصل‌ضرب در نظر می‌گیریم. اگر به ازای هر i، ترتیب $\leq_i$ بدیهی باشد، آن‌گاه حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم یافته‌ی $R[[S]]$ با حلقه‌ی چندجمله‌ایهای $R[x_۱, \ldots, x_n]$ یکریخت است. همچنین اگر ترتیب $\leq_i$ به ازای هر i، ترتیب معمولی باشد، آن‌گاه حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم‌یافته‌ی $R[[S]]$ با حلقه‌ی سری‌های توانی $R[[x_۱, \ldots, x_n]]$ یکریخت است.

نتیجه ۱۳.۳.۳. فرض کنیم $R \ncong \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$ حلقه‌ای برگشت‌پذیر و نوتری راست باشد.

۱. گزاره‌های زیر معادلند:

(الف) $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = ۲$.

(ب) $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x])) = ۲$.

(ج) $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x_۱, x_۲, \ldots, x_n])) = ۲$.

(د) $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[x]])) = ۲$.

(ه) $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[x_۱, x_۲, \ldots, x_n]])) = ۲$.

۲. گزاره‌های زیر معادلند:

(الف) $\operatorname{diam}(\Gamma(R)) = ۳$.

(ب) $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x])) = ۳$.

(ج) $\operatorname{diam}(\Gamma(R[x_۱, x_۲, \ldots, x_n])) = ۳$.

(د) $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[x]])) = ۳$.

(ه) $\operatorname{diam}(\Gamma(R[[x_۱, x_۲, \ldots, x_n]])) = ۳$.

برهان. نتیجه از قضایای ۱۱.۳.۳، ۲۶.۲.۲ و [۳۷، قضیه ۲.۷] حاصل می‌شود. □

مثال ۲۸.۲.۲ نشان می‌دهد که قضیه‌ی ۱۱.۳.۳، در غیاب شرط نوتری لزوماً برقرار نمی باشد.

فصل ۴

عناصر تمیز و تمیز ـ پوچ در حلقه‌ی مونوئیدی اریب ـ .t.u.p

فرض کنیم R حلقه‌ای دلخواه، S مونوئیدی دلخواه و نیز $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی باشد. حلقه‌ی مونوئیدی اریب $R * S$ شامل تمام ترکیبات به فرم $\sum_{i=1}^{n} a_i g_i$ با جمع نقطه‌ای و ضرب پیچشی است که توسط عمل ω از مونوئید S به روی حلقه‌ی ضرایب R داده شده است. در این فصل ساختار عناصر خودتوان، یکه، تمیز و تمیز ـ پوچ در حلقه‌ی مونوئیدی اریب را بررسی می‌کنیم. در ابتدا نشان می‌دهیم برای حلقه‌ی نیم‌جابه‌جایی R، عناصر خودتوان حلقه‌ی مونوئیدی اریب $R * S$ دقیقاً عناصر خودتوان R می باشند. هم‌چنین نشان می‌دهیم عنصر ناصفر $\alpha = a_1 g_1 + a_2 g_2 + \cdots + a_n g_n$ از $R * S$ یکه است اگر و تنها اگر $1 \leq i_0 \leq n$ وجود داشته باشد که $g_{i_0} = e$ (عنصر همانی مونوئید S)، a_{i_0} در R یکه باشد و برای هر $i \neq i_0$، a_i پوچ‌توان باشد، که در آن R حلقه‌ای برگشت‌پذیر یا دوو راست است. سپس با استفاده از نتایج بدست آمده، ساختار عناصر تمیز و تمیز ـ پوچ حلقه‌ی مونوئیدی اریب $R * S$ و ارتباط آن با عناصر تمیز و تمیز ـ پوچ حلقه‌ی پایه‌ی R را مشخص می‌کنیم. علاوه براین، زیرگراف‌های القایی $\Gamma(\mathrm{Idem}(R))$ و $\Gamma(\mathrm{cln}(R))$ از $\Gamma(R)$ و هم‌چنین زیرگراف‌های القایی $\Gamma(\mathrm{Idem}(R * S))$ و $\Gamma(\mathrm{cln}(R * S))$ از $\Gamma(R * S)$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

مطالب این فصل برگرفته از مرجع [۳۳] می‌باشد.

۱.۴ مقدمات و تعاریف

عناصر خودتوان، پوچ‌توان و یکه نقش مهمی در نظریه‌ی حلقه‌ها ایفا می‌کنند. در این فصل قصد داریم ساختار این عناصر را در حلقه‌ی مونوئیدی اریب مشخص کنیم. در این بخش همه‌ی حلقه‌ها شرکت‌پذیر در نظر گرفته می‌شوند مگر آن‌که خلاف آن صراحتاً ذکر شود. برای حلقه‌ی شرکت‌پذیر R فرض کنیم $\mathrm{nil}(R)$ دلالت بر مجموعه‌ی تمام عناصر پوچ‌توان[۱] حلقه‌ی R داشته‌باشد. $\mathrm{Idem}(R)$ عناصر خودتوان[۲] حلقه‌ی R می‌باشد. از نماد $\mathrm{nil}_*(R)$ برای نمایش رادیکال اول[۳] حلقه‌ی R استفاده می‌کنیم که رادیکال پوچ پایینی[۴] هم خوانده می‌شود و برابر با اشتراک تمام ایدآل‌های اول حلقه‌ی R می‌باشد. نماد $\mathrm{nil}^*(R)$ نشان‌دهنده‌ی رادیکال پوچ بالایی[۵] حلقه‌ی R است که مجموع تمام ایدآل‌های پوچ‌توان حلقه‌ی R می‌باشد. براساس [۱۵]، حلقه‌ی R را ۲_اولیه[۶] می‌گوییم اگر $\mathrm{nil}_*(R) = \mathrm{nil}(R)$. شین[۷] در مرجع [۷۴، گزاره ۱۱.۱] نشان داد که حلقه‌ی R حلقه‌ی ۲_اولیه است اگر و فقط اگر هر ایدال اول مینیمال P از آن کاملاً اول باشد (به‌عبارت دیگر، R/P دامنه است). حلقه‌ی دلخواه R یک NI_حلقه است اگر $\mathrm{nil}(R) = \mathrm{nil}^*(R)$. به‌راحتی می‌توان نشان داد که

R کاهشی است $\Leftarrow$ R برگشت‌پذیر است $\Leftarrow$ R نیم‌جابه‌جایی است $\Leftarrow$ R حلقه‌ی ۲_اولیه است $\Leftarrow$ R NI_حلقه است.

اما عکس آن در حالت کلی برقرار نیست (برای توضیحات بیشتر به مرجع [۲۰] مراجعه کنید). حلقه‌ی R را آبلی[۸] می‌گوییم اگر هر عنصر خودتوان آن مرکزی باشد. بوضوح حلقه‌های برگشت‌پذیر و نیم‌جابه‌جایی آبلی هستند اما عکس آن لزوماً برقرار نیست.

عناصر یکه، خود توان و پوچ‌توان نقش مهمی در نظریه‌ی حلقه‌های ناجابه‌جایی ایفا می‌کنند. عنصر $a \in R$ را تمیز[۹] می‌گوییم اگر به صورت مجموعی از یک عنصر یکه و یک عنصر خودتوان از R نمایش داده شود. مجموعه‌ی تمام عناصر تمییز حلقه‌ی R را با نماد $\mathrm{cln}(R)$ نمایش می‌دهیم. حلقه‌هایی که هر عضو آن تمیز باشد را تمیز می‌گوییم که توسط افراد زیادی به‌طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. مفهوم حلقه‌ی تمیز اولین بار توسط نیکلسون[۱۰] در مرجع [۶۸] معرفی شد. در ادامه، افراد زیادی این کلاس از حلقه‌ها و توسیع‌هایی از آن‌ها را مورد مطالعه و بررسی قرار دادند. اندرسون و کامیلو[۱۱] [۷] حلقه‌ی

[1] Nilpotent
[2] Idempotent
[3] Prime radical
[4] Lower nil radical
[5] Upper nil radical
[6] 2-Primal
[7] Shin
[8] Abelian
[9] Clean
[10] Nicholson
[11] Camilo

منحصراً تمیز در حلقه‌های جابه‌جایی را معرفی کردند. عنصر $a \in R$ منحصراً تمیز[۱۲] نامیده می‌شود اگر به‌طور منحصر به فرد به‌صورت مجموعی از یک عنصر یکه و یک عنصر خودتوان نمایش داده شود. حلقه‌ی R حلقه‌ی منحصراً تمیز نامیده می‌شود اگر هر عضو آن منحصراً تمیز باشد. بعدها، نیکلسون و ژو[۱۳] [۶۹] مفهوم تمیز را به حلقه‌های ناجابه‌جایی توسیع دادند. عنصر $a \in R$ را قویاً تمیز[۱۴] می‌گوییم هرگاه عنصر خودتوان a و عنصر یکه b در R وجود داشته باشد که $a = e + b$ و $eb = be$.

اخیراً دایسل[۱۵] [۲۵] تعریف حلقه‌ی تمیز را تغییر داد و مفهوم جالب و جدیدی را معرفی کرد و آن را تمیز–پوچ نامگذاری کرد. بر این اساس، عنصر $a \in R$ را (قویاً) تمیز–پوچ[۱۶] می‌گوییم اگر یک عنصر خودتوان a و یک عنصر پوچ‌توان b در R وجود داشته باشد که $a = e + b$ (و $eb = be$). مجموعه‌ی عناصر تمیز–پوچ حلقه‌ی R با نماد $\mathrm{nil} - \mathrm{cln}(R)$ نمایش می‌دهیم. حلقه‌ی R را (قویاً) تمیز–پوچ می‌گوییم هرگاه هر عضو آن (قویاً) تمیز–پوچ باشد. حلقه‌های تمیز–پوچ و قویاً تمیز–پوچ به طور طبیعی به حلقه‌های تمیز و قویاً تمیز مرتبط هستند. خوزان[۱۷] و همکارانش در مرجع [۵۴]، نشان دادند که عنصر $a \in R$ قویاً تمیز–پوچ است اگر و فقط اگر a تمیز و $a - a^2$ پوچ‌توان باشد. حلقه‌ی R قویاً تمیز–پوچ است اگر و فقط اگر $R/J(R)$ حلقه‌ی بولی[۱۸] و $J(R)$ پوچ باشد. اندرسون و بداوی[۱۹] در مرجع [۵]، عناصر خودتوان، یکه و تمیز حلقه‌ی جابه‌جایی R و برخی از توسیع‌های آن مانند حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها و سری‌های توانی را مورد مطالعه و بررسی قرار داده‌اند. هاشمی، حمیدی زاده[۲۰] و آل هوز [۴۰] این نتایج را به حلقه‌های ناجابه‌جایی گسترش دادند. در این فصل قصد داریم مطالعه‌ی ساختار عناصر حلقه‌های ناجابه‌جایی را ادامه داده و به بررسی عناصر خودتوان، یکه، تمیز و تمیز–پوچ در حلقه‌ی مونوئیدی اریب بپردازیم. برای این منظور، ابتدا به معرفی ساختار حلقه‌ی مونوئیدی اریب می‌پردازیم.

فرض کنیم R حلقه، S مونوئید و $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی باشد. در این فصل، عنصر همانی مونوئید ضربی S را با e نمایش می‌دهیم. برای هر $g \in S$، تصویر g تحت ω را با نماد ω_g نشان می‌دهیم (یعنی؛ $\omega(g) = \omega_g$). بنابراین همه‌ی ترکیبات متناهی به فرم $\sum_{i=1}^{n} a_i g_i$ با جمع نقطه‌ای و ضرب $(ag)(bh) = (a\omega_g(b))gh$ تشکیل یک حلقه می‌دهند که حلقه‌ی مونوئیدی اریب[۲۱] نامیده می‌شود و با نماد $R * S$ نمایش داده می‌شود. یادآوری

---

[12] Uniquely clean
[13] Zhou
[14] Strongly clean
[15] Diesl
[16] Nil-clean
[17] Kosan
[18] Boolian
[19] Badawi
[20] Hamidizadeh
[21] Skew monoid ring

می‌کنیم درونریختی σ از حلقه‌ی R را سازگار می‌نامیم هرگاه برای $a, b \in R$، $a\sigma(b) = ۰$ اگر و تنها اگر $ab = ۰$. هم‌چنین، درونریختی σ را صلب می‌گوییم هرگاه برای $a \in R$، $a\sigma(a) = ۰$ اگر و تنها اگر $a = ۰$. در این‌صورت، برای حلقه‌ی R و مونوئید S، حلقه‌ی R را حلقه‌ی S_ سازگار (متناظراً، S_ صلب) می‌گوییم هرگاه برای هر $g \in S$، ω_g یک درونریختی سازگار (متناظراً، صلب) باشد. حلقه‌ی مونوئیدی اریب توسیعی از چندین ساختار جبری مانند حلقه‌ی چند جمله‌ای‌ها، حلقه چندجمله‌ای‌های لوران و حالت اریب آن‌ها و هم‌چنین حلقه‌ی مونوئیدی می‌باشد. بنابراین هر نتیجه‌ای برای حلقه‌ی مونوئیدی اریب برای این حلقه‌ها نیز برقرار است.

در این فصل قصد داریم ساختار عناصر خودتوان، یکه، تمیز و تمیز_ پوچ حلقه‌ی مونوئیدی اریب $R * S$ را مشخص کنیم. در ابتدا نشان می‌دهیم برای حلقه‌ی ۲_ اولیه و S_ سازگار R و .u.p_ مونوئید S، عنصر $\alpha = a_۱g_۱ + \cdots + a_ng_n \neq ۰$ یک عنصر خودتوان در $R * S$ است اگر $۱ \leq i \leq n$ وجود داشته باشد که $g_i = e$ و برای برخی عنصر خودتوان $f \in R$، $a_i - f \in \mathrm{nil}(R)$ و برای هر $j \neq i$، $a_j \in \mathrm{nil}(R)$. هم‌چنین نشان می‌دهیم برای حلقه‌ی نیم‌جابه‌جایی R و .u.p_ مونوئید S، عناصر خودتوان حلقه‌ی $R * S$ دقیقاً عناصر خودتوان حلقه‌ی پایه‌ی R هستند. در ادامه نتایجی در رابطه با حاصل‌ضرب ثابت عناصر حلقه‌ی $R * S$ را ارائه می‌دهیم و سپس با استفاده از این نتایج ساختار عناصر یکه در حلقه‌ی مونوئیدی اریب $R * S$ را مشخص می‌کنیم. نشان می‌دهیم عناصر یکه در حلقه‌ی مونوئیدی اریب $R * S$ به فرم $\alpha = a_۱e + a_۲g_۲ \cdots + a_ng_n$ هستند به‌گونه‌ای‌که $a_۱$ در R یکه و برای هر $i \neq ۱$، a_i پوچ‌توان است، که در آن R حلقه‌ی برگشت‌پذیر یا دوو راست و S .t.u.p_ مونوئید است که فقط یک عنصر یکه دارد. در بخش پایانی با استفاده از نتایج بدست آمده در بخش‌های قبل، به مطالعه‌ی زیرگراف‌های الحاقی $\Gamma(\mathrm{Idem}(R))$ و $\Gamma(\mathrm{cln}(R))$ از $\Gamma(R)$ و زیرگراف‌های القایی $\Gamma(\mathrm{Idem}(R * S))$ و $\Gamma(\mathrm{cln}(R * S))$ از $\Gamma(R * S)$ می‌پردازیم و شرایطی که تحت آن‌ها این زیرگراف‌ها همبند خواهند بود را ارائه می‌دهیم.

۲.۴ عناصر خودتوان در حلقه‌ی مونوئیدی اریب روی حلقه‌های نیم‌جابه‌جایی

در این بخش، ساختار خودتوان‌ها در حلقه‌ی مونوئیدی اریب $R * S$ را مشخص می‌کنیم و رابطه‌ی بین عناصر خودتوان R و عناصر خودتوان $R * S$ روی حلقه‌ی نیم‌جابه‌جایی R و .u.p_ مونوئید S را بیان می‌کنیم.

لم ۱.۲.۴. [۳۱، لم ۸.۲] فرض کنیم R حلقه‌ای دلخواه، S مونوئید و $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی باشد. اگر R حلقه‌ای S_ سازگار باشد، آن‌گاه برای هر عضو $a_۱, a_۲, \ldots, a_n \in R$ و همه‌ی عناصر $m_۱, m_۲, \ldots, m_n \in S$ داریم $a_۱a_۲ \cdots a_n \in \mathrm{nil}(R)$ اگر و فقط

اگر $\omega_{m_1}(a_1)\omega_{m_2}(a_2)\cdots\omega_{m_n}(a_n) \in \mathrm{nil}(R)$.

فرض کنیم R حلقه‌ای دلخواه، S مونوئید و $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی باشد. بنا به [۳۱، تعریف ۱.۳]، حلقه‌ی R حلقه‌ی آرمنداریز اریب نسبت به S[22] (یا به‌طور خلاصه Sـ آرمنداریز اریب) نامیده می‌شود، هرگاه برای عناصر ناصفر $\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i g_i$ و $\beta = \sum_{j=1}^{m} b_j h_j$ از $R * S$، از این‌که $\alpha\beta = 0$، بتوان نتیجه گرفت برای هر $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq m$، $a_i\omega_{g_i}(b_j) = 0$.

گزاره ۲.۲.۴. [۳۱، گزاره ۳.۳] فرض کنیم R حلقه‌ای دلخواه، S مونوئد و $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی باشد. اگر R حلقه‌ی Sـ صلب باشد، آن‌گاه R حلقه‌ی Sـ آرمنداریز اریب است.

قضیه‌ی بعدی که در مرجع [۳۱] بیان شده، ساختار عناصر پوچ‌توان در حلقه‌ی مونوئیدی اریب و ارتباط آن‌ها با عناصر پوچ‌توان حلقه‌ی پایه را مشخص می‌کند.

قضیه ۳.۲.۴. [۳۱، قضیه ۴.۴] فرض کنیم R حلقه‌ای ۲ـ اولیه، S u.p.ـ مونوئید و $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی باشد. اگر R حلقه‌ی Sـ سازگار باشد، آن‌گاه

$$\mathrm{nil}(R * S) = \mathrm{nil}(R) * S.$$

دو قضیه‌ی بعدی تعمیمی از [۲۱، قضایای ۳ و ۵] به حلقه‌ی مونوئیدی اریب می‌باشند که به‌طور مشابه اثبات می‌شوند.

قضیه ۴.۲.۴. فرض کنیم R حلقه‌ای دلخواه و S u.p.ـ مونوئید و $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی باشد. اگر R حلقه‌ای Sـ سازگار باشد، آن‌گاه

الف) R نیم‌اول است اگر و فقط اگر $R * S$ نیم اول باشد.

ب) R اول است اگر و فقط اگر $R * S$ اول باشد.

برهان. فرض کنیم R حلقه‌ای نیم اول باشد و عنصر ناصفر $\alpha = a_1g_1 + \cdots + a_ng_n$ وجود داشته باشد که $\alpha(R * S)\alpha = 0$. می‌توان فرض کرد که برای هر i، $a_i \neq 0$. از آن‌جایی‌که $\alpha(R * S)\alpha = 0$، پس $\alpha R\alpha = 0$. چون S u.p.ـ مونوئید است، $1 \leq i, j \leq n$ وجود دارند که g_ig_j در حاصل‌ضرب دو زیرمجموعه‌ی $A = B = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ از S به‌صورت منحصر به فرد نمایش داده می‌شود. بنابراین $a_ig_iRa_jg_j = 0$. پس برای هر $r \in R$، $a_i\omega_{g_i}(r)\omega_{g_i}(a_j)g_ig_j = 0$ و در نتیجه بنا به Sـ سازگار بودن حلقه‌ی R، $a_iRa_j = 0$. با توجه به این‌که $\alpha R\alpha = 0$، داریم

$$\begin{aligned} 0 &= a_ir\alpha Ra_ir\alpha \\ &= (\cdots + a_ira_{j-1}g_{j-1} + a_ira_{j+1}g_{j+1} + \cdots)R(\cdots + a_ira_{j-1}g_{j-1} + a_ira_{j+1}g_{j+1} + \cdots) \end{aligned}$$

[22] Skew S-Armendariz

که در آن r عضو دلخواهی از R است.

قرار می‌دهیم $b_s = a_i r a_s$ و $\alpha_1 = \sum_{s=1}^{n_1} b_s g_s$. بنابراین $\alpha_1 R \alpha_1 = 0$ که در آن $\alpha_1 = a_i r \alpha$. توجه کنید که $\alpha_1 \neq 0$. زیرا در غیر این‌صورت، اگر $a_i r \alpha = 0$، آن‌گاه $a_i r a_i = 0$ و بنا به نیم اول بودن R، $a_i = 0$، که تناقض است. پس $\alpha_1 \neq 0$ و $\alpha_1 R \alpha_1 = 0$. می‌توان فرض کرد که برای هر s، $b_s \neq 0$. توجه کنید که $n_1 < n$.

مجدداً روند بالا را تکرار می‌کنیم. چون S u.p._ مونوئید است، یک عنصر منحصر به فرد $g_v g_w$ در حاصل‌ضرب دو زیرمجموعه‌ی $A = B = \{g_1, \ldots, g_{n_1}\}$ از S وجود دارد. بنابراین $b_v g_v R b_w g_w = 0$ و در نتیجه برای هر $r \in R$، $b_v \omega_{g_v}(r b_w) g_v g_w = 0$. بنا به S_ سازگار بودن R، برای هر r، $b_v r b_w = 0$. از آن‌جایی‌که $\alpha_1 R \alpha_1 = 0$، پس

$$\begin{aligned} 0 &= b_v x \alpha_1 R b_v x \alpha_1 \\ &= (\cdots + b_v x b_{w-1} g_{w-1} + b_v x b_{w+1} g_{w+1} + \cdots) R (\cdots + b_v x b_{w-1} g_{w-1} + b_v x b_{w+1} g_{w+1} + \cdots) \end{aligned}$$

که در آن x عضو دلخواهی از R است. چون R نیم اول است و $b_v \neq 0$، پس $b_v R b_v \neq 0$ و بنابراین $\alpha_2 = b_v x \alpha_1 \neq 0$. قرار می‌دهیم $\alpha_2 = \sum_{t=1}^{n_2} c_t g_t$ که $c_t \in R$ و $n_2 < n_1 < n$. با تکرار این روند خواهیم داشت $(d g_k) R (d g_k) = 0$ که $0 \neq d \in R$ و $g_k \in \{g_1, \ldots, g_n\}$ و $dRd = 0$. اما چون R نیم اول است، پس $d = 0$ که تناقض است. بنابراین از این‌که $\alpha(R*M)\alpha = 0$ می‌توان نتیجه گرفت $\alpha = 0$. لذا $R*S$ نیم اول است.

حال فرض کنیم که $R*S$ نیم اول و برای $a \in R$، $aRa = 0$. چون R حلقه‌ی S_ سازگار است، $a(R*S)a = 0$ و در نتیجه $a = 0$. لذا R نیم اول است.

ب) فرض کنیم R حلقه‌ی اول باشد. هم‌چنین فرض کنیم $\alpha = a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n$ و $\beta = b_1 h_1 + \cdots + b_m h_m$ عناصر ناصفری از $R*S$ باشند که $\alpha(R*S)\beta = 0$. فرض کنیم برای هر i و j، $a_i, b_j \in R \setminus \{0\}$. چون $\alpha(R*S)\beta = 0$، پس $\alpha R \beta = 0$. از آن‌جایی‌که S u.p._ مونوئید است، پس $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq m$ وجود دارد که $g_i h_j$ در حاصل‌ضرب دو زیرمجموعه‌ی $\{g_1, \ldots, g_n\}$ و $\{h_1, \ldots, h_m\}$ از S به‌طور منحصر به فرد نمایش داده می‌شود. بنابراین $a_i g_i R b_j h_j = 0$ و لذا برای هر $r \in R$، $a_i \omega_{g_i}(r b_j) = 0$ و در نتیجه برای هر $r \in R$، $a_i r b_j = 0$، زیرا R حلقه‌ی S_ سازگار است. پس $a_i R b_j = 0$. از آن‌جایی‌که R حلقه‌ی اول است، $a_i = 0$ یا $b_j = 0$ که تناقض است. پس $\alpha = 0$ یا $\beta = 0$.

حال فرض کنیم $R*S$ اول باشد و برای $a, b \in R$، $aRb = 0$. پس $a(R*S)b = 0$، زیرا R حلقه‌ی S_ سازگار است. از آن‌جایی‌که $R*S$ اول است، $a = 0$ یا $b = 0$ و در نتیجه R اول است. □

قضیه ۵.۲.۴. فرض کنیم R حلقه‌ای دلخواه و S u.p._ مونوئید و $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی باشد. اگر هر ایدآل از R ایدآل S_ سازگار باشد، آن‌گاه

$$\mathrm{nil}_*(R*S) = \mathrm{nil}_*(R)*S.$$

برهان. به‌سادگی می‌توان نشان داد که $\frac{R}{\mathrm{nil}_*(R)} * S \cong \frac{R*S}{\mathrm{nil}_*(R)*S}$. از آن‌جایی‌که $\mathrm{nil}_*(R)$ ایدآل نیم اول از R است، پس $\frac{R}{\mathrm{nil}_*(R)}$ حلقه‌ی نیم اول است و لذا بنا به قضیه‌ی ۴.۲.۴، $\frac{R}{\mathrm{nil}_*(R)} * S$ حلقه‌ی نیم اول خواهد بود. از این‌رو $\mathrm{nil}_*(R) * S$ ایدآل نیم اول از حلقه‌ی $R * S$ است. بنابراین $\mathrm{nil}_*(R * S) \subseteq \mathrm{nil}_*(R) * S$. حال فرض کنیم P ایدآل اول از حلقه‌ی $R * S$ باشد. قرار می‌دهیم $Q = P \cap R$. به‌وضوح Q ایدآلی از R است. نشان می‌دهیم Q ایدآل اولی از R است. برای این منظور فرض کنیم برای $a, b \in R$، $aRb \in Q$. بنا به فرض Q ایدآل Sـ سازگار از R است. بنابراین $a(R * S)b \subseteq Q * S \subseteq P$ و در نتیجه $a \in P$ یا $b \in P$. لذا $a \in Q$ یا $b \in Q$. پس Q ایدآل اول از R است. چون Q ایدآل Sـ سازگاری از R است، پس $Q * S$ ایدآلی از $R * S$ می‌باشد. به‌سادگی می‌توان نشان داد که $\frac{R}{Q} * S \cong \frac{R*S}{Q*S}$. از آن‌جایی‌که $\frac{R}{Q}$ حلقه‌ی اول است، بنا به قضیه‌ی ۴.۲.۴، $\frac{R}{Q} * S$ نیز اول است. بنابراین $Q * S$ ایدآل اولی از $R * S$ است. از اینرو $\mathrm{nil}_*(R) * S \subseteq Q * S \subseteq P$. از آن‌جایی‌که P ایدآل اول دلخواهی از $R * S$ است، پس $\mathrm{nil}_*(R) * S \subseteq \mathrm{nil}_*(R * S)$. از این‌رو $\mathrm{nil}_*(R * S) = \mathrm{nil}_*(R) * S$. □

فرض کنیم R حلقه‌ای دلخواه و S .u.p ـ مونوئید باشد. چئون[23] و کیم در مرجع [۲۱، قضیه ۵] نشان دادند که حلقه‌ی R حلقه‌ی ۲ـ اولیه است اگر و تنها اگر حلقه‌ی مونوئیدی $R[S]$ حلقه‌ی ۲ـ اولیه باشد. لم زیر حالت تعمیمی [۲۱، قضیه ۵] به حلقه‌ی مونوئیدی اریب است.

لم ۶.۲.۴. فرض کنیم R حلقه‌ای دلخواه، S .u.p ـ مونوئید و $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی باشد. اگر R حلقه‌ای Sـ سازگار باشد به‌طوری‌که هر ایدآل آن Sـ سازگار است، آن‌گاه R حلقه‌ای ۲ـ اولیه است اگر و فقط اگر حلقه‌ی مونوئیدی اریب $R * S$ حلقه‌ای ۲ـ اولیه باشد.

برهان. فرض کنیم R حلقه‌ی ۲ـ اولیه باشد. بنا به قضایای ۳.۲.۴ و ۵.۲.۴، داریم

$$\mathrm{nil}(R * S) = \mathrm{nil}(R) * S = \mathrm{nil}_*(R) * S = \mathrm{nil}_*(R * S).$$

بنابراین $R * S$ حلقه‌ی ۲ـ اولیه است. بالعکس، فرض کنیم $R * S$ حلقه‌ی ۲ـ اولیه باشد. بنابراین $\mathrm{nil}(R * S) = \mathrm{nil}_*(R * S)$. بنا به قضیه‌ی ۵.۲.۴، $\mathrm{nil}_*(R * S) = \mathrm{nil}_*(R) * S$. از این‌رو

$$\mathrm{nil}(R) = \mathrm{nil}(R * S) \cap R = \mathrm{nil}_*(R * S) \cap R = (\mathrm{nil}_*(R) * S) \cap R = \mathrm{nil}_*(R)$$

از این‌رو R حلقه‌ی ۲ـ اولیه است. □

فرض کنیم I ایدآل پوچی در R و $a \in R$ به‌گونه‌ای باشد که $\bar{a} \in \bar{R} := R/I$ خودتوان باشد. در این‌صورت بنا به [۵۷، قضیه ۲۸.۲۱]، خودتوان $f \in aR$ وجود دارد که $\bar{f} = \bar{a} \in \bar{R}$. همان‌طور که در فصل دوم بیان شد، درونریختی σ از R صلب است اگر و فقط اگر R کاهشی

[23] Cheon

و σ_سازگار باشد. بنابراین برای مونوئید S و همریختی مونوئیدی $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$، حلقه‌ی R حلقه‌ی S_صلب است اگر و تنها اگر R حلقه‌ی کاهشی و S_سازگار باشد.

گزاره ۷.۲.۴. فرض کنیم R حلقه‌ای ۲_اولیه، S .u.p_مونوئید و $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی باشد. فرض کنیم R حلقه‌ای S_سازگار باشد و عنصر ناصفر $\alpha = a_1g_1 + \ldots + a_ng_n$ خودتوانی از $R * S$ باشد. در این‌صورت $1 \leq i \leq n$ وجود دارد که $g_i = e$ و برای برخی عناصر خودتوان $f \in R$ داریم $\overline{a_i} = \overline{f} \in R/\mathrm{nil}(R)$ و برای هر $j \neq i$، $a_j \in \mathrm{nil}(R)$.

برهان. چون R NI_حلقه است، حلقه‌ی $\overline{R} = R/\mathrm{nil}(R)$ حلقه‌ی کاهشی است. همریختی $\overline{\omega} : S \longrightarrow \mathrm{End}(\overline{R})$ با ضابطه‌ی $\overline{\omega}(m) = \overline{\omega}_m$ را تعریف می‌کنیم که برای $a \in R$، $\overline{\omega}_m(\overline{a}) = \overline{\omega_m(a)}$. فرض کنیم برای $a, b \in R$، $\bar{a}\overline{\omega}_m(\bar{b}) = \circ$. بنابراین $a\omega_m(b) \in \mathrm{nil}(R)$ لذا بنا به لم ۳.۲.۴، داریم $ab \in \mathrm{nil}(R)$. پس $\overline{R} = R/\mathrm{nil}(R)$ حلقه‌ی S_سازگار است. به عبارت دیگر، به ازای هر $m \in S$، $\overline{\omega}_m$ سازگار است. بنابراین $\overline{R}$ حلقه‌ی S_صلب است و لذا بنا به گزاره‌ی ۲.۲.۴، حلقه‌ی S_آرمندازیز اریب است. توجه کنید که عنصر $\overline{\alpha} = \overline{a}_1g_1 + \cdots + \overline{a}_ng_n \in \overline{R} * S$ ناصفر است. در غیر این‌صورت، اگر $\overline{\alpha} = \circ$، آن‌گاه برای هر $1 \leq i \leq n$، $a_i \in \mathrm{nil}(R)$ و در نتیجه $\alpha \in \mathrm{nil}(R) * S$. بنابر قضیه‌ی ۳.۲.۴، $\alpha \in \mathrm{nil}(R * S)$، که تناقض است. از آن‌جایی‌که $\overline{\alpha}^2 = \overline{\alpha}$، پس

$$(\overline{\alpha} - \bar{1}e)\overline{\alpha} = (\overline{a}_1g_1 + \cdots + \overline{a}_ng_n - \bar{1}e)\overline{\alpha} = \bar{\circ}.$$

اگر برای هر $1 \leq i \leq n$ داشته باشیم $g_i \neq e$، آن‌گاه بنا به S_آرمندازیز اریب بودن حلقه‌ی $\overline{R}$، داریم $\overline{a}_i = \overline{a}_i\bar{1} = \bar{\circ}$ و لذا $\overline{\alpha} = \circ$، که تناقض است. پس می‌توان فرض کرد $1 \leq i \leq n$ وجود دارد که $g_i = e$. بدون کاستن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $i = 1$. بنابراین

$$\bar{\circ} = \overline{\alpha}(\overline{\alpha} - \bar{1}e) = \overline{\alpha}((\overline{a_1 - 1})e + \overline{a}_2g_2 + \cdots + \overline{a}_ng_n).$$

ازآن‌جایی‌که $\bar{R}$ حلقه‌ی S_آرمندازیز اریب است، پس $\overline{a}_1^2 = \overline{a}_1$ و برای هر $i \neq 1$، $a_i \in \mathrm{nil}(R)$. در نتیجه بنا به [۵۷، قضیه ۲۸.۲۱]، عنصر خودتوان $f \in R$ وجود دارد که $\overline{a}_1 = \overline{f} \in \overline{R}$ و اثبات تمام است. □

حال می‌توانیم رابطه‌ی بین خودتوان‌های R و $R * S$، در حالتی‌که S .u.p_مونوئید و R حلقه‌ی نیم جابه‌جایی و S_سازگار است، را بیان کنیم.

قضیه ۸.۲.۴. فرض کنیم R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی و S .u.p _مونوئید باشد. همچنین فرض کنیم $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی و R حلقه‌ی S_سازگار باشد. در این‌صورت $\mathrm{Idem}(R * S) = \mathrm{Idem}(R)$.

برهان. فرض کنیم

$$\alpha = a_1g_1 + \cdots + a_ng_n \in \mathrm{Idem}(R * S).$$

بنا به گزاره‌ی ۷.۲.۴، $1 \leq i \leq n$ وجود دارد که $g_i = e$ و برای برخی عناصر خودتوان $f \in R$، $\overline{a_i} = \overline{f} \in R/\mathrm{nil}(R)$ و برای هر $j \neq i$، $a_j \in \mathrm{nil}(R)$. از اینرو $a_i = f + t$ که t عنصر پوچ‌توان از R است. فرض کنیم $i = 1$ و $\alpha_1 = te + a_2g_2 + \cdots + a_ng_n$. پس $\alpha = f + \alpha_1$. از آن‌جایی‌که R حلقه‌ی ۲ـاولیه است، بنا به قضیه‌ی ۳.۲.۴، $\alpha_1 \in \mathrm{nil}(R) * S = \mathrm{nil}(R * S)$. اگر $\alpha_1 \neq 0$، آن‌گاه عدد صحیح و نامنفی k وجود دارد که ${\alpha_1}^k = 0 \neq \alpha_1^{k-1}$. چون f خودتوان است، $f(1-f) = 0$. بنابر لم ۱.۲.۴، برای هر i، $\omega_{g_i}(f)(1-f) = 0$. در نتیجه $\omega_{g_i}(f) = \omega_{g_i}(f)f$. از طرفی $(1-\omega_{g_i}(f))\omega_{g_i}(f) = 0$ و در نتیجه $(1-\omega_{g_i}(f))f = 0$. بنابراین $f = \omega_{g_i}(f)f$ در نتیجه $f = \omega_{g_i}(f)$. لذا $\alpha_1 f = f\alpha_1$. چون $\alpha^2 = \alpha$، پس

$$0 = (f + \alpha_1)(1 - f - \alpha_1) = \alpha_1 - 2f\alpha_1 - \alpha_1^2.$$

بنابراین ${\alpha_1}^2 = (1-2f)\alpha_1$. حال عبارت ${\alpha_1}^2 = (1-2f)\alpha_1$ را از سمت راست در α_1^{k-2} ضرب می‌کنیم. پس $0 = {\alpha_1}^k = (1-2f)\alpha_1^{k-1}$. از آن‌جایی‌که $1-2f$ وارونپذیر است، $\alpha_1^{k-1} = 0$، که تناقض است. لذا $\alpha_1 = 0$ و در نتیجه $\alpha = f$. □

اگر R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی، S u.p.ـمونوئید و $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی بدیهی باشد (به این معنی که برای هر $m \in S$، ω_m درونریختی همانی روی R باشد)، آن‌گاه حلقه‌ی مونوئیدی اریب $R * S$ با حلقه‌ی مونوئیدی $R[S]$ یکریخت است. به عنوان نتیجه‌ای از قضیه‌ی ۸.۲.۴، داریم $\mathrm{Idem}(R[S]) = \mathrm{Idem}(R)$.

نتیجه ۹.۲.۴. فرض کنیم R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی و S u.p.ـمونوئید باشد. هم‌چنین فرض کنیم $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی و R حلقه‌ای Sـسازگار باشد. در این‌صورت $R * S$ آبلی است.

فرض کنیم S مونوئید تولید شده توسط $\{x\}$ و σ درونریختی از حلقه‌ی R باشد. همچنین فرض کنیم $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی باشد به‌طوری‌که برای هر x^i، $\omega_{x^i} = \sigma^i$. در این‌صورت حلقه‌ی مونوئیدی اریب $R * S$ با حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب $R[x;\sigma]$ یکریخت است.

نتیجه ۱۰.۲.۴. فرض کنیم R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی و σ درونریختی از حلقه‌ی R باشد. اگر R حلقه‌ی σـسازگار باشد، آن‌گاه $\mathrm{Idem}(R[x;\sigma]) = \mathrm{Idem}(R)$ و $R[x;\sigma]$ آبلی است.

توجه کنید که اگر N و M دو u.p.ـمونوئید باشند، آن‌گاه بنا به [۵۸، لم ۱۳.۱]، $M \times N$ نیز u.p.ـمونوئید است. از طرفی، برای حلقه‌ی R و مجهولات x, y داریم $R[x,y] \cong R[x][y]$. بنابراین نتیجه بعدی برقرار خواهد بود.

نتیجه ۱۱.۲.۴. فرض کنیم R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی باشد. در این‌صورت $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ آبلی است و $\mathrm{Idem}(R[x_1, x_2, \ldots, x_n]) = \mathrm{Idem}(R)$.

۳.۴ مونوئیدهای دارای دو عضو حاصل‌ضرب یکتا

مونوئید S t.u.p.ــ مونوئید[۲۴] نامیده می‌شود، اگر برای هر دو زیر مجموعه ناتهی و متناهی $A, B \subseteq S$ که $\mid A \mid + \mid B \mid > ۲$، در حاصل‌ضرب AB دو عضو وجود داشته باشد که به‌صورت منحصر به فرد نمایش داده می‌شوند. در فصل قبل، انواع خاصی از مونوئیدهای حاصل‌ضرب یکتا (u.p.ــ مونوئیدها) معرفی شدند. حال به‌طور مشابه می‌توان a.n.t.u.p.ــ مونوئید و m.a.n.t.u.p.ــ مونوئید را تعریف کرد.

تعریف ۱.۳.۴. مونوئید S را a.n.t.u.p.ــ مونوئید [۲۵] می‌گوییم، اگر برای هر دو زیر مجموعه‌ی آرتینی و باریک A و B از S که $\mid A \mid + \mid B \mid > ۲$، حداقل دو عنصر در حاصل‌ضرب AB وجود داشته باشد که به‌طور منحصر به فرد نمایش داده می‌شوند. هم‌چنین، مونوئید مرتب S m.a.n.t.u.p.ــ مونوئید [۲۶] نامیده می‌شود اگر برای هر زیرمجموعه‌ی آرتینی و باریک A و B از S که $\mid A \mid + \mid B \mid > ۲$، دو عضو $a_1 b_1$ و $a_2 b_2$ در حاصل‌ضرب AB وجود داشته باشد که به‌طور منحصر به فرد نمایش داده می‌شوند و $a_1, a_2 \in \min(A)$ و $b_1, b_2 \in \min(B)$.

اگر $(S, \leq)$ مونوئید مرتب باشد، روابط زیر برقرار است.

S مونوئید جابه‌جایی، فارغ از تاب و حذف پذیر است.

$\downarrow$

$(S, \leq)$ مونوئید کاملاً مرتب موضعی است.

$\swarrow \qquad \searrow$

$(S, \leq)$ m.a.n.t.u.p.ــ مونوئید است. $\longrightarrow$ $(S, \leq)$ m.a.n.u.p.ــ مونوئید است.

$\downarrow \qquad \downarrow$

$(S, \leq)$ a.n.t.u.p.ــ مونوئید است. $\longrightarrow$ $(S, \leq)$ a.n.u.p.ــ مونوئید است.

$\downarrow \qquad \downarrow$

S t.u.p.ــ مونوئید است. $\longrightarrow$ S u.p.ــ مونوئید است.

همان‌طور که در فصل قبل بیان شد، مارکس، مازورک و ژیمبوسکی [۶۲] ثابت کردند که روابط سمت چپ در نمودار بالا برگشت‌پذیر نیستند. نشان می‌دهیم مونوئیدهای کاملاً مرتب موضعی m.a.n.t.u.p.ــ مونوئید هستند. با توجه به فرض، ترتیب $\leq$ می‌تواند به یک ترتیب کامل $\preccurlyeq$ تظریف پیدا کند به‌طوری‌که $(S, \preccurlyeq)$ مونوئید مرتب اکید است. اگر A و B زیرمجموعه‌های آرتینی و باریک از $(S, \leq)$ باشند، در این صورت مجموعه‌های $\min(A)$ و $\min(B)$ متناهی هستند. بنابراین $a_1 \in \min(A)$ (متناظراً، $b_1 \in \min(B)$) وجود دارد که

[24] Two unique product monoid

[25] Artinian narrow two unique product monoid

[26] Minimal Artinian narrow two unique product monoid

کوچکترین عضو نسبت به ترتیب $\preccurlyeq$ می‌باشد و $a_{۲} \in \min(A)$ (متناظراً، $b_{۲} \in \min(B)$) وجود دارد که بزرگترین عضو نسبت به ترتیب $\preccurlyeq$ است. بوضوح، $a_{۱}b_{۱}$ و $a_{۲}b_{۲}$ دو عضوی از AB هستند که نمایش منحصر به فرد دارند. بقیه‌ی گزاره‌ها به‌وضوح برقرار هستند.

به‌وضوح، هر t.u.p.ـ مونوئید u.p.ـ مونوئید است. مثال زیر نشان می‌دهد عکس آن در حالت کلی برقرار نمی‌باشد.

مثال ۲.۳.۴. [۷۱، مثال ۱۳ فصل ۱۰] فرض کنیم S مونوئید تولید شده توسط $x_{۱}$، $x_{۲}$، $x_{۳}$، $X_{۱}$، $X_{۲}$، $X_{۳}$ باشد به‌گونه‌ای که روابط زیر برقرار باشد:

$$x_{۱}X_{۱} = x_{۲}X_{۳}, \qquad x_{۱}X_{۲} = x_{۳}X_{۱}, \qquad x_{۱}X_{۳} = x_{۲}X_{۲}, \qquad x_{۳}X_{۲} = x_{۲}X_{۱}.$$

همان‌طور که در [۷۱] نشان داده شد، S u.p.ـ مونوئید است. زیرمجموعه‌های

$$A = \{x_{۱}, x_{۲}, x_{۳}\} \qquad \text{و} \qquad B = \{X_{۱}, X_{۲}, X_{۳}\}$$

از S را در نظر می‌گیریم. به‌وضوح، $x_{۳}X_{۳}$ تنها عضوی از حاصل‌ضرب AB است که به‌طور منحصر به فرد نمایش داده می‌شود. از این‌رو S u.p.ـ مونوئید است اما t.u.p.ـ مونوئید نیست.

همانطور که در فصل قبل بیان شد، اگر $\leq$ ترتیب بدیهی روی S باشد، آن‌گاه S u.p.ـ مونوئید m.a.n.u.p.ـ مونوئید است، در حالی‌که t.u.p.ـ مونوئید نیست.

مثال ۳.۳.۴. فرض کنیم S مونوئید تعریف شده در مثال ۷.۲.۳ باشد. در فصل قبل نشان دادیم که S ترتیب کاملاً مرتب اکید می‌پذیرد و در نتیجه t.u.p.ـ مونوئید است اما a.n.u.p.ـ مونوئید نیست.

۴.۴ عناصر یکه در حلقه‌ی مونوئیدی اریب روی حلقه‌های برگشت‌پذیر یا دوو راست

می‌دانیم که یک چندجمله‌ای روی حلقه‌ی جابه‌جایی R یکه است اگر و فقط اگر جمله‌ی ثابت آن در R یکه و بقیه‌ی ضرایب آن پوچ‌توان باشند. چن[۲۷] در مرجع [۱۹، مثال ۸.۲] ثابت کرد که این نتیجه برای حلقه‌های ناجابه‌جایی در حالت کلی برقرار نمی‌باشد. هم‌چنین، او در مرجع [۱۸]، قضیه‌ی حاصل‌ضرب ثابت، که توسط کرمزاده[۲۸] برای حلقه‌ی چندجمله‌ای جابه‌جایی در مرجع [۵۱] ثابت شده است، را به حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب $R[x;\sigma]$ توسیع دادکه در آن σ درونریختی سازگار از حلقه‌ی برگشت‌پذیر R است. در این بخش ما قصد داریم این نتایج را به حلقه‌ی مونوئیدی اریب $R * S$ توسیع دهیم.

[27] Chen

[28] Karamzadeh

برای عنصر $\alpha = a_1g_1 + \cdots + a_ng_n \in R*S$ که برای هر i، $a_i \neq 0$، می‌گوییم طول α برابر n است و آن‌را با $\ell(\alpha)$ نشان می‌دهیم.

لم ۱.۴.۴. فرض کنیم R حلقه‌ای دلخواه، S .t.u.p_ مونوئید باشد که فقط یک عنصر یکه دارد و $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ یک همریختی مونوئیدی باشد. فرض کنیم R حلقه‌ای S_ صلب باشد و $\alpha = a_1g_1 + \cdots + a_ng_n$ و $\beta = b_1h_1 + \cdots + b_mh_m$ عناصر ناصفری از $R*S$ باشند به‌گونه‌ای که $\alpha\beta = c \in R$. در این‌صورت $1 \leq i_\circ \leq n$ و $1 \leq j_\circ \leq m$ وجود دارد که $g_{i_\circ} = e = h_{j_\circ}$، $a_{i_\circ}b_{j_\circ} = c$ و برای هر $i + j \neq i_\circ + j_\circ$، $a_ib_j = 0$.

برهان. فرض کنیم $\alpha = a_1g_1 + \cdots + a_ng_n$ و $\beta = b_1h_1 + \cdots + b_mh_m$ عناصر ناصفری از $R*S$ باشند که $\ell(\alpha) = n$ و $\ell(\beta) = m$. اگر $c = 0$، چون بنا به گزاره‌ی ۲.۲.۴، R حلقه‌ی S_ آرمنداریز اریب است، پس برای هر i و j، $a_ib_j = 0$ و اثبات تمام است. حال فرض کنیم که $c \neq 0$. با استقرا روی $m+n$ عمل می‌کنیم. برای $m = 1$ و $n = 1$ به‌وضوح نتیجه برقرار است. حال، فرض می‌کنیم که $m, n > 1$ و نتیجه برای مقادیر کمتر از $m+n$ برقرار باشد. چون S .t.u.p_ مونوئید است، عناصر $1 \leq i_\circ, i_1 \leq n$ و $1 \leq j_\circ, j_1 \leq m$ وجود دارد که $g_{i_\circ}h_{j_\circ}$ و $g_{i_1}h_{j_1}$ در حاصل‌ضرب زیرمجموعه‌های $\{g_1, \ldots, g_n\}$ و $\{h_1, \ldots, h_m\}$ از S، نمایش منحصر به فرد دارند. چون S فقط یک عنصر یکه دارد و $\alpha\beta = c \neq 0$، پس $g_{i_\circ} = e = h_{j_\circ}$، $a_{i_\circ}\omega_{g_{i_\circ}}(b_{j_\circ}) = c$ و $a_{i_1}\omega_{g_{i_1}}(b_{j_1}) = 0$. از آن‌جایی‌که R حلقه‌ی S_ صلب است، پس R کاهشی و S_ سازگار است. بنابراین $a_{i_1}b_{j_1} = 0$. چون $\omega_{g_{i_\circ}} = id_R$، پس $a_{i_\circ}b_{j_\circ} = c$. بدون کاستن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $i_\circ = j_\circ = 1$ و $i_1 = n$ و $j_1 = m$. چون R کاهشی است، $a_nb_m = 0 = b_ma_n$ و در نتیجه

$$b_mc = b_m\alpha\beta = (b_ma_1e + b_ma_2g_2 + \cdots + b_ma_{n-1}g_{n-1})\beta.$$

قرار می‌دهیم $\alpha_1 = b_m\alpha$. پس $\alpha_1\beta = b_mc$. اگر $\alpha_1 = b_m\alpha = 0$، آن‌گاه برای هر $1 \leq i \leq n$، $b_ma_i = 0$ و لذا $a_i\omega_{g_i}(b_m) = 0$، زیرا R کاهشی است. بنابراین

$$c = \alpha\beta = \alpha(\beta - b_mh_m) = \alpha\beta_1.$$

چون $\ell(\alpha) + \ell(\beta_1) < m+n$ و $\alpha\beta_1 = c$، بنا به فرض استقرا داریم $a_1b_1 = c$ و برای هر $i+j > 2$، $a_ib_j = 0$. حال فرض می‌کنیم $\alpha_1 \neq 0$ و $b_mc = \alpha_1\beta$. اگر $b_mc = 0$، آن‌گاه برای هر $1 \leq i \leq n-1$ و $1 \leq j \leq m$، داریم $b_ma_ib_j = 0$، چون R حلقه‌ی S_ آرمنداریز اریب است. بنابراین برای هر $1 \leq i \leq n-1$، $b_ma_ib_m = 0$ و در نتیجه بنا به کاهشی بودن حلقه‌ی R، $b_ma_i = 0 = a_ib_m$. از آن‌جایی‌که R کاهشی و S_ سازگار است، پس برای هر $1 \leq i \leq n$، $a_i\omega_{g_i}(b_m) = 0$. بنابراین $c = \alpha\beta = \alpha(\beta - b_mh_m)$ و مانند آن‌چه در بالا ذکر شد، نتیجه برقرار است. از اینرو، فرض کنیم $b_mc \neq 0$. چون $\alpha_1\beta = b_mc \neq 0$ و $\ell(\beta) + \ell(\alpha_1) < m+n$، بنا به فرض استقرا

$$b_ma_1b_1 = b_mc \neq 0 \quad \text{و} \quad b_ma_1b_m = b_ma_2b_m = \ldots = b_ma_{n-1}b_m = 0$$

و در نتیجه برای هر $1 \le i \le n-1$، $b_m a_i = 0$. از آن‌جایی‌که R کاهشی است، برای هر $1 \le i \le n$، $b_m a_i = 0 = a_i b_m$ و در نتیجه $a_i \omega_{g_i}(b_m) = 0$. بنابراین $c = \alpha\beta = \alpha(\beta - b_m h_m)$ و لذا بنا به استقرا همانند آن‌چه که در حالات قبل بیان شد، نتیجه برقرار است. □

مثال بعدی نشان می‌دهد که فرض ”S فقط یک عنصر یکه دارد“ در قضیه‌ی ۱.۴.۴ ضروری است. توجه کنید که اگر S مونوئید تولید شده توسط $\{x, x^{-1}\}$ و ω همریختی مونوئیدی بدیهی باشد، آن‌گاه $R * S$ با حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران $R[x, x^{-1}]$ یکریخت است.

مثال ۲.۴.۴. فرض کنیم R حلقه‌ای دلخواه باشد به‌طوری‌که $|\mathrm{Idem}(R)| \ge 3$. فرض کنیم a خودتوان غیر بدیهی از R و $\alpha = ax^{-1} + (1-a)x$ و $\beta = (1-a)x^{-1} + ax$ عناصری از $R[x, x^{-1}]$ باشند. بنابراین $\alpha\beta = 1$ اما هیچ حاصل‌ضربی از ضرایب α و β همانی نیست.

لم ۳.۴.۴. [۱۸، لم ۲.۳] فرض کنیم R حلقه‌ای ۲ــاولیه باشد که برای درونریختی σ از R، حلقه‌ای σــسازگار است. اگر P ایدآل اول مینیمالی از R باشد، آن‌گاه هر دو $\sigma(P)$ و $\sigma^{-1}(P)$ مشمول در P هستند.

چن در مرجع [۱۸، قضیه ۲.۴] برای حلقه‌ی دلخواه برگشت‌پذیر و σــسازگار R ثابت کرد که اگر c عنصر ناصفری از R و $f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ و $g = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ عناصر ناصفری از $R[x;\sigma]$ باشند که $gf = c$، آن‌گاه $b_0 a_0 = c$ و عناصر r و a در R وجود دارند که $rf(x) = ac$ و برای برخی $0 \le p \le m$، $r = b_p a$ و a یکی از ضرایب $f(x)$ یا حاصل‌ضربی از حداکثر m عضو از ضرایب $f(x)$ است. در قضیه‌ی بعدی،این نتایج را به حلقه‌ی مونوئیدی اریب $R * S$ توسیع می‌دهیم که در آن R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و S t.u.p.ــمونوئید است.

قضیه ۴.۴.۴. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، S t.u.p.ــمونوئید باشد که فقط یک عنصر یکه دارد و $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی و $\alpha = a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n$ عنصر ناصفری از $R * S$ باشد. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای Sــسازگار باشد. اگر عنصر ناصفر $\beta = b_1 h_1 + \cdots + b_m h_m \in R * S$ و $c \in R$ وجود داشته باشد که $\alpha\beta = c$، آن‌گاه $1 \le i_0 \le n$ و $1 \le j_0 \le m$ وجود دارد که $g_{i_0} = e = h_{j_0}$، $a_{i_0} b_{j_0} = c$ و عناصر a و $r \neq 0$ در R وجود دارد که $r\beta = ac$. به‌علاوه، اگر a_{i_0} در R یکه باشد، برای هر $j \neq j_0$، b_j پوچ‌توان است.

برهان. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول. $c = 0$. می‌توان فرض کرد β کمترین طول را داردکه $\alpha\beta = 0$.

فرض کنیم $n = 1$. بنابراین $\alpha = a_1 g_1$ و

$$0 = (a_1 g_1)(b_1 h_1 + \cdots + b_m h_m) = a_1 \omega_{g_1}(b_1) g_1 h_1 + \cdots + a_1 \omega_{g_1}(b_m) g_1 h_m.$$

چون بنا به [۱۶، لم ۱.۱]، u.p.ــمونوئیدها حذف‌پذیر هستند، برای هر $i \neq j$، $g_1 h_i \neq g_1 h_j$. بنابراین برای هر $1 \le j \le m$، $a_1 \omega_{g_1}(b_j) = 0$ و لذا بنا به Sــسازگار بودن R برای هر j، $a_1 b_j = 0$.

فرض کنیم $n \geq 2$. چون S .u.p_ مونوئید است، $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq m$ وجود دارد که g_ih_j در حاصل‌ضرب دو زیر مجموعه‌ی $\{g_1, \ldots, g_n\}$ و $\{h_1, \ldots, h_m\}$ از S به‌طور منحصر به فرد نمایش داده می‌شود. بدون کاستن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $i = j = 1$. پس $a_1\omega_{g_1}(b_1) = 0$ و لذا $a_1b_1 = 0$. چون R برگشت‌پذیر است، $b_1a_1 = 0$. بنابراین

$$0 = \alpha\beta a_1 = (a_1g_1 + \cdots + a_ng_n)(b_2\omega_{h_2}(a_1)h_1 + \cdots + b_m\omega_{h_m}(a_1)h_m).$$

چون β دارای کمترین طول است که در رابطه‌ی $\alpha\beta = 0$ صدق می‌کند، پس

$$b_2\omega_{h_2}(a_1) = \cdots = b_m\omega_{h_m}(a_1) = 0$$

و لذا $a_1b_i = 0 = b_ia_1$، زیرا R برگشت‌پذیر و S_ سازگار است. از این‌رو

$$0 = \alpha\beta = (a_2g_2 + \cdots + a_ng_n)(b_1h_1 + \cdots + b_mh_m).$$

قرار می‌دهیم $\alpha_1 = a_2g_2 + \cdots + a_ng_n$. چون $\ell(\alpha_1)$ کمتر از n است که $\alpha_1\beta = 0$، بنابراین $0 \neq r \in R$ وجود دارد که $r\beta = 0$ و نتیجه حاصل است.

حالت دوم. فرض کنیم $c \neq 0$. ابتدا نشان می‌دهیم که برای هر $\beta \in R * S$ که $\ell(\beta) = 1$ نتیجه برقرار است. فرض کنیم $0 \neq \beta = b_1h_1$. پس $c = \alpha\beta = \alpha b_1h_1$. چون S .t.u.p_ مونوئید است که فقط یک یکه دارد، پس $1 \leq i \leq n$ وجود دارد که $g_i = e = h_1$ و $a_i\omega_{g_i}(b_1) = c$. از آن‌جایی‌که $\omega_{g_i} = id_R$، پس $a_ib_1 = c$. لذا $a_i\beta = c$. در این حالت $r = a_i$ و $a = 1$ خواهد بود.

حال فرض کنیم $\ell(\beta) = m \geq 1$. با استقرا روی $\ell(\alpha) = n$ عمل می‌کنیم. اگر $\ell(\alpha) = 1$، آن‌گاه

$$c = \alpha\beta = a_1g_1(b_1h + b_2h_2 + \cdots + b_mh_m).$$

بنابراین $1 \leq j_1, j_2 \leq m$ وجود دارد که $g_1 = e = h_{j_1}$، $a_1\omega_{g_1}(b_{j_1}) = c$ و $a_1\omega_{g_1}(b_{j_2}) = 0$. بدون کاستن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $j_1 = 1$ و $j_2 = m$. چون $\omega_{g_1} = id_R$ و R حلقه‌ی S_ سازگار است، پس $a_1b_1 = c$ و $a_1b_m = 0$. لذا

$$c = \alpha\beta = a_1e(b_1e + b_2h_2 + \cdots + b_{m-1}h_{m-1}).$$

در این حالت $r = a_1$ و $a = 1$ خواهد بود. بنابراین فرض کنیم که برای هر عنصر با طول کمتر از $\ell(\alpha) = n$ و $n \geq 2$ برقرار باشد. چون $\alpha\beta = c$ و M .t.u.p_ مونوئید است، اعداد صحیح و ناصفر $1 \leq i_0, i_1 \leq n$ و $1 \leq j_0, j_1 \leq m$ وجود دارد که $g_{i_0}h_{j_0}$ و $g_{i_1}h_{j_1}$ در حاصل‌ضرب زیرمجموعه‌های $\{g_1, \ldots, g_n\}$ و $\{h_1, \ldots, h_m\}$ از S به‌صورت منحصر به فرد نمایش داده می‌شوند. چون S فقط یک عنصر یکه دارد، پس $g_{i_0} = e = h_{i_0}$، $a_{i_0}\omega_{g_{i_0}}(b_{j_0}) = c$ و $a_{i_1}\omega_{g_{i_1}}(b_{j_1}) = 0$. از آن‌جایی‌که $\omega_{g_{i_0}} = id_R$ و R حلقه‌ی S_ سازگار است، پس $a_{i_0}b_{j_0} = c$ و $a_{i_1}b_{j_1} = 0$. بدون کاستن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $i_0 = j_0 = 1$، $i_1 = n$ و $j_1 = m$. بنابراین $g_1 = e = h_1$، $a_1b_1 = c$ و $a_nb_m = 0$. اگر برای هر $k \neq 1$، داشته‌باشیم $\alpha b_k = 0$، آن‌گاه

بنا به Sـ سازگار بودن R، برای هر $k \neq ۱$، $a_۱b_k = ۰$. لذا $a_۱\beta = c$. در این حالت $r = a_۱$ و $a = ۱$. حال فرض می‌کنیم که عدد صحیح و مثبت $k \neq ۱$ وجود دارد که $\alpha b_k \neq ۰$. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) فرض کنیم $k = m$. بنابر برگشت‌پذیر و Sـ سازگار بودن حلقه‌ی R داریم $\alpha b_m \neq ۰$ و $b_m\alpha \neq ۰$. چون $b_m\alpha$ عضو ناصفری از حلقه‌ی $R * S$ است که طول آن از طول α کمتر است و $b_m\alpha\beta = b_mc$، پس بنا به فرض استقرا، عناصر a و $r \neq ۰$ در R وجود دارد که $r\beta = ab_mc$ و اثبات تمام است.

ب) فرض کنیم $k \neq m$ و $\alpha b_k \neq ۰$. بنابراین $۱ \leq t \leq m$ وجود دارد که برای هر $۱ \leq r \leq t$، $\alpha b_r \neq ۰$ و برای هر $t < s \leq m$، $\alpha b_s = ۰$ (درصورت لزوم می‌توان ترتیب جملات در β را تغییر داد). لذا

$$c = \alpha\beta = \alpha(b_۱h_۱ + \cdots + b_th_t).$$

چون S .u.p.ـ مونوئید است، $۱ \leq i \leq n$ و $۱ \leq r \leq t$ وجود دارد که a_ib_r در حاصل‌ضرب زیرمجموعه‌های $\{h_۱ = e, \ldots, h_t\}$ و $\{g_۱ = e, g_۲, \ldots, g_n\}$ از S به‌طور منحصر به فرد نمایش داده می‌شود. چون S .t.u.p.ـ مونوئید است که فقط یک عنصر یکه دارد و $g_۱ = e = h_۱$، پس $a_i\omega_{g_i}(b_r) = ۰$ و لذا بنا به S ـ سازگار بودن R، $a_ib_r = ۰$. بدون کاستن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $i = n$ و $r = t$. بنابراین $a_nb_t = b_ta_n = ۰$. لذا طول $b_t\alpha$ کمتر از طول α است و $b_t\alpha\beta = b_tc$. پس عناصر a' و $r \neq ۰$ در R وجود دارند که $r\beta = a'b_tc$. در این حالت، $a = a'b_t$.

حال فرض کنیم که $a_۱$ در R یکه باشد. ثابت می‌کنیم برای هر $j > ۱$، b_j پوچ‌توان است. فرض کنیم P ایدآل اول مینیمال از R باشد و $\overline{R} = R/P$. تعریف می‌کنیم $\overline{\omega} : S \longrightarrow \mathrm{End}(R/P)$ که $\overline{\omega}(m) = \overline{\omega}_m$، به این معنی که $\overline{\omega}_m(\overline{a}) = \overline{\omega_m(a)}$. بنابراین $\overline{R} * S$ حلقه‌ی مونوئیدی اریب با همریختی مونوئیدی $\overline{\omega}$ است. چون حلقه‌های برگشت‌پذیر ۲ـ اولیه هستند، P ایدآل کاملاً اول از R است و در نتیجه $\overline{R} = R/P$ دامنه است. نشان می‌دهیم $\overline{R}$ حلقه‌ی Sـ سازگار است. اگر برای هر $a, b \in R$، $\overline{a}\overline{b} = ۰$، آن‌گاه $ab \in P$ و در نتیجه $a \in P$ یا $b \in P$. پس بنا به لم ۳.۴.۴، $a\omega_m(b) \in P$ و لذا $\overline{a}\overline{\omega}_m(\overline{b}) = ۰$. برعکس؛ فرض کنیم $\overline{a}\overline{\omega}_m(\overline{b}) = ۰$. پس $a\omega_m(b) \in P$ و در نتیجه $a \in P$ یا $\omega_m(b) \in P$. لذا بنا به لم ۳.۴.۴، $ab \in P$ و بنابراین $\overline{a}\overline{b} = ۰$.

اگر $\overline{\beta} = ۰$، آن‌گاه برای هر $۱ \leq j \leq m$، $b_j \in P$ و اثبات تمام است. فرض کنیم $\overline{\beta} \neq ۰$. چون $a_۱$ یکه است، پس $\overline{\alpha} \neq ۰$. از آن‌جایی‌که $\overline{\alpha}\overline{\beta} = \overline{c}$ در $\overline{R} * S$، پس عناصر $\overline{a}$ و $\overline{r} \neq ۰$ در $\overline{R}$ وجود دارد که $\overline{r}\overline{\beta} = \overline{a}\overline{c}$. بنابراین برای هر $j \neq ۱$، $\overline{r}\overline{b_j} = ۰$ و در نتیجه $rb_j \in P$. چون $r \notin P$، پس برای هر $j \neq ۱$، $b_j \in P$. ازآن‌جایی‌که P ایدال اول مینیمال دلخواهی است، بنابراین برای هر $j \neq ۱$، $b_j \in \mathrm{nil}_*(R) = \mathrm{nil}(R)$. زیرا R حلقه‌ی ۲ـ اولیه است. □

قضیه ۵.۴.۴. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، S .t.u.p.ـ مونوئید باشد که فقط

یک عنصر یکه دارد و $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی و $\alpha = a_1g_1 + \cdots + a_ng_n$ عنصر ناصفری از $R * S$ باشد. فرض کنیم R حلقه‌ای S_سازگار باشد. اگر عنصر $c \in R$ و $\beta = b_1h_1 + \cdots + b_mh_m$ در $R * S$ وجود داشته باشد که $\alpha\beta = c$، آن‌گاه $1 \leq i_0 \leq n$ و $1 \leq j_0 \leq m$ وجود دارد که $g_{i_0} = e = h_{j_0}$، $a_{i_0}b_{j_0} = c$ و عناصر a و $r \neq 0$ در R وجود دارد که $\alpha r = ca$. اگر b_{j_0} عنصر یکه‌ای در R باشد، آن‌گاه برای هر $i \neq i_0$، a_i پوچتوان است.

برهان. مشابه قضیه‌ی ۴.۴.۴، ثابت می‌شود. □

نتیجه ۶.۴.۴. [۱۸، قضیه ۲.۴] فرض کنیم σ درونریختی سازگاری از حلقه‌ی دلخواه و برگشت‌پذیر R و $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ عنصر ناصفری در $R[x;\sigma]$ باشد. اگر عنصر $c \in R$ و $g = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ در $R[x;\sigma]$ وجود داشته باشد که $gf = c$، آن‌گاه $b_0a_0 = c$ و عناصر a و $r \neq 0$ در R وجود دارند که $rf(x) = ac$. علاوه بر این، اگر b_0 در R یکه باشد، آن‌گاه a_1، a_2، ...، a_n همگی پوچتوان هستند.

هاشمی در مرجع [۴۲]، خاصیت مک‌کوی را برای حلقه‌ی مونوئیدی $R[S]$ معرفی کرد. فرض کنیم R حلقه‌ای دلخواه، S مونوئید و α و β عناصرناصفری از حلقه‌ی مونوئیدی $R[S]$ باشند. حلقه‌ی R حلقه‌ی S_مک‌کوی راست نامیده می‌شود، اگر $\alpha\beta = 0$، آن‌گاه عنصر ناصفر $r \in R$ وجود داشته باشد که $\alpha r = 0$. حلقه‌ی S_مک‌کوی چپ به‌طور مشابه تعریف می‌شود. در مرجع [۲]، شرایط مک‌کوی به حلقه‌ی مونوئیدی اریب توسیع داده شد. بر اساس [۲، تعریف ۲.۱۲]، R حلقه‌ی S_مک‌کوی اریب راست نامیده می‌شود، اگر برای هر جفت از عناصر $\alpha = a_1g_1 + \cdots + a_ng_n$ و $\beta = b_1h_1 + \cdots + b_mh_m$ در $R * S$ که $\alpha\beta = 0$، عنصر ناصفر $r \in R$ وجود دارد که $\alpha r = 0$. حلقه‌ی S_مک‌کوی اریب چپ به‌طور مشابه تعریف می‌شود. اگر R هم S_مک‌کوی اریب راست هم S_مک‌کوی اریب چپ باشد، می‌گوییم R حلقه‌ی S_مک‌کوی است.

نتیجه ۷.۴.۴. [۷۰، قضیه ۲] فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، S t.u.p._مونوئید باشد که فقط یک عنصر یکه دارد و $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی باشد. اگر R حلقه‌ای S_سازگار باشد، آن‌گاه R حلقه‌ی S_مک‌کوی اریب است.

نتیجه ۸.۴.۴. فرض کنیم R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی، S t.u.p._مونوئید باشد که فقط یک عنصر یکه دارد و $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی باشد. فرض کنیم R حلقه‌ای S_ سازگار باشد و $c \in R$ و $\alpha = a_1g_1 + \cdots + a_ng_n$ و $\beta = b_1h_1 + \cdots + b_mh_m$ عناصر ناصفری از $R * S$ باشند که $\alpha\beta = c$. در این‌صورت برای برخی $\{i_1, \cdots, i_t, i_{t+1}\} \subseteq \{1, \cdots, n\}$، $a_{i_1} \cdots a_{i_t}\beta = 0$ یا $a_{i_1}a_{i_2} \cdots a_{i_t}c = a_{i_1} \cdots a_{i_t}a_{i_{t+1}}\beta$.

برهان. فرض کنیم $c = 0$. چون S u.p._مونوئید است، $1 \leq i_1 \leq n$ و $1 \leq j_1 \leq m$ وجود دارد که $g_{i_1}h_{j_1}$ در حاصل‌ضرب دو زیر مجموعه‌ی $\{g_1, \ldots, g_n\}$ و $\{h_1, \ldots, h_m\}$ از S به‌صورت

منحصر به فرد نمایش داده می‌شود. بدون کاستن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $j_1 = 1$. بنابراین $a_{i_1}\omega_{g_{i_1}}(b_1) = 0$. چون R نیم جابه‌جایی است، داریم

$$\begin{aligned} 0 = a_{i_1}\alpha\beta &= (a_{i_1}a_1g_1 + \cdots + a_{i_1}a_mg_n)(b_1h_1 + \cdots + b_mh_m) \\ &= (a_{i_1}a_1g_1 + \cdots + a_{i_1}a_ng_n)(b_2h_2 + \cdots + b_mh_m). \end{aligned}$$

مجدداً چون S .u.p ــ مونوئید است، $1 \leq i_2 \leq n$ و $2 \leq j_2 \leq m$ وجود دارد که $g_{i_2}h_{j_2}$ در حاصل‌ضرب دو زیر مجموعه‌ی $\{g_1, \ldots, g_n\}$ و $\{h_2, \ldots, h_m\}$ از S به‌طور منحصر به فرد نشان داده می‌شود. بدون کاستن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $j_2 = 2$. بنابراین $a_{i_1}a_{i_2}\omega_{g_{i_2}}(b_2) = 0$. چون R نیم‌جابه‌جایی است، داریم

$$\begin{aligned} 0 = a_{i_1}a_{i_2}\alpha\beta &= (a_{i_1}a_{i_2}a_1g_1 + \cdots + a_{i_1}a_{i_2}a_mg_n)(b_1h_1 + \cdots + b_mh_m) \\ &= (a_{i_1}a_{i_2}a_1g_1 + \cdots + a_{i_1}a_{i_2}a_ng_n)(b_3h_3 + \cdots + b_mh_m). \end{aligned}$$

با ادامه‌ی این روند برای برخی $\{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$، داریم $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_m}\beta = 0$.

حال فرض کنیم برای هر $\{i_1, i_2, \ldots, i_t\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$، $a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_t}c \neq 0$. چون S .t.u.pــ مونوئید است، عددهای صحیح و مثبت $1 \leq i_0, i_1 \leq n$ و $1 \leq j_0, j_1 \leq m$ وجود دارد که $g_{i_0}h_{j_0}$ و $g_{i_1}h_{j_1}$ دو عنصر از حاصل‌ضرب زیرمجموعه‌های $\{g_1, \ldots, g_n\}$ و $\{h_1, \ldots, h_m\}$ از S هستند که به‌طور منحصر به فرد نمایش داده می‌شوند. چون $\alpha\beta = c$ و S فقط یک عنصر یکه دارد پس $g_{i_0} = e = h_{j_0}$، $a_{i_0}\omega_{g_{i_0}}(b_{j_0}) = c$ و $a_{i_1}\omega_{g_{i_1}}(b_{j_1}) = 0$. چون $\omega_{g_{i_0}} = id_R$ و R حلقه‌ی Sــ سازگار است، پس $a_{i_0}b_{j_0} = c$ و $a_{i_1}b_{j_1} = 0$. بدون کاستن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $i_0 = j_0 = 1$ و $j_1 = m$. چون R نیم‌جابه‌جایی و Sــ سازگار است داریم

$$a_{i_1}c = a_{i_1}\alpha\beta = (a_{i_1}a_1e + a_{i_1}a_2g_2 + \cdots + a_{i_1}a_ng_n)(b_1e + b_2h_2 + \cdots + b_{m-1}h_{m-1}).$$

بنابراین $1 \leq i_2 \leq n$ و $1 \leq j_2 \leq m$ وجود دارد که عنصر $g_{i_2}h_{j_2}$ در حاصل‌ضرب زیرمجموعه‌های $\{g_1 = e, g_2, \ldots, g_n\}$ و $\{h_1 = e, h_2, \ldots, h_{m-1}\}$ از S به‌طور منحصر به فرد نمایش داده می‌شود. لذا $a_{i_1}a_{i_2}\omega_{g_{i_2}}(b_{j_2}) = 0 = a_{i_1}a_{i_2}b_{j_2}$. بدون کاستن از کلیت مسئله فرض کنیم $j_2 = m - 1$. مجدداً چون R نیم‌جابه‌جایی است، داریم

$$a_{i_1}a_{i_2}c = a_{i_1}a_{i_2}\alpha(b_1e + b_2h_2 + \cdots + b_{m-2}h_{m-2}).$$

با ادامه‌ی این روند می‌توان ثابت کرد که برای برخی $\{i_1, \ldots, i_t\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$،

$$a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_t}c = a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_t}\alpha b_1e.$$

بنابراین

$$a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_t}a_1\beta = a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_t}c$$

و اثبات تمام است. $\square$

نتیجه ۹.۴.۴. فرض کنیم R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی باشد که برای درونریختی σ از R حلقه‌ای σ_سازگار باشد و $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ و $g = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ عناصر ناصفری از $R[x;\sigma]$ باشد که $fg = c \in R$. در این‌صورت $a_0b_0 = c$ و برای برخی $\{i_1, \cdots, i_t\} \subseteq \{1, \cdots, n\}$، $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_t}a_{i_{t+1}}g = 0$ یا $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_t}a_{i_{t+1}}g = a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_t}c$.

در گزاره‌ی بعدی عناصر یکه در حلقه‌ی مونوئیدی اریب $R * S$ را مشخص می‌کنیم که در آن R حلقه‌ای برگشت‌پذیر یا دوو راست و S .t.u.p_مونوئید است که فقط یک عنصر یکه دارد.

گزاره ۱۰.۴.۴. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر یا دوو راست، S .t.u.p_مونوئید باشد که فقط یک عنصر یکه دارد و $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی باشد. فرض کنیم R حلقه‌ای S_سازگار باشد به‌طوری‌که هر ایدآل از آن S_سازگار است. در این‌صورت $0 \neq \alpha = a_1g_1 + \cdots + a_ng_n \in R * S$ یکه است اگر و تنها اگر $1 \leq i_0 \leq n$ وجود داشته باشد که $g_{i_0} = e$، $a_{i_0} \in U(R)$ و برای هر $i \neq i_0$، a_i پوچ‌توان است.

برهان. فرض کنیم α یکه باشد. در این‌صورت $0 \neq \beta = b_1h_1 + \cdots + b_mh_m$ وجود دارد که $\alpha\beta = 1$ و $\beta\alpha = 1$. چون S .u.p_مونوئید است که فقط یک عنصر یکه دارد، اعداد صحیح و مثبت i_0 و j_0 وجود دارد که $g_{i_0}h_{j_0}$ در حاصل‌ضرب دو زیر مجموعه‌ی $\{g_1, \ldots, g_n\}$ و $\{h_1, \ldots, h_m\}$ از S به‌صورت منحصر به فرد نمایش داده می‌شود و $g_{i_0} = e = h_{j_0}$ و $a_{i_0}\omega_{g_{i_0}}(b_{j_0}) = 1$. چون $\omega_{g_{i_0}} = id_R$، پس $a_{i_0}b_{j_0} = 1$. بدون کاستن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $i_0 = j_0 = 1$. بنابراین $a_1b_1 = 1$. پس $b_1a_1b_1a_1 = b_1a_1$ و لذا b_1a_1 خودتوان است. از آن‌جایی‌که $a_1b_1 = 1$، پس $a_1b_1a_1 = a_1$. چون b_1a_1 خودتوان و R حلقه‌ی آبلی است، پس $b_1a_1^2 = a_1$ و در نتیجه $b_1a_1^2b_1 = a_1b_1 = 1$. لذا $b_1a_1 = 1$ (یعنی، حلقه‌ی برگشت‌پذیر R یک حلقه‌ی د.د.کیند متناهی است). از اینرو b_1 در R یکه است. بنابراین اگر R برگشت‌پذیر باشد، آن‌گاه بنا به قضیه‌ی ۵.۴.۴، برای هر $i \neq 1$، a_i پوچ‌توان است.

حال فرض می‌کنیم R حلقه‌ی دوو راست باشد. چون R NI_حلقه است، پس $R/\mathrm{nil}(R)$ کاهشی است. برای هر $m \in S$، بنا به لم ۳.۲.۴، $\omega_m(nil(R)) \subseteq nil(R)$. بنابراین با تعریف $\overline{\omega}_m(\bar{a}) = \overline{\omega_m(a)}$ (برای هر $\bar{a} \in R/\mathrm{nil}(R)$) درونریختی از $\overline{R} = R/\mathrm{nil}(R)$ است. پس همریختی مونوئیدی $\overline{\omega} : S \longrightarrow \mathrm{End}(R/nil(R))$ را تعریف می‌کنیم به‌طوری‌که $\overline{\omega}(m) = \overline{\omega}_m$. لذا $\overline{R} = R/\mathrm{nil}(R)$ حلقه‌ی S_سازگار و کاهشی است. از اینرو $\overline{R}$ حلقه‌ی S_صلب است. چون $\overline{\alpha}\overline{\beta} = 1$ و S .t.u.p_مونوئید است که فقط یک عنصر یکه دارد، بنا به لم ۱.۴.۴، $1 \leq i_1 \leq n$ و $1 \leq j_1 \leq m$ وجود دارد که $g_{i_1} = e = h_{j_1}$، $\bar{a}_{i_1}\bar{b}_{j_1} = \bar{1}$ و برای هر $i + j \neq i_1 + j_1$، $\overline{a_i}\overline{b_j} = 0$. از طرفی، چون S فقط یک عضو یکه دارد و $g_1 = e = h_1$، بنابراین $i_1 = j_1 = 1$. پس $\bar{a}_1\bar{b}_1 = 1$ و برای هر $i + j > 2$، $\bar{a}_i\bar{b}_j = \bar{0}$. از اینرو، $a_1b_1 = 1$ و برای $i \geq 2$، $\bar{a}_i\bar{b}_1 = \bar{0}$. بر اساس آنچه که در پاراگراف قبل ذکر شد، $b_1a_1 = 1$ و در نتیجه b_1 یکه است. پس برای $i \geq 2$، a_i پوچ‌توان است.

برعکس؛ فرض کنیم a_1 یکه و a_2، ...، a_n پوچ‌توان باشند. بنابر قضیه ۳.۲.۴، داریم $a_2g_2+\cdots+a_ng_n\in\mathrm{nil}(R)*S=\mathrm{nil}(R*S)$. چون حلقه‌های برگشت‌پذیر و دوو راست حلقه‌ی ۲ـ اولیه هستند،بنا به قضیه‌ی ۶.۲.۴، حلقه‌ی $R*S$ نیز ۲ـ اولیه است. از اینرو $\mathrm{nil}(R*S)=\mathrm{nil}_*(R*S)$. در نتیجه بنابر [۵۷، لم ۱۰.۳۲]، $\mathrm{nil}(R*S)\subseteq \mathrm{J}(R)$. بنابراین $a_2g_2+\cdots+a_ng_n\in J(R*S)$ و لذا $\alpha\in\mathrm{U}(R*S)$. □

تذکر ۱۱.۴.۴. اگر M و N دو t.u.p.ـ مونوئید باشند، $M\times N$ نیز t.u.p.ـ مونوئید است.

برهان. فرض کنیم $A=\{(g_i,h_i)\in M\times N \mid i=1,2,\ldots,p\}$ و $B=\{(g'_j,h'_j)\in M\times N\}$. چون M t.u.p.ـ مونوئید است، $1\leq i_\circ,i_1\leq p$ و $1\leq j_\circ,j_1\leq q$ وجود دارد که $g_{i_\circ}g'_{j_\circ}$ و $g_{i_1}g'_{j_1}$ در حاصل‌ضرب دو زیرمجموعه‌ی $\{g_1,\ldots,g_p\}$ و $\{g'_1,\ldots,g'_q\}$ از M به‌صورت منحصر به فرد نشان داده می‌شوند. همچنین N نیز t.u.p.ـ مونوئید است. بنابراین $1\leq \ell_\circ,\ell_1\leq p$ و $1\leq t_\circ,t_1\leq q$ وجود دارد که $h_{\ell_\circ}h'_{t_\circ}$ و $h_{\ell_1}h'_{t_1}$ در حاصل‌ضرب دو زیر مجموعه‌ی $\{h_1,\ldots,h_p\}$ و $\{h'_1,\ldots,h'_q\}$ از N به‌طور منحصر به فرد نمایش داده می‌شود. به‌وضوح $(g_{i_\circ},h_{\ell_\circ})(g'_{i_\circ},h'_{t_\circ})$ و $(g_{i_1},h_{\ell_1})(g'_{j_1},h'_{t_1})$ دو عضو منحصر به فرد در حاصل‌ضرب $M\times N$ هستند. □

نتیجه ۱۲.۴.۴. فرض کنیم σ درونریختی سازگار از حلقه‌ی دلخواه برگشت‌پذیر یا دوو راست R باشد. در این‌صورت

الف) $\mathrm{U}(R[x;\sigma])=\mathrm{U}(R)+\mathrm{nil}(R[x])x$.

ب) عنصر غیر صفر f از $R[x_1,\ldots,x_n]$ یکه است، اگر و فقط اگر جمله‌ی ثابت f یکه و بقیه‌ی ضرایب پوچ‌توان باشند.

برهان. الف) اگر در گزاره‌ی ۱۰.۴.۴، S را مونوئید تولید شده توسط x و $\omega_{x^i}=\sigma^i$ در نظر بگیریم نتیجه برقرار است.

ب) با استفاده از تذکر ۱۱.۴.۴ و نتیجه‌ی ۱۰.۴.۴، نتیجه برقرار می‌شود. □

حال با استفاده از نتایج بدست آمده می‌توانیم عناصر تمیز حلقه‌ی مونوئیدی اریب $R*S$ را مشخص می‌کنیم.

گزاره ۱۳.۴.۴. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر یا دوو راست، S t.u.p.ـ مونوئید باشد که فقط یک عنصر یکه دارد و $\omega:S\longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی باشد. فرض کنیم R حلقه‌ی Sـ سازگار باشدبه‌طوری‌که هر ایدآل از آن Sـ سازگار است. در این‌صورت $\alpha=a_1g_1+a_2g_2+\cdots+a_ng_n\in R*S$ تمیز است اگر و فقط اگر $g_1=e$، a_1 در R تمیز باشد و برای هر $i\neq 1$، a_i پوچ‌توان باشد.

برهان. با استفاده از قضیه‌ی ۸.۲.۴ و گزاره‌ی ۱۰.۴.۴، نتیجه حاصل است. □

فرض کنیم R حلقه‌ی برگشت‌پذیر یا دوو راست و S_سازگار باشد که S .t.u.p_مونوئید است که فقط یک عنصر یکه دارد و $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی باشد. بنا به نتیجه‌ی ۹.۲.۴، حلقه‌ی مونوئیدی اریب $R * S$ آبلی است. از اینرو، هر عنصر تمیز از $R * S$ قویاً تمیز نیز می‌باشد.

نتیجه ۱۴.۴.۴. فرض کنیم σ درونریختی سازگار از حلقه‌ی دلخواه برگشت‌پذیر یا دوو راست R باشد. اگر هر ایدآل از آن σ_سازگار باشد، آن‌گاه

الف) $\mathrm{cln}(R[x;\sigma]) = \mathrm{cln}(R) + \mathrm{nil}(R[x;\sigma])x = \mathrm{cln}(R) + (\mathrm{nil}(R)[x;\sigma])x$.

ب) عنصر ناصفر f از $R[x_۱, x_۲, \ldots, x_n]$ تمیز است اگر و فقط اگر جمله‌ی ثابت آن تمیز باشد و بقیه‌ی ضرایب آن پوچ‌توان باشد.

برهان. با استفاده از گزاره ۱۳.۴.۴ نتیجه حاصل است. □

فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و دوو راست، S .t.u.p_مونوئید باشد که فقط یک عنصر یکه دارد و $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی باشد. فرض کنیم $g \neq e$ و $\alpha = ۱g \in R * S$. چون $۱ \notin \mathrm{nil}(R)$ و بنابراین $\alpha = ۱g \notin \mathrm{cln}(R * S)$. بنابراین حلقه‌ی مونوئیدی اریب حلقه‌ی تمیز نیست. به‌عنوان یک نتیجه، برای حلقه‌ی R، حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های $R[x]$ هرگز تمیز نمی‌باشد [۶۹، گزاره ۱۳]. در ادامه، عناصر تمیز_پوچ حلقه‌ی مونوئیدی اریب $R * S$ را مشخص می‌کنیم.

نتیجه ۱۵.۴.۴. فرض کنیم R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی، S .u.p_مونوئید و همریختی $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی باشد. فرض کنیم R حلقه‌ی S_سازگار باشد. در این صورت $\alpha \in R * S$ تمیز_پوچ است اگر و فقط اگر $\alpha = a_۱g_۱ + \ldots + a_ng_n$ به‌طوری‌که $g_۱ = e$، $a_۱ \in \mathrm{nil} - \mathrm{cln}(R)$ و برای هر $i \geq ۲$، $a_i \in \mathrm{nil}(R)$.

برهان. از نتایج ۳.۲.۴ و ۸.۲.۴ نتیجه بدست می‌آید. □

فرض کنیم R حلقه‌ای نیم‌جابه‌جایی و S_سازگار باشد که S .u.p_مونوئید و $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی باشد. بنا به نتیجه‌ی ۹.۲.۴، حلقه‌ی مونوئیدی اریب $R * S$ آبلی است. بنابراین هر عضو تمیز_پوچ از $R * S$ قویاً تمیز_پوچ است.

نتیجه ۱۶.۴.۴. فرض کنیم σ درونریختی سازگار از حلقه‌ی برگشت‌پذیر یا دوو راست R باشد. در این‌صورت

الف) عنصر $f = a_۰ + a_۱x + \cdots + a_nx^n \in R[x;\sigma]$ تمیز_پوچ است اگر و فقط اگر $a_۱$ در R تمیز_پوچ باشد و برای هر $i \neq ۱$، a_i پوچ‌توان باشد.

ب) عنصر ناصفر f از $R[x_۱, \ldots, x_n]$ تمیز_پوچ است، اگر و تنها اگر جمله‌ی ثابت f، تمیز_پوچ باشد و بقیه‌ی ضرایب آن پوچ‌توان باشند.

۵.۴ زیرگراف‌های القایی $\Gamma(\mathrm{Idem}(R))$ و $\Gamma(\mathrm{cln}(R))$

در بخش پایانی، دو زیر گراف القایی $\Gamma(\mathrm{Idem}(R))$ و $\Gamma(\mathrm{cln}(R))$ از $\Gamma(R)$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. بنابراین مجموعه‌ی رئوس آن‌ها به ترتیب، $\mathrm{Idem}(R) \cap Z(R)^*$ و $\mathrm{cln}(R) \cap Z(R)^*$ می‌باشد و دو رأس متمایز a و b از $\mathrm{Idem}(R) \cap Z(R)^*$ (متناظراً، برای $\mathrm{cln}(R) \cap Z(R)^*$) مجاورند اگر و تنها اگر $ab = ۰$ یا $ba = ۰$. بوضوح، $\Gamma(R)$ گراف تهی است اگر و فقط اگر R دامنه باشد. اما، زیرگراف‌های بالا حتی زمانی‌که R دامنه نیست ممکن است تهی باشند. به‌عنوان مثال، $\Gamma(\mathrm{Idem}(R))$ تهی است اگر و فقط اگر $\mathrm{Idem}(R) = \{۰, ۱\}$.

همان‌طور که پیش $\Gamma(R)$ همبند است و $\mathrm{diam}(\Gamma(R)) \leq ۳$. هم‌چنین، اگر $\Gamma(R)$ شامل دور باشد، آن‌گاه $\mathrm{gr}(\Gamma(R)) \leq ۴$. در ادامه نشان می‌دهیم این دو نتیجه در مورد زیرگراف $\Gamma(\mathrm{Idem}(R))$ نیز برقرار است. اما مثالی ارائه می‌دهیم که نشان می‌دهد $\Gamma(\mathrm{cln}(R))$ لزوماً همبند نیست. سپس شرایطی را که تحت آن گراف $\Gamma(\mathrm{cln}(R))$ همبند است را بیان می‌کنیم. در پایان، زیرگراف‌های القایی $\Gamma(\mathrm{Idem}(R * S))$ و $\Gamma(\mathrm{cln}(R * S))$ از $\Gamma(R * S)$ را به‌طور مختصر مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

قضیه ۱.۵.۴. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر باشد.

الف) $\Gamma(\mathrm{Idem}(R))$ همبند است و $\mathrm{diam}(\Gamma(\mathrm{Idem}(R))) \leq ۳$.

ب) اگر $\Gamma(\mathrm{Idem}(R))$ شامل دور باشد، $\mathrm{gr}(\Gamma(\mathrm{Idem}(R))) \leq ۴$.

برهان. فرض کنیم x و y عناصر متمایزی از $\mathrm{Idem}(R) \cap Z(R)^*$ باشند که $xy \neq ۰$. بنابراین $۱ - x$ و $۱ - y$ خودتوان‌هایی از R هستند که $x(۱ - x) = y(۱ - y) = ۰$. اگر $(۱ - x)(۱ - y) \neq ۰$، آن‌گاه چون R آبلی است، پس $(۱ - x)(۱ - y) \in \mathrm{Idem}(R) \cap Z(R)^*$. از اینرو $x - (۱ - x)(۱ - y) - y$ مسیری به طول ۲ از x به y در $\Gamma(\mathrm{Idem}(R))$ است. اگر $(۱ - x)(۱ - y) = ۰$، آن‌گاه $x - (۱ - x) - (۱ - y) - y$ مسیری به‌طول ۳، از x به y در $\Gamma(\mathrm{Idem}(R))$ است. بنابراین $\mathrm{diam}(\Gamma(\mathrm{Idem}(R))) \leq ۳$.

فرض کنیم $a - b - c_۱ \cdots - c_n - a$ یک دور در $\Gamma(\mathrm{Idem}(R))$ باشد. اگر $c_۱c_n = ۰$، آن‌گاه $a - b - c_۱ - c_n - a$ یک دور به‌طول ۴ در $\Gamma(\mathrm{Idem}(R))$ است. فرض کنیم $c_۱c_n \neq ۰$. در این‌صورت $a \neq c_۱c_n$ و $b \neq c_۱c_n$، زیرا در غیر این صورت، چون $a(c_۱c_n) = ۰ = b(c_۱c_n)$، پس a و b پوچ‌توان خواهند بود و این تناقض است. از آن‌جایی‌که R آبلی است، $c_۱c_n \in \mathrm{Idem}(R)$. از اینرو $a - b - c_۱c_n - a$ دوری به‌طول ۳ در $\Gamma(\mathrm{Idem}(R))$ است و لذا $\mathrm{gr}(\Gamma(\mathrm{Idem}(R))) \leq ۴$. $\square$

تذکر ۲.۵.۴. فرض کنیم R و S دو حلقه‌ی دلخواه و $f : R \longrightarrow S$ همریختی حلقه‌ای باشد. به‌وضوح $f(\mathrm{Idem}(R)) \subseteq \mathrm{Idem}(S)$ و $f(\mathrm{U}(R)) \subseteq \mathrm{U}(S)$. چون f همریختی حلقه‌ای است، پس
$$f(\mathrm{cln}(R)) = f(\mathrm{U}(R) + \mathrm{Idem}(R)) = f(\mathrm{U}(R)) + f(\mathrm{Idem}(R)) \subseteq \mathrm{U}(S) + \mathrm{Idem}(S) = \mathrm{cln}(S).$$
لذا $f(\mathrm{cln}(R)) \subseteq \mathrm{cln}(S)$

مثال بعدی نشان می‌دهد که $\Gamma(\mathrm{cln}(R))$ لزوماً همبند نیست.

مثال ۳.۵.۴. [۵، مثال ۷.۷] فرض کنیم $A=\mathbb{Z}[[x]]$، $I=۳xA$ و $R=A/I=\mathbb{Z}[[x]]/۳x\mathbb{Z}[[x]]$. بنابراین $\mathrm{Idem}(R)=\{۰,۱\}$. عناصر $a=۲x$ و $b=۴x$ در A را در نظر می‌گیریم. بنابراین $a=(۲x-۱)+۱$ و $b=(۴x-۱)+۱$ عناصر تمیز در حلقه‌ی A هستند. بنا به تذکر ۲.۵.۴، $\bar{a}=۲x+I$ و $\bar{b}=۴x+I$ در R تمیز هستند. همچنین، $ann(\bar{a})=ann(\bar{b})=۳R$. بنابراین $\bar{a},\bar{b}\in\mathrm{cln}(R)\cap Z(R)^*$ اما هیچ عنصری از $\mathrm{cln}(R)\cap Z(R)^*$ با $\bar{a}$ و $\bar{b}$ مجاور نیست. لذا $\Gamma(\mathrm{cln}(R))$ همبند نیست.

اندرسون و بداوی در مرجع [۵، لم ۲.۳]، برای حلقه‌ی جابه‌جایی R ثابت کردند که اگر $x\in\mathrm{nil}(R)\setminus\{۰\}$ و $y\in Z(R)^*$، آن‌گاه فاصله‌ی x و y در $\Gamma(R)$ حداکثر ۲ می‌باشد. در ادامه این نتیجه را به حالت ناجابه‌جایی گسترش می‌دهیم.

لم ۴.۵.۴. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر باشد که $x\in\mathrm{nil}(R)\setminus\{۰\}$ و $y\in Z(R)^*$. در این‌صورت x و y دارای پوچساز مشترک ناصفر هستند. به‌علاوه؛ $z\in\mathrm{nil}(R)$ وجود دارد که $xz=zy=۰$

برهان. فرض کنیم که $x\neq y$ و $xy\neq۰$. چون $y\in Z(R)^*$ و $xy\neq۰$، پس $z\in Z(R)^*\setminus\{x\}$ وجود دارد که $zy=۰$. فرض کنیم n کوچکترین عدد صحیحی باشد که $x^nz=۰$ (چنین nای وجود دارد زیرا $x\in\mathrm{nil}(R)$). چون R حلقه‌ی برگشت‌پذیر است، پس $x^{n-۱}z\in\mathrm{nil}(R)$ و $x(x^{n-۱}z)=x^{n-۱}(zy)=۰$. □

در ادامه شرایطی که تحت آن $\Gamma(\mathrm{cln}(R))$ لزوماً همبند و قطر آن حداکثر ۳ است، را بیان می‌کنیم. برای $T\subseteq R$، گراف $\Gamma(T)$ را به‌عنوان زیرگراف القایی از $\Gamma(R)$ را در نظر می‌گیریم که $T\cap Z(R)^*$ مجموعه‌ی رئوس آن می‌باشد (این نماد با نمادی که قبلاً برای گراف‌های $\Gamma(\mathrm{cln}(R))$ و $\Gamma(\mathrm{Idem}(R))$ تعریف کردیم همخوانی دارد).

قضیه‌ی بعدی توسیعی از قضیه‌ی [۵، ۷.۸] به حالت ناجابه‌جایی است که به‌طور مشابه اثبات می‌شود.

قضیه ۵.۵.۴. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و $T\subseteq R$ به‌گونه‌ای باشد که $\mathrm{nil}(R)$ ایدال اولی از R باشد و $\mathrm{nil}(R)\setminus\{۰\}\subseteq T$. بنابراین $\Gamma(T)$ همبند است، $\mathrm{diam}(\Gamma(T))\leq۳$. همچنین، اگر $\Gamma(T)$ شامل دور باشد، آن‌گاه $\mathrm{gr}(\Gamma(T))\leq۴$.

برهان. فرض کنیم $a,b\in Z(R)\cap S$ که $ab\neq۰$. فرض کنیم که $a\in\mathrm{nil}(R)$. بنا به لم ۴.۵.۴، $w\in\mathrm{nil}(R)\setminus\{۰\}$ وجود دارد که $a-w-b$ مسیری از a به b در $\Gamma(T)$ است. حال فرض کنیم a و b پوچ‌توان نباشند. چون $a,b\in Z(R)^*$، پس $c,d\in Z(R)\setminus\{۰\}$ وجود دارد که $۰=ac=bd\in\mathrm{nil}(R)$. ازآن‌جایی‌که $\mathrm{nil}(R)$ ایدآل اولی R است، پس $c,d\in\mathrm{nil}(R)\setminus\{۰\}$.

اگر $c = d$، آن‌گاه $a - c - b$ مسیری از a به b در $\Gamma(T)$ است. اگر $cd = 0$ و $c \neq d$، آن‌گاه $a - c - d - b$ مسیری از a به b در $\Gamma(T)$ است. بنابراین $\mathrm{diam}(\Gamma(T)) \leq 3$.

فرض کنیم $c_1 - c_2 - \cdots - c_n - c_1$ یک دور در $\Gamma(T)$ باشد که هر $c_i \in \mathrm{nil}(R) \setminus \{0\}$. چون $c_n, c_2 \in \mathrm{nil}(R) \setminus \{0\}$، بنا به لم ۴.۵.۴، $w \in \mathrm{nil}(R) \setminus \{0\}$ وجود دارد که $c_2 - w - c_n$ مسیری در $\Gamma(T)$ است. بنابراین $c_1 - c_2 - w - c_n - c_1$ یک دور به‌طول ۴ در $\Gamma(T)$ است. حال فرض کنیم بعضی از c_iها پوچتوان نباشند، مثلاً $c_1 \notin \mathrm{nil}(R)$. چون $\mathrm{nil}(R)$ ایدآل اول R است و $c_nc_1 = c_1c_2 = 0$، پس $c_2, c_n \in \mathrm{nil}(R) \setminus \{0\}$. مجدداً با استفاده از لم ۴.۵.۴، $h \in \mathrm{nil}(R) \setminus \{0\}$ وجود دارد که $c_2 - h - c_n$ مسیری در $\Gamma(T)$ است. بنابراین $c_1 - c_2 - h - c_n - c_1$ یک دور به‌طول ۴ در $\Gamma(T)$ است. از این‌رو، $\mathrm{gr}(\Gamma(T)) \leq 4$. □

نتیجه ۶.۵.۴. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر باشد به‌طوری‌که $\mathrm{nil}(R)$ ایدال اولی از R باشد. در این‌صورت $\Gamma(\mathrm{cln}(R))$ همبند است و $\mathrm{diam}(\Gamma(\mathrm{cln}(R))) \leq 3$. هم‌چنین اگر $\Gamma(\mathrm{cln}(R))$ شامل دور باشد، $\mathrm{gr}(\Gamma(\mathrm{cln}(R))) \leq 4$.

برهان. فرض کنیم $a \in \mathrm{nil}(R)$. بنابراین $a - 1$ وارون‌پذیر است. پس $a = (a-1) + 1$ عضو تمیزی از R است، از این‌رو $\mathrm{nil}(R) \subseteq \mathrm{cln}(R)$. حال با قرار دادن $T = \mathrm{cln}(R)$ در قضیه‌ی ۵.۵.۴، نتیجه حاصل می‌شود. □

فرض کنیم R حلقه‌ی برگشت‌پذیر، S .u.p ـ‌مونوئید و $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی باشد. بنا به قضیه‌ی ۸.۲.۴، خودتوان‌های حلقه‌ی $R * S$ دقیقاً همان خودتوان‌های حلقه‌ی R هستند. از اینرو $\Gamma(\mathrm{Idem})(R * S) = \Gamma(\mathrm{Idem}(R))$. در ادامه، گراف $\Gamma(\mathrm{cln}(R * S))$ را در حالتی‌که R حلقه‌ی برگشت‌پذیر و S .t.u.p ـ‌مونوئید است که فقط یک عنصر یکه دارد، مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

هاشمی و آل‌هوز در مرجع [۳۵، لم ۳.۲] ثابت کردند که اگر R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، S .u.p ـ‌مونوئید و $\alpha = a_1g_1 + \cdots + a_ng_n$ و $\beta = b_1h_1 + \cdots + b_mh_m$ عناصر ناصفری از $R[S]$ باشند که $\alpha\beta = 0$، آن‌گاه عناصر ناصفر $0 \neq r, s \in R$ وجود دارند که $\beta r \neq 0 \neq s\alpha$ اما برای هر $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$، $sa_ib_j = 0 = a_ib_jr$. در ادامه، ما این نتیجه را به حلقه‌ی مونوئیدی اریب $R * S$ گسترش می‌دهیم و به روش مشابه و فقط با اندکی تغییرات لم زیر را ثابت می‌کنیم.

لم ۷.۵.۴. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، S .u.p ـ‌مونوئید و $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی باشد. فرض کنیم R حلقه‌ای Sـ‌سازگار و $\alpha = a_1g_1 + \cdots + a_ng_n$ و $\beta = b_1h_1 + \cdots + b_mh_m$ عناصر ناصفری از $R * S$ باشند. اگر $\alpha\beta = 0$، آن‌گاه عناصر ناصفر $r, s \in R$ وجود دارد که $\beta r \neq 0 \neq s\alpha$ و برای هر $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq m$، $sa_ib_j = 0 = a_ib_jr$.

برهان. فرض کنیم $\ell(\beta) = m = 1$. پس $\beta = b_1h_1$. چون S .u.p ـ‌مونوئید است، برای هر $i_1 \neq i_2$، $g_{i_1}h_1 \neq g_{i_2}h_1$. بنابراین برای هر $1 \leq i \leq m$، $a_i\omega_{g_i}(b_1) = 0$ و لذا $a_ib_1 = 0$، زیرا R حلقه‌ی Sـ‌سازگار است. در این حالت با در نظر گرفتن $r = 1$ نتیجه حاصل است.

حال فرض کنیم $m \geq ۲$. اگر برای هر $۱ \leq i \leq n$ و $۱ \leq j \leq m$، $a_ib_j = ۰$، آن‌گاه با در نظر گرفتن $r = ۱$ نتیجه حاصل است. اگر برای برخی i, j، $a_ib_j \neq ۰$، $t \geq ۱$ وجود دارد که برای هر $i < t$، $a_i\beta = ۰$ و برای هر $t \leq i \leq n$، $a_i\beta \neq ۰$ (در صورت لزوم a_ig_iها را بازآرایی می‌کنیم). بنابراین

$$۰ = \alpha\beta = (a_tg_t + \cdots + a_ng_n)(b_۱h_۱ + \cdots + b_mh_m)$$

زیرا R حلقه‌ی S_ سازگار است. چون S .u.p_ مونوئید است، $t \leq i_۱ \leq n$ و $۱ \leq j_۱ \leq m$ وجود دارد که $g_{i_۱}h_{j_۱}$ در حاصل‌ضرب دو زیرمجموعه‌ی $A = \{g_t, \ldots, g_n\}$ و $B = \{h_۱, \ldots, h_m\}$ از S به‌صورت منحصر به فرد نمایش داده می‌شود. بدون کاستن از کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $j_۱ = ۱$. بنابراین $a_{i_۱}\omega_{g_{i_۱}}(b_۱) = ۰$ و در نتیجه بنا به S_ سازگار بودن R، $a_{i_۱}b_۱ = ۰ = b_۱a_{i_۱}$. بنابراین

$$۰ = \alpha\beta a_{i_۱} = \alpha(b_۲\omega_{h_۲}(a_{i_۱})h_۲ + \cdots + b_m\omega_{h_m}(a_{i_۱})h_m).$$

چون $\ell(\beta a_{i_۱}) \leq m - ۱$ و $\beta a_{i_۱} \neq ۰$. بنابراین با استقرا روی m، $r_۱ \in R$ وجود دارد که $\beta a_{i_۱}r_۱ \neq ۰$ و برای هر $۱ \leq i \leq n$ و $۱ \leq j \leq m$، $a_i(b_ja_{i_۱}r_۱) = ۰$. حال با در نظر گرفتن $r = a_{i_۱}r_۱$ نتیجه برقرار است.

به روش مشابه می‌توان نشان داد که $s\alpha \neq ۰$ و برای هر $۱ \leq i \leq n$ و $۱ \leq j \leq m$، $sa_ib_j = ۰$. □

نتیجه ۸.۵.۴. اگر S .u.p_ مونوئید و R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و S_ سازگار باشد، آن‌گاه R حلقه‌ی S_ مک‌کوی اریب است.

لم زیر حالت اریب [۳۵، لم ۳.۵] است که به روشی مشابه اثبات می‌شود.

لم ۹.۵.۴. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، S .u.p_ مونوئید و $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی باشد. اگر R حلقه‌ای S_ سازگار باشد و $\alpha \in Z(R * S)$ و $\beta \in \mathrm{nil}(R * S)$، آن‌گاه $r_{R*S}(\alpha) \cap \ell_{R*S}(\beta) \neq \{۰\}$.

برهان. فرض کنیم $\alpha \in Z(R * S)$. بنا به نتیجه‌ی ۸.۵.۴، حلقه‌ی R حلقه‌ی S_ مک‌کوی می‌باشد، پس $R \ni c \neq ۰$ وجود دارد که $\alpha c = ۰ = c\alpha$. از آن‌جایی‌که $\beta \in \mathrm{nil}(R * S)$، عدد صحیح و مثبت n وجود دارد که $c\beta^m = ۰$ اما $c\beta^{m-۱} \neq ۰$. بنابراین $۰ \neq c\beta^{m-۱} \in r_{R*S}(\alpha) \cap \ell_{R*S}(\beta)$. چون R برگشت‌پذیر است و $\mathrm{nil}(R * S) = \mathrm{nil}(R) * S$. پس $c\beta^{m-۱} \in \mathrm{nil}(R) * S = \mathrm{nil}(R * S)$. □

همان‌طور که در مثال ۳.۵.۴ نشان داده شد، در حالت کلی گراف $\mathrm{cln}(R)$ همبند نیست. بنابراین $\Gamma(\mathrm{cln}(R * S))$ در حالت کلی همبند نیست. قضیه‌ی بعد شرایطی را که تحت آن گراف $\mathrm{cln}(R * S)$ لزوماً همبند است، را ارائه می‌دهد.

قضیه ۱۰.۵.۴. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، S .u.p ــ مونوئید و $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی است. فرض کنیم R حلقه‌ای S ــ سازگار و $T \subseteq R * S$ به گونه‌ای باشد که $\mathrm{nil}(R * S)$ ایدآل اول $R * S$ و $\mathrm{nil}(R * S) \setminus \{0\} \subseteq T$. بنابراین $\Gamma(T)$ همبند است و $\mathrm{diam}(\Gamma(T)) \leq 3$. همچنین، اگر $\Gamma(T)$ شامل دور باشد، آن‌گاه $\mathrm{gr}(\Gamma(T)) \leq 4$.

برهان. با استفاده از لم ۹.۵.۴ و روندی مشابه آن‌چه در قضیه‌ی ۵.۵.۴ بیان شده است، اثبات می‌شود. □

نتیجه ۱۱.۵.۴. فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر، S .u.p ــ مونوئید و $\omega : S \longrightarrow \mathrm{End}(R)$ همریختی مونوئیدی باشد. همچنین فرض کنیم R حلقه‌ای S ــ سازگار و $\mathrm{nil}(R * S)$ ایدآل اولی از $R * S$ باشد. در این‌صورت $\Gamma(\mathrm{cln}(R * S))$ همبند است و $\mathrm{diam}(\Gamma(\mathrm{cln}(R * S))) \leq 3$. هم‌چنین اگر $\Gamma(\mathrm{cln}(R * S))$ شامل دور باشد، $\mathrm{gr}(\Gamma(\mathrm{cln}(R * S))) \leq 4$.

برهان. فرض کنیم $\alpha = a_1g_1 + \cdots + a_ng_n \in \mathrm{nil}(R * S)$. بنا به قضیه‌ی ۳.۲.۴، برای هر $1 \leq i \leq n$، a_i پوچ‌توان است. بنابراین طبق گزاره‌ی ۱۰.۴.۴، $\alpha - 1e$ در $R * S$ یکه است. از این‌رو $\alpha = (\alpha - 1e) + 1e$ به‌صورت مجموعی از یک عضو یکه و یک عضو خودتوان در $R * S$ می‌باشد و در نتیجه α عنصر تمیزی از $R * S$ است. لذا $\mathrm{nil}(R * S) \subseteq \mathrm{cln}(R * S)$. بنابراین با قرار دادن $T = \mathrm{cln}(R * S)$ در قضیه‌ی ۱۰.۵.۴، نتیجه به‌دست می‌آید. □

مراجع

[1] Alhevaz A. and Hashemi E., An Alternative Perspective on Skew Generalized Power Series Rings. *Mediterr. J. Math.*, **13**(6) (2016), 4723–4744.

[2] Alhevaz A. and Kiani D., McCoy property of skew Laurent polynomials and power series rings. *J. Algebra Appl.*, **13**(2) (2014), Article Id: 1350083, 23 pp.

[3] Anderson D.F., Axtell M.C. and Stickles J.A., Zero-divisor graphs in commutative rings. *Commutative Algebra, Noetherian and Non-Noetherian Perspective*, Springer, New York, (2011), 23–45.

[4] Anderson D.F. and Badawi, A., The total graph of a commutative ring. *J. Algebra*, **320**(7) (2008), 2706–2719.

[5] Anderson D.F. and Badawi A., Von Neumann regular and related elements in commutative rings. *Algebra Colloq.*, **19**(1) (2012), 1017–1040.

[6] Anderson D.F. and Mulay S.B., On the diameter and girth of a zero-divisor graph. *J. Pure Appl. Algebra*, **210**(2) (2007), 543–550.

[7] Anderson D.D. and Camillo V.P., Commutative rings whose elements are a sum of a unit and idempotent. *Comm. Algebra*, **30**(7) (2002), 3327-3336.

[8] Anderson D.F. and Livingston P.S., The zero-divisor graph of a commutative ring. *J. Algebra*, **217**(2) (1999), 434-447.

[9] Anderson D.D. and Camillo V., Semigroups and rings whose zero products commute. *Comm. Algebra*, **27**(6) (1999), 2847–2852.

[10] Anderson D.F. and Naseer M., Beck's coloring of a commutative ring. *J. Algebra*, **159**(2) (1993), 500–514.

[11] Annin S., Associated prime over skew polynomials rings" *Comm. Algebra*, **30**(5) (2002), 2511–2528.

[12] Axtel M., Coykendall M. and Stickles J., Zero-divisor graph of polynomials and power series over commutative rings. *J. Algebra*, **33**(6) (2005), 2043–2050.

[13] Beck I., Coloring of commutative rings. *J. Algebra*, **116**(1) (1988), 208–226.

[14] Behboodi M., Zero divisor graphs for modules over commutative rings. *J. Commut. Algebra*, **4**(2) (2012), 175-197.

[15] Birkenmeier G.F., Heatherly H.E. and Lee E.K., Completely prime ideals and associated radicals. *In Proc. Biennial Ohio State-Denison Conference*, (1992), 102-129.

[16] Birkenmeier G.F. and Park J.K., Triangular matrix representations of ring extensions. *J. Algebra*, **265**(2) (2003), 457-477.

[17] Cedó F., Zip rings and Mal'cev domains. *Commun. Algebra*, **19**(7) (1991), 1983–1991.

[18] Chen W., On constant products of elements in skew polynomial rings. *Bull. Iranian Math. Soc*, **41**(2) (2015), 453-462.

[19] Chen W., Units in Polynomial Rings over 2-Primal Rings. *Southeast Asian Bull. Math.*, **30**(6) (2006), 1049-1053.

[20] Chen W.X and Cui S.Y., On weakly semicommutative rings. *Commun. Math. Res.*, **27**(2) (2011), 179-192.

[21] Cheon J.S. and Kim J.A., Prime radicals in up-monoid rings. *Bull. Korean Math. Soc.*, **49**(3) (2012), 511-515.

[22] Cohn P.M., Reversible rings. *Bull. London Math. Soc.*, **31**(6) (1999), 641–648.

[23] DeMeyer F.R., McKenzie T. and Schneider K., The zero-divisor graph of a commutative semigroup. *Semigroup Forum*, **65**(2) (2002), 206–214.

[24] DeMeyer F. and Schneider K., Automorphisms and zero-divisor graphs of commutative ring. *Int. J. Commut. Rings*, **1**(3) (2002), 93–106.

[25] Diesl A. J., Nil clean rings. *J. Algebra*, **383** (2013), 197-211.

[26] Elliott G.A and Ribenboim P., Fields of generalized power series. *Arch. Math.*, **54**(4) (1990), 365–371.

[27] Faith C., Rings with zero intersection property on annihilators: zip rings. *Publ. Mat.*, **33**(2) (1989), 329–332.

[28] Faith C., *Algebra II ring theory*. Springer-Verlag, Berlin (1976).

[29] Fields D.E., Zero divisors and nilpotent elements in power series rings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **27** (1971), 427–433.

[30] Habeb J.M., A note on zero commutative and duo rings. *Math. J. Okayama Univ*, **32** (1990), 73–76.

[31] Habibi M. and Manaviyat R., A generalization of nil-Armendariz rings. *J. Algebra Appl*, **12**(6) (2013), Article Id: 1350001.

[32] Hashemi, E., Yazdanfar, M. and Alhevaz. A., On generalized power series rings with some restrictions on zero-divisoes. *J. Algebra Appl.*, **17**(3) (2018), Article Id: 1850040, 21 pp.

[33] Hashemi, E. and Yazdanfar, M., On clean and nil clean elements in skew t.u.p. monoid rings. *Bull. Korean Math. Soc.*, **56**(1) (2019), 57-71.

[34] Hashemi, E., Yazdanfar, M. and Alhevaz. A., Directed zero-divisor graph and skew power series rings. *Trans. Comb.*, **7**(4) (2018), 43-57.

[35] Hashemi E. and Alhevaz A., Undirected zero divisor graph and unique product monoid rings. (2018), accepted for publication.

[36] Hashemi E., Alhevaz A. and Yoonesian E., On zero divisor graph of unique product monoid rings over Noetherian reversible ring. *Categories and General Algebraic Structures with Applications*, **4**(1) (2015), 95–114.

[37] Hashemi E., Amirjan R. and Alhevaz A., On zero-divisor graphs of skew polynomial rings over non-commutative rings. *J. Algebra Appl.*, **16** (3) (2016), Article Id: 1750056, 14 pp.

[38] Hashemi E. and Amirjan R., Zero-divisor graphs of Ore extensions over reversible rings. *Canadian Math. Bull.*, **59**(4) (2016), 794–805.

[39] Hashemi E., Estaji A.As. and Ziembowski M., Answers to some questions concerning rings with property (A). *Proc. Edinb. Math. Soc.*, **60**(3) (2017), 651–664.

[40] Hashemi E., Hamidizadeh M. and Alhevaz A., Some types of ring elements in Ore extensions over noncommutative rings. *J. Algebra Appl.*, **16**(11) (2017), Article Id: 1750201, 17 pp.

[41] Hashemi E., Extensions of zip rings. *Studia Sci. Math. Hung.*, **47** (4) (2010), 522–528.

[42] Hashemi E., McCoy rings relative to a monoid. *Comm. Algebra*, **38** (3) (2010), 1075-1083.

[43] Hashemi E., Compatible ideals and radicals of Ore extensions. *New York J. Math.*, **12** (2006), 349–356.

[44] Hashemi E. and Moussavi A., Polynomial extensions of quasi-Bear rings. *Acta Math. Hunger.*, **107**(3) (2005), 207–224.

[45] Hong C.Y., Kim N.K. Kwak T.K. and Lee Y., Extensions of zip rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **195**(3) (2005), 231–242.

[46] Hong C.Y., Kim N.K., Lee Y. and Ryu S.J., Rings with property (A) and their extensions. *J. Algebra*, **315**(2) (2007), 612-628.

[47] Huckaba J.A. and Keller J.M., Annihilation of ideals in commutative rings. *Pacific J. Math.*, **83**(2) (1979), 375–379.

[48] Hwang S.U., Kim N.K. and Lee Y., On rings whose right annihilators are bounded. *Glasg. Math. J.*, **51**(3) (2009), 539–559.

[49] Jacobson N., **The theory of rings**. American Mathematical Society, Providence (1943), RI.

[50] Kaplansky I. *Commutative rings*. Revised ed., University of Chicago Press, Chicago, Ill.-London,Ë6.

[51] Karamzadeh O.A.S., On constant products of polynomials. *Int. J. Math. Edu. Sci. Technol.*, **18** (1987), 627-629.

[52] Kanwar P., Leroy A. and Matczuk J., Idempotents in ring extensions. *J. Algebra*, **389** (2013), 128-136.

[53] Kim N.K. and Lee Y., Extensions of reversible rings. *J. Pure Appl. Algebra*, **210**(1-3) (2007), 543–550.

[54] Koşan T., Wang Z. and Zhou Y., Nil-clean and strongly nil-clean rings. *J. Pure Appl. Algebra*, **220**(2) (2016), 633-646.

[55] Krempa J. and Niewieczerzal D., Rings in which annihilators are ideals and their application to semigroup rings. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astronom. Phys.*, **25**(9) (1977), 851–856.

[56] Krempa J., Examples of reduced ring. *Algebra Colloq.*, **3**(4) (1996), 289–300.

[57] Lam T.Y., *A first course in Noncommutative rings*. New York, Springer-Verlag (1991).

[58] Liu Z., Armendariz rings relative to a monoid. *Comm. Algebra*, **33**, (3) (2005), 649–661.

[59] Lucas T., The diameter of a zero divisor graph. *J. Algebra*, **301**(1) (2006), 174–193.

[60] Marks G., Reversible and symmetric rings. *J. Pure Appl. Algebra*, **174**(3) (2002), 311–318.

[61] Marks G. Mazurek R. and Ziembowski M., A unified approach to various generalizations of Armendariz rings. *Bull. Aust. Math. Soc.*, **81**(03) (2010), 361-397.

[62] Marks G., Mazurek R. and Ziembowski M., A new class of unique product monoids with applications to rings theory. *Semigroup forum*, **78**(2) (2009), 210–225.

[63] Mazurek R. and Ziembowski M., On right McCoy rings and right McCoy rings relative to u.p.-monoids. *Commun. Contemporary Math.*, **17**(4) (2015), Article Id: 1550049, 10 pp.

[64] Mazurek R. and Ziembowski M., The ascending chain condition for principal left or right ideals of skew generalized powerseries rings. *J. Algebra*, **322**(4) (2009), 983–994.

[65] Mazurek R. and Ziembowski M., On von Neumann regular rings of skew generalized power series. *Comm. Algebra*, **36**(5) (2008), 1855-1868.

[66] McCoy N.H., Remarks on divisors of zero. *The Amer. Math. Monthly*, **49**(5) (1942), 286-295.

[67] Mulay S. B., Cycles and symetries of zero-divisors. *Comm. Algebra*, **30**(7) (2002), 3533-3558.

[68] Nicholson W. K., Lifting idempotents and exchange rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **229** (1977), 269-278.

[69] Nicholson W.K. and Zhou, Y., Rings in which elements are uniquely the sum of an idempotent and a unit. *Glasg. Math. J.*, **46**(2) (2004), 227-236.

[70] Nielsen P.P., Semi-commutativity and the McCoy condition. *J. Algebra*, **298**(1) (2006), 134–141.

[71] Okniński J., *Semigroup Algebras*. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. 138. Dekker, New York (1991).

[72] Paykan K. and Moussavi, A., Semiprimeness, quasi-Baerness and prime radical of skew generalized power series rings. *Comm. Algebra*, **45**(6) (2017), 2306–2324.

[73] Sharma p.K. and Bhatwadekar S.M. A note on graphical representation of rings. *J. Algebra*, **176**(1) (1995), 124-127.

[74] Shin G.Y., Prime ideals and sheaf representation of a pseudo symmetric ring. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **184** (1973), 43-60.

[75] Quentel Y., Sur la compacitédu spectre minimal d́un anneau. *Bull. Soc. Math. France*, **99** (1971), 265–272.

[76] Redmond S.P., Structure in the zero-divisor graph of a non-commutative ring. *Houston J. Math.*, **30**(2) (2004), 345–355.

[77] Redmond S.P., The zero-divisor graph of a non-commmutative ring. *Int. T. Commut. Rings*, **1** (2002), 203-211.

[78] Ribenboim P., Rings of Generalized Power Series: II: Units and Zero-Divisors. *J. algebra*, **168**(1) (1994), 71–89.

[79] Yang Sh., Song X., and Liu Zh., Power-serieswise McCoy Rings. *Algebra Colloq.*, **18**(2) (2011), 301–310.

[80] Zelmanowitz J.M., The finite intersection property on annihilator right ideals. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **57**(2) (1976), 213–216.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

باریک .... Narrow
برگشت‌پذیر .... Reversible
ترتیب بدیهی .... Trivial order
تمیز .... Clean
حذف‌پذیر .... Cancellative
حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم‌یافته‌ی اریب .... Skew generalized power series ring
حلقه‌ی مونوئیدی اریب .... Skew monoid ring
خوش‌ترتیب .... Well ordered
رادیکال اول .... Prime radical
رادیکال پوچ بالایی .... Upper nil radical
درون‌ریختی سازگار .... Compatible endomorphism
درون‌ریختی صلب .... Rigid endomorphism
فارغ از تاب .... Torsion free
فاصله .... Distance
قطر .... Diameter
قویاً ــ تمیز .... Strongly clean
قویاً ــ کراندار .... Strongly bounded
محمل .... Support
منحصراً تمیز .... Uniquely clean
مونوئید مرتب .... Ordered monoid
مونوئید مرتب اکید .... Strictly ordered monoid
مونوئید مرتب مثبت .... Positively ordered monoid
نیم‌جابه‌جایی .... Semicommutative
همبند .... Connected
کاملاً مرتب .... Totally ordered

کاملاً مرتب موضعی .... Quasi totally ordered

کاهشی .... Reduced

کراندار .... Bounded

کمر .... Girth

مونوئید حاصل‌ضرب یکتا .... Unique product monoid

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Bounded	کراندار
Cancellative	حذف‌پذیر
Clean	تمیز
Compatible endomorphism	درونریختی سازگار
Connected	همبند
Diameter	قطر
Distance	فاصله
Girth	کمر
Narrow	باریک
Ordered monoid	مونوئید مرتب
Path	مسیر
Positively ordered monoid	مونوئید مرتب مثبت
Prime radical	رادیکال اول
Semicommutative	نیم‌جابه‌جایی
Skew generalized power series ring	حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم‌یافته‌ی اریب
Skew monoid ring	حلقه‌ی مونوئیدی اریب
Strictly ordered monoid	مونوئید مرتب اکید
Strongly bounded	قویاً ـ کراندار
Strongly clean	قویاً ـ تمیز
Support	محمل
Quasi totally ordered	کاملاً مرتب موضعی
Reduced	کاهشی
Reversible	برگشت‌پذیر
Rigid endomorphism	درونریختی صلب
Torsion free	فارغ از تاب

کاملاً مرتب .... Totally ordered
ترتیب بدیهی .... Trivial order
منحصراً تمیز .... Uniquely clean
مونوئید حاصل‌ضرب یکتا .... Unique product monoid
رادیکال پوچ بالایی .... Upper nil radical
خوش‌ترتیب .... Well ordered

نمایه

(S,ω)ـ مک‌کوی، ۳۱
σـ مک‌کوی نسبت به سری‌های توانی ، ۷
(قویاً) تمیزـ پوچ، ۵۵
a.n.u.p.ـ مونوئید، ۲۷
m.a.n.u.p.ـ مونوئید، ۲۷
۲ـ a.n.u.p.ـ مونوئید، ۵۹
۲ـ m.a.n.u.p.ـ مونوئید، ۶۰
۲ـ u.p.ـ مونوئید، ۵۹

آبلی، ۵۴
آرتینی، ۲۶
باریک، ۲۶
برگشتپذیر، ۲
ترتیب بدیهی، ۲۸
تمیز، ۵۴
حذف پذیر، ۲۶
حلقه ۲ـ اولیه، ۵۴
حلقه‌ی سری‌های توانی تعمیم‌یافته اریب، ۲۷
حلقه‌ی مالچوـ نیومن، ۳۴
حلقه‌ی مونوئیدی اریب، ۵۶
خاصیت (A)، ۱۶
خوش‌ترتیب، ۳۳
خوش‌ترتیب جزئی، ۲۷
رادیکال اول، ۵۴
رادیکال پوچ بالایی، ۵۴
زیپ راست، ۴۰
سازگار، ۸
صلب، ۸

فارغ از تاب، ۲۶
فاصله، ۶
قطر، ۶
قویاً تمیز، ۵۵
قویاًـ کراندار، ۴۲
محمل، ۲۷
مرتب مثبت، ۴۶
مسیر، ۶
منحصراً تمیز، ۵۵
مونوئید مرتب، ۲۶
مونوئید مرتب اکید، ۲۶
نیم‌جابه‌جایی، ۵۴
همبند، ۶

کاملاً مرتب، ۲۸
کاملاً مرتب موضعی، ۲۸
کاهشی، ۲
کراندار، ۴۲
کمر گراف، ۶
گروه حاصل‌ضرب یکتا، ۲۶

Abstract

One of most important algebraic structures that has recently been considered is the skew generalized power series rings that is a generalization of important structures such as polynomial rings, Laurent polynomial rings, power series rings, Laurent power series rings, monoid rings and ofcours twisted version of them. In this thesis, we investigate some properties of annihilators in generalized power series rings such as McCoy property, Zip property, Property (A) and strongly AB property. Also we study the zero-divisor graph of generalized power series ring and some classical ring constructions such as skew power series ring. Furthermore, we determine some type of elements such as idempotent, unit, clean and nil-clean elements in skew monoid ring that is a special case of generalized power series ring. Then we study induced subgraphs $\Gamma(\mathrm{Idem}(R)), \Gamma(\mathrm{cln}(R))$ of $\Gamma(R)$ and induced subgraphs $\Gamma(\mathrm{Idem}(R * S)), \Gamma(\mathrm{cln}(R))$ of $\Gamma(R * S)$, where R is a ring and S is a monoid.
Keywords: Zero-divisor graph; Generalized power series ring; Reversible ring; Diameter; Idempotent element; Nilpotent element; Unit element; Clean element.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in: Pure Mathematics (Algebra)

On zero divisor graph of generalized power series rings over noncommutative rings

By: Marzieh Yazdanfar

Supervisor

Prof. Ebrahim Hashemi

January 2019