بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

بررسی برخی از اعداد رمزی روی گراف‌ها

نگارنده: فهیمه یحیایی

استادان راهنما

دکتر نادر جعفری‌راد
دکتر صادق رحیمی شعرباف مقدس

تیر ۱۳۹۷

تقدیم به بی کران مهر و عطوفت، امام عصر "عج" که یگانه شاهراه عشق و عرفان جز نگاه او نیست. مرا هزار امید است و هر هزار تویی...

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه درخت پربار وجودشان بیاسایم و از ریشه آنها شاخ و برگ گیرم سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم چراکه این دو وجود پس از پروردگارم مایه هستی ام بوده اند دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب آموختند. آموزگارانی که برایم زندگی و انسان بودن را معنا کردند حال این برگ سبزی است تقدیم به آنان و خواهر و برادر مهربانم که حضورشان شادی بخش و مایه دلگرمی من می باشند.

سپاس‌گزاری...

خداوندا بفهمان که بی‌تو چه می‌شود ولی نشانم نده خداوندا هم بفهمان هم نشانم بده که با تو چه خواهم شد.سپاس خدایی که داشتنش جبران تمام نداشته هاست و توفیقی رافراهم ساخت تا این پایان‌نامه را به پایان برسانم.از استادان اندیشمند و فرهیخته جناب آقای دکتر نادر جعفری‌راد و جناب آقای دکتر صادق رحیمی شعرباف به پاس یاریها و راهنماییهای بی دریغ ایشان تشکر می‌کنم. هم‌چنین از داوران گرامی جناب آقای دکتر علیشاهی و جناب آقای دکترآل‌هوز که زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شده‌اند کمال تشکر را دارم.

درپایان تشکر خالصانه دارم از کسانی‌که با کرامتی چون خورشید سرزمین دل را روشنی بخشیدند وگلشن سرای علم و دانش را با راهنمایی‌های کارساز و سازنده بارور ساختند.

فهیمه یحیایی

تیر ۱۳۹۷

تعهد نامه

اینجانب **فهیمه یحیایی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **بررسی برخی از اعداد رمزی روی گراف‌ها** ، تحت راهنمایی **نادر جعفری‌راد** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچجا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ’’ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فهیمه یحیایی
تیر ۱۳۹۷

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

یکی از موضوعات مهم در نظریه گراف، مطالعه اعداد رمزی گراف هاست. برای دو گراف G و H، عدد رمزی $R(G, H)$، کوچکترین عدد صحیح n است به طوریکه برای هر گراف F از مرتبه n، یا گراف F شامل زیر گراف G و یا گراف $\bar{F}$ شامل زیر گراف H باشد. در این پایان نامه انواع مختلفی از عددهای رمزی روی گراف‌ها را مطالعه می‌کنیم. همچنین نتایج و کران هایی برای عدد رمزی گراف‌ها که شامل مسیرها، دورها، چرخ ها و چندین خانواده از گراف‌ها را ارائه می‌دهیم.

کلمات کلیدی: اعداد رمزی، گراف چرخ، گراف دور.

مقدمه

مطالعه اعداد رمزی روی گراف‌ها در دهه اخیر رشد چشمگیری داشته است و با توجه به کاربردهای فراوان آن از مباحث فعال پژوهشی در جهان به شمار می‌رود. قضیه رمزی یک دست آورد بنیادین در علم ترکیبیات به شمار می‌رود و اولین نسخه آن توسط فرانک پلامتون رمزی [۱] به اثبات رسید. بعدها دانشمندان بزرگی چون گلیسون [۲] و گرینوود [۳] و اردوش [۴] بر روی آن‌ها و قضایای مربوطه کار کردند. در حال حاضر این اعداد تجربی هستند و غیر مواردی خاص، فرمولی برای آنها وجود ندارد. چرخ‌ها نیز در زمینه‌ی اعداد رمزی بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند و اولین سهم مربوط به تاریخچه دورها و چرخ‌ها به سال ۱۹۸۳ بر می‌گردد که اردوش و بوور اعداد رمزی یک مثلث در مقایسه با چرخ‌های از مرتبه بزرگ و دلخواه را تعیین کردند. نتایج این پایان‌نامه برگرفته از مراجع [۳۸]، [۴۲]، [۳۱]، [۲۲] و [۲۳] می‌باشند و فصل بندی این پایان‌نامه به قرار زیر است:

در فصل اول تعاریف و مفاهیم اولیه را ارائه می‌دهیم، در فصل دوم به تعیین عدد رمزی چرخ‌های W_n در مقایسه با دورهای C_m از مرتبه فرد و به‌دست آوردن کران بالا برای $R(W_n, C_m)$ می‌پردازیم در فصل سوم به مطالعه اعداد رمزی چندرنگی روی دورها پرداخته و سپس مسأله عدد رمزی مرتبط با رنگ‌آمیزی یالی از گراف‌های معمولی با kـ رنگ برای $k \geq ۲$ در نظر گرفته خواهد شد. در نهایت دورهای تک‌رنگ با یک طول مشخص را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل چهارم به تعیین عدد رمزی دورهای بزرگ C_n در مقایسه با چرخ‌های W_m در آن m زوج و فرد است می‌پردازیم و همچنین کران‌هایی را به‌دست می‌آوریم.

[۱] F.P.Ramsey

[۲] GLeason

[۳] Greenwood

[۴] Erdos

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل تعاریف و مفاهیم لازم از نظریه گراف که در فصل‌های آتی مورد استفاده قرار خواهد گرفت را به اختصار بیان می‌کنیم. تمام مطالب و تعاریف این فصل برگرفته از مرجع [۹] می‌باشند.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم نظریه گراف

تعریف ۱.۱.۱. یک **گراف**[۱] به صورت یک سه‌تایی مرتب $(V(G), E(G), \psi(G))$ تعریف می‌شود که در آن مجموعه غیرتهی $V(G)$ از رأس‌ها و مجموعه $E(G)$ از یال‌ها و تابع وقوع $\psi(G)$ که به هر یال G یک زوج نامرتب از رأس‌های G (که لزوماً متمایز نیستند) را نسبت می‌دهد. اگر e یک یال، u و v دو رأس از G باشند به طوری‌که $\psi_G(e) = \{u, v\}$، در این صورت گفته می‌شود که e، رأس‌های u و v را به یک‌دیگر وصل کرده است و رأس‌های u و v، دوسر یال e نامیده می‌شوند. معمولاً گراف $G = (V(G), E(G), \psi(G)$ به طور خلاصه با $(V(G), E(G)$ یا $G = (V, E)$ نشان می‌دهند. $V(G)$ را **مجموعهٔ رأس‌ها**[۲] و $E(G)$ را **خانواده یال‌های** [۳] گراف G می‌گویند. دو رأس u و v را **مجاور** [۴] گویند اگر یال بین آنها وجود داشته باشد به همین

[۱] Graph
[۲] Vertex set
[۳] Edge set
[۴] Adjacent

ترتیب دو یال متمایز از G مجاورند، اگر حداقل یک رأس مشترک داشته باشند.

تعریف ۲.۱.۱. به تعداد رئوس گراف G **مرتبه**[۵] و تعداد یال‌هایش را **اندازه**[۶] گراف G می‌نامند.

تعریف ۳.۱.۱. در گراف G، منظور از **همسایگی باز**[۷] رأس V، $N_G(V)$. مجموعه رئوس مجاور با v در گراف G است به عبارت دیگر $N_G(v) = \{u \in V(G) | uv \in E(G)\}$. **همسایگی بسته**[۸] رأس v در گراف G نیز عبارت است از $N_G[v] = N_G(v) \cap \{v\}$. درجه یک رأس v، $deg_G(v)$ برابر است با تعداد همسایه‌های v در گراف G است. ماکسیمم و مینیمم درجه رئوس G را به ترتیب با $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۱.۱. **گراف کامل**[۹] گرافی است که بین هر دو رأس آن دقیقاً یک یال وجود داشته باشد. یک گراف کامل از مرتبه n دارای n رأس و $\frac{n(n-1)}{2}$ یال است. گراف کامل از مرتبه n را با K_n بیان می‌شود.

تعریف ۵.۱.۱. **گراف مکمل** [۱۰] گرافی با مجموعه رأس‌های $V(G)$ باشد مکمل G، که با نماد $\bar{G}$ نشان داده می‌شود، گراف ساده‌ای است که مجموعه رأس‌های آن $V(G)$ می‌باشد و در آن هر دو رأسی که در G مجاور نیستند، مجاور می‌باشند.

تعریف ۶.۱.۱. گرافی که فاقد طوقه باشد و بین هر رأس آن بیش از یک یال موجود نباشد گراف ساده می‌نامیم در طول این پایان‌نامه تمام گراف‌ها را ساده فرض می‌کنیم.

تعریف ۷.۱.۱. یک **گشت**[۱۱] از G، دنباله‌ای ناصفر متناهی $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots e_k v_k$ است به‌طوری‌که جملات آن یکی در میان از رأس‌ها و یال‌ها بوده و به ازای هر $1 \leqslant i \leqslant k$ رأس‌های v_i و v_{i+1} دو سر یال e_i می‌باشند در این صورت می‌گوییم W، یک گشت از v_0 تا v_k یا به عبارت دیگر یک $(v_0, v_k)-$گشت است.

تعریف ۸.۱.۱. به گشتی که یال تکراری نداشته باشد **گذر**[۱۲] نامیده می‌شود.

تعریف ۹.۱.۱. به گشتی که در آن هیچ دو رأسی بیش از یک بار ظاهر نشده باشد **مسیر**[۱۳] نامیده می‌شود و تعداد یال‌های مسیر، طول مسیر نامیده می‌شود. مسیر n رأسی با P_n نمایش داده می‌شود.

[۵] Order
[۶] Size
[۷] Opened neighbourhood
[۸] Closed neighbourhood
[۹] Complete graph
[۱۰] Complement graph
[۱۱] Walk
[۱۲] Trail
[۱۳] Path

تعریف ۱۰.۱.۱. گرافی که از یک مسیر با مجاور کردن دو رأس انتهایی به دست می‌آید **دور**[۱۴] نامیده می‌شود. دور n رأسی با C_n نمایش داده می‌شود و تعداد یال‌های دور، طول دور نامیده می‌شود. دور با جهت ساعتگرد را با $\overrightarrow{C}$ و دور در جهت مخالف را با $\overleftarrow{C}$ نمایش می‌دهند. اگر $u, v \in V(G)$ باشد آنگاه $u\overrightarrow{C}v$ رئوس پشت سرهم دور C را از u به v نشان می‌دهد.

تعریف ۱۱.۱.۱. گرافی که مجموعه رأس‌های آن به دو زیرمجموعه رأس‌های آن به دو زیر مجموعه X و Y چنان افراز شود که یک سر تمام یال‌ها G در X و سر دیگر آنها در Y باشد **گراف دوبخشی**[۱۵] نامیده می‌شود. یک گراف دوبخشی با بخش‌های X و Y که در آن هر رأس X به هر رأس Y وصل شده باشد گراف دوبخشی کامل نامیده می‌شود. اگر $|Y| = n, |X| = m$ آنگاه گراف دوبخشی کامل با بخش‌های X و Y را با $K_{m,n}$ نمایش می‌دهیم. گراف kـ بخشی، گرافی است که می‌توان مجموعه رأس‌های آن را به kـ زیر مجموعه طوری افراز کرد که دو سر هیچ یالی در یک زیرمجموعه نباشد. گراف kـ بخشی کامل، یک گراف kـ بخشی است که در آن هر رأس یک بخش به تمام رأس‌هایی که در بخش‌های دیگر قرار دارند، وصل شده باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱. گراف G، **همبند**[۱۶] نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر دو رأس متمایز u و v از G، مسیری از u و v موجود باشد (با یک u,vـ مسیر موجود باشد). گرافی که همبند نباشد، ناهمبند می‌نامیم و هر یک از اجزای آن را یک مؤلفه می‌نامیم. بنابراین گراف $G = (V, G)$ ناهمبند است اگرو تنها اگر بتوان مجموعه V را به دو زیر مجموعه ناتهی V_1 و V_2 چنان افراز کرد که هیچ یالی در E به صورت $\{x, y\}$ که $x \in V_1$ و $y \in V_2$ وجود نداشته باشد. گراف همبند است اگر و تنها اگر یک مؤلفه داشته باشد.

تعریف ۱۳.۱.۱. یک **برش رأسی**[۱۷] از G، زیرمجموعه‌ای مانند V' از V است به‌طوریکه $G - V'$ ناهمبند باشد. یک برش رأسی با kـ عضو را یک kـ برش رأسی نامیده می‌شود. تنها گراف‌هایی برش‌رأسی ندارند که زیرگراف فراگیری به صورت گراف کامل دارند. کوچکترین kای که به ازای آن، G یک kـ برش رأسی داشته باشد را **همبندی رأسی**[۱۸] گراف گویند و آن را با $k(G)$ نمایش می‌دهند. به طور مشابه به کمترین تعداد یال‌های که با حذف آنها، گراف ناهمبند می‌شود (تعداد مؤلف‌های همبندی گراف افزایش یابد) **همبندی یالی**[۱۹] گراف می‌گویند و با $k'(G)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۱۴.۱.۱. گراف H را **زیرگراف**[۲۰] G می‌گوییم هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ باشد. اگر H زیر گراف G باشد، می‌نویسیم $H \subseteq G$.

[۱۴] Cycle
[۱۵] Bipartite graph
[۱۶] Connected
[۱۷] Cutset vertice
[۱۸] Connected vertice
[۱۹] Connected edge
[۲۰] Subgraph

تعریف ۱.۱.۱۵. زیرگراف H از G را فراگیر گوییم هرگاه $V(H) = V(G)$ باشد.

تعریف ۱.۱.۱۶. فرض کنید U زیر مجموعه ای از رئوس گراف G باشد، **زیرگراف القایی**[۲۱] G توسط U، که با نماد $G[U]$ نشان داده می‌شود گرافی با مجموعه رئوس U و یال‌هایی از G است که هر دو رأس انتهایی آن‌ها در U باشند.

تعریف ۱.۱.۱۷. دو گراف $H = (V(H), E(H))$ و $G = (V(G), E(G))$ را **یکریخت**[۲۲] گوییم هرگاه نگاشت $\varphi : V(G) \longrightarrow V(H)$ موجود باشد بطوریکه:

- نگاشت φ یک به یک و پوشا باشد؛
- نگاشت φ حافظ مجاورت ها باشد. (به عبارت دیگر $(u,v) \in E(H)$ اگر و تنها اگر $(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(G)$)

تعریف ۱.۱.۱۸. یک kـ**رنگ‌آمیزی مجاز** گراف G به تابع $f : V(G) \longrightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ گفته می‌شود به طوریکه به ازای هر دو رأس مجاور u و v داریم $f(u) \neq f(v)$. در حقیقت برای هر i، $1 \leq i \leq k$ مجموعه $f^{-1}(i)$ مجموعه مستقل و غیر تهی است که آن را کلاس رنگی i می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۱۹. یک kـ**رنگ‌آمیزی یالی**[۲۳] گراف G به تابع $f : E(G) \longrightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ گفته می‌شود و یال‌های هم رنگ، تشکیل کلاس رنگی را می‌دهند. اگر یال‌های مجاور G رنگ‌های متمایزی داشته باشند kـرنگ‌آمیزی یالی مجاز است.

تعریف ۱.۱.۲۰. گراف G، kـرنگ‌پذیر است هرگاه یک kـرنگ‌آمیزی مجاز داشته باشد. کوچکترین kای که گراف G، kـرنگ‌پذیر باشد، **عدد رنگی**[۲۴] نامیده می‌شود و با $\chi(G)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱.۱.۲۱. زیرمجموعه‌ای از یال‌های G که هیچ دوتایی از آنها رأس مشترک نداشته باشند **تطابق**[۲۵] نامیده می‌شود و تعداد یال‌های تطابق را اندازه تطابق می‌نامیم.
یک kـرنگ‌آمیزی یالی را می‌توان به عنوان افرازهای $(E_1, \ldots, E_k)$ از E در نظر گرفت که در آن E_i برابر مجموعه‌ای (احتمالاً تهی) از یال‌های E است که دارای رنگ i می‌باشند. در این صورت یک kـرنگ‌آمیزی یالی مجاز، یک kـرنگ‌آمیزی یالی $(E_1, \ldots, E_k)$ است که در آن E_i یک تطابق است.

تعریف ۱.۱.۲۲. هر زیرگراف کامل گراف G را **خوشه**[۲۶] گراف G می‌نامیم.

[۲۱] Induced subgraph
[۲۲] Isomorphic
[۲۳] K-Edge colouring
[۲۴] Chromatic number
[۲۵] Matchimg
[۲۶] Clique

تعریف ۲۳.۱.۱. یک مجموعه رأسی در گراف G، مجموعه رئوسی از G است که هیچ دو رأس آن با هم مجاور نباشند را **مجموعه مستقل رأسی**[۲۷] می‌نامیم. اندازه بزرگترین مجموعه مستقل رأسی را **عدد استقلال**[۲۸] نامیده شده و با $\alpha(G)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۲۴.۱.۱. گراف n رأسی G، که $n \geq ۳$ و دارای یک رأس از درجه $n-۱$ و $n-۱$ رأس از درجه سه باشد را **چرخ**[۲۹] می‌گوییم. به عبارتی $W_n = K_۱ + C_n$. اگر رأس v از درجه‌ی $n-۱$ گراف W_n باشد آنگاه می‌گوییم W_n به مرکز v است و مرتبه‌ی آن برابر با $n+۱$ است.

تعریف ۲۵.۱.۱. طول کوچکترین دور القایی را **کمر گراف**[۳۰] نامیده می‌شود و با نماد $g(G)$ نمایش می‌دهند و همچنین طول بزرگترین دور القایی در گراف G را با $c(G)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲۶.۱.۱. گراف G، از مرتبه n را **همیلتنی**[۳۱] گویند، هرگاه شامل دور C_n باشد.

تعریف ۲۷.۱.۱. گراف G، از مرتبه n را **همه دوری**[۳۲] گویند هرگاه شامل هر دور از طول ۳ تا n باشد.

تعریف ۲۸.۱.۱. گراف G، از مرتبه n را **همه دوری ضعیف**[۳۳] همه دوری ضعیف گویند هرگاه شامل هر دور l به طوریکه $g(G) \leq l \leq c(G)$ باشد.

تعریف ۲۹.۱.۱. یک **پوشش**[۳۴] از گراف G، زیرمجموعه‌ای مانند K از V است بطوریکه حداقل یک سر هر یال G در K باشد پوشش K را **پوشش مینیمم**[۳۵] می‌نامیم اگر هیچ پوشش K' در G با شرط $|K'| < |K|$ وجود نداشته باشد.

تعریف ۳۰.۱.۱. مسیری که شامل تمام رأس‌های گراف G باشد، یک **مسیر همیلتنی**[۳۶] از گراف G نامیده می‌شود. و به طور مشابه، یک **دور همیلتنی**[۳۷] از گراف G، دوری است که شامل تمام رأس‌های گراف G، باشد.

تعریف ۳۱.۱.۱. فرض کنید $G_۱ = (V_۱, E_۱)$ و $G_۲ = (V_۲, E_۲)$ گراف‌های ساده باشند. همچنین اگر $V(G_۱) \cap V(G_۲) = \emptyset$، آنگاه $G_۱ + G_۲$ گرافی با مجموعه رأس‌ها و یال‌های

$$V(G_۱ + G_۲) = V(G_۱) \cup V(G_۲), \quad E(G_۱ + G_۲) = E(G_۱) \cup E(G_۲)$$

خواهد بود به عبارت دیگر تمام رئوس زیرگراف $G_۱$ به تمام رئوس زیرگراف $G_۲$ وصل است.

[۲۷] Independent set vertice
[۲۸] Independent number
[۲۹] Wheel
[۳۰] Girth
[۳۱] Hamiltonian
[۳۲] Pancyclic
[۳۳] Weaklypancyclic
[۳۴] Cover
[۳۵] Minimum cover
[۳۶] Hamiltonian path
[۳۷] Hamiltonian cycle

۲.۱ اصول اولیه در مورد عدد رمزی

این بخش با توجه به مراجع [۹] نوشته شده است. در این قسمت به تعریف $R(K,L)$ و $R(G_۱,G_۲)$ با دو رنگ و بسط $R(G_۱,G_۲)$ به چند گراف با چند رنگ (بیشتر از دو رنگ) خواهیم پرداخت که در این قسمت با گراف‌های ساده کار خواهیم کرد.

تعریف ۱.۲.۱ (عدد رمزی$R(K,L)$). یک خوشه از گراف ساده G، زیرمجموعه‌ای مانند S از V است به طوریکه $G[S]$ کامل باشد. S یک خوشه است اگر و تنها اگر S یک مجموعه مستقل از G^c باشد. اگر G، خوشه‌های بزرگ نداشته باشد می‌توان انتظار داشت که G، دارای یک مجموعه مستقل بزرگ باشد. درستی مطلب فوق نخستین بار توسط رمزی[۳۸] (۱۹۳۰) به اثبات رسید. برای اعداد صحیح مثبت K و L، یک عدد صحیح $R(K,L)$ وجود دارد به طوریکه هر گراف $R(K,L)$ رأسی، شامل یک خوشهٔ K رأسی یا یک مجموعه مستقل L رأسی است. به بیان دیگر برای اعداد صحیح و دلخواه K و L مفروض، عدد رمزی $R(K,L)$ را برابر کوچکترین عدد صحیح N تعریف می‌کنیم که به ازای هر رنگ‌آمیزی یال‌های K_N با دو رنگ آبی و قرمز، یا بتوان یک K_k تکرنگ آبی یا یک K_l تکرنگ قرمز یافت. گزاره زیر در حقیقت اولین نتیجه اثبات شده در زمینه اعداد رمزی است.

گزاره ۱.۲.۱. $R(۳,۳)=۶$ به بیان دیگر نشان دهید در هر جمع شش نفره سه آشنای دوبه‌دو یا سه ناآشنای دوبه‌دو موجودند.

برهان. در یک گراف کامل پنج رأسی یک دور به طول پنج را آبی و بقیه یال‌ها را قرمز رنگ‌آمیزی می‌کنیم دو دور به طول پنج خواهیم داشت که هیچ کدام نمی‌توانند شامل یک مثلث تکرنگ باشند پس $R(C_۳,C_۳)>۵$. گراف کامل $K_۶$ را با یال‌های آبی و قرمز رنگ‌آمیزی کرده‌ایم. رأس v را در نظر بگیرید چون همه رأس ها همراه با رأس v از درجه پنج هستند بنا به اصل لانه کبوتری حداقل سه تا از یال ها قرمز یا آبی هستند. بدون از دست رفتن کلیت مساله فرض کنید حداقل سه تا از یال‌ها قرمز هستند اگر $v_۱$، $v_۲$ و $v_۳$ رأس‌هایی باشند که دوبه‌دو با هم مجاور باشند آنگاه این دو رأس همراه با رأس v یک مثلث قرمز تشکیل خواهند داد در غیر این صورت مجموعه همسایه‌های رأس v شامل مثلثی آبی است و مساله حل می‌شود. □

اعداد $R(K,L)$ به اعداد رمزی مشهورند. قضیه‌ی زیر در مورد اعداد رمزی، متعلق به اردوش[۳۹] و جکرز[۴۰] (۱۹۵۵) و گرینوود[۴۱] و گلیسون[۴۲] (۱۹۵۵) است در حقیقت این قضیه وجود اعداد رمزی را تعیین می‌کند.

---
[۳۸] Ramsey
[۳۹] Erdos
[۴۰] Szekeres
[۴۱] Greenwood
[۴۲] GLeason

قضیه ۱.۲.۱. برای دو عدد صحیح $k \geq ۲$ و $l \geq ۲$، $R(K, L) \leq R(K, L-۱) + R(K-۱, L)$ برقرار است.

برهان. فرض کنید یک ۲ـرنگ‌آمیزی دلخواه از گراف کامل با $R(K-۱, L) + R(K, L-۱)$ رأس داده شده است رأس دلخواه v را در نظر بگیرید و چون تعداد رأس‌هایی که مجاور v است به‌علاوه تعداد رأس‌هایی که مجاور v نیستند برابر $R(K-۱, L) + R(K, L-۱) - ۱$ است پس بنابه اصل لانه کبوتری حداقل $R(K-۱, L)$ از یال‌ها آبی یا حداقل $R(K, L-۱)$ از یال‌ها قرمز هستند. فرض کنید حالت اول برقرار باشد آنگاه در مجموعه رئوس v که آبی هستند یا خوشهٔ $K-۱$تایی آبی وجود دارد یا یک مجموعه مستقل Lتایی قرمز، اگر حالت اول رخ دهد این خوشه آبی به همراه رأس v تشکیل یک خوشهٔ Kتایی را می‌دهند و مساله حل است با بحثی مشابه در حالت $|N_R(v)| \geq R(K, L-۱)$ نیز می‌توان مساله را حل نمود. □

قضیه ۲.۲.۱. برای هر عدد صحیح k و l داریم، $R(K, ۲) = k$ و $R(۲, l) = l$.

تعیین اعداد رمزی در حالت کلی یکی از دشوارترین مسائل حل نشده می‌باشد لذا با ساختن گراف‌های مناسب می‌توان کران‌های پایین مناسبی را برای این اعداد به دست آورد به عنوان مثال، همان طور که در گزاره ۱.۲.۱ مطرح شد هر ۵ـدور از گراف کامل $K_۵$ را که به رنگ قرمز رنگ‌آمیزی شده‌اند را در نظر بگیریم یال‌ها نمی‌توانند در این دور، یک دور $C_۵$ دیگر را تشکیل بدهند. بنابراین داریم:

$$R(C_۳, C_۳) = R(K_۳, K_۳) = R(۳, ۳) > ۵.$$

برای کران پایین $R(۳, ۴)$، گراف کامل هشت رأسی، $K_۸$ را در نظر می‌گیریم چون در این رنگ‌آمیزی از گراف $K_۸$، شامل هیچ خوشهٔ سه رأسی و هیچ مجموعه مستقل چهار رأسی نیست. بنابراین داریم $R(۳, ۳) \geq ۹$. حال با استفاده از قضیه ۱.۲.۱ و قضیه ۲.۲.۱ می‌توانیم نشان دهیم که در رابطه‌های قبل حالت تساوی برقرار است لذا برای رابطه اول نتیجه می‌گیریم که،

$$R(۳, ۳) \leq R(۳, ۲) + R(۲, ۳) = ۳ + ۳ = ۶$$

و از طرفی $R(۳, ۳) \geq ۶$ لذا تساوی برقرار است. برای رابطه دوم، با توجه به اینکه $R(۳, ۳)$ و $R(۲, ۴)$ هر دو زوج هستند می‌توان گراف G را با $R(۳, ۳) + R(۲, ۴) - ۱$ رأس در نظر بگیرید . چون تعداد رأس های گراف G ، فرد است لذا رأسی مانند v با درجهٔ زوج وجود دارد. بنابراین رأس v، نمی‌تواند با دقیقاً $R(۲, ۴) - ۱$ رأس مجاور باشد در این صورت یا با حداقل $R(۳, ۳)$ رأس غیر مجاور است یا با حداقل $R(۲, ۴)$ رأس مجاور خواهد بود. بنابراین گراف G شامل یک خوشهٔ سه رأسی یا یک مجموعه مستقل چهار رأسی می‌باشد در این صورت داریم:

$$R(۳, ۴) \leq R(۳, ۳) + R(۲, ۴) - ۱ = ۶ + ۴ - ۱ = ۹$$

از طرفی داریم، $R(۳, ۴) \geq ۹$ لذا نتیجه می‌گیریم که $R(۳, ۴) = ۹$. جدول ۱.۱ کلیه اعداد رمزی $R(K, L)$ را که تاکنون شناخته شده‌اند را نمایش می‌دهد.

	$L=1$	$L=2$	$L=3$	$L=4$	$L=5$	$L=6$	$L=7$
$K=1$	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
$K=2$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$K=3$	۱	۳	۶	۹	۱۴	۱۸	۲۳
$K=4$	۱	۴	۹	۱۸	۲۵		

جدول ۱.۱: محاسبه برخی از اعداد رمزی

تعریف ۲.۲.۱ ($R(G_1, G_2)$)**.** برای دو گراف G_1 و G_2، عدد رمزی $R(G_1, G_2)$ را برابر با کوچکترین عدد صحیح N تعریف می‌کنیم که به ازای هر رنگ‌آمیزی یال‌های K_N با دو رنگ آبی و قرمز، یا بتوان یک زیرگراف تکرنگ آبی یکریخت با G_1 یافت، یا یک زیر گراف تکرنگ قرمز یکریخت با G_2 با این تعریف می‌توان نتیجه گرفت $R(K, L) = R(K_k, K_l)$. در نتیجه این تعریف تعمیمی طبیعی از تعریف اولیه ارائه شده برای اعداد رمزی است که دارای مسائل پیچیده‌تری در حالت کلی یا بیشتر از دو رنگ است. اکنون به شرح عدد رمزی یک گراف L با kـ رنگ می‌پردازیم برای یک گراف L و عدد صحیح $k \geq 2$، $R_k(L)$ نشان دهنده کوچکترین عدد طبیعی N است که برای هر رنگ‌آمیزی یالی از گراف کامل K_N با kـ رنگ، یکرنگ i وجود دارد که برای آن رنگ کلاس رنگی مربوطه شامل یک زیرگراف L است. تعمیم آن برای چند گراف به صورت مشابه به تعریف می‌شود و با $R(L_1, L_2, \ldots, L_k)$ نشان داده می‌شود.

۳.۱ گراف خوب

تعریف ۱.۳.۱. گراف همبند F، Hـ **خوب** [۴۳] است هرگاه:

$$R(F, H) = (|F| - 1)(\chi(H) - 1) + S(H), \qquad |F| \geq S(H)$$

که در آن $\chi(H)$ عددرنگی گراف H و $S(H)$ رنگ مازاد از H، کمترین تعداد رئوس یکرنگ از رنگ‌آمیزی سره H تحت همه رنگ‌آمیزی‌های رأسی با $\chi(H)$ رنگ می‌باشد. بور[۴۴] و اردوش[۴۵] ثابت کردند برای $n \geq 5$، W_n گرافی C_3ـ خوب است. که اولین مقاله‌ای است که چرخ و دورها هم زمان به کار گرفته شده‌اند.

در این خصوص قضایای زیر را مطرح می‌کنیم.

قضیه ۱.۳.۱. عدد رمزی $R(W_n, C_3) = 2n + 1$ برای $n \geq 5$.

[۴۳] H-good
[۴۴] Burr
[۴۵] Erdos

سوراحمت[۴۶] حدس زدند که C_m، W_nــخوب است اگر $m \geq n$ و $(m,n) \neq (۳,۳),(۳,۴)$ و نتیجه زیر به‌دست آورند.

قضیه ۲.۳.۱ ([۲۲]،[۲۳])**.** عدد رمزی $R(W_n, C_m) = ۲m - ۱$ برای n زوج و $m \geq \frac{۵n}{۲} - ۱$ و همچنین $R(W_n, C_m) = ۳m - ۲$ برای $n \geq ۵$ فرد و $m > \frac{(۵n-۹)}{۲}$.

چن[۴۷] با بهبود بازه‌ی قبل قضیه زیر را مطرح کرد.

قضیه ۳.۳.۱. عدد رمزی $R(C_n, W_m) = ۲m - ۱$ است برای $n \geq ۴$ زوج و $m \geq \frac{(۳n)}{۲} + ۱$.

با بحث در مورد روابط بین اندازه و همه دوری ضعیف در یک گراف و متمم آن، چن به تعیین C_m، W_nــخوب است برای $m \geq n \geq ۳$ و n فرد و $(m,n) \neq (۳,۳)$ پرداخت.

قضیه ۴.۳.۱. عدد رمزی $R(C_n, W_m) = ۳n - ۲$ است برای m فرد $n \geq m \geq ۳$ و همچنین $(m,n) \neq (۳,۳)$.

در موردی که $m \leq n - ۱$، زو[۴۸] [۶] نشان داد که W_n، C_mــخوب است اگر m فرد باشد و $n \geq ۵m - ۷$، متاسفانه صحت اثیات سوال برانگیز است چون نویسنده اثبات دو ادعای کلیدی در آن را ارائه نداده است. اخیراً سان[۴۹] و چن [۲۸] با در نظر گرفتن چرخ‌ها، $C_۵$ــخوب هستند نتیجه زیر را بدست آوردند.

قضیه ۵.۳.۱. عدد رمزی $R(W_n, C_۵) = ۲n + ۱$ است برای $n \geq ۶$.

مسئله باز: برای $m > ۵$ و فرد گراف چرخ W_n، C_mــخوب است.

[۴۶] Surahmatetal
[۴۷] Chenetal
[۴۸] Zhou
[۴۹] Sun

فصل ۲

تعیین عدد رمزی چرخ ها در مقایسه با دورهای فرد

این فصل با استفاده از مراجع [۴۲] و [۳۸] نگارش شده است.

۱.۲ مقدمه

در این فصل به محاسبه عدد رمزی چرخ‌ها در مقایسه با دورهای فرد و تعیین کران‌هایی برای آن با دو ویژگی:

۱. $R(W_n, C_m) = ۲n + ۱$ برای m فرد و $n \geq \frac{۳(m-۱)}{۲}$ و $(m,n) \neq (۳,۳),(۳,۴)$.

۲. $R(W_n, C_m) = ۳n - ۲$ برای m و n فرد و $m < n \leq \frac{۳(m-۱)}{۲}$،

می‌پردازیم که به ترتیب بیانگر W_n، C_mـ خوب است برای $m \geq ۳$ فرد و $n \geq \frac{۳(m-۱)}{۲}$ و همچنین $(m,n) \neq (۳,۳),(۳,۴)$. و C_m، W_nـ خوب است برای m و n فرد و $n < m \leq \frac{۳(m-۱)}{۲}$. که با توجه به تعاریف مقدماتی و قضایای ۳.۱ که در فصل یک داشتیم و همچنین با کمک لم‌های زیر می‌پردازیم.

۲.۲ لم‌های مقدماتی

در این بخش برخی از خواص گراف همه دوری ضعیف و گراف همیلتنی را بیان می‌کنیم. به این منظور لم‌های زیر را ارائه می‌دهیم.

لم ۱.۲.۲. هر گراف غیر دوبخشی G از مرتبه n با $e(G) > \frac{(n-1)^2}{4} + 1$، همه دوری ضعیف با کمر $g(G) = 3$ است.

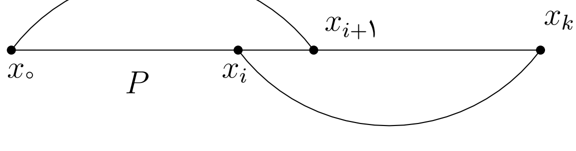
لم ۲.۲.۲. هر گراف غیر دوبخشی G از مرتبه n با $\delta(G) \geq \frac{n+2}{3}$، همه دوری ضعیف با کمر $g(G) = 3$ یا $g(G) = 4$ است.

لم ۳.۲.۲. فرض کنید G، یک گراف ساده از مرتبه $n \geq 3$ باشد. اگر $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$، آنگاه G همیلتنی است.

برهان. گراف $G = (V, E)$ یک گراف با مجموعه رئوس $|G| = n \geq 3$ و $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ در نظر بگیرید در این صورت گراف G، همبند است. زیرا در غیر این صورت درجهٔ هر رأس از کوچکترین مؤلفهٔ C از گراف G، باید حداکثر $|C| - 1 < \frac{n}{2}$ باشد که تناقض با فرض $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ است. لذا فرض کنید $P = x_0, x_1, \ldots, x_k$ طولانی‌ترین مسیر در گراف G باشد و از آنجا که مسیر P، را نمی‌توان به مسیر طولانی‌تر گسترش داد لذا همهٔ همسایه‌های رأس x_0 و همهٔ همسایه‌های x_k در مسیر P قرار دارند بنابراین حداقل $\frac{n}{2}$ از رأس‌های $x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k-1}$ مجاور با رأس x_k هستند و حداقل $\frac{n}{2}$ از رأس‌های $x_i \in \{x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k-1}\}$، به گونه‌ای هستند که $x_0 x_{i+1} \in E$ بنابه اصل لانه کبوتری و مطالب فوق، داریم برای تعدادی از رئوس x_i که $1 \leq i \leq k-1$، $x_i x_k \in E$ و $x_0 x_{i+1} \in E$ است. با توجه به شکل ۱.۲ ادعا می‌کنیم که دور

$$C = x_0 x_{i+1} x_{i+2} \ldots x_{k-1} x_i x_{i-1} \ldots x_1 x_0 = x_0 x_{i+1} P x_k x_i P x_0$$

یک دور همیلتنی از گراف G است. زیرا در غیر این صورت چون گراف G، همبند است لذا تعداد رأس x_j در دور C وجود دارند که مجاور با یک رأس y، که خارج از دور C است. بطوریکه $e = x_j y \in E$. در این صورت می‌توانیم یال e را به مسیر انتهایی در x که شامل k یال از دور C است متصل کنیم که به ساختن یک مسیر طولانی‌تر از P در گراف G، منجر می‌شود که تناقض با فرض است.



شکل ۱.۲: دور همیلتنی گراف G

□

لم ۴.۲.۲. فرض کنید G، یک گراف با $\delta(G) \geq ۲$ باشد، آنگاه $c(G) \geq \delta(G) + ۱$

برهان. فرض کنید $P = x_۰, x_۱, \ldots, x_k$ طولانی‌ترین مسیر در گراف G، باشد در این صورت $k \geq \delta(G) + ۱$ است زیرا در غیر این صورت می‌توان رأسی را در $G - P$ یافت که به رأس انتهایی مسیر وصل باشد و طول مسیر را گسترش را در رأس x_k را در نظر بگیرید چون مسیر P، طولانی‌ترین مسیر در گراف G است پس x_k فقط به رئوس مسیر P متصل است حال فرض کنید i، کوچکترین اندیسی باشد که رأس x_i با x_k مجاور است. اگر دور $x_i x_{i+۱} \ldots x_k x_i$ را در نظر بگیرید یک دور به طول حداقل $\delta(G) + ۱$ در گراف G است و حکم ثابت می‌شود.

□

لم ۵.۲.۲. گراف G ، از مرتبه n را در نظر بگیرید و همچنین فرض کنید $۳ \leq c \leq n$ باشد ، اگر $e(G) \geq \frac{(c-۱)(n-۱)}{۲} + ۱$ آنگاه $c(G) \geq c$.

لم ۶.۲.۲. فرض کنید G، یک گراف از مرتبه $n \geq ۶$ باشد. در این صورت داریم :
$\max\{c(G), c(\bar{G})\} \geq \lceil \frac{۲n}{۳} \rceil$.

لم ۷.۲.۲. عدد رمزی $R(C_m, K_{۱,n}) = m$ برای $m \geq ۲n$.

برهان. ابتدا قضیه زیر را بیان می‌کنیم و سپس با استفاده از قضیه به برهان لم ۷.۲.۲ می‌پردازیم.

قضیه ۱.۲.۲. اگر G گراف همیلتنی (p, q) باشد با $q \geq \frac{p^۲}{۴}$ در این صورت یا گراف G همه دوری است یا p زوج است و $G \cong K_{\frac{p}{۲},\frac{p}{۲}}$.

$$R(C_m, K_{۱,n}) = \begin{cases} ۲n+۱, & m \text{فرد}, \; m \leq ۲n+۱, \\ m, & m \geq ۲n. \end{cases}$$

با برهان خلف فرض کنید نتایج فوق برقرار نباشد در این صورت حداکثر یک رنگ‌آمیزی با رنگ‌های آبی و قرمز برای گراف کامل K_p وجود دارد به طوریکه هیچ دور تکرنگ C_m یا $K_{۱,n}$ وجود نداشته باشد بنابراین برای هر رأس v، حداکثر $n - ۱$ یال آبی هستند که با رأس v مجاوراند و حداقل $p - n$ یال قرمز که با رأس v مجاورند وجود دارد فرض کنید $p \geq ۲n$ باشد در این صورت برای دور رأس v و w داریم:

$$d(v)_{\text{قرمز}} + d(v)_{\text{آبی}} \geq ۲(p-۱) = p + (p-n) \geq p.$$

با توجه به قضیه ۱.۲.۲ یا $p = ۲t$ و یک $K_{t,t}$ تکرنگ وجود دارد یا C_i تکرنگ برای $۳ \leq i \leq p$ وجود دارد اگر $p = ۲n + ۱ \geq m$ مورد اول ممکن نیست در این صورت دور C_m تکرنگ وجود دارد که تناقض است. اگر $p = m \geq ۲n$ و هیچ دور تکرنگ C_m وجود نداشته باشد در این صورت $p = ۲t = m$ و باید یک $K_{t,t}$ تکرنگ داشته باشیم با این حال که یک دور C_m تکرنگ هم وجود دارد که تناقض است.

یک گراف $K_{n,n}$ تکرنگ برای $m \leq ۲n+۱$ و فرد و یک گراف گراف $K_{m-۱}$ تکرنگ برای $m \geq ۲n$، در نظر می‌گیریم و در نهایت فرم ناموفقی به دست می‌آوریم تا کران پایین را بیابیم و اثبات کامل می‌شود. $\square$

لم ۸.۲.۲. فرض کنید C، طولانی‌ترین دور در گراف G باشد و $v_۱, v_۲ \in V(G) - V(C)$، $v_۱v_۲ \in E(G)$ و اگر $t \leq \left\lfloor \frac{|C|}{۲} \right\rfloor + ۱$ در این صورت $t = |N_C(v_۱) \cup N_c(v_۲)|$. در این صورت

برهان. فرض کنید $C = u_۱u_۲ \dots u_lu_۱$ طولانی‌ترین دور در گراف G باشد با برهان خلف اگر

$$u_iu_{i+۱}, u_ju_{j+۱}, u_ku_{k+۱} \in E(C)$$

یال‌هایی در دور C باشند و $i \leq j \leq k$ به طوریکه رابطه زبر برقرار باشد در این صورت داریم:

$$u_i, u_{i+۱}, u_j, u_{j+۱}, u_k, u_{k+۱} \in N_C(v_۱) \cup N_C(v_۲)$$

و اندیس‌ها همگی به پیمانه‌ی طول یعنی l هستند آنگاه $v_۱$ یا $v_۲$ حداقل با دو رأس از $\{u_i, u_j, u_k\}$ مجاور است به عبارتی دارای حداقل دو همسایگی است. با توجه به هم‌اندازه بودن رئوس دور نسبت به دو رأس $v_۱$ و $v_۲$، فرض کنید $u_i, u_j \in N_C(v_۱)$. چون C طولانی‌ترین دور در گراف G است در نتیجه $v_۱$ به دو رأس $u_{j+۱}$ و $u_{i+۱}$ مجاور است در نتیجه $v_۱u_j\overleftarrow{C}u_{i+۱}v_۲\overrightarrow{C}u_iv_۱$ دوری طولانی‌تر از دور C، که تناقض با فرض است در نتیجه C دارای حداکثر دو یال در $N_C(v_۱) \cup N_c(v_۲)$ است و بنابراین $|N_c(v_۱) \cup N_C(v_۲)| \leq \left\lfloor \frac{|C|}{۲} + ۱ \right\rfloor$. $\square$

لم ۹.۲.۲. فرض کنید m، عدد صحیح و فرد باشد و (X, Y) یک افراز از $V(G)$ در گراف G باشد به‌طوریکه $|Y| \geq \frac{(m+۱)}{۲}$ و $|X - N(y_i) \cup N(y_j)| \geq \frac{(m-۱)}{۲}$ برای هر $y_i, y_j \in Y$. اگر $\bar{G}$، شامل دوری به طول m (C_m) نباشد آنگاه $G[Y]$، گراف کامل است.

برهان. مجموعه $Y = \{y_۱, y_۲, \dots, y_k\}$ را در نظر بگیرید که در آن $l = \frac{(m+۱)}{۲}$ باشد در این صورت $k \geq l$ است. با برهان خلف فرض کنید $G[Y]$ گراف کامل نباشد به عبارتی $y_۱, y_۲ \notin Y$، در این صورت طبق فرض داریم:

$$|X - N(y_i) \cup N(y_j)| \geq \frac{(m-۱)}{۲}, \qquad y_i, y_j \in Y$$

می‌توانیم $x_۱, x_۲, \dots, x_{l-۱} \in X$ را به گونه‌ای انتخاب کنیم که $y_i, y_j \notin N(x_{i-۱})$ برای هر $i = ۱, ۲, \dots, l-۱$ و $y_۱, y_l \notin N(x_{l-۱})$، در نتیجه دور $y_۱y_۲x_۱y_۳x_۲y_۴ \dots x_{l-۲}y_lx_{l-۱}y_۱$، در گراف $\bar{G}$، دور C_m را تشکیل می‌دهد که تناقض است. زیرا $l = \frac{(m+۱)}{۲}$، برای $y_i \in Y$ که $i = ۱, ۲, \dots, l$ و $|Y| = \frac{(m+۱)}{۲}$ و $x_i \in X$ که $i = ۱, ۲, \dots, l-۱$، $|X| = \frac{(m-۱)}{۲}$ در نتیجه $|X| + |Y| = m$ خواهد بود.

$\square$

۳.۲ تعیین کران بالای $R(W_n, C_m)$

در این قسمت برای تعیین عدد رمزی چرخ‌ها در مقایسه با دورهای فرد قضیه زیر را بیان و به اثبات آن می‌پردازیم.

قضیه ۱.۳.۲. برای $m \geq ۵$ فرد و $n > m$ عدد رمزی برابر با $R(W_n, C_m) \leq \max\{۲n+۱, ۳m-۲\}$ است.

برهان. فرض کنید گراف G، گرافی از مرتبه‌ی $N = \max\{۲n+۱, ۳n-۱\}$ و $v_\circ \in V(G)$ با $d(v_\circ) = \Delta(G) = d$ باشد. مجموعه‌ی $H = G[N(v_\circ)]$ و $Z = V(G) - N[v_\circ]$ در نظر بگیرید. با برهان خلف فرض کنید که نه گراف G شامل چرخ W_n و نه گراف $\bar{G}$ شامل دور C_m است. اگر $\bar{G}$ دوبخشی باشد چون افراز به دو مجموعه مستقل می‌شود در نتیجه عدد استقلال گراف دوبخشی حداقل نصف تعداد رئوسش می‌باشد در نتیجه داریم $\alpha(\bar{G}) \geq \lceil \frac{N}{۲} \rceil \geq n+۱$. چون بزرگترین مجموعه مستقل در $\bar{G}$ بزرگتر از $n+۱$ است در نتیجه گراف G دارای گراف کامل $K_{n+۱}$، $n+۱$ رأس و همچنین گراف G، دارای چرخ W_n از مرتبه $n+۱$ می‌شود (چون تعداد رأس‌های آن یکی است و یال‌ها به صورت مشابه به هم وصل شده‌اند یکریخت هستند.) که تناقض با فرض است در نتیجه گراف $\bar{G}$ غیر دوبخشی است. اگر $\delta(\bar{G}) \geq \lceil \frac{(N+۲)}{۳} \rceil$ باشد در این صورت برای $N = ۲n+۱$ داریم $\lceil \frac{(N+۲)}{۳} \rceil = \lceil \frac{(۲n+۳)}{۳} \rceil \geq m$ و برای $N = ۳m-۲$ داریم $\lceil \frac{(N+۲)}{۳} \rceil = \lceil \frac{(۳m)}{۳} \rceil = m$ در نتیجه $\delta(\bar{G}) \geq \lceil \frac{(N+۲)}{۳} \rceil \geq m$. پس با توجه به لم‌های ۲.۲.۲ و ۴.۲.۲ گراف $\bar{G}$، همه دوری ضعیف است و کمر آن $g(\bar{G}) = ۳$ یا $g(\bar{G}) = ۴$ و بزرگترین دور آن $c(\bar{G}) \geq \delta(\bar{G}) + ۱$ خواهد بود.از طرفی $\delta(\bar{G}) \geq m$ در نتیجه $c(\bar{G}) \geq \delta(\bar{G}) + ۱ \geq m$، با توجه به همه دوری ضعیف بودن $\bar{G}$،گراف $\bar{G}$ دارای دوری به طول l که $g(\bar{G}) \leq l \leq c(\bar{G})$ است در نتیجه $\bar{G}$ دارای دور C_m است که تناقض است در نتیجه گراف $\bar{G}$ دارای دور C_m نیست. بنابراین $\delta(\bar{G}) < \lceil \frac{N+۲}{۳} \rceil$ است از طرفی رابطه زیر برقرار است لذا داریم:

$$\Delta(G) = N - \delta(\bar{G}) - ۱ > N - \left\lceil \frac{N+۲}{۳} \right\rceil - ۱ = \left\lfloor \frac{۲N-۲}{۳} \right\rfloor$$

اگر $N = ۲n+۱$ در این صورت می‌توان نوشت:

$$\left\lfloor \frac{(۲N-۲)}{۳} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{۴n}{۳} \right\rfloor$$

و اگر $N = ۳m-۲$ نتیجه می‌شود:

$$\left\lfloor \frac{(۲N-۲)}{۳} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(۶m-۶)}{۳} \right\rfloor = \frac{۳(۲m-۲)}{۳} = ۲m-۲$$

در نتیجه با توجه به فرض داریم:

$$d = \Delta(G) \geq \left\lceil \frac{(۲N-۲)}{۳} \right\rceil = \max\left\{ \left\lfloor \tfrac{۴n}{۳}, ۲m-۲ \right\rfloor \right\} \qquad (۱.۲)$$

اگر $N=\max\{۲n+۱,۳m-۲\}$ باشد، در این صورت داریم $۲n+۱\geq ۳m-۲$ نتیجه می‌گیریم $\frac{۳(m-۱)}{۲}=\frac{۳m-۳}{۲}\geq n$. و به صورت استدلالی مشابه اگر $N=۳m-۲$ در این صورت داریم $n\leq \frac{۳(m-۱)}{۲}$. همچنین اگر $\frac{۳m-۳}{۲}\geq n$ باشد در این صورت $۲n\geq ۳m-۳$ و $m\leq\frac{۲n+۳}{۳}$ رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$N-m\geq N-\frac{۲n-۳}{۲}=۲n+۱-\frac{۲n+۳}{۲}=\frac{۴n}{۳}$$

و اگر $۲n\leq ۳m-۳$ باشد چون $N=۳m-۲$ است در این صورت $d=۲m-۲$ و داریم:

$$d-n\geq (۲m-۲)-\frac{۳(m-۱)}{۲}=\frac{(m-۱)}{۲}$$

و در نهایت نتیجه می‌شود:

$$d-n\geq \frac{(m-۱)}{۲},\ N-m\geq\frac{۴n}{۳} \tag{۲.۲}$$

فرض کنید $H=(X,Y)$ گرافی دوبخشی با بخش‌های X و Y باشد با توجه به اینکه گراف $\bar{G}$ دارای دور C_m نیست و $|H|=d$، $H=G[N(v_۰)]$ و $v_۰\in V(G)$ در نتیجه با توجه به رابطه (۱.۲) داریم: $|X|=|Y|=m-۱$. در نتیجه تعداد یال‌های بین X و Y حداقل برابر با $e(X,Y)\geq |X||Y|-۱$ است. فرض کنید برای هر $z\in Z$، $d_x(z)\geq |X|-۱$ و $d_y(z)\geq |Y|-۱$ اگر $E(G[Z])=\emptyset$ در این صورت چون $|G-N(v_۰)|\geq m$ در نتیجه $\bar{G}[z\cup\{v_۰\}]$ دارای دور C_m است. به برهان خلف فرض کنید $z_۱z_۲\in E(G[z])$. و همچنین $X_۱\cup Y_۱\subseteq N(z_۱)$ برای $X_۱\subseteq X$ و $Y_۱\subseteq Y$ و $|X_۱|=|Y_۱|=m-۲$ و چون $G[X_۱\cup Y_۱]=K_{m-۲,m-۲}$ یا $G[X_۱\cup Y_۱]=K_{m-۲,m-۲}-e$ و از طرفی $m\geq ۵$ در نتیجه $d_{X_۱}(z_۱)\geq m-۳\geq ۲$ و $d_{Y_۱}(z_۲)\geq m-۳\geq ۲$ خواهد بود. در این صورت $G[X_۱\cup Y_۱\cup\{z_۲\}]$ دوری از طول بیشتر از سه دارد در نتیجه $G[X_۱\cup Y_۱\cup\{z_۲\}]$، همه دوری است همچنین با توجه به (۱.۲) و همچنین مجزا بودن اجتماع مجموعه ها که برابر با $G[X_۱\cup Y_۱\cup\{z_۲\}]=|X_۱+Y_۱+\{z_۲\}|$ خواهد بود لذا داریم:

$$۲(m-۲)+۱=d-۲+۱\geq\left\lfloor\frac{۴n}{۳}\right\rfloor-۲+۱\geq n$$

در نتیجه $G[X_۱\cup Y_۱\cup\{z_۲\}]$ شامل دور C_n است که با رأس $z_۱$ به عنوان مرکز، W_n را تشکیل می‌دهند که تناقض با فرض است در نتیجه H، غیر دوبخشی است. □

فرض کنید $\bar{H}=(X,Y)$ گرافی دوبخشی باشد سه ادعای زیر را نشان می‌دهیم.

ادعا ۱.۳.۲. $\frac{m+۱}{۲}<|X|\leq n-۲$ و $\frac{m+۱}{۲}<|Y|\leq n-۲$

برهان. فرض کنید گراف G شامل $K=K_n$ باشد در این صورت $d_k(v)\leq ۲$ خواهد بود برای هر رأس $v\in V(G)-V(K)$. در غیر این صورت G دارای چرخ W_n می‌شود بنابراین داریم $n-d_k(v')-d_k(v^*)>n-۴$ برای هر $v',v^*\in V(B)-(N(v')\cup N(v^*))$. چون $n>m$، $m\geq ۵$

بنابراین $\frac{(m-1)}{2} \geq n-4$ خواهد بود.و با توجه به لم ۹.۲.۲، $G-V(K)$ گرافی کامل با مرتبه $N-n = 2n+1-n \geq n+1$، خواهد بود پس گراف G ، شامل چرخ W_n با مرتبه $n+1$ است که تناقض با فرض است. بنابراین گراف G، شامل گراف کامل K_n نیست در نتیجه داریم : $|X| \leq n-2$ و $|Y| \leq n-2$.

با توجه به اینکه $|X|+|Y| = d$ و همچنین با توجه به رابطه (۲.۲)، $|X| \geq d-(n-2) > \frac{(m-1)}{2}+1 = \frac{(m-1)}{2}$ خواهد بود و با استدلالی مشابه و همچنین با توجه به هم‌اندازه بودن X و Y، داریم $|Y| \geq \frac{(m+1)}{2}$. □

با توجه به رابطه (۱.۲) فرض کنید $|H| = d = |X|+|Y| \geq \left\lfloor \frac{4n}{3} \right\rfloor$ و از طرفی چون گراف $\bar{H}$ دوبخشی است لذا گراف‌های $G[X]$ و $G[Y]$ در G کامل هستند در نتیجه تعداد یال‌های بین دوبخش X و Y، به عبارتی $E(X,Y)$، شامل هیچ دو یال مستقلی نیستند چون در غیر این صورت گراف H شامل دور C_n می‌شود و از طرفی‌چون $H = G[N(v_0)]$ است بنابراین گراف G، دارای چرخ W_n با مرکز v_0 می‌شود. در نتیجه برای بعضی از رئوس $v \in V(G)$ به طوریکه $E(X-\{v\}, Y-\{v\}) = \emptyset$ باشد در این صورت $\bar{H}-v$ گراف کامل دوبخشی است. فرض کنید $v_1 \in V(G)$ و گراف $\bar{H}-v_1$، یک گراف دوبخشی کامل باشد مجموعه‌های $X' = X-\{v_1\}$ و $Y' = Y-\{v_1\}$ را در نظر بگیرید.

ادعا ۲.۳.۲. رأسی مانند $v \in V(G)-\{v_0\}$ وجود دارد به طوریکه $e(X_1,Z_1) = |X_1||Z_1|$ و $e(Y_1,Z_1) = |Y_1||Z_1|$ که در آن $X_1 = X'-\{v\}$، $Y_1 = Y'-\{v\}$ و $Z_1 = Z-\{v\}$ است.

برهان. با توجه به ادعای ۱.۳.۲، $|X'| = \frac{(m+1)}{2}-1 = \frac{(m-1)}{2}$ و $|Y'| > \frac{(m-1)}{2}$. با توجه به این‌که گراف $\bar{H}-v_1 = (X',Y')$، گراف کامل دوبخشی است لذا $\bar{H}-v_1$ دارای یک (x,y)ـ مسیر از مرتبه L با $L = m-1, m-3$ برای هر $x \in X'$ و $y \in Y'$ و یک (x_1,x_2)ـ مسیر از مرتبه‌ی $m-4$ برای $x_1,x_2 \in X'$ و یک (y_1,y_2)ـ مسیر از مرتبه $m-4$ برای هر $y_1,y_2 \in Y'$ است. فرض کنید $x \in X'$ و $y \in Y'$ باشد. اگر $z_1 \in Z$ و $x,y \notin N(z_1)$، در این صورت xz_1y مسیر P_3 در $\bar{G}$ است و اگر $z_1,z_2 \in Z$ و $z_1x, z_2y \notin E(G)$ در این صورت $xz_1v_0z_2y$ مسیر P_5 در $\bar{G}$ است بنابراین مسیر P_3 و مسیر P_5 هر کدام با یک (x,y)ـ مسیر از مرتبه $m-1$ و $m-3$ در $\bar{H}-v_1$، به ترتیب دور C_m را در $\bar{G}$ تشکیل می‌دهند که تناقض با فرض است. بنابراین همواره داریم $X' \subseteq N(Z)$ برای هر $z \in Z$ یا $Y' \subseteq N(Z)$ برای هر $z \in Z$.

فرض کنید $X' \subseteq N(Z)$ برای هر $z \in Z$ و همچنین فرض کنید $y_1,y_2 \in Y'$، $z_1,z_2 \in Z$ و $y_1z_1, y_2z_2 \notin E(G)$. اگر $z \in Z-\{z_1,z_2\}$ به طوریکه $\{z_1,z_2\} \nsubseteq N(z)$ به عبارتی $z_1z \notin E(G)$ در این صورت $y_1z_1zv_0z_2y_2$، مسیر P_6 در گراف $\bar{G}$ است که همواره با یک (y_1,y_2)ـ مسیر از مرتبه‌ی $m-4$ در $\bar{H}-v_1$، دور C_m را در گراف $\bar{G}$ تشکیل می‌دهند که تناقض است. بنابراین $z_1,z_2 \in N(Z)$ برای هر $z \in Z-\{z_1,z_2\}$.

با توجه به این که $d(z) \leq d = |H|$ در نتیجه $Y' \nsubseteq N(Z)$ برای هر $z \in Z-\{z_1,z_2\}$. با توجه به ادعای ۱.۳.۲ $|Z| \geq 4$ است. فرض کنید $z_3,z_4 \in Z-\{z_1,z_2\}$ و $z_3z_4 \notin E(G)$ با توجه

به اینکه $y_۱ \neq y_۲$ همچنین فرض کنید که $y_۱ \neq y_۳$ باشد. اگر $z_۱ z_۲ \notin E(G)$ در این صورت $y_۱ z_۱ z_۲ v_۰ z_۳ y_۳$، مسیر $P_۶$ در گراف $\bar{G}$ است و اگر $z_۳ z_۴ \notin E(G)$ در این صورت $y_۱ z_۱ v_۰ z_۴ z_۴ y_۳$، مسیر $P_۶$ در گراف $\bar{G}$ است که هر کدام با یک $(y_۱, y_۳)$ــ مسیر از مرتبه‌ی $m-۴$ در $\bar{H}-v_۱$، دور C_m را در گراف $\bar{G}$ تشکیل می‌دهند که تناقض است. در نتیجه $G[Z]$، گراف کامل است. با توجه به ادعای ۱.۳.۲، گراف $G[X' \cup Z]$، گرافی کامل و از مرتبه حداقل $n+۱$ است در نتیجه گراف G، دارای چرخ W_n از مرتبه $n+۱$ است که تناقض است. در نتیجه در گراف $\bar{G}$، هیچ دو یال مستقلی بین دو بخش Y' و Z وجود ندارد بنابراین تعدادی رئوس مانند $v \in Z \cup Y'$ وجود دارند به طوریکه تعداد یال‌های گراف کامل دوبخشی برابر است با $e(Y'-\{v\}, Z-\{v\}) = |Y_۱||Z_۱|$ خواهد بود در صورتیکه v همان رأس مورد نظر است. □

ادعا ۳.۳.۲. $|Z| \leq m-۲$.

برهان. اگر $|Z| \geq m-۱$ باشد در این صورت با توجه به $Z = V(G) - N[v_۰]$ و $|Z \cup \{v_۰\}| \geq m$، فرض کنید $z_۰ \in Z$ و $d_Z(z_۰) = \Delta(G[Z])$ باشد با توجه به لم ۷.۲.۲ و $m \geq ۵$، بنابراین $d_Z(z_۰) \geq \lfloor \frac{m}{۲} \rfloor \geq ۲$ خواهد بود. فرض کنید $z_۱, z_۲ \in N(z_۰)$ اگر $m \geq ۷$ باشد در این صورت $d_Z(z_۰) \geq ۳$ است.با توجه به ادعای ۲.۳.۲ $z_۲ = v_۰$ در نظر می‌گیریم و برای هر $z \in Z - \{z_۰\}$، $d_Z(z) \leq ۱$ در غیر این صورت $d = \Delta(G) \geq d+۱$ که تناقض است فرض کنید Z' به صورت زیر باشد:

$$Z' = \{z_۱, z_۲, \ldots, z_{m-۲}\} \subseteq Z - \{z_۰\}$$

چون، کمترین درجه گراف مکمل حداقل برابر با مقدار زیر است لذا داریم:

$$\delta(\bar{G}[Z']) \geq m-۴ \geq \frac{(m-۲)}{۲}$$

در نتیجه بنابه لم ۲.۲.۲، $\bar{G}[Z']$، شامل دور $C_{m-۲}$ است در نتیجه $\bar{G}[Z' \cup \{v_۰\}]$ شامل یک چرخ $W_{m-۲}$ است. با توجه به اینکه $z_۱, z_۲ \notin N(z_۰)$، $\bar{G}[Z' \cup \{v_۰, v_۱\}]$ شامل دور C_m است ، بنابراین $m = ۵$ است. با توجه به ادعای ۱.۳.۲، $|Z| \geq ۴$ و فرض کنید $z_۳ \in Z - \{z_۰, z_۱, z_۲\}$. اگر $v_۲ \notin Z$ در این صورت $d_Z(z_۰) = ۲$ در غیر این صورت با توجه به ادعای ۲.۳.۲، $d(z_۰) \geq d+۱$. اگر $d_Z(z_i) = ۲$ برای برخی $i \in \{۱,۲\}$ در این صورت چون $z_۰, z_i \notin N(v_۱)$ در نتیجه $v_۰ z_i v_۱ z_۰ z_۳ v_۰$ در گراف $\bar{G}$، دارای دور $C_۵$ است که تناقض است .اگر $v_۲ \in Z$ باشد در این صورت با توجه به لم ۲.۲.۲ همواره داریم $v_۲ = Z_۰$ و $d_Z(z_i) = ۱$ برای $i = ۱,۲$ و $z_۱, z_۲ \notin N(v_۱)$ چون در غیر این صورت $\Delta(G) \geq d+۱$. بنابراین $v_۰ z_۱ v_۱ z_۲ z_۳ v_۰$ ، دارای دور $C_۵$ در گراف $\bar{G}$، خواهد بود که تناقض است.بنابراین داریم: $Z \leq m-۲$. □

فرض کنید $|X| > |Y|$، لذا با توجه به ادعای ۲.۳.۲ و رابطه ۲.۲، داریم:

$$|X| \geq \frac{(N-|Z|-۱)}{۲} \geq \frac{(N-m+۱)}{۲} \geq \frac{\frac{۴n}{۳}+۱}{۲} = \frac{۴n+۳}{۶} = \frac{۲n}{۳} + \frac{۱}{۲}$$

با توجه به ادعای ۱.۳.۲، $|Y| \leq n-۲$ و $N-n \geq n+۱$ داریم:

$$|X \cup Z \cup \{v_۰\}| \geq N - |Y| \geq N - n + ۲ \geq n + ۳$$

بنابراین $Z_۰ \subseteq Z - \{v_۲\}$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم بطوریکه $|Z_۰| = n - |X|$. فرض کنید $x_۰ \in X - \{v_۱, v_۲\}$ و $X_۰ = X - \{x_۰\}$. نشان می‌دهیم که گراف $G[X_۰ \cup Z_۰ \cup \{v_۰\}]$ شامل دور C_n است. از طرفی داریم $X_۰ = X - \{v_۰\}$ و $|X| \geq \frac{۲n}{۳} + \frac{۱}{۲}$ در نتیجه داریم:

$$|X_۰| = |X| - \{v_۰\} \geq \frac{۲n}{۳} + \frac{۱}{۲} - ۱ = \left\lceil \frac{۲n}{۳} - \frac{۱}{۲} \right\rceil$$

و

$$|Z_۰| = n - |X| \leq n - \frac{۲n}{۳} - \frac{۱}{۲} = \left\lfloor \frac{n}{۳} - \frac{۱}{۲} \right\rfloor$$

با استفاده از ادعای ۲.۳.۲ و فرض کنید $X_۰ - \{v_۱, v_۲\} \subseteq N(Z)$ برای هر $z \in Z$ با توجه به این که $n \geq ۶$ همواره داریم:

$$|X_۰ - \{v_۱, v_۲\}| \geq \left\lceil \frac{۲n}{۳} - \frac{۱}{۲} \right\rceil - ۲ \geq \left\lfloor \frac{۲n}{۳} - \frac{۱}{۲} \right\rfloor + ۱ \geq |Z_۰| + ۱.$$

چون $G[X_۰ \cup \{v_۰\}]$ گراف کامل است و تعداد $|Z_۰| + ۱$ از رأس‌های X با همه رئوس $Z_۰$ مجاور هستند در نتیجه $G[X_۰ \cup Z_۰ \cup \{v_۰\}]$ همیلتنی است و در نتیجه $G[X_۰ \cup Z_۰ \cup \{v_۰\}]$، شامل دور C_n خواهد بود. با استفاده از ادعای ۳.۳.۲ فرض کنید $Z_۰ \subseteq N(x)$، بنابراین $G[X \cup Z_۰ \cup \{v_۰\}]$، دارای چرخ W_n با مرکز $x_۰$ است که تناقض است. بنابراین $\bar{H}$ غیر دوبخشی است.

ادعا ۴.۳.۲. اگر $(m, n) \neq (۵, ۶)$ در این صورت H، همه دوری ضعیف است با کمر $g(H) = ۳$ و $c(H) \geq m$.

برهان. با توجه به (۱.۲) اگر $d \geq \left\lfloor \frac{۴n}{۳} \right\rfloor$ باشد در این صورت $m < ۱ + \left\lfloor \frac{۲n}{۳} \right\rfloor \leq ۱ + \left\lfloor \frac{d}{۲} \right\rfloor$ و اگر $d \geq ۲m - ۲$ باشد در این صورت $m = \left\lfloor \frac{۲(m-۱)}{۲} - ۱ \right\rfloor \leq ۱ + \left\lfloor \frac{d}{۲} \right\rfloor$. اگر $e(H) \geq \frac{d(d-۱)}{۴} + ۱$ باشد با توجه به لم ۱.۲.۲ و ۵.۲.۲،

$$e(H) = \frac{d(d-۱)}{۴} + ۱ > \frac{(d-۱)^۲}{۴} + ۱$$

در نتیجه گراف H، همه دوری ضعیف است با کمر $g(H) = ۳$ و با توجه به لم ۶.۲.۲، $۳ \leq c \leq d$ و اگر رابطه‌ی

$$e(H) = \frac{d(d-۱)}{۴} + ۱ \geq \frac{(c-۱)(d-۱)}{۲} + ۱$$

برقرار باشد در این صورت طولانی‌ترین دور $c(H) \geq c$ و این رابطه برای هر c از جمله $c \leq \left\lfloor \frac{d}{۲} \right\rfloor + ۱$ برقرار است و از آنجا که $\left\lfloor \frac{d}{۲} \right\rfloor + ۱ \geq m$ در نتیجه $c(H) \geq m$ است. و از طرفی گراف H کامل است ، فرض کنید

$$e(\bar{H}) > \frac{d(d-۱)}{۲} - \frac{d(d-۱)}{۴} + ۱ = \frac{۲d(d-۱) - d(d-۱) - ۴}{۴} = \frac{d(d-۱)}{۴} - ۱.$$

گراف $\bar{H}$ شامل دور C_m نیست با توجه به لم های ۱.۲.۲ و لم ۵.۲.۲، داریم: $e(\bar{H}) < \frac{(d-۱)^۲}{۴}+۱$ و

$$e(\bar{H}) < \frac{(c-۱)(d-۱)}{۲}+۱ < \frac{\frac{d}{۲}(d-۱)}{۲}+۱ = \frac{d(d-۱)}{۴}+۱$$

در نتیجه

$$e(H) > \frac{d(d-۱)}{۲} - \frac{d(d-۱)}{۴} - ۱ = \frac{d(d-۱)}{۴} - ۱.$$

چون $(m,n) \neq (۵,۶)$ و $d \geq ۹$ با توجه به رابطه ۱.۲، داریم: $\frac{d(d-۱)}{۴} - ۱ \geq \frac{(d-۱)^۲}{۴} + ۱$. پس با توجه به لم ۱.۲.۲، (H غیر دو بخشی است) و ادعای ۳.۳.۲، گراف های H و $\bar{H}$ همه دوری ضعیف با کمر سه هستند. با توجه به اینکه گراف $\bar{H}$ شامل دور C_m نیست بنابراین $c(\bar{H}) < m$. با توجه به لم ۶.۲.۲، چون $d \geq ۹$ در این صورت $\max\{c(H), c(\bar{H})\} \geq \left\lceil \frac{۲d}{۳} \right\rceil$ از طرفی داریم $c(\bar{H}) < m$. اگر فرض شود $c(H) < m$ در این صورت داریم:

$$\left\lceil \frac{۲d}{۳} \right\rceil \leq \max\{c(H), c(\bar{H})\} < m \leq \lfloor \frac{d}{۲} \rfloor + ۱$$

که تناقض است در نتیجه $c(H) > m$ است. حال نتایج زیر را با توجه به قضیه‌های بیان شده بررسی خواهیم کرد.

□

اگر $(m,n) = (۵,۶)$، در این صورت قضیه ۱.۳.۲ با توجه به قضیه ۵.۳.۱ برقرار است زیرا برای $m \geq ۵$ فرد و $n > m$، $R(W_n, C_m) \leq \max\{۱۳, ۱۳\} = ۱۳$ و برای $n \geq ۶$ ،برابر $R(W_n, C_۵) = ۱۳$ خواهد بود.اگر $(m,n) \neq (۵,۶)$ باشد در این صورت فرض کنید دور زیر $C = x_۱x_۲\ldots x_Sx_۱$ طولانی‌ترین دور در گراف H باشد و

$$U = V(H) - V(C) = \{u_۱, u_۲, \ldots, u_t\}$$

که در آن $t = d-S$ باشد. با توجه به ادعای ۴.۳.۲) $c(H) \geq m$ طولانی‌ترین دور و $\left\lfloor \frac{d}{۲} \right\rfloor + ۱ \geq m$ و $H = G[N(v_۰)]$ و در همسایگی مخذوف $v_۰$ قرار دارد) لذا $m \leq S \leq n-۱$ خواهد بود و با توجه به رابطه (۲.۲) داریم :

$$t = d - S \geq d - n + ۱ \geq \frac{(m-۱)}{۲} + ۱ = \frac{m+۱}{۲}$$

و همچنین طبق لم ۸.۲.۲،

$$|N_C(u_i) \cup N_C(u_j) \leq \left\lfloor \frac{|C|}{۲} \right\rfloor + ۱$$

برای هر $u_i, u_j \in U$ برقرار است در این صورت داریم:

$$|V(C) - (N_C(u_i) \cup N_C(u_j)| \geq \left\lceil \frac{|K|}{۲} \right\rceil - ۱ \geq \left\lceil \frac{m}{۲} \right\rceil - ۱ \geq \frac{(m-۱)}{۲}.$$

بنابراین با توجه به لم ۹.۲.۲، گراف $G[U] = K_t$، گرافی کامل است.

حال اگر $E(V(C), U) = \emptyset$ در این صورت با توجه به لم ۹.۲.۲، گراف $G[V(C)] = K_S$، گرافی کامل است و در نتیجه $\bar{H}$ دو بخشی است که تناقض با ادعا ۴.۳.۲ است. در نتیجه داریم: $E(V(C), U) \neq \emptyset$.

فرض کنید $x_1u_1 \in E(G)$، و $U_1 = U - \{u_1\}$ و $X_1 = \{x_2, x_3, \ldots, x_{t+1}, x_{S-t+1}, \ldots, x_{S-1}, x_S\}$ باشد. چون C طولانی‌ترین دور از گراف H و گراف کامل $G[U] = K_t$ است در نتیجه داریم $E(X_1, U_1) = \emptyset$. چون $|X_1| \geq t \geq \frac{(m+1)}{2}$ و $|U_1| = t - 1 \geq \frac{(m+1)}{2} - 1 = \frac{(m-1)}{2}$ با توجه به لم ۹.۲.۲، گراف $G[X_1]$، گراف کامل است.اگر فرض شود $G[V(C) - \{x_1\}] \neq K_{S-1}$، در این صورت$i$ای وجود دارد که $t+2 \leq i \leq S-t$ بطوریکه $G[X_1 \cup \{x_{t+1}, \ldots, x_{i-1}\}]$ یک گراف کامل است و با توجه به ماکسیمم بودن دور C و $N_{U_1}(x_i) = \emptyset$ گراف $G[X_1 \cup \{x_{t+1}, \ldots, x_{i-1}, x_i\}]$ گراف کامل نیست.

و از طرفی چون گراف$\bar{H}$، دوری به طول C_m ندارد با توجه به لم ۹.۲.۲، می‌توان نتیجه گرفت گراف $G[X_1 \cup \{x_{t+1}, \ldots, x_{i-1}, x_i\}]$، یک گراف کامل است که تناقض است. در نتیجه داریم $G[V(C) - \{x_1\}] = K_{S-1}$. همچنین با توجه به ماکسیمم بودن دور C می‌توان نتیجه گرفت $G[V(C) - \{x_1\}, U_1] = \emptyset$. حال با توجه به اینکه $\bar{H}$ دوری به طول، C_m ندارد همواره داریم $U \subseteq N(x_1)$ یا $V(C) - \{x_1\} \subseteq N(x_1)$. اگر $U \nsubseteq N(x_1)$ در این‌صورت $E(U, x_1) = \emptyset$ در نتیجه داریم: $E(G[U]) = K_t$ و بنابه لم ۹.۲.۲، $\bar{H}$ گرافی دوبخشی است که تناقض با ادعا ۴.۳.۲ است. بنابراین $R(W_n, C_m) \leq \max\{2n + 1, 3m - 2\}$ برای $m \geq 5$ فرد و $n > m$. در نتیجه اثبات قضیه ۱.۳.۲ کامل می‌شود.

حال با استفاده از قضیه های بیان شده به برهان ۱.۲ می‌پردازیم. اگر $m = 3$ باشد در این صورت با استفاده از قضیه ۱.۳.۱، برهان ۱. برقرار است چون $n \geq \frac{3(m-1)}{2}$ در نتیجه $2n + 1 \geq 3m - 2$ و داریم $\max\{2n + 1, 3m - 2\} = 2n + 1$. اگر $m \geq 5$ باشد در این صورت با توجه به قضیه ۱.۳.۲ داریم $R(W_n, C_m) \leq 2n + 1$ و از آنجا که گراف کامل $2K_n$ از مرتبه $2n$ دارای چرخ W_n، نیست چون چرخ W_n از مرتبه‌ی $n + 1$ است و با هم یکریخت نیستند و متمم آن گراف تهی است و شامل دور C_m، m فرد نیست. لذا داریم $R(W_n, C_m) \geq 2n + 1$ در نتیجه $R(W_n, C_m) = 2n + 1$ برای $n \geq \frac{3(m-1)}{2}$ خواهد بود . وهمچنین برای برهان ۲. چون m و n فرد هستند $m < n \leq \frac{3(m-1)}{2}$ در نتیجه $m \geq 7$ است زیرا در غیر این صورت نامساوی برقرار نمی‌شود و همچنین چون گراف کامل سه بخشی $K_{m-1,m-1,m-1}$، با مرتبه $3m - 2$ دارای چرخ W_n، از مرتبه $n+1$ نیست و متمم آن نیز شامل دور C_m نمی‌شود در نتیجه $R(W_n, C_m) \geq 3m - 2$ و چون $n \leq \frac{3(m-1)}{2}$ در نتیجه $\max\{2n+1, 3m-2\} = 3m - 2$ با توجه به قضیه ۱.۳.۲، داریم $R(W_n, C_m) \leq 3m - 2$. بنابراین همواره داریم : $R(W_n, C_m) = 3m - 2$ برای m و n فرد و $m < n \leq \frac{3(m-1)}{2}$.

نتیجه ۱.۳.۲. همان‌طور که مشاهده شد برای $m \geq 5$ فرد و $n > m$ قضیه ۱.۳.۲، یک کران بالای برای $R(W_n, C_m)$ تعریف نمود و با توجه به دو ویژگی ۱.۲ که به برهان آن پرداخته شد

بیانگر این مطلب است که در صورتی n زوج نباشد و $m < n < \frac{۳(m-۱)}{۲}$، کران بالا برای عدد رمزی $R(W_n, C_m)$ به عنوان کران پایین محسوب می‌شود. در مورد n زوج و $m < n < \frac{۳(m-۱)}{۲}$ حدس زیر را داریم.

حدس ۱.۳.۲. $R(W_n, C_m) = ۲n + ۱$ برای m فرد، n زوج و $m < n < \frac{۳(m-۱)}{۲}$.

اگر n زوجی وجود نداشته باشد به‌طوریکه $m < n < \frac{۳(m-۱)}{۲}$ در این صورت $m \geq ۷$ است زیرا اگر $m = ۷$ در این صورت $\frac{۳(m-۱)}{۲} = ۹$ و در نتیجه $n = ۸$ خواهد بود و با توجه به [۳۷] مقدار عدد رمزی $R(W_n, C_m)$ برای $m = ۷$ و $n = ۸$ برابر با $R(W_۸, C_۷) = ۱۷$ خواهد شد که بیانگر این است که حدس ۱.۳.۲، برای $m = ۷$ برقرار است.

در پایان این فصل با استفاده از لم‌هایی که مطرح شد و به برهان برخی از آنها پرداخته شد به برهان قضیه ۴.۳.۱ می‌پردازیم.

برهان. فرض کنید گراف G، گرافی از مرتبه $۳n - ۲$ با $n \geq ۴$ و m، فرد و $n \geq m \geq ۳$ باشد و از آنجا که گراف $G = ۳K_{n-۱}$، نه شامل دور C_n و نه گراف $\bar{G}$ شامل چرخ W_m برای m فرد است لذا خواهیم داشت $R(C_n, W_m) \geq ۳m - ۲$. لذا کافی است نشان دهیم $R(C_n, C_m) \leq ۳n - ۲$.

با برهان خلف فرض کنید نه گراف G، شامل یک دور C_n و نه گراف $\bar{G}$، شامل یک چرخ W_m باشد . اگر رأسی مانند v وجود داشته باشد به طوریکه درجهٔ آن به صورت $d(v) \leq n - ۲$ باشد در این صورت $G - N[v]$ گرافی از مرتبه حداقل $۲n - ۱$ خواهد بود زیرا

$$|G - N[v]| \geq ۳n - ۲ - (n - ۱) = ۲n - ۱$$

با توجه به اینکه عدد رمزی به صورت $R(C_n, C_m) = ۲n - ۱$، برای $n \geq m \geq ۳$، m فرد و $(m, n) \neq (۳,۳)$ خواهد بود در نتیجه گراف $\bar{G} - N[v]$ با توجه به تعریف $R(C_n, C_m)$، شامل یک دور C_m خواهد بود و در نتیجه گراف $\bar{G}$، شامل یک چرخ W_m با مرکز v است که تناقض با فرض است بنابراین داریم $\delta(G) \geq n - ۱$. اگر گراف G، دوبخشی باشد در این صورت عدد استقلال حداقل برابر با نصف تعداد رئوس گراف خواهد بود لذا داریم :

$$\alpha(G) \geq \frac{|G|}{۲} = \frac{(۳n - ۲)}{۲}$$

بنابراین گراف $\bar{G}$، شامل یک چرخ W_m از مرتبه $m + ۱$ است که تناقض است. حال فرض کنید گراف G، غیر دوبخشی باشد اگر

$$\delta(G) \geq n = \frac{(۳n - ۲) + ۲}{۲}$$

باشد در این صورت با توجه به لم ۲.۲.۲ و ۴.۲.۲ گراف G، به ترتیب همه دوری ضعیف با کمر $g(G) = ۳$ یا $g(G) = ۴$ است و طولانی‌ترین دور آن $c(G) \geq \delta(G) + ۱ > n$ خواهد بود لذا گراف G،شامل یک دور C_n است که تناقض با فرض است در نتیجه داریم $\delta(G) = n - ۱$. رأس v،

$v \in V(G)$ با درجه‌ی $d(v) = \delta(G) = n - 1$ در نظر بگیرید . و همچنین فرض کنید گراف H ، به صورت $H = G - N[v]$ باشد در این صورت مرتبه گراف H برابر با

$$|H| = |G - N[n]| = 3n - 2 - (n - 1) = 2n - 2$$

خواهد بود. اگر گراف H، دوبخشی باشد به عبارتی $H = (X, Y)$. در این صورت داریم $|X| = |Y| = n - 1$. زیرا در غیر صورت گراف $\bar{G}[X \cup \{v\}]$ یا $\bar{G}[Y \cup \{v\}]$ شامل یک چرخ W_m (از مرتبه $m + 1$) هستند. اگر n زوج باشد در این صورت $n \geq m + 1$ خواهد بود در نتیجه گراف $\bar{G}[X \cup \{v\}]$ شامل یک چرخ W_n از مرتبه $m + 1$ می‌باشد که تناقض با فرض است بنابراین n فرد است. اگر رأسی مانند $v_i \in N(v)$ وجود داشته باشد به طوریکه $d_X(v_i) \leq n - 4$ یا $d_Y(v_i) \leq n - 4$، از طرفی چون $n - 4 \geq m \geq 3$ و n فرد است لذا $n \geq 7$ خواهد بود در نتیجه داریم $d_X(v_i) \leq 3$ یا $d_Y(v_i) \leq 3$. بنابراین گراف $\bar{G}[X \cup \{v, v_i\}]$ یا $\bar{G}[Y \cup \{v, v_i\}]$ شامل یک چرخ W_m می‌باشد که تناقض با فرض است بنابراین $d_X(v_i) \geq n - 3$ یا $d_Y(v_i) \geq n - 3$ برای هر $v_i \in Y$.

اگر درجهٔ رأس y در مجموعه X به صورت $d_X(y) \leq n - 3$ برای هر $y \in Y$ باشد و از آنجا که $n \geq m$ است اگر فرض کنیم $|X \cup \{y\}| \geq m$، دراین صورت به تولید چرخ W_n در $\bar{G}[X \cup \{v, y\}]$ به مرکز v منجر می‌شود که تناقض است در نتیجه $d_X(y) \geq n - 2$ برای هر $y \in Y$ خواهد بود.
و با توجه به هم اندازه بودن X و Y برای هر $x \in X$ داریم $d_Y(x) \geq n - 2$. از آنجا که برای هر $v_1, v_2 \in N(v)$ می‌توان رأس x و y را بدین گونه انتخاب کرد که $x \in N_X(v_1)$ و $y \in N_Y(v_2)$ بطوریکه $xy \in E(G)$ در نتیجه vv_1xyv_2v یک دور C_5 در گراف G است و بنابراین خواهیم داشت $n \geq 7$. اکنون فرض کنید $v_1 \in V(G)$ باشد لذا با استدلال‌های بالا می‌توان نتیجه گرفت که گراف $H[N_H(v_1)]$ شامل یک زیر گراف $K^-_{n-3,n-3}$ است که $K^-_{n-3,n-3}$ نشان دهنده‌ی یک گراف دوبخشی $K_{n-3,n-3}$ که تطابق کامل را از آن کم کرده‌ایم. از آنجا که $K^-_{n-3,n-3}$ دارای یک دور همیلتنی برای $n \geq 6$ است لذا $v_1 + K^-_{n-3,n-3}$ دارای یک دور C_n خواهد بود بنابراین گراف H، غیر دوبخشی است.

اگر گراف $\bar{H}$، دوبخشی باشد با دوبخش‌های X و Y، $\bar{H} = (X, Y)$، در این صورت داریم $|X| = |Y| = n - 1$. زیرا در غیر این صورت گراف‌های $G[X]$ و $G[Y]$ کامل هستند لذا $E(X, Y)$ ،شامل هیچ دو یال مستقلی نیست زیرا در غیر این صورت شامل دور C_n خواهند بود. اگر تعدادی رأس مانند $v_i \in N(v)$ وجود داشته باشند به طوریکه $d_X(v_i) \geq 2$ یا $d_Y(v_i) \geq 2$، در این صورت با توجه به لم‌های ۲.۲.۲ و ۴.۲.۲ گراف‌های $G[X \cup \{v_i\}]$ و $G[Y \cup \{v_i\}]$ شامل یک دور C_n خواهد بود و بنابراین $d_X(v_i) \leq 1$ یا $d_Y(v_i) \leq 1$، برای هر $v_i \in N(v)$ است.
اگر گراف H، دارای دو یال بین مجموعه X و Y داشته باشد در این صورت با توجه به اینکه $H[X] = H[Y] = K_{n-1}$ و چون $n \geq 4$ است ، لذا گراف H، شامل یک دور C_n است و بنابراین گراف G ،نیز شامل دور C_n خواهد بود که تناقض است . بنابراین با توجه به اینکه $\delta(G) = n - 1$ است لذا می‌توان مشاهده کرد که رأس‌هایی مانند $v_1, v_2 \in N(v)$ و $x_1, x_2 \in X$ وجود دارند به

طوریکه $v_1x_1, v_2x_2 \in E(G)$، در نتیجه گراف G، دارای یک دور C_n خواهد بود. اگر $n \geq 5$ باشد بنابراین داریم $n = 4$ در این مورد فرض کنید $m = 3$ و $N(v) = \{v_1, v_2, v_3\}$، $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ و $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ باشد و همچنین فرض کنید $v_1x_1, v_2x_2 \in E(G)$. از آنجا که گراف G، شامل دور C_4 نیست در نتیجه $v_1v_2 \notin E(G)$. از طرفی چون $d_X(v_i) \leq 1$ و $d_Y(v_i) \leq 1$ برای هر $v_i \in N(v)$، می‌توانیم فرض کنیم $x_3, y_3 \notin N(v_1) \cup N(v_2)$. اگر $x_3, y_3 \notin E(G)$، باشد. در این صورت می‌توان نتیجه گرفت:

$$\bar{G}[\{v_1, v_2, x_3, y_3\}] = K_4 = W_3$$

که تناقض است در نتیجه داریم $x_3, y_3 \in E(G)$. اگر برای تعدادی $i \in \{1,2\}$، داشته باشیم $y_i \notin N(v_1) \cup N(v_2)$، در این صورت رابطه زیر برقرار خواهد بود:

$$\bar{G}[\{v_1, v_2, x_3, y_i\}] = K_4 = W_3$$

خواهد بود بنابراین با استفاده از استدلال بالا نتیجه می‌گیریم $v_1y_1, v_2y_2 \in E(G)$. اگر $v_1, v_2 \in N(v_3)$ باشد در این صورت $vv_1v_3v_2v_1$ یک دور C_4 در گراف G است بنابراین می‌توان فرض کرد که $v_1v_3 \notin E(G)$ و چون گراف G، شامل دور C_4 نیست در نتیجه داریم :

$$\bar{G}[\{v_1, v_3, x_2, y_2\}] = K_4 = W_3$$

که تناقض است بنابراین گراف $\bar{H}$، غیر دوبخشی است. اگر $n = 4$ باشد در این صورت $m = 3$ خواهد بود. اگر گراف $\bar{H}$، شامل یک دور C_3 باشد در این صورت گراف $\bar{G}$، همراه رأس v، دارای یک چرخ W_4 به مرکز v خواهد بود که تناقض با فرض است. بنابراین از آنجا که گراف $\bar{H}$، یک گراف غیر دوبخشی از مرتبه $2n - 2 = 6$ است، لذا گراف $\bar{H}$، دارای یک دور فرد C_5 بدون هیچ قطری (فاصله بین دو رأس را طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن بین آن دو است حال به ازای هر رأس در نظر بگیریم، قطر گراف برابر بیشترین خروج از مرکز است.) و فقط رأسی که در دور C_5 در گراف $\bar{H}$ قرار ندارد به همراه رئوس دیگر شامل یک دور C_4 می‌شود که تناقض با فرض است. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که $n \geq 5$ است.

ما ابتدا اشاره می‌کنیم که برای گراف H با مرتبه $|H| = 2n - 2 \geq 8$، رابطه زیر برقرار است:

$$\left\lfloor \frac{|H|(H-1)}{4} \right\rfloor > \frac{(|H|-1)^2}{4} + 1$$

اکنون اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$e(H) \geq \frac{(2n-2)((2n-2)-1)}{4} + 1$$

با توجه به لم ۵.۲.۲، طولانی ترین دور در گراف H حداقل برابر $c(H) \geq n$ خواهد بود لذا برای هر $3 \leq c \leq n$ برقرار است از جمله $c = n - \frac{1}{2}$. و در نتیجه با توجه به لم ۱.۲.۲، گراف H، همه

دوری ضعیف است با کمر ۳ $= g(G)$. در نهایت گراف H، شامل یک دور C_n است که تناقض است. بنابراین داریم:

$$e(H) \leq \frac{(۲n-۲)((۲n-۲)-۱)}{۴}$$

می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} e(\bar{H}) &\geq \frac{(۲n-۲)((۲n-۲)-۱)}{۲} - \frac{(۲n-۲)((۲n-۲)-۱)}{۴} - ۱ \\ &= \frac{۲(۲n-۲)((۲n-۲)-۱) - (۲n-۲)((۲n-۲)-۱)}{۴} - ۱ \\ &\geq \left\lfloor \frac{(۲n-۲)((۲n-۲)-۱)}{۴} \right\rfloor \end{aligned}$$

و از آنجا که گراف $\bar{H}$، شامل دور C_n نیست لذا بنابه لم ۵.۲.۲، داریم:

$$e(\bar{H}) \leq \frac{(۲n-۲)((۲n-۲)-۱)}{۴} + ۱$$

و لذا با استدلالی مشابه قبل نتیجه می‌گیریم:

$$e(H) > \left\lfloor \frac{(۲n-۲)((۲n-۲)-۱)}{۴} \right\rfloor .$$

لذا با توجه به لم ۶.۲.۲، در این صورت داریم:

$$\max\{c(H), c(\bar{H})\} \geq \left\lceil \frac{۲n}{۳} \right\rceil = \left\lceil \frac{۲(۲n-۲)}{۳} \right\rceil > n.$$

بنابراین با توجه به لم ۱.۲.۲، گراف H، یا شامل دور C_n (گراف H، همه دوری ضعیف است و کمر آن ۳ $= g(G)$ و طولانی‌ترین دور در $c(H)$ یا $c(\bar{H})$ از n بزرگتر هستند.) یا گراف $\bar{H}$ ،شامل یک دور C_m است و همراه با رأس v در گراف $\bar{G}$، یک دور W_m را تشکیل می‌دهند که تناقض پایانی اثبات خواهد بود. □

فصل ۳

تعیین عدد رمزی چند رنگی روی دورها

۱.۳ مقدمه

این فصل با استناد به مرجع [۳۱] نگارش شده است.

در این فصل به مطالعه اعداد رمزی چندرنگی روی دورها پرداخته و سپس مسئله عدد رمزی مرتبط با رنگ‌آمیزی یالی از گراف‌های معمولی با kـرنگ برای $k \geq ۲$ در نظر گرفته خواهد شد. همچنین نتایج و کران‌هایی که توسط اردوش و باندی برای یک دور فرد C_n حدس زده شده مورد بررسی قرار خواهد گرفت. همچنین زمانی که n زوج است یونگچی [۱]، بینگ شی[۲] و یوآنشنگ[۳] راهکارهایی را ارائه دادند و رابطه $R_k(C_k) \geq (k-۱)n - ۲k + ۴$ را نشان دادند که در این فصل رابطه $R_k(C_n) \leq kn + o(n)$ و n زوج را اثبات می‌کنیم و استدلالی قوی‌تر برای $k \geq ۴$ و n فرد $R_k(C_n) \leq k۲^k n + o(n), n \longrightarrow \infty$ را ارائه می‌دهیم. مسئله‌ای که توسط لوزاک [۴] مطرح شد و تاکنون باز است را مطرح می‌کنیم.

مسئله باز: برای $k \geq ۴$ و n، فرد کران بالایی برای $R_k(C_n)$ با پیچیدگی $O(k)$ بیابید. در طول این پایان نامه پاسخ جزئی به کمک قضیه زیر ارائه می‌دهیم:

---

۱ Yongqi

۲ Bingxi

۳ Yuansheng

۴ Luczak

قضیه ۳.۱.۱. برای هر عدد صحیح $k \geq ۴$ و n فرد، در این صورت داریم:

$$R_k(C_n) \leq k ۲^k n + o(n), \qquad n \longrightarrow \infty.$$

در تعیین کران بالا برای $R_k(C_n)$، برای $k \geq ۳$ و n فرد، لوزاک [۲۹] ثابت کرد که مقدار عدد رمزی برابر مقدار زیر خواهد بود:

$$R_۳(C_n) = ۴n + o(n), \qquad n \longrightarrow \infty$$

بعدها [۴۳] و [۴۴] مقدار عدد رمزی را برابر $R_۳(C_n) = ۴n - ۳$، برای nهای فرد در نظر گرفتند . باندی و اردوش [۸]برای دور فرد، n رأسی C_n حدس زیر را ارائه دادند که به شرح زیر است.

حدس ۳.۱.۱. برای دور فرد، n رأسی C_n، عدد رمزی برابر $R_k(C_n) \leq ۲^{k-۱}(n-۱) + ۱$ برای $n > ۳$، خواهد بود.

برهان. برهانی برای $k = ۲$ به شرح زیر ارائه دادند:
با اختصاص دادن رنگ اضافی به کران پایین و با استفاده از رابطه بازگشتی برای دو رنگ، دو مجموعه‌ی مجزا با اندازه‌ی $n - ۱$ در نظر بگیرید. رنگ همه‌ی جفت‌هایی که در هر مجموعه قرار دارند را با رنگ ۱ و رنگ همه جفت‌هایی که به این دو مجموعه وصل می‌شوند را رنگ ۲ اختصاص می‌دهیم. برای $i = ۳, \ldots, k$، دو کپی مجزا از رنگ‌آمیزی برای $i - ۱$ رنگ در نظر بگیرید همه جفت‌هایی که به این دو کپی وصل می‌شوند را رنگ i اختصاص می‌دهیم. در نهایت یک kـ رنگ آمیزی $۲^{k-۱}(n-۱)$ رأسی داریم و هر مؤلفه تکرنگ در آن $n - ۱$ رأسی است و یا دوبخشی می‌باشد. و از آنجا که گراف دوبخشی است لذا دارای دور فرد نمی‌باشد. □

باندی و اردوش کران بالایی برای عدد رمزی $R_k(C_n)$ و n فرد به صورت زیر ارائه دادند $R_k(C_n) \leq (k+۲)!n$. مطلب فوق در خصوص عدد رمزی $R_k(C_n)$ برای n فرد بیان شد در حالی که عدد رمزی $R_k(C_n)$ زمانی که n زوج است رفتار متفاوتی دارد در این باره با توجه به [۱۴] و [۳۵] عدد رمزی برابر $R_k(C_n) = \frac{۳n}{۲} - ۱$ می‌باشد و برای مقدارهای بزرگ و زوج n، مقدار عدد رمزی را برابر $R_۳(C_n) = ۲n$ ارائه دادند. برای تعیین کران بالا برای عدد رمزی $R_k(C_n)$ وقتی n زوج قضیه زیر را مطرح می‌کنیم و با کمک قضیه‌ها و لم‌هایی که در پایان ارائه می‌دهیم به اثبات آن می‌پردازیم.

قضیه ۳.۱.۲. برای هر عدد صحیح $k \geq ۲$ و n زوج، رابطه زیر برقرار است:

$$R_k(C_n) \leq kn + o(n), \qquad n \longrightarrow \infty.$$

در هر دو قضیه ۳.۱.۱ و ۳.۱.۲، مقدار k- ثابت و n بزرگ در نظر گرفته شده است و در موردی که n ثابت و k بزرگ در نظر گرفته شود اطلاعات کمی داریم و برای n فرد و k بزرگ با توجه به ۳.۱.۱، باندی و اردوش [۸] کران اصلی زیر را به دست آوردند:

$$۲^{k-۱}(n-۱) + ۱ \leq R_k(C_n) \leq (k+۲)!n.$$

کران بهتری هم برای مقدارهای کوچک n وجود دارد با توجه به [۵]، [۳۲] ، [۳]،[۳۶] برای $n=۳$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$c_۱ ۱۰۷۳^{k/۶} \leq R_k(C_۳) \leq c_۲ k!$$

که در آن $c_۲ < e$ خواهد بود. برای $n = ۵$، لی[۵] کران بالا را به صورت زیر ارائه داد:

$$R_k(C_۵) \leq \sqrt{۱۸^k k!}, \qquad k \geq ۲.$$

و برای n زوج، کران بالا به صورت زیر خواهد بود:

$$R_k(C_n) \leq c k^{\frac{n}{n-۲}},$$

که در آن c، ضریبی است که به n بستگی دارد. لی و لیه[۶] [۴۶]، نشان دادند که این کران به صورت مجانبی برای $n = ۴,۶,۱۰$ درست است.
حال برای این مورد مثالی را برای $n = ۴$ و $k = ۲$ ارائه می‌دهیم.

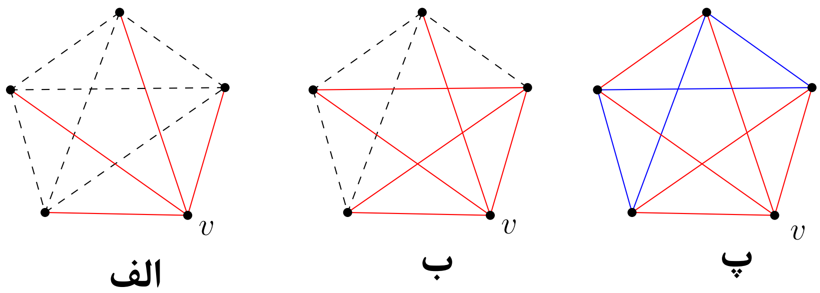
مثال ۱.۱.۳. رنگ‌آمیزی یالی از گراف کامل $C_۴$ برابر با $R(C_۴, C_۴) = ۶$ است.

برهان. رنگ‌آمیزی یالی از گراف کامل $K_۵$ را در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم که $R(C_۴, C_۴) > ۵$ خواهد بود. زیرا هیچ دور $C_۴$ تک‌رنگی در آن وجود ندارد. اکنون گراف G، با شش رأس با یال‌های رنگ‌آمیزی شده آبی و قرمز در نظر بگیرید. رأس v از گراف G، را در نظر بگیرید حال دو مورد را بررسی می‌کنیم.

۱. فرض کنید رأس v با چهار رأس یا بیشتر مجاور باشد و آنها را با رنگ قرمز رنگ‌آمیزی کنید و فرض کنید $K_۴$ زیرگرافی از دیگر رأس‌ها باشد که با خط چین نشان داده شده است. در میان شش یال از گراف $K_۴$، اگر هر دو یال مجاور، هر دو با هم قرمز باشند پس همراه با دو یال قرمز مجاور با v، یک دور $C_۴$ را تشکیل می‌دهند در غیر این صورت حداکثر دو یال قرمز در این گراف $K_۴$ وجود دارد که با رئوس دیگر مجاور نیستند در این مورد چهار یال باقی مانده یک دور $C_۴$، آبی را تشکیل می‌دهند.

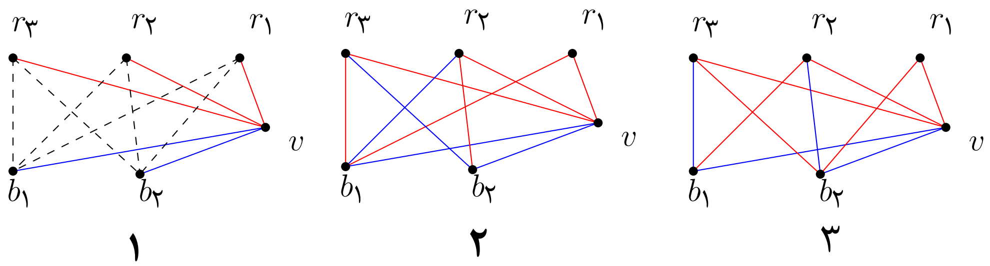
۲. فرض کنید رأس v، با سه رأس مجاور باشد و یال‌ها را به رنگ قرمز و با رنگ آبی دقیقاً به دو رأس دیگر وصل کنید. پنج رأسی که در مجموعه‌های $v_r = \{r_۱, r_۲, r_۳\}$ و $v_b = \{b_۱, b_۲\}$ قرار دارند مبنایی برای رنگ یال‌هایی که به هر رأس v وصل می‌شوند، هستند. گراف کامل دوبخشی $K_{۳,۲}$ روی رأس‌های مجموعه را با خط چین نشان داده شده است. اگر یک رأس $b_i \in v_b$ وجود داشته باشد که با دو یال قرمز به گراف دوبخشی $K_{۳,۲}$ مجاور باشد، یک دور $C_۴$ قرمز را تشکیل می‌دهند و اگر یک رأس $r_j \in v_۲$ وجود داشته باشد

[۵] Li
[۶] Lih



شکل ۱.۳: گراف کامل K_5

که با دو یال به گراف دوبخشی $K_{3,2}$ مجاور باشد، یک دور C_4، آبی را تشکیل می‌دهند. حال فرض کنید هیچ دور C_4، تکرنگی وجود نداشته باشد. بدون در نظر گرفتن دو مورد قبل، شروع به رنگ‌امیزی یال‌هایی از گراف کامل دوبخشی $K_{3,2}$ می‌کنیم. یال r_1b_1 را قرمز رنگ می‌کنیم زیرا ممکن است رأس b_1 دو یال قرمز نداشته باشد در نتیجه b_1r_2 را آبی رنگ می‌کنیم در این صورت یال r_2b_2 قرمز خواهد بود. این فرآیند از رنگ‌امیزی یال‌ها را ادامه می‌دهیم تا زمانی که وارد آخرین یال از گراف کامل دوبخشی $K_{3,2}$ شویم که منجر به یک دور C_4 قرمز می‌شود $(vr_1b_1r_3v)$. اگر یال r_1b_1 آبی باشد با رنگ‌آمیزی بقیه یال‌ها با توجه به شکل ۲.۳، قسمت ۳، که در این حالت دور C_4 قرمز تشکیل خواهد شد. با جابه‌جا کردن رنگ‌های قرمز و آبی در دو مورد بالا می‌توان نتیجه گرفت که اگر رأس v، به دقیقاً سه یال آبی و دو یال قرمز متصل باشد. ناچار یک دور C_4 تک‌رنگ در جای دیگر گراف G، حاصل می‌شود. با در نظر گرفتن همه موارد ما در نهایت نشان می‌دهیم که در همهٔ رنگ‌آمیزی‌هایی که از گراف K_6 با دو رنگ آبی و قرمز داریم همواره یک دور C_4 تک‌رنگ وجود خواهد داشت و برهان کامل می‌شود.



شکل ۲.۳: گراف کامل K_6

□

در خصوص اثبات قضایای ۱.۱.۳ و ۲.۱.۳ ابزارهایی به صورت قضیه و لم ارائه می‌دهیم.

۲.۳ ابزارها

قضیه زیر از مرجع [۱۲] برگرفته شده است.

قضیه ۱.۲.۳. فرض کنید $n \geq 3$، برای هر گراف G با حداقل $\frac{(n-1)(v(G)-1)}{2} + 1$ یال، گراف G شامل یک دور از اندازه حداقل n است.

لم زیر از تجزیه لم [۳۰]به دست آمده را مطرح و به اثبات آن می‌پردازیم.

لم ۱.۲.۳. اگر هر یک از مؤلفه‌های غیر دوبخشی گراف G، شامل یک تطابق از اندازه حداقل $\frac{n}{2}$ یال‌ها نباشند، در این صورت یک افراز $V(G) = V^1 \cup V^2 \cup V^3$، از رأس‌های گراف G، مانند $V(G) = V^1 \cup V^2 \cup V^3$ چنان وجود دارد بطوریکه:

۱. گراف G، هیچ یالی بین $V^1 \cup V^2$ و V^3 ندارد؛

۲. زیرگراف $G[V^1 \cup V^2]$ دوبخشی است و بخش‌های آن (V^1, V^2)؛ هستند.

۳. زیرگراف $G[V^3]$، دارای حداکثر $\frac{n(|V^3|-1)}{2}$ یال است و هر مؤلفه آن غیر دوبخشی است.

توجه کنید که لم ۱.۲.۳ یک تجزیه از مجموعه رئوس $V(G)$ به مجموعه‌های V^1، V^2 و V^3 ارائه می‌دهد و به مجموعه V^3 یک مجموعه تنک می‌گوییم.

برهان. مؤلفه‌های $H_1, H_2, \ldots, H_r$ از گراف G، را در نظر بگیرید. فرض کنید $V^1 \cup V^2$، مجموعه‌ای از رأس‌هایی باشد که در آن همه مؤلفه‌ها دو بخشی هستند و $V^3 = V \setminus V^1 \cup V^2$ مجموعه‌ای از رأس‌هایی باشد که از اجتماع مؤلفه‌های غیر دوبخشی تشکیل شده است. در این صورت موارد ۱. و ۲. برقرارند. اگر هر مؤلفه غیر دوبخشی از H_i دارای میانگین درجه بزرگتر از n باشد طبق قضیه ۱.۲.۳ شامل یک دور طولانی‌تر از n است و همچنین یک تطابق از اندازه حداقل n را دارا هستند که تناقض با فرض است. در نتیجه هر مؤلفه از $G[V^3]$ دارای میانگین درجه حداکثر n، است. □

برای اثبات قضیه ۱.۱.۳، لم‌های زیر را ارائه می‌دهیم.

۳.۳ دورهای فرد

برای $k \geq 1$ عدد صحیح و عدد مثبت c، $P_k(c)$ را با ویژگی زیر در نظر بگیرید.
$P_k(c)$: برای هر $\varepsilon > 0$، یک $\delta > 0$ و n_0ای چنان وجود دارد که برای هر $n > n_0$ فرد و هر گراف G با مجموعه رأس‌های $V(G)$ که $v(G) > (1+\varepsilon)cn$ و همچنین مجموعه یال‌های $e(G) \geq (1-\delta)\binom{v(G)}{2}$، هر k−رنگ‌آمیزی یالی از گراف G دارای یک مؤلفه تکرنگ غیر

دوبخشی با یک تطابق از $\frac{n+1}{2}$ یال‌هاست.
اثبات ما از قضیه ۱.۱.۳ بر اساس نتیجه زیر از دستوری در لم [۳۳] که توسط فیگاج [۷] و لوزاک بدست آمده است و همچنین در [۳۰] به صورت کلی بیان شده است.

لم ۱.۳.۳. فرض کنید عدد حقیقی $c > 0$ و عدد صحیح $k \geq 2$ باشد. اگر ویژگی $P_k(c)$ برقرار باشد، در این صورت نتیجه می‌شود:

$$R_k(C_n) \leq (c + o(1))n, \qquad n \longrightarrow \infty.$$

قضیه ۱.۱.۳ از لم بعدی پیروی می کند.

لم ۲.۳.۳. برای هر عدد صحیح $k \geq 4$، ویژگی $P_k(k2^k)$ برقرار است.

برهان. عدد صحیح $k \geq 4$ و $\varepsilon > 0$ را در نظر بگیرید. با توجه به ویژگی $p_k(c)$، n فرد و به اندازه کافی بزرگ باشد و $\delta = \frac{\varepsilon}{2^{2k+4}}$ و $N = (1+\varepsilon)k2^k n$ را در نظر بگیرید.

فرض کنید G، گرافی با ویژگی $v(G) \geq N$ و $e(G) \geq (1-\delta)\binom{v(G)}{2}$ باشد با توجه به وِیژگی $p_k(c)$، هر $k-$رنگ‌آمیزی از گراف G، دارای یک مؤلفه غیر دوبخشی با یک تطابق از $\frac{n+1}{2}$ یال‌ها است . به برهان خلف فرض کنید یک kـ رنگ‌آمیزی یالی از گراف G، بدون یک تطابق تکرنگ از $\frac{n+1}{2}$ یال‌ها در یک مؤلفه غیر دوبخشی وجود داشته باشد. همچنین ممکن است فرض شود که $\varepsilon < 1$ و $v(G) = N$. که در این صورت $\varepsilon = 0$، $\delta = 0$، $V(G) = N$ و $e(G) \geq \binom{N}{2}$.

اگر مجموعه رأس‌های G، $v(G) > N$ و مجموعه یال‌های آن به صورت زیر باشد:

$$e(G) \geq (1-\delta)\binom{v(G)}{2} \tag{۱.۳}$$

به صورت غیر بازگشتی، $v(G) - N$ بار، با در نظر گرفتن یک رأس از کمترین درجه، یک زیر گراف از گراف G با N رأس و حداقل $e(G) \geq (1-\delta)\binom{v(G)}{2}$، یال به دست می‌آوریم. برای هر رنگ i، G_i را زیرگراف فراگیر از گراف G که القاء شده توسط یال‌های به رنگ i، در نظر بگیرید. در این صورت G_i ، شامل یک تطابق از $\frac{n+1}{2}$ یال‌ها در یک مؤلفه غیر دوبخشی نیست در غیر به تناقض می‌رسیم. حال با استفاده از لم ۱.۲.۳، برای هر زیرگراف فراگیر G_i، که $i \in [k] := \{1, 2, \ldots, k\}$، افرازهایی از V_i^1 و V_i^2 و یک مجموعه‌ی تنک V_i^3 به‌دست می‌آیند. برای هر $i \in [k]$ مجموعه‌های $X_i^1 = V_i^1$ و $X_i^2 = V_i^2 \cup V_i^3$ در نظر بگیرید. چون هر کدام از مجموعه‌ها دارای k عضو هستند و از طرفی بعضی از اعضا شاید دوبار شمرده شوند (اعضایی که دو بار شمرده می‌شوند همان اعضایی هستند که در اشتراک حضور دارند.) در نتیجه 2^k

[۷] Figaj

تا از مجموعه‌ها به شکل $\cap_{l=1}^{k} X_l^{j_l}$، $j_l \in \{1,2\}$ برای هر l هستند. چون مجموعه‌های V_i^1، V_i^2 و V_i^3 یک افرازهایی از مجموعه رئوس $v(G)$ برای هر i هستند ، پس می‌توان نتیجه گرفت که 2^k تا از مجموعه‌های بالا جفت‌های مجزایی هستند و یک افراز از $V(G)$ را تشکیل می‌دهند. گراف G، با مجموعه رأس‌های $N = (1+\varepsilon)k2^kn$ در نظر بگیرید .از آنجا که جایگشت‌ها متمایز نیستند بنابراین انتخابی از $j_l \in \{1,2\}$ و $l = 1,2,\dots,k$ وجود دارد به‌طوری‌که اندازه مجموعه‌ی $X = \bigcap_{l=1}^{k} X_l^{j_l}$ حداقل برابر با مقدار زیر خواهد بود:

$$\frac{N}{2^k} = (1+\varepsilon)kn > kn \qquad (2.3)$$

برای هر رنگ i، اگر یال e با رنگ i در X وجود داشته باشد در این صورت با توجه به لم ۱.۲.۳، قسمت (۱) و (۲)، یال e باید در مجموعه تنک V_i^3 قرار بگیرد از آنجا که مجموعه رأس‌هایی در V_i^3 قرار دارند که به صورت اجتماع مؤلفه‌های غیر دوبخشی است و با استفاده قسمت (۳) لم ۱.۲.۳، یال e، داخل یک مؤلفه‌ی فرد قرار می‌گیرد و چون طبق فرض تطابق تک‌رنگی از $\frac{n+1}{2}$ یال‌ها در مؤلفه‌های غیر دوبخشی وجود ندارد در نتیجه X، شامل هیچ دور طولانی‌تر از n نیست. (زیرا اگر X، شامل دوری طولانی‌تر از n باشد طبق قضیه ۱.۲.۳ یک تطابق از اندازه‌ی حداقل n وجود دارد که تناقض با فرض است) بنابه قضیه ۱.۲.۳ حداکثر $\frac{n(|X|-1)}{2}$ یال از رنگ i وجود دارد به طوریکه هر دو سر انتهایی آنها در X قرار می‌گیرد که همان زیرگراف القاء شده توسط X است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

$$e(G[X]) \leq \frac{kn(|X|-1)}{2} \qquad (3.3)$$

با توجه به رابطه (۱.۳) لذا داریم:

$$e(G[X]) \geq \binom{|X|}{2} - \delta\binom{N}{2}. \qquad (4.3)$$

با مقایسه کردن روابط (۳.۳) و (۴.۳) داریم:

$$\begin{aligned} e(G[X]) &\leq \frac{kn(|X|-1)}{2} \\ e(G[X]) &\geq \binom{|X|}{2} - \delta\binom{N}{2} = \frac{|X|!}{2!(|X|-2)!} - \frac{\delta N!}{2!(N-2)!} \\ &= \frac{|X|(|X|-1) - \delta(N(N-1))}{2} \leq \frac{kn(|X|-1)}{2} \end{aligned}$$

لذا می‌توان نتیجه گرفت:

$$|X| \leq \frac{kn(|X|-1) - \delta(N(N-1))}{|X|-1} = kn + \frac{\delta(N(N-1))}{|X|-1}.$$

با استفاده از فرض برهان، فرض کنید $\delta = \frac{\varepsilon}{2^{2k+4}}$ و از آنجا که $\varepsilon < 1$، به عبارتی $\varepsilon = 0$ در نظر گرفته می‌شود در این صورت عبارت زیر نتیجه می‌شود:

$$N = (1+\varepsilon)k2^kn = k2^kn \leq k2^{k+1}.$$

و $|X| > kn$ و با جایگزاری در رابطه زیر داریم:

$$\frac{\delta(N(N-۱))}{|X|-۱} \leq \frac{۲\delta N^۲}{|X|} \leq \frac{۲\delta(k۲^{k+۱}n)^۲}{kn} \leq \frac{\varepsilon kn}{۲}.$$

در نتیجه داریم:

$$|X| \leq kn + \frac{\delta(N(N-۱))}{|X|-۱} \leq kn + \frac{\varepsilon kn}{۲},$$

از طرف دیگر با توجه به رابطه (۲.۳) نتیجه می‌شود:

$$(۱+\varepsilon)kn \leq |X| \leq kn + \frac{\varepsilon kn}{۲}$$

که تناقض است. □

ملاحظه ۱.۳.۳. روش‌های از فیگاج و لوزاک و همچنین برهانی که در لم ۲.۳.۳ ارائه شد استدلال قوی‌تری از قضیه ۱.۱.۳ را مطرح می‌کند و لذا می‌توان به صورت زیر شرح داد.
برای عدد صحیح $k \geq ۴$ و $\varepsilon > ۰$ یک $\delta > ۰$ و $n_۰$ای وجود دارد بطوریکه از ویژگی زیر پیروی می‌کند. فرض کنید که $n > n_۰$ و n فرد و $N \geq (۱+\varepsilon)k۲^k n$ باشد و گراف G با مجموعه رئوس $v(G) \geq N$ و مجموعه یال‌های $e(G) \geq (۱-\delta)\binom{v(G)}{۲}$ باشد. پس در هر $k-$رنگ‌آمیزی یال‌های از G، یک دور تک‌رنگ C_n وجود دارد.

این نوع قضیه‌ها متفاوت تر از نوع دیگری از رنگ‌آمیزی گراف‌های کامل نیستند ولی در اینجا این نوع کاربردها مورد استفاده است. برای اثبات قضیه ۲.۱.۳ مورد دیگری از لم فیگاج و لوزاک (لم ۳ در [۳۰]) را در خصوص دورهای زوج ارائه می‌دهیم.

۴.۳ دورهای زوج

قبل بررسی دورهای زوج لم زیر را مطرح می‌کنیم.

لم ۱.۴.۳. عدد حقیقی $c > ۰$ در نظر بگیرید اگر برای هر $\varepsilon > ۰$ وجود دارد یک $\delta > ۰$ و یک $n_۰$ای به‌طوری‌که برای هر $n > n_۰$ زوج و هر گراف G با مجموعه رأس‌های $v(G) > (۱+\varepsilon)cn$ و مجموعه یال‌های $e(G) \geq (۱-\delta)\binom{v(G)}{۲}$ هر $k-$رنگ‌آمیزی یالی از G دارای یک مؤلفه تک‌رنگی شامل یک تطابق از $\frac{n}{۲}$ یال‌ها است در این صورت داریم $R_k(C_n) \leq (c+o(۱))n$
حال به اثبات قضیه ۲.۱.۳ می‌پردازیم.

برهان. برای یک $۰ < \varepsilon < ۱$ دلخواه، هر $k-$رنگ‌آمیزی از یک گراف G روی مجموعه رأس‌های $N > (۱+\varepsilon)nk$ با حداقل مجموعه یال‌های $(۱-\frac{\varepsilon}{۴})\binom{N}{۲}$ در نظر بگیرید و از آنجا که جایگشت‌ها

متمایز نیستند لذا یکی از رنگ‌ها دارای حداقل $\frac{1}{k}(1-\frac{\varepsilon}{3})\binom{N}{2} > \frac{1}{2}n(N-1)+1$ یال است و همچنین با توجه به قضیه ۱.۲.۳ این رنگ شامل یک دور از اندازه حداقل $n+1$ است. در نتیجه یک تطابق پوششی n رأسی در یک مؤلفه تک‌رنگ وجود دارد و از آنجا که تطابق کامل است عدد تطابق و عدد پوششی یالی با هم برابر و مقدارشان برابر $\frac{n}{2}$ است. بنابه لم ۱.۴.۳ نتیجه می‌گیریم :

$$R_k(C_n) \leq (k+o(1))n.$$

$\square$

فصل ۴

تعیین عدد رمزی دورهای بزرگ در مقایسه با چرخ‌ها

۱.۴ مقدمه

این فصل به استناد مراجع [۲۳] و [۲۲] نگارش شده است.

در این فصل به تعیین عدد رمزی دورهای بزرگ C_n (از مرتبه n) در مقایسه با چرخ‌های W_m (از مرتبه $m+۱$) که در آن m زوج و فرد است می‌پردازیم. نتایجی که در مورد دورها در مقایسه با چرخ‌ها بدست آمده است بدین شرح است: بور و اردوش [۱۸] ثابت کردند که عدد رمزی دور $C_۳$ و چرخ W_m برای $m \geq ۵$ به صورت $R(C_۳, W_m) = ۲m+۱$ است. بعدها هندری[۱] نشان داد که عدد رمزی به صورت $R(C_۵, W_۴) = ۹$ است. جایاواردن[۲] و روسین[۳] ثابت کردند عدد رمزی برای دور $C_۵$ و چرخ $W_۵$ برابر $R(C_۵, W_۵) = ۱۱$ خواهد بود. اخیراً در [۲۱] عدد رمزی دورها در مقایسه با چرخ‌های کوچک بدین صورت خواهد بود که عدد رمزی دور C_n برای $n \geq ۵$ و چرخ W_m، $m = ۴,۵$ به صورت $R(C_n, W_۴) = ۲n - ۱$ و $R(C_n, W_۵) = ۳n - ۲$ است.

[۱] Hendry
[۲] Jayawardene
[۳] Roussean

در بخش دوم این فصل به تعیین عدد رمزی دورهای بزرگ C_n در مقایسه با چرخ‌های W_m که در آن m زوج است، می‌پردازیم.

۲.۴ کران هایی برای تعیین عدد رمزی $R(C_n, W_m)$ دور C_n و چرخ W_m (m زوج)

برای دور گراف G و H هندری و چواتال[۴] [۳۲] کران پایینی را ارائه دادند که در آن عدد رمزی به صورت $R(G,H) \geq (\xi(G)-۱)(\chi(H)-۱)+۱$ است که $\xi(G)$، تعدادرأس‌های بزرگترین مؤلفه در گراف G و $\chi(H)$، عدد رنگی گراف H، است در حالت خاص اگر $G = C_n$ و $H = W_m$ برای m زوج و $n \geq \frac{۵m}{۲} - ۱$، داریم $R(C_n, W_m) \geq ۲n - ۱$. لذا برای تعیین عدد رمزی $R(C_n, W_m) = ۲n - ۱$ برای m زوج و $n \geq \frac{۵m}{۲} - ۱$ گزاره و لم‌های زیر را مطرح و برخی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

گزاره ۱.۲.۴ ([۱۴]و[۳۵]). عدد رمزی برای دور C_n و C_m به صورت

$$R(C_n, C_m) = \begin{cases} ۲n - ۱, & ۳ \leq m \leq n, (n,m) \neq (۳,۳), \ m \text{ فرد} \\ n + \frac{m}{۲} - ۱, & ۴ \leq m \leq n, (n,m) \neq (۴,۴), \ m,n \text{ زوج} \\ \max\{n + \frac{m}{۲} - ۱, ۲m - ۱\}, & ۴ \leq m \leq n, \ n \text{ فرد}, m \text{ زوج} \end{cases}$$

لم ۱.۲.۴. فرض کنید گراف G، یک گراف از مرتبه n، باشد. اگر $\delta(G) \geq \frac{n}{۲}$، باشد در این صورت یا G، همه دوری است یا n زوج است و $G \cong K_{\frac{n}{۲},\frac{n}{۲}}$.

لم ۲.۲.۴. فرض کنید گراف G، از مرتبه $n \geq ۳$، ۲ـ همبند باشد و $\delta(G) = \delta$، در این صورت طول طولانی‌ترین برابر $c(G) \geq \min\{۲\delta, n\}$ است.

لم ۳.۲.۴. برای گراف F اگر $H = C_s \subseteq F$ باشد در حالی که $F \not\supseteq C_{s+۱}$ و $\bar{F} \not\supseteq K_r$ در این صورت، $|N_H(x)| \leq r - ۲$ برای هر $x \in V(F) \setminus V(H)$ خواهد بود.

لم ۴.۲.۴. گراف F را با مرتبهٔ $|V(F)| \geq R(C_n, C_m)+۱$ در نظر بگیرید. اگر یک رأس $x \in V(F)$ وجود داشته باشد به طوریکه $|N_F[x]| \leq |V(F)| - R(C_n, C_m)$ و $F \not\supseteq C_n$، در این صورت داریم $\bar{F} \supseteq W_m$.

برهان. فرض کنید $A = V(G) \setminus N_F[x]$ و همچنین $|A| \geq R(C_n, C_m)$. اگر زیر گراف القایی F، توسط A، $F[A]$ شامل دور C_n نباشد در این صورت با توجه به تعریف عدد رمزی $R(C_n, C_m)$، زیر گراف القایی $\bar{F}[A]$، شامل یک دور C_m است بنابراین $\bar{F}$ شامل یک چرخ، W_m، با مرکز x است. □

---
[۴] Chvatal

لم ۵.۲.۴. گراف F، را با رأس‌های $2n-1$ و فاقد دور C_n در نظر بگیرید. اگر مکمل گراف F، $\bar{F}$ شامل چرخ W_m نباشد در این صورت کمترین درجهٔ F، $\delta(F) \geq n - \frac{m}{2}$ برای $m \geq 4$ و $n \geq \frac{3m}{2}$ خواهد بود.

برهان. برهان خلف، فرض کنید $\delta(F) < n - \frac{m}{2}$ برای تعدادی از $m \geq 4$ زوج و $n \geq \frac{3m}{2}$ باشد در این صورت رأسی مانند $x \in V(F)$ چنان وجود دارد به طوریکه:

$$|N_F[x]| = d_F(x) + 1 = \delta(F) + 1 \leq n - \frac{m}{2} = (2n-1) - (n + \frac{m}{2} - 1)$$

با استفاده از گزاره ۱.۲.۴ داریم:

$$|N_F[x]| \leq |V(G)| - R(C_n, C_m).$$

و با استفاده از لم ۴.۲.۴ نتیجه می‌گیریم گراف $\bar{F}$، شامل یک چرخ W_m به مرکز x است. □

حال با توجه به موارد ذکر شده برهان زیر را ارائه می‌دهیم.

برهان. گراف G، از مرتبه $2n-1$ برای m زوج و $n \geq \frac{5m}{2} - 1$ را در نظر بگیرید که شامل دور C_n، نباشد. نشان می‌دهیم گراف $\bar{G}$، شامل چرخ W_m نیست .با برهان خلف، فرض کنید گراف $\bar{G}$ شامل چرخ W_m نباشد. با توجه به لم ۵.۲.۴ کمترین درجهٔ گراف F برابر $\delta(F) \geq n - \frac{m}{2}$ است. حال به بررسی دو مورد زیر می‌پردازیم.

مورد ۱. گراف $\bar{G}$، غیردوبخشی باشد و $\delta(G) \geq n - \frac{m}{2}$، $n \geq \frac{5m}{2} - 1 \geq \frac{3m}{2}$ و چون $n \geq \frac{3m}{2} + 1$ است در نتیجه $\frac{m}{2} \leq \frac{n-1}{3}$ و داریم:

$$\delta(G) \geq n - \frac{m}{2} \geq n - \frac{(n-1)}{3} = \frac{(2n-1)+2}{3}$$

با توجه به لم ۲.۲.۲ گراف G، همه دوری ضعیف است یا دارای کمر ۳ یا ۴ است. اگر همبندی رأسی گراف G، برابر $k(G) \geq 2$ باشد در این صورت گراف G، گراف ۲ـ همبند می‌باشد با توجه به لم ۲.۲.۴ طولانی‌ترین دور در گراف G، برابر است با:

$$c(G) \geq \min\{2\delta, n\} = \min\{2(n - \frac{m}{2}), 2n-1\} = \min\{2n-m, 2n-1\} > n$$

و در نتیجه دارای دور C_n است که تناقض است. بنابراین $k(G) \leq 1$ است.

فرض کنید $k(G) = 1$ باشد در این صورت یک رأس برشی مانند $v \in V(G)$ وجود دارد به طوریکه $G - v$ ناهمبند است. فرض کنید $G_1, G_2, \ldots, G_r$ ($r \geq 2$) مؤلفه‌هایی از گراف ناهمبند $G - v$ باشند. از آنجا که کمترین درجه گراف G برابر $\delta(G) \geq n - \frac{m}{2}$ است لذا کمترین درجهٔ مؤلفه‌های گراف G برابر است با:

$$\delta(G_i) \geq n - \frac{m}{2} - 1 \tag{1.4}$$

در نتیجه مرتبهٔ هر مؤلفه G_i، برابر مقدار زیر خواهد بود:

$$|V(G_i)| \geq n - \frac{m}{۲} - ۱ \qquad (۲.۴)$$

لذا می‌توان نوشت برای $r \geq ۳$،

$$۲n - ۱ = |V(G)| = ۱ + \sum_{i=۱}^{r} |V(G_i)| \geq ۱ + ۳(n - \frac{m}{۲})$$

نتیجه می‌شود:

$$۲n - ۱ \geq ۱ + ۳(n - \frac{m}{۲}) \longrightarrow -n \geq \frac{-۳m}{۲} + ۲ \longrightarrow n \leq \frac{۳m}{۲} - ۲.$$

تناقض است چون طبق فرض $n \geq \frac{۵m}{۴} - ۱$ است. در نتیجه $r = ۲$ خواهد بود.
فرض کنید مرتبهٔ مؤلفهٔ $G_۱$، $|V(G_۱)| = p \geq n$ باشد و از طرفی داریم:

$$۲n - ۱ = ۱ + |V(G_۱)| + |V(G_۲)|$$

با توجه به رابطه (۲.۴) می‌توان نوشت:

$$p = ۲n - ۲ - |V(G)| \leq ۲n - ۲ - (n + \frac{m}{۲}) = n + \frac{m}{۲} - ۲.$$

و از آنجا که $n \geq \frac{۵m}{۴} - ۱$ در نتیجه با توجه به رابطه (۱.۴)، عبارت زیر نتیجه می‌شود:

$$\delta(G_۱) \geq n - \frac{m}{۲} - ۱ \geq \frac{p}{۲}.$$

در نتیجه لم ۱.۲.۴، برای مؤلفه $G_۱$ برقرار است. لذا اگر مؤلفه $G_۱$ همه دوری باشد در نتیجه $G_۱ \supset C_n$ به عبارتی مؤلفه $G_۱$ شامل دور C_n است که تناقض با فرض است. در غیر این صورت p زوج است و $G_۱ \cong K_{\frac{p}{۲},\frac{p}{۲}}$. از طرفی داریم $m < \frac{n}{۲} \leq \frac{p}{۲}$ و همچنین اگر A، یکی از بخش‌های مجموعه‌ی گراف کامل $K_{\frac{p}{۲},\frac{p}{۲}}$ باشد و $x \in V(G_۲)$ در این صورت هر زیر مجموعه‌ی $X \subset A$ و $|X| = m$ همراه با رأس x، به عنوان مرکز، به تولید چرخ W_m در گراف $\bar{G}$ منجر می‌شود. که تناقض با فرض است بنابراین $|V(G_۱)| \leq n - ۱$ و با استدلالی مشابه $|V(G_۲)| \leq n - ۱$ و

$$|V(G_۱)| + |V(G_۲)| = ۲n - ۲$$

نتیجه می‌شود:

$$|V(G_۱)| = |V(G_۲)| = n - ۱$$

و از آنجا که $\delta(G_i) \geq \frac{|V(G_i)|}{۲}$ برای هر $i \in \{۱,۲\}$، لذا لم ۱.۲.۴ برای دو مؤلفه $G_۱$ و $G_۲$ برقرار است. با استدلالی مشابه نتیجه می‌گیریم که گراف $\bar{G}$، شامل چرخ W_m است که تناقض است، یا هر دو مؤلفه $G_۱$ یا $G_۲$ همه دوری هستند. بنابراین مؤلفه G_i، $i \in \{۱,۲\}$ شامل دور C_n است لذا نتیجه می‌شود $G_i \supseteq C_{n-۱}$. فرض کنید

$$\varepsilon = \max\{|V(G_۱)|, |V(G_۲)|\}$$

با استفاده از لم ۳.۲.۴ گراف $\overline{G[V(G_i) \cup \{v\}]}$ شامل گراف $K_{m+۱}$ و همچنین چرخ W_m، نیست در نتیجه داریم $\varepsilon \leq m-۱$ و چون

$$۲m-۲ \geq ۲\varepsilon \geq |V(G_۱)| + |V(G_۲)| = |N_G(v)| \geq n - \frac{m}{۲} \geq (\frac{۵m}{۲} - ۱) - \frac{m}{۲} = ۲m-۱$$

که تناقض است.

فرض کنید $k(G) = ۰$ باشد در این صورت گراف G، ناهمبند است و در نتیجه گراف G، دارای دقیقاً دو مؤلفه‌ی $G_۱$ و $G_۲$ خواهد بود و چون کمترین درجه مؤلفه G_i، $i \in \{۱,۲\}$ برابر $\delta(G_i) \geq n - \frac{m}{۲}$ است داریم:

$$n - \frac{m}{۲} + ۱ \leq |V(G_i)| \leq n + (\frac{m}{۲}) - ۲.$$

با توجه به لم ۱.۲.۴ مؤلفه $G_۱$، یا همه دوری است و شامل دور C_n است به عبارتی $G_۱ \supseteq C_n$ یا $G_۱ \cong K_{\frac{p}{۲},\frac{p}{۲}}$ که $p = |V(G_۱)|$ و از طرفی چون $\frac{p}{۲} \geq \frac{n}{۲} \geq m$ است با توجه به استدلال بالا گراف $\bar{G}$ شامل چرخ W_m خواهد بود به عبارتی $\bar{G} \supseteq W_m$ که تناقض است.

مورد ۲. فرض کنید گراف G، دوبخشی باشد چون گراف G، دوبخشی است و کمترین درجه گراف G، $\delta(G) \geq n - \frac{m}{۲}$ است. در نتیجه گراف G، با زیرگراف فراگیر از $K_{j,i}$ یکریخت است برای $t \geq n - \frac{m}{۲}$ و $j \geq n - \frac{m}{۲}$ و از انجا که $E(\bar{G}) \supseteq E(K_j) \cup E(K_i)$ و $n \geq \frac{۵m}{۲} \geq \frac{۳m}{۲} + ۱ \geq m + ۱$ در نتیجه گراف $\bar{G}$، شامل گراف $K_{m+۱}$، $(m+۱)$ و همچنین چرخ W_m از مرتبه $m+۱$ خواهد بود لذا داریم $\bar{G} \supseteq W_m$. که تناقض است، لذا اثبات کامل می‌شود.

□

۳.۴ کران هایی برای تعیین عدد رمزی $R(C_n, W_m)$ دور C_n و چرخ W_m (m فرد)

همان گونه که در بخش ۲.۴، اشاره شد هندری و چواتال برای دو گراف G و H کران پایین

$$R(G,H) \geq (\chi(H) - ۱)(\xi(H) - ۱) + ۱$$

را حدس زدند که در حالت خاص اگر $G = C_n$ و $H = W_m$ باشد در این صورت برای یک دور C_n و یک چرخ W_m که m فرد و $m \geq ۵$ است و $n > \frac{۵m-۹}{۲}$، کران پایین به صورت زیر خواهد بود:

$$R(C_n, W_m) \geq ۳m - ۲$$

لذا برای تعیین مقدار عدد رمزی

$$R(C_n, W_m) = ۳m - ۲$$

برای $m \geq ۵$ فرد و $n > \frac{۵m-۹}{۲}$ با استفاده از گزاره و لم‌های بخش ۲.۴ و همچنین لم زیر می‌پردازیم.

لم ۱.۳.۴. فرض کنید F، گرافی با رأس‌های $۳m-۲$ و بدون یک دور C_n باشد و همچنین گراف $\bar{F}$، شامل چرخ W_m نباشد در این صورت $\delta(G) \geq n-۱$ برای $m \geq ۵$ و $n \geq m$ است.

برهان. برهان خلف، فرض کنید $\delta(F) < n-۱$ و $m \geq ۵$ فرد و $n \geq m$ باشد در این صورت رأسی مانند $x \in V(F)$ وجود دارد به طوریکه رابطه زیر برقرار است:

$$|N_F[x]| = d_F(x) + ۱ = \delta(F) + ۱ \leq n-۱ = (۳n-۲) - (۲n-۱)$$

با استفاده از لم ۴.۲.۴، همواره داریم:

$$|N_F[x]| = |V(F)| - R(C_n, C_m)$$

چون گراف F شامل دور C_n نیست $F \not\supseteq C_n$ در نتیجه گراف $\bar{F}$، شامل یک چرخ W_m، با مرکز x خواهد بود که تناقض است، لذا فرض خلف باطل و در نتیجه برقرار است.

□

حال با توجه به موارد ذکر شده برهان زیر را ارائه می‌دهیم.

برهان. فرض کنید گراف G، با اندازه (مرتبه) $۳n-۲$، که در آن $n > \frac{۵m-۹}{۲}$ برای $m \geq ۵$ فرد باشد و گراف G، شامل دور C_n نباشد در این صورت نشان می‌دهیم گراف $\bar{G}$، شامل چرخ W_m، نباشد با استفاده از لم ۱.۳.۴ داریم $\delta \geq n-۱$. و همچنین دو مورد زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مورد ۳. $\delta = n-۱$.

فرض کنید رأس $x \in V(G)$، به طوریکه $|N_G(x)| = \delta(G)$ و مجموعهٔ A، $A = V(G) \setminus N_G[x]$ باشد همچنین $T = G[A]$ که در آن T، زیرگراف القایی از G، توسط مجموعهٔ A است. لذا $|V(T)| = ۳m-۲-n = ۲n-۲$ می‌باشد و چون عدد رمزی برای m فرد و $m \geq ۵$ با توجه به گزاره ۱.۲.۴، رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$R(C_{n-۱}, C_m) = ۲(n-۱) - ۱ = ۲n-۳$$

از طرفی $۲n-۳ < ۲n-۲$ و گراف $\bar{G}$، شامل چرخ W_m نیست با توجه به گزاره ۱.۲.۴، زیرگراف القایی از G، T باید شامل یک دور $C_{n-۱}$ باشد.حال فرض کنید مجموعهٔ B، $B = V(C_{n-۱})$ و همچنین مجموعهٔ D، $D = A \setminus B$ باشد و لذا $|D| = ۲n-۲-(n-۱) = n-۱$ خواهد بود. همچنین زیرگراف‌های F و H را به صورت $G[B]$ و $G[D]$ از گراف G که القایی توسط مجموعه‌های A و B می باشند را در نظر بگیرید. اگر زیرگراف $\bar{T}$، شامل یک دور C_m باشد، گراف $\bar{G}$، شامل یک چرخ W_m با مرکز x خواهد بود که تناقض است و چون گراف G، شامل دور

C_n نیست و $\bar{T}$ هم شامل دور C_m نیست بنابراین گراف کامل K_m وجود ندارد در این صورت با توجه به لم ۳.۲.۴. برای هر $y \in D$ رابطه زیر برقرار است:

$$|N_B(y)| \leq m - ۲.$$

ادعا ۱.۳.۴. $H \cong K_{n-۱}$.

فرض کنید گراف H، گراف کامل نباشد در این صورت رأس‌های متمایزی مانند $d_۱, d_{\frac{m+۱}{۲}} \in D$ وجود دارد به طوریکه $d_۱, d_{\frac{m+۱}{۲}} \notin E(H)$. فرض کنید

$$J = \{d_۲, d_۳, \ldots, d_{\frac{m-۱}{۲}}\} \subseteq D \setminus \{d_۱, d_{\frac{m+۱}{۲}}\}$$

می‌توانیم رأس های دو به دو مجزای $b_i \in B$ برای $i \in \{۱, ۲, \ldots, \frac{m-۱}{۲}\}$، طوری انتخاب کنیم به طوریکه برای هر i، b_i با هیچ رأس از مجموعه‌ی $\{d_i, d_i + ۱\}$ مجاور نباشد و از آنجا که $|N_B(d_i)| + |N_B(d_i + ۱)| \leq m - ۲ + m - ۲ = ۲m - ۴$ و $n > \frac{۵m-۹}{۲}$، می‌باشد لذا برای هر $i \in \{۱, ۲, \ldots, \frac{m-۱}{۲}\}$ نتیجه می‌شود:

$$|N_B(d_i)| + |N_B(d_(i + ۱)| \leq n - ۱ - (i - ۱).$$

بنابراین در $\overline{T}$، دور C_m با رأس های $d_۱, b_۱, d_۲, b_۲, \ldots, d_{\frac{m-۱}{۲}-۱=\frac{m-۳}{۲}}, b_{\frac{m-۳}{۲}}, d_{\frac{m-۱}{۲}}, b_{\frac{m+۱}{۲}}, d_{\frac{m+۱}{۲}}$ خواهیم داشت و از طرفی چون گراف $\bar{G}$، شامل چرخ W_m، به مرکز x است به عبارتی $\bar{G} \supseteq W_n$، که تناقض است. بنابراین زیرگراف H، $H \cong K_{n-۱}$ و $C_{n-۱} \subseteq H$ است لذا با استدلالی مشابه زیرگراف F، $F \cong K_{n-۱}$ خواهد بود. حال زیرگراف $Z = G[N_G(x)]$ که القا شده توسط $N_G(x)$ است را مورد بررسی قرار می‌دهیم چون گراف G، شامل دور C_n نیست $C_n \nsubseteq G$، لذا زیرگراف Z همیلتنی نخواهد بود، بنابراین $Z \in N_G(x)$ وجود دارد به طوریکه رابطه زیر برقرار است:

$$|N_Z(z)| < \frac{|N_G(x)|}{۲} = \frac{n - ۱}{۲}.$$

در نتیجه $|N_{\bar{Z}}(z)| > \frac{n-۳}{۲}$. همچنین با استدلالی مشابه چون گراف G، شامل دور C_n نیست به عبارتی $C_n \nsubseteq G$، لذا $|N_F(z)| \leq ۱$ و $|N_H(z)| \leq ۱$ می‌باشند و بنابراین $۳ \geq |N_{\bar{Z}}(z)| > \frac{n-۳}{۲}$ خواهد بود و از طرفی چون $m \geq ۵$ و $۸ \leq \frac{۵m-۹}{۲} < n < ۹$ که تناقض است.

مورد ۴. $\delta(G) \geq n$.

برای مورد ۴ دو حالت در نظر می‌گیریم.

۱. گراف G، غیر دوبخشی است.

و از آنجا که رابطه زیر برقرار است:

$$\delta(G) \geq n = \frac{(۳n - ۲) + ۲}{۳}$$

بنابر لم ۲.۲.۲ گراف G، همه دوری ضعیف با کمر ۳ $g(G)=$ یا ۴ $g(G)=$ است. اگر همبندی رأسی گراف G، $k(G)\geq ۲$ باشد در این صورت گراف G، ۲ـ همنبد می‌باشد و با توجه به لم ۲.۲.۴ طولانی‌ترین دور در گراف G، برابر است با:

$$c(G)\geq \min\{۲n,۳n-۲\}>n$$

در نتیجه گراف G، شامل دور C_n خواهد بود که یک تناقض است. فرض کنید $k(G)=۱$. در این صورت یک رأس برشی $v\in V(G)$ وجود دارد به طوریکه $G-v$ ناهمبند است . همچنین فرض کنید $G_۱,G_۲,\dots,G_r$ مؤلفه‌هایی از $G-v$ باشد چون $\delta(G)\geq n$ در نتیجه $\delta(G_i)\geq n-۱$ و $|V(G_i)|\geq n$ برای هر $i=۱,۲,\dots,r$ خواهد بود لذا نتیجه می‌گیریم که $r=۲$ است زیرا در غیر این صورت داریم:

$$۳m-۲=|G|\geq ۳[\delta(G)+۱]\geq ۳(n+۱)=۳n+۳$$

لذا گراف $G-v$ دارای دو مؤلفه $G_۱$ و $G_۲$ است به طوریکه رابطه زیر برقرار است:

$$۱+|V(G_۱)|+|V(G_۲)|=۳n-۲$$

و

$$n\leq |V(G_۱)|\leq ۳n-۲-۱-n=۲n-۳$$

و با روش مشابه داریم:

$$n\leq |V(G_۲)|\leq ۲n-۳$$

پس برای هر

$$\delta(G_i)\geq n-۱>\frac{۲n-۳}{۲}\geq\frac{|V(G_i)|}{۲},\qquad i\in\{۱,۲\}.$$

لذا بنابه لم ۱.۲.۴، G_i همه دوری است یا r زوج و $G_i\cong K_{r,r}$. اگر $G_i\cong K_{r,r}$ باشد در این صورت برای تعدادی $i\in\{۱,۲\}$ خواهیم داشت:

$$|V(G_i)|=۲r=۲\delta(G_i)\geq ۲n-۲$$

که این غیر ممکن است چون $|V(G_i)|\leq ۲n-۳$ است. لذا $G_۱$، همه دوری است و در نتیجه شامل یک دور C_n خواهد بود که تناقض با فرض است.

فرض کنید $k(G)=۰$ باشد در این صورت گراف G، ناهمبند است و با توجه به نتایج بالا، گراف G، دقیقاً دو مؤلفهٔ $G_۱$ و $G_۲$ خواهد داشت و چون $\delta(G)\geq n$ است نتیجه می‌گیریم که $\delta(G_i)\geq n$ برای هر $i\in\{۱,۲\}$ و $n+۱\leq |V(G_i)|\leq ۲n-۳$ است. بدون از دست رفتن کلیت مساله فرض کنید $|V(G_۱)|>|V(G_۲)|$ نتیجه می‌گیریم که $|V(G_۱)|\geq\frac{۳n-۲}{۲}$ و همچنین داریم:

$$\delta(G_۱)\geq n>\frac{۲n-۳}{۲}\geq\frac{|V(G_۱)|}{۲}.$$

لذا بنابه لم ۱.۲.۴، $G_۱$ همه دوری است و در نتیجه $G_۱$ شامل دور C_n است به عبارتی $G_۱ \supseteq C_n$ که تناقض است یا $G_۱ \cong K_{\frac{p}{۲},\frac{p}{۲}}$ که $p = |V(G_۱)|$ و زوج است ازطرفی چون $\frac{p}{۲} \geq \frac{۳n-۲}{۲} > m$ است لذا، گراف $\bar{G}$، شامل چرخ W_m و به عبارتی $\bar{G} \supseteq W_n$ که تناقض با فرض است. لذا فرض خلف باطل و نتیجه برقرار است.

۲. گراف G، دوبخشی است.

چون گراف G، دوبخشی است و $\delta(G) \geq n$ نتیجه می‌گیریم که زیرگراف فراگیر $K_{j,t}$ شامل گراف G است که در آن $j \geq n$ و $t \geq n$. به عبارتی $G \subseteq K_{j,t}$ و از آنجا که مجموعه یال‌های گراف $\bar{G}$ برابر $E(\bar{G}) \supseteq E(K_j) \cup E(K_t)$ و $n > \frac{۵m-۹}{۲} > m$ است لذا گراف $\bar{G}$، شامل گراف $K_{m+۱}$ ($m+۱$ رأسی) و در نتیجه $\bar{G} \supseteq W_m$ که تناقض با فرض است. لذا فرض خلف باطل است و نتیجه برقرار است.

$\square$

و در پایان حدس زیر را مطرح می‌کنیم.

حدس ۱.۳.۴. در خصوص دور C_n و چرخ W_m عدد رمزی صورت زیر

$$R(C_n,W_m) = \begin{cases} ۲n-۱ & m \geq ۴ \text{ زوج}, n \geq m, (n,m) \neq (۴,۴) \\ ۳m-۲ & m, \text{فرد}, n \geq m \geq ۳, (n,m) \neq (۳,۳) \end{cases}$$

پیشنهاد می‌کنیم.

مراجع

[1] A. N. M. Salman and H. J. Broersma (2007). On Ramsey numbers for paths versus wheels, *Discrete Math.* 307, 975–982.

[2] F. Benevides and J. Skokan (2009). The 3-colored Ramsey number of even cycles, *J. Combin. Theory Ser.* B 99 , no. 4, 690–708.

[3] F.R.K. Chung, On triangular and cyclic Ramsey numbers with k colors, *Graphs and combinatorics* (Proc. Capital Conf., George Washington Univ., Washington, D.C., 1973), pp. 236–242, Lecture Notes in Math., Vol. 406, Springer, Berlin 1974.

[4] G. Karolyi and V. Rosta (2001). Generalized and geometric Ramsey numbers for cycles , *Theoretical Computer Science* 263 , 87–98.

[5] H. Abbott and D. Hanson,(1972). A problem of Schur and its generalizations, *Acta Arith* 20 , 175–187.

[6] H.L. Zhou (1995) . The Ramsey number of an odd cycle with respect to a wheel, *J. Math. Shuxue Zazhi(Wuhan)*, 15 , 119–120 (in Chinese).

[7] H. Wan (1997). Upper bounds for Ramsey numbers R(3, 3, ..., 3) and Schur numbers, *J. Graph Theory* 26 , 119–122.

[8] J. A. Bondy and P. Erdős (1973). Ramsey numbers for cycles in graphs , *J. Combin. Theory Ser.* B 14 , 46–54.

[9] J. A. Bondy and U. S. R. Murty (1976). *Graph theory with applications*, North Holland, New York, 290.

[10] L. Shi (2010). Ramsey numbers of long cycles versus books or wheels , *European J. Combin.* 31 , 828–838.

[11] L. Zhang,Y. Chen and T. C. Cheng (2010). The Ramsey numbers for cycles versus wheels of even order *European J. Combin.* 31 , 254–259.

[12] P. Erdös, T. Gallai (1959). On maximal paths and circuits of graphs, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 10 , 337–356.

[13] Q. Lin, Y. Li and L. Dong (2010).Ramsey goodness and generalized stars , *Europ. J. Combin.* 31 , 1228–1234.

[14] R. J. Faudree and R. H. Schelp (1974). All Ramsey numbers for cycles in graphs , *Discrete Math.* 8 , 313–329.

[15] R. J. Faudree, S. L. Lawrence, T. D. Parsons and R. H. Schelp (1974). Path-cycle Ramsey numbers , *Discrete Math.* 10 , 269–277.

[16] R. J. Faudree and R. H. Schelp (1974). All Ramsey numbers for cycles in graphs, *Discrete Math.* 8 , 313–329.

[17] S. A. Burr (1981). Ramsey numbers involving graphs with long suspended paths, *J. London Math. Soc.* 24 (2) , 405–413.

[18] S.A. Burr, P. Erdős (1983).Generalizations of a Ramsey-theoretic result of Chvátal, *J. Graph Theory*, 7 , 39–51.

[19] S. Brandt, R. Faudree, W. Goddard (1998). Weakly pancyclic graphs, *J. Graph Theory*, 27 , 141–176.

[20] S.L. Lawrence (1973). Cycle-star Ramsey numbers, *Notices Amer. Math. Soc.*, 20 , Abstract A-420.

[21] Surahmat, E. T. Baskoro and H. J. Broersma (2004). The Ramsey numbers of large cycles versus small wheels, *Integers 4*, A10.

[22] Surahmat, E. T. Baskoro and I. Tomescu (2008). The Ramsey numbers of large cycles versus odd wheels, *Graphs Combin.* 24 , 53–58.

[23] Surahmat, E. T. Baskoro and I. Tomescu,(2006). The Ramsey numbers of large cycles versus wheels , *Discrete Math.* 306 (24) , 3334–3337.

[24] S. P. Radziszowski,(2014). Small Ramsey numbers, The *Electronic Journal of Combinatorics*, DS1.14.

[25] S. P. Radziszowski and J. Xia (1994). Paths, cycles and wheels without antitriangles , Australasian *J. Combin.* 9 , 221–232.

[26] S.P. Radziszowski (2011). Small Ramsey numbers, *Electron. J. Combin.*, DS1.13.

[27] S. Yongqi, Y. Yuansheng, X. Feng, and L. Bingxi (2006). New lower bounds on the multicolor Ramsey numbers Rr(C2m) , *Graphs Combin.* 22 , no. 2, 283–288.

[28] S.Y. Sun, Y.J. Chen, On wheels versus a pentagon Ramsey numbers, *submitted for publication.*

[29] T. Luczak (1999). $R(Cn, Cn, Cn) \leq (۴ + o(۱))n$, *J. Combin. Theory Ser.* B 75 , no. 2, 174–187.

[30] T. Luczak and A. Figaj, The Ramsey number for a triple of large cycles , *arXiv:0709.0048v1 [math.CO].*

[31] T. Luczac , M. Simonovits, and J. Skokan (2010). On the Multi-coloured Ramsey Numbers of Cycles,*arXiv:1005.3926v2 [math.CO].*

[32] V. Chvátal, F. Harary (1972). Generalized Ramsey theory for graphs,III. Small off-diagonal numbers *Public J. math.* 41 , 335–345.

[33] V. Chvátal, P. Erdős (1972). A note on Hamiltonian circuits , *Discrete Math.* 2 , 111–113.

[34] V. Rosta (1973). On a Ramsey type problem of J. A. Bondy and P. Erd˝os, I, II , *J. Combin. Theory Ser. B* 15 , 94–120.

[35] V. Rosta (1973). On a Ramsey-type problem of J. A. Bondy and P. Erd˝os. I, II , *J. Combin. Theory Ser. B* 15 (1973), 94–104; ibid. 15 , 105–120.

[36] X. Xu, Z. Xie, G. Exoo, and S. Radziszowski (1973). Constructive lower bounds on classical multicolor Ramsey numbers , *Electron. J. Combin.* 11 , no. 1, $\#R۳۵$, 24pp. (electronic).

[37] Y.B. Zhang, S.P. Zhu, Y.Q. Zhang (2013). Ramsey numbers for 7-cycle versus wheels with small order, *J. Nanjing Univ. Math. Biq.*, 30, 48–55.

[38] Y. B. Zhang, Y. Q. Zhang, Y. J. Chen (2014). The Ramsey numbers of wheels versus odd cycles, *Discret. Math.* 323, 76–80 .

[39] Y. Chen, T. C. E. Cheng, C. T. Ng and Y. Zhang (2012). A theorem on cycle-wheel Ramsey number, *Discrete Math.* 312 , 1059–1061.

[40] Y. Chen, Y. Zhang and K. Zhang (2005). The Ramsey numbers of paths versus wheels, *Discrete Math.* 290 , 85–87.

[41] Y.J. Chen, T.C.E. Cheng, Z.K. Miao, C.T. Ng (2009). The Ramsey numbers for cycles versus wheels of odd order, *Appl. Math. Lett* , 22 , 1875–1876.

[42] Y.J. Chen, T.C.E. Cheng, C.T. Ng, Y.Q. Zhang (2012). A theorem on cycle-wheel Ramsey number, *Discrete Math.*, 312 , 1059–1061.

[43] Y. Kohayakawa, M. Simonovits, and J.Skokan 2005. The 3-colored Ramsey number of odd cycles , Proceedings of GRACO , pp. 397–402 (electronic), *Electron. Notes Discrete Math.*, 19, Elsevier, Amsterdam.

[44] Y. Kohayakawa, M. Simonovits, and J. Skokan, The 3-colored Ramsey number of odd cycles, *J. Combin. Theory Ser. B, to appear.*

[45] Y. Li (2009). The multi-color Ramsey number of an odd cycle , *J. Graph Theory* 62 , no. 4, 324–328.

[46] Y. Li and K. Lih (2009). Multi-color Ramsey numbers of even cycles, *European J. Combin.* 30 , no. 1, 114–118.

[47] Y. Zhang (2008). On Ramsey numbers of short paths versus large wheels, *Ars Combin.* 89 , 11–20.

[48] Y. Zhang and Y. Chen (2014). The Ramsey numbers of wheels versus odd cycles, *Discrete Math.* 323 , 76–80.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

برش رأسی	Vertex cut
برش یالی	Edge cut
پوشش مینیمم	Minimization process
چرخ	Wheel
دور	Cycle
رنگ‌آمیزی یالی	Edge coloring
عدد استقلال	Independence number
عدد رمزی	Ramsey number
عدد رنگی	Chromatic number
کمر	Girth
مجموعه تنک	Sparse set
مجموعه همسایه	Neighbour set
مؤلفه تک‌رنگ	Monochromatic component
مؤلفه دوبخشی	Bipartite component
همبندی یالی	Edge connectivity

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Bipartite component	مؤلفه دوبخشی
Chromatic number	عدد رنگی
Cycle	دور
Edge coloring	رنگ‌آمیزی یالی
Edge connectivity	همبندی یالی
Edge cut	برش یالی
Girth	کمر
Independence number	عدد استقلال
Minimization process	پوشش مینیمم
Monochromatic compoent	مؤلفه تک‌رنگ
Neighbour set	مجموعه همسایه
Ramsey number	عدد رمزی
Sparse set	مجموعه تنک
Vertex cut	برش رأسی
Wheel	چرخ

Abstract

One of the important issues in graph theory is the study of the Ramsey numbers of graphs. For two graphs G and H, the Ramsey number $R(G, H)$ is the smallest integer n, such that for any graph F of order n, either graph F contains G or its complement contains H. In this thesis we study different types of Ramsey numbers on graphs. We present results and bounds for the Ramsey number of pairs of graphs including paths, cycles, wheels and several other families of graphs.
Keywords: Ramsey number, Wheel graph, Cycle graph.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Graph and Combinatorics

On Some Ramsey Number Of Graphs

By: Fahimeh Yahyaei

Supervisors

Dr. Nader Jafari Rad
Dr. Sadegh Rahimi Sharbaf Moghdas

July 2018