

حاشا
الرحمن الرحيم
الرحمن الرحيم



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات

پایان نامه کارشناسی ارشد

یک روش بهینه‌سازی عددی برای کنترل سیستم‌های آشوبناک

نگارنده: راضیه تاجیک

استاد راهنما

دکتر علیرضا ناظمی

بهمن ۱۳۹۶

شماره:
تاریخ:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

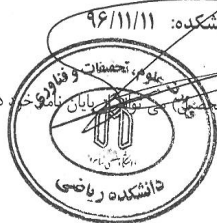
با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم راضیه تاجیک با شماره دانشجویی ۹۴۰۴۵۰۴ رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی تحت عنوان یک روش بهینه سازی عددی برای کنترل سیستم های آشوبناک که در تاریخ ۹۶/۱۱/۱۱ با حضور هیات محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

<input type="checkbox"/> مردود <input checked="" type="checkbox"/> قبول (با درجه: ...عالی...)			
نوع تحقیق: <input checked="" type="checkbox"/> نظری <input type="checkbox"/> عملی			
عضو هیات داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر علیرضا ناظمی	دانشیار	
۲- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر مریم قرانی	استادیار	
۳- استاد ممتحن اول	دکتر حجت احسنی طهرانی	دانشیار	
۴- استاد ممتحن دوم	دکتر محمدهادی نوری اسکندری	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده: ۹۶/۱۱/۱۱

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیلی) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).



تقدیم بہ :

روح پاک پدرم کہ عالمانہ بہ من آموخت تا چگونہ در عرصہ زندگی، ایستادگی را تجربہ نمایم،
و بہ مادرم، دریای بی کران فداکاری و عشق کہ وجودم برایش ہمہ رنج بود و وجودش برایم ہمہ مہر

سپاس‌گزاری

سپاس خداوند حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی راز یور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات خانواده عزیزم به ویژه **مادر**م، تشکر و قدردانی نمایم که در دوران تحصیل، بهترین مشوق من در امر آموختن بودند و هرگز از جانب ایشان، احساس کوچکترین محدودیتی نکردم.

از استاد گرانقدر، جناب آقای **دکتر علیرضا ناظمی** که تبیین و هدایت پایان‌نامه را برعهده داشتند، سپاس‌مندم. ایشان با درایت و صبر و حوصله فراوان که مهمترین نیازهای من بود، مرا در به انجام رساندن این پایان‌نامه، کمک و راهنمایی کردند. از جناب آقای **دکتر احسنی** و جناب آقای **دکتر نوری اسکندری** که زحمت داوری این پایان‌نامه را قبول فرمودند، کمال تشکر را دارم.

در مراحل برنامه‌نویسی این پایان‌نامه، از راهنمایی‌های سرکار خانم **صفیه قاسمی** و سرکار خانم **مرضیه مرتضایی** بهره بردم که بدین وسیله مراتب سپاس و قدردانی خود را نسبت به ایشان اعلام می‌دارم.

در نهایت، از همه‌ی دوستان و عزیزانی که مرا در دوران تحصیل همراهی کردند، تشکر می‌نمایم.

راضیه تاجیک

بهمن ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب راضیه تاجیک دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان یک روش بهینه سازی عددی برای کنترل سیستم های آشوبناک، تحت راهنمایی علیرضا ناظمی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

راضیه تاجیک

بهمن ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه یک روش جدید براساس توانایی های شبکه عصبی مصنوعی برای کنترل سیستم های آشوبناک ارائه می دهیم. برای این کار شرایط همیلتونین را براساس اصل مینیمم پونتریاگین (*PMP*) تقریب میزنیم. تابع خطارا که شامل همه ی شرایط پونتریاگین است را معرفی می کنیم. در تابع خطای پیشنهاد شده، از جواب های آزمایشی برای تابع مسیر، تابع کنترل و ضرایب لاگرانژ استفاده می کنیم. این جواب های آزمایشی به وسیله نرون ها ساخته می شوند. بنابراین، تابع خطا را که شامل وزن همه ی جواب های آزمایشی است را مینیمم می کنیم. با جایگذاری مقادیر بهینه وزن ها در جواب های آزمایشی، مسیر بهینه و کنترل بهینه را بدست می آوریم.

کلمات کلیدی: سیستم دینامیکی، آشوب، سیستم آشوبناک، شبکه های عصبی، مساله برنامه ریزی غیرخطی، کنترل بهینه، اصل مینیمم پونتریاگین، شرایط لازم بهینگی، کنترل بهینه کسری

فهرست مطالب

یظ	فهرست تصاویر
۱	۱ تعاریف و مقدمات اولیه
۱	۱.۱ سیستم‌های دینامیکی
۳	۲.۱ ساختارهای ریاضی سیستم‌های دینامیکی
۳	۱.۲.۱ سیستم‌های مستقل
۴	۲.۲.۱ سیستم متعارف
۶	۳.۲.۱ تحلیل پایداری
۱۰	۴.۲.۱ بررسی پایداری نقاط تعادل با توابع لیاپانوف
۱۲	۵.۲.۱ روش کاربردی برای تشخیص نوع نقطه تعادل
۱۲	۳.۱ شار و سیستم دینامیکی
۱۳	۴.۱ نقاط حدی و دوره‌های حدی
۱۳	۵.۱ پدیده انشعاب و یا دوشاخه‌ای شدن
۱۵	۲ آشوب
۱۶	۱.۲ تاریخچه آشوب
۱۷	۲.۲ سیستم‌های آشوبناک
۱۸	۱.۲.۲ شرایط لازم برای حرکت آشوبناک
۱۹	۳.۲ ویژگی‌های نظریه آشوب
۱۹	۱.۳.۲ اثر پروانه‌ای
۲۱	۲.۳.۲ خودسازماندهی و سازگاری پویا
۲۱	۳.۳.۲ خودمانایی یا خودشباهتی
۲۱	۴.۳.۲ جاذب‌های عجیب
۲۴	۴.۲ فرکتال
۲۵	۵.۲ روش‌های تشخیص رفتار آشوبناک
۲۶	۱.۵.۲ طیف فرکانسی

۲۷ ساختار فضای فاز	۲.۵.۲
۲۸ ابعاد دینامیک‌ها	۳.۵.۲
۳۰ حساسیت به شرایط اولیه	۴.۵.۲
۳۲ توان‌های لیپانوف	۵.۵.۲
۳۲ کاربرد آشوب	۶.۲
۳۴ قلب و عروق	۱.۶.۲
۳۵ مخابرات امن	۲.۶.۲
۳۵ ژنتیک	۳.۶.۲
۳۵ رشته DNA	۴.۶.۲
۳۶ اقتصاد	۵.۶.۲
۳۶ کنترل آشوب	۷.۲
۳۷ روش‌های کنترل آشوب	۸.۲
۴۰ کاربردهای کنترل آشوب	۹.۲
۴۱	۳ مقدمه‌ای بر شبکه‌های عصبی	
۴۱ مفهوم شبکه	۱.۳
۴۲ شبکه‌های عصبی زیستی	۲.۳
۴۳ شبکه‌های عصبی مصنوعی	۳.۳
۴۴ سیر تکامل شبکه عصبی مصنوعی	۱.۳.۳
۴۵ مدل ریاضی نرون عصبی مصنوعی	۲.۳.۳
۴۸ شبکه‌های عصبی پیش‌خورد	۳.۳.۳
۵۱	۴ مقدمه‌ای بر مسائل کنترل بهینه و روش‌های حل آن	
۵۱ نظریه کنترل بهینه	۱.۴
۵۲ مساله کنترل بهینه	۲.۴
۵۴ حساب تغییرات	۳.۴
۵۵ معادله اوپلر-لاگرانژ	۴.۴
۵۶ شرایط لازم برای کنترل بهینه	۵.۴
۵۷ اصل بیشینه پونتریاگین	۶.۴
۵۸ روش‌های عددی حل مسائل کنترل بهینه	۷.۴
۵۸ روش‌های غیرمستقیم	۱.۷.۴
۵۹ روش‌های مستقیم	۲.۷.۴
۶۱	۵ مساله افق نامتناهی و کاربرد آن در کنترل یک سیستم آشوبناک	
۶۲ بیان مساله	۱.۵

۶۴	ساختار شبکه عصبی	۲.۵
۶۷	الگوریتم آموزش	۳.۵
۶۸	پایداری و همگرایی	۴.۵
۷۰	مثال‌های عددی	۵.۵
۷۹		کنترل سیستم‌های آشوبناک کسری	۶
۷۹	مقدمه	۱.۶
۸۰	تاریخچه حساب کسری	۲.۶
۸۱	کنترل بهینه حساب کسری	۳.۶
۸۲	مشتقات و انتگرال‌های کسری	۴.۶
۸۲	تابع گاما	۱.۴.۶
۸۲	خواص تابع گاما	۲.۴.۶
۸۲	مشتق کسری کاپاتو	۳.۴.۶
۸۳	مشتق کسری ریمان-لیوویل	۴.۴.۶
۸۴	انتگرال کسری ریمان-لیوویل	۵.۴.۶
۸۶	بیان مساله	۵.۶
۸۸	ساختار شبکه عصبی	۶.۶
۹۱	مثال‌های عددی	۷.۶
۱۰۷		مراجع	
۱۱۷		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۱۲۱		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	

فهرست تصاویر

۵	فضای فاز آونگ خطی	۱.۱
۷	خاصیت حفظ سطح فضای فاز	۲.۱
۸	تعبیر ترسیمی از پایداری به مفهوم لیاپانوف و پایداری مجانبی	۳.۱
۹	همسایگی های N و N' از مبدا در صفحه برای تعریف (۱۲.۲.۱)	۴.۱
۱۰	نقطه تعادل در (الف) جاذب، در (ب) و (ج) گذر و در (د) دافع	۵.۱
۲۰	اثر پروانه‌ای	۱.۲
۲۳	(الف) جاذب نقطه تعادل، (ب) جاذب دور حدی	۲.۲
۲۳	(ج) جاذب سطحی مارپیچی، (د) جاذب عجیب	۳.۲
۲۴	نمونه‌هایی از فرکتال‌ها	۴.۲
۲۵	نمای لیاپانوف نگاشت لجستیک	۵.۲
	(الف) نمودار انشعاب نگاشت لجستیک به ازای $0 \leq a \leq 4$ به ازای	۶.۲
	$3/5 \leq a \leq 3/7$ که نشان دهنده‌ی خاصیت فرکتالی و خودشباهتی در	
۲۶	نگاشت لجستیک است.	
	(a) جاذب یک مدل فرضی، (b) مقطع پوانکاره ایجاد شده، (c) نگاشت	۷.۲
۲۷	برگشتی	
	مقایسه طیف فرکانسی بین دینامیک متناوب (چپ) و دینامیک آشوبی	۸.۲
۲۹	(راست)	
۳۰	روش به‌دست آوردن بعد همبستگی	۹.۲
۳۱	واگرا شدن پاسخ در اثر اختلاف در شرایط اولیه	۱۰.۲
۳۱	دور شدن مسیرها از یکدیگر و توان‌های لیاپانوف	۱۱.۲
۳۳	اثر مثبت بودن توان لیاپانوف در یک راستای خاص	۱۲.۲
۳۳	یک نمونه سیگنال ECG	۱۳.۲
۳۴	یک نمونه سیگنال ECG	۱۴.۲
۴۳	ساختار نرون	۱.۳
۴۶	مدل ریاضی نرون عصبی مصنوعی	۲.۳

۴۷	تابع پله‌ای	۳.۳
۴۷	تابع پله‌ای دوقطبی	۴.۳
۴۸	تابع سیگموئید	۵.۳
۴۸	تابع سیگموئید قطبی	۶.۳
۴۹	ساختار یک نرون با لایه ورودی، لایه پنهان و لایه خروجی	۷.۳
۵۰	ساختار شبکه عصبی مصنوعی (پرسپترون)	۸.۳
۵۰	پرسپترون چندلایه	۹.۳
۶۴	نرون‌های اولیه	۱.۵
۷۲	حالت و کنترل برای نقطه تعادل $E_1 = (0, 0, 0)$	۲.۵
۷۳	حالت و کنترل برای نقطه تعادل $E_2 = (2/15, 1/25, 1/75)$	۳.۵
۷۳	حالت و کنترل برای نقطه تعادل $E_3 = (-2/1, -1/2, 1/7)$	۴.۵
۷۴	حالت و کنترل برای نقطه تعادل $E_4 = (2, -1/8, -2/7)$	۵.۵
۷۴	حالت و کنترل برای نقطه تعادل $E_5 = (2, -1/8, -2/7)$	۶.۵
۷۷	حالت و کنترل برای نقطه تعادل $E_1 = (0, 0, 0)$	۷.۵
۷۷	حالت و کنترل برای نقطه تعادل $E_2 = (7/9373, 7/9373, 21)$	۸.۵
۷۷	حالت و کنترل برای نقطه تعادل $E_3 = (-7/9373, -7/9373, 21)$	۹.۵
۹۶	حالت و کنترل برای $\alpha = 0/99$	۱.۶
۹۶	حالت و کنترل برای $\alpha = 0/9$	۲.۶
۹۷	حالت و کنترل برای $\alpha = 0/8$	۳.۶
۹۷	حالت و کنترل برای $\alpha = 0/7$	۴.۶
۹۸	حالت و کنترل برای $\alpha = 0/5$	۵.۶
۹۸	حالت x_1 و کنترل u_1 برای $\alpha = 0/99, 0/9, 0/8, 0/7, 0/5$	۶.۶
۹۹	حالت x_2 و کنترل u_2 برای $\alpha = 0/99, 0/9, 0/8, 0/7, 0/5$	۷.۶
۹۹	حالت x_3 و کنترل u_3 برای $\alpha = 0/99, 0/9, 0/8, 0/7, 0/5$	۸.۶
۱۰۴	حالت و کنترل برای $\alpha = 0/99$	۹.۶
۱۰۴	حالت و کنترل برای $\alpha = 0/9$	۱۰.۶
۱۰۴	حالت و کنترل برای $\alpha = 0/8$	۱۱.۶
۱۰۵	حالت و کنترل برای $\alpha = 0/7$	۱۲.۶
۱۰۵	حالت و کنترل برای $\alpha = 0/5$	۱۳.۶
۱۰۵	حالت x_1 و کنترل u_1 برای $\alpha = 0/99, 0/9, 0/8, 0/7, 0/5$	۱۴.۶
۱۰۶	حالت x_2 و کنترل u_2 برای $\alpha = 0/99, 0/9, 0/8, 0/7, 0/5$	۱۵.۶
۱۰۶	حالت x_3 و کنترل u_3 برای $\alpha = 0/99, 0/9, 0/8, 0/7, 0/5$	۱۶.۶

فصل ۱

تعاریف و مقدمات اولیه

۱.۱ سیستم‌های دینامیکی

سیستم‌های دینامیکی یکی از شاخه‌های علوم ریاضی است که به دلیل زیبایی ذاتی آن و ارتباط وسیع آن با دیگر شاخه‌های علوم ریاضی، در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است و کاربردهای فراوان آن در سایر علوم نیز بر جذابیت آن افزوده است. سیستم‌های دینامیکی فرآیندهای در حال تغییر را بررسی می‌کنند که چنین فرآیندهایی در همه‌ی علوم یافت می‌شوند. بازار سهام، وضعیت آب و هوا، افزایش و کاهش جمعیت نمونه‌هایی از سیستم‌های دینامیکی هستند. پیدایش مفاهیم مربوط به سیستم‌های دینامیکی از کارهای وسیع و اساسی پوانکاره درباره مکانیک اجرام آسمانی بود و در سال ۱۸۹۰ میلادی شروع شد. پوانکاره پایداری منظومه شمسی را با استفاده از معادلات دیفرانسیل معمولی مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. یک سیستم دینامیکی، حالت یک سیستم را توصیف می‌کند. حالت یک سیستم را می‌توانیم با توجه به شرایط سیستم و مجموعه‌ای از متغیرها بیان کنیم. به طور خلاصه سیستم دینامیکی از زمان، از مجموعه‌ای از متغیرهای حالت و تابعی که تغییرات سیستم را توصیف کند، تشکیل شده است.

حال یک تعریف ریاضی از سیستم‌های دینامیکی به صورت زیر بیان می‌کنیم

تعریف ۱.۱.۱. [۷] فرض کنید $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ و $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ باشد. در این صورت $x(t)$ یک سیستم دینامیکی نامیده می‌شود اگر برای بازه نامتناهی t ، $x(t)$ در یک

مجموعه معادلات دیفرانسیل معمولی به صورت $\dot{x}(t) = f(x(t))$ صدق کند.

سیستم‌های دینامیکی به دو دسته سیستم‌های زمان-پیوسته و سیستم‌های زمان-گسسته تقسیم می‌شوند.

تعریف ۲.۱.۱. یک سیستم دینامیکی، سیستم دینامیکی زمان-پیوسته نامیده می‌شود اگر مجموعه انتخاب شده برای زمان، زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد، یعنی یکی از مجموعه‌های زیر

$$\begin{cases} T = \mathbb{R}, \\ T = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \\ T = (a, b) \subset \mathbb{R}, \quad a < 0 < b, \end{cases}$$

و در فضای حالت به صورت زیر نمایش داده می‌شود. معمولاً تغییر در این سیستم با معادله دیفرانسیل معمولی توصیف می‌شود.

$$\dot{x}(t) = Ax(t).$$

تعریف ۳.۱.۱. یک سیستم دینامیکی، سیستم دینامیکی زمان-گسسته نامیده می‌شود اگر مجموعه انتخاب شده برای زمان، زیرمجموعه‌ای از اعداد صحیح باشد، یعنی یکی از مجموعه‌های زیر

$$\begin{cases} T = \mathbb{N} \cup \{0\} := \mathbb{N}_0, \\ T = \mathbb{Z}. \end{cases}$$

و در فضای حالت به صورت زیر نمایش داده می‌شود. معمولاً تغییر در این سیستم با معادله تفاضلی توصیف می‌شود.

$$x_{n+1} = Ax_n.$$

مدل‌سازی سیستم‌های دینامیکی

بسیاری از سیستم‌ها را می‌توان توسط یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی به صورت زیر نشان داد

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad (1.1)$$

که در آن t متغیر زمان، $x(t)$ یک بردار ستونی متغیر با زمان n - بعدی است که بر حالت^۱ سیستم دلالت دارد و $u(t)$ یک بردار ستونی m - بعدی است که نشانگر متغیر ورودی^۲ یا

^۱State

^۲Input variable

کنترل^۳ است. تابع f نیز تابع توصیف کننده‌ی سیستم نامیده می‌شود. برای بسیاری از سیستم‌ها انتخاب حالت به صورت طبیعی از ساختار فیزیکی آن برآمده یا اینکه می‌تواند کمیتی صرفاً ریاضی باشد.

فرض کنید که $y(t)$ یک بردار l - بعدی سیستم باشد که بتوان آن را اندازه گرفته و مشاهده کرد یا اینکه متغیری باشد که سیستم توسط آن بر محیط اطراف تاثیر می‌گذارد. چنین متغیری، متغیر خروجی سیستم نامیده می‌شود و در حالت کلی می‌توان آن را به صورت زیر نشان داد

$$y(t) = g(x(t), u(t), t). \quad (2.1)$$

معادله (۲.۱) معادله خروجی نامیده می‌شود و تابع g نیز تابع توصیف کننده خروجی سیستم است. به طور کلی معادلات دیفرانسیلی غیرخطی (۱.۱) و (۲.۱)، معادلات سیستم نامیده می‌شوند.

اگر در معادلات (۱.۱) و (۲.۱)، f و g توابع خطی باشند، در این صورت سیستم را خطی نامیده و در حالت کلی معادله حالت و خروجی سیستم‌های خطی با مقدار اولیه t_0 را می‌توان به صورت زیر بیان نمود

$$\begin{cases} \dot{x}(t) := A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

که در (۳.۱)، $A(t)$ و $B(t)$ ، به ترتیب ماتریس‌های متغیر با زمان $n \times n$ و $n \times m$ حالت و کنترل سیستم می‌باشند، و $C(t)$ و $D(t)$ ، به ترتیب ماتریس‌های متغیر با زمان $l \times n$ و $l \times m$ بوده و $C(t)$ ماتریس خروجی سیستم است [۲].

۲.۱ ساختارهای ریاضی سیستم‌های دینامیکی

۱.۲.۱ سیستم‌های مستقل

با بررسی‌های ات^۴ در سال ۱۹۹۴ میلادی مشخص شد که بخش وسیعی از نظریه سیستم‌های غیرخطی مربوط به حالاتی است که هیچ‌گونه وابستگی به زمان ندارند. چنین سیستم‌هایی همگن^۵ نامیده می‌شوند. این حالت، زمانی رخ می‌دهد که بردار ورودی ثابت است. در این

^۳Control

^۴Ott

^۵Autonomous Systems

حالت معادله دیفرانسیل بردار حالت به صورت

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (۴.۱)$$

است که u یک بردار ثابت است.

۲.۲.۱ سیستم متعارف

سیستم خطی

$$\dot{x} = Ax, \quad (۵.۱)$$

را در نظر بگیرید. این سیستم، با تغییر متغیر $x = Py$ به سیستم متعارف تبدیل می‌شود که در آن ماتریس ضرایب و J فرم متعارف جردن ماتریس A است به طوریکه $J = P^{-1}AP$ است. در واقع ستون‌های P پایه‌ای برای \mathbb{R} تشکیل می‌دهند و y مختصات x نسبت به این پایه است. از آنجایی که ماتریس‌های A و J متشابه هستند و تشابه یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه ماتریس‌های حقیقی $n \times n$ است، لذا این مجموعه به کلاس‌های هم‌ارزی مجزا افزای می‌شود. برای هر دو ماتریس A و J در یک کلاس هم‌ارزی، جواب‌های سیستم‌های $\dot{y} = Jy$ و $\dot{x} = Ax$ با روابط

$$x = Py, \quad P^{-1}AP = J,$$

به هم وابسته هستند. بنابراین، اگر یکی از سیستم‌ها حل شود، جواب‌های سایر اعضای کلاس نیز بدست می‌آیند.

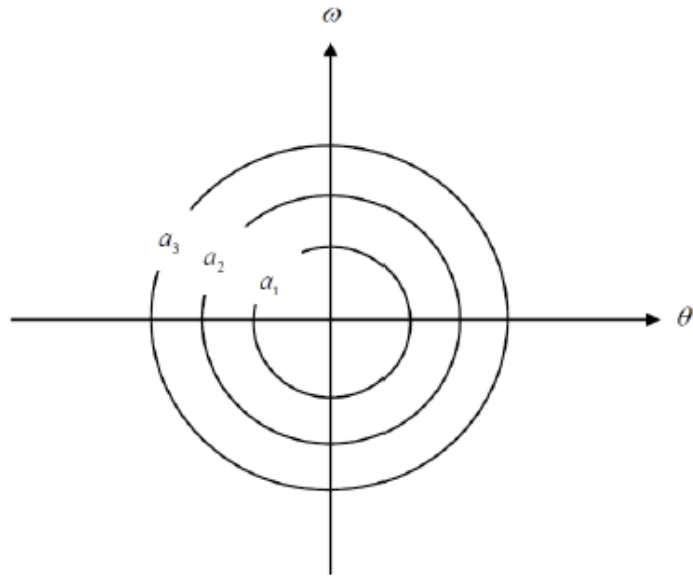
تعریف ۱.۲.۱. [۲] سیستم خطی (۵.۱) را ساده نامند هرگاه ماتریس A نامنفرد باشد. اگر سیستم خطی (۵.۱) ساده باشد، آنگاه $x = \circ$ تنها جواب سیستم

$$\dot{x} = Ax = \circ,$$

است.

تعریف ۲.۲.۱. [۲] سیستم مستقل (۴.۱) را در نظر بگیرید. نقطه تعادل x_e ، نقطه‌ای است که در معادله $\dot{x} = f(x, u) = \circ$ صدق می‌کند. اگر یک جواب از این نقطه شروع شود، برای همیشه در آنجا باقی می‌ماند.

تعریف ۳.۲.۱. [۲] سیستم خطی (۵.۱) را غیرساده گویند هرگاه A منفرد باشد. به عبارت دیگر سیستم غیرساده $Ax = \circ$ ، دارای جواب‌های غیربدیهی است و سیستم، به غیر از $x = \circ$ نقطه تعادل دیگری ندارد.



شکل ۱.۱: فضای فاز آونگ خطی

تعریف ۴.۲.۱ [۸] فضای فاز یک سیستم دینامیکی، یک فضای ریاضی با مختصات متعامد است که نمایانگر متغیرهای لازم برای مشخص کردن حالت لحظه‌ای سیستم می‌باشد. به عنوان مثال، حالت ذره‌ای که در یک بعد حرکت می‌کند با مکان x و سرعت v تعیین می‌شود. بنابراین فضای فاز آن یک صفحه است.

مثال ۱.۲.۱. معادله حرکت آونگ ساده با در نظر گرفتن تقریب $\sin \theta \approx \theta$ به صورت زیر است

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \theta = 0,$$

این معادله خطی مرتبه دوم با در نظر گرفتن متغیر سرعت زاویه‌ای $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ به دو معادله مرتبه اول زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{d\omega}{dt} = -\theta, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega.$$

از این رو هر متغیر دینامیکی، معادله دیفرانسیل مرتبه اول خود را خواهد داشت. حال بدون این که از کلیت مساله کاسته شود می‌توان شرایط اولیه را طوری برگزید که جوابی به صورت

$$\theta = a_i \cos t, \quad \omega = a_i \sin t.$$

داشته باشیم که $\{a_i\}$ نمایانگر دامنه‌های مجاز حرکت است. با این مجموعه جواب، یک سری منحنی‌های پارامتری برای ω و θ خواهیم داشت که با حذف پارامتر زمان می‌توان یک نمایش دو بعدی به ازای مقادیر مختلف a_i بدست آورد. نمودار شکل (۱.۱) نمودار فضای فاز این مساله را نشان می‌دهد.

تعریف ۵.۲.۱ [۸] مسیری که متغیر حالت $x(t)$ با گذشت زمان t طی می‌کند مسیر فاز نامیده می‌شود.

با در نظر گرفتن مثال (۱.۲.۱) هر مقدار a_i یک مدار بسته به ما می‌دهد. این مدار، مسیر فاز نامیده می‌شود. یک ویژگی مهم مسیر این است که دو مسیر نزدیک به هم، علاوه بر نزدیکی، همدیگر را قطع نخواهند کرد. این خاصیت ناشی از این واقعیت است که حالت‌های گذشته و آینده سیستم را منحصر در یک زمان مفروض معین می‌کند.

تعریف ۶.۲.۱. تصویر فاز شکلی دو بعدی است که نشان دهنده رفتار کیفی سیستم بوده و با تغییر t بر حسب x_1 و x_2 در صفحه فاز نشان داده می‌شود.

تعریف ۷.۲.۱. [۲] نقطه تعادل x_e از سیستم (۴.۱) را منفرد گویند هرگاه یک همسایگی از نقطه x_e وجود داشته باشد به طوری که x_e تنها نقطه تعادل (۴.۱) باشد.

۳.۲.۱ تحلیل پایداری

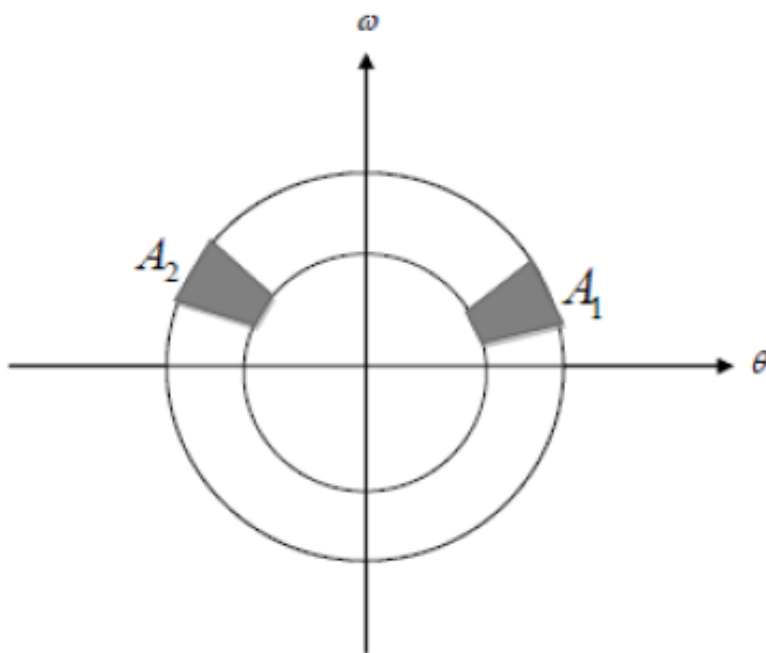
بدون شک مهمترین مشخصه یک سیستم کنترل می‌تواند پایداری آن باشد. اهمیت مفهوم پایداری با این واقعیت تاکید می‌شود که تقریباً تمامی سیستم‌های عملی و کاربردی را چنان طراحی می‌کنند که پایدار باشند. در عمل سیستمی که پایدار نباشد عموماً کاربردی نیز ندارد. درجه پیچیدگی تحلیل پایداری سیستم‌های دینامیکی به سرعت با تغییر مدل‌های ریاضی سیستم از خطی تغییرناپذیر با زمان به خطی تغییرپذیر با زمان و غیرخطی افزایش می‌یابد. تعریف پایداری برای یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان یک مفهوم نسبتاً ساده است [۲]. از این رو طبیعی است که تحلیل‌های پایداری را به سیستم‌های غیرخطی و خطی تغییرپذیر با زمان بسط دهیم. یکی از ویژگی‌های مهم فضای فاز سیستم‌های پایدار، خاصیت حفظ سطوح است. این بدان معنی است که نقطه‌های موجود در یک سطح مشخص از فضای فاز در لحظه‌ای معین، به گونه‌ای حرکت می‌کنند که در زمان‌های بعد، سطحی را که این نقاط اشغال می‌کنند ثابت باقی می‌ماند. شکل (۲.۱) این خاصیت را نشان می‌دهد. خاصیت حفظ سطح و یا حفظ حجم مشخصه کلی سیستم‌های پایدار است. این ویژگی سیستم‌های دینامیکی را بر حسب اینکه حجم‌های فاز ثابت بماند و یا کاهش یابد به دو گروه پایدار و اتلافی تقسیم می‌کند [۸]. یکی از کلی‌ترین روش‌های تحلیل پایداری سیستم‌ها منسوب به دانشمند روسی قرن نوزدهم میلادی لیاپانوف^۶ است. لیاپانوف دو روش برای تحلیل پایداری پیشنهاد کرد. در روش اول یا روش غیرمستقیم لیاپانوف، تحلیل پایداری معادلات دیفرانسیل غیرخطی پس از خطی‌سازی حول نقطه تعادل انجام می‌گیرد. روش دوم یا روش مستقیم لیاپانوف^۷، روش عام تحلیل پایداری سیستم‌ها است.

تعریف ۸.۲.۱. [۲] معادله دیفرانسیل حالت زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t),$$

^۶Lyapunov

^۷Lyapunov's Second (or Direct) Method



شکل ۲.۱: خاصیت حفظ سطح فضای فاز

نقطه تعادل x_e را به مفهوم لیاپانوف پایدار^۸ گویند اگر برای هر t_0 و هر $\epsilon > 0$ یک $\delta(\epsilon) > 0$ وجود داشته باشد به طوری که اگر $\|x(t_0) - x_e\| \leq \delta$ ، آنگاه برای همه $t \geq t_0$ رابطه زیر برقرار باشد

$$\|x(t) - x_e\| \leq \epsilon.$$

در اینجا $\|x(t)\|$ نشان دهنده نرم^۹ بردار است و می‌توان از تعریف نرم اقلیدسی^{۱۰} به صورت

$$\|x(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2(t)},$$

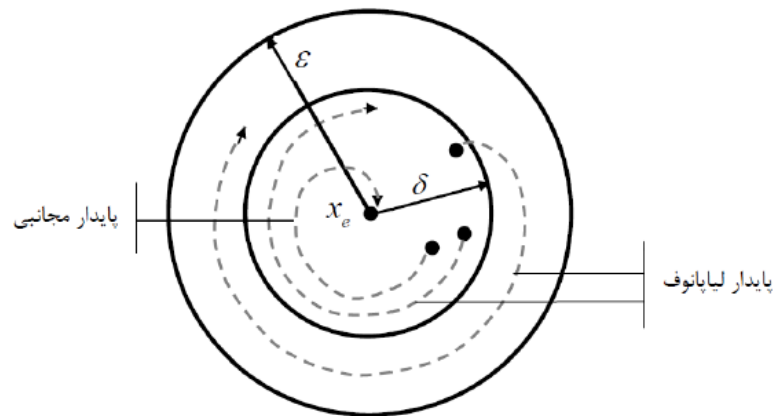
که در آن $x_i(t)$ مولفه‌های $x(t)$ هستند و یا از هر تعریف دیگری از نرم استفاده کرد.

ویژگی فیزیکی پایداری به مفهوم لیاپانوف آن است که می‌توان با انتخاب حالت اولیه‌ی به اندازه کافی نزدیک به نقطه تعادل از دور شدن حالت از نقطه تعادل جلوگیری کرد. به عبارت دیگر حالت تعادل x_e را به مفهوم لیاپانوف پایدار گویند اگر پاسخ ناشی از هر حالت اولیه که به اندازه کافی نزدیک x_e باشد، هیچ‌گاه از حالت تعادل x_e دور نشود. این تعریف به طور ترسیمی در شکل (۳.۱) نشان داده شده است. پایداری به مفهوم لیاپانوف صورت ضعیفی از پایداری است که در بسیاری از مواقع ارزش علمی ندارد. در واقع اگر پاسخ علاوه بر نزدیک ماندن به

^۸In the Sense of Lyapunov

^۹Norm

^{۱۰}Euclidean Norm



شکل ۳.۱: تعبیر ترسیمی از پایداری به مفهوم لیپانوف و پایداری مجانبی

حالت تعادل، به سمت آن نیز میل کند در آن صورت نوع قوی و عملی‌تر از پایداری وجود داشته که آن را پایدار مجانبی^{۱۱} نامیده و به تعریف آن می‌پردازیم.

تعریف ۹.۲.۱. [۲] نقطه تعادل معادله دیفرانسیل حالت

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \circ, t),$$

پایداری مجانبی است اگر

(۱) پایدار به مفهوم لیپانوف باشد.

(۲) به ازای هر t_0 ، یک $\rho(t_0) > \circ$ وجود داشته باشد که اگر $\|x(t_0) - x_e\| \leq \rho(t_0)$ آنگاه رابطه زیر اگر $t \rightarrow \infty$ برقرار باشد

$$\|x(t) - x_e\| \rightarrow \circ.$$

بنابراین پایدار مجانبی باید علاوه بر پایداری به مفهوم لیپانوف، به شرط آن که حالت اولیه سیستم در محدوده تعریف شده در همسایگی نقطه تعادل باشد، همگرایی پاسخ سیستم به نقطه تعادل را تضمین کند. شکل (۳.۱) تعبیر ترسیمی پایدار مجانبی را نشان می‌دهد.

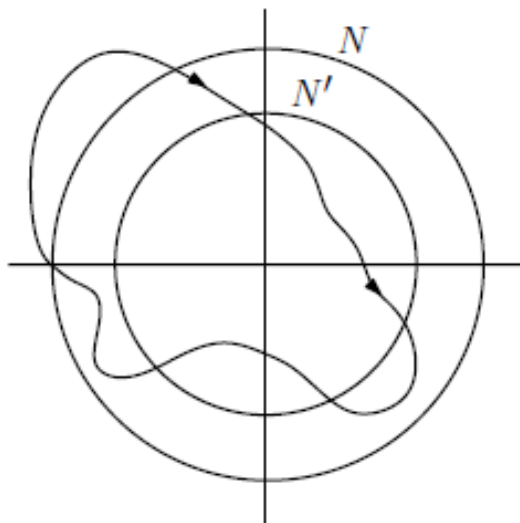
تعریف ۱۰.۲.۱. [۲] نقطه تعادل معادله دیفرانسیل حالت

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \circ, t),$$

پایداری مجانبی جامع است اگر

(۱) پایدار به مفهوم لیپانوف باشد.

^{۱۱}Asymptotically Stable



شکل ۴.۱: همسایگی‌های N و N' از مبدا در صفحه برای تعریف (۱۲.۲.۱)

(۲) برای هر $x(t_0)$ و رابطه زیر به ازای $t \rightarrow \infty$ برقرار باشد

$$\|x(t) - x_e\| \rightarrow 0.$$

بنابراین پاسخی که پایدار مجانبی جامع باشد دارای این خاصیت می‌باشد که کلیه پاسخ‌های دیگر نهایتاً به سمت آن میل خواهند کرد. در نتیجه یک شرط لازم برای پایداری مجانبی جامع آن است که در تمامی فضای حالت تنها یک حالت تعادل وجود داشته باشد. در طراحی سیستم‌های کنترل مطلوب‌ترین نوع پایداری، پایداری مجانبی جامع است. و اگر این نوع پایداری وجود نداشته یا قابل دسترسی نباشد، آنگاه تعیین بزرگترین محدوده پایداری بسیار مهم خواهد بود. البته پیدا کردن این محدوده از نظر علمی چندان آسان نبوده و در عمل پیدا کردن محدوده پایداری مجانبی به گونه‌ای که هیچ اغتشاشی از آن عبور نکند، کفایت می‌کند.

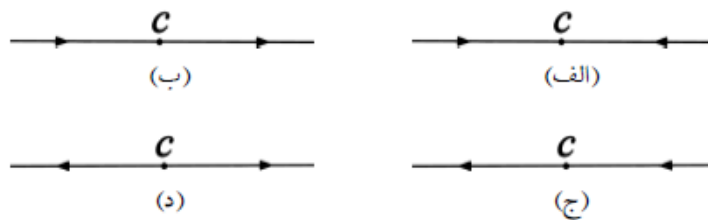
تعریف ۱۱.۲.۱. [۲] نقطه تعادل سیستم را **ناپایدار**^{۱۲} گویند اگر پایدار به مفهوم لیاپانوف یا پایدار مجانبی نباشد.

تعریف ۱۲.۲.۱. نقاط تعادل به طور مجانبی پایدار را **جاذب** و نقاط تعادل ناپایدار را **دافع** می‌نامند.

نقاط تعادل معادله مستقل (۴.۱) را می‌توان براساس رفتار جواب در نزدیکی این نقاط به سه نوع جاذب، دافع و گذر دسته‌بندی کرد.

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنید c نقطه تعادل معادله مستقل (۴.۱) باشد. گویند

^{۱۲} Unstable



شکل ۵.۱: نقطه تعادل در (الف) جاذب، در (ب) و (ج) گذر و در (د) دافع

- c جاذب است هرگاه جواب‌های به اندازه کافی نزدیک به c به آن میل کنند؛
- c دافع است هرگاه جواب‌های به اندازه کافی نزدیک به c از آن دور شوند؛
- c گذر است هرگاه جواب‌ها از یک طرف به c نزدیک و از طرف دیگر از آن دور شوند.

۴.۲.۱ بررسی پایداری نقاط تعادل با توابع لیاپانوف

روش دوم یا مستقیم لیاپانوف طی دهه‌های گذشته به طور گسترده‌ای در تحلیل پایداری بسیاری از سیستم‌ها کاربرد پیدا کرده است. این روش نقش مهمی در تحلیل پایداری سیستم‌های توصیف‌شده با معادلات فضای حالت ایجاد می‌کند. این روش بدون بدست آوردن پاسخ $x(t)$ پایداری سیستم‌های غیرخطی و خطی را تحلیل می‌کند. روش دوم لیاپانوف برای تعیین رفتار سیستم‌های مرتبه بالا که ممکن است ورودی داشته و یا نداشته، خطی یا غیرخطی، تغییرپذیر با زمان یا تغییرناپذیر با زمان باشند، قابل اعمال است. در این روش پاسخ معادله دیفرانسیل لازم نیست. این روش انتخاب یک تابع اسکالر $V(x)$ که برای تعیین شرایط پایداری آزموده می‌شود را لازم می‌دارد. وقتی که $V(x)$ این شرایط را به طور موفقیت‌آمیزی برآورده می‌سازد یک تابع لیاپانوف^{۱۳} نامیده می‌شود. مشکل اساسی در اعمال این روش تعیین یک تابع لیاپانوف مناسب است، زیرا که عدم موفقیت یک تابع برای برآورده ساختن شرایط پایداری دلیل بر اینکه یک تابع لیاپانوف واقعی وجود ندارد نیست. این مساله با این واقعیت که تابع لیاپانوف منحصر به فرد نیست پیچیده‌تر می‌شود. با وجود این مشکلات، روش دوم لیاپانوف مورد توجه بسیاری از مهندسين کنترل سیستم قرار گرفته است.

تعریف ۱۴.۲.۱. [۲] تابع حقیقی $V : N \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ را که در آن N یک همسایگی از $\circ \in \mathbb{R}^n$ است، در N ، معین مثبت (منفی) گویند هرگاه به ازای هر $x \in N \setminus \{\circ\}$ ، $V(x) > \circ$ ($V(x) < \circ$) و $V(\circ) = \circ$ باشد.

تعریف ۱۵.۲.۱. [۲] تابع حقیقی $V : N \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ را که در آن N یک همسایگی از $\circ \in \mathbb{R}^n$ است، در N ، نیمه معین مثبت (منفی) گویند هرگاه به ازای هر $x \in N \setminus \{\circ\}$ ، $V(x) \leq \circ$ ($V(x) \geq \circ$) باشد.

^{۱۳} Liapunov Function

$V(x) \geq 0$ و $V(0) = 0$ باشد.

قضیه ۱.۲.۱. [۱۰] (قضیه پایداری لیاپانوف) فرض کنید سیستم غیرخطی $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ ، $\dot{x} = X(x)$ ، یک نقطه تعادل در مبدا دارد. فرض کنید یک تابع حقیقی V در همسایگی N از مبدا وجود داشته باشد به طوری که

• $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ موجود و پیوسته باشند،

• V معین مثبت باشد،

در این صورت

(۱) اگر \dot{V} نیمه معین منفی باشد، آنگاه مبدا یک نقطه تعادل پایدار سیستم است.

(۲) اگر \dot{V} معین منفی باشد، آنگاه مبدا یک نقطه تعادل به طور مجانبی پایدار است.

(۳) اگر \dot{V} معین مثبت باشد، آنگاه مبدا ناپایدار است.

تعریف ۱.۶.۲.۱. [۱۰] تابع $V(x)$ را که در شرط (۱) قضیه (۱.۲.۱) صدق کند، تابع لیاپانوف ضعیف و اگر در شرط (۲) صدق کند، تابع لیاپانوف قوی گویند.

در سیستم‌های خطی، بررسی پایداری بسیار ساده‌تر از پایداری سیستم غیرخطی است و به راحتی می‌توان از پایداری سیستم‌ها به جای پایداری نقاط تعادل صحبت کرد. در این مورد به بیان دو قضیه زیر می‌پردازیم.

قضیه ۲.۲.۱. [۲] سیستم خطی

$$\dot{x}(t) = Ax(t),$$

پایدار به مفهوم لیاپانوف است اگر و فقط اگر

(۱) کلیه مقادیر ویژه A قسمت‌های حقیقی غیرمثبت داشته باشند.

(۲) آن دسته از مقادیر ویژه A که قسمت‌های حقیقی آن‌ها صفر هستند، صفرهای ساده^{۱۴} چندجمله‌ای مشخصه A باشند.

قضیه ۳.۲.۱. [۲] سیستم خطی

$$\dot{x}(t) = Ax(t),$$

پایدار مجانبی است اگر و فقط اگر کلیه مقادیر ویژه A قسمت‌های حقیقی اکیدا منفی داشته باشد.

^{۱۴} Simple Zero

تعریف ۱۷.۲.۱. ماتریس $A_{n \times n}$ را در نظر بگیرید. اسکالر P را یک مقدار ویژه^{۱۵} ماتریس A می‌نامند، اگر یک بردار غیرصفر X وجود داشته باشد به طوری که

$$AX = PX,$$

را برآورده سازد. به بردار غیرصفر X در اینجا بردار ویژه^{۱۶} ماتریس A متناظر با مقدار ویژه P گفته می‌شود.

۵.۲.۱ روش کاربردی برای تشخیص نوع نقطه تعادل

به دلیل دشواری تشخیص نوع نقطه تعادل یک سیستم دینامیکی غیرخطی با استفاده از تعاریف مذکور، روش کاربردی برای این کار پیشنهاد شده است که مطابق گام‌های زیر انجام می‌گیرد [۹]

(۱) تشکیل ماتریس ژاکوبین سیستم دینامیکی،

(۲) تخمین مقدار ماتریس ژاکوبین در نقطه تعادل

(۳) محاسبه مقادیر ویژه ماتریس به دست آمده در گام ۲،

(۴) در صورتی که همه مقادیر ویژه دارای قسمت حقیقی منفی باشند نقطه تعادل به طور مجانبی پایدار است و اگر مقدار ویژه‌ای قسمت حقیقی مثبت داشته باشد آنگاه نقطه تعادل ناپایدار است.

۳.۱ شار و سیستم دینامیکی

مساله مقدار اولیه

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0, \quad (6.1)$$

را در نظر بگیرید.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید $D \subseteq \mathbb{R}^n$ و $X \in C^1(D)$. اگر به ازای $x_0 \in D$ ، جواب مساله مقدار اولیه (۶.۱) روی I باشد، در این صورت به ازای هر $t \in I$ ، مجموعه‌ای از نگاشت‌های ϕ_t که به صورت $\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$ تعریف می‌شوند، شار سیستم $\dot{x} = f(x, u)$ نامیده می‌شوند.

^{۱۵}Eigev Vector

^{۱۶}Eign Vector

ویژگی‌های شار

تابع ϕ_t که هر $x_0 \in D$ را به نقطه $\phi_t(x_0)$ می‌نگارد، دارای ویژگی‌های زیر است

$$\phi_0(x) = x, \quad (1)$$

$$\phi_{s+t}(x) = \phi_s(\phi_t(x)), \quad t, s \in \mathbb{R} \quad \text{به ازای هر} \quad (2)$$

$$\phi_t^{-1} = \phi_{-t}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{به ازای هر} \quad (3)$$

۴.۱ نقاط حدی و دوره‌های حدی

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید x نقطه‌ای در تصویر فاز از شار ϕ_t باشد. در این صورت،

• نقطه y را $(-\omega) - \alpha$ حد x گویند هرگاه دنباله $\{t_n\}$ وجود داشته باشد به طوری که وقتی $(t_n \rightarrow +\infty)t_n \rightarrow -\infty$ ، رابطه $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{t_n}(x) = y$ برقرار باشد.

• مجموعه نقاطی که $(-\omega) - \alpha$ حد x هستند را **مجموعه** $(-\omega) - \alpha$ حد x گویند و با $(L_\omega(x))L_\alpha(x)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۲.۴.۱. مدار بسته l را **دور حدی** گویند هرگاه شامل نقطه تعادل نباشد و برای برخی x هایی که در l نیستند، $l \subset L_\omega(x)$ یا $l \subset L_\alpha(x)$ باشد. به عبارتی، هر مسیر متناوب منفرد را دور حدی می‌نامند.

تعریف ۳.۴.۱. فرض کنید l یک دور حدی باشد. در این صورت،

• l یک **دور حدی پایدار** است هرگاه در یک همسایگی از آن، $L_\omega(x) = l$ باشد. به عبارت دیگر، در یک همسایگی از l ، مسیرها به طرف آن جذب شوند.

• l یک **دور حدی ناپایدار** است هرگاه در یک همسایگی از آن، $L_\alpha(x) = l$ باشد. به عبارت دیگر، در یک همسایگی از l ، مسیرها از آن دور شوند.

• l یک **دور حدی نیم‌پایدار** است هرگاه در یک همسایگی از آن، l از یک طرف جاذب و از طرف دیگر، دافع باشد.

۵.۱ پدیده انشعاب و یا دوشاخه‌ای شدن

اغلب مدل‌های ریاضی، علاوه بر متغیرها، دارای پارامتر نیز هستند. پارامترها، مولفه‌هایی هستند که به زمان بستگی ندارند اما ممکن است با توجه به کاربردهای گوناگون مدل، مقادیر متفاوتی داشته باشند. تغییرات رفتار جواب هنگامی که پارامترها تغییر می‌کنند، یکی از

مهمترین موضوعات مورد مطالعه سیستم‌های دینامیکی است. در اغلب مدل‌ها، تنها تقریبی از مقدار پارامتر در دست است. بنابراین، برای اینکه، مدل مفید باشد، لازم است که تاثیر تغییر جزئی در مقدار پارامتر را روی رفتار جواب بررسی کنیم. اگر رفتار سیستم با تغییر پارامتر به طور ناگهانی عوض شود، گوییم سیستم دست‌خوش **انشعاب** شده است. در یک نقطه انشعاب، تعداد نقاط تعادل و همچنین پایداری آن‌ها تغییر می‌کند.

فصل ۲

آشوب

می‌دانیم که ابزار تحلیل پدیده‌های طبیعی برای فیزیکدانان و مهندسان و بقیه علوم که نیاز به مدل‌سازی دارند، معادلات دیفرانسیل (یا معادلات تفاضلی) است. این معادلات که می‌توانند به صورت جزئی^۱ یا معمولی^۲ باشند، چارچوب تحلیلی قوی‌ای برای همه‌ی دانشمندان علوم طبیعی فراهم می‌کنند. در بسیاری از موارد برای سادگی تحلیل، مدل‌ها به صورت خطی تقریب زده می‌شوند. در این صورت ابزارهای ریاضی کاملی برای تحلیل این چنین مسائل وجود دارد. با این حال به محض اینکه چنین ساده‌سازی‌ای انجام ندهیم، با معادلات غیرخطی مواجه می‌شویم که پدیده‌های جدیدی چون چرخه حدی^۳ در آن مشاهده می‌شود. اما این تنها رفتار دینامیک خطی با غیرخطی نیست. مدت‌ها به دلیل وجود قضیه پوانکاره- بندیکسون^۴ تصور می‌شد که یک سیستم یا دارای نقطه تعادل (چه پایدار و چه ناپایدار) است و یا دارای چرخه حدی است. البته این قضیه تنها برای سیستم‌های مرتبه دوم صادق بود، اما باور عموم بر آن بود که چنین قضیه‌ای برای سیستم‌های مرتبه بالاتر نیز برقرار است. با این حال مشاهده شد که برای سیستم‌های مرتبه سه به بالا، پدیده دیگری نیز علاوه بر این‌ها رخ می‌دهد و آن هم آشوب است.

نظریه آشوب، به عنوان یک پدیده‌ی بسیار جالب، برای توصیف بسیاری از پدیده‌ها از علوم

^۱ Partial Differential Equation (PDE)

^۲ Ordinary Differential Equation (ODE)

^۳ Limit Cycle

^۴ Poincare-Bendixon

مختلف از قبیل علوم پایه، اقتصاد، علوم مهندسی، بیولوژی، هواشناسی و مدیریت با موفقیت به کار گرفته شده است. برخی آشوب را بعد از نسبیت و فیزیک کوانتومی، سومین انقلاب فیزیک در قرن بیستم نامیده‌اند.

تاکنون تعاریف زیادی برای آشوب مطرح شده است. با این وجود، تعریف کلی پذیرفته شده برای آشوب ارائه نشده است ولی اغلب تعریف زیر مورد تایید است.

تعریف ۱.۰.۲. آشوب یک رفتار طولانی مدت نامتناوب در یک سیستم قطعی است که وابستگی شدیدی به شرایط اولیه، نشان می‌دهد.

- منظور از رفتار طولانی مدت نامتناوب در سیستم‌های دینامیکی، آن است که مسیرهایی وجود دارند که وقتی زمان به بی‌نهایت میل می‌کند، این مسیرها به نقاط تعادل، مدارهای متناوب و مدارهای شبه‌متناوب منتهی نمی‌شوند.

- قطعی، گویای آن است که سیستم، پارامترها یا ورودی‌های تصادفی ندارد و رفتار بی‌نظم آن، از غیرخطی بودن آن ناشی می‌شود.

- منظور از حساس بودن به شرایط اولیه در سیستم‌های دینامیکی، آن است که مسیرهایی نزدیک به هم، با سرعت و به طور نمایی از هم دور می‌شوند. در واقع این خصوصیت، تفاوت اصلی سیستم‌های دینامیکی آشوبناک با سیستم‌های دینامیکی غیرآشوبناک است. در سیستم‌های دینامیکی غیرآشوبناک، اختلاف کوچک اولیه در دو مسیر، به عنوان خطای اندازه‌گیری بوده و به طور خطی با زمان افزایش پیدا می‌کند، در حالیکه در سیستم‌های دینامیکی آشوبناک، اختلاف بین دو مسیر با فاصله بسیار اندک، به طور نمایی افزایش می‌یابد.

۱.۲ تاریخچه آشوب

پوانکاره^۵ اولین کسی بود که اثبات کرد، مساله سه جرم (به عنوان مثال، خورشید، زمین و ماه) مساله‌ای آشوبی و غیر قابل حل است. گفته می‌شود که پیر لاپلاس^۶ و عمر خیام^۷ قبل از پوانکاره، به این مساله و پدیده پی برده بودند. پوانکاره در سال ۱۹۰۰ هنگامی که مشغول مطالعه روی مساله جرم ماه، زمین و خورشید بود پی برد که این قبیل از مسائل توسط قوانین نیرو و حرکت نیوتن و قوانین کپلر قابل حل نیست و نوعی مساله آشوب به نظر می‌رسد. این مساله به بررسی چگونگی رفتار، مسیرهایی حرکت و سرعت حرکت اجرا می‌پردازد که به طور متقابل بر همدیگر اثر می‌گذارند. پس از سال ۱۹۰۰ نظریه آشوب با سرعت بیشتری به حرکت

^۵Henri Poincare

^۶Pierre Laplace

^۷غیاث‌الدین ابوالفتح عمر بن ابراهیم خیام نیشابوری

خود ادامه داد زیرا رفتارهایی که نظریه خطی امکان پاسخگویی به آنها را نداشت، روز به روز بیشتر می‌شد. به‌علاوه با ظهور رایانه‌ها در دفاتر کار و ادارات و توانایی این دستگاه‌ها برای محاسبه اعمال تکراری، بسیاری از مسائل آشوب که درگیر تکرارهای بسیار زیاد و فرمول‌های ساده ریاضی بودند قابل حل به نظر رسید.

اولین آزمایش واقعی در زمینه‌ی آشوب توسط یک هواشناس به نام ادوارد لورنز^۸ انجام شد. در سال ۱۹۶۰ وی روی یک مساله‌ی پیش‌بینی وضع هوا کار می‌کرد که نتایج کار او به عنوان اثر پروانه‌ای شناخته شد. لورنز در سال ۱۹۶۳، نتیجه‌ی تحقیقات خود را تحت عنوان مقاله‌ای در یک مجله‌ی هواشناسی چاپ کرد که زیاد مورد توجه قرار نگرفت. در سال ۱۹۷۱، روهیل^۹ و تاکند^{۱۰} [۱۱]، در بررسی یک سیستم میرا که تلاطم در سیالات را بیان می‌کرد، مفهوم جاذب‌های عجیب را معرفی کردند. از آن زمان به بعد، گسترش نظریه آشوب مدیون تلاش‌های افرادی چون بنویت مندلبرات^{۱۱}، هنگ‌وان کخ^{۱۲} و میچل فیگن باوم^{۱۳} است. بنویت مندلبرات یک ریاضیدان بود که خودشباهتی در معادلات ریاضی را بررسی کرد. خودشباهتی پدیده‌ای است که هر جزء از آن با کلش همانند است. مندلبریت اجسامی که دارای خاصیت خودشباهتی هستند را فرکتال نامید. ریاضیدان دیگری که در این زمینه کار کرد، هلگ‌وان کخ بود. او ساختار ریاضی خودشباهتی را معرفی کرد که به منحنی کخ معروف شد. بعدها ثابت شد که سیستم‌های آشوبناک، دارای جاذب‌های عجیبی هستند که ساختار فرکتالی و بعد کسری دارند. همچنین فیگن باوم میزان خودشباهتی را به صورت عددی محاسبه کرد و نشان داد این عدد برای دسته خاصی از معادلات ریاضی مقداری ثابت است. فیگن باوم ضمن مطالعه‌ی نگاشت‌های یک بعدی متوجه به وجود آمدن آشوب از طریق یکسری دوشاخگی‌های دو برابر کننده‌ی پی‌ریود شد و در پی آن توانست خواص زیادی را در این نگاشت‌ها در گذر به آشوب به‌دست آورد [۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵]. در ادامه تحقیقات وسیع‌تری در زمینه آشوب صورت گرفت و به تدریج نظریه آشوب در علوم مختلف راه پیدا کرد.

۲.۲ سیستم‌های آشوبناک

سیستم‌های آشوبناک دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی هستند که حساسیت زیادی به شرایط اولیه و تغییر در مقادیر پارامترهای سیستم از ویژگی‌های آن است. این سیستم‌ها به ازای شرایط اولیه متفاوت، پاسخ‌های متفاوتی دارند و رفتار قبلی خود را تکرار نمی‌کنند. با توجه به اینکه سیستم‌های آشوبناک دارای ساختاری معین بوده، دارای رفتارهای تصادفی نیز می‌باشند.

^۸Edward Lorentz

^۹Ruelle

^{۱۰}Takens

^{۱۱}Benoit Mandelbrot

^{۱۲}Koch

^{۱۳}Feigen Baum

هنگامی که ساختار سیستم معین باشد، سیستم به ازای یک ورودی فقط یک خروجی دارد در حالیکه در ساختار تصادفی به ازای یک ورودی خروجی‌های متعددی داریم. در یک سیستم آشوبی اطلاعات به صورت نمایی از هم دور می‌شوند یعنی اگر خطای کوچکی در شرایط اولیه وجود داشته باشد، این خطا به صورت نمایی رشد می‌کند و پس از مدتی تقریباً همه اطلاعات از هم دور می‌شوند و سبب ایجاد خطای بزرگی در نتایج می‌گردد. اگر خطا را در شرایط اولیه کاهش دهیم الزاماً خطا در نتایج نهایی کاهش نمی‌یابد بلکه ممکن است نتیجه عکس بدهد. این رفتار تصادفی سیستم را نشان می‌دهد که به ازای شرایط اولیه یکسان، نتایج متفاوتی حاصل می‌شود.

سیستم‌های دینامیکی آشوبناک همانند سیستم‌های دینامیکی به دو دسته سیستم‌های آشوبناک زمان – پیوسته و سیستم‌های آشوبناک زمان – گسسته تقسیم می‌شوند. نوسانگر لورنز و نوسانگر راسلر نمونه‌هایی از سیستم‌های آشوبناک زمان – پیوسته هستند. سیستم‌های آشوبناک زمان – گسسته مانند نگاشت لجستیک^{۱۴}، نگاشت تنت^{۱۵} یا مثلی، و نگاشت بیکر^{۱۶} به صورت نگاشت هستند.

۱.۲.۲ شرایط لازم برای حرکت آشوبناک

سیستم دینامیکی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} = F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \quad (1.2)$$

شرایط لازم برای حرکت آشوبناک این سیستم عبارت است از

(۱) سیستم حداقل سه متغیر دینامیکی متمایز داشته باشد.

(۲) معادله حرکت سیستم شامل حداقل یک جمله غیرخطی باشد.

یعنی در سیستم (۱.۲) مقدار n باید حداقل برابر با سه باشد و همین طور در مورد شرط دوم نمونه‌هایی از معادله‌های غیرخطی به صورت زیر است

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = ax_1 + bx_2x_2 + \dots + cx_n, \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = ax_1 + b \sin x_2 + \dots + cx_n, \end{cases} \quad (2.2)$$

^{۱۴} Logistic Map

^{۱۵} Tent

^{۱۶} Baker

که a, b, c و مقادیر ثابتی هستند. چنین سیستم‌هایی اغلب به ازای برخی از مقادیری که ثابت‌ها به خود می‌گیرند آشوبناک هستند.

شرایط گفته شده در بالا وجود آشوب را ممکن می‌سازد اما آن را تضمین نمی‌کند. وجود دو شرط زیر علاوه بر شرایط لازم مذکور، وجود آشوب در سیستم‌های دینامیکی را تضمین می‌نماید

(۱) سیستم مورد نظر اتلافی باشد،

(۲) سیستم دارای نقطه تعادل ناپایدار باشد.

۳.۲ ویژگی‌های نظریه آشوب

نظریه آشوب دارای ویژگی‌های منحصربه‌فردی است که عبارت هستند از

• اثر پروانه‌ای،

• خودسازماندهی یا سازگاری پویا،

• خودمانایی یا خودشبهی،

• جاذب‌های عجیب.

حال هر کدام از این ویژگی‌ها را شرح می‌دهیم.

۱.۳.۲ اثر پروانه‌ای

چندی از دانشمندان آب و هواشناسی به بررسی شرایط آب و هوایی در یک منطقه خاص که در آنجا آب و هوا نسبتاً منظم و بی‌تغییر بود می‌پرداختند. آن‌ها به مدت ۲ سال مشغول بررسی آب و هوای این منطقه بودند. در سال اول پدیده‌ای مشاهده نگردید. اما در پاییز سال دوم ناگهان شرایط آب و هوایی که دستگاه اندازه‌گیری آب و هوا نشان می‌داد به هم ریخت اما آثار این بهم‌ریختگی در آب و هوا مشاهده نگردید. دانشمندان بر آن شدند که این بی‌نظمی ایجاد شده در آب و هوا و دستگاه اندازه‌گیری را به گونه‌ای توجیه کنند اما این امر میسر نشد. دانشمندان ۱ سال دیگر به این شرایط ادامه داده تا به موفقیت دست یافتند و آن این بود که در آن سال به علت هجوم پرندگان به دریاچه‌ای در آن نزدیکی و پر زدن آن‌ها در فراز این دریاچه فشاری به جو آمده که این فشار باعث آن گردیده است که دستگاه‌های اندازه‌گیری برخلاف آن چه دیده شده ثبت کنند. دانشمندان بر آن شدند که با استفاده از دستگاه‌هایی نبود پرندگان در فراز این دریاچه را شبیه‌سازی کرده و نتایج را بررسی کنند. آن‌ها پس از بررسی به این نتیجه رسیدند که اگر این پرندگان از آن سال به بعد به آنجا در بالای دریاچه هجوم نمی‌آوردند



شکل ۱.۲: اثر پروانه‌ای

طوفانی بزرگ در آن منطقه شکل می‌گرفت و باعث تخریب ۱۲ هکتار از این منطقه می‌گردید. در حقیقت پر زدن آن پرنندگان باعث می‌شد که شرایط شکل‌گیری این طوفان پیش نیاید و در واقع مهم‌ترین اصل نظریه آشوب ایجاد گردید. این اصل بیان می‌کند که کوچک‌ترین تغییر در این جهان باعث بی‌نظمی‌های بزرگی خواهد گردید. این اثر به عنوان اثر پروانه‌ای شکل (۱.۲) شناخته شد.

در سال ۱۹۶۵ هنگامیکه لورنتس مشغول پژوهش روی مدل ریاضی بسیار ساده‌ای که از آب و هوای زمین بود، به یک معادله دیفرانسیل غیر قابل حل رسید. وی برای حل این معادله به روش‌های عددی با رایانه متوسل گردید. او برای اینکه بتواند این کار را در روزهای متوالی انجام دهد، نتیجه خروجی هر شب را به عنوان ورودی روز بعد در نظر می‌گرفت. لورنتس در نهایت مشاهده کرد که نتیجه بررسی شده توسط رایانه او خروجی تا ۴ رقم اعشار دارد که این محال بود، چون رایانه او اعداد را تا ۶ رقم اعشار نشان می‌داد. پس به بی‌نظمی ایجاد شده در رایانه و آب و هوا دست یافت. این واقعیت، غیر ممکن بودن پیش‌بینی آب و هوا در درازمدت را نشان می‌داد. این مساله، سنگ بنای نظریه آشوب است، زیرا براساس نظریه آشوب در تمامی پدیده‌های آشوبناک، نقاطی وجود دارد که تغییر اندک در آنها، باعث تغییرات عظیم می‌شود. به عبارت دیگر اثر پروانه‌ای این نظریه به گونه‌ای است که یک تغییر جزئی در ابتدا منجر به یک دگرگونی بسیار بزرگ در پایان کار خواهد شد، بدین مفهوم که مثلاً، اگر پروانه‌ای در پکن^{۱۷} پر بزند ممکن است بر اثر این پرزدن، در نیویورک طوفانی ایجاد شود. اثر پروانه‌ای می‌تواند بر تعامل انسان‌ها با یکدیگر تأثیرگذار باشد. براساس این نظریه، هر عمل ما، آغازگر واکنشی است که انعکاس‌هایی خواهد داشت و انبساط خواهد یافت و بر آینده مؤثر خواهد بود.

^{۱۷}Beijing

۲.۳.۲ خودسازماندهی و سازگاری پویا

سیستم‌های بی‌نظم در ارتباط با محیطشان مانند موجودات زنده عمل می‌کنند و نوعی تطابق و سازگاری پویا بین خود و محیط پیرامونشان ایجاد می‌کنند. این سیستم‌ها که والدراپ^{۱۸} آن‌ها را سیستم‌های پیچیده سازگار شونده^{۱۹} نام نهاده است در طبیعت بسیار موفق بوده و از طریق سازگاری پویا بقای خود را در طول زمان حفظ می‌کنند. مورگان^{۲۰} معتقد است که آشفتگی، سازگاری‌ها و انطباق را در هم می‌شکند و باعث خلاقیت مستمر در سایه تخریب خلاقیت پیشین می‌شود [۱۶].

ویژگی‌های سیستم‌های سازگار شونده عبارت هستند از

- **خود کنترل و خود نظم‌اند**، یعنی هر کدام از سیستم‌های پویا دارای اجزای مستقلی هستند، که بدون گرفتن دستور از واحد مرکزی به طور خودگردان عمل می‌کنند.
- **سیستم جزئی از محیط خود است**، یعنی سیستم توانایی احساس و درک محیط خود و جذب اطلاعات از آن را دارد.
- **خاصیت یادگیرندگی**، یعنی این سیستم‌ها می‌توانند از طریق بازخور یاد بگیرند، این ویژگی درونشان تعبیه شده است و جنبه خارجی ندارد، از طرف دیگر در مقابل محرک‌های بیرونی مختلف آرایش و سازماندهی متفاوتی از خود نشان می‌دهند.
- **سیستم، پیچیده است**، یعنی دارای اجزای زیادی است و اجزای آن با یکدیگر مرتبط هستند.

۳.۳.۲ خودمانایی یا خودشباهتی

در نظریه آشوب، نوعی شباهت بین اجزاء و کل قابل تشخیص است. بدین ترتیب که هر جزئی از الگو همانند و مشابه کل می‌باشند. به این خاصیت، خودشباهتی گفته می‌شود. خودشباهتی اولین بار در سال ۱۹۴۸ توسط دنیس گابور^{۲۱} مطرح شد [۱۷]. این ویژگی از نظریه بی‌نظمی، بیشتر در فرکتال‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۴.۳.۲ جاذب‌های عجیب

در ابتدا مجموعه جاذب را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۲. مجموعه بسته A را جاذب گویند هرگاه

^{۱۸}M. Waldrap

^{۱۹}Complex Adaptive systems

^{۲۰}Morgan

^{۲۱}Dennis Gabor

(۱) A یک مجموعه ثابت یا ناودار باشد، یعنی هر مسیری که از A شروع شود، برای همیشه در آن باقی بماند.

(۲) A یک مجموعه باز از شرایط اولیه را جذب کند، به عبارتی، مجموعه باز U شامل A وجود داشته باشد به طوری که اگر $x(0) \in U$ ، آنگاه فاصله $x(t)$ از A با گذشت زمان به صفر میل کند. یعنی، A همه مسیرهایی را که از نقاطی به اندازه کافی نزدیک به آن شروع شوند، جذب کند.

(۳) A مینیمال باشد، یعنی هیچ زیرمجموعه محض A وجود نداشته باشد که دارای خواص (۱) و (۲) باشد.

جاذب‌های عجیب در همه جا حضور دارند، همه آنچه را که ما در نظر اول بی نظم و آشوبناک می‌یابیم در دراز مدت و با تکرار، الگویی منظم از خود نشان می‌دهند. جاذب‌های عجیب از الگویی پیروی می‌کنند که این الگو به آنان معنی و مفهوم می‌بخشد. خلاصه آنکه آشوبناک بودن روندها همه خبر از نظم پنهان و کشف نشده می‌دهند. از مثال‌های این پدیده می‌توان به الگوی پاندولی اشاره کرد. جاذب‌ها انواع مختلف دارند مانند

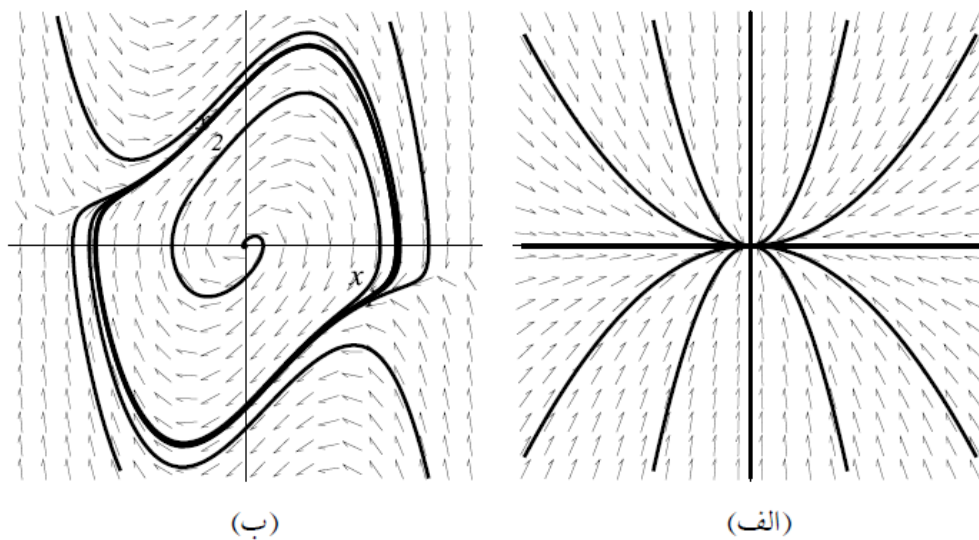
- جاذب نقطه تعادل،

- جاذب دور حدی،

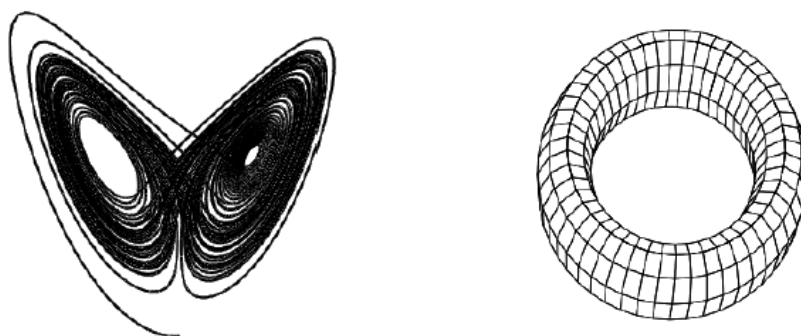
- جاذب سطحی مارپیچی،

- جاذب عجیب.

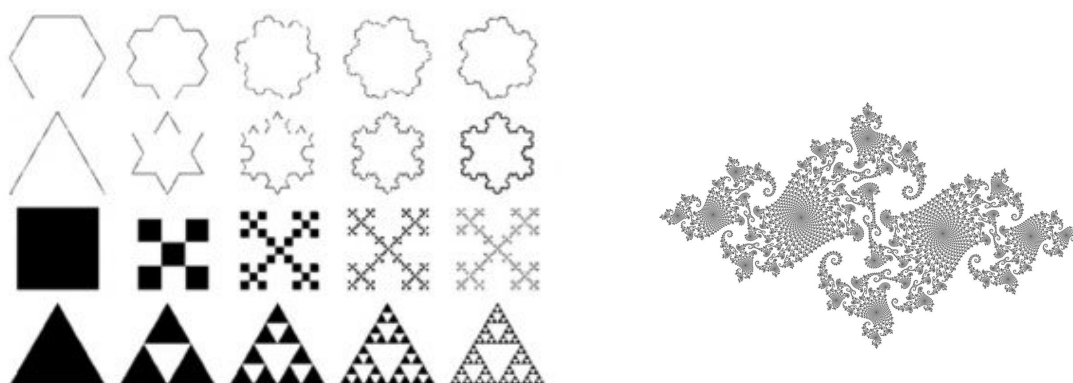
جاذب‌های عجیب برخلاف جاذب‌های قبلی که نوعی نظم و قابلیت پیش‌بینی داشتند، بی‌نظم هستند و به همین خاطر برخی آن‌ها را جاذب‌های بی‌نظم نیز نامیده‌اند. البته باید توجه داشت که صفت عجیب اشاره به الگوی هندسی جاذب‌ها دارد در حالیکه، بی‌نظمی دینامیک جاذب‌ها را مد نظر دارد و این دو باهم متفاوتند و از سویی دیگر باید توجه داشت که جاذب‌های بی‌نظم عجیب هستند اما همه‌ی جاذب‌های عجیب بی‌نظم نیستند. این رو اصطلاح جاذب‌های عجیب برای این ویژگی صحیح‌تر می‌باشد. جاذب‌های عجیب بدون الگو نیستند و از الگوی خاصی پیروی می‌کنند و ارزش آنها هم در همین الگو داشتن است. این جاذب‌ها ویژگی‌های هندسی پیچیده‌ای دارند و دارای ابعاد غیر صحیح می‌باشند و مسیر آنها به هم چسپیده، چند جهته و گسترده است. در جاذب‌های عجیب هیچ مسیبه تکرار نمی‌شود و هر مسیر برای خود مسیری جدید است. جاذب‌های عجیب در همه جا وجود دارند. همه آنچه را که ما در نظر اول بی‌نظم و آشوبناک می‌بینیم در دراز مدت و با تکرار، الگویی منظمی از خود نشان می‌دهند.



شکل ۲.۲: (الف) جاذب نقطه تعادل، (ب) جاذب دور حدی



شکل ۳.۲: (ج) جاذب سطحی مارپیچی، (د) جاذب عجیب



شکل ۴.۲: نمونه‌هایی از فرکتال‌ها

۴.۲ فرکتال

فراکتال ساختاری هندسی است که با بزرگ کردن هر بخش از این ساختار به نسبت معین، همان ساختار نخستین بدست آید. کلمه فرکتال، اولین بار توسط بنویت مندلیبرات استفاده شد. او به عنوان پدر هندسه فرکتال شناخته شده است. درخت‌ها، کوه‌ها، پراکنده شدن برگ‌های پاییزی روی زمین فرکتال‌هایی هستند که در زندگی روزمره خود به فراوانی مشاهده می‌کنیم. تعریف‌های زیادی برای فرکتال وجود دارد اما به عنوان ساده‌ترین تعریف می‌توان گفت، فرکتال چیزی است که تحت درجات مختلف بزرگنمایی، خودمتشابه بوده و هر جز کوچک آن کپی از ساختار کل است. به زبان ساده، اشکال فراکتالی دارای سه خاصیت عمومی هستند

- خودمتشابه،
- تشکیل از راه تکرار،
- بعد کسری.

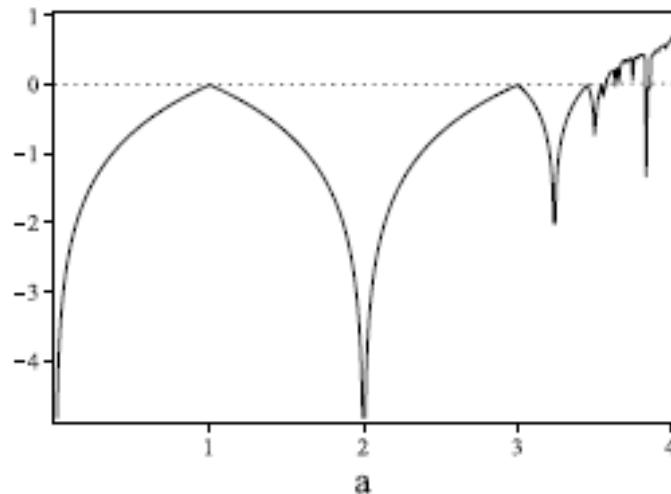
برای نشان دادن خاصیت فرکتالی و خودشباهتی در سیستم‌های آشوبناک، نگاشت لجستیک را در نظر می‌گیریم. نگاشت لجستیک به صورت

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \quad (۳.۲)$$

است که در آن پارامتر a ، نرخ رشد جمعیت یک گونه خاص و $0 \leq x_n \leq 1$ بیانگر اندازه جمعیت گونه است [۱۸].

شکل (۵.۲) نمودار نمای لیاپانوف نگاشت لجستیک را به ازای $4 \leq x_n \leq 0$ نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که به راحتی می‌توان نشان داد نمای لیاپانوف برای نگاشت

$$x_{n+1} = f(x_n)$$



شکل ۵.۲: نمای لیپانوف نگاشت لجستیک

از رابطه به دست می‌آید.

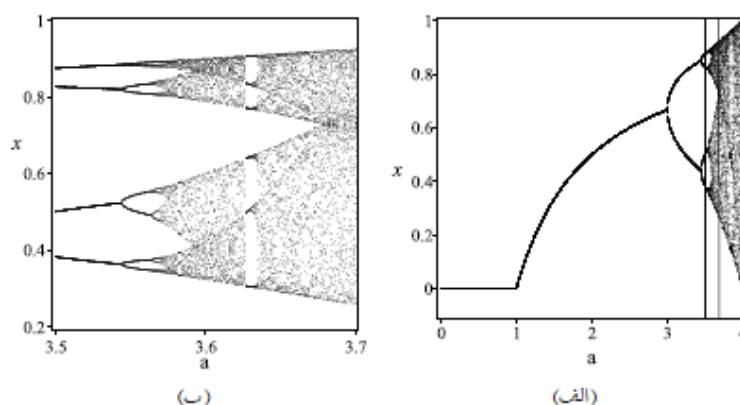
$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |f'(x_k)|$$

با توجه به این شکل ملاحظه می‌شود که نگاشت لجستیک به ازای برخی از مقادیر پارامتر a آشوبناک است. شکل (۶.۲) نمودارهای انشعاب نگاشت لجستیک را به ازای $0 \leq x_n \leq 4$ و $3/5 \leq x_n \leq 3/7$ نشان می‌دهد. شکل (۶.۲) (ب) از بزرگنمایی نوار مشخص شده در شکل (۶.۲) (الف) به دست آمده است. این شکل‌ها خاصیت خودشبه‌بهرتی را در نگاشت لجستیک نشان می‌دهند، به طوریکه هر جزئی از نمودار انشعاب، مشابه کل است. در شکل (۴.۲) نمونه‌هایی از فرکتال‌های واقعی مشاهده می‌شود. برای مطالعه بیشتر در مورد فرکتال می‌توان به [۱۹] مراجعه کرد.

۵.۲ روش‌های تشخیص رفتار آشوبناک

دینامیک‌های آشوب‌گونه براساس قوانین مشخصی رخ می‌دهند که در ظاهر تصادفی هستند و در مقابل برای دینامیک‌هایی که با فرایندهای تصادفی درست می‌شوند هیچ ساختاری به جز توزیع احتمال آن نمی‌توان به دست آورد. از روی مشاهده سری زمانی حاصل از یک فرآیند، تشخیص وجود طبیعت غیرخطی و آشوب‌گونه تقریباً غیرممکن است. به همین دلیل سعی شده است ابزارهایی برای تعیین الگوهای مشخصه و علامت‌هایی از وجود آشوب و یا رفتارهای خاص در مدل‌ها و اطلاعات تجربی فراهم شود. این روش‌ها عبارتند از

- طیف فرکانسی،



شکل ۶.۲: (الف) نمودار انشعاب نگاشت لجستیک به ازای $۰ \leq a \leq ۴$ (ب) به ازای $۳/۵ \leq a \leq ۳/۷$ که نشان دهنده‌ی خاصیت فرکتالی و خودشباهتی در نگاشت لجستیک است.

- ساختار فضایی فاز،
- ابعاد دینامیک‌ها،
- حساسیت به شرایط اولیه،
- توان‌های لیاپانوف.

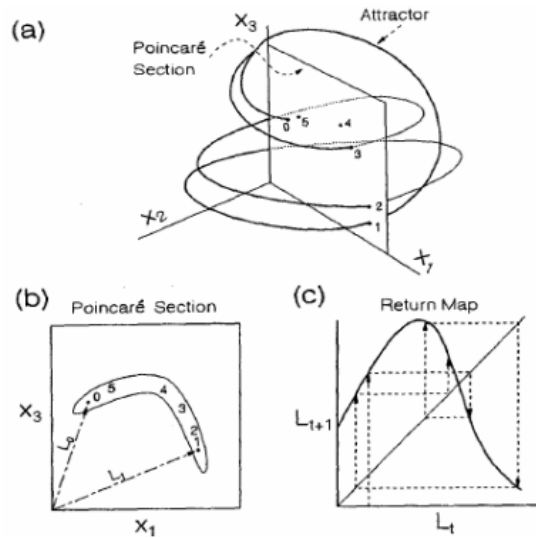
در ادامه هر یک از این روش‌ها را مختصراً مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.۵.۲ طیف فرکانسی

یکی از ابزارهای تشخیص رفتار آشوبناک از رفتارهای پریودیک تحلیل در حوزه فرکانسی است. با رسم طیف فرکانسی^{۲۲} یک سری زمانی مشخصاتی که در حوزه زمان رسیدن به آن‌ها دشوار است ظاهر می‌شوند. در سیگنال‌های پریودیک انرژی بر روی فرکانس‌های خاصی متمرکز است در صورتیکه در رفتارهای آشوبناک طیف فرکانسی در فرکانس‌های مختلف مقدار غیرصفر دارد و دارای باند پهنی است. در سیستم‌های قطعی^{۲۳} وجود طیفی با باند وسیع می‌تواند نشان دهنده شروع آشوب باشد. گاهی برای تحلیل در حوزه فرکانس از مشخصات طیف توانی هم استفاده می‌شود. طیف فرکانسی حاصل از یک سری زمانی فرکانسی و سری‌های زمانی مربوط به سیستم‌های دینامیکی حقیقی که آمیخته با نویز هستند نیز دارای باند گسترده می‌باشند و تشخیص بین این موارد تنها از روی طیف فرکانسی امکان‌پذیر نیست. در کل تحلیل فرکانسی به تنهایی ابزار دقیقی برای تشخیص وجود آشوب نیست.

^{۲۲} Frequency Spectra

^{۲۳} Deterministic



شکل ۷.۲: (a) جاذب یک مدل فرضی، (b) مقطع پوانکاره ایجاد شده، (c) نگاشت برگشتی

۲.۵.۲ ساختار فضای فاز

رفتار سیستم‌های آشوبناک در فضای فاز رفتاری بسیار پیچیده و غیرقابل پیش‌بینی است. فضای فاز در سیستم‌های غیرآشوبناک با سه متغیر حالت در یک صفحه قرار می‌گیرد. وقتی دینامیک آشوبناک می‌شود جاذب بعد بالاتری پیدا می‌کند و مسیرهای زمانی در یک صفحه باقی نمی‌مانند.

یک روش ساده برای تشخیص وجود آشوب این است که سری زمانی را در فضای فاز رسم کنیم و از طریق مشاهده الگوی ایجاد شده رفتار را مشخص کنیم. اولین مساله‌ای که در اینجا خودنمایی می‌کند مشخص نبودن متغیر حالت سری زمانی برای تشکیل فضای حالت است. برای برطرف کردن این مشکل از مقادیر زمان‌های گذشته سری استفاده می‌شود یعنی مسیر حرکت در فضای N_t و N_{t-1} و N_{t-2} رسم می‌شود. این روش تنها به سه بعد محدود نیست و می‌توان ابعاد بالاتر را هم با افزایش تعداد تاخیرها در نظر گرفت ولی نمایش گرافیکی آن بسیار دشوار می‌شود. اگر تعداد تاخیر را برابر دو در نظر بگیریم به یک فضای سه بعدی می‌رسیم که تحلیل گرافیکی آن نیز مشکل است. برای ساده‌تر کردن مساله، مطالعه را به مقاطع پوانکاره و ساختمان نگاشت پوانکاره متناظر محدود می‌کنیم. مقطع پوانکاره در فضای سه بعدی از قطع دادن یک صفحه با جاذب و در نظر گرفتن نقاط تقاطع در این صفحه حاصل می‌گردد. چنانچه شکل (۷.۲) (a) نشان می‌دهد مقطع پوانکاره یک برش صفحه‌ای داخل جاذب است. نقاط شماره‌گذاری شده در شکل نقاط برخورد را به ترتیب رخدادن در طول زمان نشان می‌دهد. در شکل (۷.۲) (b) مقطع پوانکاره و نقاط تقاطع روی آن نشان داده شده، که منحنی بسته مجموعه نقاط تقاطع را مشخص می‌کند. همان طور در مدل فرضی نشان داده شده است

این منحنی یک ساختار سازمان یافته را بر روی جاذب نشان می‌دهد در حالیکه دینامیک‌های تصادفی نقاطی نامنظم و پراکنده در صفحه ایجاد می‌کنند. برای مطالعه دقیق‌تر ساختار جاذب می‌توان نگاهی برگشت^{۲۴} را تشکیل داد. همان طور که در شکل (۷.۲) (c) نشان داده می‌شود برای ساختن این نگاهی باید به هر نقطه تقاطع در مقطع پوانکاره یک مقدار L_i نسبت داده و سپس نمودار L_{t+1} بر حسب L_t رسم گردد. نگاهی که ارتباط مقادیر این دنباله را با یکدیگر نشان می‌هد، بیان‌کننده رابطه مشخصی برای سری است.

۳.۵.۲ ابعاد دینامیک‌ها

همان طور که دیده شد دینامیک‌های آشوبناک، جاذب‌های پیچیده‌ای ایجاد می‌کنند که محدود به قسمتی از فضا هستند و نمی‌توانند کل فضا را پوشش دهند. جاذب‌های عجیب ابعاد غیرصحیح دارند. روش‌های مختلفی برای محاسبه بعد آشوب و دینامیک‌های پنهان پیشنهاد شده که از جمله می‌توان از

- بعد همبستگی،^{۲۵}
- بعد فرکتال،^{۲۶}
- بعد اطلاعات،^{۲۷}
- بعد لیاپانوف،^{۲۸}

و روش‌های دیگر نام برد. در این قسمت در مورد بعد همبستگی که به علت زمان‌بری کمتر، بیشتر از سایر روش‌ها استفاده می‌شود مختصراً توضیح می‌دهیم. این روش در سال ۱۹۸۳ توسط گراسبرگر^{۲۹} و پروکاسیا^{۳۰} معرفی گردید.

فرض کنید جواب‌های معادله بر روی یک جاذب عجیب در فضای n بعدی قرار دارد که در زمان‌های مشخصی نمونه برداری شده است. در این فضا جمع همبستگی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$C_r = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{i=1, j \neq i}^N \theta(r - |X_i - X_j|)$$

که در آن

^{۲۴}Return Map

^{۲۵}Correlation Dimention

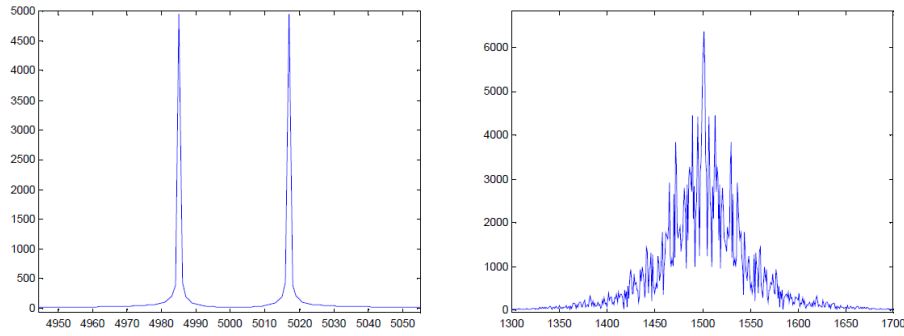
^{۲۶}Fractal Dimention

^{۲۷}Information Dimention

^{۲۸}The Lyapunov Dimention

^{۲۹}Grassberger

^{۳۰}Procaccia



شکل ۸.۲: مقایسه طیف فرکانسی بین دینامیک متناوب (چپ) و دینامیک آشوبی (راست)

r : شعاع یک ابر دایره n بعدی، به مرکز X_i

X_i : یک بردار n بعدی، نشان دهنده نقاط نمونه برداری شده روی جاذب

N تعداد نقاط نمونه برداری شده روی جاذب

$$\theta = \begin{cases} 1 & \text{اگر } r > |X_i - X_j| \\ 0 & \text{اگر } r \leq |X_i - X_j|. \end{cases}$$

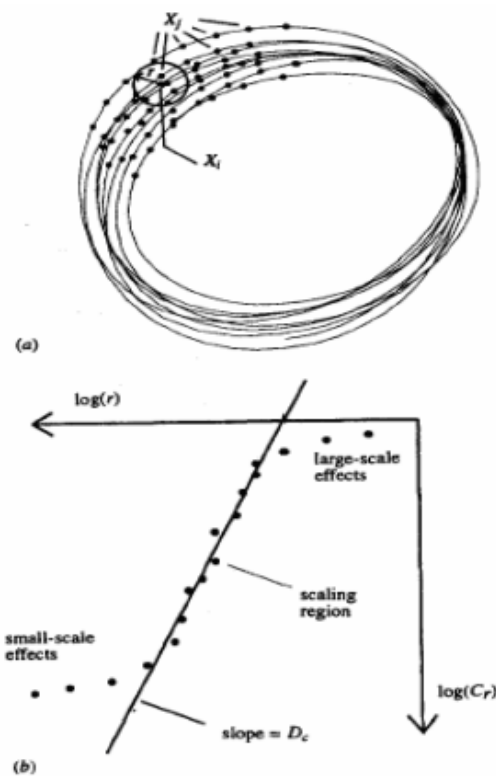
شکل (۹.۲) روش به دست آوردن C_r را در فضای سه نشان می‌دهد. ابتدا به مرکز هر نقطه X_i از نقاط روی جاذب یک دایره به شعاع r رسم می‌کنیم. کاری که تابع θ انجام می‌دهد در واقع شمارش تعداد نقاط نمونه برداری شده روی جاذب است که در این دایره قرار می‌گیرند. با انجام این کار برای تمام نقاط نمونه برداری شده روی جاذب و جمع کردن تمام مقادیر و نرمالیزه کردن حاصل نسبت به بیشترین مقدار ممکن برای این جمع، مقدار C_r بدست می‌آید. با این روش، بیشترین مقدار C_r برابر یک خواهد بود و این زمانی اتفاق می‌افتد که r بزرگتر از بیشترین قطر جاذب در نظر گرفته شود به طوری که در هر N دایره رسم شده، تمام $N - 1$ نقطه دیگر قرار گیرند. کمترین مقدار C_r برابر $\frac{2}{N(N-1)}$ خواهد بود و زمانی بدست می‌آید که r به اندازه‌ای کوچک باشد که تنها دو نقطه در همسایگی یکدیگر قرار گیرند. در این صورت

$$C_r \propto D_c \log(r)$$

که D_c بعد همبستگی است. اگر از دو طرف رابطه بالا \log بگیریم، خواهیم داشت

$$\log(C_r) \propto D_c \log(r)$$

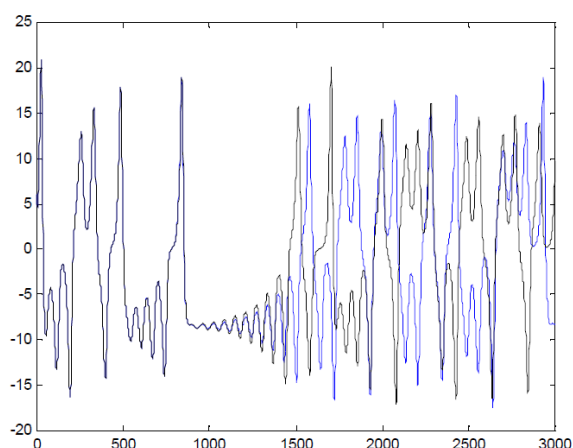
اگر مقدار D_c به ازای مقادیر مختلف r حساب کنیم و حاصل را به صورت منحنی $\log(r)$ بر حسب $\log(C_r)$ رسم کنیم، منحنی شبیه به شکل (۹.۲) (b) حاصل خواهد شد. شیب مماس بر منحنی در ناحیه‌ای که رفتار منحنی همبستگی تقریباً خطی است مبین بعد همبستگی خواهد بود.



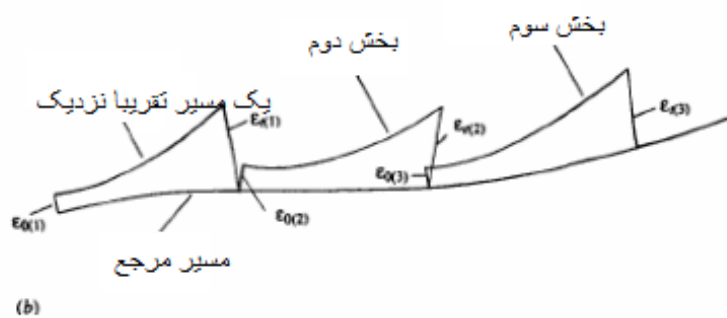
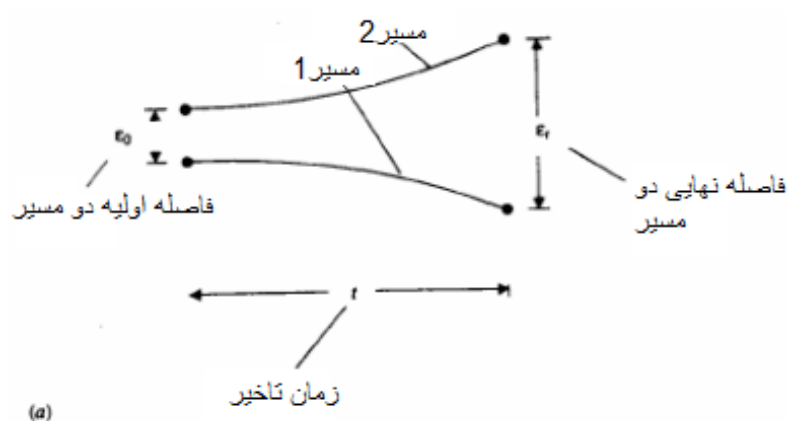
شکل ۹.۲: روش به دست آوردن بعد همبستگی

۴.۵.۲ حساسیت به شرایط اولیه

سری‌های آشوبناک خصوصیتی دارند که آنها را از سایر دینامیک‌ها متمایز می‌کند. وقتی سیستمی در فضای پارامترها در ناحیه آشوب قرار دارد کوچکترین تغییر در مقدار اولیه باعث می‌شود سیستم رفتار کاملاً متفاوتی را بعد از گذشت زمان‌های طولانی از خود نشان دهد. اگر دو جواب مختلف یک معادله مشخص که در ناحیه آشوب است را در نظر بگیریم که تفاوتشان تنها در مقدار جزئی اختلاف در مقادیر اولیه است. دو جواب با گذشت زمان نسبت به یکدیگر واگرا می‌شوند در حالیکه هر دو در ناحیه محدودی از فضای حالت باقی می‌مانند. این خصوصیت به عنوان حساسیت به شرایط اولیه نامیده می‌شود. در شکل (۱۰.۲) برای مقادیر مختلف خروجی دینامیک لورنز به ازای دو نقطه شروع مختلف که تنها 0.0001 با هم اختلاف دارند کاملاً مشهود است. چنانچه دیده می‌شود رفتار دینامیکی سیستم در لحظات آغازین برای دو حالت تقریباً یکسان است و با گذشت زمان متفاوت در رفتار ظاهر می‌شود. زیرا به علت رفتار آشوبناک نقاط آغازین که در ابتدا به هم نزدیکند با گذشت زمان از هم دور خواهند شد.



شکل ۱۰.۲: واگرا شدن پاسخ در اثر اختلاف در شرایط اولیه



شکل ۱۱.۲: دور شدن مسیرها از یکدیگر و توان‌های لیاپانوف

۵.۵.۲ توان‌های لیپانوف

توان‌های لیپانوف معیاری عددی از میزان آشوبناک بودن رفتار سیستم بدست می‌دهد. در جاذب‌های عجیب مسیره‌های نزدیک به هم با گذشت زمان از یکدیگر دور می‌شوند و این فاصله با گذشت زمان به طور نمایی افزایش می‌یابد. این فاصله گرفتن باعث می‌شود در طول مسیره‌هایی که در اثر اختلاف کوچکی در شرایط اولیه به وجود می‌آیند، با گذشت زمان تفاوت‌ها در رفتار سیستم در دو حالت افزایش یابد. در شکل (۱۱.۲) نمایی از فاصله گرفتن مسیره‌ها در طول زمان دیده می‌شود. در این شکل ε_0 اختلاف اولیه در نقطه شروع دو مسیر نزدیک به هم روی جاذب را نشان می‌دهد. بعد از گذشت زمان t این مسیره‌ها از یکدیگر دور می‌شوند و فاصله آنها به ε_t می‌رسد و خواهیم داشت

$$\varepsilon_t = \varepsilon_0 e^{\lambda t}$$

و

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln\left(\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_0}\right).$$

اگر $\lambda < 0$ ، مسیره‌ها به هم نزدیک می‌شوند و اگر $\lambda > 0$ ، مسیره‌ها از هم دور خواهند شد. به طور کلی توان لیپانوف را برای کل مسیر حرکت بدست می‌آوریم. به همین دلیل میانگین توان‌های لیپانوف که در نقاط مختلف روی مسیر محاسبه شده‌اند در نظر گرفته می‌شود. مثالی که در شکل (۱۱.۲) (c) دیده می‌شود نمونه‌ای از یک سیستم یک بعدی است. برای ابعاد بالاتر به اندازه بعد فضا، توان لیپانوف برای جاذب بدست خواهد آمد که هر کدام میزان دور یا نزدیک شدن مسیره‌ها را در یک جهت خاص مشخص می‌کنند. در سیستم‌های آشوبناک حداقل یکی از توان‌های به‌دست آمده مقداری مثبت خواهد داشت. (۱۱.۲) (d) اثر مثبت بودن توان لیپانوف در یک راستای خاص دیده می‌شود. در جهتی که توان لیپانوف مقداری مثبت دارد، پیش‌روی در طول مسیر کشیدگی ایجاد می‌شود. در فضای سه بعدی از سه توان لیپانوف استفاده می‌کنیم که برای جاذب‌های مختلف این توان‌ها به صورت زیر خواهند بود

• جاذب نقطه تعادل: $(-, -, -)$ ،

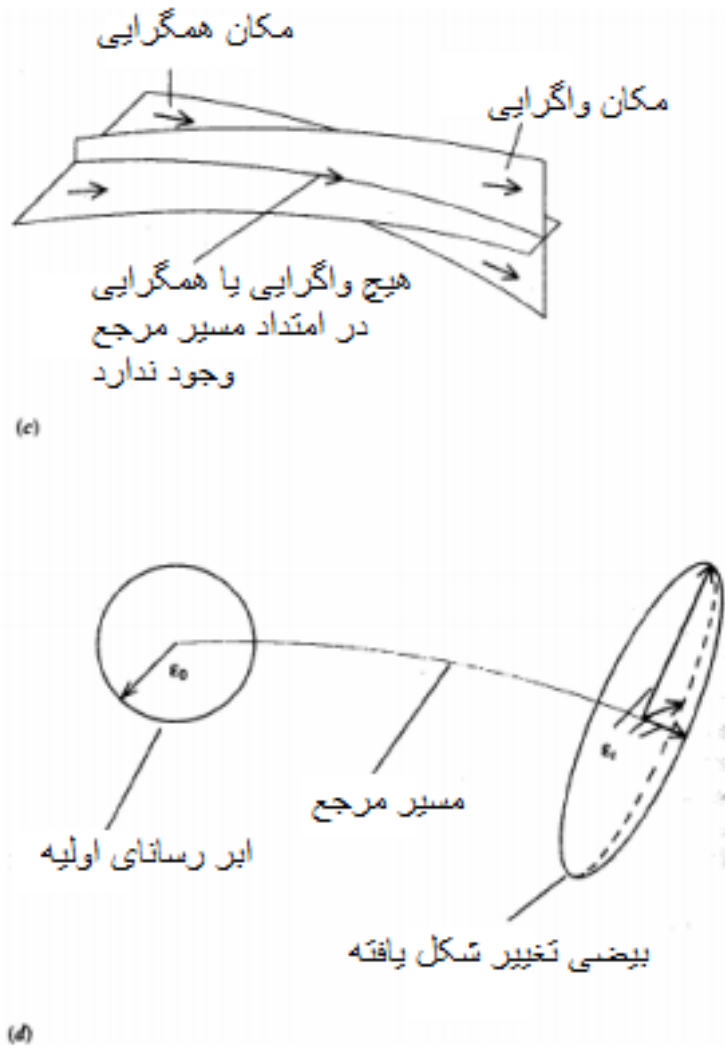
• دور حدی: $(0, -, -)$ ،

• شبه پریودیک $(0, 0, -)$ ،

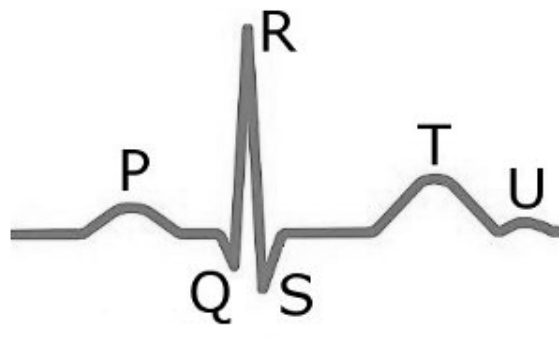
• جاذب آشوبناک $(+, 0, -)$.

۶.۲ کاربرد آشوب

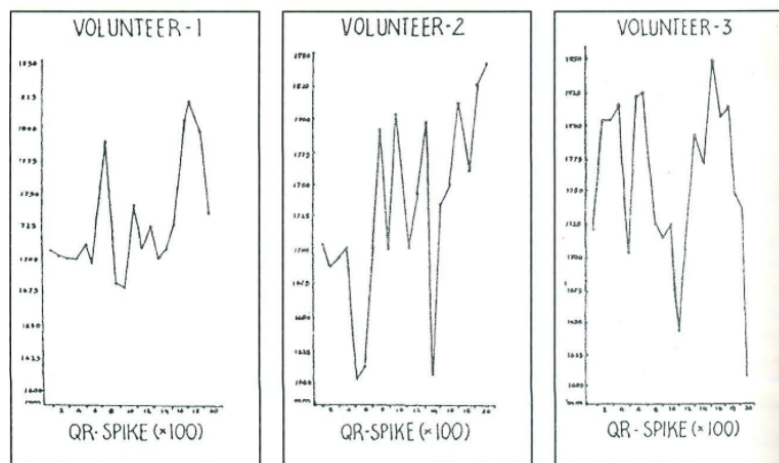
نظریه آشوب دانش نوینی است که برای توصیف بسیاری از پدیده‌ها با موفقیت به کار گرفته شده است. در این بخش چند نمونه از کاربردهای نظریه آشوب ارائه شده است.



شکل ۱۲.۲: اثر مثبت بودن توان لیاپانوف در یک راستای خاص



شکل ۱۳.۲: یک نمونه سیگنال ECG



شکل ۱۴.۲: یک نمونه سیگنال ECG

۱.۶.۲ قلب و عروق

قلب انسان دارای یک الگوی آشوبناک است. زمان بین ضربان‌ها ثابت باقی نمی‌ماند و مقدار این ضربان به فعالیتی که شخص در حال انجام آن است، بستگی دارد. ضربان قلب می‌تواند تحت شرایط خاصی، سرعت بگیرد. در شرایط مختلف، ضربان قلب نامنظم و غیر قابل پیش‌بینی و در اغلب اوقات ضربان قلب به عنوان یک پدیده آشوبناک شناخته می‌شود. تجزیه و تحلیل یک ضربان قلب به محققان پزشکی کمک می‌کند تا به جای مواجهه با یک سیستم آشوبناک غیر قابل کنترل، راهکارهایی برای بهبود ضربان قلب غیرطبیعی پیدا کنند و آن را دوباره در حالت پایدار قرار دهند. با استفاده از ضبط (ECG) نرمال، شکل (۱۳.۲) در ۱۰۰ سیکل و فقط اندازه‌گیری ارتفاع پیک (OR)، نوسانات بسیار گسترده‌ای مشاهده می‌گردد، که این مشاهده میزان اتفاقی بودن فعالیت الکتریکی قلب را نشان می‌دهد. نتایج این تحقیق در شکل (۱۴.۲) به نمایش درآمده است. ارتفاع نامنظم که معرف ضربه‌های الکتریکی هزارم ولت از گره سینوسی است به وضوح نشان می‌دهد که رفتار اتفاقی و یا آشوبناک در این ارگان حیاتی معمول است و این امروزه به معنای سلامت قلب است. در واقع به بیان علمی‌تر، سیگنال (ECG) فقط باید زمانی که حالت استاتیک دارد منظم باشد. به همین دلیل است که از قلب انسان مرده، سیگنال (ECG) ثبت شده خیلی صاف و منظم است. نتایج متناقض و نامتوازن در پروسه‌های به ظاهر عادی، هنگامی که همان سیستم به عنوان یک سیستم آشوبناک مطالعه می‌شود، نشان می‌دهد که اعتماد به معادلات و روابط خطی و ساده‌سازی‌ها در مسائل با ماهیت غیرخطی چه مشکلات و پیامدهای جبران‌ناپذیری در پی دارد برای مطالعه بیشتر در مورد کاربرد آشوب در قلب و عروق می‌توان به [۲۰] مراجعه کرد.

۲.۶.۲ مخابرات امن

در سال‌های اخیر دنیای رسانه مرهون تصاویر دیجیتالی است که انتقال ایمن آن‌ها مبحثی بسیار مهم در مخابرات ایمن است. کاربردهای زیادی نظیر پایگاه داده‌های ارتش، کنفرانس‌های ویدیویی محرمانه، سیستم تصویری پزشکی، کابل‌های تلویزیون، آلبوم‌های تصویری شخصی اینترنتی و مانند این‌ها، نمایانگر نیاز مبرم به تکنیک‌های مناسب رمز کردن تصاویر است که به اندازه کافی ایمن، قابل اطمینان، سریع و مستحکم بوده و بتوان با اطمینان لازم اقدام به نگهداری و انتقال این‌گونه از داده‌ها نمود. در طول دهه‌ی گذشته الگوریتم‌های رمزسازی متعددی در تحقیق‌های مختلف، پیشنهاد شده است. از میان آن‌ها، تکنیک رمزسازی بر مبنای آشوب، یک روش عملی و خوب است که ترکیبی از سرعت، امنیت بالا، پیچیدگی، محاسبات معقول و برتری محاسباتی است.

۳.۶.۲ ژنتیک

همواره در سلامتی تنوع و گوناگونی است و در بیماری این گستره باریک‌تر است. محدودیت‌ها را در بیماری می‌توان جستجو کرد. مشکلات غده هیپوفیز، کوتاه قدی، رشد غیرعادی و آکندروپلازی از جمله اختلالات هورمونی و ژنتیکی شناخته شده است. مواجه طولانی مدت به باکتری، توکسین‌ها و یا مواد سمی نیز اثرات ژنتیکی همانند چهره شیرگون در هانسن‌ها، چانه باریک در کار کردن با فسفر، پایین آمدن ارتفاع پل بینی به علت سفلیس مادرزادی را ایجاد می‌کند. در واقع، بسیاری از افراد در شرایطی قرار گرفته‌اند که شباهت‌های ظاهری (چهره‌ای) را دیده‌اند. جمجمه سنجی، اندازه‌گیری دقیق جمجمه می‌باشد که به نظر می‌رسد توسط آن بتوان کلید ایجاد بیماری و تشخیص آن را پیدا کرد. با کمی نگهداری سوابق مناسب در یک نفر می‌توان یک بیمار مبتلا به سفلیس، سرطان یا (HIV) را صرفاً با مشاهده چک لیست‌های رایج، تشخیص داد. با رویکردی دیگر که نهفته در نظریه آشوب است نیز می‌توان به تشخیص‌های مشابهی رسید، که توسط سنجش صفات قابل اندازه‌گیری مثل طول بدن و صورت و چگونگی تغییرات آن در نیل به سلامت طبیعی و یا افول آن که در بیماری منعکس شده است.

۴.۶.۲ رشته DNA

شاید بتوان گفت یکی از ساختارهای فرکتالی شناخته شده، (DNA) است. دانشمندان در بررسی ساختاری رشته (DNA) به ساختارهای فرکتالی رسیده‌اند و اعتقادشان بر این است که کد شدن اطلاعات در این رشته نیز شبهه به معادلات فرکتالی است و به این صورت نیست که وضعیت و موقعیت تک‌تک نقاط در آن به طور مستقیم مشخص شده باشد، بلکه فرمول‌هایی شبیه به فرمول‌های استفاده شده برای تولید فرکتال‌ها در آن نهفته است [۲۵].

۵.۶.۲ اقتصاد

یکی از افق‌هایی که آشوب خود را بروز می‌دهد، اقتصاد است. تا مدت‌ها و بر اساس نظر اقتصاددان‌های کلاسیک، سیستم‌های اقتصادی به طور باور نکردنی ساده بود، شما محصولی را تولید می‌کنید که مورد نیاز مردم است. تقاضا زیاد می‌شود، تولید شما بالاتر می‌رود و ارزش سهام شرکت شما در بورس زیاد می‌شود. برای پاسخ به نیاز جامعه باید تولید خود را افزایش دهید تا به سود بیشتری دست پیدا کنید. چقدر خوب! اما داستان جور دیگری است. چرخه، تولید و روند توزیع به شدت زیر نفوذ پدیده آشوب قرار دارند. چرا که پدیده‌ای به نام بازتاب یا بازخورد وجود دارد. اتفاقات کوچکی که در اولین قدم‌ها می‌افتد، تبلیغات و عوامل نامعلوم دیگر، محاسبات شما را بر هم می‌زند. اگر شما این عوامل را به خوبی شناسید، ناگهان رقیب گمنام شما از شما پیشی می‌گیرد و شما را تا آستانه سقوط می‌کشاند. در نظریات جدید اقتصادی، به پدیده آشوب توجه ویژه‌ای نشان داده می‌شود. پیش‌بینی‌ناپذیری بازارهای بورس و تاثیراتی که به عنوان مثال گرم شدن هوا در جنوب شرقی آسیا بر صنایع هواپیما سازی آمریکا می‌گذارد، به دلیل حضور این پدیده است. به عنوان مثال، از تابع لجستیک برای مدل‌سازی قیمت روزانه نفت در بازه زمانی ۱۹۹۸-۲۰۰۰ استفاده شده است [۲۶، ۲۷، ۲۸].

۷.۲ کنترل آشوب

همان طور که قبلاً گفته شد، سیستم‌های آشوبی دارای ویژگی‌های مختلفی هستند که یکی از مهمترین آن‌ها حساسیت زیاد به شرایط اولیه است. تفاوت بسیار کوچکی در شرایط اولیه باعث تفاوت بسیار در وضعیت آن در لحظات بعد خواهد شد. درست به همین دلیل، ابتدا تصور می‌شد که کنترل سیستم‌های آشوبی ممکن نباشد و آن‌ها دارای دینامیک کنترل‌ناپذیر و پیش‌بینی‌ناپذیری باشند. اما در مقاله‌ای از اُت^{۳۱}، گری‌بوجی^{۳۲}، و یورک^{۳۳} که از افراد شاخص آشوب و کنترل‌اند در سال ۱۹۹۰ امکان چنین چیزی اثبات شد [۲۹]. در واقع کنترل آشوب به معنای پایدارسازی^{۳۴} سیستم حول نقطه تعادل است. اهداف مختلف کنترلی برای یک سیستم آشوبی قابل تصور است که می‌توان به موارد زیر اشاره کرد

- حذف رفتار آشوبی و پایدارسازی به نقطه تعادل: یعنی سیستمی دارای رفتار آشوبی است و این رفتار برای ما مطلوب نیست. پس حذف چنین چیزی لازم است.
- هم‌زمانی^{۳۵} دو سیستم آشوبی: هم‌زمانی دو سیستم آشوبی نیز به معنای این است که

^{۳۱}Ott

^{۳۲}Grebogi

^{۳۳}Yorke

^{۳۴}Stabilization

^{۳۵}Synchronization

بخواهیم حالت دو سیستم آشوبی دقیقاً مشابه هم شوند. چنین کاری در کاربردهایی مانند مخابرات امن مطرح می‌شود.

● **پادکنترل آشوب^{۳۶} (ضدکنترل آشوب-آشوب‌سازی^{۳۷}):** چنین کاری به آن معناست که سیستمی را که به خودی خود دارای رفتار آشوبی نیست (مثلاً به نقطه تعادلی پایدار است) رفتار آشوبی پیدا کند. وجود آشوب در بعضی از موارد چون میکس کردن مواد مختلف و کنترل ضربان قلب لازم است.

● **پایدارسازی یکی از مسیرهای متناوب ناپایدار^{۳۸} (و ایجاد چرخه حدی پایدار):** همانند مورد اول یعنی سیستمی دارای رفتار آشوبی است و این رفتار برای ما مطلوب نیست. پس حذف چنین چیزی لازم است.

● **کنترل دوشاخگی^{۳۹} (انشعاب):** دوشاخگی یکی از پدیده‌هایی است که پیش از آشوبی شدن سیستم رخ می‌دهد. در کنترل دوشاخگی یکی از دو هدف

(۱) به عقب انداختن (یا جلو انداختن) دوشاخگی

(۲) تغییر نوع دوشاخگی (پایدار، ناپایدار و غیره)

مورد نظر است. ارتباط دوشاخگی با آشوب از آنجا که معمولاً پیش از آشوبی شدن یک سیستم، چندین و چند دوشاخگی رخ می‌دهد، مشخص است با عقب انداختن دوشاخگی می‌توان آشوب را به تاخیر انداخت.

۸.۲ روش‌های کنترل آشوب

روش‌های مختلفی برای کنترل آشوب وجود دارد.

(۱) روش‌هایی که از ویژگی‌های ذاتی سیستم آشوبناک استفاده می‌شود، این روش‌ها معمولاً از سه ویژگی استفاده می‌کنند

(الف) حساسیت بسیار زیاد آشوب به اختلال،^{۴۰}

(ب) ارگودیکیتی دینامیک آشوبی،

(ج) بازگشتی بودن^{۴۱} سیستم‌های آشوبی،

^{۳۶} Anticontrol of Chaos

^{۳۷} Chaotification

^{۳۸} Unstable Periodic Orbit

^{۳۹} Bifurcation Control

^{۴۰} Perturbation

^{۴۱} Recurrence

حساسیت آشوب به اختلاف کوچک باعث می‌شود که ما بتوانیم با تغییر کوچک در ورودی، تغییرات قابل توجه‌ای در حالت آینده سیستم داشته باشیم. پس با انتخاب مناسب ورودی می‌توان از دینامیک آشوب استفاده کرد و تغییرات بزرگی در رفتار کلی سیستم ایجاد کرد. دینامیک آشوبی به همه نقاط جاذب عجیب خود سر می‌زند و می‌توان مطمئن بود که در صورت به اندازه کافی صبر کردن، حتماً به همسایگی نقطه مورد نظر می‌رسیم. با استفاده از این خاصیت می‌توان کنترلی را طراحی کرد که تنها در نزدیکی هدف مورد نظر، فعال شود و در بقیه نقاط هیچ تاثیری بر دینامیک نداشته باشد. به اندازه دلخواه نزدیک شدن به نقطه مورد نظر در سیستم‌های آشوبی به شرط آن که نقطه در محدوده جاذب عجیب آن باشد، تضمین شده است.

بازگشتی بودن دینامیک در سیستم‌های آشوبی خاصیت دیگری است که می‌توان از آن برای کنترل سیستم‌های آشوبی استفاده کرد. بازگشتی بودن این تضمین را به ما می‌دهد که در صورتی که نگاشت پوانکاره را^{۴۲} از دینامیک تشکیل دهیم، بعد از طی شدن زمان T دوباره به نقطه‌ای در همسایگی نقطه پیشین می‌رسیم. از این خاصیت می‌توان برای طراحی کنترل کننده استفاده کرد.

برخی از این روش‌ها عبارتند از:

- خطی‌سازی نگاشت پوانکاره (روش OGY) ،^{۴۳}
- کنترل فیدبک تاخیری (روش TDFC) ،^{۴۴}
- کنترل ضربه‌ای،^{۴۵} و کنترل OPF،^{۴۶}

حال هر کدام از این روش‌ها را شرح می‌دهیم.

روش (OGY)

اولین روش کنترل سیستم‌های آشوبی، روشی موسوم به (OGY) است [۲۹]. این روش از خواص سیستم‌های آشوبی، یعنی حساسیت، ارگودیک و بازگشتی بودن برای طراحی کنترل کننده موثر آشوب بهره می‌برد. اساس کار آن بر خطی‌سازی حول نگاشت پوانکاره است. (TDFC) یکی از روش‌های متداول کنترل سیستم‌های آشوبی، استفاده از فیدبک تاخیردار است. برخلاف اغلب کاربردهای کنترلی که در آن‌ها وجود تاخیر نامطلوب است و تحلیل را بسیار پیچیده می‌کند، در این روش وجود تاخیر باعث به وجود

^{۴۲} Poincare Map

^{۴۳} Linearization of Poincare(OGY method)

^{۴۴} Time-Delayed Feedback Control(TDFC)

^{۴۵} Impulsive Control

^{۴۶} Occasional Proportional Feedback(OPF)

آمدن روشی ساده و موثر برای کنترل (UPO) سیستم‌های آشوبی می‌شود. ایده اولیه به‌کارگیری تاخیر برای کنترل آشوب توسط پایراگاس^{۴۷} در سال ۱۹۹۲ مطرح شد [۳۰].

روش کنترل ضربه

یکی از روش‌های دیگر کنترل سیستم‌های آشوبناک، روش (OPF) است. اساس این روش بسیار شبیه به ایده (OGY) است و حتی می‌توان تفسیری (OGY) – گونه از آن داشت. درست همان‌طور که (OPF) را می‌توان به‌عنوان حالت خاص و یک بعدی روش (OGY) دانست، می‌توان به‌عنوان روشی از روش‌های کنترل ضربه‌ای نیز در نظر گرفت. کنترل ضربه‌ای، کنترلی است که اعمال سیگنال کنترلی به صورت ضربه‌هایی است که تنها در زمان گسسته صورت می‌گیرد و می‌توان حالت دینامیک را ناگهان تغییر دهد. تئوری ریاضی این روش‌ها، معادلات دیفرانسیل ضربه‌ای^{۴۸} که توسط لچمیکان‌دم^{۴۹} بی‌نوف^{۵۰} و سی‌میونوف^{۵۱} معرفی شده است [۳۱].

۲) روش‌های کنترل کلاسیک و ترکیبی، بسیاری از روش‌های متداول کنترل غیرخطی نیز برای کنترل آشوب استفاده شده است. در واقع، در این روش‌ها بدون در نظر گرفتن ویژگی‌های خاص سیستم آشوبی، طراحی به مانند یک سیستم با دینامیک غیرخطی صورت می‌گیرد. ویژگی بارز این روش‌ها این است که در صورتی که برای حالت کلی‌شان اثبات پایداری و غیره وجود داشته باشد، برای حالت خاص آشوبی نیز چنان اثباتی برقرار خواهد بود و از آنجا که نظریه کنترل کلاسیک، تاکنون پیشرفت قابل ملاحظه‌ای کرده است، معمولاً چنین طراحی‌هایی، این ویژگی‌ها را خواهد داشت. اما از طرف دیگر چون ویژگی‌های آشوب در نظر گرفته نشده است، نتیجه موثر و خوب طراحی‌های ویژه آشوب مانند روش (OGY) و (TDFC) را نخواهد داشت. به طور مشخص ویژگی کنترل سیگنال کوچک معمولاً برای آن‌ها برقرار نیست. به عنوان نمونه از این روش‌ها می‌توان به طراحی با استفاده از روش پس‌گام اشاره کرد که آشوب حذف شده و سیستم دارای نقطه تعادل پایدار، است ([۳۲]، [۳۳]). ایده‌ای که برای ترکیب روش‌های کلاسیک و ویژگی‌های دینامیک آشوب استفاده می‌شود، استفاده از خاصیت ارگودیکی آشوب است. بدین صورت که سیگنال کنترل اعمال نمی‌شود، مگر اینکه حالت سیستم یک همسایگی به اندازه کافی کوچکش نزدیک شده باشد. اگر نقطه مورد نظر جزء جاذب عجیب دینامیک باشد، مطمئن هستیم که در زمان محدود به اندازه کافی به آن نقطه نزدیک خواهیم شد. این ایده با استفاده از طراحی بهینه خطی محلی (LQR) (برای پاندول

^{۴۷}Pyragas

^{۴۸}Impulsive Differential Equation

^{۴۹}Lakshmikantham

^{۵۰}Bainov

^{۵۱}Simeonov

معکوس آشوبی شده با استفاده از سیگنال تحریک خارجی در [۳۴] به کار گرفته شده است. همچنین چنین ایده‌ای برای کنترل آشوب دینامیک‌های زمان-گسسته نیز به کار رفته است [۳۵]. بدین صورت که خطی‌سازی حول نقطه تعادل ناپایدار دینامیک آشوبی صورت گرفته و با استفاده از آن طراحی کنترل‌کننده (LGR) انجام گرفته است.

۹.۲ کاربردهای کنترل آشوب

در سال‌های اخیر، کنترل آشوب با توجه به برنامه‌های کاربردی بالقوه خود در زمینه ارتباطات امن، سیستم‌های نوری، شیمیایی، فیزیکی، بیولوژیکی و شبکه‌های عصبی مورد توجه قرار گرفته است [۳۶، ۳۷]. یکی از اولین کاربردهای کنترل آشوب پایدارسازی شدت روشنایی^{۵۲} خروجی آشوبی لیزر است که در [۳۸] گزارش شده است. با استفاده از روش (OPF) توانستند تا حد ۱۵ برابر توان خروجی را افزایش دهند.

از روش‌های کنترل آشوب برای پایدارسازی (UPO) در مدارهای الکترونیک قدرت نیز استفاده شده است. به عنوان مثال به [۳۹] مراجعه کنید. علاوه بر این‌ها از کنترل آشوب برای موارد پزشکی نیز استفاده شده است. به عنوان نمونه در [۴۰] از تکنیک‌های کنترل آشوب برای حذف آریتمی^{۵۳} قبلی استفاده شده است. همچنین در [۴۱] از روش (TDFC) برای کنترل مدلی از فیبری^{۵۴} شدن استفاده شده است. همان‌طور که پیش‌تر گفته شد، کنترل آشوب اخیراً در مخابرات کاربرد بسیار زیادی پیدا کرده است. برای خلاصه‌ای از کاربردهای آن در مخابرات ایمن به [۴۲] مراجعه کنید. همچنین فهرستی از کاربردهای روش کنترل ضربه‌ای در مخابرات در [۴۳] بیان شده است. در [۳۴]، ابتدا آونگ معکوسی را با تزریق سیگنال خارجی آشوبی می‌کنند و سپس با روش‌های کنترل آشوبی آن را کنترل می‌کنند. هدف از چنین کاری، انجام طراحی محلی برای سیستم ذاتاً غیرخطی است. طراحی محلی تضمین می‌کند که در صورت نزدیک شدن به اندازه کافی به نقطه کار، پایداری صورت می‌گیرد و با استفاده از آشوبی‌سازی می‌توان مطمئن بود که چنین نزدیک شدنی رخ خواهد داد. برای اطلاعات بیشتر در مورد کاربردهای کنترل آشوب به [۴۴] رجوع کنید. در این مقاله از میان کاربردهای معرفی شده می‌توان به مواردی چون کنترل آونگ‌ها، ژيروسکوپ، توپ جهنده، مقابله با نوسانات کشتی، تلاطم در مایعات، کنترل رفتار چند-مدی^{۵۵} در لیزر، حذف یا ایجاد حالت آشوبی در واکنش شیمیایی و همچنین هم‌زنی آشوبناک برای سرعت‌یافتن فرآیند مخلوط شدن، کنترل جمعیت حشرات با تغییر اندک در تعداد حشرات بالغ و حذف حالت صرع در حیوانات اشاره کرد.

^{۵۲} Intensity

^{۵۳} Arrhythmias

^{۵۴} Ventricular Fibrillation

^{۵۵} Multimode behavior

فصل ۳

مقدمه‌ای بر شبکه‌های عصبی

۱.۳ مفهوم شبکه

یکی از روش‌های کارآمد در حل مسائل پیچیده، شکستن آن به زیرمساله‌های ساده‌تر است که هر کدام از این زیربخش‌ها به نحو ساده‌تری قابل درک و توصیف باشند. در حقیقت يك شبکه، مجموعه‌ای از این ساختارهای ساده است که در کنار یکدیگر سیستم پیچیده نهایی را توصیف می‌کنند. شبکه‌ها انواع مختلفی دارند اما همگی آنها از دو مؤلفه تشکیل می‌شوند

(۱) **مجموعه‌ای از گره‌ها:** هر گره در حقیقت واحد محاسباتی شبکه است که ورودی‌ها را گرفته و بر روی آن پردازش انجام می‌دهد تا خروجی بدست آید. پردازش انجام شده توسط گره می‌تواند از ساده‌ترین نوع پردازش‌ها نظیر جمع کردن ورودی‌ها تا پیچیده‌ترین محاسبات را شامل شود. در حالت خاص، يك گره می‌تواند خود، شامل يك شبکه دیگر باشد.

(۲) **اتصالات بین گره‌ها:** این اتصالات نحوه گذر اطلاعات بین گره‌ها را مشخص می‌کند. در حالت کلی اتصالات می‌توانند تک سویه^۱ یا دوسویه^۲ باشند.

^۱Unidirectional

^۲Bidirectional

۲.۳ شبکه‌های عصبی زیستی

مغز انسان سیستم پیچیده‌ای است که قدرت تفکر، تحلیل و یادآوری را دارد و سیستم اعصاب انسان دارای ویژگی‌های شگفت‌آوری است. مغز انسان قادر به انجام کارهایی است که برای پیشرفته‌ترین کامپیوترها غیرممکن است، که مهمترین دلیل آن عملکردها و پردازش‌های موازی و هم‌زمان در شبکه اعصاب است. نرون^۳ یک واحد سلولی از سیستم مغز است و مغز انسان تقریباً از صد میلیون نرون ساخته شده است. نرون‌ها با وجود تفاوت‌های زیاد از نظر اندازه و شکل ظاهری، مشخصه‌های مشترکی دارند. همان‌طور که در شکل (۱.۳) نشان داده شده است از تنه سلولی نرون تعدادی شاخک کوتاه خارج می‌شود که دندریت^۴ نام دارند. دندریت‌ها و تنه سلولی، سیگنال‌ها را از نرون‌های مجاور دریافت می‌کنند و از طریق یک لوله باریک به نام آکسون^۵ به نرون‌های دیگر منتقل می‌گردد.

آکسون در انتهای خود به تعدادی رشته جانبی باریک تقسیم می‌گردد که پایانه‌های آکسونی نام دارد و با دندریت‌های سایر نرون‌ها مرتبط است. ارتباط بین آکسون یک نرون و دندریت نرون دیگر را سیناپس^۶ می‌نامند. همه سیگنال‌های جمع‌بندی شده، در تنه نرون ترکیب می‌شوند و اگر وسعت سیگنال‌های ترکیب شده به آستانه نرون برسد، مرحله تحریک شدن^۷ فعال می‌شود و یک سیگنال خروجی تولید می‌شود. این سیگنال به صورت یک پالس منفرد یا بخشی از پالس‌ها در یک میزان خاص به موازات آکسون به پایانه‌های سیناپسی انتقال می‌یابد و موجب ترشح موادی به نام عصب-رسانه می‌شود. عصب-رسانه در داخل شکاف سیناپسی پخش می‌شود و نرون بعدی را تحریک می‌کند و به این ترتیب یک سیگنال از یک نرون به دیگری انتقال می‌یابد. تعداد بسیار زیادی آکسون از نرون‌های مختلف با دندریت‌های یک نرون به این صورت ارتباط برقرار می‌کنند.

نرون‌ها با توجه به عملکردشان به سه دسته تقسیم می‌شوند

(۱) **نرون‌های حسی:** این نرون‌ها اطلاعات را از ارگان‌های حسی به مغز و نخاع می‌فرستند.

(۲) **نرون‌های حرکتی:** این نرون‌ها سیگنال‌های فرمان را از مغز و نخاع به ماهیچه‌ها و غدد هدایت می‌کنند.

(۳) **نرون‌های رابط:** این نرون‌ها پیام‌ها را از نرون‌های حسی می‌گیرند و به یک نرون رابط دیگر انتقال می‌دهند و یا پیام‌ها را به یک نرون حرکتی می‌رسانند. نرون‌های رابط فقط در مغز، چشم و طناب نخاعی یافت می‌شوند.

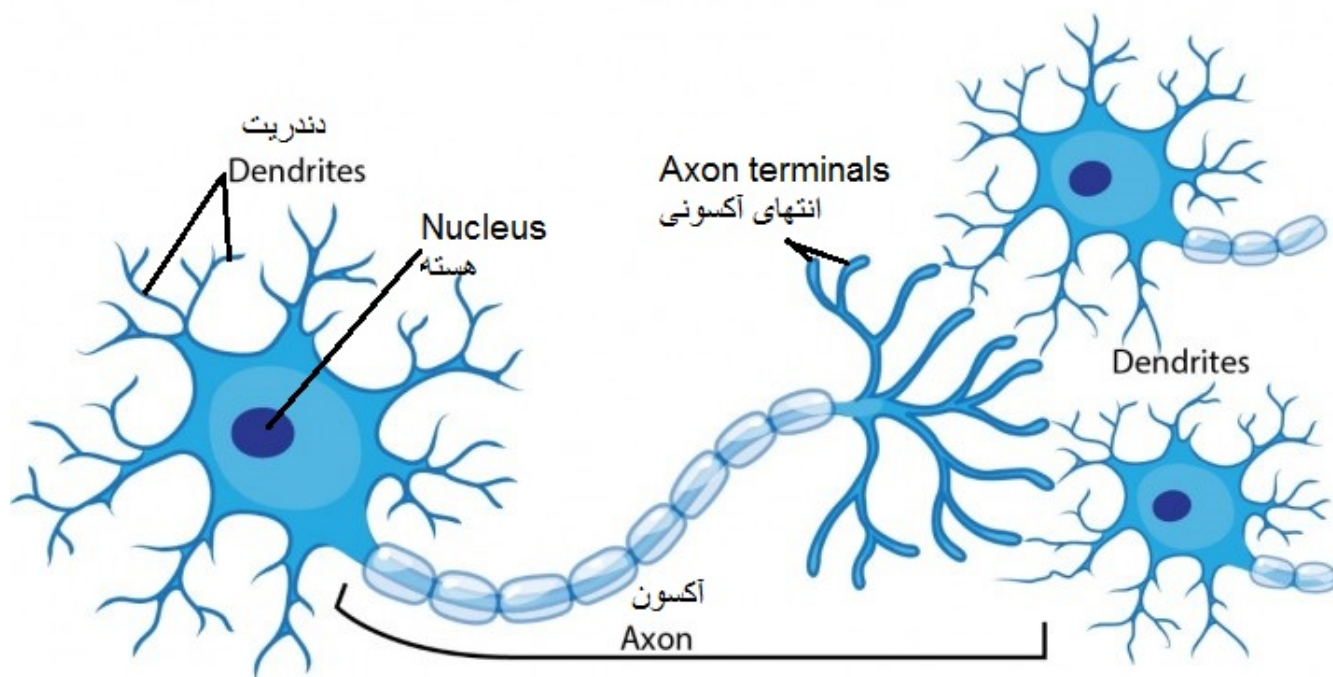
^۳Neuron

^۴Dendrite

^۵Axon

^۶Synapse

^۷Firing



شکل ۱.۳: ساختار نرون

۳.۳ شبکه‌های عصبی مصنوعی

شبکه‌های عصبی مصنوعی^۸ پدیده نسبتاً جدیدی است. هر چند شروع تحقیقات در زمینه شبکه‌های عصبی مصنوعی به دهه ۱۹۴۰ میلادی برمی‌گردد اما گسترش آن در دهه ۱۹۸۰ صورت پذیرفت [۳]. شبکه‌های عصبی شاخه‌ای از هوش مصنوعی است و در واقع تلاشی برای پیاده‌سازی نرون‌های عصبی مغز انسان به صورت مصنوعی می‌باشد. در یک شبکه عصبی مصنوعی سلول‌های عصبی مغز انسان یا همان نرون‌ها به صورت یک مدل ریاضی بیان می‌شوند و با مرتب کردن سلول‌های عصبی در اشکال مختلف می‌توان برخی از عملکردهای مغز انسان مانند ذخیره اطلاعات در حافظه، الگوها، فرآیند یادگیری و ارتباط برقرار کردن بین الگوها را پیاده‌سازی کرد.

مهمترین ویژگی شبکه‌های عصبی مصنوعی قابلیت یادگیری در آن‌ها می‌باشد. به این مفهوم که این شبکه بر مبنای یک قاعده مشخص و ثابت برنامه‌ریزی نشده و با گذشت زمان و یا در هر تکرار شبکه وضعیت آن تغییر می‌کند یا به اصطلاح آموزش می‌بیند. مبحث شبکه‌های عصبی مصنوعی مربوط به الگوبرداری از قوه یادگیری در انسان و پیاده‌سازی آن به صورت الگوریتم‌های کامپیوتری می‌باشد. بنابراین شبکه‌های عصبی این قابلیت را دارند که کارهای

^۸Artificial Neural Network

پیچیده‌ای که برای سیستم‌های مبتنی بر قاعده مشکل هستند، را فرا بگیرد. یک شبکه عصبی مصنوعی نمی‌تواند در مورد کارهایی که انجام می‌دهد، استدلال کند. و این یک نقطه ضعف برای شبکه عصبی مصنوعی محسوب می‌شود. به عنوان مثال هنگامی که یک شبکه عصبی عمل تشخیص چهره را آموخت، نمی‌تواند توضیح دهد که چگونه این کار را انجام داده است. لذا در حال حاضر تحقیقات بر روی دسته‌ای از سیستم‌های هوشمند که مرکب از شبکه‌های عصبی با قابلیت یادگیری و سیستم‌های مبتنی بر قاعده (با قابلیت توضیح و استدلال) انجام می‌پذیرد.

از ابتدای دهه ۱۹۸۰ با معرفی شبکه‌های پفیلد و حل مساله فروشنده دوره‌گرد و برنامه‌ریزی خطی به کمک آن، موج گسترده‌ای از تحقیقات بر روی شبکه‌های عصبی، پس از سال‌ها توقف، آغاز گردید. بسیاری از مسائل بهینه‌سازی در صنعت و اقتصاد را می‌توان به صورت یک مساله برنامه‌ریزی محدب خطی یا غیرخطی مدل‌بندی کرد. این امر موجب صرفه‌جویی در واحدهای تجاری و صنعتی می‌شود. امروزه استفاده از این روش‌ها در سایر بخش‌های جامعه نیز رواج یافته است.

۱.۳.۳ سیر تکامل شبکه عصبی مصنوعی

در سال ۱۹۴۳ یک نرولوژیست به نام وارن مک کلاچ^۹ به همراه یک متخصص آمار به نام والتر پیتز^{۱۰} اولین مدل ریاضی نرون را ارائه دادند [۴۵]. این نرون ساده یک عنصر محاسبه‌گر بود که عناصری به نام ورودی را در مقادیر ثابتی به نام وزن ضرب می‌کرد و آنها را از یک عملگر خطی عبور می‌داد و حاصل خروجی نرون را تشکیل می‌داد. در این مدل وزن‌ها مقادیر ثابتی بودند. در سال ۱۹۴۹ دونالد هب^{۱۱} [۴۶] کتابی درباره نحوه یادگیری در مغز انسان نوشت. بر این مبنا قانون یادگیری برای نرون را ارائه داد که به قانون هب معروف است و بعدها در تعلیم شبکه‌های عصبی از آن استفاده شد. در سال ۱۹۵۴ فارلی و کلارک^{۱۲} [۵] مدلی از نرون‌ها را به‌طور تصادفی به هم وصل کردند و قانون هب را پیاده‌سازی نمودند و نشان دادند که می‌توان دو الگوی ورودی را با این قانون تعلیم از هم تشخیص داد. با پیشرفت علم کامپیوتر اولین مدل از نرون عصبی مصنوعی توسط ناتانیال روچستر^{۱۳} محقق شرکت (IBM) در سال ۱۹۵۸ با استفاده از کامپیوتر شبیه‌سازی شد. روزنبلات [۴۷، ۴۸] در سال ۱۹۵۸ نرون ساده مک کلاچ پیتز را اصلاح کرد و به آن قابلیت یادگیری و سازگاری را اضافه کرد و این نرون را پرسپترون نامید. قانون تعلیم پرسپترون^{۱۴} اولین قانون رسمی برای شبکه‌های عصبی است.

^۹ Warren McCulloch

^{۱۰} Walter Pitts

^{۱۱} Donald Hebb

^{۱۲} Farley and Clark

^{۱۳} Nathaniel Rochester

^{۱۴} Perceptron

برنارد ویدرو^{۱۵} و مارسین هاف^{۱۶} و همکارانشان یک مدل سه سطحی از نرون‌ها را ابداع کردند که آدلاین^{۱۷} نام‌گذاری شد و مختصر شده حروف "عنصر خطی تطبیقی"^{۱۸} بود [۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲] و برای آدلاین یک قانون تعلیم بر مبنای مشتق گیری بیان نمودند. این قانون تعلیم به (α -LMS) معروف است. از متصل کردن چند آدلاین به یکدیگر مادالاین^{۱۹} ساخته شد. ویدرو و هاف از شبکه عصبی مادالاین برای حذف اکو از خطوط تلفن استفاده نمودند. الگوریتم پس انتشار^{۲۰} پال ورباس^{۲۱} [۵۳] در سال ۱۹۷۴ ارائه شد و بعدها توسط رامل هارت^{۲۲} [۵۴] به‌طور مستقل کشف گردید. این الگوریتم از زمان پیدایش به‌طور گسترده به‌عنوان یک الگوریتم آموزش در شبکه‌های عصبی پیش‌خورد^{۲۳} مورد استفاده قرار گرفته است. سال ۱۹۸۲ تا ۱۹۸۶ را می‌توان تولد دوباره شبکه عصبی دانست. در این سال‌ها دو اتفاق مهم در این زمینه رخ داد. اول ارائه شبکه عصبی بازگشتی و مفهوم تابع انرژی توسط جان هاپفیلد^{۲۴} [۵۵] بود که در سال ۱۹۸۲ منتشر شد. دومین اتفاق، حل مسأله فروشنده دوره‌گرد (TSP) توسط شبکه هاپفیلد بود [۵۶]. هاپفیلد نشان داد که از این شبکه بازگشتی می‌توان برای حل مسائل بهینه‌سازی استفاده کرد و افق جدیدی را در شبکه‌های عصبی مصنوعی گشود.

۲.۳.۳ مدل ریاضی نرون عصبی مصنوعی

در هر شبکه عصبی مصنوعی اطلاعاتی که قرار است پردازش شود، در محلی که نرون نام دارد ذخیره می‌شود. هر کدام از این اطلاعات یا سیگنال‌ها با یک نوع ارتباط به نرون‌های دیگر متصل می‌شوند. در یک نگاه ساده، مدل یک نرون باید شامل $n+1$ ورودی ($j = 1, 2, \dots, n+1$) باشد. این ورودی‌ها در وزن‌های سیناپسی^{۲۵} w_j ($j = 1, 2, \dots, n+1$) که روی آکسون‌ها واقع هستند و نقش ساختار سیناپسی را ایفا می‌کنند، ضرب می‌شوند. وزن اولین ورودی که مقدار آن همواره ۱- است را بایاس^{۲۶} می‌نامند [۴] مجموع حاصل ضرب ورودی‌ها در وزن‌های متناظرشان توسط تابعی به نام تابع فعالسازی^{۲۷} به یک مقدار دیگر نگاشته می‌شود. تابع فعالسازی تصمیم‌گیری می‌کند که آیا نرون فعال شود یا خیر و اگر جواب مثبت باشد، میزان

^{۱۵} Bernard Widrow

^{۱۶} Marcian Hoff

^{۱۷} ADELIN

^{۱۸} Adaptive Linear Elements

^{۱۹} MADALINE

^{۲۰} Back Propagation

^{۲۱} Paul Werbos

^{۲۲} Rumelhart

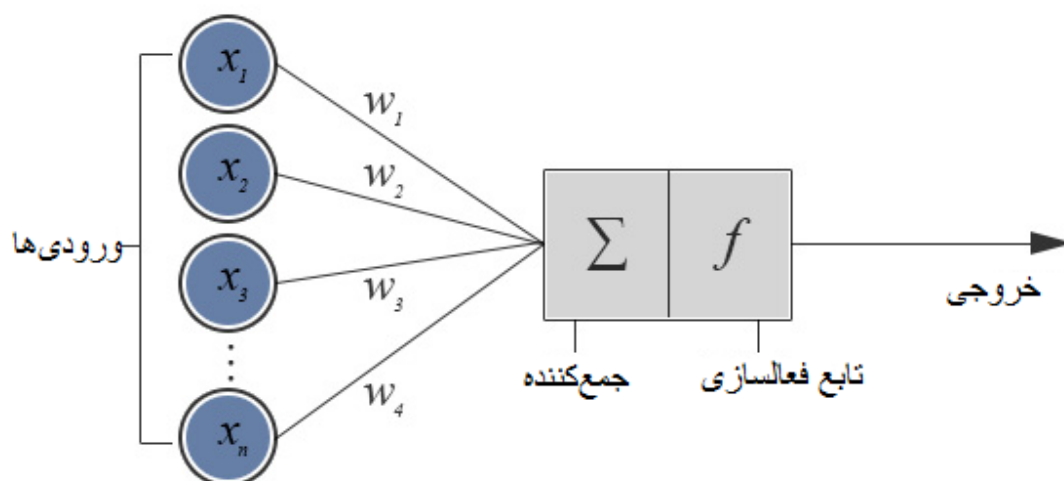
^{۲۳} Feed Forward

^{۲۴} John Hopfield

^{۲۵} Short Term Memory

^{۲۶} Soma

^{۲۷} Activation Function



شکل ۲.۳: مدل ریاضی نرون عصبی مصنوعی

خروجی را مشخص می‌سازد. بنابراین شبکه عصبی مصنوعی با استفاده از مدل ساده شده نرون واقعی به پردازش اطلاعات می‌پردازد. با توجه به این توضیحات، می‌توان مدل ساده‌ای برای توصیف یک نرون (یک گره در شبکه عصبی مصنوعی) پیشنهاد کرد. این مدل در (۲.۳) نشان داده شده است. جدای از ساده‌سازی‌های اعمال شده، تفاوت اصلی این مدل با واقعیت در این است که در شبکه واقعی، ورودی‌ها سیگنال‌های زمانی اند، حال آن که در این مدل، ورودی اعداد حقیقی هستند.

در مدل ارائه شده در شکل (۲.۳)، تنوع‌های بسیاری وجود دارد. از جمله این که وزن‌های یک شبکه عصبی، که مقدار خروجی را منتقل می‌کنند، می‌توانند مثبت یا منفی باشند. از طرفی، توابع فعالسازی می‌توانند بسیار متنوع باشند.

مشخصه‌های اصلی یک شبکه عصبی که در طراحی آن باید مد نظر قرار گیرند عبارت‌اند از

معماری شبکه عصبی: نحوه اتصالات بین نرون‌ها، تعداد آن‌ها و تعداد لایه‌های تشکیل دهنده بخش نرون‌های ارتباطی را معماری شبکه عصبی می‌گوییم.

تابع‌های فعال‌سازی: این که چه تابعی روی نرون قرار بگیرد تا بر ورودی‌های نرون اثر کرده و خروجی نرون را تولید کند تابع فعال‌سازی آن نرون گویند.

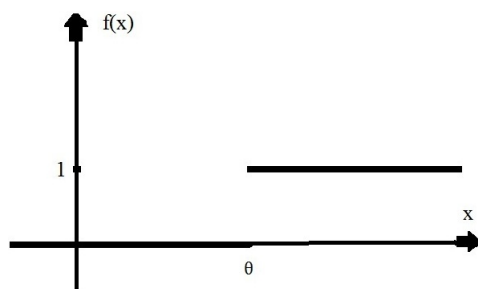
الگوریتم آموزش: روشی که وزن‌های روی آکسون‌ها بر اساس آن تغییر می‌کنند تا خروجی شبکه عصبی به حالت مطلوب درآید را الگوریتم آموزش می‌گوییم.

توابع فعال‌سازی

چند نمونه از این توابع را در ذیل بیان می‌کنیم

تابع پله‌ای: این تابع با حد آستانه‌ای θ و به صورت زیر می‌باشد

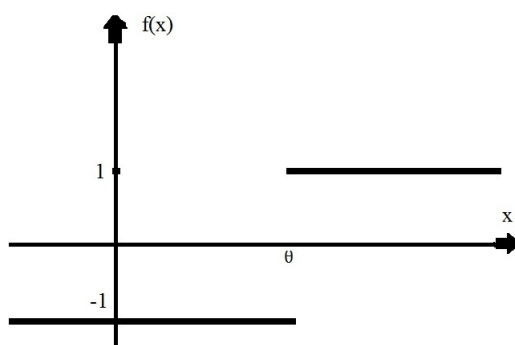
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq \theta, \\ 0 & x < \theta \end{cases}$$



شکل ۳.۳: تابع پله‌ای

تابع پله‌ای دوقطبی: این تابع با حد آستانه‌ای θ و به صورت زیر تعریف می‌شود

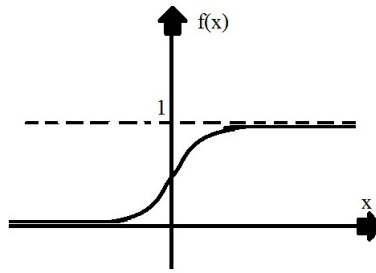
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq \theta, \\ -1 & x < \theta \end{cases}$$



شکل ۴.۳: تابع پله‌ای دوقطبی

تابع سیگموئید: تابع سیگموئید^{۲۸}، تابعی یکنوا، کراندار و مشتق پذیر است و می‌توان مشتق تابع را به کمک خود تابع بیان کرد و به شکل زیر است

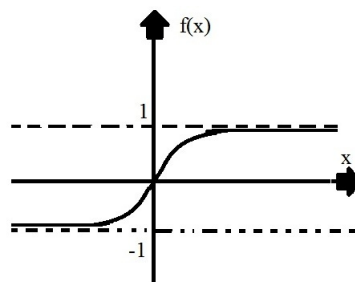
$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}, \quad f'(x) = f(x)(1 - f(x))$$



شکل ۵.۳: تابع سیگموئید

تابع سیگموئید قطبی: این تابع همان خواص تابع سیگموئید را دارد و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$g(x) = 2f(x) - 1 = 2 \left(\frac{1}{1 + e^{-x}} \right) - 1 = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}, \quad g'(x) = \frac{1}{4}(1 + g(x))(1 - g(x))$$



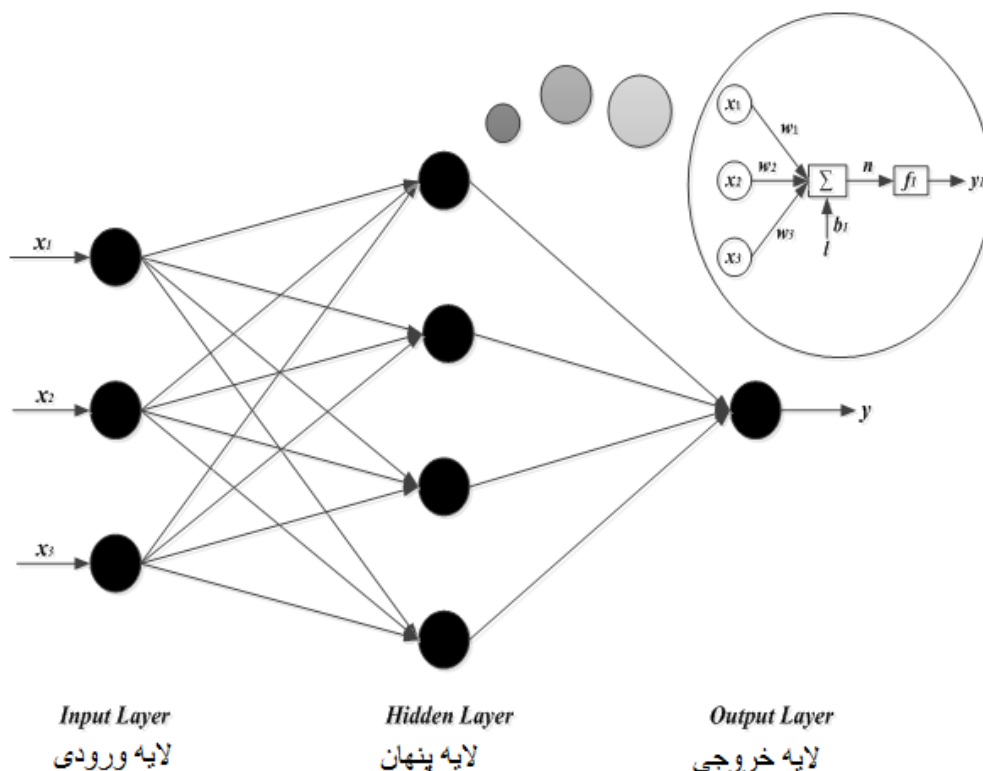
شکل ۶.۳: تابع سیگموئید قطبی

تابع همانی: این تابع بیشتر برای نورون‌های ورودی مورد استفاده قرار می‌گیرد و به صورت زیر بیان می‌شود

$$f(x) = x$$

۳.۳.۳ شبکه‌های عصبی پیش‌خورد

هر چند نحوه مدل کردن نرون جزء اساسی‌ترین نکات کلیدی در کارایی شبکه عصبی می‌باشد اما نحوه برقراری اتصالات و چیدمان (توپولوژی) شبکه نیز فاکتور بسیار مهم و اثرگذاری است. باید توجه داشت که توپولوژی مغز انسان آن قدر پیچیده است که نمی‌توان از آن به عنوان مدلی برای اعمال به شبکه عصبی استفاده نمود، چرا که مدلی که ما استفاده می‌کنیم، یک مدل ساده شده است در حالیکه چیدمان مغز از المان‌های بسیار زیادی استفاده می‌کند. یکی از ساده‌ترین



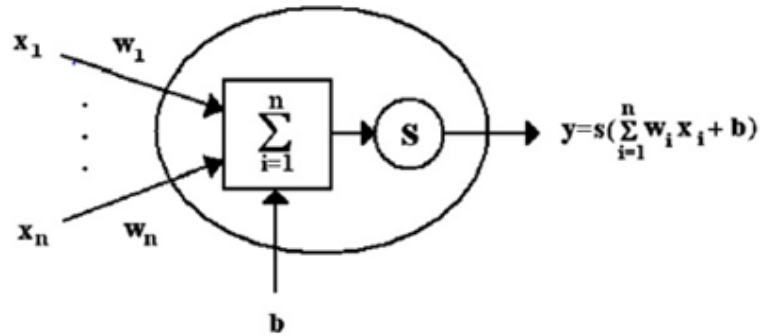
شکل ۷.۳: ساختار یک نرون با لایه ورودی، لایه پنهان و لایه خروجی

و در عین حال کارآمدترین چیدمان‌های پیشنهادی برای استفاده در مدل‌سازی عصب‌های واقعی، مدل پرسپترون چندلایه (MLP)^{۲۹} می‌باشد، که از یک لایه ورودی (نرون‌های حسی)، یک یا چند لایه پنهان (نرون‌های ارتباطی) و یک لایه خروجی (نرون‌های حرکتی) تشکیل یافته است. در این ساختار، تمام نرون‌های یک لایه به تمام نرون‌های لایه بعد متصلند. این چیدمان اصطلاحاً یک شبکه با اتصالات کامل را تشکیل می‌دهد. شکل (۷.۳) شمای یک شبکه پرسپترون سه لایه را نشان می‌دهد. به سادگی می‌توان استنباط نمود که تعداد نرون‌های هر لایه، مستقل از تعداد نرون‌های دیگر لایه‌ها می‌باشد.

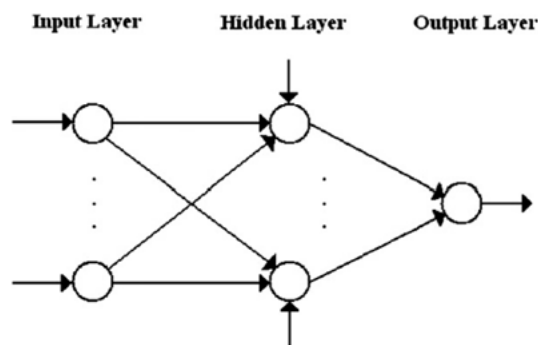
پرسپترون برای اولین بار توسط روزنبلات^{۳۰} در سال ۱۹۶۲ معرفی شد [۵۷] (شکل (۸.۳) را ببینید). پرسپترون ساده به یک یاددهنده احتیاج دارد که به شبکه بگوید چه خروجی مطلوبی باید داشته باشد. آن‌ها شبکه‌های تحت نظارت هستند. در یک شبکه بدون نظارت، شبکه سازگار با پاسخ به ورودی است. شکل (۹.۳) مثالی از پرسپترون سه لایه را نشان می‌دهد. پرسپترون چند لایه با لایه‌های بیشتر از سه تا، از لایه‌های پنهان شده استفاده می‌کند [۵۸]، [۵۹]. در پرسپترون‌های چندلایه واحدهای ورودی به واحدهای خروجی توسط یک نگاشت غیرخطی بهم متصل می‌شوند مهم‌ترین کاربرد پرسپترون چندلایه توانایی آنها در تقریب تابع

^{۲۹}Multi layer perceptron

^{۳۰}Rosenblatt



شکل ۸.۳: ساختار شبکه عصبی مصنوعی (پرسپترون)



شکل ۹.۳: پرسپترون چندلایه

است. از قضیه وجودی کولوموگروف^{۳۱} می‌دانیم که یک پرسپترون سه لایه با $n(2n + 1)$ گره می‌تواند از هر تابع پیوسته با n متغیر محاسبه شود [۶۰، ۶۱]. دقت تقریب به تعداد نرون‌ها در لایه‌های پنهان شده بستگی دارد و به تعداد لایه‌های پنهان شده بستگی ندارد شبکه‌های عصبی چندلایه پیش‌خورد^{۳۲} قابل یادگیری هستند. در برخی موارد مساله آموزشی پیش‌خورد بدحالت است

^{۳۱}Existence Colomogorov Theorem

^{۳۲}feedForward

فصل ۴

مقدمه‌ای بر مسائل کنترل بهینه و روش‌های حل آن

۱.۴ نظریه کنترل بهینه

کنترل بهینه شاخه‌ای از ریاضیات است که به مسائل کاربردی می‌پردازد و با اصول تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل سروکار دارد. کنترل بهینه در بسیاری از رشته‌های مختلف از قبیل مهندسی، اقتصاد و علوم زیستی کاربردهای زیادی دارد. در کنترل بهینه منظور از کنترل آن است که عاملی روی نحوه عملکرد سیستم تاثیر بگذارد تا عملکرد مطلوبی حاصل شود. این اثرگذاری و کنترل می‌تواند توسط خود سیستم و یا شخصی خارج و مستقل از سیستم انجام شود. نظریه کنترل علاوه بر سیستم‌های خطی، در سیستم‌های غیرخطی نیز کاربرد دارد. در دهه‌های اخیر روش‌های عددی بسیاری برای حل مسائل کنترل بهینه ارائه شده است. این روش‌ها می‌تواند به صورت مستقیم یا غیرمستقیم باشد. روش‌های غیرمستقیم بر پایه جواب‌هایی است که در معادلات اویلر-لاگرانژ^۱ [۶۲]، که شرایط لازم بهینگی هستند و یا در معادلات همیلتن-ژاکوبی-بلمن^۲ [۶۲]، که شرایط کافی بهینگی هستند صدق کنند. در روش‌های مستقیم جواب بهینه با کمینه سازی مستقیم تابع هدف نسبت به قیود حاصل

^۱Euler - Lagrange

^۲Hamilton - Jacobi - Bellman

می‌شود. روش‌های مستقیم با استفاده از فنون پارامترسازی [۶۳، ۶۴]، و گسسته سازی [۶۵]، به کار گرفته می‌شوند.

استفاده از روش‌های غیرمستقیم به دلیل پیچیدگی حل معادلات همیلتن-ژاکوبی-بلمن، وابستگی شروع تکرارها به یک جواب موضعی و نیاز به مفاهیم ریاضیات پیشرفته و فیزیکی برای حل مساله، مشکل است. به همین دلیل بسیاری از محققان روش‌های مستقیم را برای حل مسائل کنترل بهینه مناسب‌تر می‌دانند. هدف از کنترل بهینه تعیین متغیرهای کنترلی است که در محدودیت‌ها یا قیود مساله صدق کرده و نحوه عملکرد یا معیار معینی را حداقل یا حداکثر نماید.

۲.۴ مساله کنترل بهینه

در یک مسئله کنترل بهینه، هدف پیدا کردن ورودی یک سیستم به عنوان کنترل کننده است که در شرایط فیزیکی دستگاه صدق کند و تابع هدف را کمینه یا بیشینه کند. مساله کنترل بهینه از قسمت‌های اساسی زیر تشکیل شده است [۶۶، ۶۷]

• دستگاه با معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

یک دستگاه با معادلات دیفرانسیل مرتبه اول که توسط معادلات حالت توصیف می‌شود و به شکل زیر بیان می‌گردد

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = g_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t), \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = g_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t), \end{cases}$$

که در آن بردار $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت دستگاه و بردار $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)) \in \mathbb{R}^m$ بردار کنترل نامیده می‌شود. لذا داریم

$$\dot{x}(t) = g(x(t), u(t), t), \quad (1.4)$$

و $u \in (C[t_0, t_f])^m$ است، به این معنا که هر مولفه u تابعی پیوسته روی $[t_0, t_f]$ است.

• تابعی معیار

برای ارزیابی کمی عملکرد دستگاه، باید تابعی معیار انتخاب گردد. دستگاه بهینه، دستگاهی است که این تابعی معیار^۳ را حداکثر یا حداقل نماید. تابعی معیار به زبان ریاضی به صورت یک تابع کمیتی ظاهر می‌شود. یک تابعی معیار می‌تواند به صورت زیر

^۳Functional criteria

بيان شود

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt, \quad (2.4)$$

که در آن t_0 و t_f به ترتيب زمان شروع و زمان نهايي بوده و h تابع اسکالر و $f : \mathbb{R}^{n+m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ، تابعی انتگرال پذیر است.

• شرایط مرزی

مجموعه‌ای از شرایط مرزی که مقدار سیستم را در نقطه آغازین و پایانی به دست می‌دهد، یعنی

$$\begin{cases} \varphi(x(t_0), t_0) = 0, \\ \varphi(x(t_f), t_f) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

• محدودیت‌ها یا قيود فیزیکی

پس از انتخاب مدل ریاضی دستگاه، باید محدودیت‌های فیزیکی را برای وضعیت‌ها و کنترل‌ها تعریف نمود.

شکل کلی یک مسئله کنترل بهينه به صورت زیر است:

$$\text{Minimize } J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt, \quad (4.4)$$

$$\text{subject to } \dot{x} = g(x(t), u(t), t), \quad (5.4)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (6.4)$$

که در آن u^* کنترل بهينه و x^* منحنی مسیر بهينه می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۴. زوج $P = (x(t), u(t))$ را قابل قبول گوییم هرگاه،

- تابع حالت $x(t) \in \mathbb{R}^n$ در $[t_0, t_f]$ مشتق پذیر باشد،
- تابع کنترل u مقادیرش را در مجموعه فشرده $U \in \mathbb{R}^m$ گرفته و مولفه‌هایش در بازه $[t_0, t_f]$ اندازه پذیر باشد،
- زوج $P = (x(t), u(t))$ در معادلات (۱.۴) و (۳.۴) صدق کند.

تعریف ۲.۲.۴. کنترلی که در تمام مدت $[t_0, t_f]$ در محدودیت‌های کنترل صدق نماید، کنترل قابل قبول^۴ نامیده شده و مجموعه‌ی این کنترل‌های قابل قبول با U نشان داده می‌شود.

^۴ Admissible Control

تعریف ۳.۲.۴. منحنی مسیر متغیر وضعیت که در تمام مدت $[t_0, t_f]$ در محدودیت‌های متغیر وضعیت صدق می‌کند، منحنی مسیر قابل قبول^۵ نامیده شده و مجموعه‌ی این منحنی‌های قابل قبول با X نشان داده می‌شود.

تعریف ۴.۲.۴. دستگاه (۱.۴) را برای $t \geq t_0$ با وضعیت اولیه $x(t_0) = x_0$ در نظر می‌گیریم. اگر زمان محدود $t_1 \geq t_0$ و کنترل $u(t), t \in [t_0, t_1]$ وجود داشته باشد که در زمان t_1 وضعیت x_0 را به مبدا مختصات منتقل کند، آنگاه وضعیت x_0 را در زمان t_0 کنترل پذیر^۶ می‌نامیم.

تعریف ۵.۲.۴. اگر بتوانیم با مشاهده‌ی خروجی $y(t)$ در بازه‌ی زمانی محدود $[t_0, t_f]$ وضعیت $x(t_0) = x_0$ را تعیین کنیم، وضعیت x_0 در زمان t_0 مشاهده پذیر^۷ نامیده می‌شود.

۳.۴ حساب تغییرات

حساب تغییرات به عنوان شاخه‌ای از ریاضیات نوعی تعمیم محاسبات است و در حل مسائل بهینه سازی بسیار مفید می‌باشد. در حساب تغییرات هدف یافتن مجموعه‌ای از مسیرها، خم‌ها، خمینه‌ها و غیره است که به عنوان توابعی پیوسته و مشتق پذیر دارای اکسترمم هستند. حساب تغییرات از مسئله پیشنهاد شده (مساله بارچيستوچرون)^۸ در سال ۱۶۹۶ به وسیله ریاضیدان سوئیسی جان برنولی^۹ ناشی شده است. او به یک منحنی بین دو نقطه ثابت A و B در صفحه قائم احتیاج داشت که جسمی در آن (تحت نیروی ثقل و بدون اصطکاک) بلغزد و در حداقل زمان به پایین بیاید. جواب این مساله بدیهی نبود. خط مستقیم بین A و B جواب مساله نیست، این مطلب را بطور تجربی با سردادن مهره‌های سیمی به شکل‌های مناسب می‌توان دریافت. در حساب تغییرات ساده‌ترین نوع مساله بدین صورت می‌باشد که هدف پیدا کردن منحنی $x = x(t)$ است که نقطه ثابت $(t, x) = (a, b)$ را به نقطه ثابت $(t, x) = (c, d)$ وصل می‌کند و به تابعی معیار

$$J = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt.$$

کمترین مقدار را نسبت می‌دهد [۶۷].

تعریف ۱.۳.۴. اگر q و $q + \Delta q$ عناصری باشند که تابع f_0 بر آنها تعریف شده باشد، آنگاه نمو^{۱۰} f_0 با Δf_0 نشان داده می‌شود و عبارتست از

$$\Delta f_0 \triangleq f_0(q + \Delta q) - f_0(q).$$

^۵ Admissible Trajectory

^۶ Controllable

^۷ Observables

^۸ Barchistochrone

^۹ John Bernoulli

^{۱۰} Increment

تعریف ۲.۳.۴. اگر x و $x + \Delta x$ عناصری باشند که تابع J بر آنها تعریف شده باشد، آنگاه نمو J با ΔJ نشان داده می‌شود و عبارتست از

$$\Delta J \triangleq J(x + \Delta x) - J(x).$$

تعریف ۳.۳.۴. نمو تابعی را می‌توان بصورت زیر تعریف کرد

$$\Delta J(x, \delta x) = \delta J(x, \delta x) + g(x, \delta x) \|\delta x\|,$$

که δJ قسمت خطی بر حسب δx می‌باشد. اگر $\lim_{\|\delta x\| \rightarrow 0} g(x, \delta x) = 0$ ، آنگاه J را دیفرانسیل پذیر^{۱۱} گویند و δJ تغییرات تابعی J نامیده می‌شود.

قضیه ۱.۳.۴. [۹۵] (قضیه اساسی حساب تغییرات). اگر x^* یک منحنی اکسترمم باشد، تغییرات J روی x^* باید صفر شود، یعنی به ازای هر δx قابل قبول $\delta J(x^*, \delta x) = 0$.

لم ۱.۳.۴. [۹۵] (لم اساسی حساب). اگر تابع h پیوسته بوده و برای هر تابع پیوسته مانند δx در محدوده $[t_0, t_f]$ داشته باشیم

$$\int_{t_0}^{t_f} h(t) \delta x(t) dt = 0,$$

آنگاه h باید در تمام محدوده $[t_0, t_f]$ صفر باشد.

۴.۴ معادله اویلر- لاگرانژ

تابعی زیر را با فرض اینکه f_0 دارای مشتقات نسبی مرتبه اول و دوم پیوسته نسبت به هر یک از متغیرهای خود باشد و t_0 و t_f ثابت و نقاط انتهایی منحنی به صورت x_0 و x_f باشند را در نظر می‌گیریم.

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), \dot{x}(t), t) dt. \quad (7.4)$$

در جستجوی یک منحنی هستیم (در صورت وجود) که $J(x)$ را به اکسترمم خود ببرد. تغییرات $\delta J(x, \delta x)$ به صورت زیر به دست می‌آید

$$\delta J(x, \delta x) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial f_0}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] \delta x(t) + \left[\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] \delta \dot{x} \right\} dt,$$

اگر منحنی اکسترممی مانند x^* را در نظر بگیریم با اعمال قضیه اساسی حساب تغییرات داریم

$$\delta J(x, \delta x) = 0 = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial x}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \right] \right\} \delta x(t) dt,$$

^{۱۱}Differentiable

حال با اعمال لم اساسی حساب تغییرات شرط لازم برای اینکه x^* به ازای هر $t \in [t_0, t_f]$ اکسترمم باشد به صورت زیر به دست می‌آید

$$\frac{\partial f_0}{\partial x}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) \right] = 0, \quad (8.4)$$

معادله (۸.۴) شرط لازم بهینگی برای (۷.۴)، می‌باشد و معادله‌ی اوایلر-لاگرانژ نامیده می‌شود. [۶۷].

۵.۴ شرایط لازم برای کنترل بهینه

هدف تعیین کنترل قابل قبول مانند u^* است که باعث شود دستگاه (۱.۴) با طی کردن منحنی مسیر قابل قبول x^* ، تابعی معیار زیر را کمینه کند.

$$J(u) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) dt, \quad (9.4)$$

در بخش قبل نشان دادیم شرط لازم برای اینکه x^* به ازای هر $t \in [t_0, t_f]$ تابعی $J(x)$ را اکسترمم کند، معادله اوایلر-لاگرانژ است. لذا برای تشخیص اینکه x^* منحنی بهینه است، باید شرایط زیر برقرار باشد.

(۱) اگر t_f مشخص و x_f آزاد باشد، شرایط لازم برای تابع x^* که اکسترمم تابعی $J(x) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), \dot{x}(t), t) dt$ عبارتند از برقراری معادله‌ی اوایلر و همچنین برقراری رابطه‌ی $\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) = 0$. این معادله شرط مرزی طبیعی^{۱۲} نامیده می‌شود.

(۲) اگر t_f آزاد و x_f مشخص باشد، شرایط لازم عبارتند از برقراری معادله‌ی اوایلر و برقراری معادله $f_0(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) - \left[\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) \right] \dot{x}^*(t_f) = 0$

(۳) در مسائلی که t_f و x_f هر دو آزاد باشند، دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم

(الف) x_f و t_f مرتبط نمی‌باشند. در این صورت شرایط لازم عبارتند از برقراری معادله‌ی اوایلر و برقراری معادله‌ی $f_0(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) = 0$.

(ب) x_f و t_f مرتبط می‌باشند. به عنوان مثال $x_f = \theta(t_f)$. در این حالت نیز باید علاوه بر برقراری معادله‌ی اوایلر، معادله‌ی

$$\left[\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) \right] \left[\frac{d\theta}{dt}(t_f) - \dot{x}^*(t_f) \right] + f_0(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) = 0,$$

که شرط اربیبی^{۱۳} نامیده می‌شود، برقرار باشد.

^{۱۲}Natural boundary condition

^{۱۳}Transversality condition

برای تعیین کنترل قابل قبول u^* ، فرض می‌کنیم تابع h دیفرانسیل‌پذیر باشد و با استفاده از قاعده زنجیره‌ای دیفرانسیل‌گیری، $J(u)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), t) + \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x(t), t) \right]^T \dot{x}(t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x(t), t) dt. \quad (10.4)$$

با معرفی ضرایب لاگرانژ $\lambda_n(t), \dots, \lambda_1(t)$ و تعریف $g_a(x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t), t)$ به صورت

$$g_a(x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t), t) \triangleq f_0(x(t), u(t), t) + \lambda^T(t) [g(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t)] + \left[\frac{\partial h}{\partial x}(x(t), t) \right]^T \dot{x}(t) + \frac{\partial h}{\partial t}(x(t), t),$$

داریم

$$J_a(u) = \int_{t_0}^{t_f} g_a(x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t), t) dt,$$

حال با اعمال قضیه اساسی حساب تغییرات و تعریف تابع $\mathcal{H}(x(t), u(t), \lambda(t), t)$ به نام تابع هامیلتونین به صورت زیر، شرایط لازم به دست می‌آیند [۶۷].

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), \lambda(t), t) \triangleq f_0(x(t), u(t), t) + \lambda^T \cdot g(x(t), u(t), t). \quad (11.4)$$

شرایط لازم عبارتند از

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = -\dot{\lambda}(t), \quad (12.4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = 0, \quad (13.4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = \dot{x}(t), \quad (14.4)$$

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - \lambda^*(t_f) \right]^T \delta x_f + \left[\mathcal{H}(x^*(t_f), u^*(t_f), \lambda^*(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(x^*(t_f), t_f) \right] \delta t_f = 0 \quad (15.4)$$

۶.۴ اصل بیشینه پونتریاگین

قضیه ۱.۶.۴ [۶۷] فرض کنیم $u^*(t)$ یک کنترل قابل قبول باشد و مسیر متناظر آن نیز $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ باشد که دستگاه را از x^0 در زمان $t = t_0$ به x^1 در زمان غیرمشخص t_1 هدایت می‌کند. برای اینکه u^* و x^* بهینه باشد (یعنی J را کمینه کند) لازم است که بردار غیرصفر $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)^T$ که در $\lambda_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$ ($i = 0, 1, 2$) صدق می‌کند و نیز تابع عددی

$$H(\lambda, x, u) = \lambda_0 f_0(x, u) + \lambda_1 f_1(x, u) + \lambda_2 f_2(x, u) \quad (16.4)$$

موجود باشند به طوری که

(الف) به ازای هر $t_0 \leq t \leq t_1$ ، H به بیشینه خود نسبت به u در $u = u^*(t)$ برسد.

(ب) $H(\lambda^*, x^*, u^*) = 0$ و در $t = t_1$ ، $\lambda \leq 0$ ، که $\lambda^*(t)$ جواب $\lambda_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$ ، ($i = 1, 2$) به ازای $u = u^*$ می‌باشد.

به‌علاوه می‌توان نشان داد که عدد ثابت $H(\lambda^*, x^*, u^*) = 0$ ، و نیز، عدد ثابت $\lambda_0(t) = 0$ ، بنابراین به ازای هر نقطه روی مسیر بهینه، $H = 0$ و $\lambda_0 \leq 0$.

۷.۴ روش‌های عددی حل مسائل کنترل بهینه

۱.۷.۴ روش‌های غیرمستقیم

روش‌های غیرمستقیم بر مبنای حساب تغییرات یا اصل بیشینه هستند. با در نظر داشتن مفروضات معلوم شرایط لازم مرتبه اول برای مسائل کنترل بهینه به صورت زیر تعیین می‌شوند. تابع برداری n متغیره از متغیرهای الحاقی $\lambda(t)$ و تابع برداری m متغیره $V(t)$ موجودند به طوری که با توجه به تابع معروف همیلتنی

$$H = \lambda^T f_0 + V^T g,$$

و مساله مقدار مرزی چند نقطه‌ای به همراه معادلات دیفرانسیل روابط

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial x} = f_0,$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda^T \frac{\partial f_0}{\partial x} - V^T \frac{\partial g}{\partial x},$$

$$0 > g,$$

را نتیجه می‌دهد. در این روش کنترل بهینه از کمینه سازی H نسبت به u تعیین می‌شود. به عنوان مثال، در حالتی که H به ازای $t_0 < t < t_f$ نسبت به u غیرخطی است از

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \lambda^T \frac{\partial f_0}{\partial u} - V^T \frac{\partial g}{\partial u} = 0$$

استفاده می‌شود. برای به دست آوردن جواب این شرایط لازم از روش‌هایی که براساس ساختار خاص این شرایط هستند، استفاده شود. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش‌های معروف گرادیان اشاره کرد. از طرف دیگر با استفاده از روش‌های نیوتن می‌توان کنترل‌های u را از

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

به صورت عددی و تحلیلی به دست آورد. برخلاف سایر روش‌ها این روش دارای چند مزیت است که برای نمونه می‌توان به امکان استفاده از انواع محدودیت‌ها و دقت بالای این روش اشاره کرد. با این حال این روش دارای معایبی نیز هست. از جمله این معایب می‌توان به نیاز به یک تقریب آغازین خوب برای مساله بهینه و نیاز به تلاش بسیار برای به دست آوردن

معادلات دیفرانسیل الحاقی اشاره کرد. علاوه بر این فرد باید اطلاعات اولیه از ساختار تغییر یافتن محدودیت‌ها داشته باشد. این امر در قالب تکنیک‌های هموتویی مطرح می‌شود. در مجموع در این روش‌ها فرد باید اطلاعات دقیقی از ماهیت فیزیکی و ریاضی مساله بهینه سازی داشته باشد [۶۹].

۲.۷.۴ روش‌های مستقیم

در اکثر مواقع یافتن یک جواب تحلیلی مناسب برای مسائل کنترل بهینه وجود ندارد. بنابراین یافتن یک جواب تقریبی معقولانه‌ترین روش برای حل مساله کنترل بهینه است. مطالعات و تحقیقات انجام شده در روش‌های عددی، الگوریتم‌های کارآمد و مناسبی را برای حل مسائل کنترل بهینه ارائه کرده است [۷۰]. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش‌های گسسته سازی و پارامترسازی اشاره کرد. با استفاده از این روش‌ها مساله کنترل بهینه به یک مساله برنامه ریزی ریاضی تبدیل می‌شود.

روش گسسته سازی

در این روش بازه زمانی $[t_0, t_f]$ به $n + 1$ زیر بازه به صورت زیر تقسیم می‌شود

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t_f,$$

که این نقاط به عنوان گره یا شبکه در نظر گرفته می‌شوند. یکی از روش‌های تکنیک گسسته‌سازی، می‌باشد، بنابراین دنباله زیر از مقادیر نامعلوم متغیرهای حالت و کنترل به صورت

$$Z = (x_0, x_1, \dots, x_n, u_0, u_1, \dots, u_{n-1}),$$

است. همچنین سیستم معادلات حالت با یک مجموعه از معادلات جبری که به صورت تساوی هستند جایگزین می‌شوند. بدین ترتیب مساله کنترل بهینه به یک مساله برنامه‌ریزی ریاضی تبدیل می‌شود. یکی دیگر از روش‌های تکنیک گسسته‌سازی، گسسته کردن متغیر کنترل به صورت

$$Z = (u_0, \dots, u_{n-1}),$$

است که در این روش متغیرهای حالت به عنوان تابعی از متغیرهای کنترل با انتگرال‌گیری از سیستم معادلات حالت به دست می‌آیند [۷۱].

روش پارامترسازی

یکی از کارآمدترین روش‌های عددی برای حل مسائل کنترل بهینه روش پارامترسازی است. هدف اصلی این روش پارامترسازی کنترل، حالت و یا هر دوی آنهاست. در این روش تابع کنترل، تابع حالت و یا هر دوی آنها با استفاده از توابع پایه تقریب زده می‌شوند. در این روش

مساله کنترل به یک مساله برنامه‌ریزی غیرخطی با تعداد متناهی متغیر تصمیم‌گیری تبدیل می‌شود [۷۲].

پارامترسازی کنترل

پارامترسازی کنترل بر پایه تقریب زدن متغیرهای کنترل به وسیله انتخاب یک ساختار مناسب با پارامترهای نامعلوم متناهی به صورت

$$u_l(t) = \sum_{i=0}^N b_i^{(l)} \varphi_i(t), \quad l = 1, 2, \dots, m.$$

است که b_i ها پارامترهای نامعلوم و $\varphi_i(t)$ نشان‌دهنده‌ی یک مجموعه مناسب از توابع تشکیل‌دهنده پایه‌ی فضای کنترل با بعد متناهی است. متغیرهای حالت به عنوان تابعی از پارامترهای نامعلوم متغیرهای کنترل، به وسیله انتگرال‌گیری از سیستم معادلات حالت به دست می‌آیند و توسط جایگذاری متغیرهای کنترل و متغیرهای حالت متناظر در تابع هدف، مساله کنترل بهینه به مساله برنامه‌ریزی تبدیل می‌شود. برخی از توابعی که برای تقریب متغیرهای کنترل استفاده می‌شوند عبارتند از: توابع ثابت تکه‌ای، توابع خطی تکه‌ای، چندجمله‌های تکه‌ای توابع اسپلاین [۷۳].

پارامترسازی کنترل - حالت

روش پارامترسازی کنترل - حالت بر پایه تقریب زدن متغیرهای حالت و کنترل به وسیله دنباله‌ای از توابع شناخته شده با پارامترهای نامعلوم به صورت

$$x_j(t) = \sum_{i=0}^N a_i^{(j)} \varphi_i(t), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$u_l(t) = \sum_{i=0}^N b_i^{(l)} \varphi_i(t), \quad l = 1, 2, \dots, m.$$

است که a_i و b_i پارامترهای نامعلوم و $\varphi_i(t)$ یک مجموعه مناسب از توابع است. با استفاده از این روش و جایگذاری متغیرهای حالت و کنترل در مساله، مساله به برنامه‌ریزی ریاضی تبدیل می‌شود [۷۴].

پارامترسازی حالت

منظور از پارامترسازی حالت تقریب متغیرهای حالت به وسیله دنباله‌ای از توابع شناخته شده به پارامترهای نامعلوم می‌باشد. یعنی

$$x_j(t) = \sum_{i=0}^N a_i^{(j)} \varphi_i(t), \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

سپس متغیرهای کنترل به کمک متغیرهای حالت به دست می‌آید [۷۵]

فصل ۵

مساله افق نامتناهی و کاربرد آن در کنترل یک سیستم آشوبناک

مطالعه وجود و ساختار حل مسائل کنترل بهینه که روی بازه‌های نامتناهی تعریف شده‌اند به طور فزاینده‌ای در حال افزایش است [۷۶، ۷۷]. این مسائل در مهندسی [۷۸، ۷۹]، مدل‌های رشد اقتصادی [۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴]، مدل‌های گسسته‌سازی فیزیک حالت جامد مربوط به جابجایی در بلورهای یک بعدی [۸۵، ۸۶] و غیره به کار گرفته شده است. شرایط لازم برای بهینگی برای یک مساله کنترل بهینه افق نامتناهی را در [۸۷] می‌توان مشاهده کرد. اصل حداکثر برای این مساله بدون شرایط پایداری مجانبی^۱ در بی‌نهایت در [۸۸، ۸۹] ظاهر شده است. با توجه به اهمیت مسائل کنترل بهینه افق نامتناهی، روش‌های متعددی برای حل آن‌ها مانند روش گسسته‌سازی [۹۰، ۹۱]، روش‌های مبتنی بر موجک هار [۹۲] و روش‌های شبه‌طیفی [۹۳، ۹۴] ارائه شده است. این روش‌ها مستلزم تقسیم دامنه به تعداد عناصر محدود است که در آن توابع تقریبی و موضعی هستند. اگرچه این روش‌ها تقریب خوبی برای جواب ارائه می‌دهند، اما به گسسته‌سازی دامنه از طریق شبکه‌سازی نیاز دارند که این ممکن است در مسائل دو یا چند بعدی چالش برانگیز باشد. همچنین مشتقات جواب تقریبی، ناپیوسته هستند و می‌توانند بر پایداری جواب تاثیر بگذارند. یک رویکرد امیدوارکننده برای غلبه به این محدودیت‌ها، استفاده از شبکه‌های عصبی مصنوعی براساس توپولوژی شبکه، الگوی اتصال،

^۱transversality

خواص فعالسازی عصبی و توانایی پردازش داده است. شبکه عصبی مصنوعی یک شکل هیجان‌انگیز از هوش مصنوعی است که از فرایند یادگیری مغز انسان به منظور استخراج داده‌ها تقلید می‌کند. مزیت اصلی شبکه‌های عصبی این است که آن‌ها شامل یک متغیر مستقل، بدون در نظر گرفتن ابعاد مساله هستند و جواب به‌دست آمده از این روش قابل تشخیص و به فرم تحلیلی در می‌آیند.

در این فصل، یک رده از مسائل کنترل بهینه غیرخطی افق نامتناهی برای کنترل سیستم‌های آشوبناک در نظر گرفته شده است. ایده اصلی این است که مساله کنترل بهینه افق نامتناهی آشوبناک را به یک مساله کنترل بهینه با افق متناهی معادل تبدیل کنیم. با توجه به اصل مینیمم پونتریاگین^۲ (PMP) برای مسائل کنترل بهینه و ساختن یک تابع خطا، یک مساله مینیمم‌سازی بدون محدودیت را تعریف می‌کنیم. در مساله بهینه‌سازی از جواب‌های آزمایشی برای توابع حالت و کنترل استفاده می‌کنیم که در آن این جواب‌های آزمایشی با استفاده از پرسپترون دو لایه ساخته شده است. سپس تابع خطا را که شامل همه وزن‌ها و بایاس‌های مرتبط با همه نرون‌ها است را کمینه می‌کنیم. با قرار دادن مقدار بهینه وزن‌ها و بایاس‌ها در جواب آزمایشی، یک جواب برای مساله اصلی به‌دست می‌آوریم. همچنین از یک طرح بهینه‌سازی دینامیکی برای فرایند یادگیری استفاده می‌کنیم و در مورد پایداری و همگرایی آن بحث خواهیم کرد.

۱.۵ بیان مساله

مساله کنترل بهینه زیر را در نظر می‌گیریم

$$\text{minimize } \int_0^{\infty} F_0(X(t), U(t)) dt, \quad (1.5)$$

subject to

$$\begin{cases} \dot{X}_i = G_i(X(t), U(t), t), \\ X_i(0) = X_{i0}, \\ X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))^T \in A \subseteq \mathbb{R}^n, \text{ (فشرده } A), \\ U(t) = (U_1(t), U_2(t), \dots, U_m(t))^T \in B \subseteq \mathbb{R}^m, \text{ (فشرده } B), \end{cases}$$

که در آن $X(t)$ متغیر حالت، $U(t)$ متغیر کنترل، $t \in [0, \infty)$ و توابع $G_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، دارای مشتق جزئی پیوسته مرتبه اول و دوم نسبت به تمام متغیرها باشند.

تغییر متغیرهای زیر برای تبدیل مسئله (۱.۵) به یک مساله افق متناهی که در $\tau \in [0, 1)$

^۲Pontryagin Minimum Principle

تعریف شده است، معرفی می‌شود.

$$t = \frac{\tau^m}{(1-\tau)^n}, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots, \quad t \in [0, \infty), \quad (2.5)$$

$$t = \tan\left(\frac{\pi}{4}\tau + k\pi\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad t \in [0, \infty). \quad (3.5)$$

با استفاده از تغییر متغیر (۲.۵) برای $m = n = 1$ ، مساله (۱.۵)، به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$\text{minimize } \int_0^1 F_0(x(\tau), u(\tau), \frac{\tau}{1-\tau}) \frac{d\tau}{(1-\tau)^2}, \quad (4.5)$$

subject to

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \frac{1}{(1-\tau)^2} G_i(x(\tau), u(\tau), \frac{\tau}{1-\tau}), \\ x_i(0) = X_{i0}, \\ x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in A \subseteq \mathbb{R}^n, \text{ (فشرده } A), \\ u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \in B \subseteq \mathbb{R}^m, \text{ (فشرده } B), \end{cases}$$

که در آن

$$\begin{cases} x(\tau) = X\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right), \\ u(\tau) = U\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right). \end{cases}$$

بنا به مساله (۴.۵) می‌توانیم تابع همیلتونین را به صورت زیر بسازیم

$$H(x(\tau), u(\tau), \lambda(\tau), \tau) = \frac{1}{(1-\tau)^2} \left(F_0\left(\frac{\tau}{1-\tau}, x(\tau), u(\tau)\right) + \lambda(\tau) \cdot G_i\left(\frac{\tau}{1-\tau}, x(\tau), u(\tau)\right) \right), \quad (5.5)$$

که در آن $\lambda_i(\tau) \in \mathbb{R}^n$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ بردار الحاقی است. فرض می‌کنیم متغیرهای بهینه حالت، الحاقی و کنترل را به ترتیب با $x^*(\tau)$, $\lambda^*(\tau)$ ، و $u^*(\tau)$ نمایش دهیم. شرط لازم برای مینیمم کردن تابعی هدف در (۴.۵) برای هر کنترل قابل قبول $u^*(\tau)$ و $\tau \in [0, 1)$ این است که

$$H(x^*(\tau), u^*(\tau), \lambda^*(\tau), \tau) \leq H(x(\tau), u(\tau), \lambda(\tau), \tau). \quad (6.5)$$

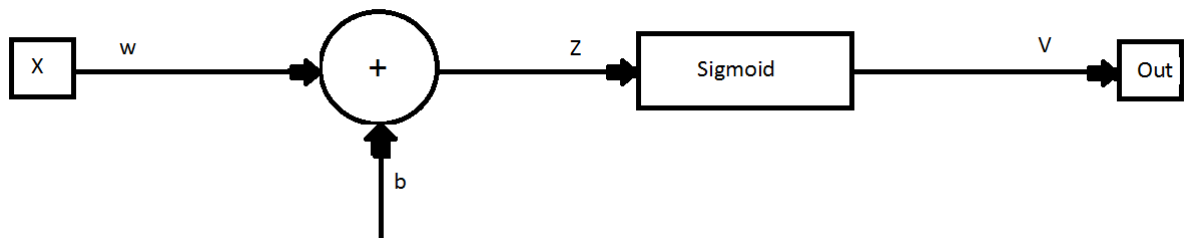
معادله (۶.۵) نشان می‌دهد که کنترل بهینه هامیلتونین باید مینیمم شود که آن را اصل مینیمم پونتریاگین (PMP) می‌گویند [۹۵]. (PMP) شرط لازم برای بهینگی را فراهم می‌کند و نشان می‌دهد که اگر $\lambda(\tau)$, $x(\tau)$ و $u(\tau)$ به ترتیب مقادیر بهینه حالت، الحاقی و کنترل باشند، باید در شرایط زیر صدق کنند

$$\begin{cases} \frac{\partial H(x, u, \lambda, \tau)}{\partial x} = -\dot{\lambda}(\tau), \\ \frac{\partial H(x, u, \lambda, \tau)}{\partial \lambda} = \dot{x}(\tau), \\ \frac{\partial H(x, u, \lambda, \tau)}{\partial u} = 0. \end{cases} \quad (7.5)$$

بدین ترتیب (۷.۵) یک سیستم را تولید می‌کند که می‌تواند با روش‌های عددی و یا سایر روش‌های موجود حل شود. در بخش بعدی، ما سعی می‌کنیم از توانایی‌های شبکه عصبی در تقریب تابع برای حل (۷.۵) استفاده می‌کنیم.

۲.۵ ساختار شبکه عصبی

وزن‌های اولیه روی پرسپترون‌ها را می‌توان در شکل (۱.۵) مشاهده نمود. این موجب می‌شود ما بتوانیم از چند لایه پرسپترون برای تخمین تابع غیرخطی با دقت دلخواه استفاده کنیم [۹۶]. در اینجا W بردار وزن لایه‌های داخلی، b بردار شامل وزن‌های بایاس و V وزن‌های لایه‌ی خروجی است.



شکل ۱.۵: نرون‌های اولیه

می‌توان مشاهده کرد که می‌توانیم خروجی را با استفاده از فرمول زیر محاسبه کنیم

$$\begin{cases} out = \sum_{i=1}^k v_i \sigma(z_i), \\ z_i = \sum_{i=1}^k w_i x + b_i, \end{cases} \quad (۱.۵)$$

که در اینجا k تعداد سیگموئیدهای واحد، w_i پارامتر وزن از ورودی به i - امین واحد پنهان شده، v_i - امین پارامتر وزن از واحد پنهان شده i به لایه خروجی، b_i - امین بایاس برای i - واحد در لایه پنهان شده، z_i ورودی i - امین واحد پنهان شده و σ تابع سیگموئید دلخواه است. تابع تبدیل σ عموماً یک تابع یک بعدی غیرخطی یکنوا (که تابع فعالسازی نام دارد) است، که می‌تواند به آسانی محاسبه شود. در مثال‌های عددی این بخش، تابع سیگموئید زیر در نظر گرفته شده است

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}. \quad (۹.۵)$$

بنابر قضیه کولوموگوروف، می‌توانیم هر تابع پیوسته را با پرسپترون چندلایه ایجاد کنیم. به وسیله این قضیه می‌توانیم از هر شبکه عصبی دلخواه در تخمین تابع استفاده کنیم. برای هر تابع، سه شبکه عصبی در نظر می‌گیریم: حالت (شبکه عصبی متناظر آن n_x)، الحاقی (شبکه عصبی متناظر آن n_λ) و کنترل (شبکه عصبی متناظر آن n_u) که توابع تفکیک‌پذیری

هستند. هر شبکه عصبی شامل پارامترهای قابل تنظیم است که در شکل (۱.۵) می‌توان آن‌ها را مشاهده کرد. ساختار مدل‌های شبکه عصبی باید در شرایط اولیه و مرزی صدق کنند. مدل‌های شبکه عصبی می‌توانند بصورت زیر پیشنهاد شوند:

$$\begin{cases} n_x = \sum_{i=1}^k v_x^i \sigma(z_x^i), & z_x^i = w_x^i t + b_x^i, \\ n_\lambda = \sum_{i=1}^k v_\lambda^i \sigma(z_\lambda^i), & z_\lambda^i = w_\lambda^i t + b_\lambda^i, \\ n_u = \sum_{i=1}^k v_u^i \sigma(z_u^i), & z_u^i = w_u^i t + b_u^i. \end{cases} \quad (10.5)$$

برای $i = 1, 2, \dots, k$ ، که k تعداد عصب‌هایی است که می‌تواند برای هر شبکه عصبی متفاوت باشد.

حال می‌خواهیم از شبکه‌های عصبی (۱۰.۵) استفاده کنیم و جواب آزمایشی را تعریف کنیم. جواب آزمایشی (برای توابع حالت، الحاقی و کنترل) شامل شبکه‌های عصبی است که در شرایط اولیه و مرزی صدق می‌کنند، بنابراین آن‌ها می‌توانند به وسیله ساختار زیر تعریف شوند

$$\begin{cases} x_T = x_o + \tau(1 - \tau)n_x + \tau(x_f - x_o), \\ \lambda_T = n_\lambda, \\ u_T = n_u. \end{cases} \quad (11.5)$$

به راحتی می‌توان بررسی کرد که x_T در شرایط اولیه صدق می‌کند ($x_T(\tau_o) = x_o$). متذکر می‌شویم برای نقاط انتهایی آزاد داریم $\lambda(\cdot) = \circ$. برای مثال، اگر $x(\tau_o)$ آزاد باشد، باید داشته باشیم $\lambda(\tau_o) = \circ$ و بنابراین λ_T در (۱۱.۵) تعریف می‌کنیم $\lambda_T = (\tau - \tau_o)n_\lambda$. برای دیگر شرایط اولیه (یا مرزی) می‌توانیم تابع آزمایشی تخمینی را بسازیم.

به وسیله جایگذاری جواب آزمایشی در تابع هامیلتونین، هامیلتونین آزمایشی H_T را تعریف می‌کنیم که همان تابع هامیلتونین معمولی H با جایگذاری توابع λ و x و u به جای صورت آزمایشی متناظر آن‌ها (x_T, λ_T, u_T)، به صورت زیر حاصل می‌شود

$$H_T = H(x_T(\tau), u_T(\tau), \lambda_T(\tau), \tau)$$

بنابراین تابع هامیلتونین آزمایشی شامل وزن‌های شبکه‌های عصبی است. چون جواب آزمایشی (۱۱.۵) باید در شرایط (۷.۵) صدق کند، با جایگذاری آن‌ها در (۷.۵) داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_T}{\partial x_T} + \dot{\lambda}_T = \circ, \\ \frac{\partial H_T}{\partial \lambda_T} - \dot{x}_T = \circ, \\ \frac{\partial H_T}{\partial u_T} = \circ. \end{cases} \quad (12.5)$$

حال به جای حل معادله (۱۲.۵)، بازه $[0, 1]$ را با τ_k ($k = 1, \dots, m$) نقطه گسسته‌سازی می‌کنیم و مساله بهینه‌سازی زیر را حل می‌کنیم

$$\text{minimize}_y E(y) = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^m E_1(\tau_k, y) + E_2(\tau_k, y) + E_3(\tau_k, y) \quad (13.5)$$

که در آن $y = (w_x, w_\lambda, w_u, b_x, b_\lambda, b_u, v_x, v_\lambda, v_u) \in \mathbb{R}^{3I(2n+m)}$ و

$$\begin{cases} E_1(\tau_k, y) = \left[\frac{\partial H_T}{\partial x_T} + \dot{\lambda}_T \right]^2, & k = 1, 2, \dots, m, \\ E_2(\tau_k, y) = \left[\frac{\partial H_T}{\partial \lambda_T} - \dot{x}_T \right]^2, & k = 1, 2, \dots, m, \\ E_3(\tau_k, y) = \left[\frac{\partial H_T}{\partial u_T} \right]^2, & k = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (14.5)$$

لم ۱.۲.۵. اگر $y^* = (w_x^*, w_\lambda^*, w_u^*, b_x^*, b_\lambda^*, b_u^*, v_x^*, v_\lambda^*, v_u^*)^T$ در رابطه زیر صدق کند

$$\eta(y) = \begin{bmatrix} E_1(\tau_1, y) \\ E_1(\tau_2, y) \\ \vdots \\ E_1(\tau_m, y) \\ E_2(\tau_1, y) \\ E_2(\tau_2, y) \\ \vdots \\ E_2(\tau_m, y) \\ E_3(\tau_1, y) \\ E_3(\tau_2, y) \\ \vdots \\ E_3(\tau_m, y) \end{bmatrix} = 0, \quad (15.5)$$

در این صورت y^* جواب بهینه (۱۴.۵) است.

برهان. فرض می‌کنیم $\eta(y^*) = 0$ باشد. در این صورت $E_i(t_k, y^*) = 0$ برای $i = 1, 2, 3$ و $k = 1, 2, \dots, m$. چون در (۱۳.۵) $E(y) \geq 0$ ، بنابراین y^* جواب بهینه (۱۳.۵) است. □

بنابر لم (۱.۲.۵) می‌توان بررسی کرد که مساله بهینه سازی (۱۳.۵) با مساله زیر هم ارز است

$$\text{minimize}_y E(y) = \frac{1}{3} \|\eta(y)\|^2. \quad (16.5)$$

برای حل (۱۶.۵) که یک مساله بهینه‌سازی نامقید است، می‌توان از الگوریتم‌های بهینه‌سازی مانند تندترین کاهش، نیوتن، شبه‌نیوتن، گرادیان مزدوج و غیره استفاده کرد [۹۷]–[۹۸]. همچنین می‌توانیم از الگوریتم‌های ابتکاری مانند الگوریتم ژنتیک، بهینه‌سازی گروه پرنده‌گان، الگوریتم مورچگان و غیره استفاده کنیم [۹۹].

مزیت اصلی این روش این است که اجرای الگوریتم بسیار پیچیده نیست، و می‌توانیم از لایه‌های پنهانی بیشتری یا نقاط آزمایشی بیشتری روی بازه $[0, 1]$ استفاده کنیم تا دقت تخمین

بیشتری بدست آوریم. در نهایت، جواب حالت، الحاقی و کنترل به صورت تابعی از زمان τ به شکل ۱۱.۵ بدست می‌آید. بنابراین می‌توانیم جواب را در هر نقطه دلخواه روی بازه $[0, 1]$ محاسبه کنیم. همچنین تابع کنترل و حالت، مشتق پذیر هستند که می‌تواند در کاربرد مفید باشد.

۳.۵ الگوریتم آموزش

فرض کنید $v_u(\cdot), v_\lambda(\cdot), v_x(\cdot), b_u(\cdot), b_\lambda(\cdot), b_x(\cdot), w_u(\cdot), w_\lambda(\cdot), w_x(\cdot)$ متغیرهای وابسته زمانی باشند. هدف طراحی یک مدل دینامیکی است که به نقطه تعادل خود، که یک نقطه تعادل از تابع انرژی $E(y)$ می‌باشد میل کند. یک مدل دینامیکی برای حل مساله (۱۶.۵) را به صورت زیر پیشنهاد می‌کنیم:

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -\kappa \nabla E(y(t)), & \kappa > 0, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (17.5)$$

که در آن κ نرخ همگرایی برای (۱۷.۵) می‌باشد. اکنون ما برخی از نتایج اولیه در زمینه معادلات دیفرانسیل معمولی که بعدها مورد استفاده قرار می‌گیرد و در تجزیه و تحلیل‌های بعدی نقش مهمی را ایفا می‌کنند را یادآوری می‌کنیم.

در ادامه مطلب، $\|\cdot\|$ ، نرم L^2 از \mathbb{R}^n ، T ، ترانهاده و $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ اگر $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، تابع مشتق‌پذیری باشد، آنگاه $\nabla F \in \mathbb{R}^n$ ، گرادیان F است. برای هر نگاشت مشتق‌پذیر $\nabla F = [\nabla F_1(x), \dots, \nabla F_m(x)] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ، $F = (F_1, \dots, F_m)^T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ژاکوبین در x است.

تعریف ۱.۳.۵ [۱۰۰] فرض کنید $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ یک همسایگی باز از \bar{x} باشد. به تابع مشتق‌پذیر و پیوسته $\zeta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، یک تابع لیاپانوف در \bar{x} برای سیستم $x' = F(x)$ گفته می‌شود، اگر

$$\begin{cases} \zeta(\bar{x}) = 0, & \zeta(x) > 0, \forall x \in \Omega \setminus \{\bar{x}\}, \\ \frac{d\zeta(x(t))}{dt} = [\nabla \zeta(x(t))]^T F(x(t)) \leq 0, & \forall x \in \Omega. \end{cases}$$

لم ۱.۳.۵ [۱۰۰]

(a) نقطه تعادل ایزوله x^* از سیستم $x' = F(x)$ را پایداری لیاپانوف گوئیم اگر همسایگی Ω^* از x^* روی تابع لیاپانوف وجود داشته باشد.

(b) نقطه تعادل ایزوله x^* از سیستم $x' = F(x)$ را پایدار مجانبی گوئیم هرگاه یک همسایگی Ω^* از x^* روی تابع لیاپانوف وجود داشته باشد به طوری که $\frac{d\zeta(x(t))}{dt} < 0$ ، $\forall x \in \Omega^* \setminus \{x^*\}$.

تعریف ۲.۳.۵. [۱۰۱] فرض کنید $x(t)$ یک مسیر از سیستم $x' = F(x)$ و X^* مجموعه‌ای از نقاط تعادل این سیستم باشد. مسیر $x(t)$ را به مجموعه X^* همگرای سراسری گوئیم اگر $x(t)$ در

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x(t), X^*) = 0,$$

صدق کند، که $\text{dist}(x(t), X^*) = \inf_{y \in X^*} \|x - y\|$. به‌طور خاص، اگر مجموعه X^* فقط شامل نقطه x^* باشد آنگاه $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$ و سیستم در نقطه x^* پایدار مجانبی لیاپانوف است.

لم ۲.۳.۵. [۱۰۱] اگر A یک ماتریس $n \times n$ ناتکین باشد آنگاه دستگاه همگن $AX = 0$ دارای جواب بدیهی $X = 0$ است.

قضیه ۱.۳.۵. [۹۷] مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{minimize } f(x)$$

subject to

$$x \in \mathbb{R}^n,$$

که $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه $x^* \in \mathbb{R}^n$ مشتق‌پذیر باشد. اگر x^* یک جواب موضعی در مسئله بهینه‌سازی باشد، آنگاه $\nabla f(x^*) = 0$ است.

۴.۵ پایداری و همگرایی

قضیه ۱.۴.۵. فرض کنید y^* یک نقطه تعادل از مدل (۱۷.۵) و ماتریس ژاکوبین $\eta(y)$ در (۱۵.۵) معکوس‌پذیر باشد. آنگاه y^* یک جواب بهینه برای (۱۳.۵) است. برعکس، اگر y^* یک جواب بهینه برای (۱۳.۵) باشد، آنگاه y^* یک نقطه تعادل برای (۱۷.۵) است.

برهان. فرض کنید y^* یک نقطه تعادل برای مدل دینامیکی (۱۷.۵) باشد. واضح است که $\nabla E(y^*) = 0$. با یک حساب ساده می‌توانیم نشان دهیم که:

$$\nabla E(y) = (\nabla \eta(y)^T \eta(y)),$$

که $\nabla \eta(y)$ ماتریس ژاکوبین $\eta(y)$ است. طبق لم (۲.۳.۵)، $\eta(y^*) = 0$ ، یعنی اینکه y^* یک جواب بهینه برای (۱۳.۵) است. با استفاده از قضیه (۱.۳.۵)، اثبات تمام است. \square

قضیه ۲.۴.۵. فرض کنید y^* یک نقطه تعادل منفرد برای (۱۷.۵) و ماتریس ژاکوبین $\eta(y)$ ، (۱۵.۵) معکوس‌پذیر باشد. آنگاه y^* برای (۱۷.۵) پایدار مجانبی است.

برهان. ابتدا توجه کنید که $E(y) \geq 0$ و $E(y^*) = 0$ است. علاوه بر این، چون y^* یک نقطه تعادل ایزوله از (۱۷.۵) است، پس یک همسایگی $\Omega^* \subseteq \mathbb{R}^{2(n+m)}$ از y^* وجود دارد به طوری که

$$\nabla E(y^*) = 0, \quad \text{و} \quad \nabla E(y) \neq 0, \quad \forall y \in \Omega^* \setminus \{y^*\}. \quad (18.5)$$

ادعا می‌کنیم که برای هر $y \in \Omega_* \setminus \{y^*\}$ ، $E(y) > 0$ است. در غیر این صورت اگر $y \in \Omega_* \setminus \{y^*\}$ وجود داشته باشد که در $E(y) = 0$ صدق کند آنگاه $\nabla E(y) = 0$ است. یعنی، y نیز یک نقطه تعادل برای (۱۷.۵) است که به وضوح با فرض اینکه y یک نقطه تعادل ایزوله برای Ω_* باشد در تناقض است. علاوه بر این

$$\begin{aligned} \frac{dE(y(t))}{dt} &= \nabla[E(y(t))]^T \frac{dy(t)}{dt} = -\kappa \|\nabla E(y(t))\|^2 \leq 0, \\ \frac{dE(y(t))}{dt} &< 0, \quad \forall y(t) \in \Omega_*, \quad y(t) \neq y^*. \end{aligned}$$

با استفاده از لم (۱.۳.۵) قسمت (b)، y^* به طور مجانبی پایدار است. \square

قضیه ۳.۴.۵. فرض کنید $y = y(t, y_0)$ یک مسیر از (۱۷.۵) در نقطه ابتدایی $y_0 = y(0, y_0)$ باشد و سطح مجموعه $L(y_0) = \{y \in \mathbb{R}^{I(n+m)} : E(y) \leq E(y_0)\}$ کراندار باشد. آنگاه

$$(a) \quad \gamma^+(y_0) = \{y(t, y_0) | t \geq 0\} \text{ کراندار است.}$$

$$(b) \quad \text{وجود دارد } \bar{y} \text{ به طوری که } \lim_{t \rightarrow \infty} y(t, y_0) = \bar{y}.$$

(c) فرض کنید ماتریس ژاکوبین از $\eta(y)$ در (۱۵.۵) ناتکین باشد. آنگاه $\forall y_0 \in \mathbb{R}^{I(n+m)}$ مسیر مربوطه از (۱۷.۵) به یک جواب بهینه از (۱۳.۵) همگرا می‌شود.

برهان. (a) با محاسبه مشتق $E(y)$ در امتداد مسیر برای $y(t, y_0)$ ، $(t \geq 0)$ داریم

$$\frac{dE(y(t))}{dt} = \nabla[E(y(t))]^T \frac{dy(t)}{dt} = -\kappa \|\nabla E(y(t))\|^2 \leq 0. \quad (19.5)$$

بدین ترتیب در امتداد مسیر $y = y(t, y_0)$ ، $(t \geq 0)$ ، یکنواخت کاهشی است. از این رو $\gamma^+(y_0) \subseteq L(y_0)$ ، یعنی $\gamma^+(y_0) = \{y(t, y_0) | t \geq 0\}$ کراندار است.

(b) با استفاده از قسمت (a)، $\gamma^+(y_0) = \{y(t, y_0) | t \geq 0\}$ یک مجموعه کراندار از نقاط است، پس دنباله $\{\bar{t}_n\}$ ، $0 < \bar{t}_1 < \dots < \bar{t}_n \rightarrow \infty$ را یک دنباله اکیدا یکنواخت افزایشی در

نظر بگیرید، آنگاه $\{y(\bar{t}_n, y_0)\}$ دنباله‌ای کراندار است که از بی‌نهایت نقطه تشکیل شده است. بنابراین نقطه حدی \bar{y} وجود دارد، به این معنا که یک زیردنباله $\{t_n\} \subseteq \{\bar{t}_n\}$ وجود دارد به طوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n, y_0) = \bar{y}$ ، که نشان می‌دهد \bar{y} نقطه w -محدود از $\gamma^+(y_0)$ است. با

استفاده از قضیه لسال^۳ [۱۰۰]، $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t, y_0) = \bar{y} \in M$ ، زمانی که $t \rightarrow \infty$ که M بزرگترین مجموعه

$$\text{در } K = \{y(t, y_0) | \frac{dE(y(t, y_0))}{dt} = 0\} \text{ است.}$$

(c) با استفاده از (a) و (b)، \bar{y} یک نقطه تعادل از (۱۷.۵) است. چون $\nabla \eta$ ناتکین است، از (۱۹.۵)

نتیجه می‌شود که

$$\frac{dw_x}{dt} = \frac{dw_p}{dt} = \dots = \frac{dv_u}{dt} = 0 \iff \frac{dE(y(t))}{dt} = 0.$$

بنابراین با استفاده از $M \subseteq K \subseteq D^*$ ، که D^* به عنوان مجموعه جواب‌های بهینه (۱۳.۵) معرفی شده، $\bar{y} \in D^*$ است. در نتیجه از هر نقطه اولیه y_0 ، مسیر $y(t, y_0)$ به یک جواب بهینه

^۳Lassalle

از (۱۳.۵) همگرا می‌شود. قضیه‌های (۲.۴.۵) و (۳.۴.۵) نشان می‌دهند که مدل ارائه شده در (۱۷.۵) به‌طور مجانبی پایدار است و به یک جواب دقیق از (۱۳.۵) همگرا است. به ویژه اگر (۱۳.۵) یک نقطه مینیمم یکتا داشته باشد (یعنی، یک نقطه تعادل منحصر به فرد در (۱۷.۵) وجود داشته باشد)، آنگاه مسیر همگرای سراسری است. □

۵.۵ مثال‌های عددی

در این بخش، سعی می‌کنیم الگوریتم پیشنهادی را با چند مثال نشان دهیم. در همه مثال‌ها از نرم‌افزار GAMS برای شبیه‌سازی استفاده کرده‌ایم.

مثال ۱.۵.۵. سیستم آشوبناک زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2(t) - 1/6 X_1(t) + X_2(t)X_3(t), \\ \dot{X}_2 = 3X_2(t) - X_1(t)X_3(t), \\ \dot{X}_3 = 8X_1(t)X_2(t) - 11X_3(t) - 0/5 X_1^2(t), \\ X_1(0) = -0/5, \quad X_2(0) = 1, \quad X_3(0) = 0/5. \end{cases} \quad (20.5)$$

به منظور کنترل آشوب در سیستم آشوبناک (۲۰.۵) باید کنترل‌های $U_1(t)$ ، $U_2(t)$ و $U_3(t)$ را آن‌چنان تعیین کنیم که

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_i(t) = \bar{X}_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (21.5)$$

این معادل است با حل مساله بهینه‌سازی زیر:

$$\text{minimize } \int_0^\infty [(X_1(t) - \bar{X}_1)^2 + (X_2(t) - \bar{X}_2)^2 + (X_3(t) - \bar{X}_3)^2] dt,$$

subject to

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2(t) - 1/6 X_1(t) + X_2(t)X_3(t) + U_1(t), \\ \dot{X}_2 = 3X_2(t) - X_1(t)X_3(t) + U_2(t), \\ \dot{X}_3 = 8X_1(t)X_2(t) - 11X_3(t) - 0/5 X_1^2(t) + U_3(t), \\ X_1(0) = -0/5, \quad X_2(0) = 1, \quad X_3(0) = 0/5. \end{cases} \quad (22.5)$$

با تغییر متغیر $t = \frac{\tau}{(1-\tau)}$ و فرض

$$\begin{cases} x_i(\tau) = X_i\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right), & i = 1, 2, 3, \\ u_i(\tau) = U_i\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right), & i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

مساله را به فرم زیر بازنویسی می‌کنیم

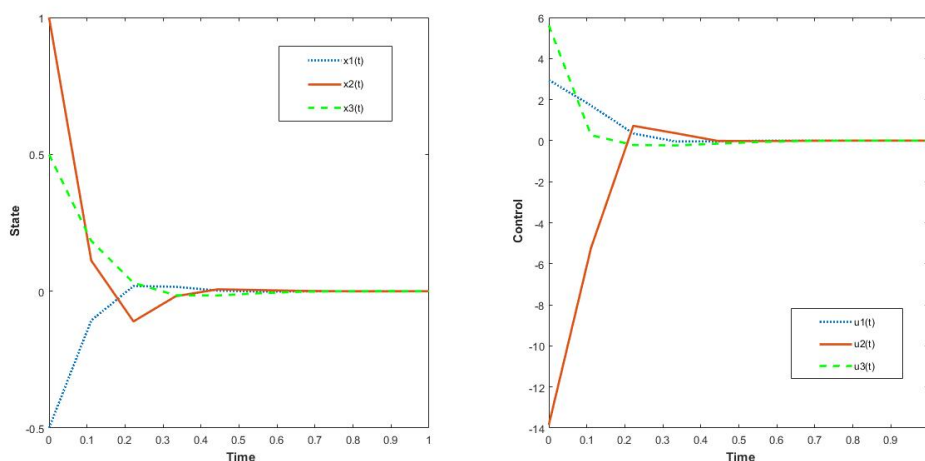
$$\begin{aligned} & \text{minimize} \int_0^1 [(x_1(\tau) - \bar{X}_1)^2 + (x_2(\tau) - \bar{X}_2)^2 + (x_3(\tau) - \bar{X}_3)^2] \frac{d\tau}{(1-\tau)^2}, \\ & \text{subject to} \\ & \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{(1-\tau)^2} [x_2(\tau) - 1/6 x_1(\tau) + x_2(\tau)x_3(\tau)], \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{(1-\tau)^2} [3x_2(\tau) - x_1(\tau)x_3(\tau)], \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{(1-\tau)^2} [\lambda x_1(\tau)x_2(\tau) - 11x_3(\tau) - \circ/5 x_1^2(\tau)], \\ x_1(\circ) = -\circ/5, \quad x_2(\circ) = 1, \quad x_3(\circ) = \circ/5. \end{cases} \end{aligned} \quad (23.5)$$

هامیلتونین (5.5) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{(1-\tau)^2} [(x_1(\tau) - \bar{x}_1)^2 + (x_2(\tau) - \bar{x}_2)^2 + (x_3(\tau) - \bar{x}_3)^2] \\ & + \frac{\lambda_1}{(1-\tau)^2} [x_2(\tau) - 1/6 x_1(\tau) + x_2(\tau)x_3(\tau) + u_1(\tau)] \\ & + \frac{\lambda_2}{(1-\tau)^2} [3x_2(\tau) - x_1(\tau)x_3(\tau) + u_2(\tau)] \\ & + \frac{\lambda_3}{(1-\tau)^2} [\lambda x_1(\tau)x_2(\tau) - 11x_3(\tau) - \circ/5 x_1^2(\tau) + u_3(\tau)]. \end{aligned} \quad (24.5)$$

حال شرایط بهینگی (7.5) را بررسی می‌کنیم

$$\begin{cases} \frac{1}{(1-\tau)^2} [2(x_1(\tau) - \bar{x}_1) - 1/6 \lambda_1 - \lambda_2 x_3(\tau) + \lambda \lambda_3 x_2(\tau) - \lambda_3 x_1(\tau)] = -\dot{\lambda}_1, \\ \frac{1}{(1-\tau)^2} [2(x_2(\tau) - \bar{x}_2) + \lambda_1 - \lambda_1 x_3(\tau) + 3\lambda_2 + \lambda \lambda_3 x_1(\tau)] = -\dot{\lambda}_2, \\ \frac{1}{(1-\tau)^2} [2(x_3(\tau) - \bar{x}_3) + \lambda_1 x_2(\tau) - \lambda_2 x_1(\tau) - 11\lambda_3] = -\dot{\lambda}_3, \\ \frac{1}{(1-\tau)^2} [x_2(\tau) - 1/6 x_1(\tau) + x_2(\tau)x_3(\tau) + u_1(\tau)] = \dot{x}_1, \\ \frac{1}{(1-\tau)^2} [3x_2(\tau) - x_1(\tau)x_3(\tau) + u_2(\tau)] = \dot{x}_2, \\ \frac{1}{(1-\tau)^2} [\lambda x_1(\tau)x_2(\tau) - 11x_3(\tau) - \circ/5 x_1^2(\tau) + u_3(\tau)] = \dot{x}_3, \\ \frac{\lambda_1}{(1-\tau)^2} = \circ, \\ \frac{\lambda_2}{(1-\tau)^2} = \circ, \\ \frac{\lambda_3}{(1-\tau)^2} = \circ. \end{cases}$$

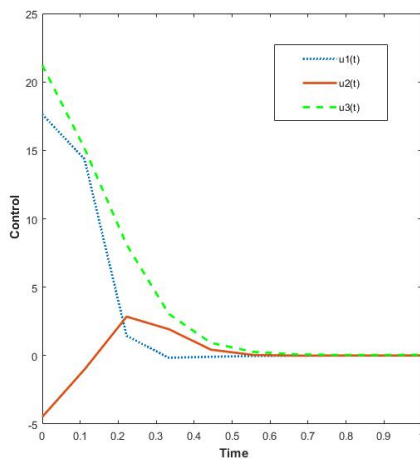
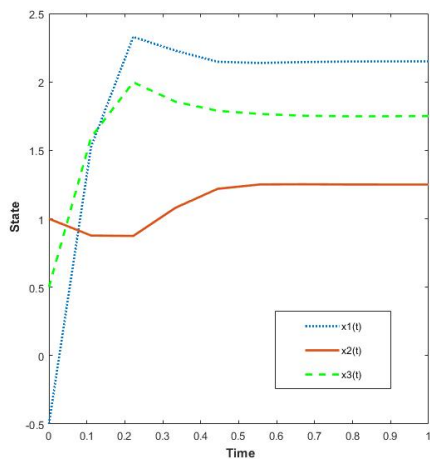


شکل ۲.۵: حالت و کنترل برای نقطه تعادل $E_1 = (0, 0, 0)$

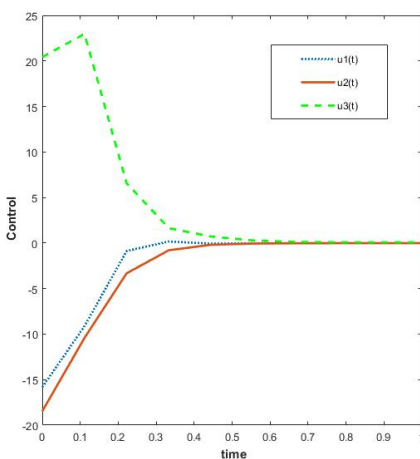
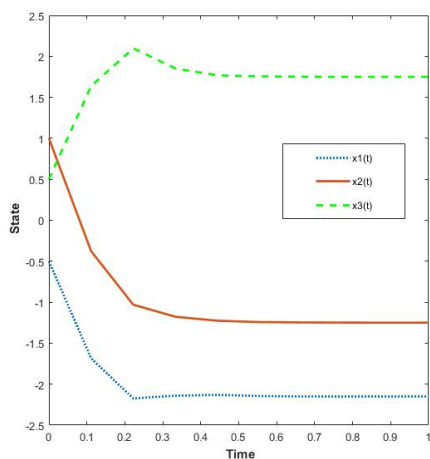
با در نظر گرفتن شرایط اولیه، می‌توانیم جواب‌های آزمایشی را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1T} = -0/5 + \tau n_{x_1}, \\ x_{2T} = 1 + \tau n_{x_2}, \\ x_{3T} = 0/5 + \tau n_{x_3}, \\ \lambda_{1T} = (1 - \tau)n_{\lambda_1}, \\ \lambda_{2T} = (1 - \tau)n_{\lambda_2}, \\ \lambda_{3T} = (1 - \tau)n_{\lambda_3}, \\ u_{1T} = n_{u_1}, \\ u_{2T} = n_{u_2}, \\ u_{3T} = n_{u_3}. \end{array} \right.$$

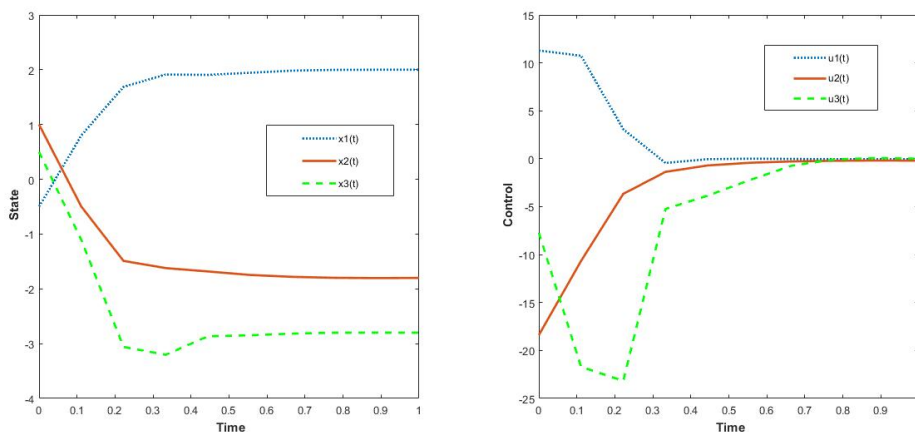
می‌توانیم جواب‌های تقریبی برای $x(t)$ و $u(t)$ برای نقاط تعادل $(E_1 - E_5)$ را به ترتیب در شکل‌های (۲.۵) - (۶.۵) مشاهده کنیم.



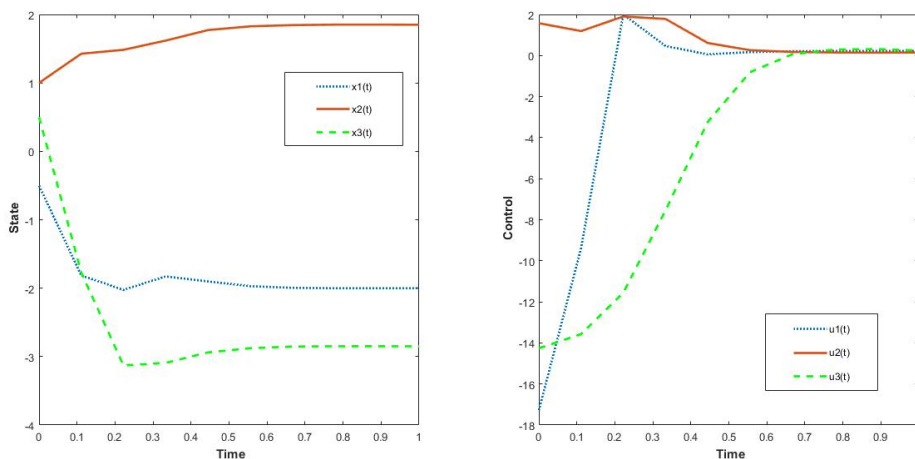
شکل ۳.۵: حالت و کنترل برای نقطه تعادل $E_2 = (2/15, 1/25, 1/75)$



شکل ۴.۵: حالت و کنترل برای نقطه تعادل $E_3 = (-2/1, -1/2, 1/7)$



شکل ۵.۵: حالت و کنترل برای نقطه تعادل $E_{\varphi} = (2, -1/8, -2/7)$



شکل ۶.۵: حالت و کنترل برای نقطه تعادل $E_{\delta} = (2, -1/8, -2/7)$

مثال ۲.۵.۵. سیستم آشوبناک زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = 35(X_2(t) - X_1(t)), \\ \dot{X}_2 = -7X_1(t) - X_1(t)X_3(t) + 28X_2(t), \\ \dot{X}_3 = X_1(t)X_2(t) - 3X_3(t), \\ X_1(0) = -0.5, \quad X_2(0) = 1, \quad X_3(0) = 0.5. \end{cases} \quad (25.5)$$

به منظور کنترل آشوب در سیستم آشوبناک (۲۵.۵) باید کنترل‌های $U_1(t)$ ، $U_2(t)$ و $U_3(t)$ را آن‌چنان تعیین کنیم که

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_i = \bar{X}_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (26.5)$$

این معادل است با حل مساله بهینه‌سازی زیر

$$\text{minimize } \int_0^{\infty} [(X_1(t) - \bar{X}_1)^2 + (X_2(t) - \bar{X}_2)^2 + (X_3(t) - \bar{X}_3)^2] dt,$$

subject to

$$\dot{X}_1 = 35(X_2(t) - X_1(t)) + U_1(t),$$

$$\dot{X}_2 = -7X_1(t) - X_1(t)X_3(t) + 28X_2(t) + U_2(t),$$

$$\dot{X}_3 = X_1(t)X_2(t) - 3X_3(t) + U_3(t),$$

$$X_1(0) = -9, \quad X_2(0) = -5, \quad X_3(0) = 14.$$

با تغییر متغیر $t = \frac{\tau}{(1-\tau)}$ و فرض

$$\begin{cases} x_i(\tau) = X_i\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right), & i = 1, 2, 3, \\ u_i(\tau) = U_i\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right), & i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

مساله را به فرم زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\text{minimize } \int_0^1 \frac{1}{(1-\tau)^2} [(x_1(t) - \bar{X}_1)^2 + (x_2(t) - \bar{X}_2)^2 + (x_3(t) - \bar{X}_3)^2] d\tau,$$

subject to

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{(1-\tau)^2} (35(x_2(\tau) - x_1(\tau)) + u_1(\tau)),$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{(1-\tau)^2} (-7x_1(\tau) - x_1(\tau)x_3(\tau) + 28x_2(\tau) + u_2(\tau)),$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{(1-\tau)^2} (x_1(\tau)x_2(\tau) - 3x_3(\tau) + u_3(\tau)),$$

$$x_1(0) = -0.5, \quad x_2(0) = 1, \quad x_3(0) = 0.5.$$

هامیلتونین (۵.۵) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{(1-\tau)^2} [(x_1(\tau) - \bar{x}_1)^2 + (x_2(\tau) - \bar{x}_2)^2 + (x_3(\tau) - \bar{x}_3)^2] \\
 & + \frac{\lambda_1}{(1-\tau)^2} [3\delta(x_2(\tau) - x_1(\tau))u_1(\tau)] \\
 & + \frac{\lambda_2}{(1-\tau)^2} [-\gamma x_1(\tau) - x_1(\tau)x_3(\tau) + 2\lambda x_2(\tau)] \\
 & + \frac{\lambda_3}{(1-\tau)^2} [x_1(\tau)x_2(\tau) - 3x_3(\tau)].
 \end{aligned} \tag{۲۷.۵}$$

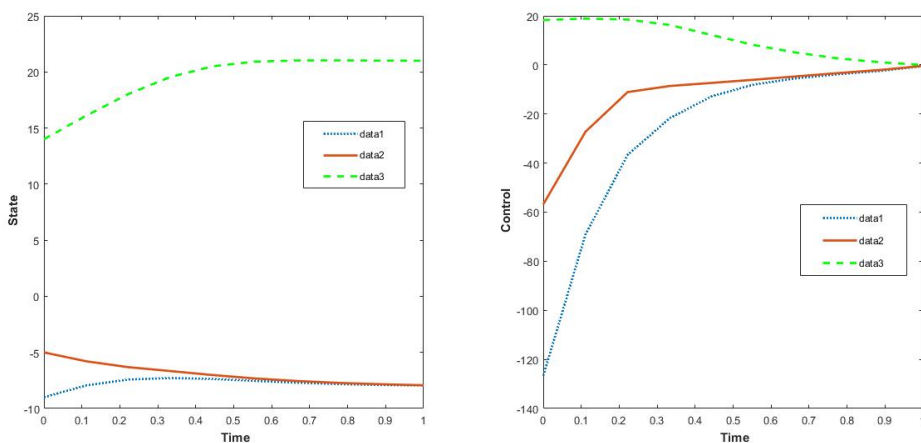
حال شرایط بهینگی (۷.۵) را بررسی می‌کنیم

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{1}{(1-\tau)^2} [2(x_1(\tau) - \bar{x}_1)^2 - 3\delta\lambda_1 - \gamma\lambda_2 - \lambda_2 x_3(\tau)] &= -\dot{\lambda}_1, \\
 \frac{1}{(1-\tau)^2} [2(x_2(\tau) - \bar{x}_2)^2 + 3\delta\lambda_1 - 2\lambda\lambda_2 + \lambda_3 x_1(\tau)] &= -\dot{\lambda}_2, \\
 \frac{1}{(1-\tau)^2} [2(x_3(\tau) - \bar{x}_3)^2 + -\lambda_2 x_1(\tau) - 3\lambda_2] &= -\dot{\lambda}_3, \\
 \frac{1}{(1-\tau)^2} [3\delta(x_2(\tau) - x_1(\tau)) + u_1(\tau)] &= \dot{x}_1, \\
 \frac{1}{(1-\tau)^2} [-\gamma x_1(\tau) - x_1(\tau)x_3(\tau) + 2\lambda x_2(\tau) + u_2(\tau)] &= \dot{x}_2, \\
 \frac{1}{(1-\tau)^2} [x_1(\tau)x_2(\tau) - 3x_3(\tau) + u_3(\tau)] &= \dot{x}_3, \\
 \frac{\lambda_1}{(1-\tau)^2} &= 0, \\
 \frac{\lambda_2}{(1-\tau)^2} &= 0, \\
 \frac{\lambda_3}{(1-\tau)^2} &= 0.
 \end{aligned} \right.$$

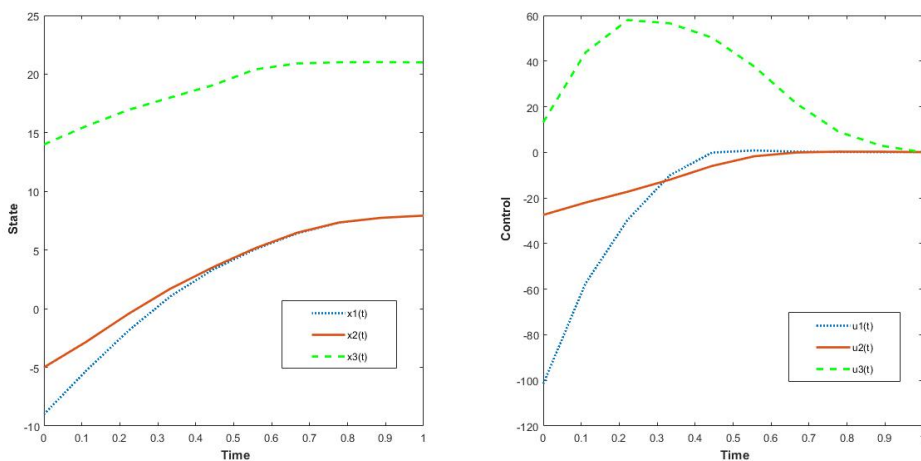
با در نظر گرفتن شرایط اولیه، می‌توانیم جواب‌های آزمایشی را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$\left\{ \begin{aligned}
 x_{1T} &= 0/\delta + \tau n_{x_1}, \\
 x_{2T} &= 1 + \tau n_{x_2}, \\
 x_{3T} &= 0/\delta + \tau n_{x_3}, \\
 \lambda_{1T} &= (1-\tau)n_{\lambda_1}, \\
 \lambda_{2T} &= (1-\tau)n_{\lambda_2}, \\
 \lambda_{3T} &= (1-\tau)n_{\lambda_3}, \\
 u_{1T} &= n_{u_1}, \\
 u_{2T} &= n_{u_2}, \\
 u_{3T} &= n_{u_3}.
 \end{aligned} \right.$$

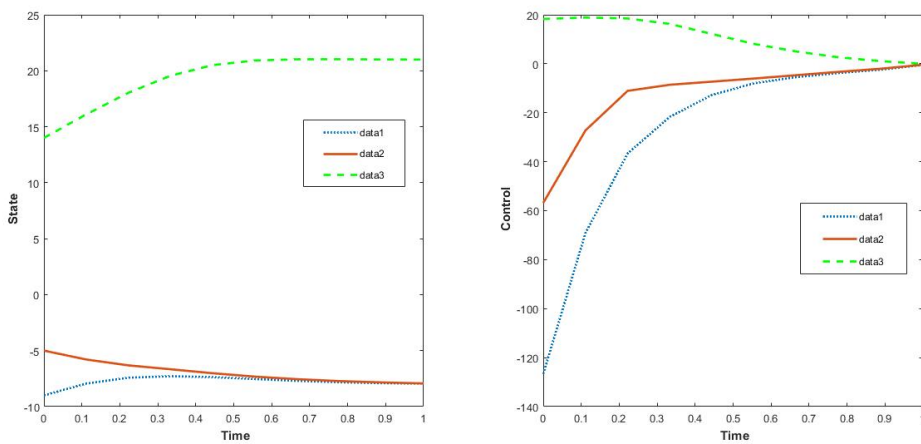
می‌توانیم جواب‌های تقریبی برای $x(t)$ و $u(t)$ برای نقاط تعادل $(E_1 - E_3)$ را به ترتیب در شکل‌های (۷.۵) - (۹.۵) مشاهده کنیم.



شکل ۷.۵: حالت و کنترل برای نقطه تعادل $E_1 = (0, 0, 0)$



شکل ۸.۵: حالت و کنترل برای نقطه تعادل $E_2 = (7/9373, 7/9373, 21)$



شکل ۹.۵: حالت و کنترل برای نقطه تعادل $E_3 = (-7/9373, -7/9373, 21)$

فصل ۶

کنترل سیستم‌های آشوبناک کسری

۱.۶ مقدمه

در طول سه دهه‌ی اخیر موضوع حساب کسری اهمیت و جایگاه ویژه‌ای یافته است و دلیل اصلی آن کاربردهای متنوع آن در زمینه‌های مختلف علم و صنعت است. پیدایش موضوع حساب کسری به سال ۱۶۹۵ میلادی باز می‌گردد به زمانی که هوپیتال به وسیله نامه‌ای از لایبنیتز معنای نماد $\frac{d^n y}{dx^n}$ را برای n های طبیعی می‌پرسد و سپس در مورد اینکه معنای این نماد به ازای $n = \frac{1}{2}$ چه می‌شود. در پاسخ آن ۳۰ سپتامبر ۱۶۹۵، لایبنیتز برای هوپیتال این‌گونه نوشت: "... این یک پارادوکس آشکار است که روزی نتایج مفیدی را به دنبال خواهد داشت. ... [۱۰۲]. با این وجود معادلات دیفرانسیل کسری تنها در دهه اخیر به صورت ویژه مورد توجه قرار گرفته است. علیرغم اینکه در زمان مطرح شدن آن، کاربردهای علمی خاصی برای آن یافت نشده بود، امروزه کاربردهای آن در بسیاری از زمینه‌ها دیده می‌شود و نیز مشخص شده است که بسیاری از سیستم‌ها می‌توانند به طور مناسبی توسط تئوری سیستم‌های مرتبه کسری توضیح داده شوند که در این بخش سیستم‌های آشوبناک مرتبه کسری را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲.۶ تاریخچه حساب کسری

پس از پیدایش حساب کسری این مساله توسط دانشمندان بسیاری مورد مطالعه دقیق قرار گرفت. بعد از لایبنیز محققین دیگر به ادامه و گسترش آن پرداختند. لاگرانژ^۱ در سال ۱۷۷۲ وقتی که سه قانون نمائی را برای اپراتورهای مشتق گسترش داد، به طور غیر مستقیم به حساب کسری کمک کرد. در سال لاپلاس ۱۸۱۲،^۲ مشتق کسری را به وسیله انتگرال تعریف کرد و در ۱۸۱۹ لاکروکس^۳ به مشتق مرتبه کسری اشاره کرد، در ادامه‌ی آن فوریه^۴ در ۱۸۲۲ به مشتق از مرتبه دلخواه اشاره کرد. اولین استفاده از اپراتورهای کسری به وسیله آبل^۵ در سال ۱۸۲۳ در حل مسئله تاتوکرون بوده است. اولین مطالعه جدی روی حساب کسری در سال ۱۸۳۲ توسط لیوویل^۶ صورت گرفت و تعریف‌هایی را در مسائل به کار برد. در سال ۱۸۶۷ گرانولد^۷ روی اپراتورهای مرتبه کسری کار کرد. ریمان^۸ تئوری انتگرال گیری کسری را در زمان تحصیلش گسترش داد و اولین مقاله خود را در سال ۱۸۹۲ منتشر کرد. لتنیکیف^۹ چندین مقاله در این زمینه از سال ۱۸۶۸ تا ۱۸۷۲ نوشت. اولیور هویساید^{۱۰} یک مجموعه مقاله در سال ۱۸۹۲ منتشر کرد، که در آن حساب اپراتورهای هویساید با اپراتورهای تعمیم یافته خطی را نشان داد. حساب کسری می تواند به عنوان یک موضوع دارای قدمت و در عین حال همچنان نوین در نظر گرفته شود. دارای قدمت از آن جهت که شروع آن از برخی تحقیقات نظری لا یبنیز بین سال های ۱۶۹۵ تا ۱۶۹۷ و پس از آن اوپلر در سال ۱۷۳۰ انجام شد و تاکنون به طور فزاینده‌ای توسعه یافته است. هرچند این موضوع می تواند به خوبی به عنوان یک موضوع نوین در نظر گرفته شود.

امروزه تعداد زیادی از کتاب‌ها، مجلات و مقالات به حساب کسری و کاربردهای آن اختصاص دارد، از جمله مدل‌های انرژی غیرجنبشی غیرعادی از فرآیندهای پیچیده که زاسلاوسکی^{۱۱} [۱۰۳] در سال ۲۰۰۵ منتشر شده است. البته در این اثنا کارهای دیگری نیز پدید آمده است. از جمله کتاب‌های منتشر شده [۱۰۴]، [۱۰۵]، [۱۰۶]، [۱۰۷]، هستند.

در حال حاضر کاربردهای حساب کسری به سرعت در حال افزایش است. رشد ریاضیات به ما اجازه توصیف و مدلسازی یک پدیده واقعی با دقتی بیشتر از روش‌های مرتبه صحیح

^۱Lagrange

^۲Laplace

^۳Lacroix

^۴Fourier

^۵Abel

^۶Liouville

^۷Grunwald

^۸Riemann

^۹Letnikov

^{۱۰}Heaviside

^{۱۱}Zasiavsky

کلاسیک می‌دهد. پدیده‌های واقعی عموماً کسری هستند، ولی برای بسیاری از آن‌ها مرتبه کسری بودن خیلی پایین است. دلیل اصلی برای استفاده از مدل‌های مرتبه صحیح، نبود روش‌های حل برای معادلات دیفرانسیل کسری بوده است. در حال حاضر روش‌های بسیاری برای تقریب مشتق و انتگرال کسری وجود دارد و حساب کسری می‌تواند به سادگی در زمینه‌های وسیعی از کاربردها مورد استفاده قرار گیرد.

حساب مرتبه کسری می‌تواند سیستم‌های با دینامیک مرتبه بالاتر و پدیده‌های پیچیده غیرخطی را با استفاده از ضرایب کمتر توصیف کند چون مرتبه دلخواه از مشتقات درجات اضافی از آزادی را برای مدل کردن یک رفتار خاص ارائه می‌دهد.

۳.۶ کنترل بهینه حساب کسری

کنترل بهینه شاخه‌ای از ریاضیات است که طی سال‌های زیادی توسعه یافته است. اما می‌توان گفت که نظریه کنترل بهینه کسری یک موضوع نسبتاً جدید است که طی سال‌های اخیر مورد توجه محققان رشته‌های گوناگون علوم قرار گرفته است. کنترل بهینه کسری، تعمیمی از کنترل بهینه کلاسیک تحت سیستم‌های دینامیکی کسری می‌باشد که با توجه به تعاریف متفاوتی که از مشتقات مرتبه کسری داریم، تعریف می‌شود. با توجه به کارهای ارائه شده این طور برمی‌آید که مهمترین نوع مشتقات مرتبه کسری، ریمان-لیوویل^{۱۲} و کاپاتو^{۱۳} می‌باشند. در سال‌های اخیر کارهای بسیاری در این زمینه توسط محققان ارائه شده است. به عنوان مثال، آگراوال^{۱۴} [۱۰۸] شرایط لازم بهینگی را برای مسائل کنترل بهینه کسری ریمان-لیوویل ارائه کرده است و در [۱۰۹] به فرمول مشابه برای مسائل کنترل بهینه کسری با مفهوم کاپاتو رسید. پوسه^{۱۵} و همکاران [۱۱۰] مسائل کنترل بهینه را حل کرده‌اند که سیستم دینامیکی آن، هم دارای مشتق کسری و هم دارای معمولی است. آلمدیا^{۱۶} و تورس^{۱۷} [۱۱۱] یک روش مستقیم برای حل مسائل کنترل بهینه کسری ارائه داده‌اند که در آن مساله کنترل بهینه کسری را به یک نوع جدید آن که فقط شامل مشتقات معمولی می‌باشد، تبدیل می‌کنند. لطفی و همکاران [۱۱۲] یک روش مستقیم بر پایه چندجمله‌ای‌های برنولی ارائه کردند. آن‌ها با استفاده از خواص چندجمله‌ای‌های برنولی، مساله بهینه‌سازی خود را به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌کنند. از جمله کارهای دیگر در این زمینه می‌توان [۱۱۳]، [۱۱۴]، [۱۱۵]، [۱۱۶] را نام برد.

^{۱۲}Riemann-Liouville

^{۱۳}Caputo

^{۱۴}Agrawal

^{۱۵}Pooseh

^{۱۶}Almedia

^{۱۷}Torres

۴.۶ مشتقات و انتگرال‌های کسری

۱.۴.۶ تابع گاما

یکی از توابع پایه‌ای حساب کسری، تابع گامای اویلر $\Gamma(x)$ است. این تابع تعمیمی از تابع $n!$ می‌باشد و n اعداد ناصحیح و حتی مختلط را نیز اختیار می‌کند و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (1.6)$$

که در نیمه راست صفحه مختلط ($Re(z) > 0$) به یک انتگرال ناسره همگرا می‌شود. همچنین تابع گاما را می‌توان به صورت حدی زیر نیز تعریف کرد [۱۰۵]

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad Re(z) > 0. \quad (2.6)$$

۲.۴.۶ خواص تابع گاما

برخی از خواص تابع گاما به صورت زیر است

$$\Gamma(1) = 1 \quad 1.$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad 2.$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad Re(z) > 0 \quad 3.$$

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N} \quad 4.$$

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n}, \quad Re(z) > -n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad z \notin \{0, -1, \dots\} \quad 5.$$

در خاصیت آخر، نماد پوکهامر است [۱۰۰] و برای $x \in \mathbb{C}$ و عدد صحیح نامنفی n به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(z)_0 = 1, \quad (z)_n = z(z+1)\dots(z+n-1). \quad (3.6)$$

۳.۴.۶ مشتق کسری کاپاتو

فرض کنید $f(\cdot)$ روی بازه $[a, b]$ در \mathbb{R} تعریف شده است. مشتق کسری چپ کاپاتو و مشتق کسری راست کاپاتو تابع $f(\cdot)$ از مرتبه $\alpha > 0$ به ترتیب با نماد ${}_a^C D_t^\alpha f(\cdot)$ و ${}_t^C D_b^\alpha f(\cdot)$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^n(s) ds \right), \quad (4.6)$$

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = \frac{-1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} f^n(s) ds \right), \quad (5.6)$$

که در آن $n = [\alpha] + 1$ و $[\alpha]$ جزء صحیح عدد α می‌باشد.

ملاحظه ۱.۴.۶. اگر $0 < \alpha < 1$ باشد، آن‌گاه

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\int_a^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds \right), \quad t > a, \quad (6.6)$$

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = \frac{-1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\int_t^b (s-t)^{-\alpha} f'(s) ds \right), \quad t < b, \quad (7.6)$$

و اگر $\alpha = 0$ و یا $\alpha = n \in \mathbb{N}$ ، آن‌گاه

$${}_a^C D_t^\circ f(t) = {}_t^C D_b^\circ f(t) = f(t),$$

$${}_a^C D_t^n f(t) = f^{(n)}(t), \quad (8.6)$$

$${}_t^C D_b^n f(t) = (-1)^n f^{(n)}(t),$$

که در آن $f^{(n)}(\cdot)$ مشتق معمولی $f(\cdot)$ از مرتبه n می‌باشد [۱۰۲].

۴.۴.۶ مشتق کسری ریمان-لیوویل

فرض کنید $f(\cdot)$ روی بازه $[a, b]$ در \mathbb{R} تعریف شده باشد. مشتق کسری چپ ریمان-لیوویل و مشتق کسری راست ریمان-لیوویل تابع $f(\cdot)$ از مرتبه $\alpha > 0$ به ترتیب با نماد ${}_a D_t^\alpha f(t)$ و ${}_t D_b^\alpha f(t)$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۰۲]

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \left(\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds \right), \quad t > a, \quad (9.6)$$

$${}_t D_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left(\int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} f(s) ds \right), \quad t < b, \quad (10.6)$$

که در آن $n = [\alpha] + 1$ می‌باشد.

ملاحظه ۲.۴.۶. اگر $0 < \alpha < 1$ باشد، آن‌گاه

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d}{dt} \left(\int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds \right), \quad t > a, \quad (11.6)$$

$${}_t D_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} (-1) \frac{d}{dt} \left(\int_t^b (s-t)^{-\alpha} f(s) ds \right), \quad t < b, \quad (12.6)$$

و اگر $\alpha = 0$ یا $\alpha = n \in \mathbb{N}$ ، آن‌گاه نتیجه مشابه با (۸.۶) به صورت زیر خواهیم داشت

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\circ f(t) &= {}_t D_b^\circ f(t) = f(t), \\ {}_a D_t^n f(t) &= f^{(n)}(t), \\ {}_t D_b^n f(t) &= (-1)^n f^{(n)}(t). \end{aligned} \quad (۱۳.۶)$$

ملاحظه ۳.۴.۶. مشتقات کسری کاپاتو و ریمان-لیوویل با استفاده از رابطه زیر به یکدیگر مرتبط می‌شوند.

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} f(a)(t-a)^{-\alpha} + {}_a^C D_t^\alpha f(t), \quad (۱۴.۶)$$

$${}_t D_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} f(b)(b-t)^{-\alpha} + {}_t^C D_b^\alpha f(t). \quad (۱۵.۶)$$

۵.۴.۶ انتگرال کسری ریمان-لیوویل

فرض کنید $f(\cdot)$ روی بازه $[a, b]$ در \mathbb{R} تعریف شده باشد. انتگرال کسری چپ ریمان-لیوویل و انتگرال کسری راست ریمان-لیوویل تابع $f(\cdot)$ از مرتبه $\alpha > 0$ به ترتیب با نماد ${}_a I_t^{-\alpha} f(t)$ و ${}_t I_b^{-\alpha} f(t)$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود

$${}_a I_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t > a, \quad (۱۶.۶)$$

$${}_t I_b^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t < b, \quad (۱۷.۶)$$

که در آن $n = \alpha > 0$ می‌باشد [۱۰۲].

اگر x یک تابع تحلیلی باشد [۱۰۲]، آنگاه

$${}_a D_t^\alpha(x(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \frac{(t-a)^k - \alpha}{\Gamma(k+1-\alpha)} x^{(k)}(t), \quad (۱۸.۶)$$

که

$$\binom{\alpha}{k} \frac{(-1)^{k-1} \alpha \Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha) \Gamma(1+k)}.$$

از معایب آشکار استفاده از (۱۸.۶) در محاسبات عددی آن است، که برای داشتن یک خطای کوچک، باید تعداد زیادی از جملات را جمع کرد. بنابراین تابع باید دارای مشتقات مرتبه بالاتر باشد که برای کنترل بهینه مناسب نیست. برای مقابله با این مشکل، روش دیگری در [۱۱۰، ۱۱۷] انجام شده است، که تقریب خوبی برای توابع قابل قبول، بدون نیاز به وجود مشتقات مراتب بالاتر است. این روش برای مشتقات کسری ریمان-لیوویل چپ به صورت زیر است

$${}_a D_t^\alpha(x(t)) = A(\alpha)(t-a)^{-\alpha} x(t) + B(\alpha)(t-a)^{1-\alpha} \dot{x}(t) - \sum_{p=2}^{\infty} C(\alpha, p)(t-a)^{1-p-\alpha} V_p(t), \quad (۱۹.۶)$$

که $\alpha \in (0, 1)$ و $x \in C^2[a, b]$ در (۱۹.۶)، $V_p(t)$ جوابی از سیستم

$$\begin{cases} \dot{V}_p(t) = (1-p)(t-a)^{p-2}x(t), \\ V_p(a) = 0. \end{cases} \quad (20.6)$$

برای $p = 2, 3, \dots$ است و A, B و C به صورت زیر بدست می‌آیند

$$A(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[1 + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\Gamma(p-1+\alpha)}{\Gamma(\alpha)(p-1)!} \right],$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Gamma(p-1+\alpha)}{\Gamma(\alpha-1)p!} \right],$$

$$C(\alpha, p) = \frac{\Gamma(p-1+\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(\alpha-1)(p-1)!}.$$

با استفاده از رابطه بین مشتقات کسری کاپاتو و مشتق کسری ریمان-لیوویل داریم

$${}_a^C D_t^\alpha(x(t)) = {}_a D_t^\alpha x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha}. \quad (21.6)$$

می‌توانیم فرمول مشابه به رابطه (۱۹.۶) را برای مشتق کسری کاپاتو پیدا کنیم هنگامی که تعداد جملات مورد بررسی متناهی باشد از تقریب زیر استفاده می‌کنیم [۱۱۸]

(۲۲.۶)

$${}_a D_t^\alpha x(t) \approx A(\alpha, k)(t-a)^{-\alpha}x(t) + B(\alpha, k)(t-a)^{1-\alpha}\dot{x}(t) - \sum_{p=2}^k C(\alpha, p)(t-a)^{1-p-\alpha}V_p(t),$$

که $k \geq 2$ و

$$A(\alpha, k) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[1 + \sum_{p=2}^k \frac{\Gamma(p-1+\alpha)}{\Gamma(\alpha)(p-1)!} \right],$$

$$B(\alpha, k) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[1 + \sum_{p=1}^k \frac{\Gamma(p-1+\alpha)}{\Gamma(\alpha-1)p!} \right].$$

۵.۶ بیان مساله

مساله کنترل بهینه کسری (FOCP)^{۱۸} زیر را در نظر بگیرید

$$\text{minimize } J = \int_0^{\infty} f(t, X(t), U(t)) dt, \quad (23.6)$$

subject to

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha X(t) = g(t, X(t), U(t)), \\ X(0) = X_0, \\ X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)) \in A \subseteq \mathbb{R}^n, \text{ (فشرده } A), \\ U(t) = (U_1(t), U_2(t), \dots, U_n(t)) \in B \subseteq \mathbb{R}^k, \text{ (فشرده } B), \end{cases}$$

$$\begin{cases} X : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ U : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k, \end{cases} \quad (24.6)$$

$$\begin{cases} f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}, \\ g : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (25.6)$$

که در آن $X(t)$ متغیر حالت، $U(t)$ متغیر کنترل و ${}^C D_t^\alpha$ مشتق کسری کاپاتوا از مرتبه α هستند. f و g توابعی پیوسته و مشتق‌پذیر در t و برای هر $t \in [0, \infty)$ ، $f(t) > 0$ است. \hat{X} و \hat{U} یک جواب بهینه برای مساله (۲۳.۶) است اگر برای هر $X \in \mathbb{R}^n$ و $U \in \mathbb{R}^k$

$$\int_0^{\infty} f(t, X(t), U(t)) dt \geq \int_0^{\infty} f(t, \hat{X}(t), \hat{U}(t)) dt. \quad (26.6)$$

ابتدا ${}^C D_t^\alpha X(t)$ را به کمک تقریب (۲۲.۶) در (۲۳.۶) جایگزین می‌کنیم. فرض می‌کنیم $A = A(\alpha, k)$ و $B = B(\alpha, k)$ و $C_p = C(\alpha, k)$. بنابراین

$$\dot{X}(t) = \frac{g(t, X(t), U(t)) - At^{-\alpha}X(t) + \sum_{p=2}^k C_p t^{1-p-\alpha} V_p(t) + \frac{X(0)t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}}{Bt^{1-\alpha}}. \quad (27.6)$$

برای سادگی بردار زیر را تعریف می‌کنیم

$$V(t) = (V_1(t), V_2(t), \dots, V_k(t)), \quad (28.6)$$

و

$$G(t, X(t), V(t), U(t)) = \frac{g(t, X(t), U(t)) - At^{-\alpha}X(t) + \sum_{p=2}^k C_p t^{1-p-\alpha} V_p(t) + \frac{x(0)t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}}{Bt^{1-\alpha}}. \quad (29.6)$$

^{۱۸}fractional optimal control problem (FOCP)

بنابراین مساله کنترل بهینه کسری، (۲۳.۶) از حالت کسری خارج شده و به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$\text{minimize } J = \int_0^{\infty} f(t, X(t), U(t)) dt, \quad (30.6)$$

subject to

$$\begin{cases} \dot{X}_i(t) = G_i(t, X(t), V(t), U(t))^T, & i = 3, 4, \dots \\ \dot{V}_p(t) = (1-p)t^{p-2} X(t), & p = 2, \dots, k, \\ X(0) = X_0, \\ V_p(0) = 0, & p = 2, \dots, k. \end{cases}$$

تغییر متغیر زیر برای تبدیل مسئله (۳۰.۶) به یک مساله افق متناهی که در $\tau \in [0, 1)$ تعریف شده است، معرفی می‌شود.

$$t = \frac{\tau}{(1-\tau)}. \quad (31.6)$$

با استفاده از تغییر متغیر بالا، مساله (۳۰.۶) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\text{minimize } J = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1-\tau)^2} f\left(\frac{\tau}{1-\tau}, x(\tau), u(\tau)\right) dt, \quad (32.6)$$

subject to

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^2} G_i\left(\frac{\tau}{1-\tau}, x_i(\tau), v(\tau), u(\tau)\right), \\ \dot{V}_p(\tau) = \frac{1}{(1-\tau)^2} (1-p) \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{p-2} x(\tau), & p = 2, \dots, k. \\ x(0) = X_0, \\ V_p(0) = 0, & p = 2, \dots, k. \end{cases}$$

که

$$x(\tau) = x\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right), \quad u(\tau) = U\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right), \quad v(\tau) = V\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right), \quad (33.6)$$

برای پیدا کردن کنترل بهینه، ابتدا همیلتونین را برای (۳۲.۶) به صورت زیر بیان می‌کنیم

$$H = \frac{1}{(1-\tau)^2} \left[f\left(\frac{\tau}{1-\tau}, x(\tau), u(\tau)\right) + \lambda G\left(\frac{\tau}{1-\tau}, x(\tau), v(\tau), u(\tau)\right) + \sum_{p=2}^k \Upsilon_p \left((1-p) \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{p-2} x(\tau) \right) \right], \quad (34.6)$$

که λ و Υ_p ، $p = 2, \dots, k$ ضرایب الحاقی هستند.

برای سادگی کار بردارهای $\Upsilon(\tau) = (\Upsilon_2(\tau), \Upsilon_3(\tau), \dots, \Upsilon_k(\tau))$ و $v = (v_2, v_3, \dots, v_k)$ را معرفی می‌کنیم. توجه کنید که H در (۳۴.۶)، $H(x, v, u, \lambda, \Upsilon, \tau)$ است. فرض می‌کنیم

متغیرهای بهینه حالت، کنترل و ضرایب الحاقی به ترتیب $(x^*(\tau), v^*(\tau), u^*(\tau))$ و $\lambda^*(\tau)$ و $\Upsilon^*(\tau)$ نمایش دهیم. شرط لازم برای مینیم کردن تابعی هدف در (۳۲.۶) برای هر کنترل قابل قبول $u^*(t) \in [0, 1)$ است که

$$H(\tau, x^*(\tau), v^*(\tau), u^*(\tau), \lambda^*(\tau), \Upsilon^*(\tau)) \leq H(\tau, x(\tau), v(\tau), u(\tau), \lambda(\tau), \Upsilon(\tau)) \quad (35.6)$$

معادله‌ی (۳۵.۶) نشان می‌دهد که کنترل بهینه هامیلتونین باید مینیم شود که آن را (PMP) (اصل مینیم پونتریاگین) می‌گویند [۹۵]. (PMP) شرط لازم برای بهینگی را فراهم می‌کند و نشان می‌دهد که اگر $(x(\tau), v(\tau), u(\tau))$ و $(\lambda(\tau), \Upsilon(\tau))$ به ترتیب مقادیر بهینه حالت، کنترل و ضرایب الحاقی باشند، باید در شرایط زیر صدق کنند

$$\begin{cases} \frac{\partial H(\tau, x, v, u, \lambda, \Upsilon)}{\partial x} = -\dot{\lambda}(t), \\ \frac{\partial H(\tau, x, v, u, \lambda, \Upsilon)}{\partial v} = -\dot{\Upsilon}(t), \\ \frac{\partial H(\tau, x, v, u, \lambda, \Upsilon)}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial H(\tau, x, v, u, \lambda, \Upsilon)}{\partial \lambda} = \dot{x}(t), \\ \frac{\partial H(\tau, x, v, u, \lambda, \Upsilon)}{\partial \Upsilon} = \dot{v}(t). \end{cases} \quad (36.6)$$

بدین ترتیب (۳۶.۶) یک سیستم را تولید می‌کند که می‌تواند با روش‌های عددی و یا سایر روش‌های موجود حل شود. در بخش بعدی، ما سعی می‌کنیم از توانایی‌های شبکه عصبی در تقریب تابع برای حل (۳۶.۶) استفاده کنیم.

۶.۶ ساختار شبکه عصبی

واضح است که می‌توانیم خروجی شبکه عصبی دولایه را به صورت زیر محاسبه کنیم

$$\begin{cases} out = \sum_{i=1}^k \nu_i \sigma(z_i), \\ z_i = \sum_{i=1}^k w_i x + b_i, \end{cases} \quad (37.6)$$

که در اینجا k تعداد سیگموئیدهای واحد، w_i پارامتر وزن از ورودی به i - امین واحد پنهان شده، ν_i ، i - امین پارامتر وزن از واحد پنهان شده i به لایه خروجی، b_i ، i - امین بایاس برای i واحد در لایه پنهان شده، z_i ، ورودی i - امین واحد پنهان شده و σ تابع سیگموئید دلخواه است. تابع تبدیل σ عموماً یک تابع یک بعدی غیرخطی یکنوا (که تابع فعالسازی نام دارد) است، که می‌تواند به آسانی محاسبه شود. در مثال‌های عددی این بخش، تابع سیگموئید زیر در نظر گرفته شده است

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}. \quad (38.6)$$

واضح است که هر تابع به اندازه کافی هموار را می‌توانیم روی مجموعه‌های فشرده با استفاده از شبکه عصبی دولایه با وزن‌های مناسب، تقریب بزنیم [۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱] این نتایج نشان می‌دهد که هر تابع پیوسته را می‌توان با استفاده از ترکیبی از توابع سیگموئید تقریب زد. می‌دانیم که شبکه‌های عصبی ویژگی تقریبی جامع دارند. بنا به این حقیقت، از توانایی‌های شبکه عصبی در تقریب تابع، برای تقریب زدن توابع حالت، کنترل و الحاقی برای مساله کنترل بهینه استفاده می‌کنیم.

برای هر تابع، سه شبکه عصبی در نظر می‌گیریم: حالت (شبکه‌ی عصبی متاظر آن n_x و n_v)، الحاقی (شبکه‌ی عصبی متاظر آن n_λ و n_Υ) و کنترل (شبکه‌ی عصبی متاظر آن n_u) که توابع تفکیک پذیری هستند. مدل‌های شبکه عصبی برای مساله کنترل بهینه (۳۲.۶) می‌توانند به صورت زیر پیشنهاد شوند

$$\begin{cases} n_x = \sum_{i=1}^I \nu_x^i \sigma(z_x^i) & ; z_x^i = w_x^i t + b_x^i, \\ n_v = \sum_{i=1}^I \nu_v^i \sigma(z_v^i) & ; z_v^i = w_v^i t + b_v^i, \\ n_u = \sum_{i=1}^I \nu_u^i \sigma(z_u^i) & ; z_u^i = w_u^i t + b_u^i, \\ n_\lambda = \sum_{i=1}^I \nu_\lambda^i \sigma(z_\lambda^i) & ; z_\lambda^i = w_\lambda^i t + b_\lambda^i, \\ n_\Upsilon = \sum_{i=1}^I \nu_\Upsilon^i \sigma(z_\Upsilon^i) & ; z_\Upsilon^i = w_\Upsilon^i t + b_\Upsilon^i. \end{cases} \quad (39.6)$$

که I برای $i = 1, 2, \dots, I$ تعداد عصب‌هایی است که می‌تواند برای هر شبکه عصبی متفاوت باشد و σ تابع فعالسازی (۳۸.۶) است. حال می‌خواهیم از شبکه‌های عصبی (۳۹.۶) استفاده کنیم و جواب‌های آزمایشی را تعریف کنیم. جواب آزمایشی (برای توابع حالت، الحاقی و کنترل) شامل شبکه‌های عصبی است که در شرایط اولیه و مرزی صدق می‌کنند، بنابراین آن‌ها می‌توانند به وسیله‌ی ساختار زیر تعریف شوند

$$\begin{cases} x_T = x_o + \tau(1 - \tau)n_x + \tau(x_f - x_o), \\ v_\tau = \tau n_v, \\ u_\tau = n_u, \\ \lambda_\tau = (1 - \tau)n_\lambda, \\ \Upsilon_\tau = (1 - \tau)n_\Upsilon. \end{cases} \quad (40.6)$$

به وسیله جایگذاری جواب آزمایشی در تابع هامیلتونین، هامیلتونین آزمایشی H_T را تعریف می‌کنیم که همان تابع هامیلتونین معمولی H با جایگذاری توابع x, v, u, λ و Υ به جای صورت

آزمایشی متناظر آن‌ها $(x_T, v_T, u_T, \lambda_T, \Upsilon_T)$ ، به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$H_T(\tau, x_T(\tau), v_T(\tau), u_T(\tau), \lambda_T(\tau), \Upsilon_T(\tau)) = \frac{1}{(1-\tau)^2} \left[f\left(\frac{\tau}{1-\tau}, x_T(\tau), u_T(\tau)\right) + \lambda G\left(\frac{\tau}{1-\tau}, x_T(\tau), v_T(\tau), u_T(\tau)\right) + \sum_{p=2}^k \Upsilon_T(\tau) \left((1-p) \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{p-2} x_T(\tau) \right) \right]. \quad (41.6)$$

بنابراین تابع هامیلتونین آزمایشی شامل وزن‌های شبکه‌های عصبی است. چون جواب آزمایشی (40.6) باید در شرایط (36.6) صدق کند، با جایگذاری آن‌ها در (36.6) داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_T}{\partial x_T} + \dot{\lambda}_T = 0, \\ \frac{\partial H_T}{\partial v_T} + \dot{\Upsilon}_T = 0, \\ \frac{\partial H_T}{\partial u_T} = 0, \\ \frac{\partial H_T}{\partial \lambda_T} - \dot{x}_T = 0, \\ \frac{\partial H_T}{\partial \Upsilon_T} - \dot{v}_T = 0. \end{cases} \quad (42.6)$$

حال به جای حل معادله (42.6) ، بازه $[0, 1)$ را با $\tau_k, (k = 1, \dots, m)$ نقطه گسسته‌سازی می‌کنیم و مساله بهینه‌سازی زیر را حل می‌کنیم

$$\text{minimize}_y E(y) = \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^m E_{\lambda}(\tau_k, y) + E_{\Upsilon}(\tau_k, y) + E_{\Upsilon'}(\tau_k, y) + E_{\Upsilon''}(\tau_k, y) + E_{\Delta}(\tau_k, y) \quad (43.6)$$

که در آن $y = (w_x, w_{\lambda}, w_u, w_v, w_{\Upsilon}, b_x, b_{\lambda}, b_u, b_v, b_{\Upsilon}, v_x, v_{\lambda}, v_u, v_v, v_{\Upsilon},) \in \mathbb{R}^{\Delta I(2n+m)}$

$$\begin{cases} E_{\lambda}(\tau_k, y) = \left[\frac{\partial H_T}{\partial x_T} + \dot{\lambda}_T \right]^2, & k = 1, 2, \dots, m, \\ E_{\Upsilon}(\tau_k, y) = \left[\frac{\partial H_T}{\partial v_T} + \dot{\Upsilon}_T \right]^2, & k = 1, 2, \dots, m, \\ E_{\Upsilon'}(\tau_k, y) = \left[\frac{\partial H_T}{\partial \lambda_T} - \dot{x}_T \right]^2, & k = 1, 2, \dots, m, \\ E_{\Upsilon''}(\tau_k, y) = \left[\frac{\partial H_T}{\partial u_T} \right]^2, & k = 1, 2, \dots, m, \\ E_{\Delta}(\tau_k, y) = \left[\frac{\partial H_T}{\partial \Upsilon_T} - \dot{v}_T \right]^2, & k = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (44.6)$$

لم ۱.۶.۶. اگر $y^* = (w^*_x, w^*_{\lambda}, w^*_u, w^*_v, w^*_{\Upsilon}, b^*_x, b^*_{\lambda}, b^*_u, b^*_v, b^*_{\Upsilon}, v^*_x, v^*_{\lambda}, v^*_u, v^*_v, v^*_{\Upsilon},)$

در فرمول زیر صدق کند

$$\eta(y) = \begin{bmatrix} E_1(\tau_1, y) \\ \vdots \\ E_1(\tau_m, y) \\ E_2(\tau_1, y) \\ \vdots \\ E_2(\tau_m, y) \\ E_3(\tau_1, y) \\ \vdots \\ E_3(\tau_m, y) \\ E_4(\tau_1, y) \\ \vdots \\ E_4(\tau_m, y) \\ E_5(\tau_1, y) \\ \vdots \\ E_5(\tau_m, y) \end{bmatrix} = 0, \quad (45.6)$$

در اینصورت y^* جواب بهینه (۴۴.۶) است.

برهان. فرض کنیم $\eta(y^*) = 0$ در این صورت $E_i(t_k, y^*) = 0$ برای $i = 1, 2, 3, 4, 5$ و $k = 1, 2, \dots, m$ چون در (۴۳.۶) $E(y) \geq 0$ ، بنابراین y^* جواب بهینه (۴۳.۶) است. \square

بنابر لم (۱.۶.۶) می‌توان بررسی کرد که مساله بهینه‌سازی (۴۳.۶) با مساله زیر هم‌ارز است

$$\text{minimize}_y E(y) = \frac{1}{2} \|\eta(y)\|^2. \quad (46.6)$$

برای حل (۴۶.۶) که یک مساله بهینه‌سازی نامقید است، می‌توان از الگوریتم‌های بهینه‌سازی مانند تندترین کاهش، نیوتن، شبه‌نیوتن، گرادیان مزدوج و غیره استفاده کرد [۹۷]–[۹۸]. همچنین می‌توانیم از الگوریتم‌های ابتکاری مانند الگوریتم ژنتیک، بهینه‌سازی گروه پرنده‌گان، الگوریتم مورچگان و غیره استفاده کنیم.

۷.۶ مثال‌های عددی

در این بخش، سعی می‌کنیم الگوریتم پیشنهادی را با چند مثال نشان دهیم. در همه مثال‌ها از نرم‌افزار (MATLAB) برای شبیه‌سازی استفاده کرده‌ایم.

مثال ۱.۷.۶. سیستم آشوبناک کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha X_1(t) = 35(X_2(t) - X_1(t)), \\ {}^C D_t^\alpha X_2(t) = -7X_1(t) - X_1(t)X_3(t) + 28X_2(t), \\ {}^C D_t^\alpha X_3(t) = X_1(t)X_2(t) - 3X_3(t), \\ X_1(0) = -9, \quad X_2(0) = -5, \quad X_3(0) = 14. \end{cases} \quad (47.6)$$

به منظور کنترل آشوب در سیستم آشوبناک (۴۷.۶) باید کنترل‌های $U_1(t)$ ، $U_2(t)$ و $U_3(t)$ را آن‌چنان تعیین کنیم که

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_i(t) = \bar{X}_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (48.6)$$

این معادل است با حل مساله بهینه‌سازی زیر

$$\text{minimize } \int_0^\infty [(X_1(t) - \bar{X}_1)^2 + (X_2(t) - \bar{X}_2)^2 + (X_3(t) - \bar{X}_3)^2] dt,$$

subject to

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha X_1(t) = 35(X_2(t) - X_1(t)) + U_1(t), \\ {}^C D_t^\alpha X_2(t) = -7X_1(t) - X_1(t)X_3(t) + 28X_2(t) + U_2(t), \\ {}^C D_t^\alpha X_3(t) = X_1(t)X_2(t) - 3X_3(t) + U_3(t), \\ X_1(0) = -9, \quad X_2(0) = -5, \quad X_3(0) = 14. \end{cases}$$

با استفاده از (۳۱.۶)، (۲۲.۶) و

$$\begin{cases} x_i(\tau) = X_i\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right), & i = 1, 2, 3, \\ u_i(\tau) = U_i\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right), & i = 1, 2, 3, \\ v_i(\tau) = V_i\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right), & i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

مساله (۲۲.۵) را برای $(p = ۲, ۳)$ ، به فرم زیر بازنویسی می‌کنیم،

$$\text{minimize } \int_0^1 \frac{1}{(1-\tau)^2} [(x_1(\tau) - \bar{X}_1)^2 + (x_2(\tau) - \bar{X}_2)^2 + (x_3(\tau) - \bar{X}_3)^2] d\tau, \quad (۴۹.۶)$$

subject to

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{1}{(1-\tau)^2 B(\frac{\tau}{1-\tau})^{1-\alpha}} \left(C_2 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-1-\alpha} v_{21}(\tau) + C_3 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-2-\alpha} v_{31}(\tau) \right. \\ \left. - (A \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-\alpha} + 35) x_1(\tau) + 35 x_2(\tau) + u_1(\tau) \right), \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{(1-\tau)^2 B(\frac{\tau}{1-\tau})^{1-\alpha}} \left(C_2 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-1-\alpha} v_{21}(\tau) + C_3 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-2-\alpha} v_{31}(\tau) \right. \\ \left. + (28 - A \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-\alpha}) x_2(\tau) - 7 x_1(\tau) - x_1(\tau) x_3(\tau) + u_2(\tau) \right), \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{(1-\tau)^2 B(\frac{\tau}{1-\tau})^{1-\alpha}} \left(C_2 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-1-\alpha} v_{21}(\tau) + C_3 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-2-\alpha} v_{31}(\tau) \right. \\ \left. - (A \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-\alpha} + 3) x_3 + x_1(\tau) x_2(\tau) + u_3(\tau) \right), \\ \dot{v}_{21}(t) = -\frac{1}{(1-\tau)^2} x_1(\tau), \\ \dot{v}_{22}(t) = -\frac{1}{(1-\tau)^2} x_2(\tau), \\ \dot{v}_{23}(t) = -\frac{1}{(1-\tau)^2} x_3(\tau), \\ \dot{v}_{31}(t) = -\frac{2\tau}{(1-\tau)^3} x_1(\tau), \\ \dot{v}_{32}(t) = -\frac{2\tau}{(1-\tau)^3} x_1(\tau), \\ \dot{v}_{33}(t) = -\frac{2\tau}{(1-\tau)^3} x_1(\tau), \\ x_1(0) = -9, \quad x_2(0) = -5, \quad x_3(0) = 14, \\ v_{21}(0) = 0, \quad v_{22}(0) = 0, \quad v_{23}(0) = 0, \\ v_{31}(0) = 0, \quad v_{32}(0) = 0, \quad v_{33}(0) = 0.* \end{array} \right.$$

فرض می‌کنیم $h = \frac{1}{(1-\tau)^2}$ و $K = \frac{1}{(1-\tau)^2 B(\frac{\tau}{1-\tau})^{1-\alpha}}$ هامیلتونین (۳۴.۶) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\begin{aligned} H = & h \left[(x_1(\tau) - \bar{X}_1)^2 + (x_2(\tau) - \bar{X}_2)^2 + (x_3(\tau) - \bar{X}_3)^2 \right] \\ & + \lambda_1 K \left[C_2 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-1-\alpha} v_{21}(\tau) + C_3 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-2-\alpha} v_{31}(\tau) \right. \\ & \left. - (A \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-\alpha} + 35) x_1(\tau) + 35 x_2(\tau) + u_1(\tau) \right] \\ & + \lambda_2 K \left[C_2 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-1-\alpha} v_{21}(\tau) + C_3 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-2-\alpha} v_{31}(\tau) \right. \\ & \left. + (28 - A \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-\alpha}) x_2(\tau) - 7 x_1(\tau) - x_1(\tau) x_3(\tau) + u_2(\tau) \right] \\ & + \lambda_3 K \left[C_2 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-1-\alpha} v_{21}(\tau) + C_3 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-2-\alpha} v_{31}(\tau) \right. \end{aligned}$$

$$- (A(\frac{\tau}{1-\tau})^{-\alpha} + \Upsilon) x_{\Upsilon} + x_1(\tau) x_{\Upsilon}(\tau) + u_{\Upsilon}(\tau) \Big] \quad (50.6)$$

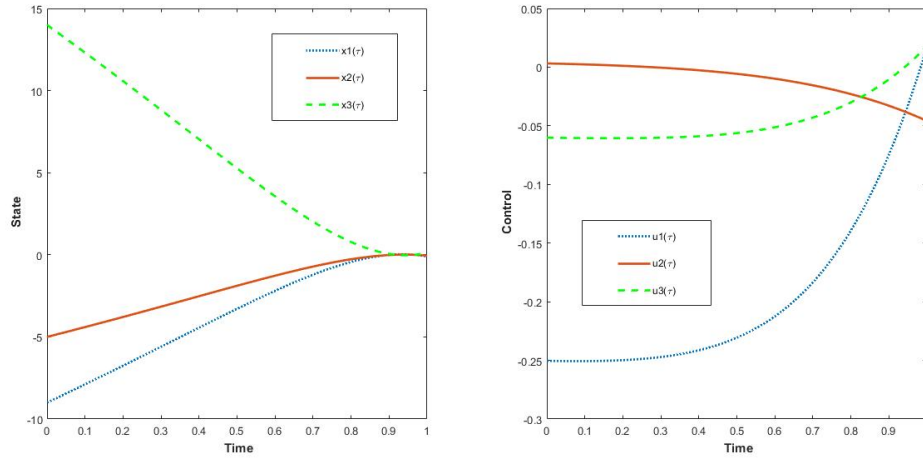
حال شرایط بهینگی (۳۶.۶) را بررسی می‌کنیم
(51.6)

$$\left\{ \begin{array}{l} \Upsilon h(x_1(\tau) - \bar{x}_1)^{\Upsilon} - \lambda_1 K (A(\frac{\tau}{1-\tau})^{-\alpha} + \Upsilon \Delta) - \Upsilon \lambda_{\Upsilon} K - \lambda_{\Upsilon} K x_{\Upsilon}(\tau) + \lambda_{\Upsilon} K x_{\Upsilon}(\tau) - h \Upsilon_1 \\ - \frac{\Upsilon \tau}{1-\tau} \Upsilon_{\epsilon} = -\dot{\lambda}_1, \\ \Upsilon h(x_{\Upsilon}(\tau) - \bar{x}_{\Upsilon})^{\Upsilon} + \Upsilon \Delta \lambda_1 K - \Upsilon \lambda_{\Upsilon} K (\Upsilon \Lambda - A(\frac{\tau}{1-\tau})^{-\alpha}) + \lambda_{\Upsilon} K x_1(\tau) - h \Upsilon_{\Upsilon} - \frac{\Upsilon \tau}{1-\tau} \Upsilon_{\Delta} = -\dot{\lambda}_{\Upsilon}, \\ \Upsilon h(x_{\Upsilon}(\tau) - \bar{x}_{\Upsilon})^{\Upsilon} - \lambda_{\Upsilon} K x_1(\tau) - \lambda_{\Upsilon} K (A(\frac{\tau}{1-\tau})^{-\alpha} + \Upsilon) - h \Upsilon_{\Upsilon} - \frac{\Upsilon \tau}{1-\tau} \Upsilon_{\epsilon} = -\dot{\lambda}_{\Upsilon}, \\ h [C_{\Upsilon} (\frac{\tau}{1-\tau})^{-1-\alpha} v_{\Upsilon 1}(\tau) + C_{\Upsilon} (\frac{\tau}{1-\tau})^{-\Upsilon-\alpha} v_{\Upsilon 1}(\tau) - (A(\frac{\tau}{1-\tau})^{-\alpha} + \Upsilon \Delta) x_1(\tau) + \Upsilon \Delta x_{\Upsilon}(\tau) + u_1(\tau)] = \dot{x}_1, \\ h [C_{\Upsilon} (\frac{\tau}{1-\tau})^{-1-\alpha} v_{\Upsilon 1}(\tau) + C_{\Upsilon} (\frac{\tau}{1-\tau})^{-\Upsilon-\alpha} v_{\Upsilon 1}(\tau) + (\Upsilon \Lambda - A(\frac{\tau}{1-\tau})^{-\alpha}) x_{\Upsilon}(\tau) - \Upsilon x_1(\tau) - x_1(\tau) x_{\Upsilon}(\tau) \\ + u_{\Upsilon}(\tau)] = \dot{x}_{\Upsilon}, \\ h [C_{\Upsilon} (\frac{\tau}{1-\tau})^{-1-\alpha} v_{\Upsilon 1}(\tau) + C_{\Upsilon} (\frac{\tau}{1-\tau})^{-\Upsilon-\alpha} v_{\Upsilon 1}(\tau) - (A(\frac{\tau}{1-\tau})^{-\alpha} + \Upsilon) x_{\Upsilon} + x_1(\tau) x_{\Upsilon}(\tau) + u_{\Upsilon}(\tau)] \\ = \dot{x}_{\Upsilon}, \\ \lambda_1 K C_{\Upsilon} (\frac{\tau}{1-\tau})^{-1-\alpha} = -\dot{\Upsilon}_1, \\ \lambda_{\Upsilon} K C_{\Upsilon} (\frac{\tau}{1-\tau})^{-1-\alpha} = -\dot{\Upsilon}_{\Upsilon}, \\ \lambda_{\Upsilon} K C_{\Upsilon} (\frac{\tau}{1-\tau})^{-1-\alpha} = -\dot{\Upsilon}_{\Upsilon}, \\ \lambda_1 K C_{\Upsilon} (\frac{\tau}{1-\tau})^{-1-\alpha} = -\dot{\Upsilon}_{\epsilon}, \\ \lambda_{\Upsilon} K C_{\Upsilon} (\frac{\tau}{1-\tau})^{-1-\alpha} = -\dot{\Upsilon}_{\Delta}, \\ \lambda_{\Upsilon} K C_{\Upsilon} (\frac{\tau}{1-\tau})^{-1-\alpha} = -\dot{\Upsilon}_{\epsilon}, \\ -h x_1 = \dot{v}_{\Upsilon 1}, \\ -h x_1 = \dot{v}_{\Upsilon 2}, \\ -h x_1 = \dot{v}_{\Upsilon 3}, \\ \frac{-\Upsilon \tau}{1-\tau} \Upsilon^{\Upsilon} = \dot{v}_{\Upsilon 1}, \\ \frac{-\Upsilon \tau}{1-\tau} \Upsilon^{\Upsilon} = \dot{v}_{\Upsilon 2}, \\ \frac{-\Upsilon \tau}{1-\tau} \Upsilon^{\Upsilon} = \dot{v}_{\Upsilon 3}, \\ \frac{\lambda_1}{(1-\tau)^{\Upsilon}} = 0, \\ \frac{\lambda_{\Upsilon}}{(1-\tau)^{\Upsilon}} = 0, \\ \frac{\lambda_{\Upsilon}}{(1-\tau)^{\Upsilon}} = 0 \end{array} \right.$$

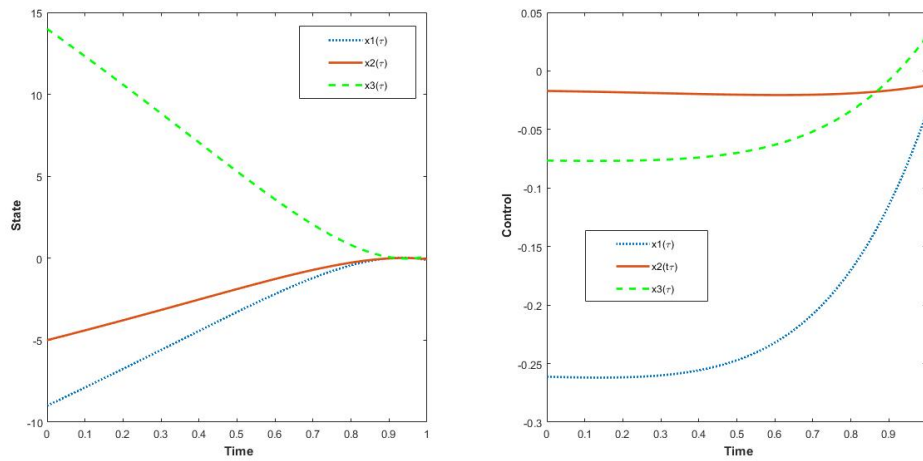
با در نظر گرفتن شرایط اولیه، می‌توانیم جواب‌های آزمایشی را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1T} = -9 + \tau n_{x_1} \\ x_{2T} = -5 + \tau n_{x_2} \\ x_{3T} = 14 + \tau n_{x_3} \\ v_{21T} = \tau n_{v_{21}}, \\ v_{22T} = \tau n_{v_{22}}, \\ v_{23T} = \tau n_{v_{23}}, \\ v_{31T} = \tau n_{v_{31}}, \\ v_{32T} = \tau n_{v_{32}}, \\ v_{33T} = \tau n_{v_{33}}, \\ \lambda_{1T} = (1 - \tau)n_{\lambda_1} \\ \lambda_{2T} = (1 - \tau)n_{\lambda_2} \\ \lambda_{3T} = (1 - \tau)n_{\lambda_3} \\ \Upsilon_{1T} = (1 - \tau)n_{\Upsilon_1} \\ \Upsilon_{2T} = (1 - \tau)n_{\Upsilon_2} \\ \Upsilon_{3T} = (1 - \tau)n_{\Upsilon_3} \\ u_{1T} = n_{u_1} \\ u_{2T} = n_{u_2} \\ u_{3T} = n_{u_3} \end{array} \right. \quad (52.6)$$

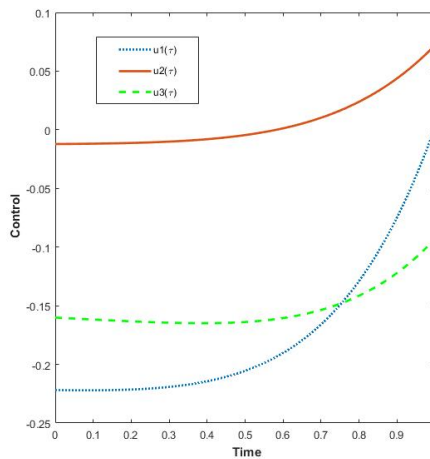
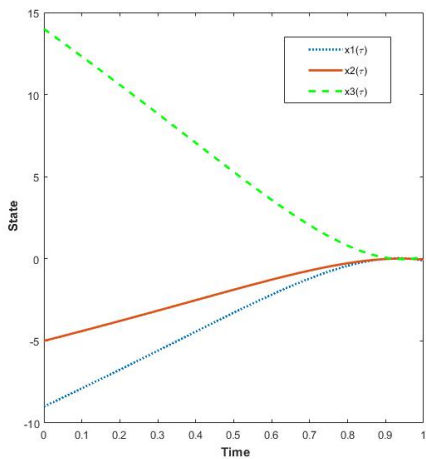
می‌توانیم جواب‌های تقریبی برای $x(t)$ و $u(t)$ برای $\alpha = 0.99, 0.9, 0.8, 0.7, 0.5$ به ترتیب در شکل‌های (۱.۶) - (۵.۶) و $x_i, (i = 1, 2, 3)$ و $u_i, (i = 1, 2, 3)$ به ازای $\alpha = 0.99, 0.9, 0.8, 0.7, 0.5$ به ترتیب در شکل‌های (۶.۶) - (۸.۶) مشاهده کنیم.



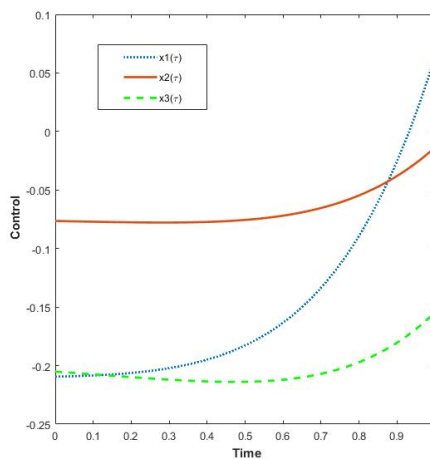
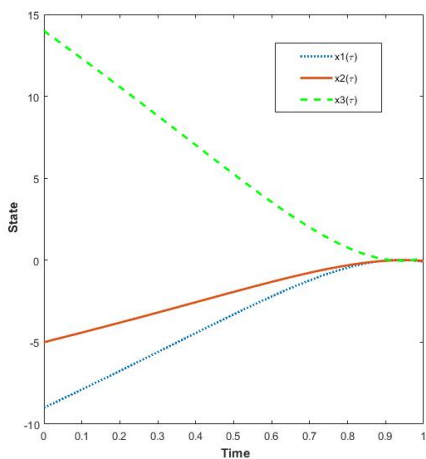
شکل ۱.۶: حالت و کنترل برای $\alpha = 0.99$



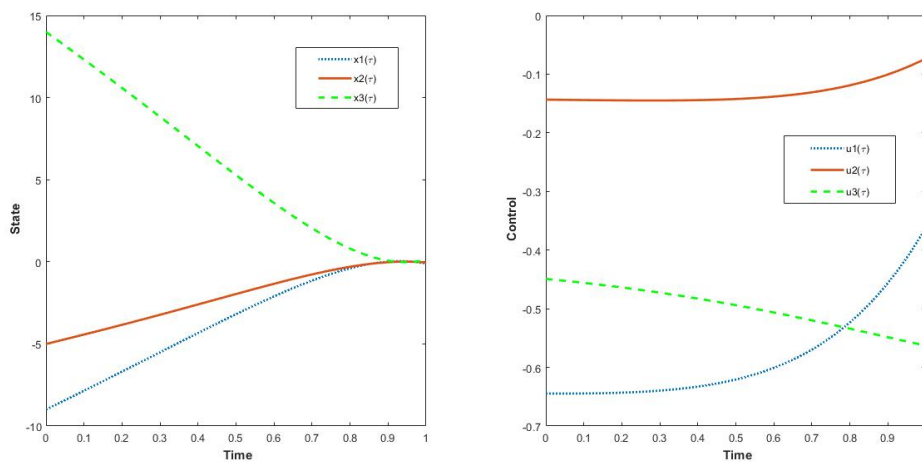
شکل ۲.۶: حالت و کنترل برای $\alpha = 0.9$



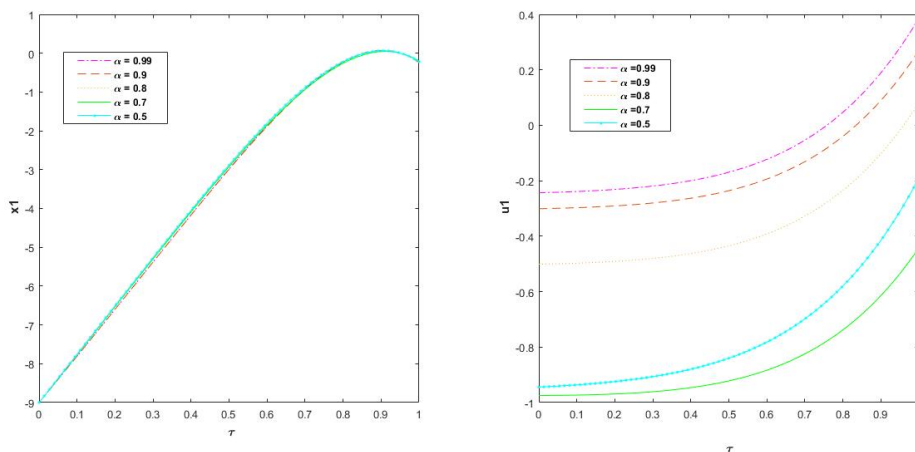
شکل ۳.۶: حالت و کنترل برای $\alpha = 0.8$



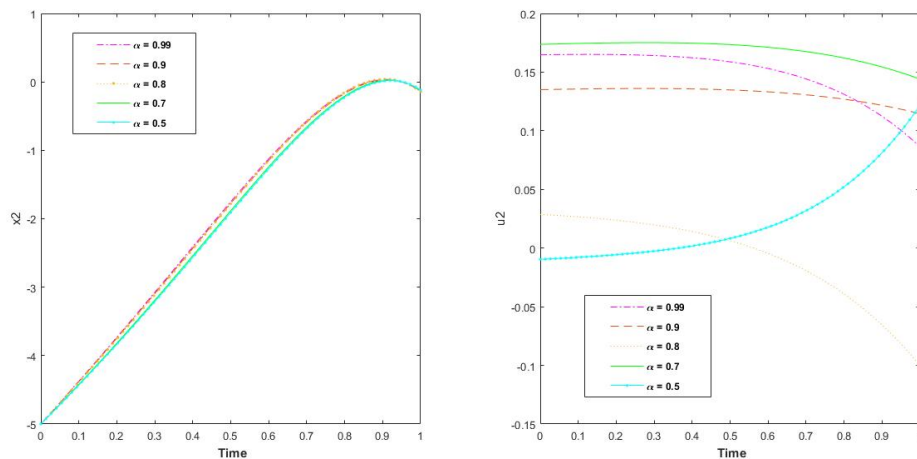
شکل ۴.۶: حالت و کنترل برای $\alpha = 0.7$



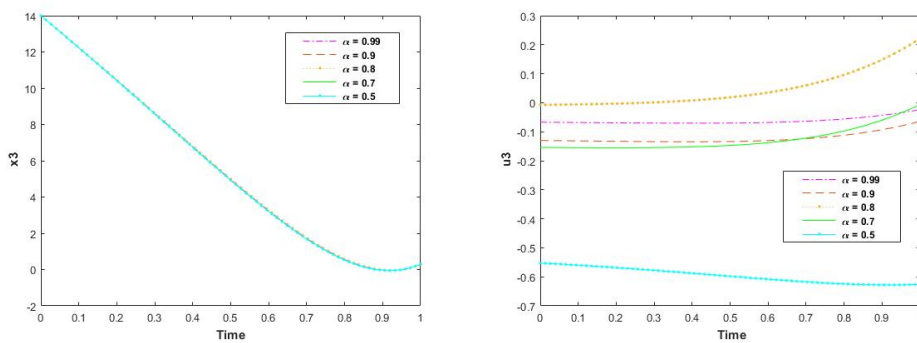
شکل ۵.۶: حالت و کنترل برای $\alpha = 0.5$



شکل ۶.۶: حالت x_1 و کنترل u_1 برای $\alpha = 0.99, 0.9, 0.8, 0.7, 0.5$



شکل ۷.۶: حالت x_2 و کنترل u_2 برای $\alpha = 0.99, 0.9, 0.8, 0.7, 0.5$



شکل ۸.۶: حالت x_3 و کنترل u_3 برای $\alpha = 0.99, 0.9, 0.8, 0.7, 0.5$

مثال ۲.۷.۶. سیستم آشوبناک کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha X_1(t) = -X_1(t) - X_2^\gamma(t), \\ {}^C D_t^\alpha X_2(t) = \gamma/\delta X_2(t) - \epsilon X_1(t) X_3(t), \\ {}^C D_t^\alpha X_3(t) = -\delta X_3(t) + \epsilon X_1(t) X_2(t), \\ X_1(0) = \gamma/\delta, \quad X_2(0) = 0, \quad X_3(0) = \gamma/\delta. \end{cases} \quad (53.6)$$

به منظور کنترل آشوب در سیستم آشوبناک (۵۳.۶) باید کنترل‌های $U_1(t)$ ، $U_2(t)$ و $U_3(t)$ را آن‌چنان تعیین کنیم که

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_i(t) = \bar{X}_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (54.6)$$

این معادل است با حل مساله بهینه‌سازی زیر

$$\text{minimize } \int_0^\infty [(X_1(t) - \bar{X}_1)^2 + (X_2(t) - \bar{X}_2)^2 + (X_3(t) - \bar{X}_3)^2] dt, \quad (55.6)$$

subject to

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha X_1(t) = -X_1(t) - X_2^\gamma(t) + U_1(t), \\ {}^C D_t^\alpha X_2(t) = \gamma/\delta X_2(t) - \epsilon X_1(t) X_3(t) + U_2(t), \\ {}^C D_t^\alpha X_3(t) = -\delta X_3(t) + \epsilon X_1(t) X_2(t) + U_3(t), \\ X_1(0) = \gamma/\delta, \quad X_2(0) = 0, \quad X_3(0) = \gamma/\delta. \end{cases}$$

با استفاده از (۲۲.۶)، (۳۱.۶) و

$$\begin{cases} x_i(\tau) = X_i\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right), & i = 1, 2, 3, \\ u_i(\tau) = U_i\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right), & i = 1, 2, 3, \\ v_i(\tau) = V_i\left(\frac{\tau}{1-\tau}\right), & i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

مساله (۵۵.۶) را برای $(p = ۲, ۳)$ ، به فرم زیر بازنویسی می‌کنیم،

$$\text{minimize } \int_0^1 \frac{1}{(1-\tau)^{\beta}} [(x_1(\tau) - \bar{X}_1)^{\beta} + (x_2(\tau) - \bar{X}_2)^{\beta} + (x_3(\tau) - \bar{X}_3)^{\beta}] d\tau, \quad (۵۶.۶)$$

subject to

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{1}{(1-\tau)^{\beta} B(\frac{\tau}{1-\tau})^{1-\alpha}} \left(C_2 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-1-\alpha} v_{21}(\tau) + C_3 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-2-\alpha} v_{31}(\tau) \right. \\ \left. - (A \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-\alpha} + 1) x_1(\tau) + x_1^{\beta}(\tau) + u_1(\tau) \right), \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{(1-\tau)^{\beta} B(\frac{\tau}{1-\tau})^{1-\alpha}} \left(C_2 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-1-\alpha} v_{21}(\tau) + C_3 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-2-\alpha} v_{31}(\tau) \right. \\ \left. + (A \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-\alpha} - 2/\Delta) x_2(\tau) - \mathcal{F} x_1(\tau) - x_1(\tau) x_3(\tau) + u_2(\tau) \right), \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{(1-\tau)^{\beta} B(\frac{\tau}{1-\tau})^{1-\alpha}} \left(C_2 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-1-\alpha} v_{21}(\tau) + C_3 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-2-\alpha} v_{31}(\tau) \right. \\ \left. - (A \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-\alpha} + \Delta) x_3 + \mathcal{F} x_1(\tau) x_2(\tau) + u_3(\tau) \right), \\ \dot{v}_{21}(t) = -\frac{1}{(1-\tau)^{\beta}} x_1(\tau), \\ \dot{v}_{22}(t) = -\frac{1}{(1-\tau)^{\beta}} x_2(\tau), \\ \dot{v}_{23}(t) = -\frac{1}{(1-\tau)^{\beta}} x_3(\tau), \\ \dot{v}_{31}(t) = -\frac{\beta \tau}{(1-\tau)^{\beta}} x_1(\tau), \\ \dot{v}_{32}(t) = -\frac{\beta \tau}{(1-\tau)^{\beta}} x_1(\tau), \\ \dot{v}_{33}(t) = -\frac{\beta \tau}{(1-\tau)^{\beta}} x_1(\tau), \\ x_1(0) = 0/\beta, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0/\Delta, \\ v_{21}(0) = 0, \quad v_{22}(0) = 0, \quad v_{23}(0) = 0, \\ v_{31}(0) = 0, \quad v_{32}(0) = 0, \quad v_{33}(0) = 0. \end{array} \right.$$

فرض می‌کنیم $h = \frac{1}{1-\tau}^{\beta}$ و $K = \frac{1}{(1-\tau)^{\beta} B(\frac{\tau}{1-\tau})^{1-\alpha}}$ ، هامیلتونین (۳۴.۶) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\begin{aligned} H = & h \left[(x_1(\tau) - \bar{X}_1)^{\beta} + (x_2(\tau) - \bar{X}_2)^{\beta} + (x_3(\tau) - \bar{X}_3)^{\beta} \right] \\ & + \lambda_1 K \left[C_2 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-1-\alpha} v_{21}(\tau) + C_3 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-2-\alpha} v_{31}(\tau) \right. \\ & \left. - (A \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-\alpha} + 1) x_1(\tau) + x_1^{\beta}(\tau) + u_1(\tau) \right] \\ & + \lambda_2 K \left[C_2 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-1-\alpha} v_{21}(\tau) + C_3 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-2-\alpha} v_{31}(\tau) \right. \\ & \left. + (A \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-\alpha} - 2/\Delta) x_2(\tau) - \mathcal{F} x_1(\tau) x_3(\tau) + u_2(\tau) \right] \\ & + \lambda_3 K \left[C_2 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-1-\alpha} v_{21}(\tau) + C_3 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-2-\alpha} v_{31}(\tau) \right. \end{aligned}$$

$$\left. - \left(A \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-\alpha} + \Delta \right) x_3 + \mathcal{F} x_1(\tau) x_2(\tau) + u_3(\tau) \right] \quad (57.6)$$

حال شرایط بهینگی (۳۶.۶) را بررسی می‌کنیم

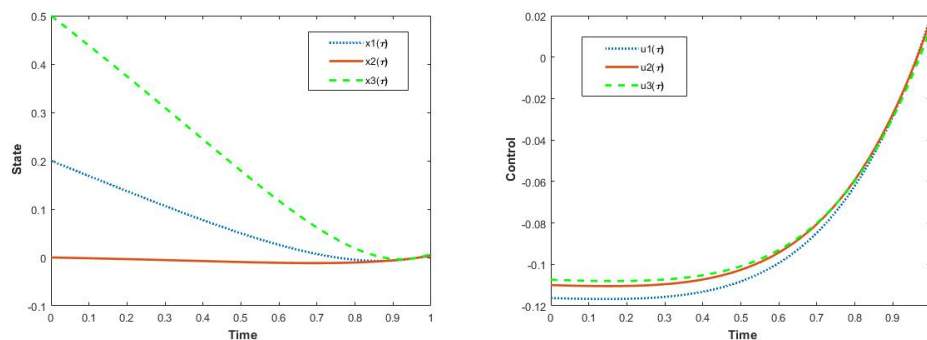
$$(58.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Upsilon h(x_1(\tau) - \bar{x}_1)^\Upsilon - \lambda_1 K \left(A \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-\alpha} + 1 \right) - \lambda_2 K x_3(\tau) + \mathcal{F} \lambda_3 K x_2(\tau) + \lambda_3 K x_2(\tau) - h \Upsilon_1 \\ - \frac{\Upsilon \tau}{1-\tau} \Upsilon_{\mathcal{F}} = -\dot{\lambda}_1, \\ \Upsilon h(x_2(\tau) - \bar{x}_2)^\Upsilon + \Upsilon \lambda_1 K x_2(\tau) - \lambda_2 K \left(A \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-\alpha} - \Upsilon / \Delta \right)^{-\alpha} + \mathcal{F} \lambda_3 K x_1(\tau) - h \Upsilon_2 - \frac{\Upsilon \tau}{1-\tau} \Upsilon_{\Delta} \\ = -\dot{\lambda}_2, \\ \Upsilon h(x_3(\tau) - \bar{x}_3)^\Upsilon - \mathcal{F} \lambda_2 K x_1(\tau) - \lambda_3 K \left(A \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-\alpha} + \Delta \right) - h \Upsilon_3 - \frac{\Upsilon \tau}{1-\tau} \Upsilon_{\mathcal{F}} = -\dot{\lambda}_3, \\ h \left[C_2 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-1-\alpha} v_{21}(\tau) + C_3 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-2-\alpha} v_{31}(\tau) - \left(A \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-\alpha} + 1 \right) x_1(\tau) - x_2^\Upsilon(\tau) + u_1(\tau) \right] = \dot{x}_1, \\ h \left[C_2 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-1-\alpha} v_{21}(\tau) + C_3 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-2-\alpha} v_{31}(\tau) + \left(A \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-\alpha} - \Upsilon / \Delta \right) x_2(\tau) - \mathcal{F} x_1(\tau) x_3(\tau) \right. \\ \left. + u_2(\tau) \right] = \dot{x}_2, \\ h \left[C_2 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-1-\alpha} v_{21}(\tau) + C_3 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-2-\alpha} v_{31}(\tau) - \left(A \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-\alpha} + \Delta \right) x_3 + \mathcal{F} x_1(\tau) x_2(\tau) + u_3(\tau) \right] \\ = \dot{x}_3, \\ \lambda_1 K C_2 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-1-\alpha} = -\dot{\Upsilon}_1, \\ \lambda_2 K C_2 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-1-\alpha} = -\dot{\Upsilon}_2, \\ \lambda_3 K C_2 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-1-\alpha} = -\dot{\Upsilon}_3, \\ \lambda_1 K C_3 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-1-\alpha} = -\dot{\Upsilon}_{\mathcal{F}}, \\ \lambda_2 K C_3 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-1-\alpha} = -\dot{\Upsilon}_{\Delta}, \\ \lambda_3 K C_3 \left(\frac{\tau}{1-\tau} \right)^{-1-\alpha} = -\dot{\Upsilon}_{\mathcal{F}}, \\ -h x_1 = \dot{v}_{21}, \\ -h x_1 = \dot{v}_{22}, \\ -h x_1 = \dot{v}_{23}, \\ \frac{-\Upsilon \tau}{1-\tau} \Upsilon_{\mathcal{F}} = \dot{v}_{31}, \\ \frac{-\Upsilon \tau}{1-\tau} \Upsilon_{\Delta} = \dot{v}_{32}, \\ \frac{-\Upsilon \tau}{1-\tau} \Upsilon_{\mathcal{F}} = \dot{v}_{33}, \\ \frac{\lambda_1}{(1-\tau)^\Upsilon} = 0, \\ \frac{\lambda_2}{(1-\tau)^\Upsilon} = 0, \\ \frac{\lambda_3}{(1-\tau)^\Upsilon} = 0. \end{array} \right.$$

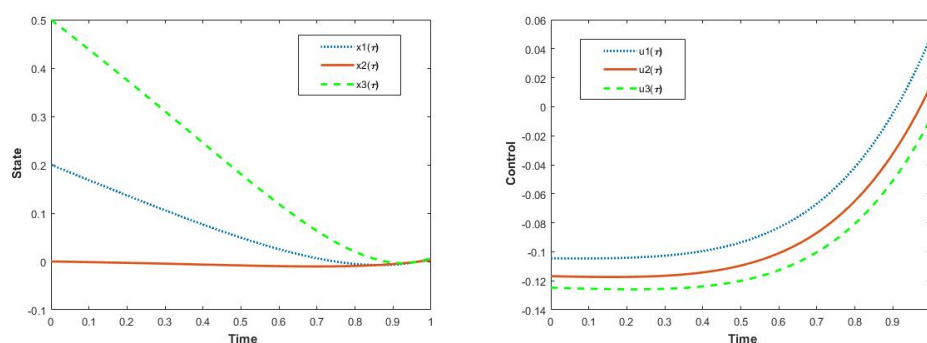
با در نظر گرفتن شرایط اولیه، می‌توانیم جواب‌های آزمایشی را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1T} = 0/2 + \tau n_{x_1} \\ x_{2T} = \tau n_{x_2} \\ x_{3T} = 0/5 + \tau n_{x_3} \\ v_{21T} = \tau n_{v_{21}}, \\ v_{22T} = \tau n_{v_{22}}, \\ v_{23T} = \tau n_{v_{23}}, \\ v_{31T} = \tau n_{v_{31}}, \\ v_{32T} = \tau n_{v_{32}}, \\ v_{33T} = \tau n_{v_{33}}, \\ \lambda_{1T} = (1 - \tau)n_{\lambda_1}, \\ \lambda_{2T} = (1 - \tau)n_{\lambda_2}, \\ \lambda_{3T} = (1 - \tau)n_{\lambda_3}, \\ \Upsilon_{1T} = (1 - \tau)n_{\Upsilon_1}, \\ \Upsilon_{2T} = (1 - \tau)n_{\Upsilon_2}, \\ \Upsilon_{3T} = (1 - \tau)n_{\Upsilon_3}, \\ u_{1T} = n_{u_1}, \\ u_{2T} = n_{u_2}, \\ u_{3T} = n_{u_3}. \end{array} \right. \quad (59.6)$$

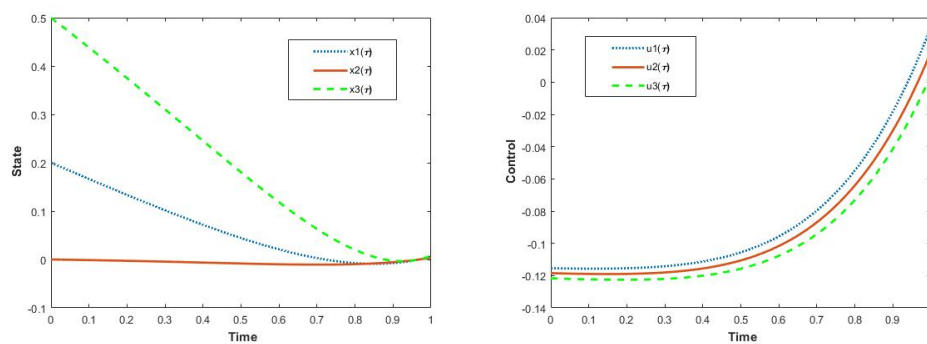
می‌توانیم جواب‌های تقریبی برای $x(t)$ و $u(t)$ برای $\alpha = 0/99, 0/9, 0/8, 0/7, 0/5$ به ترتیب در شکل‌های (۹.۶) - (۱۳.۶) و $x_i, (i = 1, 2, 3)$ و $u_i, (i = 1, 2, 3)$ به ازای $\alpha = 0/99, 0/9, 0/8, 0/7, 0/5$ به ترتیب در شکل‌های (۱۴.۶) - (۱۶.۶) مشاهده کنیم.



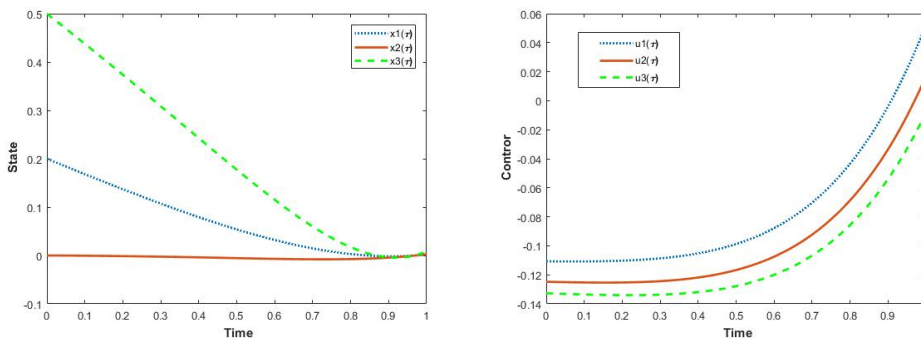
شکل ۹.۶: حالت و کنترل برای $\alpha = 0.99$



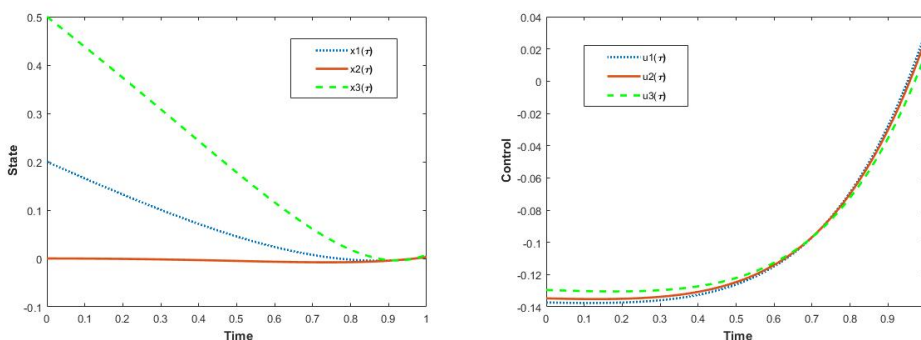
شکل ۱۰.۶: حالت و کنترل برای $\alpha = 0.9$



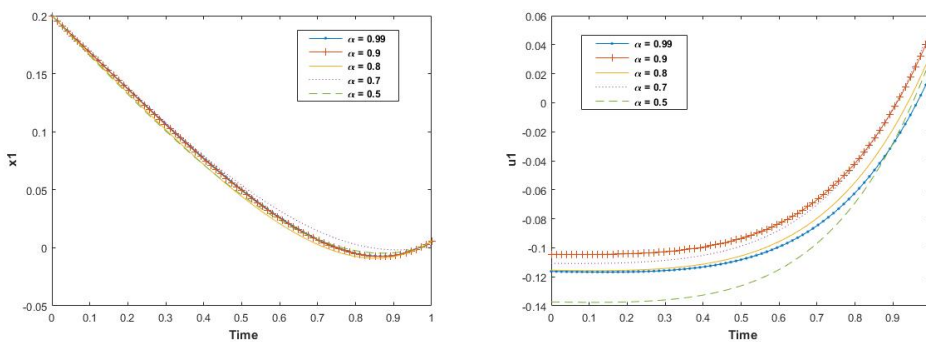
شکل ۱۱.۶: حالت و کنترل برای $\alpha = 0.8$



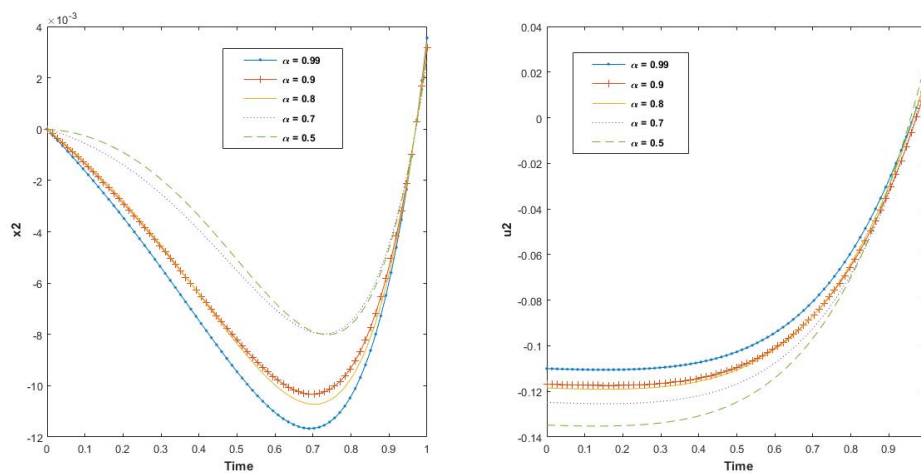
شکل ۱۲.۶: حالت و کنترل برای $\alpha = 0.7$



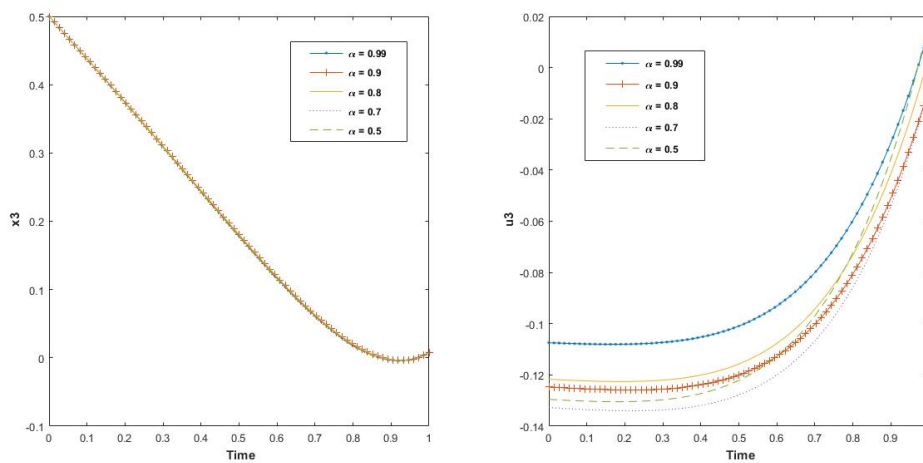
شکل ۱۳.۶: حالت و کنترل برای $\alpha = 0.5$



شکل ۱۴.۶: حالت x_1 و کنترل u_1 برای $\alpha = 0.99, 0.9, 0.8, 0.7, 0.5$



شکل ۱۵.۶: حالت x_2 و کنترل u_2 برای $\alpha = 0.99, 0.9, 0.8, 0.7, 0.5$



شکل ۱۶.۶: حالت x_3 و کنترل u_3 برای $\alpha = 0.99, 0.9, 0.8, 0.7, 0.5$

مراجع

- [۱] نیکخو م. و شفيعی م. و کیانی ک، (۱۳۸۹) ” طراحی سیستم مخابراتی امن با استفاده از سنکرون کردن سیستم‌های آشوبی ” فناوری اطلاعات و ارتباطات ایران، شماره ۴۰۳، دوره ۲، صص ۵۵-۶۷
- [۲] خاکی صدیق ع، (۱۳۸۶) ” اصول کنترل مدرن ”، جلد اول، چاپ چهارم، انتشارات دانشگاه تهران، صص ۴۰-۴۱.
- [۳] پتکین ف، (۱۳۸۷) ” شبکه‌های عصبی ” ترجمه میرصالحی م.م. تقی‌زاده کاخکی ح، دانشگاه فردوسی مشهد.
- [۴] منهای م.ب، (۱۳۷۷) ” هوش محاسباتی ”، جلد اول، مرکز نشر پرفسور حسابی.
- [۵] ضمیری آ، (۱۳۸۷)، پایان‌نامه کارشناسی ارشد: ” شبکه‌های عصبی مصنوعی و بهینه‌سازی ”، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد،
- [۶] مقدس م. عفتی س. و اسحاق نژاد م. (۱۳۹۳)، ششمین کنفرانس بین‌المللی انجمن ایرانی تحقیق در عملیات، ” یک شبکه عصبی برای حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی نامحدب ”

[7] Brin M., Stuck G. (2002), ”Introduction to Dynamical Systems”, Cambridge University Press, New York.

[8] Baker G.L. and Gollub J.P. (1996), ”Chaotic Dynamics an Introduction. Second edition”, Cambridge University Press, New York.

[9] Sanchez D.A. (1968), ”Ordinary Differential Equations and Stability Theory on Introduction”, Dover Publications, New York.

[10] Lynch S. (2009), ” Dynamical systems with applications using Maple”, Birkhauser, Boston, .

[11] Ruelle D. and Takens F. (1971), ”On the nature of turbulence”, **Comm. Math. Phys.**, 20 (2).

- [12] Feigenbaum M.J. (1978), "Quantitative Universality for a Class of NonLinear Transformations", **Stat. Phys.**, Vol. 9.
- [13] Feigenbaum M.J. (1979), "The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations", **Stat. Phys.**, Vol. 21.
- [14] Feigenbaum M.J. (1980), "**The Metric Universal Properties of Period Doubling Bifurcations and the Spectrum for a Route to Turbulence**", Ann. New York. Acad. Sci.
- [15] Feigenbaum M.J. (1988), Presentation Functions, Fixed Points, and a Theory of Scaling Function Dynamics, **Stat. Phys.**, Vol. 52.
- [16] Morgan G. (1998), "**Images of organization, Berrett-koehler**", Inc., Sage publications, Inc.
- [17] Gaborone D. (1948), "A new microscopic principle", **Nature**, Vol .161.
- [18] May R.M. (1974), "**Stability and Complexity in Model Ecosystems**", Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [19] Strogatz S.H. (1994), " **Nonlinear dynamics and chaos, Perseus Books Publishing**", L.L.C., New York.
- [20] Goldberger A.L. (1990), Nonlinear dynamics, fractals and chaos, **Annals of Biomedical Engineering**, Vol .18.
- [21] Matthews R.A.J. (1989), "**On the Derivation of a Chaotic Encryption Algorithm.**", Cryptologia XIII, Vol .1.
- [22] Pecora L.M. and T.L.Carroll (1990), "**Synchronization in Chaotic Systems**" Physical Review Letters , Vol .64.
- [23] Behnia S., Akhshani A. (2009), Ahadpour S., Akhavan A., Mahmodi H., Cryptography based on chaotic random maps with position dependent weighting probabilities, **Chaos Solitons Fractals**, Vol .40.
- [24] Corron N.J., Hahs D.W. (1997), A new approach to communications using chaotic signals, **IEEE Trans. Circuits Syst.**, Vol .44.
- [25] Gutiérrez J.M., Rodríguez M.A., Abramson G. (2001), "Multifractal analysis of DNA sequences using a novel chaos-game representation", **Physica**, Vol. 300.

- [26] Benhabib J. (1992), "Cycles and chaos in economic equilibrium, Princeton University Press".
- [27] Seydel R., "Bifurcation and chaos: analysis, algorithms" applications, Vol. 97.
- [28] Zhang W.B. (2006), "Discrete Dynamical Systems, Bifurcations and Chaos in Economics" Vol. 204.
- [29] Ott E., Grobogi C. and Yorke J. (1990), "controlling chaos", **Phys.Rev.Lett**, Vol. 64.
- [30] Pyragas K. (1992), "continuous control of chaos by self-controlling feedback", **Phys. Lett. A.**, vol. 170.
- [31] Lakshmikantham V., Bainov D.D., and simeonov P.S. (1989), "theory of Impulsive Differential Equation" ,**London U. K: World Scientific**.
- [32] Harb A., Zaher A. and Zohdy M. (2002), "Nonlinear Recursive chaos control", **Proc. American Control Conf**.
- [33] Harb A. and Zohdy M. "Chaos and Bifurcation Control Useing Nonlinear Recursive Controller", **Nonlinear Analysis: Modeling and Control**, Vol. 7, no.
- [34] Vincent T.L. (2000), "Utilizing Chaos Control System Design", in **G. Chen (ed.), Controlling Chaos and Bifurcation in Engineering System, CRC Press**.
- [35] Farahmand A.M. and Jebehdar Maralani P., (1998), "Stabilizing Chaotic System With Control Singnal" ,**unpublished**, Vol. 8.
- [36] Chen G. and Dong X. (1998), "From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives and Applications", **World Scientific Singapore**.
- [37] Das A., Roy A.B. and Das P. (2000), "Chaos in a three dimensional neural network", **Appl. Math. Model**, Vol .24.
- [38] Roy r.,Murphy W., Maier T.D., Gillis Z. and Hunt E.R. (1993), "Dynamical Control of a Chaotic Laser: Experimental Stabilization of a Globally coupled System", **Phys.Rev.Lett**, Vol. 68.
- [39] Kousaka T., Tahara S., Ueta T. Abe M. and Kawakami H. (2001), "Chaos in simple hybrid system and its control", **Electronic Letters**, Vol. 37.

-
- [40] Garfinkel A., Spano M.L., Ditto W.L. and Weiss J.N. (1992), "Controlling Cardiac Chaos", **Science**, Vol. 257.
- [41] Brandt M.E. and Chen G. (2000), "**Delay Feedback Control of Cardiac Activity Models**", in G Chen (ed), *Controlling Chaos and Bifurcation in Engineering System*, CRC Press.
- [42] Yang T. (2004), "A Survey of Chaotic Secure Communication System", **International Journal of Computational Cognition**, Vol. 2.
- [43] Suykenc J.A.K., Yang T., Vandewalle J. and Chua L.O. (2000), "**Impulsive Control and synchronization of Chaos**", in G. Chen (ed), *Controlling Chaos and Bifurcation in Engineering System*, CRC Press.
- [44] Fradkov B.R. (2004), "**Control of Chaos: Methods and Applications. II. Applications**", *Automation and Remote Control*, Vol. 65.
- [45] McCulloch W. and Pitts W. (1943), "A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity", **Bull. Math. Biophys.**, Vol. 52.
- [46] Hebb D.O. (1949), "The Organization of Behavior: A Neuropsychological Theory", **John Wiley and Sons, Inc.**, New York.
- [47] Rosenblatt F. (1962), "**Principles of neurodynamics: perceptrons and the theory of brain mechanisms**", Report (Cornell Aeronautical Laboratory). Spartan Books.
- [48] Rosenblatt F. (1988), "**Neurocomputing: foundations of research. chap. The perception: a probabilistic model for information storage and organization in the brain**", MIT Press, Cambridge, MA, USA.
- [49] Widrow B. (1959), "**Generalization and information storage in networks of adaline 'neurons'**", in *Self Organizing Systems*.
- [50] Widrow B. and Hoff M.E. (1960), "Adapting switching circuits", **New York, NY, ire.**
- [51] Widrow B. and Lehr M.A. (1990), "30 years of adaptive neural networks: perceptron, madaline, and backpropagation", **Proc. IEEE**, Vol. 78.
- [52] Widrow B. and Winter R. (1998), "Neural nets for adaptive filtering and adaptive pattern recognition", **IEEE Computer Magazine**, V. 21.
- [53] Werbos P., (1974), PhD thesis, "Beyond Regression: New Tools for Prediction and Analysis in the Behavioral Sciences", Cambridge, MA. Harvard University.

- [54] Rumelhart D.E., Hinton G.E. and Williams R.J. (1986), "Learning representations by back-propagating errors", **Nature**.
- [55] Hopfield J.J. (1982), "Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities", **Proc. Nat. Acad. Sci.**, Vol. 79.
- [56] Hopfield J.J. and Tank D. W. (1985), "'neural" computation of decisions in optimization problems", **Biological Cybernetics**, Vol. 52.
- [57] Schalkoff R.J. (1997), "Artificial Neural Networks", **McGraw-Hill, New York**.
- [58] Haykin S. (1999), "**Neural Networks: A Comprehensive Foundation**", Prentice Hall, New Jersey.
- [59] Khanna T. (1990), "Foundations of Neural Networks", **Addison-Wesley, Reading, MA**.
- [60] Hornick K., Stinchcombe M. and White H. (1989), "Multilayer feedforward networks are universal approximators", **Neural Networks**, Vol. 2.
- [61] Lippmann R.P. (1987), "An introduction to computing with neural nets", **IEEE ASSP Magazine**, Vol. 4.
- [62] Hager W., paradolas P. M. (1998), "**Optimal Control: Theory, Algorithms and applications**" Dordrecht: Kluwer Academic
- [63] Mehne H.H., and borzabadi A.H. (2006), "A numerical method for solving optimal control problem using state parametrization" **J. num. algorithms**, Vol. 42.
- [64] Teo K.L., Jenings L.S., Lee H.W. and Rehbock J.V. (1999), "Control parameterization enhancing technique for constrained optimal control problems" **Journal of the Australian Mathematical Society**, Vol. 40.
- [65] Bachman G., Narici L. and Beckenstein E. (2000), "**Fourier and wavelet analysis**", New York: Springerverlag.
- [66] Jaddu H.M. (1998), PhD thesis, "Numerical methods for solving optimal control problems using chebyshev polynomials", Minamiuonuma, Advanced institute of science and technology. University of japan.
- [67] Pinch E.R. (1995), "**Optimal control and the calculus of variations**", Oxford University Press.

- [68] Rosenblatt F. (1988), "**Neurocomputing: foundations of research. chap. The perception: a probabilistic model for information storage and organization in the brain**", MIT Press, Cambridge, MA, USA.
- [69] Stryk O.V. and Bulirsch R. (1992), "Direct and indirect methods for trajectory optimization", **Annals of Operations Research**, vol. 37.
- [70] Kafash B. and Delavarkhalafi A. (2015), "Restarted State Parameterization Method for Optimal Control Problems" **mathematics and computer science**, Vol. 14.
- [71] Ploak E., (1971), "**computational methods in optimization**", New York: Academic Press.
- [72] Lin Q., Loxton R. and Teo K.L. (2014), "The Control Parameterization Method For Non-linear Optimal Control: A Survey" **Industrial and Management Optimization**, Vol. 10.
- [73] Troch I., Breiteneker F. and Graeff M. (1989), "computing optimal controls for systems with state and control constraints." **IFAC control applications of nonlinear programming and optimization**, Vol. 1.
- [74] Vlassenbroeck J., (1998), "A chebyshev polynomial method for optimal control with state constraints." **Automatica**, Vol. 24.
- [75] Jaddu H.M. (1998), PhD thesis, "**Numerical methods for solving optimal control problems using chebyshev polynomials**", Minamiuonuma, Advanced institute of science and technology. University of japan.
- [76] Blot J. (2009), "**Infinite-horizon Pontryagin principles without invertibility**", Journal of Nonlinear and Convex Analysis, Vol. 10.
- [77] Blot J. and Cartigny P. (2000), "Optimality in infinite-horizon variational problems under sign conditions", **Journal of Optimization Theory and Applications**, Vol. 106.
- [78] Anderson B.D.O. and Moore J.B. (1971), "Linear Optimal Control", **Prentice-Hall, Englewood Cliffs**.
- [79] Leizarowitz A. (1986), "Tracking nonperiodic trajectories with the overtaking criterion", **Applied Mathematics and Optimization**, Vol. 14.
- [80] Zaslavski A.J. (2006), "**Turnpike Properties in the Calculus of Variations and Optimal Control**", Springer, New York .

- [81] Gale D. (1967), "On optimal development in a multi-sector economy", **The Review of Economic Studies**, Vol. 34.
- [82] Makarov V.L. and Rubinov A.M.(1977), " **Mathematical Theory of Economic Dynamics and Equilibria**", Springer, Berlin.
- [83] Zaslavski A.J. (2007), "Turnpike results for a discrete-time optimal control system arising in economic dynamics", **Nonlinear Analysis**, Vol. 67.
- [84] Zaslavski A.J. (2009), "Two turnpike results for a discrete-time optimal control systems", **Nonlinear Analysis**, Vol. 71.
- [85] Aubry S.and Le Daeron P.Y. (1983), "The discrete Frenkel-Kontorova model and its extensions: I. Exact results for the ground-states", **Physica D**, Vol. 8.
- [86] Zaslavski A.J. (1987), "Ground states in Frenkel-Kontorova model", **Mathematics of the USSR, Izvestiya**, Vol. 29.
- [87] Blot J. and Michel P. (1996), "First-order necessary conditions for infinite-horizon variational problems", **Journal of Optimization Theory and Applications**, Vol. 88.
- [88] Pontryagin L.S., Boltyanski V.S., Gamkrelidze R.V. and Mischenko E.F. (1962), The Mathematical "Theory of Optimal Processes", **Wiley interscience**, New York.
- [89] Carlson D.A. and Haurie A. (1987), "**Infinite-Horizon Optimal Control**", **Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems**, Springer Verlag, Berlin, Germany, Vol. 290.
- [90] Effati S., Kamyad A.V. and Kamyabi-Gol R.A. (2000), "On infinite-horizon optimal control problems", **Zeitschrift fr Analysis und ihre Anwendungen**, Vol. 19.
- [91] Effati S. and Nazemi A.R. (2007), "A new approach for asymptotic stability of the nonlinear ordinary differential equations", **Journal of Appled Mathematics and Computing**, V. 25.
- [92] Nazemi A.R. and Mahmoudy N. (2014), "Solving infinite horizon optimal control problems using the haar wavelet collocation method", **Anziam Journals**, V. 56.
- [93] Fahroo F. and Ross I.M. (2008), "Pseudospectral methods for infinite-horizon optimal control problems", **Journal of guidance, control, and dynamics**, V. 31.
- [94] Garg D., Hager W.W. and Rao A.V. (2011), "Pseudospectral methods for solving infinite-horizon optimal control problems", **Automatica**, Vol. 47.

- [95] Kirk D.E. (1970), "**Optimal Control Theory**",: An Introduction, Englewood Cliffs, New York,
- [96] Keckman V. (2001), **Learning and soft computing**, MIT press, Cambridge, MA.
- [97] Bazaraa M.S., Sherali, H.D. and Shetty C.M. (2006), "**Nonlinear Programming-Theory and Algorithms**", Third edition, John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey.
- [98] Nocedal J. and Wright S.(2006), "**Numerical Optimization (second ed.) Berlin**", NewYork: Springer-Verlag.
- [99] Lee K.Y. and El-Sharkawi M.A. (2008), "**Modern Heuristic Optimization Techniques: Theory and Applications to Power Systems**".
- [100] Miller R. K. and Michel A. N. (1982), "**Ordinary Differential Equations**", NewYork: Academic Press, Vol 16.
- [101] Zhang X-S. (2000), "**Neural Networks in Optimization**", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.
- [102] Kilbas A.A., Srivastava H.M. and Trujilo J.J. (2006), "**Theory and applications of fractional differential equations**", Elsevier, New York.
- [103] Zaslavsky G.M. (2005), "**Chaos and Fractional Dynamics**", vol. 511 of Lect. Notes in Phys., Oxford University Press, Oxford.
- [104] Samko S.G., Kilbas A. A. and Marichev O.I. (1993), "**Fractional integrals and derivatives Theory and Applications**", Gordon and Breach, Yverdon.
- [105] Podlubny I. (1998), "**Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications**", Academic press, Vol. 198.
- [106] Oldham K. and Spanier J. (1974), "**The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order**", Elsevier, Vol. 111.
- [107] Miller K.S. and Ross B. (1993), "**An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations**".
- [108] Agrawal O.P. (2004), "A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems" **Nonlinear Dynamics**, Vol. 38.

-
-
- [109] Agrawal O.P. (2008), "A quadratic numerical scheme for fractional optimal control problems" **Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control**, Vol. 130.
- [110] Pooseh S., Almeida R. and Torres D.F. (2013), "A numerical scheme to solve fractional optimal control problems" **Conference Papers in Science. Hindawi Publishing Corporation**.
- [111] Almeida R. and Torres D.F.M. (2015), "A discrete method to solve fractional optimal control problems" **Nonlinear Dynamics**, Vol. 80.
- [112] Lotfi A., Dehghan M. and Yousefi S.A. (2011), "A numerical technique for solving fractional optimal control problems" **Computers and Mathematics with Applications**, Vol. 62. Mit Press.
- [113] Beschi M., Padula F. and Visioli A. (2017), "The generalised isodamping approach for robust fractional PID controllers design" **International Journal of Control**, Vol. 90.
- [114] Muresan C.I., Dutta A., Dulf E.H. Pinar, Z. Maxim A. and Ionescu C.M. (2016), "Tuning algorithms for fractional order internal model controllers for time delay processes" **International Journal of Control**, Vol. 89.
- [115] Nemati A. (2017), "Numerical solution of 2D fractional optimal control problems by the spectral method combined with Bernstein operational matrix" **International Journal of Control**, just-accepted.
- [116] Trujillo J.J. and Ungureanu V.M. (2016), "Optimal control of discrete-time linear fractional-order systems with multiplicative noise" **International Journal of Control**.
- [117] Atanackovic T.M., Stankovic B (2008), "On a numerical scheme for solving differential equations of fractional order", **Mech. Res. Commun**, Vol. 35.
- [118] Torres F.M. (2014), "A discrete method to solve fractional optimal control problem" **Springer Science**.
- [119] Cybenko G. (1989), "Approximation by superpositions of a sigmoidal function, Math", **Control Signals, Syst**, Vol. 2.
- [120] Hornik K., Stinchcombe M. and White H. (1989), "Multilayer feedforward networks are universal approximators", **Neural Networks**, Vol. 2.

- [121] Funahashi K. (1989), "On the approximate realization of continuous mappings by neural networks", **Neural Networks**, Vol. 2.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Hyper Chaotic	ابرآشوب
Butterfly Effect	اثر پروانه‌ای
Chaos	آشوب
Minimim Principle	اصل مینیمم
Optimization Algorithm	الگوریتم بهینه‌سازی
Steepest Descent Algorithm	الگوریتم تندترین کاهش
Genetic Algorithm	الگوریتم ژنتیک
Fractional Integral	انتگرال کسری
Initial	اولیه
Attractive dimension	بعد جاذب
Basis Of Attraction	بستر جذب
Nonlinear Programming	برنامه‌ریزی غیرخطی
Optimal Path Planing	برنامه‌ریزی مسیر بهینه
Optimization	بهینه‌سازی
Anti-Synchronization	پادهمزمان‌سازی
Parametrization	پارامترسازی
Stable	پایدار
Stable Limit Cycle	پایداری دور حدی
Lyapunov Stability theorem	پایداری لیاپانوف
Stable Equilibrium Point	پایداری نقطه تعادل
Basis	پایه
Poincare	پوانکاره
Trial Function	تابع آزمایشی
Errore Finction	تابع خطا
Control Function	تابع کنترل
Lyapunov Function	تابع لیاپانوف

Strong Lyapunov Function	تابع لیاپانوف قوی
Terjectory Function	تابع مسیر
Weight Function	تابع وزن
Objective Function	تابع هدف
Functional	تابعی
Estimation	تخمین
Phase Protrait	تصویر فاز
Approximation	تقریب
Trodal attractor	جاذب سطحی مارپیچی
Strange Attractor	جاذب عجیب
Point Attractor	جاذب نقطه‌ای
Optimal Solution	جواب بهینه
Trial Solution	جواب‌های آزمایشی
State	حالت
Limit	حدی
Variational Calcalus	حساب تغییرات
Fractional Calcalas	حساب کسری
Sensitivity To Initial Condition	حساسیت به شرایط اولیه
Phase Line	خط فاز
Dynamic Adaption	خودسازماندهی
Self Similarity	خودشبه‌بافتی
Neoron System	دستگاه عصبی
Limit cycle	دور حدی
Un Stable Limit	دور حدی ناپایدار
Numerical Method	روش عددی
Indirect Method	روش غیر مستقیم
Quasi Newton Method	روش‌های شبه‌نیوتن
Simple	ساده
Chaotic System	سیستم آشوبناک
Dynamic System	سیستم دینامیکی
Cononical System	سیستم متعارف
autonomous System	سیستم مستقل
Response System	سیستم واکنش
Neuron Network	شبکه عصبی

Biological Neural Network	شبکه عصبی زیستی
Artificial Neural network	شبکه عصبی مصنوعی
Initial Condition	شرایط اولیه
Fractional Necessary Optimality Conditions	شرایط بهینگی کسری
Boundary Condition	شرایط مرزی
Phase Plane	صفحه فاز
Lagrangian Multipliers	ضرایب لاگرانژ
Phase	فاز
Acceptable	قابل قبول
Deterministic	قطعی
Complete	کامل
Control	کنترل
Optimal Control	کنترل بهینه
Fraction Optimal control	کنترل بهینه کسری
Adaptive Control	کنترل تطبیقی
Linear Feedback Control	کنترل خطی فیدبک
Node	گره
Discretization	گسسته‌سازی
Lyapunov	لیاپانوف
Differential	ماتریس مشتقات
StateVariable	متغیر حالت
Limit Set	مجموعه حدی
Constraint	محدودیت
secure Commnuication	مخابرات امن
Cordinate	مختصات
Orbit	مدار
Boundary	مرزی
Trajectory	مسیر
Nonlinear Optimal Control Problem	مساله کنترل بهینه غیرخطی
Fractional Derivative	مشتق کسری
Differential	معادله دفرانسیل
Ordinary Differential Equation	معادله دیفرانسیل معمولی
Bifurcation Value	مقدار انشعاب
Optimal control	مقدار بهینه

Poincare Section	مقطع
Unstable	ناپایدار
Aperiodic	نامتناوب
Critical Point	نقطه بحرانی
Equilibrium	نقطه تعادل
Asymptotically State Equilibrium Point	نقطه تعادل به‌طور مجانبی
Attractive Equilibrium Point	نقطه تعادل جذب
Reppler Equilibrium Point	نقطه تعادل دافع
Simple Equilibrium Point	نقطه تعادل ساده
Nonsimple Equilibrium Point	نقطه تعادل غیرساده
Singular Equilibrium Point	نقطه تعادل منفرد
UnStable Equilibrium Point	نقطه تعادل ناپایدار
Limit Point	نقطه حدی
Ordinary Point	نقطه معمولی
Poincare Map	نگاشت پوانکاره
Bifurcation Diagram	نمودار انشعاب

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Acceptable	قابل قبول
Adaptive	کنترل تطبیقی
Anti-Synchronization	پادهمزمان‌سازی
Aperiodic	نامتناوب
Approximation	تقریب
Artificial Neural Network	شبکه عصبی مصنوعی
Asymptotically Stable Equilibrium Point	نقطه تعادل به طور مجانبی
Attractive Dimension	بعد جاذب
Attractive Equilibrium point	نقطه تعادل جاذب
Autonomous System	سیستم مستقل
Basis	پایه
Basis Of Attraction	بستر جذب
Bifurcation	انشعاب
Bifurcation Diagram	نمودار انشعاب
Bifurcation Value	مقدار انشعاب
Biological Neural Network	شبکه عصبی زیستی
Boundary	مرزی
Boundary Condition	شرایط مرزی
Butterfly Effect	اثر پروانه‌ای
Canonical System	سیستم متعارف
Chaos	آشوب
Chaotic System	سیستم آشوبناک
Complete	کامل
Constraint	محدودیت
Control	کنترل
Control Function	تابع کنترل

Cordinate	مختصات
Critical Point	نقطه بحرانی
Deterministic	قطعی
Differential Equation	معادله دیفرانسیل
Differential Matrix	ماتریس مشتقات
Discretization	گسسته‌سازی
Dynamic Adaption	خودسازماندهی
Equilibrium Poin	نقطه تعادل
Errore Function	تابع خطا
Estimation	تخمین
Functional	تابعی
Fractional Calculas	حساب کسری
Fractional Derivative	مشتق کسری
fractional Integral	انتگرال کسری
Fractional Necessary Optimality Conditions	شرایط لازم بهینگی کسری
Fractional Optimal Control	کنترل بهینه کسری
Genetic Algorithm	الگوریتم ژنتیک
Hyperchaotic	ابرآشوبناک
Initial	اولیه
Initial Condition	شرایط اولیه
Indirect Method	روش غیرمستقیم
Lagrangian Multipliers	ضرایب لاگرانژ
Limit	حدی
Limit Cycle	دور حدی
Limit Point	نقطه حدی
Limit Set	مجموعه حدی
Liner Feedback Control	کنترل خطی فیدبک
Lyapunov	لیاپانوف
Lyapunov Function	تابع لیاپانوف
Lyapunov Stability Theorem	قضیه پایداری لیاپانوف
Minimum Principle	اصل مینیمم
Neuron Network	شبکه عصبی
Neuron System	دستگاه عصبی
Node	شبکه

Nanlinear progaraming	برنامه‌ریزی غیرخطی
Nonlinear Optimal Control Problem	مساله کنترل بهینه غیرخطی
Nonsimple Equilibrium Point	نقطه تعادل غیر ساده
Numerical method	روش عددی
Objective Function	تابع هدف
Optimal Control	کنترل بهینه
Optimal Path Planing	برنامه‌ریزی مسیر بهینه
Optimal Solution	جواب بهینه
Optimal Value	مقدار بهینه
Optimization	بهینه‌سازی
optimization Algorithm	الگوریتم بهینه‌سازی
Orbit	مدار
Ordinary Differential Equation	معادله دیفرانسیل معمولی
ordinary Point	نقطه معمولی
Parametrization	پارامترسازی
Path	مسیر
Phase	فاز
Phase Line	خط فاز
Phase Plane	صفحه فاز
Phase Prtrait	تصویر فاز
Poincare	پوانکاره
Poincare Map	نگاشت پوانکاره
Poincare Section	مقطع پوانکاره
Point Attractor	جاذب نقطه‌ای
Quasi Newton Method	روش شبه نیوتن
Repler Equilibrium Point	نقطه تعادل دافع
Response System	سیستم واکنش
Secure Commnunication	مخابرات امن
Self Similarity	خودشبهاهتی
Sensitivily Ti Initial Condition	حساسیت به شرایط اولیه
Simple	ساده
Simple Equilibrium Point	نقطه تعادل ساده
Singular	نقطه تعادل منفرد
Stable	پایدار

Stable Equilibrium Point	پایداری نقطه تعادل
Stable Limit Cycle	پایداری دور حدی
State	حالت
State Variable	متغیر حالت
Steepest Descent Algorithm	الگوریتم تندترین کاهش
Strange Attractor	چاذب عجیب
Strong Lyapunov	تابع لیاپانوف قوی
Trajectory	مسیر
Trajectory Function	تابع مسیر
Trial Function	تابع آزمایشی
Trial Solution	جواب آزمایشی
Troidal Attractor	چاذب سطحی مایچی
Unstable	ناپایدار
Unstable Equilibrium Point	نقطه تعادل ناپایدار
Unstable Limit Cycle	دور حدی ناپایدار
Variational	حساب تغییرات
Weak Lyapunov Function	تابع لیاپانوف ضعیف
Weight Function	تابع وزن

Aabstract

In present thisis propose a new method based capabilities of artificial neural network, to control chaotic system. To do so, we try to approximate the solution of Hamiltonian conditions based on the Pontryagin minimum principle (PMP). For this purpose, we introduce an error function that contains all PMP conditions. In the proposed error function, we used trial solutions for the trajectory function, control function and the Lagrange multipliers. These trial solutions are constructed by using neurons. Then, we minimize the error function that contains just the weights of the trial solutions. Substituting the optimal values of the weights in the trial solutions, we obtain the optimal trajectory, optimal control.

keywords: Dynamic System, Chaos, Chaotic System, Neural network, Nonlinear Planing Problem, Optimal Control, Pontryagin Minimim Prtinciple, Necessary Optimality Condition, Fractional Optimal Control



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Operations Research

**A numerical optimization method for
controlling chaotic systems**

By: Razie Tajik

Supervisor

Dr Alireza Nazemi

January 2018