بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

کارایی سره در بهینه‌سازی چندهدفه و تعمیم آن

نگارنده: آزاده طالشی

استاد راهنما

دکتر مهرداد غزنوی

استاد مشاور

دکتر سمیه مغاری

دی ۱۳۹۷

تقدیم به پدر و مادر عزیز و مهربانم که
در سختی‌ها و دشواری‌های زندگی همواره
یاوری دلسوز و فداکار و پشتیبانی محکم
و مطمئن برایم بوده‌اند.

# سپاس‌گزاری...

از پدر و مادر عزیزم که همیشه پشتیبان من بودند و بدون هیچ چشم داشتی مرا همراهی کردند؛ از استاد راهنمای فرهیخته و شایسته؛ جناب آقای دکتر مهرداد غزنوی که با صبر و حوصله‌ی فراوان در فرایند انجام پایان‌نامه یاری دادند و بدون کمک ایشان این پروژه به جواب مطلوب نمی‌رسید؛ از داوران محترم که زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شدند؛ کمال قدردانی و تشکر را دارم.

هم‌چنین از تمام افرادی که با وجود کار و مشغله‌ی زیاد مرا در این مسیر یاری نمودند نهایت سپاس و قدردانی را دارم

آزاده طالشی
دی ۱۳۹۷

تعهد نامه

اینجانب **آزاده طالشی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **کارایی سره در بهینه‌سازی چندهدفه و تعمیم آن** ، تحت راهنمایی **مهرداد غزنوی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ’’ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

آزاده طالشی
دی ۱۳۹۷

مالکیت نتایج و حق نشر

چکیده

در این پایان‌نامه به بررسی مسائل بهینه‌سازی چندهدفه می‌پردازیم. مفهوم کارایی سره از نظر علمی و محاسباتی در بهینه‌سازی چندهدفه و نظریه تصمیم‌گیری برای جلوگیری از تولید جواب‌هایی با تبادل بی‌کران توابع هدف مهم است. یک اصلاح جزئی برای تعریف اصلی جفریون ارائه می‌شود که ویژگی‌های رایج نقاط کارای سره را حفظ می‌کند. تعریف پیشنهاد شده برای مسائل چندهدفه با بی‌نهایت تابع هدف به‌کار برده می‌شود. رابطه بین جواب‌های کارای سره پیشنهاد شده و جواب‌های بهینه مسائل اسکالرسازی مجموع وزن‌دار و روش نرم چبیشف را بررسی می‌کنیم. اثبات‌های جدید و مثال‌های نقضی را ارائه می‌کنیم که نشان می‌دهند که در حالت کلی تعریف کارایی سره به مفهوم جفریون برای بی‌نهایت تابع هدف کارآمد نیست.

چون الگوریتم‌های بهینه‌سازی چندهدفه معمولا تنها جواب تقریبی را ارائه می‌دهند ما مفهوم تقریب بهینگی کارایی سره جفریون را تجزیه و تحلیل می‌کنیم. نشان می‌دهیم که حد جواب‌های کارای سره تقریبی ممکن است به سمت جواب‌هایی با تبادل بی‌کران میل کند. به‌علاوه با کمک یک مشخصه از سیستم‌های نشدنی، خواص همگرایی مفاهیم مختلف را بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که مفهوم کارایی سره جفریون تقریبی تنها مفهوم تقریبی است که خواص همگرایی مناسبی از خود نشان می‌دهند.

کلمات کلیدی:
اسکالرسازی، بهینه‌سازی چندهدفه، کارایی سره، روش مجموع وزن‌دار، جواب‌های تقریبا کارا.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

۱. آزاده طالشی، دکتر مهرداد غزنوی، بررسی کارایی سره در مسائل با بعد نامتناهی، دومین سمینار ملی کنترل و بهینه‌سازی، آبان ۱۳۹۷

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

فصل ۱

مروری بر ادبیات موضوع

۱.۱ مقدمه

مفهوم کارایی سره [1] از نظر علمی و محاسباتی در بهینه‌سازی چند هدفه [2] و نظریه تصمیم گیری برای جلوگیری از جواب‌هایی با تبادل [3] بی‌کران توابع هدف مهم است. یک اصلاح جزئی برای تعریف اصلی جفریون [4] [۱] مورد بررسی قرار می‌گیرد که ویژگی‌های رایج نقاط کارای سره را حفظ می‌کند. در واقع نقاط کارای سره پیشنهاد شده جواب‌های مسائل اسکالرسازی مجموع وزن‌دار، [5] چبیشف وزن‌دار اصلاح شده وچبیشف وزن‌دار افزوده می‌باشند. اثبات‌های جدید و مثال‌های نقضی ارائه می‌شود که نشان می‌دهند که در حالت کلی نتایج برای بی‌نهایت تابع هدف درست نیست. به علاوه پتانسیل‌های تعریف جدید برای کاربرد در بهینه‌سازی احتمالی و تصمیم‌گیری با عدم قطعیت معرفی می‌شود. چون الگوریتم‌های بهینه‌سازی چند هدفه معمولا تنها جواب تقریبی را ارائه می‌دهند ما مفهوم تقریب بهینگی کارای سره جفریون را تجزیه و تحلیل می‌کنیم. نشان داده می‌شود که حد جواب‌های کارای سره تقریبی ممکن است به سمت جواب‌هایی با تبادل بی‌کران میل کند. به علاوه با کمک یک مشخصه از نشدنی

[1] Proper efficiency
[2] Milticriteria optimization
[3] Trade-off
[4] Geoffrion
[5] Scalarization Weighted-sum

بودن یک سیستم از نامعادلات ، خواص همگرایی مفاهیم بهینگی تقریبی مختلف را بررسی می‌کنیم. نشان داده می‌شود که مفهوم کارای سره جفریون تقریبی تنها مفهوم تقریبی است که خواص همگرایی مناسبی از خود نشان می‌دهد.

۲.۱ پیشینه و ضرورت تحقیق

با توجه به اهمیت جواب‌های کارای سره به معرفی کارایی سره به مفهوم جفریون [۱] و بنسون[6] [۲] ، هنیگ[7] [۳] می‌پردازیم. کارایی تقریبی به نام ε– کارایی را براساس مفهوم کارایی سره جفریون بیان می‌کنیم. کارایی سره از لحاظ نظری و محاسباتی قابل توجه است. در بهینه‌سازی چندهدفه و نظریه تصمیم‌گیری جواب‌های کارا با تبادل متناهی بین توابع هدف از اهمیت زیادی برخوردار است. لذا باید کارایی سره مطرح شود. همچنین در مسائل بهینه سازی احتمالی و برخی مسائل تصمیم‌گیری ممکن است تعداد توابع هدف نامتناهی باشد. لذا باید کارایی سره را برای مسائل بهینه‌سازی نامتناهی‌البعد نیز بررسی کنیم. برای این منظور مفهوم کارایی سره را برای مسائل نامتناهی البعد تعمیم می‌دهیم. همچنین با توجه به این که اغلب الگوریتم‌های بهینه‌سازی جواب‌های تقریبی ارائه می‌دهند و در برخی مسائل نامحدب یا برنامه‌ریزی چندهدفه صحیح پیدا کردن جواب دقیق بسیار مشکل و زمان‌بر است لذا مفهوم کارایی سره تقریبی را بررسی می‌کنیم و الگوریتم‌هایی برای پیدا کردن آن‌ها ارائه می‌دهیم.

مفهوم اولیه کارایی سره توسط کان و تاکر[8] [۴] ارائه شد و این مفهوم بعدا توسط جفریون [۱] اصلاح شد. در واقع جواب‌های سره به مفهوم جفریون جواب‌های کارایی هستند که یک اصلاح جزئی یکی از توابع هدف با بدتر شدن جزئی حداقل یکی از توابع دیگر همراه است. به دنبال تعاریف ارائه شده توسط کان و تاکر و جفریون، چند تعریف دیگر مربوط به کارایی سره ارائه شد ومورد مطالعه قرار گرفت که بعضی از آنها نیز برای مسائل با بعد نامتناهی مناسب است. در مفهوم کارایی سره جفریون، مخروط ترتیبی به صورت $\mathbb{R}^p_{\geqq}$ می‌باشد.هارتلی[9] [۵] و بوروین[10] [۶] مفهوم جفریون را تعمیم دادند و کارایی سره نسبت به یک مخروط محدب بسته دلخواه را برای فضای اقلیدسی متناهی البعد تعریف کردند که تعریف بوروین مورد توجه بیشتری قرار گرفته است. به عنوان مثال جان[11] [۷] تعریف بوروین را برای مسائل بهینه‌سازی برداری [12] تعمیم داد. در ادامه بنسون[13] [۲] یک تعریف جدید از کارایی سره برای فضاهای متناهی‌البعد ارائه داد که اگر مخروط $\mathbb{R}^p_{\geqq}$ را در نظر بگیریم همان تعریف جفریون می‌شود.

---

[6] Benson
[7] Henig
[8] Kuhn and Tucker
[9] Hartley
[10] Borwein
[11] Jahn
[12] Vector Optimization
[13] Benson

هنیگ[14] [۳] تعاریف ارائه شده توسط بوروین و بنسون را با هم ترکیب کرد و یک تعریف جدید از کارایی سره ارائه داد و مفاهیم کارایی سره موضعی و سراسری را بررسی کرد. به‌علاوه تکنیک‌های اسکالرسازی برای به‌دست آوردن جواب‌های کارای سره (تقریبی) در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته است. به‌عنوان مثال غزنوی[15] [۸] و غزنوی و خرم[16] [۹] و غزنوی و همکاران [۱۰] توانستند شرایط لازم و کافی برای کارایی سره تقریبی ارائه دهند. نتایج آن‌ها برای تمام توابع چند هدفه بدون شرط تحدب برقرار است. همچنین زارع‌پیشه[17] و همکاران [۱۱] تعریف جدیدی از کارایی سره ارائه دادند.

در ادامه در این فصل برخی تعاریف و مفاهیم اولیه موجود در بهینه سازی چندهدفه را که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند بیان می‌کنیم.

۳.۱ نمادها و تعریف‌های اولیه

ابتدا چند رابطه ترتیبی روی $R^۲$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۱. [۱۲] فرض کنید $y^۱ = (y_۱^۱, y_۲^۱, \ldots, y_p^۱) \in \mathbb{R}^p, y^۲ = (y_۱^۲, y_۲^۲, \ldots, y_p^۲) \in \mathbb{R}^p$. در این صورت

- رابطه‌ی ”$\geqq$“ترتیب مولفه‌ای ضعیف روی $\mathbb{R}^p$ نامیده می‌شود و $y^۱ \geqq y^۲$ به این مفهوم است که

$$y_k^۱ \geq y_k^۲, \qquad k = ۱, ۲, \ldots, p$$

- رابطه‌ی ”$\geq$“ترتیب مولفه‌ای روی $\mathbb{R}^p$ نامیده می‌شود و $y^۱ \geq y^۲$ به این مفهوم است که

$$y_k^۱ \geq y_k^۲, \qquad k = ۱, ۲, \ldots, p, \qquad y^۱ \neq y^۲$$

- رابطه‌ی ”$>$“ترتیب مولفه‌ای اکید روی $\mathbb{R}^p$ نامیده می‌شود و $y^۱ > y^۲$ به این مفهوم است که

$$y_k^۱ > y_k^۲, \qquad k = ۱, ۲, \ldots, p$$

حال با توجه به تعریف ۱.۳.۱ مجموعه‌های $\mathbb{R}^p_>, \mathbb{R}^p_\geq, \mathbb{R}^p_\geqq$ را تعریف می‌کنیم.

-
$$\mathbb{R}^p_\geqq := \{y \in \mathbb{R}^p, y \geqq ۰\}$$

[14] Henig
[15] Ghaznavi
[16] Khorram
[17] Zarepisheh

•
$$\mathbb{R}^p_{\geq} := \{y \in \mathbb{R}^p, y \geq \circ\}$$

•
$$\mathbb{R}^p_{>} := \{y \in \mathbb{R}^p, y > \circ\}$$

تعریف ۲.۳.۱. [۱۲] مجموعه$C \subset \mathbb{R}^p$ یک مخروط نامیده می‌شود اگر به ازای هر عدد حقیقی $\lambda > \circ$ و هر $d \in C$ داشته باشیم $\lambda d \in C$.

تعریف ۳.۳.۱. [۱۲] مخروط$C \subset \mathbb{R}^p$ محدب است اگر برای هر $\circ < \alpha < ۱$ و برای هر $d^۱, d^۲ \in C$ داشته باشیم:
$$\alpha d^۱ + (۱ - \alpha)d^۲ \in C$$

۴.۱ بهینه‌سازی چندهدفه

در حالت کلی یک مسئله بهینه‌سازی چندهدفه MOP [18] به صورت زیر است .

$$MOP : \min f(x) = (f_۱(x_۱), f_۲(x_۲), \ldots, f_p(x_p)) \quad s.t. \quad x \in X \qquad (۱.۱)$$

که در آن $X \subset \mathbb{R}^n$ یک مجموعه ناتهی است و فضای شدنی نام دارد و برای $p \geq ۲$، f یک تابع برداری متشکل از $p-$بردار با مقادیر حقیقی است. تصویر X تحت f با نماد $Y := f(X) \subseteq \mathbb{R}^p$ نشان داده می‌شود و فضای هدف نامیده می‌شود.

حال تعاریف کارایی و کارایی ضعیف را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱.۴.۱. اگر $\hat{x} \in X$، آن‌گاه

۱. [۱۳] $\hat{x}$ جواب کارای ضعیف [19] مسئله چندهدفه (۱.۱) است، هرگاه هیچ $x \in X$ وجود نداشته باشد که $f(x) < f(\hat{x})$. [شکل۲.۱]

۲. [۱۳] $\hat{x}$ جواب کارای [20] مسئله چندهدفه (۱.۱) است، هرگاه هیچ $x \in X$ وجود نداشته باشد که $f(x) \leq f(\hat{x})$.

با توجه به این‌که تعریف واحدی برای جواب‌های کارا در نظر گرفته نشده است تعدادی از این تعاریف را در گزاره‌ی زیر ارائه می‌کنیم.

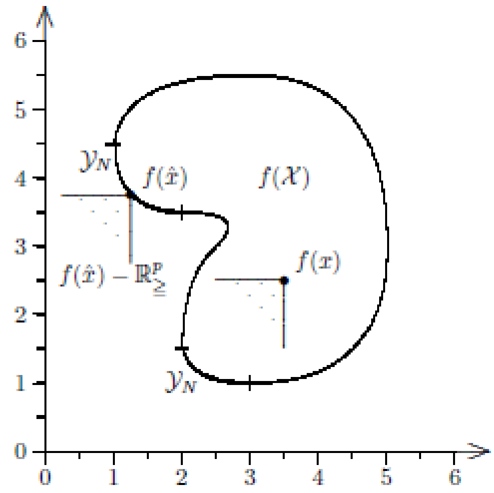
گزاره ۱.۴.۱. [۱۳] [شکل۱.۱] $\hat{x} \in X$ یک جواب کارای مسئله چندهدفه‌ی (۱.۱) است، اگر یکی از موارد زیر برقرار باشد:

---
[18] Multi Objective Optimization
[19] Weakly efficient
[20] Efficient

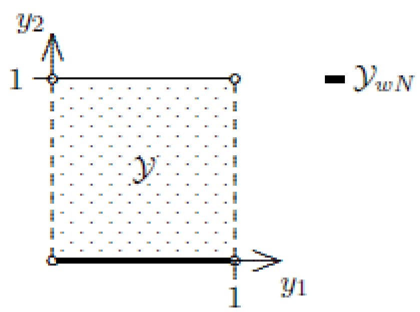
۱. به ازای هر $x \in X$، $f(x) - f(\hat{x}) \in \mathbb{R}^p \setminus \{-\mathbb{R}^p_{\geqq} \setminus \{0\}\}$،

۲. هیچ $x \in X$ وجود نداشته باشد به‌طوری‌که $f(x) - f(\hat{x}) \in -\mathbb{R}^p_{\geqq} \setminus \{0\}$

۳. $\{f(X) - f(\hat{x})\} \cap \{-\mathbb{R}^p_{\geqq}\} = 0$ یا $f(X) \cap \{f(\hat{x}) - \mathbb{R}^p_{\geqq}\} = f(\hat{x})$



شکل ۱.۱: جواب کارا



شکل ۲.۱: جواب‌های کارای ضعیف

تعریف ۲.۴.۱. [۱۳] $\hat{x} \in X$ جواب کارای اکید [21] مسئله‌ی چندهدفه (۱.۱) است، هرگاه هیچ $x \in X$ دیگری وجود نداشته باشد که $f(x) \leqq f(\hat{x})$.

مجموعه جواب‌های کارا ، کارای ضعیف و کارای اکید و کارای سره مسئله چندهدفه (۱.۱) را به ترتیب با نمادهای $X_{PE}, X_{SE}, X_{WE}, X_E$ نمایش می‌دهیم.

[21] Strictly efficient

تعریف ۳.۴.۱. [۱۲] اگر $x \in X$ یک جواب کارای مسئله‌ی بهینه‌سازی (۱.۱) باشد، آن‌گاه $f(x)$ یک نقطه‌ی غیرمغلوب [۲۲] است. هم‌چنین اگر $x^۱, x^۲ \in X$ و $f(x^۲) \geq f(x^۱)$ می‌گوییم $x^۲$ غالب بر $x^۱$ است و $f(x^۲)$ غالب بر $f(x^۱)$ است.

تعریف ۴.۴.۱. تصویر $f(x) \in Y$ از یک نقطه‌ی کارای سره x را یک نقطه غیرمغلوب سره [۲۳] می‌نامیم.

مجموعه‌ی تمام جواب‌های غیرمغلوب ضعیف [۲۴] و غیرمغلوب را به ترتیب با نمادهای Y_{WN} و Y_N نمایش داده می‌شود. این مجموعه‌ها را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد.

$$Y_N := \{f(x) | x \in X_E\}$$

و

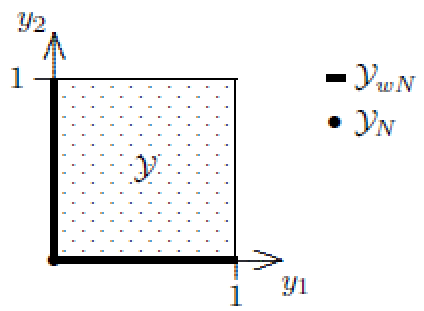
$$Y_{WN} := \{f(x) | x \in X_{WE}\}.$$

گزاره ۲.۴.۱ (شکل۳.۱). با استفاده از تعریف‌های کارا ،کارای ضعیف و کارای اکید می‌توان نتیجه گرفت که

$$X_{SE} \subseteq X_E \subseteq X_{WE}$$

و

$$Y_N \subseteq Y_{WN}.$$



شکل ۳.۱: جواب‌های کارا وکارای ضعیف

همان‌طور که تاکنون مشاهده شد، در بهینه‌سازی چند هدفه معمولا در صورت بهبود یکی از توابع هدف، حداقل یکی از توابع باقیمانده بدتر می‌شود. چنین تبادلی در این مسائل باعث می‌شود که پیدا کردن جواب‌های کارای اکید بسیار سخت شود. حال برای درک بهتر این موضوع تعریف زیر را در خصوص چنین رابطه‌ای ارائه می‌کنیم.

[22] Nondominated point
[23] Proper Nondominated
[24] Weakly Nondominated

تعریف ۵.۴.۱. اگر $\hat{x}$ یک نقطه‌ی شدنی باشد و $i,j \in \{۱,۲,\dots,p\}$، $i<j$. مجموعه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$X_{ij} = \{x \in X : f_i(\hat{x}) > f_i(x), f_j(x) > f_j(\hat{x})\}.$$

تبادل بین f_i و f_j در نقطه شدنی $\hat{x}$ با $T_{ij}(\hat{x})$ نشان داده می‌شود و تعریف آن به شکل زیر است.

$$T_{ij}(\hat{x}) := \max_{x \in X_{ij}} \frac{f_i(\hat{x}) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(\hat{x})}.$$

تعریف ۶.۴.۱. تبادل بین دو تابع (f_i, f_j) در جواب $\hat{x}$ از بالا کران‌دار گفته می‌شود، اگر عدد حقیقی $M > ۰$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$T_{ij}(\hat{x}) \leq M.$$

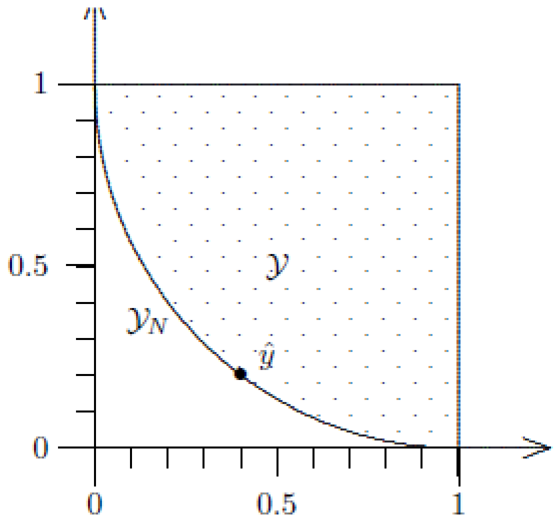
تبادل بین توابع هدف می‌تواند بی‌کران باشد. بدین معنی که بهتر شدن یکی از توابع هدف می‌تواند باعث بدتر شدن حداقل یکی دیگر از توابع هدف به مقدار بسیار زیاد شود. پس جواب‌های کارا با تبادل کران‌دار از اهمیت بیشتری برخوردار هستند. جفریون دسته‌ای از جواب‌های کارا به اسم جواب‌های کارای سره را پیشنهاد کرد و به وسیله‌ی این تعریف جواب‌های کارایی که در آن‌ها به ازای هر تابع داده شده حداقل یک تابع دیگر وجود داشته باشد تا تبادل بین این دو تابع کران‌دار شده را شناسایی کرد. کارایی سره در الگوریتم‌های تعاملی از اهمیت زیادی برخوردار است. در این الگوریتم‌ها در فرآیند حل مسئله جواب‌هایی به تصمیم‌گیرنده ارائه می‌شود و این شخص باید در مورد مناسب بودن یا نبودن جواب قضاوت کند. در نتیجه دانستن اینکه بهبود یکی از توابع هدف منجر به بدتر شدن یکی دیگر از توابع هدف می‌شود، می‌تواند به تصمیم‌گیرنده کمک زیادی بکند. کارایی سره برای اولین بار توسط کان و تاکر [۴] در سال ۱۹۵۱ ارائه شد. این تعریف به خاطر وابسته بودن به شرط مشتق‌پذیری توجه زیادی را به خود جلب نکرد. بعد از آن، تعریف‌های متفاوت زیادی برای مفهوم کارایی سره ارائه شد، از جمله این تعریف‌ها می‌توان به بنسون [۲] ، بوروین [۶] ، هنیگ [۳] و جفریون [۱] اشاره نمود. در زیر تعریف کارایی سره به مفهوم جفریون آورده شده است:

تعریف ۷.۴.۱. [۱] نقطه ی شدنی $\hat{x} \in X$ جواب کارای سره [۲۵] مسئله چندهدفه (۱.۱) به مفهوم جفریون نامیده می‌شود، اگر $\hat{x}$ کارا باشد و عدد حقیقی $M > ۰$ وجود داشته باشد به نحوی که برای هر $i \in \{۱,۲,\dots,p\}$ و هر $x \in X$ که در $f_i(x) < f_i(\hat{x})$ صدق می‌کند، اندیس $j \in \{۱,۲,\dots,p\}$ وجود داشته باشد به طوری که $f_j(x) > f_j(\hat{x})$ و

$$\frac{f_i(\hat{x}) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(\hat{x})} \leq M.$$

مثال ۱.۴.۱. [۱۳] فرض کنید فضای شدنی و فضای تصمیم به صورت زیر باشد.

$$X = \{(x_۱, x_۲) \in \mathbb{R}^۲ : (x_۱ - ۱)^۲ + (x_۲ - ۱)^۲ \leq ۱, ۰ \leq x_۱, x_۲ \leq ۱\}.$$



شکل ۱.۴: نقطه‌ی غیرمغلوب سره

و $Y = X$. واضح است که

$$Y_N = \{(y_۱, y_۲) \in Y : (y_۱ - ۱)^۲ + (y_۲ - ۱)^۲ = ۱\}$$

همان‌طور که در شکل ۴.۱ مشاهده می‌شود هر چه $\hat{y}$ به نقطه $(۱,۰)$ نزدیک‌تر می‌شود، $y_۱$ به ازای یک واحد افزایش $y_۲$ یک واحد کاهش می‌یابد. حد این تبادل، وقتی‌که $y_۱$ به سمت صفر میل می‌کند برابر با بی‌نهایت است.

حال جواب $\hat{x} = (۱,۰)$ را در نظر بگیرید.نشان می‌دهیم که $\hat{x}$ جواب کارای سره از دید جفریون نیست.

برای اثبات چنین ادعایی باید ثابت کنیم که به ازای همه‌ی $M > ۰$ اندیس $i \in \{۱,۲\}$ و بعضی از $x \in X$ وجود دارد که $f_i(x) < f_i(\hat{x})$ به‌طوری‌که

$$\frac{f_i(\hat{x}) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(\hat{x})} > M.$$

به ازای تمام $j \in \{۱,۲\}$ با $f_j(x) > f_j(\hat{x})$

فرض کنید $Y = X$, $i = ۱$, $۰ < \varepsilon < ۱$, $x_۱^\varepsilon = ۱ - \varepsilon$ و $x_۲^\varepsilon = ۱ - \sqrt{۱ - \varepsilon^۲}$. واضح است که x^ε کارا است. زیرا $(x_۱^\varepsilon)^۲ + (x_۲^\varepsilon)^۲ = ۱$. از آنجایی که $x^\varepsilon \in X$، $x_۱^\varepsilon < \hat{x}_۱$ و $x_۲^\varepsilon > \hat{x}_۲$ خواهیم داشت $i = ۱, j = ۲$ لذا

$$\frac{f_i(\hat{x}) - f_i(x^\varepsilon)}{f_j(x^\varepsilon) - f_j(\hat{x})} = \frac{۱ - (۱ - \varepsilon)}{۱ - \sqrt{۱ - \varepsilon^۲}} = \frac{\varepsilon}{۱ - \sqrt{۱ - \varepsilon^۲}} \xrightarrow{\varepsilon \to ۰} \infty$$

تعریف ۸.۴.۱. یک نقطه $\hat{x} \in X$ کارایی سره به معنای بنسون است هر گاه

$$cl(cone(Y + R^p_{\geqq} - f(\hat{x}))) \cap (-R^p_{\geqq}) = \{۰\}$$

[25] Proper efficient

که نماد "$Cl(cone)$" برای نشان دادن بستار مخروط تصویر شده متناظر استفاده می‌شود

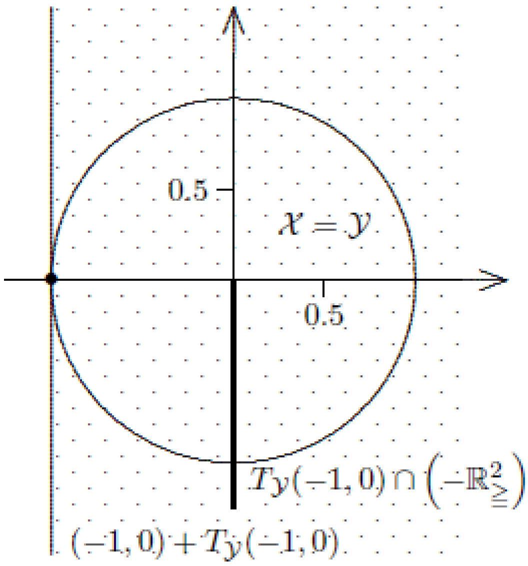
مثال ۲.۴.۱. فرض کنید $X = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$، $f_1(x) = x_1$، $f_2(x) = x_2$. نقاط $(-1, 0)$ و $(0, -1)$ کارا هستند. ادعا می‌کنیم که این نقاط کارای سره به معنای بنسون نیستند. کافی است ثابت کنیم که اشتراک

$$cl(cone(Y + R^p_{\geqq} - f(\hat{x}))) \cap (-R^p_{\geqq})$$

صفر نمی‌شود. از روی شکل ۵.۱ واضح است که

$$cl(cone(Y + R^p_{\geqq} - f(\hat{x}))) \cap (-R^p_{\geqq}) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 = 0, y_2 \leq 0\}$$

که در شکل ۵.۱ با خط سیاه نشان داده شده است. یک استدلال مشابه $(0, -1)$ را نتیجه می‌دهد.



شکل ۵.۱: کارایی سره بنسون

اکنون به تعریف دو نوع جواب برای مسائل تک‌هدفه (SOP) [26] می‌پردازیم. مسئله تک‌هدفه زیر را در نظر بگیرید:

$$SOP : \min_{x \in X} g(x) \tag{2.1}$$

که درآن $g : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. جواب‌های بهینه سراسری و بهینه اکید سراسری به صورت زیر تعریف می‌شوند.

تعریف ۹.۴.۱. [۱۴] فرض کنید $\varepsilon \in \mathbb{R}_{\geq}$. نقطه شدنی $\hat{x} \in X$ در مسئله (۲.۱)،

- بهینه سراسری [27] نامیده می‌شود اگر به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $g(\hat{x}) \leq g(x)$.

[26] Single Objective Problem
[27] Optimal

- بهینه اکید سراسری [28] نامیده می‌شود اگر به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $g(\hat{x}) < g(x)$.

- $\varepsilon-$بهینه نامیده می‌شود اگر به‌ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $g(\hat{x}) \leq g(x) + \varepsilon$.

تعریف ۱.۴.۱۰. [۱۳] نقطه‌ی $y^I = (y_1^I, y_2^I, \dots, y_p^I)$ که به‌صورت

$$y_k^I = \min_{y \in Y} y_k, \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

تعریف می‌شود را نقطه‌ی ایده‌آل [29] مسئله‌ی چندهدفه (۱.۱) گویند که در آن $y = \{f_1(x), \dots, f_p(x), x \in X\}$.

تعریف ۱.۴.۱۱. [۱۳] فرض کنید $\alpha \in \mathbb{R}^p_>$ یک بردار با مولفه‌های مثبت کوچک باشد. در این صورت نقطه $y^u = (y_1^u, y_2^u, \dots, y_p^u)$ را که به‌صورت

$$y^u := y^I - \alpha$$

تعریف می‌شود را نقطه‌ی اتوپیا(فوق ایده‌آل) [30] مسئله‌ی چندهدفه (۱.۱) می‌نامیم.

۱.۵ اسکالرسازی

روش‌های متعددی برای حل مسائل چندهدفه وجود دارد، یکی از معمول‌ترین این روش‌ها به این صورت است که ابتدا مسئله‌ی چند هدفه را با استفاده از یکی از روش‌های اسکالرسازی [31] به یک مسئله تک هدفه تبدیل می‌کنیم و سپس با به‌دست آوردن جواب‌های این مسئله تک هدفه و با توجه به شروط لازم و کافی روش استفاده شده برای اسکالرسازی مسئله‌ی چندهدفه، جواب‌های مسئله اصلی را نیز پیدا می‌کنیم. زمانی که به دنبال به دست آوردن جواب بهینه هستیم، ابتدا تصمیم‌گیرنده با توجه به دانش قبلی خود از مسئله، مقدار بهینه را مشخص می‌کند سپس یک روش اسکالرسازی انتخاب می‌شود و مسئله تک هدفه حل می‌شود. در ادامه به معرفی چند روش معروف اسکالرسازی می‌پردازیم.

[28] Stricty optimal
[29] Ideal
[30] Otupia
[31] Scalarization

۱.۵.۱ روش اسکالرسازی جهتی

روش اسکالرسازی جهتی [۳۲] توسط پاسکولتی [۳۳] و سرافینی [۳۴] در سال ۱۹۸۴ به صورت زیر معرفی شد.

$$\begin{aligned} &PS(a,r) : \min \quad t \\ &s.t. \\ &f(x) \leq a + tr \in K, \\ &x \in X \subseteq \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{۳.۱}$$

که در آن K یک مخروط محدب بسته و $a \in K$ و $r \in int(K)$ مقادیری ثابت هستند که توسط تصمیم‌گیرنده معین می‌شوند. ما در این پایان‌نامه از مخروط $\mathbb{R}^p_{\geqq}$ یا ترتیب طبیعی استفاده می‌کنیم. بنابراین در مسئله (۳.۱) با جایگزینی مخروط $\mathbb{R}^p_{\geqq}$ به جای مخروط K خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &PS(a,r) : \min \quad t \\ &s.t. \\ &f(x) \leq a + tr \in \mathbb{R}^p_{\geqq}, \\ &x \in X \subseteq \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{۴.۱}$$

قضیه ۱.۵.۱. [۱۴] ۱. اگر $(\hat{x},\hat{t})$ جواب بهینه مسئله $PS(a,r)$ تعریف شده با (۴.۱) باشد، آن‌گاه $\hat{x}$ جواب کارای ضعیف مسئله چندهدفه (۱.۱) است.
۲. اگر $(\hat{x},\hat{t})$ جواب بهینه اکید مسئله $PS(a,r)$ باشد، آن‌گاه $\hat{x}$ جواب کارای مسئله چندهدفه (۱.۱) است.

۲.۵.۱ اسکالرسازی مجموع وزن‌دار

این روش که یکی از پرکاربردترین روش‌های اسکالرسازی است به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود: [۱۴]

$$WS(\lambda) : \min_{x \in X} \sum_{j=1}^{p} \lambda_j f_j(x) \tag{۵.۱}$$

که در آن $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geq}$ به عنوان ضرایب وزن شناخته می‌شود. در این روش، روابط بین جواب‌های بهینه‌ی مسئله‌ی اسکالرسازی شده‌ی (۵.۱) و جواب‌های کارای مسئله‌ی (۱.۱) توسط وایت [۳۵] [۱۵] بررسی شده است که نتایج آن‌را به صورت قضیه‌ی زیر بیان می‌کنیم.

[32] Direct Scalarization
[33] Pascoletti
[34] Serafini
[35] White

قضیه ۲.۵.۱. [۱۴]

۱. اگر $\hat{x} \in X$ جواب بهینه سراسری $WS(\lambda)$ باشد، آن‌گاه $\hat{x}$ جواب کارای ضعیف مسئله‌ی چندهدفه (۱.۱)است.

۲. اگر $\hat{x} \in X$ جواب بهینه اکید سراسری $WS(\lambda)$ باشد، آن‌گاه $\hat{x}$ جواب کارای مسئله‌ی چندهدفه (۱.۱)است.

۳. اگر $\hat{x} \in X$ جواب بهینه سراسری $WS(\lambda)$ با $\lambda \in \mathbb{R}^p_>$ باشد، آن‌گاه $\hat{x}$ جواب کارای سره مسئله‌ی چندهدفه (۱.۱) است.

۳.۵.۱ روش اسکالرسازی $\varepsilon-$ محدودیت

فرمول‌بندی روش $\varepsilon-$ محدودیت [۳۶] به شکل زیر است

$$
\begin{aligned}
&CO(\varepsilon) : \min_{x \in X} f_k(x) \\
&s.t. \quad f_i(x) \leq \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \quad i \neq k
\end{aligned}
\tag{۶.۱}
$$

که در آن $\varepsilon_i \in \mathbb{R}, i \neq k$ کوچکترین کران بالا برای توابع هدف f_i هستند. روابط بین جواب‌های بهینه و کارا در این روش توسط وایت [۱۵] مورد بررسی قرار گرفت که طبق قضیه زیر بیان می‌شود.

قضیه ۳.۵.۱. [۱۵] فرض کنید $\varepsilon_i \in \mathbb{R}$ در این صورت داریم:

۱. اگر $\hat{x} \in X$ جواب بهینه اکید سراسری مسئله‌ی (۶.۱) باشد، آن‌گاه $\hat{x}$ جواب کارای مسئله‌ی چندهدفه (۱.۱) است.

۲. اگر $\hat{x} \in X$ جواب بهینه سراسری مسئله‌ی (۶.۱) باشد، آن‌گاه $\hat{x}$ جواب کارای ضعیف مسئله‌ی چندهدفه (۱.۱)است.

۴.۵.۱ روش اسکالرسازی نرم‌ـ‌چبیشف

روش نرم‌ـ‌چبیشف [۳۷] به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$
TN(y^u, \lambda) : \min_{x \in X} \max_{i = 1, 2, \ldots, p} \{\lambda_i (f_i(x) - y_i^u)\}
\tag{۷.۱}
$$

که در آن $\lambda \in \mathbb{R}^p_{\geqq}$. روابط بین جواب‌های کارا و بهینه مسئله‌ی (۷.۱) را در قالب قضیه زیر بیان می‌کنیم:

[36] The ε-constraint Method
[37] Tchebycheff-norm method

قضیه ۱.۵.۴. [۱۴]

۱. اگر $\hat{x} \in X$ جواب بهینه اکید مسئله‌ی (۱.۷) باشد، آن‌گاه $\hat{x}$ جواب کارای مسئله‌ی چندهدفه (۱.۱) است.

۲. اگر $\hat{x} \in X$ جواب بهینه مسئله‌ی (۱.۷) باشد، آن‌گاه $\hat{x}$ جواب کارای ضعیف مسئله‌ی چندهدفه (۱.۱) است.

فصل ۲

تعریف کارایی سره جفریون برای بهینه‌سازی بردار حقیقی با ضابطه‌های نامتناهی

مطالب این فصل از مراجع [۱، ۲، ۶، ۱۳، ۱۶–۲۲] گرفته شده است.

۱.۲ بیان مسئله و تعاریف

در این فصل یک نوع تعمیم یافته مسئله حداکثر بردار متناهی البعد و مفهوم کارایی سره پیشنهاد شده توسط جفریون [۱] را بررسی می‌کنیم. فرض کنید I یک مجموعه اندیس متناهی یا شمارای نامتناهی باشد و فرض کنید V یک فضای برداری خطی حقیقی متناظر یا فضای دنباله‌ی l^∞ باشد به‌طوری‌که

$$\|v\|_\infty := \sup_{i \in I} |v_i| < \infty \quad \forall v \in V.$$

اگر I متناهی باشد، آن‌گاه این نرم معادل نرم ماکزیمم است. مجموعه‌های متناظر با بردارهای غیرمنفی یا مثبت اکید را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$V_{\geq} := \{v \in V : v_i \geq ۰, \quad \forall i \in I\},$$

$$V_> := \{v \in V : v_i > \circ, \quad \forall i \in I\}.$$

فرض کنید مجموعه‌ای از نقاط شدنی $X \subseteq U$ در یک فضای بردار حقیقی U، و یک تابع حقیقی مقدار $f : U \to V$ داده شده باشد. با استفاده از مخروط $C = V_{\geq}$ مسئله حداکثر بردار نسبت به C به صورت زیر می‌باشد:

$$(VMP) \qquad \max_{C} f(x) \quad s.t. \quad x \in X, \tag{۱.۲}$$

که هدف آن پیدا کردن همه‌ی نقاطی است که کارا هستند. یعنی پیدا کردن تمام $x^\circ \in X$ ها که هیچ $x \in X$ ای موجود نیست به‌طوری‌که $f(x) \geq f(x^\circ)$ و $f(x) \neq f(x^\circ)$. اگر $f_i(x) \geq f_i(x^\circ)$ برای هر $i \in I$ آن‌گاه $f(x) \geq f(x^\circ)$. برای مورد خاصی که مجموعه I متناهی است، جفریون [۱] تعریف ۷.۴.۱ فصل ۱ را بیان می‌کند. یک نقطه کارای x° که کارای سره نیست نقطه کارای ناسره نامیده می‌شود، به این معنی که برای هر عدد حقیقی $M > \circ$ یک اندیس i و یک نقطه $x \in X$ وجود دارد به‌طوری که

$$\frac{f_i(x) - f_i(x^\circ)}{f_j(x^\circ) - f_j(x)} > M$$

برای هر j به‌طوری‌که $f_j(x) < f_j(x^\circ)$. همچنین جفریون به این نکته اشاره می‌کند که‌''اگر تعداد معینی از ضابطه‌ها وجود داشته باشد، ما می‌بینیم که برای بعضی از ضابطه‌ها افزایش نهایی یکی به صورت خودسرانه می‌تواند باعث زیان نهایی در ضابطه‌های دیگر شود.'' برای حفظ این تفسیر، اگر I نامتناهی باشد کارایی سره باید از وجود تبادل‌های بی‌کران جلوگیری کند. ما تعریف زیر را پیشنهاد می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۲. یک نقطه $x^\circ \in X$ به مفهوم جفریون کارای سره است اگر آن کارا باشد و برای هر i و هر $x \in X$ با $f_i(x) > f_i(x^\circ)$، یک عدد حقیقی $M_i > \circ$ وجود داشته باشد که

$$\frac{f_i(x) - f_i(x^\circ)}{f_j(x^\circ) - f_j(x)} \leq M_i$$

برای حداقل یک j که $f_j(x) < f_j(x^\circ)$.

تعریف ۱.۱.۲ معادل با تعریف اولیه با انتخاب $M = \max_{i \in I}\{M_i\}$ یا $M_i = M$ برای هر $i \in I$ است.به طور مشابه، اگر I نامتناهی باشد آن‌گاه تعریف کارایی سره جفریون با تعریف ۱.۱.۲ با $M_i = M$ برای هر $i \in I$ مطابقت دارد.

این مشاهدات در گزاره زیر خلاصه می‌شود.

گزاره ۱.۱.۲. تعریف کارایی سره به مفهوم جفریون برای کارایی سره به مفهوم تعریف ۱.۱.۲ کافی است اما اگر تعداد ضابطه‌ها متناهی باشد لازم نیز می‌باشد.

به‌طور کلی، تعریف ۱.۱.۲ محدودیت کمتری دارد، و ما معتقدیم که بهتر است با هدف اصلی جفریون موافق باشیم که اگر I نامتناهی باشد ''تعریف محدودی از کارایی را پیشنهاد می‌کند

که (a) نقاط کارای یک نوع غیرمتشابه خاص را از بین می‌برد و (b) توصیف رضایت‌بخش‌تری را به خود می‌دهد" . به‌طور خاص، ما ثابت خواهیم کرد که تنها تعریف ۱.۱.۲ مشخصه‌های نقاط کارای سره جفریون را به‌عنوان جواب برای مجموع‌های وزن‌دار یا سری‌های وزن‌دار با وزن‌های اکیدا مثبت برای مسائل محدب حفظ می‌کند [۱] و به‌عنوان بهترین تقریب به نقطه ایده‌آل با استفاده از نرم‌های چبیشف افزوده یا نرم چبیشف اصلاح شده بدون فرض همگرایی می‌باشد [۱۶، ۱۹] ما هم‌چنین مثال‌های نقضی را نشان خواهیم داد تا نشان دهیم که چنین نتایجی معمولا برای تعریف اصلی غلط است، مگر این‌که تعداد ضابطه‌ها متناهی باشد. در نهایت ما اشاره می‌کنیم که تعریف ۱.۱.۲ نیز با مفهوم کارایی سره ارائه شده توسط بنسون [۲] مطابقت دارد که تعریف قبلی توسط بوروین [۶] برای مخروط $C \subseteq V$ را تعمیم می‌دهد. اگرچه تعریف بنسون در اصل فقط برای مسائل با بعد متناهی با $V = \mathbb{R}^p$ تدوین شده است، اما این مفهوم را می‌توان به سادگی به مسائل با بعد نامتناهی تعمیم داد.

تعریف ۲.۱.۲. یک نقطه $x^\circ \in X$ کارای سره به مفهوم بنسون است اگر آن کارا باشد و

$$cl(cone(f(X) - \{f(x^\circ)\} - C)) \cap C = \{\circ\},$$

که نماد "$Cl(cone)$" برای نشان دادن بستار مخروط تصویر شده متناظر استفاده می‌شود و $f(X) := \{f(x) : x \in X\}$ به عنوان مجموعه‌ای از بردارهای ضابطه‌های قابل دستیابی تعریف می‌شود.

گزاره ۲.۱.۲. برای $C = V_{\geq}$ کارایی سره به مفهوم بنسون معادل کارایی سره به مفهوم جفریون با استفاده ازتعریف ۱.۱.۲ است.

برهان. اثبات قضیه ۳.۲ در بنسون [۲]، اگر تعداد ضابطه‌ها متناهی باشد درستی رابطه‌ی فوق را ایجاد می‌کند و به‌طور مشابه در حالت شمارای نامتناهی نیز برقرار می‌باشد. چون نسبت حدی محدودیت‌ها و همه‌ی رابطه‌ها به‌صورت نقطه‌ای در نظر گرفته شده‌اند. مخصوصا، اثبات این‌که کارایی سره به مفهوم بنسون، برای کارایی سره به مفهوم جفریون لازم است در بخش (i) از قضیه ۳.۲ براساس گزاره ۱ در بوروین [۶] آمده است، که هم‌چنین برای تعداد دلخواه از اهداف برقرار است. ما از تکرار این اثبات‌های قبلی صرف نظر خواهیم کرد و به جای آن به مرجع اصلی برای جزئیات بیشتر مراجعه می‌کنیم. □

۲.۲ توصیف نتایج

مشابه با تجزیه و تحلیل اصلی کارایی سره توسط جفریون [۱] ابتدا رابطه بین مسئله حداکثر برداری VMP تعریف شده به‌صورت (۱.۲) و مسئله حداکثر اسکالر زیر را بررسی می‌کنیم:

$$(P_\lambda): \qquad max_{x \in X} \sum_{i \in I} \lambda_i f_i(x), \tag{۲.۲}$$

که $\lambda \in V_{\geq}$ یک بردار پارامتر غیر منفی است که معمولا به‌صورت $\sum_{i\in I} \lambda_i = ۱$ نرمال شده است. به‌طور خاص اگر I نامتناهی باشد، آن‌گاه مجموع فوق یک سری نامتناهی است که مقدار آن اگر وجود داشته باشد فقط به‌عنوان یک حد تعریف می‌شود و یک نرمال‌سازی مناسب لازم است تا تضمین شود که مقدار حداکثر یا سوپرمم مسئله P_λ تعریف شده به‌صورت (۲.۲) کران‌دار است. از این رو انتخاب بردار پارامتر λ را به یکی از دو مجموعه زیر محدود می‌کنیم:

$$\Lambda := \{\lambda \in V : \sum_{i\in I} \lambda_i = ۱, \lambda_i \geq ۰ \quad \forall i \in I\};$$

$$\mathring{\Lambda} := \{\lambda \in V : \sum_{i\in I} \lambda_i = ۱, \lambda_i > ۰ \quad \forall i \in I\}.$$

نتایجی که نقاط کارایی سره را بر حسب جواب‌های مسئله مجموع وزن‌دار P_λ تعریف شده به‌صورت (۲.۲) مشخص می‌کند همراه با اثبات‌های تعمیم یافته در قضیه‌های ۲.۲.۲ و ۵.۲.۲ ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱.۲.۲. [۱۳] فرض کنید $\lambda \in \mathring{\Lambda}$ یک پارامتر وزن با مولفه‌های مثبت $\lambda_i > ۰$ برای هر $i = ۱, \ldots, p$ باشد. اگر $x^\circ \in X$ یک جواب بهینه برای مسئله مجموع وزن‌دار P_λ تعریف شده به‌صورت (۲.۲) باشد، آن‌گاه x° یک جواب کارای سره برای VMP تعریف شده به‌صورت (۱.۲) است.

برهان. کارا بودن x° واضح است. برای این‌که نشان دهیم x° کارای سره است یک M به اندازه کافی بزرگ انتخاب می‌کنیم. قرار می‌دهیم $M := (p-۱)\max_{i,j} \frac{\lambda_j}{\lambda_i}$. فرض کنید x° کارای سره نباشد لذا اندیس $i \in \{۱, ۲, \ldots, p\}$ و $x \in X$ با $f_i(x) < f_i(x^\circ)$ وجود دارد که $f_i(x^\circ) - f_i(x) > M(f_j(x) - f_j(x^\circ))$ برای هر $j \in \{۱, ۲, \ldots, p\}$ با $f_j(x) > f_j(x^\circ)$. بنابراین

$$f_i(x^\circ) - f_i(x) > (p-۱)\max_{i,j} \frac{\lambda_j}{\lambda_i}(f_j(x) - f_j(x^\circ))$$

لذا

$$f_i(x^\circ) - f_i(x) > (p-۱)\frac{\lambda_j}{\lambda_i}(f_j(x) - f_j(x^\circ))$$

برای هر $j \neq i$. اگر طرفین رابطه فوق را در $\frac{\lambda_i}{p-۱}$ ضرب کنیم و سپس بر روی $j \neq i$ جمع ببندیم داریم:

$$\lambda_i(f_i(x^\circ) - f_i(x)) > \sum_{j\neq i} \lambda_j(f_j(x) - f_j(x^\circ)) \Rightarrow$$

$$\lambda_i f_i(x^\circ) + \sum_{j\neq i} \lambda_j f_j(x^\circ) > \lambda_i f_i(x) + \sum_{j\neq i} \lambda_j f_j(x)$$

لذا

$$\sum_{i=۱}^{p} \lambda_i f_i(x^\circ) > \sum_{i=۱}^{p} \lambda_i f_i(x)$$

که با بهینگی x° برای مسئله مجموع وزن‌دار تناقض دارد. $\square$

قضیه ۲.۲.۲. فرض کنید $\lambda \in \mathring{\Lambda}$ یک پارامتر وزن با مولفه‌های مثبت $\lambda_i > 0$ برای هر $i \in I$ باشد. اگر $x^\circ \in X$ یک جواب بهینه برای P_λ تعریف شده به‌صورت (۲.۲) باشد، آن‌گاه x° یک جواب کارای سره برای VMP تعریف شده به‌صورت (۱.۲) است.

اگر I متناهی باشد، آن‌گاه قضیه ۲.۲.۲ با قضیه ۱.۲.۲ معادل است، که اثبات آن نشان می‌دهد که x° با $M = (p-1)\max_{i,j}\{\lambda_j/\lambda_i\}$، کارایی سره است که p تعداد ضابطه‌ها است. برای تعداد بیشتری از اهداف، اما این مقدار برای M لزوما به بی‌نهایت میل می‌کند، و به‌خصوص برای $p = \infty$. با این انتخاب M بیان قضیه ۲.۲.۲ برای تعریف اصلی کارایی سره نادرست می‌باشد، که M باید یکنواخت و مستقل از i انتخاب شود. بنابراین، ما اثبات کلی‌تری را ارائه می‌دهیم که در بخش‌های بزرگ‌تر مثل آن‌چه که در [۱] ارائه شد کار می‌کند، اما اکنون از گزینه‌های مختلف برای M_i استفاده می‌کنیم که به تعداد واقعی ضابطه‌های مسئله بستگی ندارد.

برهان. فرض کنید $\lambda \in \mathring{\Lambda}$ ثابت باشد، به‌طوری‌که $\sum_{i\in I}\lambda_i = 1$ و $\lambda_i > 0$ برای هر $i \in I$ و فرض کنید $x^\circ \in X$ در P_λ تعریف شده به‌صورت (۲.۲) بهینه باشد. کارا بودن x° واضح است. بنابراین ما فقط باید نشان دهیم که x° کارای سره است و تعریف ۱.۱.۲ با

$$M_i := \frac{\sum_{j\neq i}\lambda_j}{\lambda_i} = \frac{1-\lambda_i}{\lambda_i}, \tag{۳.۲}$$

که برای هر $i \in I$ اکیدا مثبت و متناهی است برقرار می‌باشد. حال فرض کنید، به منظور ایجاد یک تناقض یک اندیس $i_\circ \in I$ و یک نقطه $x^1 \in X$ وجود دارد به‌طوری که $f_{i_\circ}(x^1) > f_{i_\circ}(x^\circ)$ و

$$f_{i_\circ}(x^1) - f_{i_\circ}(x^\circ) > M_{i_\circ}(f_j(x^\circ) - f_j(x^1)) \tag{۴.۲}$$

برای هر $j \in I$ با $f_j(x^\circ) > f_j(x^1)$. چون سمت چپ و $M_{i_\circ}$ در (۴.۲) مثبت هستند این نامساوی هم‌چنین اگر $f_j(x^\circ) \le f_j(x^1)$ درست است . این نتیجه می‌دهد که ما می‌توانیم هر یک از این نامساوی‌ها را در $\lambda_j (j \neq i_\circ)$ متناظرش ضرب کنیم و آن‌ها را با هم جمع کنیم برای پیدا کردن این‌که

$$\sum_{j\neq i_\circ}\lambda_j(f_{i_\circ}(x^1) - f_{i_\circ}(x^\circ)) > M_{i_\circ}\sum_{j\neq i_\circ}(\lambda_j(f_j(x^\circ) - f_j(x^1))). \tag{۵.۲}$$

با تعریف M_i با $i = i_\circ$ در (۳.۲)، داریم $\sum_{j\neq i_\circ}\frac{\lambda_j}{M_{i_\circ}} = \lambda_{i_\circ}$ و تجدید آرایش (۵.۲) نتیجه می‌دهد $\sum_{i\in I}\lambda_i f_i(x^1) > \sum_{i\in I}\lambda_i f_i(x^\circ)$ که نشان می‌دهد که x° نمی‌تواند در P_λ تعریف شده به‌صورت (۲.۲) بهینه باشد، که در تناقض با فرض اولیه ما می‌باشد. در نتیجه فرض ما اشتباه است و x° هم‌چنین کارایی سره می‌باشد. □

اثبات فوق صرف نظر از این‌که مجموعه I متناهی یا نامتناهی باشد برقرار است. به‌خصوص اگر $|I| = p$ آن‌گاه

$$\max_{i\in I}\{M_i\} = \max_{i\in I}\{\sum_{j\neq i}\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\} \le \max_{i\in I}\{(p-1)\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\}.$$

توجه شود که اگر I متناهی باشد آن‌گاه ثابت‌های داده شده در (۳.۲) هیچ‌گاه بزرگ‌تر از ثابت‌های داده شده در اثبات قضیه اصلی جفریون نمی‌باشد. اگر I نامتناهی باشد آن‌گاه $\lim \lambda_i = \inf \lambda_i = 0$ و بنابراین $\lim M_i = \sup M_i = \infty$ وجود ندارد.این نشان می‌دهد که برقراری قضیه ۲.۲.۲ ممکن است برای ضابطه‌های نامتناهی با انتخاب یکنواخت M ادامه پیدا نکند .

۱.۲.۲ روش مجموع وزن‌دار برای مسائل محدب

قضیه ۳.۲.۲. لم فارکاس [۱۳] فرض کنید $X \subset \mathbb{R}^n$ یک مجموعه محدب باشد و فرض کنید $h_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\forall k = 1, \ldots, p)$ توابعی مقعر باشند آن‌گاه اگر سیستم $h_k(x) > 0 \quad (\forall k = 1, \ldots, p)$ هیچ جواب $x \in X$ نداشته باشد آن‌گاه وجود دارد $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0$ به‌طوری‌که

$$\forall x \in X : \quad \sum_{k=1}^{p} \lambda_k h_k(x) \leq 0.$$

قضیه ۴.۲.۲. [۱۳] فرض کنید X یک مجموعه محدب باشد و فرض کنید $f_i : X \to \mathbb{R}$ به ازای هر $i = 1, \ldots, p$ مقعر باشند. آن‌گاه x° کارای سره در VMP تعریف شده به‌صورت (۱.۲) است اگر و تنها اگر $\lambda \in \mathring{\Lambda}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که x° در P_λ تعریف شده به‌صورت (۲.۲) بهینه باشد.

برهان. قسمت عکس قضیه، قضیه ۱.۲.۲ می‌باشد که قبلا ثابت کردیم. کافیست نشان دهیم که اگر x° کارای سره باشد آن‌گاه $(\forall i = 1, \ldots, p) \quad \lambda_i > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که x° جواب بهینه مسئله P_λ تعریف شده به‌صورت (۲.۲) است. فرض کنید x° کارای سره باشد. بنا به تعریف، یک عدد $M > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $i = 1, \ldots, p$، سیستم

$$\begin{cases} f_i(x) > f_i(x^\circ), \\ f_i(x) + M f_j(x) > f_i(x^\circ) + M f_j(x^\circ), \quad j \neq i, j = 1, 2, \ldots, p. \end{cases}$$

دارای جواب نیست. در نتیجه بنا به قضیه فوق (لم فارکاس) برای i امین سیستم فوق وجود دارد $(\forall k = 1, \ldots, p) \quad \lambda_k^i > 0$ با $\sum_{i=1}^{p} \lambda_k^i = 1$ به‌طوری‌که برای هر $x \in X$ نامساوی زیر برقرار است:

$$\lambda_i^i f_i(x) + \sum_{k \neq i} \lambda_k^i (f_i(x) + M f_k(x)) \leq \lambda_i^i f_i(x^\circ) + \sum_{k \neq i} \lambda_k^i (f_i(x^\circ) + M f_k(x^\circ))$$

$$\Rightarrow \lambda_i^i f_i(x) + \sum_{k \neq i} \lambda_k^i f_i(x) + M \sum_{k \neq i} \lambda_k^i f_k(x) \leq \lambda_i^i f_i(x^\circ) + \sum_{k \neq i} \lambda_k^i f_i(x^\circ) + M \sum_{k \neq i} \lambda_k^i f_k(x^\circ)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^i f_i(x) + M \sum_{k \neq i} \lambda_k^i f_k(x) \leq \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^i f_i(x^\circ) + M \sum_{k \neq i} \lambda_k^i f_k(x^\circ)$$

$$\Rightarrow f_i(x) + M\sum_{k\neq i}\lambda_k^i f_k(x) \leq f_i(x^\circ) + M\sum_{k\neq i}\lambda_k^i f_k(x^\circ)$$

نامساوی فوق برای هر $i = ۱, \ldots, p$ برقرار است. لذا با جمع بستن روی i داریم

$$\sum_{k=۱}^{p} f_i(x) + M\sum_{k=۱}^{p}\sum_{k\neq i}\lambda_k^i f_k(x) \leq \sum_{k=۱}^{p} f_i(x^\circ) + M\sum_{k=۱}^{p}\sum_{k\neq i}\lambda_k^i f_k(x^\circ)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=۱}^{p}(۱ + M\sum_{k\neq i}\lambda_k^i) f_k(x) \leq \sum_{k=۱}^{p}(۱ + M\sum_{k\neq i}\lambda_k^i) f_k(x^\circ) \quad \forall x \in X$$

با نرمال کردن $(۱ + M\sum_{k\neq i}\lambda_k^i)$ داریم:

$$\sum_{k=۱}^{p}\mu_k f_k(x) \leq \sum_{k=۱}^{p}\mu_k f_k(x^\circ)$$

که $\sum_{k=۱}^{p}\mu_k = ۱$ و اثبات تمام می‌شود. □

قضیه بعد تعمیمی از قضیه ۴.۲.۲ می‌باشد. و یک شرط لازم و کافی برای کارایی سره تحت فرض تحدب و تعقر مناسب را ارائه می‌دهد.

قضیه ۵.۲.۲. فرض کنید X یک مجموعه محدب باشد و فرض کنید $f_i : X \to \mathbb{R}$ به ازای هر $i \in I$ روی X مقعر باشند. آن‌گاه x° کارای سره در VMP تعریف شده به‌صورت (۱.۲) است اگر $\lambda \in \mathring{\Lambda}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که x° در P_λ تعریف شده به‌صورت (۲.۲) بهینه باشد.

شرط کافی قضیه ۵.۲.۲ از قضیه ۲.۲.۲ نتیجه می‌شود. در مقایسه با اثبات داده شده در [۱] اثبات شرایط لازم نیاز به یک تغییر کوچک دارد که از قضیه تفکیک هان_باناخ و یک قضیه دگرین مناسب مجموعه‌ها و توابع محدب استفاده می‌کند[قضیه ۶.۲.۲]. اثبات ارائه شده توسط جفریون [۱] وجود یک بردار $\lambda \in V$ با $\lambda_i > ۱$ برای هر $i \in I$ را نشان می‌دهد، که می‌تواند با $\lambda \in \mathring{\Lambda}$ نرمال شود برای حالتی که تعداد ضابطه‌ها متناهی است می‌باشد. بنابراین، ما اثبات کلی‌تری را ارائه می‌دهیم، که در آن ما یک مجموعه‌ی اضافی از ضرایب را برای تولید یک بردار نرمال شده $\lambda \in \mathring{\Lambda}$ با مولفه‌هایی که به یک اضافه می‌کنیم صرف نظر از این‌که I متناهی است یا خیر در نظر می‌گیریم.

برهان. (شرط لازم) فرض کنید X محدب باشد، همه‌ی f_iها مقعر باشند و x° یک جواب کارای سره باشد. با تعریف ۱.۱.۲، برای هر $i \in I$، $M_i < \infty$ وجود دارد به‌طوری‌که سیستم

$$\begin{cases} f_i(x) > f_i(x^\circ) \\ f_i(x) + M_i f_j(x) > f_i(x^\circ) + M_i f_j(x^\circ), \quad \forall j \neq i \end{cases}$$

هیچ جوابی در X ندارد. با استفاده از تعمیمی از قضیه دگرین جردن [قضیه ۶.۲.۲] برای هر $i \in I$، $\lambda^i \in \Lambda$ وجود دارد به‌طوری که

$$\begin{aligned} &\lambda_i^i f_i(x) + \sum_{j \neq i} \lambda_j^i (f_i(x) + M_i f_j(x)) \leq \lambda_i^i f_i(x^\circ) \\ &+ \sum_{j \neq i} \lambda_j^i (f_i(x^\circ) + M_i f_j(x^\circ)), \end{aligned} \tag{۶.۲}$$

یا به‌طور معادل و پس از تجدید آرایش مناسب،

$$f_i(x) + M_i \sum_{j \neq i} \lambda_j^i f_j(x) \leq f_i(x^\circ) + M_i \sum_{j \neq i} \lambda_j^i f_j(x^\circ), \quad x \in X,$$

حالا یک $\lambda^\circ \in \mathring{\Lambda}$ را انتخاب کنید و یک بردار از ضرایب $\mu \in V_>$ را به صورت زیر تعریف کنید

$$\mu_i := \frac{\lambda_i^\circ}{۱ + M_i(۱ - \lambda_i^i)}, \tag{۷.۲}$$

که برای هر $i \in I$ مثبت و متناهی است. اگر هر یک از نامساوی‌های در (۶.۲) را با μ_i متناظرش ضرب کنیم و آن‌ها را با هم جمع و دوباره مرتب سازیم، نتیجه می‌گیریم

$$\sum_{i \in I} \left(\mu_i + \sum_{j \neq i} \mu_j M_j \lambda_i^j \right) f_i(x) \leq \sum_{i \in I} \left(\mu_i + \sum_{j \neq i} \mu_j M_j \lambda_i^j \right) f_i(x^\circ), x \in X,$$

که ضرایب $\lambda_i = \mu_i + \sum_{j \neq i} \mu_j M_j \lambda_i^j$ مثبت هستند و با توجه به (۷.۲) و انتخاب $\lambda^\circ \in \mathring{\Lambda}$ در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \lambda_i &= \sum_{i \in I} \left(\mu_i + \sum_{j \neq i} \mu_j M_j \lambda_i^j \right) = \sum_{i \in I} \mu_i + \sum_{j \in I} \left(\mu_j M_j \sum_{j \neq i} \lambda_i^j \right) \\ &= \sum_{i \in I} \mu_i \left(۱ + M_i(۱ - \lambda_i^i) \right) = \sum_{i \in I} \lambda_i^\circ = ۱. \end{aligned}$$

بنابراین x° یک جواب بهینه برای مسئله P_λ تعریف شده به‌صورت (۲.۲) با $\lambda \in \mathring{\Lambda}$ است. □

برخلاف اثبات قضیه ۵.۲.۲ که بستگی به تعریف ثابت M_i برای هر ضابطه f_i دارد، اثبات فوق به طور مشابه برای بی‌نهایت تابع ثابت یکسان $M = M_i$ برای هر $i \in I$ کار می‌کند. البته این موافق با گزاره ۱.۱.۲ است، زیرا ضرورت شرط اثبات شده برای کارایی سره با تعریف ۱.۱.۲ نیز باید برای کارایی سره با توجه به تعریف اصلی جفریون لازم باشد.

قضیه ۶.۲.۲. (منگاساریان [1] [۲۰]) فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و محدب و $g_i : X \to \mathbb{R}$ توابعی محدب برای هر $i \in I$ باشد به‌طوری‌که $\sup_{x \in X} \{g_i(x) : i \in I\} < \infty$ باشد. آن‌گاه هر یک از

[1] Mangasarian

i. $x \in X$ وجود دارد به‌طوری‌که $g_i(x) < 0$ برای هر $i \in I$،

یا

ii. $\lambda \in \Lambda$ وجود دارد به‌طوری‌که $\sum_{i\in I} \lambda_i g_i(x) \geq 0$ برای هر $x \in X$،

اما نه هر دو برقرار است.

برهان. اول، اگر (i) درست باشد، آن‌گاه $x \in X$ وجود دارد به‌طوری‌که $g_i(x) < 0$ برای هر $i \in I$. این نتیجه می‌دهد که $\sum_{i\in I} \lambda_i g_i(x) < 0$ اگر $\lambda \in V_{\geq}$ و $\lambda \neq 0$، و در نتیجه (ii) هم‌زمان نمی‌تواند درست باشد. ازاین‌رو تنها نشان می‌دهیم که هرگاه (i) غلط باشد آن‌گاه (ii) باید درست باشد. $S(x) := \{s \in V : s_i > g_i(x) \forall i \in I\}$ و $S := \cup_{x\in X} S(x)$ تعریف می‌کنیم. برای هر $x \in X$، مجموعه $S(x)$ ناتهی و محدب است زیرا X و هر g_i محدب هستند، و بنابراین S نیز ناتهی و محدب است. حال، اگر (i) غلط باشد، آن‌گاه $0 \notin S$ به‌طوری‌که S و مجموعه تک عضوی $T = \{0\}$ ناپیوسته(جدا از هم) هستند. ازاین‌رو به‌وسیله‌ی قضیه‌ی تفکیک هان–باناخ برای مجموعه‌های محدب، نتیجه می‌گیریم که یک تابع پیوسته $L : V \to \mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری‌که $L(s) = \sum_{i\in I} \lambda_i s_i > 0$ برای هر $s \in S$، برای هر(نه لزوما نامنفی یا جمع‌پذیر) $\lambda \in V$. در ادامه نشان می‌دهیم که λ_i در واقع نامنفی است و می‌تواند جمع‌پذیر به ۱ انتخاب شود. برای این، توجه داشته باشید که S از بالا بی‌کران است به‌طوری‌که هر s_i می‌تواند به‌صورت دلخواه بزرگ به‌صورت جداگانه به تنهایی و به‌صورت جمعی برای هر $i \in I$ انتخاب شود. اولی نتیجه می‌دهد که $\lambda_i \leq 0$ برای هر $i \in I$ و $\lambda \neq 0$ زیرا $\lambda(s) > 0$. دومی نتیجه می‌دهد که λ باید جمع‌پذیر باشد، و بنابراین، بدون از دست دادن کلیت، ما می‌توانیم انتخاب کنیم $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$. □

۲.۲.۲ روش نرم چبیشف برای مسائل نامحدب

جفریون [۱] برای مسائل نامحدب مفهوم کارایی سره موضعی را بررسی می‌کند و نشان می‌دهد که اگر یک جواب $x^\circ \in X$ در این تعریف صدق کند، تمام توابع هدف و محدودیت‌ها به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند و اگر توصیف قیدی کان–تاکر برقرار باشد، آن‌گاه $\lambda \in \mathring{\Lambda}$ وضرایب لاگرانژی وجود دارد که همراه با x° در شرایط بهینگی مرتبه اول برای P_λ تعریف شده به‌صورت (۲.۲) صدق می‌کنند. سپس با استفاده از تعمیم‌های مختلف از نرم وزن‌دار l_∞ یا چبیشف به‌کار رفته در روش نرم وزن دار اصلاح شده‌ی چبیشف [۱۶، ۱۷] و نرم وزن دار افزوده شده‌ی چبیشف [۱۸، ۱۹] مشخصه کاملی از کارایی سره ارائه شد. تعریف هر کدام از این نرم‌ها به وجود یک بردار ایده‌آل یا اتوپین $u \in V$ بستگی دارد، که اجزای آن به صورت زیر تعریف شده است

$$u_i := \tau + \sup_{x\in X}\{f_i(x)\} \quad \forall i \in I, \tag{۸.۲}$$

که در آن $\tau > \circ$ یک مقدار به‌طور دلخواه کوچک است. توجه شود که تنها زمانی که سوپریمم داده شده در ۸.۲ موجود و متناهی باشد، نقطه اتوپین خوش‌تعریف می‌شود. در ادامه این بخش فرض می‌کنیم که u خوش‌تعریف است.

قضیه ۷.۲.۲. فرض کنید $\lambda \in \mathring{\Lambda}$ یک بردار پارامتری مثبت اکید باشد، و فرض کنید $u \in V$ یک نقطه اتوپین باشد. یک نقطه شدنی $x^\circ \in X$ کارای سره در VMP تعریف شده به‌صورت (۱.۲) است اگر و فقط اگر یک بردار $\mu \in V_\geq$ و یک اسکالر $\alpha > \circ$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که x° بهینه برای مسئله مینیمم زیر باشد

$$\begin{aligned} (P_\infty) \quad min \quad & \sup_{i\in I}\{\mu_i(u_i - f_i(x))\} - \alpha \sum_{i\in I} \lambda_i f_i(x). \\ s.t. \quad & x \in X. \end{aligned} \tag{۹.۲}$$

برهان. (شرط کافی) فرض کنید x° در P_∞ تعریف شده به‌صورت (۹.۲) بهینه باشد، بنابراین

$$\sup_{i\in I}\{\mu_i(u_i - f_i(x^\circ))\} - \alpha \sum_{i\in I} \lambda_i f_i(x^\circ) \leq \sup_{i\in I}\{\mu_i(u_i - f_i(x))\} - \alpha \sum_{i\in I} \lambda_i f_i(x) \tag{۱۰.۲}$$

برای هر $x \in X$. قرار می‌دهیم $M := \sup_{i\in I}\{\mu_i\}$. اثبات این‌که x° کارا است واضح است، بنابراین ما فقط نشان می‌دهیم که x° کارای سره است و در تعریف ۱.۳.۱ با

$$M_i := \frac{۱}{\lambda_i}(\frac{M}{\alpha} + (۱ - \lambda_i)), \tag{۱۱.۲}$$

که برای هر $i \in I$ مثبت و متناهی است صدق می‌کند. فرض کنید که یک اندیس $i_\circ \in I$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $f_{i_\circ}(x^۱) > f_{i_\circ}(x^\circ)$ برای یک $x^۱ \in X$. ما نشان می‌دهیم که یک اندیس دیگر $j \in I$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$f_j(x^\circ) > f_j(x^۱), \tag{۱۲.۲}$$

$$f_{i_\circ}(x^۱) - f_{i_\circ}(x^\circ) \leq M i_\circ (f_j(x^\circ) - f_j(x^۱)). \tag{۱۳.۲}$$

برای شروع، فرض کنید $\beta > ۱$ یک اسکالر دلخواه باشد و تعریف کنید

$$\delta := \sup_{i\in I}\{f_i(x^\circ) - f_i(x^۱)\}/\beta,$$

که براساس فرض ما V در آغاز بخش ۱.۲، برای $f : X \to V$، کران‌دار است. از این‌که x° کارا است و $f_{i_\circ}(x^\circ) < f_{i_\circ}(x^۱)$، نتیجه می‌گیریم که باید $f_j(x^\circ) < f_j(x^۱)$ برای حداقل یک اندیس j. بنابراین $\delta > \circ$، و با تعریف سوپریمم و $\beta > ۱$، وجود دارد $j \in I$ به‌طوری‌که

$$f_j(x^\circ) - f_j(x^۱) \geq \delta \tag{۱۴.۲}$$

$$\sup_{i\in I}\{\mu_i(u_i - f_i(x^۱))\} - \sup_{i\in I}\{\mu_i(u_i - f_i(x^\circ))\} \leq \sup_{i\in I}\{\mu_i(f_i(x^\circ) - f_i(x^۱))\}$$

$$\leq M\beta\delta,$$

که (۱۴.۲)، (۱۲.۲) را نتیجه می‌دهد. علاوه بر این، اگر عبارت $f_{i_\circ}(x) - f_{i_\circ}(x^\circ)$ را برای $x = x^1$ از (۱۰.۲) جدا کنیم و معادله حاصل را با دو معادله فوق ترکیب کنیم داریم:

$$f_{i_\circ}(x^1) - f_{i_\circ}(x^\circ) \leq \frac{1}{\alpha\lambda_{i_\circ}} \left(\sup_{i\in I}\{\mu_i(u_i - f_i(x^1))\} - \sup_{i\in I}\{\mu_i(u_i - f_i(x^\circ))\} \right.$$

$$\left. + \alpha \sum_{i\neq i_\circ} \lambda_i(f_i(x^\circ) - f_i(x^1)) \right)$$

$$\leq \frac{\beta\delta}{\lambda_{i_\circ}}\left(\frac{M}{\alpha} + (1 - \lambda_{i_\circ})\right) \leq \frac{\beta}{\lambda_{i_\circ}}\left(\frac{M}{\alpha} + (1 - \lambda_{i_\circ})\right)\left(f_j(x^\circ) - f_i(x^1)\right).$$

از این‌که β را می‌توان به صورت دلخواه نزدیک به ۱ انتخاب کرد، این همچنین (۱۳.۲) را برای M_i با $i = i_\circ$ همان‌گونه که در (۱۱.۲) تعریف شده نشان می‌دهد. از این رو x° کارایی سره در VMP تعریف شده به‌صورت (۱.۲) است و اثبات کامل است.

(شرط لازم) فرض کنید $\lambda \in \mathring{\Lambda}$ و $u \in V$ داده شده باشد، و فرض کنید x° کارایی سره در VMP تعریف شده به‌صورت (۱.۲) با $M_i < \infty$ برای هر $i \in I$ باشد. ما باید نشان دهیم که $\alpha > \circ$ و $\mu \in V_>$ وجود دارند به‌طوری که x° در P_∞ تعریف شده به‌صورت (۹.۲) بهینه است.

فرض کنید $\mu_i := 1/(u_i - f_i(x^\circ))$، به‌طوری‌که $\circ < \mu_i \leq 1/\tau < \infty$، و

$$\sup_{i\in I}\{\mu_i(u_i - f_i(x^\circ))\} = \mu_i(u_i - f_i(x^\circ)) = 1 \quad for \quad all \quad i \in I. \tag{۱۵.۲}$$

چون x° کارا است، به‌طورخاص برای هر $x \in X$ حداقل یک اندیس $i \in I$ وجود دارد به‌طوری‌که $f_i(x^\circ) \geq f_i(x)$ بنابراین $\sup_{i\in I}\{\mu_i(u_i - f_i(x^\circ))\} \geq 1$ برای هر $x \in X$. از این‌رو، اگر داشته باشیم $\sum_{i\in I}\lambda_i f_i(x^\circ) \geq \sum_{i\in I}\lambda_i f_i(x^\circ)$ برای هر $x \in X$، آن‌گاه

$$\sup_{i\in I}\{\mu_i(u_i - f_i(x^\circ))\} - \alpha\sum_{i\in I}\lambda_i f_i(x^\circ)$$

$$\leq \sup_{i\in I}\{\mu_i(u_i - f_i(x))\} - \alpha\sum_{i\in I}\lambda_i f_i(x)$$

برای هر $\alpha > \circ$ و اثبات کامل است. بنابراین، فرض کنیم $x^1 \in X$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\sum_{i\in I}\lambda_i f_i(x^1) > \sum_{i\in I}\lambda_i f_i(x^\circ)$. فرض کنید $\delta := \sup_{i\in I}\{u_i - f_i(x^\circ)\} \geq \tau > \circ$، و تعریف کنیم

$$\gamma := \sum_{i\in I}\lambda_i(f_i(x^1) - f_i(x^\circ))/\delta > \circ, \tag{۱۶.۲}$$

بنابراین چون $\lambda \in \mathring{\Lambda}$ دارای مولفه‌های اکیدا مثبت است نتیجه می‌گیریم $f_i(x^1) - f_i(x^\circ) \geq \gamma\delta > \circ$ برای حداقل یک اندیس $i \in I$، که مجموع آن‌ها یک می‌شود.

حال، قرار می‌دهیم $\alpha := (M_i\delta)^{-1} > ۰$. بنا به کارایی سره x°، اندیس $j \in I$ دیگری وجود دارد به‌طوری‌که $f_j(x^\circ) > f_j(x^۱)$ و

$$f_i(x^۱) - f_i(x^\circ) \leq M_i(f_j(x^\circ) - f_j(x^۱)).$$

با بازنویسی این نامساوی و استفاده از (۱۶.۲)، نتیجه می‌گیریم

$$\frac{u_j - f_j(x^۱)}{u_j - f_j(x^\circ)} \geq ۱ + \frac{f_j(x^۱) - f_j(x^\circ)}{M_i(u_j - f_j(x^\circ))} \geq ۱ + \alpha\gamma\delta. \qquad (۱۷.۲)$$

بنابراین با استفاده از تعریف μ_i برای $i = j$ همراه با (۱۷.۲)، نتیجه می‌شود که

$$\sup_{i\in I}\{\mu_i(u_i - f_i(x^۱))\} - \alpha\sum_{i\in I}\lambda_i f_i(x^۱) \geq \frac{u_j - f_j(x^۱)}{u_j - f_j(x^\circ)} - \alpha\sum_{i\in I}\lambda_i f_i(x^۱)$$

$$\geq ۱ + \alpha\left(\gamma\delta - \sum_{i\in I}\lambda_i f_i(x^۱)\right) = \sup_{i\in I}\{\mu_i(u_i - f_i(x^\circ))\} - \alpha\sum_{i\in I} f_i(x^\circ)$$

که آخرین تساوی از (۱۵.۲) و (۱۶.۲) نتیجه می‌شود. این نشان می‌دهد که x° برای مسئله P_∞ تعریف شده به‌صورت (۹.۲) بهینه است و بنابراین اثبات قضیه ۷.۲.۲ کامل می‌شود. □

اگر I متناهی و برای هر $i \in I$، $\lambda_i = ۱$ باشد، آن‌گاه قضیه‌ی ۷.۲.۲ همان قضیه ۴.۳ ارائه شده توسط کالیسزوسکی [۲۱] می‌شود که براساس نرم وزن‌دارافزوده شده‌ی چبیشف توسط استویر [۱۸] و استویر و چو [۱۹] و با استفاده از عبارت جایگزین $\sum_{i\in I}(u - f_i(x))$ تعریف شده است. در عبارت فوق، ما این اصطلاح را با حذف مقدار ثابت $\sum_{i\in I} u_i$ و اضافه کردن ضرایب $\lambda \in \mathring{\Lambda}$ برای اطمینان از همگرایی باقیمانده‌ی مجموع، و هم‌چنین اگر تعداد جملات مجموع بی‌نهایت باشد اصلاح می‌کنیم. اثبات قضیه ارائه شده در کالیسزوسکی [۲۱] نشان می‌دهد که اگر یک نقطه $x^\circ \in X$ مسئله P_∞ تعریف شده به‌صورت (۹.۲) را با تعداد متناهی ضابطه حل کند ($|I| = p$)، آن‌گاه به معنای جفریون کارای سره است، و ثابت M متناظر هم به‌صورت زیر انتخاب می‌شود:

$$M \leq \max_{i\in I}\{\mu_i + (p-۱)\alpha\}/\alpha$$

با این‌حال، مشابه با اثبات قضیه ۵.۲.۲ اگر تعداد ضابطه‌ها افزایش یابد، این مقدار ممکن است به سمت بی‌نهایت میل کند بنابراین ما نیاز به تعریف ثابت‌های M_i داریم، که مستقل از این‌که I متناهی است یا خیر می‌باشند. نکته دیگر این‌که اثبات اولیه کالیسزوسکی [۲۱] از چندین عملگر arg min یا arg max برای انتخاب اندیس‌های خاص k استفاده می‌کند، به‌طوری‌که

$$u_k - f_k(x^\circ) = \max_{i\in I}\{u_i - f_i(x^\circ)\},$$

که اگر I نامتناهی باشد، این عبارت نادرست است، و آن را نمی‌توان به سادگی توسط عملگرهایی که از سوپریمم و اینفیمم استفاده می‌کنند جایگزین کرد. بنابراین، اثبات زیر در جزئیات مهمی

با آن‌چه کالیسزوسکی [۲۱] آورده است متفاوت است. همان‌طور که در اثبات قبلی قضیه ۲.۲.۲ دیده شد، تصمیم ما برای انتخاب M_i به‌صورت رابطه (۱۱.۲)، ایجاب می‌کند که در حالت کلی برای تعداد نامتناهی ضابطه که برای آن‌ها $\lim \lambda_i = \inf \lambda_i = ۰$، یک کران بالا مشترک برای $\lim M_i = \sup M_i = \infty$ وجود ندارد. از طرف دیگر اگر $|I| = p$ کران‌دار باشد، آن‌گاه برای هر $i \in I$، قرار می‌دهیم $\lambda_i = ۱$. در نتیجه، در این مورد داریم $\sum_{i\in I} \lambda_i = p$، و بنابراین $۱ - \lambda_i$ در (۱۱.۲) می‌تواند همچنین با $p - ۱$ جایگزین شود. به ویژه مشاهده می‌کنیم که

$$\max_{i\in I}\{M_i\} = M/\alpha + p_۱ = (\max_{i\in I}\{\mu_i\} + (p-۱)\alpha)/\alpha,$$

که با انتخاب M در گزاره اصلی قضیه ۴.۳ در [۲۱] همخوانی دارد.

۳.۲ مثال‌ها

ما چند مثال را برای نشان دادن و بحث و تایید بعضی از نتایج ارائه می‌دهیم. در حالی‌که برای اطمینان از این‌که $\sum_{i\in I} \lambda_i f_i(x)$ برای هر $x \in X$ و $\lambda \in \mathring{\Lambda}$ همگرا می‌شود فرض کردیم که $\|f(x)\|_\infty < \infty$ ، راه‌اندازی اولیه مثال ما نیز بدون این فرضیه کار می‌کند.

۱.۳.۲ مثال اول

فرض کنید $X := [۰, ۱]$، $I := \{۰, ۱, ۲, \ldots\}$ و تعریف کنید $f_۰(x) := x$ و $f_i(x) := ۲^{i-۱}(۱ - x)$، برای $i \geq ۱$. چون $f_۰$ صعودی اکید است، و تمام f_i های دیگر نزولی اکید هستند، نتیجه می‌گیریم که هر نقطه شدنی $x \in X$ برای VMP تعریف شده به‌صورت (۱.۲) کارا است. علاوه‌براین، ما نشان می‌دهیم که همه این نقاط با تعریف ۱.۱.۲ کارای سره هستند، درحالی‌که فقط $x = ۰$ کارای سره نسبت به تعریف اصلی جفریون است.

ما اول $x^\circ = ۰$ را در نظر می‌گیریم. در این نقطه، $f_i(x) > f_i(x^\circ)$ برای یک $x \in X$ فقط برای $i = ۰$ برقرار است و

$$\frac{f_۰(x) - f_۰(۰)}{f_j(۰) - f_j(x)} = \frac{x - ۰}{۲^{j-۱}(۱ - (۱ - x))} = ۲^{۱-j}, \quad j \geq ۱.$$

از این‌رو، در این مورد، ما می‌توانیم $M = M_۰$ و M_iها را به صورت دلخواه برای هر $i \in I$ انتخاب کنیم، که در هر دو تعریف اصلی و اصلاح شده‌ی کارایی سره با هر $j \geq ۱ - \ln_۲(M)$ صدق می‌کند.

همان تحلیل همچنین برای $x^\circ < ۱$ و با انتخاب $x \in]x^\circ, ۱]$ برقرار است. بااین‌حال، برای $x^\circ > ۰$ و $x \in [۰, x^\circ[$، داریم $f_i(x) > f_i(x^\circ)$ برای هر $i \geq ۱$، و $f_j(x^\circ) > f_j(x)$ فقط برای $j = ۰$ لذا

$$\frac{f_i(x) - f_i(x^\circ)}{f_۰(x^\circ) - f_۰(x)} = \frac{۲^{i-۱}((۱ - x) - (۱ - x^\circ))}{x^\circ - x} = ۲^{i-۱} \quad \forall i \geq ۱.$$

در نتیجه ما نیاز به انتخاب $M_i \geq ۲^{i-۱}$ داریم که کران‌دار است، اما می‌تواند به‌طور دلخواه بزرگ باشد. این همچنین تایید می‌کند که هر نقطه $x \in]۰,۱[$ هنوز هم با توجه به تعریف ۱.۱.۲ کارای سره است، اگرچه یک اسکالر $M > ۰$ وجود ندارد، همان‌طور که برای کارایی سره با توجه به تعریف اصلی توسط جفریون مورد نیاز است. به‌طورخاص این مثال نشان می‌دهد که گزاره زیر توسط ایزرمن [۲۲] ”که تمام جواب‌های کارا برای مسائل خطی همیشه کارای سره هستند“ دیگر برای تعداد نامتناهی ضابطه با توجه به تعریف اصلی جفریون برقرار نیست.

۲.۳.۲ مثال دوم شامل توابع قطعه‌ای خطی

برای منطبق کردن مثال قبل با فرضیات پایان‌نامه، که در آن مقادیر تابع $f(x)$ باید برای هر $x \in X$ کران‌دار باشد، ما فرض می‌کنیم $\bar{f}_۰(x) = f_۰(x)$ به صورت قبل تعریف شود، اما هر تابع $f_i(x)$ برای $i \geq ۱$ را به‌صورت یک تابع معقر قطعه‌ای خطی تعریف می‌کنیم، همان‌طور که در شکل ۱.۲(آ) نشان داده شده است.

$$\bar{f}_i(x) := \min\{۱, ۲^{i-۱}(۱-x)\} \quad i \geq ۱.$$

چون تعداد توابع غیرثابت(موضعی) در هر $x < ۱$ متناهی است، و چون همه‌ی این توابع خطی هستند، تعریف ۱.۱.۲ معادل تعریف اصلی است. علاوه بر این، همه $x < ۱$ اکنون کارایی سره هستند. با این‌حال با محدود کردن انتخاب x برای هر $i \geq ۱$ به $]۱-۲^{۱-i}, ۱[$ در $x^{\circ} = ۱$، یک تحلیل مشابه قبل نشان می‌دهد که x° فقط با توجه به تعریف ۱.۱.۲ کارای سره است، اما نسبت به تعریف اصلی نیست. ما در ادامه نشان می‌دهیم که $x^{\circ} = ۱$، برای یک $\lambda \in \mathring{\Lambda}$ جوابی از P_λ تعریف شده به‌صورت (۲.۲) است، که ثابت می‌کند اگر تعداد ضابطه‌ها نامتناهی باشد جواب‌های P_λ تعریف شده به‌صورت (۲.۲) با وزن‌های مثبت اکید لزوما کارای سره با توجه به تعریف اصلی نیست. به‌طورخاص اکنون فرض کنید $\lambda_۰ := ۳/۵$ و $\lambda_i := (۶/۵)/۴^i$ برای هر $i \geq ۱$، باشد. لذا

$$\sum_{i=۰}^{\infty} \lambda_i = \frac{۳}{۵} + \frac{۳}{۱۰}\left(\sum_{i=۰}^{\infty} \frac{۱}{۴^i}\right) = \frac{۳}{۵} + \frac{۳}{۱۰}\left(\frac{۱}{۱-۱/۴}\right) = ۱,$$

بنابراین $\lambda \in \mathring{\Lambda}$. علاوه بر این برای این انتخاب خاص λ، نتیجه می‌گیریم

$$\sum_{i=۰}^{\infty} \lambda_i \bar{f}_i(x) \leq \sum_{i=۰}^{\infty} \lambda_i f_i(x) = \frac{۳}{۵}\left(x + \frac{۱}{۲}\sum_{i=۰}^{\infty} ۲^{-i}(۱-x)\right)$$

$$\frac{۳}{۵}\left(x + \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۱-۱/۲}\right)(۱-x)\right) = \frac{۳}{۵} = \sum_{i=۰}^{\infty} \lambda_i \bar{f}_i(۱),$$

و در نتیجه $x^{\circ} = ۱$، یک جواب برای P_λ تعریف شده به‌صورت (۲.۲) با وزن‌های مثبت اکید می‌باشد. علاوه‌براین، اگر ما توابع قطعه‌ای نشده $f_i(x)$ را تجدید آرایش کنیم، آن‌گاه تجزیه و تحلیل فوق نشان می‌دهد که همه‌ی نقاط x جوابی برای P_λ ، تعریف شده به‌صورت (۲.۲) با

مقادیر یکسانی از بردارهای ضرایب λ می‌باشند. اگرچه در این مورد فقط نقطه $x^\circ = \circ$ کارای سره با توجه به تعریف اصلی بود. از این‌رو، تعریف اصلی نیز منجر به وضعیت نامطلوب می‌شود که همان بردار $\lambda \in \mathring{\Lambda}$ ممکن است چندین جواب را ایجاد کند که برخی از آن‌ها ممکن است کارای سره باشند و برخی از آن‌ها ممکن است کارای ناسره باشند.

برای تولید هر یک از نقاط کارای سره دیگر برای $\bar{f}_i(x)$، ما از قضیه ۵.۲.۲ می‌دانیم که، برای هر $x \in [\circ, ۱[$، بردار $\lambda \in \mathring{\Lambda}$ وجود دارد به‌طوری‌که x جوابی از P_λ تعریف شده به‌صورت (۲.۲) است. هر چند یک ساختار روشن از چنین برداری نابدیهی است، در حالت کلی می‌توانیم طرح خاصی را برای یک مثال خاص غیرخطی ذکر شده به دست آوریم که در شکل ۱.۲(ب) نشان داده شده است.

۳.۳.۲ مثال سوم شامل توابع چندجمله‌ای مقعر

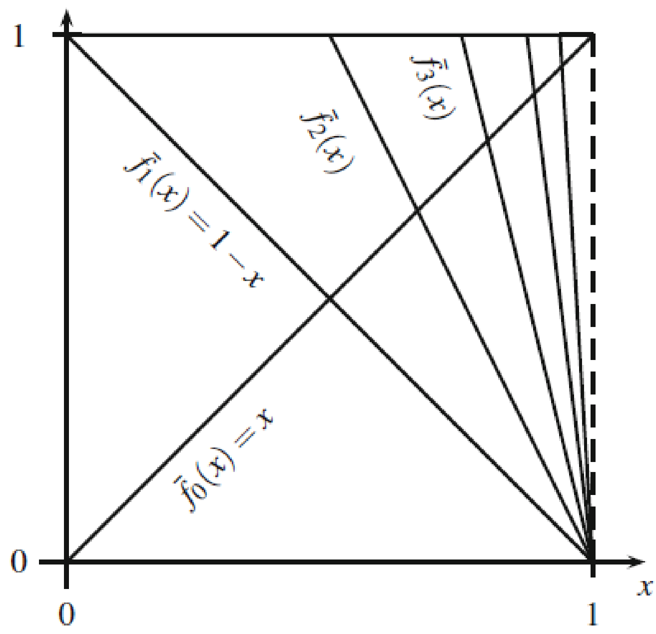
همان‌طور که در شکل ۱.۲(ب) نشان داده شده است، ما در این مثال فرض می‌کنیم که $I := \{\circ, ۱, ۲, \dots\}$ و $X := [\circ, ۱]$ مانند قبل تعریف شده باشد. اما قرار می‌دهیم $f_\circ(x) := x$ و $f_i(x) := ۱ - x^i$ برای هر $i \geq ۱$. با حفظ ویژگی‌های اساسی مثال شکل ۱.۲(آ)، هر $x \in X$ کارای سره نسبت به تعریف ۱.۱.۲ می‌باشد درحالی‌که $x = ۱$ با توجه به تعریف اصلی جفریون کارای سره نیست. با این‌حال، برخلاف قبل، ما باید توجه داشته باشیم که اگر ما تابع $f_۱(x) = ۱ - x$ را حذف کنیم وVMP تعریف شده به‌صورت (۱.۲) را فقط با $I = \{\circ, ۲, ۳, \dots\}$ در نظر بگیریم، آن‌گاه نقطه $x = \circ$ دیگر نسبت به هیچ یک از تعاریف، کارای سره نخواهد بود. به‌طورخاص اگر از تعریف ۱.۱.۲ استفاده کنیم ممکن است هنوز نقاطی باشند که کارای سره نیستند.

ما در ادامه نشان می‌دهیم که برای هر جواب شدنی $x \in X$، یک بردار $\lambda \in \mathring{\Lambda}$ وجود دارد به‌طوری‌که x یک جواب منحصربه‌فرد برای P_λ تعریف شده به‌صورت (۲.۲) است. فرض کنید $\circ < r < ۱ - ۱/e$، و قرار دهید $\lambda_\circ := ۱ + \ln(۱ - r)$ و $\lambda_i := r^i/i$، برای هر $i \geq ۱$. در نتیجه $\lambda_i > \circ$ برای هر $i \geq \circ$، و علاوه بر این، با کمک بسط سری‌های لگاریتم طبیعی که برای هر $r < ۱$ همگرا است داریم

$$\sum_{i=\circ}^{\infty} = ۱ + \ln(۱ - r) + \sum_{i=۱}^{\infty} \frac{r^i}{i} = ۱ - \ln\left(\frac{۱}{۱ - r}\right) + \sum_{i=۱}^{\infty} \frac{r^i}{i} = ۱$$

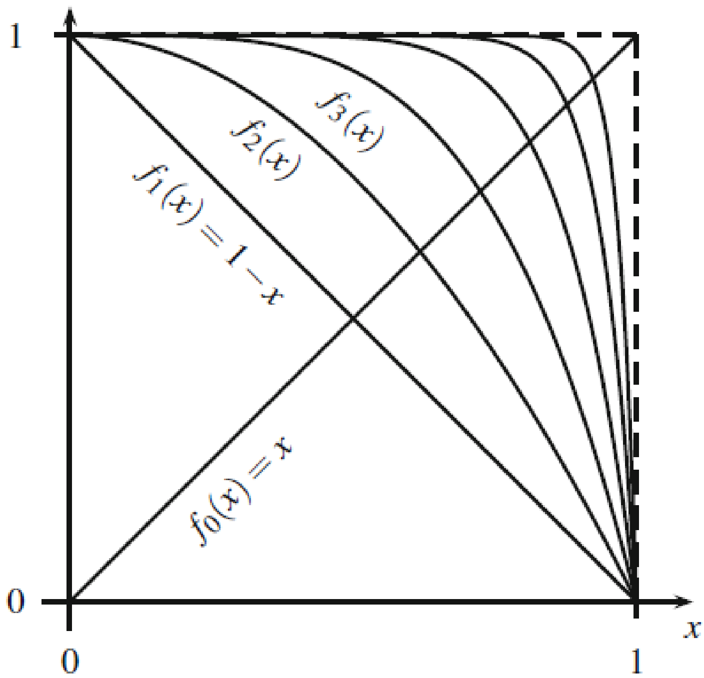
. ازاین‌رو داریم $\lambda \in \mathring{\Lambda}$ و ما می‌توانیم مشتق تابع هدف متناظر را در P_λ تعریف شده به‌صورت (۲.۲) حساب کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\sum_{i=\circ}^{\infty} \lambda_i f_i(x)\right) &= \frac{d}{dx}\left(\lambda_\circ x + \sum_{i=۱}^{\infty} \frac{r^i}{i}(۱ - x^i)\right) \\ &= \lambda_\circ - \sum_{i=۱}^{\infty} r^i x^{i-۱} = \lambda_\circ - r\sum_{i=\circ}^{\infty} (rx)^i = \lambda_\circ - \frac{r}{۱ - rx}, \end{aligned} \qquad (۱۸.۲)$$



(a) $\bar{f}_i(x) = \min\{1, 2^i(1-x)\}$

(آ) توابع‌های خطی قطعه‌ای



(b) $f_i(x) = 1 - x^i$

(ب) تابع‌های چندجمله‌ای مقعر

شکل ۱.۲: مثال و مثال نقض کارایی سره جفریون برای (آ) توابع خطی قطعه‌ای و (ب) توابع چندجمله‌ای مقعر.نقطه $x = 1$ یک مسئله مجموع وزن‌دار با وزن‌های مثبت اکید را ماکزیمم می‌کند و به مفهوم جفریون با تعریف ۱.۱.۲ کارای سره است اما با توجه به تعریف اصلی نیست.

که برای

$$x(r) = \frac{1}{r} - \frac{1}{\lambda_0} = \frac{1}{r} - \frac{1}{1+\ln(1-r)} = \frac{1+\ln(1-r)-r}{(1+\ln(1-r))r}.$$

صفر می‌شود. از این‌که برای هر $x \in X$ داریم،

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_i f_i(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\lambda_0 - \frac{r}{1-rx}\right) = -\frac{r^2}{(1-rx)^2} < 0$$

لذا نتیجه می‌گیریم که $x(r)$ یک ماکزیمم سراسری است. علاوه‌براین، چون $x(r)$ برای هر مقدار حقیقی $0 < r < 1 - 1/e$ اکیدا نزولی است، معکوس آن یعنی $r(x)$ وجود دارد و برای هر $x \in X$ اکیدا نزولی است. در نتیجه یک r منحصر به فرد به‌طوری‌که $x(r) = \frac{1}{r} - \frac{1}{1+\ln(1-r)}$ یک ریشه منحصر به فرد از (۱۸.۲) است وجود دارد، و بنابراین جواب منحصر به فرد P_λ تعریف شده به‌صورت (۲.۲) است. به‌طورخاص، ما داریم

$$r(0) = 1 - W(1) \approx 0/432857,$$

$$r(1) = 1 - 1/W(e^2) \approx 0/357799,$$

که W لگاریتم حاصل‌ضرب یا تابع لامبرت است که معکوس تابع $f(W) = We^W$ است. در نهایت باید توجه کرد که توابع تعریف شده در بخش‌های ۲.۳.۲ و ۳.۳.۲ نشان می‌دهند که قضیه ۷.۲.۲ برای تعداد نامتناهی تابع هدف، تنها برای کارایی سره نسبت به تعریف ۱.۱.۲ برقرار است اما به‌طورکلی برای تعریف اصلی برقرار نیست. به‌طورخاص، در هر دو مورد، ما می‌توانیم یک بردار اتوپین به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$u_i := \tau + \sup_{x\in X}\{f_i(x)\} = \tau + 1,$$

و فرض کنید $\mu_i := 1$ برای هر $i \in I$. به‌راحتی از شکل ۱.۲ تایید می‌شود که

$$\sup_{i\in I}\{\mu_i(u_i - f_i(x))\} = \tau$$

برای هر $x \in X$، در نتیجه عبارت نرم وزن‌دار چبیشف در P_∞ تعریف شده به‌صورت (۹.۲) ثابت است. در نتیجه، برای هر $\alpha > 0$، فرمول‌بندی P_∞ تعریف شده به‌صورت (۹.۲) معادل با مجموع وزن‌دار است و بنابراین نتیجه‌های قبل تکرار می‌شود؛ یعنی $x^\circ = 1$ می‌تواند به عنوان یک جواب بهینه برای P_∞ تعریف شده به‌صورت (۹.۲) باشد اما کارای سره با توجه به تعریف اصلی نیست. البته و با توجه به قضیه ۷.۲.۲، $x^\circ = 1$، نسبت به تعریف ۱.۱.۲ کارای سره است.

فصل ۳

مفهوم عملی بهینگی سره جفریون در بهینه‌سازی چندهدفه

مطالب این فصل از مراجع [۱–۴، ۶، ۱۳، ۲۳–۴۷] گرفته شده است.

۱.۳ مقدمه

مسئله بهینه‌سازی چندهدفه زیر را در نظر بگیرید:

$$\min f(x) := (f_1(x), \ldots, f_m(x)),$$
$$s.t. \quad x \in X,$$

که $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ توابع هدف، و $X \subseteq \mathbb{R}^n$ مجموعه قیود است، و $n, m \in \mathbb{N}$. در ادامه ما این مسئله بهینه‌سازی چندهدفه را با دوتایی (f, X) نشان می‌دهیم.

نظریه بهینه‌سازی چندهدفه یکی از زمینه‌های در حال رشد نظریه بهینه‌سازی مدرن است، به عنوان مثال به لوک [1] [۲۳]، میتینن [2] [۲۴]، ارگات [3] [۱۳]، جان [4] [۲۵] و ایچفلدر [5]

[1] Luc
[2] Miettinen
[3] Ehrgott
[4] Jahn
[5] Eichfelder

[۲۶] مراجعه کنید. چندین تعریف از بهینگی در بهینه‌سازی چندهدفه وجود دارد و اغلب به موضوع چالش‌برانگیز در نظریه و عمل تبدیل می‌شود. اگرچه بهینه‌سازی پارتو نقش مهمی در بهینه‌سازی چندهدفه ایفا می‌کند، اما مفاهیم جواب‌های دیگری مانند جواب‌های بهینه پارتو ضعیف ، جواب‌های پارتو اکید و غیره هم مهم هستند.

تصویری از جواب‌های بهینه پارتو در مرز مجموعه‌ی شدنی در فضای ضابطه قرار دارد. این تصویر در فضای ضابطه مرز کارا نامیده می‌شود. در اکثر مسائل عملی و بزرگ، کاربر ممکن است مرز دقیق کارایی را بدست نیاورد و او باید از جواب‌های تقریبی استفاده کند.

جواب‌های بهینه پارتو تنها زمانی می‌تواند در یک ضابطه بهبود یابند که حداقل در یک ضابطه دیگر بدتر شوند. بنابراین اگر بخواهیم دو جواب را با هم مقایسه کنیم مفهوم تبادل یا نسبت سود به زیان مهم است. همه نقاط مرز کارا ممکن است تبادلی که یک تصمیم‌گیرنده تمایل دارد را نداشته باشند و لذا ممکن است نیاز به فیلتر کردن جواب‌های بهینه پارتو بد و نگه‌داشتن جواب‌های خوب باشد. بنابراین نیاز به جواب‌های نهایی خوب همیشه از اهداف اولیه در بهینه‌سازی چندهدفه است. به این نقاط پارتو خوب در مراجع، جواب‌های بهینه پارتو سره گویند. مطالعه جواب‌های پارتو سره برای اولین بار توسط کان و تاکر [۴] انجام شد و پس از آن توسط جفریون [۱]، بنسون [۲، ۲۷]، هنیگ [۳]، بوروین [۶] و دیگران [۲۸، ۳۰] ادامه داده شد.

به جز در موارد خاصی که (f, X) دارای یک ساختار خاص باشد، به عنوان مثال X چند وجهی باشد و هر f_i خطی یا درجه دوم باشد، تقریبا تمام الگوریتم‌های حل (f, X) یک دنباله نامتناهی از تکرارها (یا مجموعه‌ای از نقاط که به عنوان یک جمعیت نامیده می‌شود) تولید می‌کنند که به مجموعه‌ای از نقاط بهینه پارتو (f, X) همگرا است. به دلایل محاسباتی، معمولا بعد از چندین تکرار محدود، الگوریتم باید خاتمه پیدا کند. این منجر به یک نقطه‌ی زیر-بهینه می‌شود، یا بسته به فاصله نقطه به دست آمده با مجموعه نقاط بهینه (f, X)، یک نقطه‌ی εـ بهینه [6] است.

در موارد زیر، مگر آن‌که خلاف آن بیان شود، ما $\varepsilon \in \mathbb{R}^m_+$ را در نظر می‌گیریم، یعنی $\varepsilon = (\varepsilon_۱, \varepsilon_۲, \dots, \varepsilon_m)$ و $\varepsilon_i \geq ۰$ برای هر $i \in I := \{۱, ۲, \dots, m\}$.

۲.۳ εـ کارایی

[۳۱] در سال‌های اخیر پیدا کردن جواب‌های تقریبا کارا [7] یک مساله بهینه‌سازی چندهدفه بسیار مورد توجه قرار گرفته است. دلایل متعددی برای جالب و مفید بودن جواب‌های تقریبا کارا وجود دارند که مهم‌ترین آن‌ها را می‌توان به صورت زیر بیان نمود.

۱. اغلب مواقع برای حل یک مساله بهینه‌سازی چندهدفه باید یک مساله تک‌هدفه متناظر

[6] ε-optimal

[7] approximately efficient solution

با آن را حل کرد و رابطه بین جواب‌های بهینه مساله تک‌هدفه و جواب‌های کارای مساله چندهدفه را بررسی کرد. اما یک مساله تک‌هدفه اغلب با روش‌های تکراری [8] حل می‌شود و جواب‌های تقریبی برای مساله اسکالرسازی شده به‌دست می‌آیند. لذا پیدا کردن رابطه بین این جواب‌های تقریبی و جواب‌های تقریبا کارای مساله بهینه‌سازی چندهدفه از اهمیت زیادی برخوردار است.

۲. در بسیاری از مواقع ممکن است مجموعه جواب‌های کارای یک مساله تهی باشد، اما تحت شرایطی ضعیف‌تر اغلب مواقع جواب‌های تقریبا کارایی وجود دارند که برای تصمیم‌گیرنده مهم هستند.

۳. در بیشتر مسائل واقعی، مانند مسائل پزشکی و مهندسی، نمی‌توان فرم دقیقی از مساله را پیش از حل مساله به‌دست آورد و اغلب مدل‌های ارائه شده یک نمونه ساده شده از مساله اصلی هستند و الگوریتم‌های حل این مدل‌ها جواب‌های تقریبی ارائه می‌دهند.

۴. در اغلب مسائل چندهدفه (نامحدب)، پیدا کردن یک دسته از جواب‌های کارا ممکن است زمان زیادی بگیرد. لذا اغلب تصمیم‌گیران، پیدا کردن یک جواب تقریبا کارا در کوتاه مدت را به به‌دست آوردن جواب دقیق در بلند مدت ترجیح می‌دهند.

تاکنون روش‌های مختلفی برای به‌دست آوردن مجموعه جواب‌های تقریبا کارا در مسائل چندهدفه بیان شده است. به‌عنوان مثال، می‌توان به روش‌های تکراری اشاره کرد. به‌علاوه، روش‌های ابتکاری [9] زیادی که توجیه دقیق ریاضی ندارند نیز مطرح شده‌اند.

در عین حال، روش‌هایی برای پیدا کردن مجموعه جواب‌های تقریبا کارا وجود دارند که همراه با تحلیل‌های نظری‌اند. در ادامه، برخی از این روش‌ها را بررسی می‌کنیم.

تاکنون، تعاریف زیادی برای جواب‌های تقریبا کارا مسائل بهینه‌سازی چندهدفه ارائه شده است. یکی از مهم‌ترین و پرکاربردترین این تعاریف توسط کوتاتلادزه [10] بیان شده است، که ما در این پایان‌نامه از آن استفاده می‌کنیم.

پس از آن که کوتاتلادزه مفهوم ε– کارایی را مطرح کرد، لوریدن [11] مفهوم جواب‌های ε– کارا را از بهینه‌سازی تک‌هدفه به بهینه‌سازی چندهدفه تعمیم داد و در ادامه، وایت شش تعریف برای ε– کارایی ارائه و روش‌هایی برای به‌دست آوردن آن‌ها مطرح کرد.

تعریف ۱.۲.۳. یک نقطه $x^* \in X$، یک جواب بهینه ε– پارتو [12] برای مسئله (f, X) نامیده می‌شود اگر

$$\nexists x \in X : f(x) + \varepsilon - f(x^*) \in -\mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}.$$

---

[8] iterative methods

[9] heuristic methods

[10] Kutateladze

[11] Loridan

[12] ε-Pareto

از طرف دیگر، اگر

$$\nexists x \in X : f(x) + \varepsilon - f(x^*) \in -int(\mathbb{R}^m_+),$$

آن‌گاه x^* یک جواب بهینه εـ پارتو ضعیف [۱۳] برای مسئله (f, X) نامیده می‌شود.

مجموعه همه‌ی نقاط εـ پارتو با $S^\varepsilon(f, X)$ تعریف می‌شود و مجموعه همه‌ی نقاط εـ پارتو ضعیف با $S^\varepsilon_w(f, X)$ تعریف می‌شود. یک جواب بهینه εـ پارتو(ضعیف) با $\varepsilon = ۰$ معمولا به عنوان بهینه پارتو(ضعیف)شناخته می‌شود. برای راحتی مجموعه جواب‌های بهینه پارتو و جواب‌های بهینه پارتو ضعیف را به ترتیب با $S(f, X)$ و $S_W(f, X)$، تعریف می‌کنیم. تصویر مجموعه جواب‌های εـ پارتو را مجموعه εـ غیرمغلوب می‌نامیم که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Y_{\varepsilon N} := \{f(x) | x \in S^\varepsilon(f, X)\}.$$

تصویر مجموعه جواب‌های εـ کارای ضعیف را مجموعه εـ غیرمغلوب ضعیف می‌نامیم که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Y_{\varepsilon WN} := \{f(x) | x \in S^\varepsilon_w(f, X)\}.$$

مفاهیم بهینگی پارتو به‌طور گسترده در بهینه‌سازی چندهدفه متناهی‌البعد مورد استفاده قرار می‌گیرد. با این‌حال حتی در مقیاس متناهی‌البعد گاهی مواقع مفید است که جواب‌های پارتو و εـ پارتو را بر حسب یک رابطه ترتیبی که توسط یک مخروط محدب و بسته و توپر $C \supseteq \mathbb{R}^m_+$ ایجاد شده است مورد بررسی قرار دهیم. این مخروط C نیز یک مخروط ترتیبی نامیده می‌شود. ایچفلدر [۲۶، ۳۲] مثال‌های زیادی ارائه داده است که در آن‌ها باید $C \neq \mathbb{R}^m_+$ به عنوان مخروط ترتیبی در نظر گرفته شود.

تعریف ۲.۲.۳. فرض کنید $C \supseteq \mathbb{R}^m_+$ یک مخروط محدب و بسته باشد. یک نقطه $x^* \in X$ یک جواب (ε, C)ـ بهینه (f, X) نامیده می‌شود، اگر

$$\nexists x \in X : f(x) + \varepsilon - f(x^*) \in -C \setminus \{۰\}.$$

از طرف دیگر، اگر

$$\nexists x \in X : f(x) + \varepsilon - f(x^*) \in -int(C),$$

آن‌گاه x^* یک جواب (ε, C)ـ بهینه ضعیف (f, X) نامیده می‌شود.

مجموعه همه جواب‌های (ε, C)ـ بهینه را با $S^\varepsilon(f, X, C)$ تعریف می‌کنیم و مجموعه همه جواب‌های (ε, C)ـ بهینه ضعیف را با $S^\varepsilon_w(f, X, C)$ تعریف می‌کنیم.

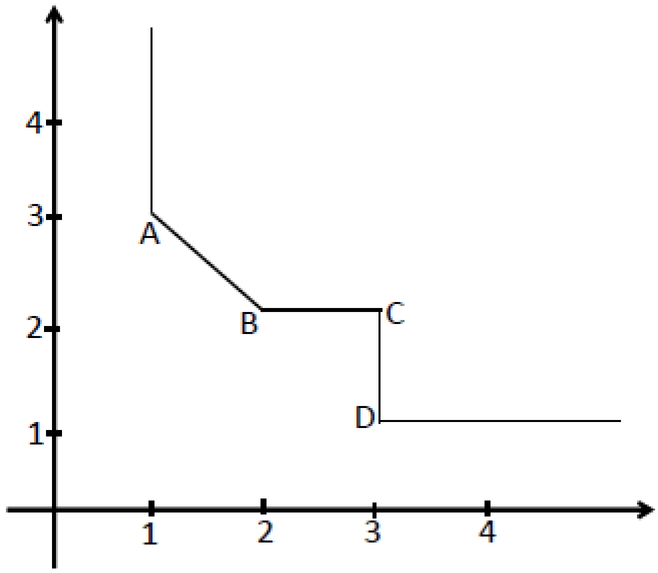
اکنون، با مثال‌هایی رابطه بین مفاهیم مختلف کارایی را نشان می‌دهیم.

---
[13] ε-Week optimal

مثال ۱.۲.۳. [۳۱] فرض کنید $f:\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}^{۲}$ یک تابع دو ضابطه‌ای باشد و $D=\mathbb{R}^{۲}_{\geqq}$. ناحیه شدنی مساله را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$X=\{(x_۱,x_۲)\in\mathbb{R}^{۲}|x_۱\geq ۱,x_۲\geq ۱,x_۱+x_۲\geq ۴,\max\{۲x_۱,۳x_۲\}\geq ۶\}.$$

به‌علاوه، فرض کنید توابع هدف به‌صورت $f(x_۱,x_۲)=(x_۱,x_۲)$ داده شده باشند. همان‌گونه



شکل ۱.۳: مجموعه جواب‌های غیرمغلوب (ضعیف)

که در شکل ۱.۳ دیده می‌شود، داریم:

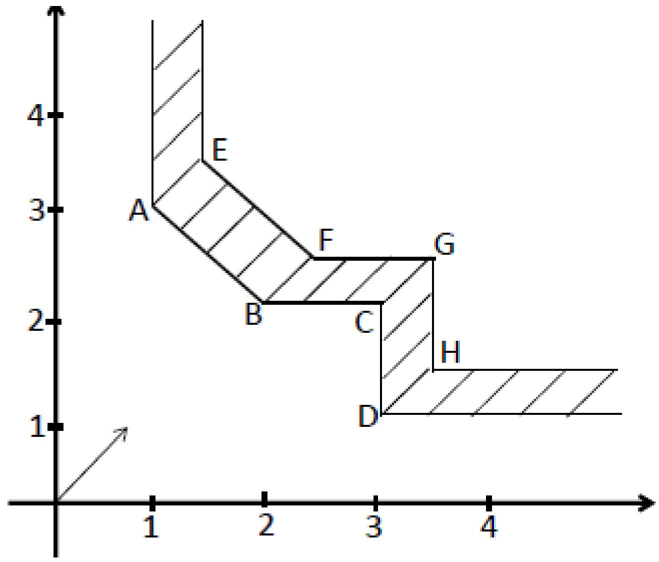
$$x_E(D)=\{\lambda(۱,۳)+(۱-\lambda)(۲,۲)|\lambda\in[۰,۱]\cup\{(۳,۱)\}$$

و

$$x_{WE}(D)=x_E\cup\{\lambda(۲,۲)+(۱-\lambda)(۳,۲)|\lambda\in[۰,۱]\}\cup\{\lambda(۳,۲)+(۱-\lambda)(۳,۱)$$

$$|\lambda\in[۰,۱]\}\cup\{(x_۱,x_۲)\in\mathbb{R}^{۲}|x_۱=۱,x_۲\geq ۳\}\cup\{(x_۱,x_۲)\in\mathbb{R}^{۲}|x_۲=۱,x_۱\geq ۳\}.$$

حال فرض کنید بردار $\varepsilon=(\frac{۱}{\sqrt{۸}},\frac{۱}{\sqrt{۸}})$ داده شده باشد. همان‌گونه که در شکل ۲.۳ مشاهده می‌شود، مجموعه جواب‌های εـ کارا شامل ناحیه هاشور خورده، منحنی متصل کننده نقاط A و B، منحنی متصل کننده نقاط E و F و تک تک نقاط D و H است، درحالی‌که مجموعه جواب‌های εـ کارای ضعیف شامل ناحیه هاشور خورده و هر دو منحنی بالا و پایین این ناحیه است.



شکل ۲.۳: مجموعه جواب‌های غیرمغلوب (ضعیف) و εـ غیرمغلوب (ضعیف)

۳.۳ روش هایی برای بدست آوردن جواب‌های تقریبا کارا (ضعیف،سره)

برای بدست آوردن جواب‌های تقریبا کارای یک مساله بهینه‌سازی چندهدفه روش‌های زیادی موجودند که هر یک از آن‌ها ممکن است بنا به شرایط مساله و انتظاراتی که تصمیم‌گیرنده دارد بر روش‌های دیگر ارجحیت داشته باشد. در اغلب این روش‌ها سعی می‌شود که یک مساله تک‌هدفه متناظر با مساله اصلی ارائه و سپس رابطه بین جواب‌های تقریبا بهینه مساله تک‌هدفه و جواب‌های εـ کارای مساله چندهدفه بررسی شود. در این بخش، به بعضی از مهم‌ترین این روش‌ها اشاره می‌کنیم. قابل ذکر است که فرض می‌کنیم $D = \mathbb{R}^m_{\geqq}$ مخروط ترتیبی باشد، لذا از εـ کارایی سره به مفهوم جفریون استفاده می‌کنیم.

فرض کنید $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و $\varepsilon \geq \circ$.

تعریف ۱.۳.۳. [۳۱] نقطه $x_\circ \in X$ یک جواب δـ بهینه [۱۴] برای یک مساله تک‌هدفه

$$\begin{aligned} &\min \varphi(x) \\ &s.t. \quad x \in X, \end{aligned} \tag{۱.۳}$$

است، هرگاه برای هر $x \in X$ داشته باشیم $\varphi(x_\circ) - \delta \leq \varphi(x)$. همچنین، $x_\circ \in X$ یک جواب δـ بهینه اکید، [۱۵] گفته می‌شود اگر $\varphi(x_\circ) - \delta < \varphi(x)$ برای هر $x \in X$.

[14] δ-optimal
[15] strictlyδ-optimal

توجه شود که در تعریف ۱.۳.۳ اگر $\delta = 0$، به ترتیب به تعریف جواب‌های بهینه سراسری و بهینه اکید سراسری می‌رسیم.

۱.۳.۳ روش εـ محدودیت

روش εـ محدودیت یکی از روش‌های کارا در حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه است. این روش به‌خصوص کاربرد زیادی در طراحی مهندسی برای پیدا کردن جواب‌های کارا دارد، زیرا درک این روش بسیار ساده است و از طرف دیگر پارامترهای مساله تعبیر ساده‌ای به‌عنوان کران‌های بالا دارند. در روش εـ محدودیت یکی از توابع هدف مینیمم می‌شود، در حالی‌که بقیه هدف‌ها در قالب قید ظاهر می‌شوند.

مساله εـ محدودیت زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\min_{x\in X} f_k(x) \\ &s.t. \quad f_i(x) \le \varepsilon_i \quad i = 1, \dots, m, \quad i \neq k, \end{aligned} \tag{۲.۳}$$

که در آن، $i = 1, \dots, m, \varepsilon_i \in \mathbb{R}$ کوچک‌ترین کران‌های بالای داده شده‌اند. در قضیه زیر نتایج بدست آمده بر پایه این روش برای جواب‌های εـ کارا (ضعیف) را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱.۳.۳. [۳۱] فرض کنید $\varepsilon \in \mathbb{R}^m_{\geqq}$ داده شده باشد و $\delta \le \varepsilon_k$ دراین‌صورت

۱. اگر $x_\circ \in X$ یک جواب δـ بهینه اکید برای مساله (۲.۳) باشد، آن‌گاه $x_\circ$ یک جواب εـ کارا برای مساله بهینه‌سازی چندهدفه (f, X) است.

۲. اگر $x_\circ$ یک جواب δـ بهینه برای مساله (۲.۳) باشد، آن‌گاه $x_\circ$ یک جواب εـ کارای ضعیف برای مساله بهینه‌سازی چندهدفه (f, X) است.

۲.۳.۳ روش مجموع وزن‌دار

در قضیه زیر رابطه بین جواب‌های تقریبا بهینه این مساله و جواب‌های تقریبا کارای (ضعیف) مساله بهینه‌سازی چندهدفه اصلی نشان داده شده است.

قضیه ۲.۳.۳. [۳۱] مساله بهینه‌سازی چندهدفه (f, X) را در نظر بگیرید. فرض کنید $\varepsilon \in \mathbb{R}^m_{\geqq}$ داده شده باشد و $\delta \le \sum_{i=1}^m \lambda_i \varepsilon_i$. در این‌صورت، داریم:

۱. اگر $x_\circ \in X$ یک جواب δـ بهینه اکید برای مساله (۵.۱) باشد، آن‌گاه $x_\circ$ یک جواب εـ کارا برای مساله چندهدفه (f, X) است.

۲. اگر $x_\circ \in X$ یک جواب δـ بهینه برای مساله (۵.۱) باشد، آن‌گاه $x_\circ$ یک جواب εـ کارای ضعیف برای مساله چندهدفه (f, X) است.

۳. اگر $x_\circ \in X$ یک جواب δــ بهینه برای مساله (۵.۱) با $\lambda \in \mathbb{R}^m_>$ باشد، آن‌گاه $x_\circ$ یک جواب εــ کارا برای مساله چندهدفه (f, X) است.

روش مجموع وزن‌دار از معدود روش‌هایی است که با استفاده از آن می‌توان جواب‌های εــ کارای سره را بدست آورد.

قضیه ۳.۳.۳. [۳۱] فرض کنید $\varepsilon \in \mathbb{R}^m_{\geqq}$ داده شده باشد و $\delta = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varepsilon_i$. اگر $x_\circ \in X$ یک جواب δــ بهینه برای مساله (۵.۱) با $\lambda \in \mathbb{R}^m_>$ باشد، آن‌گاه $x_\circ$ یک جواب εــ کارای سره برای مساله بهینه‌سازی چندهدفه (f, X) است.

در قضیه زیر، یک شرط لازم برای تشخیص جواب‌های εــ کارای سره مسائل بهینه‌سازی چندهدفه ارائه می‌دهیم. توجه شود که در این قضیه، محدب بودن همه توابع هدف لازم است.

قضیه ۴.۳.۳. [۳۱] فرض کنید X یک مجموعه محدب باشد و $f_i, i = 1, \ldots, m$ توابعی محدب باشند و $\delta = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varepsilon_i$. در این‌صورت، $x_\circ \in X$ یک جواب δــ بهینه برای مساله تک‌هدفه (۵.۱) با $\lambda \in \mathbb{R}^m_>$ است اگر و تنها اگر $x_\circ$ یک جواب εــ کارای سره برای مساله بهینه‌سازی چندهدفه (f, X) باشد.

قضیه ۵.۳.۳. [۳۱] فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده است. در این‌صورت،

$$S^\varepsilon(f, X) \subseteq S^\varepsilon_w(f, X).$$

نتیجه ۱.۳.۳. [۳۱] برای هر $\varepsilon > 0$ داریم:

$$S(f, X) \subseteq S^\varepsilon(f, X).$$

تعریف ۲.۳.۳. [۲] **بهینگی εــ سره پارتو بنسون:** نقطه $x^\circ \in X$، εــ بهینه سره پارتو به مفهوم بنسون نامیده می‌شود، اگر

$$cl(cone(f(X) + (C + \varepsilon) - (f(x^\circ)))) \cap (-C) = \{0\}$$

که C یک مخروط ترتیبی است.

این تعریف اصلاح کارایی سره بنسون است.

لم ۱.۳.۳. اگر یک نقطه x°، εــ بهینه سره پارتو بنسون باشد آن‌گاه آن بهینه εــ پارتو نیز می‌باشد.

همان‌طور که در ابتدای فصل توضیح داده شده است، جواب‌های بهینه پارتو مختلف ممکن است ویژگی‌های مختلفی داشته باشد که مطلوب تصمیم‌گیرنده باشند. نیاز به فیلتر

کردن جواب‌های بهینه پارتو نامناسب منجر به مفهوم کارایی سره می‌شود. مفاهیم مختلف در مورد بهینگی سره وجود دارد؛ یک خلاصه‌ای از این مفاهیم در [۲۳] گردآوری شده است. به عنوان مثال، بهینگی سره جفریون، تبادل بین ضوابط را کران‌دار می‌کند و یکی از پرکاربردترین مفاهیم بهینگی سره است. ترکیب بهینگی سره جفریون با جواب‌های تقریبی منجر به مفهوم بهینگی εــسره جفریون [16] می‌شود [۱۳، ۳۳].

تعریف ۳.۳.۳. یک نقطه $x_\circ \in X$ جواب εــسره به مفهوم جفریون نامیده می‌شود اگر $x_\circ \in S^\varepsilon(f,X)$ و یک عدد $M > \circ$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $(i,x) \in I \times X$ که در رابطه $f_i(x) < f_i(x_\circ) - \varepsilon_i$ صدق می‌کند، یک اندیس $j \in I$ با $f_j(x_\circ) - \varepsilon_j < f_j(x)$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$\frac{f_i(x_\circ) - f_i(x) - \varepsilon_i}{f_j(x) - f_j(x_\circ) + \varepsilon_j} \leq M.$$

مجموعه جواب‌های εــسره جفریون را با $\psi_\varepsilon(f,X)$ نشان می‌دهیم، اگر $\varepsilon = \circ$ آن‌گاه $x_\circ$ جواب دقیق سره جفریون است. برای راحتی از $\psi(f,X)$ برای بیان مجموعه جواب‌های سره جفریون استفاده می‌کنیم.

ملاحظه ۱.۳.۳. با استفاده از تعریف‌های کارا و کارای ضعیف و کارای سره می‌توان نتیجه گرفت که

$$\psi_\varepsilon(f,X) \subseteq S^\varepsilon(f,X) \subseteq S^\varepsilon_w(f,X).$$

جواب εــسره جفریون تضمین می‌کند که تبادل بین ضابطه‌ها در دو نقطه کران‌دار است. جالب است که سوال شود که آیا تبادل‌ها برای تمام نقاط در بالا کران‌دار است. این بدان معنی است که آیا همان M می‌تواند برای تمامی جواب‌های εــسره کار کند. این نتیجه همیشه ممکن نیست مگر اینکه تبادل‌ها در بالا کران‌دار شوند.

کران تبادل M را می‌توان به عنوان فایده یا سودمندی جواب $x_\circ$ دانست. یک تصمیم‌گیرنده ممکن است علاقه‌مند به به‌دست آوردن(همه) جواب‌هایی باشد که تبادل آن‌ها توسط یک M داده می‌شوند کران‌دار هستند. لذا مفهوم یک جواب $(\hat{M},\varepsilon)$ــسره جفریون را تعریف می‌کنیم که به مفهومی، معکوس تعریف جواب εــسره است و عملی‌تر به نظر می‌رسد.

تعریف ۴.۳.۳. فرض کنید یک $\hat{M} > \circ$ داده شده باشد، یک نقطه $x_\circ \in X$ یک جواب $(\hat{M},\varepsilon)$ــسره جفریون می‌نامیم اگر $x_\circ \in S^\varepsilon(f,X)$ و برای هر $(i,x) \in I \times X$ که در رابطه $f_i(x) < f_i(x_\circ) - \varepsilon_i$ صدق می‌کند، یک $j \in I$ موجود باشد به‌طوری‌که $f_j(x_\circ) - \varepsilon_j < f_j(x)$ و علاوه بر این

$$\frac{f_i(x_\circ) - f_i(x) - \varepsilon_i}{f_j(x) - f_j(x_\circ) + \varepsilon_j} \leq \hat{M}.$$

[16] Geoffrion ε-Proper

مجموعه همه جواب‌های $(\hat{M},\varepsilon)$ــ سره جفریون را با $\psi_{\hat{M},\varepsilon}(f,X)$ نشان می‌دهیم. برای اجتناب از هرگونه ابهام با مجموعه جواب‌های εــ سره جفریون ما از $\psi_{\hat{M},\circ}(f,X)$ برای نشان دادن مجموعه جواب‌های $(\hat{M},\circ)$ــ سره دقیق جفریون استفاده خواهیم کرد. جواب‌های $(\hat{M},\circ)$ــ سره جفریون در [۳۴] معرفی شده است.

اکنون باید ببینیم که یک جواب $(\hat{M},\varepsilon)$ــ سره جفریون چه تفاوتی با مفهوم استاندارد یک جواب پارتو سره جفریون دارد. این دو تعریف به مفهومی معکوس یکدیگر هستند. در بهینگی εــ سره جفریون ما باید وجود یک $M > \circ$ را نشان دهیم به‌طوری‌که یک جواب εــ پارتو در نامعادله تبادل نسبت به آن M صدق کند. در حالی‌که در جواب $(\hat{M},\varepsilon)$ــ سره جفریون تصمیم‌گیرنده یک کران تبادل سراسری $\hat{M}$ از قبل انتخاب می‌کند و تنها جواب‌های εــ سره جفریون که تبادل آن با مقدار انتخاب شده $\hat{M}$ کران‌دار شده است را انتخاب می‌کند. با انتخاب $\hat{M}$، تصمیم‌گیرنده کنترل مستقیمی بر تبادل‌ها دارد. بنابراین، مفهوم بهینگی $(\hat{M},\varepsilon)$ــ سره جفریون عملی‌تر از بهینگی εــ سره جفریون به نظر می‌رسد.

در بخش ۳ نشان خواهیم داد که بهینگی εــ سره جفریون دارای مزایای الگوریتمی نیز هست. به‌طور خاص ما دو جنبه همگرایی زیر را برای مفاهیم مختلف بهینه‌سازی بررسی می‌کنیم:

۱. آیا یک دنباله از جواب‌های تقریبی به یک جواب دقیق همگرا می‌شود؟

۲. آیا یک نتیجه مشابه برای یک مجموعه از جواب‌های تقریبی وجود دارد؟

الگوریتم‌های حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه به‌طور تکراری به مرز کارایی نزدیک می‌شود. بنابراین، دو جنبه همگرایی فوق مرتبط هستند. ما ثابت می‌کنیم وقتی ε به سمت صفر میل کند، یک دنباله از جواب‌های بهینه εــ پارتو به جواب بهینه پارتو همگرا نیست. اگر f از پایین کران‌دار باشد آن‌گاه یک دنباله از جواب‌های εــ سره جفریون نیز به یک جواب سره جفریون همگرا نیست. در حد، این دنباله‌ها به یک جواب بهینه پارتو ضعیف همگرا هستند. به هر حال، جواب‌های بهینه پارتو ضعیف در عمل مطلوب نیستند زیرا ممکن است سناریوهایی وجود داشته باشد که در آن امکان بهبود یک ضابطه بدون خراب شدن ضابطه‌های دیگر وجود داشته باشد. از سوی دیگر ما ثابت خواهیم کرد که یک دنباله از جواب‌های $(\hat{M},\varepsilon)$ــ سره جفریون همواره به یک جواب $(\hat{M},\circ)$ــ سره جفریون همگرا است.

اما طرف دیگر ممکن است هیچ جواب بهینه پارتو وجود نداشته باشد که $(\hat{M},\varepsilon)$ــ سره جفریون برای یک $\hat{M}$ خیلی کوچک باشد. با این وجود، در بخش ۲ نشان می‌دهیم که تحت شرایطی $\psi_{\hat{M},\varepsilon}(f,X)$ برای هر $\hat{M} \geq m-۱$ ناتهی است.

قابل ذکر است که اگر $x_\circ$ یک جواب $(\hat{M},\varepsilon)$ــ سره جفریون باشد آن‌گاه یک جواب $(\tilde{M},\varepsilon)$ــ سره جفریون برای هر $\tilde{M} \geq \hat{M}$ نیز هست، یعنی

$$\forall \tilde{M} \geq \hat{M}: \quad \psi_{\hat{M},\varepsilon}(f,X) \subseteq \psi_{\tilde{M},\varepsilon}(f,X).$$

علاوه بر این، به‌راحتی می‌توان دید که اگر $x_\circ$ یک جواب εـسره جفریون باشد، یک جواب $(\hat{M},\varepsilon)$ـسره جفریون برای یک $\hat{M}>\circ$ نیز هست. بنابراین داریم

$$\bigcup_{\hat{M}>\circ} \psi_{\hat{M},\varepsilon}(f,X)=\psi_\varepsilon(f,X).$$

۴.۳ توصیف و نتایج موجود

جواب‌های سره جفریون می‌تواند توسط نشدنی بودن یک سیستم از نامعادلات تجزیه و تحلیل شوند. برای یک عنصر $(x_\circ,\varepsilon,i,M,X)\in X\times\mathbb{R}^m_+\times I\times\mathbb{R}_+\times 2^X$، فرض کنید $\Gamma(x_\circ,\varepsilon,i,M,X)$ سیستم

$$\begin{cases} -f_i(x_\circ)+f_i(x)+\varepsilon_i<\circ, \\ -f_i(x_\circ)+f_i(x)+\varepsilon_i<M(f_j(x_\circ)-f_j(x)-\varepsilon_j) \quad \forall j\in I\setminus\{i\}, \\ x\in X \end{cases}$$

را تعریف کند. برای توصیف جواب‌های سره جفریون، از خواص اساسی زیر در بهینه‌سازی چندهدفه استفاده خواهیم کرد.

تعریف ۱.۴.۳. اگر برای هر $x\in X\setminus S(f,X)$ یک $x(s)\in S(f,X)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $f(x)-f(x(s))\in\mathbb{R}^m_+\setminus\{\circ\}$، آن‌گاه گوییم (f,X) در خاصیت غلبه صدق می‌کند. اگر برای هر $x\in X\setminus S^\varepsilon(f,X)$ یک $x(s)\in S^\varepsilon(f,X)$ موجود باشد به‌طوری‌که $f(x)-f(x(s))+\varepsilon\in\mathbb{R}^m_+\setminus\{\circ\}$، آن‌گاه گوییم (f,X) در ویژگی εـ غلبه صدق می‌کند.

اگر، برای هر $x\in X$، بخش‌های $f(X)\cap(f(x)-\mathbb{R}^m_+)$ فشرده باشند. آن‌گاه دیگر شرایط کافی برای خواص فوق را می‌توان در [۳۵، ۳۶] یافت.

گزاره‌های بعدی $\psi_\varepsilon(f,X)$ و $\psi_{\hat{M},\varepsilon}(f,X)$ را با استفاده از $\Gamma(x_\circ,\epsilon,i,M,X)$ مشخص می‌کنند. این گزاره‌ها را می‌توان به عنوان قضیه‌های دگرین در نظر گرفت.

گزاره ۱.۴.۳. جملات زیر را در نظر بگیرید:

(i). $x_\circ\in\psi_\epsilon(f,X)$

(ii). یک $\hat{M}>\circ$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $i\in I$، سیستم $\Gamma(x_\circ,\varepsilon,i,\hat{M},X)$ ناسازگار است.

(iii). مسئله (f,X) در خاصیت غلبه صدق می‌کند و یک $\hat{M}>\circ$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $i\in I$ سیستم $\Gamma(x_\circ,\varepsilon,i,\hat{M},S(f,X))$ ناسازگار است.

(iv). یک $\tilde{M}$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $M \geq \tilde{M}$، یک $i \in I$ وجود دارد به‌طوری‌که سیستم $\Gamma(x_\circ, \varepsilon, i, M, X)$ سازگار است.

آن‌گاه روابط زیر برقرار است:

۱. $(i) \Leftrightarrow (ii)$،

۲. $(iii) \Rightarrow (i) \vee (ii)$،

۳. $(iv) \Rightarrow \neg(i)$.

برهان. **بخش ۱** .

$(i) \Rightarrow (ii)$. فرض کنید $x_\circ \in \psi_\varepsilon(f, X)$، از تعریف $\psi_\varepsilon(f, X)$ روشن است که یک $\hat{M} > \circ$ وجود دارد به‌طوری‌که $\Gamma(x_\circ, \varepsilon, i, \hat{M}, X)$ برای هر $i \in I$ ناسازگار است.

$(ii) \Rightarrow (i)$. فرض کنید که یک $\hat{M} > \circ$ وجود دارد به‌طوری‌که $\Gamma(x_\circ, \varepsilon, i, \hat{M}, X)$ برای هر $i \in I$ ناسازگار باشد و $x_\circ \notin \psi_\varepsilon(f, X)$. آن‌گاه به یک تناقض می‌رسیم.
ما ابتدا نشان می‌دهیم که (ii) ایجاب می‌کند که $x_\circ \in S^\varepsilon(f, X)$. فرض کنید چنین نباشد، لذا $(\hat{x}, l) \in X \times I$ ای وجود دارد به‌طوری‌که $f_l(\hat{x}) < f_l(x_\circ) - \varepsilon_l$ و $f_k(\hat{x}) \leq f_k(x_\circ) - \varepsilon_k$ برای هر $k \in I \setminus \{l\}$. این نشان می‌دهد که $\hat{x}$ یک جواب برای سیستم $\Gamma(x_\circ, \varepsilon, l, \hat{M}, X)$ است، که یک تناقض است. بنابراین $x_\circ \in S^\varepsilon(f, X)$.
اکنون فرض کنیم $x_\circ \in S^\varepsilon(f, X) \setminus \psi_\varepsilon(f, X)$. لذا برای هر $M > \circ$، $(\hat{x}, l) \in X \times I$ وجود دارد به‌طوری‌که نامعادلات زیر برقرار است:

$$\begin{cases} -f_l(x_\circ) + f_l(\hat{x}) + \varepsilon_l < \circ, \\ -f_l(x_\circ) + f_l(\hat{x}) + \varepsilon_l < M(f_j(x_\circ) - f_j(\hat{x}) - \varepsilon_j) \\ \forall j \in \{i \in I | f_i(x_\circ) - \varepsilon_i < f_i(\hat{x})\} \end{cases} \tag{۳.۳}$$

به‌خصوص، نامساوی‌های (۳.۳) برای $M = \hat{M}$ نیز برقرار است. قابل ذکر است که چون $x_\circ \in S^\varepsilon(f, X)$، لذا مجموعه $\{i \in I | f_i(x_\circ) - \varepsilon_i < f_i(\hat{x})\}$ ناتهی است.
برای jهای دیگر، یعنی برای $j \in \{i \in I | f_i(x_\circ) - \varepsilon_i \geq f_i(\hat{x})\}$ به وضوح، داریم:

$$-f_l(x_\circ) + f_l(\hat{x}) + \varepsilon_i < \circ \leq \hat{M}(f_j(x_\circ) - f_j(\hat{x}) - \varepsilon_j)$$

بنابراین،

$$\begin{cases} -f_l(x_\circ) + f_l(\hat{x}) + \varepsilon_l < \circ, \\ -f_l(x_\circ) + f_l(\hat{x}) + \varepsilon_l < \hat{M}(f_j(x_\circ) - f_j(\hat{x}) - \varepsilon_j), \quad j \in I \setminus \{i\}, \end{cases}$$

و چون $\hat{x}$ متعلق به X است، لذا $\hat{x}$ یک جواب $\Gamma(x_\circ, \varepsilon, l, \hat{M}, X)$ است. این یک تناقض است، و لذا $x_\circ \in \psi_\varepsilon(f, X)$.

بخش ۲ .

$(ii) \Rightarrow (iii)$. یک $x \in X \setminus S(f, X)$ را در نظر بگیرید. چون ویژگی غلبه برقرار است، یک $s(x) \in S(f, X)$ وجود دارد به‌طوری‌که $f_i(s(x)) \leq f_i(x)$ برای هر $i \in I$ و $f_k(s(x)) < f_k(x)$ برای یک $k \in I$. چون $\Gamma(x_\circ, \varepsilon, i, \hat{M}, S(f, X))$ برای هر $i \in I$ ناسازگار است، نتیجه می‌گیریم

$$\begin{cases} -f_l(x_\circ) + f_l(s(x)) + \varepsilon_l < f_l(s(x)) - f_l(x), \\ -f_l(x_\circ) + f_l(s(x)) + \varepsilon_l < \hat{M}(f_j(x_\circ) - f_j(s(x)) - \varepsilon_j) \\ +f_l(s(x)) - f_l(x) + \hat{M}(f_j(s(x)) - f_j(x)), \quad j \in I \setminus \{i\}, \\ x \in X \setminus S^\varepsilon(f, X), \end{cases} \tag{۴.۳}$$

برای هر $i \in I$ نیز ناسازگار است.

با بازنویسی شرایط (۴.۳) و با توجه به این‌که انتخاب $x \in X \setminus S(f, X)$ دلخواه است، نتیجه می‌گیریم که $\Gamma(x_\circ, \varepsilon, i, \hat{M}, X \setminus S(f, X))$ برای هر $i \in I$ ناسازگار است. علاوه بر این از (iii) نتیجه می‌گیریم که $\Gamma(x_\circ, \varepsilon, i, \hat{M}, S(f, X))$ ناسازگار است. بنابراین، برای هر $i \in I$، $\Gamma(x_\circ, \varepsilon, i, \hat{M}, X)$ نیز ناسازگار است. در نتیجه، استلزام $(ii) \Rightarrow (iii)$ برقرار است. چون $(ii) \Longleftrightarrow (i)$ لذا نتیجه می‌گیریم که $(iii) \Rightarrow (i)$ نیز درست است.

بخش ۳ .

یک تجدید آرایش ساده نشان می‌دهد که اگر $\hat{x}$ یک جواب از $\Gamma(x_\circ, \varepsilon, i, \tilde{M}, X)$ باشد، آن‌گاه $\hat{x}$ یک جواب برای، $\Gamma(x_\circ, \varepsilon, i, M, X)$ برای هر $\circ < M \leq \tilde{M}$ نیز هست. بنابراین، گزاره (iv) ایجاب می‌کند که برای هر $M > \circ$ یک $i \in I$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که سیستم $\Gamma(x_\circ, \varepsilon, i, M, X)$ سازگار باشد. این همان نفی گزاره (ii) است، و از بخش ۱ این گزاره، نتیجه می‌گیریم $x_\circ \notin \psi_\varepsilon(f, X)$.

□

گزاره ۲.۴.۳. گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید:

(i). $x_\circ \in \psi_{\hat{M},\varepsilon}(f, X)$.

(ii). برای هر $i \in I$، سیستم $\Gamma(x_\circ, \varepsilon, i, \hat{M}, X)$ ناسازگار است.

(iii). مسئله (f, X) در ویژگی غلبه صدق می‌کند و برای هر $i \in I$، سیستم $\Gamma(x_\circ, \varepsilon, i, \hat{M}, S(f, X))$ ناسازگار است.

(iv). مسئله (f,X) در ویژگی ε ـ غلبه برای یک $\varepsilon \in [\circ,1]$ صدق می‌کند و برای هر $i \in I$، سیستم $\Gamma(x_\circ,\varepsilon,i,\hat{M},S^\varepsilon(f,X))$ ناسازگار است.

لذا نتایج زیر برقرار است:

۱. $(i) \Longleftrightarrow (ii)$

۲. $(iii) \vee (iv) \Rightarrow (i) \vee (ii)$.

برهان. اثبات‌های بخش ۱ و $(iii) \Rightarrow (i) \vee (ii)$ بخش ۲ مشابه اثبات گزاره ۱.۴.۳ می‌باشد. چون $(i) \Longleftrightarrow (ii)$، کافی است که ثابت کنیم $(iv) \Rightarrow (ii)$.

یک $x \in X \setminus S^\varepsilon(f,X)$ و یک $\varepsilon \in [\circ,\epsilon]$ را در نظر بگیرید. چون ویژگی εـ غلبه برقرار است، یک $s(x) \in S^\varepsilon(f,X)$ وجود دارد به‌طوری‌که $f_i(s(x)) \leq f_i(x) - \varepsilon_i$ برای هر $i \in I$ و $f_k(s(x)) < f_k(x) - \varepsilon_k$ برای حداقل یک $k \in I$. چون $\epsilon[\circ,1] \ni \varepsilon$، داریم:

$$S^\varepsilon(f,X) \subseteq S^\epsilon(f,X)$$

بنابراین، نقطه $s(x)$ به $S^\epsilon(f,X)$ نیز متعلق است.

چون $\Gamma(x_\circ,\varepsilon,i,\hat{M},S^\varepsilon(f,X))$ برای هر $i \in I$ ناسازگار است، نتیجه می‌گیریم

$$\begin{cases} -f_l(x_\circ) + f_l(s(x)) + \varepsilon_l < f_l(s(x)) - f_l(x) + \varepsilon_l, \\ -f_l(x_\circ) + f_l(s(x)) + \varepsilon_l < \hat{M}(f_j(x_\circ) - f_j(s(x)) - \varepsilon_j) \\ +f_l(s(x)) - f_l(x) + \varepsilon_l + \hat{M}(f_j(s(x)) - f_j(x) + \varepsilon_j), \quad j \in I \setminus \{i\}, \\ x \in X \setminus S^\varepsilon(f,X) \end{cases} \tag{۵.۳}$$

برای هر $i \in I$ نیز ناسازگار است. با تجدید آرایش عبارات (۵.۳) می‌بینیم که این معادله با ناسازگاری

$$\begin{cases} -f_l(x_\circ) + f_l(x) + \varepsilon_l < \varepsilon_l, \\ -f_l(x_\circ) + f_l(x) + \varepsilon_l < \hat{M}(f_j(x_\circ) - f_j(x) - \varepsilon_j), \quad j \in I \setminus \{i\}, \\ x \in X \setminus S^\varepsilon(f,X), \end{cases} \tag{۶.۳}$$

برای هر $i \in I$ معادل است. چون $\varepsilon_l, \varepsilon_j, \hat{M}$ همه نامنفی هستند، ناسازگاری (۶.۳) نتیجه می‌دهد که،

$$\begin{cases} -f_l(x_\circ) + f_l(x) + \varepsilon_l < \circ, \\ -f_l(x_\circ) + f_l(x) + \varepsilon_l < \hat{M}(f_j(x_\circ) - f_j(x) - \varepsilon_j), \quad j \in I \setminus \{i\}, \\ x \in X \setminus S^\varepsilon(f,X), \end{cases} \tag{۷.۳}$$

برای هر $i \in I$ ناسازگار باشد. سیستم (۷.۳) همان $\Gamma(x_\circ, \varepsilon, i, \hat{M}, X \setminus S^\varepsilon(f,X))$ است. به‌علاوه از (iv) ما داریم که $\Gamma(x_\circ, \varepsilon, i, \hat{M}, S^\varepsilon(f,X))$ ناسازگار است. از این‌رو برای هر $i \in I$، سیستم $\Gamma(x_\circ, \varepsilon, i, \hat{M}, X)$ نیز ناسازگار است. بنابراین استلزام $(ii) \Rightarrow (iv)$ نتیجه می‌شود. $\square$

نتیجه ۱.۴.۳. فرض کنید (f,X) در ویژگی غلبه صدق کند، آن‌گاه داریم

$$\psi_\varepsilon(f,X) = \psi_\varepsilon(f, S^\varepsilon(f,X))$$

و

$$\psi_{\hat{M},\varepsilon}(f,X) = \psi_{\hat{M},\varepsilon}(f, S^\varepsilon(f,X)).$$

ملاحظه ۱.۴.۳. روابط ارائه شده در نتیجه ۱.۴.۳ می‌تواند در طراحی الگوریتم‌های کارای مبتنی بر جمعیت برای تقریب $\psi_{\hat{M},\varepsilon}(f,X)$ (یا تقریب $f(\psi_{\hat{M}}(f,X))$ در فضای ضابطه) مورد استفاده قرار گیرد. بسیاری از الگوریتم های تقریبی مبتنی بر جمعیت، یعنی روش‌های جستجوی چندگانه [۳۷] و تکنیک‌های تصادفی [۳۸، ۴۰]، مجموعه‌ای از نقاط P را در فرایند جستجوی خود استفاده می‌کنند. چون یک مجموعه متناهی فشرده است لذا در ویژگی غلبه صدق می‌کند. محاسبه $\psi_{\hat{M}}(f,X)$ از P با استفاده از یک روش ساده نیازمند آن است که همه نقاط در P در همه‌ی ضابطه‌ها مقایسه شوند. این منجر به پیچیدگی مجانبی درجه دوم می‌شود. یک روش محاسبه کارایی این خواهد بود که ابتدا $S^\varepsilon(f,X)$ را از P محاسبه کرده و سپس جواب‌های εـ سره جفریون $S^\varepsilon(f,X)$ را محاسبه می‌کنیم. با توجه به نتیجه ۱.۴.۳ این منجر به مجموعه جواب‌های εـ سره جفریون از P می‌شود. الگوریتم ارائه شده در [۴۱] از این تکنیک برای حالت خاص $\varepsilon = \circ$ استفاده می‌کند و از الگوریتم‌ها برای حل مسائل بهینه‌سازی انرژی در شبکه‌های هوشمند استفاده می‌کند [۴۲]. طراحی الگوریتم‌هایی که در طول روش جستجوی خود از $\varepsilon > \circ$ استفاده می‌کنند و به طور متوالی آن را برای محاسبه جواب‌های εـ سره جفریون با استفاده از روابط در نتیجه ۱.۴.۳ به کار می‌گیرد یک مسئله باز است.

گزاره بعدی نشان می‌دهد که در شرایط بسیار خفیف $\psi_{\hat{M},\varepsilon}(f,X)$ برای هر $\hat{M} \geq m - ۱$ ناتهی است.

گزاره ۳.۴.۳. فرض کنید $\varepsilon > \circ$ و $\hat{M} \geq m - ۱$. اگر مسئله مجموع وزن‌دار

$$\min_{x \in X} \sum_{i=۱}^{m} f_i(x) \tag{۸.۳}$$

از پایین کران‌دار باشد، آن‌گاه $\psi_{\hat{M},\varepsilon}(f,X) \neq \emptyset$.

برهان. اگر مسئله مجموع وزن‌دار (۸.۳) از پایین کران‌دار باشد، آن‌گاه آن یک اینفیمم دارد، و از [[۴۳]،قضیه ۲.۴]، نتیجه می‌گیریم مجموعه ϵـ مینیمم مسئله (۸.۳) برای هر $\varepsilon > \circ$ ناتهی است. اثبات را با نشان دادن این‌که اگر $x_\circ$ یک $\sum_{i=۱}^{m} \epsilon_j$ـ مینیمم مسئله (۸.۳) باشد، آن‌گاه

$x_\circ \in \psi_{\hat{M},\varepsilon}(f,X)$ است ادامه می‌دهیم. ما نشان می‌دهیم که $x_\circ \in \psi_{m-1,\varepsilon}(f,X)$. از تعریف بهینگی $(\hat{M},\varepsilon)$ــسره جفریون، نتیجه می‌گیریم که برای هر $\hat{M} \geq m-1$، $x_\circ \in \psi_{\hat{M},\varepsilon}(f,X)$ نیز هست.

با برهان خلف فرض کنید $x_\circ \notin \psi_{m-1,\varepsilon}(f,X)$. لذا، از گزاره ۲.۴.۳ می‌توانیم یک $i \in I$ به‌دست آوریم به‌طوری که $\Gamma(x_\circ,\varepsilon,i,\hat{M},X)$ سازگار است. بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم $i=1$. در نتیجه، سیستم $\Gamma(x_\circ,\varepsilon,i,\hat{M},X)$، نوشته شده به فرم

$$\begin{cases} -f_1(x_\circ)+f_1(x)+\varepsilon_1<\circ, \\ -f_1(x_\circ)+f_1(x)+\varepsilon_1<(m-1)(f_j(x_\circ)-f_j(x)-\varepsilon_j) \quad \forall j\in I\setminus\{1\}, \\ x\in X \end{cases} \tag{۹.۳}$$

یک جواب دارد. با جمع کردن (۹.۳) برای هر $j \in I\setminus\{1\}$، نتیجه می‌گیریم

$$-f_1(x_\circ)+f_1(x)+\varepsilon_1<\sum_{j=2}^{m}(f_j(x_\circ)-f_j(x)-\varepsilon_j),$$

که ایجاب می‌کند

$$\sum_{j=1}^{m} f_j(x_\circ)-\sum_{j=1}^{m} f_j(x)-\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_j>\circ. \tag{۱۰.۳}$$

نامساوی (۱۰.۳) یک تناقض با $-\sum_{j=1}^{m}\epsilon_j$ـ مینیممی نقطه $x_\circ$ برای مسئله (۸.۳) است. بنابراین حکم $x_\circ \in \psi_{m-1,\varepsilon}(f,X)$ نتیجه می‌شود. □

ملاحظه ۲.۴.۳. با کمک اثبات گزاره ۳.۴.۳ می‌توانیم به‌راحتی نشان دهیم، که برای هر $\varepsilon \geq \circ$ و هر $\epsilon \geq \circ$ که $\sum_{i=1}^{m}\epsilon_i \leq \varepsilon$، همه جواب‌های εــمینیمم مسئله (۸.۳) نیز جواب‌های $(\hat{M},\varepsilon)$ــسره جفریون هستند.

نتیجه ۲.۴.۳. فرض کنید همه f_iها محدب قوی باشند و X یک مجموعه محدب بسته باشد. آن‌گاه، برای هر $\hat{M} \geq m-1$ داریم $\psi_{\hat{M},\varepsilon}(f,X) \neq \emptyset$.

برهان. اثبات ازاین حقیقت نتیجه می‌شود که مجموع توابع محدب قوی، محدب قوی است و در یک مجموعه محدب بسته یک مینیمم کننده منحصربه‌فرد به دست می‌آید. بنابراین در این حالت تابع هدف مسئله (۸.۳) از پایین کران‌دار است و بلافاصله از گزاره ۳.۴.۳ نتیجه می‌شود. □

ملاحظه ۳.۴.۳. [۴۴] اگر یک $\hat{x} \in X$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که مسئله اسکالرسازی زیر

$$\begin{aligned} &\min_{x\in X}\sum_{i=1}^{m} f_i(x) \\ &s.t. \quad f_j(x)\leq f_j(\hat{x}), \quad j\in I, \end{aligned} \tag{۱۱.۳}$$

بی‌کران باشد، آن‌گاه $\psi(f,X) = \emptyset$. لذا نتیجه می‌گیریم که، برای هر $\tilde{M} > 0$، مجموعه $\psi_{\tilde{M}}(f,X) = \emptyset$ است [۴۵]. بی‌کرانی (۱۱.۳) یک محدودیت قوی‌تر نسبت به محدودیت‌های (۸.۳) است. ما حدس می‌زنیم که بی‌کرانی (۸.۳) یک شرط کافی برای $\psi(f,X) = \emptyset$ است. به نظر می‌رسد این موضوع برای مسائل بهینه‌سازی دوضابطه‌ای با یک مرز کارای پیوسته برقرار است.

مثال بعدی نشان می‌دهد که جواب برای $\hat{M} < m - 1$ نیز امکان‌پذیر است. تجزیه و تحلیل ما نشان می‌دهد که $\psi_{\hat{M}}(f,X)$ صرف نظر از تعداد ضابطه‌ها یک مجموعه تک عضوی برای $\hat{M} < 1$ است. در یک مسئله بهینه‌سازی چندهدفه یک مجموعه تک عضوی به‌عنوان مجموعه بهینه رخ می‌دهد اگر یک ترتیب کلی به‌عنوان رابطه ترتیبی استفاده شود. در این پایان‌نامه، این به این معنی خواهد بود که برای $\hat{M} < 1$ بهینگی $\hat{M}$ـ سره جفریون با یک ترتیب کلی معادل است.

مثال ۱.۴.۳. برای پارامتر $\theta \in [0, \frac{\Pi}{2})$، بهینه‌سازی خطی دوهدفه پارامتریک $(f(x,\theta), X(\theta))$ تعریف شده به‌وسیله‌ی $X = \{x \in \mathbb{R}^2_+ | x_2 = (1 - x_1)\tan\theta\}$ و $f = id_{X(\theta)}$ را در نظر بگیرید، که در آن $id_{X(\theta)}$ تابع همانی روی $X(\theta)$ است. برای $\theta = 0$، ما یک سناریوی بدیهی داریم که $f(S_w(f(\theta), X(\theta))$ یک مجموعه تک عضوی است. هدف ما این است که حداقل مقدار $\hat{M}$ که با $M(\theta)$ نشان می‌دهیم را به‌گونه‌ای بیابیم که $\psi_{\hat{M}}(f(\theta), X(\theta)) \neq \emptyset$.

مرز بهینه پارتو $(f(x,\theta), X(\theta))$ شامل پاره خط واصل $(0, \tan\theta)^T$ و $(1, 0)^T$ است.(شکل ۱، بالا). تبادل نشان داده شده در تعریف ۴.۳.۳ در $(0, \tan\theta)^T$ برابر $\tan\theta$ است. درحالی‌که تبادل مربوطه در $(1, 0)^T$ برابر $\cot\theta$ است. برای یک نقطه u در درون نسبی پاره خط، تبادل برابر $\max\{\tan\theta, \cot\theta\}$ است. در نتیجه ما داریم که

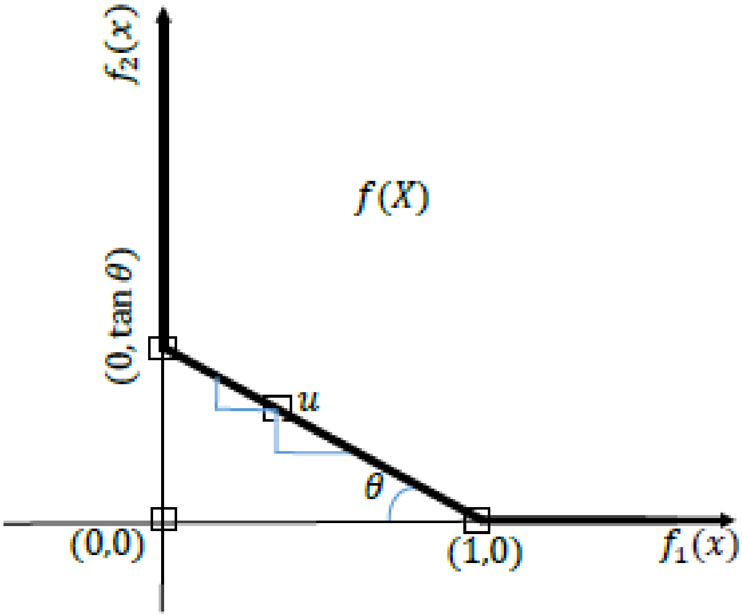
$$M(\theta) = \min\{\min\{\tan\theta, \cot\theta\}, \max\{\tan\theta, \cot\theta\}\} = \min\{\tan\theta, \cot\theta\}.$$

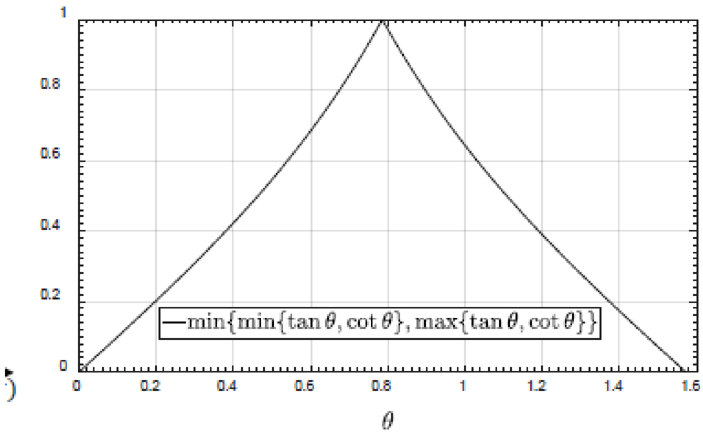
می‌بینیم که برای $\theta \in (0, \frac{\Pi}{2})$، $M(\theta)$ هر مقدار ممکن از $(0,1)$ را می‌گیرد (شکل(۳.۳)،پایین). به‌علاوه، ما می‌توانیم به آسانی نشان دهیم که، برای هر $M(\theta) < 1$، مجموعه $\psi_{M(\theta)}(f,X)$ یک مجموعه تک عضوی است، که شامل یکی از نقاط انتهایی پاره‌خط است.

۵.۳ خواص همگرایی

فرض کنید $\hat{M} > 0$؛ $\varepsilon > 0$؛ و $C \supseteq \mathbb{R}^m_+$ یک مخروط بسته، محدب و توپر اختیاری اما ثابت باشد. برای یک $\tau > 0$، هشت تایی $\mathbb{T}$ و $\mathbb{T}^\tau$ تعریف می‌شوند به‌صورت زیر

$$\mathbb{T} = (\psi_{\hat{M},0}(f,X), \psi(f,X), S(f,X), S_w(f,X), S(f,X,C), S_w(f,X,C))$$





شکل ۳.۳: توضیح مثال ۱.۴.۳. مجموعه $f(S_w(f(\theta), X(\theta)))$ شامل سه خط سیاه ضخیم است(شکل بالا). حداقل مقدار $\hat{M}$ به‌طوری‌که $\psi_{\hat{M}}(f(\theta), X(\theta)) \neq \emptyset$، به‌عنوان یک تابع از θ ترسیم شده است (شکل پایین).

و

$$\mathbb{T}^\tau = (\psi_{\hat{M},\tau\varepsilon}(f, X), \psi_{\tau\varepsilon}(f, X), S^{\tau\varepsilon}(f, X), S_w^{\tau\varepsilon}(f, X), S^{\tau\varepsilon}(f, X, C), S_w^{\tau\varepsilon}(f, X, C)).$$

برای هر $i \in \{۱, ۲, \ldots, ۶\}$، . عنصر i_ام $\mathbb{T}$ و $\mathbb{T}^\tau$ به‌ترتیب با $\mathbb{T}_i$ و $\mathbb{T}_i^\tau$ نشان داده می‌شوند. در این بخش برای هر $i \in \{۱, ۲, \ldots, ۶\}$ ما پاسخ به سوالات زیر را بررسی می‌کنیم:

۱. اگر $u^\tau \in \mathbb{T}_i^\tau$ برای $\tau > ۰$ و $\lim_{\tau \to ۰^+} u^\tau = u$، آیا $u \in \mathbb{T}_i$؟

۲. رابطه بین $\mathbb{T}_i$ و $\cap_{\tau > ۰} \mathbb{T}_i^\tau$ چیست؟

برای $\mathbb{T}_4, \mathbb{T}_3$ و معادل‌های تقریبی‌شان $\mathbb{T}_4^\tau, \mathbb{T}_3^\tau$، این سوالات در [۴۳] بحث شده است. پاسخ به این سوالات به دلایل الگوریتمی مهم است.برای مثال پاسخ مثبت به سوال (۱) باعث می‌شود که یک الگوریتم تکراری نقطه به نقطه که نقاط در $\mathbb{T}_i^\tau$ را با مقدار کوچک τ در تکرارهای متوالی محاسبه می‌کنند در واقع به یک نقطه در $\mathbb{T}_i$ همگرا می‌شوند. یک تساوی بین $\mathbb{T}_i$ و $\cap_{\tau>0}\mathbb{T}_i^\tau$ به‌عنوان پاسخ به سوال (۲) می‌تواند منجر به یک نتیجه همگرایی مشابه برای جمعیت براساس الگوریتم‌های تقریبی شود. از طرف دیگر، اگر $\cap_{\tau>0}\mathbb{T}_i^\tau$ یک ابرمجموعه $\mathbb{T}_i$ باشد، آن‌گاه نقاط بیشتری در اشتراک وجود دارد. این وضعیت مطلوب نیست زیرا نتیجه می‌شود که، برای بعضی از دنباله‌ها در $\mathbb{T}_i^\tau$، پاسخ (۱) مثبت نباشد. علاوه بر این، اگر $\cap_{\tau>0}\mathbb{T}_i^\tau$ یک زیرمجموعه سره از $\mathbb{T}_i$ باشد، آن‌گاه (۱) ممکن است یک پاسخ مثبت داشته باشد، اما هنوز نقاطی در $\mathbb{T}_i$ وجود دارد که به مفهوم سوال (۱) قابل دستیابی نیست.

به راحتی می‌توان دید که شمول $\mathbb{T}_i \subseteq \mathbb{T}_i + 1$ برای هر $i \in \{1,2,3\}$ برقرار است. در نتیجه برای هر $i \in \{1,2,3\}$، اگر فرض کنیم که برای هر $u^\tau \in \mathbb{T}_i$، آن‌گاه یک جواب مثبت برای سوال (۱) برای $\mathbb{T}_i$، یک جواب مثبت برای سوال (۱) برای $\mathbb{T}_{i+1}$ نیز خواهد بود.

برای شروع از روش مجموع وزن‌دار (۸.۳) برای بررسی (۱) برای $\mathbb{T}_1$ استفاده می‌کنیم. برای این منظور، فرض کنید $\mathbb{W}$ و $\mathbb{W}^\tau$ به ترتیب می‌نیمم و $\tau\varepsilon$ـ می‌نیمم مسئله (۸.۳) را نشان دهند.

گزاره ۱.۵.۳. فرض کنید X بسته و f پیوسته باشد. اگر $u^\tau \in \mathbb{W}^\tau \subseteq \psi_{\hat{M},\tau\varepsilon}(f,X)$ برای هر $\tau > 0$ و $\lim_{\tau\to 0^+} u^\tau = u$، آن‌گاه $u \in W \subseteq \psi_{\hat{M},0}(f,X)$.

برهان. از ملاحظه ۲.۴.۳، نتیجه می‌شود که $u^\tau \in \psi_{\hat{M},\tau\varepsilon}(f,X)$ و $u \in \psi_{\hat{M},0}(f,X)$. چون $u^\tau \in \mathbb{W}^\tau$، داریم:

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(u^\tau) - \tau\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i \leq f(x) \qquad \forall x \in X.$$

با گرفتن حد $\tau \to 0^+$، و چون X بسته است و f پیوسته است، نتیجه می‌گیریم برای هر $x \in X$ $\sum_{i=1}^{m} f_i(u) \leq f(x)$. برای هر $x \in X$. در نتیجه، حد، نقطه $u \in \mathbb{W}$ است. □

دو قضیه بعدی جواب سوال (۱) را بدون فرض اضافی $u^\tau \in \mathbb{W}^\tau$ برای هر $\tau > 0$ بررسی می‌کنند:

قضیه ۱.۵.۳. فرض کنید X بسته و f پیوسته باشد. اگر $u^\tau \in S_w^{\tau\varepsilon}(f,X,C)$ برای هر $\tau > 0$ و $\lim_{\tau\to 0^+} u^\tau = u$، آن‌گاه $u \in S_w(f,X,C)$.

برهان. تحت فرض قضیه، از تعریف ۱.۲.۳ نتیجه می‌گیریم:

$$\forall (x,\tau) \in X \times \mathbb{R}_+ : \qquad f(x) + \tau\varepsilon - f(u^\tau) \in \tilde{C} := C \setminus (-int(C)).$$

چون C یک مخروط بسته و محدب و توپر فرض شد، مجموعه $\tilde{C}$ یک مخروط بسته است. با گرفتن حد $\tau \to ۰^+$ و چون X و $\tilde{C}$ بسته هستند و f پیوسته است، نتیجه می‌گیریم

$$\forall x \in X : \qquad f(x) - f(u) \in \tilde{C}$$

بنابراین، $u \in S_w(f, X, C)$ نتیجه می‌شود. □

ملاحظه ۱.۵.۳. به‌طور خاص، قضیه ۱.۵.۳ با انتخاب $C = \mathbb{R}^m_+$ نیز نتیجه می‌شود. لذا نتیجه مشابهی نیز برای $\mathbb{T}_۴$ برقرار است.

قضیه ۲.۵.۳. فرض کنید X بسته و f پیوسته باشد. اگر $u^\tau \in \psi_{\hat{M},\tau\varepsilon}(f, X)$ برای هر $\tau > ۰$ و $\lim_{\tau \to ۰^+} u^\tau = u$، آن‌گاه $u \in \psi_{\hat{M},۰}(f, X)$.

برهان. چون $u^\tau \in \psi_{\hat{M},\tau\epsilon}(f, X)$. طبق بخش ۱ گزاره ۲.۴.۳ نتیجه می‌گیریم، برای هر $i \in I$، سیستم $\Gamma(x_۰, \tau\varepsilon, i, \hat{M}, X)$، نوشته شده به فرم

$$\begin{cases} -f_i(u^\tau) + f_i(x) + \tau\varepsilon_i < ۰, \\ -f_i(u^\tau) + f_i(x) + \tau\varepsilon_i < \hat{M}(f_j(u^\tau) - f_j(x) - \tau\varepsilon_j) \quad \forall j \in I \setminus \{i\}, \\ x \in X, \end{cases}$$

ناسازگار است.

فرض کنید $W = \mathbb{R}^m \backslash (-int(\mathbb{R}^m_+))$ و برای هر $(i, x, \tau) \in I \times X \times \mathbb{R}_+$، بردارهای $F^i(\tau, x, \hat{M})$ که به‌صورت

$$F^i_j = \begin{cases} -f_i(u^\tau) + f_i(x) + \tau\varepsilon & j = ۱ \\ -f_i(u^\tau) + f_i(x) + \tau\varepsilon_i - \hat{M}(f_j(u^\tau) - f_j(x) - \tau\varepsilon_j) & j \in I \diagdown \{۱\} \end{cases}$$

تعریف می‌شود را در نظر بگیرید. چون W مخروط بسته و f پیوسته است، برای هر $(i, x) \in I \times X$ داریم:

$$\lim_{\tau \to ۰^+} F^i(\tau, x, \hat{M}) = F^i(۰, x, \hat{M}) \in W. \tag{۱۲.۳}$$

از (۱۲.۳) نتیجه می‌گیریم، برای هر $i \in I$، سیستم

$$\begin{cases} -f_i(u) + f_i(x) < ۰ \\ -f_i(u) + f_i(x) - \hat{M}(f_j(u) - f_j(x)) <, ۰, \\ x \in X, \end{cases} \tag{۱۳.۳}$$

ناسازگار است. چون (۱۳.۳) همان $\Gamma(u, ۰, i, \hat{M}, X)$ است، براساس بخش (۱) گزاره ۲.۴.۳، داریم $u \in \psi_{\hat{M},۰}(f, X)$. □

قضیه ۲.۵.۳ یک ویژگی همگرایی مطلوب برای جواب‌های $(\hat{M},\varepsilon)$ــ سره جفریون را نشان می‌دهد. ما در قضیه‌های ۳.۵.۳ و ۴.۵.۳ نشان خواهیم داد که این ویژگی همگرایی در حالت کلی برای جواب‌های εــ سره جفریون و بهینه εــ پارتو برقرار نیست.

برای جواب دادن به سوال (۲) با $\mathbb{T}_5 = S(f,X,C)$ و $\mathbb{T}_6 = S_w(f,X,C)$ شروع می‌کنیم.

قضیه ۳.۵.۳. مجموعه روابط زیر برقرار است :

$$\cap_{\tau>0} S_w^{\tau\varepsilon}(f,X,C) = \cap_{\tau>0} S^{\tau\varepsilon}(f,X,C) = S_w(f,X,C)$$
$$\supseteq S(f,X,C) \supseteq \psi(f,X) \supseteq \psi_{\hat{M},0}(f,X).$$

برهان. واضح است که

$$S_w(f,X,C) \supseteq S(f,X,C) \supseteq \psi(f,X).$$

برای اثبات می‌توانید به [۱۳] رجوع کنید. شمول $\psi(f,X) \supseteq \psi_{\hat{M},0}(f,X)$ از تعریف این مجموعه‌ها نتیجه می‌شود. بنابراین تنها باید ثابت کنیم که

$$\cap_{\tau>0} S_w^{\tau\varepsilon}(f,X,C) = \cap_{\tau>0} S^{\tau\varepsilon}(f,X,C) = S_w(f,X,C) \qquad (۱۴.۳)$$

برای اثبات (۱۴.۳)، ما نشان خواهیم داد که مکمل‌های نسبی مجموعه‌های $\cap_{\tau>0} S^{\tau\varepsilon}(f,X,C), \cap_{\tau>0} S_w^{\tau\varepsilon}(f,X,C)$ و $S_w(f,X,C)$ نسبت به X معادل هستند.

فرض کنید $x_0 \in X$ به‌گونه‌ای باشد که $x_0 \notin \cap_{\tau>0} S_w^{\tau\epsilon}(f,X,C)$. در نتیجه، با استفاده تعریف ۲.۲.۳، نتیجه می‌گیریم

$$\exists \hat{\tau} > 0, \hat{x} \in X, c^+ \in int(C) : f(x_0) - f(\hat{x}) - \hat{\tau}\varepsilon = c^+. \qquad (۱۵.۳)$$

چون c^+ یک عنصر از $C \setminus \{0\}$ است، رابطه ۱۵.۳ نشان می‌دهد که x_0 نمی‌تواند یک عنصر $\cap_{\tau>0} S^{\tau\varepsilon}(f,X,C)$ باشد. در نتیجه

$$X \setminus \left(\cap_{\tau>0} S_w^{\tau\varepsilon}(f,X,C)\right) \subseteq X \setminus \left(\cap_{\tau>0} S^{\tau\varepsilon}(f,X,C)\right). \qquad (۱۶.۳)$$

از طرف دیگر اگر $x_0 \in X$ به‌گونه‌ای باشد که $x_0 \notin \cap_{\tau>0} S^{\tau\varepsilon}(f,X,C)$، آن‌گاه

$$\exists \hat{\tau} > 0, \hat{x} \in X, c \in C \setminus \{0\} : f(x_0) - f(\hat{x}) - \hat{\tau}\varepsilon = c.$$

چون $\hat{\tau}\epsilon \in int(C)$، نتیجه می‌گیریم،

$$f(x_0) - f(\hat{x}) = c + \hat{\tau}\varepsilon \in int(C).$$

در نتیجه، نقطه x_0 نمی‌تواند به $S_w(f,X,C)$ متعلق باشد. بنابراین،

$$X \setminus \left(\cap_{\tau>0} S^{\tau\varepsilon}(f,X,C)\right) \subseteq X \setminus S_w(f,X,C). \qquad (۱۷.۳)$$

سرانجام، اگر $x_\circ \in X$ به‌گونه‌ای باشد که $x_\circ \notin S_w(f,X,C)$، آن‌گاه

$$\exists \hat{x} \in X, c^+ \in int(C) : f(x_\circ) - f(\hat{x}) = c^+.$$

چون $c^+ \in int(C)$، برای هر $\varepsilon > \circ$، یک $\hat{\tau} > \circ$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$f(x_\circ) - f(\hat{x}) - \hat{\tau}\varepsilon = c^+ - \hat{\tau}\varepsilon \in int(C).$$

در نتیجه $x_\circ \notin \cap_{\tau>\circ} S_w^{\tau\varepsilon}(f,X,C)$. بنابراین،

$$X \setminus S_w(f,X,C) \subseteq X \setminus (\cap_{\tau>\circ} S_w^{\tau\varepsilon}(f,X,C)) \qquad (۱۸.۳)$$

و اثبات از شمول‌های (۱۶.۳)،(۱۷.۳)،(۱۸.۳) نتیجه می‌شود. □

ملاحظه ۲.۵.۳. بخش‌هایی از نتایج قضیه ۳.۵.۳ در مراجع مختلفی بیان شده است. برای مثال، با فرض آن‌که $C = \mathbb{R}^m_+$ و $f(x)$ محدب باشد داتا و همکاران [17] [۴۶] نشان می‌دهند که $\cap_{\tau>\circ} S_w^{\tau\varepsilon}(f,X,C) = S_w(f,X,C)$. رابطه $\cap_{\tau>\circ} S_w^{\tau\varepsilon}(f,X,C) \subseteq S_w(f,X,C)$ در [[۴۷]،قضیه ۲.۱] نشان داده شده است.

قابل ذکر است که قضیه ۳.۵.۳ هیچ پیش‌فرضی در مورد f و X ندارد. برای مثال، نتیجه حتی اگر $f(X)$ یک مجموعه باز کران‌دار باشد نیز برقرار است. در این حالت، به‌راحتی می‌توان نشان داد که برای هر $\tau > \circ$ مجموعه $S_w^{\tau\varepsilon}(f,X,C)$ ناتهی است، اما $S_w(f,X,C) \subseteq bd(f(X))$ تهی است(چون $bd(f(X)) = \emptyset$).

قضیه ۳.۵.۳ یک ویژگی همگرایی مطلوب برای نقاط (ε,C)ـ بهینه ضعیف، را به‌عنوان یک جواب برای (۲) نشان می‌دهد. به‌طور خاص قضیه ۳.۵.۳ با انتخاب $C = \mathbb{R}^m_+$ نیز برقرار است. بنابراین نتایج مشابهی نیز برای $\mathbb{T}_۳$ و $\mathbb{T}_۴$ وجود دارد.

بهینگی ضعیف، ضعیف‌ترین مفهوم بهینگی است. با این حال، چون نقاط بهینه ضعیف می‌توانند در برخی از ضابطه‌ها بهبود یابند بدون آن‌که مولفه‌های دیگر بدتر شوند، لذا این یک مفهوم عملی برای بهینگی نیست. متداول‌ترین مفهوم بهینگی که مورد استفاده قرار می‌گیرد بهینگی پارتو است. برای نقاط بهینه پارتو، قضیه ۳.۵.۳ نشان می‌دهد که پاسخ مثبت به (۱) به‌طورکلی امکان‌پذیر نیست. با توجه به این‌که اشترک نقاط $\tau\varepsilon$ـ پارتو (برای $\tau > \circ$)، مجموعه نقاط بهینه پارتو ضعیف است، تساوی (به‌عنوان جواب برای (۲))امکان‌پذیر نیست. با توجه به این واقعیت که مجموعه نقاط بهینه پارتو ضعیف می‌توانند به‌طور قابل توجهی بزرگ‌تر از جواب‌های بهینه پارتو باشد، این اشتراک نشان می‌دهد که بهینگی پارتو نیز یک مفهوم عملی نیست.

در مرحله بعد $\mathbb{T}_۲$ یعنی مجموعه جواب‌های سره جفریون را بررسی می‌کنیم. بهینگی سره جفریون نسبت به بهینگی پارتو یک مفهوم بهینگی قوی‌تر است.

[17]Dutta et al

قضیه ۴.۵.۳. مجموعه روابط زیر برقرار است:

$$\psi(f,X) \subseteq \cap_{\tau>0}\psi_{\tau\varepsilon}(f,X) \subseteq S_w(f,X). \tag{۱۹.۳}$$

اگر f از پایین کران‌دار باشد، آن‌گاه داریم

$$\cap_{\tau>0}\, \psi_{\tau\varepsilon}(f,X) = S_w(f,X). \tag{۲۰.۳}$$

برهان. با برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض کنید که $x_0 \in X \setminus S_w(f,X)$. بنابراین، یک $\hat{x} \in X$ وجود دارد به‌طوری‌که $f_i(\hat{x}) < f_i(x_0)$ برای هر $i \in I$. در نتیجه

$$\exists \hat{\tau} > 0 : -f_i(x_0) + f_i(\hat{x}) + \hat{\tau}\varepsilon < 0, \quad i \in I.$$

در نتیجه، سیستم $\Gamma(x_0, \hat{\tau}\varepsilon, 1, M, X)$ برای هر $M > 0$ سازگار است. براساس بخش (۱) گزاره ۱.۴.۳، نتیجه می‌گیریم $x_0 \notin \cap_{\tau>0}\psi_{\tau\varepsilon}(f,X)$. در نتیجه،

$$\cap_{\tau>0}\, \psi_{\tau\varepsilon}(f,X) \subseteq S_w(f,X). \tag{۲۱.۳}$$

اکنون با برهان خلف ثابت می‌کنیم که

$$\psi(f,X) \subseteq \cap_{\tau>0}\psi_{\tau\varepsilon}(f,X). \tag{۲۲.۳}$$

فرض می‌کنیم که $x_0 \in X \backslash (\cap_{\tau>0}\psi_{\tau\varepsilon}(f,X))$. بر اساس بخش (۱) گزاره ۱.۴.۳، نتیجه می‌گیریم یک $\hat{\tau} > 0$ وجود دارد که

$$\forall M > 0, \exists i \in I : \Gamma(x_0, \hat{\tau}\varepsilon, i, M, X) \tag{۲۳.۳}$$

سازگار است. به‌طور معادل، برای هر $M > 0$، $(i,\hat{x}) \in I \times X$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$\begin{cases} -f_i(x_0) + f_l(\hat{x}) + \hat{\tau}\varepsilon_i < 0 \\ -f_i(x_0) + f_i(\hat{x}) + \hat{\tau}\varepsilon_i < M(f_j(x_0) - f_j(\hat{x}) + \hat{\tau}\varepsilon_j), \quad j \in I \setminus \{i\}. \end{cases} \tag{۲۴.۳}$$

چون $\hat{\tau} > 0$ و $\varepsilon \geq 0$، سیستم (۲۴.۳) ایجاب می‌کند که

$$\begin{cases} -f_i(x_0) + f_l(\hat{x}) < 0, \\ -f_i(x_0) + f_i(\hat{x}) < M(f_j(x_0) - f_j(\hat{x})), \quad j \in I \setminus \{i\}. \end{cases} \tag{۲۵.۳}$$

چون $\hat{x} \in X$، سیستم (۲۵.۳) نشان می‌دهد که $\Gamma(x_0, 0, i, M, X)$ سازگار است. بنابراین، با به‌کار بردن بخش (۱) گزاره ۱.۴.۳، نتیجه می‌گیریم $x_0 \notin \psi(f,X)$. این (۲۲.۳) را نتیجه می‌دهد، و با استفاده از (۲۱.۳)، بخش اول گزاره ثابت می‌شود.

بنابراین ما با برهان خلف ثابت می‌کنیم که اگر f از پایین کران‌دار باشد، آن‌گاه

$$\cap_{\tau>0}\, \psi_{\tau\varepsilon}(f,X) \supseteq S_w(f,X). \tag{۲۶.۳}$$

برای این منظور، فرض کنید، برای هر $i \in I$، تابع f_i از پایین با β کران‌دار باشد. فرض کنید که $x_\circ \in X \setminus (\cap_{\tau>\circ}\psi_{\tau\varepsilon}(f,X))$. مشابه با اثبات (۲۲.۳) رابطه (۲۳.۳) نتیجه می‌شود. فرض کنید یک دنباله $(M_n)_{n\in N}$ را به‌طوری‌که $\lim_{n\to\infty} M_n = \infty$ در نظر بگیریم. چون I یک مجموعه متناهی است، می‌توانیم بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنیم که $i = ۱$، یعنی برای هر M_n، سیستم $\Gamma(x_\circ, \hat{\tau}\varepsilon, ۱, M_n, X)$ سازگار است. بنابراین برای هر M_n، یک $x^n \in X$ وجود دارد به‌طوری‌که

(۲۷.۳)

$$\begin{cases} -f_۱(x_\circ) + f_۱(x^n) + \hat{\tau}\varepsilon_۱ < \circ, \\ -f_۱(x_\circ) + f_۱(x^n) + \hat{\tau}\varepsilon_۱ < M_n(-f_j(x_\circ) + f_j(x^n) + \hat{\tau}\varepsilon_j), \quad j \in \{۲,۳,\dots,m\} \end{cases}$$

برقرار باشد.

چون $f_۱$ از پایین توسط β کران‌دار است و هم‌چنین $\lim_{n\to\infty} M_n = \infty$ از (۲۷.۳) نتیجه می‌گیریم که

$$\circ \geq \lim_{n\to\infty} \frac{-f_۱(x_\circ) + f_۱(x^n) + \hat{\tau}\varepsilon_۱}{M_n} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{-f_۱(x_\circ) + \beta + \hat{\tau}\varepsilon_۱}{M_n} = \circ.$$

در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-f_۱(x_\circ) + f_۱(x^n) + \hat{\tau}\varepsilon_۱}{M_n} = \circ. \qquad (۲۸.۳)$$

با استفاده از (۲۸.۳) در (۲۷.۳)، نتیجه می‌گیریم

$$\exists n_\circ \in N : f_j(x_\circ) - f_j(x^{n_\circ}) - \hat{\tau}\varepsilon_j \geq -\frac{\hat{\tau}\varepsilon_۱}{۲}, \quad j \in \{۲,۳,\dots,m\} \qquad (۲۹.۳)$$

از نامساوی اول (۲۷.۳) همراه با (۲۹.۳) نتیجه می‌شود که $f_i(x^{n_\circ}) < f_i(x_\circ)$ برای هر $i \in I$.
در نتیجه رابطه $x_\circ \notin S_w(f,X)$ نتیجه می‌شود و اثبات کامل است. □

شرط کران‌داری در قضیه ۴.۵.۳ به نظر می‌رسد که بسیار خفیف باشد. برای مثال اگر یکی از ضابطه‌ها از پایین بی‌کران باشد، آن‌گاه $S(f,X)$ نیز بی‌کران خواهد بود. علاوه بر این، از ملاحظه ۳.۴.۳، اگر هر یک از f_i ها بی‌کران باشند به‌طوری‌که (۱۱.۳) بی‌کران باشد، آن‌گاه گزاره ۳.۴.۳ نشان می‌دهد که $\psi(f,X)$ تهی است. برای حالت دوضابطه‌ای، گزاره بعدی نشان می‌دهد که، اگر یک نقطه‌ی بهینه پارتو ضعیف وجود داشته باشد که حتی بهینه پارتو نباشد و در فصل مشترک جواب‌های εـ سره جفریون وجود نداشته باشد، آن‌گاه مجموعه جواب‌های سره جفریون تهی خواهد بود. در نتیجه اگر (۲۰.۳) برقرار نباشد، آن‌گاه ما یک وضعیت سخت داریم که مجموعه جواب‌های سره جفریون تهی است.

ما به مفهوم $\mathbb{R}^m_+$ ـ بسته [۱۳] در گزاره‌ی بعدی نیاز خواهیم داشت. یک مجموعه $S \subset \mathbb{R}^m$، $\mathbb{R}^m_+$ ـ بسته نامیده می‌شود اگر، برای هر $s \in S$، قطاع‌های $(\{s\} - \mathbb{R}^m_+) \cap S$ بسته باشد.

گزاره ۲.۵.۳. فرض کنید $m=2$ و فرض کنید $f(X)$، $\mathbb{R}^m_+$ ـ بسته باشد. آن‌گاه، استلزام زیر برقرار است:

$$(S_w(f,X) \setminus (S(f,X) \cup (\cap_{\tau>0} \psi_{\tau\varepsilon}(f,X))) \neq \emptyset) \Rightarrow (\psi(f,X) = \emptyset). \tag{۳۰.۳}$$

برهان. فرض کنید $x_0 \in S_w(f,X) \setminus (S(f,X) \cup (\cap_{\tau>0} \psi_{\tau\varepsilon}(f,X)))$. براساس (۱۹.۳)، نتیجه می‌گیریم که x_0 نمی‌تواند به $\psi(f,X)$ متعلق باشد.

با برهان خلف فرض کنید $\psi(f,X)$ ناتهی باشد و فرض کنید $\hat{x} \in \psi(f,X)$ دلخواه اما ثابت باشد. چون $\hat{x} \neq x_0$ و $\psi(f,X) \subseteq S(f,X)$، داریم که $\hat{x} \in S(f,X)$. ما می‌توانیم بدون از دست دادن کلیت فرض کنیم که $f_1(x_0) \leq f_1(\hat{x})$ و $f_2(x_0) > f_2(\hat{x})$. فرض کنید $a := f_1(\hat{x}) - f_1(x_0) \geq 0$، $b := f_2(x_0) - f_2(\hat{x}) > 0$، $u := (f_1(x_0) - 1, f_2(\hat{x}) - 1)^T$، و X^u, X^l, X^b به‌صورت زیر تعریف شوند:

$$X^u =: \{x \in X | f_1(x) \geq u_1, f_2(x) \geq u_2\},$$

$$X^l =: \{x \in X | f_1(x) \leq u_1, f_2(x) \geq u_2\},$$

$$X^b =: \{x \in X | f_1(x) \geq u_1, f_2(x) \leq u_2\}.$$

توجه داشته باشید که، مجموعه X^u ناتهی است چون $x_0, \hat{x} \in X^u$، اما مجموعه‌های X^l و X^b می‌توانند تهی باشند.

تحدید f به X^u از پایین کران‌دار است. بنابراین، براساس قضیه ۴.۵.۳، نتیجه می‌گیریم

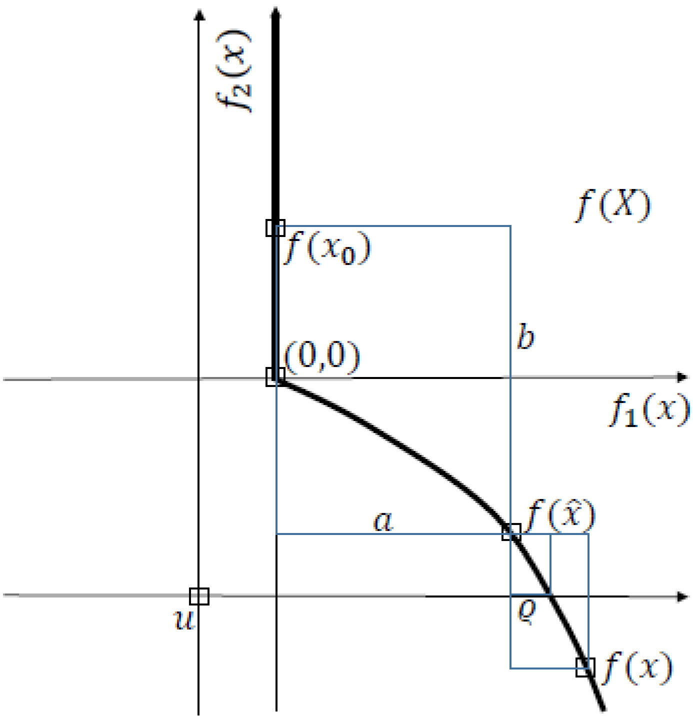
$$\cap_{\tau>0} \psi_{\tau\epsilon}(f\mid_{X^u}, X^u) = S_w(f\mid_{X^u}, X^u). \tag{۳۱.۳}$$

نشان می‌دهیم که $x_0 \in \cap_{\tau>0} \psi_{\tau\varepsilon}(f,X)$، و لذا به یک تناقض می‌رسیم. برای این منظور، فرض کنید $\hat{\tau} > 0$ دلخواه اما ثابت باشد. چون $x_0 \in S_w(f,X)$، در نتیجه $x_0 \in S_w(f\mid_{X^u}, X^u)$. با در نظر گرفتن (۳۱.۳)، داریم $x_0 \in \psi_{\hat{\tau}\varepsilon}(f|_{X^u}, X^u)$. از تعریف ۳.۳.۳، یک $\hat{M} > 0$ موجود است، به‌طوری‌که برای هر $(i,x) \in I \times X^u$ که در $f_i(x) < f_i(x_0) - \hat{\tau}\varepsilon_i$ صدق می‌کند یک $j \in I$ وجود دارد به‌طوری‌که $f_j(x_0) - \hat{\tau}\varepsilon_j < f_j(x)$ و

$$\frac{f_i(x_0) - f_i(x) - \hat{\tau}\varepsilon_i}{f_j(x) - f_j(x_0) + \hat{\tau}\varepsilon_j} \leq \hat{M}. \tag{۳۲.۳}$$

در نتیجه برای حالتی که $x \in X^u$، تبادل بین $f(x_0)$ و $f(x)$ کران‌دار است.چون $x_0 \in S_w(f,X) \setminus S(f,X)$، دو حالت دیگر ممکن است رخ دهد:

۱. $X^l = \emptyset$: $x \in X \setminus X^u$ را به‌طوری‌که $f_2(x) < f_2(x_0) - \hat{\tau}\epsilon_2$ در نظر بگیرید. همان‌طور که در شکل ۴.۳ دیده می‌شود، $x \in X^b$. چون $f(X)$، $\mathbb{R}^m_+$ ـ بسته است، منحنی $f(S_w(f,X))$، که به‌عنوان تابعی از f_1 درنظر گرفته می‌شود، بسته و غیرصعودی است. بنابراین، یک $\varrho > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $\tilde{x} \in X^b$، نتیجه می‌گیریم $f_1(\tilde{x}) - f_1(\hat{x}) \geq \varrho$.



شکل ۴.۳: تصویر حالت ۱ در اثبات گزاره ۲.۵.۳. مجموعه $f(S_w(f,X))$ شامل منحنی و خط سیاه ضخیم است و بی‌کران است. تابع f_1 از پایین کران‌دار است درحالی‌که تابع f_2 بی‌کران است. اگر ما مبدا را به u تغییر دهیم آن‌گاه ربع اول X^u خواهد شد درحالی‌که ربع‌های دوم وچهارم به‌ترتیب X^l و X^b خواهند شد

چون $\hat{x} \in \psi(f,X)$ و $x \in X^b$، در نتیجه $f_1(\hat{x}) < f_1(x), f_2(\hat{x}) > f_2(x)$ و یک $\tilde{M} > 0$ وجود دارد که

$$\frac{f_2(\hat{x}) - f_2(x)}{f_1(x) - f_1(\hat{x})} \leq \tilde{M}. \tag{۳۳.۳}$$

با استفاده از (۳۳.۳) و مقایسه تبادل بین $f(x_0)$ و $f(x)$، نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned}
\frac{f_2(x_0) - f_2(x) - \hat{\tau}\varepsilon_2}{f_1(x) - f_1(x_0) + \hat{\tau}\varepsilon_1} &\leq \frac{f_2(x_0) - f_2(x)}{f_1(x) - f_1(x_0)} \\
&= \frac{f_2(\hat{x}) - f_2(x) + b}{f_1(x) - f_1(\hat{x}) + a} \\
&= \frac{f_2(\hat{x}) - f_2(x)}{f_1(x) - f_1(\hat{x}) + a} + \frac{b}{f_1(x) - f_1(\hat{x}) + a} \\
&\leq \frac{f_2(\hat{x}) - f_2(x)}{f_1(x) - f_1(\hat{x})} + \frac{b}{\varrho + a} \\
&\leq \tilde{M} + \frac{b}{\varrho + a}.
\end{aligned}$$

از این‌رو، نامساوی (۳۲.۳) با جایگذاری $\tilde{M} + \frac{b}{\varrho + a}$ به‌جای $\hat{M}$ برای $x \in X^b$ برقرار می‌شود.

۲. $X^b = \emptyset$: مشابه حالت اول اثبات می‌شود . مشابه حالت اول، یک مقدار $\hat{M}$ وجود دارد که در نامساوی (۳۲.۳) صدق می‌کند.

به‌عنوان یک نتیجه از روابط فوق داریم $x_\circ \in \psi_{\hat{\tau}\varepsilon}(f, X)$. چون انتخاب τ دلخواه است، نتیجه می‌گیریم که $x_\circ \in \cap_{\tau>\circ}\psi_{\tau\varepsilon}(f, X)$، و لذا به تناقض می‌رسیم.

□

در گزاره ۲.۵.۳ می‌توان رابطه (۳۰.۳) را با

$$(S_w(f, X) \setminus (\cap_{\tau>\circ}\psi_{\tau\varepsilon}(f, X)) \neq \emptyset) \Rightarrow (\psi(f, X) = \emptyset)$$

جایگزین کرد. با این‌حال ایده گزاره به صراحت نشان می‌دهد که (۳۰.۳) برای نقاط بهینه پارتو ضعیفی که بهینه پارتو نیستند برقرار می‌باشد. این نقاط می‌توانند از مجموعه نقاط بهینه پارتو دور باشند.

تعریف ۱.۵.۳. فرض کنید X و Y دو زیرمجموعه از فضای متریک (M, d) باشند، فاصله هاسدورف که به‌صورت $d_H(X, Y)$ نشان داده می‌شود به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$d_H(X, Y) = \max\{\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} d(x, y), \sup_{y\in Y}\inf_{x\in X} d(x, y)\}$$

فرض کنید برای مجموعه‌های $Y, Z \subseteq \mathbb{R}^n$، فاصله هاسدورف بین Y و Z با $d_H(X, Y)$ تعریف می‌شود. قضیه ۴.۵.۳ نشان می‌دهد که مجموعه جواب‌های εـ سره جفریون فقط به مجموعه نقاط بهینه پارتو ضعیف همگرا است. به‌طورکلی، مجموعه نقاط بهینه پارتو ضعیف می‌تواند بسیار بزرگ‌تر از مجموعه جواب‌های سره جفریون باشد. برای چنین مسئله بهینه‌سازی چندهدفه‌ای، اگر f پیوسته لیپ‌شوتز و از پایین کران‌دار باشد، آن‌گاه $d_H(\psi_{\tau\varepsilon}(f, X), \psi(f, X))$ به‌عنوان یک تابع از τ کران‌دار و دور از صفر است.

قضیه ۵.۵.۳ یک نتیجه جامع برای جواب‌های $(\hat{M}, \varepsilon)$ـ سره است. قضایای ۲.۵.۳ و ۵.۵.۳ نشان می‌دهند که برای چنین جواب‌هایی، یعنی با انتخاب $\mathbb{T}_1 = \psi_{\hat{M},\circ}(f, X)$، یک پاسخ مثبت به سوال (۱) و تساوی مورد (۲) به‌دست می‌آید. جدا از این واقعیت که تبادل برای جواب‌های $(\hat{M}, \varepsilon)$ـ سره جفریون کران‌دار است، این جواب‌ها به سوالات (۱) و (۲) باعث می‌شود که این جواب‌ها عملی‌تر از جواب‌های εـ سره جفریون و جواب‌های εـ بهینه پارتو باشند.

قضیه ۵.۵.۳. مجموعه روابط زیر برقرار است:

I. $\psi_{\hat{M},\circ}(f, X) = \cap_{\tau>\circ}\psi_{\hat{M},\tau\varepsilon}(f, X) = \cap_{M>\hat{M}}\psi_{M,\circ}(f, X) = \cap_{M>\hat{M}}\cap_{\tau>\circ}\psi_{M,\tau\varepsilon}(f, X)$

II. $\psi_{\hat{M},\circ}(f, X) = \cup_{M\leq\hat{M}}\cap_{\tau>\circ}\psi_{M,\tau\varepsilon}(f, X) = \cap_{\tau>\circ}\cup_{M\leq\hat{M}}\psi_{M,\tau\varepsilon}(f, X).$

برهان. **بخش I** اول نشان می‌دهیم که

$$\psi_{\hat{M},\circ}(f,X) = \cap_{\tau>\circ}\psi_{\hat{M},\tau\varepsilon}(f,X) \tag{۳۴.۳}$$

برقرار است. برای این منظور حالتی را در نظر بگیریم که هر دو $\psi_{\hat{M},\circ}(f,X)$ و $\cap_{\tau>\circ}\psi_{\hat{M},\tau\varepsilon}(f,X)$ ناتهی باشند.

$(\Rightarrow)$ فرض کنید $x_\circ \in \psi_{\hat{M},\circ}(f,X)$. با قرار دادن $\varepsilon = \circ$ در گزاره ۲.۴.۳، نتیجه می‌گیریم که برای هر $i \in I$، سیستم $\Gamma(x_\circ,\circ,i,\hat{M},X)$، نوشته شده به فرم

$$\begin{cases} -f_i(x_\circ)+f_i(x) < \circ \\ -f_i(x_\circ)+f_i(x) < \hat{M}(f_j(x_\circ)+f_j(x)), \quad j \in I\setminus\{i\}, \\ x \in X, \end{cases}$$

ناسازگار است. این نتیجه می‌دهد که سیستم

$$\begin{cases} -f_i(x_\circ)+f_i(x) < -\tau\varepsilon_i, \\ -f_i(x_\circ)+f_i(x) < \hat{M}(f_j(x_\circ)+f_j(x)) - \hat{M}\tau\varepsilon_j - \tau\varepsilon_i, \quad j \in I\setminus\{i\}, \\ x \in X, \end{cases} \tag{۳۵.۳}$$

برای هر $\tau > \circ$ ناسازگار است. به‌راحتی می‌توان دید که (۳۵.۳) همان $\Gamma(x_\circ,\tau\varepsilon,i,\hat{M},X)$ است. در نتیجه برای هر $\tau > \circ$، از بخش (۱) گزاره ۲.۴.۳، نتیجه می‌شود $x_\circ \in \psi_{\hat{M},\tau\varepsilon}(f,X)$. در نتیجه $x_\circ \in \cap_{\tau>\circ}\psi_{\hat{M},\tau\varepsilon}(f,X)$.

$(\Leftarrow)$ فرض کنید $x_\circ \in \cap_{\tau>\circ}\psi_{\hat{M},\tau\varepsilon}(f,X)$. براساس بخش (۱) گزاره ۲.۴.۳ نتیجه می‌گیریم ،برای هر $i \in I$ و هر $\tau > \circ$، سیستم $\Gamma(x_\circ,\tau\varepsilon,i,\hat{M},X)$، نوشته شده به فرم

$$\begin{cases} -f_i(x_\circ)+f_i(x)+\tau\varepsilon_i < \circ, \\ -f_i(x_\circ)+f_i(x)+\tau\varepsilon_i < \hat{M}(f_j(x_\circ)-f_j(x)-\tau\varepsilon_j), \quad j \in I\setminus\{i\}, \\ x \in X, \end{cases}$$

ناسازگار است. فرض کنید $W = \mathbb{R}^m \setminus (-int(\mathbb{R}^m_+))$ و برای هر $i \in I$ و هر $\tau > \circ$، بردارهای $F_i(\tau,x,\hat{M})$ را که به‌صورت

$$F^i_j(\tau,x,\hat{M}) = \begin{cases} -f_i(x_\circ)+f_i(x)+\tau\varepsilon & j = ۱: \\ -f_i(x_\circ)+f_i(x)+\tau\varepsilon_i - \hat{M}(f_j(x_\circ)-f_j(x)-\tau\varepsilon_j), & j \in I\setminus\{۱\}, \end{cases}$$

تعریف می‌شوند را در نظر بگیرید. چون W یک مخروط بسته است، در نتیجه، برای هر $i \in I$،

$$\lim_{\tau>\circ^+} F_i(\tau,x,\hat{M}) \in W.$$

در نتیجه، برای هر $i \in I$، سیستم

$$\begin{cases} -f_i(x_\circ) + f_i(x) < \circ \\ -f_i(x_\circ) + f_i(x) - \hat{M}(f_j(x_\circ) - f_j(x)) < \circ, \\ x \in X, \end{cases} \qquad (۳۶.۳)$$

ناسازگار است. ما می‌بینیم که (۳۶.۳) همان $\Gamma(x_\circ, \circ, i, \hat{M}, X)$ است. در نتیجه از بخش (۱) گزاره ۲.۴.۳ نتیجه می‌شود $x_\circ \in \psi_{\hat{M},\circ}(f, X)$.

حالتی که حداقل یکی از مجموعه‌های $\psi_{\hat{M},\circ}(f, X)$ و $\cap_{\tau>\circ}\psi_{\hat{M},\tau\varepsilon}(f, X)$ تهی باشد در ادامه مورد بحث قرار می‌گیرد.

$(\Rightarrow)$ فرض کنید $\psi_{\hat{M},\circ}(f, X) = \emptyset$ و به برهان خلف فرض کنید $\cap_{\tau>\circ}\psi_{\hat{M},\tau\varepsilon}(f, X) \neq \emptyset$. بنابراین $x_\circ \in \cap_{\tau>\circ}\psi_{\hat{M},\tau\varepsilon}(f, X)$ وجود دارد. از اثبات فوق نتیجه می‌گیریم که $x_\circ \in \psi_{\hat{M},\circ}(f, X)$، که یک تناقض است.

$(\Leftarrow)$ فرض کنید $\cap_{\tau>\circ}\psi_{\hat{M},\tau\varepsilon}(f, X) = \emptyset$ و به برهان خلف فرض کنید که $\psi_{\hat{M},\circ}(f, X) \neq \emptyset$. با استفاده از استدلال‌های مشابه حالت اخیر، نتیجه می‌گیریم که این وضعیت نیز امکان‌پذیر نیست. این اثبات (۳۴.۳) را تکمیل می‌کند.

اثبات‌های

$$\psi_{\hat{M},\circ}(f, X) = \cap_{M \leq \hat{M}}\psi_{M,\circ}(f, X)$$

و

$$\psi_{\hat{M},\circ}(f, X) = \cap_{M > \hat{M}} \cap_{\tau>\circ} \psi_{M,\tau\varepsilon}(f, X)$$

مشابه اثبات (۳۴.۳) با تعریف بردارهای $F_j^i(\circ, x, M)$ و $F_j^i(\tau, x, M)$، و توجه به‌این که

$$\lim_{M \to \hat{M}^+} F_j^i(\circ, x, M), \ \lim_{\substack{\tau \to \circ^+ \\ M \to \hat{M}^+}} F_j^i(\tau, x, M) \in W$$

برقرار می‌شود.

بخشII. براساس بخش I این قضیه، نتیجه می‌گیریم که، برای هر $M > \circ$، هر $\tau > \circ$، و هر $\varepsilon > \circ$،

$$\cap_{\tau>\circ}\psi_{M,\tau\varepsilon}(f, X) = \psi_{M,\circ}(f, X)$$

برقرار است. بنابراین، برای اثبات

$$\psi_{\hat{M},\circ}(f, X) = \cup_{M \leq \hat{M}} \cap_{\tau>\circ} \psi_{M,\tau\varepsilon}(f, X) = \cap_{\tau>\circ} \cup_{M \leq \hat{M}} \psi_{M,\tau\varepsilon}(f, X),$$

کافی است نشان دهیم که برای هر $\tau \geq \circ$ و هر $\varepsilon > \circ$،

$$\psi_{\hat{M},\tau\varepsilon}(f, X) = \cup_{M \leq \hat{M}}\psi_{M,\tau\varepsilon}(f, X).$$

به‌وضوح، برای هر $\tau \geq ۰$ و هر $\varepsilon > ۰$، $\psi_{\hat{M},\tau\varepsilon}(f,X) \subseteq \cup_{M \leq \hat{M}} \psi_{M,\tau\varepsilon}(f,X)$ نتیجه می‌شود. طرف دیگر از تعریف $\psi_{\hat{M},\tau\varepsilon}(f,X)$، نتیجه می‌شود، اگر $x_۰ \in \psi_{M,\tau\varepsilon}(f,X)$ برای یک $M < \hat{M}$، در نتیجه $x_۰ \in \psi_{\hat{M},\tau\varepsilon}(f,X)$ است. اثبات II کامل است.

□

نتیجه بعدی در مورد زمانی است که X یک مجموعه متناهی باشد.

قضیه ۶.۵.۳. فرض کنید X یک مجموعه متناهی باشد. آن‌گاه

$$S^{\varepsilon}(f,X) = \psi_{\varepsilon}(f,X). \tag{۳۷.۳}$$

به‌علاوه، یک $\hat{\tau} > ۰$ موجود است به‌طوری‌که،

$$\psi_{\hat{M},۰}(f.X) = \psi_{\hat{M},\hat{\tau}\varepsilon}(f.X), \tag{۳۸.۳}$$

$$S^{w}(f,X) = \psi_{\hat{\tau}\varepsilon}(f.X). \tag{۳۹.۳}$$

برهان. چون X متناهی است، برای هر $x_۰ \in S^{\varepsilon}(f,X)$، تبادل تعریف شده در ۳.۳.۳ همیشه کران‌دار است. بنابراین $x_۰ \in \psi_{\varepsilon}(f,X)$ است. از طرف دیگر، مجموعه $\psi_{\varepsilon}(f,X)$ همیشه یک زیرمجموعه از $S^{\varepsilon}(f,X)$ است. بنابراین (۳۷.۳) نتیجه می‌شود.

اثبات (۳۸.۳): براساس بخش (I) قضیه ۵.۵.۳، نتیجه می‌گیریم، برای هر $\varepsilon > ۰$ و هر $\hat{M} > ۰$، یک $\bar{\tau} > ۰$ موجود است به‌طوری که

$$\psi_{\hat{M},۰}(f.X) \subseteq \psi_{\hat{M},\bar{\tau}\varepsilon}(f.X).$$

$(\Leftarrow)$ فرض کنید $X = \{x^۱, x^۲, \ldots, x^{\nu}\}$ برای یک $\nu \in \mathbb{N}$، و فرض کنید $\varepsilon, \hat{M} > ۰$ ثابت باشند. اگر مجموعه‌های $\psi_{\hat{M},۰}(f.X)$ و X یکسان باشند، آن‌گاه حکم گزاره بدیهی است. بنابراین فرض می‌کنیم که $\psi_{\hat{M},۰}(f.X) \neq X$.

یک $x^l \in X$ را به‌طوری‌که $x^l \notin \psi_{\hat{M},۰}(f.X)$ در نظر بگیرید. براساس بخش (۱) گزاره ۲.۴.۳، نتیجه می‌گیریم یک $i \in I$ و $x^k \in X$ موجود است به‌طوری‌که

$$\begin{cases} -f_i(x^l) + f_i(x^k) < ۰, \\ -f_i(x^l) + f_i(x^k) - \hat{M}(f_j(x^l) - f_j(x^k)) < ۰ \quad \forall j \in I \setminus \{i\}, \end{cases} \tag{۴۰.۳}$$

برقرار است. به دلیل نامساوی اکید در (۴۰.۳)، یک $\tau^l > ۰$، موجود است به‌طوری‌که برای هر $\tau \in [۰, \tau^l]$،

$$\begin{cases} -f_i(x^l) + f_i(x^k) < -\tau\varepsilon_i, \\ -f_i(x^l) + f_i(x^k) - \hat{M}(f_j(x^l) - f_j(x^k)) < -\tau\varepsilon_i - \hat{M}\tau\varepsilon_i \quad \forall j \in I \setminus \{i\}, \end{cases} \tag{۴۱.۳}$$

برقرار است. با قرار دادن $\tilde{\tau} := \min\{\tau^1, \dots, \tau^\nu\}$، نتیجه می‌گیریم، برای هر $x^l \in X \setminus \psi_{\hat{M}}(f, X)$، یک $x^k \in X$ موجود هست به‌طوری‌که (۴۱.۳) برای هر $\tau \in [0, \tilde{\tau}]$ برقرار است. چون $x^l \notin \psi_{\hat{M},0}(f, X)$ و چون (۴۱.۳) همان $\Gamma(x^l, \tau\varepsilon, i, \hat{M}, X)$ است، براساس بخش (۱) گزاره ۲.۴.۳، نتیجه می‌گیریم

$$\forall x^l \in X : x^l \notin \psi_{\hat{M},0}(f, X) \Rightarrow x^l \notin \psi_{\hat{M},\tilde{\tau}\varepsilon}(f, X). \tag{۴۲.۳}$$

نقیض گزاره (۴۲.۳) نتیجه می‌دهد که

$$\forall x^l \in X : x^l \in \psi_{\hat{M},\tilde{\tau}\varepsilon}(f, X) \Rightarrow x^l \in \psi_{\hat{M},0}(f, X). \tag{۴۳.۳}$$

در نتیجه، $\psi_{\hat{M},\tilde{\tau}\varepsilon}(f, X) \subseteq \psi_{\hat{M},0}(f, X)$ و $\psi_{\hat{M},0}(f, X) = \psi_{\hat{M},\tilde{\tau}\varepsilon}(f, X)$ با قرار دادن $\hat{\tau} := \min\{\tilde{\tau}, \bar{\tau}\}$ نتیجه می‌شود.

اثبات (۳۹.۳): چون X متناهی است، شرایط قضیه ۴.۵.۳ برقرار هستند. در نتیجه، $\cap_{\tau > 0} \psi \tau\varepsilon(f, X) = S_w(f, X)$. بنابراین، برای هر $\varepsilon > 0$، یک $\bar{\tau} > 0$ موجود است به‌طوری‌که

$$S_w(f, X) \subseteq \psi_{\bar{\tau}\varepsilon}(f, X).$$

($\Leftarrow$) $x^l \in X$ را در نظر بگیرید به‌طوری‌که $x^l \notin S_w(f, X)$. در نتیجه، یک $x^k \in X$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$- f_i(x^l) + f_i(x^k) < 0 \quad \forall i \in I. \tag{۴۴.۳}$$

به‌راحتی می‌توان نشان داد که (۴۴.۳) نتیجه می‌دهد رابطه (۴۱.۳) برای $i = 1$، برای هر $\hat{M}$ به اندازه‌ی کافی بزرگ و برای هر $\tau \in [0, \tau^l]$ با τ^l به اندازه‌ی کافی کوچک برقرار است. براساس بخش (۳) گزاره ۱.۴.۳ و مشابه با اثبات (۳۸.۳)، یک $\breve{\tau} > 0$ را به‌دست می‌آوریم به‌طوری‌که

$$\forall x^l \in X : \quad x^l \notin S_w(f, X) \Rightarrow x^l \notin \psi_{\breve{\tau}\varepsilon}(f, X). \tag{۴۵.۳}$$

نقیض گزاره (۴۵.۳) نتیجه می‌دهد که

$$\forall x^l \in X : \quad x^l \in \psi_{\breve{\tau}\varepsilon}(f, X) \Rightarrow x^l \in S_w(f, X) \tag{۴۶.۳}$$

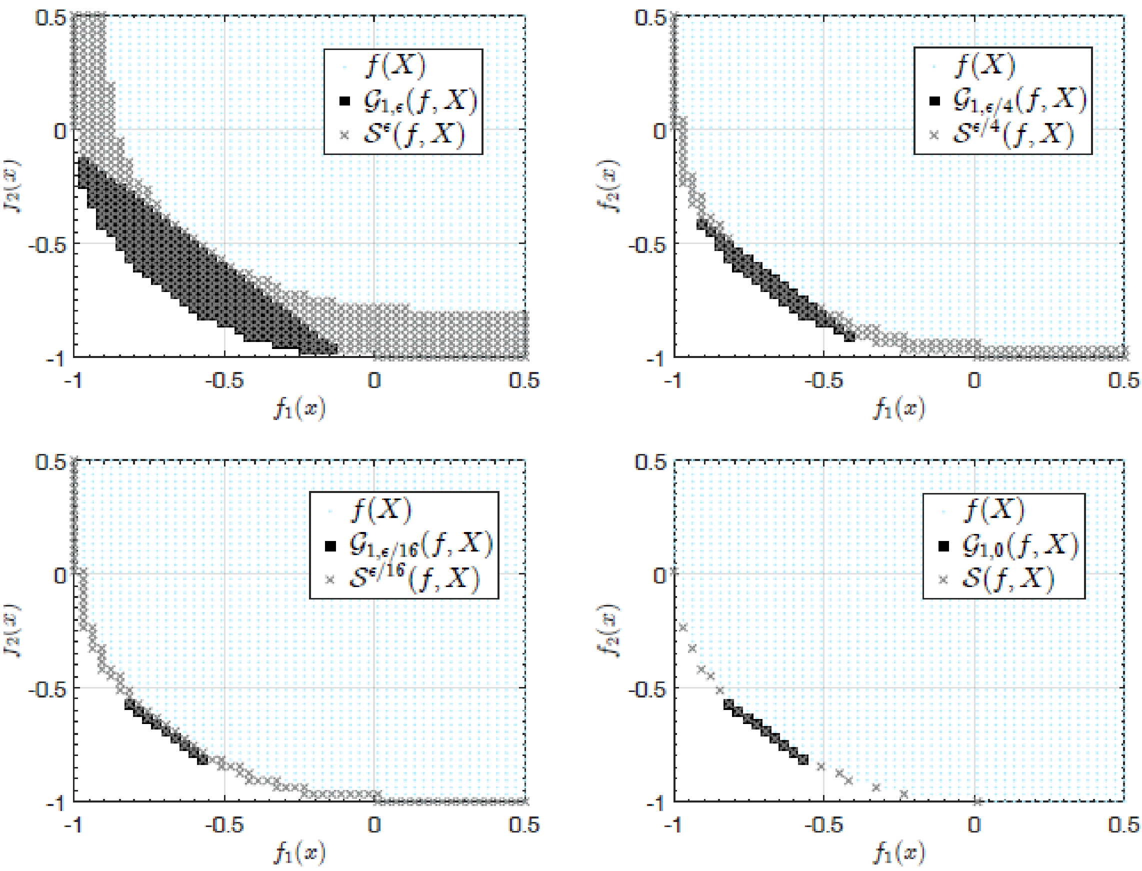
بنابراین، نتیجه دلخواه را به‌دست می‌آوریم. □

مثال ۱.۵.۳. فرض کنید $X^g \subset \mathbb{R}^2$ مجموعه‌ای شامل 50×50 شبکه باشد که در مستطیل $[-1, 0/5]^2$ هم‌سطح شده‌اند. فرض کنید

$$X := X^g \setminus \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1, x_2 \geq 0, \|x\|_2 > 1\}$$

و $f = id_X$، که id_X تابع همانی روی X است.

برای $\varepsilon = (0/1, 0/2)^T$، مجموعه‌های $\psi_{1,\tau\varepsilon}(f, X)$ و $S^{\tau\varepsilon}(f, X)$ به‌ترتیب همگرا به مجموعه‌های $\psi_{1,0}(f, X)$ و $S_w(f, X)$ می‌باشند (شکل ۵.۳). مشاهده می‌شود که روابط (۳۸.۳) و (۳۹.۳) در گزاره ۶.۵.۳ برای $\hat{\tau} = \frac{1}{16}$ برقرار می‌باشند.(شکل ۵.۳، پایین چپ).



شکل ۵.۳: نتایج همگرایی در یک مسئله بهینه‌سازی دوهدفه گسسته با $\varepsilon = (۰/۱,۰/۲)^T$. شکل پایین سمت راست مجموعه جواب‌های دقیق را نشان می‌دهد. شکل‌های دیگر رفتار همگرایی جواب‌های $(۱,\tau\varepsilon)$ـ سره جفریون به جوابهای $(۱,۰)$ـ سره جفریون برای مقادیر τ، برابر $۱,\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۱۶}$ را نشان می‌دهند. مشاهده می‌شود که $S^{\varepsilon}(f,X)$ به $S_w(f,X)$ همگرا است. چون X متناهی است، برای هر $\varepsilon \geq ۰$، می‌بینیم که $S^{\varepsilon}(f,X)=\psi_{\varepsilon}(f,X)$. بنابراین، $\psi_{\tau\varepsilon}(f,X)$ نیز به $S_w(f,X)$ همگرا است. با توجه به این‌که $S_w(f,X)\setminus S(f,X)$ ناتهی است، فاصله هاسدورف $d_H(\psi_{\tau\varepsilon}(f,X),\psi(f,X))$ به‌عنوان یک تابع از τ کران‌دار به دور از صفر است، درحالی‌که $\psi_{۱,\tau\varepsilon}(f,X),\psi_{۱,۰}(f,X)$ به صفر میل می‌کنند.

خلاصه‌ای از پاسخ به سوالات (۱) و(۲) از صفحه ۶۳ در جدول زیر ارائه شده است.

جدول ۱.۳: پاسخ به سوالات (۱) و(۲)

$\mathbb{T}_i$	$\psi_{\hat{M},۰}(f,X)$	$\psi(f,X)$	$S(f,X)$	$S_w(f,X)$	$S(f,X,C)$	$S_w(f,X,C)$
۱.آیا $(u^{\tau} \in \mathbb{T}_i^{\tau})$ برای $(\tau > ۰)\wedge(u^{\tau}\to u) \Rightarrow u \in \mathbb{T}_i$?	بله [a]	نه [b]، بله [c]	نه، بله [c]	بله [a]	نه، بله [c]	بله [a]
۲.رابطه بین $\mathbb{T}_i$ و $\cap_{\tau>۰}\mathbb{T}_i^{\tau}$ چیست؟	$=$	$\subseteq^b$	$\subseteq$	$=$	$\subseteq$	$=$

a : اگر X بسته و f پیوسته باشد.
b : اگر همه‌ی f_jها از پایین کران‌دار باشند.
c : اگر $u^{\tau}\in\mathbb{W}^{\tau}$ برای هر $\tau>۰$.

فصل ۴

نتیجه‌گیری

یکی از پرکاربردترین روش‌های حل مسائل چندهدفه استفاده از روش‌های اسکالرسازی است. البته با توجه به این‌که معمولا توابع هدفی که با آن‌ها سر و کار داریم بر ضد هم عمل می‌کنند. در نتیجه برای تعیین جواب مناسب احتیاج به یک تصمیم‌گیرنده است تا بتواند شرایط را بسنجد و بهترین جواب ممکن را انتخاب کند.به‌علاوه این‌که در مسائل واقعی معمولا اطلاعات کافی از مسئله در دست نداریم و باید به تقریبی از جواب‌های اصلی بسنده کنیم. در این‌گونه مسائل تبادل بین توابع هدف برای شخص تصمیم‌گیرنده بسیار مهم است چرا که می‌تواند به این موضوع دست یابد که تا حدودی باید مقدار یک یا چند تابع را بدتر کند تا به بهبود یک یا چند تابع هدف دیگر برسد.

در این پایان‌نامه، ما مفهوم کارایی سره در بهینه‌سازی بردار حقیقی را مطالعه کرده‌ایم و یک فرمول جزئی اصلاح شده از تعریف اصلی و مولفه‌ای جفریون را ارائه کردیم که به نظر می‌رسد اگر تعداد توابع هدف شمارای نامتناهی باشد برای هدف اصلی‌مان که جلوگیری از جواب‌هایی با نرخ حاشیه‌ای بی‌کران و رسیدن به یک ویژگی تئوریک رضایت‌بخش است بهتر می‌باشد. به‌خصوص، و برای اولین بار، ما توانستیم اثبات‌ها و مثال‌های نقضی را ارائه دهیم که نشان می دهد که دو ویژگی رایج نقاط کارای سره جفریون به‌طورکلی برای تعریف اصلی برقرار نیست مگر این‌که تعداد توابع هدف متناهی باشد. علاوه‌براین، تعریف جدیدی که از مخروط ترتیب توسط بنسون [۷] ارائه شد نتایج ما را در چارچوب گسترده‌تر قرار می‌دهد؛ بااین‌حال، یکی از مزایای بسط فعلی‌مان این است که ما می‌توانیم به‌طور انحصاری با ساختار مولفه به

مولفه کار کنیم، که بینش مستقیم‌تری را به دلیل تفسیر ساده آن به‌عنوان نرخ جایگزینی یا توازن به ویژه برای بسیاری از اهداف عملی و تصمیم‌گیری، فراهم می‌کند.

این اهمیت در مقاله قبلی وینکلر [1] [۴۸]، که تعریف اولیه کارایی سره جفریون را برای فضای توابع حقیقی پیوسته تعریف می‌کند، برجسته شده است. این نویسنده مشاهدات مشابهی را نیز ارائه می‌دهد که ما نیز آن‌را پیدا کردیم، این‌که ، ''نقطه‌ای که توسط اسکالرسازی خطی مثبت پیدا شد نباید به مفهوم جفریون کارای سره باشد''، اما تجزیه و تحلیل جدید ما می‌تواند دلیل آن‌را توضیح دهد و بینش مفیدتری را به شما ارائه دهد؛ به این معنا که، اگر کران بالای هر تبادل کران‌دار باشد این نتایج هم‌چنان حفظ می‌شود، اما اجازه می‌دهد که برای هر یک از ضابطه‌هایی که هنوز هم می‌توان آن را بهبود بخشید تفاوت داشته باشد.

کارهایی که منجر به مشاهدات خود ما شده است مربوط به تحقیقات در حال انجام روش‌های چندگانه برای تصمیم‌گیری در عدم قطعیت و بهینه‌سازی تصادفی است. به‌طورخاص، برای یک مسئله بهینه‌سازی تصادفی با احتمالات مثبت برای هر یک از حالت‌های متناهی یا شمارای نامتناهی از حالات احتمالی، ضابطه ارزش انتظار می‌رود مربوط به یک سری یا مجموع وزن‌دار باشد، و ضابطه‌ی می‌نیمم حداکثر زیان با یک نرم چبیشف وزن‌دار مطابقت دارد. با استفاده از تعاریف و نتایج در این پایان‌نامه، اکنون می‌توانیم بگوییم که این جواب‌ها در حقیقت کارای سره برای مسئله تصادفی هستند_ نتیجه‌ای که به‌طورکلی غلط است_ اگر تعریف اصلی جفریون استفاده شود. ما معتقدیم که این پایان‌نامه حمایت کافی را ارائه می‌دهد که اصلاحات پیشنهادی در واقع مطلوب‌تر است و ما قصد داریم تا آن را ارتقا دهیم به ویژه مفهوم تبادل آن را به‌عنوان یک مفهوم مرتبط با کارایی سره تصادفی که در تحقیقات آینده و کار بر روی برنامه‌های کاربردی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

علاوه‌براین، هنگامی که نتایج جدید خود را با روشی که وینکلر ارائه داد ترکیب می‌کنیم، منطقی است که انتظار داشته باشیم که نتایج کنونی ما از متغیرهای تصادفی گسسته، مفهومی معادل با متغیرهای تصادفی پیوسته یا فضاهای پیوسته یا تابع‌های حقیقی مقدار داشته باشند. این، برای اولین بار یک تئوری دقیق تبادل ریاضی در بهینه‌سازی تصادفی، براساس مفهوم کارایی سره در بهینه‌سازی عمومی با مجموعه‌ای از ضابطه‌های دلخواه ایجاد می‌کند.

در ادامه ما مفاهیم ε_ بهینگی مختلف را برای مسائل بهینه‌سازی چندهدفه مورد تجزیه و تحلیل قرار داده‌ایم. به نظر می‌رسد بهینگی $(\hat{M},\varepsilon)$_ سره جفریون به دلایل زیر مفیدترین مفهوم است.

۱. یک تصمیم‌گیرنده کنترل مستقیم بر روی تبادل کران‌دار هر دو جواب‌های تقریبی (یعنی $\varepsilon > 0$) و دقیق (یعنی $\varepsilon = 0$) دارد. این کران می‌تواند برای ترکیب کردن ترجیحات تصمیم‌گیرنده مورد استفاده قرار گیرد. هر چند بهینگی ε_ پارتو که وجود تبادل بین توابع را نتیجه می‌دهد و بهینگی ε_ سره جفریون که وجود یک کران بالا در تبادل را

[1] Winkler

نتیجه می‌دهد، بهینگی $(\hat{M},\varepsilon)$ـ سره جفریون در کران بالای تبادل‌ها استفاده می‌شود.

۲. یک دنباله از جواب‌های $(\hat{M},\varepsilon)$ـ سره جفریون به یک جواب $(\hat{M},\circ)$ـ سره‌ی جفریون در شرایط بسیار خفیف همگرا است. هیچ یک از جواب‌های εـ سره جفریون و جواب‌های بهینه εـ پارتو این ویژگی همگرایی را ندارند. این ویژگی همگرایی دارای الگوریتم نقطه به نقطه برای الگوریتم‌های جستجوی تکراری است.

۳. مجموعه جواب‌های $(\hat{M},\varepsilon)$ـ سره جفریون همگرا به مجموعه جواب‌های $(\hat{M},\circ)$ـ سره جفریون به مفهوم سوال (۲) است. چون در سوال (۲)، هیچ یک از جواب‌های εـ سره‌ی جفریون و جواب‌های بهینه εـ پارتو این ویژگی همگرایی را ندارند. این ویژگی همگرایی دارای الگوریتمی برای الگوریتم‌های جستجوی تکراری مبتنی بر جمعیت است.

این یافته‌ها نشان می‌دهد که بهینه‌سازی $(\hat{M},\varepsilon)$ـ سره یک مفهوم بهینه‌سازی عملی است.

این نتایج را می‌توان به یک سناریو گسترش داد که در آن کران تبادل بستگی به جفت (i,j) ضابطه درگیر در تبادل ، یعنی $M^I : I\times I \to \mathbb{R}_+$ به جای یک ثابت $\hat{M}$ دارد. می‌توان از این تابع M^I برای تعریف یک جواب (M^I,ε)ـ سره جفریون استفاده کرد. برای چنین جواب‌هایی، به‌راحتی می‌بینیم که قضیه ۳.۵.۱ درست باقی می‌ماند اگر M^I جایگزین $\hat{M}$ شود. علاوه بر این، مشابه قضیه ۳.۵.۵، ما می‌توانیم ثابت کنیم که

$$\psi_{M^I,\circ}(f,X) = \cap_{\tau>\circ}\psi_{M^I,\tau\varepsilon}(f,X).$$

برای تحقیق بیشتر ما قصد داریم روش‌های اسکالرسازی و شرایط بهینگی برای جواب‌های $(\hat{M},\varepsilon)$ـ سره جفریون را توسعه دهیم. میزان همگرایی در سوال (۱) و فاصله هاسدورف بین مجموعه جواب تقریبی و دقیق برای مسائل بهینه‌سازی چندهدفه پیوسته موضوعات مهم دیگر برای تحقیقات آینده است.

مراجع

[1] Geoffrion, A.M.,(1968): Proper efficiency and the theory of vector maximization. J. Math. Anal. Appl. 22,618–630.

[2] Benson, H.P.,(1979): An improved definition of proper efficiency for vector maximization with respect to cones. J. Math. Anal. Appl. 71(1), 232–241.

[3] Henig, M.I.,(1982): Proper efficiency with respect to cones. J. Optim. Theory Appl. 36(3), 387–407

[4] Kuhn, H.W., Tucker, A.W.,(1951): Nonlinear programming. In: Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950, 481–492. University of California Press, Berkeley.

[5] Hartley, R.,(1978): On cone-efficiency, cone-convexity and cone-compactness. SIAM J. Appl.Math. 34, 211–222.

[6] Borwein, J.M.,(1977): Proper efficient points for maximizations with respect to cones. SIAM J. ControlOptim. 15(1), 57–63.

[7] Jahn, J.,(2011): Vector Optimization, 2nd edn. Springer, Berlin

[8] Ghaznavi M.(2017): Optimality conditions via scalarization for approximate quasi efficiency in multiobjective optimization, Filomat,31(3),671-680.

[9] Ghaznavi-Ghosni, BA. and Khorram, E. (2011): "On approximating weakly / properly efficient solutions in multi-objective programming". Math. Comput. Model, 54(11-12):3172–3181.

[10] Ghaznavi-ghosoni B.A.,Khorram E. and Soleimani-Damaneh M.,(2012): Scalarization for characterization of approximate strong/weak/proper efficiency in multiobjective optimization, optimization 62 no. 6, 703-720.

[11] Zarepisheh M., Pardalos P.M., (2017): An equivalent transformation of multiobjective optimization problems, Ann. Oper. Res. 249(1-2), 5-15.

[12] Yu, P.L.(1984): “scalarizing vector optimization problems”. “Mathematical programming”, 42(4).

[13] Ehrgott, M.(2005): ‘‘multicriteria optimization’’. “springer Science and Business ”.

[14] Engau A.,Wiecek M.(2008): “Generating epsilon-efficient solutions in multiobjective programming”. J Optim Theory Appl, 5230.

[15] White, DJ.(1986): Epsilon efficiency. Journal of Optimization Theory and Applications, 49(2),319–337.

[16] Choo, E.U., Atkins, D.R.,(1983): Proper efficiency in nonconvex multicriteria programming. Math. Operat. Res. 8(3), 467–470.

[17] Kaliszewski, I.,(1987):Amodifiedweighted Tchebycheff metric formultiple objective programming. Comput. Operat. Res. 14(4), 315–323.

[18] Steuer, R.E.,(1986): Multiple Criteria Optimization. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Applied Probability and Statistics. Wiley, New York

[19] Steuer, R.E., Choo, E.U.,(1983): An interactive weighted Tchebycheff procedure for multiple objective programming. Math. Programm. 26(3), 326–344.

[20] Mangasarian, O.L.,(1983): Nonlinear programming. McGraw-Hill Book Co., New York

[21] Kaliszewski, I.,(1994): Quantitative Pareto Analysis by Cone Separation Technique. Kluwer Academic Publishers, Boston

[22] Isermann, H.,(1974): Proper efficiency and the linear vector maximum problem. Operat. Res. 22, 189–191.

[23] Luc DT. (1989): Theory of vector optimization. Vol. 319 of Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer-Verlag, Berlin.

[24] . Miettinen K.(1999): Nonlinear multiobjective optimization. International Series in Operations Research and Management Science, 12; Kluwer Academic Publishers, Boston, MA.

[25] Jahn J.,(2004): Vector optimization. Springer-Verlag, Berlin; theory, applications, and extensions.

[26] Eichfelder G.,(2008): Adaptive scalarization methods in multiobjective optimization. Vector Optimization; Springer-Verlag, Berlin.

[27] Benson HP.,(1978): Existence of efficient solutions for vector maximization problems. J Optim Theory Appl. 26(4),569-580.

[28] Borwein JM, Zhuang D.,(1993): Super efficiency in vector optimization. Trans Amer Math Soc. 338(1),105-122.

[29] Ginchev I, Guerraggio A, Rocca M.,(2007): Geoffrion type characterization of higher-order properly efficient points in vector optimization. J Math Anal Appl.328(2),780-788.

[30] Engau A.,(2015): Deffinition and characterization of Geoffrion proper efficiency for real vector optimization with in
infinitely many criteria. J Optim Theory Appl. 165(2),439-457.

[31] Ghaznavi-ghosoni B.A.,(2012): Extension of epsilon efficient solutions in multiobjective optimization problems. P.H.D Thesis in Applied muthematics, Amirkabir university of technology.

[32] Eichfelder G.,(2014): Variable ordering structures in vector optimization. Vector Optimization; Springer, Heidelberg.

[33] Liu JC.(1999), ϵ-properly efficient solutions to nondifferentiable multiobjective programming problems. Appl Math Lett;12(6),109-113.

[34] Shukla PK, Dutta J, Deb K.,(2005): On properly pareto optimal solutions. Practical Approaches to Multi-Objective Optimization, Dagstuhl Seminar Proceedings 04461.

[35] Sawaragi Y, Nakayama H, Tanino T.,(1985): Theory of multiobjective optimization. Vol. 176 of Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, Inc., Orlando.

[36] Tanaka T.,(1995): Approximately efficient solutions for vector optimization problems. Surikaisekikenkyusho Kokyuroku. (899),159-166, Optimization theory and its applications in mathematical systems (Japanese) (Kyoto, 1994)

[37] Custodio AL, Madeira JFA, Vaz AIF, Vicente LN.,(2011): Direct multisearch for multiobjective optimization. SIAM J Optim.21(3),1109-1140.

[38] Timmel G.,(1982); Modiffikationen eines statistischen Suchverfahrens der Vektoroptimierung. Wiss Z Tech Hochsch Ilmenau. 28(5),139-148.

[39] Torn AA.,(1980): A sampling-search-clustering approach for exploring the feasible/efficient solutions of mcdm problems. Computers and Operations Research. 7(1),67-79.

[40] Deb K.,(2009): Multi-objective optimization using evolutionary algorithms. John Wiley and Sons, Ltd., Chichester;

[41] Shukla PK, Hirsch C, Schmeck H.,(2010): A framework for incorporating trade-off information using multi-objective evolutionary algorithms. In: Proceedings of the 11th International Conference on Parallel Problem Solving from Nature: Part II; Krakow, Poland; PPSN'10. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 131-140.

[42] Hirsch C.,(2015): Fahrplanbasiertes energiemanagement in smart grids [dissertation]. Dissertation, Karlsruhe, Karlsruher Institut fur Technologie (KIT),

[43] Helbig S, Pateva D.,(1994): On several concepts for ϵ-efficiency. OR Spektrum. 16(3),179-186.

[44] Guddat J, Guerra Vasquez F, Tammer K, Wendler K.,(1985): Multiobjective and stochastic optimization based on parametric optimization. Vol. 26 of Mathematical Research. Akademie-Verlag, Berlin.

[45] Soleimani-damaneh M, Zamani M.,(2016): On Benson's scalarization in multiobjective optimization. Optimization Letters. online:1-6.

[46] Dutta J, Vetrivel V.,(2001): On approximate minima in vector optimization. Numer Funct Anal Optim. 22(7-8),845-859.

[47] Kazmi KR.,(2001): Existence of ϵ-minima for vector optimization problems. J Optim Theory Appl. 109(3),667-674.

[48] Winkler, K.,(2004): Geoffrion proper efficiency in an infinite dimensional space. Optimization 53(4), 355–368

Abstract

In this thesis, we consider multiobjective optimization problems. The concept of proper efficiency is important scientifically and computationally in multiobjective optimization and the decision-making theory to avoid the answers with unbounded trade-off between the objective functions. A partial correction for Geoffrion's main definition is proposed preserves that common features of the proper efficient points. The proposed definition is applied for multiobjective optimization problems with infinite objective functions. The relations between the proposed proper efficient solutions and optimal solutions of the weighted sum and Tchebycheff-norm scalarization methods are investigated. We present new proofs and counterexamples that show the definition of proper efficiency in the sense of Geoffrion in general is not efficient for infinite objective functions.

Since multiobjective optimization algorithms usually provide only an approximation solution, we analyze the concept of approximate Geoffrion's proper efficiency. We show that in the limit, approximate Geoffrion proper efficient solutions may converge to solutions having unbounded trade-offs. Furthermore, using a characterization based on infeasibility of a system of inequalities, we examine the convergence properties of different approximate optimality concepts.We show that notion of approximate Geoffrion proper efficiency is only an approximation concept that shows the properties of a proper convergence.

keywords: Scalarization,Milticriteria optimization,Proper efficiency,Weighted-sum method, Approximately efficient solutions.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Operations research

Proper efficiency in multiobjective optimization and its generalizations

By: Azadeh Taleshi

Supervisor

Mehrdad Ghaznavi

Advisor

Somaye Moghari

January 2019