بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

حل سیستم‌های معادلات دیفرانسیل جبری تأخیری خطی با روش‌های تحلیلی و عددی

نگارنده: امین امرایی

استاد راهنما

دکتر مهدی قوتمند

استاد مشاور

دکتر علی مس فروش

تیر ۱۳۹۷

تقدیم به پدر و مادرم :

پروردگارا نه میتوانم موهایشان را که در راه عزت من سفید شد، سیاه کنم و نه برای دستهای پینه بسته شان که ثمره تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم . پس توفیقم ده که هر لحظه شکر گزارشان باشم و ثانیه های عمرم را در عصای دست بودنشان بگذرانم .

شکر و سپاس خدا را که بزرگترین امید و یاور در لحظه لحظه زندگیست.

سپاس‌گزاری...

سپاس و ستایش مر خدای را جل و جلاله که آثار قدرت او بر چهره روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درفشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید. حال که به یاری پروردگار، تحقیق حاضر به پایان رسیده بر خود لازم می‌دانم از زحمات استاد گرامیم جناب آقای دکتر مهدی قوتمند چرا که بدون راهنمایی های ایشان تامین این پایان نامه بسیار مشکل مینمود، تشکر نمایم.

امین امرایی
تیر ۱۳۹۷

تعهد نامه

اینجانب **امین امرایی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **حل سیستم‌های معادلات دیفرانسیل جبری تأخیری خطی با روش‌های تحلیلی و عددی** ، تحت راهنمایی **مهدی قوتمند** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچجا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ’’ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

امین امرایی
تیر ۱۳۹۷

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان نامه به حل تحلیلی و عددی مسائل مقدار اولیه متناظر با معادلات دیفرانسیل جبری خطی تأخیری غیر علتی پرداخته شده است. در حالت کلی مسئله مقدار اولیه متناظر با معادلات دیفرانسیل جبری تأخیری غیر علتی ممکن است معادلات دیفرانسیل جبری متناظر با آن نه مربعی و نه منحصر به فرد حل‌پذیر باشد، اما همان معادلات دیفرانسیل جبری خطی تاخیری منحصر به فرد حل‌پذیر باشند. چنین سیستم‌های غیر مربعی در بسیاری از برنامه‌های کاربردی به ویژه برای سیستم‌های دینامیکی به علت شرایط و معادلات اضافی به طور خودکار از طریق مدل سازی و نرم افزارهای شبیه سازی منجر به ساخت یک دستگاه فرا معین یا فرو معین می‌شوند. حل عددی این معادلات با روش‌های عددی مانند رانگ ـ کوتا یا فرمول تفاضلی پسرو ممکن است نتیجه درستی نداشته باشد، بنابراین برای این که روش‌های عددی به خوبی برای این نوع معادلات اعمال شوند باید این نوع معادلات را منظم سازی نمود تا به‌توان معادلات منظم شده را با هر روش عددی حل نمود. در ادامه تعمیمی از اندیس مشتق برای دستگاه‌های فرا معین و فرو معین را که اندیس غرابت نام دارد معرفی می‌کنیم و آن را برای معادلات دیفرانسیل جبری فرو معین به کار می‌بریم و از مفهوم اندیس غرابت برای معادلات دیفرانسیل جبری خطی تاخیری نیز استفاده خواهیم کرد و شرایط سازگاری، همواری و منحصر به فرد حل‌پذیری دستگاه را با استفاده از آن به دست می‌آوریم. در پایان به حل تحلیلی وعددی دو نوع خنثی و تاخیری معادلات دیفرانسیل جبری خطی تاخیری غیر علتی می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل جبری، معادلات دیفرانسیل جبری تأخیری، معادلات دیفرانسیل تأخیری، روش گام‌ها، مشتق آرایه‌ای، اندیس غرابت.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اساسی

۱.۱ مقدمه

در بسیاری از شاخه‌های علوم، مهندسی و پزشکی لازم است برای بیان مسئله معینی مدل ریاضی ساخته شود. اغلب این مدل‌های ریاضی به صورت معادلاتی شامل یک تابع مجهول و مشتقات آن نسبت به متغیرهای مستقل هستند. چنین معادلاتی را معادلات دیفرانسیل می‌نامند. شکل کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی[1] مرتبه n به صورت زیر است:

$$F(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}) = ۰,$$

که رابطه بین متغیر مستقل t و تابع $x(t)$ و مشتقات آن را بیان می‌کند و در آن $\dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n)}$، n مشتق اول تابع $x(t)$ است.

در مواردی که معادلات مذکور دارای شرایطی باشند یا به روش‌های مختلف مقید باشند، مدل ریاضی آن‌ها علاوه بر معادلات دیفرانسیل، شامل معادلات جبری برای توصیف این قیدها است. به این دسته معادلات، معادلات دیفرانسیل جبری[2] می‌گویند و به اختصار آن را با DAE

[1] Ordinary Differential Equation
[2] Differential-Algebraic Equation

نشان می‌دهند. حالت کلی این معادلات به صورت زیر است:

$$F(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}) = 0,$$
$$g(t, x, \ldots, x^{(n)}, z) = 0,$$

حال اگر قید تاخیر به این نوع معادلات اضافه شود معادلات دیفرانسیل جبری تاخیری [۳] ساخته می‌شود. به صورت دقیق‌تر معادلات دیفرانسیل جبری تاخیری که به اختصار با DDAE نشان می‌دهند، معادلاتی هستند که شامل قیود جبری و قیود تاخیری باشند. این معادلات به سه نوع تاخیری، خنثی و پیشرفته دسته بندی می‌شوند. تمرکز این پایان نامه روی دو نوع خنثی و تاخیری است.

۲.۱ تاریخچه

در سال ۱۹۹۵ آشر [۴] و پتزولد [۵] دو روش عددی، یعنی فرمول‌های تفاضلات پسرو [۶] و رانگ کوتای ضمنی تصویر شده را برای حل معادلات دیفرانسیل جبری تاخیری هسنبرگ با اندیس ۱ و ۲ ارائه کردند. در سال ۱۹۹۷ هابر [۷] از روش‌های هم محلی [۸] برای حل معادلات دیفرانسیل جبری تاخیری از نوع دیرکرد با اندیس۱ و ۲ استفاده نمود [۲۶]. در سال ۱۹۹۸ زو [۹] و پتزولد پایداری مجانبی معادلات دیفرانسیل جبری تاخیری هسنبرگ را مورد بررسی قرار دادند [۴۶]. در سال ۲۰۰۲ باکر [۱۰] دو روش را برای کاهش اندیس و حل معادلات دیفرانسیل جبری تاخیری ارائه کرد [۴]. روش اول، جایگذاری متغیرهای جبری در معادلات دیفرانسیل با عباراتی است که از معادلات قید بدست می‌آید. به این ترتیب در شرایط مناسب، سیستم معادلات دیفرانسیل جبری تاخیری به سیستمی با اندیس صفر که همان معادلات دیفرانسیل تاخیری می‌باشد، تبدیل می‌شود. روش دیگر مشتق‌گیری از معادلات قید می‌باشد که به این ترتیب سیستم دیفرانسیل جبری تاخیری به سیستم دیفرانسیل تاخیری تبدیل می‌شود.

۳.۱ تعاریف و قضایا

ابتدا لازم است فرم کلی از معادلات DAE بیان شود.

[3] Delay Differential-Algeberaic Equation
[4] Ascher
[5] Petzold
[6] Backward difference
[7] Huber
[8] Collection methods
[9] Zhu
[10] Baker

تعریف ۱.۳.۱. یک دستگاه معادلات به فرم

$$F(\dot{x}(t), x(t), t) = 0 \tag{۱.۱}$$

با $F : \mathbb{D}_{\dot{x}} \times \mathbb{D}_x \times \mathbb{I} \to \mathbb{C}^m$ که $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ یک فاصله فشرده است و $\mathbb{D}_{\dot{x}}, \mathbb{D}_x \subseteq \mathbb{C}^n$ مجموعه‌های باز و $n, m \in \mathbb{N}$، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری نامیده می‌شود. که در آن $x : \mathbb{I} \to \mathbb{C}^n$ متغیر حالت و $t \in \mathbb{I}$ متغیر مستقل نامیده می‌شوند.

توجه کنید که فرم کلی DAE شامل معادلات دیفرانسیل و معادلات جبری است.

- معادلات DAE خطی با ضرایب ثابت به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t) \tag{۲.۱}$$

که در آن $E, A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ و $f : \mathbb{I} \to \mathbb{C}^m$ است.

- معادلات خطی DAE با ضرایب متغیر به فرم

$$E(t)\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t) \tag{۳.۱}$$

می‌باشد که در آن $E, A : \mathbb{I} \to \mathbb{C}^{m \times n}$ و $f : \mathbb{I} \to \mathbb{C}^m$ است.

تعریف ۲.۳.۱. اگر معادله (۲.۱) دارای شرط اولیه

$$x(t_0) = x_0 \tag{۴.۱}$$

با $t_0 \in \mathbb{I}$ و $x_0 \in \mathbb{C}^n$ باشد، مسئله مقدار اولیه[11] نامیده می‌شود و به اختصار با (IVP) نشان داده می‌شود.

تعریف ۳.۳.۱. تابع $x : \mathbb{I} \to \mathbb{C}^n$ یک جواب معادله (۱.۱) نامیده می‌شود اگر x پیوسته و مشتق‌پذیر باشد و برای هر $t \in \mathbb{I}$ در (۱.۱) صدق کند. اگر x یک جواب از معادله (۱.۱) باشد و در شرط اولیه (۴.۱) نیز صدق کند آن‌گاه یک جواب مسئله مقدار اولیه (۴.۱)ـ(۱.۱) نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۳.۱. مقادیر $y \in \mathbb{C}^n$ برای معادله (۱.۱) سازگار نامیده می‌شود، اگر x یک جواب معادله (۱.۱) باشد و برای $t \in \mathbb{I}$ داشته باشیم:

$$x(t) = y.$$

مسئله مقدار اولیه x_0 در (۴.۱) سازگار نامیده می‌شود اگر یک جواب مسئله مقدار اولیه (۴.۱)ـ(۱.۱) وجود داشته باشد.

[11] Initial Value Problem

۱.۳.۱ هم ارزی و منظم سازی

فرض کنید $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$ و $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ماتریس‌های نامنفرد[۱۲] باشند، آن‌گاه با ضرب ماترس P از سمت چپ در معادله (۲.۱) و تغییر متغیر $x = Q\tilde{x}$ نتیجه زیر حاصل می‌شد:

$$E\dot{\tilde{x}}(t) = Ax(t)+f(t) \Leftrightarrow PE\dot{\tilde{x}}(t) = PAx(t)+Pf(t) \Leftrightarrow PEQ\dot{\tilde{x}}(t) = PAQ\tilde{x}(t)+Pf(t) \quad (۵.۱)$$

بنابراین معادله (۲.۱) می‌تواند به DAE خطی دیگری با ضرایب ثابت به فرم زیر تبدیل شود:

$$\tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{f}(t), \qquad \tilde{E} = PEQ, \qquad \tilde{A} = PAQ, \qquad \tilde{f}(t) = Pf(t) \quad (۶.۱)$$

توجه کنید که در رابطه‌ی $x = Q\tilde{x}$ یک تناظر یک به یک[۱۳] بین فضای جواب متناظر وجود دارد. از این رو می‌توانیم معادله (۶.۱) را به جای معادله اصلی (۲.۱)، نسبت به وجود و منحصر به فردی جواب‌ها مورد بررسی قرار دهیم.

تعریف ۵.۳.۱. زوج ماتریس‌های $(E_i, A_i) \in \mathbb{C}^{m,n} \times \mathbb{C}^{m,n}, \quad i = ۱,۲$ هم‌ارز قوی [۱۴] نامیده می‌شود، اگر ماتریس‌های نامنفرد $P \in \mathbb{C}^{m,m}, Q \in \mathbb{C}^{n,n}$ وجود داشته باشند به طوری که

$$E_۲ = PE_۱Q, \qquad A_۲ = PA_۱Q.$$

تذکر: می‌توان نشان داد که رابطه‌ی معرفی شده درتعریف ۵.۳.۱، یک رابطه‌ی هم‌ارزی است که در ادامه خاصیت انعکاسی، تقارنی و تعدی این هم ارزی بررسی می‌شود.

- **انعکاسی؛** اگر $P = I_m$ و $Q = I_n$ باشد آنگاه $(E, A) \sim (E, A)$.
- **تقارنی؛** اگر $(E_۲, A_۲) \sim (E_۱, A_۱)$ و $E_۲ = PE_۱Q$ و $A_۲ = PA_۱Q$ باشد، که P و Q نامنفرد هستند، پس می‌توان نوشت $E_۱ = P^{-۱}E_۲Q^{-۱}$ و $A_۱ = P^{-۱}A_۲Q^{-۱}$ و لذا داریم

$$(E_۱, A_۱) \sim (E_۲, A_۲).$$

- **تعدی؛** اگر $(E_۱, A_۱) \sim (E_۲, A_۲)$ و $(E_۲, A_۲) \sim (E_۳, A_۳)$ آن‌گاه $(E_۱, A_۱) \sim (E_۳, A_۳)$ با ماتریس‌های نامنفرد $i = ۱,۲$ ،P_i, Q_i وجود دارد به طوری که:

$$E_۳ = P_۲E_۲Q_۲, \qquad A_۳ = P_۲A_۲Q_۲, \qquad E_۲ = P_۱E_۱Q_۱, \qquad A_۲ = P_۱A_۱Q_۱,$$

لذا داریم:

$$E_۳ = P_۲P_۱E_۱Q_۱Q_۲, \qquad A_۳ = P_۲P_۱A_۱Q_۱Q_۲,$$

بنابراین

$$(E_۱, A_۱) \sim (E_۳, A_۳),$$

[12] nonsingular
[13] 1-to-1 correspondence
[14] Strong equivalence

تعریف ۶.۳.۱. فرض کنید $E, A \in \mathbb{C}^{m\times n}$، زوج ماتریس (E, A) منظم نامیده می‌شود اگر $m = n$ و یک λ وجود داشته باشد به طوری که $\det(\lambda E - A)$ مخالف صفر باشد. در غیر این صورت زوج ماتریس (E, A) منفرد نامیده می‌شود.

لم ۱.۳.۱. اگر زوج (E, A) که $E, A \in \mathbb{C}^{m,n}$، با یک زوج ماتریس منظم قویاً هم‌ارز باشند، آنگاه زوج (E, A) منظم است.

برهان. فرض کنید $E_2 = PE_1Q$ و $A_2 = PA_1Q$ که P, Q نامنفرد هستند. لذا داریم:

$$p_2(\lambda) = \det(\lambda E_2 - A_2) = \det(\lambda PE_1Q - PA_1Q) = \det P \det(\lambda E_1 - A_1) \det Q = c \times p_1(\lambda)$$

که در آن $c \neq 0$ است. □

تعریف ۷.۳.۱. ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ پوچ توان نامیده می‌شود اگر یک $v \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که $A^v = 0$ و $A^{v-1} \neq 0$. عدد v اندیس پوچ توان A نامیده می‌شود.

به کمک رابطه هم‌ارزی تعریف شده در بالا، گام بعدی تعیین یک فرم کانونیک است به طوری که ویژگی‌های معادله متناظر DAE را بتوان به آسانی تعیین کرد. بنابراین، در ادامه به بیان فرم کانونیک زوج ماتریس که به آثار کار اساسی وایرشتراس [۱۵] و کرونکر[۱۶] مرتبط است، می‌پردازیم و نتایج حل‌پذیری معادلات متناظر DAEها را شرح می‌دهیم.

قضیه ۱.۳.۱ (فرم کانونیک جردن[۱۷]). فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n,n}$، در این صورت ماتریس نامنفرد $P \in \mathbb{C}^{n,n}$ وجود دارد به طوری که:

$$P^{-1}AP = diag(J_1, \dots, J_k), \qquad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{m_i \times m_i},$$

که در آن J_iها اعداد ثابت اند به طوری که داریم

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = n.$$

برهان. [۴۴] □

قضیه ۲.۳.۱ (فرم کانونیک وایرشتراس[۱۸]). فرض کنید $E, A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ به طوری که زوج (E, A) منظم باشد، در این صورت ماتریس جردن $J \in \mathbb{C}^{d\times d}$ و ماتریس پوچ توان $N \in \mathbb{C}^{n-d\times n-d}$ با

[15] Weierstraß
[16] Kronecker
[17] Jordan canonical form(JCF)
[18] Weierstraß canonical form (WCF)

$d \in \mathbb{N}$، $0 \le d \le n$ که در فرم کانونیک جردن است وجود دارد به طوری که (E, A) قویاً هم‌ارز با زوج

$$(\begin{bmatrix} I_d & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I_{n-d} \end{bmatrix}),$$

باشد.

برهان. [۳۱] □

قضیه ۳.۳.۱. معادله (۲.۱) با شرایط اولیه (۴.۱) را در نظر بگیرید. فرض کنید $E, A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ و (E, A) زوج منظم باشد و همچنین ماتریس‌های نامنفرد $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ وجود داشته باشند به طوری که با تبدیل زوج منظم (E, A) به فرم کانونیک وایرشتراس به صورت زیر

$$PEQ = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \qquad PAQ = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \qquad Pf = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{bmatrix},$$

و

$$Q^{-1}x = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}, \qquad Q^{-1}x_0 = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{1,0} \\ \tilde{x}_{2,0} \end{bmatrix},$$

باشد، همچنین فرض کنید v اندیس پوچتوانی ماتریس N باشد و $f \in C^v(\mathbb{I}, \mathbb{C}^n)$، آن‌گاه گزاره‌های زیر بر قراراند:

۱. معادله (۲.۱) با جواب عمومی زیر حل پذیر است.

$$x = Q\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ -\sum_{i=0}^{v-1} N^i \tilde{f}_2^{(i)} \end{bmatrix} \tag{۷.۱}$$

که $\tilde{x}_1$ جواب معادله $\dot{\tilde{x}}_1 = J\tilde{x}_1 + \tilde{f}_1$ است.

۲. شرط اولیه (۴.۱) سازگار است اگر و تنها اگر

$$\tilde{x}_{2,0} = -\sum_{i=0}^{v-1} N^i \tilde{f}_2^{(i)}(t_0),$$

به طور خاص، مجموعه مقادیر اولیه سازگار، ناتهی است.

۳. هر مسئله مقدار اولیه (۴.۱)ـ(۲.۱) با مقادیر اولیه سازگار یک جواب منحصر به فرد (۷.۱) دارد که در شرط اولیه $\tilde{x}_1(t_0) = \tilde{x}_{1,0}$ صدق می‌کند.

برهان. [۳۱] □

قضیه ۴.۳.۱. فرض کنید $E, A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ به طوری که زوج (E, A) منفرد باشد. در این صورت:

۱. اگر $rank(\lambda E - A) < n$ برای تمام $\lambda \in \mathbb{C}$، مسئله مقدار اولیه همگن

$$E\dot{x} = Ax, \qquad x(t_0) = 0,$$

دارای جواب غیربدیهی است. بنابراین، جواب مسئله مقدار اولیه همگن متناظر (۴.۱)ـ(۲.۱) منحصر به فرد نیست.

۲. اگر برای $\lambda \in \mathbb{C}$، $rank(\lambda E - A) = n$، $(m > n)$ آن‌گاه یک ناهمگونی هموار دلخواه f وجود دارد به طوری که معادله متناظر (۲.۱) حل پذیر نیست. اگر معادله (۲.۱) برای f داده شده حل پذیر باشد، آنگاه مسئله مقدار اولیه متناظر (۴.۱)ـ(۲.۱) برای هر مقدار اولیه سازگار به طور منحصر به فرد حل‌پذیر است.

برهان. [۳۱]

□

۲.۳.۱ اندیس مشتق

در حال حاضر یکی از روش‌های اندیس رایج در حل معادلات دیفرانسیل جبری خطی اندیس مشتق[19] است که یک تعمیم آن برای معادلات DAE غیر خطی به فرم $F(\dot{x}, x, t) = 0$ است. این کار ناشی از ایده کمبل[20] برای مشتق گیری از معادلات جبری DAE است [۱۵]. معادله غیر خطی DAE به فرم $F(\dot{x}, x, t) = 0$ و تمام مشتقات آن تا رتبه‌ی $l \in \mathbb{N}_0$ یک سیستم بزرگ از معادلات را تولید می‌کند که منجر به تعریف زیر می‌شود.

تعریف ۸.۳.۱ (مشتق آرایه‌ای یا معادلات متورم DAE)**.** فرض کنید $F : (\dot{x}, x, t) \to F(\dot{x}, x, t)$ یک تابع در $\mathcal{C}^s(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{I}, \mathbb{C}^m)$ و $s \in \mathbb{N}$ باشد، مشتق آرایه‌ای مرتبه l با $l \in \mathbb{N}_0$ و $l \leq s$ به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{F}_1(x, \dot{x}, \dots, x^{(l+1)}, t) = \begin{bmatrix} F(\dot{x}, x, t) \\ \frac{d}{dt} F(\dot{x}, x, t) \\ \vdots \\ \frac{d^l}{dt^l} F(\dot{x}, x, t) \end{bmatrix},$$

بنابراین، مشتق آرایه‌ای یا معادلات متورم متناظر DAE با توجه به معادله $F(\dot{x}, x, t) = 0$ توسط $\mathcal{F}_1(x, \dot{x}, \dots, x^{(l+1)}, t) = 0$ به دست می‌آیند.

---

[19] Differentiation index (d-index)

[20] Campbell

مثال ۱.۳.۱. مشتق آرایه‌ای برای معادلات خطی DAE با ضرایب ثابت ($E\dot{x} = Ax + f$) به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} E & \circ & \circ & \cdots \\ -A & E & \circ & \cdots \\ \circ & -A & E & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \circ & \circ & \cdots \\ \circ & \circ & \circ & \cdots \\ \circ & \circ & \circ & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \\ \dot{f} \\ \vdots \end{bmatrix},$$

و مشتق آرایه‌ای معادلات مرتبه l برای معادلات خطی DAE با ضرایب ثابت به صورت زیر است:

$$M_l.\dot{z}_l = N_l.z_l + g_l,$$

که در آن

$$(M_l)_{i,j} = \begin{cases} E & i = j \\ -A & i = j + ۱ \\ \circ & \text{درغیر این صورت} \end{cases} \quad , \quad (N_l)_{i,j} = \begin{cases} A & i = j = ۱ \\ \circ & \text{درغیر این صورت} \end{cases} \qquad i, j = \circ, \dots, l$$

$$(z_l)_j = x^{(j)}, \qquad (g_l)_j = f^{(j)}, \qquad j = \circ, \dots, l$$

و زوج ماتریس (M_l, N_l) با $M_l, N_l \in \mathbb{C}^{m(l+۱), n(l+۱)}$ زوج متورم نامیده می‌شود.

اندیس مشتق بر اساس مشتق آرایه‌ای، به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۹.۳.۱ (اندیس مشتق ، معادله اصلی ODE). فرض کنید معادله (۱.۱) یک DAE حل پذیر باشد و $\mathcal{F}_۱(x, \dot{x}, w, t)$ معادله متناظر مشتق آرایه‌ای از مرتبه l که $w = (\ddot{x}, \dots, x^{(l+۱)})$ و y به عنوان متغیر جبری $\dot{x}$ در نظر گرفته شده باشد. کوچک‌ترین عدد $v_d \in \mathbb{N}_\circ$ (در صورت وجود)، برای آن که y منحصر به فرد توسط (x, t) و $\mathcal{F}_{v_d}(x, y, w, t) = \circ$ برای تمام مقادیر سازگار $y = \Phi(x, t)$ تعیین شود، اندیس مشتق $(d - index)$ از معادله (۱.۱) نامیده می‌شود. با معادله $y = \dot{x}$ معادله اصلی ODE به صورت $\dot{x} = \Phi(x, t)$ است.

به عبارت دیگر با اندیس مشتق می‌توان دید که یک DAE چگونه به فرم ODE تبدیل می‌شود. مفهوم اندیس مشتق فقط برای سیستم‌های مربعی با جواب‌های منحصر به فرد بررسی شده است. از این رو DAE با یک مؤلفه جواب دلخواه، نمی‌تواند به معادله ODE تبدیل شود که منحصر به فرد برای مقادیر اولیه سازگار حل‌پذیر است [۳۱].

تعریف ۱۰.۳.۱ (هم‌هسته[۲۱] و هم‌دامنه[۲۲]). فرض کنید $E \in \mathbb{C}^{m \times n}$ باشد، هم‌دامنه و هم‌هسته ماتریس E به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$corange(E) = ker E^*, \qquad cokernel(E) = range(E^*),$$

[21] cokernel
[22] corange

تذکر: این تعریف نشان می‌دهد که $coker(E)$ مکمل متعامد $ker(E)$ است. یعنی

$$ker(E) \oplus coker(E) = \mathbb{C}^n,$$

و $corange(E)$ مکمل متعامد $range(E)$ است. یعنی

$$rang(E) \oplus corange(E) = \mathbb{C}^m.$$

تعریف ۱۱.۳.۱. یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری خطی $m \times n$ که m تعداد معادلات و n تعداد مجهولات است، را در نظر بگیرید. اگر تعداد معادلات از مجهولات کمتر باشد دستگاه فرو معین و اگر تعداد معادلات بیشتر از مجهولات باشد دستگاه فرا معین نامیده می‌شود.

فصل ۲

معادلات دیفرانسیل جبری خطی با ضرایب متغیر

در این فصل ابتدا فرم کانونی قوی که برای معادلات دیفرانسیل جبری خطی با ضرایب ثابت در فصل قبل مطرح شد را برای معادلات دیفرانسیل جبری خطی با ضرایب متغیر گسترش می‌دهیم و سپس با استفاده از آن اندیس غرابت[1] را برای معادلات دیفرانسیل جبری خطی فرو معین با ضرایب متغیر معرفی می‌کنیم و همچنین شرایط حل پذیری روش مذکور را بررسی می‌کنیم. معادلات دیفرانسیل جبری خطی با ضرایب متغیر به فرم زیر را در نظر بگیرید:

$$E(t)\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t) \tag{۲.۱}$$

که در آن $f \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^m), E, A \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{m\times n})$ و ممکن است همراه با شرایط اولیه زیر باشد:

$$x(t_\circ) = x_\circ, \qquad t_\circ \in \mathbb{I}, x_\circ \in \mathbb{C}^n. \tag{۲.۲}$$

[1] strangeness

۱.۲ هم‌ارزی و منظم سازی

توابع ماتریس $E, A \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{m\times n})$ را در نظر بگیرید، ممکن است این ابهام ایجاد شود که اگر زوج ماتریس $(E(t), A(t))$ برای تمام $t \in \mathbb{I}$ منظم باشد طبق قضیه (۳.۳.۱) مسئله مقدار اولیه منحصر به فرد حل‌پذیر است. مفهوم منظم بودن همواره تضمین نمی‌کند که مسئله مقدار اولیه به طور منحصر به فرد حل‌پذیر باشد. در ادامه با دو مثال این مطلب را شرح می‌دهیم.

مثال ۱.۱.۲. معادله دیفرانسیل جبری خطی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} -t & t^{2} \\ -1 & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ابتدا شرط منظم بودن را بررسی می‌کنیم

$$\det(\lambda E(t) - A(t) = \det\begin{bmatrix} -\lambda t + 1 & -\lambda t^{2} \\ -\lambda & \lambda t + 1 \end{bmatrix} = (-\lambda t + 1)(\lambda t + 1) + \lambda^{2} t^{2} = 1,$$

چون برای تمام $t \in \mathbb{I}$، $\det \neq 0$ لذا منظم است. با این حال برای هر $c \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C})$ با $c(t_0) = 0$ تابع

$$x(t) = c(t)\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix},$$

جواب مسئله مقدار اولیه $E(t)\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ با شرط اولیه $x(t_0) = 0$ است، زیرا

$$E(t)\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -t & t^{2} \\ -1 & t \end{bmatrix}\left[\dot{c}(t)\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} + c(t)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} -t \\ -1 \end{bmatrix}c(t) = A(t)x(t),$$

از این رو، مسئله مقدار اولیه منظم است، ولی به طور منحصر به فرد حل‌پذیر نیست.

مثال ۲.۱.۲. معادله دیفرانسیل جبری خطی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix},$$

در این صورت داریم:

$$\det(\lambda E(t) - A(t)) = \det\begin{bmatrix} 1 & -t \\ \lambda & -\lambda t \end{bmatrix} = -\lambda t + \lambda t = 0,$$

چون $\det = 0$ لذا زوج $(E(t), A(t))$ منفرد است. با $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ از معادله اصلی، دو معادله زیر را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 0 = -x_1(t) + t x_2(t) + f_1(t), \\ \dot{x}_1 - t\dot{x}_2(t) = f_2(t), \end{cases}$$

از معادله اول $x_1(t) = tx_2(t) + f_1(t)$ نتیجه می‌شود، با مشتق گیری از این معادله و جایگذاری در معادله دوم، $x_2(t)$ بدست می‌آید $x_2(t) = f_2(t) - f_1(t)$. با جایگذاری در معادله اول $x_1(t)$ به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$x_1(t) = tf_2(t) - t\dot{f}_1(t) + f_1(t),$$

بنابراین یک جواب منحصر به فرد به دست آوردیم

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} tf_2(t) - t\dot{f}_1(t) + f_1(t) \\ f_2(t) - f_1(t) \end{bmatrix}.$$

پس این یک مثال نقض برای مسئله مقدار اولیه همراه با مقادیر اولیه سازگار است که به رغم اینکه منفرد است، به طور منحصر به فرد حل‌پذیر است.

بنابراین در مواردی که از ضرایب متغیر استفاده می‌شود، دو ویژگی منظم بودن و منحصر به فرد حل پذیر بودن، زوج ماتریس $(E(t), A(t))$ برای تمام $t \in \mathbb{I}$ مسئله مقدار اولیه متناظر کاملاً مستقل از یک‌دیگر هستند. این رفتار را می‌توان توسط ناکافی بودن رابطه هم‌ارزی قوی (۵.۳.۱) برای معادلات جبری خطی با ضرایب متغیر توضیح داد.

در این فصل به جای تبدیل با ماتریس‌های نامنفرد باید توابع ماتریسی به صورت نقطه به نقطه نامنفرد زیر را در نظر بگیریم

$$P \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{m\times m}), \quad Q \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{n.n}),$$

سپس معادله (۱.۲) می‌تواند به DAE خطی دیگری با ضرایب متغیر توسط ضرب P از چپ و تغیر متغیر $x = Q\tilde{x}$ که در مورد ضرایب ثابت به کار برده شد، انتقال دهیم. بنابراین، داریم $\dot{x} = Q\dot{\tilde{x}} + \dot{Q}\tilde{x}$ یعنی یک جمله $\dot{Q}\tilde{x}$ به علت قانون ضرب اضافه شده است، از این رو معادله (۱.۲) نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} E\dot{x} = Ax + f &\Leftrightarrow PE\dot{x} = PAx + Pf \\ &\Leftrightarrow PEQ\dot{\tilde{x}} = (PAQ - PE\dot{Q})\tilde{x} + Pf, \end{aligned}$$

که این یک نوع هم‌ارزی دیگر را نتیجه می‌دهد.

تعریف ۱.۱.۲. زوج ماتریس‌های (E_i, A_i) برای $i = 1,2$ که $E_i, A_i \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{m\times n})$، هم‌ارز کلی[2] نامیده می‌شود، اگر ماتریس‌های نقطه به نقطه نامنفرد $P \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{m\times m}), Q \in \mathcal{C}^1(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{n\times n})$ وجود داشته باشند به طوری که

$$E_2 = PE_1Q, \qquad A_2 = PA_1Q - PE_1\dot{Q}. \tag{۳.۲}$$

لم ۱.۱.۲. رابطه معرفی شده در تعریف بالا یک رابطه هم‌ارزی است.

---
[2]Global equivalence

برهان. برای این که نشان دهیم رابطه هم ارزی است، سه خاصیت انعکاسی، تقارنی و تعدی را بررسی می‌کنیم.

- **انعکاسی؛** اگر $Q = I_m$ و $P = I_n$ در نظر بگیریم، داریم:

$$(E, A) \sim (E, A).$$

- **تقارنی؛** از $(E_۱, A_۱) \sim (E_۲, A_۲)$ داریم $A_۲ = PA_۱Q - PE\dot{Q}$ و $E_۲ = PE_۱Q$، که P و Q طبق تعریف ماتریس‌های نقطه به نقطه نامنفرد هستند. در این صورت داریم:

$$E_۱ = P^{-۱}E_۲Q^{-۱}, \qquad A_۱ = P^{-۱}A_۲Q^{-۱} + P^{-۱}E_۲Q^{-۱}\dot{Q}Q^{-۱},$$

طبق تعریف نقطه‌ای معکوس $\frac{d}{dt}Q^{-۱} = -Q^{-۱}\dot{Q}Q^{-۱}$، داریم $(E_۲, A_۲) \sim (E_۱, A_۱)$.

- **تعدی؛** از $(E_۱, A_۱) \sim (E_۲, A_۲)$ و $(E_۲, A_۲) \sim (E_۳, A_۳)$ داریم:

$$E_۲ = P_۱E_۱Q_۱, \quad A_۲ = P_۱A_۱Q_۱ - P_۱E\dot{Q}_۱,$$
$$E_۳ = P_۲E_۲Q_۲, \quad A_۳ = P_۲A_۲Q_۲ - P_۲E\dot{Q}_۲,$$

ماتریس‌های $i = ۱,۲$، P_i و Q_i با جای گذاری $E_۲$ و $A_۲$ داریم

$$E_۳ = P_۲P_۱E_۱Q_۱Q_۲, \quad A_۳ = P_۲P_۱A_۱Q_۱Q_۲ - P_۲P_۱E_۱(\dot{Q}_۱Q_۲ + Q_۱\dot{Q}_۲),$$

در این صورت

$$(E_۱, A_۱) \sim (E_۳, A_۳).$$

□

تذکر. برای P, Q ثابت داریم $\dot{Q} = ۰$، بنابراین هم‌ارزی قوی نتیجه می‌شود.
برخلاف هم‌ارزی قوی (لم (۱.۳.۱))، منظم بودن زوج $(E(t), A(t))$ برای $t \in \mathbb{I}$ ثابت، تحت هم‌ارزی کلی غیر ممکن است که در مثال زیر این مطلب نشان داده می‌شود.

مثال ۳.۱.۲. DAE خطی با ضرایب متغیر با زوج متناظر از توابع ماتریسی را درنظر بگیرید

$$(E(t), A(t) = (\begin{bmatrix} -t & t^۲ \\ -۱ & t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}),$$

در مثال قبل دیدیم زوج $(E(t), A(t))$، برای تمام $t \in \mathbb{I}$ با زوج ماتریس‌های زیر منظم است.

$$P(t) = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & t \end{bmatrix}, \qquad Q(t) = \begin{bmatrix} ۱ & t \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix},$$

حال به دست می‌آوریم

$$\tilde{E} = PEQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{A} = PAQ - PE\dot{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

بنابراین زوج $(E(t), A(t))$، هم ارز کلی از زوج ماتریس منفرد $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$ است. که دترمینان آن صفر است و این نشان می‌دهد لم (۱.۳.۱) برای زوج ماتریس DAE با ضرایب متغیر بر قرار نیست.

اگر توابع ماتریسی زیر را تعریف کنیم

$$P(t) = \overline{P}, \qquad Q(t) = \overline{Q} + (t - \overline{t})\overline{R},$$

داریم

$$P(\overline{t}) = \overline{P}, \qquad Q(\overline{t}) = \overline{Q}, \qquad \dot{Q}(\overline{t}) = \overline{R},$$

بنابراین، در رابطه هم‌ارزی در یک نقطه ثابت $\overline{t} \in \mathbb{I}$، آزادی خواهیم داشت. این منجر به یک تعریف جدید به شرح زیر برای حالت موضعی از رابطه هم‌ارزی می‌شود.

تعریف ۲.۱.۲ (هم‌ارزی موضعی[۳]). زوج ماتریس‌های $(E_i, A_i) \in \mathbb{C}^{m\times n} \times \mathbb{C}^{m\times n}$ برای $i = 1, 2$ هم‌ارز موضعی نامیده می‌شود، اگر ماتریس‌های $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$، $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$، $R \in \mathbb{C}^{n\times n}$ وجود داشته باشد (ماتریس‌های P و Q نامنفرد هستند) به طوری که

$$E_2 = PE_1Q, \qquad A_2 = PA_1Q - PE_1R. \tag{۴.۲}$$

تذکر:

- می‌توان نشان داد که تعریف بالا یک رابطه هم‌ارزی است [۳۱].
- برای $R = 0$ هم‌ارزی قوی به دست می‌آید. از این رو برای هم‌ارزی موضعی، در مقایسه با هم‌ارزی قوی برای ساده کردن زوج ماتریس داده تبدیلات بیشتری وجود دارد (یعنی به جای R می‌توان هر ماتریس منفردی گذاشت که با E_1 هم مرتبه باشد).
- برای $P = I_m, Q = I_n$ داریم $E_2 = E_1$ و $A_2 = A_1 - E_1R$ بنابراین می‌توانیم چند ستون از E_1 را از ستون‌های دلخواه A_1 کم کنیم. همچنین می‌توانیم قسمت‌های از A_2 را به کمک E_1 حذف کنیم.

[3] Local equivalence

۲.۲ روش اندیس غرابت

به کمک رابطه‌ی هم‌ارزی موضعی، قضیه زیر برای زوج ماتریس‌ها وجود دارد.

قضیه ۱.۲.۲ (فرم کانونیک موضعی). فرض کنید $E, A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ و ماتریس‌های زیر وجود داشته باشند به طوری که در شرایط زیر صدق کنند

$$\begin{array}{lll} T & \text{پایه} & kernel(E) \\ Z & \text{پایه} & kernel(E^T) = corang(E) \\ T' & \text{پایه} & range(E^T) = cokernel(E) \\ V & \text{پایه} & corange(Z^T AT) \end{array}$$

آن‌گاه مقادیر

$$\begin{array}{ll} (\text{رتبه}) & r = rankE, \\ (\text{قسمت جبری}) & a = rank(Z^* AT), \\ (\text{غرابت}) & s = rank(V^* Z^* AT'), \\ (\text{قسمت دیفرانسل}) & d = r - s, \\ (\text{متغیرهای فرو معین}) & u = n - r - a, \\ (\text{معادلات ناپدید شده}) & v = m - r - a - s, \end{array}$$

وجود دارند به طوری که زوج (E, A) هم‌ارز (موضعی) با فرم کانونیک زیر است

$$(\begin{bmatrix} I_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_a & 0 \\ I_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}).$$

برهان. فرض کنید زوج ماتریس‌های (E_i, A_i) برای $i = 1, 2$ هم‌ارز باشند، در این صورت داریم:

$$rank(E_2) = rank(PE_1Q) = rank(E_1) = r,$$

برای r و s ابتدا باید نشان دهیم که r و s نسبت به انتخاب پایه‌ها خوش تعریف هستند. هر کدام از تغییر پایه‌ها را می‌توان با ماتریس‌های نامنفرد M_T،M_Z،$M_{T'}$،M_V به صورت زیر بیان کرد.

$$\tilde{T} = TM_T, \quad \tilde{Z} = ZM_Z, \quad \tilde{T}' = T' M_T, \quad \tilde{V} = M_Z^{-1} V M_V,$$

از تعاریف $\tilde{T}$، $\tilde{Z}$، $\tilde{T'}$، $\tilde{V}$ داریم:

$$rank(\tilde{Z}^* A\tilde{T}) = rank(M_Z^* Z^* ATM_T) = rank(Z^* AT),$$

و

$$rank(\tilde{V}^* \tilde{Z}^* A\tilde{T'}) = rank(M_V^* V^* M_Z^{-*} M_Z^* Z^* AT' M_{T'}) = rank(V^* Z^* AT'),$$

بنابراین rو sخوش تعریف هستند. حال فرض کنید $T_۲$، $Z_۲$، $T'_۲$، $V_۲$ پایه‌هایی برای زوج $(E_۲, A_۲)$ باشند، در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}
rank(E_۲T_۲) &= ۰, & T_۲^*T_۲ \text{نامنفرد}, \quad & rank(T_۲^*T_۲) = n - r,\\
rank(E_۲T_۲) &= ۰, & Z_۲^*Z_۲ \text{نامنفرد}, \quad & rank(Z_۲^*Z_۲) = m - r,\\
rank(E_۲T'_۲) &= r, & T'^*_۲T'_۲ \text{نامنفرد}, \quad & rank(T'^*_۲T'_۲) = r,\\
rank(V_۲^*Z_۲^*A_۲T_۲) &= ۰, & V_۲^*V_۲ \text{نامنفرد}, \quad & rank(V_۲^*V_۲) = \hat{a},
\end{aligned}$$

که $\hat{a} = dim(corange(Z_۲^*A_۲T_۲))$.

با استفاده از رابطه هم‌ارزی (۳.۲) و تعاریف زیر

$$T_۱ = QT_۲, \quad Z_۱^* = Z_۲^*P, \quad T'_۱ = QT'_۲, \quad V_۱^* = V_۲^*,$$

برای زوج $(E_۱, A_۱)$ با ماتریس‌های $Z_۱$، $T_۱$ و $T'_۱$ روابط مشابه‌ای به دست می‌آید. در این صورت $Z_۱$، $T_۱$و $T'_۱$ پایه‌هایی براساس رابطه هم‌ارزی (۴.۲) هستند، چون $Z_۱^*E_۱ = ۰$:داریم

$$\begin{aligned}
\hat{a} &= dimcorange(Z_۲^*A_۲T_۲)\\
&= dimcorange(Z_۲^*PA_۱QT_۲ - Z_۲^*PE_۱RT_۲)\\
&= dimcorange(Z_۱^*A_۱T_۱),
\end{aligned}$$

چون $V_۱^* = V_۲^*$، پس طبق روند بالا داریم $rank(V_۱^*V_۲) = \hat{a}$. همچنین داریم: $V_۱^*Z_۱^*A_۱T_۱ = ۰$ که این نشان می‌دهد $V_۱$ یک پایه از هم دامنه $Z_۱^*A_۱T_۱$ است. در ادامه مقادیر a و s را به دست می‌آوریم.

$$a = rank(Z_۲^*A_۲T_۲) = rank(Z_۲^*PA_۱QT_۲ - Z_۲^*PE_۱RT_۲) = rank(Z_۱^*A_۱T_۱),$$

همچنین داریم

$$s = rank(V_۲^*Z_۲^*A_۲T'_۲) = rank(V_۲^*Z_۲^*PA_۱QT'_۲ - V_۲^*Z_۲^*PE_۱RT'_۲) = rank(V_۱^*Z_۱^*A_۱T'_۱),$$

که با استفاده از s و a مقدارهای d، u و v به دست می‌آیند. برای ساخت فرم کانونیک (۱.۲.۲) ابتدا Z' را پایه دامنه E و V' را دامنه Z^*AT در نظر می‌گیریم. در این صورت ماتریس‌های

$[T' \quad T]$، $[Z' \quad Z]$ و $[V' \quad V]$ نامنفرد هستند، علاوه براین Z'^*ET' و ماتریس‌های دارای ساختار مشابه نیز نامنفرد هستند.

$$
\begin{aligned}
(E,A) &\sim \left(\begin{bmatrix} Z'^*ET' & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Z'^*AT' & Z'^*AT \\ Z^*AT' & Z^*AT \end{bmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix} Z'^*ET' & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ Z^*AT' & Z^*AT \end{bmatrix}\right) \\
&\sim \left(\begin{bmatrix} I_r & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ V'^*Z^*AT' & I_a & \circ \\ V^*Z^*AT' & \circ & \circ \end{bmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix} I_r & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & I_a & \circ \\ V^*Z^*AT' & \circ & \circ \end{bmatrix}\right) \\
&\sim \left(\begin{bmatrix} I_r & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & I_a & \circ \\ I_s & \circ & \circ \end{bmatrix}\right),
\end{aligned}
$$

و نهایتاً چون $d = r - s$ در این صورت داریم:

$$
(E,A) \sim \left(\begin{bmatrix} I_s & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & I_d & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & I_a & \circ & \circ \\ I_s & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}\right).
$$

□

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنید توابع ماتریسی $E, A \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{m\times n})$ داده شده باشند و $\bar{t} \in \mathbb{I}$ ثابت باشد. آن‌گاه مقادیر مشخصه r, a, s, d, u, v قضیه (۱.۲.۲) برای زوج ماتریس $(\overline{E}, \overline{A})$ با $\overline{A} = A(\bar{t})$ و $\overline{E} = E(\bar{t})$، مقادیر مشخصه (E, A) در $\bar{t}$ نامیده می‌شود.

بنابراین برای زوج توابع ماتریسی $(E(t), A(t))$ مقادیر مشخص موضعی r, a, s را برای هر $t \in \mathbb{I}$ به دست آوردیم، یعنی مقادیر مشخصه r, a, s توابعی به صورت $r, a, s : \mathbb{I} \to \mathbb{N}_\circ$ هستند.
درحال حاضر می‌خواهیم یک فرم کانونیک تحت هم‌ارزی کلی بسازیم، ابتدا فرض می‌کنیم این توابع روی $\mathbb{I}$ ثابت هستند که بلوک‌های ماتریس در فرم کانونیک قوی و همچنین در شکل کانونی موضعی به $t \in \mathbb{I}$ بستگی نداشته باشند. بعداً خواهیم دید اگر مقادیر مشخصه ثابت نباشند کلیت مسئله از دست می‌رود.
شرط ثابت بودن مقادیر مشخصه موضعی اجازه می‌دهد که از تعمیم کاربردهای قضیه تجزیه مقدار منفرد (SVD) در توابع ماتریسی استفاده کنیم.

قضیه ۲.۲.۲ (هموار SVD). فرض کنید برای تمام $t \in \mathbb{I}$، $E \in \mathcal{C}^l(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{m\times n})$ و $l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ با $rank(E(t)) = r$ و $r \in \mathbb{N}_\circ$ باشد. در این صورت توابع ماتریسی نقطه به نقطه یکانی $V \in$

$\mathcal{C}^l(\mathbb{I},\mathbb{C}^{n\times n})$ و $U\in\mathcal{C}^l(\mathbb{I},\mathbb{C}^{m\times m})$ وجود دارد به طوری که

$$U^*EV=\begin{bmatrix}\Sigma & \circ\\ \circ & \circ\end{bmatrix} \tag{۷.۲}$$

که در آن $\Sigma\in\mathcal{C}^l(\mathbb{I},\mathbb{C}^{r,r})$ نقطه به نقطه نامنفرد است.

برهان. [۳۱].

□

از روش SVD هموار، می‌توان برای ساختن یک فرم کانونیک کلی زوج توابع ماتریسی تحت هم‌ارزی کلی استفاده کرد.

قضیه ۳.۲.۲. فرض کنید $E,A\in\mathcal{C}(\mathbb{I},\mathbb{C}^{m\times n})$ توابع ماتریسی هموار باشند و $r(t)\equiv r$، $a(t)\equiv a$، $s(t)\equiv s$ مقادیر مشخصه موضعی زوج $(E(t),A(t))$ باشند. در این صورت (E,A) هم‌ارز کلی با فرم کانونیک زیر است

$$\left(\begin{bmatrix}I_s & \circ & \circ & \circ\\ \circ & I_d & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \circ & \circ\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\circ & A_{12} & \circ & A_{14}\\ \circ & \circ & \circ & A_{24}\\ \circ & \circ & I_a & \circ\\ I_s & \circ & \circ & \circ\\ \circ & \circ & \circ & \circ\end{bmatrix}\right)\begin{matrix}s\\ d\\ a\\ s\\ v\end{matrix} \tag{۸.۲}$$

که در آن A_{ij}ها توابع ماتریسی (غیر منحصر بفرد) روی $\mathbb{I}$ هستند و همچنین آخرین بلوک ستونی در هر یک از توابع ماتریسی اندازه $u=n-s-d-a$ دارد.

برهان. [۳۱]. □

با تبدیل زوج توابع ماتریسی (E,A) به فرم کانونیک کلی (۸.۲) معادله متناظر DAE، به صورت زیر است:

$$\dot{x}_1=A_{12}(t)x_2+A_{14}(t)x_4+f_1(t) \qquad s \tag{۹.۲آ}$$

$$\dot{x}_2=A_{24}x_4(t)+f_2(t) \qquad d \tag{۹.۲ب}$$

$$\circ=x_3+f_3(t) \qquad a \tag{۹.۲ج}$$

$$\circ=x_1+f_4(t) \qquad s \tag{۹.۲د}$$

$$\circ=f_5(t) \qquad v \tag{۹.۲ه}$$

معادله جبری (۹.۲ج) برای x_3 و شرط سازگاری (۹.۲ه) برای ناهمگونی f_5 و معادله دیفرانسیل (۹.۲ب) برای x_2 با انتخاب دلخواه در x_4 (متغیر فرومعین) وجود دارد. بنابراین زوج مشکل

ساز به علت وجود معادله جبری (۹.۲د) و معادله دیفرانسیل (۹.۲آ) برای x_1 وجود دارد. به منظور حذف این زوج مشکل ساز می‌توانیم از معادله جبری (۹.۲د) مشتق بگیریم و با معادله دیفرانسیل (۹.۲آ) جمع کنیم که گام مشتق گیری و حذف نامیده می‌شود در این صورت معادله DAE اصلاح شده زیر

$$0 = A_{12}(t)x_2 + A_{14}(t)x_4 + f_1(t) + \dot{f}_4(t) \qquad s \tag{۱۰.۲آ}$$

$$\dot{x}_2 = A_{24}x_4(t) + f_2(t) \qquad d \tag{۱۰.۲ب}$$

$$0 = x_3 + f_3(t) \qquad a \tag{۱۰.۲ج}$$

$$0 = x_1 + f_4(t) \qquad s \tag{۱۰.۲د}$$

$$0 = f_5(t) \qquad v \tag{۱۰.۲ه}$$

با زوج اصلاح شده متناظر از زوج توابع ماتریسی زیر

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & 0 & A_{14} \\ 0 & 0 & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & I_a & 0 \\ I_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = (E_{mod}, A_{mod}) \tag{۱۱.۲}$$

به دست می‌آید. معادله خطی متناظر با زوج بالا همان جواب‌های زوج (E, A) را دارد. از این رو می‌توانیم عکس روش مشتق گیری و حذف را انجام دهیم و به معادله اصلی برسیم.
به دلیل غیر منحصر به فرد بودن فرم کانونیک کلی، قضیه زیر لازم است تا اطمینان حاصل شود که DAE اصلاح شده ویژگی‌های معادله اصلی را دارد.

قضیه ۴.۲.۲. فرض کنید $E, A, \tilde{E}, \tilde{A} \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{m\times n})$ با زوج‌های $(E, A), (\tilde{E}, \tilde{A})$ هم ارز کلی به فرم کانونیک (۸.۲) باشند. آن‌گاه زوج‌های (E_{mod}, A_{mod}) و $(\tilde{E}_{mod}, \tilde{A}_{mod})$ که با گام مشتق‌گیری و حذف به ترتیب از فرم (E, A) و $(\tilde{E}, \tilde{A})$ به دست آمده‌اند، همچنین هم ارزی کلی هستند.

برهان. فرض کنید که ماتریس‌های هموار نقطه به نقطه نامنفرد P و Q وجود دارد به طوری که:

$$P\tilde{E} = EQ \tag{۱۲.۲آ}$$

$$P\tilde{A} = AQ - E\dot{Q}. \tag{۱۲.۲ب}$$

از (۱۲.۲آ) اگر Q و P را طبق (۸.۲) بلوک بندی کنیم، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 & 0 \\ P_{21} & P_{22} & 0 & 0 \\ P_{31} & P_{32} & 0 & 0 \\ P_{41} & P_{42} & 0 & 0 \\ P_{51} & P_{52} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

سه بلوک سطری آخر از (۱۲.۲ب) به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} P_{34} & 0 & P_{33} & 0 \\ P_{44} & 0 & P_{43} & 0 \\ P_{54} & 0 & P_{53} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & Q_{34} \\ Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

بنابراین، توابع ماتریسی P و Q به صورت زیر است

$$P = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & P_{13} & P_{14} & P_{15} \\ Q_{21} & Q_{22} & P_{23} & P_{24} & P_{25} \\ 0 & 0 & Q_{33} & Q_{31} & P_{35} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{11} & P_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{55} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 \\ Q_{31} & 0 & Q_{33} & 0 \\ Q_{41} & Q_{42} & Q_{43} & Q_{44} \end{bmatrix},$$

در حالت خاص، توابع Q_{11}، Q_{22}، Q_{33}، Q_{44} و P_{55} باید نامنفرد باشند. در این صورت از دو بلوک سطری اول (۱۲.۲ب) داریم

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{14} \\ 0 & \tilde{A}_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{12} & A_{14} \\ 0 & A_{24} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_{22} & 0 \\ Q_{42} & Q_{44} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{Q}_{22} & 0 \end{bmatrix},$$

بنابراین، به این معناست که $(\tilde{E}_{mod}, \tilde{A}_{mod})$ هم‌ارز با

$$\left(\begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \tilde{A}_{12} & 0 & \tilde{A}_{14} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & I_a & 0 \\ I_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$\sim \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & 0 & A_{14} \\ 0 & 0 & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & I_a & 0 \\ I_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_a & 0 \\ 0 & Q_{42} & 0 & Q_{44} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{Q}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$
\begin{aligned}
\sim \Bigg(& \begin{bmatrix} 0&0&0&0\\ 0&Q_{22}&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s&0&0&0\\ 0&Q_{22}^{-1}&0&0\\ 0&0&I_a&0\\ 0&-Q_{44}^{-1}Q_{42}Q_{22}^{-1}&0&Q_{44}^{-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&A_{12}&0&A_{14}\\ 0&0&0&A_{24}\\ 0&0&I_a&0\\ I_s&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{bmatrix} \\
& - \begin{bmatrix} 0&0&0&0\\ 0&\dot{Q}_{22}&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s&0&0&0\\ 0&Q_{22}^{-1}&0&0\\ 0&0&I_a&0\\ 0&-Q_{44}^{-1}Q_{42}Q_{22}^{-1}&0&Q_{44}^{-1} \end{bmatrix} \\
& - \begin{bmatrix} 0&0&0&0\\ 0&Q_{22}&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0&0&0&0\\ 0&\frac{d}{dt}Q_{22}^{-1}&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&-\frac{d}{dt}(Q_{44}^{-1}Q_{42}Q_{22}^{-1})&0&\frac{d}{dt}Q_{44}^{-1} \end{bmatrix} \Bigg)
\end{aligned}
$$

$$
\sim \left(\begin{bmatrix} 0&0&0&0\\ 0&I_d&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&A_{12}&0&A_{14}\\ 0&X&0&A_{24}\\ 0&0&I_a&0\\ I_s&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{bmatrix} \right),
$$

است که

$$
X = -(\dot{Q}_{22}Q_{22}^{-1} + Q_{22}\frac{d}{dt}Q_{22}^{-1}) = -\frac{d}{dt}(Q_{22}Q_{22}^{-1}) = -\dot{I}_d = 0.
$$

$\square$

قضیه بالا اجازه می‌دهد که یک روش تکراری برای تبدیل معادلات دیفرانسیل جبری خطی با ضرایب متغیر به فرم غرابت آزاد بیان کرد.

۱.۲.۲ روش تبدیل به فرم غرابت آزاد

DAE خطی با ضرایب متغیر به فرم $E(t)\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t)$ با $E, A \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{m\times n})$ را در نظر بگیرید. شروع از $f_0 = f$، $(E_0, A_0) = (E, A)$ تکرار برای $i = 0, 1, \ldots$:

۱. مقادیر مشخصه موضعی $r_i(t), s_i(t), a_i(t)$ از زوج (E_i, A_i) برای تمام $t \in \mathbb{C}$ محاسبه می‌شود، اگر $s(t) \equiv 0$ روش متوقف می‌شود.

۲. اگر مقادیر مشخصه موضعی روی $\mathbb{I}$ ثابت باشند، با استفاده از توابع ماتریسی نامنفرد $P_i \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{m\times m})$ و $Q \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{n\times n})$، زوج (E_i, A_i) به فرم کانونیک $(\tilde{E}_i, \tilde{A}_i)$ و f_i به $\tilde{f}_i$ و x_i به $\tilde{x}_i$ به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\tilde{E}_i = P_i E_i Q_i, \qquad \tilde{A}_i = P_i A_i Q_i - P_i E_i \dot{Q}_i, \qquad \tilde{f}_i = P f_i, \qquad \tilde{x}_i = Q^{-۱} x_i.$$

۳. زوج $(\tilde{E}_i, \tilde{A}_i)$ به $(E_{i+۱}, A_{i+۱})$ و $\tilde{f}_i$ به $f_{i+۱}$ با گام مشتق گیری و حذف داریم:

$$E_{i+۱} = \tilde{E}_i - \begin{bmatrix} I_{s_i} & & & \\ & \circ & & \\ & & \circ & \\ & & & \circ \\ & & & \circ \end{bmatrix}, \quad f_{i+۱} = \tilde{f}_i + \begin{bmatrix} \dot{\tilde{f}}_{i,۴} \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix}, \quad A_{i+۱} = \tilde{A}_i, \quad x_{i+۱} = \tilde{x}_i.$$

اگر روش بالا با شکست مواجه نشود یعنی تمام مقادیر مشخصه (r_i, s_i, a_i) ثابت هستند. در این صورت روش، یک دنباله غیر منحصر به فرد از زوج توابع ماتریسی (E_i, A_i) و یک دنباله منحصر به فرد از مقادیر مشخصه (r_i, s_i, a_i) بعد از i تکرار به دست می‌آورد. (E, A) و معادله متناظر با DAE به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۲.۲ (اندیس غرابت)**.** اگر $E, A \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{m\times n})$ و دنباله (r_i, s_i, a_i) برای $i \in \mathbb{N}_\circ$ توسط روش (۱.۲.۲) تعیین شود (درحالت خاص فرض کنید که r_i, s_i, a_i روی $\mathbb{I}$ ثابت باشند)، آن‌گاه $v_s = \min\{i \in \mathbb{N}_\circ : s_i = \circ\}$ اندیس غرابت زوج توابع ماتریسی (E, A) معادله دیفرانسیل جبری خطی با ضرایب متغیر نامیده می‌شود.
در مورد $v_s = \circ$ هر دو زوج از توابع ماتریسی (E, A) و DAE، غرابت آزاد نامیده می‌شوند. بنابراین از دنباله (E_i, A_i, f_i) یک فرمول غرابت ـ آزاد $\tilde{E}_{v_s}(t)\dot{x}(t) = \tilde{A}_{v_s}(t)x(t) + \tilde{f}_{v_s}$ به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۵.۲.۲. فرض کنید اندیس غرابت v_s معادله (۱.۲) خوش تعریف باشد و $f \in \mathbb{C}^{v_s}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^m)$، آن‌گاه معادله (۱.۲) به فرم زیر با DAE هم‌ارز است.

$$\dot{\hat{x}}_۱ = \hat{A}_{۱۳}(t)\hat{x}_۳ + \hat{f}_۱(t) \qquad d_{v_s} \qquad (\text{۱۳.۲آ})$$

$$\circ = \hat{x}_۲ + \hat{f}_۲(t) \qquad a_{v_s} \qquad (\text{۱۳.۲ب})$$

$$\circ = \hat{f}_۳(t) \qquad v_{v_s} \qquad (\text{۱۳.۲ج})$$

که در آن $\hat{A}_{۱۳} \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{d_{v_s}, u_{v_s}})$ و ناهمگونی‌های $\hat{f}_۱$، $\hat{f}_۲$، $\hat{f}_۳$ از زوج (E, A) و ناهمگونی‌های f، $f^{(۱)}$، ...، $f^{(v_s)}$ با استفاده از روش ۲ به دست آمده‌اند.

برهان. [۳۱]. □

قضیه بالا این امکان را می‌دهد که شرایط وجود و منحصر به فردی جواب‌های معادله (۱.۲) را بیان کرد.

نتیجه ۱.۲.۲. فرض کنید اندیس غرابت v_s، معادله (۱.۲) خوش تعریف باشد و همچنین $f \in C^{v_s+1}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^m)$ آن‌گاه داریم:

۱. معادله (۱.۲) حل‌پذیر است اگر و تنها اگر v_{v_s} شرط سازگاری $\hat{f}_3 = 0$ را برآورد کند.

۲. شرط اولیه (۲.۲) سازگار است اگر و تنها اگر a_{v_s} شرط $\hat{x}(t_0) = -\hat{f}_2(t_0)$ را برآورد سازد.

۳. هر مسئله مقدار اولیه (۲.۲)_(۱.۲) با مقدار اولیه سازگار منحصر به فرد حل‌پذیر است اگر و تنها اگر $u_{v_s} = 0$ را حفظ کند.

تذکر: با مقایسه دو قضیه (۵.۲.۲) و (۳.۳.۱) و با جای‌گذاری شرط منظم برای زوج (E, A) توسط شرط

$$u_{v_s} = 0, \qquad v_{v_s} = 0,$$

$m = n$ نتیجه می‌شود. بنابراین اندیس غرابت v_s در قضیه (۳.۳.۱) نقش $v - 1$ را دارد.

مثال ۱.۲.۲. معادله دیفرانسیل جبری زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{bmatrix} -t & t^2 \\ -1 & t \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \mathbb{I} \in \mathbb{R},$$

با استفاده از روش (۱.۲.۲) داریم :

- برای $i = 0$

$$E_0 = E, \quad A_0 = A, \quad f_0 = f,$$

۱. مقادیر مشخصه موضعی را برای تمام $t \in \mathbb{I}$ به دست می‌آوریم:

$$r_0 = rank(E_0) = 1,$$

$T = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix}^T$ را به عنوان پایه $ker(E_0)$ و $T' = \begin{bmatrix} 1 & -t \end{bmatrix}^T$ را انتخاب می‌کنیم.
$Z = \begin{bmatrix} 1 & -t \end{bmatrix}^T$ را به عنوان پایه $corange(E_0)$ انتخاب می‌کنیم، در این صورت برای تمام $t \in \mathbb{I}$ داریم:

$$a_0 = rank(Z^* A_0 T) = rank(0) = 0,$$

$V = 1$ را به عنوان پایه از $corange(Z^* A_0 T)$ انتخاب می‌کنیم، در این صورت برای تمام $t \in \mathbb{I}$ داریم:

$$s_0 = rank(V^* Z^* A_0 T') = rank(-1 - t^2) = 1,$$

بنابراین داریم $(r_0, a_0, s_0) = (1, 0, 1)$ در حالت خاص $s_0 \neq 0$ یعنی معادله غرابت آزاد نیست.

۲. فرم کانونیک کلی با ماتریس‌های نامنفرد زیر را به دست می‌آوریم.

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & t \end{bmatrix}, \quad Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \dot{Q}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

لذا داریم:

$$\tilde{E}_0 = P_0 E_0 Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_0 = P_0 A_0 Q_0 - P_0 E_0 \dot{Q}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{f}_0 = P_0 f_0 = \begin{bmatrix} -g_2 \\ -g_1 + tg_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{x} = Q^{-1} x = \begin{bmatrix} x_1 - tx_2 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

۳. با مشتق گیری و حذف خواهیم داشت:

$$E_1 = \tilde{E}_0 - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \tilde{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$f_1 = \tilde{f}_0 + \begin{bmatrix} \dot{\tilde{f}}_{0,2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_1 - \dot{g}_1 + g_2 + t\dot{g}_2 \\ -g_1 + tg_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{g}_1 + t\dot{g}_2 \\ -g_1 + tg_2 \end{bmatrix}.$$

- برای $i = 1$ داریم:

$$E_0 = E_1, \quad A_0 = A_1, \quad f_0 = f_1.$$

۱. مقادیر مشخص موضعی را برای تمام $t \in \mathbb{I}$ به دست می‌آوریم.

$$r_1 = rank(E_1) = 0,$$

$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ را به عنوان پایه $ker(E_1)$، $T' = \emptyset_{2,0}$ و $Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ را به عنوان پایه $corange(E_1)$ انتخاب می‌کنیم، در این صورت برای تمام $t \in \mathbb{I}$ داریم:

$$a_1 = rank(Z^* A_1 T) = rank(A_1) = 1,$$

$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ را به عنوان پایه $cornge(Z^* A_1 T)$ انتخاب می‌کنیم. سپس برای تمام $t \in \mathbb{I}$ داریم:

$$s_1 = rank(V^* Z^* A_1 T') = rank(\emptyset_{1,0}) = 0,$$

چون $s_1 = 0$ یعنی روش متوقف می‌شود. از این رو اندیس غرابت $v_s = 1$، بنابراین فرمول غرابت آزاد متناظر به فرم زیر است:

$$\begin{cases} 0 = -\dot{g}_1 + t\dot{g}_2, \\ 0 = \tilde{x}_1 - g_1 + tg_2, \end{cases}$$

از این رو DAE حل پذیر است اگر و تنها اگر شرط سازگاری $0 = -\dot{g}_1 + t\dot{g}_2$ را برآورده سازد. شرط اولیه $x(t_0) = x_0$ سازگاراست اگر و تنها اگر $\tilde{x}_1(t_0) = g_1(t_0) - t_0 g_2(t_0)$ و

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = Q_0^{-1} x = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - tx_2 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

که داریم :

$$x_1(t_0) - t_0 x_2(t_0) = g_1(t_0) - t_0 g_2(t_0),$$

بنابراین مسئله مقدار اولیه، منحصر به فرد حل‌پذیر نیست چون $u_1 = 1$ و $\tilde{x}_2$ را می‌توان به دلخواه انتخاب کرد بنابراین جواب عمومی مسئله به صورت زیر است..

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Q_0 \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 - tg_2 + t\tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}.$$

مثال ۲.۲.۲. معادله دیفرانسیل جبری زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -t \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbb{I} \in \mathbb{R},$$

با استفاده از روش (۱.۲.۲) داریم:

- برای $i = 0$ داریم:

$$E_0 = E, \quad A_0 = A, \quad f_0 = f.$$

۱. مقادیر مشخصه موضعی برای تمام $t \in \mathbb{I}$ را به دست می‌آوریم.

$$r_0 = rank(E_0) = 1,$$

$T = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix}^T$ را به عنوان پایه $ker(E_0)$ و $T' = \begin{bmatrix} 1 & -t \end{bmatrix}^T$ را انتخاب می‌کنیم.
$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ را به عنوان پایه $corange(E_0)$ انتخاب می‌کنیم، در این صورت برای تمام $t \in \mathbb{I}$ داریم:

$$a_0 = rank(Z^* A_0 T) = rank(0) = 0,$$

$V = 1$ را به عنوان پایه $corange(Z^* A_0 T)$ انتخاب می‌کنیم، در این صورت برای $t \in \mathbb{I}$ داریم

$$s_0 = rank(V^* Z^* A_0 T') = rank(-1 - t^2) = 1,$$

بنابراین روی $\mathbb{I}$ داریم $(r_0, a_0, s_0) = (1, 0, 1)$. وقتی که $s_0 \neq 0$ یعنی DAE غرابت آزاد نیست.

۲. با ماتریس‌های نامنفرد زیر فرم کانونیک کلی را به دست می‌آوریم.

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \dot{Q}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

لذا داریم:

$$\tilde{E}_0 = P_0 E_0 Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_0 = P_0 A_0 Q_0 - P_0 E_0 \dot{Q}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{x} = Q^{-1} x = \begin{bmatrix} x_1 - t x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{f}_0 = P_0 f_0 = \begin{bmatrix} g_2 \\ -g_1 \end{bmatrix},$$

۳. با مشتق گیری و حذف خواهیم داشت:

$$E_1 = \tilde{E}_0 - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \tilde{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$f_1 = \tilde{f}_0 + \begin{bmatrix} \dot{\tilde{f}}_{0,2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_2 - \dot{g}_1 \\ -g_1 \end{bmatrix}.$$

- برای $i = 1$ داریم:

۱. مقادیر مشخصه موضعی

$$r_1 = rank(E_1) = 0,$$

$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ را به عنوان یک پایه $ker(E_1)$ و $T' = \emptyset_{2,0}$ را انتخاب می‌کنیم.

$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ را به عنوان یک پایه $corange(E_1)$ انتخاب می‌کنیم. بنابراین برای $t \in \mathbb{I}$ داریم:

$$a_1 = rank(Z^* A_1 T) = rank(A_1) = 2,$$

$V = \emptyset_{2,0}$ را به عنوان پایه $corange(Z^* A_1 T)$ انتخاب می‌کنیم. بنابراین برای تمام $t \in \mathbb{I}$ داریم:

$$s_1 = rank(V^* Z^* A_1 T') = rank(\emptyset_{0,0}) = 0,$$

بنابرابن روی $\mathbb{I}$ داریم:

$$(r_1, a_1, s_1, d_1, u_1, v_1) = (0, 2, 0, 0, 0, 0),$$

در این حالت $s_1 = 0$ یعنی روش متوقف می‌شود. از این رو اندیس‌ـغرابت $v_s = 1$ است. بنابراین فرمول غرابت‌ـآزد متناظر به فرم زیر است:

$$\begin{cases} 0 = -\tilde{x}_2 + g_2 - \dot{g}_1, \\ 0 = \tilde{x}_1 - g_1, \end{cases}$$

از این رو معادله DAE حل‌پذیر است ولی شرط سازگاری را ندارد. شرط اولیه $x(t_0) = x_0$ سازگار است اگر و تنها اگر $\tilde{x}_1(t_0) = g_1(t_0)$ و $\tilde{x}_2(t_0) = g_2(t_0) - \dot{g}_1(t_0)$ باشد

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = Q^{-1}x = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - tx_2 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

پس داریم:

$$\begin{cases} x_1(t_0) - t_0 x_0(t_0) = g_1(t_0), \\ x_2(t_0) = g_2(t_0) + \dot{g}_2(t_0), \end{cases}$$

بنابراین، چون $u_0 = 0$ منحصر به فرد حل‌پذیر است، مسئله مقدار اولیه با جواب‌های عمومی زیر است:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Q_0 \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \dot{g}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 + tg_1 - t\dot{g}_1 \\ g_2 - \dot{g}_1 \end{bmatrix}.$$

تذکر: نتایج بدست آمده تاکنون تنها با فرض ثابت بودن، مقادیر مشخصه به دست آمده است. توجه کنید که این فرض ثابت بودن مقادیر مشخصه لازم است. قضیه زیر روی رتبه[4] ماتریس‌های توابع پیوسته داده شده است.

قضیه ۶.۲.۲. فرض کنید $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ یک بازه بسته $M \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{m\times n})$ باشد در این صورت فاصله‌های باز $\mathbb{I}_j \subseteq \mathbb{I}$ برای $j \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که

$$\overline{\cup_j \mathbb{I}_j} = \mathbb{I} \quad I_j \cap I_i = \varnothing \quad i \neq j \quad \text{برای}$$

و برای عدد صحیح $j \in \mathbb{N}$، $r_j \in \mathbb{N}_0$ وجود دارد به طوری که

$$rank(M(t)) = r_j \quad t \in \mathbb{I} \quad \text{برای تمام}$$

یعنی رتبه $M(t)$ روی هر زیر فاصله $\mathbb{I}_j$ برای $r_j \in \mathbb{N}_0$ ثابت است.

برهان. [۱۵]. □

[4] rank

مقادیر مشخصه موضعی زوج ماتریس توابع مربوط به رتبه چندین ماتریس است. بنابراین اندیس غرابت خوش تعریف است، اگر مقادیر مشخصه تمام زوج ماتریس‌های ساخته شده با روش (۱.۲.۲) ثابت باشند. بنابراین به عنوان یک نتیجه از قضیه بالا اندیس غرابت زوج ماتریس‌های (E, A) محدود به زیر بازه‌های $\mathbb{I}_j$ برای تمام $j \in \mathbb{N}$ خوش تعریف است. از این رو اندیس غرابت روی یک زیر مجموعه فشرده از فاصله بسته داده شده $\mathbb{I}$ خوش تعریف است.

فصل ۳

روش تبدیل به فرم غرابت آزاد معادلات دیفرانسیل جبری تاخیری

در این فصل قصد داریم معادلات دیفرانسیل جبری تاخیری[1](DDAE) با ضرایب متغیر و یک تاخیر ثابت $\tau \geq \circ$ به فرم

$$E(t)\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)\Delta_\tau x(t) + f(t) \tag{۱.۳}$$

در فاصله زمانی $\mathbb{I} = [\circ, \infty)$معرفی می‌کنیم که $\dot{x}$ مشتق x نسبت به زمان و Δ_τ عمل‌گر پسرو است یعنی $\Delta_\tau x(t) : t \to x(t-\tau)$ و ضرایب آن توابع ماتریسی $E, A, B : \mathbb{I} \to \mathbb{C}^{m\times n}$ است. در ادامه با استفاده از روشی که در فصل قبل بیان شده فرم منظم (۱.۳)بدست می‌آوریم.

توجه کنید که معادلات دیفرانسیل جبری تاخیری به فرم (۱.۳) شامل کلاس‌های زیادی از دستگاه‌های دینامیکی است. در این فصل توجه خود را روی حالت‌های زیر معطوف می‌کنیم:
معادلات دیفرانسیل جبری

$$E(t)\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t) \tag{۲.۳}$$

معادلات تفاضلی[2]

$$\circ = A(t)x(t) + B(t)\Delta_\tau x(t) + f(t) \tag{۳.۳}$$

[1] linear delay differential-algebraic equations
[2] difference equations

و معادلات دیفرانسیل تاخیری[3]

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)\Delta_\tau x(t) + f(t). \qquad (۴.۳)$$

همان‌طور که می‌دانیم در حل عددی معادلات دیفرانسیل تاخیری توابع اولیه به فرم

$$x|_{[-\tau,\circ]} = \phi \qquad \text{به طوری که} \qquad \phi : [-\tau, \circ] \to \mathbb{C}^n \qquad (۵.۳)$$

باید از قبل مشخص باشد اما در مورد معادلات دیفرانسیل جبری باید توابع اولیه سازگار را به دست آوریم در این فصل یک فرآیند منظم سازی را معرفی می‌کنیم که دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل جبری تاخیری با ضرایب متغیر و یک تاخیر ثابت را به فرم غرابت آزاد تبدیل می‌کند و اجازه می‌دهد تمام محدودیت هایی که در دستگاه وجود دارد و برای تجزیه و تحلیل جنبه های نظری مانند حل پذیری، منحصر به فردی، سازگاری و شرایط همواری لازم است را از این فرم به دست آورد. برای این کار چند قضیه که در فصل قبل معرفی شد و این جا نیز کاربرد دارد را مجددا بیان می‌کنیم.

۱.۳ مقدمه

در این بخش برخی قضایا و تعاریف مورد نیاز در بخش‌های دیگر را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۳. تابع اولیه ϕ سازگار با (۱.۳) نامیده می‌شود اگر مسئله مقدار اولیه (۵.۳)ـ(۱.۳) حداقل یک جواب داشته باشد. دستگاه (۱.۳) حل پذیر نامیده می‌شود اگر برای هر تابع اولیه سازگار ϕ مسئله مقدار اولیه (۵.۳)ـ(۱.۳) جواب داشته باشد.

تذکر: در این تعریف اگر دستگاه منظم باشد آن‌گاه جواب منحصر به فرد دارد.
در ادامه چند قضیه را که در تبدیل به فرم غرابت آزاد نیاز داریم، بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۱.۳. فرض کنید $E \in \mathcal{C}^l(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{m\times n})$ و $l \in \mathbb{N}_\circ \cup \{\infty\}$ با $rank(E(t)) = r$ و $r \in \mathbb{N}_\circ$، برای تمام $t \in \mathbb{I}$ باشد. در این صورت توابع نقطه به نقطه نامنفرد $V \in \mathcal{C}^l(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{n\times n})$ و $U \in \mathcal{C}^l(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{m\times m})$ وجود دارد به طوری که

$$U^*EV = \begin{bmatrix} \Sigma & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}, \quad \text{یا} \quad U^*E = \begin{bmatrix} E_\wedge \\ \circ \end{bmatrix},$$

که در آن $\Sigma \in \mathcal{C}^l(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{r,r})$ نقطه به نقطه نامنفرد و $E_\wedge$ مرتبه سطری کامل r است.

برهان. [۳۱]. □

[3] delay-differential equations

قضیه ۲.۱.۳. فرض کنید $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ یک بازه بسته و $M \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{m\times n})$ باشد در این صورت فاصله‌های باز $\mathbb{I}_j \subseteq \mathbb{I}$ برای $j \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که

$$\overline{\cup_j \mathbb{I}_j} = \mathbb{I}, \quad I_j \cap I_i = \varnothing, \quad i \neq j \tag{۶.۳}$$

و برای عدد صحیح $j \in \mathbb{N}$، $r_j \in \mathbb{N}_0$ وجود دارد به طوری که

$$rank(M(t)) = r_j, \quad t \in \mathbb{I} \tag{۷.۳}$$

یعنی رتبه $M(t)$ روی هر زیر فاصله $\mathbb{I}_j$ برای $r_j \in \mathbb{N}_0$ ثابت است.

برهان. [۳۱] □

تعریف ۲.۱.۳. برای دو تابع ماتریسی $P \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{p\times n})$ و $Q \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{q\times n})$، زوج (P,Q) برای هر $t \in \mathbb{I}$، هیچ افزونگی پنهان[4] ندارند اگر

$$rank\begin{bmatrix} P(t) \\ Q(t) \end{bmatrix} = rank(P(t)) + rank(Q(t)).$$

لم ۱.۱.۳. فرض کنید زوج (P,Q) افزونگی پنهان نداشته باشند و توابع ماتریسی نقطه به نقطه معکوس پذیر $U_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{p\times p})$، $U_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{q\times q})$ و $V \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{n\times n})$ وجود دارند، آن‌گاه زوج توابع ماتریسی (U_1PV, U_2QV) هیچ افزونگی پنهانی ندارد.

برهان. [۳۱]. □

لم ۲.۱.۳. برای زوج (P,Q) که به صورت $P \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{p\times n})$ و $Q \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{q\times n})$ هستند، دو عدد صحیح $rank(Q(t)) = r_Q$ و $rank\begin{bmatrix} P(t) \\ Q(t) \end{bmatrix} = r_{[P;Q]}$ برای تمام $t \in \mathbb{I}$ وجود دارند به طوری که $r_{[P;Q]} \geq r_Q$، آن‌گاه ماتریس $\begin{bmatrix} S & 0 \\ Z_1 & Z_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{p\times p+q})$ وجود دارد که در شرایط زیر صدق کند.

۱. $\begin{bmatrix} S \\ Z_1 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{p\times p})$ نقطه به نقطه نامنفرد (معکوس پذیر) باشد.

۲. $Z_1P + Z_2Q = 0$.

۳. تابع SP نقطه به نقطه مرتبه سطری کامل دارد و زوج (SP,Q) هیچ افزونگی پنهانی ندارد.

برهان. [۳۱]. □

[4] hidden redundancy

۲.۳ روش تبدیل به فرم غرابت آزاد معادلات دیفرانسیل جبری و معادلات تفاضلی

۱.۲.۳ معادلات دیفرانسیل جبری

با در نظر گرفتن $M := \begin{bmatrix} E & -A \end{bmatrix}$ دستگاه (۲.۳) را می‌توان با استفاده از قضیه (۲.۱.۳) و فرضیه زیر می‌توان به صورت

$$\begin{bmatrix} E & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} = f(t) \tag{۸.۳}$$

نوشت.

فرضیه ۱.۲.۳. برای زوج توابع (E, A) معادله (۲.۳) اعداد صحیح a و r وجود دارد به طوری که

$$rank(E(t)) = r \quad rank(M(t)) = r + a, \quad t \in \mathbb{I} \tag{۹.۳}$$

لم ۱.۲.۳. معادله (۲.۳) را در نظر بگیرید و فرض کنید (۱.۲.۳) برای زوج (E, A) برقرار باشد. در این صورت ماتریس نقطه به نقطه نامنفرد $P_۱ \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{m\times m})$ وجود دارد به طوری که با ضرب این ماتریس از سمت چپ در دستگاه (۸.۳) این دستگاه به یک دستگاه بالا مثلثی به فرم زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{bmatrix} M_{۱۱} & M_{۱۲} \\ ۰ & M_{۲۲} \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} f_۱ \\ f_۲ \\ f_۳ \end{bmatrix} & \begin{array}{c} r \\ a \\ v = m - r - a \end{array} \end{array} \tag{۱۰.۳}$$

که در آن توابع $M_{۱۱} \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{r\times n})$ و $M_{۲۲} \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{a\times n})$ دارای رتبه سطری کامل هستند.

برهان. نخست بلوک ستونی E از M را توسط ماتریس $P_E : \mathbb{I} \to \mathbb{C}^{m\times m}$ از قضیه (۲.۱.۳) یا تجزیه QR به طوری که $\tilde{M}_{۱۱}$ رتبه سطری کامل دارد بدست می‌آوریم، در این صورت داریم:

$$P_E M = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \tilde{M}_{۱۱} & \tilde{M}_{۱۲} \\ ۰ & \tilde{M}_{۲۲} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} r \\ m - r \end{array} \end{array} .$$

در ادامه بلوک دوم ماتریس بالا را توسط ماتریس $: \mathbb{I} \to \mathbb{C}^{m\times m}$ $P_A = \begin{bmatrix} I & ۰ \\ ۰ & \tilde{P}_A \end{bmatrix}$ که به صورت $\tilde{P}_A \tilde{M}_{۲۲} = \begin{bmatrix} M_{۲۲} \\ ۰ \end{bmatrix}$ و $M_{۲۲}$ رتبه سطری کامل a دارد بدست می‌آوریم که اگر قرار دهیم $P_۱ := P_A P_E$ اثبات تمام است. □

برای این که از لم (۲.۱.۳) بتوان استفاده کرد باید گزاره زیر را در نظر بگیریم.

فرضیه ۲.۲.۳. برای معادله (۲.۳) و معادله (۱۰.۳) هم‌ارز با آن، توابع M_{11} و M_{22} دارای مرتبه ثابت $\hat{m}$ هستند یعنی

$$rank(\begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \end{bmatrix}) = \hat{m}, \qquad t \in \mathbb{I}$$

با اعمال لم (۲.۱.۳) برای زوج (M_{11}, M_{22}) گزاره (۲.۲.۳) نتیجه می‌دهد که ماتریس‌های S، Z_1 و Z_2 با اندازه مناسب و ویژگی‌های زیر وجود دارد:

۱. $\begin{bmatrix} S \\ Z_1 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{r\times r})$ نقطه به نقطه نامنفرد باشد.

۲. $Z_1 M_{11} + Z_2 M_{22} = 0$.

۳. SM_{11} نقطه به نقطه رتبه سطری کامل دارد و زوج (SM_{11}, M_{22}) هیچ افزونگی پنهانی ندارد.

حال با ضرب ماتریس زیر

$$P_2 := diga(\begin{bmatrix} S \\ Z_1 \end{bmatrix}, I_a, I_v) \in \mathbb{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{m\times m}),$$

از سمت چپ در دستگاه (۱۰.۳) داریم:

$$\begin{bmatrix} SM_{11} & SM_{12} \\ Z_1 M_{11} & Z_2 M_{12} \\ 0 & M_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sf_1 \\ Z_1 f_1 \\ f_2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} d \\ s \\ a \\ v = m - r - a \end{matrix} \tag{۱۱.۳}$$

که $r = d + s$ است.

تبدیل دستگاه (۸.۳) از طریق (۱۰.۳) به دستگاه (۱۱.۳) کاری جزء تقسیم بندی دستگاه با استفاده از توابع ماتریسی نقطه به نقطه نامنفرد نیست. در این صورت این تقسیم بندی تغییری در مجموعه جواب دستگاه (۸.۳) ایجاد نمی‌کند. در ادامه تعداد معادلات دیفرانسیل r را توسط لم زیر که بلوک $Z_1 M_{11}$ را حذف می‌کند به تعداد d کاهش می‌دهیم.

لم ۲.۲.۳. دستگاه (۱۱.۳) و ماتریس‌های S، Z_1 و Z_2 تعریف شده در لم (۲.۱.۳) که برای دستگاه (۸.۳) به کار برده می‌شوند را در نظر بگیرید. در این صورت دستگاه (۱۱.۳) با دستگاه

زیر مجموعه جواب یکسان دارد

$$\begin{bmatrix} SM_{11} & SM_{12} \\ 0 & Z_1 M_{12} + Z_2 \dot{M}_{22} \\ 0 & M_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sf_1 \\ Z_1 f_1 + Z_2 \dot{f}_2 \\ f_2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} d \\ s \\ a \\ v = m - r - a \end{matrix} \qquad (۱۲.۳)$$

و به ویژه آن معادله (۲.۳) نیز همان مجموعه جواب دستگاه (۱۲.۳) را دارد.

برهان. با مشتق گیری از بلوک سوم دستگاه (۱۱.۳) و با ضرب آن در ماتریس Z_2 داریم

$$Z_2 M_{22} \dot{x} + Z_2 \dot{M}_{22} x = Z_2 \dot{f}_2 \qquad (۱۳.۳)$$

اگر معادله (۱۳.۳) را با سطر دوم دستگاه (۱۱.۳) جمع کنیم در این صورت با شرط

$$Z_1 M_{11} + Z_2 M_{22} = 0,$$

دستگاه (۱۲.۳) بدست می‌آید. همچنین می‌توان این روند را در جهت عکس انجام داد و به دستگاه (۱۱.۳) رسید. این تضمین می‌کند که جواب‌های دستگاه‌های (۱۱.۳) و (۱۲.۳) یکسان است و در نتیجه دستگاه‌های (۲.۳) و (۱۲.۳) دارای یک جواب هستند. □

در دستگاه (۱۲.۳) تعداد معادلات دیفرانسیل به $d = r - s$ کاهش می‌یابد و این روند کاهش را توسط روش تکراری زیر ادامه می‌دهیم.

روش ۱.۲.۳. ورودی: معادله (۲.۳) با فرم جبری (۸.۳) در نظر بگیرید.

شروع: قرار می‌دهیم $i = 0$ و فرض می‌کنیم $E^0 = E$ ،$A^0 = A$ ،$f^0 = f$ ،$M^0 = \begin{bmatrix} E^0 & A^0 \end{bmatrix}$

گام ۱: فرض کنید دو عدد صحیح r^i و a^i وجود دارند به طوری که

$$rank(E^i) = r^i, \quad rank(M^i) = r^i + a^i, \quad t \in \mathbb{I}$$

ماتریس نقطه به نقطه نامنفرد $P_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{m\times m})$ را طوری تعیین می‌کنیم که با ضرب از سمت چپ در دستگاه $M^i \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} = f^i$ داشته باشیم:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} r^i \\ a^i \\ v^i \end{matrix}, \qquad (۱۴.۳)$$

که در آن $v^i = m - r^i - a^i$، و توابع $M_{11} \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{r^i \times n})$ و $M_{22} \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{a^i \times n})$ وجود دارند که نقطه به نقطه رتبه سطری کامل دارند.

گام ۲: فرض کنید عدد صحیح $\hat{m}$ وجود دارد به طوری که

$$rank(\begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \end{bmatrix}) = \hat{m}, \quad t \in \mathbb{I} \qquad (۱۵.۳)$$

اگر زوج (M_{11}, M_{22}) هیچ افزونگی پنهانی نداشته باشند یعنی $\hat{m} = r^i + a^i$ در این صورت دستگاه (۱۵.۳) نتیجه مطلوب است **در غیر این صورت** اگر $s^i = r^i + a^i - \hat{m} > 0$ به گام بعد می‌رویم.

گام ۳: ماتریس‌های S، Z_1 و Z_2 وجود دارند به طوری که در شرایط زیر صدق کنند:

۱. $\begin{bmatrix} S \\ Z_1 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{r\times r})$ نقطه به نقطه نامنفرد باشد.

۲. $Z_1 M_{11} + Z_2 M_{22} = 0$.

۳. SM_{11} نقطه به نقطه رتبه سطری کامل دارد و زوج (SM_{11}, M_{22}) هیچ افزونگی پنهانی ندارد.

ماتریس زیر را تعریف می‌کنیم:

$$P_2 := diga(\begin{bmatrix} S \\ Z_1 \end{bmatrix}, I_{a^i}, I_{v^i}) \in \mathbb{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{m\times m}),$$

با ضرب این ماتریس از سمت چپ در دستگاه (۱۵.۳) داریم:

$$\begin{bmatrix} SM_{11} & SM_{12} \\ Z_1 M_{11} & Z_2 M_{12} \\ 0 & M_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sf_1 \\ Z_1 f_1 \\ f_2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} di \\ s^i \\ a^i \\ v^i \end{matrix} \tag{۱۶.۳}$$

گام ۴: بلوک $Z_1 M_{11}$ دستگاه (۱۶.۳) را توسط لم (۲.۲.۳) حذف می‌کنیم در این صورت داریم:

$$\begin{bmatrix} SM_{11} & SM_{12} \\ 0 & Z_1 M_{12} + Z_2 \dot{M}_{22} \\ 0 & M_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Sf_1 \\ Z_1 f_1 + Z_2 \dot{f}_2 \\ f_2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} d^i \\ s^i \\ a^i \\ v^i \end{matrix} .$$

i را یک واحد افزایش می‌دهیم و ماتریس‌های زیر را تعریف می‌کنیم.

$$E^i = \begin{bmatrix} SM_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A^i = \begin{bmatrix} SM_{12} \\ Z_1 M_{12} + Z_2 \dot{M}_{22} \\ M_{22} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f^i = \begin{bmatrix} Sf_1 \\ Z_1 f_1 + Z_2 \dot{f}_2 \\ f_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M^i := \begin{bmatrix} E^i & A^i \end{bmatrix},$$

در این صورت به گام ۱ بر می‌گردیم و این روند را تکرار می‌کنیم.

چون $r^{i+1} = d^i = r^i - s^i$ و s^i برای همه گام‌ها i بجز گام آخر $s^i > 0$ است و در این صورت روش (۱.۲.۳) تعداد متناهی گام پایان می‌پذیرد.

تعریف ۱.۲.۳ (اندیس غرابت). اگر $E, A \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{m\times n})$ و دنباله (r_i, s_i, a_i) برای $i \in \mathbb{N}_۰$ توسط روش (۱.۲.۳) تعیین شود(درحالت خاص فرض کنید که r^i, s^i, a^i روی $\mathbb{I}$ ثابت باشند)،آن‌گاه $\mu = \min\{i \in \mathbb{N}_۰ : s^i = ۰\}$ اندیس غرابت زوج توابع ماتریسی (E, A) معادله دیفرانسیل جبری خطی با ضرایب متغیر نامیده می‌شود.

درمورد $\mu = ۰$ هر دو زوج توابع ماتریسی (E, A) و DAE، غرابت آزاد نامیده می‌شود.

قضیه ۱.۲.۳. معادله (۲.۳) را در نظر بگیرید و فرض کنید روش (۱.۲.۳) پایان بپذیرد یعنی تمام فرضیات رتبه ثابت بودن در روش (۱.۲.۳) صادق باشد، در این صورت دستگاه (۲.۳) همان مجموعه جواب دستگاه (۱۴.۳) را دارد، که توسط نماد گذاری زیر نمایش داده شده است.

$$\begin{bmatrix} \hat{M}_{۱۱} & \hat{M}_{۱۲} \\ ۰ & \hat{M}_{۲۲} \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}_۱ \\ \hat{f}_۲ \\ \hat{f}_۳ \end{bmatrix} \tag{۱۷.۳}$$

که در آن $\begin{bmatrix} \hat{M}_{۱۱} \\ \hat{M}_{۲۲} \end{bmatrix}$ نقطه به نقطه رتبه سطری کامل دارد و $\hat{f}_i, i = ۱,۲,۳$ توابع از مرتبه مشتق $f, \dot{f}, \dots, f^{(\mu)}$ هستند.

برهان. پس از انجام روش (۱.۲.۳) یک دستگاه از فرم (۱۷.۳) به دست می‌آوریم که $\hat{M}_{۱۱}$ و $\hat{M}_{۲۲}$ رتبه سطری کامل دارند و زوج $(\mathbb{M}_{۱۱}, \hat{M}_{۲۲})$ افزونگی پنهانی ندارند یعنی

$$rank(\begin{bmatrix} \hat{M}_{۱۱} \\ \hat{M}_{۲۲} \end{bmatrix}) = rank(\hat{M}_{۱۱}) + rank(\hat{M}_{۲۲}),$$

و در این صورت $\begin{bmatrix} \hat{M}_{۱۱} \\ \hat{M}_{۲۲} \end{bmatrix}$ نقطه به نقطه رتبه سطری کامل دارد. بنابراین با توجه به لم (۲.۲.۳) مجموعه جواب دستگاه (۲.۳) در هر مرحله تغییری نمی‌کند در این صورت دستگاه (۲.۳) و دستگاه (۱۷.۳) مجموعه جواب یکسان دارند. □

۲.۲.۳ معادلات تفاضلی

مشابه معادلات دیفرانسیل جبری، معادلات تفاضلی (۳.۳) را به فرم غرابت آزاد تبدیل می‌کنیم. در این قسمت بدون اثبات اصلاح روش (۱.۲.۳) و قضیه (۱.۲.۳) را پیشنهاد می‌کنیم.

روش ۲.۲.۳. ورودی: معادلات تفاضلی به فرم (۳.۳) را به فرم جبری زیر در فاصله زمانی $\mathbb{I}$ نمایش می‌دهیم

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \Delta_\tau x \end{bmatrix} = -f,$$

شروع: $i = 0$ قرار می‌دهیم، فرض کنید $A^0 = A$، $B^0 = B$، $f^0 = f$، $W^0 = \begin{bmatrix} A^0 & B^0 \end{bmatrix}$

گام ۱: فرض کنید دو عدد صحیح w_1^i و w_2^i وجود دارند به طوری که

$$rank(A^i) = w_1^i \quad rank(W^i) = w_1^i + w_2^i, \quad t \in \mathbb{I}$$

ماتریس نقطه به نقطه نامنفرد $P_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{m\times m})$ را طوری تعیین می‌کنیم که با ضرب از سمت چپ در دستگاه $W^i \begin{bmatrix} x \\ \Delta_\tau x \end{bmatrix} = -f^i$ داشته باشیم:

$$\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ 0 & W_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \Delta_\tau x \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} w_1^i \\ w_2^i \\ w_3^i \end{matrix}, \tag{۱۸.۳}$$

که $w_3^i = m - w_1^i - a_2^i$، و توابع $W_{11} \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{w_1^i\times n})$ و $W_{22} \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{w_2^i\times n})$ وجود دارند که نقطه به نقطه رتبه سطری کامل دارند.

گام ۲: فرض کنید عدد صحیح $\widetilde{w}$ وجود دارد به طوری که

$$rank(\begin{bmatrix} W_{11} \\ \Delta_{-\tau} W_{22} \end{bmatrix}) = \widetilde{m}, \quad t \in \mathbb{I} \tag{۱۹.۳}$$

اگر زوج $(W_{11}, \Delta_{-\tau} W_{22})$ هیچ افزونگی پنهانی نداشته باشند یعنی $\widetilde{m} = w_1^i + w_2^i$ در این صورت دستگاه(۱۵.۳) نتیجه مطلوب است **در غیر این صورت** اگر $s^i = w_1^i + w_2^i - \widetilde{m} > 0$ به گام بعد می‌رویم.

گام ۳: ماتریس‌های S، Z_1 و Z_2 وجود دارند به طوری که در شرایط زیر صدق کنند

۱. $\begin{bmatrix} S \\ Z_1 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{w_1^i\times w_1^i})$ نقطه به نقطه نامنفرد باشد.

۲. $Z_1 W_{11} + Z_2 W_{22} = 0$.

۳. SW_{11} نقطه به نقطه رتبه سطری کامل دارد و زوج (SW_{11}, W_{22}) هیچ افزونگی پنهانی ندارد.

ماتریس زیر را تعریف می‌کنیم:

$$P_2 := diga(\begin{bmatrix} S \\ Z_1 \end{bmatrix}, I_{w_2^i}, I_{w_3^i}) \in \mathbb{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{m\times m}),$$

با ضرب این ماتریس از سمت چپ در دستگاه (۱۸.۳) داریم:

$$\begin{bmatrix} SW_{11} & SW_{12} \\ Z_1 W_{11} & Z_2 W_{12} \\ 0 & W_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \Delta_\tau x \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} Sf_1 \\ Z_1 f_1 \\ f_2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} di \\ s^i \\ w_2^i \\ w_3^i \end{matrix} \tag{۲۰.۳}$$

گام ۴: بلوک Z_1W_{11} دستگاه (۲۰.۳) را توسط عمل‌گر پیشرو $\Delta_{-\tau}$ و ضرب Z_2 از سمت چپ در سطر سوم به صورت

$$Z_2\Delta_{-\tau}W_{22}x = -Z_2\Delta_{-\tau}f_2,$$

و جمع با سطر دوم سیستم (۲۰.۳) حذف می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$\begin{bmatrix} SW_{11} & SW_{12} \\ 0 & Z_1W_{12} \\ 0 & W_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \Delta_\tau x \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} Sf_1 \\ Z_1f_1 + Z_2\Delta_\tau f_2 \\ f_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

i را یک واحد افزایش می‌دهیم و ماتریس‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$A^i = \begin{bmatrix} SW_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B^i = \begin{bmatrix} SW_{12} \\ Z_1W_{12} \\ W_{22} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f^i = \begin{bmatrix} Sf_1 \\ Z_1f_1 + Z_2\Delta_\tau f_2 \\ f_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M^i := \begin{bmatrix} A^i & B^i \end{bmatrix},$$

در این صورت به گام ۱ بر می‌گردیم و این روند را تکرار می‌کنیم.

مانند روش (۱.۲.۳) روش (۲.۲.۳) اعمال شده برای معادلات تفاضلی (۳.۳) بعد از تعداد گام متناهی به پایان می‌رسد، که منجر به قضیه زیر می‌شود.

قضیه ۲.۲.۳. معادله (۳.۳) را در نظر بگیرید و فرض کنید روش (۲.۲.۳) پایان یابد یعنی تمام فرضیات رتبه ثابت بودن در روش (۲.۲.۳) صادق باشد، در این صورت دستگاه (۳.۳) همان مجموعه جواب دستگاه (۱۸.۳) را دارد، که با نماد گذاری زیر نمایش داده شده است.

$$\begin{bmatrix} \widehat{W}_{11} & \widehat{W}_{12} \\ 0 & \widehat{W}_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \Delta_\tau x \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \\ \hat{f}_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \hat{w}_1 \\ \hat{w}_2 \\ \hat{w}_3 \end{matrix} \tag{۲۱.۳}$$

که در آن $\begin{bmatrix} \widehat{W}_{11} \\ \widehat{W}_{22}(t+\tau) \end{bmatrix} : t \to \begin{bmatrix} \widehat{W}_{11} \\ \Delta_{-\tau}\widehat{W}_{22} \end{bmatrix}$ نقطه به نقطه رتبه سطری کامل دارد و اندازه بلوک‌های معادلات $\hat{w}_1$، $\hat{w}_2$ و $\hat{w}_3 = m - \hat{w}_1 - \hat{w}_2$ است.

برهان. [۲۳]. □

در بخش بعد معلوم خواهد شد در طی روند تبدیل به فرم غرابت آزاد معادلات دیفرانسیل جبری تاخیری کلی، گاهی نیاز به مشتق گرفتن از معادلات تفاضلی است اما گاهی ممکن است بعضی از مؤلفه‌های تابع $\Delta_\tau x$ مشتق پذیر نباشند بنابراین مشتق گیری معادله که شامل $\Delta_\tau x$ نیست بهتر از مشتق گیری معادله‌ای که دارای $\Delta_\tau x$ است می‌باشد. برای رفع این مشکل از بلوک بندی ماتریس‌ها استفاده می‌شود. به نتیجه زیر توجه کنید.

نتیجه ۱.۲.۳. دستگاه (۳.۳) و دستگاه (۲۱.۳) را که حاصل اعمال روش (۲.۲.۳) برای دستگاه (۳.۳) است در نظر بگیرید. فرض کنید زوج $(\widehat{W}_{۱۱}, \widehat{W}_{۲۲})$ دستگاه (۲۱.۳) در شرط زیر صدق کند

$$rank(\begin{bmatrix} \widehat{W}_{۱۱} \\ \widehat{W}_{۲۲} \end{bmatrix}) = \hat{w}_{۴}, \quad t \in \mathbb{I} \tag{۲۲.۳}$$

که در آن $\hat{w}_{۴}$ عددی صحیح است . در این صورت یک ماتریس نقطه به نقطه منفرد $P_{۳} \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{m\times m})$ وجود دارد به طوری که با ضرب این ماتریس از سمت چپ در دستگاه (۲۱.۳) دستگاه زیر را

$$\begin{bmatrix} \widetilde{W}_{۱۱} & \widetilde{W}_{۱۲} \\ ۰ & \widehat{W}_{۲۲} \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \Delta_\tau x \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{f}_{۱} \\ \hat{f}_{۲} \\ \hat{f}_{۳} \end{bmatrix} \begin{matrix} \hat{w}_{۱} \\ \hat{w}_{۲} \\ \hat{w}_{۳} \end{matrix} \tag{۲۳.۳}$$

که $\begin{bmatrix} \widetilde{W}_{۱۱} \\ \Delta_{-\tau}\widehat{W}_{۲۲} \end{bmatrix}$ رتبه سطری کامل دارد و زوج $(\widetilde{W}_{۱۱}, \widehat{W}_{۲۲})$ هیچ افزونگی پنهانی ندارد.

برهان. با اعمال لم (۲.۱.۳) برای زوج $(\widehat{W}_{۱۱}, \widehat{W}_{۲۲})$ می‌توان ماتریس‌های $\widehat{S}$، $\widehat{Z}_{۱}$ و $\widehat{Z}_{۲}$ با اندازه مناسب و ویژگی‌های زیر تعیین کرد.

۱. $\begin{bmatrix} \widehat{S} \\ \widehat{Z}_{۱} \end{bmatrix} \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{\hat{w}_{۱}\times\hat{w}_{۱}})$ نقطه به نقطه نامنفرد باشد.

۲. $\widehat{Z}_{۱}\widehat{W}_{۱۱} + \widehat{Z}_{۲}\widehat{W}_{۲۲} = ۰$.

۳. $\widehat{S}\widehat{W}_{۱۱}$ نقطه به نقطه رتبه سطری کامل دارد و زوج $(\widehat{S}\widehat{W}_{۱۱}, \widehat{W}_{۲۲})$ هیچ افزونگی پنهانی ندارد.

ماتریس زیر را تعریف می‌کنیم

$$P_{۳} := \left[\begin{array}{ccc} \widehat{S} & ۰ & \\ \widehat{Z}_{۱} & \widehat{Z}_{۲} & ۰ \\ \hline ۰ & I_{\hat{w}_{۲}} & ۰ \\ ۰ & ۰ & I_{\hat{w}_{۳}} \end{array}\right] \begin{matrix} \hat{w}_{۱۱} \\ \hat{w}_{۱۲} \\ \hat{w}_{۲} \\ \hat{w}_{۳} \end{matrix},$$

که $\hat{w}_{۱} = \hat{w}_{۱۱} + \hat{w}_{۱۲}$ و با ضرب ماتریس $P_{۳}$ از سمت چپ در دستگاه (۲۱.۳) داریم:

$$\left[\begin{array}{c|c} \widehat{S}\widehat{W}_{۱۱} & \widehat{S}\widehat{W}_{۱۲} \\ \widehat{Z}_{۱}\widehat{W}_{۱۱} & ۰ \\ \hline ۰ & \widehat{W}_{۲۲} \\ ۰ & ۰ \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ \Delta_\tau \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \widehat{S}\hat{f}_{۱} \\ \widehat{Z}_{۱}\hat{f}_{۱} + \widehat{Z}_{۲}\hat{f}_{۲} \\ \hat{f}_{۲} \\ \hat{f}_{۳} \end{bmatrix} \begin{matrix} \hat{w}_{۱۱} \\ \hat{w}_{۱۲} \\ \hat{w}_{۲} \\ \hat{w}_{۳} \end{matrix} \tag{۲۴.۳}$$

قرار می‌دهیم:

$$\widetilde{W}_{۱۱} := \begin{bmatrix} \widehat{S} \\ \widehat{Z}_۱ \end{bmatrix} \widehat{W}_{۱۱}, \quad \widetilde{W}_{۱۲} := \begin{bmatrix} \widehat{S}\widehat{W}_{۱۱} \\ ۰ \end{bmatrix}, \quad \tilde{f}_۱ := \begin{bmatrix} \widehat{S}\hat{f}_۱ \\ \widehat{Z}_۱\hat{f}_۱ + \widehat{Z}_۲\hat{f}_۲ \end{bmatrix},$$

در این صورت فرم مطلوب دستگاه (۲۳.۳) است. کافی است نشان دهیم در دستگاه (۲۳.۳) ماتریس $\begin{bmatrix} \widetilde{W}_{۱۱} \\ \Delta_{-\tau}\widetilde{W}_{۲۲} \end{bmatrix}$ رتبه سطری کامل دارد. زوج $(\widetilde{W}_{۱۱}, \Delta_{-\tau}\widetilde{W}_{۲۲})$ با توجه به لم (۱.۱.۳) هیچ افزونگی پنهانی ندارد و دو تابع ماتریسی $\widetilde{W}_{۱۱}$ و $\widetilde{W}_{۲۲}$ رتبه سطری کامل دارند، لذا ماتریس $\begin{bmatrix} \widetilde{W}_{۱۱} \\ \Delta_{-\tau}\widetilde{W}_{۲۲} \end{bmatrix}$ رتبه سطری کامل دارد. □

با تبدیل دستگاه (۲۱.۳) به دستگاه (۲۴.۳) تعداد معادلات شامل $\Delta_\tau x$ را از $\hat{w}_۱ + \hat{w}_۲$ به $\hat{w}_{۱۱} + \hat{w}_۲$ کاهش می‌دهیم. بنابراین از آن جای که $\widehat{S}\widehat{W}_{۱۲}$ نقطه به نقطه رتبه سطری کامل دارد نمی‌توان از طریق بلوک بندی تعداد معادلات بیشتری را حذف کرد. به عنوان مثال از طریق روش حذفی گوس نمی‌توان تعداد زیادی از این معادلات را حذف کرد.

۳.۳ روش تبدیل به فرم غرابت آزاد معادلات دیفرانسیل جبری تاخیری خطی

در این قسمت معادلات دیفرانسیل جبری تاخیری به فرم (۱.۳) با یک تأخیر ثابت و مسئله مقدار اولیه (۵.۳)ــ(۱.۳) بررسی خواهد شد. ابتدا روند تبدیل به فرم غرابت آزاد دستگاه (۱.۳) به دستگاه دیگری که بتوان تمام محدودیت‌های پنهان و شرایط حل پذیری از این دستگاه جدید به راحتی تعیین کرد. همان‌طور که در بخش قبل مشاهده شد به منظور تعیین تمام محدودیت‌های جبری پنهان و شرایط حل پذیری معادلات دیفرانسیل جبری و معادلات تفاضلی از دو عملگر مشتق و $\Delta_{-\tau}$ و هم‌چنین از بلوک بندی دستگاه استفاده شد. بنابراین برای معادله دیفرانسیل جبری تأخیری خطی دلخواه می‌توان از سه عملگر زیر استفاده کرد.

۱. بلوک بندی دستگاه با ماتریس نقطه به نقطه نامنفرد

۲. اضافه کردن مشتق یک معادله به معادله دیگر

۳. معادلاتی که شامل تاخیر Δx است، توسط عملگر $\Delta_{-\tau}$ قسمت تاخیر از بین برود.

در مثال زیر نشان می‌دهیم که ترتیب استفاده از دو عملگر مشتق و $\Delta_{-\tau}$ مهم است. در حقیقت انتخاب یک عملگر به هنگام منظم سازی ممکن است منجر به شرایط همواری پیچیده‌تری شود. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱.۳.۳. معادله دیفرانسیل جبری تاخیری خطی زیر را در فاصله زمانی $t \in \mathbb{I}$ در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Delta_\tau x(t) + \begin{bmatrix} f_۱(t) \\ f_۲(t) \\ f_۳(t) \end{bmatrix} \tag{۲۵.۳}$$

اگر سطر سوم دستگاه (۲۵.۳) را با عملگر $\Delta_{-\tau}$ تغییر دهیم، داریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Delta_\tau x(t) + \begin{bmatrix} f_۱(t) \\ f_۲(t) \\ f_۳(t+\tau) \end{bmatrix},$$

مشتق گیری از معادله آخر دستگاه بالا و جمع آن با معادله اول باعث حذف $\dot{x}_۱$ می‌شود

$$\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Delta_\tau x(t) + \begin{bmatrix} f_۱(t) + \dot{f}_۳(t+\tau) \\ f_۲(t) \\ f_۳(t+\tau) \end{bmatrix},$$

اگر معادله آخر را از معادله دوم کم کنیم، داریم:

$$\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Delta_\tau x(t) + \begin{bmatrix} f_۱(t) + \dot{f}_۳(t+\tau) \\ f_۲(t) - f_۳(t+\tau) \\ f_۳(t+\tau) \end{bmatrix},$$

با استفاده از عملگر $\Delta_{-\tau}$ دو معادله اول را تغییر می‌دهیم.

$$\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} f_۱(t+\tau) + \dot{f}_۳(t+۲\tau) \\ f_۲(t+\tau) - f_۳(t+۲\tau) \\ f_۳(t+\tau) \end{bmatrix} \tag{۲۶.۳}$$

به این ترتیب با استفاده از عملگر $\Delta_{-\tau}$ در گام اول فقط به ۲ تغییر و ۱ بار مشتق گیری مورد نیاز است و مهم‌تر از همه فقط $f_۳$ باید شرط همواری (پیوسته و مشتق پذیر) را داشته باشد. در ادامه نشان می‌دهیم که اگر این مثال را با عملگر مشتق آغاز کنیم شرایط غیر ضروری هموار برای ناهمگونی f را به دنبال دارد.

ابتدا با اضافه کردن مشتق معادله دوم دستگاه (۲۵.۳) به معادله اول و حذف $\dot{x}_۱$ در دو طرف معادله داریم:

$$\begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Delta_\tau x(t) + \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \Delta_\tau \dot{x}(t) \begin{bmatrix} f_۱(t) + \dot{f}_۲(t) \\ f_۲(t) \\ f_۳(t) \end{bmatrix},$$

معادله اول و آخر دستگاه بالا را با استفاده از عملگر $\Delta_{-\tau}$ تغییر می‌دهیم،

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\Delta_{\tau}x(t) + \begin{bmatrix} f_1(t+\tau)+\dot{f}_2(t+\tau) \\ f_2(t) \\ f_3(t+\tau) \end{bmatrix},$$

اگر معادله آخر را از معادله دوم دستگاه بالا کم کنیم، داریم:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\Delta_{\tau}x(t) + \begin{bmatrix} f_1(t+\tau)+\dot{f}_2(t+\tau) \\ f_2(t)-f_3(t+\tau) \\ f_3(t+\tau) \end{bmatrix},$$

با تغییر معادله دوم توسط عملگر $\Delta_{-\tau}$ داریم:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\Delta_{\tau}x(t) + \begin{bmatrix} f_1(t+\tau)+\dot{f}_2(t+\tau) \\ f_2(t+\tau)-f_3(t+2\tau) \\ f_3(t+\tau) \end{bmatrix},$$

اگر از معادله دوم دستگاه بالا یک بار مشتق بگیریم و با معادله اول جمع کنیم دوباره به دستگاه (۲۶.۳) می‌رسیم. با این حال دو بار از عملگر مشتق و دو بار تغییر با عملگر $\Delta_{-\tau}$ استفاده کردیم، مهم تر از این در حین این روش نه تنها به مشتق‌پذیری $f_3(t)$ نیاز است بلکه به مشتق $f_2(t)$، نیز نیاز است.

در کنار نشان دادن ویژگی ناجابجایی[5] دو عمل گر مشتق و $\Delta_{-\tau}$ در مثال (۱.۳.۳) نشان می‌دهد که از وجود معادلات تفاضلی شامل عبارت $\Delta_{-\tau}x(t)$ تا حد امکان جلوگیری شود. بنابراین قبل استفاده از عملگر مشتق باید تعداد معادلات حاوی $\Delta_{\tau}x(t)$ را به حداقل ممکن کاهش دهیم، این گام را می‌توان به آسانی توسط نتیجه (۱.۲.۳) انجام داد.

با این حال در این بخش فرض می‌کنیم که روش‌های (۲.۲.۳) و (۱.۲.۳) قابل اجرا است بنابراین می‌توانیم افزونگی‌های پنهان در قسمت‌های معادلات تفاضلی و معادلات دیفرانسیل جبری دستگاه (۱.۳) را حذف کنیم.

ابتدا می‌توان افزونگی‌های پنهان دستگاه (۱.۳) با استفاده از روش زیر حذف کرد.

روش ۱.۳.۳. ورودی: معادله دیفرانسیل جبری خطی تاخیری به فرم (۱.۳) را در نظر می‌گیریم:

گام۱: فرض کنید ماتریس E رتبه کامل r دارد یعنی

$$rank(E) = r, \quad t \in \mathbb{I}$$

ماتریس نقطه به نقطه نامنفرد $P \in \mathcal{C}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{m\times m})$ را طوری تعیین می‌کنیم که با ضرب این ماتریس از سمت چپ در دستگاه (۱.۳) داشته باشیم:

$$\left[\frac{E_1}{0}\right]\dot{x} = \left[\frac{A_1}{A_2}\right]x + \left[\frac{B_1}{B_2}\right]\Delta_{\tau}x + \left[\frac{f_1}{f_2}\right] \qquad (۲۷.۳)$$

[5] non-commutativity

که در آن E_1 نقطه به نقطه دارای رتبه سطری کامل r است.

گام۲: با اعمال روش (۲.۲.۳) برای بلوک سطری آخر دستگاه (۲۷.۳) داریم:

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \breve{A}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ \breve{B}_2 \\ \breve{B}_3 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_\tau x + \begin{bmatrix} f_1 \\ \breve{f}_2 \\ \breve{f}_3 \\ \breve{f}_4 \end{bmatrix} \tag{۲۸.۳}$$

که در آن ماتریس‌های E_1 و $\begin{bmatrix} \breve{A}_2 \\ \Delta_{-\tau}\breve{B}_3 \end{bmatrix}$ نقطه به نقطه رتبه سطری کامل دارند.

گام۳: نتیجه (۱.۲.۳) را برای معادلات تفاضلی شامل در بلوک دوم و سوم معادلات سطری (۲۸.۳) اعمال می‌کنیم در این صورت داریم:

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \widetilde{A}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ \widetilde{B}_2 \\ \widetilde{B}_3 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_\tau x + \begin{bmatrix} f_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \\ \tilde{f}_4 \end{bmatrix} \tag{۲۹.۳}$$

که در آن ماتریس‌های E_1 و $\begin{bmatrix} \widetilde{A}_2 \\ \Delta_{-\tau}\widetilde{B}_3 \end{bmatrix}$ نقطه به نقطه رتبه سطری کامل دارند و زوج $(\widetilde{B}_2, \widetilde{B}_3)$ هیچ افزونگی پنهانی ندارند.

پایان.

حال به مرحله حذف افزونگی‌های پنهان معادلات دیفرانسیل جبری رسیدیم و این کار را با استفاده از روش زیر انجام می‌دهیم.

روش ۲.۳.۳. ورودی: دستگاه به فرم (۲۹.۳) که ماتریس‌های E_1 و $\begin{bmatrix} \widetilde{A}_2 \\ \Delta_{-\tau}\widetilde{B}_2 \end{bmatrix}$ رتبه سطری کامل دارند و زوج $(\widetilde{B}_2, \widetilde{B}_3)$ هیچ افزونگی پنهانی ندارند.

گام۱: سطر سوم دستگاه (۲۹.۳) را با استفاده از عملگر $\Delta_{-\tau}$ تغییر می‌دهیم،

$$\underbrace{\begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\widetilde{E}} \dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 \\ \widetilde{A}_2 \\ \Delta_{-\tau}\widetilde{B}_3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\widetilde{A}} x + \underbrace{\begin{bmatrix} B_1 \\ \widetilde{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\widetilde{B}} \Delta_\tau x + \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ \tilde{f}_2 \\ \Delta_{-\tau}\tilde{f}_3 \\ \tilde{f}_4 \end{bmatrix}}_{\tilde{f}} \tag{۳۰.۳}$$

که در آن ماتریس‌های E_1 و $\begin{bmatrix} \widetilde{A}_2 \\ \Delta_{-\tau}\widetilde{B}_3 \end{bmatrix}$ رتبه سطری کامل دارند.

گام ۲: تعریف می‌کنیم $\tilde{g} := \widetilde{B}\Delta_{-\tau}x + \tilde{f}$ و دستگاه (۳۰.۳) را به صورت زیر باز نویسی می‌کنیم:

$$\widetilde{E}\dot{x} = \widetilde{A}x + \widetilde{g} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} E_1 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\dot{x} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \hline \widetilde{A}_2 \\ \Delta_{-\tau}\widetilde{B}_3 \\ 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} \tilde{g}_1 \\ \hline \tilde{g}_2 \\ \Delta_{-\tau}\tilde{f}_3 \\ \tilde{f}_4 \end{bmatrix} \tag{۳۱.۳}$$

گام۳: روش (۱.۲.۳) را برای حذف افزونگی‌های پنهان زوج $(\widetilde{E}, \widetilde{A})$ در دستگاه (۳۱.۳) اعمال می‌کنیم.

گام۴: با تغییر به حالت قبل، معادله

$$0 = \Delta_{-\tau}\widetilde{B}_3x + \Delta_{-\tau}\tilde{f}_3 \tag{۳۲.۳}$$

در دستگاه به دست آمده در گام ۳، دستگاه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\dot{x} = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 \\ \hat{A}_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} \hat{B}_{0,1} \\ \hat{B}_{0,2} \\ \widetilde{B}_3 \\ \hat{B}_{3,0} \\ 0 \end{bmatrix}\Delta_{\tau}x + \sum_{i=1}^{\mu}\begin{bmatrix} 0 \\ \hat{B}_{i,2} \\ 0 \\ \hat{B}_{i,3} \\ 0 \end{bmatrix}\Delta_{\tau}x^{(i)} + \begin{bmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \\ \hat{f}_3 \\ \tilde{f}_4 \end{bmatrix} \tag{۳۳.۳}$$

که ماتریس $\begin{bmatrix} \hat{E}_1^T & \hat{A}_2^T & \Delta_{-\tau}\widetilde{B}_3^T \end{bmatrix}^T$ دارای رتبه سطری کامل است.

پایان.

با توجه به مشاهدات انجام شده در مثال (۱.۳.۳)، ابتدا روش (۱.۳.۳) و سپس روش (۲.۳.۳) را برای دستگاه (۱.۳) اعمال می‌کنیم.

لم ۱.۳.۳. اگر روند روش (۱.۳.۳) و روند روش (۲.۳.۳) را برای دستگاه (۱.۳) در نظر بگیرید آن‌گاه دستگاه (۱.۳) همان مجموعه جواب دستگاه (۳۳.۳) را دارد.

برهان. ابتدا با اعمال روش (۱.۳.۳) برای معادله (۱.۳) دستگاه (۲۹.۳) که ماتریس‌های E_1 و $\begin{bmatrix} \widetilde{A}_2 \\ \Delta_{-\tau}\widetilde{B}_3 \end{bmatrix}$ نقطه به نقطه رتبه کامل سطری دارند و زوج $(\widetilde{B}_2, \widetilde{B}_3)$ هیچ افزونگی پنهانی ندارند را نتیجه می‌دهد. با معرفی ناهمگونی جدید $\tilde{g}$ در گام ۲ روش (۲.۳.۳) دستگاه (۳۰.۳) را می‌توان به صورت دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری (۳۱.۳) باز نویسی کرد.

گام۳ روش (۲.۳.۳) را با استفاده از روش (۱.۲.۳) برای دستگاه (۳۱.۳) به کار می‌بریم. در این گام فقط معادله سطری اول تغییر می‌کند و سه معادله سطری آخر ثابت می‌ماند،

$$\begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\dot{x} = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 \\ \breve{A}_2 \\ 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} \tilde{g}_{11} \\ \tilde{g}_{21} \\ \tilde{g}_{31} \end{bmatrix} \tag{۳۴.۳}$$

که $\left[\hat{E}_1^T \quad \breve{A}_2^T \quad \widetilde{A}_2^T \quad \Delta_{-\tau}\widetilde{B}_3^T\right]^T$ نقطه به نقطه رتبه سطری کامل دارد. فرض کنید μ اندیس غرابت دستگاه (۳۱.۳) باشد، آن‌گاه قضیه (۱.۲.۳) نتیجه می‌دهد که $\tilde{g}_{11}$، $\tilde{g}_{21}$ و $\tilde{g}_{31}$ توابع $\tilde{g}, \dot{\tilde{g}}, \ldots, \tilde{g}^{(\mu)}$ هستند. به طور دقیق‌تر با باز نویسی $\tilde{g}$ توسط $\widetilde{B}\Delta_\tau x + \tilde{f}$ دستگاه (۳۴.۳) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 \\ \hat{H}_2 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \hat{B}_{0,1} \\ \hat{G}_{0,2} \\ \hat{B}_{3,0} \end{bmatrix} \Delta_\tau x + \sum_{i=1}^{\mu} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{G}_{i,2} \\ \hat{B}_{i,3} \end{bmatrix} \Delta_\tau x^{(i)} + \begin{bmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{h}_2 \\ \hat{f}_3 \end{bmatrix} \tag{۳۵.۳}$$

با ترکیب کردن دستگاه (۳۵.۳) با سه بلوک سطری معادلات دستگاه (۳۱.۳) قرار می‌دهیم:

$$\hat{A}_2 := \begin{bmatrix} \hat{H}_2 \\ \widetilde{A}_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{f}_2 := \begin{bmatrix} \hat{h}_2 \\ \tilde{f}_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_{0,2} := \begin{bmatrix} \hat{G}_{0,2} \\ \widetilde{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_{i,2} := \begin{bmatrix} \hat{G}_{i,2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i \geqslant 1 \quad \text{برای تمام}$$

با تغییر بلوک سطری معادله سوم به قبل دستگاه (۳۱.۳) دستگاه (۳۳.۳) به دست می‌آید. □

تذکر: توجه داشته باشید که برای گام آخر روش (۲.۳.۳) به دلایل زیر باید بلوک سطری معادله (۳۵.۳) تغییر به قبل را انجام دهیم.

۱. ابتدا ممکن است لازم باشد که روش (۱.۳.۳) را ادامه دهیم بنابراین باید تا حد امکان معادلات تفاضلی شامل $\Delta_\tau x$ را حذف کنیم.

۲. معادله (۳۵.۳) هیچ اطلاعاتی در مورد شرایط سازگاری تابع اولیه ϕ نمی‌دهد، که این اطلاعات به درستی از معادله

$$0 = \widetilde{B}_3\Delta_\tau x + \tilde{f}_3$$

به دست می‌آید.

مجموعه های زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\mathbb{M}_0 := \{x : \mathbb{I}_\tau \to \mathbb{C}^n | \widetilde{B}_3\Delta_\tau x + \tilde{f}_3 = 0, t \in \mathbb{I}\} \tag{آ۳۶.۳}$$

$$\widetilde{\mathbb{M}}_0 := \{x \in \mathbb{M}_0 | \sum_{i=0}^{\mu} \hat{B}_{i,3}\Delta_\tau x^{(i)} + \hat{f}_3 = 0, t \in \mathbb{I}\} \tag{ب۳۶.۳}$$

$\mathbb{M}_0$ مجموعه محدودیت‌های Δ_τ قبل از اعمال روش (۲.۳.۳) و $\widetilde{\mathbb{M}}_0$ مجموعه محدودیت‌ها بعد از اعمال روش را نشان می‌دهد و به این ترتیب $\widetilde{\mathbb{M}}_0$ زیر مجموعه $\mathbb{M}_0$ است.
یک مورد خاص از دستگاه (۳۳.۳) را که $\mathbb{M}_0 = \widetilde{\mathbb{M}}_0$ در نظر بگیرید یعنی چهار بلوک سطری به سه بلوک سطری کاهش پیدا می‌کند.

قضیه ۱.۳.۳. معادله (۱.۳) و فرم منظم (۳۳.۳) و مجموعه‌های $\mathbb{M}_\circ$، $\tilde{\mathbb{M}}_\circ$ تعریف شده در (۳۶.۳) را در نظر بگیرید، همچنین فرض کنید $\mathbb{M}_\circ = \tilde{\mathbb{M}}_\circ$ باشد آن‌گاه دستگاه (۳۳.۳) و در نتیجه دستگاه(۱.۳) دارای مجموعه جواب دستگاه زیر است:

$$\begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 \\ \hat{A}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \hat{B}_{0,1} \\ \hat{B}_{0,2} \\ \tilde{B}_3 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_\tau x + \sum_{i=1}^{\mu} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{B}_{i,2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta_\tau x^{(i)} + \begin{bmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \\ \tilde{f}_3 \\ \tilde{f}_4 \end{bmatrix} \tag{۳۷.۳}$$

که در این حالت $\begin{bmatrix} \hat{E}_1^T & \hat{A}_2^T & \Delta_{-\tau}\tilde{B}_3^T \end{bmatrix}^T$ نقطه به نقطه رتبه سطری کامل دارد.

برهان. از آن‌جای که $\mathbb{M}_\circ = \tilde{\mathbb{M}}_\circ$ هر تابع $x : \mathbb{I}_\tau \to \mathbb{C}^n$ که در معادله سوم دستگاه (۳۳.۳) صدق می‌کند به طور خود به خود در معادله چهارم نیز صدق می‌کند. بنابراین می‌توان معادله چهارم دستگاه (۳۳.۳) را حذف کرد و به دستگاه (۳۷.۳) رسید. □

دو نتیجه مهم از قضیه (۱.۳.۳) را که خواص ساختاری دستگاه (۱.۳) را مشخص می‌کند، بیان می‌کنیم.

نتیجه ۱.۳.۳. ۱. دستگاه (۱.۳) حل پذیر است اگر و تنها اگر در دستگاه (۳۳.۳) $\tilde{f}_4 = 0$ باشد.

۲. دستگاه (۱.۳) منظم است اگر و تنها اگر علاوه بر حل پذیر بودن، ماتریس زیر مربعی باشد

$$\begin{bmatrix} \hat{E}_1^T & \hat{A}_2^T & \Delta_{-\tau}\tilde{B}_3^T \end{bmatrix}^T.$$

۳. فرض کنید تابع اولیه ϕ، μ-بار روی فاصله زمانی $[-\tau, 0]$ پیوسته و مشتق پذیر باشد. آن‌گاه سازگار است اگر و تنها اگر

$$\hat{A}_2(0)\phi(0) + \sum_{i=0}^{\mu} \hat{B}_{i,2}(0)\phi^{(i)}(-\tau) + \hat{f}_2(0) = 0,$$

$$\Delta_{-\tau}\tilde{B}_3\phi + \Delta_{-\tau}\tilde{f}_3 = 0, \quad t \in [-\tau, 0].$$

نتیجه بعدی شرایط همواری تابع اولیه ϕ و ناهمگونی تابع f برای این که یک جواب وجود داشته باشد را بیان می‌کند که به راحتی از فرم (۳۷.۳) به دست می‌آید.

نتیجه ۲.۳.۳. معادله (۱.۳) و فرم منظم (۳۳.۳) و مجموعه‌های $\mathbb{M}_\circ$، $\tilde{\mathbb{M}}_\circ$ تعریف شده در (۳۶.۳) که بر هم منطبق هستند را در نظر بگیرید. آن‌گاه شرایط زیر بر قراراند:

۱. فرض کنید $\tilde{\mu}$ بزرگ ترین عدد برای اندیس i و $1 \le i \le \mu$ که $\hat{B}_{i,2}$ مخالف صفر باشد. آن‌گاه برای هر $k \in \mathbb{N}_\circ$، تابع $x|_{[k\tau,(k+1)\tau]}$ پیوسته است و تابع $x|_{[(k-1)\tau,k\tau]}$ باید $\tilde{\mu}$-بار پیوسته و مشتق پذیر باشد.

۲. برای این که جواب x وجود داشته باشد، حداقل باید در فاصله زمانی $[-\tau, k\tau]$ پیوسته باشد و تابع اولیه ϕ، $k \cdot \tilde{\mu}$ بار پیوسته و مشتق پذیر باشد.

۳. فرض کنید تابع اولیه ϕ به اندازه کافی هموار باشد آن‌گاه به منظور تضمین این که x در هر نقطه $t \in \mathbb{I}$ پیوسته است ناهمگونی f باید μ بار پیوسته و مشتق پذیر باشد.

قضیه (۱.۳.۳) و نتیجه‌های (۱.۳.۳) و (۲.۳.۳) فقط برای ساختار خاص دستگاه (۱.۳) زمانی که $\mathbb{M}_\circ = \tilde{\mathbb{M}}_\circ$ بیان شده‌اند. یعنی زمانی که $\mathbb{M}_\circ \subsetneq \tilde{\mathbb{M}}_\circ$ ممکن است دستگاه‌های با مرتبه بالا به وجود آید که برای تبدیل آنها به فرم (۳۳.۳) باید تغییر متغیر انجام داد. برای آشنایی بیشتر به [۲۳] مراجعه کنید.

مثال ۲.۳.۳. معادله دیفرانسیل جبری تاخیری خطی زیر را در بازه $t \in [\circ, \infty)$ در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & t \\ \circ & \circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_۱(t) \\ \dot{x}_۲(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ & ۱ \\ ۱ & t-۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱(t-۱) \\ x_۲(t-۱) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^t + ۱ \\ -e^{t-۱} - (t-۱)^۲ \end{bmatrix} \tag{۳۸.۳}$$

با اعمال روش‌های (۱.۳.۳)ـ(۲.۳.۳) داریم

$$\mathbb{M}_\circ = \tilde{\mathbb{M}}_\circ = \{x : [-۱, \infty) \to \mathbb{C}^۲ | x_۱(t-۱) + (t-۱)x_۲(t-۱) - e^{t-۱} - (t-۱)^۲ = \circ\},$$

اگر معادله دوم را به علاوه یک کنیم و از آن مشتق بگیریم، در این صورت داریم

$$\begin{bmatrix} \circ \\ \circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ & ۱ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱(t) \\ x_۲(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \circ & ۱ \\ ۱ & t-۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱(t-۱) \\ x_۲(t-۱) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ - ۲t \\ -e^{t-۱} - (t-۱)^۲ \end{bmatrix} \tag{۳۹.۳}$$

حال معادله دوم (۳۹.۳) را به علاوه یک می‌کنیم، در این صورت به فرم منظم زیر می‌رسیم

$$\begin{bmatrix} \circ \\ \circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ & ۱ \\ ۱ & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱(t) \\ x_۲(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \circ & ۱ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_۱(t-۱) \\ x_۲(t-۱) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ - ۲t \\ -e^t - t^۲ \end{bmatrix}.$$

فصل ۴

حل عددی و تحلیلی معادلات دیفرانسیل جبری خطی تأخیری با ضرایب متغیر

۱.۴ مقدمه

در این فصل، حل عددی و تحلیلی معادلات دیفرانسیل جبری خطی تأخیری با ضرایب متغیر و یک تأخیر ثابت $\tau \geq \circ$ در فاصله زمانی $\mathbb{I} = [\circ, t_f)$، به فرم زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$E(t)\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-\tau) + f(t) \tag{۱.۴}$$

که در آن $x : \mathbb{I}_\tau := [-\tau, t_f) \to \mathbb{C}^n$ و ضرایب آن توابع ماتریسی $E, A, B : \mathbb{I} \to \mathbb{C}^{m\times n}$ و $f : \mathbb{I} \to \mathbb{C}^m$ است.

برای رسیدن به جواب منحصر به فرد معادله (۱.۴) توابع اولیه به فرم

$$x|_{[-\tau,\circ]} = \phi \qquad \text{به طوری که} \qquad \phi : [-\tau, \circ] \to \mathbb{C}^n \tag{۲.۴}$$

را تعریف می‌کنیم. برای سادگی $t_f = l\tau$ را در نظر می‌گیریم، بنابراین برای هر عدد صحیح $l \in \mathbb{N}$ فاصله زمانی $\mathbb{I} = [\circ, l\tau)$ را داریم، اگر $l = \infty$ باشد دراین صورت $\mathbb{I} = [\circ, \infty)$ است.

بیشتر نتایج این فصل را می‌توان برای چند تأخیری به کار برد ولی در این فصل فقط تک تأخیری را مورد بررسی قرار می‌دهیم.
معادله (۱.۴) شکل خطی معادله $F(t, \dot{x}(t), x(t), x(t-\tau)) = 0$ می‌باشد [۱۲]. معادله (۱.۴) شامل دو زیر مجموعه مهم، معادلات دیفرانسیل جبری با $B \equiv 0$ و معادلات دیفرانسیل تأخیری[1] (DDE) که $m = n$ و E یک ماتریس همانی است، می‌باشد.
یک روش که معمولاً برای حل عددی و تحلیلی معادلات دیفرانسیل جبری خطی تأخیری و معادلات تأخیری ارائه می‌شود، معرفی یک ناهمگونی $g(t) = B(t)x(t-\tau) + f(t)$ و درنظر گرفتن معادله دیفرانسیل جبری متناظر زیر برای تمام $t \in \mathbb{I}$ به جای معادله (۱.۴) است،

$$E(t)\dot{x}(t) = A(t)x(t) + g(t) \tag{۳.۴}$$

اگر معادله متناظر (۳.۴) برای تمام ناهمگونی‌های هموار g و بردارهای اولیه سازگار، به طور منحصر به فرد حل‌پذیر باشد در این صورت جواب معادله (۱.۴) با تابع اولیه (۲.۴) را می‌توان منحصر به فرد و گام به گام[2] با حل دنباله‌ای از معادلات دیفرانسیل جبری روی فاصله‌های متوالی $[i\tau, (i+1)\tau]$ به دست آورد. این روش رایج‌ترین روش برای محاسبه جواب دستگاه‌های تأخیری است که به روش گام‌ها یا روش بلمن (Bellman) معروف است [۳، ۶، ۱۰، ۱۱، ۲۰، ۴۰، ۴۵]. در بخش‌های بعدی این روش را که به علت وابستگی جواب به زمان حال و گذشته فقط برای سیستم‌های علتی کاربرد دارد بیان می‌کنیم.
در حالت کلی مسائل مقدار اولیه متناظر معادلات غیر علتی DDAE ممکن است زمانی که مسائل DAE متناظر نه مربعی و نه منحصر به فرد حل پذیر باشد اما همان معادله DDAE منحصر به فرد حل پذیر باشد در این صورت روش گام‌ها برای حل این نوع معادلات کاربردی ندارد. چنین سیستم‌های غیر مربعی در بسیاری از برنامه‌های کاربردی، به ویژه برای سیستم‌های دینامیکی به طور خودکار از طریق مدل سازی و نرم افزار شبیه سازی [۱، ۱۸، ۳۴، ۴۳]. به علت شرایط و معادلات اضافی منجر به ساخت یک دستگاه فرامعین یا فرو معین می‌شود.
علی‌رغم این حقیقت که روش‌های عددی زیادی برای DAE مورد مطالعه قرار گرفته [۹، ۳۱] و روش‌های عددی بسیاری نیز برای DDE به کار برده شده است [۵، ۲۴]. روش‌های عددی کمی برای DDAE استفاده شده است [۳، ۴، ۲۰، ۴۰، ۴۵]. به طور خاص روش‌های عددی زیادی برای دستگاه فرامعین و فرو معین DDAE تاکنون مورد مطالعه قرار نگرفته است.
برای معادله (۳.۴) متناظر با (۱.۴) غالباً از مفهوم جواب کلاسیک استفاده می‌شود، به این معنا که توابع پیوسته و مشتق‌پذیر $x : \mathbb{I} \to \mathbb{C}^n$ وجود دارند به طوری که معادله (۳.۴) را نقطه به نقطه برآورد می‌کنند [۳۱، ۹]. با این حال در معادلات دیفرانسیل جبری خطی تأخیری که چرا $E(0)\dot{x}(0)$ در (۱.۴) باید مساوی با $E(0)\dot{\phi}(0^-)$ باشد، دلیل خاصی وجود ندارد. [۴، ۱۰، ۲۰].
علاوه بر این ناپیوستگی $\dot{x}$ در $t = 0$ ممکن است با زمان گسترش یابد، معمولا این ناپیوستگی

[1] delay differential equation

[2] step-by-step

$\dot{x}$ در هر نقطه $j\tau$ قرار دارد. برای رفع این مشکلات از مفاهیم تعاریف زیر استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۴. ۱. تابع $x:\mathbb{I}_\tau \to \mathbb{C}^n$ یک جواب قطعه وار مشتق‌پذیر (۱.۴) نامیده می‌شود، اگر پیوسته، قطعه وار مشتق‌پذیر پیوسته و تقریباً همه جا در (۱.۴) صدق کند.

۲. تابع اولیه ϕ سازگار نامیده می‌شود، اگر مسائل مقدار اولیه (۲.۴)ـ(۱.۴) حداقل یک جواب قطعه وار مشتق پذیر داشته باشد.

۳. معادله دیفرانسیل جبری خطی تأخیری (۱.۴) حل‌پذیر نامیده می‌شود، اگر حداقل یک جواب قطعه وار مشتق‌پذیر داشته باشد، همچنین منظم نامیده می‌شود، اگر علاوه بر این برای هر تابع اولیه سازگار، جواب مسائل مقدار اولیه (۲.۴)ـ(۱.۴) منحصر به فرد باشد.

تعریف ۲.۱.۴. معادله (۱.۴) را در نظر بگیرید، معادله به فرم زیر را

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_{\mu,1} & \hat{A}_{\mu-1,1} & \cdots & \hat{A}_{0,1} \\ & \hat{A}_{\mu-1,2} & \cdots & \hat{A}_{0,2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \hat{A}_{0\,\mu+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(\mu)}(t) \\ x^{(\mu-1)}(t) \\ \vdots \\ x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{B}_{\eta,1} & \hat{B}_{\eta-1,1} & \cdots & \hat{B}_{0,1} \\ \hat{B}_{\eta,2} & \hat{B}_{\eta-1,2} & \cdots & \hat{B}_{0,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{B}_{\eta,\mu+1} & \hat{B}_{\eta-1,\mu+1} & \cdots & \hat{B}_{0,\mu+1} \\ \hat{B}_{\eta,\mu+2} & \hat{B}_{\eta-1,\mu+2} & \cdots & \hat{B}_{0,\mu+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(\eta)}(t-\tau) \\ x^{(\eta-1)}(t-\tau) \\ \vdots \\ x(t-\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \\ \vdots \\ \hat{f}_{\mu+1} \\ \hat{f}_{\mu+2} \end{bmatrix} \tag{۴.۴}$$

برای تمام $t\in\mathbb{I}$ با $\mu,\eta\in\mathbb{N}_0$ که در آن ماتریس تابع مقدار[۳] $\begin{bmatrix} \hat{A}^T_{\mu,1} & \hat{A}^T_{\mu-1,2} & \cdots & \hat{A}^T_{0,\mu+1} \end{bmatrix}^T$ دارای رتبه سطری کامل است، فرمول غرابت آزاد معادله (۱.۴) می‌نامند اگر شرایط زیر برقرار باشد

۱. برای هر $t\in\mathbb{I}$، تمام محدودیت‌های پنهان و آشکار $x(t)$ در (۱.۴) در معادله (۴.۴) نیز موجود باشد.

۲. برای هر تابع اولیه سازگار ϕ، به طوری که اگر مسائل مقدار اولیه (۲.۴)ـ(۱.۴) دارای جواب منحصر به فرد x باشد، تابع x نیز جواب منحصر به فرد مسائل مقدار اولیه دستگاه ساخته شده (۴.۴) و تابع اولیه $x|_{[-\tau,0]}=\phi$ باشد.

در ادامه مفهوم این تعریف را با دو مثال زیر برای شرح می‌دهیم.

[3] matrix-valued

مثال ۱.۱.۴. مسائل مقدار اولیه (۲.۴)ـ(۱.۴)DDAE زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t-\tau) \\ x_2(t-\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \quad t \in \mathbb{I} = [0, \infty) \tag{5.4}$$

اگر از معادله دوم مشتق بگیریم و با معادله اول جمع کنیم داریم:

$$0 = \dot{x}_1(t-\tau) + f_1(t) + \dot{f}_2(t),$$

با تغییر این معادله با τ داریم $\dot{x}_1(t) = -f_1(t+\tau) - \dot{f}_2(t+\tau)$ با ترکیب این معادله و معادله دوم (۵.۴) دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t-\tau) \\ x_2(t-\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -f_1(t+\tau) - \dot{f}_2(t+\tau) \\ f_2(t) \end{bmatrix},$$

باتوجه به تعریف (۴.۴) می‌توان بررسی کرد که دستگاه بالا فرمول غرابت آزاد معادله (۵.۴) است.

تذکر: لازم به ذکر است هنگام تشکیل فرمول غرابت آزاد برای معادله مرتبه اول (۱.۲)، یک معادله مرتبه اول DAE نیز است. ممکن است این انتظار را داشته باشید که فرمول غرابت آزاد (۱.۴) مرتبه اول باشد یعنی $\mu = 1$ و $\eta = 1$، که این درست نیست. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۲.۱.۴. دستگاه زیر را روی فاصله زمانی $t \in [0, \infty)$ در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t-\tau) \\ x_2(t-\tau) \\ x_3(t-\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ -1 - e^{t-1} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

برای تعیین تمام محدودیت‌های پنهان متغییر حالت $x(t)$ در معادله (۶.۴)، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱. اگر از معادله سطر دوم (۶.۴) مشتق گیری کنیم، در این صورت مقدار $\dot{x}_3(t)$ به دست می‌آید و با جایگذاری در معادله سطر اول (۶.۴) محدودیت جبری زیر برای $x_2(t)$ به دست می‌آید.

$$0 = x_2(t) + \dot{x}_1(t-1) - t - e^{t-1} \tag{7.4}$$

۲. از معادله (۷.۴) مشتق می‌گیریم و در معادله سطر سوم (۶.۴) جایگذاری می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$0 = \ddot{x}_1(t-1) - e^{t-1} \tag{8.4}$$

این معادله شرط سازگاری تابع اولیه ϕ است که $t \in [0, 1]$ را می‌دهد. بنابراین اگر معادله (۸.۴) با استفاده از عملگر پیشرو ۱، معادله دیفرانسیل پنهان مرتبه دوم را به دست می‌آوریم.

$$\ddot{x}_1(t-1) - e^{t-1} = 0 \Rightarrow \ddot{x}_1(t) - e^t = 0 \Rightarrow \ddot{x}_1(t) = e^t,$$

معادله (۶.۴) مجموع جواب دستگاه زیر را دارد:

$$-\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t-1) \\ x_2(t-1) \\ x_3(t-1) \end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t-1) \\ \dot{x}_2(t-1) \\ \dot{x}_3(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t-e^{t-1} \\ -1-e^{t-1} \\ -e^{t} \end{bmatrix},$$

از آن‌جایی که تبدیل‌ها انجام شده برگشت پذیر هستند (اگر توابع اولیه سازگار باشند) مشاهده می‌کنیم طبق تعریف غرابت آزاد معادله بالا فرمول غرابت آزاد، معادله اصلی با $\mu = 2$ و $\eta = 1$ است.

پس از تعریف مفهوم جواب، اکنون DDAEها را طبقه بندی می‌کنیم.

تعریف ۳.۱.۴. معادله (۱.۴)

۱. تأخیری نامیده می‌شود اگر همه محدودیت‌های اسکالر (۱.۴) (شامل محدودیت‌های پنهان) به فرم زیر باشند:

$$\sum_{\beta=0}^{K_+} a_\beta(t)x^{(\beta)}(t) = \sum_{\alpha=0}^{K_-} b_\alpha(t)x^{(\alpha)}(t-\tau) + \gamma(t) \tag{۹.۴}$$

که در آن $a_{K_+} \not\equiv 0$، $b_{K_-} \not\equiv 0$ و $K_+ > K_-$ است.

۲. خنثی نامیده می‌شود اگر تمام محدودیت‌های اسکالر (۱.۴) از فرم (۹.۴) با $K_+ \geq K_-$ و در بین آن‌ها یک تساوی وجود داشته باشد.

۳. پیشرفته نامیده می‌شود اگر حداقل یک محدودیت از معادله (۱.۴) از فرم (۹.۴) به صورت $K_+ < K_-$ باشد.

مثال ۳.۱.۴ DDAE زیر با اسکالرهای b و d را درنظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t-\tau) \\ x_2(t-\tau) \end{bmatrix} \tag{۱۰.۴}$$

با مشتق‌گیری از معادله دوم (۱۰.۴) و جایگذاری در $\dot{x}_2(t)$ معادله اول، دستگاه زیر را به دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t-\tau) \\ x_2(t-\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t-\tau) \\ \dot{x}_2(t-\tau) \end{bmatrix},$$

اگر d مخالف صفر باشد آن‌گاه معادله (۱۰.۴) از نوع پیشرفته است. از طرفی اگر $d = 0$ و $b \neq 0$ آن‌گاه معادله (۱۰.۴) از نوع خنثی است. اگر $b = d = 0$ باشد در این صورت معادله (۱۰.۴) از نوع تأخیری است.

در ادامه، هر جا از یک جواب معادله صحبت می‌کنیم، منظور یک جواب قطعه وار مشتق‌پذیر است و هم‌چنین زمانی که از یک جواب عددی معادله (۱.۴) صحبت می‌کنیم، فرض می‌کنیم مسائل مقدار اولیه (۲.۴)ـ(۱.۴) منظم است. توجه کنید برای معادلات دیفرانسیل جبری، اگر ضرایب دستگاه به اندازه کافی هموار باشند در این صورت جواب قطعه وار مشتق‌پذیر معادلات دیفرانسیل جبری دقیقا همان جواب معادله (۳.۴) است.

دراین‌جا فضای k- بار قطعه وار پیوسته و مشتق‌پذیر از توابع $\mathbb{I}$ به $\mathbb{C}^n$ را توسط $\mathcal{C}_p^k(\mathbb{I}, \mathbb{C}^n)$ نمایش می‌دهیم. همچنین برخی از نتایج معادلات دیفرانسیل جبری (۳.۴) را که در بخش‌های دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرد را یاد آوری می‌کنیم. واضح است که جواب معادله (۳.۴) ممکن است به مشتقات ناهمگونی g و محدودیت‌های پنهان برای ناهمگونی g و مشتقات آن‌ها بستگی داشته باشد.

از آن‌جای که برای به کار بردن روش‌های عددی به مشتقات نیاز است، در این‌جا نیز از مشتق آرایه‌ای که در فصل‌های قبل بیان شد، استفاده می‌کنیم. از معادله (۳.۴) به اندازه k-بار مشتق می‌گیریم، دراین صورت معادله متورم DAE، تحت فرض‌های همواری و رتبه ثابت بودن به صورت زیر به دست می‌آید: [۳۱]

$$\begin{aligned} E(t)\dot{x}(t) - A(t)x(t) + g(t) &= 0 \\ &\vdots \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^k \left(E(t)\dot{x}(t) - A(t)x(t) + g(t)\right) &= 0 \end{aligned} \tag{۱۱.۴}$$

کمترین تعداد مشتق گیری لازم برای رسیدن به فرم مشتق آرایه‌ای زیر، غرابت آزاد DAE با اندیس غرابت μ نامیده می‌شود.

$$\begin{bmatrix} \hat{E}_1(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \hat{A}_1(t) \\ \hat{A}_2(t) \\ 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \hat{g}_1 \\ \hat{g}_2 \\ \hat{g}_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} d \\ a \\ v \end{matrix} \tag{۱۲.۴}$$

که در آن ماتریس $[\hat{E}_1^T \quad \hat{A}_2^T]^T$ نقطه به نقطه رتبه سطری کامل است و μ اندیس غرابت معادله دیفرانسیل جبری (۳.۴) و زوج توابع ماتریسی (E, A) است.

در ادامه برای راحتی اندیس غرابت v_s را با μ نشان می‌دهیم.

در این صورت d، a، v اندازه بلوک‌های معادلات سطری غرابت آزاد دستگاه (۱۲.۴) هستند. همان‌طور که در فصل‌های قبل بیان کردیم، روش تبدیل دستگاه (۳.۴) به دستگاه غرابت آزاد (۱۲.۴)، فرمول‌بندی غرابت آزاد نامیده می‌شود.

مقادیر μ، d، a، v و $u := n-d-a$ مقادیر مشخصه معادله (۳.۴) نامیده می‌شوند و u تعداد متغییرهای فرو معین را نشان می‌دهد. همچنین توجه داریم که ساختار غرابت آزاد (۱۲.۴) از مشتق آرایه‌ای (۱۱.۴)، برای $k=\mu$ به دست آمده است، این غرابت آزاد نشان می‌دهد که اگر $\hat{g}_3 \equiv 0$ باشد معادله (۳.۴) حل پذیر است و همچنین تمام محدودیت‌های جبری از معادله $\hat{A}_2 x + \hat{g}_2 = 0$ به دست می‌آید و شرایط سازگاری را مشخص می‌کند که بردار x_0 باید در آن صدق کند.

اگر $\hat{g}_3 \neq 0$ یا $\hat{A}_2(0)x_0 + \hat{g}_2(0) \neq 0$ باشد در این صورت برای منظم کردن دستگاه باید آخرین بلوک را حذف کنیم یا با جایگذاری $\hat{g}_3 = 0$ معادله را حل‌پذیر کنیم. بعد از منظم سازی معادله غرابت آزاد منحصر به فرد حل‌پذیر است یعنی $d+a=n$ و در این صورت می توان DAE را با هر روش عددی دلخواه حل نمود. مهم‌تر از همه مشاهده می‌کنیم تمام محدودیت‌های جبری آشکار و پنهان برای حل عددی DAEها دقیقاً در بلوک سطری دوم معادله (۱۲.۴) قرار دارد. به طور کلی این محدودیت‌های جبری باید از مشتق آرایه‌ای (۱۱.۴) انتخاب شوند، در طرف مقابل معادلات دیفرانسیل در بلوک اول معادله (۱۲.۴) می‌تواند از معادله اصلی (۳.۴) انتخاب شود [۳۱].

اکنون برای درک اثر فرآیند منظم سازی برای DDAEها ، یک تابع پارامتر λ را به جای قسمت تأخیر می‌گذاریم و معادله (۳.۴) را برای تمام $t \in \mathbb{I}$ به صورت زیر

$$E(t)\dot{x}(t) = A(t)x(t) + T(t)\lambda(t) + f(t) \tag{۱۳.۴}$$

همراه با بردار اولیه

$$x(0) = x^0 \tag{۱۴.۴}$$

بازنویسی می‌کنیم. از این رو تابع $\lambda : \mathbb{I} \to \mathbb{C}^p$ و ضرایب توابع E، A، T، f با فرض اینکه به اندازه کافی مشتق پذیر باشند. با تغییر λ می‌توان تاثیر قسمت تأخیری را روی معادله (۱۳.۴) مشاهده کرد، همچنین تابع پارامتر λ سازگاراست اگر مسئله مقدار اولیه (۱۳.۴)ـ(۱۴.۴) حل‌پذیر باشد(لزوماً منحصر به فرد حل پذیر نیست). طبق نتیجه (۱.۲.۲) معادله DAE با پارامتر λ سازگار است اگر و تنها اگر در دو شرط زیر صدق کند.

۱. فقط شامل λ و f و مشتقات آن‌ها باشد ولی شامل x و هیچ یک از مشتقات آن نباشد.

۲. شرط همواری مربوط به تابع x، که اساس آن روی تعریف زیر است، نیز برقرار باشد.

تعریف ۴.۱.۴. معادله (۱۳.۴) تأخیری، خنثی یا پیشرفته نامیده می‌شود اگر کم‌ترین شرط همواری برای تابع پارامتر سازگار λ، به ترتیب $\lambda \in \mathcal{C}_p^0(\mathbb{I}, \mathbb{C}^p)$، $\lambda \in \mathcal{C}_p^1(\mathbb{I}, \mathbb{C}^p)$ یا برای $k \geq 2$، $\lambda \in \mathcal{C}_p^k(\mathbb{I}, \mathbb{C}^p)$ باشد.

این طبقه‌بندی یک نتیجه مستقیم از معادله (۱۲.۴) برای معادله (۱۳.۴) دارد.

لم ۴.۱.۱. فرض کنید تابع پارامتر وابسته (۴.۱۳) از نوع پیشرفته نباشد و μ اندیس غرابت برای زوج توابع (E, A)، معادله (۴.۱۳) خوش تعریف باشد. با در نظر گرفتن $T(t)\lambda(t) + f(t)$ به عنوان ناهمگونی و هم‌چنین با اعمال فرمول غرابت آزاد برای معادله (۴.۱۳)، دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \hat{E}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \hat{A}_1(t) \\ \hat{A}_2(t) \\ 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \hat{T}_1^0(t) \\ \hat{T}_2^0(t) \\ \hat{T}_3^0(t) \end{bmatrix} \lambda(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{T}_3^1(t) \end{bmatrix} \dot{\lambda}(t) + \begin{bmatrix} \hat{f}_1(t) \\ \hat{f}_2(t) \\ \hat{f}_3(t) \end{bmatrix},$$

که ماتریس $[\hat{E}_1^T \quad \hat{A}_2^T]^T$ نقطه به نقطه رتبه سطری کامل است . علاوه بر این اگر پارامتر (۴.۱۳) از نوع تأخیری باشد در این صورت $\hat{T}_2^0 = 0$ و $\hat{T}_3^1 = 0$.

برهان. با اعمال فرمول غرابت آزاد برای معادله (۴.۱۳) با فرض پیشرفته نبودن، تضمین می‌کند که تمام محدودیت‌های جبری معادله (۴.۱۳) همراه با ضرایب ماتریسی $\tilde{A}_2$، $\tilde{T}_2$، $\tilde{f}_2$ فرمی به صورت زیر دارد:

$$0 = \tilde{A}_2(t)x(t) + \tilde{T}_2(t)\lambda(t) + \tilde{f}_2(t),$$

چون $x(t)$ یک جواب مشتق‌پذیر از (۴.۱۳) است و λ فقط پیوسته است باید $\tilde{T}_2$ دقیقاً صفر باشد. از طرف دیگر تمام معادلات دیفرانسیل (۴.۱۳) با ضرایب ماتریسی $\tilde{E}_1$، $\tilde{A}_1$، $\tilde{T}_1$، $\tilde{f}_1$ فرم آن به صورت زیر است:

$$\tilde{E}_1(t)\dot{x}(t) = \tilde{A}_1 x(t) + \tilde{T}_1(t)\lambda(t) + \tilde{f}_1(t),$$

چون معادلات سازگار برای λ و برای ناهمگونی معادله (۴.۱۳) را فقط می‌توان به سه روش زیر به دست آورد.

۱. اضافه کردن یک معادله جبری به معادله جبری دیگر

۲. اضافه کردن یک معادله دیفرانسیل به یک معادله دیفرانسیل دیگر

۳. اضافه کردن مشتق برخی معادلات جبری به معادلات دیفرانسل دیگر

با توجه به این سه حالت شرط سازگاری برای ناهمگونی (۴.۱۳)، شامل هیچ یک از مشتقات λ از مرتبه یک بالا تر نیست ($\hat{T}_3^1 = 0$). □

۲.۴ حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل جبری تأخیری خطی

معادلات دیفرانسیل جبری تأخیری خواص خود را از زیر کلاس‌های خود به عنوان مثال از ساختار زوج توابع ماتریسی (E, A) معادله دیفرانسیل جبری و از طرف معادله دیفرانسیل تأخیری که نا پیوستگی را در زمان گسترش می‌دهد و شرایط همواری تابع اولیه به ارث می‌برد. با این حال DDAE می‌تواند با مشکلات بیشتری رو به رو باشد که این مشکلات در هیچ یک از DDE و DAEها اتفاق نمی‌افتد [۴، ۱۰، ۱۴، ۲۲، ۲۳]. یک دلیل مهم برای این مشکلات به علت پتانسیل غیر علتی، DDAE کلی است.

تعریف ۱.۲.۴. دستگاه زمان تأخیری، علتی نامیده می‌شود اگر برای تابع اولیه سازگار $x(t)$، جواب مسائل مقدار اولیه متناظر در زمان جاری t باشد و فقط به ناهمگونی تابع f در زمان حال و گذشته وابسته باشد، اما به زمان آینده وابسته نباشد.

توجه کنید، ممکن است هر دو DAE و DDE علتی باشند ولی DDAE همیشه علتی نباشد. به عنوان مثال برای تمام $t \in (0, \infty)$ معادله اسکالر

$$0 \cdot \dot{x}(t) = 0 \cdot x(t) + x(t-\tau) - f(t) \tag{۱۵.۴}$$

غیر علتی است، چون جواب منحصر به فرد $x(t)$ وابسته به f در زمان آینده است، یعنی

$$x(t) = f(t+\tau).$$

۱.۲.۴ معادلات دیفرانسیل جبری تأخیری علتی

بیشتر مطالعات قبلی روی DDAE برای دستگاه‌های مربعی است که معادله متناظر (۳.۴) منظم است. در ادامه نشان می‌دهیم، منظم بودن دستگاه مربعی DDAE هم‌ارز با علتی بودن است.

قضیه زیر، نتیجه به دست آمده از اعمال فرمول غرابت آزاد DAE متناظر برای DDAE علتی است.

قضیه ۱.۲.۴. معادله علتی (۱.۴) را در نظر بگیرید و فرض کنید μ اندیس غرابت برای زوج توابع (E, A) خوش تعریف باشد. در این صورت معادله (۱.۴) همان مجموعه جواب DDAE زیر را دارد.

$$\begin{bmatrix} \hat{E}_1(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \hat{A}_1(t) \\ \hat{A}_2(t) \\ 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \hat{B}_{0,1}(t) \\ \hat{B}_{0,2}(t) \\ 0 \end{bmatrix} x(t-\tau) + \sum_{i=1}^{\mu} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{B}_{i,2}(t) \\ 0 \end{bmatrix} x^{(i)}(t-\tau) + \begin{bmatrix} \hat{f}_1(t) \\ \hat{f}_2(t) \\ \hat{f}_3(t) \end{bmatrix} \begin{matrix} d \\ a \\ v \end{matrix} \tag{۱۶.۴}$$

که در آن $[\hat{E}_1^T \quad \hat{A}_2^T]^T$ نقطه به نقطه رتبه سطری کامل است. اندازه بلوک‌های سطری معادلات d ، a و v هستند، علاوه بر این برخی بلوک‌های سطری ممکن است وجود نداشته باشند.

برهان. با تغییر مجدد معادله (۱.۴)، با ناهمگونی $g(t) = B(t)x(t-\tau) + f(t)$ معادله متناظر (۳.۴) را به دست می‌آوریم، در این صورت با اعمال فرمول غرابت آزاد داریم:

$$\begin{bmatrix} \hat{E}_1(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \hat{A}_1(t) \\ \hat{A}_2(t) \\ 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \hat{B}_{0,1}(t) \\ \hat{B}_{0,2}(t) \\ \hat{B}_{0,3}(t) \end{bmatrix} x(t-\tau) + \sum_{i=1}^{\mu} \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{B}_{i,2}(t) \\ \hat{B}_{i,3}(t) \end{bmatrix} x^{(i)}(t-\tau) + \begin{bmatrix} \hat{f}_1(t) \\ \hat{f}_2(t) \\ \hat{f}_3(t) \end{bmatrix} \begin{matrix} d \\ a \\ v \end{matrix} \tag{۱۷.۴}$$

که در آن $[\hat{E}_1^T \quad \hat{A}_2^T]^T$ نقطه به نقطه رتبه سطری کامل است. با اضافه کردن τ به آخرین بلوک معادله سطری داریم:

$$0 = \sum_{i=0}^{\mu} \hat{B}_{i,3}(t+\tau)x^{(i)}(t) + \hat{f}_3(t+\tau),$$

از این رو بردار $x(t)$ به تابع f در زمان آینده $t+\tau$ بستگی دارد، به طوری که حداقل یک تابع غیر صفر $\hat{B}_{i,3}$ وجود داشته باشد. که این با علتی بودن معادله (۱.۴) تناقض دارد، بنابراین یا $v = 0$ یا آخرین بلوک معادله سطری، یعنی توابع $\hat{B}_{i,3}$ برای $i = 0, \ldots, \mu$ دقیقاً صفر هستند. □

نتیجه ۱.۲.۴. معادله (۱.۴) را در نظر بگیرید و فرض کنید تمام شرایط قضیه (۱.۲.۴) برقرار باشد، در این صورت دستگاه (۱۶.۴) خوش تعریف است، اگر شرایط زیر بر قرار باشد.

۱. معادله (۱.۴) حل پذیر است، اگر و تنها اگر برای تمام $t \geq 0$ ، یا $v = 0$ یا $\hat{f}_3(t) = 0$ باشد.

۲. تابع اولیه ϕ سازگار است، اگر و تنها اگر ϕ به اندازه کافی هموار باشد و در شرط سازگاری زیر صدق کند

$$0 = \hat{A}_2(0)\phi(0) + \sum_{i=0}^{\mu} \hat{B}_{i,2}(0)\phi^{(i)}(-\tau) + \hat{f}_2(0).$$

۳. معادله (۱.۴) منظم است اگر و تنها اگر $[\hat{E}_1^T \quad \hat{A}_2^T]^T$ نقطه به نقطه معکوس پذیر باشد، یعنی $d + a = n$ باشد.

لم بعدی رابطه‌ی بین معادله علتی DDAE و منظم بودن DAE متناظر را بیان می‌کند.

لم ۱.۲.۴. معادله مربعی (۱.۴) را در نظر بگیرید و فرض کنید اندیس غرابت برای زوج توابع ماتریسی (E, A) خوش تعریف باشد، دراین صورت (۱.۴) علتی است اگر و تنها اگر معادله متناظر (۳.۴) منظم باشد.

برهان. دستگاه (۱۷.۴) را درنظر بگیرید، با اعمال فرمول غرابت آزاد، معادله DAE متناظر به صورت

$$\begin{bmatrix} \hat{E}_1(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \hat{A}_1(t) \\ \hat{A}_2(t) \\ 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \hat{g}_1(t) \\ \hat{g}_2(t) \\ \hat{g}_3(t) \end{bmatrix} \begin{matrix} d \\ a \\ v \end{matrix},$$

چون معادله (۱.۴) مربعی است. علتی بودن (۱.۴) و منظم بودن معادله متناظر (۳.۴) معادل $d + a = n$ و $v = \circ$ است. □

توجه کنید که لم بالا برای معادله غیر مربعی (۱.۴) برقرار نیست، چون ممکن است v مخالف صفر باشد ولی جواب منحصر به فرد داشته باشد.

۲.۲.۴ روش گام‌ها

حل عددی مسائل مقدار اولیه برای DDAE فقط برای دستگاه‌های علتی و مربعی به کار برده شده است [۳، ۴، ۱۴، ۲۰، ۳۲، ۴۰، ۴۲، ۴۵، ۴۶]. برای چنین دستگاه‌های معمولاً از روش گام‌ها[4] که یک روش کلاسیک برای حل DDE است [۵، ۶، ۱۲، ۲۸]، استفاده می‌شود. ابتدا برای حل DDAEهای ، روش گام‌ها را بیان نموده و در بخش دیگر این روش را برای حل DDAE کلی تعمیم می‌دهیم.

برای هر $i \in \mathbb{N}$، دنباله‌ای از توابع ماتریسی و توابع برداری E_i، A_i، Bi وf_i، x_i در بازه زمانی $[\circ, \tau]$ با تعاریف زیر در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} &E_i(t) := E(t+(i-\text{۱})\tau), \quad A_i(t) := A(t+(i-\text{۱})\tau), \quad B_i(t) := B(t+(i-\text{۱})\tau), \\ &f_i(t) := f(t+(i-\text{۱})\tau), \quad x_i(t) := x(t+(i-\text{۱})\tau), \quad x_\circ(t) := \phi(t-\tau), \end{aligned} \tag{۱۸.۴}$$

مسائل مقدار اولیه (۲.۴)ـ(۱.۴) را به صورت دنباله‌ای از DAEها برای $t \in (\circ, \tau)$ و $i = \text{۱}, \dots, l$ به صورت زیر که l تعداد گام‌ها است که x_iها به صورت منحصر به فرد مشخص می‌شوند

$$E_i(t)\dot{x}_i(t) = A_i(t)x_i(t) + B_i(t)x_{i-\text{۱}}(t) + f_i(t) \tag{۱۹.۴}$$

همراه با شرایط اولیه زیر بازنویسی می‌کنیم

$$x_i(\circ) = x_{i-\text{۱}}(\tau) \tag{۲۰.۴}$$

در معادله (۱۹.۴) پارامتر x_i وابسته به پارامتر $x_{i-\text{۱}}$ است. ایده روش گام‌ها، محاسبه x_i با حل مسائل مقدار اولیه (۲۰.۴)ـ(۱۹.۴) به شرط این که $x_{i-\text{۱}}$ از قبل مشخص باشد، است. بنابراین جواب x مسائل مقدار اولیه (۲.۴)ـ(۱.۴) گام به گام برای هر $t \in [(i-\text{۱})\tau, i\tau]$ به صورت زیر به دست می‌آید

$$x(t) = x_i(t-(i-\text{۱})\tau),$$

بدیهی است، این روش مستلزم آن است که مسائل مقدار اولیه (۲۰.۴)ـ(۱۹.۴) دارای جواب منحصر به فرد x_i برای هر تابع به اندازه کافی هموار $B_i(t)x_{i-\text{۱}}(t) + f_i(t)$ و هر بردار اولیه سازگار $x_i(\circ)$ باشد. تحت این شرایط روش گام‌ها برای معادلات خطی DDAE از نوع (۱.۴) و چندین نوع از معادلات غیر خطی با موفقیت انجام می‌شود، اما اگر معادلات (۱.۴) غیر علتی

[4] method of steps

باشد، این روش شرایط حل پذیری منحصر به فرد را حفظ نمی‌کند و با شکست مواجه می‌شود بنابراین برای غیر علتی مناسب نیست.

به عنوان مثال اگر معادله اسکالر (۱۵.۴) را در نظر بگیریم، مسائل مقدار اولیه (۲۰.۴)ـ(۱۹.۴) چندین جواب دارد، حتی اگر مسائل مقدار اولیه (۲.۴)ـ(۱.۴) جواب منحصر به فرد داشته باشد. دلیل شکست روش گام ها این است که فقط معادله را در زمان فعلی در نظر می‌گیرد که برای DDAE کلی، غیر علتی کافی نیست. بنابراین اصلاح روش گام‌ها لازم است.

مثال ۱.۲.۴. DDAE زیر را برای تمام $t \in [0,\infty)$ در نظر بگیرید

$$0 \cdot \dot{x}(t) = 1 \cdot x(t) - 1 \cdot x(t-\tau),$$

طبق روش گام‌ها (۱۹.۴) برای $t \in (0,\infty)$ داریم $x_i(t) - x_{i-1}(t) = 0$، درنتیجه برای $i = 1$ داریم $x_1(t) = x_0(t)$ در این صورت شرط (۲۰.۴)، $\phi(0) = \phi(-\tau)$ را نتیجه می‌دهد.

برای توسعه روش حل معادلات کلی DDAE ، معمول‌ترین ایده آن است که روش گام‌ها را تعمیم دهیم.

۳.۲.۴ خواص مشخصه DDAE خطی کلی

در این بخش به خواص مشخصه DDAE خطی کلی می‌پردازیم، که به نتایج مهم برای حل هر دو روش تحلیلی و عددی مسائل مقدار اولیه منجر می‌شود.

حالت اول برای DDAE غیر علتی، برخی محدودیت‌های پنهان $x(t)$ ممکن است در نقاط زمانی $t+\tau, t+2\tau, \ldots$ باشند، بنابراین برای تعیین این محدودیت‌ها ممکن است از نقاط داده شده استفاده کنیم. برای درک بهتر این مطلب به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۲.۲.۴. DDAE زیر را برای تمام $t \in (0,\infty)$ و تابع اولیه $x(t) = \phi(t)$ برای $t \in [-\tau, 0]$ در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(t-\tau) + \begin{bmatrix} 1 \\ -t \end{bmatrix} \tag{۲۱.۴}$$

با توجه به هر $t \in (0,\tau)$ ثابت و قرار دادن $x(t-\tau) = \phi(t-\tau)$ در معادله (۲۱.۴)، یک دستگاه فرومعین حاصل می‌شود که نمی‌توان مؤلفه دوم $x(t)$ را منحصر به فرد تعیین کرد. در این صورت اگر در معادله (۲۱.۴) ، $t+\tau$ را به جای t قرار دهیم، دستگاه زیر به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t+\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -t-\tau \end{bmatrix} \tag{۲۲.۴}$$

این دستگاه شامل محدودیت جبری $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) - t - \tau = 0$ است. با کنار هم قرار دادن دو دستگاه معادله (۲۲.۴)ـ(۲۱.۴) می‌توان $x(t)$ را به طور منحصر به فرد به صورت زیر تعیین

کرد.

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) = 1, \\ \qquad 0 = x_1(t-\tau) + x_2(t-\tau) - t,\end{cases}$$

و

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t+\tau) = 1, \\ \qquad\qquad 0 = x_1(t) + x_2(t) - t - \tau,\end{cases}$$

معادله اول $x_1(t) = t + c$ که $c \in \mathbb{R}$ را نتیجه می‌دهد، با جایگذاری در محدودیت جبری معادله دوم $x_2(t)$ را به دست می آوریم.

$$0 = t + c + x_2(t) - t - \tau \Rightarrow x_2(t) = \tau - c,$$

پس با جایگذاری حداقل دو نقطه t و $t+\tau$ در معادله (۲۱.۴) مقدار $x(t)$ را منحصر به فرد تعیین کردیم.

به منظور تعیین وضعیت کنونی $x(t)$ می‌توان از دو عملگر زیر استفاده کرد.

۱. عملگر پیشرو $\Delta_{-\tau}$، معادله (۱.۴) را به معادله‌ی زیر می‌نگارد:

$$E(t+\tau)\dot{x}(t+\tau) = A(t+\tau)x(t+\tau)B(t+\tau)x(t) + f(t+\tau),$$

۲. عملگر مشتق، معادله (۱.۴) را به معادله‌ی زیر می‌نگارد:

$$\frac{d}{dt}(E(t)\dot{x}(t) - A(t)x(t)) = \frac{d}{dt}(B(t)x(t-\tau) + f(t)) \tag{۲۳.۴}$$

برای تعیین $x(t)$ در نقطه دلخواه t، تنها استفاده از عملگر مشتق مناسب نیست، چون معادله (۲۳.۴) فقط یک نتیجه از معادله (۱.۴) است. از طرف دیگر عملگر پیشرو یک شرط بحرانی برای فضای جواب معادله (۱.۴) است. برای توضیح بیشتر معادله اسکالر (۱۵.۴) در یک نقطه $t \in \mathbb{I}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $g(t) := x(t-\tau) - f(t)$، در این صورت با اعمال عملگر مشتق معادله (۱۵.۴) تبدیل به دستگاه

$$\begin{cases}0 \cdot \dot{x}(t) = 0 \cdot x(t) + g(t), \\ 0 \cdot \ddot{x}(t) = 0 \cdot x(t) + \dot{g}(t),\end{cases}$$

می‌شود، که برای تعیین منحصر به فرد $x(t)$ کافی نیست. از طرف دیگر با اعمال عملگر پیشرو معادله (۱۵.۴) تبدیل به دستگاه

$$\begin{cases}\qquad 0 \cdot \dot{x}(t) = 0 \cdot x(t) + x(t-\tau) + f(t), \\ 0 \cdot \dot{x}(t+\tau) = 0 \cdot x(t+\tau) + x(t) - f(t+\tau),\end{cases}$$

می‌شود. دراین صورت $x(t)$ منحصر به فرد به دست می‌آید.

تذکر: توجه کنید در کل عملگرهای $\Delta_{-\tau}$ و $\frac{d}{dt}$ قابل تبدیل به یک دیگر نیستند، چون توابع E، A، B، x، f و مشتقات آن‌ها ممکن است در نقطه $t+\tau$ وجود داشته باشند اما در نقطه t وجود نداشته باشند یا برعکس.

در مورد معادلات (۱.۴) علتی همان‌طور که در بخش قبل مشاهده کردیم ممکن است شامل محدودیت‌های جبری $x(t)$ پنهان باشد ولی به هیچ عنوان شامل معادلات دیفرانسیل پنهان برای $x(t)$ نیست و همچنین DDE حاصل از DDAE علتی مرتبه اول است. با این حال برای غیر علتی این خواص دیگر حفظ نمی‌شود.

ویژگی مشخصه دوم DDAE این است که نه تنها دستگاه می‌تواند محدودیت‌های جبری پنهان داشته باشد، بلکه می‌تواند معادلات دیفرانسیل پنهان بیشتری داشته باشد. برای درک بیشتر به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۳.۲.۴. معادله DDAE زیر را در بازه زمانی $\mathbb{I} \in [0,\infty)$ در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t-\tau) \\ x_2(t-\tau) \\ x_3(t-\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ -1-e^{t-1} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{۲۴.۴}$$

برای استخراج تمام محدودیت‌های پنهان از متغییر حالت $x(t)$ در معادله (۲۴.۴) به صورت زیر عمل می‌کنیم

۱. از معادله سطر دوم (۲۴.۴) مشتق می‌گیریم. در این صورت مقدار $\dot{x}_3(t)$ به دست می‌آید و با جایگذاری در معادله سطر اول (۲۴.۴) محدودیت جبری زیر برای $x_2(t)$ به دست می‌آید.

$$0 = x_2(t) + \dot{x}_1(t-1) - t - e^{t-1} \tag{۲۵.۴}$$

۲. اگر از معادله (۲۵.۴) مشتق بگیریم و در معادله سطر سوم (۲۴.۴) جایگذاری کنیم، در این صورت داریم:

$$0 = \ddot{x}_1(t-1) - e^{t-1} \tag{۲۶.۴}$$

این معادله شرط سازگاری تابع اولیه ϕ را که $t \in [0,1]$ را نتیجه می‌دهد. بنابراین با استفاده از معادله (۲۶.۴) و عملگر پیشرو ۱، معادله دیفرانسیل پنهان مرتبه دوم را به دست می‌آوریم:

$$\ddot{x}_1(t-1) - e^{t-1} = 0 \Rightarrow \ddot{x}_1(t) - e^{t} = 0 \Rightarrow \ddot{x}_1(t) = e^{t}$$

این ویژگی مشخصه به این معنی است که در DDAE کلی در مقایسه با مورد DAEها، نمی توان تمام معادلات دیفرانسیل از DDAE اصلی را برای حل دستگاه انتخاب کرد، یعنی دارای معادلات دیفرانسیل پنهان است.

ویژگی مشخصه سوم DDAE این است که معادله اساسی DDE از (۱.۴) می‌تواند شامل مشتقات تا مرتبه دلخواه از $x(t)$ و $x(t-\tau)$ باشد. معادله (۲۴.۴) را در نظر بگیرید، تحت شرط سازگار $\ddot{\phi}(t-1) - e^{t-1} = 0$ برای تمام $t \in (0,1)$ معادله (۲۴.۴) همان مجموع جواب دستگاه زیر را دارد:

$$-\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t-1) \\ x_2(t-1) \\ x_3(t-1) \end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t-1) \\ \dot{x}_2(t-1) \\ \dot{x}_3(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t-e^{t-1} \\ -1-e^{t-1} \\ -e^{t} \end{bmatrix},$$

برای رسیدن به فرمول ضمنی معادله اساسی DDE باید از دو معادله اول، دوبار مشتق بگیریم در این صورت داریم:

$$-\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t-1) \\ \ddot{x}_2(t-1) \\ \ddot{x}_3(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^{(3)}(t-1) \\ x_2^{(3)}(t-1) \\ x_3^{(3)}(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -e^{t-1} \\ -e^{t-1} \\ -e^{t} \end{bmatrix}.$$

در کل اگر معادله (۱.۴) غیر علتی باشد در این صورت فرمول غرابت آزاد و معادله اساسی DDE می‌توانند شامل مشتقات مرتبه بالا $x(t)$ و $x(t-\tau)$ باشند. در این حالت، روش‌های عددی مانند رانگ_کوتا [5] یا فرمول تفاضلی پسرو[6] BDF برای روش غرابت آزد ممکن است پیچیده یا حتی غیر ممکن باشد.

۴.۲.۴ تعمیم روش گام‌ها برای DDAE

مانند روش گام‌ها، کار اصلی روش حل DDAE محاسبه جواب $x(t)$، مسائل مقدار اولیه (۲.۴)_(۱.۴) در فاصله زمانی $[(i-1)\tau, i\tau]$ برای $1 \le i \le l$ است، به طور معادل تعیین تابع x_i به شرطی که توابع $x_{i-1}, \dots, x_0$ از قبل مشخص باشند. در این صورت دنباله DAEهای زیر

$$E_j\dot{x}_j(t) = A_j(t)x_j(t) + B_j(t)x_{j-1}(t) + f_j(t), \quad j = 1, \dots, i-1$$

[5] Runge-kutta

[6] Backward difference formula

فقط شامل معادلات زائد است، که تأثیری در تعیین x_i ندارد اما حل‌پذیری x_i با دنباله‌ای از DAEهای زیر بررسی می‌شود.

$$E_{i+j}(t)\dot{x}_{i+j}(t) = A_{i+j}(t)x_{i+j}(t) + B_{i+j}(t)x_{i+j-۱}(t) + f_{i+j}(t), \quad j = ۰, \ldots, l-j \qquad (۲۷.۴)$$

توجه کنید که با توجه به بازه زمانی، دنباله معادلات (۲۷.۴) ممکن است تعداد متناهی معادله ($l < \infty$) یا تعداد نامتناهی معادله ($l = \infty$) وجود داشته باشند که در حالت نامتناهی قطعا نمی‌توان از کل مجموعه (۲۷.۴) برای تعیین x_i استفاده کرد، این حقیقت انگیزه مفهوم تغییر اندیس در تعریف بعدی را می‌دهد.

تعریف ۲.۲.۴. برای $i \leq l$ ثابت، دنباله معادلات (۲۷.۴) را در نظر بگیرید، کوچک‌ترین عدد صحیح $k \geq ۰$ به طوری که به اصطلاح دستگاه تغییر متورم[۷] زیر

$$E_{i+j}(t)\dot{x}_{i+j}(t) = A_{i+j}(t)x_{i+j}(t) + B_{i+j}(t)x_{i+j-۱}(t) + f_{i+j}(t), \quad j = ۰, \ldots, k \qquad (۲۸.۴)$$

جواب منحصر به فرد x_i داشته باشد، به شرط این که تابع $x_{i-۱}$ و بردار اولیه مفروض $x_i(۰) = x_{i-۱}(\tau)$ سازگار باشند، اندیس تغییر[۸] نسبت به i نامیده می‌شود و با $\kappa(i)$ نمایش داده می‌شود.

مثال ۴.۲.۴. DDAE زیر را برای تمام $t \in (۰, \infty)$ در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}x(t) + \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}x(t-\tau) + \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix},$$

طبق تعریف روش گام‌ها (۱۹.۴) دستگاه بالا به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\dot{x}_i(t) = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}x_i(t) + \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}x_{i-۱}(t) + \begin{bmatrix} f_i(t) \\ g_i(t) \end{bmatrix},$$

طبق تعریف تعمیم روش گام‌ها با $k = ۰$ چیزی جز معادله اول نیست و نمی‌توان x_i را منحصر به فرد تعیین کرد. یعنی با $k = ۰$ دو معنی می‌دهد: نخست یعنی روش گام‌ها با شکست مواجه است و دوم اندیس تغییر $\kappa(i)$ باید بزرگتر از صفر باشد. حال با $k = ۱$ دستگاه تغییر متورم زیر بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\dot{x}_i(t) = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}x_i(t) + \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}x_{i-۱}(t) + \begin{bmatrix} f_i(t) \\ g_i(t) \end{bmatrix} \qquad (\text{آ}۲۹.۴)$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\dot{x}_{i+۱}(t) = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}x_{i+۱}(t) + \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}x_i(t) + \begin{bmatrix} f_{i+۱}(t) \\ g_{i+۱}(t) \end{bmatrix} \qquad (\text{ب}۲۹.۴)$$

[7] shift-inflated
[8] shift index

با مشتق گیری از معادله دوم (۲۹.۴ب) و با جایگذاری در معادله اول آن، داریم:

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x_i(t) + f_{i+1}(t) + \dot{g}_{i+1}(t),$$

که فرمول ضمنی مؤلفه دوم x_i را می‌دهد. از طرف دیگر مؤلفه اول x_i مستقیم از معادله دوم (۲۹.۴آ) به دست می‌آید. بنابراین معادله اصلی توسط x_i منحصر به فرد تعیین می‌شود. در این صورت اندیس تغییر $\kappa(i)$ برای تمام iها یک است.

دلیل شکست روش گام‌ها این است که فقط از معادله (۱۹.۴)، (که معادله اول دستگاه (۲۷.۴)است) برای تعیین x_i استفاده می‌کند. با این حال بیشتر محدودیت‌های روی x_i در (۲۷.۴) موجود است که باید استخراج شوند، بنابراین x_i را می‌توان با یک روش منحصر به فرد از (۲۷.۴) محاسبه کرد. به جز محدودیت‌های که مستقیماً از معادله اول (۲۷.۴) به دست می‌آید، محدودیت‌های دیگر برای x_i را می‌توان توسط دستگاه DAE زیر

$$\mathfrak{E}_i \dot{y} = \mathfrak{A}_i y + \mathfrak{B}_i x_i + \mathfrak{g}_i \tag{۳۰.۴}$$

با ضرایب

$$\mathfrak{E}_i := \begin{bmatrix} E_{i+1} & & & \\ & E_{i+2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_{i+k} \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{A}_i := \begin{bmatrix} A_{i+1} & & & \\ B_{i+2} & A_{i+2} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & B_{i+k} & A_{i+k} \end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{B}_i := \begin{bmatrix} B_{i+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y := \begin{bmatrix} x_{i+1} \\ x_{i+2} \\ \vdots \\ x_{i+k} \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{g}_i := \begin{bmatrix} f_{i+1} \\ f_{i+2} \\ \vdots \\ f_{i+k} \end{bmatrix},$$

که شامل x_i به عنوان تابع پارامتر است، به دست آورد. برای سادگی در نوشتار متغییر t را در تمام توابع ماتریس مقدار [9] و توابع بردار مقدار [10] حذف می‌کنیم.

معادلات زائد در (۳۰.۴) منجر به محدودیت‌های برای x_i می‌شوند. برای استخراج این محدودیت‌ها، فرمول غرابت آزاد پارامتر وابسته (۳۰.۴) به صورت زیر داده شده است،

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{E}_{i,1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{y} = \begin{bmatrix} \mathfrak{A}_{i,1} \\ \mathfrak{A}_{i,2} \\ 0 \end{bmatrix} y + \sum_{j=0}^{\mu} \begin{bmatrix} \mathfrak{B}_{i,j} \\ \mathfrak{C}_{i,j} \\ \mathfrak{D}_{i,j} \end{bmatrix} x_i^{(i)} + \begin{bmatrix} \mathfrak{g}_{i,1} \\ \mathfrak{g}_{i,2} \\ \mathfrak{g}_{i,3} \end{bmatrix} \tag{۳۱.۴}$$

[9] matrix-valued
[10] vector-valued

که در آن $\begin{bmatrix}\mathfrak{E}_{i,1}^T & \mathfrak{A}_{i,2}^T\end{bmatrix}^T$ رتبه سطری کامل است و μ اندیس غرابت زوج توابع $(\mathfrak{E}_i,\mathfrak{A}_i)$ در (۳۰.۴) می‌باشد، که خوش تعریف است. بلوک سطری آخر، محدودیت‌های پنهان x_i در معادله (۳۰.۴) را مشخص می‌کند.

لم ۲.۲.۴. اگر μ اندیس غرابت زوج توابع $(\mathfrak{E}_i,\mathfrak{A}_i)$ در (۳۰.۴) خوش تعریف باشد، آن‌گاه مجموعه معادلات به دست آمده برای x_i در (۲۸.۴) با دستگاه دیفرانسیل جبری زیر ارائه می‌شود:

$$\begin{cases} E_i\dot{x}_i = A_ix_i + B_ix_{i-1} + f_i, \\ 0 = \sum\limits_{j=0}^{\mu}\mathfrak{D}_{i,j}x_i^{(j)} + g_{i,3}, \end{cases} \tag{۳۲.۴}$$

بنابراین، تابع x_i به طور منحصر به فرد از تعریف (۲۸.۴) تعیین می‌شود، اگر و تنها اگر x_i به طور منحصر به فرد از (۳۲.۴) همراه با شرایط اولیه زیر تعیین شود.

$$x_i^{(j)}(0) = x_{i-1}^{(j)}(\tau^-), \qquad j = 0,\dots,\mu-1 \tag{۳۳.۴}$$

برهان. ابتدا باید توجه کرد که فرمول غرابت آزاد (۳۱.۴) مجموعه جواب (۳۰.۴) را تغییر نمی‌دهد و در این صورت x_i منحصر به فرد توسط مجموعه (۲۸.۴) تعیین می‌شود اگر و تنها اگر منحصر به فرد توسط دستگاه زیر تعیین شود.

$$E_i\dot{x}_i = A_ix_i + B_ix_{i-1} + f_i \tag{۳۴.۴آ}$$

$$\mathfrak{E}_{i,1}\dot{y} = \mathfrak{A}_{i,1}y + \sum_{j=0}^{\mu}\mathfrak{B}_{i,j}x_i^{(j)} + \mathfrak{g}_{i,1} \tag{۳۴.۴ب}$$

$$0 = \mathfrak{A}_{i,2}y + \sum_{j=0}^{\mu}\mathfrak{C}x_i^{(j)} + \mathfrak{g}_{i,2} \tag{۳۴.۴ج}$$

$$0 = \sum_{j=0}^{\mu}\mathfrak{D}_{i,j}x_i^{(j)} + \mathfrak{g}_{i,3} \tag{۳۴.۴د}$$

از آن‌جای که $\begin{bmatrix}\mathfrak{E}_{i,1}\\ \mathfrak{A}_{i,2}\end{bmatrix}$ دارای رتبه سطری کامل است، مشاهده می‌کنیم که x_i در دستگاه (۳۴.۴ب)–(۳۴.۴ج) نقش تابع پارامتر را دارد. بنابراین تمام محدودیت‌های x_i در دو معادله (۳۴.۴آ) و (۳۴.۴د) وجود دارد که همان فرم ذکر شده در صورت لم است. □

تذکر: اگر $\mu > 1$ و $\mathfrak{D}_{i,\mu}$ همارز باصفر نباشد، در این صورت معادله (۳۲.۴) مرتبه بالاتر از یک است.بنابراین برای محاسبه x_i، ابتدا نیاز به کاهش مرتبه با معرفی متغییرهای جدید که مشتقات مؤلفه‌های x_i را نشان می‌دهد، داریم. سپس می‌توان سیستم را با روش‌های عددی حل DAEها مرتبه اول در [۳۱] حل نمود و از این جواب می‌توان جواب x_i را از تعداد کافی تابع اولیه داده شده به دست آورد. با این حال روش کاهش مرتبه منحصر به فرد نیست و

همچنین ممکن است باعث مشکلات بیشتر در روش‌های عددی شود [۳۹، ۲] . به همین دلیل در [۳۶، ۲۲] روش‌های جدیدی برای به کار بردن مستقیم مسائل مقدار اولیه برای DAE مرتبه بالا مطرح شده است.

توجه کنید در حالت کلی μ به i وابسته است. برای ساده نویسی μ را به جای $\mu(i)$ به کار می‌بریم.

اگر DDAE را در نوع تأخیری یا خنثی محدود کنیم، معادله (۳۲.۴) می‌تواند به طور قابل ملاحظه‌ای ساده شود.

لم ۳.۲.۴. فرض کنید که معادله (۱.۴) از نوع تأخیری یا خنثی باشد، آنگاه تحت شرایط لم (۲.۲.۴) معادله (۳۲.۴) تبدیل به معادله زیر می‌شود.

$$\begin{bmatrix} E_i \\ -\mathfrak{D}_{i,1} \end{bmatrix} \dot{x}_i = \begin{bmatrix} A_i \\ \mathfrak{D}_{i,0} \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix} x_{i-1} + \begin{bmatrix} f_i \\ g_{i,3} \end{bmatrix} \qquad (۳۵.۴)$$

به علاوه، اگر اندیس غرابت برای زوج (۳۵.۴) خوش تعریف باشد، آن‌گاه x_i جواب DAE غرابت آزاد زیر است.

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_{i,1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{x}_i = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{i,1} \\ \tilde{A}_{i,2} \\ 0 \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} \tilde{B}_{i,1} \\ \tilde{B}_{i,2} \\ \tilde{B}_{i,3} \end{bmatrix} x_{i-1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{B}_{i,4} \end{bmatrix} \dot{x}_{i-1} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathfrak{g}}_{i,1} \\ \tilde{\mathfrak{g}}_{i,2} \\ \tilde{\mathfrak{g}}_{i,3} \end{bmatrix} \begin{matrix} \hat{d}_i \\ \hat{a}_i \\ \hat{v}_i \end{matrix} \qquad (۳۶.۴)$$

که زوج ماتریس $\begin{bmatrix} \tilde{E}_{i,1}^T & \tilde{A}_{i,2}^T \end{bmatrix}^T$ نقطه به نقطه نامنفرد است.

برهان. [۲۱]. □

قضیه ۲.۲.۴. فرض کنید که (۱.۴) از نوع پیشرفته نباشد، دستگاه متورم (۲۸.۴) را در نظر بگیرید. اگر اندیس‌های غرابت دو معادله (۳۰.۴) و (۳۵.۴) خوش تعریف باشند، آن‌گاه اندیس تغییر منحصر به فرد $\kappa(i)$ نسبت به i وجود دارد، به طوری که با $k = \kappa(i)$، اندازه بلوک‌های معادلات سطری غرابت آزاد معادله (۳۶.۴)، $\hat{d}_i + \hat{a}_i = n$ است.

برهان. [۲۱]. □

با تغییر متغییر زمان $t \mapsto t + (i-1)\tau$ ، دو بلوک اول سطری معادلات غرابت آزاد (۳۶.۴) دستگاه زیر را برای $t \in [(i-1)\tau, i\tau]$ نتیجه می‌دهد،

$$\begin{bmatrix} \hat{E}_{i,1}(t) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \hat{A}_{i,1}(t) \\ \hat{A}_{i,2}(t) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \hat{B}_{i,1}(t) \\ \hat{B}_{i,2}(t) \end{bmatrix} x(t-\tau) + \begin{bmatrix} \hat{g}_{i,1}(t) \\ \hat{g}_{i,2}(t) \end{bmatrix} \begin{matrix} \hat{d}_i \\ \hat{a}_i \end{matrix} \qquad (۳۷.۴)$$

که $\begin{bmatrix} \hat{E}_{i,1}^T(t) & \hat{A}_{i,2}^T(t) \end{bmatrix}^T$ نقطه به نقطه نامنفرد است. از این رو مسائل مقدار اولیه متناظر برای (۳۷.۴) منحصر به فرد توسط $x_i = x|_{[(i-1)\tau, i\tau]}$ تعیین می‌شوند. دستگاه (۳۷.۴) را فرمول

غرابت آزاد منظم معادله‌ی (۱.۴) روی فاصله $[(i-1)\tau, i\tau]$ می‌نامیم.
مطالب این بخش برای درک رفتار راه حل بیان شده می‌باشد و مشاهده می‌کنید که تحت چه شرایطی روش حل امکان پذیر می‌باشد. با این حال، برای حل عددی مسائل مقدار اولیه (۱.۴)ـ(۲.۴) لازم است این فرمول را نقطه به نقطه به دست آوریم.

۳.۴ مشتق آرایه‌ای

همان‌طور که در بخش قبل گفته شد هدف از تعمیم روش گام‌ها برای حل DDAE کلی خطی از دو نوع تأخیری و خنثی است.
برای $k \in \mathbb{N}$ با k-بار مشتق گرفتن از معادله (۱.۴) مشتق آرایه‌ای زیر را به دست می‌آوریم

$$M(t)z(t) = P(t)z(t-\tau) + g(t),$$

که در آن $M(t)$ ، $z(t)$ ، $P(t)$ و $g(t)$ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$M := \begin{bmatrix} -A & E & & & & \\ -\dot{A} & \dot{E}-A & E & & & \\ -\ddot{A} & \ddot{E}-2\dot{A} & 2\dot{E}-A & E & & \\ & \vdots & & \ddots & \ddots & \\ -A^{(k)} & E^{(k)}-kA^{(k-1)} & \cdots & \cdots & k\dot{E}-A & E \end{bmatrix},$$

$$P := \begin{bmatrix} B & & & & & 0 \\ \dot{B} & B & & & & 0 \\ \ddot{B} & 2\dot{B} & B & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ B^{(k)} & kB^{(k-1)} & \cdots & k\dot{B} & B & 0 \end{bmatrix}, \quad z := \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \vdots \\ x^{(k+1)} \end{bmatrix}, \quad g := \begin{bmatrix} f \\ \dot{f} \\ \vdots \\ f^{(k+1)} \end{bmatrix},$$

برای راحتی در ادامه مقدار تابع در نقطه $t + j\tau$ را با نماد $j\tau$ ، $j \in \mathbb{Z}$ نشان می‌دهیم. برای $t \in \mathbb{I}$ ثابت فرض کنید i به گونه‌ای باشد که $t \in ((i-1)\tau, i\tau]$ و همچنین اندیس تغییر $\kappa = \kappa(i)$ برای i خوش تعریف باشد. بنابراین دستگاه تغییر متورم (۲۸.۴) به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} E_{0\tau}\dot{x}_{0\tau} &= A_{0\tau}x_{0\tau} + B_{0\tau}x_{-\tau} + f_{0\tau}, \\ E_{\tau}\dot{x}_{\tau} &= A_{\tau}x_{\tau} + B_{\tau}x_{0\tau} + f_{\tau}, \\ E_{2\tau}\dot{x}_{2\tau} &= A_{2\tau}x_{2\tau} + B_{2\tau}x_{1\tau} + f_{2\tau}, \\ &\vdots \\ E_{\kappa\tau}\dot{x}_{\kappa\tau} &= A_{\kappa\tau}x_{\kappa\tau} + B_{\kappa\tau}x_{(\kappa-1)\tau} + f_{\kappa\tau}, \end{aligned} \tag{۳۸.۴}$$

به منظور ساختن مشتق آرایه‌ای نیاز به باز نویسی معادلات (۳۸.۴) به صورت زیر داریم.

$$\begin{bmatrix} E_{\circ\tau} & & & & \\ & E_{\tau} & & & \\ & & E_{۲\tau} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & E_{\kappa\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{\circ\tau} \\ \dot{x}_{\tau} \\ \dot{x}_{۲\tau} \\ \vdots \\ \dot{x}_{\kappa\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\circ\tau} & & & & \\ B_{\tau} & A_{\tau} & & & \\ & B_{۲\tau} & A_{۲\tau} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & B_{\kappa\tau} & A_{\kappa\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\circ\tau} \\ x_{\tau} \\ x_{۲\tau} \\ \vdots \\ x_{\kappa\tau} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{\circ\tau}x_{\circ\tau} + f_{\circ\tau} \\ f_{\tau} \\ f_{۲\tau} \\ \vdots \\ f_{\kappa\tau} \end{bmatrix} \tag{۳۹.۴}$$

فرض کنید برای (۳۹.۴)، $\hat{\mu}(t)$ اندیس غرابت در همسایگی به اندازه کافی کوچک t ثابت خوش تعریف باشد. بنابراین فرض می‌کنیم برای هر k و t یک $\mu_{\max}$ وجود دارد به طوری که $\hat{\mu}(t) \leq \mu_{max}$ است. پس می‌توان مشتق آرایه‌ای را با $k = \hat{\mu}(t)$ ساخت. با این حال، برای تعیین سریع ضریب تغییر k، بهتر است مشتق آرایه‌ای (با $k = \hat{\mu}(t)$) برای معادلات دستگاه (۳۸.۴) را به جای مشتق آرایه‌ای کل دستگاه (۳۹.۴) بسازیم. اگر به این روش عمل کنیم، دستگاه زیر را به دست آورده‌ایم که به اصطلاح دستگاه متورم مضاعف[11] نامیده می‌شود:

$$\begin{bmatrix} M_{\circ\tau} & & & & \\ -P_{\tau} & M_{\tau} & & & \\ & -P_{۲\tau} & M_{۲\tau} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -P_{\kappa\tau} & M_{\kappa\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{\circ\tau} \\ z_{\tau} \\ z_{۲\tau} \\ \vdots \\ z_{\kappa\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{\circ\tau} \\ \circ \\ \circ \\ \vdots \\ \circ \end{bmatrix} z_{-\tau} + \begin{bmatrix} g_{\circ\tau} \\ g_{\tau} \\ g_{۲\tau} \\ \vdots \\ g_{\kappa\tau} \end{bmatrix} \tag{۴۰.۴}$$

ماتریس ضرایب (۴۰.۴) را به صورت زیر نمادگذاری می‌کنیم،

$$\mathscr{M} := \begin{bmatrix} M_{\circ\tau} & & & & \\ -P_{\tau} & M_{\tau} & & & \\ & -P_{۲\tau} & M_{۲\tau} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -P_{\kappa\tau} & M_{\kappa\tau} \end{bmatrix} \quad \mathscr{P} := \begin{bmatrix} P_{\circ\tau} \\ \circ \\ \circ \\ \vdots \\ \circ \end{bmatrix} \quad \mathscr{G} := \begin{bmatrix} g_{\circ\tau} \\ g_{\tau} \\ g_{۲\tau} \\ \vdots \\ g_{\kappa\tau} \end{bmatrix} \tag{۴۱.۴}$$

در حال حاضر در مورد چگونگی شکل‌گیری منظم فرمول غرابت آزاد (۳۷.۴) از دستگاه متورم مضاعف (۴۰.۴) بحث خواهیم کرد.

[11] double-inflated

تمام محدودیت‌ها برای $x(t)$ و $\dot{x}(t)$ موجود در (۴۰.۴) را انتخاب می‌کنیم. قابل توجه است که $x(t)$ و $\dot{x}(t)$ تنها در $z_{0\tau}$ هستند و در $z_{\tau}, \ldots, z_{k\tau}$ نیستند. در ادامه برای راحتی از نماد گذاری متلب استفاده می‌کنیم [۳۳].

فرض کنید ماتریس U فضای هم دامنه $(\mathscr{M}(:, (2n+1) : end))$ باشد یعنی

$$U^T \mathscr{M}(:, (2n+1) : end) = 0 \tag{۴۲.۴}$$

با تقسیم‌بندی (۴۰.۴) توسط U^T، دستگاه زیر را به دست می‌آوریم،

$$U^T \mathscr{M}(:, 1 : 2n) \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = U^T \mathscr{P}_{z_{-\tau}} + U^T \mathscr{G} \tag{۴۳.۴}$$

که شامل تمام محدودیت‌ها برای $x(t)$ و $\dot{x}(t)$ در (۴۰.۴) است.

توجه داشته باشید که معادله (۳۷.۴) تنها دارای $x(t-\tau)$ است حتی اگر $z_{-\tau}$ نه تنها شامل $x(t-\tau)$ بلکه شامل مشتقات $\dot{x}(t-\tau), \ddot{x}(t-\tau), \ldots$ نیز باشد. بنابراین ماتریس U برای برآوردن سایر محدودیت‌های اضافی انتخاب می‌شود.

$$U^T \mathscr{P}(:, (n+1) : end) = 0 \tag{۴۴.۴}$$

درمواردی که $U^T \mathscr{P}(:, (n+1) : end) \neq 0$ است، نشان می‌دهد که معادله (۱.۴) از نوع پیشرفته است که طبق فرض کنار گذاشته شده بود. با نماد گذاری

$$\begin{aligned} \tilde{\mathscr{M}} &:= U^T \mathscr{M}(:, (n+1) : 2n), & \tilde{\mathscr{N}} &:= U^T \mathscr{M}(:, 1 : n), \\ \tilde{\mathscr{P}} &:= U^T \mathscr{P}(:, 1 : n), & \tilde{\mathscr{G}} &:= U^T \mathscr{G}, \end{aligned} \tag{۴۵.۴}$$

که $\tilde{m}$ تعدادی از سطرهای $\mathscr{M}$ است، با ماتریس U که توسط (۴۲.۴) و (۴۴.۴) برآورد شده است معادله (۴۳.۴) به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\tilde{\mathscr{M}} \dot{x}(t) + \tilde{\mathscr{N}} x(t) = \tilde{\mathscr{P}} x(t-\tau) + \tilde{\mathscr{G}}, \tag{۴۶.۴}$$

که فقط برای تابع $x(t)$، شامل تمام محدودیت‌های جبری و معادلات دیفرانسیل مرتبه اول است، اما برای $x(t+\tau), \ldots, x(t+k\tau)$ در دستگاه متورم مضاعف (۴۰.۴) نیست. در حال حاضر کار باقی مانده انتخاب معادلات فرمول غرابت آزاد منظم (۳۷.۴) از (۴۶.۴) است. برای این کار ماتریس‌ها و فضای مرتبط پدید آمده توسط ستون‌ها را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} &Z_2 \quad \text{پایه} \quad ker(\tilde{\mathscr{M}}^T) \\ &T_2 \quad \text{پایه} \quad ker(Z_2^T \tilde{\mathscr{N}}) \\ &Y_2 \quad \text{پایه} \quad range(Z_2^T \tilde{\mathscr{N}}) \\ &Z_1 \quad \text{پایه} \quad range(\tilde{\mathscr{M}} T_2) \end{aligned} \tag{۴۷.۴}$$

فرمول غرابت آزاد منظم (۳۷.۴) از لم زیر به دست می‌آید.

لم ۱.۳.۴. دستگاه متورم مضاعف (۴۰.۴) و معادله (۴۶.۴) در نقطه $t \in \mathbb{I}$ را در نظر بگیرید، آنگاه با ماتریس‌های $T_۲$، $T_۱$، $Z_۱$ و $Z_۲$ که در (۴۷.۴) تعریف شده‌اند، داریم:

$$rank(\tilde{\mathscr{M}} T_۲) + rank(Z_۲^T \tilde{\mathscr{N}}) = n,$$

بنابراین معادله (۳۷.۴) در نقطه t به صورت زیر تبدیل می‌شود،

$$\begin{bmatrix} Z_۱^T \tilde{\mathscr{M}} \\ ۰ \end{bmatrix} \dot{x}(t) + \begin{bmatrix} Z_۱^T \tilde{\mathscr{N}} \\ Y_۲^T Z_۲^T \tilde{\mathscr{N}} \end{bmatrix} x(t) = \begin{bmatrix} Z_۱^T \tilde{\mathscr{G}} \\ Y_۲^T Z_۲^T \tilde{\mathscr{G}} \end{bmatrix} x(t-\tau) + \begin{bmatrix} Z_۱^T \tilde{\mathscr{G}} \\ Y_۲^T Z_۲^T \tilde{\mathscr{G}} \end{bmatrix} \tag{۴۸.۴}$$

که در آن $\begin{bmatrix} Z_۱^T \tilde{\mathscr{M}} \\ Y_۲^T Z_۲^T \tilde{\mathscr{N}} \end{bmatrix}$ نامنفرد است.

برهان. اولاً، از تعریف $Z_۱$ می‌بینیم $Z_۱^T \tilde{\mathscr{M}} T_۲$ مرتبه سطری کامل دارد و

$$rank(Z_۱^T \tilde{\mathscr{M}} T_۲) = rank(\tilde{\mathscr{M}} T_۲),$$

از آن‌جای که فرمول غرابت آزاد منظم (۳۷.۴) در معادله (۴۶.۴) موجود است، نتیجه می‌گیریم که $rank(\begin{bmatrix} \tilde{\mathscr{M}} \\ Z_۲^T \tilde{\mathscr{N}} \end{bmatrix}) = n$ است. با درنظر گرفتن تجزیه مقدار تکین $Z_۲^T \tilde{\mathscr{N}}$ داریم:

$$\begin{bmatrix} Y_۲^T \\ Y_{۲,\perp}^T \end{bmatrix} Z_۲^T \tilde{\mathscr{N}} \begin{bmatrix} T_{۲,\perp} & T_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_N & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix},$$

که در آن $\begin{bmatrix} Y_۲ & Y_{۲,\perp} \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} T_{۲,\perp} & T_۲ \end{bmatrix}$ ماتریس‌های یکانی هستند، در این صورت داریم:

$$\begin{bmatrix} I_{\tilde{m}} & ۰ \\ ۰ & Y_۲^T \\ ۰ & Y_{۲\perp}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathscr{M}} \\ Z_۲^T \tilde{\mathscr{N}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{۲,\perp} & T_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathscr{M}} T_{۲,\perp} & \tilde{\mathscr{M}} T_۲ \\ \Sigma_N & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix},$$

بنابراین:

$$rank(\tilde{\mathscr{M}} T_۲) + rank(Z_۲^T \tilde{\mathscr{N}}) = rank(\begin{bmatrix} \tilde{\mathscr{M}} \\ Z_۲^T \tilde{\mathscr{N}} \end{bmatrix}) = n \tag{۴۹.۴}$$

برای ادعا دوم کافی است ثابت کنیم $\begin{bmatrix} Z_۱^T \tilde{\mathscr{M}} \\ Y_۲^T Z_۲^T \tilde{\mathscr{N}} \end{bmatrix}$ نقطه به نقطه نامنفرد است. در این صورت می‌بینیم:

$$\begin{bmatrix} Z_۱^T \tilde{\mathscr{M}} \\ Y_۲^T Z_۲^T \tilde{\mathscr{N}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{۲,\perp} & T_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_۱^T \tilde{\mathscr{M}} T_{۲,\perp} & \tilde{\mathscr{M}} T_۲ \\ \Sigma_N & ۰ \end{bmatrix},$$

و از (۴۹.۴) نتیجه می‌گیریم که $\begin{bmatrix} Z_۱^T \tilde{\mathscr{M}} \\ Y_۲^T Z_۲^T \tilde{\mathscr{N}} \end{bmatrix}$ رتبه سطری کامل n دارد، یعنی $\begin{bmatrix} Z_۱^T \tilde{\mathscr{M}} \\ Y_۲^T Z_۲^T \tilde{\mathscr{N}} \end{bmatrix}$ نقطه به نقطه نامنفرد است. □

به طور خلاصه، اصلاح معادله (۱.۴) به عنوان غرابت آزاد منظم (۴۸.۴) توسط الگوریتم زیر داده شده است.

الگوریتم ۱

ورودی: مسائل مقدار اولیه (۱.۴)

خروجی: نقطه به نقطه غرابت آزاد منظم (۳۷.۴)

۱: نقطه دلخواه $t \in \mathbb{I}$ را در نظر بگیرید.

۲: فرض کنید $\hat{\mu} = 0$ و $\kappa = 0$.

۳: **اگر** $\hat{\mu} \leq \mu_{\max}$ **آنگاه**

۴: ساخت سیستم متورم مضاعف (۴۰.۴) با ضرایب $\mathscr{M}$ ، $\mathscr{P}$ و $\mathscr{G}$.

۵: ماتریس متعامد U را طوری تعیین کنید که

$$U^T \left[\mathscr{M}(:, (2n+1) : end) \quad \mathscr{P}(:, (n+1) : end) \right] = 0.$$

۶: محاسبه ماتریس‌های $\tilde{\mathscr{M}}$ و $\tilde{\mathscr{N}}$ در (۴۵.۴) و Z_1, Y_2, T_2, Z_2 در (۴۷.۴).

۷: **اگر** $rank(\tilde{\mathscr{M}} T_2) + rank(Z_2^T \tilde{\mathscr{N}}) = n$ **آنگاه** معادله (۴۸.۴) را به دست آورید که دقیقاً همان معادله غرابت آزاد منظم (۳۷.۴) در نقطه t است.

۸: **وگرنه** $\hat{\mu} := \hat{\mu} + 1$ برگرد به گام ۴.

۹: پایان.

۱۰: **وگرنه** $\hat{\mu} = 0$، $\kappa := \kappa + 1$ برگرد به ۴.

۱۱: پایان.

تذکر:

- برای معادلات خطی زمان ثابت DDAE، توابع $\mathscr{M}$ ، $\mathscr{P}$ ، $\mathscr{G}$ ، Z_2، T_2 ، Y_2، Z_1 روی کل بازه می‌توانند ماتریس‌های ثابت فرض شوند. در این روش فقط به محاسبه این ماتریس‌ها در نقطه اولیه ۰ نیاز داریم و می‌توان از آن‌ها در کل روند استفاده کرد.

- توجه داشته باشید که الگوریتم ۱ برای معادله (۱.۴) با موفقیت اجرا می‌شود اگر و تنها اگر دو شرط زیر را داشته باشد:

۱. فرض کنید برای هر ناهمگونی سازگار f و هر تابع اولیه سازگار ϕ با توجه به f، مسائل مقدار اولیه (۲.۴) جواب منحصر به فرد داشته باشد، همچنین (۱.۴) از نوع خنثی یا تأخیری باشد.

۲. اندیس غرابت برای معادله (۳۹.۴) خوش تعریف باشد به طوری که معادله غرابت آزاد منظم (۳۷.۴) را به دست بیاوریم.

برای جزئیات بیشتر، فرضیه زیر که الگوریتم ۱ را برای به دست آوردن فرمول غرابت آزاد تضمین می‌کند، بیان می‌کنیم.

فرضیه ۲. معادله (۱.۴) را درنظر بگیرید، فرض کنید اعداد صحیح κ، $\hat{a}$ و $\tilde{m}$ برای هر $t \in \mathbb{I}$ وجود دارند به طوری که $\hat{\mu}(t)$ اندیس غرابت برای معادله (۳۹.۴) در یک همسایگی کوچک از t خوش تعریف باشد و توابع $\mathscr{M}$ و $\mathscr{P}$ به دست آمده از ساخت مشتق آرایه‌ای (۴۱.۴) با $k = \hat{\mu}(t)$، در ویژگی‌های زیر صدق کند.

۱. یک ماتریس تابع هموار مرتبه کامل U با اندازه $(\kappa+1)(\mu+1)n\times\tilde{m}$ به طوری که ستون‌های آن فضای $corang(\mathscr{M}(:,(2n+1):end))$ باشد و $U^T\mathscr{P}(:,(n+1):end) = 0$. در این صورت داریم:

$$\tilde{\mathscr{M}} := U^T\mathscr{M}(:,(n+1):2n), \quad \tilde{\mathscr{N}} := U^T\mathscr{M}(:,1:n),$$

۲. یک ماتریس تابع هموار Z_2 با اندازه $\tilde{m}\times\hat{a}$ روی همسایگی از t وجود دارد به طوری که $Z_2^T\tilde{\mathscr{M}} = 0$ و $Z_2^T\tilde{\mathscr{N}}$ دارای رتبه سطری کامل $\hat{a}$ باشد.

۳. یک ماتریس تابع هموار T_2 از اندازه $n\times\hat{d}$ که $\hat{d} := n-\hat{a}$ و T_2 نقطه به نقطه ماکسیمال رتبه، به طوری که $Z_2^T\tilde{\mathscr{N}}T_2 = 0$ است.

۴. برای تمام tها داریم $rank(\tilde{\mathscr{M}}(t)T_2(t)) = \hat{d}$ به طوری که ماتریس هموار Z_1 که نقطه به نقطه ماکسیمال رتبه از مرتبه $\tilde{m}\times\hat{d}$ و در رابطه زیر صدق می‌کند، وجود دارد،

$$rank(Z_1^T(t)\tilde{\mathscr{M}}(t)T_2(t)) = \hat{d}.$$

الگوریتم ۱ را با مثال زیر شرح می‌دهیم.

مثال ۱.۳.۴. مسائل مقدار اولیه DDAE زیر را

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t-\tau) \\ x_2(t-\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \tag{۵۰.۴}$$

را برای $t \in [0,\infty)$، $\tau = 1$ با تابع اولیه $\phi(t) := \begin{bmatrix} e^{\frac{t}{10}} \\ t \end{bmatrix}$، $t \in [-\tau, 0]$ در نظر بگیرید.

این ناهمگونی به گونه‌ای انتخاب شده که دستگاه دارای جواب تحلیلی $\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\frac{t}{10}} & t \end{bmatrix}$ باشد. معادله (۵۰.۴) دو ویژگی مهم را نشان می‌دهد: اول، غیرعلتی است دوم، یک معادله دیفرانسیل پنهان دارد. این معادله دیفرانسیل پنهان می‌تواند توسط اضافه کردن مشتق

معادله اول به معادله دوم و حذف جملات مشابه در دو طرف تساوی به معادله دیفرانسیل زیر تبدیل شود.

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t-\tau) \\ \dot{x}_2(t-\tau) \end{bmatrix} + \dot{f}_1(t) + f_2(t),$$

با اضافه کردن τ در این معادله، معادلات دیفرانسیل پنهان از (۵۰.۴) را به دست می‌آوریم. با استفاده از الگوریتم ۱ برای (۵۰.۴) به صورت زیر عمل می‌کنیم، با $\kappa = 0$ داریم:

$$\tilde{\mathscr{M}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -t \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathscr{N}} = \begin{bmatrix} -1 & t \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathscr{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$Y_2 = -1, \quad Z_1 = [\quad]^{0,2}, \quad \tilde{\mathscr{M}}T_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Z_2^T\tilde{\mathscr{N}} = \begin{bmatrix} 1 & -t \end{bmatrix}.$$

در این‌جا ماتریس خالی را توسط $[\quad]^{i,j}$ با اندازه $i \times j$ نمایش می‌دهیم.
بنابراین چون $rank(\tilde{\mathscr{M}}T_2) + rank(Z_2^T\tilde{\mathscr{N}}) = 1 \leq 2$ نشان می‌دهد اندیس تغییر بزرگ‌تر از صفر است به عبارت دیگر معادله (۵۰.۴) غیر علتی است. با $\kappa = 1$ به دست می‌آوریم:

$$\tilde{\mathscr{M}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -t \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathscr{N}} = \begin{bmatrix} -1 & t \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathscr{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y_2 = -1, \quad \tilde{\mathscr{M}}T_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad Z_2^T\tilde{\mathscr{N}} = \begin{bmatrix} 1 & -t \end{bmatrix}, \quad Z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

در این حالت $rank(\tilde{\mathscr{M}}T_2) + rank(Z_2^T\tilde{\mathscr{N}}) = 2$ بنابراین اندیس_تغییر $\kappa = 1$ و معادله منظم (۴۸.۴) به صورت زیر است.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-\tau) \\ x_2(t-\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{f}_1(t+\tau) - f_2(t+\tau) \\ -f_1(t) \end{bmatrix} \quad (۵۱.۴)$$

۱.۳.۴ حل عددی معادلات دیفرانسیل جبری تأخیری

این بخش را به حل عددی مسائل مقدار اولیه (۲.۴)_(۱.۴) اختصاص می‌دهیم. همان‌طور که در بخش قبل بیان شد نظریه حل‌پذیری معادله (۱.۴) در حالت کلی، توسط تعمیم روش گام‌ها (یا همان الگوریتم۱) بیان شد. حال در این بخش این روش را برای حل عددی اجراء و مورد بررسی قرار می‌دهیم.
استراتژی ارائه شده در این بخش بر اساس نتایج نظری بخش قبل بوده و تحت این فرض معادله (۱.۴) از نوع تأخیری یا خنثی می‌باشد. ایده اصلی این روش این است که مستقیماً

معادله اصلی (۱.۴) را حل نمی‌کنیم بلکه به جای آن فرمول غرابت آزاد (۴۸.۴) را حل می‌کنیم که فرمی به صورت زیر

$$\begin{bmatrix}\hat{E}_i(t)\\ \circ\end{bmatrix}\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}\hat{A}_1(t)\\ \hat{A}_2(t)\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}\hat{B}_1(t)\\ \hat{B}_2(t)\end{bmatrix}x(t-\tau)+\begin{bmatrix}\hat{\gamma}_1(t)\\ \hat{\gamma}_2(t)\end{bmatrix} \tag{۵۲.۴}$$

دارد و در آن $\begin{bmatrix}\hat{E}_1^T & \hat{A}_2^T\end{bmatrix}^T$ نقطه به نقطه معکوس پذیر است . یادآوری می‌کنیم که در بخش قبل الگوریتم ۱ که یک روش موثر برای محاسبه غرابت آزاد (۴۸.۴) که نقطه به نقطه این روش پایدار است را ارائه کردیم. در هنگام اجرای الگورتیم ۱ با چک کردن شرط (۴۴.۴) می‌توان مشاهده کرد که معادله DDAE پیشرفته هست یا خیر. اکنون کار باقی مانده حل معادله (۵۲.۴) است.

به علت وجود تأخیر در معادله برای سنجیدن جواب در نقاط تأخیر، محاسبه خروجی چگال به جای یک جواب تقریبی گسسته لازم است. این الزام با درون‌یابی یا روش‌های پیوسته قابل دستیابی است [۵]. با توجه به این دلیل، به نظر می‌رسد روش های هم محلی گزینه‌های خوبی هستند که از حل کننده RADAR۵ [۲۰] برای حل معادلات تأخیری استفاده شده است، در این‌جا از نقاط روش Radau برای ادغام عددی توسط گره‌های زیر استفاده می‌کنیم.

$$\circ<\delta_1<\cdots<\delta_s=1,\qquad s\in\mathbb{N} \tag{۵۳.۴}$$

از آن‌جایی که معادله (۱.۴) از نوع خنثی یا تأخیری و τ ثابت فرض شده است تمام نقاط ناپیوستگی که ممکن است به وجود آید را می‌شناسیم. بنابراین تمام نقاط ناپیوستگی $x,\dot{x},\dots,x^{(s)}$ را تبدیل به یک شبکه[۱۲] می‌کنیم و این شبکه را به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$\pi: t_\circ<t_1<\cdots<t_N \tag{۵۴.۴}$$

که در آن N نشان دهنده تعداد نقاط شبکه است. با شبکه π در (۵۴.۴)، نقاط جابه‌جای به صورت زیر است.

$$t_{ij}=t_i+h_i\delta_j,\qquad j=1,\dots,s \tag{۵۵.۴}$$

که در آن h_i اندازه گام در هر مرحله است. برای تقریب عددی جواب، به دنبال چند جمله‌ای قطعه‌وار X_π از درجه s هستیم، یعنی $X_{\pi,i}:=X_\pi|_{[t_i,t_{i+1}]}$، تمام این چند جمله‌ای‌ها از درجه s هستند که توسط مجموعه معادلات زیر برای تمام $i=1,\dots,N$، s، $j=1,\dots,s$.تعیین می‌شوند،

$$\begin{bmatrix}\hat{E}_i(t_{ij})\\ \circ\end{bmatrix}\dot{X}_\pi(t_{ij})=\begin{bmatrix}\hat{A}_1(t_{ij})\\ \hat{A}_2(t_{ij})\end{bmatrix}X_\pi(t_{ij})+\begin{bmatrix}\hat{B}_1(t_{ij})\\ \hat{B}_2(t_{ij})\end{bmatrix}X(t_{ij}-\tau)+\begin{bmatrix}\hat{\gamma}_1(t_{ij})\\ \hat{\gamma}_2(t_{ij})\end{bmatrix}. \tag{۵۶.۴}$$

[12] mesh

اگر عامل تأخیر $X(t_{ij}-\tau)\begin{bmatrix}\hat{B}_1(t_{ij})\\ \hat{B}_2(t_{ij})\end{bmatrix}$ وجود نداشته باشد، معادله (۵۶.۴) یک سیستم خطی را برای گام‌های داخلی به صورت $j=1,\dots,s \quad X_{\pi,i},$ برای هر $i=1,\dots,l$ نشان می‌دهد. در غیر این صورت درمواردی که تأخیر $X(t_{ij}-\tau)\begin{bmatrix}\hat{B}_1(t_{ij})\\ \hat{B}_2(t_{ij})\end{bmatrix}$ در معادله (۵۶.۴) وجود دارد، باید از قبل تابع $X_\pi(t_{ij}-\tau)$ را که تقریبی از $x(t_{ij}-\tau)$ تعریف کنیم. برای این کار تعریف می‌کنیم:

$$X_\pi(t_{ij}-\tau)=\begin{cases}\phi(t_{ij}-\tau), & t_{ij}-\tau\le 0,\\ X_{\pi,k}(t_{ij}-\tau) & t_k\le t_{ij}-\tau\le t_{k+1}, 1\le k\le N\end{cases}$$

چند جمله‌ای پیوسته $X_{\pi,k}$ در گام k توسط درون‌یابی لاگرانژ از مرتبه s داده شده است یعنی:

$$X_{\pi,k}(t_k+\theta h_k)=\sum_{j=0}^{s}\mathscr{L}_j(\theta)X_{\pi,k}(t_k+\delta_j h_k) \tag{۵۷.۴}$$

که $\mathscr{L}_j(\theta)$ چند جمله‌ای لاگرانژ از درجه s است، $\mathscr{L}_j(\delta_k)=\delta_{kj}$ است که δ_{kj} دلتا کرونکر[۱۳] است. بعد از این که این شبکه بندی را انجام دادیم می‌توان از روش رانگ ـ کوتا به صورت زیر برای حل عددی مسائل مقدار اولیه استفاده کرد

$$\begin{aligned}X_n&=X_{n-1}+h_n\sum_{j=1}^{s}b_jK_{nj}, \quad i=1,2,\dots,s\\ K_{ni}&=f\left(t_{n-1}+h_n\delta_i, X_{n-1}+h_n\sum_{j=1}^{v}a_{ij}K_{nj}, X^h(t_{n-1}+h_n\delta_i-\tau)\right),\\ X_n^h(t_{n-1}+\theta h_n)&=X_{n-1}+h_n\sum_{j=1}^{s}\mathscr{L}_j(\theta)X_j(\theta)K_{nj},\end{aligned} \tag{۵۸.۴}$$

که $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{s}$، $b=(b_1,b_2,\dots,b_s)^T$ و $\delta=(\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_s)$ ضرایب روش رانگ ـ کوتا در نقاط هم محلی روش رادو هستند.

قضیه ۱.۳.۴. مسائل مقدار اولیه (۲.۴)ـ(۱.۴) را در نظر بگیرید و فرض کنید برای هر ناهمگونی سازگار f و هر تابع اولیه سازگار ϕ با توجه به f، مسائل مقدار اولیه (۲.۴) یک جواب منحصر به فرد داشته باشد، همچنین (۱.۴) از نوع خنثی یا تأخیری برای $N\in\mathbb{N}$ و$s\ge 1$ باشد و تعریف شبکه π در (۵۴.۴) و برای $i=0,\dots,N-1$ نقاط جابه‌جای $t_{ij}, j=1,\dots,s$ در (۵۵.۴) برقرار باشد، در این صورت خواهیم داشت:

۱. برای شبکه به اندازه کافی کوچک با وسعت $h_0,\dots,h_{N-1}$ یک و تنها یک چند جمله‌ای قطعه‌وار پیوسته X_π وجود دارد که دنباله (۵۶.۴) را حل می‌کند و در تمام نقاط t_i شبکه، سازگار است.

---
[13] Kronecker delta

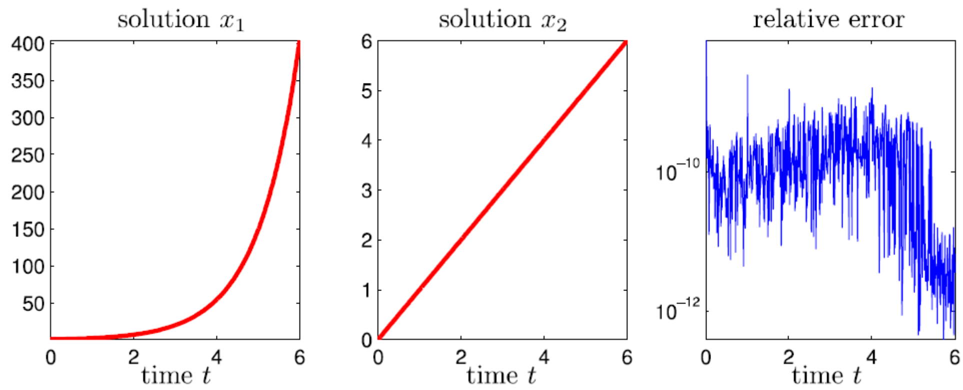
۲. مرتبه همگرایی روش جابه‌جای با روش δ_j در (۵۳.۴) از مرتبه s است یعنی:

$$\|X_e(t) - X_\pi(t)\|_{\inf} = \sup_{t\in\mathbb{I}} \|X_e(t) - X_\pi(t)\| = O(h^s),$$

که در آن X_e جواب دقیق $x \in \mathcal{C}^{s+1}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^n)$ برای مسائل مقدار اولیه (۲.۴)ـ(۱.۴) است.

برهان. [۲۶]. □

مثال ۲.۳.۴. روش عددی که در این بخش توضیح داده شد را برای مثال (۱.۳.۴) که توسط الگوریتم (۱) منظم سازی شده است را برای ۳ نقطه ($s = ۳$) رادو به کار ببریم در این صورت داریم



شکل ۱.۴: حل عددی و خطای مطلق برای (۵۰.۴)

۴.۴ نتیجه‌گیری و پیشنهادات

بنا بر مطالبی که در این پایان‌نامه بیان شد، برای ساخت یک حل کننده DDAE کلی، جایی که دستگاه می تواند غیر علتی باشد، بازسازی دستگاه قبل استفاده از روش عددی مهم و حتی گاهی بسیار ضروری است. این روش اصلاح فرم را می توان نقطه به نقطه در یک روش پایدار و قوی توسط الگوریتم ۱ انجام داد.

در این پایان‌نامه تنها به سیستم هایی با یک تأخیر که برای هر دو روش گام‌ها یا تعمیم آن مناسب هستند، پرداخته شد . درمورد دستگاه‌های چند تأخیری، ممکن است تأخیرهای جدیدی رخ دهد. در حقیقت، در [۲۱] فرم کلی یک معادله DDAE

$$E(t)\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_۱ x(t-\tau_۱) + B_۲(t)x(t-\tau_۲),$$

با دو تأخیر ثابت $\tau_۲ > \tau_۱ > ۰$ نمایش داده شده است و ممکن است شامل یک تأخیر سوم پنهان $\tau_۱ - \tau_۲$ از فرم زیر باشد:

$$۰ = C_۱(t)x(t) + C_۲(t)x(t + \tau_۱ - \tau_۲).$$

بنابراین، روش منظم سازی که هدف آن آشکار کردن دینامیک پنهان و محدودیت‌های جبری پنهان است هنوز هم برای مورد $\frac{\tau_1}{\tau_2} \notin \mathbb{Q}$ حای کار دارد. در نهایت، مشاهده کردیم که هدف روش گام‌ها و تعمیم آن، برای به کار بردن DDAE از نوع تأخیری و خنثی است ولی برای نوع پیشرفته مناسب نیست. با این حال برای برخی موارد خاص مانند مثال زیر، برای معادلات پیشرفته کار برد دارد.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t-\tau) \\ x_2(t-\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \tag{۵۹.۴}$$

در این صورت با اضافه کردن مشتق معادله دوم در اولی و حذف $\dot{x}_2(t)$ در دو طرف معادله داریم:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t-\tau) \\ x_2(t-\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t-\tau) \\ \dot{x}_2(t-\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) + \dot{f}_2(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

با این حال روش گام‌ها هنوز هم برای مسائل مقدار اولیه، دستگاه (۵۹.۴) کار می‌کند.

پیوست آ

کد الگوریتم (۱)

آ.۱ مثال (۱.۳.۴)

```
clc;
clear all;
%%%% inputs
syms t taw;
A=input('Enter a matrix A=')
E=input('Enter a matrix E=')
B=input('Enter a matrix B=')
F=input('Enter a matrix F=')
Kmax=input('Enter a matrix Kmax=')
n=input('Enter n=')
S=size(A);
nA=S(1);mA=S(2);
for kapa=0:1
%%%% M
```

```
for k=0:Kmax
M1(nA*k+1:nA*k+nA,1:mA)=-diff(A,k,t);
end
M1;
for i=0:Kmax
for j=0:Kmax
if i>j
M2(nA*i+1:nA*i+nA,mA*j+1:mA*j+mA)=nchoosek(i,j)*diff(E,i-j,t)-nchoosek(i,j+1)
*diff(A,i-j-1,t);
elseif i==j
M2(nA*i+1:nA*i+nA,mA*j+1:mA*j+mA)=E;
else
M2(nA*i+1:nA*i+nA,mA*j+1:mA*j+mA)=0;
end
end
end
M2;
M=[M1 M2];
% M(kapa+1)=M;
%%%% P
for k=0:Kmax
P1(nA*k+1:nA*k+nA,1:mA)=diff(B,k,t);
end
P1;
for i=0:Kmax
for j=0:Kmax

if i>j
P2(nA*i+1:nA*i+nA,mA*j+1:mA*j+mA)=nchoosek(i,j+1)*diff(B,i-j-1,t);
else
P2(nA*i+1:nA*i+nA,mA*j+1:mA*j+mA)=0;
end
end
end
```

```
P2;
P=[P1 P2];
% P(kapa+1)=P;
%%%% F
for k=0:Kmax
g(nA*k+1:nA*k+nA,1)=diff(F,k,t);
end
g;
% g(kapa+1)=g;
%%%% MM & PP & gg
zero=zeros(nA*(Kmax+1),mA*(Kmax+2));
if kapa==0
MM=[M];PP=[P];gg=[g];
U=null([MM(:,(2*n+1):end) PP(:,(n+1):end)]')
if (U')*PP(:,(n+1):end)~=0
disp('Sorry, advanced type')
break;
else
UM=(U')*MM(:,1:2*n)
UP=(U')*PP
Ug=(U')*gg
Mtild=(U')*MM(:,(n+1):2*n)
Ntild=(U')*MM(:,1:n)
Ptild=(U')*PP(:,1:n)
gtild=(U')*gg
Z2=null(Mtild')
T2=null((Z2')*Ntild)
Y2=orth((Z2')*Ntild)
Z1=orth(Mtild*T2)
zero2=zeros(1,2);
if rank(Mtild*T2)+rank((Z2')*Ntild)==n
kapa
Ehat=[(Z1')*Mtild;zero2]
Ahat=[(Z1')*Ntild;(Y2')*(Z2')*Ntild]
```

```
Bhat=[(Z1')*Ptild;(Y2')*(Z2')*Ptild]
Fhat=[(Z1')*gtild;(Y2')*(Z2')*gtild]
break;
end
end
elseif kapa==1
Mtaw=subs(M,t,t+taw);
Ptaw=subs(P,t,t+taw);
gtaw=subs(g,t,t+taw);
MM=[M zero;-Ptaw Mtaw];PP=[P;zero];gg=[g;gtaw];
U=null([MM(:,(2*n+1):end) PP(:,(n+1):end)]')
if (U')*PP(:,(n+1):end)~=0
disp('Sorry, advanced type')
break;
else
UM=(U')*MM(:,1:2*n)
UP=(U')*PP
Ug=(U')*gg
Mtild=(U')*MM(:,(n+1):2*n)
Ntild=(U')*MM(:,1:n)
Ptild=(U')*PP(:,1:n)
gtild=(U')*gg
Z2=null(Mtild')
T2=null((Z2')*Ntild)
Y2=orth((Z2')*Ntild)
Z1=orth(Mtild*T2)
zero2=zeros(1,2);
if rank(Mtild*T2)+rank((Z2')*Ntild)==n
kapa
Ehat=[(Z1')*Mtild;zero2]
Ahat=[(Z1')*Ntild;(Y2')*(Z2')*Ntild]
Bhat=[(Z1')*Ptild;(Y2')*(Z2')*Ptild]
Fhat=[(Z1')*gtild;(Y2')*(Z2')*gtild]
break;
```

```
end
end
elseif kapa==2
Mtaw=subs(M,t,t+taw);
Ptaw=subs(P,t,t+taw);
gtaw=subs(g,t,t+taw);
M2taw=subs(M,t,t+2*taw);
P2taw=subs(P,t,t+2*taw);
g2taw=subs(g,t,t+2*taw);
MM=[M zero zero;-Ptaw Mtaw zero;zero -P2taw M2taw];
PP=[P;zero;zero];
gg=[g;gtaw;g2taw];
U=null([MM(:,(2*n+1):end) PP(:,(n+1):end)]')
if (U')*PP(:,(n+1):end)~=0
disp('Sorry, advanced type')
break;
else
UM=(U')*MM(:,1:2*n)
UP=(U')*PP
Ug=(U')*gg
Mtild=(U')*MM(:,(n+1):2*n)
Ntild=(U')*MM(:,1:n)
Ptild=(U')*PP(:,1:n)
gtild=(U')*gg
Z2=null(Mtild')
T2=null((Z2')*Ntild)
Y2=orth((Z2')*Ntild)
Z1=orth(Mtild*T2)
zero2=zeros(1,2);
if rank(Mtild*T2)+rank((Z2')*Ntild)==n
kapa
Ehat=[(Z1')*Mtild;zero2]
Ahat=[(Z1')*Ntild;(Y2')*(Z2')*Ntild]
Bhat=[(Z1')*Ptild;(Y2')*(Z2')*Ptild]
```

```
Fhat=[(Z1')*gtild;(Y2')*(Z2')*gtild]
break;
end
end
end
end
```

مراجع

[1] Antognetti, P., Massobrio, G.:" Semiconductor Device Modeling with SPICE. McGraw-Hill", **New York** (1997)

[2] Arévalo, C., Lötstedt, P.:" Improving the accuracy of BDF methods for index 3 differential-algebraic equations".**BIT** 35, 297–308 (1995)

[3] Ascher, U.M., Petzold, L.R.: "The numerical solution of delay-differential algebraic equations of retarded and neutral type". **SIAM J. Numer. Anal.** 32, 1635–1657 (1995)

[4] Baker, C.T.H., Paul, C.A.H., Tian, H.: "Differential algebraic equations with after-effect". **J.Comput. Appl. Math**. 140, 63–80 (2002)

[5] Bellen, A., Zennaro, M.:" Numerical Methods for Delay Differential Equations " . **Oxford University Press**, Oxford (2003)

[6] Bellman, R., Cooke, K.L.: "Differential-difference equations",**Mathematics in Science and Engineering**. Elsevier Science (1963)

[7] Betts, J.T., Campbell, S.L., Thompson, K.: "Lobatto IIIA methods, direct transcription, and DAEs with delays".**Numer. Algorithms** 69, 291–300 (2015)

[8] Betts, J.T., Campbell, S.L., Thompson, K.: "Direct transcription solution of optimal control problems with differential algebraic equations with delays." In:**Proceedings of 14th IASTED International Symposium on Intelligent Systems and Control (ISC 2013), Marina del Rey,** pp.166–173, (2013)

[9] Brenan, K.E., Campbell, S.L., Petzold, L.R.: "Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential Algebraic Equations, 2nd edn". **SIAM Publications, Philadelphia** (1996)

[10] Campbell, S.L.: "Singular linear systems of differential equations with delays".**Appl. Anal**. 2, 129–136 (1980)

[11] Campbell, S.L.: ”Comments on 2-D descriptor systems”. **Automatica** 27, 189–192 (1991)

[12] Campbell, S.L.: ”Linearization of DAE’s along trajectories”. **Z. Angew. Math. Phys**. 46, 70–84 (1995)

[13] Campbell, S.L., Kunkel, P., Mehrmann, V.:” Regularization of linear and nonlinear descriptor systems”, ch. 2, In: **Biegler, L.T., Campbell, S.L.,Mehrmann, V. (eds.) Control and Optimization with Differential Algebraic Constraints, pp. 17–36. SIAM, Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia**, PA (2012)

[14] Campbell, S.L., Linh, V.H.: ”Stability criteria for differential-algebraic equations with multiple delays and their numerical solutions”. **Appl. Math Comput**. 208, 397–415 (2009)

[15] Campbell, Stephen L. / Griepentrog, Eberhard (1995): ”Solvability of general differential algebraic equations”.**SIAM Journal on Scientific Computing**, Volume 16, Issue 2, pp. 257–270.

[16] Chi, H., Bell, J., Hassard, B.: ”Numerical solution of a nonlinear advance-delay-differential equation from nerve conduction theory”. **J. Math. Biol**. 24, 583–601 (1986)

[17] ” Computing breaking points in implicit delay differential equations”,**Adv. Comput. Math.**, 29 (2008), pp. 229–247. (Cited on pages vi, viii, 2, 3, 32, 34, 35,87, 88, 89, 93, 98, 99, and 103.)

[18] Dynasim, A.B.: ”Dymola, Multi-Engineering Modelling and Simulation”, **Ideon Research Park** (2006)

[19] Gluesing-Luerssen, H.: ”Linear Delay-Differential Systems with Commensurate Delays”: **An Algebraic Approach. Springer, Berlin** (2002)

[20] Guglielmi, N., Hairer, E.: ” Computing breaking points in implicit delay differential equations”. **Adv. Comput. Math**. 29, 229–247 (2008)

[21] Ha, P.:” Analysis and numerical solution of delay differential-algebraic equations”, PhD thesis, Technische Universität Berlin (2015)

[22] Ha, P., Mehrmann, V.: ”Analysis and reformulation of linear delay differential-algebraic equations”. **Electron. J. Linear Algebra** 23, 703–730 (2012)

[23] Ha, P., Mehrmann, V., Steinbrecher, A.:” Analysis of linear variable coefficient delay differentialalgebraic equations”.**J. Dyn. Differ. Equ.** 26, 889–914 (2014)

[24] Hairer, E., Nørsett, S.P., Wanner, G.: "Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems, 2nd edn". **Springer, Berlin** (1993)

[25] Hale, J., Lunel, S.: "Introduction to Functional Differential Equations". **Springer, Berlin** (1993)

[26] Hauber, R.: "Numerical treatment of retarded differential algebraic equations by collocation methods". **Adv. Comput. Math**. 7, 573–592 (1997)

[27] Insperger, T., Wohlfart, R., Turi, J., Stepan, G.: "**Equations with advanced arguments in stick balancing models, Lecture Notes in Control and Information Sciences**", vol. 423, pp. 161–172. Springer, Berlin (2012)

[28] Kuang, Y.: Delay Differential Equations:" With Applications in Population Dynamics, Mathematics in Science and Engineering".**Elsevier Science** (1993)

[29] Kunkel, P., Mehrmann, V.: "Canonical forms for linear differential-algebraic equations with variable coefficients". **J. Comput. Appl. Math**. 56, 225–259 (1994)

[30] Kunkel, P., Mehrmann, V.: "A new class of discretization methods for the solution of linear differential algebraic equations with variable coefficients".**SIAM J. Numer. Anal.** 33, 1941–1961 (1996)

[31] Kunkel, Peter / Mehrmann, Volker (2006):"**Differential-Algebraic Equations - Analysis and Numerical Solution**". European Mathematical Society, Zürich (2006)

[32] Liu, Y.: " Runge–Kutta collocation methods for systems of functional differential and functional equations". **Adv. Comput. Math**. 11, 315–329 (1999)

[33] The MathWorks, Inc.: MATLAB Version 8.3.0.532 (R2014a), Natick (2014)

[34] The MathWorks, Inc.: Simulink Version 8.3, Natick (2014)

[35] Mehrmann, V.: "Index concepts for differential-algebraic equations". **Encyclopedia Applied Mathematics** (2015, to appear)

[36] Mehrmann, V., Shi, C.: "Transformation of high order linear differential-algebraic systems to first order". **Numer. Algebra** 42, 281–307 (2006)

[37] Oppenheim, A., Willsky, A., Nawab, S.: "Signals and Systems, Prentice-Hall signal processing series", **Prentice Hall** (1997)

[38] Pravica, D., Randriampiry, N., Spurr, M.: ”Applications of an advanced differential equation in the study of wavelets”.**Appl. Comput. Harmon. Anal.** 27, 2–11 (2009)

[39] Sand, J.: ”On implicit Euler for high-order high-index DAEs”. **Appl. Numer. Math**. 42, 411–424 (2002)

[40] Shampine, L.F., Gahinet, P.:” Delay-differential-algebraic equations in control theory”. **Appl. Numer. Math**. 56, 574–588 (2006)

[41] Thompson, K.C.: ”Solving nonlinear constrained optimization time delay systems with a direct transcription approach”, PhD thesis. North Carolina State University (2014)

[42] Tian, H., Yu, Q., Kuang, J.: ”Asymptotic stability of linear neutral delay differential-algebraic equations and Runge-Kutta methods”. **SIAM J. Numer. Anal**. 52, 68–82 (2014)

[43] Tuma, T., B ̋urmen, Á.: Circuit Simulation with SPICE OPUS: ”Theory and Practice, Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology”. **Springer, London** (2009)

[44] Weintraub, Steven H. (2009): ”**Jordan Canonical Form: Theory and Practice**”. Morgan and Claypool

[45] Zhu, W., Petzold, L.R.: ”Asymptotic stability of linear delay differential-algebraic equations and numerical methods”.**Appl. Numer. Math**. 24, 247–264 (1997)

[46] Zhu, W., Petzold, L.R.: ”Asymptotic stability of Hessenberg delay differential-algebraic equations of retarded or neutral type”. **Appl. Numer. Math**. 27, 309–325 (1998)

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اندیس	Index
اصلاح	Modification
بعد، اندازه	Dimension
برعکس	Versa
پوچ توان	Nilpotent
تاخیر	Delay
تناظر یک به یک	1-to-1 Correspondence
تحلیلی	Analytical
تفاضلات پسرو	Bachward difference
تقریب	Approximation
تکرار	Iteration
ثابت	Constant
جواب دقیق	Exact solution
خنثی	Neutral
خطای مطلق	Absolute error
خطی	Linear
دامنه	Domain
درونیابی	Interpolation
دلخواه	Arbitrarily
دنباله	Sequence
سازگار	Consistent
شرایط	Conditions
ضریب	Coefficient
عملگر	Operator
عجیب، غرابت	Strangeness
فرامعین	Overdetermined

فرومعین	Underdetermined
قطری	Diagonal
قطعه وار	Piecewise
قید، محدودیت	Constraint
کانونی	Canonical
کاهش	Reduction
متوالی	Successive
مرتبه	Order
مستقل	Independent
مسئله مقدار اولیه	Initial value problems
مشتق آرایه‌ای	Derivative array
معادل ، هم ارز	Equivalent
جبری	Algebraic
معادله مشخصه	Characteristic equation
معکوس پذیر	Invertible
ماتریس یکانی	Unitary matrix
منحصر به فرد	Uniquely
مقدار تکین	Singular value
منتظم	Regular
هموار	Smooth
مؤلفه	Component
ناپیوستگی	Discontinuity
نامنفرد	Non-singular
نتیجه	Corollary
نگاشت	Mapping
همسایگی	Neighborhood
هم محلی	Collocation

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Absolute error	خطای مطلق
Algebraic	جبری
Analytical	تحلیلی
Approximation	تقریب
Arbitrarily	دلخواه
Bachward difference	تفاضلات پسرو
Bidiagonal	دوقطری
Canonical	کانونی
Characteristic equation	معادله مشخصه
Coefficient	ضریب
Conditions	شرایط
Corollary	نتیجه
Collocation	هم محلی
Smooth	هموار
Component	مؤلفه
Consistent	سازگار
Constant	ثابت
Constraint	قید، محدودیت
Cokernel	هم‌هسته
Corange	هم‌دامنه
Diagonal	قطری
Dimension	بعد، اندازه
Discontinuity	ناپیوستگی
Delay	تاخیر
Domain	دامنه
Equivalent	معادل ، هم ارز

Exact solution .... جواب دقیق
Derivative array .... مشتق آرایه‌ای
Independent .... مستقل
Index .... اندیس
Inhomogeneity .... ناهمگونی
Initial value problems .... مسئله مقدار اولیه
Interpolation .... درونیابی
Invertible .... معکوس پذیر
Iteration .... تکرار
Linear .... خطی
Mapping .... نگاشت
Neighborhood .... همسایگی
Neutral .... خنثی
Non-singular .... نامنفرد
Nilpotent .... پوچ توان
Operator .... عملگر
Order .... مرتبه
Overdetermined .... فرامعین
Piecewise .... قطعه وار
Reduction .... کاهش
Regular .... منتظم
Sequence .... دنباله
Strangeness .... غریب، عجیب
Singular .... منفرد
Singular value .... مقدار تکین
Successive .... متوالی
Uniquely .... منحصر به فرد
Underdetermined .... فرومعین
Unitary matrix .... ماتریس یکانی
Versa .... برعکس

نمایه

Aabstract

In this thesis, an analytic and numerical solution of the initial value problems of non-causal delay linear differential equations is considered. In general, it is possible that the corresponding initial value problem of a non-causal DDAE possesses a unique solution, even though the associated DAE is neither square nor uniquely solvable. Such non-square systems arise in many applications, in particular for dynamical systems which are automatically generated by modeling and simulation software, due to redundant conditions and equations may make the resulting system over- or under-determined. The numerical solution of these equations with numerical methods such as Rang-Kuta or a backward difference formula may not be correct, therefore, in order for numerical methods to be applied to these equations well, these types of equations must be regulated in order to allow for regularized equations Solved with any numerical method. In the following, we introduce the derivative index for set over- or under-determined, which is called the Strangeness index, and we use it for the under-determined algebraic differential equations, and we will use the notion of Strangeness index for delayed linear algebraic differential equations, and we obtain the compatibility, smooth and uniqueness conditions of the device's solvability using this index. In the end, we solve two types of neutral and delayed equations non-causal delay linear differential algebraic respectively analytically and numerically.
keywords: Differential-algebraic equation, Delay differential-algebraic equation, Delay differential equations, Method of steps, Derivative array, Strangeness index.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Numerical analysis

Analysis and numerical solution system of linear delay differential-algebraic equations

By: Amin Amraei

Supervisor

Dr. M. Ghovatmand

Advisor

Dr. A. Mesforush

July 2018