

حاشا
البربر
البربر



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

پایان نامه کارشناسی ارشد

بررسی شاخص وینر در گراف‌های با قطر ثابت

نگارنده: حمید رحیمی

استادان راهنما

دکتر صادق رحیمی شعرباف
دکتر نادر جعفری راد

تیرماه ۱۳۹۷

شماره:
تاریخ:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صور تجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای حمید رحیمی
با شماره دانشجویی ۹۳۰۸۰۵۴ رشته ریاضی کاربردی گرایش گراف و ترکیبیات
تحت عنوان بررسی شاخص وینر در گرافهای با قطر ثابت
که در تاریخ ۱۳۹۷/۴/۲۳ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید
به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با امتیاز ... ۱۵، ۱۷، ۱۹ درجه خراب ...) <input checked="" type="checkbox"/>	مردود <input type="checkbox"/>
نوع تحقیق: نظری <input type="checkbox"/>	عملی <input type="checkbox"/>

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر صادق رحیمی شرباف	استادیار	
۲- استاد راهنمای دوم	دکتر نادر جعفری راد	دانشیار	
۳- استاد مشاور	-----	-----	-----
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر محمد رضا ربیعی	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر میثم علیشاهی	استادیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر عبدالله آل هوز	استادیار	



نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم به آنان که آموختند مرا
تمامی استیادی که در این سالها بارز حمت آموزشتم بردوششان بوده است.
تقدیم به پدر و مادرم
که وجودم جز بیهی وجودشان نیست.
تقدیم به همسر مهربانم
که با صبرش در تمام محظات رفیق راهم بود.
و تقدیم به گل های زندگیم
که کودکی گمشده ام را در چهره معصومشان پیدا کردم.

سپاس‌گزاری...

سپاس بیکران پروردگار یکتا را که هستی مان، نخبید و به طریق معرفت، رهنمونان شد و به بهمنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه‌چینی از علم و معرفت را روزی‌ان ساخت.

پس از ارادت خاضعانه به درگاه خداوندی، به‌تلازم است از اساتید گرامی دانشکده‌ی ریاضی، بخصوص جناب آقای دکتر رحیمی شرف‌آباد و جناب آقای دکتر جعفری راد به خاطر سعی‌ی صدرور، بنمودهای دلسوزانه‌شان قدردانی بسیار نمایم. و نیز از زحمات دیگر عزیزان علی‌الخصوص سرکار خانم دکتر سیاهی بابت زحمانی که متقبل شدند نهایت تشکر را دارم.

حمید رحیمی
تیرماه ۱۳۹۷

تعهد نامه

اینجانب حمید رحیمی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **بررسی شاخص وینر در گراف‌های با قطر ثابت**، تحت راهنمایی **صادق رحیمی شعرباف** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

حمید رحیمی

تیرماه ۱۳۹۷

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

شاخصهای توپولوژیک، اعدادی حقیقی هستند که تحت یکرختی گرافها ثابت میمانند. شاخص وینر گراف W نمایش داده می شود، قدیمی ترین شاخص توپولوژیک است، که از آن در تعیین برخی خواص فیزیکی و شیمیایی مواد استفاده می شود. در این پایان نامه شاخص وینر روی درختها و گرافهای تکدور مورد مطالعه قرار می گیرد. در این رابطه کمترین مقدار شاخص وینر روی گرافهای با قطر ثابت بررسی می شود.

کلمات کلیدی: شاخص وینر، درخت، گراف تکدور، قطر ثابت.

پیش‌گفتار

گرافها، مدل‌های ریاضی کارآمدی برای تحلیل بسیاری از مسائل دنیای واقعی هستند. مسائل معینی در فیزیک، شیمی، علوم مخابراتی، علوم کامپیوتر، ژنتیک، روان‌شناسی و زبان‌شناسی را می‌توان به صورت مسائلی در نظریه گراف، فرمول‌بندی کرد. همچنین بسیاری از شاخه‌های ریاضی مثل نظریه‌ی گروهها، نظریه‌ی ماتریسها، احتمال و توپولوژی تاثیرهای متقابلی با نظریه‌ی گراف دارند.

برخی از معماها و مسائل متنوع کاربردی طبیعی سبب توسعه‌ی مباحث متنوع نظریه‌ی گراف شده‌اند. مساله‌ی مشهور «پلهای کونینسبرگ» الهام‌بخش توسعه‌ی نظریه‌ی گرافهای اویلری بوده و یا بازی «دور دنیا» ی ویلیام همیلتون، باعث توسعه‌ی نظریه‌ی گرافهای همیلتونی شده است. نظریه‌ی گرافهای بدون دور برای حل مسائل مدارهای الکتریکی توسعه یافته و مطالعه‌ی درختها برای شمارش ایزومرهای ترکیبهای شیمیایی بسط داده شده است. ساختار مولکولی داروها و سایر ترکیبات شیمیایی را می‌توان به صورت اشکالی مثل چندضلعیها، مسیرها، درختها، گرافها و ... مدل‌سازی کرد. هر اتم از مولکول به صورت یک رأس و پیوند کوالانسی بین اتمها توسط یالهای بین رئوس نشان داده می‌شوند. این ساختار ترکیب شیمیایی، گراف مولکولی آن گویند.

شاخص توپولوژیکی عددی حقیقی است که به یک گراف مولکولی نسبت داده می‌شود. این عدد، ثابتی ساختاری است. یعنی به برجسب‌گذاری و یا نمایش تصویری گراف وابستگی ندارد. شاخص‌های توپولوژیکی، به دو دسته‌ی زیر تقسیم می‌شوند:

● بر مبنای فاصله (مثل شاخص وینر)

● بر مبنای درجه‌ی رئوس (مثل شاخص راندیک)

شاخص وینر، اولین شاخص توپولوژیکی معرفی شده است. این شاخص، اولین بار در سال ۱۹۴۷ توسط شیمی‌دانی به نام هارولد وینر، برای نشان دادن رابطه‌ی بین خواص فیزیکی و شیمیایی ترکیبات آلی و ساختار توپولوژیکی گرافهای مولکولی آنها، معرفی شد [۲۵] و [۲۷] و [۲۴] و [۲۶]. در شیمی، شاخص وینر، مجموع همه‌ی فاصله‌ی کربن-کربن‌ها در یک گراف مولکولی است.

هدف اصلی، از مطالعه‌ی شاخص وینر در شیمی، تشخیص ترکیب شیمیایی از مولکولهای معمولی است، بطوریکه ترکیب حاصل دارای شاخص وینر داده شده باشد.

شاخص وینر در شیمی عمدتاً با ترکیبات شیمیایی که مولکولهای آلی بدون دور دارند، سروکار دارد [۹] و [۱۰] و [۱۵] و [۱۸]. این بدین معنی است که گراف مولکولی متناظر با این ترکیبات، درخت است [۱۷]. به همین دلیل بیشتر کار روی شاخص وینر مربوط به درختها می‌شود.

اخيراً پیدا کردن گرافهایی با کمترین یا بیشترین شاخص توپولوژیکی مورد توجه قرار گرفته است [۶] و [۸] و [۹] و [۱۶] و [۲۸] و [۳۰]. در فصل دوم این پایان نامه به بررسی درختهای با قطر ثابت که کمترین مقدار شاخص وینر را دارند، می پردازیم.

به غیر از درختها، برخی گرافهای تکدور نیز مورد بررسی قرار گرفته اند. به عنوان مثال در [۲۳] گرافهای تکدور n رأسی با سه کمترین و بیشترین شاخص وینر مشخص شده اند. یا [۱۹] که اشتباهات [۲۳] را اصلاح کرده و طبقه بندی گرافهای تکدور با کمترین و بیشترین شاخص وینر را تکمیل کرده است. برای مطالعه ی موارد بیشتر می توان به [۱۴] و [۲۹] و [۲۰] ، [۱۱] و [۲۲] و [۱۳] و [۱۲] مراجعه کرد.

در ایران نیز شاخص وینر مورد بررسی قرار گرفته است که به عنوان نمونه می توان به [۱] و [۳] و [۵] و [۴] اشاره کرد.

در این پایان نامه، ضمن معرفی شاخص وینر، به بررسی آن روی درختها و گرافهای تکدور با قطر ثابت می پردازیم. لازم به ذکر است این پایان نامه از مقالات زیر برگرفته شده است.

1. Liu H. and Pan X.F. (2008), "On the Wiener Index of Trees with Fixed Diameter", **MATCH Commun. Math. Compute. Chem.**, 60, pp85-94
2. Tan S.W. (2018), "The minimum Wiener index of unicyclic graphs with fixed diameter", **J. Appl. Math. Comput.**, 56 , pp 93-114

فهرست مطالب

ق	فهرست تصاویر
ش	فهرست جداول
۱	۱ مقدمات و تعاریف
۱	۱.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه گراف
۳	۲.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه شاخص وینر
۷	۲ بررسی شاخص وینر روی درختهای با قطر ثابت
۷	۱.۲ مقدمه
۸	۲.۲ لم‌ها
۱۳	۳.۲ نتایج
۱۹	۳ شاخص وینر در گراف‌های تک‌دور
۱۹	۱.۳ مقدمه
۱۹	۲.۳ لم‌ها
۲۳	۳.۳ کمترین شاخص وینر در $\Phi(n, d)$
۴۳	آ شاخص وینر گرافهای خاص
۴۵	مراجع
۴۹	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۵۱	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فهرست تصاویر

۸	G, G_1^*, G_2^* گراف‌های	۱.۲
۱۰	$G_{s,t}$ گراف	۲.۲
۱۳	$T_{n,d,i}, Z_{n,d,i,j}, X_{n,d,i}, Y_{n,d,i}$ گراف‌های	۳.۲
۲۱	$u_0 = a_{\lfloor \frac{m}{q} \rfloor}$ و $v_0 = a_0$ با $R_{s,i,m}^{t,l}$ گراف	۱.۳

فهرست جداول

۴۳ شاخص وینر بعضی گرافهای خاص	۱.آ
----	----------------------------------	-----

فصل ۱

مقدمات و تعاریف

در این فصل به بیان تعاریف و قضایای نظریه‌ی گراف و شاخص وینر می‌پردازیم. این فصل در دو بخش تنظیم شده است که در بخش اول به مفاهیم و تعاریف نظریه‌ی گراف و در بخش دوم به شاخص وینر می‌پردازیم.

مفاهیم و تعاریف و قضایای بخش اول برگرفته از [۲] است. برای مفاهیم و تعاریف بخش دوم نیز از [۱] استفاده شده است.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه گراف

تعریف ۱.۱.۱. گراف G سه‌تایی مرتب $(V(G), E(G), I_G)$ است که در آن $V(G)$ مجموعه‌ای ناتهی از عناصری به نام رأسها است و $E(G)$ مجموعه‌ای مجزا از $V(G)$ است که اعضای آن را یالهای گراف G گویند و I_G نیز تابعی است که به هر عضو $E(G)$ یک جفت نامرتب (و نه لزوماً مجزا) از اعضای $V(G)$ را نسبت میدهد و آنرا تابع وقوع می‌گویند.

تعریف ۲.۱.۱. دو رأسی را که بر یک یال واقع شده‌اند رأسهای مجاور یا همسایه گویند و به همین ترتیب دو یالی را که دارای رأسی مشترک هستند، یالهای مجاور می‌گویند.

تعریف ۳.۱.۱. $n(G) = |V(G)|$ و $m(G) = |E(G)|$ را به ترتیب مرتبه و اندازه گراف گویند.

تعریف ۴.۱.۱. یالی که ابتدا و انتهایش یک رأس باشد را طوقه و مجموعه یالهایی که رأسهای ابتدایی و انتهایی یکسان دارند را یالهای موازی گویند.

تعریف ۵.۱.۱. گرافی بدون طوقه و یالهای موازی را گراف ساده گویند.

تعریف ۶.۱.۱. درجه‌ی رأس v در گراف G که با $deg_G(v)$ نشان داده می‌شود، برابر است با تعداد یالهایی که از این رأس می‌گذرند.

قضیه ۱.۱.۱. مجموع درجات رئوس یک گراف ساده ۲ برابر تعداد یالهای آن است.

تعریف ۷.۱.۱. کمترین و بیشترین درجه‌ی رأس‌های گراف G را با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۸.۱.۱. برای رأس دلخواه v از گراف G ، $N_G(v)$ که آن را همسایگی باز رأس v گویند، برابر است با مجموعه‌ی رأسهای مجاور v ؛ یعنی

$$N_G(v) = \{w \in V(G); vw \in E(G)\},$$

و همسایگی بسته‌ی v که با $N_G[v]$ نشان داده می‌شود، برابر است با $N_G(v) \cup \{v\}$.

تعریف ۹.۱.۱. رأس با درجه‌ی صفر را رأس تنها و رأس با درجه‌ی یک را رأس آویزان گویند. به همین ترتیب یال مجاور رأس آویزان را، یال آویزان گویند.

تعریف ۱۰.۱.۱. در گراف G دنباله‌ای از رئوس، که بین هر دو رأس متوالی، یالی از G باشد را مسیر می‌گویند. آنرا با P_n نشان می‌دهند که n تعداد یالهای مسیر است.

تعریف ۱۱.۱.۱. اگر رأس ابتدا و انتهای مسیر یکی باشد، آنرا دور می‌گویند.

تعریف ۱۲.۱.۱. گرافی که در آن بین هر دو رأس، مسیری باشد، گراف همبند می‌نامند.

تعریف ۱۳.۱.۱. در گراف G برای هر دو رأس $u, v \in V(G)$ فاصله‌ی u و v را با $d_G(u, v)$ نشان می‌دهند که برابر با طول کوتاهترین مسیر بین دو رأس است.

تعریف ۱۴.۱.۱. طول بلندترین مسیر بین تمام رئوس گراف G را قطر آن گویند و با $diam(G)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۵.۱.۱. طول کوتاهترین مسیر بین تمام رئوس گراف G را شعاع آن گویند و با $rad(G)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۶.۱.۱. برای رأس u از گراف G ، بیشترین فاصله‌ای که بقیه‌ی رئوس از u دارند را گریز از مرکز u گویند و با $ecc(u)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۷.۱.۱. $G-v$ گرافی است که از گراف G با حذف کردن رأس v به دست می‌آید. متقابلاً با اضافه کردن رأس u به G گراف $G+u$ به دست می‌آید.

تعریف ۱۸.۱.۱. $G-uv$ گرافی است که از گراف G با حذف کردن یال uv به دست می‌آید. متقابلاً با اضافه کردن یال uv که قبلاً در گراف نبوده است، گراف $G+uv$ به دست می‌آید.

تعریف ۱۹.۱.۱. در یک گراف همبند به مجموعه‌ی رئوسی که با حذف آنها گراف ناهمبند شود، رأسهای برشی می‌گویند.

تعریف ۲۰.۱.۱. در یک گراف همبند به مجموعه‌ی یالهایی که با حذف آنها گراف ناهمبند شود، یالهای برشی می‌گویند.

تعریف ۲۱.۱.۱. گراف دوبخشی گرافی است که راس‌هایش را می‌توان به دو مجموعه مجزا مثل U و V تقسیم کرد، طوری که هر یال از آن گراف، یک رأس از U را به یک رأس از V متصل می‌کند.

تعریف ۲۲.۱.۱. گراف کامل n رأسی K_n ، گرافی است که بین هر دو رأس آن یالی وجود داشته باشد.

تعریف ۲۳.۱.۱. گراف همبند بدون دور را درخت می‌گویند.

تعریف ۲۴.۱.۱. در درخت، رأسی را درجه‌ی یک داشته باشد برگ می‌گویند.

قضیه ۲.۱.۱. در درخت بین هر دو رأس مسیری یکتا وجود دارد.

قضیه ۳.۱.۱. هر درخت نابديهی حداقل دو رأس از درجه‌ی یک دارد.

قضیه ۴.۱.۱. اگر گراف G درخت باشد، داریم $|E(G)| = |V(G)| - 1$

۲.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه شاخص وینر

مفهوم فاصله‌ی بین دو رأس در عین ساده بودن، دارای نکات و نتایج شگفت‌انگیزی است. فاصله منجر به تعریف چندین پارامتر مختلف مانند شعاع، قطر، میانگین فاصله‌ها و اندازه متریک در گراف می‌شود. شاخص وینر ارتباط تنگاتنگی با مفهوم فاصله دارد.

در گراف ساده، همبند و بدون جهت G ، تابع فاصله با تعریف گفته شده، یک متر روی مجموعه‌ی $V(G)$ است. یعنی برای $u, v, w \in V(G)$ داریم

$$d_G(u, v) > 0 \quad \bullet$$

$$d_G(u, v) = 0 \quad \Leftrightarrow u = v \quad \bullet$$

$$d_G(u, v) = d_G(v, u) \quad \bullet$$

$$d_G(u, v) \leq d_G(u, w) + d_G(v, w) \quad \bullet$$

در آخرین مورد، تساوی در صورتی برقرار است که w در کوتاهترین مسیر بین u و v قرار داشته باشد.

در سرتاسر این پایان نامه منظور از گراف، گرافی ساده، همبند، متناهی، و غیر جهت دار است.

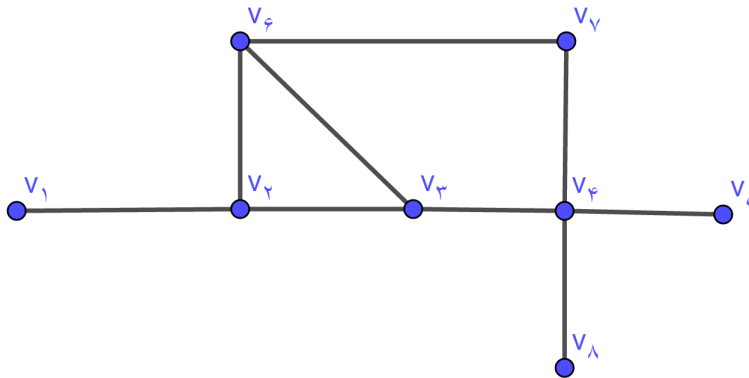
تعریف ۱.۲.۱. شاخص وینر گراف G ، برابر مجموع فواصل بین تمام رئوس گراف است. یعنی

$$W(G) = \sum_{x,y \in V(G)} d_G(x,y)$$

تعریف ۲.۲.۱. میانگین فاصله‌ی بین رأسهای گراف G به صورت زیر تعریف می شود

$$\mu(G) = \frac{W(G)}{\binom{|V(G)|}{2}}$$

برای درک بهتر با یک مثال محاسبه‌ی شاخص وینر را برای گرافی ساده نشان می دهیم. اگر G را گراف شکل زیر در نظر بگیریم



$$\begin{aligned} W(G) &= (1+2+3+4+2+3+4) + (1+2+3+1+2+3) \\ &\quad + (1+2+1+2+2) + (1+2+1+1) \\ &\quad + (3+2+2) + (1+2) + 2 \\ &= 57. \end{aligned}$$

و میانگین فاصله‌ی رئوس گراف G می شود

$$\mu(G) = \frac{57}{\binom{8}{2}} = \frac{57}{28} \approx 2.0357.$$

تعاریف و مفاهیم اولیه شاخص وینر ۵

تعریف ۳.۲.۱. فاصله‌ی رأس v در گراف G که با $D(G, v)$ نشان داده می‌شود، برابر مجموع فاصله‌های آن رأس از دیگر رئوس گراف است.

تعریف ۴.۲.۱. با توجه به تعریف قبل، شاخص وینر را به صورت زیر هم می‌توان محاسبه کرد

$$W(G) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} D(G, v)$$

که ضریب $\frac{1}{2}$ برای جبران دو بار شمرده شدن مسیر بین هر دو رأس است.

تعریف ۵.۲.۱. در هر درخت، رأسی که درجه‌اش از ۲ بیشتر باشد را رأس شاخه‌ای می‌گویند.

ملاحظه ۱.۲.۱. هر درخت با n رأس حداقل ۲ برگ و حداکثر $\frac{n-2}{3}$ رأس شاخه‌ای دارد.

ملاحظه ۲.۲.۱. برای هر مسیر P_n داریم

$$W(P_n) = \binom{n+1}{3}$$

و برای هر گراف ستاره‌ی S_n داریم

$$W(S_n) = (n-1)^2$$

ملاحظه ۳.۲.۱. در بین گرافهای همبند با تعداد رأس مشخص، K_n کمترین شاخص وینر را دارد.

ملاحظه ۴.۲.۱. در بین تمام درختان با تعداد رأس مشخص، S_n کمترین شاخص وینر را دارد.

ملاحظه ۵.۲.۱. در بین تمام گرافهای همبند با تعداد رأس مشخص، P_n بیشترین شاخص وینر را دارد.

در جدول ۱.آ روابط مربوط به شاخص وینر بعضی گرافهای خاص ارائه شده است.

فصل ۲

بررسی شاخص وینر روی درخت‌های با قطر ثابت

۱.۲ مقدمه

شاخص توپولوژیکی عددی حقیقی است که به یک گراف نسبت داده می‌شود. این عدد، ثابتی ساختاری است، یعنی به برچسب‌گذاری و یا نمایش تصویری گراف وابستگی ندارد.

شاخص وینر، W ، اولین شاخص توپولوژیکی استفاده شده در شیمی است. این شاخص توسط شیمیدانی به نام هارولد وینر در سال ۱۹۴۷ برای نشان دادن رابطه‌ی بین خواص فیزیکی و شیمیایی ترکیبات آلی با ساختار توپولوژیکی گراف‌های مولکولی آن‌ها معرفی شده است. از این مفهوم، برای ارتباط خواص یک ترکیب شیمیایی با گراف مولکولی آن استفاده می‌شود. در شیمی شاخص وینر، مجموع همه‌ی فاصله‌ی کربن-کربن‌ها در یک گراف مولکولی است.

شاخص وینر عمدتاً در مورد ترکیبات شیمیایی که مولکول‌های آلی بدون دور دارند، کاربرد دارد. که این یعنی گراف مولکولی متناظر با این ترکیبات درخت است. به همین دلیل، بیشتر کار روی شاخص وینر، مربوط به درخت‌ها است.

در این فصل با بررسی شاخص وینر روی درخت‌ها، به معرفی خانواده‌ای از درخت‌ها با قطر ثابت می‌پردازیم که دارای کمترین شاخص وینر باشند. به این منظور درخت T را از مرتبه n و قطر d در نظر می‌گیریم. اگر $d = n - 1$ ، آنگاه $T \cong P_n$ و اگر $d = 2$ ، $T \cong K_{1,n-1}$ می‌شود. که

در هر دو حالت شاخص وینر درختهای ذکر شده محاسبه شده و معلوم هستند.

تعریف ۱.۱.۲. با فرض $۳ \leq d \leq n - ۲$ ، مجموعه $\mathcal{T}_{n,d}$ را این گونه تعریف می کنیم:

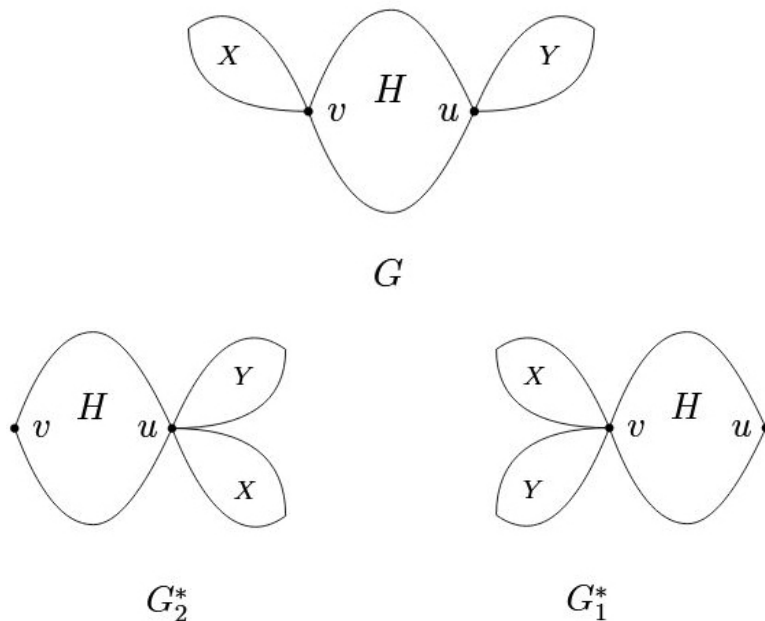
$$\mathcal{T}_{n,d} = \{T : \text{درختی از مرتبه } n \text{ و قطر } d \text{ که } ۳ \leq d \leq n - ۲\},$$

۲.۲ لمها

در این بخش چند لم ارائه می کنیم که از آنها در اثبات نتایج این فصل استفاده خواهیم کرد.

لم ۱.۲.۲. H, X, Y را سه گراف همبند و دوبندو مجزا در نظر می گیریم. اگر u و v را دو رأس از H ، v' را رأسی از X و u' را هم رأسی از Y در نظر بگیریم، گراف G را بدین صورت می سازیم که رأسهای u و u' و متقابلاً رأسهای v و v' را برهم نشانی می کنیم. گراف G^* را با برهم نشانی v و v' ساخته و گراف G^* را هم با برهم نشانی u و u' می سازیم. خواهیم داشت:

$$W(G_1^*) < W(G) \text{ یا } W(G_2^*) < W(G)$$



شکل ۱.۲: گرافهای G, G_1^*, G_2^*

برهان. اگر x و y را دو رأس از G در نظر بگیریم آنگاه با توجه به شکل ۱.۲ و تعریف شاخص وینر می توان حالت های زیر را در نظر گرفت:

۱. هر دو رأس در H
۲. هر دو رأس در X
۳. هر دو رأس در Y
۴. یکی در H و دیگری در $Y - u$
۵. یکی در H و دیگری در $X - v$
۶. یکی در $X - v$ و دیگری در $Y - u$

داریم:

$$\begin{aligned}
 W(G) &= \sum_{x,y \in V(H)} d_G(x,y) + \sum_{x,y \in V(X)} d_G(x,y) + \sum_{x,y \in V(Y)} d_G(x,y) \\
 &+ \sum_{\substack{x \in V(H) \\ y \in V(X-v)}} d_G(x,y) + \sum_{\substack{x \in V(H) \\ y \in V(Y-u)}} d_G(x,y) + \sum_{\substack{x \in V(X-v) \\ y \in V(Y-u)}} d_G(x,y) \\
 &= \sum_{x,y \in V(H)} d_H(x,y) + \sum_{x,y \in V(X)} d_X(x,y) + \sum_{x,y \in V(Y)} d_Y(x,y) \\
 &+ \sum_{\substack{x \in V(H) \\ y \in V(X-v)}} d_G(x,y) + \sum_{\substack{x \in V(H) \\ y \in V(Y-u)}} d_G(x,y) + \sum_{\substack{x \in V(X-v) \\ y \in V(Y-u)}} d_G(x,y)
 \end{aligned}$$

برای G_1^* و G_2^* هم می‌توان همین حالات را در نظر گرفت و به طور مشابه محاسبات را انجام داد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 W(G) - W(G_1^*) &= \sum_{\substack{x \in V(X-v) \\ y \in V(Y-u)}} [d_G(x,y) - d_{G_1^*}(x,y)] + \sum_{\substack{x \in V(H) \\ y \in V(Y-u)}} [d_G(x,y) - d_{G_1^*}(x,y)] \\
 &> \sum_{\substack{x \in V(H) \\ y \in V(Y)}} [d_G(x,y) - d_{G_1^*}(x,y)] \\
 &= \sum_{x \in V(H-u-v)} [d_H(x,u) - d_H(x,v)] \tag{1.2}
 \end{aligned}$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد که:

$$\begin{aligned}
 W(G) - W(G_2^*) &= \sum_{\substack{x \in V(X) \\ y \in V(Y)}} [d_G(x,y) - d_{G_2^*}(x,y)] + \sum_{\substack{x \in V(X-v) \\ y \in V(H)}} [d_G(x,y) - d_{G_2^*}(x,y)] \\
 &> \sum_{x \in V(H-u-v)} [d_H(x,v) - d_H(x,u)] \tag{2.2}
 \end{aligned}$$

حال فرض می‌کنیم $W(G) - W(G_1^*) \leq 0$. با توجه به (۱.۲) داریم:

$$\sum_{x \in V(H-u-v)} [d_H(x,u) - d_H(x,v)] < 0$$

و با توجه به (۲.۲) خواهیم داشت:

$$W(G) - W(G^*) > 0$$

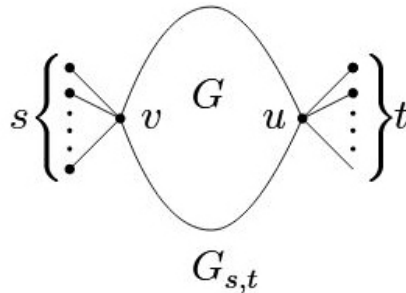
□

نتیجه ۱.۲.۲. گراف G و دو رأس u و v از آن را در نظر بگیرید. اگر گرافی $G_{s,t}$ باشد که از G با اضافه کردن s و t رأس آویزان به u و v به دست آمده باشد، آنگاه

$$W(G_{s-i,t+i}) < W(G_{s,t}) \quad 1 \leq i \leq s$$

$$W(G_{s+i,t-i}) < W(G_{s,t}) \quad 1 \leq i \leq t$$

شکل ۲.۲: گراف $G_{s,t}$



برهان. با توجه به تعریف شاخص وینر، و با نگاه به شکل ۲.۲، به سادگی می‌توان دید که اندازه‌ی فاصله‌ی بین هر رأس x از رئوس آویزان متصل به u و رأس آویزان y متصل به v برابر است با

$$d_G(x, y) = 1 + d_G(u, v) + 1$$

حال چنانچه i رأس را از یک طرف به طرف دیگر منتقل کنیم، به مقدار $id_G(u, v)$ از $W(G_{s,t})$ کم می‌شود. □

گراف‌های همبند H_1 و H_2 را در نظر بگیرید، به صورتی که $V(H_1) \cap V(H_2) = \{v\}$ باشد. گراف $H_1 v H_2$ را اینگونه در نظر می‌گیریم که $V(G) = V(H_1) \cup V(H_2)$ و $E(G) = E(H_1) \cup E(H_2)$ ، حال با توجه به تعریف اندیس وینر داریم:

لم ۲.۲.۲. اگر H گرافی همبند و T_l درختی از مرتبه‌ی l باشد و داشته باشیم $V(H) \cap V(T_l) = \{v\}$ آنگاه

$$W(HvT_l) \geq W(HvK_{1,l-1})$$

و تساوی تنها در صورتی برقرار است که $HvT_l \cong HvK_{1,l-1}$ که در آن v با مرکز ستاره‌ی $K_{1,l-1}$ برهم‌نشانی شده است.

برهان. می‌دانیم که بین تمام درختان n رأسی، کمترین شاخص وینر مربوط به ستاره‌ی S_n است. با توجه به همین نکته حکم ثابت می‌شود. \square

لم ۳.۲.۲. در گراف همبند G ، رأس v را رأسی آویزان و u را رأس مجاور آن در نظر می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$W(G) = W(G - v) + D_{G-v}(u) + n - 1.$$

برهان. با توجه به تعریف اندیس وینر داریم:

$$\begin{aligned} W(G) &= \sum_{x,y \in V(G-v)} d_G(x,y) + \sum_{x \in V(G)} d_G(x,v) \\ &= W(G - v) + D_{G-v}(u) + n - 1. \end{aligned}$$

\square

لم ۴.۲.۲. گراف همبند و نابديهی G و رأس v از آن را در نظر می‌گیریم. گراف $G_{k,m}^*$ را بدین صورت می‌سازیم که دو مسیر $P = vv_1v_2 \cdots v_k$ و $Q = vu_1u_2 \cdots u_m$ که $(k \geq m \geq 1)$ را در رأس v به گراف G متصل می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$W(G_{k,m}^*) < W(G_{k+1,m-1}^*).$$

برهان. با توجه به لم ۳.۲.۲ داریم:

$$W(G_{k,m}^*) = W(G_{k,m-1}^*) + D_{G_{k,m-1}^*}(u_{m-1}) + |G_{k,m}^*| - 1$$

و

$$W(G_{k+1,m-1}^*) = W(G_{k,m-1}^*) + D_{G_{k,m-1}^*}(v_k) + |G_{k+1,m-1}^*| - 1$$

حال

$$W(G_{k,m}^*) - W(G_{k+1,m-1}^*) = D_{G_{k,m-1}^*}(u_{m-1}) - D_{G_{k,m-1}^*}(v_k) < 0$$

که این یعنی

$$W(G_{k,m}^*) < W(G_{k+1,m-1}^*)$$

\square

لم ۵.۲.۲. مسیر $P = v_0v_1 \cdots v_d$ از مرتبه‌ی $d+1$ را در نظر می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$D_P(v_j) = \frac{2j^2 - 2dj + d^2 + d}{2} \quad 1 \leq j \leq d-1$$

و اگر $\frac{d}{4} \leq i < j \leq d-1$ و چنانچه $D_P(v_i) > D_P(v_j)$ ، آنگاه $1 \leq i < j \leq \frac{d}{4}$ ، آنگاه $D_P(v_j) < D_P(v_i)$.

۱۲ بررسی شاخص وینر روی درختهای با قطر ثابت

برهان. با توجه به تعریف تابع D داریم:

$$D_P(v_j) = (1 + 2 + \dots + j) + (1 + 2 + \dots + (d - j)) = \frac{2j^2 - 2dj + d^2 + d}{2}$$

□

۳.۲ نتایج

در این بخش کمترین مقادیر اول و دوم شاخص وینر را برای مجموعه‌ی $\mathcal{T}_{n,d}$ که $3 \leq d \leq n-2$ ارائه می‌دهیم. به این منظور درخت‌های زیر را تعریف می‌کنیم.

درختی از مرتبه‌ی n است که از مسیر $P_{d+1} = v_0 v_1 \dots v_{d-1} v_d$ تشکیل شده است که در آن به رأس v_i ($1 \leq i \leq d-1$)، رأس آویزان متصل شده است. در آن داریم:

$$n = d + 1 + \sum_{i=1}^{d-1} p_i \quad i = 1, 2, \dots, d-1$$

و نیز تعریف می‌کنیم

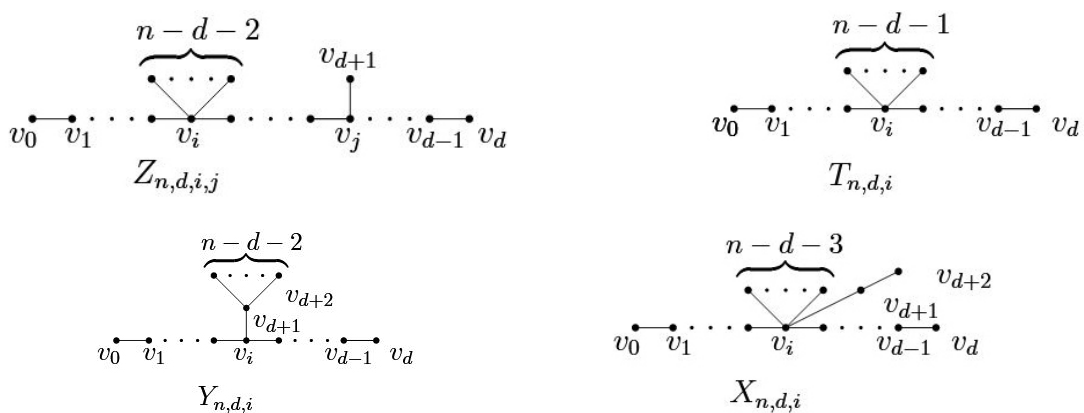
$$T_{n,d,i} = T_{n,d}(\underbrace{\circ, \circ, \dots, \circ}_{i-1}, n-d-1, \circ, \circ, \dots, \circ)$$

و

$$Z_{n,d,i,j} = T_{n,d}(\underbrace{\circ, \circ, \dots, \circ}_{i-1}, n-d-2, \underbrace{\circ, \circ, \dots, \circ}_{j-i-1}, 1, \circ, \circ, \dots, \circ)$$

به ازای هر $2 \leq i \leq d-2$ ، گراف $X_{n,d,i}$ را اینگونه می‌سازیم که، به یک رأس آویزان از $T_{n-1,d,i}$ (بجز v_0 و v_d) رأسی را متصل می‌کنیم (یک رأس به کل رأس‌های گراف اضافه می‌شود). و در آخر گراف $Y_{n,d,i}$ را از روی $T_{d+2,d,i}$ با اضافه کردن $n-d-2$ رأس آویزان به رأسی آویزان از $T_{d+2,d,i}$ (بجز v_0 و v_d) می‌توان دید که

$$X_{n,d,i} = X_{n,d,d-i} \quad \text{و} \quad Y_{n,d,i} = Y_{n,d,d-i}$$



شکل ۳.۲: گراف‌های $T_{n,d,i}$ ، $Z_{n,d,i,j}$ ، $X_{n,d,i}$ ، $Y_{n,d,i}$

حال با توجه به گراف‌های ساخته شده‌ی بالا، مجموعه‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{T}_{n,d}^{\circ} = \{T_{n,d,i} : 1 \leq i \leq d-1\}$$

$$\mathcal{T}_{n,d}^* = \{X_{n,d,i} : 2 \leq i \leq d-2\}$$

$$\mathcal{T}'_{n,d} = \{Y_{n,d,i} : 2 \leq i \leq d-2\}$$

$$\mathcal{T}''_{n,d} = \{Z_{n,d,i,j} : 1 \leq i < j \leq d-1\}$$

لم ۱.۳.۲. برای هر $1 \leq j < i \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ داریم $W(T_{n,d,i}) < W(T_{n,d,j})$. در نتیجه برای هر درخت $T \in \mathcal{T}_{n,d}^{\circ}$ داریم $W(T) \geq W(T_{n,d,\lfloor \frac{d}{2} \rfloor})$ و تساوی تنها در صورتی برقرار است که $T \cong T_{n,d,\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$. برهان. برای اثبات تنها نیاز است که برای $j = i-1$ ، درستی حکم را بررسی کنیم. اگر $v = v_i$ و دو مسیر $P = v_0 v_1 \dots v_i$ و $Q = v_i v_{i+1} \dots v_d$ را در نظر بگیریم، با توجه به لم ۴.۲.۲ حکم برقرار می‌شود. \square

توجه داشته باشید که نامساوی مشابهی برای $X_{n,d,i}$ و $Y_{n,d,i}$ برقرار است. پس می‌توان نتایج زیر را به دست آورد.

$$\forall T \in \mathcal{T}_{n,d}^* ; W(T) \geq W(X_{n,d,\lfloor \frac{d}{2} \rfloor})$$

$$\forall T \in \mathcal{T}'_{n,d} ; W(T) \geq W(Y_{n,d,\lfloor \frac{d}{2} \rfloor})$$

از لم ۱.۳.۲ می‌توان نتیجه‌ی زیر را گرفت.

نتیجه ۱.۳.۲. در بین درختهای عضو مجموعه $\mathcal{T}_{n,d}$ ، که $d = n-2$ ، کمترین شاخص وینر مربوط می‌شود به $T_{n,d,\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$ و شاخص وینر بعدی مربوط می‌شود به $T_{n,d,\lfloor \frac{d}{2} \rfloor-1}$ و به همین ترتیب تا $T_{n,d,1}$.

توجه کنید که $\mathcal{T}_{n,n-2}$ فقط شامل درخت‌هایی است که در بالا به آن اشاره شد.

لم ۲.۳.۲. اگر $3 \leq d \leq n-3$

$$(i) \quad W(Z_{n,d,\lfloor \frac{d}{2} \rfloor, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor+1}) < W(X_{n,d,\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}) \leq W(Y_{n,d,\lfloor \frac{d}{2} \rfloor})$$

$$(ii) \quad W(Z_{n,d,\lfloor \frac{d}{2} \rfloor, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor+1}) < W(T_{n,d,\lfloor \frac{d}{2} \rfloor-1}) \quad \text{در } d$$

$$(iii) \quad W(Z_{n,d,\lfloor \frac{d}{2} \rfloor, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor+1}) = W(T_{n,d,\lfloor \frac{d}{2} \rfloor-1}) \quad \text{زوج } d$$

برهان. با توجه به لم ۳.۲.۲ داریم:

$$\begin{aligned} W(Z_{n,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor, \lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor + 1}) &= W(T_{n-1,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor}) + D_{T_{n-1,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor}}(v_{\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor + 1}) + n - 1 \\ &= W(T_{n-1,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor}) + D_{P_{d+1}}(v_{\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor + 1}) + 2(n - d - 2) + n - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(X_{n,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor}) &= W(T_{n-1,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor}) + D_{T_{n-1,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor}}(v_{d+1}) + n - 1 \\ &= W(T_{n-1,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor}) + D_{P_{d+1}}(v_{\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor}) + d + 1 + 2(n - d - 3) + n - 1 \end{aligned}$$

به این ترتیب و با توجه به لم ۵.۲.۲ داریم:

$$\begin{aligned} W(Z_{n,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor, \lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor + 1}) - W(X_{n,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor}) &= D_{P_{d+1}}(v_{\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor}) - d + 1 \\ &= 2\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor + 2 - 2d \\ &\leq 2 - d < 0 \end{aligned}$$

با توجه به تعریف $X_{n,d,i}$ و $Y_{n,d,i}$ واضح است که $X_{d+3,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor} \cong Y_{d+3,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor}$. بنابراین با توجه به لم‌های ۳.۲.۲ و ۵.۲.۲ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} W(X_{n,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor}) - W(Y_{n,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor}) &= W(X_{n-1,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor}) - W(Y_{n-1,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor}) - d + 1 \\ &< W(X_{n-1,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor}) - W(Y_{n-1,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor}) \\ &< \dots \\ &< W(X_{d+3,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor}) - W(Y_{d+3,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor}) = 0 \end{aligned}$$

پس حالت (i) برقرار است.

حال با توجه به لم ۵.۲.۲:

$$D_{P_{d+1}}(v_{\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor + 1}) < D_{P_{d+1}}(v_{\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor - 1})$$

و با توجه به لم ۳.۲.۲:

$$\begin{aligned}
 W(Z_{n,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor, \lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor + 1}) - W(T_{n,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor - 1}) &= W(T_{n-1,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor}) + D_{P_{d+1}}(v_{\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor + 1}) - W(T_{n-1,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor - 1}) \\
 &\quad - D_{P_{d+1}}(v_{\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor - 1}) + n - d - 2 \\
 &\leq W(T_{n-1,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor}) - W(T_{n-1,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor - 1}) + n - d - 2 \\
 &= D_{T_{n-2,d-1,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor - 1}}(v_o) - D_{T_{n-2,d-1,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor - 1}}(v_{d-1}) \\
 &\quad + n - d - 2 \\
 &= (n - d - 2)(2\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor - d). \quad (*)
 \end{aligned}$$

با توجه به (*), (ii) و (iii) برقرار می‌شود.

□

لم ۳.۳.۲. اگر T را درختی از $\mathcal{T}_{n,d}'' \setminus \{Z_{n,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor, \lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor + 1}\}$ که $3 \leq d \leq n - 3$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$W(T) > W(Z_{n,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor, \lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor + 1})$$

برهان. T را برابر $Z_{n,d,i,j}$ قرار داده و P را مسیری با طول d در T در نظر می‌گیریم که در آن $d(v_o) = d(v_d) = 0$ باشد. v_{d+1} را رأس آویزانی از T در نظر می‌گیریم که مجاور v_j باشد. T را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $W(T)$ کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. برای اثبات این حکم درستی چند واقعیت را بررسی می‌کنیم:

$$i \leq \lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor - 1$$

اثبات ۱. فرض می‌کنیم $i > \lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor$. پس $j > \lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor + 1$. توجه داشته باشید که با در نظر گرفتن تعریف $Z_{n,d,i,j}$ می‌توان نشان داد $Z_{n,d,i-1,j-1} - v_d \cong Z_{n,d,i-1,j-1} - v_o \cong Z_{n,d,i,j} - v_o$. بنابراین این با توجه به لم ۳.۲.۲:

$$\begin{aligned}
 W(Z_{n,d,i,j}) - W(Z_{n,d,i-1,j-1}) &= D_{Z_{n-1,d-1,i-1,j-1}}(v_o) - D_{Z_{n-1,d-1,i-1,j-1}}(v_{d-1}) \\
 &= (n - d - 2)(2i - d - 1) + (2j - d - 1) > 0
 \end{aligned}$$

که این یعنی عضوی از $\mathcal{T}_{n,d}''$ وجود دارد که دارای شاخص وینر کمتری از T است. و این با فرض ما که T کمترین شاخص وینر را دارد در تناقض است.

□

$$W(Z_{n,d,i,j}) \geq W(Z_{n,d,i,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor + 1}) - 2$$

اثبات ۲. می‌توان نشان داد که $Z_{n,d,i,j} - v_{d+1} \cong T_{n-1,d,i}$. حال اگر $j > \lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor + 1$ ، با در نظر گرفتن لم‌های ۳.۲.۲ و ۵.۲.۲ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} W(Z_{n,d,i,j}) - W(Z_{n,d,i,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor + 1}) &= D_{T_{n-1,d,i}}(v_j) - D_{T_{n-1,d,i}}(v_{\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor + 1}) \\ &> D_P(v_j) - D_P(v_{\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor + 1}) > 0. \end{aligned}$$

□

$$.W(Z_{n,d,i,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor + 1}) > W(Z_{n,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor + 1}) - 3$$

اثبات ۳. از آنجاییکه $Z_{n,d,i,j} - v_{d+1} \cong T_{n-1,d,i}$ اگر $i < \lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor$ آنگاه با توجه به لم‌های ۳.۲.۲ و ۱.۳.۲:

$$\begin{aligned} &W(Z_{n,d,i,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor + 1}) - W(Z_{n,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor + 1}) \\ &= \left(W(T_{n-1,d,i}) - W(T_{n-1,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor}) \right) + \left(D_{T_{n-1,d,i}}(v_{\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor + 1}) - D_{T_{n-1,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor}}(v_{\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor + 1}) \right) \\ &> D_{T_{n-1,d,i}}(v_{\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor + 1}) - D_{T_{n-1,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor}}(v_{\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor + 1}) > 0. \end{aligned}$$

□

از درستی ۱، ۲ و ۳، حکم ثابت می‌شود.

□

لم ۴.۳.۲. اگر T را درختی از $\mathcal{T}_{n,d} \setminus (\mathcal{T}_{n,d}^\circ \cup \{Z_{n,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor + 1}\})$ که در آن $3 \leq d \leq n-3$ در نظر بگیریم، آنگاه:

$$W(T) > W(Z_{n,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor + 1})$$

برهان. مسیر $P_{d+1} = v_0 v_1 \cdots v_{d-1} v_d$ به طول d از T را که در آن $\deg(v_0) = \deg(v_d) = 1$ و همچنین مجموعه‌ی $V_d = \{v_i : d(v_i) \geq 3, 1 \leq i \leq d-1\}$ در نظر می‌گیریم. از آنجاییکه $n \geq d+3$ و $V_d \neq \emptyset$ ، دو حالت را بررسی می‌کنیم،
حالت ۱: $|V_d| \geq 2$.

در این حالت، درخت $T_1 \cong T_{n,d}(p_1, \dots, p_{d-1})$ را طوری در نظر می‌گیریم که $W(T) \geq W(T_1)$ و تساوی تنها در صورتی برقرار باشد که $T \cong T_1$ (لم ۲.۲.۲). از آنجاییکه $T \notin \mathcal{T}_{n,d}^\circ$ با توجه به ساختار اعضای $\mathcal{T}_{n,d}^\circ$ حداقل دو رأس داریم که به آنها رأسی آویزان متصل شده است، یعنی اگر آن دو رأس را v_i و v_j بنامیم، داریم $p_i, p_j \neq 0$. فرض می‌کنیم $1 \leq i < j \leq d-1$. بنابر این با توجه به نتیجه‌ی ۱.۲.۲، می‌توان درخت $T_2 \cong Z_{n,d,i,j}$ را به‌گونه‌ای ساخت که $W(T_1) > W(T_2)$ و با توجه به لم ۳.۳.۲ خواهیم داشت،

$$W(T_2) > W(Z_{n,d,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor,\lfloor \frac{d}{\varphi} \rfloor + 1})$$

و این یعنی

$$W(T) \geq W(T_1) > W(T_2) > W(Z_{n,d, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1})$$

حالت ۲: $|V_d| = 1$.

در این حالت v_i را تنها عضو V_d در نظر می‌گیریم. تعریف می‌کنیم،

$$\{x_1, \dots, x_s\} = N(v_i) \setminus \{v_{i-1}, v_{i+1}\}$$

که در آن برای $1 \leq j \leq r$ ، $d(x_j) \geq 2$ و $d(x_{r+1}) = d(x_{r+2}) = \dots = d(x_s) = 1$. و چون $T \notin \mathcal{T}_{n,d}^\circ$ پس $r \geq 1$. حال $T_i(x_j)$ را زیردرختی از $T - v_i$ که شامل x_j باشد و داشته باشیم، $1 \leq j \leq r$ ، $|V(T_i(x_j))| = s_j + 1$ ، در نظر می‌گیریم. با توجه به لم ۲.۲.۲، درخت T_3 را به این روش می‌سازیم که در $T_{d+s+1,d,i}$ به رأس x_j که $1 \leq j \leq s$ ، رأس آویزان متصل می‌کنیم، بطوریکه $W(T) \geq W(T_3)$. حال طبق نتیجه‌ی ۱.۲.۲، می‌توان درخت T_4 ای ساخت که $W(T_3) \geq W(T_4)$ و $T_4 \in \mathcal{T}_{n,d}^* \cup \mathcal{T}'_{n,d}$.

حال اگر $T_4 \in \mathcal{T}_{n,d}^*$ ، با توجه به لم ۲.۳.۲،

$$W(T) \geq W(T_3) \geq W(T_4) \geq W(X_{n,d, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor}) > W(Z_{n,d, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1})$$

و اگر $T_4 \in \mathcal{T}'_{n,d}$ ، باز هم طبق لم ۲.۳.۲،

$$W(T) \geq W(T_3) \geq W(T_4) \geq W(Y_{n,d, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor}) > W(Z_{n,d, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1})$$

□

با استفاده از لم‌های ۲.۳.۲ و ۳.۳.۲ و ۴.۳.۲ می‌توان ثابت کرد که:

قضیه ۱.۳.۲. کمترین مقدار شاخص وینر در مجموعه‌ی $\mathcal{T}_{n,d}$ که $3 \leq d \leq n - 2$ ، درختی با ساختار $T_{n,d, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$ است.

فصل ۳

شاخص وینر در گراف‌های تکدور

۱.۳ مقدمه

در این فصل ضمن بررسی شاخص وینر در گراف‌های تکدور با قطر ثابت، گراف‌هایی از این نوع را مشخص می‌کنیم که دارای کمترین مقدار شاخص وینر است.

تعریف ۱.۱.۳. گرافی که فقط شامل یک دور باشد را گراف تکدور می‌نامیم.

ملاحظه ۱.۱.۳. در گراف تکدور تعداد رأسها و یالها با هم برابر است.

تعریف ۲.۱.۳. مجموعه‌ی تمام گراف‌های تکدور n رأسی با قطر d را با $\Phi(n, d)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۳. مسیر $u_0 u_1 \dots u_k$ را مسیری آویزان به طول k در u_0 گوییم اگر که داشته باشیم،

$$\deg_G(u_0) \geq 3, \deg_G(u_1) = \dots = \deg_G(u_{k-1}) = 2, \deg_G(u_k) = 1.$$

۲.۳ لم‌ها

لم ۱.۲.۳. در گراف همبند G ، u را رأسی برشی در نظر می‌گیریم به طوری‌که G را به دو زیرگراف همبند G_1 و G_2 تقسیم می‌کند، یعنی $V(G_1) \cap V(G_2) = \{u\}$ و $G_1 \cup G_2 = G$. در این صورت خواهیم داشت:

$$W(G) = W(G_1) + W(G_2) + (|V(G_1)| - 1)W(G_2, u) + (|V(G_2)| - 1)W(G_1, u)$$

برهان. برای محاسبه شاخص وینر این گراف، سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم

۱. هر دو رأس در G_1

۲. هر دو رأس در G_2

۳. یکی در G_1 و دیگری در G_2

پس

$$\begin{aligned} W(G) &= \sum_{x,y \in V(G_1)} d_G(x,y) + \sum_{x,y \in V(G_2)} d_G(x,y) + \sum_{\substack{x \in V(G_1) \\ y \in V(G_2)}} d_G(x,y) \\ &= \sum_{x,y \in V(G_1)} d_{G_1}(x,y) + \sum_{x,y \in V(G_2)} d_{G_2}(x,y) + \sum_{\substack{x \in V(G_1) \\ y \in V(G_2)}} d_G(x,y) \\ &= W(G_1) + W(G_2) + \sum_{\substack{x \in V(G_1) \\ y \in V(G_2)}} d_G(x,y) \end{aligned}$$

برای $\sum_{x \in V(G_1), y \in V(G_2)} d_G(x,y)$ ، با توجه به اینکه u رأس برشی است و در نتیجه هر مسیر بین x و y باید از آن عبور کند، یعنی

$$d_G(x,y) = d_G(x,u) + d_G(u,y)$$

پس می‌توان نوشت که

$$\begin{aligned} W(G) &= W(G_1) + W(G_2) + \sum_{\substack{x \in V(G_1) \\ y \in V(G_2)}} (d_G(x,u) + d_G(u,y)) \\ &= W(G_1) + W(G_2) + \sum_{\substack{x \in V(G_1) \\ y \in V(G_2)}} d_G(x,u) + \sum_{\substack{x \in V(G_1) \\ y \in V(G_2)}} d_G(u,y) \\ &= W(G_1) + W(G_2) + (|V(G_1)| - 1)W(G_2, u) + (|V(G_2)| - 1)W(G_1, u) \end{aligned}$$

□

دو گراف همبند G و H و یال uv از G را که اولاً یالی آویزان نباشد و ثانیاً در هیچ مثلثی قرار نداشته باشد در نظر می‌گیریم. گراف A را با برهم‌نشانی رأس u و رأس \tilde{u} از H می‌سازیم. (رأس جدید را کماکان u می‌نامیم). گراف A^{uv} را هم با این روش به دست می‌آوریم که، یال uv را حذف می‌کنیم. سپس رأسهای u و v برهم‌نشانی کرده، رأس جدید را w می‌نامیم. حال یال wz را اضافه می‌کنیم و در آخر هم z و \tilde{u} بر هم‌نشانی می‌کنیم و رأس جدید را z می‌نامیم.

تعریف می‌کنیم:

$$V_u = \{x \in V(G) : \text{قرار نداشته باشد. } x \text{ به } u \text{ به هیچ مسیری از } u \text{ به } x \text{ قرار نداشته باشد.}\}$$

$$V_u = \{x \in V(G) : \text{قرار داشته باشد. } x \text{ به } u \text{ به کوتاهترین مسیر از } u \text{ به } x \text{ قرار داشته باشد.}\}$$

$$\Omega(u, v) = \{(x, y) : x \in V_u - \{u\}, y \in V_v - \{v\}\}$$

و یال uv در کوتاهترین مسیر بین $\{u\}$ و $\{v\}$ قرار داشته باشد.

$$\Theta(u, v) = \{x : x \in V(G), d_G(x, u) = d_G(x, v)\}$$

لم ۲.۲.۳. اگر A و A^{uv} دو گرافی باشند که در بالا تعریف شده‌اند، داریم:

$$W(A) - W(A^{uv}) = |\Omega(u, v)| - |\Theta(u, v)| - (|V(H)| - 1)(|V_u| - 1).$$

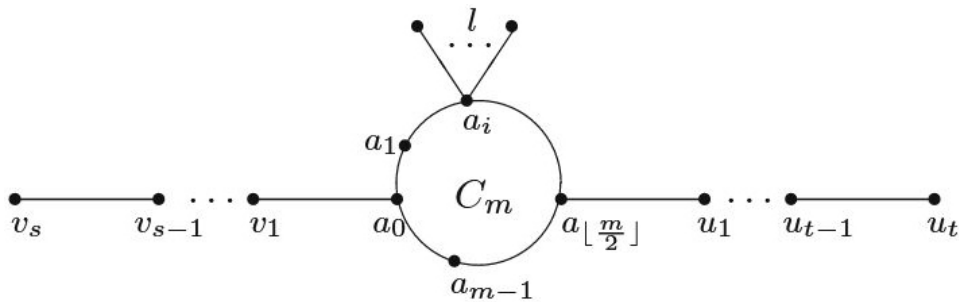
□

برهان. اثبات در [۲۱].

$Z(s, t, m)$ را گرافی در نظر می‌گیریم که از دور m رأسی $C_m = a_0 a_1 \dots a_{m-1} a_0$ و دو مسیر آویزان $v_s v_{s-1} \dots v_1$ و $u_1 \dots u_t$ که $v_0 = a_0$ و $u_0 = a_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$ و $s + t = d - \lfloor \frac{m}{4} \rfloor$ و $s \geq t$ و $s \neq 0$ تشکیل شده است.

حال $R_{s,i,m}^{t,l}$ را گراف تکدور n رأسی با قطر $d \geq 4$ در نظر می‌گیریم که از $Z(s, t, m)$ با اضافه کردن $l = n - d - \lfloor \frac{m+1}{4} \rfloor$ یال آویزان به a_i که $0 \leq i \leq \lfloor \frac{m}{4} \rfloor$ ساخته شده است.

شکل ۱.۳: گراف $R_{s,i,m}^{t,l}$ با $v_0 = a_0$ و $u_0 = a_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$



حال شاخص وینر گراف $R_{s,i,m}^{t,l}$ را بررسی می‌کنیم.

لم ۳.۲.۳. اگر $l \neq 0$ و $1 \leq i \leq \lfloor \frac{m}{4} \rfloor$ ، آنگاه $W(R_{s,i,m}^{t,l}) \geq W(R_{s,0,m}^{t,l})$ ، و تساوی تنها در صورتی برقرار است که $s = t$.

برهان. با قرار دادن $Z = Z(s, t, m)$ با توجه به لم ۱.۲.۳ داریم:

$$W(R_{s,i,m}^{t,l}) = W(Z) + W(S_{l+1}) + (|V(Z)| - 1)W(S_{l+1}, a_i) + lW(Z, a_i).$$

$$W(R_{s,0,m}^{t,l}) = W(Z) + W(S_{l+1}) + (|V(Z)| - 1)W(S_{l+1}, a_0) + lW(Z, a_0).$$

با توجه به تعریف $W(G, v)$ برای $j = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{m}{r} \rfloor$ داریم،

$$W(Z, a_j) = \frac{1}{r} s(s+1) + sj + W(C_m, a_j) + t(\lfloor \frac{m}{r} \rfloor - j) + \frac{1}{r} t(t+1).$$

واضح است که $W(C_m, a_i) = W(C_m, a_0)$ و $W(S_{l+1}, a_i) = W(S_{l+1}, a_0)$ پس:

$$W(R_{s,i,m}^{t,l}) - W(R_{s,0,m}^{t,l}) = li(s-t) \geq 0$$

روشن است که اگر $s = t$ تساوی برقرار می‌شود.

□

لم ۴.۲.۳. اگر $s = t$ آنگاه، $W(R_{s,0,m}^{t,l}) - W(R_{s+1,0,m}^{t-1,l}) = (l+1)(\lfloor \frac{m}{r} \rfloor - 1) - m + 2$.

برهان. قرار می‌دهیم $B = R_{s,0,m}^{t,l} - u_t$. طبق لم ۱.۲.۳ داریم،

$$W(R_{s,0,m}^{t,l}) = W(B) + W(P_r) + (|V(B)| - 1) \times 1 + 1 \times W(B, U_{t-1}).$$

$$W(R_{s+1,0,m}^{t-1,l}) = W(B) + W(P_r) + (|V(B)| - 1) \times 1 + 1 \times W(B, U_s).$$

از تعریف فاصله‌ی یک رأس خواهیم داشت که،

$$W(B, U_{t-1}) = \frac{s(s+1)}{r} + s(\lfloor \frac{m}{r} \rfloor + t - 1) + l(\lfloor \frac{m}{r} \rfloor + t) + W(C_m, a_{\lfloor \frac{m}{r} \rfloor}) + \frac{(2m+t-2)(t-1)}{r}.$$

$$W(B, v_s) = \frac{s(s-1)}{r} + l(s+1) + ms + W(C_m, a_0) + (t-1)(\lfloor \frac{m}{r} \rfloor + s) + \frac{t(t-1)}{r}.$$

با توجه به اینکه $s = t$ و $W(C_m, a_0) = W(C_m, a_{\lfloor \frac{m}{r} \rfloor})$ داریم

$$\begin{aligned} W(R_{s,0,m}^{t,l}) - W(R_{s+1,0,m}^{t-1,l}) &= W(B, u_{t-1}) - W(B, v_s) \\ &= (l+1)(\lfloor \frac{m}{r} \rfloor - 1) - m + 2. \end{aligned}$$

□

لم ۵.۲.۳. فرض کنید m عددی فرد باشد. اگر $m \geq 7$ یا $m = 5$ و $s+l > t+1$ ، آنگاه

$$W(R_{s,0,m}^{t,l}) > W(R_{s,0,m-1}^{t,l+1})$$

برهان. در لم ۲.۲.۳، H را گراف بدیهی a_0 فرض کرده و با قرار دادن $A = R_{s,0,m}^{t,l}$ و $u = a_0$ و $v = a_{m-1}$ داریم $A^{a_0 a_{m-1}} \cong R_{s,0,m-1}^{t,l+1}$. حال $b_1, b_2, \dots, b_l (\neq v_1)$ را l رأس آویزان متصل به a_0 در گراف $R_{s,0,m}^{t,l}$ فرض می‌کنیم.

تعریف می‌کنیم

$$\Psi = \{v_1, v_2, \dots, v_s, b_1, b_2, \dots, b_l\}.$$

حالت اول:

فرض می‌کنیم $m = 2q + 1 \geq 7$. در این حالت،

$$|\Omega(a_\circ, a_{m-1})| \geq |\{(a_1, a_{m-2})\} \cup \{(x, a_{m-2}), (x, a_{m-3}) : x \in \Psi\}| = 2s + 2l + 1.$$

توجه کنید که

$$\Theta(a_\circ, a_{m-1}) = \{a_{\lfloor \frac{m}{4} \rfloor}, u_1, \dots, u_t\}.$$

در نتیجه $|\Theta(a_\circ, a_{m-1})| = t + 1$ و بنابر این طبق لم ۲.۲.۳ داریم

$$W(R_{s,\circ,m}^{t,l}) - W(R_{s,\circ,m-1}^{t,l+1}) = |\Omega(a_\circ, a_{m-1})| - |\Theta(a_\circ, a_{m-1})| \geq 2s + sl + t > \circ.$$

حالت دوم:

فرض می‌کنیم $m = 5$. در این حالت داریم، $\Theta(a_\circ, a_{m-1}) = \{a_2, u_1, \dots, u_t\}$ و

$$|\Omega(a_\circ, a_{m-1})| = |\{(x, a_2) : x \in \Psi\}| = s + l.$$

بنابر این طبق لم ۲.۲.۳ داریم

$$\begin{aligned} W(R_{s,\circ,m}^{t,l}) - W(R_{s,\circ,m-1}^{t,l+1}) &= |\Omega(a_\circ, a_{m-1})| - |\Theta(a_\circ, a_{m-1})| \\ &= s + l - t - 1 > \circ. \end{aligned}$$

□

۳.۳ کمترین شاخص وینر در $\Phi(n, d)$

واضح است که $\Phi(n, 1) = \{C_3\}$ و پس واضح است که گراف با کمترین شاخص وینر آن، خود C_3 است. و نیز در [۲۳] و [۱۹] گرافهای دارای کمترین شاخص وینر در $\Phi(n, 2)$ و $\Phi(n, 3)$ به دست آمده‌اند. از طرفی در [۷] تمام گرافهای تکدور ۸ رأسی مشخص شده‌اند. به همین دلیل در اینجا فرض می‌کنیم $n \geq 9$ و $d \geq 4$ است. علاوه براین واضح است که در $\Phi(n, d)$ داریم، $n \geq d + 2$.

حال U_M را گرافی از $\Phi(n, d)$ در نظر می‌گیریم که دارای کمترین شاخص وینر است. طول دور واقع در U_M را برابر m در نظر می‌گیریم. پس U_M گرافی است، در بین تمام گرافهای n رأسی تکدور، که دوری به طول m و قطر d دارند، کمترین شاخص وینر را دارد. بنابر این با توجه به قضیه ۱.۳ مرجع [۱۳] نتیجه‌ی زیر را داریم.

لم ۱.۳.۳. چهار عدد صحیح و نامنفی l, s, t, i وجود دارند که $l \geq t, s \neq \circ, l = n - d - \lfloor \frac{m+1}{4} \rfloor$ و $s + t = d - \lfloor \frac{m}{4} \rfloor$ ، $U_M \cong R_{s,i,m}^{t,l}$ بطوریکه $\circ \leq i \leq \lfloor \frac{m}{4} \rfloor$.

ملاحظه ۱.۳.۳. برای مسیر P_n و دور C_n داریم،

$$W(P_n) = \binom{n+1}{3}$$

و

$$W(C_n) = \begin{cases} \frac{n^2}{8} & \text{زوج } n \\ \frac{n(n-1)}{8} & \text{فرد } n \end{cases}$$

بنابر این با توجه به لم ۱.۲.۳ داریم،

$$\begin{aligned} W(R_{s,\circ,m}^{t,l}) &= \binom{s+2}{3} + \binom{t+2}{3} + \frac{(m+2s+2l+2t)W(C_m)}{m} \\ &+ l(s+t+l+m-1) + t(s+l) \lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \frac{(t+l+m-1)s(s+1)}{2} \\ &+ \frac{(s+l+m-1)t(t+1)}{2}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

با قرار دادن $Q(s,t,l,p) = R_{s,\circ,\gamma p}^{t,l}$ برای $2 \leq p \leq n-d$ و جایگذاری $m = 2p$ در معادله‌ی (۱.۳)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} W(Q(s,t,l,p)) &= \frac{1}{6} [6p^3 + 6(s+t+l)p^2 + 6(s^2 + st + t^2 + s+t+lt + 2l)p \\ &+ 6l^2 + 3(s^2 + t^2 + 3s + 3t - 2)l + (s+t)^3 + 6st - (s+t)]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

لم ۲.۳.۳. پنج عدد صحیح نامنفی p, l, s, t, i را می‌توان یافت که $2 \leq p \leq n-d$ ، $l = n-d-p$ ، $0 \leq i \leq \lfloor \frac{p}{3} \rfloor$ و $s+t = d-p$ ، $s \neq 0$

$$U_M \cong R_{\gamma,\circ,\gamma}^{1,n-6} \quad \text{یا} \quad U_M \cong R_{s,i,\gamma p}^{t,l}.$$

برهان. فرض می‌کنیم $U_M \cong R_{\gamma,\circ,\gamma}^{1,n-6}$ از لم ۱.۳.۳ می‌دانیم که چهار عدد صحیح نامنفی l, s, t, i می‌توان یافت که $0 \leq i \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$ ، $s+t = d - \lfloor \frac{m+1}{3} \rfloor$ ، $s \geq t$ ، $s \neq 0$ ، $l = n-d - \lfloor \frac{m+1}{3} \rfloor$ طوریکه

$$U_M \cong R_{s,i,m}^{t,l} \quad (3.3)$$

فرض می‌کنیم که $m \geq 3$. برای m سه مقدار را مورد بررسی قرار می‌دهیم.
حالت اول $m = 3$:

در این حالت $s+t = d-1$ ، $i = 0$ و $l = n-d-2$ ، به این ترتیب از $d \geq 4$ نتیجه می‌شود $s \geq 2$. اگر $t = 0$ ، آنگاه از معادلات (۱.۳) و (۲.۳) داریم

$$\begin{aligned} W(U_M) - W(Q(s-1, t, l, 2)) &= W(R_{s,\circ,\gamma}^{t,l}) - W(Q(s-1, t, l, 2)) \\ &= l(s-2) + s - 1 > 0 \end{aligned}$$

و چون $Q(s-1, t, l, 2) \in \Phi(n, d)$ ، با این فرض که U_M کمترین شاخص وینر را دارد، تناقض دارد.

اگر $t = 1$ ، چون $U_M \not\cong R_{\varphi, \circ, 3}^{1, l}$ داریم $s \geq 3$. از معادلات (۱.۳) و (۲.۳) داریم

$$W(U_M) - W(Q(s, t-1, l, 2)) = W(R_{s, \circ, 3}^{t, l}) - W(Q(s, t-1, l, 2)) = t-1 > 0$$

و چون $Q(s, t-1, l, 2) \in \Phi(n, d)$ ، باز هم با انتخاب U_M تناقض دارد.
حالت دوم $m = 5$:

در این حالت $s+t = d-2$ ، $0 \leq i \leq 1$ و $l = n-d-3$. اگر $s+l > t+1$ ، آنگاه از لم‌های ۳.۲.۳ و ۵.۲.۳ داریم

$$W(R_{s, 1, m}^{t, l}) \geq W(R_{s, \circ, m}^{t, l}) > W(R_{s, \circ, m-1}^{t, l+1})$$

و چون $R_{s, \circ, m-1}^{t, l+1} \in \Phi(n, d)$ ، با انتخاب $U_M \not\cong R_{s, i, m}^{t, l}$ که در آن $i = 1$ یا $i = 0$ در تناقض است. و اگر فرض کنیم $s+l \leq t+1$ ، واضح است که $t \leq s \leq t+1$. بنابراین وقتی که $s = t$ داریم $0 \leq l \leq 1$ و هنگامیکه $s = t+1$ داریم $l = 0$. به عبارت دیگر

$$U_M \in \{R_{s, i, m}^{t, \circ} : t = s, s-1\} \cup \{R_{s, i, m}^{s, 1} : i = 0, 1\}.$$

اگر $U_M \not\cong R_{s, i, m}^{t, \circ}$ که در آن $t = s$ یا $t = s-1$ ، از معادلات (۱.۳) و (۲.۳) داریم

$$W(U_M) = W(R_{s, i, m}^{t, \circ}) = W(Q(s-1, t, \circ, 3)) + 2s-3 > W(Q(s-1, t, \circ, 3))$$

و چون $Q(s-1, t, \circ, 3) \in \Phi(n, d)$ ، با انتخاب U_M تناقض دارد. اگر $U_M \not\cong R_{s, i, m}^{s, 1}$ که در آن $i = 1$ یا $i = 0$ ، آنگاه از لم ۱.۳.۳ و معادلات (۱.۳) و (۲.۳) داریم

$$\begin{aligned} W(U_M) &= W(R_{s, 1, m}^{s, 1}) = W(R_{s, \circ, m}^{s, 1}) = W(Q(s+1, s-1, 2, 2)) + 1 \\ &> W(Q(s+1, s-1, 2, 2)) \end{aligned}$$

و با توجه به اینکه $Q(s+1, s-1, 2, 2) \in \Phi(n, d)$ ، با انتخاب U_M تناقض دارد.
حالت سوم $m \geq 7$:

در این حالت از لم‌های ۳.۲.۳ و ۵.۲.۳ داریم

$$W(R_{s, 1, m}^{t, l}) \geq W(R_{s, \circ, m}^{t, l}) > W(R_{s, \circ, m-1}^{t, l+1})$$

و چون $R_{s, \circ, m-1}^{t, l+1} \in \Phi(n, d)$ ، با انتخاب $U_M \cong R_{s, i, m}^{t, l}$ که $i = 1$ یا $i = 0$ در تناقض است. با بررسی سه حالت بالا نتیجه میگیریم m عددی زوج است. با قرار دادن $m = 2p \geq 4$ ، داریم $2 \leq p \leq n-d$ ، $2 \leq p \leq n-d$ ، $l = n-d-p$ ، $0 \leq i \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ و از معادله‌ی (۳.۳) نتیجه می‌شود که

$$U_M \cong R_{s, i, 2p}^{t, l}$$

□

تعریف ۱.۳.۳. برای هر مجموعه‌ی B از گراف‌های همبند، تعریف می‌کنیم

$$\rho(B) = \min \{W(G) : G \in B\}$$

و

$$\lambda(B) = \{G : G \in B, W(G) = W(B)\}$$

ملاحظه ۲.۳.۳. اگر B_1 و B_2 دو مجموعه گراف همبند باشند، به سادگی می‌توان نشان داد که:

$$۱. \lambda(B_1 \cup B_2) \subseteq \lambda(B_1) \cup \lambda(B_2)$$

$$۲. \text{اگر } \rho(B_1) > \rho(B_2) \text{ آنگاه } \lambda(B_1 \cup B_2) = \lambda(B_2)$$

$$۳. \text{اگر } B_1 \subseteq B_2 \text{ و } \lambda(B_2) \subseteq B_1 \text{، آنگاه } \rho(B_2 - B_1) > \rho(B_1) \text{ و } \lambda(B_2) = \lambda(B_1)$$

از اینجا به بعد با قرار دادن $\mu = n - d$ ، پنج زیر مجموعه از $\Phi(n, d)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$J_1(n, d) = \{Q(s, t, l, p) : 2 \leq p \leq \mu; s \neq 0; s \geq t; s + t = d - p; l = \mu - p\}.$$

$$J_2(n, d) = \{R_{s,i,2p}^{s,l} : 3 \leq p \leq \mu; s \neq 0; 2s = d - p; l = \mu - p = 1; 1 \leq i \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor\}.$$

$$J_3(n, d) = \{R_{s,i,2p}^{s,l} : 3 \leq p \leq \mu; s \neq 0; 2s = d - p; l = \mu - p \geq 2; 1 \leq i \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor\}.$$

$$J_4(n, d) = \{R_{s,i,2p}^{t,l} : 3 \leq p \leq \mu; s \neq 0; s + t = d - p; l = \mu - p \neq 0; 1 \leq i \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor\}.$$

$$J_5(n, d) = \{R_{s,1,4}^{t,l} : s \neq 0; s \geq t; s + t = d - 2; l = \mu - 2 \neq 0\}.$$

پس

$$\{R_{s,i,2p}^{t,l} : 2 \leq p \leq \mu; s \neq 0; s \geq t; s + t = d - p; l = \mu - d; 0 \leq i \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor\}.$$

$$= \bigcup_{j=1}^5 J_j(n, d)$$

بنابر این طبق لم ۲.۳.۳ داریم

$$\lambda(\Phi(n, 4)) \subseteq \{R_{\circ, \circ, 3}^{1, n-6}\} \cup J_1(n, 4) \cup J_2(n, 4) \cup J_3(n, 4) \cup J_4(n, 4) \cup J_5(n, 4). \quad (۴.۳)$$

$$\lambda(\Phi(n, d)) \subseteq J_1(n, d) \cup J_2(n, d) \cup J_3(n, d) \cup J_4(n, d) \cup J_5(n, d), \quad d \geq 5. \quad (۵.۳)$$

توجه داشته باشید که $\{\cup_{j=1}^5 J_j(n, d) \subseteq \Phi(n, d)\}$ و $\{R_{\rho, \circ, \rho}^{1, n-6}\} \cup \{\cup_{j=1}^5 J_j(n, 4)\} \subseteq \Phi(n, d)$ بنابر این از معادلات (۴.۳) و (۵.۳) و قسمت ۳ ملاحظه‌ی ۲.۳.۳ داریم

$$\lambda(\Phi(n, 4)) = \lambda(\{R_{\rho, \circ, \rho}^{1, n-6}\} \cup J_1(n, 4) \cup J_2(n, 4) \cup J_3(n, 4) \cup J_4(n, 4) \cup J_5(n, 4)). \quad (۶.۳)$$

$$\lambda(\Phi(n, d)) = \lambda(J_1(n, d) \cup J_2(n, d) \cup J_3(n, d) \cup J_4(n, d) \cup J_5(n, d)) \quad d \geq 5. \quad (۷.۳)$$

لم ۳.۳.۳. برای $j = 3, 4, 5$ رابطه‌ی $\rho(J_j(n, d)) > \rho(J_1(n, d))$ همیشه برقرار است.

برهان. اول فرض می‌کنیم که $R_{s_o, i_o, \rho}^{s_o, l_o} \in \lambda(J_3(n, d))$ ، به عبارت دیگر، $\rho(J_3(n, d)) = W(R_{s_o, i_o, \rho}^{s_o, l_o})$ ، از تعریف $J_3(n, d)$ می‌دانیم که $l_o \geq 2$ و $1 \leq i_o \leq \lfloor \frac{\rho}{2} \rfloor$ ، لذا با توجه به لم‌های ۳.۲.۳ و ۴.۲.۳ داریم

$$\begin{aligned} \rho(J_3(n, d)) &= W(R_{s_o, i_o, \rho}^{s_o, l_o}) = W(R_{s_o+1, i_o, \rho}^{s_o-1, l_o}) + (p_o - 1)(l_o - 1) \\ &> W(R_{s_o+1, i_o, \rho}^{s_o-1, l_o}) = W(Q(s_o + 1, s_o - 1, l_o, p_o)) \geq \rho(J_1(n, d)). \end{aligned}$$

حال فرض می‌کنیم $R_{s_o, i_o, \rho}^{t_o, l_o} \in \lambda(J_4(n, d))$ ، به عبارت دیگر، $\rho(J_4(n, d)) = W(R_{s_o, i_o, \rho}^{t_o, l_o})$ ، از تعریف $J_4(n, d)$ می‌دانیم که $s_o > t_o$ ، $l_o \neq 0$ و $1 \leq i_o \leq \lfloor \frac{\rho}{2} \rfloor$ ، بنابراین از لم ۳.۲.۳ می‌توان نتیجه گرفت که

$$\rho(J_4(n, d)) > W(R_{s_o, i_o, \rho}^{t_o, l_o}) = W(Q(s_o, t_o, l_o, p_o)) \geq \rho(J_1(n, d)).$$

در آخر، فرض می‌کنیم که $R_{s_o, 1, \rho}^{t_o, l_o} \in \lambda(J_5(n, d))$ یا به عبارت دیگر، $\rho(J_5(n, d)) = W(R_{s_o, 1, \rho}^{t_o, l_o})$ پس $s_o + t_o = d - 2$ و از $l_o = \mu - 2 = n - 2 - 2 \neq 0$ ، اگر $s_o > t_o$ ، آنگاه با توجه به لم ۳.۲.۳ داریم

$$\rho(J_5(n, d)) > W(R_{s_o, 1, \rho}^{t_o, l_o}) = W(Q(s_o, t_o, l_o, 2)) \geq \rho(J_1(n, d)).$$

اگر $s_o = t_o$ و $n \geq d + 4$ ، آنگاه $l_o \geq 2$ و $t_o = \frac{d-2}{2} \neq 0$ ، بنابر این از لم‌های ۳.۲.۳ و ۴.۲.۳ داریم

$$\begin{aligned} \rho(J_5(n, d)) &= W(R_{s_o, 1, \rho}^{t_o, l_o}) \\ &= W(R_{s_o+1, 1, \rho}^{t_o-1, l_o}) + (l_o - 1) > W(R_{s_o+1, 1, \rho}^{t_o-1, l_o}) \\ &= W(Q(s_o + 1, t_o - 1, l_o, 2)) \geq \rho(J_1(n, d)). \end{aligned}$$

اگر $s_o = t_o$ و $n = d + 3$ ، آنگاه $l_o = 1$ و $t_o = \frac{d-2}{2} = \frac{n-5}{2} \geq 2$ ، بنابراین طبق لم ۳.۲.۳ و معادله‌ی (۲.۳) داریم

$$\begin{aligned} \rho(J_5(n, d)) &= W(R_{s_o, 1, \rho}^{t_o, l_o}) = W(Q(s_o, t_o, l_o, 2)) = W(Q(s_o, t_o - 1, \circ, 3)) + 2(s_o - 1) \\ &> W(Q(s_o, t_o - 1, \circ, 3)) \geq \rho(J_1(n, d)). \end{aligned}$$

پس $\rho(J_\Delta(n, d)) > \rho(J_1(n, d))$ و برهان کامل می‌شود.

□

از معادلات (۶.۳) و (۷.۳)، لم ۳.۳.۳ و قسمت ۲ ملاحظه‌ی ۲.۳.۳ نتیجه می‌گیریم

$$\lambda(\Phi(n, 4)) = \lambda\left(\left\{R_{\frac{1}{3}, \circ, 3}^{1, n-6}\right\} \cup J_1(n, 4) \cup J_2(n, 4)\right). \quad (۸.۳)$$

$$\lambda(\Phi(n, d)) = \lambda\left(J_1(n, d) \cup J_2(n, d)\right), \quad d \geq 5. \quad (۹.۳)$$

لم ۴.۳.۳. ۱. اگر $J_2(n, d) \neq \emptyset$ ، آنگاه $p = \mu - 1$ ، n عددی فرد است و $d + 4 \leq n \leq 2d - 1$.
به خصوص، اگر $n = 2\beta + 1$ ، آنگاه

$$J_2(n, d) = \left\{R_{d-\beta, i, 2(\mu-1)}^{d-\beta, 1} : 1 \leq i \leq \lfloor \frac{\mu-1}{2} \rfloor\right\}.$$

۲. اگر $d + 4 \leq n \leq d + \sqrt{d} + 1$ آنگاه $\rho(J_2(n, d)) > \rho(J_1(n, d))$.

۳. اگر $n = d + 4$ آنگاه d عددی فرد است و $J_2(n, d) = \left\{R_{\frac{d-3}{2}, 1, 6}^{\frac{d-3}{2}, 1}\right\}$.

برهان. ۱. اگر $J_2(n, d) \neq \emptyset$ ، پارامترهای s, p, l گراف $R_{s, i, 2p}^{s, l}$ از $J_2(n, d)$ در روابط زیر صدق می‌کنند.

$$p \geq 3, s \neq \circ, 2s + p = d, l = \mu - p = 1, 2s + 2p + l = n.$$

بنابراین داریم $2s = 2d - n + 1$ ، $n = d + p + 1$ ، $3 \leq p = \mu - 1$ و بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که n عددی فرد است و $d + 4 \leq n \leq 2d - 1$. با قرار دادن $n = 2\beta + 1$ داریم

$$J_2(n, d) = \left\{R_{d-\beta, i, 2(\mu-1)}^{d-\beta, 1} : 1 \leq i \leq \lfloor \frac{\mu-1}{2} \rfloor\right\}.$$

۲. فرض می‌کنیم $R_{s_\circ, i, 2(\mu-1)}^{s_\circ, 1} \in \lambda(J_2(n, d))$ به عبارت دیگر $\rho(J_2(n, d)) = W\left(R_{s_\circ, i, 2(\mu-1)}^{s_\circ, 1}\right)$.
از لم ۳.۲.۳ معادله‌ی (۲.۳) و رابطه‌ی $d + 4 \leq n \leq d + \sqrt{d} + 1$ داریم

$$\begin{aligned} \rho(J_2(n, d)) &= W\left(R_{s_\circ, i, 2(\mu-1)}^{s_\circ, 1}\right) = W(Q(s_\circ, s_\circ, 1, \mu - 1)) \\ &= W(Q(s_\circ, s_\circ - 1, 1, \mu)) - \mu^2 + 2\mu + d - 1 \\ &> W(Q(s_\circ, s_\circ - 1, 1, \mu)) \geq \rho(J_1(n, d)). \end{aligned}$$

۳. با توجه به اینکه $n = d + 4$ و نیز اینکه از قسمت اول همین لم داریم $p = \mu - 1 = 3$ نتیجه می‌شود d عددی فرد است. بنابراین با $2s = d - 3$ داریم $s = \frac{d-3}{2}$. بنابراین بنا به تعریف $J_2(n, d)$ نتیجه می‌شود

$$J_2(n, d) = \left\{R_{\frac{d-3}{2}, 1, 6}^{\frac{d-3}{2}, 1}\right\}$$

□

تعریف ۲.۳.۳. سه زیر مجموعه‌ی $\Omega_1(n, d)$ ، $\Omega_2(n, d)$ و $\Omega_3(n, d)$ از $J_1(n, d)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Omega_1(n, d) = \{Q(s, t, \circ, \mu) : s \neq \circ; s \geq t; s + t = 2d - n\}$$

$$d + 2 \leq n < 2d$$

$$\Omega_2(n, d) = \{Q(s, t, \mu - 2, 2) : s \neq \circ; s \geq t; s + t = d - 2\}$$

$$n \geq d + 4$$

$$\Omega_3(n, d) = \{Q(s, t, 1, \mu - 1) : s \neq \circ; s \geq t; s + t = 2d - n + 1\}$$

$$d + 3 \leq n \leq 2d$$

لم ۵.۳.۳. ۱. اگر $d + 2 \leq n < 2d$ آنگاه $\lambda(\Omega_1(n, d)) = \{Q(\lceil \frac{2d-n}{2} \rceil, \lfloor \frac{2d-n}{2} \rfloor, \circ, \mu)\}$

۲. اگر $n \geq d + 4$ آنگاه $\lambda(\Omega_2(n, d)) = \{Q(\lceil \frac{d-1}{2} \rceil, \lfloor \frac{d-3}{2} \rfloor, \mu - 2, 2)\}$

۳. اگر $d + 3 \leq n \leq 2d$ آنگاه

$$\lambda(\Omega_3(n, d)) = \begin{cases} \{Q(d - \beta + 1, d - \beta, 1, \mu - 1)\}, & n = 2\beta; \\ \{Q(d - \beta, d - \beta, 1, \mu - 1)\}, \{Q(d - \beta + 1, d - \beta - 1, 1, \mu - 1)\}, & n = 2\beta + 1. \end{cases}$$

۴. اگر $d + 5 \leq n \leq \lceil d + \sqrt{d} \rceil$ آنگاه $\rho(\Omega_1(n, d)) < \rho(\Omega_3(n, d))$

برهان. چون در $Q(s, t, l, p)$ داریم $s + t + p = d$ و $s + t + l + 2p = n$ از معادله‌ی (۲.۳) داریم

$$W(Q(s, t, l, p)) - W(Q(s - 1, t + 1, l, p)) = (s - t - 1)(\mu - 1) - lp. \quad (10.3)$$

۱. فرض می‌کنیم $Q(s_0, t_0, \circ, \mu) \in \lambda(\Omega_1(n, d))$ ، به عبارت دیگر $Q(s_0, t_0, \circ, \mu)$ عضوی از $\Omega_1(n, d)$ است که کمترین شاخص وینر را دارد. اگر $s_0 \geq t_0 + 2$ آنگاه از معادله‌ی (۱۰.۳) داریم

$$W(Q(s_0, t_0, \circ, \mu)) - W(Q(s_0 - 1, t_0 + 1, \circ, \mu)) = (s_0 - t_0 - 1)(\mu - 1) > 0$$

و چون $Q(s_0 - 1, t_0 + 1, \circ, \mu) \in \Omega_1(n, d)$ ، با انتخاب $Q(s_0, t_0, \circ, \mu)$ در تناقض است. به همین دلیل می‌توان نتیجه گرفت که $s_0 \leq t_0 + 1$. بنابراین از $s_0 \geq t_0$ و $s_0 + t_0 = 2d - n$ نتیجه می‌شود $s_0 = \lceil \frac{2d-n}{2} \rceil$ و $t_0 = \lfloor \frac{2d-n}{2} \rfloor$ ، به عبارت دیگر

$$\lambda(\Omega_1(n, d)) = \left\{ Q\left(\lceil \frac{2d-n}{2} \rceil, \lfloor \frac{2d-n}{2} \rfloor, \circ, \mu\right) \right\}.$$

۲. قرار می‌دهیم $l = \mu - 2 \geq 2$. فرض می‌کنیم $Q(s_0, t_0, l, 2) \in \lambda(\Omega_2(n, d))$ یعنی $Q(s_0, t_0, \circ, 2)$ عضوی از $\Omega_2(n, d)$ است که کمترین شاخص وینر را دارد.

اگر $s_0 \geq t_0 + 3$ ، آنگاه از معادله‌ی (۱۰.۳) داریم

$$W(Q(s_0, t_0, l, 2)) - W(Q(s_0 - 1, t_0 + 1, l, 2)) = (s_0 - t_0 - 3)(l + 1) + 2 > 0$$

و چون $Q(s_0 - 1, t_0 + 1, l, 2) \in \Omega_2(n, d)$ ، با انتخاب $Q(s_0, t_0, l, 2)$ تناقض دارد.

اگر $s_0 = t_0$ ، آنگاه $t_0 = \lfloor \frac{d-2}{4} \rfloor \geq 1$ ، بنابراین با توجه به لم ۴.۲.۳ داریم

$$W(Q(s_0, t_0, l, 2)) - W(Q(s_0 - 1, t_0 - 1, l, 2)) = l - 1 > 0$$

و چون $Q(s_0 - 1, t_0 - 1, l, 2) \in \Omega_2(n, d)$ ، با انتخاب $Q(s_0, t_0, l, 2)$ تناقض دارد.

از بحث بالا نتیجه می‌شود $t_0 + 1 \leq s_0 \leq t_0 + 2$. بنابراین از $s_0 + t_0 = d - 2$ می‌توان نتیجه گرفت که $s_0 = \lceil \frac{d-1}{4} \rceil$ و $t_0 = \lfloor \frac{d-3}{4} \rfloor$ ، به عبارت دیگر

$$\lambda(\Omega_2(n, d)) = \left\{ Q\left(\lceil \frac{d-1}{4} \rceil, \lfloor \frac{d-3}{4} \rfloor, \mu - 2, 2\right) \right\}.$$

۳. فرض می‌کنیم $Q(s_0, t_0, 1, \mu - 1) \in \lambda(\Omega_3(n, d))$ ، یعنی $Q(s_0, t_0, 1, \mu - 1)$ عضوی از $\Omega_3(n, d)$ است که کمترین شاخص وینر را دارد. با برهانی مشابه قسمت (۱) داریم

$$t_0 \leq s_0 \leq t_0 + 2$$

اگر $n = 2\beta$ ، آنگاه از $s_0 + t_0 = 2d - 2\beta + 1$ داریم $(s_0, t_0) = (d - \beta + 1, d - \beta)$. بنابراین

$$\lambda(\Omega_3(n, d)) = \{Q(d - \beta + 1, d - \beta, 1, \mu - 1)\}.$$

اگر $n = 2\beta + 1$ ، آنگاه از $s_0 + t_0 = 2d - 2\beta$ داریم

$$(s_0, t_0) \in \{(d - \beta, d - \beta), (d - \beta + 1, d - \beta - 1)\}$$

و از معادله‌ی (۲.۳) داریم

$$W(Q(d - \beta, d - \beta, 1, \mu - 1)) = W(Q(d - \beta + 1, d - \beta - 1, 1, \mu - 1)).$$

به همین دلیل،

$$\lambda(\Omega_3(n, d)) = \{Q(d - \beta, d - \beta, 1, \mu - 1), Q(d - \beta + 1, d - \beta - 1, 1, \mu - 1)\}.$$

۴. δ را برابر $\frac{2d-n}{4}$ و η را برابر $d - \beta$ قرار می‌دهیم. از (۱) و (۳) و معادله‌ی (۲.۳)، اگر $n = 2\beta$ عددی زوج باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \rho(\Omega_1(n, d)) - \rho(\Omega_3(n, d)) &= W(Q(\lceil \delta \rceil, \lfloor \delta \rfloor, \circ, \mu)) - W(Q(\eta + 1, \eta, 1, \mu - 1)) \\ &= (\mu - 1)^2 - d, \end{aligned}$$

و اگر $n = 2\beta + 1$ عددی فرد باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \rho(\Omega_1(n, d)) - \rho(\Omega_3(n, d)) &= W(Q(\lceil \delta \rceil, \lfloor \delta \rfloor, \circ, \mu)) - W(Q(\eta, \eta, 1, \mu - 1)) \\ &= (\mu - 1)^2 - d. \end{aligned}$$

از $n \leq \lceil d + \sqrt{d} \rceil < d + \sqrt{d} + 1$ داریم $d + 5 \leq n \leq \lceil d + \sqrt{d} \rceil < d + \sqrt{d} + 1$. بنابراین

$$\rho(\Omega_1(n, d)) < \rho(\Omega_3(n, d)).$$

□

قضیه ۱.۳.۳. ۱. اگر $n = d + 2$ آنگاه $\lambda(\Phi(n, d)) = \{Q(\lceil \frac{d-2}{2} \rceil, \lfloor \frac{d-2}{2} \rfloor, \circ, 2)\}$.

۲. اگر $n = d + 3$ آنگاه $\lambda(\Phi(n, d)) = \{Q(\lceil \frac{d-3}{2} \rceil, \lfloor \frac{d-3}{2} \rfloor, \circ, 3)\}$.

۳. اگر $n = d + 4$ و $\Delta = \{R_{q-1, 1, \epsilon}^{q-1, 1}, Q(q-1, q-1, 1, 3), Q(q, q-2, 1, 3)\}$ آنگاه

$$\lambda(\Phi(n, d)) = \begin{cases} \{Q(q, q-2, 2, 2), Q(q-1, q-2, 1, 3)\}, & d = 2q \text{ و } q = 3; \\ \{Q(q-1, q-2, 1, 3)\}, & d = 2q \text{ و } q = 4; \\ \{Q(q-2, q-2, \circ, 4)\}, & d = 2q \text{ و } q \geq 5; \\ \{Q(q, q-1, 2, 2)\}, & d = 2q+1 \text{ و } q = 2; \\ \{Q(q, q-1, 2, 2)\} \cup \Delta, & d = 2q+1 \text{ و } q = 3; \\ \{Q(q-1, q-2, \circ, 4)\} \cup \Delta, & d = 2q+1 \text{ و } q = 4; \\ \{Q(q-1, q-2, \circ, 4)\}, & d = 2q+1 \text{ و } q \geq 5. \end{cases}$$

برهان. می‌دانیم $n \geq 9$ ، پس اگر $n \leq d + 4$ ، کاملاً واضح است که $d \geq n - 4 \geq 5$.

۱. فرض می‌کنیم $n = d + 2$. با توجه به تعریف $J_1(n, d)$ و $\Omega_1(n, d)$ و قسمت اول لم ۴.۳.۳ به سادگی می‌توان نشان داد که

$$J_1(n, d) = \Omega_1(n, d), J_2(n, d) = \emptyset.$$

از رابطه‌ی (۹.۳) و قسمت اول لم ۵.۳.۳ داریم

$$\lambda(\Phi(n, d)) = \lambda(\Omega_1(n, d)) = \{Q(\lceil \frac{d-2}{2} \rceil, \lfloor \frac{d-2}{2} \rfloor, \circ, 2)\}.$$

۲. فرض می‌کنیم که $n = d + 3$. از قسمت اول لم ۴.۳.۳ به سادگی می‌توان دید که $J_2(n, d) = \emptyset$. از اینرو، با توجه به رابطه‌ی (۹.۳) داریم $\lambda(\Phi(n, d)) = \lambda(J_1(n, d))$. توجه

داشته باشید که $J_1(n, d) = \Omega_1(n, d) \cup \Omega(n, d)$. لذا با توجه به قسمت اول ملاحظه‌ی ۲.۳.۳ و قسمت اول لم ۵.۳.۳ می‌توان نتیجه گرفت که

$$\begin{aligned} \lambda(\Phi(n, d)) &\subseteq \lambda(\Omega_1(n, d)) \cup \lambda(\Omega_3(n, d)) \\ &= \left\{ Q\left(\left\lceil \frac{d-2}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{d-2}{2} \right\rfloor, \circ, 2\right) \right\} \cup \lambda(\Omega_3(n, d)). \end{aligned} \quad (11.3)$$

حالت ۱:

فرض می‌کنیم که $d = 2q + 1$. در این حالت با توجه به رابطه‌ی (۱۱.۳) و $n = d + 3$ و نیز قسمت سوم لم ۵.۳.۳ داریم

$$\lambda(\Phi(n, d)) \subseteq \{Q(q-1, q-1, \circ, 3), Q(q, q-1, 1, 2)\}.$$

از رابطه‌ی (۲.۳) و اینکه $q = \frac{d-1}{2} \geq 2$ داریم

$$W(Q(q, q-1, 1, 2)) - W(Q(q-1, q-1, \circ, 3)) = 2q - 3 > \circ.$$

بنابراین،

$$\lambda(\Phi(n, d)) = \{Q(q-1, q-1, \circ, 3)\} = \left\{ Q\left(\left\lceil \frac{d-3}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{d-3}{2} \right\rfloor, \circ, 3\right) \right\}.$$

حالت ۲:

فرض می‌کنیم $d = 2q$. در این حالت از رابطه‌ی (۱۱.۳) و $n = d + 3$ و قسمت سوم لم ۵.۳.۳ داریم

$$\lambda(\Phi(n, d)) \subseteq \{Q(q-1, q-2, \circ, 3), Q(q, q-1, 1, 2), Q(q, q-2, 1, 2)\}.$$

با روشی مشابه حالت ۱، از رابطه‌ی (۲.۳) و $q = \frac{d}{2} = \frac{n-3}{2} \geq 3$ به سادگی می‌توان ثابت کرد که

$$W(Q(q-1, q-1, 1, 2)) = W(Q(q, q-2, 1, 2)) > W(Q(q-1, q-2, \circ, 3)).$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که

$$\lambda(\Phi(n, d)) = \{Q(q-1, q-2, \circ, 3)\} = \left\{ Q\left(\left\lceil \frac{d-3}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{d-3}{2} \right\rfloor, \circ, 3\right) \right\}.$$

۳. فرض می‌کنیم $n = d + 4$. در این حالت $J_1(n, d) = \Omega_1(n, d) \cup \Omega_2(n, d) \cup \Omega_3(n, d)$. با توجه به قسمت اول ملاحظه‌ی ۲.۳.۳،

$$\lambda(J_1(n, d)) \subseteq \lambda(\Omega_1(n, d)) \cup \lambda(\Omega_2(n, d)) \cup \lambda(\Omega_3(n, d)) \quad (12.3)$$

حالت ۱:

فرض می‌کنیم $d = 2q$. با توجه به قسمت سوم لم ۴.۳.۳ که $J_2(n, d) = \emptyset$ و نیز رابطه‌ی (۱۲.۳) و لم ۵.۳.۳ قسمت‌های ۱ تا ۳، داریم

$$\lambda(J_1(n, d)) \subseteq \{Q(q-2, q-2, \circ, 4), Q(q, q-2, 2, 2), Q(q-1, q-2, 1, 3)\}.$$

بنابر این از رابطه‌ی (۹.۳) نتیجه می‌شود

$$\lambda(\Phi(n, d)) \subseteq \{Q(q-1, q-2, \circ, 4), Q(q, q-2, 2, 2), Q(q-1, q-2, 1, 3)\}.$$

از رابطه‌ی ۲.۳ داریم:

$$W(Q(q, q-2, 2, 2)) - W(Q(q-2, q-2, \circ, 4)) = 4q - 15. \quad (13.3)$$

$$W(Q(q-1, q-2, 1, 3)) - W(Q(q-2, q-2, \circ, 4)) = 2q - 9. \quad (14.3)$$

توجه داشته باشید که از $d \geq 5$ نتیجه می‌شود $q = \frac{d}{2} \geq \frac{5}{2}$ ، بنابر این از رابطه‌های (۱۳.۳) و (۱۴.۳) به سادگی می‌توان به دست آورد

$$\lambda(\Phi(n, d)) = \begin{cases} \{Q(q, q-2, 2, 2), Q(q-1, q-2, 1, 3)\}, & q = 3; \\ \{Q(q-1, q-2, 1, 3)\}, & q = 4; \\ \{Q(q-2, q-2, \circ, 4)\}, & q \geq 5. \end{cases}$$

حالت ۲:

فرض می‌کنیم $d = 2q + 1$. با توجه به قسمت سوم لم ۴.۳.۳ که $J_2(n, d) = \{R_{q-1, 1, \epsilon}^{q-1, 1}\}$ و با توجه به رابطه‌ی (۱۲.۳) و لم ۵.۳.۳ قسمت‌های ۱ تا ۳، داریم

$$\lambda(J_1(n, d)) \subseteq \{Q(q-1, q-2, \circ, 4), Q(q, q-1, 2, 2), Q(q-1, q-1, 1, 3), Q(q, q-2, 1, 3)\}.$$

بنابر این از رابطه‌ی (۹.۳) و قسمت ۱ ملاحظه‌ی ۲.۳.۳ نتیجه می‌شود

$$\lambda(\Phi(n, d)) \subseteq \{Q(q-1, q-2, \circ, 4), Q(q, q-1, 2, 2), Q(q-1, q-1, 1, 3), Q(q, q-2, 1, 3), R_{q-1, 1, \epsilon}^{q-1, 1}\}.$$

از لم‌های ۳.۲.۳ و ۴.۲.۳ داریم

$$W(R_{q-1, 1, \epsilon}^{q-1, 1}) = W(Q(q-1, q-1, 1, 3)) = W(Q(q, q-2, 1, 3)) \quad (15.3)$$

از رابطه‌ی (۲.۳) داریم

$$W(Q(q, q-1, 2, 2)) - W(Q(q-1, q-2, \circ, 4)) = 2(2q - 7). \quad (16.3)$$

$$W(Q(q-1, q-2, 1, 3)) - W(Q(q-1, q-2, \circ, 4)) = 2(q - 4). \quad (17.3)$$

از $d \geq 5$ داریم $q = \frac{d-1}{2} \geq 2$ ، بنابراین با توجه به روابط (۱۵.۳) تا (۱۷.۳) به سادگی می‌توان به دست آورد که

$$\lambda(\Phi(n, d)) = \begin{cases} \{Q(q, q-1, 2, 2)\}, & q = 2; \\ \{Q(q, q-1, 2, 2)\} \cup \Delta, & q = 3; \\ \{Q(q-1, q-2, \circ, 4)\} \cup \Delta, & q = 4; \\ \{Q(q-1, q-2, \circ, 4)\}, & q \geq 5. \end{cases}$$

و حکم ثابت خواهد شد.

□

با توجه به اینکه در $Q(s, t, l, p)$ ، $t = d - s - p$ و $l = \mu - p$ ، از رابطه‌ی (۲.۳) داریم

$$\begin{aligned} W(Q(s, t, l, p)) &= \frac{1}{6} \left[2p^3 + 3(2s + n - 2d - 1)p^2 - (6s + 9n - 6d - 7)p \right. \\ &\quad \left. + 6(n - d - 1)s^2 - 6(nd - d^2 - d)s \right. \\ &\quad \left. + (6n^2 + 3d^2n - 3dn - 2d^3 - 3d^2 + 5d - 6n) \right] \end{aligned} \quad (18.3)$$

فرض می‌کنیم \bar{p} مقدار تقریبی ریشه‌ی $h(p)$ در بازه‌ی $(2, \mu)$ ، با دقت $\circ/1$ باشد، که

$$\begin{aligned} h(p) &= 6p^3 - 3(2\mu + 1)p^2 - 3(2\mu^2 - 4\mu + 1)p \\ &\quad + 9n^2 - 4(3d + 4)n + 3d^2 + 1\circ d + 7. \end{aligned} \quad (19.3)$$

تعریف می‌کنیم

$$\Gamma_1 = \begin{cases} \{[\bar{p}], [\bar{p}] + 1\}, & 2 \leq \bar{p} < 3; \\ \{[\bar{p}] - 1, [\bar{p}], [\bar{p}] + 1\}, & 3 \leq \bar{p} < \mu; \\ \{[\bar{p}] - 1, [\bar{p}]\}, & \bar{p} = \mu. \end{cases}$$

$$\Gamma_2 = \left\{ \left\lfloor \frac{d}{2} - \frac{\bar{p}(\bar{p}-1)}{2(\mu-1)} \right\rfloor - 1 + k : k = \circ, 1, 2, 3 \right\}.$$

$$\Lambda_1 = \{Q(s, d - s - p, \mu - p, p) : p \in \Gamma_1, s \in \Gamma_2\}.$$

$$\Lambda_2 = \left\{ R_{d-\beta, i, 2(\mu-1)}^{d-\beta, 1} : \circ \leq i \leq \left\lfloor \frac{\mu-1}{2} \right\rfloor \right\}.$$

با توجه به لم ۳.۲.۳، تمام گرافهای عضو Γ_2 ، شاخص وینر $W(Q(d-\beta, d-\beta, 1, \mu-1))$ دارند.

قضیه ۲.۳.۳. ۱. اگر $d+5 \leq n \leq [d + \sqrt{d}]$ آنگاه

$$\lambda(\Phi(n, d)) = \{Q(\lceil \frac{2d-n}{2} \rceil, \lfloor \frac{2d-n}{2} \rfloor, \circ, \mu)\}.$$

۲. اگر $d+5 < [d + \sqrt{d} + 1] \leq n \leq 2d-1$ آنگاه

$$\lambda(\Phi(n, d)) = \begin{cases} \lambda(\Lambda_1), & n \text{ زوج} \\ \lambda(\Lambda_1 \cup \Lambda_2). & n \text{ فرد} \end{cases}$$

برهان. تعریف می کنیم

$$f(p, s) = W(Q(s, d-s-p, \mu-p, p)).$$

p و s را دو متغیر حقیقی پیوسته در نظر می گیریم. از رابطه ی (۱۸.۳) داریم

$$\frac{\partial f(p, s)}{\partial s} = 2(\mu-1) \left[s - \left(\frac{d}{2} - \frac{p(p-1)}{2(\mu-1)} \right) \right] \quad (20.3)$$

برای هر متغیر حقیقی ثابت p ، که $2 \leq p \leq \mu$ ، از رابطه ی (۲۰.۳) به سادگی می توان نشان داد که $s(p) = \frac{d}{2} - \frac{p(p-1)}{2(\mu-1)}$ تنها نقطه ای است که تابع تک متغیره ی $f(p, s)$ (متغیر است) در آن کمینه می شود. بنابر این اگر قرار بدهیم

$$g(p) = f(p, s(p)) = f\left(p, \frac{d}{2} - \frac{p(p-1)}{2(\mu-1)}\right), \quad 2 \leq p \leq \mu,$$

حال، اگر \bar{p} را نقطه ای در نظر بگیریم که تابع $g(p)$ را کمینه می کند، ($2 \leq p \leq \mu$)، $(\bar{p}, s(\bar{p}))$ نیز نقطه ای است که تابع دو متغیره ی $f(p, s)$ را کمینه خواهد کرد.

از رابطه ی (۱۸.۳) به سادگی می توان به دست آورد $\frac{dg}{dp} = -\frac{h(p)}{2(\mu-1)}$ که $h(p)$ در رابطه ی (۱۹.۳) تعریف شده است.

۱. فرض می کنیم $d+5 \leq n \leq [d + \sqrt{d}]$.

در این حالت $d < \mu-1 \leq 4$. با در نظر گرفتن $Q(s_0, t_0, l_0, p_0) \in \lambda(\Psi(n, d))$ ، که

$$\Psi(n, d) = \{Q(s, t, l, p) : 2 \leq p \leq \mu-1; s \neq \circ; s \geq t; s+t = d-p; l = \mu-p\}.$$

قرار می دهیم $\theta = \sqrt{16\mu^2 - 20\mu + 7}$.

به سادگی می توان دید وقتیکه، $\frac{2\mu+1-\theta}{6} < p < \frac{2\mu+1+\theta}{6}$ ،

$$6p^2 - 2(2\mu+1)p - (2\mu^2 - 4\mu + 1) < \circ$$

و وقتی که $n \geq d + 5$ ، $\frac{2\mu+1+\theta}{6} < 2 < \mu - 1 < \frac{2\mu+1+\theta}{6}$ ، بنابراین برای $2 \leq p \leq \mu - 1$ داریم

$$h'(p) = 3 \left[6p^2 - 2(2\mu + 1)p - (2\mu^2 - 4\mu + 1) \right] < 0.$$

و این یعنی $h(p)$ در فاصله‌ی $2 \leq p \leq \mu - 1$ اکیداً نزولی است.

اگر \sqrt{d} عددی صحیح باشد، آنگاه

$$[d + \sqrt{d}] = d + \sqrt{d} < d + 1 + \sqrt{d - \frac{1}{6}}.$$

و اگر $\sqrt{d} = k + \alpha$ ، که k عددی صحیح و مثبت و $0 < \alpha < 1$ ، آنگاه $d - k^2 = 2k\alpha + \alpha^2$ عدد صحیح مثبتی است. بخصوص $2k\alpha + \alpha^2 \geq 1$ بنابراین می‌توان دید که

$$[d + \sqrt{d}] = d + k + 1 < d + 1 + \sqrt{k^2 + \left(2k\alpha + \alpha^2 - \frac{1}{6}\right)} = d + 1 + \sqrt{d - \frac{1}{6}}.$$

از توضیحات بالا، نتیجه می‌گیریم که رابطه‌ی $d + \sqrt{d} < d + 1 + \sqrt{d - \frac{1}{6}}$ همیشه برقرار است. پس هنگامیکه $d + 5 \leq n \leq [d + \sqrt{d}]$ داریم

$$h(\mu - 1) = -(\mu - 1) (6\mu^2 - 12\mu - 6d + 7) > 0.$$

با توجه به توضیحات بالا، برای $2 \leq p \leq \mu - 1$ ، داریم $h(p) > 0$ ، به عبارت دیگر $\frac{dg}{dp} < 0$. بنابراین تابع یکتای $g(p)$ از متغیر پیوسته p در فاصله‌ی $2 \leq p \leq \mu - 1$ اکیداً نزولی است. علی‌الخصوص، تابع یکتای $g(p)$ از متغیر صحیح p در فاصله‌ی $2 \leq p \leq \mu - 1$ اکیداً نزولی است. بنابراین عدد صحیح p می‌توان یافت که $g(p)$ را کمینه می‌کند، آنرا $p_0 = \mu - 1$ در نظر می‌گیریم، یعنی $l_0 = 1$. در نتیجه $Q(s_0, t_0, l_0, p_0) \in \Omega_3(n, d)$.

لذا با توجه به انتخاب $Q(s_0, t_0, l_0, p_0)$ و قسمت چهارم لم ۵.۳.۳ داریم

$$\rho(\Psi(n, d)) = W(Q(s_0, t_0, l_0, p_0)) \geq \rho(\Omega_3(n, d)) > \rho(\Omega_1(n, d))$$

از آنجاییکه داشتیم $J_1(n, d) = \Psi(n, d) \cup \Omega_1(n, d)$ ، با توجه به قسمت ۲ ملاحظه‌ی ۲.۳.۳

$$\lambda(J_1(n, d)) = \lambda(\Omega_1(n, d))$$

از طرف دیگر، چون $d + 5 \leq n < \sqrt{d} + d + 1$ ، با توجه به قسمت ۲ لم ۴.۳.۳ داریم

$$\rho(J_2(n, d)) > \rho(J_1(n, d)).$$

و چون $d > 4$ ، از قسمت ۲ ۲.۳.۳، رابطه‌ی ۹.۳ و قسمت ۱ لم ۵.۳.۳

$$\begin{aligned} \lambda(\Phi(n, d)) &= \lambda \left(\bigcup_{i=1}^2 J_I(n, d) \right) = \lambda(J_1(n, d)) \\ &= \lambda(\Omega_1(n, d)) = \left\{ Q \left(\left[\frac{2d-n}{2} \right], \left[\frac{2d-n}{2} \right], 0, \mu \right) \right\}. \end{aligned}$$

۲. فرض می‌کنیم $d + 5 < [d + \sqrt{d} + 1] \leq n \leq 2d - 1$.

با فرض اینکه $Q(s_0, t_0, l_0, p_0) \in J_1(n, d)$ و جایگذاری $\nu = \sqrt{9d^2 - 66d + 175}$ به سادگی می‌توان دید، در حالتی که $\frac{6d-8+\nu}{3} < n < \frac{6d-8-\nu}{3}$ داریم

$$-3n^2 + 4(3d - 4)n - 9d^2 + 10d + 37 > 0.$$

و چون $d + 5 < [d + \sqrt{d} + 1]$ نتیجه می‌شود، $d > 9$. پس ثابت شد

$$\frac{6d-8-\nu}{3} < [d + \sqrt{d} + 1] < 2d - 1 < \frac{6d-8+\nu}{3}.$$

که این یعنی

$$h(2) = -3n^2 + 4(3d - 4)n - 9d^2 + 10d + 37 > 0.$$

حال با قرار دادن

$$\nu(n) = 6n^2 - 12n(d + 1)6d^2 + 6d + 7.$$

واضح است که $\nu(n)$ وقتی $n \geq d + 1$ صعودی است. بنابراین از $n \geq [d + \sqrt{d} + 1] \geq d + 1$ می‌توان نتیجه گرفت $\nu(n) \geq \nu(d + \sqrt{d} + 1) > \nu(d + \sqrt{d - \frac{1}{6}} + 1) = 0$. پس

$$h(\mu) = -(\mu - 1)\nu(n) < 0.$$

از آنجا که $h(-\infty) < 0$ و $h(+\infty) > 0$ ، سه ریشه‌ی $h(p)$ به ترتیب در بازه‌های $(-\infty, 2)$ و $(2, \mu)$ و $(\mu, +\infty)$ قرار دارد. و این نتیجه می‌دهد، $h(p)$ ریشه‌ی یکتایی مثل \bar{p} در بازه‌ی $(2, \mu)$ دارد. چون $h(2) > 0$ و $h(\mu) < 0$ ، نتیجه می‌شود که، اگر $2 \leq p < \bar{p}$ آنگاه $h(p) > 0$ و اگر $\bar{p} < p \leq \mu$ آنگاه $h(p) < 0$.

بنابر این با توجه به اینکه $\frac{dg}{dp} = -\frac{h(p)}{p(\mu-1)}$ ، می‌توان نتیجه گرفت که، در $2 \leq p < \bar{p}$ ، اکیداً نزولی و در $\bar{p} < p \leq \mu$ ، اکیداً صعودی است. در نتیجه، تابع $g(p)$ ، که p متغیری پیوسته است، کمترین مقدار خود را در \bar{p} دارد. در نتیجه، اگر p متغیری صحیح باشد، نقطه‌ای که تابع $g(p)$ را کمینه می‌کند باید عضو مجموعه‌ی $\{\lfloor \bar{p} \rfloor, \lfloor \bar{p} \rfloor + 1\}$ باشد. حال اگر $(\tilde{p}, s(\tilde{p}))$ را تنها نقطه‌ای در نظر بگیریم که تابع $f(p, s)$ را (که در آن متغیرهای p و s پیوسته هستند) کمینه می‌کند، آنگاه برای نقطه‌ی (p, s) که تابع $f(p, s)$ در حالتی که متغیرها صحیح هستند، داریم $s \in \{\lfloor s(\tilde{p}) \rfloor, \lfloor s(\tilde{p}) \rfloor + 1\}$ ، به عبارت دیگر

$$p_0 \in \{\lfloor \bar{p} \rfloor, \lfloor \bar{p} \rfloor + 1\}. \quad (21.3)$$

$$s_0 \in \{\lfloor s(\tilde{p}) \rfloor, \lfloor s(\tilde{p}) \rfloor + 1\}. \quad (22.3)$$

اگر $\mu \leq \bar{p} \leq 2$ را تقریب \bar{p} با دقت $\frac{1}{\circ}$ در نظر بگیریم. آنگاه $1 + \lfloor \bar{p} \rfloor \leq \bar{p} \leq \lfloor \bar{p} \rfloor + 1$ و بنابر این داریم

$$\{\lfloor \bar{p} \rfloor, \lfloor \bar{p} \rfloor + 1\} \subseteq \Gamma_1. \quad (23.3)$$

با توجه به اینکه $|\bar{p} - \tilde{p}| \leq \frac{1}{\circ 5}$ ، می‌توان نتیجه گرفت

$$|s(\bar{p}) - s(\tilde{p})| = \frac{|\bar{p} - \tilde{p}| (\bar{p} + \tilde{p} - 1)}{2(\mu - 1)} \leq \frac{\frac{1}{\circ 5} (2\mu - 1)}{2(\mu - 1)} \leq \frac{1}{\circ 6},$$

به عبارت دیگر، $\tilde{p} - \frac{1}{\circ 6} \leq \bar{p} \leq \tilde{p} + \frac{1}{\circ 6}$. از این‌رو داریم

$$\{\lfloor s(\tilde{p}) \rfloor, \lfloor s(\tilde{p}) \rfloor + 1\} \subseteq \Gamma_2. \quad (24.3)$$

از روابط (21.3) تا (24.3) نتیجه می‌شود که $p_0 \in \Gamma_1$ و $s_0 \in \Gamma_2$ ، به عبارت دیگر

$$Q(s_0, t_0, l_0, p_0) \in \{Q(s, d - s - p, \mu - p, p) : p \in \Gamma_1, s \in \Gamma_2\} = \Lambda_1,$$

بنابر این با توجه به اینکه $Q(s_0, t_0, l_0, p_0)$ را گرافی با کمترین شاخص وینر در $J_1(n, d)$ در نظر گرفتیم، داریم

$$\lambda(J_1(n, d)) = \lambda(\Lambda_1) \quad (25.3)$$

اگر n عددی زوج باشد، با توجه به قسمت اول لم 4.3.3، داریم $J_2(n, d) = \emptyset$. با توجه به اینکه $d > 9$ و از روابط (9.3) و (25.3) داریم $\lambda(\Phi(n, d)) = \lambda(J_1(n, d)) = \lambda(\Lambda_1)$ و اگر $n = 2\beta + 1$ عددی فرد باشد، با توجه به قسمت اول لم 4.3.3 و تعریف Λ_2 داریم

$$J_2(n, d) = \left\{ R_{d-\beta, i, 2(\mu-1)}^{d-\beta, 1} : 1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{\mu-1}{2} \right\rfloor \right\} = \Lambda_2 - \{R_{d-\beta, \circ, 2(\mu-1)}^{d-\beta, 1}\},$$

که $R_{d-\beta, i, 2(\mu-1)}^{d-\beta, 1} = Q(d-\beta, d-\beta, 1, \mu-1) \in J_1(n, d)$ و با توجه به $d > 9$ ، از رابطه‌ی (9.3) داریم

$$\lambda(\Phi(n, d)) = \lambda(J_1(n, d) \cup J_2(n, d)) = \lambda((J_1(n, d) - \Lambda_1) \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2). \quad (26.3)$$

از $\lambda(J_1(n, d)) \subseteq \Lambda_1$ و $\Lambda_1 \subseteq J_1(n, d)$ و قسمت سوم ملاحظه‌ی 2.3.3

$$\rho(J_1(n, d) - \Lambda_1) > \rho(\Lambda_1). \quad (27.3)$$

لذا با توجه به روابط 26.3 و 27.3 و قسمت دوم ملاحظه‌ی 2.3.3

$$\lambda(\Phi(n, d)) = \lambda(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$$

□

ملاحظه ۳.۳.۳. ۱. فرض می‌کنیم $Q(s_0, t_0, l_0, p_0)$ گرافی در $J_1(n, d)$ باشد که دارای کمترین شاخص وینر است. پس $W(Q(s_0, t_0, l_0, p_0)) \leq W(Q(s_0 - 1, t_0 + 1, l_0, p_0))$ و بنابر این از رابطه‌ی ۱۰.۳ داریم

$$s_0 - t_0 - 1 \leq \frac{(n - d - p_0)p_0}{n - d - 1} = p_0 - \frac{p_0(p_0 - 1)}{n - d - 1}.$$

با توجه به $s_0 + t_0 = d - p_0$ و $s_0 \geq t_0$ ، نتیجه می‌شود

$$\frac{d - p_0}{2} \leq s_0 \leq \frac{d + 1}{2} - \frac{p_0(p_0 - 1)}{2(n - d - 1)}. \quad (28.3)$$

۲. هنگامیکه $2d - 1 \leq n \leq [d + \sqrt{d} + 1] + d + 5$ ، قضیه‌ی ۲.۳.۳ قسمت دوم نشان می‌دهد که، برای به دست آوردن $\lambda(\Phi(n, d))$ ، تنها باید ریشه‌ی تقریبی \bar{p} را در بازه‌ی $(2, \mu)$ با دقت $1/10$ پیدا کرده و شاخص وینر حداکثر سیزده گراف را از رابطه‌ی (۲.۳) مقایسه کنیم. توجه کنید که \bar{p} به n و d وابسته است، بنابر این p_0 در گراف $Q(s_0, t_0, l_0, p_0)$ با کمترین شاخص وینر تغییر خواهد کرد، و در نتیجه گرافهای با کمترین شاخص وینر هم تغییر خواهند کرد. (مثالهای بعدی را ببینید).

مثال ۱.۳.۳. برای $d = 100$ و $n = 111$ ، ریشه‌ی تقریبی $h(p)$ در بازه‌ی $(2, 11)$ ، $\bar{p} = 10/4$ است. از اینرو $\Gamma_1 = \{9, 10, 11\}$ و $\Gamma_2 = \{44, 45, 46, 47\}$. به سادگی می‌توان دید که از رابطه‌ی (۲۸.۳) برای $p \in \Lambda_1$ داریم $45 \leq s \leq 46$ و نیز می‌دانیم که در گراف $Q(s, t, l, p)$ ، $s \geq t$. بنابر این احتیاجی به در نظر گرفتن حالت‌های زیر نیست.

$$(p, s) \in \{(9, 44), (10, 44), (11, 44), (9, 47), (10, 47), (11, 47), (9, 45)\}.$$

از آنجاییکه $R_{45,0,22 \times 10}^{45,1}$ متناظر است با $(p, s) = (10, 45)$ ، ما تنها باید شاخص وینر گرافهای متناظر با موارد زیر را بررسی کنیم.

$$(p, s) \in \{(10, 45), (10, 46), (11, 45), (9, 46), (11, 46)\}$$

از رابطه‌ی (۲.۳) داریم

$$W(Q(45, 45, 1, 10)) = W(Q(46, 44, 1, 10)) = W(Q(45, 44, 0, 11)) = 197890,$$

$$W(Q(46, 45, 2, 9)) = 197892, \quad W(Q(46, 43, 0, 11)) = 197910.$$

توجه کنید که n عددی فرد است، پس

$$\lambda(\Phi(120, 100)) = \{Q(45, 44, 0, 11), Q(46, 44, 1, 10), R_{45,i,2 \times 10}^{45,1} : 0 \leq i \leq 4\}.$$

مثال ۲.۳.۳. برای $d = 100$ و $n = 120$ ، ریشه‌ی تقریبی $h(p)$ در بازه‌ی $(2, 20)$ ، $\bar{p} = 5/5$ است. نتیجه می‌شود که $\Gamma_1 = \{4, 5, 6\}$ و $\Gamma_2 = \{48, 49, 50, 51\}$. از آنجاییکه n عددی فرد است، از رابطه‌ی (۲.۳)، مشابه مثال قبل داریم

$$\lambda(\Phi(120, 100)) = \{Q(49, 45, 14, 6)\}.$$

قضیه ۳.۳.۳. اگر $n \geq 2d$ ، آنگاه

$$\lambda(\Phi(n, d)) = \begin{cases} \{Q(2, \circ, n-6, 2), R_{\circ, \circ, 3}^{1, n-6}\}, & d = 4 \\ \{Q(\lceil \frac{d-1}{2} \rceil, \lfloor \frac{d-3}{2} \rfloor, \mu-2, 2)\} & d \geq 5. \end{cases}$$

برهان. از قسمت ۱ لم ۴.۳.۳ دیدیم که $J_2(n, d) = \emptyset$ بنابراین از روابط (۸.۳) و (۹.۳) نتیجه می‌شود

$$\lambda(\Phi(n, d)) = \begin{cases} \lambda(\{R_{\circ, \circ, 3}^{1, n-6}\} \cup J_1(n, d)), & d = 4, \\ \lambda(J_1(n, d)) & d \geq 5. \end{cases} \quad (29.3)$$

فرض می‌کنیم $Q(s_0, t_0, l_0, p_0) \in \lambda(J_1(n, d))$. اگر $p_0 \geq 4$ ، آنگاه $Q(s_0, t_0 + 1, l_0 + 1, p_0 - 1) \in \lambda(J_1(n, d))$ و از رابطه‌ی (۲.۳) و انتخاب $Q(s_0, t_0, l_0, p_0)$ داریم

$$\begin{aligned} & W(Q(s_0, t_0, l_0, p_0)) - W(Q(s_0, t_0 + 1, l_0 + 1, p_0 - 1)) \\ &= (p_0 - 2)(n - p_0) - 2(t_0 + 1)(p_0 - 1) \leq 0. \end{aligned}$$

از $s_0 \geq t_0$ و $s_0 + t_0 = d - p_0$ داریم $t_0 \leq \frac{d-p_0}{2}$. بنابراین، نتیجه می‌شود

$$(p_0 - 2)(n - p_0) \leq 2(t_0 + 1)(p_0 - 1) \leq (d - p_0 + 2)(p_0 - 1),$$

به عبارت دیگر $4 < 2 + \frac{d}{\mu-1} \leq p_0$ ، که با فرض $p_0 \geq 4$ تناقض دارد. پس داریم $2 \leq p_0 \leq 3$. فرض می‌کنیم $p_0 = 2$. در این حالت $l_0 = \mu - 2$ و بنابراین، از تعریف $\Omega_2(n, d)$ می‌توان دید که $Q(s_0, t_0, l_0, p_0) \in \Omega_2(n, d)$. بنابراین این از تعریف $Q(s_0, t_0, l_0, p_0)$ می‌دانیم که، $Q(s_0, t_0, l_0, p_0)$ گرافی است که کمترین شاخص وینر را در $\Omega_2(n, d)$ دارد. بنابراین از قسمت ۲ لم ۵.۳.۳ نتیجه می‌شود

$$Q(s_0, t_0, l_0, p_0) = Q\left(\left\lceil \frac{d-1}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{d-3}{2} \right\rfloor, \mu-2, 2\right).$$

حال فرض می‌کنیم $p_0 = 3$. در این حالت $l_0 = \mu - 3$ و $s_0 + t_0 = d - 3$. با روشی مشابه آنچه برای قسمت ۲ لم ۵.۳.۳ به کار رفت، می‌توان ثابت کرد که $t_0 + 1 \leq s_0 \leq t_0 + 3$. به همین دلیل، هنگامیکه $d = 2q$ ، عددی زوج باشد، از $s_0 + t_0 = 2q - 3$ به سادگی می‌توان دید که $(s_0, t_0) \in \{(q-1, q-2), (q, q-3)\}$ و اگر $d = 2q + 1$ عددی فرد باشد، از $s_0 + t_0 = 2q - 2$ به سادگی می‌توان دید که $(s_0, t_0) = (q, q-2)$.

با قرار دادن $\omega = n - 2q - 3$ ، توضیحات بالا می‌رساند که، $\lambda(J_1(n, d)) \subseteq F$ ، که

$$F = \begin{cases} \{Q(q, q-2, \omega+1, 2), Q(q-1, q-2, \omega, 3), Q(q, q-3, \omega, 3)\}, & d = 2q \\ \{Q(q, q-1, \omega, 2), Q(q, q-2, \omega-1, 3)\}, & d = 2q + 1. \end{cases}$$

توجه داشته باشید که از $d \geq 2q$ و $d \geq 4$ داریم $d \geq 2d \geq 4q$ و $n \geq 2$ و $q \geq 2$ ، بنابراین از رابطه‌ی (۲.۳) به سادگی می‌توان دید که

$$W(Q(q-1, q-2, \omega, 3)) - W(Q(q, q-2, \omega+1, 2)) = 2(n-3q-1) > 0.$$

$$W(Q(q, q-3, \omega, 3)) - W(Q(q, q-2, \omega+1, 2)) = n-4q+5 > 0.$$

$$W(Q(q, q-2, \omega-1, 3)) - W(Q(q, q-2, \omega, 2)) = n-4q+1 > 0.$$

بنابر این نتیجه می‌گیریم که

$$\lambda(F) = \begin{cases} \{Q(q, q-2, \omega+1, 2)\}, & d = 2q \\ \{Q(q, q-1, \omega, 2)\}, & d = 2q+1. \end{cases}$$

به عبارت دیگر

$$\lambda(F) = \left\{ Q \left(\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{d-3}{2} \right\rfloor, \mu-2, 2 \right) \right\}. \quad (30.3)$$

از $F \subseteq J_1(n, d)$ ، $\lambda(J_1(n, d)) \subseteq F$ و قسمت ۳ ملاحظه‌ی ۲.۳.۳ داریم

$$\lambda(J_1(n, d)) = \lambda(F). \quad (31.3)$$

اگر $d = 4$ ، از رابطه‌ی (۲.۳) داریم

$$W(R_{\nu, \omega, 3}^{1, n-6}) = W(Q \left(\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{d-3}{2} \right\rfloor, \mu-2, 2 \right)). \quad (32.3)$$

□

از روابط (۲۹.۳) تا (۳۲.۳) نتایج مورد نظر حاصل خواهد شد.

پیوست آ

شاخص وینر گرافهای خاص

جدول آ.۱: شاخص وینر بعضی گرافهای خاص

نام	گراف	شاخص وینر
گراف کامل	K_n	$\frac{1}{2}n(n-1)$
گراف دوبخشی کامل	$K_{m,n}$	$(m+n)(m+n-1) - mn$
مسیر	P_n	$\frac{1}{6}n(n^2-1)$
گراف ستاره	S_n	$(n-1)^2$
دور	$C_n (n \geq 3)$	$\begin{cases} \frac{1}{2}n^3 & \text{زوج } n \\ \frac{1}{2}n(n^2-1) & \text{فرد } n \end{cases}$
گراف مثلثی	T_n	$\frac{1}{4}(n-1)^2(n-2)$
گراف مکعبی	Q_n	$n^{2^{n-1}}$
گراف چرخ	$W_n (n \geq 4)$	$(n-2)(n-1)$

مراجع

- [۱] اسدی دهقی، حمیدرضا. بررسی اندیس وینر در گرافها. پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه دامغان، ۱۳۹۲.
- [۲] رانگانتهان و بالا کریشنان. کتاب درسی نظریه گراف. ترجمه‌ی طائری، بیژن. مرکز انتشارات جهاد دانشگاهی واحد صنعتی اصفهان، اصفهان، ویرایش اول، ۱۳۸۶.
- [۳] سلیمی پیرزمان، اعظم. شاخص وینر و کاربرد آن. پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۸۸.
- [۴] شاددل، معصومه. شاخص وینر و بعد وینر گرافها. پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری، ۱۳۹۴.
- [۵] فخر علی میکلائی، محمد باقر. مروری بر اندیس وینر از یک گراف. پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، ۱۳۹۳.
- [6] Ashrafi, Ali Reza and Yousefi, Shahram. Computing the wiener index of a $tuc4c8$ (s) nanotorus. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem*, 57(2):403–10, 2007.
- [7] Cvetković, Dragoš and Rowlinson, Peter. Spectra of unicyclic graphs. *Graphs and combinatorics*, 3(1):7–23, 1987.
- [8] Deng, H. The trees on $n \geq 9$ vertices with the first to seventeenth greatest wiener indices are chemical trees. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem*, 57(2):393–402, 2007.
- [9] Dobrynin, Andrey A, Entringer, Roger, and Gutman, Ivan. Wiener index of trees: theory and applications. *Acta Applicandae Mathematica*, 66(3):211–249, 2001.
- [10] Dobrynin, Andrey A, Gutman, Ivan, Klavžar, Sandi, and Žigert, Petra. Wiener index of hexagonal systems. *Acta Applicandae Mathematica*, 72(3):247–294, 2002.
- [11] Dong, Hui and Zhou, Bo. Maximum wiener index of unicyclic graphs with fixed maximum degree. *Ars Comb.*, 103:407–416, 2012.

- [12] Du, Zhibin and Zhou, Bo. A note on wiener indices of unicyclic graphs. *Ars Combinatoria*, 93:97–103, 10 2009.
- [13] Du, Zhibin and Zhou, Bo. On the reverse wiener indices of unicyclic graphs. *Acta applicandae mathematicae*, 106(2):293–306, 2009.
- [14] Du, Zhibin and Zhou, Bo. Minimum wiener indices of trees and unicyclic graphs of given matching number. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem*, 63(1):101–112, 2010.
- [15] Fischermann, Miranca, Gutman, Ivan, Hoffmann, Arne, Rautenbach, Dieter, Vidovića, Dušica, and Volkmann, Lutz. Extremal chemical trees. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 57(1-2):49–51, 2002.
- [16] Gutman, Ivan. Some recent results in the theory of the wiener number. *Indian J. Chem.*, 32:651–661, 1993.
- [17] Gutman, Ivan and Polansky, Oskar E. *Mathematical concepts in organic chemistry*. 1986.
- [18] Gutman, Ivan and Potgieter, JH. Wiener index and intermolecular forces. *Journal-Serbian Chemical Society*, 62:185–192, 1997.
- [19] Nasiri, R, Yousefi-Azari, H, Darafsheh, MR, and Ashrafi, AR. Remarks on the wiener index of unicyclic graphs. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 41(1-2):49–59, 2013.
- [20] Tan, Shang-wang and Lin, Yan. The largest wiener index of unicyclic graphs given girth or maximum degree. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 53(1-2):343–363, 2017.
- [21] Tan, Shang-wang and Wang, Qi-long. The wiener index of cacti given matching number. *ARS COMBINATORIA*, 131:373–395, 2017.
- [22] Tan, Shang-wang, Wang, Qi-long, and Lin, Yan. The wiener index of unicyclic graphs given number of pendant vertices or cut vertices. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 55(1-2):1–24, 2017.
- [23] Tang, Zikai and Deng, Hanyuan. The (n, n) -graphs with the first three extremal wiener indices. *Journal of Mathematical Chemistry*, 43(1):60–74, 2008.
- [24] Wiener, Harry. Correlation of heats of isomerization, and differences in heats of vaporization of isomers, among the paraffin hydrocarbons. *Journal of the American Chemical Society*, 69(11):2636–2638, 1947.

- [25] Wiener, Harry. Structural determination of paraffin boiling points. *Journal of the American Chemical Society*, 69(1):17–20, 1947.
- [26] Wiener, Harry. Relation of the physical properties of the isomeric alkanes to molecular structure. surface tension, specific dispersion, and critical solution temperature in aniline. *The Journal of Physical and Colloid Chemistry*, 52(6):1082–1089, 1948.
- [27] Wiener, Harry. Vapor pressure–temperature relationships among the branched paraffin hydrocarbons. *The Journal of Physical Chemistry*, 52(2):425–430, 1948.
- [28] Yousefi, Shahram and Ashrafi, Ali Reza. An exact expression for the wiener index of a polyhex nanotorus. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem*, 56(1):169–178, 2006.
- [29] Yu, Guihai and Feng, Lihua. On the wiener index of unicyclic graphs with given girth. *Ars Comb*, 94:361–369, 2010.
- [30] Zhang, Heping, Xu, Shoujun, and Yang, Yujun. Wiener index of toroidal polyhexes. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem*, 56:153–168, 2006.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Identifying	برهم‌نشانی
Eccentricity	خروج از مرکز
Pendant Vertex	رأس آویزان
Cut Vertex	رأس برشی
Branching Vertex	رأس شاخه‌ای
Topological Index	شاخص توپولوژیک
Wiener Index	شاخص وینر
Distance	فاصله
Diameter	قطر
Unicyclic Graph	گراف تک‌دور
Connected Graph	گراف همبند
Isomorphism	یکریختی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Branching Vertex	رأس شاخه‌ای
Eccentricity	خروج از مرکز
Connected Graph	گراف همبند
Cut Vertex	رأس برشی
Diameter	قطر
Distance	فاصله
Identifying	برهم‌نشانی
Isomorphism	یکریختی
Pendant Vertex	رأس آویزان
Topological Index	شاخص توپولوژیک
Unicyclic Graph	گراف تک‌دور
Wiener Index	شاخص وینر

Abstract

Topological indices are real numbers, which are identical in isomorph graphs. The Wiener index, which is shown by W is the first topological index that has been used to determine some of physical and chemical properties of the materials. In this thesis, Wiener index is studied on trees and unicyclic graphs. In this regard, the minimum value of the Wiener index is investigated on the both trees and unicyclic graphs with fixed diameter.

Keywords : Wiener Index, Tree, Fixed Diameter, Unicyclic Graph.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Graph and Combinatorics

**On Wiener Index of graphs with fixed
diameter**

By: Hamid Rahimi

Supervisors

Dr. Sadegh Rahimi Sharbaf

Dr. Nader Jafari Rad

July 2018