

صلاة الاضلاع



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات

پایان نامه کارشناسی ارشد

بررسی رده‌ای از مسائل بهینه‌سازی سبد سرمایه در فضای عدم قطعیت

نگارنده: سحر محمدی

استاد راهنما

دکتر علیرضا ناظمی

تیر ۱۳۹۷

شماره:

تاریخ:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (3) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم سحر محمدی با شماره دانشجویی ۹۵۱۳۲۵۴ رشته ریاضی گرایش تحقیق در عملیات تحت عنوان بررسی ردهای از مسائل بهینه‌سازی سبد سرمایه در فضای عدم قطعیت که در تاریخ ۱۳۹۷/۴/۲۰ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه: خیلی خوب) مردود

نوع تحقیق: نظری عملی

امضاء	مرتبه علمی	نام و نام خانوادگی	عضو هیأت داوران
	دانشیار	دکتر علیرضا ناظمی	1- استاد راهنمای اول
		-----	2- استاد راهنمای دوم
		-----	3- استاد مشاور
	استاد یار	دکتر محمد هادی نوری اسکندری	4- نماینده تحصیلات تکمیلی
	دانشیار	دکتر جعفر فتحعلی	5- استاد ممتحن اول
	استاد یار	دکتر سید مجتبی میرلوحی	6- استاد ممتحن دوم



نام و نام خانوادگی: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می‌تواند از پایان نامه خود دفاع نماید.

مجدد نباید زودتر از 4 ماه برگزار شود.

تقدیم به پدر بزرگوار و مادر مهربانم آن دو فرشته‌ای که از خواسته‌هایشان گذشتند،
سخنی بار باره جان خریدند و خود را سپر بلای مشکلات و ناملایمات کردند تا من به جایگاهی
که اکنون در آن ایستاده‌ام برسم.

سپاس‌گزاری...

نخست خداوند بزرگ و علیم را شاگردم که به من قدرت تفکر و نوشتن داد و تلاش را در وجودم برای یافتن معالمانی هر چند کوچک از علم قرار داد.
بر خود فرض می‌دانم از استاد فریخته و دانشمند خویش، آقای دکتر ناظمی که همواره نگارنده را مورد لطف و محبت خود قرار داده‌اند، کمال تشکر و قدردانی را بجا آورم.
و نیز از خانواده خود که مراد این کاریاری نمودند کمال تشکر را بجا می‌آورم.

سحر محمدی
تیر ۱۳۹۷

تعهد نامه

اینجانب سحر محمدی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان بررسی رده‌ای از مسائل بهینه‌سازی سبد سرمایه در فضای عدم قطعیت، تحت راهنمایی علیرضا ناظمی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سحر محمدی
تیر ۱۳۹۷

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه یک روش عددی بر مبنای شبکه‌های عصبی برای حل رده‌ای از مسائل بهینه‌سازی مالی در فضای عدم قطعیت ارائه می‌دهیم. برای این کار ابتدا شرایط بهینگی را برای مسأله بهینه‌سازی مورد نظر می‌نویسیم. سپس یک مدل شبکه عصبی متناظر با آن طراحی می‌کنیم. ثابت می‌کنیم که نقطه تعادل شبکه عصبی متناظر جواب بهینه مسأله اصلی است. با ارائه یک تابع لیاپانوف مناسب، پایه‌ای و همگرایی سراسری مدل ارائه شده را اثبات می‌کنیم. سپس تعاریفی از مفاهیم مالی در ریاضی و مقدماتی از بهینه‌سازی را ارائه می‌دهیم. و فضای متغیرهای نامعین را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین یک مدل شبکه عصبی جدید برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی ارائه می‌دهیم. در انتها به حل مسأله انتخاب پرتفوی بهینه در فضای عدم قطعیت با در نظر گرفتن اندازه ریسک به‌عنوان ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک مشروط با استفاده از شبکه عصبی ارائه شده می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: پرتفوی، بهینه‌سازی، شبکه‌های عصبی، ارزش در معرض ریسک، ارزش در معرض ریسک مشروط.

فهرست مطالب

س	فهرست تصاویر
ف	فهرست جداول
۱	۱ مفاهیم
۱	۱.۱ مروری بر برخی از مفاهیم ریاضی
۳	۲.۱ مفاهیم مالی
۳	۱.۲.۱ سبد سهام
۵	۲.۲.۱ بازده
۶	۳.۲.۱ مفهوم ریسک و شاخص‌های معیار
۹	۴.۲.۱ بهینه‌سازی سبد سهام
۱۱	۲ نظریه مجموعه نامعین
۱۲	۱.۲ اندازه نامعین
۱۳	۲.۲ متغیر نامعین
۱۴	۳.۲ توزیع نامعین
۱۸	۴.۲ معکوس توزیع نامعین
۲۰	۵.۲ استقلال متغیرهای نامعین
۲۱	۶.۲ قانون عملیاتی
۲۲	۷.۲ امید ریاضی متغیر نامعین
۲۴	۸.۲ ارزش در معرض ریسک در فضای عدم قطعیت
۲۷	۹.۲ ارزش در معرض ریسک مشروط در فضای عدم قطعیت
۳۱	۳ یک مدل شبکه عصبی کارا برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی
۳۲	۱.۳ بهینه‌سازی و شبکه‌های عصبی
۳۳	۲.۳ مدل شبکه‌ی عصبی پیشنهادی
۳۵	۱.۲.۳ تحلیل پایداری
۴۰	۳.۳ مثال عددی
۴۱	۴ انتخاب پرتفوی بهینه
۴۱	۱.۴ مقدمه

۴۲	مسأله بهینه‌سازی پرتفوی	۲.۴
۴۴	مدل‌های جایگزین ۱.۲.۴	
۴۵	بهینه‌سازی پرتفوی با بازده نامعین	۳.۴
۴۶	مدل میانگین - ارزش در معرض ریسک	۴.۴
۴۶	معادله‌های قطعی ۱.۴.۴	
۵۰	مثال‌های عددی	۵.۴
۶۳	مدل میانگین - ارزش در معرض ریسک مشروط	۶.۴
۶۴	معادله‌های قطعی ۱.۶.۴	
۶۸	مثال‌های عددی	۷.۴
۸۳			مراجع

فهرست تصاویر

۱۳	یک متغیر نامعین	۱.۲
۱۴	یک توزیع نامعین	۲.۲
۱۵	توزیع نامعین خطی	۳.۲
۱۵	توزیع نامعین زیگزاگ	۴.۲
۱۶	توزیع نامعین دوزنقه‌ای	۵.۲
۱۶	توزیع نامعین نرمال	۶.۲
۱۷	توزیع نامعین لگ‌نرمال	۷.۲
۱۸	معکوس توزیع نامعین خطی	۸.۲
۱۹	معکوس توزیع نامعین زیگزاگ	۹.۲
۱۹	معکوس توزیع نامعین دوزنقه‌ای	۱۰.۲
۲۰	معکوس توزیع نامعین نرمال	۱۱.۲
۲۰	معکوس توزیع نامعین لگ‌نرمال	۱۲.۲
۲۳	نمودار تابع توزیع متغیر نامعین	۱۳.۲
۴۰	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۱۶.۳)	۱.۳
۵۱	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۱۶.۴)	۱.۴
۵۲	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۱۷.۴)	۲.۴
۵۴	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۱۸.۴)	۳.۴
۵۵	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۲۰.۴)	۴.۴
۵۶	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۱۹.۴)	۵.۴
۵۶	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۲۱.۴)	۶.۴
۵۸	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۲۲.۴)	۷.۴
۵۹	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۲۴.۴)	۸.۴
۶۰	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۲۳.۴)	۹.۴
۶۰	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۲۵.۴)	۱۰.۴
۶۲	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۲۶.۴)	۱۱.۴
۶۳	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۲۷.۴)	۱۲.۴
۷۰	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۴۲.۴)	۱۳.۴
۷۱	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۴۳.۴)	۱۴.۴
۷۳	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۴۴.۴)	۱۵.۴

۷۴	...	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۴۶.۴)	۱۶.۴
۷۵	...	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۴۵.۴)	۱۷.۴
۷۵	...	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۴۷.۴)	۱۸.۴
۷۷	...	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۴۸.۴)	۱۹.۴
۷۸	...	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۵۰.۴)	۲۰.۴
۷۹	...	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۴۹.۴)	۲۱.۴
۷۹	...	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۵۱.۴)	۲۲.۴
۸۱	...	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۵۲.۴)	۲۳.۴
۸۲	...	نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۵۳.۴)	۲۴.۴

فهرست جداول

۵۰ بازده‌های نامعین خطی از سهام‌های مختلف	۱.۴
۵۲ بازده‌های نامعین زیگزاگ از سهام‌های مختلف	۲.۴
۵۷ بازده‌های نامعین دوزنقه‌ای از سهام‌های مختلف	۳.۴
۶۱ بازده‌های نامعین گاوسی از سهام‌های مختلف	۴.۴
۶۹ بازده‌های نامعین خطی از سهام‌های مختلف	۵.۴
۷۱ بازده‌های نامعین زیگزاگ از سهام‌های مختلف	۶.۴
۷۶ بازده‌های نامعین دوزنقه‌ای از سهام‌های مختلف	۷.۴
۸۰ بازده‌های نامعین گاوسی از سهام‌های مختلف	۸.۴

فصل ۱

مفاهیم

در این فصل برای درک و فهم بهتر پایان نامه، مختصراً به بیان برخی مفاهیم و اصطلاحات در زمینه ریاضیات و مالی می پردازیم.

۱.۱ مروری بر برخی از مفاهیم ریاضی

تعریف ۱.۱.۱. در نظریه احتمالات، امید ریاضی^۱، میانگین، مقدار مورد انتظار یا ارزش مورد انتظار یک متغیر تصادفی گسسته برابر است با مجموع حاصل ضرب احتمال وقوع هر یک از حالات ممکن در مقدار آن حالت.

امید ریاضی یک متغیر تصادفی پیوسته به صورت زیر تعریف می شود:

$$E(X) = \int x f_X(x) dx,$$

که در آن $f_X(x)$ ، تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X است. برای متغیرهای تصادفی گسسته تعریف بالا به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_X(x_i).$$

که در آن $p_X(x_i)$ تابع احتمال است.

^۱Expected Value

- امید ریاضی یک عدد ثابت برابر با همان عدد ثابت است، یعنی اگر c عددی ثابت باشد، آن گاه $E(c) = c$.
- اگر برای دو متغیر تصادفی X و Y داشته باشیم $X \leq Y$ ، آن گاه با احتمال قریب به یقین داریم: $E(X) \leq E(Y)$.
- عملگر امید ریاضی خطی است یعنی برای هر دو متغیر تصادفی X و Y و هر عدد حقیقی a و b داریم:

$$E(aX + b) = aE(X) + b, \quad (1.1)$$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

تعریف ۲.۱.۱. در آمار و احتمال، **گشتاور**^۲ معیاری کمی برای توصیف شکل یک توزیع احتمال است. گشتاور اول همان میانگین است. برای گشتاورهای مراتب بالاتر معمولاً گشتاور را حول میانگین حساب می کنند و آن را گشتاور مرکزی می نامند. k -امین گشتاور مرکزی متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mu_k = E[(X - \mu)^k].$$

فرض کنید $\mu = E(X)$ ، امید ریاضی (میانگین) متغیر تصادفی X باشد.

تعریف ۳.۱.۱. در نظریه احتمالات و آمار، **واریانس**^۳ نوعی سنجش پراکندگی است. و آن عددی است که نشان می دهد چگونه یک سری داده حول مقدار میانگین پخش می شوند. واریانس X به صورت زیر تعریف می شود:

$$V(X) = E[(X - \mu)^2].$$

- اگر X یک متغیر تصادفی باشد، برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

$$V[aX + b] = E[((aX + b) - (aE(X) + b))^2] = a^2 E[(X - E(X))^2] = a^2 V[X].$$

- اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند، برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

$$V[aX + bY] = a^2 V[X] + b^2 V[Y] + 2abCov(X, Y),$$

که در آن، $Cov(X, Y)$ اندازه تغییرات هماهنگ دو متغیر تصادفی است.

تعریف ۴.۱.۱. **نقطه تعادل**^۴ [۳۵]. جواب سیستم دینامیکی (۲.۱) را نقطه تعادل، نقطه‌ی ساکن یا نقطه‌ی بحرانی می نامیم و با x^e نشان می دهیم، هرگاه $f(x^e) = 0$.

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)) \quad (2.1)$$

^۲Moment

^۳Variance

^۴equilibrium

تعریف ۵.۱.۱ [۳۵] یک تابع لیپانف یا تابع انرژی تابعی مانند $E(x(t))$ است که در شرایط زیر صدق کند:

- (۱) $E(x(t))$ و مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول آن همگی پیوسته باشند، به عبارتی $E(x(t)) \in C^1$.
- (۲) $E(x(t)) \geq 0$ به ویژه در همسایگی باز نقطه‌ی ساکن x^e ، $E(x(t)) > 0$ و $E(x^e) = 0$.
- (۳) مشتق تابع $E(x(t))$ نسبت به زمان منفی است، به عبارتی:

$$\frac{dE(x^e)}{dt} = [\nabla_{x(t)} E(x(t))]^T \cdot \dot{x}(t) = [\nabla_{x(t)} E(x(t))]^T \cdot f(x(t)) < 0, x \in \Omega - \{x^e\}$$

و در نقطه‌ی ساکن x^e داریم $\frac{dE(x^e)}{dt} = 0$.

۲.۱ مفاهیم مالی

سرمایه‌گذاری ^۵ به معنی گذاشتن پول در چیزی با انتظار سود از آن است. به‌طور دقیق سرمایه‌گذاری تعهد پول یا سرمایه برای خرید مالی و سائل یا دارایی‌های دیگر، به‌منظور منفعت برگشت‌های سودمند و مفید در قالب بهره، سود سهام یا قدردانی از ارزش و سائل (منافع سرمایه) است. به‌عبارت دیگر سرمایه‌گذاری یعنی به تعویق انداختن مصرف فعلی برای دست‌یابی به امکان مصرف بیشتر در آینده است.

در سرمایه‌گذاری دو ویژگی متفاوت و مهم وجود دارد که عبارتند از زمان و ریسک. اهمیت دو موضوع یاد شده به این علت است که در سرمایه‌گذاری صرف پول در زمان حال صورت می‌گیرد و مقدار آن معین است، در حالی که پاداش حاصل از آن در آینده به‌دست می‌آید و معمولاً با عدم اطمینان همراه است. در بعضی مواقع، ویژگی زمان غالب می‌شود (مانند اوراق قرضه دولتی) و در بعضی مواقع ریسک از نظر اهمیت مقدم است (مانند برگه اختیار خرید سهام عادی) و در مواقع دیگر هر دو دارای اهمیت هستند (مانند سهام عادی).

۱.۲.۱ سبد سهام

تعریف ۱.۲.۱ **سبد سهام** یا **پرتفوی** ^۶ ترکیبی مناسب از سهام یا سایر دارایی‌ها است، که یک سرمایه‌گذار آن‌ها را خریداری کرده است. هدف از تشکیل سبد سهام، تقسیم کردن ریسک سرمایه‌گذاری بین چند سهم است؛ بدین ترتیب، سود یک سهم می‌تواند ضرر سهام دیگر را جبران کند. یک ضرب‌المثل معروف می‌گوید: «همه تخم‌مرغ‌ها را در یک سبد نگذارید.»، چرا که ریسک شکستن سبد، باعث نابودی همه تخم‌مرغ‌ها خواهد شد.

تعریف ۲.۲.۱ **دارایی** ^۷ عبارت است از کلیه اموال و حقوقی که دارای ارزش پولی هستند. به منابعی که دارای ارزش اقتصادی هستند و افراد، شرکت‌ها یا دولت‌ها مالکیت آن را در اختیار می‌گیرند و انتظار دارند آن منابع در آینده منافی را برای آن‌ها ایجاد کنند، دارایی گفته می‌شود.

دو نوع دارایی داریم:

^۵ Investment

^۶ Portfolio

^۷ Asset

۱. **دارایی ریسکی**^۸: به دارایی گویند که در مورد بازده آن اطمینان نداریم. این عدم اطمینان را به وسیله واریانس (انحراف معیار و ...) بازدهی‌های مورد انتظار نشان می‌دهیم. مانند سهام، اوراق قرضه غیر دولتی، ارز و طلا و ...

۲. **دارایی بدون ریسک**^۹: دارایی که دارای یک بازدهی آتی است و بازده آن به حدی امن است که بسیار نزدیک به نرخ بهره فعلی است.

تعریف ۳.۲.۱. تخصیص دارایی^{۱۰} فرآیندی که در آن تقسیم منابعی مالی انجام می‌گیرد.

تعریف ۴.۲.۱. افق سرمایه‌گذاری^{۱۱} چارچوب زمانی و عامل کلیدی برای اتخاذ استراتژی سرمایه‌گذاری به حساب می‌آید. میزان زمانی که باید پس‌انداز و سرمایه‌گذاری کرد را مشخص می‌کند و بر تصمیمات تخصیص دارایی موثر است.

تعریف ۵.۲.۱. هزینه معامله^{۱۲} آن دسته از هزینه‌هایی است که افراد در فرآیند مبادله اقتصادی متحمل می‌شوند تا حقوق مالکیت خود را مشخص، تعریف و تضمین کنند. مانند هزینه‌های کسب اطلاعات درباره‌ی فروشنده، خریدار و کیفیت کالا یا خدمتی که مبادله می‌شود، هزینه‌های عقد قرارداد و نظارت بر عملکرد طرف مقابل و از همه مهم‌تر هزینه‌های مربوط به تعریف حقوق مالکیت و تضمین اعمال این حقوق می‌باشد.

در مسأله‌ی سبد سهام تک دوره‌ای، فرض می‌شود که سرمایه‌گذار تصمیم به تخصیص دارایی‌ها برای یک بار و برای n دارایی موجود، در ابتدای دوره‌ی موردنظر می‌گیرد. تصمیم‌گیری فقط یک بار انجام می‌شود و اجازه‌ی بازنگری تا انتهای دوره وجود ندارد و اثر تصمیمات بر دوره‌های بعدی مورد توجه قرار نمی‌گیرد.

مسائل تک دوره‌ای بر پایه سه فرض محدودکننده بنا شده‌اند:

- افق سرمایه‌گذاری کوتاه مدت است.
- هزینه معاملات در بازار در نظر گرفته نشده است.
- پارامترهای مسأله به صورت قطعی و از قبل معلوم هستند.

در حالی که مسائل سبد سهام چند دوره‌ای^{۱۳} کلی‌تر هستند به طوری که سرمایه‌گذار یک رشته تصمیم‌گیری انجام می‌دهد که هر تصمیم بر روی تصمیمات بعدی اثرگذار است. هدف پیدا کردن تصمیم‌گیری برای تخصیص در هر دوره با در نظر گرفتن یک مجموعه از فرصت‌های تغییر در آینده افق سرمایه‌گذاری باقی‌مانده، هزینه‌های معاملات نهایی و دیگر محدودیت‌ها است.

^۸Risky Asset

^۹Riskless Asset

^{۱۰}Asset Allocation

^{۱۱}Investment horizon

^{۱۲}Transaction Cost

^{۱۳}Multi-period portfolio

تعریف ۶.۲.۱. تعداد مشخصی از اوراق بهادار که حجم سفارش وارده به سامانه‌ی معاملاتی آن باید مضرب صحیحی از آن باشد را **lot** گویند.

برای معامله در بورس باید مقدار حداقل و استاندارد از تعداد واحدهای مورد معامله مورد مبادله قرار گیرد که به این مقدار استاندارد یک **lot** گفته می‌شود. از نظر سهام، تعداد سهامی که در یک معامله خریداری می‌شود. در بازارهای مالی، **lot** نشان‌دهنده مقادیر استاندارد یک ابزار مالی است به نحوی که سازمان مقررات تنظیم کرده است. مفهوم **lot** به بازارهای مالی برای استاندارد کردن قیمت مجوز می‌دهد.

تعریف ۷.۲.۱. **سبد خودتامین**^{۱۴}، سبد مالی است که در آن سرمایه‌گذاری‌ها فقط به خرید سهام و درآمدهای ناشی از فروش سهام منحصر باشد.

۲.۲.۱ بازده

معمولاً افراد مصرف کنونی را به مصرف در آینده ترجیح می‌دهند. بنابراین برای تشویق افراد در به تعویق انداختن مصرف فعلی می‌بایستی انتظار کسب پاداش از سرمایه‌گذاری را برای آنان ایجاد کرد. در واقع انتظار کسب بازده یا پاداش سرمایه‌گذاری موجب می‌شود تا سرمایه‌گذاران مصرف در آینده را به مصرف فعلی ترجیح دهند.

به بهره ناشی از سرمایه‌گذاری **بازده**^{۱۵} گفته می‌شود. این تعریف به بهره یا سود سهام دریافتی از اوراق بهادار اشاره دارد و معمولاً به صورت سالانه و به عنوان درصدی از هزینه سرمایه‌گذاری، ارزش بازاری جاری یا ارزش اسمی آن بیان می‌شود.

تعریف ۸.۲.۱. **نرخ بهره**^{۱۶} عبارت است از نرخ که بابت جلوگیری از کاهش ارزش پول پرداختی در امروز و دریافتی در آینده (به دلیل ارزش زمانی) از وام‌گیرنده دریافت می‌شود.

بازده مورد انتظار هر سهم

با معلوم بودن توزیع احتمال برای بازده سهام، بازده مورد انتظار برای سهام i ام با $E(R_i)$ نشان داده شده و به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E(R_i) = \sum_{k=1}^m (p_k) PR_k,$$

که در آن، PR_k بازده سهم i ام و p_k احتمال وقوع آن است.

بازده مورد انتظار سبد سرمایه

در صورتی که سبد سرمایه با N دارایی داشته باشیم که وزن دارایی i ام در آن x_i باشد، بازده مورد انتظار سبد سرمایه با $E(R_p)$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

^{۱۴} Self-financing

^{۱۵} Returns

^{۱۶} Interest Rate

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^N x_i E(R_i). \quad (3.1)$$

۳.۲.۱ مفهوم ریسک و شاخص‌های معیار

زیان بالقوه و قابل اندازه‌گیری یک نوع سرمایه‌گذاری را **ریسک**^{۱۷} می‌گویند. ریسک در بازارهای مالی مفهوم کلیدی است، از این رو می‌بایست آن را شناخت، اندازه‌گیری کرد و برای حذف ریسک‌های غیرضروری برنامه‌ریزی و ریسک‌های همراه با فرصت را مدیریت نمود.

ریسک پدیده‌ای مربوط به آینده است که نمی‌توان آن را به‌طور دقیق پیش‌بینی کرد زیرا با عدم اطمینان همراه است. هرچه عدم اطمینان^{۱۸} بیشتر باشد، ریسک نیز بیشتر خواهد بود. در بازارهای مالی به‌همراه هر فرصتی ریسکی هم وجود دارد و اصولاً نمی‌توان از همه ریسک‌ها چشم‌پوشی کرد زیرا کلیه فرصت‌ها از بین می‌روند.

در گام نخست هر سرمایه‌گذاری می‌داند که برای کسب بازدهی بیشتر می‌بایست سطح ریسک‌پذیری خود را افزایش دهد.

ریسک در یک طبقه‌بندی کلی، به دو دسته تقسیم می‌شود:

۱. ریسک سیستماتیک

۲. ریسک غیر سیستماتیک

ریسک سیستماتیک، ریسکی است که از عوامل بازار ناشی شده و بر یک سرمایه‌گذاری (مثلاً قیمت سهام شرکت‌ها) تأثیر دارد و مدیریت آن از دست مدیران شرکت‌ها خارج است اما **ریسک غیر سیستماتیک**، به ریسکی گفته می‌شود که ناشی از عوامل کلان حاکم بر یک بازار نیست و به ساختار یک شرکت یا بنگاه اقتصادی مربوط می‌شود. برای مثال ساختار سرمایه شرکت، نوع محصول (کالا یا خدمات)، تصمیم‌گیری در شرایط مختلف و از مهم‌ترین عوامل مؤثر در انتخاب گزینه‌های سرمایه‌گذاری، میزان پذیرش ریسک سرمایه‌گذار است. به‌طور کلی می‌توان سرمایه‌گذاران را به دو گروه **ریسک‌پذیر**^{۱۹} و **ریسک‌گریز**^{۲۰} تقسیم کرد.

سرمایه‌گذار ریسک‌پذیر، سرمایه‌گذاری است که مقدار بازده معینی را انتظار دارد و هدفش کمینه‌کردن^{۲۱} ریسک است و ریسک‌گریز کسی است که با هدف بیشترین بازده، برای یک سطح مشخص از ریسک سرمایه‌گذاری می‌کند.

مهمترین مسأله در ریسک، محاسبه میزان آن است. تاکنون معیارهای مختلفی برای تعیین

^{۱۷}Risk

^{۱۸}Unreliability

^{۱۹}Risk Taker

^{۲۰}Risk Avers

^{۲۱}Minimum

ریسک معرفی شده است.

در سال ۱۹۵۲، هری مارکوویتز با ارائه مدلی کمی به اندازه‌گیری ریسک پرداخت و با معرفی مدلی مبتنی بر ریسک و بازده و ارائه مجموعه کارا^{۲۲} برای اولین بار ریسک را در کنار بازده به‌عنوان متغیری دیگر جهت انتخاب دارایی برای سرمایه‌گذاری قرار داد. وی انحراف معیار را به‌عنوان شاخص پراکندگی، معیار عددی ریسک خواند. شاگرد او ویلیام شارپ^{۲۳}، شاخص بتا (ضریب حساسیت) را برای تغییرات نسبی ارزش یک سهم در قبال تغییر ارزش بازار ارائه کرد و با معرفی مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای، مدیریت علمی سبد سرمایه را پایه‌گذاری کرد. مک کالی^{۲۴} معیار بتا را به‌عنوان ملاک اندازه‌گیری ریسک اوراق بهادار با درآمد ثابت معرفی کرد، در ادامه‌ی کار، مک کالی معیار تحذب را به‌عنوان شاخصی دقیق‌تر معرفی کرد. در سال ۱۹۹۶ وترستون^{۲۵} مدیر موسسه‌ی مورگان^{۲۶} مدل ارزش در معرض ریسک^{۲۷} را معرفی کرد. در نهایت در سال ۱۹۹۸ دلبان^{۲۸} ریسک منسجم^{۲۹} را به‌عنوان معیار ریسک در نظر گرفت.

می‌توان طبقه‌بندی زیر را در مورد معیارهای اندازه‌گیری ریسک ارائه داد:

۱. حساسیت: تغییر یک متغیر وابسته بر اثر تغییر یک متغیر مستقل، مثل تغییرات قیمت در قبال تغییر یک واحد نرخ سود (تحذب و بتا).
۲. نوسان: عبارت است از نوسان یک متغیر در اطراف میانگین و یا یک پارامتر تصادفی دیگر مثل (واریانس و انحراف معیار).
۳. معیارهای ریسک نامطلوب: این معیارها که برعکس معیارهای نوسان، تنها بر بخش مخرب ریسک تمرکز دارند، در حقیقت نوسانات زیر سطح میانگین و یا متغیر هدف را مورد محاسبه قرار می‌دهند (نیم واریانس، نیم انحراف معیار و ارزش در معرض ریسک).
۴. ریسک منسجم: که به‌صورت یک اصل موضوع می‌باشد مانند (ارزش در معرض ریسک مشروط^{۳۰}).

تعریف ۹.۲.۱. نیم واریانس^{۳۱} شاخصی است که در آن تنها انحرافات نامطلوب بازده مورد توجه قرار می‌گیرد. به‌عبارت دیگر اگر ریسک را میزان ضرر تعریف کنیم، آن‌گاه تغییرات مطلوب (افزایش نرخ بازدهی دارایی مالی) به‌عنوان ریسک محسوب نمی‌شود و فقط آن دسته از مشاهداتی که کمتر از میانگین نرخ بازدهی هستند، به‌عنوان ریسک به‌حساب می‌آید. فرمول

^{۲۲} Efficient Frontier Line

^{۲۳} William Sharpe

^{۲۴} McCauley

^{۲۵} Weterstone

^{۲۶} J. P. Morgan

^{۲۷} Value at Risk

^{۲۸} Delbaen

^{۲۹} Coherent Risk

^{۳۰} Conditional Value at Risk

^{۳۱} Semivariance

محاسبه نیم واریانس به صورت زیر است:

$$SV = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \{\max(0, E(r_i) - r_T)\}^2,$$

که در آن، r_T بازدهی دارایی در طول دوره، K تعداد مشاهدات و E امید ریاضی نرخ بازدهی است.

تعریف ۱۰.۲.۱. ارزش در معرض ریسک یک روش آماری است که برای اندازه‌گیری و تعیین میزان ریسک مالی در یک شرکت و یا پرتفوی سرمایه‌گذاری در یک دوره زمانی مشخص، استفاده می‌شود.

اعتقاد عمومی در مفاهیم مالی بر این موضوع اشاره دارد که ارزش در معرض ریسک (VaR) رویکردی جدید برای اداره و کنترل ریسک است. به‌طور کلی می‌توان گفت ارزش در معرض ریسک بیشترین مقدار زیان مورد انتظار را در یک افق زمانی (یک روز، یک هفته، یک ماه، ...) مشخص در سطح اطمینانی معین اندازه‌گیری می‌نماید. از مزایای مهم این ابزار، خلاصه‌سازی ریسک در یک عدد واحد است.

ارزش در معرض ریسک به دلیل عدم تبعیت از خاصیت تحدب یا زیر جمع‌پذیری و نبود هیچ پروتکل استاندارد برای آماره‌های استفاده شده در تعیین دارایی سبد سهام یا ریسک شرکت‌های بزرگ، همواره مورد انتقاد محققان بوده است، اما هنوز به‌عنوان سنجه ریسک قابل قبول مطرح است. در مقابل ارزش در معرض ریسک مشروط سنجه‌ای است که از ویژگی انسجام برخوردار بوده و محدب است، بنابراین اندازه ریسک بهتری نسبت به ارزش در معرض ریسک است.

تعریف ۱۱.۲.۱. ارزش در معرض ریسک مشروط (CVaR)، یک روش ارزیابی ریسک است که اغلب برای کاهش احتمال اینکه یک سبد سهام، متحمل ضررهای بزرگ خواهد شد استفاده شده است و زیان مورد انتظار را هنگامی که زیان بیشتر از VaR تعیین شده، اندازه‌گیری می‌کند؛ به عبارت دیگر این معیار چنین بیان می‌کند که در حالت‌های خیلی بد چه انتظاراتی داشته باشیم.

درجه تنوع

تنوع^{۳۲}، یک تکنیک مدیریت ریسک، آمیزه‌ای از سرمایه‌گذاری‌های مختلف در یک سبد سهام است.

منطق پشت این تکنیک معتقد است که یک سبد سهام ساخته شده از انواع مختلف سرمایه‌گذاری، به‌طور متوسط بازده بالاتر و ریسک پایین‌تری نسبت به هر سرمایه‌گذاری تکی دارد. تنوع تلاش می‌کند که حوادث ریسک غیر سیستماتیک در یک سبد سهام را کنترل کند به نحوی که عملکرد مثبت برخی از سرمایه‌گذاری‌ها را با عملکرد منفی سرمایه‌گذاران دیگر خنثی کند.

^{۳۲}Diversification

۴.۲.۱ بهینه‌سازی سبد سهام

بهینه‌سازی سبد سهام^{۳۳} عبارت است از تعیین نسبت سرمایه‌گذاری در دارایی‌هایی که قرار است در سبد نگه‌داری شود؛ به شکلی که سبد انتخابی بهتر از هر سبد دیگری باشد. این بهتر بودن براساس معیارهایی مشخص می‌شود. معیارهایی که به صورت مستقیم یا غیرمستقیم ترکیبی از ملاحظات بازده مورد انتظار سبد، پراکندگی بازده‌ها و سایر پارامترهای ریسک مالی است. به عبارت دیگر سبد سهام بهینه، سبدي است که موجب بیشترین بازدهی و کمترین زیان شود. در بسیاری از رویکردهای بهینه‌سازی، این کار به صورت یک دوره‌ای انجام می‌گیرد اما از آنجا که سرمایه‌گذاری مفهومی بلندمدت و آینده‌نگر است، یک دوره‌ای در نظر گرفتن بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با این مفهوم همخوانی نخواهد داشت. سرمایه‌گذار به دنبال بهینه‌کردن تخصیص دارایی در هر دوره‌ی زمانی است به گونه‌ای که امید مطلوبیت ثروت در آخرین دوره‌ی زمانی بیشینه شود. در موضوعات مالی، انتخاب سبد سهام به منظور حداکثرسازی سود یکی از اصلی‌ترین دغدغه‌های سرمایه‌گذاران در بازارهای مالی است. مسأله‌ی بهینه‌سازی مارکوویتز^{۳۴} و تعیین مرز کارا، زمانی توسط مدل‌های ریاضی قابل حل است که تعداد دارایی‌های سرمایه‌گذاری و محدودیت‌های موجود در بازار اندک است اما هنگامی که شرایط و محدودیت‌های دنیای واقعی در نظر گرفته شود، مسأله‌ی بهینه‌سازی پرتفوی به راحتی با استفاده از شیوه‌های ریاضی قابل حل نیست.

^{۳۳} Optimization Portfolio

^{۳۴} Markowitz

فصل ۲

نظریه مجموعه نامعین

درجه اعتقاد^۱ برای همه ما آشناست. پیشامد نمونه‌ای از اعتقاد است، برای مثال، خورشید فردا طلوع خواهد کرد، هفته آینده آفتابی خواهد بود، آن شخص مردی جوان است، نمونه‌هایی از اعتقاد است. یک درجه اعتقاد بیانگر شدت اعتقاد ما به وقوع یک پیشامد است. اگر کاملاً معتقد باشیم یک پیشامد اتفاق خواهد افتاد آن گاه درجه اعتقاد ما ۱ است (اعتقاد کامل) [۱]. در خصوص پیشامد، درجه اعتقاد بسیار بستگی به دانش شخصی (حتی شامل اولویت) ما دارد. هنگامی که دانش شخصی تغییر کند درجه اعتقاد نیز تغییر می‌کند. شاید بعضی‌ها تصور کنند که درجه اعتقاد باید به وسیله احتمال غیرعینی یا نظریه مجموعه فازی مدل‌سازی شود. این تصور معمولاً نامناسب است زیرا ممکن است در این مورد هر دو آن‌ها منجر به نتایج غیر شهودی شوند.

برای بررسی منطقی درجات اعتقاد شخصی، لیو [۲۲] در سال ۲۰۰۷ اندازه نامعین^۲ را پیشنهاد داد و نظریه عدم قطعیت^۳ را معرفی کرد و پس از آن توسط پژوهشگران بسیاری مورد مطالعه قرار گرفت. با نگاهی به زندگی روزمره‌ی بشر، می‌توان دریافت که زندگی سراسر عدم قطعیت است. اکثر مردم آموخته‌اند، که برای اتخاذ تصمیمات بزرگ و کوچکی که در طی حیات آنان رخ می‌دهد، با عدم قطعیت موجود، دست به گریبان شده و از میان گزینه‌های پیش رویشان دست به انتخاب بهترین گزینه بزنند. آنچه در اغلب موارد، تصمیمات بشر را دچار اشتباه می‌نماید، نبود اطلاعات کافی و در نتیجه بروز عدم قطعیت در مسائل می‌باشد. عدم قطعیت به‌عنوان یک مفهوم عمومی اصطلاحی است که عدم اطمینان انسان را در مورد

^۱ Belief Degree

^۲ Uncertain Measure

^۳ Uncertain Theory

برخی اشخاص یا اشیا منعکس می‌نماید. در این فصل برخی مفاهیم پایه و قضایایی در نظریه عدم قطعیت را بازگو می‌کنیم. مطالب این فصل برگرفته از مرجع [۲۴] است.

تعریف ۱.۰.۲. فرض کنید Γ مجموعه‌ای ناتهی باشد. یک جبر از مجموعه‌ها روی Γ ، گردایه‌ای ناتهی چون \mathcal{L} از زیر مجموعه‌های Γ است که تحت اجتماع‌های متناهی و متمم‌گیری بسته باشد. به عبارت دیگر، اگر $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n \in \mathcal{L}$ ، آن‌گاه $\bigcup_{i=1}^n \Lambda_i \in \mathcal{L}$ و اگر $\Lambda \in \mathcal{L}$ ، آن‌گاه $\Lambda^c \in \mathcal{L}$. یک σ -جبر، جبری است که تحت اجتماع‌های شمارش‌پذیر بسته باشد. چنانچه Γ یک فضای متری یا به‌طور کلی یک فضای توپولوژیک باشد، σ -جبر تولید شده به‌وسیله خانواده مجموعه‌های باز واقع در Γ ، σ -جبر بورل^۴ روی Γ نامیده می‌شود و آن را با B نشان می‌دهیم. اعضای σ -جبر بورل را مجموعه‌های بورل می‌نامیم. بنابراین B شامل مجموعه‌های باز، مجموعه‌های بسته، اشتراک‌های شمارش‌پذیر از مجموعه‌های باز، اجتماع‌های شمارش‌پذیر از مجموعه‌های بسته و غیره است.

۱.۲ اندازه نامعین

فرض کنید (Γ, \mathcal{L}) یک فضای اندازه‌پذیر باشد. هر عنصر Λ در \mathcal{L} یک مجموعه اندازه‌پذیر نامیده می‌شود. هر مجموعه اندازه‌پذیر یک پیشامد در نظریه عدم قطعیت است. M یک اندازه نامعین روی σ -جبر \mathcal{L} تعریف می‌شود. بنابراین عدد $M\{\Lambda\}$ به صورت یک تابع مجموعه‌ای به هر پیشامد Λ به‌منظور نشان دادن درجه اعتقاد برای اندازه‌گیری اعتقاد ما به وقوع پیشامد Λ اختصاص داده می‌شود. اندازه نامعین M باید خواص ریاضی معینی داشته باشد. به‌منظور ارتباط منطقی با درجه اعتقاد، لئو سه اصل موضوعه زیر را در نظریه عدم قطعیت مطرح کرد

۱. نرمال بودن؛

$$M\{\Gamma\} = 1.$$

۲. خود دوگانگی،^۵ برای هر پیشامد Λ ؛

$$M\{\Lambda\} + M\{\Lambda^c\} = 1.$$

۳. زیر افزایشی شمارا؛^۶ برای هر دنباله شمارش‌پذیر از پیشامدهای Λ

$$M\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} \Lambda_i\right\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} M\{\Lambda_i\}.$$

لیو [۲۳] اندازه نامعین حاصل‌ضربی و اصل حاصل‌ضربی را تعریف کرد.

^۴Borel

^۵Duality

^۶Subadditivity

تعریف ۱.۱.۲. (اصل حاصل ضربی) فرض کنید $(\Gamma_k, \mathcal{L}_k, \mathcal{M}_k)$ یک فضای نامعین به ازای $k = 1, 2, \dots, n$ باشد. می نویسیم:

$$\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \dots \times \Gamma_n, \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2 \times \dots \times \mathcal{L}_n,$$

آن گاه اندازه نامعین حاصل ضربی روی Γ به ازای هر $\Lambda \in \mathcal{L}$ به صورت زیر است:

$$\mathcal{M}\{\Lambda\} = \begin{cases} \sup_{\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \dots \times \Lambda_n \subset \Lambda} \min_{1 \leq k \leq n} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\}, \\ \text{if } \sup_{\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \dots \times \Lambda_n \subset \Lambda} \min_{1 \leq k \leq n} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} > \circ/\delta, \\ 1 - \sup_{\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \dots \times \Lambda_n \subset \Lambda^c} \min_{1 \leq k \leq n} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\}, \\ \text{if } \sup_{\Lambda_1 \times \Lambda_2 \times \dots \times \Lambda_n \subset \Lambda^c} \min_{1 \leq k \leq n} \mathcal{M}_k\{\Lambda_k\} > \circ/\delta, \\ \circ/\delta, \quad o.w, \end{cases} \quad (1.2)$$

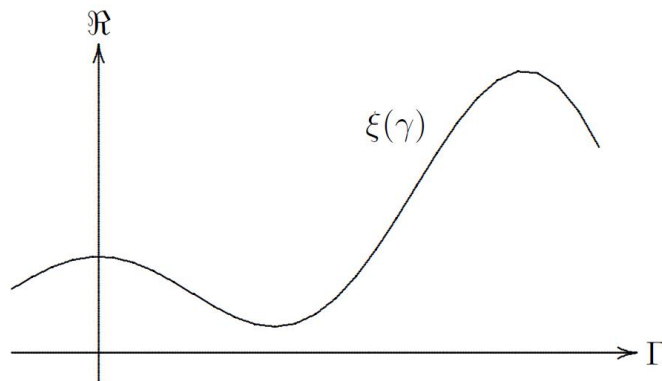
می توان رابطه فوق را به صورت زیر نیز نوشت:

$$M\left\{\prod_{k=1}^{\infty} \Lambda_k\right\} = \bigwedge_{k=1}^{\infty} M_k\{\Lambda_k\}.$$

۲.۲ متغیر نامعین

متغیر نامعین^۷ یک مفهوم اساسی در نظریه عدم قطعیت است که نشان دهنده میزان عدم قطعیت است.

تعریف ۱.۲.۲. [۲۲] یک متغیر نامعین یک تابع اندازه پذیر ξ از σ -جبر \mathcal{L} به مجموعه اعداد حقیقی است. یک متغیر نامعین ξ با یک توزیع نامعین که توسط لیو تعریف شده است مشخص می شود. شکل ۱.۲ یک نمونه متغیر نامعین را نشان می دهد.



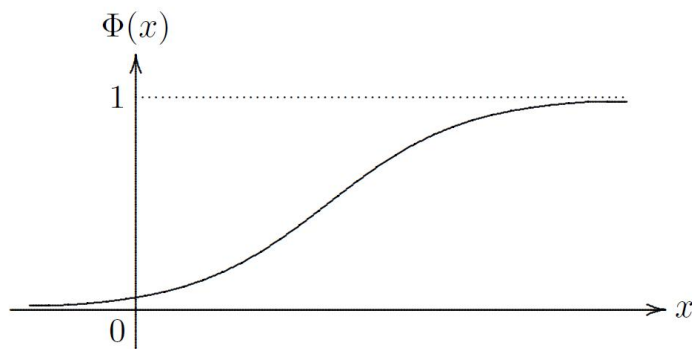
شکل ۱.۲: یک متغیر نامعین

^۷Uncertain Variable

۳.۲ توزیع نامعین

تعریف ۱.۳.۲. توزیع نامعین ^۸ $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ برای یک متغیر نامعین ξ به ازای هر عدد حقیقی x به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi(x) = \mathcal{M}\{\xi \leq x\}. \quad (۲.۲)$$



شکل ۲.۲: یک توزیع نامعین

شکل ۲.۲ نمودار یک نمونه توزیع نامعین را نشان می‌دهد.

برخی از توزیع‌های نامعین

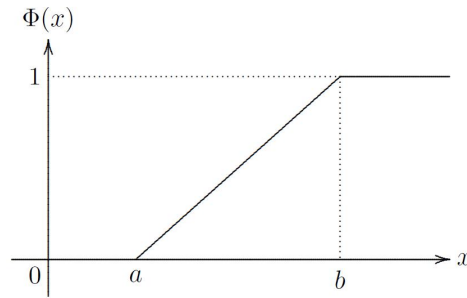
تعریف ۲.۳.۲. یک متغیر نامعین ξ را متغیر نامعین خطی ^۹ گوییم اگر توزیع نامعین خطی زیر را داشته باشد:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b, \\ 1, & x \geq b, \end{cases} \quad (۳.۲)$$

و آن را با $\xi \sim \mathcal{L}(a, b)$ نشان می‌دهیم که a و b اعداد حقیقی‌اند و $a < b$.

^۸Uncertain Distribution

^۹Linear Uncertainty Variable



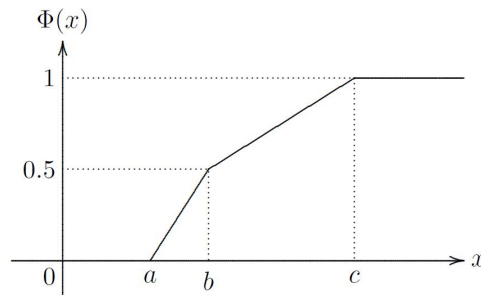
شکل ۳.۲: توزیع نامعین خطی

شکل ۳.۲ نمودار یک توزیع نامعین خطی را نشان می‌دهد.

تعریف ۳.۳.۲. یک متغیر نامعین ξ را متغیر نامعین زیگزاگ^{۱۰} گوئیم اگر توزیع نامعین زیگزاگ زیر را داشته باشد:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{2(b-a)}, & a \leq x < b, \\ \frac{x+c-2b}{2(c-b)}, & b \leq x < c, \\ 1, & x \geq c, \end{cases} \quad (4.2)$$

و آن را با $\xi \sim Z(a, b, c)$ نشان می‌دهیم که a و b و c اعداد حقیقی اند و $a < b < c$.



شکل ۴.۲: توزیع نامعین زیگزاگ

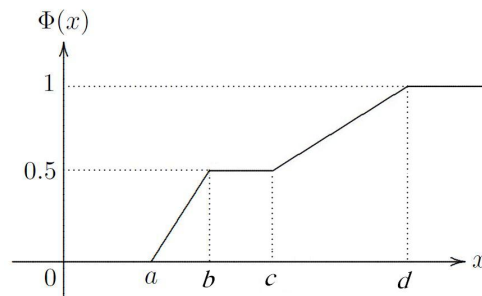
شکل ۴.۲ نمودار یک توزیع نامعین زیگزاگ را نشان می‌دهد.

^{۱۰} Zigzag Uncertainty Variable

تعریف ۴.۳.۲. یک متغیر نامعین ξ را متغیر نامعین ذوزنقه‌ای^{۱۱} گوییم اگر توزیع نامعین زیر را داشته باشد:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{2(b-a)}, & a \leq x < b, \\ 0.5, & b \leq x < c, \\ \frac{x+d-2c}{2(d-c)}, & c \leq x < d, \\ 1, & x \geq d, \end{cases} \quad (5.2)$$

و آن را با $\xi \sim \mathcal{T}(a, b, c, d)$ نشان می‌دهیم که a و b و c و d اعداد حقیقی‌اند و $a < b < c < d$.



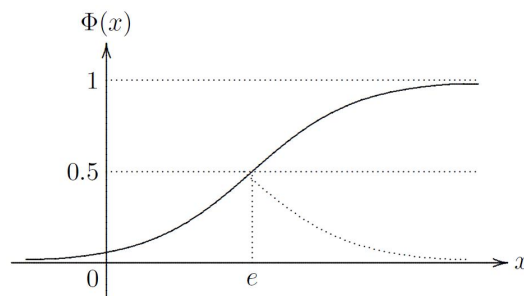
شکل ۵.۲: توزیع نامعین ذوزنقه‌ای

شکل ۵.۲ نمودار یک توزیع نامعین ذوزنقه‌ای را نشان می‌دهد.

تعریف ۵.۳.۲. یک متغیر نامعین ξ را متغیر نامعین نرمال^{۱۲} گوییم اگر توزیع نامعین نرمال زیر را داشته باشد:

$$\Phi(x) = \left(1 + \exp\left(\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{3}\sigma}\right) \right)^{-1}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0, \quad (6.2)$$

که آن را با $\xi \sim \mathcal{N}(e, \sigma)$ نشان می‌دهیم که در آن e و σ اعداد حقیقی هستند.



شکل ۶.۲: توزیع نامعین نرمال

^{۱۱}Trapezoidal Uncertainty Variable

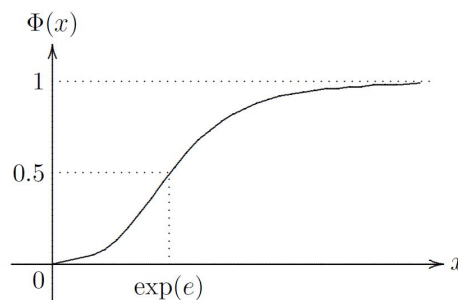
^{۱۲}Normal Uncertainty Variable

شکل ۶.۲ نمودار یک توزیع نامعین نرمال را نشان می‌دهد.

تعریف ۶.۳.۲. یک متغیر نامعین ξ را متغیر نامعین لگ‌نرمال^{۱۳} گوییم اگر $\ln \xi$ یک متغیر نامعین نرمال $\mathcal{N}(e, \sigma)$ باشد، به عبارت دیگر توزیع نامعین زیر را داشته باشد:

$$\Phi(x) = \left(1 + \exp\left(\frac{\pi(e - \ln x)}{\sqrt{3}\sigma}\right)\right)^{-1}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0, \quad (7.2)$$

که آن را با $\xi \sim \text{LOGN}(e, \sigma)$ نشان می‌دهیم که در آن e و σ اعداد حقیقی هستند.



شکل ۷.۲: توزیع نامعین لگ‌نرمال

شکل ۷.۲ نمودار یک توزیع نامعین لگ‌نرمال را نشان می‌دهد.

قضیه ۱.۳.۲. (قضیه وارون‌سازی اندازه [۲۴]) فرض کنید ξ یک متغیر نامعین با توزیع نامعین Φ باشد. آن‌گاه برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$M\{\xi \leq x\} = \Phi(x), \quad M\{\xi > x\} = 1 - \Phi(x). \quad (8.2)$$

برهان. معادله $M\{\xi \leq x\} = \Phi(x)$ به سادگی از تعریف توزیع نامعین نتیجه می‌شود. با استفاده از اصل ۲ اندازه نامعین نتیجه می‌گیریم که

$$M\{\xi > x\} = 1 - M\{\xi \leq x\} = 1 - \Phi(x),$$

□

و قضیه ثابت می‌شود.

تعریف ۷.۳.۲. توزیع نامعین $\Phi(x)$ منظم نامیده می‌شود اگر نسبت به x به ازای $1 < \Phi(x) < \infty$ تابعی پیوسته و اکیدا صعودی باشد و

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1.$$

^{۱۳}Lognormal Uncertainty Variable

۴.۲ معکوس توزیع نامعین

واضح است که توزیع نامعین منظم $\Phi(x)$ روی برد x که به صورت $0 < \Phi(x) < 1$ است یک تابع معکوس $\Phi^{-1}(\alpha)$ دارد و $\Phi^{-1}(\alpha)$ در بازه $(0, 1)$ وجود دارد.

تعریف ۱.۴.۲. فرض کنید ξ یک متغیر نامعین با توزیع نامعین منظم $\Phi(x)$ باشد. معکوس تابع $\Phi^{-1}(\alpha)$ معکوس توزیع نامعین ξ نامیده می‌شود.

توجه کنید که معکوس توزیع نامعین $\Phi^{-1}(\alpha)$ در بازه $(0, 1)$ خوش تعریف است. در صورت نیاز می‌توانیم دامنه را با تعریف زیر به بازه $[0, 1]$ گسترش دهیم.

$$\Phi^{-1}(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^-} \Phi^{-1}(\alpha), \quad \Phi^{-1}(1) = \lim_{\alpha \rightarrow 1^+} \Phi^{-1}(\alpha). \quad (9.2)$$

برخی از معکوس توزیع‌های نامعین

تعریف ۲.۴.۲. [۲۴] معکوس توزیع نامعین متغیر نامعین خطی $\mathcal{L}(a, b)$ به صورت زیر است:

$$\Phi^{-1}(\alpha) = (1 - \alpha)a + \alpha b. \quad (10.2)$$

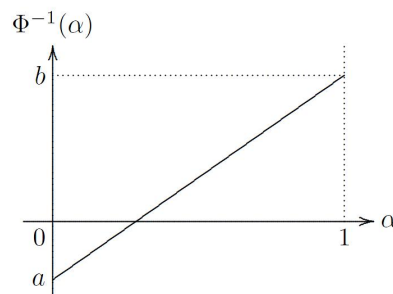
از توزیع نامعین خطی داریم:

$$\frac{x - a}{b - a} = \alpha,$$

حال

$$\alpha b - \alpha a = x - a, \quad \alpha b - \alpha a + a = x, \quad (1 - \alpha)a + \alpha b = x$$

در ابتدا قرار داریم $\Phi(x) = \alpha$ با معکوس گرفتن از طرفین داریم $\Phi^{-1}(\alpha) = x$ ، پس با جایگذاری رابطه (۱۰.۲) به دست می‌آید.

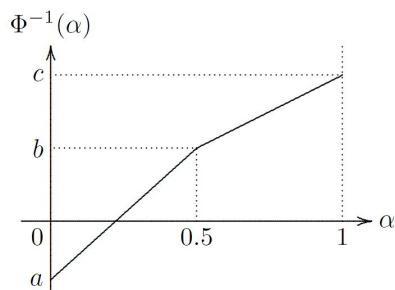


شکل ۸.۲: معکوس توزیع نامعین خطی

شکل ۸.۲ نمودار معکوس توزیع نامعین خطی را نشان می‌دهد.

تعریف ۳.۴.۲. [۲۴] معکوس توزیع نامعین متغیر نامعین زیگزاگ $\mathcal{Z}(a, b, c)$ به صورت زیر است:

$$\Phi^{-1}(\alpha) = \begin{cases} (1 - 2\alpha)a + 2\alpha b, & \alpha < 0.5, \\ (2 - 2\alpha)b + (2\alpha - 1)c, & \alpha \geq 0.5. \end{cases} \quad (11.2)$$

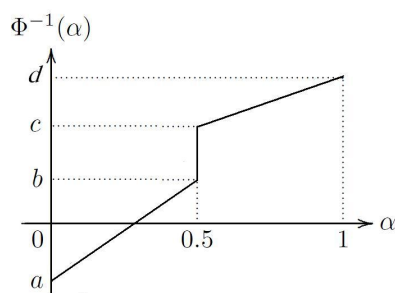


شکل ۹.۲: معکوس توزیع نامعین زیگزاگ

شکل ۹.۲ نمودار معکوس توزیع نامعین زیگزاگ را نشان می‌دهد.

تعریف ۴.۴.۲. [۲۴] معکوس توزیع نامعین متغیر نامعین دوزنقه‌ای $T(a, b, c, d)$ به صورت زیر است:

$$\Phi^{-1}(\alpha) = \begin{cases} (1 - 2\alpha)a + 2\alpha b, & \alpha < 0.5, \\ (2 - 2\alpha)c + (2\alpha - 1)d, & \alpha \geq 0.5. \end{cases} \quad (12.2)$$

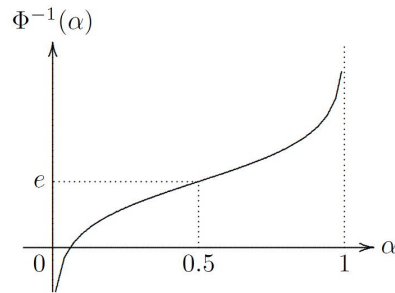


شکل ۱۰.۲: معکوس توزیع نامعین دوزنقه‌ای

شکل ۱۰.۲ نمودار معکوس توزیع نامعین دوزنقه‌ای را نشان می‌دهد.

تعریف ۵.۴.۲. [۲۴] معکوس توزیع نامعین متغیر نامعین نرمال $\mathcal{N}(e, \sigma)$ به صورت زیر است:

$$\Phi^{-1}(\alpha) = e + \frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi} \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right). \quad (13.2)$$

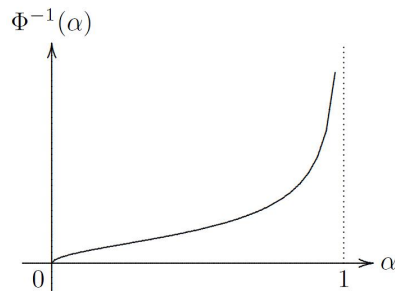


شکل ۱۱.۲: معکوس توزیع نامعین نرمال

شکل ۱۱.۲ نمودار معکوس توزیع نامعین نرمال را نشان می‌دهد.

تعریف ۶.۴.۲ [۲۴] معکوس توزیع نامعین متغیر نامعین لگ‌نرمال $LOGN(e, \sigma)$ به صورت زیر است:

$$\Phi^{-1}(\alpha) = \exp\left(e + \frac{\sigma\sqrt{3}}{\pi} \ln\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\right). \quad (۱۴.۲)$$



شکل ۱۲.۲: معکوس توزیع نامعین لگ‌نرمال

شکل ۱۲.۲ نمودار معکوس توزیع نامعین لگ‌نرمال را نشان می‌دهد.

۵.۲ استقلال متغیرهای نامعین

تعریف ۱.۵.۲ [۲۳] متغیرهای نامعین $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ مستقل نامیده می‌شوند اگر برای هر مجموعه بورل B_1, B_2, \dots, B_n از اعداد حقیقی داشته باشیم:

$$\mathcal{M}\left\{\bigcap_{i=1}^n \{\xi_i \in B_i\}\right\} = \min_{1 \leq i \leq n} \mathcal{M}\{\xi_i \in B_i\}. \quad (۱۵.۲)$$

قضیه ۱.۵.۲ [۲۴] متغیرهای نامعین $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ مستقل هستند اگر و تنها اگر

$$\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=1}^n \{\xi_i \in B_i\}\right\} = \max_{1 \leq i \leq n} \mathcal{M}\{\xi_i \in B_i\}. \quad (۱۶.۲)$$

۶.۲ قانون عملیاتی

قضیه ۱.۶.۲. [۲۳] فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ متغیرهای نامعین مستقل و $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع اندازه‌پذیر باشند. آن‌گاه $\xi = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ یک متغیر نامعین است به طوری که

$$\mathcal{M}\{\xi \in B\} = \begin{cases} \sup_{f(B_1, B_2, \dots, B_n) \subset B} \min_{1 \leq k \leq n} \mathcal{M}\{\xi_k \in B_k\}, \\ \text{if } \sup_{f(B_1, B_2, \dots, B_n) \subset B} \min_{1 \leq k \leq n} \mathcal{M}\{\xi_k \in B_k\} > \circ/\delta, \\ 1 - \sup_{f(B_1, B_2, \dots, B_n) \subset B^c} \min_{1 \leq k \leq n} \mathcal{M}\{\xi_k \in B_k\}, \\ \text{if } \sup_{f(B_1, B_2, \dots, B_n) \subset B^c} \min_{1 \leq k \leq n} \mathcal{M}\{\xi_k \in B_k\} > \circ/\delta, \\ \circ/\delta, \quad o.w., \end{cases} \quad (17.2)$$

که در آن B, B_1, B_2, \dots, B_n مجموعه‌های بورل از اعداد حقیقی هستند و

$$f(B_1, B_2, \dots, B_n) \subset B,$$

یعنی $f(t_1, t_2, \dots, t_n) \subset B$ به ازای هر $t_1 \in B_1, t_2 \in B_2, \dots, t_n \in B_n$

قضیه ۲.۶.۲. [۲۴] فرض کنید ξ یک متغیر نامعین با توزیع نامعین Φ و f یک تابع اکیدا صعودی باشد. آن‌گاه توزیع نامعین $f(\xi)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Psi(t) = \Phi(f^{-1}(t)), \quad (18.2)$$

که می‌تواند به صورت زیر نیز بیان شود:

$$\Psi^{-1}(\alpha) = f(\Phi^{-1}(\alpha)), \quad \circ < \alpha < 1. \quad (19.2)$$

قضیه ۳.۶.۲. [۳۹] فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ متغیرهای نامعین مستقل به ترتیب با توزیع‌های نامعین منظم به صورت $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ و Ψ توزیع نامعین مجموع $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ هستند. اگر $\alpha \in (\circ, 1)$ به ازای هر $\Phi_1^{-1}(\alpha), \Phi_2^{-1}(\alpha), \dots, \Phi_n^{-1}(\alpha)$ منحصر به فرد باشند آن‌گاه داریم:

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \Phi_1^{-1}(\alpha) + \Phi_2^{-1}(\alpha) + \dots + \Phi_n^{-1}(\alpha), \quad \circ < \alpha < 1. \quad (20.2)$$

قضیه ۴.۶.۲. [۲۴] فرض کنید $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ متغیرهای نامعین مستقل و مثبت به ترتیب با توزیع‌های نامعین منظم به صورت $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ باشند، آن‌گاه حاصل ضرب این متغیرها یعنی $\xi = \xi_1 \times \xi_2 \times \dots \times \xi_n$ دارای معکوس تابع توزیع به صورت زیر است:

$$\Psi^{-1}(\alpha) = \Phi_1^{-1}(\alpha) \times \Phi_2^{-1}(\alpha) \times \dots \times \Phi_n^{-1}(\alpha). \quad (21.2)$$

قضیه ۵.۶.۲. [۲۴] فرض کنید ξ_1 و ξ_2 به ترتیب دو متغیر نامعین خطی مستقل $\mathcal{L}(a_1, b_1)$ و $\mathcal{L}(a_2, b_2)$ هستند. آن‌گاه مجموع $\xi_1 + \xi_2$ نیز یک متغیر نامعین خطی است و داریم:

$$\mathcal{L}(a_1, b_1) + \mathcal{L}(a_2, b_2) = \mathcal{L}(a_1 + a_2, b_1 + b_2), \quad (22.2)$$

و حاصل ضرب یک متغیر نامعین خطی $\mathcal{L}(a, b)$ و یک عدد اسکالر $k > \circ$ نیز یک متغیر نامعین خطی است و داریم:

$$k.\mathcal{L}(a, b) = \mathcal{L}(ka, kb). \quad (23.2)$$

قضیه ۶.۶.۲. [۲۴] فرض کنید ξ_1 و ξ_2 به ترتیب دو متغیر نامعین زیگزاگ مستقل $\mathcal{Z}(a_1, b_1, c_1)$ و $\mathcal{Z}(a_2, b_2, c_2)$ باشند. آن گاه مجموع $\xi_1 + \xi_2$ نیز یک متغیر نامعین زیگزاگ به صورت زیر است:

$$\mathcal{Z}(a_1, b_1, c_1) + \mathcal{Z}(a_2, b_2, c_2) = \mathcal{Z}(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2), \quad (24.2)$$

و حاصل ضرب یک متغیر نامعین زیگزاگ $\mathcal{Z}(a, b, c)$ و یک عدد اسکالر $k > 0$ نیز یک متغیر نامعین زیگزاگ است و داریم:

$$k \cdot \mathcal{Z}(a, b, c) = \mathcal{Z}(ka, kb, kc). \quad (25.2)$$

قضیه ۷.۶.۲. [۲۴] فرض کنید ξ_1 و ξ_2 به ترتیب دو متغیر نامعین دوزنقه‌ای مستقل به صورت $\mathcal{T}(a_1, b_1, c_1, d_1)$ و $\mathcal{T}(a_2, b_2, c_2, d_2)$ باشند. آن گاه مجموع $\xi_1 + \xi_2$ نیز یک متغیر نامعین دوزنقه‌ای به صورت زیر است:

$$\mathcal{T}(a_1, b_1, c_1, d_1) + \mathcal{T}(a_2, b_2, c_2, d_2) = \mathcal{T}(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2), \quad (26.2)$$

و حاصل ضرب یک متغیر نامعین دوزنقه‌ای $\mathcal{T}(a, b, c, d)$ و یک عدد اسکالر $k > 0$ نیز یک متغیر نامعین دوزنقه‌ای است و داریم:

$$k \cdot \mathcal{T}(a, b, c, d) = \mathcal{T}(ka, kb, kc, kd). \quad (27.2)$$

قضیه ۸.۶.۲. [۲۴] فرض کنید ξ_1 و ξ_2 به ترتیب دو متغیر نامعین نرمال مستقل $\mathcal{N}(e_1, \sigma_1)$ و $\mathcal{N}(e_2, \sigma_2)$ هستند. آن گاه مجموع $\xi_1 + \xi_2$ نیز یک متغیر نامعین نرمال است و داریم:

$$\mathcal{N}(e_1, \sigma_1) + \mathcal{N}(e_2, \sigma_2) = \mathcal{N}(e_1 + e_2, \sigma_1 + \sigma_2), \quad (28.2)$$

همچنین حاصل ضرب یک متغیر نامعین نرمال $\mathcal{N}(e, \sigma)$ و یک عدد اسکالر $k > 0$ نیز یک متغیر نامعین نرمال است و داریم:

$$k \cdot \mathcal{N}(e, \sigma) = \mathcal{N}(ke, k\sigma). \quad (29.2)$$

قضیه ۹.۶.۲. [۲۴] فرض کنید ξ_1 و ξ_2 به ترتیب دو متغیر نامعین لگ نرمال مستقل به صورت $\mathcal{LOGN}(e_1, \sigma_1)$ و $\mathcal{LOGN}(e_2, \sigma_2)$ هستند. آن گاه مجموع $\xi_1 + \xi_2$ نیز یک متغیر نامعین لگ نرمال است و داریم:

$$\mathcal{LOGN}(e_1, \sigma_1) + \mathcal{LOGN}(e_2, \sigma_2) = \mathcal{LOGN}(e_1 + e_2, \sigma_1 + \sigma_2), \quad (30.2)$$

همچنین حاصل ضرب یک متغیر نامعین لگ نرمال $\mathcal{LOGN}(e, \sigma)$ و یک عدد اسکالر $k > 0$ نیز یک متغیر نامعین لگ نرمال است و داریم:

$$k \cdot \mathcal{LOGN}(e, \sigma) = \mathcal{LOGN}(ke, k\sigma). \quad (31.2)$$

۷.۲ امید ریاضی متغیر نامعین

امید ریاضی (مقدار مورد انتظار)، مقدار میانگین متغیر نامعین در راستای به دست آوردن اندازه نامعین است و نشان دهنده اندازه متغیر نامعین است. در ادامه برای اندازه گیری بازده سرمایه گذاری از امید ریاضی استفاده می کنیم.

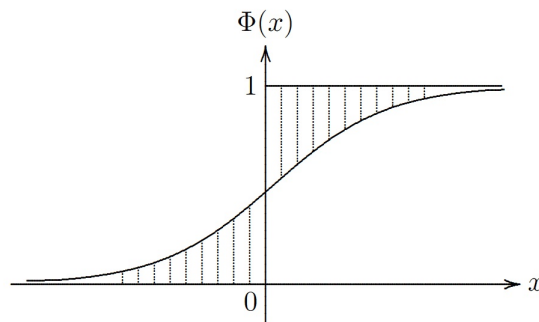
تعریف ۱.۷.۲. [۲۴] فرض کنید ξ یک متغیر نامعین است، آن گاه امید ریاضی ξ به صورت زیر تعریف می شود:

$$E[\xi] = \int_0^{+\infty} M\{\xi \geq x\} dx - \int_{-\infty}^0 M\{\xi \leq x\} dx, \quad (32.2)$$

که هر دو انتگرال متناهی می باشند.

قضیه ۱.۷.۲. [۲۴] فرض کنید ξ یک متغیر نامعین با توزیع نامعین Φ است. آن گاه داریم:

$$E[\xi] = \int_0^{+\infty} (1 - \Phi(x)) dx - \int_{-\infty}^0 \Phi(x) dx. \quad (33.2)$$



شکل ۱۳.۲: نمودار تابع توزیع متغیر نامعین

قضیه ۲.۷.۲. [۲۴] فرض کنید ξ یک متغیر نامعین با توزیع نامعین منظم Φ باشد، اگر امید ریاضی موجود است آن گاه امید ریاضی آن در رابطه زیر صدق می کند:

$$E[\xi] = \int_0^1 \Phi^{-1}(\alpha) d\alpha. \quad (34.2)$$

امید ریاضی برخی از متغیرهای نامعین

لم ۱.۷.۲. [۲۴] فرض کنید که ξ یک متغیر نامعین خطی $\mathcal{L}(a, b)$ است، آن گاه مقدار امید ریاضی آن برابر است با:

$$E[\xi] = \frac{a+b}{2}.$$

لم ۲.۷.۲. [۲۴] فرض کنید که ξ یک متغیر نامعین زیگزاگ $\mathcal{Z}(a, b, c)$ است، آن گاه مقدار امید ریاضی آن برابر است با:

$$E[\xi] = \frac{a+2b+c}{4}.$$

لم ۳.۷.۲. [۲۴] فرض کنید که ξ یک متغیر نامعین دوزنقه ای $\mathcal{T}(a, b, c, d)$ است، آن گاه مقدار امید ریاضی آن برابر است با:

$$E[\xi] = \frac{a+b+c+d}{4}.$$

لم ۴.۷.۲. [۲۴] فرض کنید که ξ یک متغیر نامعین نرمال $\mathcal{N}(e, \sigma)$ است، آن گاه مقدار امید ریاضی آن برابر است با:

$$E[\xi] = e.$$

لم ۵.۷.۲. [۲۴] فرض کنید که ξ یک متغیر نامعین لگ نرمال $\mathcal{LOGN}(e, \sigma)$ است، آن گاه مقدار امید ریاضی آن برابر است با:

$$E[\xi] = \begin{cases} \sigma\sqrt{\pi} \exp(e) \operatorname{csc}(\sigma\sqrt{\pi}), & \text{if } \sigma < \frac{\pi}{\sqrt{\pi}}, \\ +\infty, & \text{if } \sigma \geq \frac{\pi}{\sqrt{\pi}}. \end{cases} \quad (۳۵.۲)$$

قضیه ۳.۷.۲. [۲۴] فرض کنید ξ_1 و ξ_2 متغیرهای نامعین مستقل با امید ریاضی متناهی هستند، آن گاه برای هر عدد حقیقی a و b داریم:

$$E[a\xi_1 + b\xi_2] = aE[\xi_1] + bE[\xi_2]. \quad (۳۶.۲)$$

۸.۲ ارزش در معرض ریسک در فضای عدم قطعیت

با توجه به مطالب گفته شده در فصل ۱ ارزش در معرض ریسک می تواند به عنوان یک اندازه ریسک در انتخاب سبد سهام استفاده شود، بنابراین برآوردی از آن در فضای عدم قطعیت ارائه می شود.

تعریف ۱.۸.۲. فرض می کنیم ξ یک متغیر نامعین و $\beta \in (0, 1]$ ضریب اطمینان است. در این صورت ارزش در معرض ریسک از ξ تابع $\text{VaR} : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ است به طوری که

$$\text{VaR}(\beta) = \sup\{x \mid \mathcal{M}\{\xi \geq x\} \geq \beta\}. \quad (۳۷.۲)$$

قضیه ۱.۸.۲. برای هر ضریب اطمینان $\beta \in (0, 1]$ داریم:

$$\text{VaR}(\beta) = \Phi^{-1}(1 - \beta). \quad (۳۸.۲)$$

برهان.

$$\begin{aligned} \text{VaR}(\beta) &= \sup\{x \mid \mathcal{M}\{\xi \geq x\} \geq \beta\} \\ &= \sup\{x \mid \Phi(x) \leq 1 - \beta\} \\ &= \sup\{x \mid x \leq \Phi^{-1}(1 - \beta)\} \\ &= \Phi^{-1}(1 - \beta). \end{aligned}$$

□

ارزش در معرض ریسک برخی از متغیرهای نامعین

لم ۱.۸.۲. فرض کنید ξ یک متغیر نامعین خطی $\xi \sim \mathcal{L}(a, b)$ است. در این صورت داریم:

$$\text{VaR}(\beta) = a\beta + b(1 - \beta), \quad 0 < \beta \leq 1. \quad (۳۹.۲)$$

برهان. با استفاده از (۳.۲) و قضیه (۳.۵.۴) داریم:

$$\Phi(r) = \begin{cases} 0, & r \leq a, \\ \frac{r-a}{b-a}, & a \leq r < b, \\ 1, & r \geq b, \end{cases} \quad (۴۰.۲)$$

در نتیجه

$$\Phi^{-1}(1-r) = (1-r)b + ar, \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (۴۱.۲)$$

□

لم ۲.۸.۲. فرض کنید ξ یک متغیر نامعین زیگزاگ $\xi \sim \mathcal{Z}(a, b, c)$ است. در این صورت داریم:

$$\text{VaR}(\beta) = \begin{cases} 2b(1-\beta) + a(2\beta - 1), & 0 < \beta \leq \frac{1}{2}, \\ (1-2\beta)c + 2b\beta, & \frac{1}{2} \leq \beta < 1. \end{cases} \quad (۴۲.۲)$$

برهان. با استفاده از (۴.۲) و قضیه (۳.۵.۴) داریم:

$$\Phi(r) = \begin{cases} 0, & r < a, \\ \frac{r-a}{2(b-a)}, & a \leq r < b, \\ \frac{r+c-2b}{2(c-b)}, & b \leq r < c, \\ 1, & r \geq c, \end{cases} \quad (۴۳.۲)$$

در نتیجه

$$\Phi^{-1}(1-r) = \begin{cases} 2b(1-r) + a(2r - 1), & 0 < r \leq \frac{1}{2}, \\ (1-2r)c + 2br, & \frac{1}{2} \leq r < 1. \end{cases} \quad (۴۴.۲)$$

□

لم ۳.۸.۲. فرض کنید ξ یک متغیر نامعین دوزنقه‌ای $\xi \sim \mathcal{T}(a, b, c, d)$ است. در این صورت داریم:

$$\text{VaR}(\beta) = \begin{cases} 2b(1-\beta) + a(2\beta - 1), & 0 < \beta \leq \frac{1}{2}, \\ (1-2\beta)d + 2\beta c, & \frac{1}{2} \leq \beta < 1. \end{cases} \quad (۴۵.۲)$$

برهان. با استفاده از (۵.۲) و قضیه (۳.۵.۴) داریم:

$$\Phi(r) = \begin{cases} 0, & r < a, \\ \frac{r-a}{\Upsilon(b-a)}, & a \leq r < b, \\ \frac{1}{\Upsilon}, & b \leq r < c, \\ \frac{r+d-\Upsilon c}{\Upsilon(d-c)}, & c \leq r < d, \\ 1, & r \geq d, \end{cases} \quad (۴۶.۲)$$

در نتیجه

$$\Phi^{-1}(1-r) = \begin{cases} \Upsilon b(1-r) + a(\Upsilon r - 1), & 0 < r \leq \frac{1}{\Upsilon}, \\ (1-\Upsilon r)d + \Upsilon rc, & \frac{1}{\Upsilon} \leq r < 1. \end{cases} \quad (۴۷.۲)$$

□

لم ۴.۸.۲. فرض کنید ξ یک متغیر نامعین نرمال $\xi \sim \mathcal{N}(e, \sigma)$ است. در این صورت داریم:

$$\text{VaR}(\beta) = e + \frac{\sigma\sqrt{\Upsilon}}{\pi} \left(\ln\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right) \right). \quad (۴۸.۲)$$

برهان. با استفاده از (۶.۲) و قضیه (۳.۵.۴) داریم:

$$\Phi(r) = \left(1 + \exp\left(\frac{\pi(e-r)}{\sigma\sqrt{\Upsilon}}\right) \right)^{-1}, \quad (۴۹.۲)$$

در نتیجه

$$\Phi^{-1}(1-r) = e + \frac{\sigma\sqrt{\Upsilon}}{\pi} \left(\ln\left(\frac{1-r}{r}\right) \right). \quad (۵۰.۲)$$

□

لم ۵.۸.۲. فرض کنید ξ یک متغیر نامعین لگ نرمال $\xi \sim \mathcal{LOGN}(e, \sigma)$ است. در این صورت داریم:

$$\text{VaR}(\beta) = \exp\left(e + \frac{\sigma\sqrt{\Upsilon}}{\pi} \left(\ln\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right) \right) \right). \quad (۵۱.۲)$$

برهان. با استفاده از (۷.۲) و قضیه (۳.۵.۴) داریم:

$$\Phi(r) = \left(1 + \exp\left(\frac{\pi(e - \ln r)}{\sigma\sqrt{\Upsilon}}\right) \right)^{-1}, \quad (۵۲.۲)$$

در نتیجه

$$\Phi^{-1}(1-r) = \exp\left(e + \frac{\sigma\sqrt{\Upsilon}}{\pi} \left(\ln\left(\frac{1-r}{r}\right) \right) \right). \quad (۵۳.۲)$$

□

۹.۲ ارزش در معرض ریسک مشروط در فضای عدم قطعیت

تعریف ۱.۹.۲. فرض کنید که ξ یک متغیر نامعین و $\beta \in (0, 1]$ ضریب اطمینان است. در این صورت ارزش در معرض ریسک مشروط از ξ تابع $\text{CVaR} : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ است به طوری که

$$\text{CVaR}(\beta) = \frac{1}{1-\beta} \int_{\beta}^1 \text{VaR}(r) dr. \quad (54.2)$$

ارزش در معرض ریسک مشروط برخی از متغیرهای نامعین

لم ۱.۹.۲. فرض کنید ξ یک متغیر نامعین خطی $\xi \sim \mathcal{L}(a, b)$ است. در این صورت داریم:

$$\text{CVaR}(\beta) = \frac{a+b-2b\beta+\beta^2(b-a)}{2(1-\beta)}, \quad 0 \leq \beta \leq 1. \quad (55.2)$$

برهان. با توجه به (۳۹.۲) و (۵۴.۲) داریم:

$$\begin{aligned} \text{CVaR}(\beta) &= \frac{1}{1-\beta} \int_{\beta}^1 (ar + b(1-r)) dr \\ &= \frac{a+b-2b\beta+\beta^2(b-a)}{2(1-\beta)}. \end{aligned}$$

□

لم ۲.۹.۲. فرض کنید ξ یک متغیر نامعین زیگزاگ $\xi \sim \mathcal{Z}(a, b, c)$ است. در این صورت داریم:

$$\text{CVaR}(\beta) = \begin{cases} \frac{b+\beta(a-2b)+\beta^2(b-a)}{1-\beta}, & 0 < \beta \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{b-c\beta+(c-b)\beta^2}{1-\beta}, & \frac{1}{2} \leq \beta \leq 1. \end{cases} \quad (56.2)$$

برهان. با توجه به (۴۲.۲) و (۵۴.۲) برای $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$ داریم:

$$\begin{aligned} \text{CVaR}(\beta) &= \frac{1}{1-\beta} \int_{\beta}^1 (2b(1-r) + a(2r-1)) dr \\ &= \frac{b+\beta(a-2b)+\beta^2(b-a)}{1-\beta}, \end{aligned}$$

و همچنین برای $\frac{1}{2} \leq \beta \leq 1$ داریم:

$$\begin{aligned} \text{CVaR}(\beta) &= \frac{1}{1-\beta} \int_{\beta}^1 ((1-2r)c + 2br) dr \\ &= \frac{b-c\beta+(c-b)\beta^2}{1-\beta}. \end{aligned}$$

□

لم ۳.۹.۲. فرض کنید ξ یک متغیر نامعین دوزنقه‌ای $\xi \sim \mathcal{T}(a, b, c, d)$ است. در این صورت داریم:

$$\text{CVaR}(\beta) = \begin{cases} \frac{b + \beta(a - 2b) + \beta^2(b - a)}{1 - \beta}, & 0 < \beta \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{c - \beta d + \beta^2(d - c)}{1 - \beta}, & \frac{1}{2} \leq \beta < 1. \end{cases} \quad (57.2)$$

برهان. با توجه به (۴۵.۲) و (۵۴.۲) برای $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$ داریم:

$$\begin{aligned} \text{CVaR}(\beta) &= \frac{1}{1 - \beta} \int_{\beta}^1 (2b(1 - r) + a(2r - 1)) dr \\ &= \frac{b + \beta(a - 2b) + \beta^2(b - a)}{1 - \beta}, \end{aligned}$$

و همچنین برای $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$ داریم:

$$\begin{aligned} \text{CVaR}(\beta) &= \frac{1}{1 - \beta} \int_{\beta}^1 ((1 - 2r)d + 2rc) dr \\ &= \frac{c - \beta d + \beta^2(d - c)}{1 - \beta}. \end{aligned}$$

□

لم ۴.۹.۲. فرض کنید ξ یک متغیر نامعین نرمال $\xi \sim \mathcal{N}(e, \sigma)$ است. در این صورت داریم:

$$\text{CVaR}(\beta) = e + \frac{\sigma\sqrt{\pi}}{\pi\beta} \left[1 - \ln\left(\frac{1 - \beta}{\beta}\right) \right], \quad 0 \leq \beta \leq 1. \quad (58.2)$$

برهان. با توجه به (۴۸.۲) و (۵۴.۲) داریم:

$$\begin{aligned} \text{CVaR}(\beta) &= \frac{1}{1 - \beta} \int_{\beta}^1 \left(e + \frac{\sigma\sqrt{\pi}}{\pi} \left(\ln\left(\frac{1 - r}{r}\right) \right) \right) dr \\ &= e + \frac{\sigma\sqrt{\pi}}{\pi\beta} \left[1 - \ln\left(\frac{1 - \beta}{\beta}\right) \right]. \end{aligned}$$

□

لم ۵.۹.۲. فرض کنید ξ یک متغیر نامعین لگ نرمال $\xi \sim \mathcal{LOGN}(e, \sigma)$ است. در این صورت داریم:

$$\text{CVaR}(\beta) = \exp \left[e + \frac{\sigma\sqrt{\pi}}{\pi\beta} \left[1 - \ln\left(\frac{1 - \beta}{\beta}\right) \right] \right], \quad 0 \leq \beta \leq 1. \quad (59.2)$$

برهان. با توجه به (۵۱.۲) و (۵۴.۲) داریم:

$$\begin{aligned} \text{CVaR}(\beta) &= \frac{1}{1-\beta} \int_{\beta}^1 \exp \left(e + \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{\pi} \left(\ln\left(\frac{1-r}{r}\right) \right) \right) dr \\ &= \exp \left[e + \frac{\sigma\sqrt{\tau}}{\pi\beta} \left[1 - \ln\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right) \right] \right]. \end{aligned}$$

□

فصل ۳

یک مدل شبکه عصبی کارا برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی

مسائل برنامه‌ریزی خطی در طیف گسترده‌ای از کاربردهای علمی و مهندسی، تحلیل رگرسیون، پردازش سیگنال، بازسازی تصویر، کنترل ربات و غیره به‌وجود می‌آیند. همچنین، برخی مسائل بهینه‌سازی غیرخطی معمولاً با یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی تقریب زده می‌شوند. به‌طور کلی، مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی می‌تواند به‌شکل زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} Ax = b, \\ x \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

بسیاری از شبکه‌های عصبی برای مسأله‌ی فوق ارائه شده‌اند. برای مثال، برخی شبکه‌های عصبی اولیه - دوگان ارائه شدند [۵]، [۷]، [۴۴] و [۴۵]. به‌منظور ساده‌سازی ساختار شبکه‌ی عصبی دوگان، شبکه‌ی عصبی دوگان ساده شده معرفی شد [۲۵] و [۱۶]. با استفاده از قضیه‌ی تصویر، چندین شبکه‌ی عصبی تصویری برای حل مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی توسعه داده شدند [۹]، [۱۲]، [۱۱]، [۱۳]، [۱۵]، [۲۷]، [۲۶]، [۳۰]، [۴۹] و [۵۴] که به‌طور کلی به جواب‌های بهینه‌ی دقیق همگرا بودند. در [۲۷] و [۲۶]، لیو وانگ چند شبکه‌ی عصبی بازگشتی تک‌لایه را برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی پیشنهاد دادند. شبکه‌های عصبی بازگشتی تک‌لایه پیچیدگی ساختاری ساده‌تری نسبت به سایر شبکه‌های عصبی مانند شبکه‌ی لاگرانژی و شبکه‌ی تصویری دارند.

تا به حال، تنها چند شبکه‌ی عصبی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی زیر با محدودیت‌های تساوی و نامساوی توسعه یافته است.

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} Ax = b, \\ Bx \leq d, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3)$$

که در آن $\text{rank}(A) = m$ ($0 < m < n$)، $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ، $c \in \mathbb{R}^n$ ، $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ و $d \in \mathbb{R}^p$ و $b \in \mathbb{R}^m$ ، $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ است.

ژانگ و وانگ [۵۵] و شیا و همکاران [۴۷] با محدودیت‌های تساوی و نامساوی یک طرفه همانند حالات خاص محدودیت‌های کران دوطرفه عمل کردند. نشان دادن کران پایین $-\infty$ تا کران $+\infty$ نیاز به اعداد به اندازه کافی بزرگ دارد که برای طراحی شبکه‌های عصبی نامساعد است. عفتی و ناظمی [۸] برای حل این مسأله با شرایط کاراش-کوهن-تاگر (KKT) یک شبکه‌ی عصبی پیشنهاد دادند. با این حال، این شبکه‌ی عصبی دارای نورون‌های بیشتری است و نیاز به شرایط همگرایی قوی‌تری دارد.

با انگیزه گرفتن از مباحث فوق، هدف این پایان‌نامه توسعه‌ی یک شبکه‌ی عصبی جدید برای حل (۱.۳) است که متغیرهای حالت کمتر، پیچیدگی ساختاری کمتر و شرایط همگرایی قوی‌تری دارد.

۱.۳ بهینه‌سازی و شبکه‌های عصبی

بحث و بررسی در مورد کاربرد شبکه‌های عصبی (شبکه‌های عصبی مصنوعی) در بهینه‌سازی از اوایل سال ۱۹۸۰ میلادی آغاز شده است. نتایج پژوهش‌های انجام شده از آن زمان تاکنون، مواردی چون برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌ریزی درجه دوم، برنامه‌ریزی هندسی و برنامه‌ریزی غیرخطی را در برمی‌گیرد. ایده‌ی اصلی در استفاده از شبکه‌های عصبی مصنوعی برای مسائل بهینه‌سازی استفاده از یک تابع انرژی (نامنفی) و یک سیستم دینامیکی است که این دو بیان‌کننده‌ی مدل‌های شبکه‌های عصبی مصنوعی متناظر مسائل بهینه‌سازی هستند. سیستم دینامیکی بیان شده معمولاً یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه‌ی اول است. انتظار می‌رود که برای یک نقطه‌ی آغازین نقطه‌ی پایداری دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی به دست آمده، جواب بهینه‌ی مسأله‌ی بهینه‌سازی اصلی باشد. بنابراین برای یک مدل متناظر با مسائل بهینه‌سازی، اصل اساسی استفاده از شبکه‌های عصبی در این گونه مسائل به صورت زیر بیان می‌شود:

برای یک نقطه‌ی آغازین دلخواه، نقطه‌ی تعادل دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی به دست آمده جواب بهینه‌ی مسأله‌ی اصلی است و برعکس.

مدل‌های مطرح شده‌ی متناظر مسائل مختلف بهینه‌سازی را می‌توان به دو قسمت مدل‌های دوگانی و مدل‌های جریمه‌ای تقسیم نمود. نظریه‌ی دوگانی و توابع جریمه‌ای دو نظریه‌ی بسیار

مهم در مسائل بهینه‌سازی هستند که اکثر این مسائل بر مبنای این دو روش کلاسیک قابل حل هستند. در نظریه‌ی توابع جریمه‌ای معمولاً از مدل‌های گرادینانی برای معرفی مدل مورد نظر استفاده می‌شود، ولی در نظریه‌ی دوگانی از مدل‌های اولیه-دوگان برای حل این مسائل استفاده می‌شود. اگر بتوان متناظر با هر مسأله‌ی بهینه‌سازی، روش مشخصی را ارائه نمود که آن روش برای حل آن مسأله شرایط لازم و کافی را برآورده سازد، آن‌گاه می‌توان متناظر با آن روش، یک مدل شبکه‌ی عصبی برای مسأله‌ی مورد نظر بسازیم. در دهه‌های گذشته، شبکه‌های عصبی به‌طور گسترده‌ای برای بهینه‌سازی بررسی شده‌اند. برای اولین بار هاپفیلد و تانک شبکه‌های عصبی را برای مسائل برنامه‌ریزی خطی پیشنهاد دادند [۱۴] و [۴۲]. کار آنها توسط بسیاری از محققان جهت بررسی سایر مدل‌های شبکه‌ی عصبی برای حل مسائل برنامه‌ریزی الهام گرفته شده است. کندی و چوآ [۱۹] یک شبکه‌ی عصبی برای حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی ارائه دادند. مشخص شده است که مدل شبکه‌ی عصبی شامل پارامترهای جریمه متناهی است و تنها جواب‌های تقریبی را تولید می‌کند. برای جلوگیری از استفاده از پارامترهای جریمه، در سال‌های اخیر مدل‌های دیگری نیز ارائه شده است برای مثال، [۶]، [۱۰]، [۴۳]، [۴۶]، [۵۰] و [۵۳] را ببینید.

۲.۳ مدل شبکه‌ی عصبی پیشنهادی

مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی به‌صورت کلی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} Ax = b, \\ Bx \leq d, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3)$$

که در آن $rank(A) = m$ ($0 < m < n$)، $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ، $c \in \mathbb{R}^n$ ، $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ، $b \in \mathbb{R}^m$ ، $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ، $d \in \mathbb{R}^p$ است.

می‌توان مدل شبکه عصبی زیر را برای به‌دست آوردن جواب بهینه‌ی مسأله‌ی (۲.۳) به‌صورت زیر به‌کار برد [۵۱]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -(I - P)[c + B^T(y + Bx - d)^+] - Q(Ax - b), \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\tau}y + \frac{1}{\tau}(y + Bx - d)^+, \end{cases} \quad (3.3)$$

که در آن

$$P = A^T(AA^T)^{-1}A, \quad Q = A^T(AA^T)^{-1},$$

$$(y + Bx - d)^+ = ([y + Bx - d]_1^+, [y + Bx - d]_2^+, \dots, [y + Bx - d]_m^+),$$

$$[y + Bx - d]_k^+ = \max\{(y + Bx - d)_k, 0\}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

لم ۱.۲.۳. [۵۱] x^* جواب بهینه‌ی (۲.۳) است اگر و تنها اگر $y^* \geq 0$ موجود باشد به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

$$(I - P)[c + B^T y^*] + Q(Ax^* - b) = 0, \quad (۴.۳)$$

$$(y^* + Bx^* - d)^+ - y^* = 0. \quad (۵.۳)$$

برهان. اگر x^* جواب بهینه‌ی (۲.۳) باشد، مطابق [۲] شرایط KKT برای مسائل بهینه‌سازی محدب، (x^*, λ^*, y^*) و $y^* \geq 0$ موجودند به طوری که در معادلات زیر صدق می‌کنند.

$$c + A^T \lambda^* + B^T y^* = 0, \quad (۶.۳)$$

$$Ax^* = b, \quad (۷.۳)$$

$$d - Bx^* \geq 0, \quad y^* \geq 0, \quad (y^*)^T (d - Bx^*) = 0, \quad (۸.۳)$$

به آسانی دیده می‌شود که (۵.۳) و (۸.۳) معادل هستند. به این معنی که

$$d - Bx^* \geq 0, \quad y^* \geq 0, \quad (y^*)^T (d - Bx^*) = 0 \iff (y^* + Bx^* - d)^+ - y^* = 0.$$

در ادامه، نشان می‌دهیم که جواب‌های (۴.۳) و جواب‌های (۶.۳) و (۷.۳) معادلند. از (۶.۳) داریم:

$$-A(c + A^T \lambda^* + B^T y^*) = 0,$$

با جمع کردن معادله‌ی بالا با معادله‌ی (۷.۳) داریم:

$$Ax^* - Ac - AA^T \lambda^* - AB^T y^* = b,$$

بنابراین

$$A^T \lambda^* = A^T (AA^T)^{-1} (Ax^* - b) - A^T (AA^T)^{-1} A(c + B^T y^*), \quad (۹.۳)$$

با جایگذاری (۹.۳) در معادله‌ی (۶.۳) داریم:

$$[I - A^T (AA^T)^{-1} A](c + B^T y^*) + A^T (AA^T)^{-1} (Ax^* - b) = 0,$$

با قرار دادن $P = A^T (AA^T)^{-1} A$ و $Q = A^T (AA^T)^{-1}$ ، می‌توان معادله‌ی فوق را به صورت زیر نوشت:

$$(I - P)[c + B^T (y^* + Bx^* - d)^+] + Q(Ax^* - b) = 0.$$

برعکس، اگر y^* موجود باشد به طوری که $(x^*, y^*)^T$ در معادله‌ی (۴.۳) صدق کند با ضرب A در طرفین معادله‌ی (۴.۳) داریم:

$$A(I - P)[c + B^T (y^* + Bx^* - d)^+] + AQ(Ax^* - b) = 0,$$

توجه کنید که $AQ = I$ و $A(I - P) = 0$ پس داریم $Ax^* - b = 0$. در نتیجه از (۴.۳) داریم $(I - P)(c + B^T y^*) = 0$. با قرار دادن $\lambda^* = -(AA^T)^{-1} A(c + B^T y^*)$ داریم:

$$\begin{aligned} c + A^T \lambda^* + B^T y^* &= c + B^T y^* - A^T (AA^T)^{-1} A(c + B^T y^*) \\ &= (I - P)(c + B^T y^*) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

پس حکم ثابت شده است.

ملاحظه ۱.۲.۳. با استفاده از لم ۱.۲.۳، به آسانی می‌بینیم که جواب بهینه‌ی مسأله‌ی (۲.۳) است اگر و تنها اگر وجود داشته باشد $y^* \geq 0$ به طوری که $(x^*, y^*)^T$ نقطه‌ی تعادل شبکه‌ی عصبی ارائه شده در (۳.۳) باشد. بنابراین، زمانی که شبکه‌ی عصبی به نقطه‌ی تعادل همگرا است، مسیر حرکت $x(t)$ به جواب بهینه‌ی مسأله‌ی (۲.۳) همگرا می‌باشد.

۱.۲.۳ تحلیل پایداری

در این بخش نشان خواهیم داد که مدل شبکه‌ی عصبی (۳.۳) همگرای سراسری است.

لم ۲.۲.۳. [۵۱] فرض کنید $(x^*, y^*)^T \in \Omega^e$ یک نقطه‌ی تعادل شبکه‌ی عصبی (۳.۳) باشد و

$$V(x, y) = - (x - x^*)^T B^T y^* + \frac{1}{\rho} \|(y + Bx - d)^+\|^2 + \frac{1}{\rho} \|y^*\|^2 - y^T y^* + \frac{1}{\rho} \|x - x^*\|^2 + \frac{1}{\rho} \|y - y^*\|^2, \quad (10.3)$$

در این صورت

$$V(x, y) \geq \frac{1}{\rho} \|x - x^*\|^2 + \frac{1}{\rho} \|y - y^*\|^2, \quad (11.3)$$

$$\frac{dV}{dt} \leq -\|(I - P)[c + B^T(y + Bx - d)^+] + Q(Ax - b)\|^2 - \frac{1}{\rho} \|y - (y + Bx - d)^+\|^2. \quad (12.3)$$

برهان. برای اثبات (۱۱.۳) داریم، از آنجا که تابع $\|(y + Bx - d)^+\|^2$ محدب و مشتق‌پذیر می‌باشد و

$$\nabla \|(y + Bx - d)^+\|^2 = 2 \begin{bmatrix} B^T(y + Bx - d)^+ \\ (y + Bx - d)^+ \end{bmatrix},$$

در نتیجه

$$\|(y + Bx - d)^+\|^2 - \|y^*\|^2 \geq 2(x - x^*)^T B^T y^* + 2(y - y^*)^T y^*,$$

یعنی

$$\frac{1}{\rho} \|(y + Bx - d)^+\|^2 + \frac{1}{\rho} \|y^*\|^2 - (x - x^*)^T B^T y^* - y^T y^* \geq 0,$$

داریم:

$$V(x, y) \geq \frac{1}{\rho} \|x - x^*\|^2 + \frac{1}{\rho} \|y - y^*\|^2.$$

همچنین برای اثبات (۱۲.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\
 &= -[-B^T y^* + B^T(y + Bx - d)^+ + x - x^*]^T \\
 &\quad \times [(I - P)(c + B^T(y + Bx - d)^+) + Q(Ax - b)] \\
 &\quad - \frac{1}{\gamma} [y - (y + Bx - d)^+]^T \times [(y + Bx - d)^+ - \gamma y^* + y] \\
 &= [x - x^* + B^T((y + Bx - d)^+ - y^*)]^T \\
 &\quad \times [(I - P)(B^T(y + Bx - d)^+ - y^*) + P(x - x^*)] \\
 &\quad - \frac{1}{\gamma} [y - (y + Bx - d)^+]^T \times [y - (y + Bx - d)^+ + \gamma(y + Bx - d)^+ - \gamma y^*] \\
 &= -(x - x^*)^T (I - P) B^T [(y + Bx - d)^+ - y^*] \\
 &\quad - (x - x^*)^T P (x - x^*) \\
 &\quad - [(y + Bx - d)^+ - y^*]^T B B^T [(y + Bx - d)^+ - y^*] - [(y + Bx - d)^+ - y^*]^T \\
 &\quad \times B P (x - x^*) - \frac{1}{\gamma} \|y - (y + Bx - d)^+\|^{\gamma} \\
 &\quad + [(y + Bx - d)^+ - y^*]^T [(y + Bx - d)^+ - y].
 \end{aligned}$$

توجه کنید که

$$P(I - P) = 0, P^{\gamma} = P, (I - P)^{\gamma} = I - P,$$

و

$$(y + Bx - d)^+ - y = Bx - d + (-y - Bx - d)^+,$$

داریم:

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dt} &= -(x - x^*)^T P^{\gamma} (x - x^*) \\
 &\quad - [(y + Bx - d)^+ - y^*]^T B B^T [(y + Bx - d)^+ - y^*] \\
 &\quad - (x - x^*)^T B^T [(y + Bx - d)^+ - y^*] - \frac{1}{\gamma} \|y - (y + Bx - d)^+\|^{\gamma} \\
 &\quad + [(y + Bx - d)^+ - y^*]^T \times [Bx - d + (-y - Bx - d)^+] \\
 &= -\|(I - P)B^T [(y + Bx - d)^+ - y^*] + P(x - x^*)\|^{\gamma} \\
 &\quad - (x - x^*)^T B^T [(y + Bx - d)^+ - y^*] \\
 &\quad - \frac{1}{\gamma} \|y - (y + Bx - d)^+\|^{\gamma} + [(y + Bx - d)^+ - y^*]^T \\
 &\quad \times [B(x - x^*) + (Bx^* - d) + (-y - Bx - d)^+]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\|(I-P)[c+B^T(y+Bx-d)^+] + Q(Ax-b)\|^2 \\
 &\quad - \frac{1}{\rho}\|y - (y+Bx-d)^+\|^2 \\
 &\quad + [(y+Bx-d)^+]^T(Bx^*-d) - (y^{*T})(Bx^*-d) \\
 &\quad + [(y+Bx-d)^+]^T(-y-Bx+d)^+ - (y^{*T})(-y-Bx+d)^+ \\
 &= -\|(I-P)[c+B^T(y+Bx-d)^+] + Q(Ax-b)\|^2 \\
 &\quad - \frac{1}{\rho}\|y - (y+Bx-d)^+\|^2 \\
 &\quad + [(y+Bx-d)^+]^T(Bx^*-d) - (y^{*T})(-y-Bx+d)^+ \\
 &\leq -\|(I-P)[c+B^T(y+Bx-d)^+] \\
 &\quad + Q(Ax-b)\|^2 - \frac{1}{\rho}\|y - (y+Bx-d)^+\|^2,
 \end{aligned}$$

□ که در معادله‌ی فوق با استفاده از (۵.۳) اثبات تمام است.

ملاحظه ۲.۲.۳. $V(x, y)$ معرفی شده در (۱۰.۳) یک تابع لیاپانوف می‌باشد، بنابراین، شبکه‌ی عصبی (۳.۳) پایدار به مفهوم لیاپانوف می‌باشد.

قضیه ۱.۲.۳. [۵۱] برای هر نقطه‌ی اولیه‌ی $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in \mathbb{R}^{n+p}$ ، یک جواب پیوسته منحصر به فرد $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^{n+p}$ از (۳.۳) برای $t \geq 0$ وجود دارد.

برهان. فرض کنید

$$E(x, y) = -(I-P)(c - (y+Bx-d)^+) - Q(Ax-b) - \frac{1}{\rho}y + \frac{1}{\rho}(y+Bx-d)^+,$$

برای هر $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^{n+p}$ داریم:

$$\begin{aligned}
 \|E(x, y) - E(x', y')\| &\leq \|(I-P)[c - (y+Bx-d)^+] + Q(Ax-b) \\
 &\quad - (I-P)[c - (y'+Bx'-d)^+] - Q(Ax'-b)\| \\
 &\quad + \left\| \frac{1}{\rho}y - \frac{1}{\rho}(y+Bx-d)^+ - \frac{1}{\rho}y' + \frac{1}{\rho}(y'+Bx'-d)^+ \right\| \\
 &\leq (\|(I-P)B\| + \|P\| + \|B\|/\rho)\|x - x'\| \\
 &\quad + (\|I-P\| + 1)\|y - y'\|,
 \end{aligned}$$

از این رو، $E(x, y)$ روی \mathbb{R}^{n+p} پیوسته‌ی لیبشیتز^۱ است. از قضیه‌ی وجودی موضعی معادله‌ی دیفرانسیل معمولی [۳۵] نتیجه می‌شود یک جواب منحصر به فرد (۳.۳) روی $[0, T)$ وجود دارد.

بنا به لم ۲.۲.۳ می‌دانیم که V نسبت به t یک تابع نزولی است، لذا

$$\frac{1}{\rho}\|x - x^*\|^2 \leq V(x^{(0)}, y^{(0)}) \leq V(x(t), y(t)), \quad \forall t \geq 0, \quad (۱۳.۳)$$

نشان می‌دهد مسیر حالت شبکه‌ی عصبی (۳.۳) کراندار است. در نتیجه $T = +\infty$. این اثبات را کامل می‌کند.

□

^۱Lipschitz

قضیه ۲.۲.۳. [۵۱] مسیر حالت شبکه‌ی عصبی (۳.۳) برای هر نقطه‌ی اولیه به صورت $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in \mathbb{R}^{n+p}$ به یک نقطه‌ی تعادل همگرا است. به‌ویژه، شبکه‌ی عصبی (۳.۳) با هر نقطه‌ی اولیه‌ی $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in \mathbb{R}^{n+p}$ هنگامی که Ω^e نقطه‌ی تعادل منحصر به فرد دارد به‌طور سراسری پایدار مجانبی است.

برهان. تعریف کنید

$$D(x, y) = \|(I - P)[c + B^T(y + Bx - d)^+] + Q(Ax - b)\|^2 + \frac{1}{\lambda} \|y - (y + Bx - d)^+\|^2,$$

در این صورت $D(x, y) = 0$ اگر و تنها اگر (x, y) یک نقطه‌ی تعادل شبکه‌ی عصبی (۳.۳) باشد. از اثبات قضیه‌ی ۱.۲.۳ نتیجه می‌گیریم مسیر حالت $(x(t), y(t))$ شبکه‌ی عصبی (۳.۳) کراندار است. بنابراین، دنباله‌ی صعودی $\{t_n\}$ با $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \rightarrow \infty$ و نقطه‌ی حدی $(\hat{x}, \hat{y})^T$ وجود دارند به‌طوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) \rightarrow \hat{x}$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} y(t_n) \rightarrow \hat{y}$.

حال، ثابت می‌کنیم $(\hat{x}, \hat{y}) \in \Omega^e$ و مسیر حالت $(x(t), y(t))$ به‌طور کلی به نقطه‌ی تعادل (\hat{x}, \hat{y}) همگرا است.

در مرحله اول، ثابت می‌کنیم که $D(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ یعنی (\hat{x}, \hat{y}) یک نقطه‌ی تعادل شبکه‌ی عصبی (۳.۳) است. اگر این مورد برقرار نباشد، آنگاه $D(\hat{x}, \hat{y}) > 0$. چون $D(x, y)$ به‌ترتیب نسبت به x و y پیوسته است، $\varepsilon > 0$ ، $q > 0$ و همسایگی ε از $(\hat{x}, \hat{y})^T$ ،

$$B((\hat{x}, \hat{y}), \varepsilon) = \{(x, y)^T : \|x - \hat{x}\| + \|y - \hat{y}\| \leq \varepsilon\},$$

وجود دارند به‌طوری که برای هر $(x, y)^T \in B((\hat{x}, \hat{y}), \varepsilon)$ داریم $D(x, y) > q$.

با توجه به اینکه $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) \rightarrow \hat{x}$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} y(t_n) \rightarrow \hat{y}$ ، عدد صحیح مثبت N وجود دارد به‌طوری که برای هر $n \geq N$ ، $\|x(t_n) - \hat{x}\| \leq \frac{1}{4}\varepsilon$ و $\|y(t_n) - \hat{y}\| \leq \frac{1}{4}\varepsilon$.

از (۳.۳) و کراندار بودن $(x(t), y(t))$ نتیجه می‌گیریم \dot{x} و \dot{y} نیز کراندار هستند که این کران با M نشان داده می‌شود. با در نظر گرفتن $t \in [t_n - \frac{\varepsilon}{\lambda M}, t_n + \frac{\varepsilon}{\lambda M}]$ ، $n \geq N$ داریم:

$$\begin{aligned} \|x(t) - \hat{x}\| + \|y(t) - \hat{y}\| &\leq \|x(t) - x(t_n)\| + \|y(t) - y(t_n)\| + \|x(t_n) - \hat{x}\| + \|y(t_n) - \hat{y}\| \\ &= \|\dot{x}(\xi_1)\| \times |t - t_n| + \|\dot{y}(\xi_2)\| \times |t - t_n| \\ &\quad + \|x(t_n) - \hat{x}\| + \|y(t_n) - \hat{y}\| \\ &\leq 2M|t - t_n| + \frac{\varepsilon}{4} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

از این رو، برای هر $n \geq N$ ، $t \in [t_n - \frac{\varepsilon}{\lambda M}, t_n + \frac{\varepsilon}{\lambda M}]$ داریم $(x, y)^T \in B((\hat{x}, \hat{y}), \varepsilon)$. بنابراین برای هر $n \geq N$ ، $t \in [t_n - \frac{\varepsilon}{\lambda M}, t_n + \frac{\varepsilon}{\lambda M}]$ نتیجه می‌شود $D(x(t), y(t)) > q$. چون $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ و اندازه‌ی لبگ^۲ مجموعه‌ی $t \in \cup_{n \geq N} [t_n - \frac{\varepsilon}{\lambda M}, t_n + \frac{\varepsilon}{\lambda M}]$ بی‌نهایت است،

^۲Lebegue

پس داریم:

$$\int_0^{\infty} D(x(t), y(t)) dt = \infty. \quad (14.3)$$

با این حال از رابطه (۱۲.۳)

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} D(x(t), y(t)) dt &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s D(x(t), y(t)) dt \\ &\leq - \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s \dot{V}(x(t), y(t)) dt \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} [V(x(\circ), y(\circ)) - V(x(s), y(s))] \\ &\leq V(x(\circ), y(\circ)), \end{aligned} \quad (15.3)$$

که (۱۴.۳) را نقض می‌کند. لذا $D(\hat{x}, \hat{y}) = \circ$ که یعنی $(\hat{x}, \hat{y})^T \in \Omega^e$.

در مرحله دوم، ثابت می‌کنیم مسیر حالت $(x(t), y(t))$ به‌طور سراسری به نقطه‌ی تعادل (\hat{x}, \hat{y}) همگرا است.

تابع لیانوف

$$\begin{aligned} \hat{V}(x, y) &= - (x(t) - \hat{x})^T B^T \hat{y} + \frac{1}{\alpha} \|(y + Bx - d)^+\|^2 + \frac{1}{\alpha} \|\hat{y}\|^2 \\ &\quad - y^T \hat{y} + \frac{1}{\alpha} \|x(t) - \hat{x}\|^2 + \frac{1}{\alpha} \|y(t) - \hat{y}\|^2, \end{aligned}$$

را تعریف کنید که $\hat{V}(\hat{x}, \hat{y}) = \circ$.

چون $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) \rightarrow \hat{x}$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} y(t_n) \rightarrow \hat{y}$ ، به ازای هر $\varepsilon > \circ$ وجود دارد به‌طوری که $\hat{V}(x(t_k), y(t_k)) < \varepsilon$.

بنا به لم ۲.۲.۳ داریم $\frac{1}{\alpha} \|x(t) - \hat{x}\|^2 + \frac{1}{\alpha} \|y(t) - \hat{y}\|^2 \leq \hat{V}(x(t), y(t)) \leq \hat{V}(x(t_k), y(t_k)) \leq \varepsilon$ و نزولی است.

بنابراین، برای هر $t \geq t_k$ داریم

$$\frac{1}{\alpha} \|x(t) - \hat{x}\|^2 + \frac{1}{\alpha} \|y(t) - \hat{y}\|^2 \leq \hat{V}(x(t), y(t)) \leq \hat{V}(x(t_k), y(t_k)) \leq \varepsilon,$$

که یعنی $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t) = \hat{x}$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} y(t) = \hat{y}$. لذا مسیر حالت شبکه‌ی عصبی (۳.۳) همگرای سراسری به نقطه‌ی تعادل $(\hat{x}, \hat{y})^T$ همگرا می‌شود.

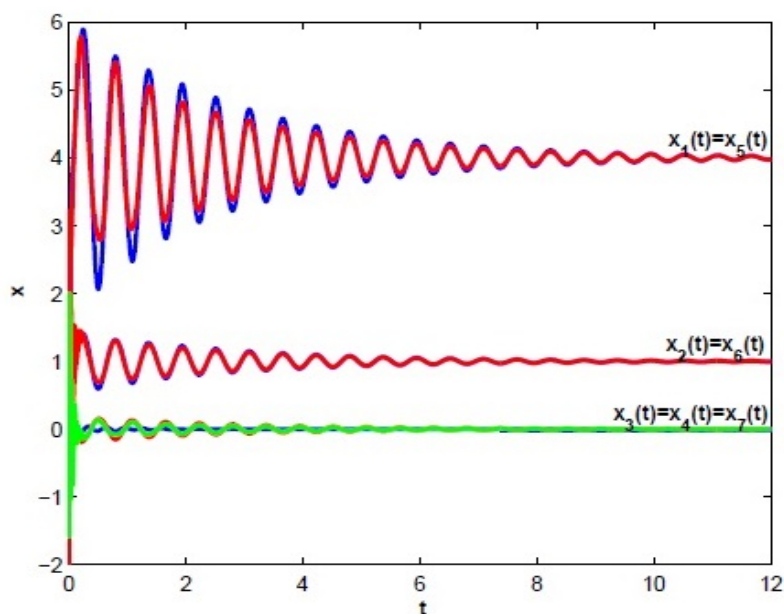
به‌ویژه، اگر $\Omega^e = \{(x^*, y^*)\}$ ، آنگاه بنا به تحلیل فوق مسیر حالت $(x(t), y(t))$ با هر نقطه‌ی اولیه‌ی $(x(\circ), y(\circ))$ به (x^*, y^*) میل خواهد نمود. پس این شبکه‌ی عصبی پایدار مجانبی سراسری است. \square

۳.۳ مثال عددی

در این بخش با ارائه یک مثال عددی کارایی مدل شبکه عصبی ارائه شده نشان داده می‌شود.
مثال ۱.۳.۳. مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \min \quad & -\frac{3}{4}x_4 + 2x_5 - \frac{1}{4}x_6 + 6x_7, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + 0.6x_5 - 0.4x_6 + 0.8x_7 = 0, \\ x_2 + 0.2x_5 - 0.8x_6 + 0.6x_7 = 0, \\ x_3 + 0.4x_5 - 0.6x_6 + 0.2x_7 = 0, \\ x_4 + x_6 - 1 = 0, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 7. \end{cases} \end{aligned} \quad (16.3)$$

با استفاده از مدل شبکه عصبی (۳.۳)، جواب بهینه $x^* = (4, 1, 0, 0, 4, 1, 0)^T$ به دست می‌آید.
 شکل ۱.۳ رفتار گذرا از مدل (۳.۳) را نشان می‌دهد.



شکل ۱.۳: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۱۶.۳)

فصل ۴

انتخاب پرتفوی بهینه

۱.۴ مقدمه

در این فصل چند مدل برای مسأله انتخاب پرتفوی در شرایطی که بازده اوراق بهادار نامعین فرض می‌شود، بیان می‌گردد. با توجه به اینکه این مسائل به روش‌های معمول قابل حل نیستند ایده اصلی کار، جایگزینی این مدل‌ها با معادله‌های دقیق و قطعی آن‌ها در حالاتی خاص از متغیرهای نامعین (مانند متغیر نامعین خطی، زیگزاگ، دوزنقه‌ای، گاوسی) و سپس حل آن‌ها است. برای نشان دادن کارایی مدل شبکه عصبی پیشنهاد شده در فصل قبل، چند مثال عددی از مسائل انتخاب پرتفوی بیان و حل می‌شود.

مسأله انتخاب مجموعه بهینه‌ای از دارایی‌ها، یکی از مسائل بازار سرمایه است که از اهمیت زیادی برخوردار است. در حوزه اقتصاد خرد، اهمیت تصمیمات سرمایه‌گذاری، ناشی از این مسأله است که در واقع فرد سرمایه‌گذار، مصرف و بازده امروز را به امید بازده بیشتر به زمانی در آینده موکول می‌کند. در واقع تصمیم بهینه سرمایه‌گذاری، میزان مطلوبیت هر فرد است که با توجه به ترجیحات شخصی وی تعیین می‌گردد و لزوماً با سایر افراد یکسان نخواهد بود، ولی می‌توان با معیارهایی، مطلوبیت فرد را از انتخاب مجموعه‌ای از دارایی‌های سرمایه‌ای، مشخص کرد. از جمله مهمترین این معیارها، ریسک و بازده کل مجموعه انتخاب شده است. هدف مدیریت مجموعه دارایی‌ها به‌طور عام و مجموعه سهام (سبد سهام) به‌طور خاص، تعیین دارایی‌های درون سبد به‌گونه‌ای که ریسک حداقل و بازده حداکثر شود.

مسأله تنوع‌بخشی در دارایی‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. طبقات مختلف دارایی شامل انواع اوراق بهادار، پول نقد، زمین، طلا و... می‌باشد.

نظریه‌های سرمایه‌گذاری در چند دهه اخیر از پیشرفت‌های زیادی برخوردار بودند و در سیر تاریخی تکاملی خود به فرمول‌های کاربردی زیادی دست یافتند. حجم تجارت و سرمایه‌گذاری طی قرن بیستم و اوایل بیست‌ویکم گسترش فراوانی داشته است. این گسترش و تغییرات حاصل از آن موجب شده است که معیارهای متفاوتی برای اخذ تصمیم سرمایه‌گذار در مقایسه با دوره‌های گذشته به کار گرفته شود. از عوامل موثر در انتخاب و انجام سرمایه‌گذاری دو مفهوم ریسک و بازده و رابطه این دو با یکدیگر است. در قرن ۱۸ میلادی برنولی^۱ و کرامر^۲ به این نتیجه رسیدند که تصمیمات تحت شرایط عدم اطمینان نباید صرفاً بر اساس بازده مورد انتظار صورت پذیرد.

تا اوایل قرن بیستم میلادی، سرمایه‌گذاران جهت اخذ تصمیم در فرآیند سرمایه‌گذاری از نسبت‌های بازده سرمایه‌گذاری استفاده می‌کردند و توجهی به مفاهیم ارزش زمانی پول و ریسک سرمایه‌گذاری نداشتند. از دهه ۱۹۲۰ مفهوم ارزش زمانی پول با روش‌های تنزیلی وارد حوزه ادبیات مالی و سرمایه‌گذاری شد. این روش‌ها، تحولی قابل توجه در انتخاب طرح‌های سرمایه‌گذاری به وجود آوردند. لیکن همچنان رفتار متفاوت سرمایه‌گذاران در مواجهه با ریسک نادیده گرفته می‌شد. در واقع با وجود اینکه نظریه مطلوبیت پول تا حدودی به تکامل معیارهای انتخاب کمک نموده بود، لیکن هنوز از جامعیت کافی برخوردار نبود. تا دهه ۱۹۵۰ ریسک یک عامل کیفی به‌شمار می‌رفت تا اینکه هری مارکوویتز برای نخستین بار ریسک را کمیت‌پذیر نمود و انحراف معیار جریان نقدی طرح‌های سرمایه‌گذاری را به‌عنوان کمیت سنجش ریسک معرفی کرد. چندی بعد ویلیام شارپ در [۴۱] با تبیین ضریب حساسیت β به‌عنوان معیار ریسک، مدل ساده‌تر و کاربردی‌تری را به دنیای تئوری‌های سرمایه‌گذاری عرضه کرد. این روش امروز به‌عنوان مدل تک شاخصی معروف است. در ادامه این روند و در اواسط دهه ۶۰ شارپ و لینتر [۲۸] بر پایه نظریه بازار سرمایه، مدلی را توسعه دادند که امروزه تحت عنوان مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای^۳ شناخته می‌شود. این مدل ریسک سیستماتیک و غیر سیستماتیک را به‌عنوان اجزای اصلی ریسک از یکدیگر تفکیک می‌کند. در دهه ۷۰، پروفیسور راس^۴، مدل آربیتراژ^۵ را در [۴۰] پایه‌گذاری کرد. (برای توضیحات بیشتر به [۳۶] و [۳] مراجعه شود).

۲.۴ مسأله بهینه‌سازی پرتفوی

در سال ۱۹۵۲ میلادی، هری مارکوویتز مدل بنیادی پرتفوی را ارائه داد که مبنایی بر تئوری مدرن سبد سرمایه گردید. پیش از ارائه این تئوری سرمایه‌گذاران علیرغم آشنایی با مفاهیم ریسک و بازده، قادر به اندازه‌گیری آن به روش کمی نبودند. مارکوویتز نخستین کسی بود که مفهوم تنوع‌بخشی در سبد سرمایه‌گذاری به‌طور عام و سبد سهام به‌طور خاص را بسط و گسترش داد. او این موضوع که چگونه متنوع‌سازی سبد سرمایه می‌تواند منجر به کاهش ریسک سرمایه‌گذاری یک سرمایه‌گذار شود را، به‌صورت کمی بیان نمود.

^۱ Bernoulli

^۲ Cramer

^۳ Capital Asset Pricing Model (CAPM)

^۴ Ross

^۵ Arbitrage Pricing Theory

نظریه مدرن سبد سرمایه MPT^۶ براساس رابطه بازدهی و ریسک محاسبه شده از طریق واریانس و انحراف معیار بازدهی تبیین می‌شود. نظریه فرامدرن سبد سرمایه PMPT^۷ براساس رابطه‌ی ریسک نامطلوب به تبیین رفتار سرمایه‌گذار و معیار انتخاب سبد سرمایه بهینه می‌پردازد (برای توضیحات بیشتر، مراجع [۱۷] و [۱۸] را ببینید). مارکوویتز در فرمول‌بندی مدل میانگین - واریانس^۸ MV خود، به هدف سرمایه‌گذاری در طرح‌هایی است که بازدهی بیشتر و ریسک کمتر داشته باشد. عاقل به دنبال سرمایه‌گذاری در طرح‌هایی است که بازدهی بیشتر و ریسک کمتر داشته باشد. وی ریسک یک سرمایه‌گذاری را تنها در انحراف معیار آن طرح جستجو نمی‌کرد، بلکه به رابطه بین دارایی‌های مختلف در سبد سرمایه و تاثیر این رابطه بر ریسک کل هم توجه داشت. یکی دیگر از مفاهیمی که مارکوویتز مطرح نمود، سبد سرمایه کارا (سبد سهام کارا) بود، که به معنای ترکیب مطلوب اوراق بهادار است به نحوی که ریسک آن سبد سرمایه در ازای بازده معینی حداقل شود یا بازده سبد سرمایه در ازای ریسک معین حداکثر شود.

مدل مارکوویتز بر اساس مفروضاتی شکل گرفته است. این مفروضات عبارتند از:

۱. سرمایه‌گذار دارای رفتار عقلایی است.
۲. سرمایه‌گذاران، ریسک‌گریزند و دارای مطلوبیت مورد انتظار افزایشی هستند.
۳. سرمایه‌گذاران، سبد سرمایه خود را بر مبنای میانگین و واریانس بازده مورد انتظار انتخاب می‌کنند.
۴. هر گزینه سرمایه‌گذاری تا بی‌نهایت قابل تقسیم است.
۵. سرمایه‌گذاران یک افق زمانی معین داشته و این برای همه مشابه است.
۶. سرمایه‌گذاران، در یک سطح مشخص از ریسک، بازده بالاتری را ترجیح می‌دهند و بالعکس برای سطح معینی از بازدهی خواهان، کمترین ریسک هستند.
۷. بازارها کامل هستند (هزینه مالیات و معاملات وجود ندارد).

در رویکرد مارکوویتز بازده دارایی‌ها به صورت متغیر تصادفی در نظر گرفته می‌شود که احتمال آنها از تابع توزیع نرمال به دست می‌آید. میانگین به عنوان معیار کارایی سبد سرمایه و انحراف معیار هم به عنوان شاخص ریسک سبد سرمایه در نظر گرفته می‌شود. ورودی‌های اصلی مدل مارکوویتز عبارتند از بازده مورد انتظار، ماتریس واریانس - کواریانس بازدهی دارایی‌ها و ضریب همبستگی بین بازدهی‌ها. مدل کلاسیک MV به صورت زیر بیان می‌شود [۳۳].

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} X^T \Sigma X, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \mu^T X = R, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.4)$$

^۶ Modern Portfolio Theory

^۷ Post-modern Portfolio Theory

^۸ Mean-Variance

که در آن

$$\mu^T X = E[X] = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i,$$

$$X^T \Sigma X = V[X] = \sum_{i,j} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j x_i x_j,$$

و x_i نسبت سرمایه‌گذاری در سهم i ام، ρ_{ij} ضریب همبستگی بین سهم i ام و j ام، ξ_i بازدهی مورد انتظار و σ_i ریسک سهم i ام هستند و قید اول نشان‌دهنده سطح مشخصی از بازدهی مورد انتظار یعنی R است. قید دوم این اطمینان را می‌دهد که تمام بودجه سرمایه‌گذاری شود و قید آخر هم نشان‌دهنده این است که سرمایه‌گذار اجازه فروش استقراضی را ندارد. متأسفانه مدل مارکوویتز یک سری معایب و فرضیات غیر واقعی دارد که از جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱. با افزایش تعداد دارایی، حجم محاسبات ماتریس کواریانس بیش از اندازه بزرگ می‌شود.
۲. محدودیت‌هایی که در دنیای واقعی وجود دارد، در مدل مارکوویتز در نظر گرفته نشده است، همانند محدودیت سهام ثابت در سبد سرمایه، هزینه‌های معاملاتی^۹، خرید آستانه‌ای^{۱۰}، معاملات بلوکی، معادلات سهام در دسته‌های ثابت و...، اکثر این محدودیت‌ها از توابع غیرخطی پیروی می‌کنند که مدل‌ها را برای حل دچار پیچیدگی می‌نماید.
۳. فرض نرمال بودن تابع توزیع بازده دارایی‌ها فرض قابل قبولی نیست.
۴. معیار عمومی ریسک، واریانس و یا انحراف معیار است که این معیار یک دارایی با توزیع نرمال و در بازار کارا قابل قبول است. اگر این دو خصوصیت برای دارایی وجود نداشته باشد، واریانس معیار مناسبی نیست.

۱.۲.۴ مدل‌های جایگزین

در سال ۱۹۵۹ مارکوویتز به مزایای ریسک نامطلوب اشاره کرد [۳۴]. او به این نتیجه رسید که سرمایه‌گذاران به دو علت مایل به حداقل ساختن ریسک نامطلوب هستند، نخست اینکه سرمایه‌گذاران ابتدا به امنیت اصل سرمایه می‌اندیشند و دوم وقتی که توزیع متغیرهای تصادفی (نرخ بازدهی) از نوع نرمال نباشد، آن‌گاه معیار ریسک نامطلوب مفید خواهد بود. بعدها در سال ۱۹۹۱ وی هنگام دریافت جایزه نوبل اقتصاد برای ارائه نظریه مدرن سبد سرمایه و مدل مارکوویتز نیز به این مسأله اشاره داشت.

سال ۱۹۷۳ لی و لرو^{۱۱} [۲۱]، مدلی به‌منظور بهینه‌سازی سبد سرمایه با به‌کارگیری برنامه‌ریزی آرمانی ارائه نمودند. چندی بعد در سال ۱۹۸۰ لی و چیسیر^{۱۲} [۲۰]، نگرش برنامه‌ریزی آرمانی چند معیاره^{۱۳} را مطرح کردند. کونو و یامازاکی در سال ۱۹۹۱، مدلی از طریق برنامه‌ریزی

^۹ Cardinality Constraint

^{۱۰} Transaction Cost

^{۱۱} Lee and Lerro

^{۱۲} Lee and Chesser

^{۱۳} Multi-Criteria Goal Programming

خطی برای بهبودسازی سبد سرمایه‌گذاری ارائه کردند. پس از آن در سال ۱۹۹۷، اسپرانزا و مانسینی^{۱۴} [۳۲]، مدلی از برنامه‌ریزی صحیح آمیخته^{۱۵} را با خصوصیات واقعی مثل هزینه‌های معاملات و حداقل واحدهای معاملات ارائه داد و برای حل آن از الگوریتم‌های ابتکاری کمک گرفتند و مدل را برای بازار سهام میلان آزمایش کردند. سال ۱۹۹۸ یونگ^{۱۶} [۵۲]، مدل بهبودسازی سبد سرمایه قابل حل توسط برنامه‌ریزی خطی را ارائه کرد که در آن ریسک بر مبنای بدترین حالت تعریف شده و آن را رویکرد "مینیماکس"^{۱۷} نامید. سال ۱۹۹۹ ژیا و همکاران [۴۸] مدلی خاص را معرفی کردند. در فوریه همین سال چانگ^{۱۸} و همکاران [۴]، به ارائه مدلی پارامتریک و غیرخطی جهت بهبودسازی سهام پرداختند. در ادامه در نوامبر همین سال، جوناس پالمکوئیست^{۱۹} و همکارانش [۳۷] به معرفی بهبودسازی سبد سرمایه با محدودیت‌ها و تابع هدف ارزش در معرض ریسک شرطی، مدلی از نوع برنامه‌ریزی خطی ارائه دادند. در سال ۲۰۰۲ لوبو^{۲۰} و همکاران [۲۹] به بهبودسازی سبد با اعمال هزینه‌های معاملات خطی و ثابت پرداختند. در همین سال، کریستوس پاپاریستودولو^{۲۱} [۳۸] به ارائه مدلی در این زمینه پرداخت و سپس با طرح مسأله‌ای متشکل از ۵ سهام در دوره زمانی ۱۲ ماهه به مقایسه سبدهای به دست آمده در هر مدل پرداخت. در سال ۲۰۰۳ آلکسی چخلاو^{۲۲} و همکاران در مقاله‌ای تحت عنوان «بهبودسازی سبد سرمایه با محدودیت‌های کاهش‌دهنده» به ارائه مدلی در این زمینه پرداخت سپس در همان سال مانسینی^{۲۳} و همکارانش [۳۱] به معرفی مدلی از نوع برنامه‌ریزی خطی پرداخته‌اند. در سال ۲۰۰۴ گاندریو^{۲۴} و همکاران برای حل مسائل بهبودسازی غیرخطی سبد سرمایه، روش نقطه درونی اولیه - دوگان را معرفی کردند.

۳.۴ بهبودسازی پرتفوی با بازده نامعین

در مدل‌های معمولی پرتفوی همواره از بازده‌های تحقق‌یافته اوراق بهادار که مربوط به گذشته بوده و با اطلاعات دقیق تاریخی تعیین می‌شوند استفاده می‌شود. با این حال، اطلاعات دقیق همیشه در دسترس نیست و امروزه، با توسعه بازارهای سهام، پیش‌بینی بازده مورد انتظار اوراق بهادار با مقادیر تصادفی نسبتاً سخت است. بنابراین، برای رسیدگی به این قبیل از عدم اطمینان بهتر است که بازده‌های مورد انتظار را به صورت متغیرهایی با توزیع مبهم، مانند: متغیرهای فازی یا متغیرهای نامطمئن، در مسائل پرتفوی در نظر بگیریم. در این پایان‌نامه به بررسی مسأله انتخاب پرتفوی بهینه، زمانی که بازده متغیر نامعین باشد می‌پردازیم.

^{۱۴} Mansini and Speranza

^{۱۵} Mixed Integer Programming

^{۱۶} young

^{۱۷} Minimax

^{۱۸} Chang

^{۱۹} Palmquist

^{۲۰} Lobo

^{۲۱} Papahristodoulou

^{۲۲} Alexi Chekhlov

^{۲۳} Mansini

^{۲۴} Gandryv

۴.۴ مدل میانگین - ارزش در معرض ریسک

این مدل در مسأله انتخاب سبد سرمایه بهینه، به گونه‌ای است که در آن، بازده سرمایه‌گذاری را امید ریاضی سبد سرمایه و ارزش در معرض ریسک را به عنوان معیار ریسک در نظر می‌گیریم. با توجه به میزان ریسک‌پذیری افراد در سرمایه‌گذاری از این مدل به دو صورت مدل ریسک‌پذیر و مدل ریسک‌گریز به صورت زیر استفاده می‌شود.

- مدل ریسک‌پذیر که در آن سرمایه‌گذار، مقدار بازده معینی را انتظار دارد و می‌خواهد ریسک را با توجه به سطح بازده مینیمم کند، مدل بهینه‌سازی آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{VaR}(\beta), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} E[\sum_{i=1}^n x_i \xi_i] \geq R, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.4)$$

- مدل ریسک‌گریز، یک پرتفوی با ارزش مورد انتظار بهینه، برای یک سطح مشخصی از ریسک است. مدل بهینه‌سازی آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \max \quad & E[\sum_{i=1}^n x_i \xi_i], \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \text{VaR}(\beta) \leq S, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4)$$

در مدل‌های فوق x_i نسبت سرمایه‌گذاری در سهام i ام و ξ_i نشان‌دهنده بازده نامعین i امین سهام $i = 1, 2, \dots, n$ و S ماکزیمم سطح ریسک سرمایه‌گذاری که صورت می‌گیرد و R مینیمم بازده مورد انتظار و همچنین E امید ریاضی و $\text{VaR}(\beta)$ ارزش در معرض ریسک با ضریب اطمینان $\beta \in (0, 1]$ که مقداری ثابت می‌باشد در نظر گرفته شده است.

۱.۴.۴ معادله‌های قطعی

در راه‌حل‌های معمول نیاز به تبدیل تابع هدف و قیدها به معادله دقیق آن‌ها است. همانطور که می‌دانیم اجرا و موفق بودن این فرایند در مواردی خاص و بسیار دشوار است. با جایگزینی مدل‌های نامعین با معادله‌های قطعی در حالاتی خاص به حل مسأله انتخاب سبد سرمایه مدل میانگین - ارزش در معرض ریسک می‌پردازیم.

حالت نامعین خطی

فرض کنید نرخ بازده ورق بهادار i ام، ξ_i متغیر نامعین خطی باشد، در این صورت داریم:

$$\xi_i = \mathcal{L}(a_i, b_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

لذا $\sum_{i=1}^n x_i \xi_i$ متغیر نامعین خطی است. با استفاده از لم‌های (۱.۸.۲) و (۱.۷.۲) مدل بهینه‌سازی (۲.۴) برای $0 < \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n x_i (a_i \beta + (1 - \beta) b_i), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + b_i}{2} \right) \geq R, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.4)$$

همچنین مدل بهینه‌سازی (۳.۴) برای $0 < \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + b_i}{2} \right), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i (a_i \beta + (1 - \beta) b_i) \leq S, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.4)$$

حالت نامعین زیگزاگ

فرض کنید نرخ بازده ورق بهادار i ام، ξ_i متغیر نامعین زیگزاگ باشد، در این صورت داریم:

$$\xi_i = \mathcal{Z}(a_i, b_i, c_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

لذا $\sum_{i=1}^n x_i \xi_i$ متغیر نامعین زیگزاگ است. با استفاده از لم‌های (۲.۸.۲) و (۲.۷.۲) مدل بهینه‌سازی (۲.۴) برای $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n x_i ((2\beta - 1)a_i + (1 - \beta)2b_i), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + 2b_i + c_i}{4} \right) \geq R, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \end{aligned} \quad (6.4)$$

و برای $1 > \beta \geq \frac{1}{4}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n x_i (\beta b_i + (1 - \beta)c_i), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + \beta b_i + c_i}{4} \right) \geq R, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.4)$$

همچنین مدل بهینه سازی (۳.۴) برای $0 < \beta \leq \frac{1}{4}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + \beta b_i + c_i}{4} \right), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i ((\beta - 1)a_i + (1 - \beta)b_i) \leq S, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \end{aligned} \quad (8.4)$$

و برای $1 > \beta \geq \frac{1}{4}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + \beta b_i + c_i}{4} \right), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i (\beta b_i + (1 - \beta)c_i) \leq S, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (9.4)$$

حالت نامعین دوزنقه‌ای

فرض کنید نرخ بازده ورق بهادار i ام، ξ_i متغیر نامعین دوزنقه‌ای باشد، در این صورت داریم:

$$\xi_i = \mathcal{T}(a_i, b_i, c_i, d_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

لذا $\sum_{i=1}^n x_i \xi_i$ متغیر نامعین دوزنقه‌ای است. با استفاده از لم‌های (۳.۸.۲) و (۳.۷.۲) مدل بهینه سازی (۲.۴) برای $0 < \beta \leq \frac{1}{4}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n x_i ((\beta - 1)a_i + \beta b_i (1 - \beta)), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + b_i + c_i + d_i}{4} \right) \geq R, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \end{aligned} \quad (10.4)$$

و برای $1 > \beta \geq \frac{1}{4}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n x_i (\gamma \beta c_i + (1 - \gamma \beta) d_i), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + b_i + c_i + d_i}{4} \right) \geq R, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (11.4)$$

همچنین مدل بهینه سازی (۳.۴) برای $0 < \beta \leq \frac{1}{4}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + b_i + c_i + d_i}{4} \right), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i ((\gamma \beta - 1) a_i + \gamma b_i (1 - \beta)) \leq S, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \end{aligned} \quad (12.4)$$

و برای $1 > \beta \geq \frac{1}{4}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + b_i + c_i + d_i}{4} \right), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i (\gamma \beta c_i + (1 - \gamma \beta) d_i) \leq S, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (13.4)$$

حالت نامعین گاوسی

فرض کنید نرخ بازده ورق بهادار i ام، ξ_i متغیر نامعین گاوسی باشد، در این صورت داریم:

$$\xi \sim \mathcal{N}(e_i, \sigma_i), i = 1, 2, \dots, n.$$

لذا $\sum_{i=1}^n x_i \xi_i$ متغیر نامعین گاوسی است. با استفاده از لم های (۴.۸.۲) و (۴.۷.۲) مدل بهینه سازی

(۲.۴) برای $0 < \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n x_i \left(e_i + \frac{\sqrt{\gamma} \sigma_i}{\pi} \ln \left(\frac{1 - \beta}{\beta} \right) \right), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i e_i \geq R, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (14.4)$$

همچنین مدل بهینه‌سازی (۳.۴) برای $0 < \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n x_i e_i, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \left(e_i + \frac{\sqrt{V} \sigma_i}{\pi} \ln \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right) \leq S, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (15.4)$$

۵.۴ مثال‌های عددی

برای نشان دادن کارایی مدل‌های ذکر شده در حل مسائل انتخاب پرتفوی در شرایط نامعین مثال‌هایی مطرح و حل می‌شود. در شبیه‌سازی همه مثال‌ها از دستور ode45 در متلب استفاده شده است که معادل روش رانگ کوتای مرتبه ۴ برای حل معادلات دیفرانسیل است.

مثال ۱.۵.۴. فرض کنید ۱۰ ورق بهادار با بازده خطی $\xi_i = \mathcal{L}(a_i, b_i)$ داریم و نرخ بازده‌ها به صورت زیر باشد.

جدول ۱.۴: بازده‌های نامعین خطی از سهام‌های مختلف

سهام	بازده	سهام	بازده
۱	$\mathcal{L}(1/0, 1/2)$	۶	$\mathcal{L}(0/5, 1/5)$
۲	$\mathcal{L}(0/8, 1/0)$	۷	$\mathcal{L}(0/1, 0/6)$
۳	$\mathcal{L}(2/1, 2/3)$	۸	$\mathcal{L}(0/3, 0/7)$
۴	$\mathcal{L}(0/9, 1/4)$	۹	$\mathcal{L}(1/7, 2/4)$
۵	$\mathcal{L}(2/0, 3/3)$	۱۰	$\mathcal{L}(0/4, 0/9)$

فرض کنید $\beta = 0/1$ ، میزان ریسک حداکثر ۶٪ و ارزش مورد انتظار سرمایه‌گذار حداقل ۲/۵ باشد. از مدل‌های (۴.۴) و (۵.۴) داریم:

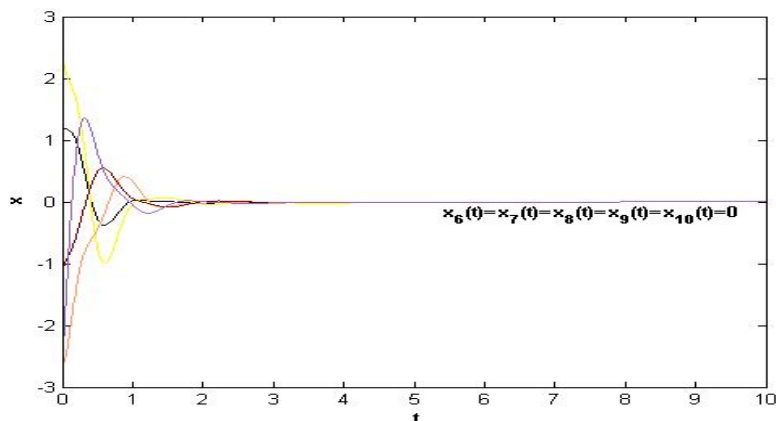
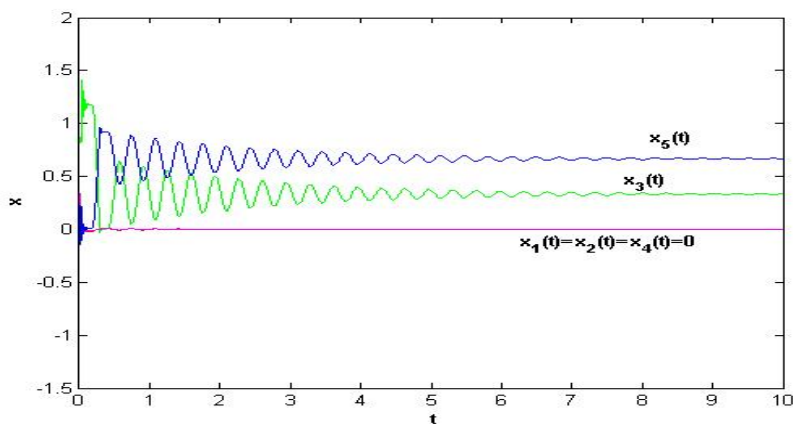
$$\begin{aligned} \min \quad & 1/18x_1 + 0/98x_2 + 2/28x_3 + 1/35x_4 + 3/17x_5 + 1/4x_6 + 0/55x_7 \\ & + 0/66x_8 + 2/33x_9 + 0/85x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 1/1x_1 + 0/9x_2 + 2/2x_3 + 1/15x_4 + 2/65x_5 + x_6 + 0/35x_7 + 0/5x_8 \\ \quad + 2/05x_9 + 0/65x_{10} \geq 2/5, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (16.4)$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 1/1x_1 + 0/9x_2 + 2/2x_3 + 1/15x_4 + 2/65x_5 + x_6 + 0/35x_7 \\ & + 0/5x_8 + 2/05x_9 + 0/65x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 1/18x_1 + 0/98x_2 + 2/28x_3 + 1/35x_4 + 3/17x_5 + 1/4x_6 \\ \quad + 0/55x_7 + 0/66x_8 + 2/33x_9 + 0/85x_{10} \leq 0/6, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (17.4)$$

با استفاده از متلب و مدل کردن این مسأله با کمک شبکه عصبی مطرح شده در فصل سوم جواب بهینه برای مدل (۱۶.۴) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x^* = (0, 0, 0/33, 0, 0/67, 0, 0, 0, 0, 0)^T$$

یعنی سرمایه‌گذار برای مینیمم کردن ریسک در حالی که حداقل بازده ۲/۵ را داشته باشد باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه‌گذاری کند. رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مسأله (۱۶.۴) در شکل ۱.۴ نمایش داده شده است.



شکل ۱.۴: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۱۶.۴)

فرض کنید $\beta = 0.2$ ، میزان ریسک حداکثر $3/2$ و ارزش مورد انتظار سرمایه‌گذار حداقل ۲ باشد. از مدل‌های (۶.۴) و (۷.۴) داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & 3/48x_1 + 3/1x_2 + 5/04x_3 + 3/26x_4 + 5/16x_5 + 4/12x_6 + 4/92x_7 \\ & + 4/24x_8 + 4/66x_9 + 3/38x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 1/625x_1 + 1/675x_2 + 2/4x_3 + 1/6x_4 + 2/35x_5 + 1/95x_6 \\ \quad + 2/325x_7 + 2/15x_8 + 2/125x_9 + 1/55x_{10} \geq 2, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (18.4)$$

9

$$\begin{aligned} \max \quad & 1/625x_1 + 1/675x_2 + 2/4x_3 + 1/6x_4 + 2/35x_5 + 1/95x_6 + 2/325x_7 \\ & + 2/15x_8 + 2/125x_9 + 1/55x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 3/48x_1 + 3/1x_2 + 5/04x_3 + 3/26x_4 + 5/16x_5 + 4/12x_6 \\ \quad + 4/92x_7 + 4/24x_8 + 4/66x_9 + 3/38x_{10} \leq 3/2, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (19.4)$$

همچنین از مدل (۸.۴) و (۹.۴) و برای $\beta = 0.6$ داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & 2/02x_1 + 1/68x_2 + 2/8x_3 + 1/9x_4 + 2/8x_5 + 2/4x_6 + 2/9x_7 \\ & + 2/2x_8 + 2/72x_9 + 1/9x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 1/625x_1 + 1/675x_2 + 2/4x_3 + 1/6x_4 + 2/35x_5 + 1/95x_6 \\ \quad + 2/325x_7 + 2/15x_8 + 2/125x_9 + 1/55x_{10} \geq 2, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (20.4)$$

9

$$\begin{aligned} \max \quad & 1/625x_1 + 1/675x_2 + 2/4x_3 + 1/6x_4 + 2/35x_5 + 1/95x_6 + 2/325x_7 \\ & + 2/15x_8 + 2/125x_9 + 1/55x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 2/02x_1 + 1/68x_2 + 2/8x_3 + 1/9x_4 + 2/8x_5 + 2/4x_6 \\ \quad + 2/9x_7 + 2/2x_8 + 2/72x_9 + 1/9x_{10} \leq 3/2, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (21.4)$$

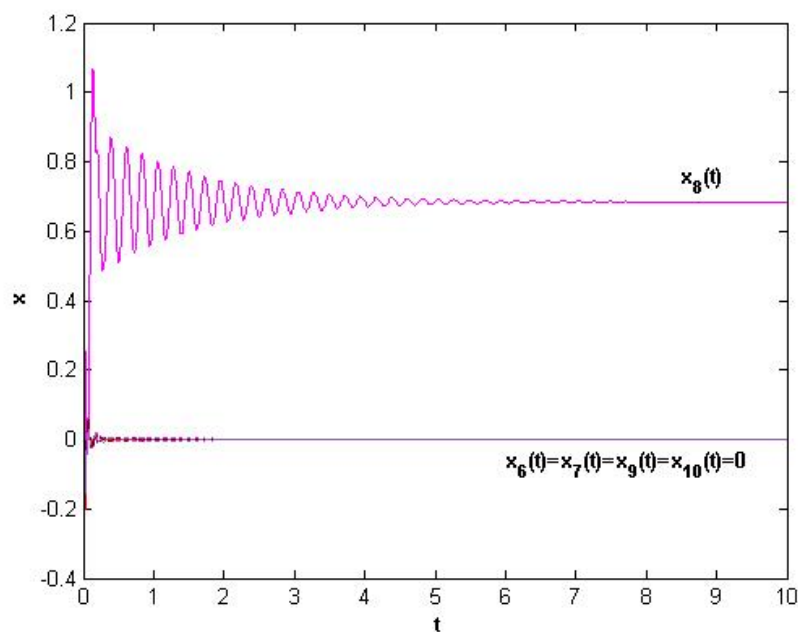
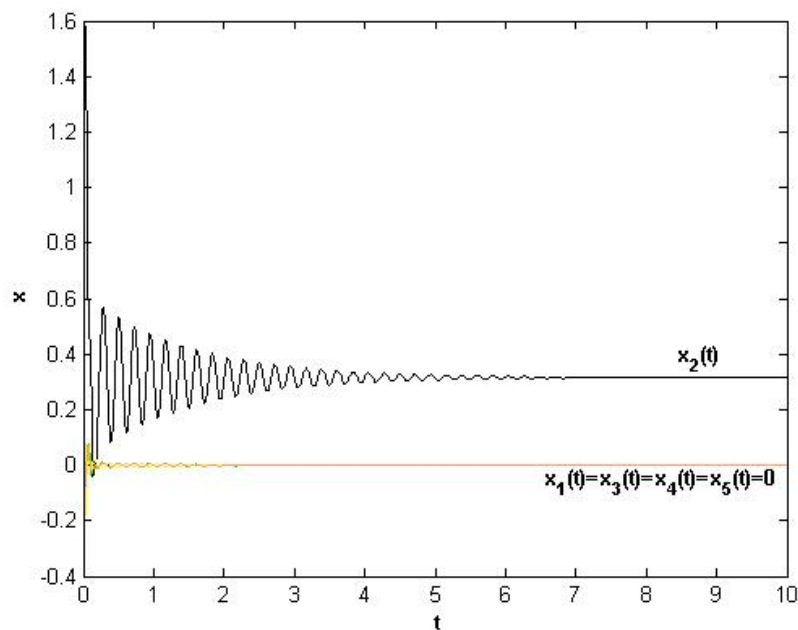
با استفاده از متلب و مدل کردن این مسأله با کمک شبکه عصبی مطرح شده در فصل سوم جواب بهینه برای مدل (۱۸.۴) به صورت

$$x^* = (0, 0.32, 0, 0, 0, 0, 0.68, 0, 0)^T$$

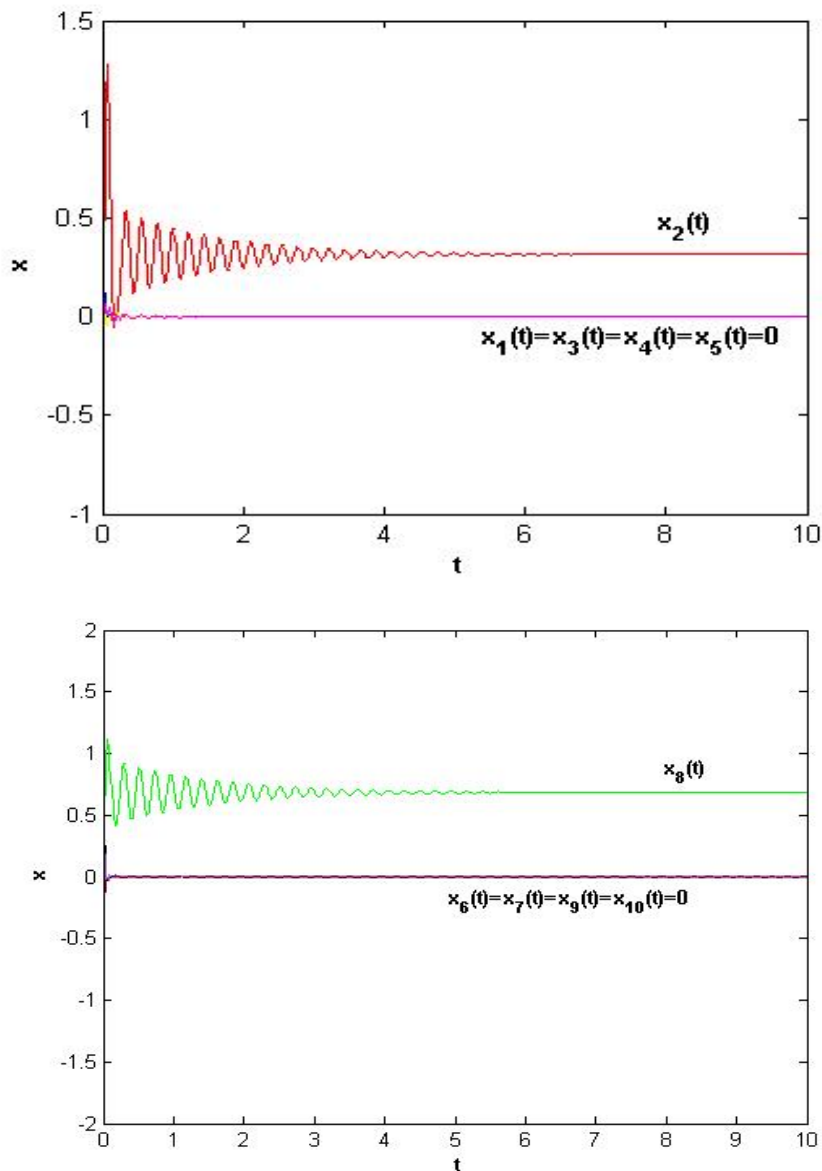
و برای (۲۰.۴) به صورت زیر است:

$$x^* = (0, 0.32, 0, 0, 0, 0, 0, 0.68, 0, 0)^T$$

یعنی سرمایه گذار برای مینیمم کردن ریسک در حالی که حداقل بازده ۲ را داشته باشد باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه گذاری کند. رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مسائل (۱۸.۴) و (۲۰.۴) در شکل های ۳.۴ و ۴.۴ نمایش داده شده است.



شکل ۳.۴: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۱۸.۴)



شکل ۴.۴: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۲۰.۴)

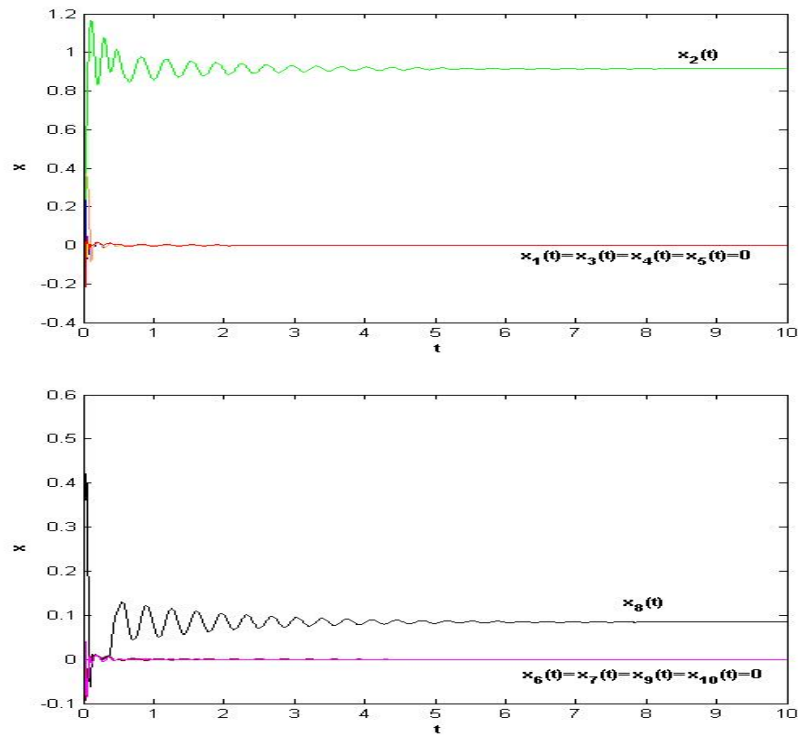
همچنین جواب بهینه برای مدل (۱۹.۴) به صورت

$$X^* = (0, 0/91, 0, 0, 0, 0, 0, 0/9, 0, 0)^T$$

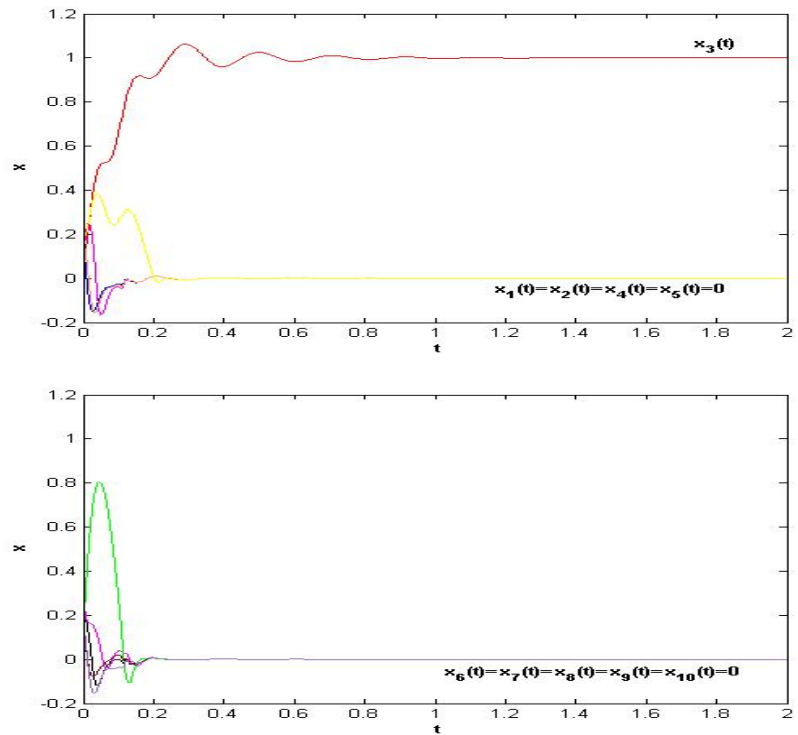
و برای مدل (۲۱.۴) به صورت زیر است:

$$X^* = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$$

یعنی برای به دست آوردن ماکزیمم بازده مورد انتظار با ریسک حداکثر $3/2$ سرمایه‌گذار باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه‌گذاری کند. رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مسائل (۱۹.۴) و (۲۱.۴) در شکل‌های ۵.۴ و ۶.۴ نمایش داده شده است.



شکل ۵.۴: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۱۹.۴)



شکل ۶.۴: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۲۱.۴)

مثال ۳.۵.۴. فرض کنید 10 ورق بهادار با بازده دوزنقه‌ای $\xi_i = T(a_i, b_i, c_i, d_i)$ داریم و نرخ بازده‌ها به صورت زیر باشد.

جدول ۳.۴: بازده‌های نامعین دوزنقه‌ای از سهام‌های مختلف

سهام	بازده	سهام	بازده
۱	$T(0/2, 0/4, 1/0, 1/1)$	۶	$T(-0/5, 1/7, 3/0, 3/7)$
۲	$T(0/5, 0/7, 1/3, 1/5)$	۷	$T(2/0, 2/5, 3/1, 4/0)$
۳	$T(0/2, 0/8, 2/0, 2/2)$	۸	$T(-2/0, 0/2, 1/0, 1/6)$
۴	$T(0/1, 0/3, 0/5, 0/9)$	۹	$T(-0/2, 3/0, 3/5, 4/0)$
۵	$T(-0/7, 0/7, 3/0, 3/2)$	۱۰	$T(0/1, 0/9, 2/0, 2/2)$

فرض کنید $\beta = 0/3$ ، میزان ریسک حداکثر $0/7$ و ارزش مورد انتظار سرمایه‌گذار حداقل $1/5$ باشد. از مدل‌های (۱۰.۴) و (۱۱.۴) داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & 0/48x_1 + 0/78x_2 + 1/04x_3 + 0/38x_4 + 1/26x_5 + 2/58x_6 + 2/7x_7 \\ & + 1/08x_8 + 4/28x_9 + 1/22x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 0/675x_1 + x_2 + 1/3x_3 + 0/45x_4 + 1/55x_5 + 1/975x_6 \\ \quad + 2/9x_7 + 0/2x_8 + 2/575x_9 + 1/3x_{10} \geq 1/5, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (22.4)$$

9

$$\begin{aligned} \max \quad & 0/675x_1 + x_2 + 1/3x_3 + 0/45x_4 + 1/55x_5 + 1/975x_6 + 2/9x_7 \\ & + 0/2x_8 + 2/575x_9 + 1/3x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 0/48x_1 + 0/78x_2 + 1/04x_3 + 0/38x_4 + 1/26x_5 + 2/58x_6 \\ \quad + 2/7x_7 + 1/08x_8 + 4/28x_9 + 1/22x_{10} \leq 0/7, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (23.4)$$

همچنین از مدل‌های (۱۲.۴) و (۱۳.۴) و برای $\beta = 0/7$ داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & 0/96x_1 + 1/22x_2 + 1/92x_3 + 0/34x_4 + 2/92x_5 + 2/72x_6 + 2/74x_7 \\ & + 0/76x_8 + 3/3x_9 + 1/92x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 0/675x_1 + x_2 + 1/3x_3 + 0/45x_4 + 1/55x_5 + 1/975x_6 \\ \quad + 2/9x_7 + 0/2x_8 + 2/575x_9 + 1/3x_{10} \geq 1/5, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (24.4)$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 0/675x_1 + x_2 + 1/3x_3 + 0/45x_4 + 1/55x_5 + 1/975x_6 + 2/9x_7 \\ & + 0/2x_8 + 2/575x_9 + 1/3x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 0/96x_1 + 1/22x_2 + 1/92x_3 + 0/34x_4 + 2/92x_5 + 2/72x_6 \\ \quad + 2/74x_7 + 0/76x_8 + 3/3x_9 + 1/92x_{10} \leq 0/7, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (25.4)$$

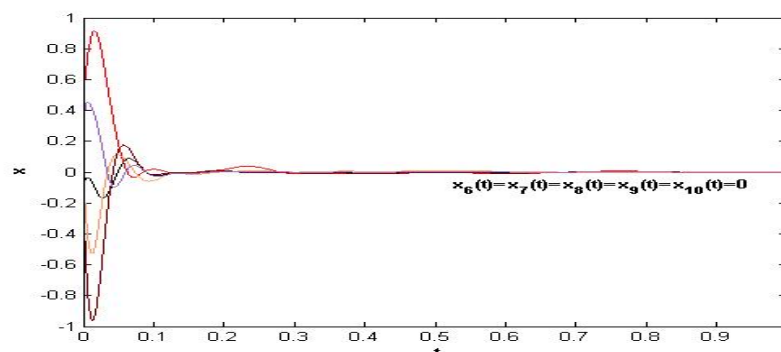
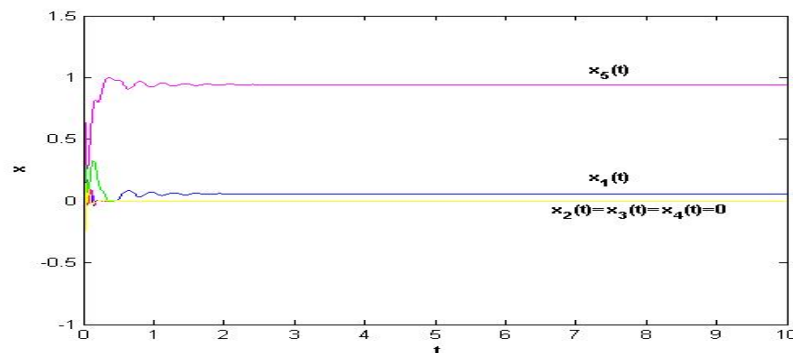
با استفاده از متلب و مدل کردن این مسأله با کمک شبکه عصبی مطرح شده در فصل سوم جواب بهینه برای مدل (۲۲.۴) به صورت

$$x^* = (0/06, 0, 0, 0, 0/94, 0, 0, 0, 0, 0)^T$$

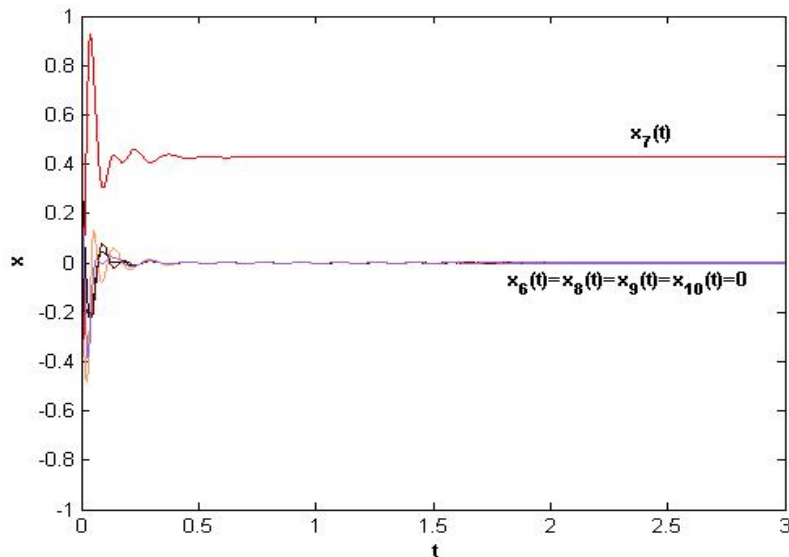
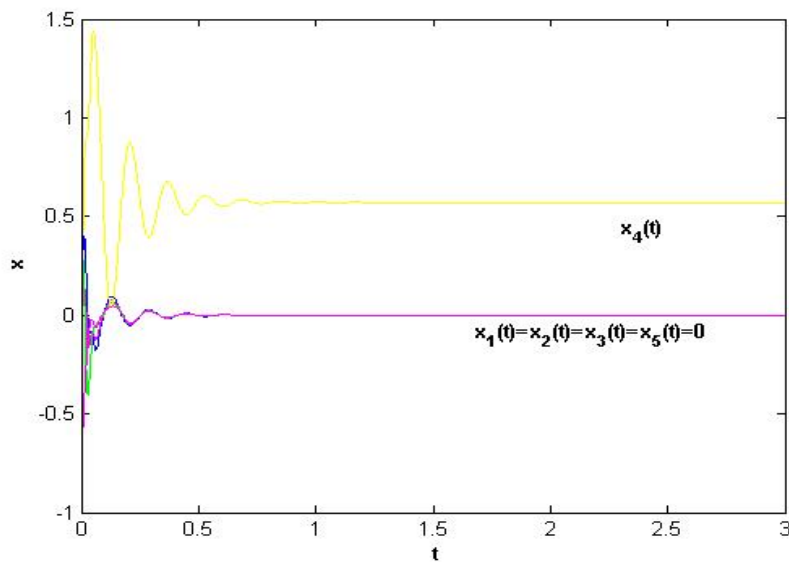
و برای (۲۴.۴) به صورت زیر است:

$$x^* = (0, 0, 0, 0/57, 0, 0, 0/43, 0, 0, 0)^T$$

یعنی سرمایه گذار برای مینیمم کردن ریسک در حالی که حداقل بازده ۱/۵ را داشته باشد باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه گذاری کند. رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مسائل (۲۲.۴) و (۲۴.۴) در شکل های ۷.۴ و ۸.۴ نمایش داده شده است.



شکل ۷.۴: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۲۲.۴)



شکل ۸.۴: نمودار همگرایی x_i ‌ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۲۴.۴)

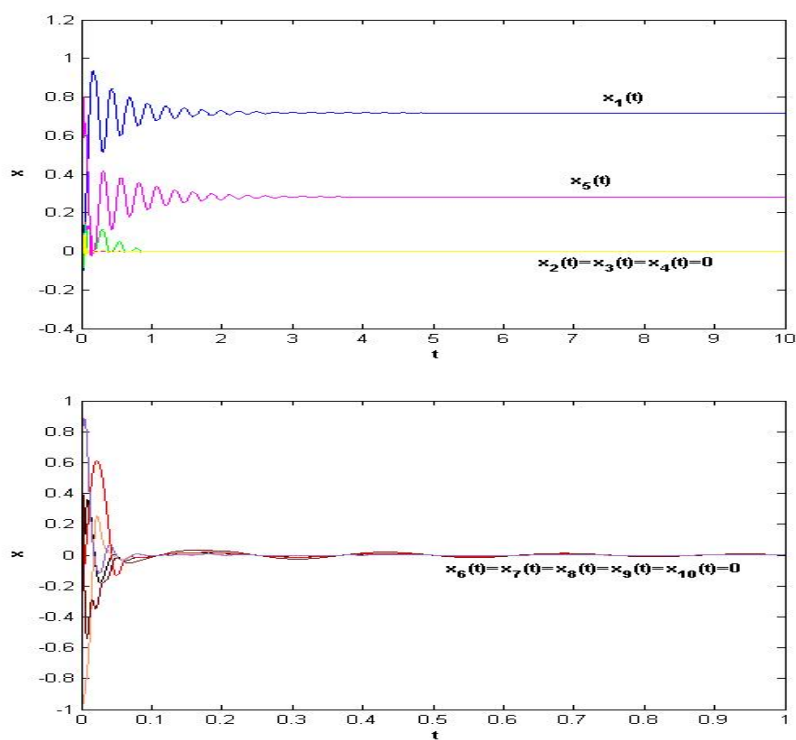
همچنین جواب بهینه برای مدل (۲۳.۴) به صورت

$$x^* = (0/72, 0, 0, 0, 0/28, 0, 0, 0, 0, 0)^T$$

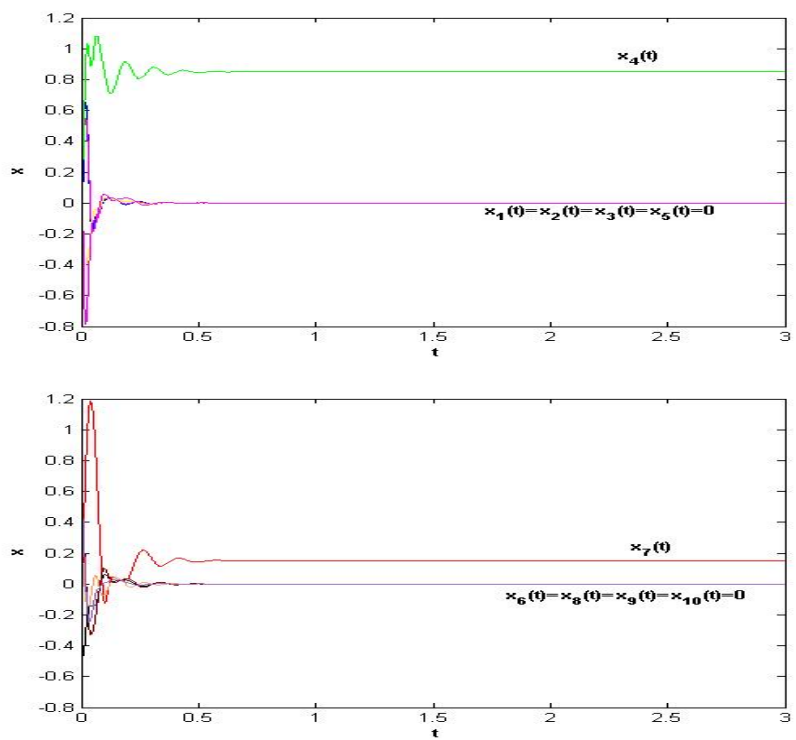
و برای مدل (۲۵.۴) به صورت زیر است:

$$x^* = (0, 0, 0, 0/85, 0, 0, 0/15, 0, 0, 0)^T$$

یعنی برای به دست آوردن ماکزیمم بازده مورد انتظار با ریسک حداکثر ۷٪ سرمایه‌گذار باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه‌گذاری کند. رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مسائل (۲۳.۴) و (۲۵.۴) در شکل‌های ۹.۴ و ۱۰.۴ نمایش داده شده است.



شکل ۹.۴: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۲۳.۴)



شکل ۱۰.۴: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۲۵.۴)

مثال ۴.۵.۴. فرض کنید 10 ورق بهادار با بازده گاوسی $\xi_i = \mathcal{N}(e_i, \sigma_i)$ داریم و نرخ بازده‌ها به صورت زیر باشد:

جدول ۴.۴: بازده‌های نامعین گاوسی از سهام‌های مختلف

سهام	بازده	سهام	بازده
۱	$\mathcal{N}(0/8, 1/3)$	۶	$\mathcal{N}(1/1, 1/8)$
۲	$\mathcal{N}(0/9, 1/6)$	۷	$\mathcal{N}(0/8, 1/7)$
۳	$\mathcal{N}(0/8, 1/5)$	۸	$\mathcal{N}(0/7, 1/5)$
۴	$\mathcal{N}(0/9, 1/4)$	۹	$\mathcal{N}(0/8, 1/6)$
۵	$\mathcal{N}(1/0, 1/8)$	۱۰	$\mathcal{N}(0/7, 0/8)$

فرض کنید $\beta = 0/1$ ، میزان ریسک حداکثر $3/7$ و ارزش مورد انتظار سرمایه‌گذار حداقل $0/9$ باشد. از مدل‌های (۱۴.۴) و (۱۵.۴) داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & 4/09x_1 + 4/94x_2 + 4/59x_3 + 4/438x_4 + 5/549x_5 + 5/695x_6 + 5/1x_7 \\ & + 4/49x_8 + 4/84x_9 + 2/72x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 0/8x_1 + 0/9x_2 + 0/8x_3 + 0/9x_4 + x_5 + 1/1x_6 \\ \quad + 0/8x_7 + 0/7x_8 + 0/8x_9 + 0/7x_{10} \geq 0/9, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (26.4)$$

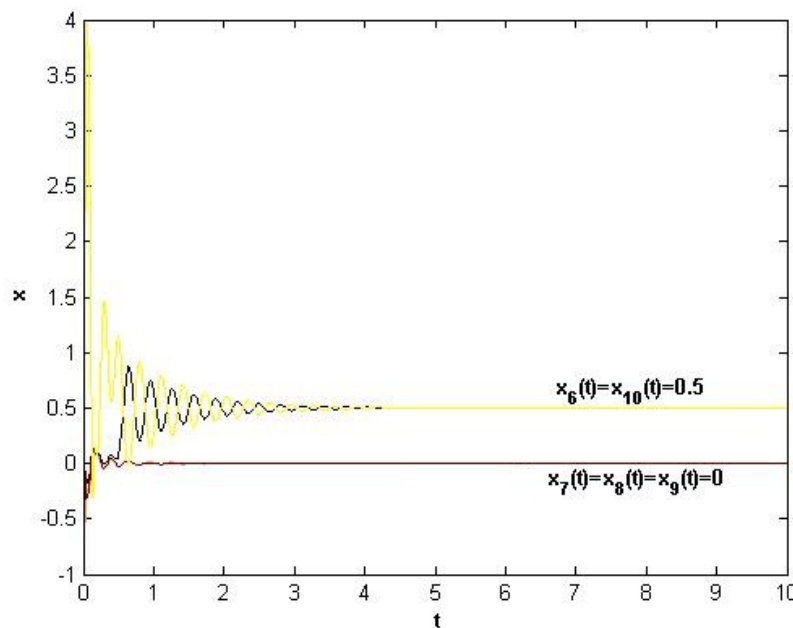
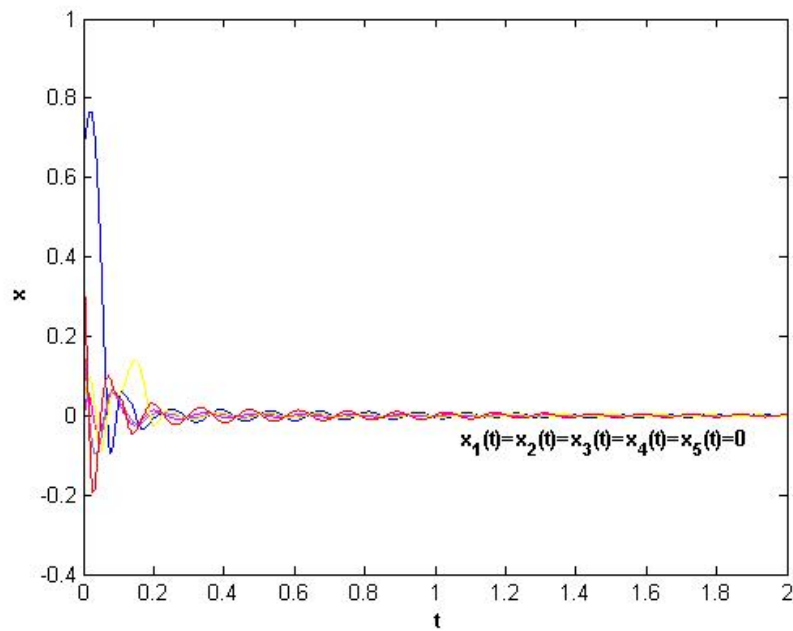
9

$$\begin{aligned} \max \quad & 0/8x_1 + 0/9x_2 + 0/8x_3 + 0/9x_4 + x_5 + 1/1x_6 + 0/8x_7 \\ & + 0/7x_8 + 0/8x_9 + 0/7x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 4/09x_1 + 4/94x_2 + 4/59x_3 + 4/438x_4 + 5/549x_5 + 5/695x_6 \\ \quad + 5/1x_7 + 4/49x_8 + 4/84x_9 + 2/72x_{10} \leq 3/7, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (27.4)$$

با استفاده از متلب و مدل کردن این مسأله با کمک شبکه عصبی مطرح شده جواب بهینه برای مدل (۲۶.۴) به صورت زیر است:

$$x^* = (0, 0, 0, 0, 0, 0/5, 0, 0, 0, 0/5)^T$$

یعنی سرمایه‌گذار برای مینیمم کردن ریسک در حالی که حداقل بازده $0/9$ را داشته باشد باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه‌گذاری کند. رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مسأله (۲۶.۴) در شکل ۱۱.۴ نمایش داده شده است.

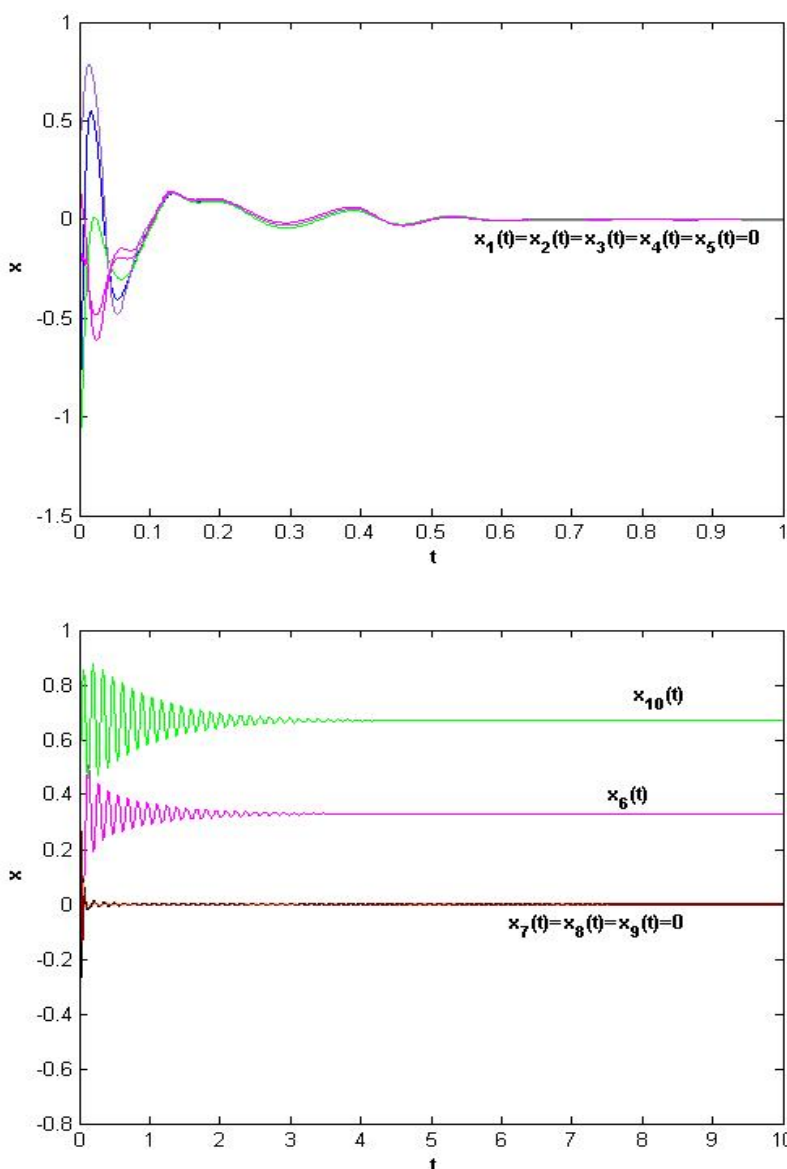


شکل ۱۱.۴: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۲۶.۴)

همچنین جواب بهینه برای مدل (۲۷.۴) به صورت زیر است:

$$x^* = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 33, 0, 0, 0, 0, 67)^T$$

یعنی برای به دست آوردن ماکزیمم بازده مورد انتظار با ریسک حداکثر ۳/۷ سرمایه گذار باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه گذاری کند. رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مسأله (۲۷.۴) در شکل ۱۲.۴ نمایش داده شده است.



شکل ۱۲.۴: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۲۷.۴)

۶.۴ مدل میانگین - ارزش در معرض ریسک مشروط

این مدل در مسأله انتخاب سبد سرمایه بهینه، به گونه‌ای است که در آن، بازده سرمایه‌گذاری را امید ریاضی سبد سرمایه و ارزش در معرض ریسک مشروط را به‌عنوان معیار ریسک در نظر می‌گیریم.

با توجه به میزان ریسک‌پذیری افراد در سرمایه‌گذاری از این مدل به دو صورت مدل ریسک‌پذیر و مدل ریسک‌گریز به‌صورت زیر استفاده می‌شود.

- مدل ریسک‌پذیر که در آن سرمایه‌گذار، مقدار بازده معینی را انتظار دارد و می‌خواهد

ریسک را با توجه به سطح بازده مینیمم کند، مدل بهینه‌سازی آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{CVaR}(\beta), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} E[\sum_{i=1}^n x_i \xi_i] \geq R, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (28.4)$$

• مدل ریسک‌گریز، یک پرتفوی با ارزش مورد انتظار بهینه، برای یک سطح مشخصی از ریسک است. مدل بهینه‌سازی آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \max \quad & E[\sum_{i=1}^n x_i \xi_i], \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \text{CVaR}(\beta) \leq S, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (29.4)$$

در مدل‌های فوق x_i نسبت سرمایه‌گذاری در سهام i ام و ξ_i نشان‌دهنده بازده نامعین i امین سهام $i = 1, 2, \dots, n$ و S ماکزیمم سطح ریسک سرمایه‌گذاری که صورت می‌گیرد و R مینیمم بازده مورد انتظار و همچنین E امید ریاضی و $\text{CVaR}(\beta)$ ارزش در معرض ریسک مشروط با ضریب اطمینان $\beta \in (0, 1]$ که مقداری ثابت می‌باشد در نظر گرفته شده است.

۱.۶.۴ معادله‌های قطعی

در راه‌حل‌های معمول نیاز به تبدیل تابع هدف و قیدها به معادله دقیق آن‌ها است. همانطور که می‌دانیم اجرا و موفق بودن این فرایند در مواردی خاص و بسیار دشوار است. با جایگزینی مدل‌های نامعین با معادله‌های قطعی در حالاتی خاص به حل مسأله انتخاب سبد سرمایه مدل میانگین - ارزش در معرض ریسک مشروط می‌پردازیم.

حالت نامعین خطی

فرض کنید نرخ بازده ورق بهادار i ام، ξ_i متغیر نامعین خطی باشد، در این صورت داریم:

$$\xi_i = \mathcal{L}(a_i, b_i), i = 1, 2, \dots, n.$$

لذا $\sum_{i=1}^n x_i \xi_i$ متغیر نامعین خطی است. با استفاده از لم‌های (۱.۹.۲) و (۱.۷.۲) مدل بهینه‌سازی (۲۸.۴) برای $0 < \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + b_i - 2b_i\beta + \beta^2(b_i - a_i)}{2(1-\beta)} \right), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + b_i}{2} \right) \geq R, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (30.4)$$

همچنین مدل بهینه‌سازی (۲۹.۴) برای $0 < \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + b_i}{2} \right), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + b_i - 2b_i\beta + \beta^2(b_i - a_i)}{2(1-\beta)} \right) \leq S, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (31.4)$$

حالت نامعین زیگزاگ

فرض کنید نرخ بازده ورق بهادار i ام، ξ_i متغیر نامعین زیگزاگ باشد، در این صورت داریم:

$$\xi_i = \mathcal{Z}(a_i, b_i, c_i), i = 1, 2, \dots, n.$$

لذا $\sum_{i=1}^n x_i \xi_i$ متغیر نامعین زیگزاگ است. با استفاده از لم‌های (۲.۹.۲) و (۲.۷.۲) مدل بهینه‌سازی (۲۸.۴) برای $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{b_i + \beta(a_i - 2b_i) + \beta^2(b_i - a_i)}{1-\beta} \right), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + 2b_i + c_i}{2} \right) \geq R, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \end{aligned} \quad (32.4)$$

و برای $1 > \beta \geq \frac{1}{4}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{b_i - c_i \beta + \beta^2 (c_i - b_i)}{1 - \beta} \right), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + 2b_i + c_i}{4} \right) \geq R, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (33.4)$$

همچنین مدل بهینه سازی (۲۹.۴) برای $0 < \beta \leq \frac{1}{4}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + 2b_i + c_i}{4} \right), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{b_i + \beta(a_i - 2b_i) + \beta^2 (b_i - a_i)}{1 - \beta} \right) \leq S, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \end{aligned} \quad (34.4)$$

و برای $1 > \beta \geq \frac{1}{4}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + 2b_i + c_i}{4} \right), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{b_i - c_i \beta + \beta^2 (c_i - b_i)}{1 - \beta} \right) \leq S, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (35.4)$$

حالت نامعین دوزنقه ای

فرض کنید نرخ بازده ورق بهادار i ام، ξ_i متغیر نامعین دوزنقه ای باشد، در این صورت داریم:

$$\xi_i = \mathcal{T}(a_i, b_i, c_i, d_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

لذا $\sum_{i=1}^n x_i \xi_i$ متغیر نامعین دوزنقه‌ای است. با استفاده از لم‌های (۳.۹.۲) و (۳.۷.۲) مدل بهینه‌سازی (۲۸.۴) برای $\frac{1}{4} \leq \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{b_i + \beta(a_i - 2b_i) + \beta^2(b_i - a_i)}{1 - \beta} \right), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + b_i + c_i + d_i}{4} \right) \geq R, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \end{aligned} \quad (۳۶.۴)$$

و برای $1 < \beta \leq \frac{1}{4}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{c_i - \beta d_i + \beta^2(d_i - c_i)}{1 - \beta} \right), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + b_i + c_i + d_i}{4} \right) \geq R, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (۳۷.۴)$$

همچنین مدل بهینه‌سازی (۲۹.۴) برای $\frac{1}{4} \leq \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + b_i + c_i + d_i}{4} \right), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{b_i + \beta(a_i - 2b_i) + \beta^2(b_i - a_i)}{1 - \beta} \right) \leq S, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \end{aligned} \quad (۳۸.۴)$$

و برای $1 < \beta \leq \frac{1}{4}$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{a_i + b_i + c_i + d_i}{4} \right), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{c_i - \beta d_i + \beta^2(d_i - c_i)}{1 - \beta} \right) \leq S, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (۳۹.۴)$$

حالت نامعین گاوسی

فرض کنید نرخ بازده ورق بهادار i ام، ξ_i متغیر نامعین گاوسی باشد، در این صورت داریم:

$$\xi \sim \mathcal{N}(e_i, \sigma_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

لذا $\sum_{i=1}^n x_i \xi_i$ متغیر نامعین گاوسی است. با استفاده از لم‌های (۴.۹.۲) و (۴.۷.۲) مدل بهینه‌سازی (۲۸.۴) برای $0 < \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n x_i \left(e_i + \frac{\sqrt{\beta} \sigma_i}{\pi \beta} \left(1 - \ln \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right) \right), \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i e_i \geq R, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \end{aligned} \quad (40.4)$$

همچنین مدل بهینه‌سازی (۲۹.۴) برای $0 < \beta \leq 1$ به هم ارز قطعی خود به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n x_i e_i, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \left(e_i + \frac{\sqrt{\beta} \sigma_i}{\pi \beta} \left(1 - \ln \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \right) \right) \leq S, \\ \sum_{i=1}^n x_i = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \end{aligned} \quad (41.4)$$

۷.۴ مثال‌های عددی

برای نشان دادن کارایی مدل‌های ذکر شده در حل مسائل انتخاب پرتفوی در شرایط نامعین مثال‌هایی مطرح و حل می‌شود. در شبیه‌سازی همه مثال‌ها از دستور ode45 در متلب استفاده شده است که معادل روش رانگ کوتای مرتبه ۴ برای حل معادلات دیفرانسیل است.

مثال ۱.۷.۴. فرض کنید 10 ورق بهادار با بازده خطی $\xi_i = \mathcal{L}(a_i, b_i)$ داریم و نرخ بازده‌ها به‌صورت زیر باشد.

جدول ۵.۴: بازده‌های نامعین خطی از سهام‌های مختلف

سهام	بازده	سهام	بازده
۱	$\mathcal{L}(1/0, 1/6)$	۶	$\mathcal{L}(2/0, 2/1)$
۲	$\mathcal{L}(0/8, 1/3)$	۷	$\mathcal{L}(2/3, 2/7)$
۳	$\mathcal{L}(0/1, 0/7)$	۸	$\mathcal{L}(0/9, 1/0)$
۴	$\mathcal{L}(0/5, 0/6)$	۹	$\mathcal{L}(0/3, 0/5)$
۵	$\mathcal{L}(1/5, 1/8)$	۱۰	$\mathcal{L}(0/2, 0/6)$

فرض کنید $\beta = 0/1$ ، میزان ریسک حداکثر ۲ و ارزش مورد انتظار سرمایه‌گذار حداقل $1/3$ باشد. از مدل‌های (۳۰.۴) و (۳۱.۴) داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & 1/27x_1 + 1/025x_2 + 0/37x_3 + 0/545x_4 + 1/635x_5 + 2/045x_6 + 2/48x_7 \\ & + 0/945x_8 + 0/39x_9 + 0/38x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 1/3x_1 + 1/05x_2 + 0/4x_3 + 0/55x_4 + 1/65x_5 + 2/05x_6 \\ \quad + 2/5x_7 + 0/95x_8 + 0/4x_9 + 0/4x_{10} \geq 1/3, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (42.4)$$

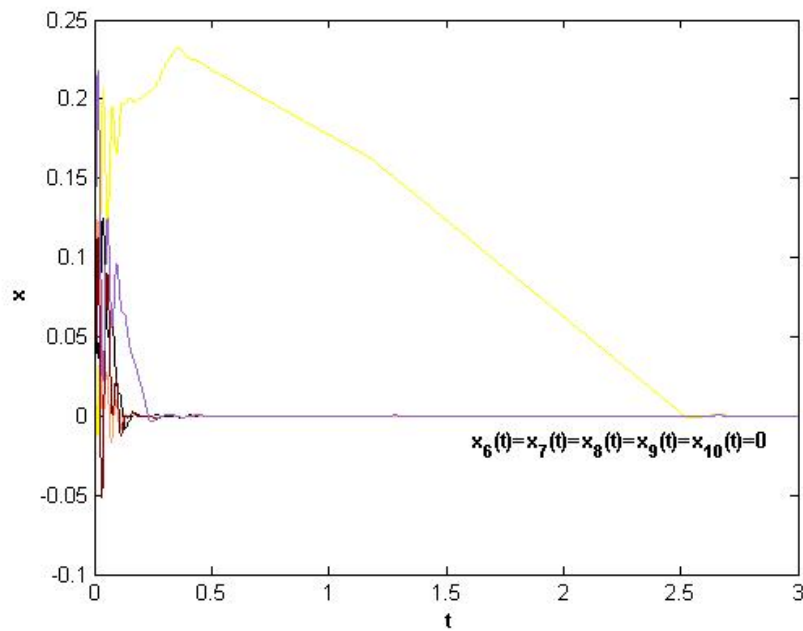
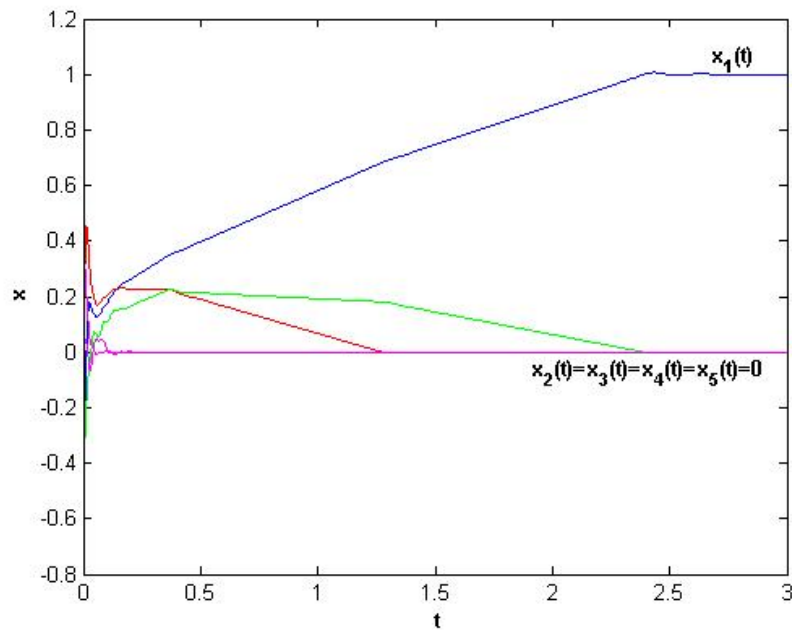
9

$$\begin{aligned} \max \quad & 1/3x_1 + 1/05x_2 + 0/4x_3 + 0/55x_4 + 1/65x_5 + 2/05x_6 + 2/5x_7 \\ & + 0/95x_8 + 0/4x_9 + 0/4x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 1/27x_1 + 1/025x_2 + 0/37x_3 + 0/545x_4 + 1/635x_5 + 2/045x_6 \\ \quad + 2/48x_7 + 0/945x_8 + 0/39x_9 + 0/38x_{10} \leq 2, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (43.4)$$

با استفاده از متلب و مدل کردن این مسأله با کمک شبکه عصبی مطرح شده در فصل سوم جواب بهینه برای مدل (۴۲.۴) به‌صورت زیر است:

$$x^* = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$$

یعنی سرمایه‌گذار برای مینیمم کردن ریسک در حالی که حداقل بازده $1/3$ را داشته باشد باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه‌گذاری کند. رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مسأله (۴۲.۴) در شکل ۱۳.۴ نمایش داده شده است.

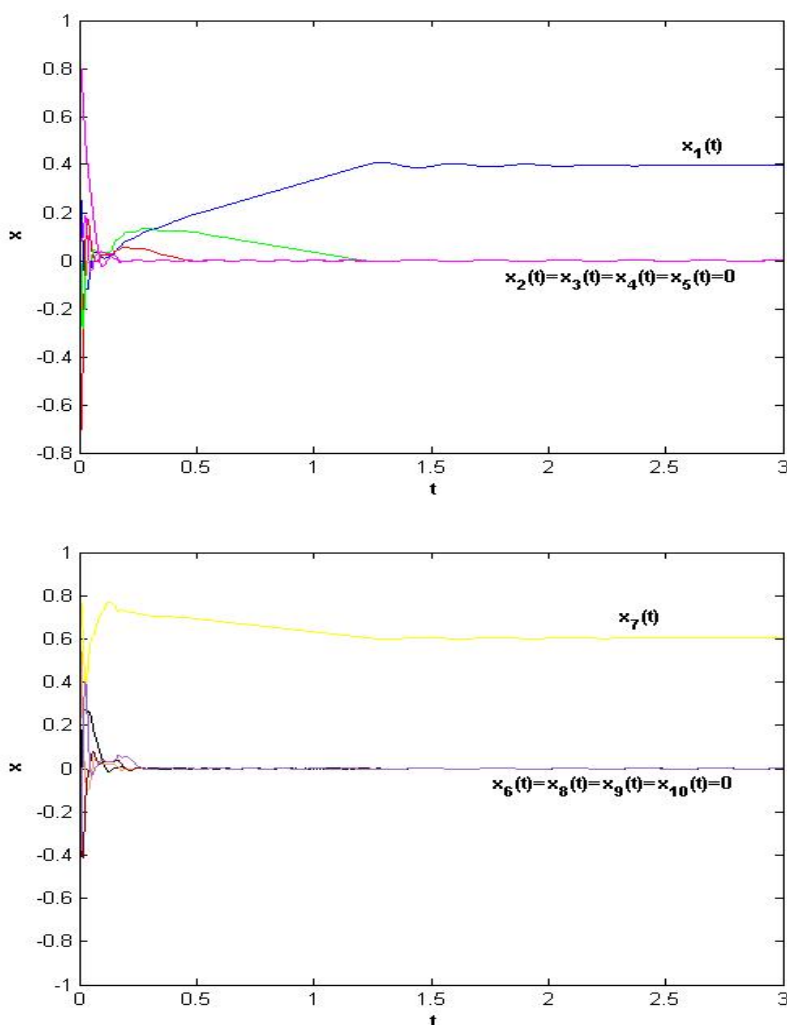


شکل ۱۳.۴: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۴۲.۴)

همچنین جواب بهینه برای مدل (۴۳.۴) به صورت زیر است:

$$x^* = (0/4, 0, 0, 0, 0, 0, 0/6, 0, 0, 0)^T$$

یعنی برای به دست آوردن ماکزیمم بازده مورد انتظار با ریسک حداکثر ۲ سرمایه گذار باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه گذاری کند. رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مسأله (۴۳.۴) در شکل ۱۴.۴ نمایش داده شده است.



شکل ۱۴.۴: نمودار همگرایی x_i ‌ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۴۳.۴)

مثال ۲.۷.۴. فرض کنید 1° ورق بهادار با بازده زیگزاگ $\xi_i = Z(a_i, b_i, c_i)$ داریم و نرخ بازده‌ها به صورت زیر باشد.

جدول ۶.۴: بازده‌های نامعین زیگزاگ از سهام‌های مختلف

سهام	بازده	سهام	بازده
۱	$Z(0/2, 0/5, 0/7)$	۶	$Z(0/8, 0/9, 1/0)$
۲	$Z(0/6, 1/0, 1/1)$	۷	$Z(1/2, 1/7, 2/0)$
۳	$Z(0/9, 1/0, 1/2)$	۸	$Z(0/3, 0/8, 1/0)$
۴	$Z(1/2, 1/5, 1/7)$	۹	$Z(0/4, 0/6, 1/2)$
۵	$Z(0/3, 0/6, 0/9)$	۱۰	$Z(0/1, 0/5, 1/3)$

فرض کنید $\beta = 0/2$ ، میزان ریسک حداکثر $0/9$ و ارزش مورد انتظار سرمایه‌گذار حداقل $1/5$ باشد. از مدل‌های (۳۲.۴) و (۳۳.۴) داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & 0/44x_1 + 0/92x_2 + 0/98x_3 + 1/44x_4 + 0/54x_5 + 0/88x_6 + 1/6x_7 \\ & + 0/7x_8 + 0/56x_9 + 0/42x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 0/475x_1 + 0/925x_2 + 1/025x_3 + 1/475x_4 + 0/6x_5 + 0/9x_6 \\ \quad + 1/65x_7 + 0/725x_8 + 0/7x_9 + 0/6x_{10} \geq 1/5, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (44.4)$$

9

$$\begin{aligned} \max \quad & 0/475x_1 + 0/925x_2 + 1/025x_3 + 1/475x_4 + 0/6x_5 + 0/9x_6 + 1/65x_7 \\ & + 0/725x_8 + 0/7x_9 + 0/6x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 0/44x_1 + 0/92x_2 + 0/98x_3 + 1/44x_4 + 0/54x_5 + 0/88x_6 \\ \quad + 1/6x_7 + 0/7x_8 + 0/56x_9 + 0/42x_{10} \leq 0/9, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (45.4)$$

همچنین از مدل‌های (۳۴.۴) و (۳۵.۴) و برای $\beta = 0/6$ داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & 0/38x_1 + 0/94x_2 + 0/88x_3 + 1/38x_4 + 0/42x_5 + 0/84x_6 + 1/52x_7 \\ & + 0/68x_8 + 0/24x_9 + 0/02x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 0/475x_1 + 0/925x_2 + 1/025x_3 + 1/475x_4 + 0/6x_5 + 0/9x_6 \\ \quad + 1/65x_7 + 0/725x_8 + 0/7x_9 + 0/6x_{10} \geq 1/5, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (46.4)$$

9

$$\begin{aligned} \max \quad & 0/475x_1 + 0/925x_2 + 1/025x_3 + 1/475x_4 + 0/6x_5 + 0/9x_6 + 1/65x_7 \\ & + 0/725x_8 + 0/7x_9 + 0/6x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 0/38x_1 + 0/94x_2 + 0/88x_3 + 1/38x_4 + 0/42x_5 + 0/84x_6 \\ \quad + 1/52x_7 + 0/68x_8 + 0/24x_9 + 0/02x_{10} \leq 0/9, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (47.4)$$

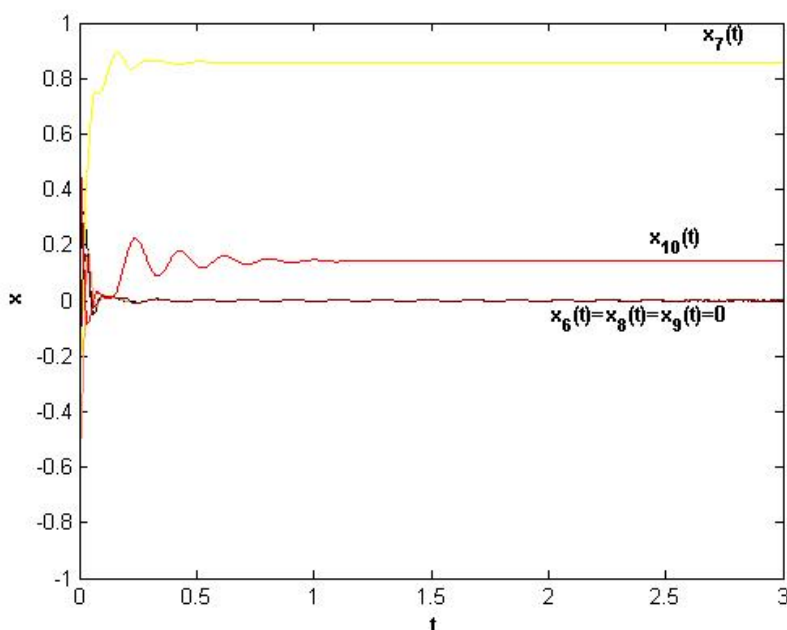
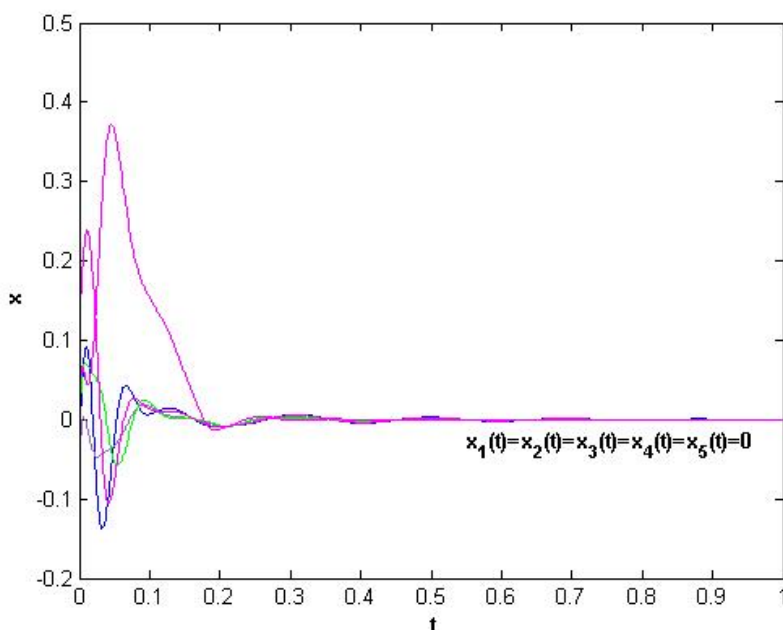
با استفاده از متلب و مدل کردن این مسأله با کمک شبکه عصبی مطرح شده در فصل سوم جواب بهینه برای مدل (۴۴.۴) به صورت

$$x^* = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0/86, 0, 0, 0/14)^T$$

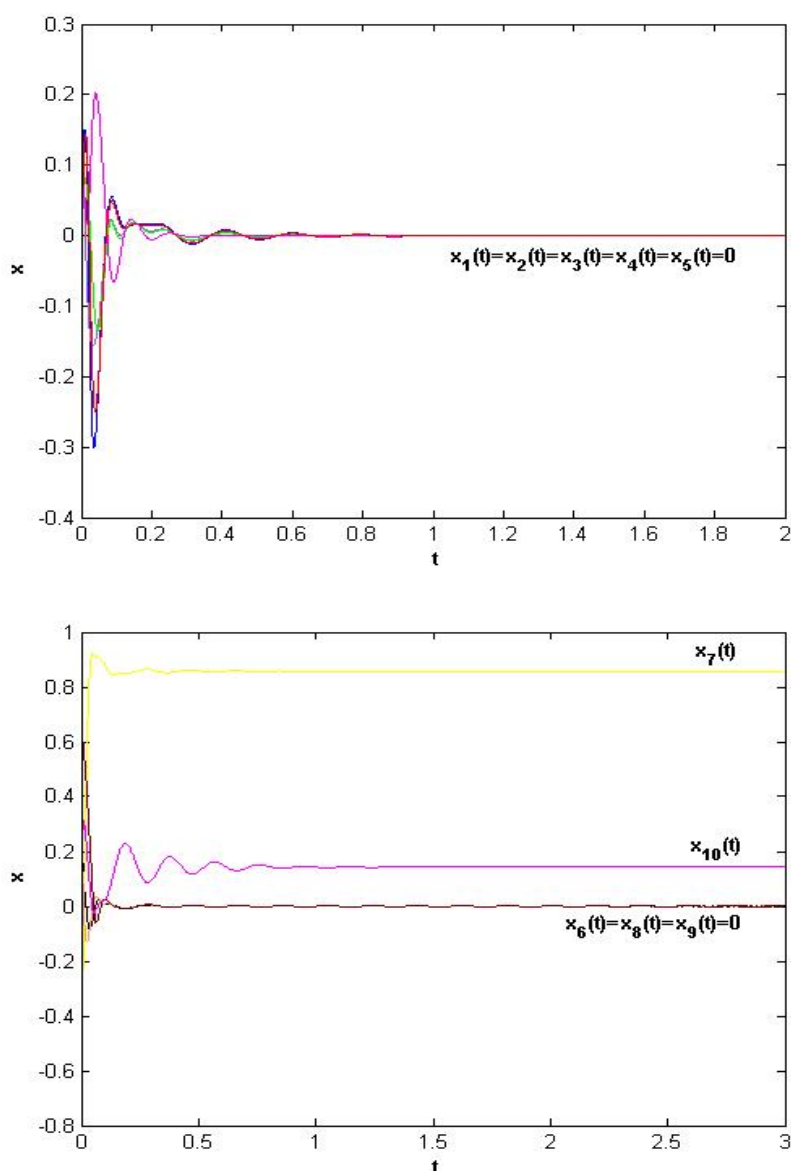
و برای (۴۶.۴) به صورت زیر است:

$$x^* = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0/86, 0, 0, 0/14)^T$$

یعنی سرمایه‌گذار برای مینیمم کردن ریسک در حالی که حداقل بازده ۱/۵ را داشته باشد باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه‌گذاری کند. رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مسائل (۴۴.۴) و (۴۶.۴) در شکل‌های ۱۵.۴ و ۱۶.۴ نمایش داده شده است.



شکل ۱۵.۴: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۴۴.۴)



شکل ۱۶.۴: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۴۶.۴)

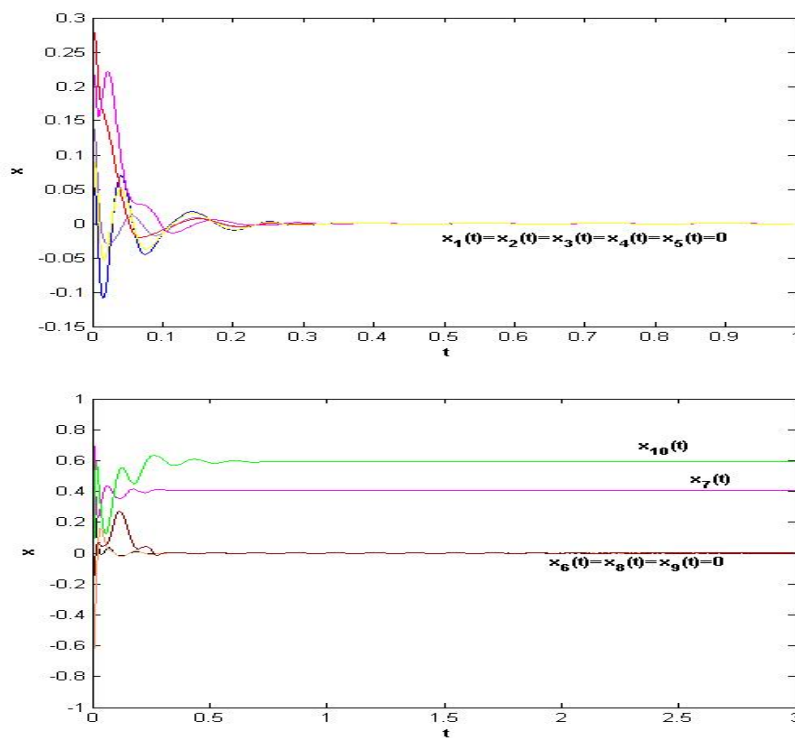
همچنین جواب بهینه برای مدل (۴۵.۴) به صورت

$$x^* = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, /41, 0, 0, 0, /59)^T$$

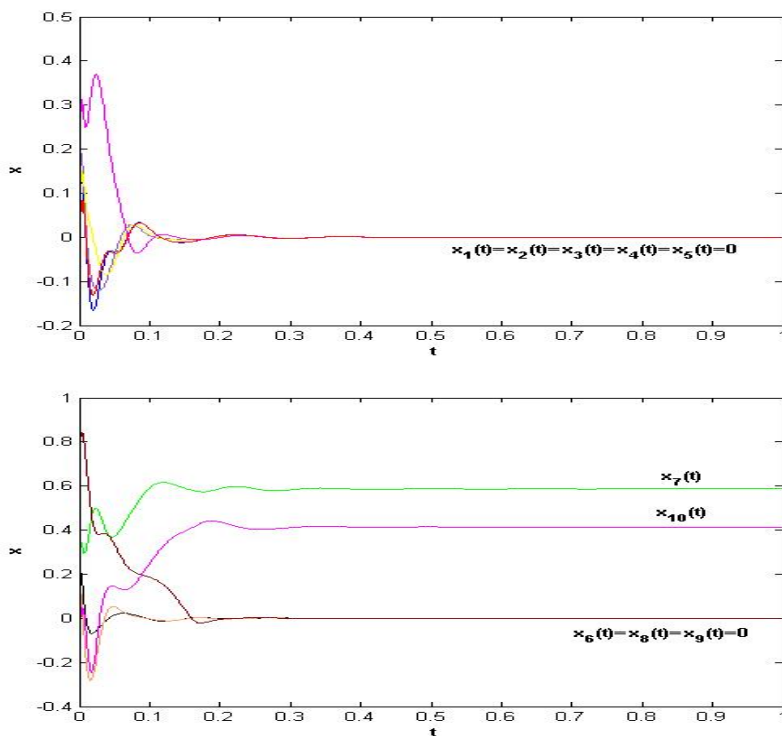
و برای مدل (۴۷.۴) به صورت زیر است:

$$x^* = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, /59, 0, 0, 0, /41)^T$$

یعنی برای به دست آوردن ماکزیمم بازده مورد انتظار با ریسک حداکثر ۰/۹ سرمایه گذار باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه گذاری کند. رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مسائل (۴۵.۴) و (۴۷.۴) در شکل های ۱۷.۴ و ۱۸.۴ نمایش داده شده است.



شکل ۱۷.۴: نمودار همگرایی x_i ‌ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۴۵.۴)



شکل ۱۸.۴: نمودار همگرایی x_i ‌ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۴۷.۴)

مثال ۳.۷.۴. فرض کنید 10 ورق بهادار با بازده دوزنقه‌ای $\xi_i = T(a_i, b_i, c_i, d_i)$ داریم و نرخ بازده‌ها به صورت زیر باشد.

جدول ۷.۴: بازده‌های نامعین دوزنقه‌ای از سهام‌های مختلف

سهام	بازده	سهام	بازده
۱	$T(0/1, 0/3, 0/7, 1/0)$	۶	$T(-0/5, 0/1, 0/3, 1/0)$
۲	$T(0/2, 0/5, 0/7, 1/1)$	۷	$T(-0/2, 0/4, 0/5, 1/2)$
۳	$T(-0/7, 0/9, 1/0, 1/2)$	۸	$T(0/7, 0/9, 1/1, 1/5)$
۴	$T(0/9, 1/0, 1/1, 1/6)$	۹	$T(0/3, 1/4, 1/7, 2/1)$
۵	$T(1/0, 1/3, 1/6, 2/0)$	۱۰	$T(1/0, 1/7, 2/0, 2/7)$

فرض کنید $\beta = 0/1$ ، میزان ریسک حداکثر $1/9$ و ارزش مورد انتظار سرمایه‌گذار حداقل $0/7$ باشد. از مدل‌های (۳۶.۴) و (۳۷.۴) داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & 0/28x_1 + 0/47x_2 + 0/74x_3 + 0/99x_4 + 1/27x_5 + 0/04x_6 + 0/34x_7 \\ & + 0/88x_8 + 1/29x_9 + 1/63x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 0/525x_1 + 0/625x_2 + 0/6x_3 + 1/15x_4 + 1/475x_5 + 0/225x_6 \\ \quad + 0/475x_7 + 1/05x_8 + 1/375x_9 + 1/85x_{10} \geq 0/7, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (48.4)$$

و

$$\begin{aligned} \max \quad & 0/525x_1 + 0/625x_2 + 0/6x_3 + 1/15x_4 + 1/475x_5 + 0/225x_6 + 0/475x_7 \\ & + 1/05x_8 + 1/375x_9 + 1/85x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 0/28x_1 + 0/47x_2 + 0/74x_3 + 0/99x_4 + 1/27x_5 + 0/04x_6 \\ \quad + 0/34x_7 + 0/88x_8 + 1/29x_9 + 1/63x_{10} \leq 1/9, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (49.4)$$

همچنین از مدل‌های (۳۸.۴) و (۳۹.۴) و برای $\beta = 0/7$ داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & 0/49x_1 + 0/42x_2 + 0/86x_3 + 0/75x_4 + 1/32x_5 - 0/19x_6 + 0/01x_7 \\ & + 0/82x_8 + 1/42x_9 + 1/51x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 0/525x_1 + 0/625x_2 + 0/6x_3 + 1/15x_4 + 1/475x_5 + 0/225x_6 \\ \quad + 0/475x_7 + 1/05x_8 + 1/375x_9 + 1/85x_{10} \geq 0/7, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (50.4)$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 0.525x_1 + 0.625x_2 + 0.6x_3 + 1/15x_4 + 1/475x_5 + 0.225x_6 + 0.475x_7 \\ & + 1/0.5x_8 + 1/375x_9 + 1/85x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 0.49x_1 + 0.42x_2 + 0.86x_3 + 0.75x_4 + 1/32x_5 - 0.19x_6 \\ \quad + 0.01x_7 + 0.82x_8 + 1/42x_9 + 1/51x_{10} \leq 1/9, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (51.4)$$

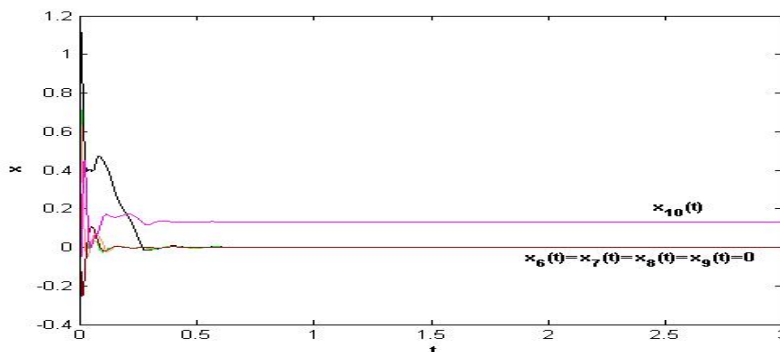
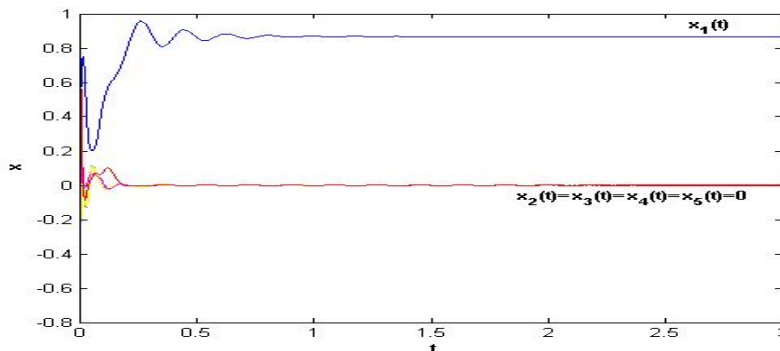
با استفاده از متلب و مدل کردن این مسأله با کمک شبکه عصبی مطرح شده در فصل سوم جواب بهینه برای مدل (48.4) به صورت

$$x^* = (0.87, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.13)^T$$

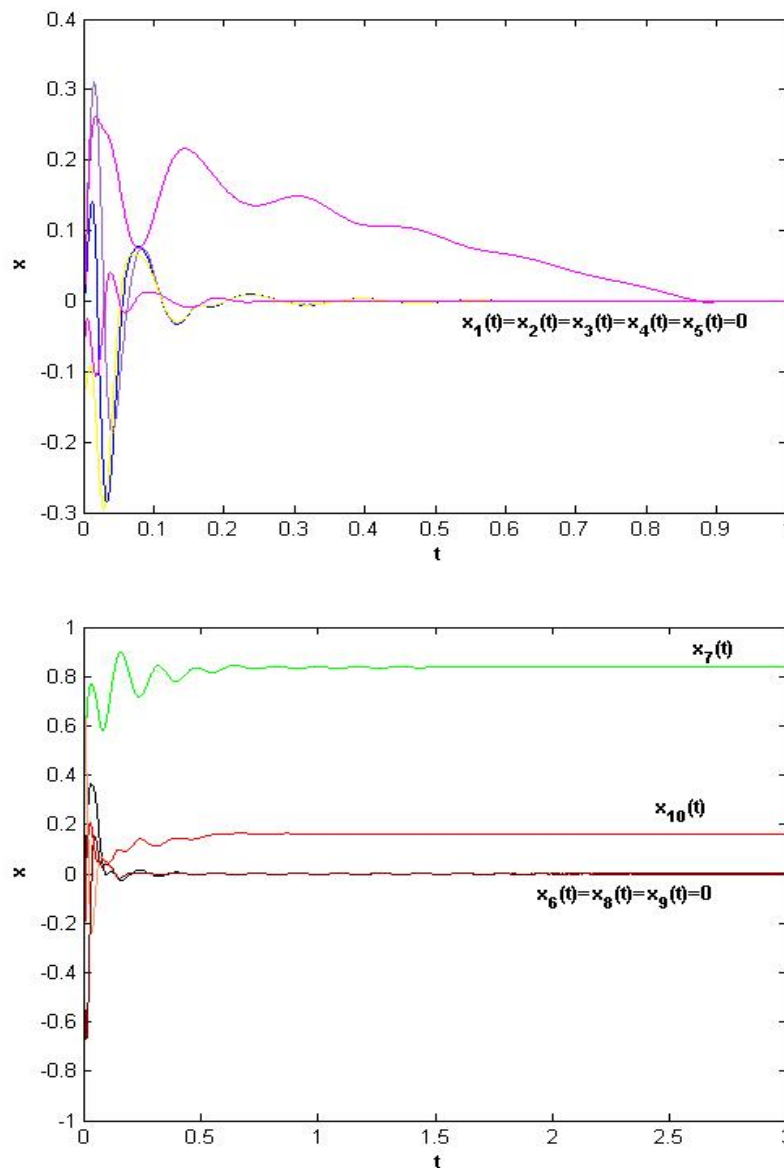
و برای (50.4) به صورت زیر است:

$$x^* = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.84, 0, 0, 0.16)^T$$

یعنی سرمایه‌گذار برای مینیمم کردن ریسک در حالی که حداقل بازده ۷٪ را داشته باشد باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه‌گذاری کند. رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مسائل (48.4) و (50.4) در شکل‌های 19.4 و 20.4 نمایش داده شده است.



شکل 19.4: نمودار همگرایی x_i ‌ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (48.4)



شکل ۲۰.۴: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۵۰.۴)

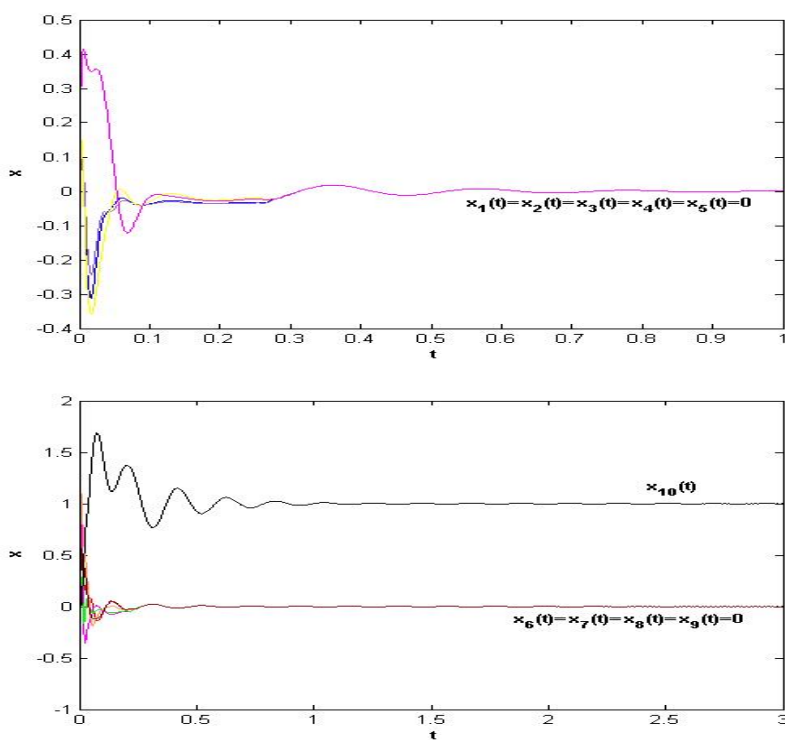
همچنین جواب بهینه برای مدل (۴۹.۴) به صورت

$$x^* = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)^T$$

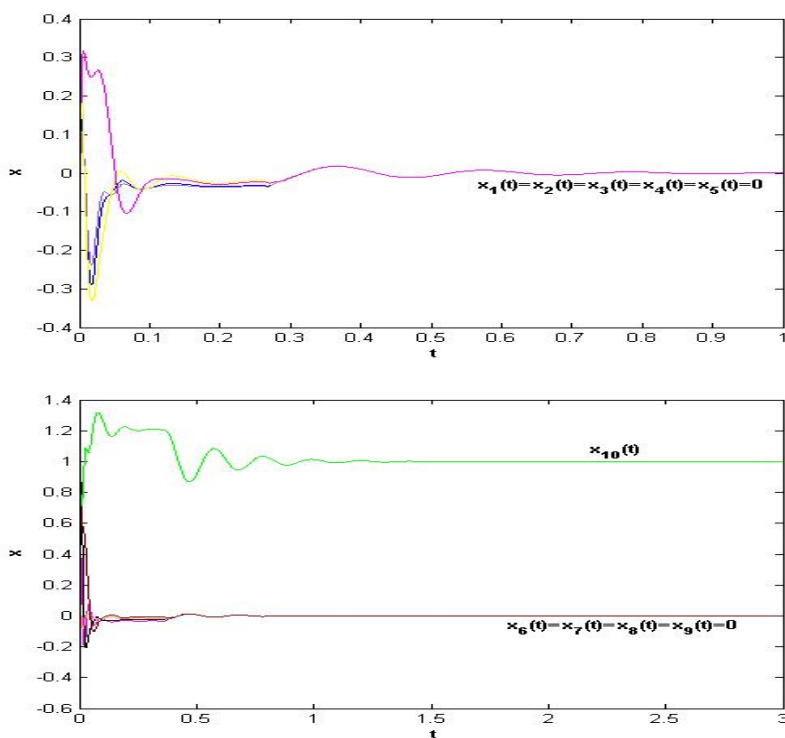
و برای مدل (۵۱.۴) به صورت زیر است:

$$x^* = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)^T$$

یعنی برای به دست آوردن ماکزیمم بازده مورد انتظار با ریسک حداکثر $1/9$ سرمایه گذار باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه گذاری کند. رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مسائل (۴۹.۴) و (۵۱.۴) در شکل های ۲۱.۴ و ۲۲.۴ نمایش داده شده است.



شکل ۲۱.۴: نمودار همگرایی x_i ‌ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۴۹.۴)



شکل ۲۲.۴: نمودار همگرایی x_i ‌ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۵۱.۴)

مثال ۴.۷.۴. فرض کنید ۱۰ ورق بهادار با بازده گاوسی $\xi_i = \mathcal{N}(e_i, \sigma_i)$ داریم و نرخ بازده‌ها به صورت زیر باشد.

جدول ۸.۴: بازده‌های نامعین گاوسی از سهام‌های مختلف

سهام	بازده	سهام	بازده
۱	$\mathcal{N}(1/1, 1/5)$	۶	$\mathcal{N}(1/0, 1/8)$
۲	$\mathcal{N}(0/7, 1/4)$	۷	$\mathcal{N}(1/1, 1/6)$
۳	$\mathcal{N}(0/8, 1/6)$	۸	$\mathcal{N}(0/3, 0/9)$
۴	$\mathcal{N}(0/9, 1/3)$	۹	$\mathcal{N}(1/0, 1/9)$
۵	$\mathcal{N}(1/3, 1/9)$	۱۰	$\mathcal{N}(0/3, 1/6)$

فرض کنید $\beta = 0/5$ ، میزان ریسک حداکثر $1/4$ و ارزش مورد انتظار سرمایه گذار حداقل $1/3$ باشد. از مدل‌های (۴۰.۴) و (۴۱.۴) داریم:

$$\begin{aligned} \min \quad & 2/75x_1 + 2/24x_2 + 2/56x_3 + 2/33x_4 + 3/39x_5 + 2/98x_6 + 2/86x_7 \\ & + 1/29x_8 + 3/09x_9 + 2/06x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 1/1x_1 + 0/7x_2 + 0/8x_3 + 0/9x_4 + 1/3x_5 + x_6 \\ \quad + 1/1x_7 + 0/3x_8 + x_9 + 0/3x_{10} \geq 1/3, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (52.4)$$

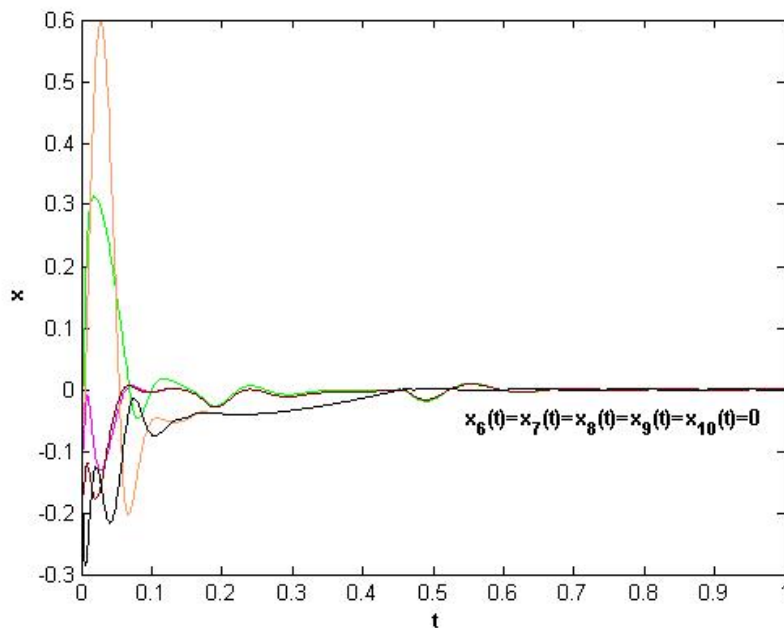
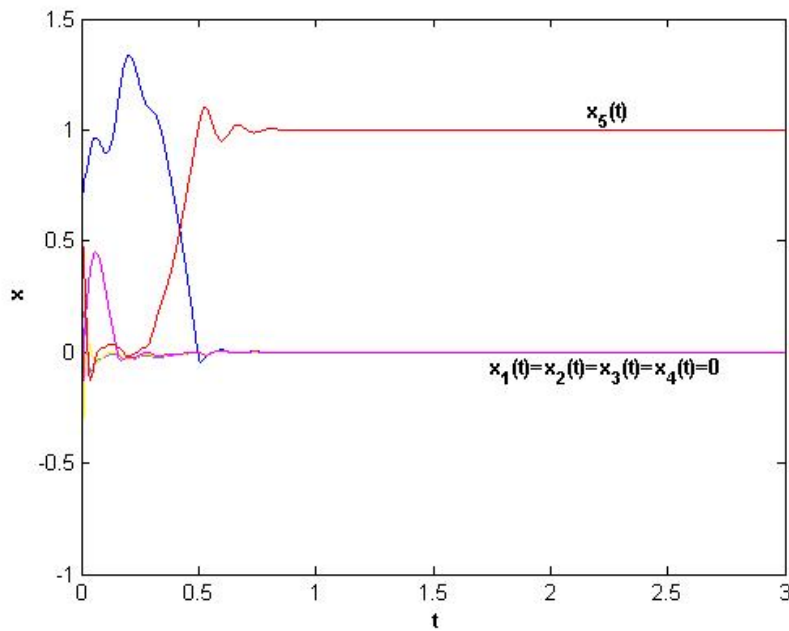
9

$$\begin{aligned} \max \quad & 1/1x_1 + 0/7x_2 + 0/8x_3 + 0/9x_4 + 1/3x_5 + x_6 + 1/1x_7 \\ & + 0/3x_8 + x_9 + 0/3x_{10}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 2/75x_1 + 2/24x_2 + 2/56x_3 + 2/33x_4 + 3/39x_5 + 2/98x_6 \\ \quad + 2/86x_7 + 1/29x_8 + 3/09x_9 + 2/06x_{10} \leq 1/4, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 1, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10. \end{cases} \end{aligned} \quad (53.4)$$

با استفاده از متلب و مدل کردن این مسأله با کمک شبکه عصبی مطرح شده جواب بهینه برای مدل (۵۲.۴) به صورت زیر است:

$$x^* = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$$

یعنی سرمایه گذار برای مینیمم کردن ریسک در حالی که حداقل بازده $1/3$ را داشته باشد باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه گذاری کند. رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مسأله (۵۲.۴) در شکل ۲۳.۴ نمایش داده شده است.

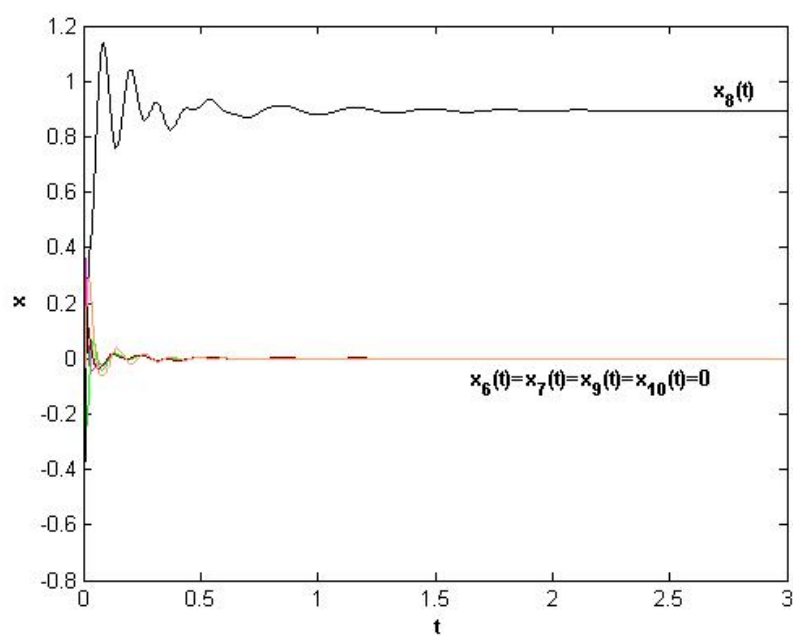
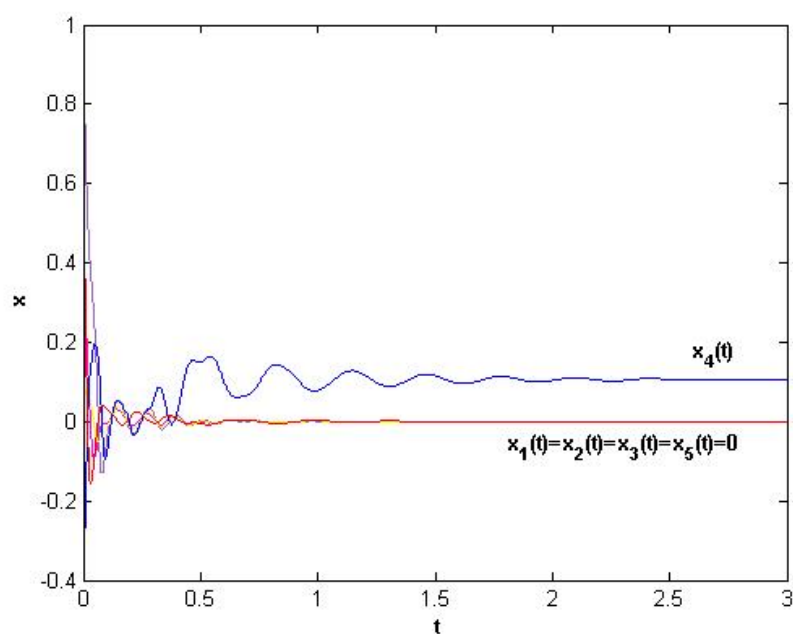


شکل ۲۳.۴: نمودار همگرایی x_i ‌ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۵۲.۴)

همچنین جواب بهینه برای مدل (۵۳.۴) به صورت زیر است:

$$x^* = (0, 0, 0, 0/11, 0, 0, 0, 0/89, 0, 0)^T$$

یعنی برای به دست آوردن ماکزیمم بازده مورد انتظار با ریسک حداکثر ۱/۴ سرمایه‌گذار باید پول خود را متناسب با این جواب سرمایه‌گذاری کند. رفتار گذرا از مدل شبکه عصبی ارائه شده برای حل مسأله (۵۳.۴) در شکل ۲۴.۴ نمایش داده شده است.



شکل ۲۴.۴: نمودار همگرایی x_i ها در شبکه عصبی مطرح شده برای مدل (۵۳.۴)

مراجع

- [۱] نوری س ، (۱۳۹۵)، پایان نامه ارشد: ”بهینه سازی سبد سهام با استفاده از میانگین-نیم واریانس هدف با بازده های نامعین” ، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [2] Bazaraa M.S. and Sherali H.D. and Shetty C.M. (1993), ”Nonlinear Programming Theory and Algorithm”, 2nd ed., Wiley, New York.
- [3] Black F. and Litterman R. (1990), Asset Allocation: Combining Investor Views with Market Equilibrium, Goldman Sachs Fixed Income Research.
- [4] Chang T. and Meade T. and Beasley J.E. and Sharaihan Y.M. (2000), Heuristics for cardinaly constrained portfolio optimization, Computers and Operations Research, Vol. 27, pp. 1271-1302.
- [5] Chen Y. and Jiao Y. and Gao X. and Leung K. (2001), ”A new gradient-based neural network for solving linear and quadratic programming problems”, IEEE Transactions on Neural Networks, No. 12(5), 1074–1083.
- [6] Cheng L. and Hou Z. and Tan M. (2009), ”A delayed projection neural network for solving linear variational inequalities”, IEEE Transactions on Neural Networks, No. 20(6), 915–925.
- [7] Effati S. and Baymani M. (2005), ”A new nonlinear neural network for solving convex nonlinear programming problems”, Applied Mathematics and Computation, 168, 1370 - 1379.
- [8] Effati S. and Nazemi A.R. (2006), Neural network models and its application for solving linear and quadratic programming problems, Applied Mathematics and Computation, 172(1), 305-331.
- [9] Effati S. and Ranjbar M. (2011), ”A novel neural network for solving quadratic programming problems”, Applied Mathematics and Computation, Model, No. 35(4), 1688–1695.
- [10] Gao X.B. (2004), A novel neural network for nonlinear convex programming. IEEE Transactions on Neural Networks, 15(3), 613-621.

- [11] Gao X. and Liao L.Z. (2010), A new one-layer neural network for linear and quadratic programming. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 21(6), 918-929.
- [12] Ghasabi-Oskoei H. and Mahdavi-Amiri N. (2006), An efficient simplified neural network for solving linear and quadratic programming problems. *Applied Mathematics and Computation*, 175(1), 452-464.
- [13] Ghasabi-Oskoei H. and Malek A. and Ahmadi A. (2007), Novel artificial neural network with simulation aspects for solving linear and quadratic programming problems. *Computers and Mathematics with Applications*, 53(9), 1439-1454.
- [14] Hopfield J.J. and Tank D.W. (1985), "Neural computation of decisions in optimization problems", *Biological Cybernetics*, 533-541.
- [15] Hu X.L. (2009), "Applications of the general projection neural network in solving extended linear-quadratic programming problems with linear constraints", *Neurocomputing*, No. 72, 1131-1137.
- [16] Hu X. and Wang J. (2008), An improved dual neural network for solving a class of quadratic programming problems and its k -winners-take-all application. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 19(12), 2022-2031.
- [17] Hull J.C. (2006), *Options, Futures, and Other Derivatives*, 6th Edition, Prentice Hall, New Jersey.
- [18] Jones C.P. (2001), *Investments: Analysis and Management*, John Wiley and Sons, New York.
- [19] Kennedy M.P. and Chua L.O. (1988), neural networks for nonlinear programming. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 35(5), 554-562.
- [20] Lee S.M. and Chesser D.L. (1980), Goal Programming for Portfolio, *The Journal of Portfolio Management*, pp. 22-26.
- [21] Lee S.M. and Lerro A.J. (1973), Optimization the Portfolio Selection for Mutual Funds, *The Journal of finance*, Vol. 28, pp. 1087-1099, 1973.
- [22] Liu B. (2007), "Uncertainty theory". In *Uncertainty Theory* (pp. 205-234). Springer Berlin Heidelberg.
- [23] Liu B. (2009), "Some research problems in uncertainty theory". *Journal of Uncertain Systems*, 3(1), 3-10.
- [24] Liu B. (2015), *Uncertainty Theory*, 5th Edition, Springer-Verlag, Berlin. <http://orsc.edu.cn/liu/ut.pdf>.

- [25] Liu S. and Wang J. (2006), A simplified dual neural network for quadratic programming with its KWTA application. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 17(6), 1500-1510.
- [26] Liu Q. and Wang J. (2008, November), A one-layer recurrent neural network for non-smooth convex optimization subject to linear equality constraints. In *International Conference on Neural Information Processing (1003-1010)*. Springer Berlin Heidelberg.
- [27] Liu Q. and Wang J. (2008), A one-layer recurrent neural network with a discontinuous hard-limiting activation function for quadratic programming. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 19(4), 558-570.
- [28] Lintner J. (1965), The Valuation of Risk Asset and the Selection of Risky Investments in Stock: Portfolio and Capital Budgets, *Review of Economics and Statistics*, Vol. 47, pp. 22-26.
- [29] Lobo S.M. and Fazel M. and Boyd S. (2002), *Portfolio Optimization with Linear and Fixed Transaction Costs*, California Institute of Technology.
- [30] Malek A. and Alipour M. (2007), Numerical solution for linear and quadratic programming problems using a recurrent neural network. *Applied Mathematics and Computation*, 192(1), 27-39.
- [31] Mansini R. and Oryczak W. and Speranza M.G. (2003), LP Solvable Models for Portfolio Optimization: A Classification and Computational Comparison, *IMA Journal of Management Mathematics*, Vol. 14, pp. 187-220.
- [32] Mansini R. and Speranza M.G. (1997), Heuristic Algorithms for the Portfolio Selection Problem with Minimum Transaction lots, *European Journal of Operational Research*, Vol. 114, pp. 219-233.
- [33] Markovitz H. (1952), Portfolio Selection, *Journal of Finance*, Vol. 7, pp. 77-91.
- [34] Markovitz H. (1959), *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment*, John Wiley and Sons, New York.
- [35] Miller R.K. and Michel A.N. (1981), "Ordinary Differential Equations", Academic Press, New York.
- [36] Mossin J. (1966), Equilibrium in a Capital Asset Market, *Econometrica*, Vol. 34, pp. 14-16.
- [37] Palmquist J. and Uryaser S. and Krokmal P. (1999), Portfolio Optimization with Conditional Value-at-Risk Objective and Constraints, *Journal of Risk*.
- [38] Papahristodoulou C. and Dotzauer E. (2004), Optimal portfolios using linear programming models, *Journal of Operations Research Society*, Vol. 55, pp. 1169-1177.

-
- [39] Peng Z. and Iwamura K. (2010), " Uncertainty distribution of functions of uncertain variables". *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, 13(3), 277-285.
- [40] Ross S.A. (1976), *The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing*, *Journal of Economic Theory*, Vol. 13, PP. 341-360.
- [41] Sharpe W.F. (1964), *Capital Asset Price: A theory of market equilibrium under conditions of Risk*, *Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3, pp. 16-18.
- [42] Tank D. and Hopfield J.J. (1986), Simple 'neural' optimization networks: An A/D converter, signal decision circuit, and a linear programming circuit. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 33(5), 533-541.
- [43] Tao Q. and Cao J. and Xue M. and Qiao H. (2001), A high performance neural network for solving nonlinear programming problems with hybrid constraints. *Physics Letters A*, 288(2), 88-94.
- [44] Wu X. and Xia Y. and Li J. and Chen W. (1996), "A high-performance neural network for solving linear and quadratic programming problems", *IEEE Transactions on Neural Networks*, No. 7(3), 643-651.
- [45] Xia Y. (1996), A new neural network for solving linear and quadratic programming problems. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 7(6), 1544-1548.
- [46] Xia Y. (2004), An extended projection neural network for constrained optimization. *Neural Computation*, 16(4), 863-883.
- [47] Xia Y. and Feng G. and Wang J. (2004), A recurrent neural network with exponential convergence for solving convex quadratic program and related linear piecewise equations. *Neural Networks*, 17(7), 1003-1015.
- [48] Xia Y. and Liu B. and Shoayang W. and Lai K. (1999), A model for portfolio selection with order of expected returns, *Computers and Operations Research*, Vol. 27, ,pp. 409-424.
- [49] Yang Y. and Cao J. (2006), Solving quadratic programming problems by delayed projection neural network. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 17(6), 1630-1634.
- [50] Yang Y. and Cao J. (2008), A feedback neural network for solving convex constraint optimization problems. *Applied Mathematics and Computation*, 201(1), 340-350.
- [51] Yang Y. and Cao J. and Xu X. and Hu M. and Gao Y. (2014), A new neural network for solving quadratic programming problems with equality and inequality constraints. *Mathematics and Computers in Simulation* 101, 103-112.
- [52] Young M.R. (1998), A minimax portfolio selection rule with linear programming solution, *Management Science*, Vol. 44, pp. 673-683.

- [53] Zhang S. and Constantinides A.G. (1992), Lagrange programming neural networks. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing, 39(7), 441-452.
- [54] Zhang Y. and Li Z. (2009), Zhang neural network for online solution of time-varying convex quadratic program subject to time-varying linear-equality constraints. Physics Letters A, 373(18), 1639-1643.
- [55] Zhang Y. and Wang J. (2002), A dual neural network for convex quadratic programming subject to linear equality and inequality constraints. Physics Letters A, 298(4), 271-278.

Abstract

In this thesis, a numerical method based on neural networks is presented to solve a class of the financial optimization problems in uncertain space. To do this, we first write the optimality conditions for the optimization problem. Then we design a neural network model corresponding to it. We prove that the equilibrium point of the corresponding neural network is the main optimal solution. Prove the basis and global convergence of the proposed model by presenting an appropriate Lyapunov function. then, definitions of financial concepts in mathematics and preparatory optimization is presented. also, we introduce the space of uncertain variable. also, presented a new neural network model for solving linear programming. in end, we solve the optimal portfolio selection problem in uncertain space with risk measure as Value at Risk and Conditional Value at Risk using the presented neural network.

Keywords: portfolio, optimization, neural networks, Value at Risk, Conditional Value at Risk.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Operations Research

**On considering a class of portfolio
optimization in uncertain environment**

By: Sahar Mohammadi

Supervisor

Dr Alireza Nazemi

July 2018