بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد هندسه

مطالعه‌ی ویژگی‌های ناوردایی معادله KdV مرتبه پنجم تعمیم یافته

نگارنده: زهره امینی

استاد راهنما

دکتر سید رضا حجازی

بهمن ۱۳۹۶

شماره:
تاریخ:

باسمه‌تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد **خانم زهره امینی** با شماره دانشجویی **۹۳۰۳۲۰۴** رشته **ریاضی محض** گرایش **هندسه** تحت عنوان **مطالعه ی ویژگی های ناوردائی معادله KDV مرتبه پنجم تعمیم یافته** که در تاریخ **۱۳۹۶/۱۱/۱** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با امتیاز ۱۷/۲ درجه ....) ☐ مردود ☐

نوع تحقیق: نظری ☑ عملی ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	دکتر سید رضا حجازی	استادیار	
۲- استادراهنمای دوم	-------		
۳- استاد مشاور	--------		
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر ابراهیم هاشمی	استاد	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر مهدی ایرانمنش	دانشیار	
۶ـ استاد ممتحن دوم	دکتر احمد معتمد نژاد	دانشیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشکده علوم ریاضی

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم به آنان که:

ناتوان شدند تا من به توانایی برسم ...

موهایشان سپید شد تا رو سفید شوم ...

و عاشقانه سوختند تا گرمابخش وجودم و روشنگر راهم باشند...

پدرم

مادرم

استادانم

سپاس گزاری...

به مصداق «من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق» بسی شایسته است از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر سید رضا حجازی که با کرامتی چون خورشید، سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و دانش را با راهنمایی های کارساز و سازنده بارور ساختند و با نکته های دلاویز و گفته های بلند، صحیفه های سخن را علم پرور نمودند و همواره راهنما و راه گشای نگارنده در اتمام و اکمال پایان نامه بوده اند، تقدیر و تشکر نمایم.

و همچنین از اساتید فرزانه و دلسوز؛ جناب آقای دکتر مهدی ایرانمنش و جناب آقای دکتر احمد معتمدنژاد که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند؛ کمال تشکر و قدردانی را دارم.

معلا مقامت ز عرش برتر باد
همیشه توسن اندیشه ات مظفر باد

زهره امینی
بهمن ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب **زهره امینی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **مطالعه‌ی ویژگی‌های ناوردایی معادله KdV مرتبه پنجم تعمیم یافته** ، تحت راهنمایی **سید رضا حجازی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچجا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ‘‘ یا ‘‘ Shahrood University of Technology ‘‘ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

زهره امینی
بهمن ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

هدف اصلی این پایان نامه تحلیل و بررسی ویژگی های ناوردایی معادله KdV مرتبه پنجم تعمیم یافته است. به این معنا که تبدیلات تقارنی مورد نظر معادله کدامند و معادلات هم ارز کاهش یافته این معادله به چه صورت خواهند بود. برای این کار ابتدا با بیان مفاهیم هندسی اولیه و مورد نیاز ساختار هندسی معادله را مشخص خواهیم کرد تا در ادامه بتوانیم گروه تقارنی معادله را بدست آوریم.سپس با الگوریتمی که به آن اشاره خواهیم کرد ویژگی های ناوردایی شامل معادلات هم ارز کاهش یافته، جوابهای گروه_ناوردا و تبدیلات هم ارز معادله را ارائه خواهیم نمود.

کلمات کلیدی: میدان برداری، جبر لی، فضای جت، تقارن لی، کاهش مرتبه ، معادله KdV

فهرست مطالب

مقدمه

بطور کلی، برای توصیف ویژگی ها و رفتارهای پدیده‌های طبیعی از معادلات دیفرانسیل به عنوان یک ابزار قدرتمند استفاده می شود. اصطلاح معادلات دیفرانسیل برای اولین بار در سال ۱۶۷۶ توسط لایبنیتز [۱] بکار برده شده است. در هر رخدادی چه در فیزیک، شیمی ، هندسی و... هرگاه رابطه‌ای بین چند متغیر با مقادیر مختلف در حالتها و زمان های مختلف وجود داشته باشد و مسئله نرخ تغییرات متغیرها در زمان های مذکور با حالت های بیان شده مطرح باشد، از معادلات دیفرانسیل استفاده می‌کنیم. معادلات دیفرانسیل را از لحاظ تعداد متغیرهای مستقل می توان به دو دسته رده بندی کرد:

۱. معادلاتی که تنها یک متغیر مستقل داردکه به معادلات دیفرانسیل معمولی ODE مشهورند.

۲. معادلاتی که بیش از یک متغیر مستقل دارند و از آنها به عنوان معادلات دیفرانسیل جزئی PDE یاد می‌شود.

رده بندی‌های دیگری هم از لحاظ ارتباط مشتقات ظاهرشده در معادله وجود دارد که از مهمترین آنها می‌توان به خطی یا غیر خطی بودن معادله اشاره کرد.
تا اواسط قرن نوزدهم، مطالعه معادلات دیفرانسیل بیشتر به حل دسته ای خاص از معادلات از جمله، معادلات جدایی پذیر ، معادلات همگن و. . . اختصاص داشت، تا اینکه ماریوس سوفوس لی [۲] روش تقارن را برای حل معادلات دیفرانسیل مطرح کرد. امروزه این روش کارآمد را به احترام این ریاضیدان بزرگ ، روش گروه های لی در معادلات دیفرانسیل می نامند.
هنگامی که با یک دستگاه معادله دیفرانسیل مواجه هستیم، بدون شک مهمترین مسئله، یافتن جوابهای آن دستگاه است. روشهای بسیاری برای حل معادلات، بخصوص معادلات معمولی ارائه شده است که هرکدام جوابگوی دسته ای خاص از معادلات است. اما هنگامی که با یک دستگاه معادلات جزئی مواجه می شویم، شاید نتوان روش مدونی برای آن ارائه کرد. اما در روش گروههای لی، به شرط یافتن تقارنهای دستگاه، مستقل از اینکه معادلات خطی است یا غیر خطی، جزئی است یا معمولی، بوسیله الگوریتمی که در این پایان نامه بیان خواهد شد، می توان دسته وسیعی از جوابهای دستگاه را بدست آوردو این امر می تواند بسیاری از نقیصه‌هاو کمبودهای موجود در بحث حل معدلات دیفرانسیل را برطرف سازد.

---

[۱] Leibniz گوتفرید ویلهلم فون لایبنیتس متولد: ۱ ژوئیه ۱۶۴۶ م– متوفی به ۱۴ نوامبر ۱۷۱۶ م آلمان – وی اولین کسی بود که از نماد $\frac{\partial y}{\partial x}$ جهت نشان دادن مشتق تابع y در نقطه x استفاده کرد. همچنین ابداع بسیاری از نمادهای پرکاربرد ریاضیات همانند نماد$\int$ (انتگرال) ، منسوب به اوست.

[۲] Marius Sophus Lie متولد۱۸۴۲ م– متوفی به سال ۱۸۹۹ م –ریاضی‌دان نروژی که به خاطر فعالیت‌هایش در زمینه تقارن و گروه لی مشهور است.

بطورکلی منظور از گروه تقارن یک دستگا معادلات دیفرانسیل، بزرگترین گروه لی موضعی از تبدیلات است که روی فضای شامل متغرهای مستقل و وابسته عمل کرده و می تواند جوابها را به جوابهای دیگر تبدیل کند. این گروهها به دو دسته کلی، پیوسته و گسسته تقسیم بندی می شوند و ما در این پژوهش دسته اول را بررسی خواهیم کرد.
از مهمترین کاربردهای دیگر گروههای تقارن علاوه بر مطلبی که در بالا به آن اشاره کردیم، رده بندی جوابهای یک دستگاه معادلات دیفرانسیل می باشدکه به کمک تبدیلات دیفئومورفیسم تولیدشده از تقارنهای بدست آمده انجام می پذیرد، که در فصلهای دوم و سوم به آن اشاره خواهیم کرد.
ساختار اصلی این پایان نامه به صورتی که در ادامه خواهد آمد تنظیم شده است. چون نظریه گروههای لی مبتنی بر مطالعه ساختار هندسی معادلات است، در فصل اول به موارد مهمی در هندسه همچون منیفلد، نگاشت هموار، میدان برداری و ... اشاره خواهیم کرد. فصل دوم را به مطالعه ساختارهندسی یک دستگاه اختصاص دادیم. مفهوم مهم فضای جت در این فصل توضیح داده شده است. گروه تقارن را بر اساس جبرلی ساخته شده توسط مولدهای گروه مطالعه می کنیم و این فصل را با ارائه چند مثال متنوع به پایان خواهیم برد. در فصل سوم معادلات KdV مرتبه پنجم تعمیم یافته را معرفی کرده و با روش توصیف شده در فصل قبل، جبرلی تقارنهای آن را ارائه می کنیم. روش کاهش مرتبه معادلات را به کمک تقارنها بیان کرده و از آن برای کاهش معادله KdV و یافتن جوابهای دقیق و رده بندی آنها استفاده می کنیم.

فصل ۱

مقدمات

در این فصل مفاهیم، تعاریف و پیش نیازهای اساسی که در فصول آینده مورد استفاده قرار خواهد گرفت را به اختصار بررسی و تحلیل می نماییم.

۱.۱ منیفلد

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. خانواده τ از زیر مجموعه های X را یک توپولوژی بر روی X می نامند اگر

۱. τ شامل مجموعه تهی و X باشد.

۲. τ شامل اجتماع هر تعداد (متناهی یا نامتناهی)از مجموعه های موجود در آن باشد

۳. اشتراک هر دو عضو τ به τ تعلق داشته باشد.

زوج (X, τ) را فضای توپولوژیک می‌نامند .

تعریف ۲.۱.۱. فضای توپولوژیک M را یک منیفلد توپولوژیکی n ـ بعدی می‌گوییم هرگاه:

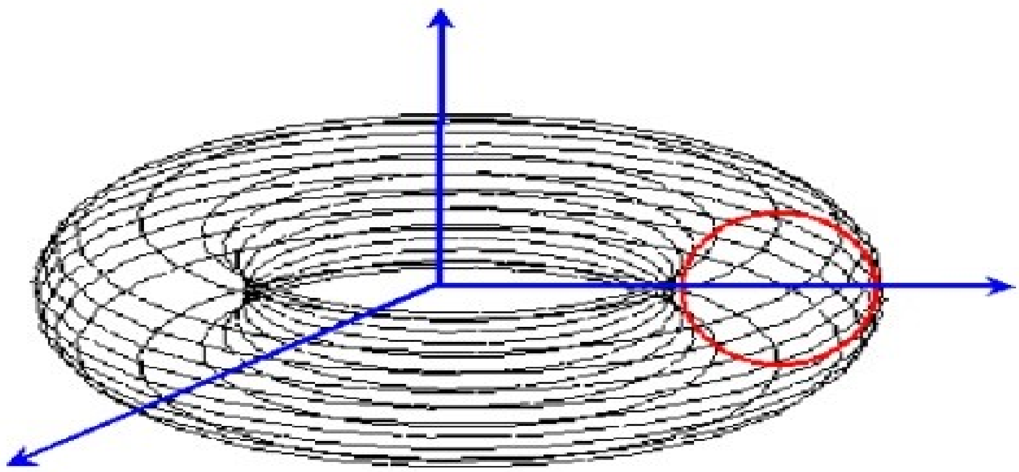
۱. M هاسدورف باشد، یعنی هر دو نقطه p, qمتعلق به M متعلق به زیرمجموعه‌های باز U, V در M باشند به طوریکه

$$U \cap V = \emptyset$$

۲. M پایه ای شمارا داشته باشد. یعنی شمارای نوع دوم باشد.

۳. M به طور موضعی اقلیدسی از بعد n باشد یعنی هر نقطه آن مشمول در یک همسایگی همئومورف با یک زیر مجموعه باز $\mathbb{R}^n$ باشد. منظور از همئومورف بودن یک نگاشت یعنی خودش و وارونش پیوسته باشند.

شکل ۱.۱: تیوب منیفلدی که همه می شناسیم



تعریف ۳.۱.۱. هرگاه M یک منیفلد توپولوژیک باشد، به زوج (U,φ) یک چارت مختصاتی(به اختصار چارت) روی M گوییم. اگر تابع $\varphi : U \to \tilde{U}$ یک همئومورفیسم از U به زیر مجموعه باز $\tilde{U} = \varphi(U)$ از $\mathbb{R}^n$ است.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید M یک منیفلد توپولوژیکی باشد و (U,φ)،(V,ψ) دوچارت روی M باشند، به طوریکه $U \cap V \neq \emptyset$. در این صورت نگاشت $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ را نگاشت گذر از φ به ψگوییم. دو چارت فوق را به طور هموار سازگار نامیم هرگاه $\psi \circ \varphi^{-1}$ یک دیفئومورفیسم باشد.

تعریف ۵.۱.۱. یک اطلس روی M خانواده ای از چارت هاست هرگاه دامنه ی آنها M را بپوشاند.

تعریف ۶.۱.۱. اطلس A را هموار گوییم هرگاه هر دو چارت درA بایکدیگر به‌طورهموار سازگار باشند.

تعریف ۷.۱.۱. اطلس A را ماکسیمال گوییم هرگاه مشمول در هیچ اطلس هموار دیگری نباشد.

تعریف ۸.۱.۱. منیفلد توپولوژیکی M را هموار گوییم هرگاه مجهز به یک اطلس ماکسیمال هموار باشد.

مثال ۱.۱.۱. $\mathbb{R}^n$ یک nمنیفلد هموار است با ساختاری هموار که بوسیله اطلس شامل تنها چارت $(\mathbb{R}^n, Id)$ تعیین شده است که آن را ساختار هموار استاندارد می نامیم.

مثال ۲.۱.۱. کره S^n یک منیفلد توپولوژیکی n ـ بعدی است.

مثال ۳.۱.۱. فرض کنید $M(m \times n, \mathbb{R})$ نشان دهنده فضای ماتریس های $m \times n$ با درایه های حقیقی باشد. این فضا یک فضای برداری با بعد mn تحت اعمال جمع ماتریس ها و ضرب اسکالر است. بنابراین $M(m \times n, \mathbb{R})$ یک منیفلد mnـ بعدی است. بطور مشابه فضای $M(m \times n, \mathbb{C})$ فضای ماتریس های با درایه های مختلط، یک فضای برداری با بعد $2mn$ روی $\mathbb{R}$ است و بنابراین یک $2mn$ ـ بعدی است.

مثال ۴.۱.۱. هر زیر مجموعه باز یک n ـ منیفلد هموار، خود یک n ـ منیفلد هموار است

مثال ۵.۱.۱. گروه خطی عام $GL(n, \mathbb{R})$ مجموعه ماتریس های $n \times n$ وارون پذیر با درایه های حقیقی یک منیفلدn^2 بعدی است، زیرا زیر مجموعه بازی از فضای n^2 ـ بعدی $M(n \times n, \mathbb{R})$ است.

تعریف ۹.۱.۱. نگاشت $F : M \to N$ بین دو منیفلد هموار M ، N را هموار گوییم هرگاه هر نقطه از M مانند p درون یک چارت مثل (U, φ) و تصویر آن یعنی $F(p)$ درون یک چارت مثل (V, ψ) باشد به طوریکه نگاشت زیر

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V),$$

هموار باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱. اگر N و M دو منیفلد هموار به ترتیب n و m ـ بعدی باشند و $F : M \to N$ نگاشتی هموار باشد، رتبه F در نقطه $x = (x^1, ..., x^m)$ برابر است با رتبه ماتریس ژاکوبین $n \times m$

$$J_F = \left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j} \right), \quad i = 1, ..., m, \quad j = 1, ..., n,$$

رتبه F را با $rankF$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۱.۱. اگر N و M دو منیفلد هموار باشند، آنگاه تابع مشتق پذیر $\psi : M \to N$ را یک ایمرژن(غوطه وری) گوییم هرگاه به ازا هر نقطه از دامنه ψ ، داشته باشیم:

$$rank\psi = dimM.$$

تعریف ۱۲.۱.۱. اگر N و M دو منیفلد هموار باشند، آنگاه تابع مشتق پذیر $\psi : M \to N$ را یک **سابمرژن** (فرورفتگی) گوییم هرگاه به ازا هر نقطه از دامنه ψ ، داشته باشیم:

$$rank\psi = dimN.$$

۲.۱ میدان‌های برداری

تعریف ۱.۲.۱. نگاشت خطی $V : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ را یک مشتق در نقطه‌ی $a \in \mathbb{R}^n$ مینامیم، هرگاه برای هر $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$V\left(fg\right)\left(a\right) = f\left(a\right) \cdot Vg\left(a\right) + g\left(a\right) \cdot Vf\left(a\right).$$

تعریف ۲.۲.۱. مشتق جهتی در نقطه a در راستای V را که یک عملگر خطی است به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathcal{D}_{v|a} : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$$
$$\mathcal{D}_{v|a} = \frac{d}{dt}|_{t=\circ} f(a + tV).$$

تعریف ۳.۲.۱. مجموع تمام عملگرهای مشتق روی $C^\infty(M)$ در نقطه $x \in M$ را فضای مماسی در نقطه $x \in M$ می‌گوییم و با T_xM نشان می دهیم.

گزاره ۱.۲.۱. نگاشت $\mathbb{R}^n_a \to T_a\mathbb{R}^n$ با ضابطه $V_a \to \mathcal{D}_V|_a$ یک ایزومورفیسم است.

برهان. به وضوح $V_a \longmapsto \mathcal{D}_V|_a$ نگاشتی خطی است. برای آنکه نشان دهیم یک به یک است، فرض می‌کنیم $\mathcal{D}_V|_a$ یک مشتق صفر است. $V_a = V^i e_i|_a$ را به صورت پایه های استاندارد نشان می دهیم، f تابعی است هموار که j ـامین مختصاتش را که هموار است بصورت زیر نشان می‌دهیم:

$$x^j : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R},$$

اکنون داریم:

$$\circ = \mathcal{D}_V|_a(x^j) = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}(x^j)|_{x=a} = V^i, \tag{۱.۱}$$

می‌دانیم اگر $i = j$ آنگاه $\frac{\partial x^j}{\partial x^i} = ۱$ در غیر این‌صورت برابر صفر می‌شود بنابراین نتیجه می گیریم که v_a یک میدان برداری صفر است. برای اثبات پوشایی فرض می کنیم که W یک میدان

دلخواه در باشد. با نمایش V^ie_i بصورت استاندارد $V^1,\dots,V^n$ توابع حقیقی مقداری هستند که طبق (۱.۱) ، $W(x^j)=V^i$. نشان می‌دهیم $W=\mathcal{D}_V|_a$. فرض می کنیم که f تابعی حقیقی مقدار روی $\mathbb{R}^n$ باشد. بنابر قضیه تیلور [1] داریم:

(۲.۱)

$$f(x)=f(a)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(a)(x^i-a^i)+\sum_{i,j=1}^{n}(x^i-a^i)(x^j-a^j)\int_0^1(1-t)\frac{\partial^2 f}{\partial^i\partial x^j}(a+t(x-a))dt.$$

چون دو تابع هموار (x^i-a^i)و(x^j-a^j) در نقطه $x=a$ به سمت صفر میل می کنند، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
Wf&=W(f(a))+\sum_{i=1}^{n}W(\frac{\partial f}{\partial x^i}(a)(x^i-a^i))\\
&=0+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(a)(W(x^i)-W(a^i))\\
&=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(a)V^i=\mathcal{D}_V|_a f.
\end{aligned}$$

□

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد هموار باشد. به ازای هر نقطه $x\in M$ نگاشت خطی $X:C^\infty(M)\to\mathbb{R}$ را یک مشتق در نقطه‌ی x می‌نامیم، هرگاه برای هر $f,g\in C^\infty(M)$

$$X\left(fg\right)\left(x\right)=f\left(x\right)Xg\left(x\right)+g\left(x\right)Xf\left(x\right).$$

قضیه ۱.۲.۱. بعد فضای مماسی برابر بعد منیفلد است. و هر فضای مماسی فضایی برداری است که مجموعه‌ی $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ یک پایه برای T_xM است.

برهان. [۷] □

تعریف ۵.۲.۱. در مختصات موضعی، بردار مماس $V|_x$ بر منحنی $x=\phi(t)$ بوسیله مشتق $V|_x=\phi_x$ مشخص می‌شود. بردار مماس بر منیفلد M در نقطه $x\in M,$ به وسیله مماس بر منحنی هموار گذرنده از x تعریف می‌شود. میدان برداری V روی M ، بردار مماس $V|_x\in T_xM$ در نقطه‌ی x از منیفلد است که $V|_x$ به طور هموار از نقطه ای به نقطه‌دیگر تغییر می کند. میدان برداری برای هر تابع هموار $\xi^i(x)$ در x با مختصات موضعی $\left(x^1\cdots,x^m\right)$ دارای فرم

$$V|_x=\xi^1\frac{\partial}{\partial x}+\xi^2\frac{\partial}{\partial x^2}+\cdots+\xi^m\frac{\partial}{\partial x^m}.$$

است.

[1] Sir Brook Taylor عضو انجمن سلطنتی متولد ۱۶۸۵ –متوفی به سال ۱۷۳۱م ریاضیدان انگلیسی که به علت قضیه تیلور و سری تیلور و محاسبات معادلات متناهی، مشهور است.

تعریف ۶.۲.۱. منحنی پارامتری هموار $x=\phi(\varepsilon)$ به طوری که بردار مماس بر هر نقطه منحنی با مقدار V در آن نقطه برابر باشد، منحنی انتگرال از میدان برداری V نامیده می‌شود.به عبارت دیگر:

$$\frac{d\phi}{d\varepsilon}|_x = V|_{\phi(x)} \qquad \forall\varepsilon\in\mathbb{R},$$

بنابراین در مختصات موضعی، باید $x=\phi(\varepsilon)=\left(\phi^{1}(\varepsilon),\cdots,\phi^{m}(\varepsilon)\right)$ جوابی از دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\varepsilon}=\xi^i(x), \qquad i=1,\cdots,m,$$

باشد که $\varepsilon^i(x)$ ـ ها ضرایب V در x هستند.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید V میدانی برداری منحنی انتگرال ماکسیمال پارامتری که از نقطه x در M می گذرد را شار تولید شده توسط x نامیده و آن را با $\Psi(\varepsilon,x)$ نشان می‌دهیم و Ψ را شار تولید شده توسط x می نامیم.

خواص شار میدان برداری برای هر $\delta\in\mathbb{R}$:

$$\Psi\left(\delta,\Psi\left(\varepsilon,x\right)\right)=\Psi\left(\delta+\varepsilon,x\right) \qquad ,x\in M \qquad , \tag{۳.۱}$$

$$\Psi\left(0,x\right)=x, \tag{۴.۱}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Psi\left(\varepsilon,x\right)=V|_{\Psi(\varepsilon,x)}, \tag{۵.۱}$$

اعلب گروه یک پارامتری از تبدیلات و میدان برداری V ، مولد بینهایت کوچک عمل نامیده می‌شود. با استفاده از قضیه تیلور داریم:

$$\Psi\left(\varepsilon,x\right)=x+\varepsilon\xi\left(x\right)+O\left(\varepsilon^{2}\right), \tag{۶.۱}$$

در معادله (۶.۱) $\xi=\left(\xi^{1},\cdots,\xi^{n}\right)$ ضرایب V هستند. اگر$\Psi\left(\varepsilon,x\right)$یک گروه یک‌ـپارامتری از تبدیلات روی M باشد آنگاه مولد بینهایت کوچک آن بر طبق (۵.۱) به ازاء $\varepsilon=0$ بدست می‌آید:

$$V|_x=\frac{d}{d\varepsilon}\Psi\left(\varepsilon,x\right)|_{\varepsilon=0},$$

معمولا محاسبه شار یا گروه یک ـپارامتری تولید شده توسط میدان برداری V به عنوان نگاشت نمایی در نظر گرفته می‌شود، که با نماد

$$\exp\left(\varepsilon V\right)\equiv\Psi\left(\varepsilon,x\right),$$

نمایش داده می‌شود.

مثال ۱.۲.۱. $M=\mathbb{R}$ با مختصات x و میدان برداری $V=\dfrac{\partial}{\partial x}=\partial_x$ مفروض است. داریم:

$$\exp(\varepsilon V)\,x=\exp(\varepsilon\partial_x)\,x=x+\varepsilon,$$

که به آن عمل گروه انتقالات گوییم. همچنین شار تولید شده توسط میدان برداری $V=x\partial_x$ گروه تبدیلات مقیاسی نام دارد. زیرا:

$$\exp(\varepsilon V)\,x=\exp(\varepsilon x\partial_x)\,x=e^{\varepsilon}x,$$

مهمترین عملی که روی میدان‌های برداری تعریف می‌شود، **کروشه** یا **جابجاگر لی** است.

تعریف ۸.۲.۱. اگر V و W دو میدان برداری روی M باشند، کروشه‌ی لی آنها که با نماد $[V,W]$ نمایش داده می‌شودنیز یک میدان برداری است که برای تمام توابع $f:M\to N$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[V,W]\,(f)=V\,(W\,(f))-W\,(V\,(f))\,. \qquad (۷.۱)$$

همچنین در مختصات موضعی اگر داشته باشیم :

$$V=\sum_{i=۱}^{m}\xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}\quad,\quad W=\sum_{i=۱}^{m}\eta^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i},$$

آنگاه می‌توان نوشت:

$$[V,W]=\sum_{i=۱}^{m}\left(V\left(\eta^i\right)-W\left(\xi^i\right)\right)\frac{\partial}{\partial x^i}=\sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{m}\left(\xi^i\frac{\partial\eta^i}{\partial x^j}-\eta^j\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}. \qquad (۸.۱)$$

گزاره ۲.۲.۱. ثوابت $c,\acute{c}$ ومیدان های برداری $V,\acute{V},W,\acute{W},U$ روی M مفروضند. کروشه لی آنها در خواص زیر صدق می کند:

- خاصیت دو خطی:

$$\left[cV+\acute{c}\acute{V},W\right]=c\,[V,W]+\acute{c}\left[\acute{V},W\right],$$

و

$$\left[V,cW+\acute{c}\acute{W}\right]=c\,[V,W]+\acute{c}\left[V,\acute{W}\right],$$

- پادمتقارن

$$[V,W]=-\,[W,V]\,,$$

- اتحاد ژاکوبی

$$[U,[V,W]]+[W,[U,V]]+[V,[W,U]]=۰,$$

برهان. با توجه به دو رابطه‌ی (۸.۱)و(۷.۱) می توان به سادگی احکام فوق را ثابت کرد. □

مثال ۲.۲.۱. دو میدان برداری $V = y\frac{\partial}{\partial x}$ و $W = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$[V, W] = V\left(x^2\right)\frac{\partial}{\partial x} + V\,(xy)\frac{\partial}{\partial y} - W\,(y)\frac{\partial}{\partial x} = xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}$$

۳.۱ گروه‌های لی

گروه‌های لی بین دو شاخه جبر و توپولوژی قرار گرفته اند. از سویی دارای خواص هندسی و از سویی دارای خواص جبری هستند. (خاصیتهای گروه از جبر و خاصیت پارمتری کردن عناصر به وسیله نقطه هایی از یک منیفلد دیفرانسیل پذیر از هندسه).

تعریف ۱.۳.۱. منیفلد هموار G که دارای ساختار جبری گروه است را یک گروه لی گوییم، هرگاه : نگاشت ضربی:

$$m : G \times G \to G \qquad m(g, h) = gh; \qquad g, h \in G,$$

ونگاشت وارون ساز:

$$i : G \times G \to G \qquad i(g) = g^{-1}; \qquad g \in G,$$

هموار باشند. اگر Gیک منیفلد توپولوژیکی و نگاشت های i و m پیوسته باشند، آنگاه G را یک **گروه توپولوژیکی** می نامیم.

لم ۱.۳.۱. فرض کنید G یک منیفلد هموار با ساختار گروهی باشد، بطوریکه نگاشت $G \times G \to G$ با $(g, h) \to gh^{-1}$ هموار باشد، در این‌صورت G یک گروه لی است.

برهان. [۷] □

مثال ۱.۳.۱. $\mathbb{R}^n$ با عمل جمع یک گروه لی است.

مثال ۲.۳.۱. گروه ماتریس‌هایی با دترمینان غیر صفر از اعدادحقیقی با ضرب ماتریسی (گروه خطی عام) که با $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ نمایش داده می‌شود، با عمل ضرب ماتریسی یک گروه لی است.

مثال ۳.۳.۱. اگر $G_1, \ldots, G_n$ گروه لی باشند، آنگاه $G_1 \times \ldots, \times G_n$ با تعریف نگاشت‌های زیر یک گروه لی است.

$$(g_1, \ldots, g_n)(h_1, \ldots, h_n) = (g_1h_1, \ldots, g_nh_n),$$

و

$$(g_1, \ldots, g_n)^{-1} = (g_1^{-1}, \ldots, g_n^{-1}),$$

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنیم G یک گروه لی باشد. زیر منیفلد H از G را یک **زیر گروه لی** گوییم هرگاه:

۱. H تحت عمل گروه یک زیرگروه G باشد.

۲. H خود یک گروه لی باشد.

قضیه ۱.۳.۱. هرگاهG یک گروه لی و H یک زیر گروه بسته G باشد، آنگاه H یک زیر گروه لی G است. **(قضیه کارتان)**

تعریف ۱.۳.۳. یک **گروه تبدیلات** مثل G یک گروه لی است که بر روی منیفلد M عمل می کند، با این شرط که نگاشت:

$$\phi : G \times M \to M,$$

$$(g, p) \rightsquigarrow g \cdot p,$$

که دارای ویژگی های ذیل است، هموار باشد.

۱. $(g \cdot h) \cdot p = g \cdot (h \cdot p)$

۲. $e \cdot p = p$

در این حالت می گوییم : G از چپ روی M عمل می‌کند. به همین ترتیب عمل از راست تعریف می‌شود. هرگاه G یک گروه تبدیلات روی M و $g \in G$ باشد، g را یک تبدیل گویند. به ازاء هر تبدیلg نگاشت تبدیل ϕ را به صورت $\phi_g : M \to M$ می توان بازنویسی کردکه به اختصار قرار می دهیم: $\phi_g = g$.

تعریف ۱.۳.۴. فرض کنیم G یک گروه تبدیلات بر روی منیفلد M و$p \in M$ باشد. در این صورت مجموعه تمام تبدیلات pتحت گروه تبدیلات G را مدار p تحت تبدیلG می نامند. این مجموعه را با

$$G \cdot p = \{g \cdot p : g \in G\},$$

نشان می دهیم. ثابت می‌شود که مدارها همگی زیر منیفلدی از منیفلد M می باشند.

تعریف ۱.۳.۵. فرض کنیم G یک گروه تبدیلات بر روی منیفلد M باشد، مجموعه عناصری از Gکه به ازاء هر $p \in M$از به صورت عضو همانی عمل می کنند ، زیرگروهی از آن خواهد بود که به آن زیر گروه پایدارساز می‌گوییم. این مجموعه را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G_p = \{g \in G : g \cdot p = p\},$$

تعریف ۶.۳.۱. گروه G روی منیفلد M :

۱. آزاد عمل می کند، اگر به ازاء هر $p \in M$ ، $G_p = \{e\}$.

۲. موضعا آزاد عمل می کند، اگر زیرگروه های ایزوتروپیک در یک همسایگی هر عضو $g \neq e$ بدیهی شوند.

۳. متعدی عمل می کند، هرگاه برای هر نقطه تنها یک مدار داشته باشد.

۴. نیم منظم عمل می‌کند، هرگاه تمام مدارهای هر نقطه $p \in M$ ، هم بعد باشند.

۵. منظم عمل می کند، هرگاه علاوه بر نیم منظم بودن، هر نقطه $p \in M$ دارای یک همسایگی به طور دلخواه کوچک باشد به طوری که اشتراک آن با مدار p همبند باشد.

تعریف ۷.۳.۱. فرض کنیم G یک گروه تبدیلات باشد که روی منیفلد M عمل می کند. تابع حقیقی مانند $I : M \to \mathbb{R}$ به قسمی که برای هر $p \in M$ و $g \in G$

$$I\left(g \cdot p\right) = I\left(p\right),$$

را یک تابع G ـ ناوردا می نامیم.

میدان های برداری خاصی که بر روی گروه لی G وجود دارد که تحت عمل گروه ناوردا هستند. این میدان ها یک فضای برداری با بعد نامتناهی می سازند که به آن جبر لی G یا مجموعه‌ی مولدهای بینهایت کوچک گروه G می‌گویند.

۴.۱ جبرهای لی

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنیم G یک گروه لی باشد. برای هر عنصر گروهی $g \in G$ **ضرب از راست** به صورت

$$R_g : G \to G,$$

$$h \to h \cdot g,$$

تعریف می‌شود. R_g یک دیفئومورفیسم با وارون $R_{g^{-۱}} = (R_g)^{-۱}$ می باشد.

تعریف ۲.۴.۱. میدان برداری V روی G، ناوردای راست نامیده می شود هرگاه

$$\forall h, g \in G : \mathrm{d}R_g \left(V|_{R_{g(h)}}\right) = V|_{hg}.$$

لم ۱.۴.۱. اگر V و W دو میدان برداری ناوردای راست باشند، آنگاه هر ترکیب خطی $aV + bW$ که $a, b \in \mathbb{R}$ نیز یک میدان برداری ناوردای راست است. پس مجموعه ی تمام میدان‌های برداری ناوردای راست یک فضای برداری را تشکیل می‌دهند.

برهان. [۷] □

تعریف ۳.۴.۱. فرض کنید G یک گروه لی باشد که از راست روی خودش عمل می‌کند. به مجموعه‌ی تمام میدان‌های برداری ناوردای راست، **جبر لی راست** G گفته می‌شود.

ضرب از چپ، میدان‌های برداری ناوردای چپ و جبر لی چپ متشابها تعریف می‌شوند. می توان اثبات کرد که جبر لی راست و چپ یکی هستند.
نمادگذاری: معمولا جبر لی G را با نماد$\mathcal{G}$ نشان می‌دهیم.
در حقیقت، یک جبر لی فضای برداری $\mathcal{G}$ همراه با عملگر دو خطی $[,] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ است که **کروشه‌ی لی** نامیده می‌شود و در ویژگی های کروشه ی لی صدق می کند.

قضیه ۱.۴.۱. فرض کنید که G یک گروه تبدیلات همبند باشد که روی M عمل می‌کند. در این صورت ، تابع حقیقی $I : M \to \mathbb{R}$ تحت عمل گروه G ناوردا می‌باشد اگر و تنها اگر به ازاء هر $p \in M$ و $V \in \mathcal{G}$ داشته باشیم:

$$V_p\left(I\right) = \circ,$$

برهان. [۴] □

توجه نمایید که هرگاه $u = I(x)$ یک تابع یک پارامتری بوده و $V = \sum_{i=1}^{n} \xi^i\left(x\right) \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ یک مولد بینهایت کوچک باشد، آنگاه برای آنکه I یک ناوردا تحت G باشد، می‌باید داشته باشیم: $V\left(I\right) = \circ$ ، در نتیجه داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} \xi^i\left(x\right) \frac{\partial u}{\partial x^i} = \circ.$$

اکنون باید برای یافتن I به حل دستگاه زیر بپردازیم:

$$\frac{\mathrm{d}x^1}{\xi^1\left(x\right)} = \frac{\mathrm{d}x^2}{\xi^2\left(x\right)} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x^n}{\xi^n\left(x\right)}. \tag{۹.۱}$$

جوابهای عمومی رابطه (۹.۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$u^1\left(x^1, \ldots, x^n\right) = c_1, \ldots, u^{n-1}\left(x^1, \ldots, x^n\right) = c_{n-1} \quad .$$

که $c_1, \ldots, c_{n-1}$ها ثوابت انتگرال گیری هستندو توابع u^iـ ها مستقل از c_iـ ها می‌باشند. بنابراین مشاهده می‌گردد که توابع $u^1, \ldots, u^{n-1}$ جوابهای مستقل تابعی برای (۹.۱) هستندوهر جواب دیگر برای (۹.۱) باید تابعی برحسب $u^1, \ldots, u^{n-1}$ باشد.

فصل ۲

تحلیل هندسی معادلات دیفرانسیل

۱.۲ توابع و تبدیلات

تعریف ۱.۱.۲. یک دستگاه معادلات دیفرانسیل به فرم

$$\Delta\left(x, u^{(n)}\right) = ۰,$$

که شامل p متغیر مستقل $x = (x^۱, \cdots, x^p)$ و q متغیر وابسته $u = (u^۱, \cdots, u^q)$ است. جواب این دستگاه تابعی به فرم $u = f(x)$ می‌باشد که در آن

$$u^\alpha = f^\alpha(x^۱, \cdots, x^p), \qquad \alpha = ۱, \cdots, q,$$

تابعی هموار از متغیرهای مستقل $x = (x^۱, \cdots, x^p)$ می باشد.

تعریف ۲.۱.۲. دو دستگاه مختصاتی X روی $X = \mathbb{R}^p$ و U روی $U = \mathbb{R}^q$ در نظر میگیریم. به فضای اقلیدسی $E = X \times U \simeq \mathbb{R}^{p+q}$ که متشکل از متغیرهای مستقل و وابسته‌ی X و U می باشد، فضای کامل متناظر با دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta = ۰$ گفته می‌شود.

تعریف ۳.۱.۲. یک تبدیل نقطه‌ای روی فضای E دیفئومورفیسمی مانند $g : E \to E$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\bar{x}, \bar{u}) := g.(x, u) = (\xi(x, u), \psi(x, u)). \qquad (۱.۲)$$

تعریف ۴.۱.۲. منظور از یک گروه تقارن برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta = \circ$ ، گروهی موضعی از تبدیلات مثل G می باشد که روی یک مجموعه باز از E مانند O عمل نموده بطوریکه هر جواب از دستگاه $\Delta = \circ$ را به جواب دیگر تبدیل می‌کند.

اکنون گروه تبدیلات G که یک گروه لی است را در نظر بگیرید. تابع $u = f(x)$ را با گراف

$$\Gamma_f = \{(X, f(x)) : X \in \Omega\} \subset E,$$

در نظر بگیرید. مجموعه Ω در دامنه تعریف تابع f قرار گیرد. حال تبدیل روی گراف تابع را به صورت ذیل تعریف می کنیم.

$$g.\Gamma_f = \{(\bar{x}, \bar{u}) : (x, u) \in \Gamma_f\}.$$

البته لزومی ندارد که $g.\Gamma_f$ گراف تابعی جدید باشد، اما در صورتیکه G به طور هموار عمل کند و عنصر همانی G ، گراف f را ثابت نگه دارد، با انتخاب مناسب دامنه مشاهده می شود که تبدیل موضعا حول عنصر همانی G گراف تابع f را ناوردا نگه می‌دارد. یعنی

$$g.\Gamma_f = \Gamma_{\bar{f}}.$$

منظوراز $\bar{f}$ تبدیل یافته گراف تابع f تحت تبدیل g است.

مثال ۱.۱.۲. فرض کنیم $p = q = ۱$. بنابراین $X \simeq U \simeq \mathbb{R}$. اگر $G = SO\,(۲)$ گروه دوران‌های روی $E \simeq \mathbb{R}^۲$ باشد. آنگاه اگر θ عضوی از G باشد، داریم:

$$(\bar{x}, \bar{u}) = \theta.\,(x, u) = (x\cos\theta - u\sin\theta, x\sin\theta + u\cos\theta)\,.$$

اما اگر فرض کنیم $u = f(x)$ یک تابع روی $\mathbb{R}^۲$ با گراف Γ_f باشد، واضح است که عمل $G = SO\,(۲)$ روی تابع f چیزی نیست جز دوران گراف آن به اندازه زاویه θ. بنابراین اگر f روی یک بازه متناهی مانند $[a, b]$ تعریف شود و $|\theta|$ خیلی بزرگ نباشد، آنگاه $\theta.\Gamma_f$ خود گراف دوران یافته گراف تابع f خواهد بود.

یک روش کلی برای یافتن گراف تبدیل یافته‌ی تابع f به صورت زیر است:
تبدیل g را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$(\bar{x}, \bar{u}) = g.\,(x, u) = (\varphi_g\,(x, u)\,, \psi_g\,(x, u))\,.$$

که در آن φ_g و ψ_g دو تابع هموارند. مختصات گراف f به‌صورت زیر بدست می آید:

$$\bar{x} = \varphi_g\,(x.(f\,(x)) = \varphi_g \circ (Id \times f)\,(x)\,. \qquad (۲.۲)$$

$$\bar{u} = \psi_g\,(x.(f\,(x)) = \psi_g \circ (Id \times f)\,(x) \qquad x \in \Omega.$$

Id تابع همانی روی X است. برای یافتن f باید x را از (۲.۲) حذف کرد. بدیهی است بازاء $g=e$ داریم:

$$\varphi_e \circ (Id \times f) = Id.$$

به ازاء یک g نزدیک عضو همانی e ژاکوبین $\varphi \circ (Id \times f)$ غیر تکین است و با استفاده از قضیه تابع ضمنی داریم:

$$x = \left[\varphi_g (Id \times f)\right]^{-۱} (\bar{x}), \tag{۳.۲}$$

با جایگزینی ۳.۲ در $\bar{f}$ داریم:

$$\bar{f} = g.f = \left[\psi_g \circ (Id \times f)\right] \circ \left[\varphi_g \circ (Id \times f)\right]^{-۱}.$$

با حذف x و وارون کردن φ_g ، ضابطه $\bar{f}$ بشکل زیر بدست می‌آید:

$$\bar{u} = \bar{f}\left(\bar{x}\right) = f\left(\varphi_{g^{-۱}} \bar{x}\right)\right).$$

اکنون به مثال ۱.۱.۲ بر می گردیم. تابع

$$f(x) = ax + b. \tag{۴.۲}$$

را در نظر بگیرید. واضح است که :

$$(\bar{x}, \bar{u}) = (x\cos\theta - (ax+b)\sin\theta, x\sin\theta + (ax+b)\cos\theta). \tag{۵.۲}$$

حال با حذف x از دستگاه ۲.۲ خواهیم داشت:

$$x = \frac{\bar{x} + b\sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta} \quad , \tag{۶.۲}$$

برای یافتن تبدیل یافته تابع ۴.۲ تحت زاویه θ ، x را از ۵.۲ در $\bar{f}$ جایگذاری کرده داریم:

$$\bar{u} = \bar{f}(\bar{x}) = \frac{\sin\theta + a\cos\theta}{\cos\theta - a\sin\theta} + \frac{b}{\cos\theta - a\sin\theta} \quad , \tag{۷.۲}$$

در مثال تحلیل شده فوق به خوبی می توان مفهوم تقارن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل را بررسی نمود. بنابر تعریف ۴.۱.۲ تبدیل g از گروه لی G یک تقارن برای دستگاه معادلات $\Delta = ۰$ است هرگاه اگر $u = f(x)$ یک جواب برای دستگاه باشد، آنگاه $g.u$ خود یک جواب است. اکنون معادله دیفرانسیل $u_{xx} = ۰$ را در نظر می‌گیریم. روشن است که کلیه‌ی خطوط در $\mathbb{R}^۲$ یعنی توابعی به شکل ۴.۲ جوابی برای این معادله است. پس دوران هر خط راست در $\mathbb{R}^۲$خود یک خط راست است. لذا گروه دوران های $SO(۲)$ یک گروه تقارن برای این معادله است.

۲.۲ امتداد دهی

یکی از اساسی ترین مفاهیم در تبیین هندسی نظریه‌معادلات دیفرانسیل فضای جت است.

تعریف ۱.۲.۲. یک تابع حقیقی مقدار هموار مانند $f : X \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = f\left(x^{۱}, \cdots, x^{p}\right)$ را در نظر بگیرید. این تابع دارای

$$p_k = \binom{p+k-۱}{k}$$

مشتق جزیی متمایز از مرتبه k نسبت به متغیرهایش می‌باشد. اگر $J = (j_{۱}, \cdots, j_k)$ یک اندیس چندگانه از متغیرهای تابع f باشد ، آنگاه مشتق جزیی تابع نسبت به J به صورت

$$\partial_j f\,(x) = \frac{\partial^k f\,(x)}{\partial x^{j_{۱}} \cdots \partial x^{j_k}},$$

نشان داده می شود. مرتبه اندیس چندگانه J را با $\sharp J \equiv k$ نشان می‌دهیم که بیانگر آنست که چند بار از تابع مشتق گرفته‌ایم.

اکنون فرض کنیم $f : X \to U$ یک تابع pمتغیره q مقداری با ضابطه

$$u = f(x) = \left(f^{۱}\,(x)\,, \cdots, f^{q}\,(x)\right),$$

باشد، اگر فضای مشتقات جزئی از مرتبه‌ی iـام را با U_i نمایش دهیم، فضای تمام مشتقات جزئی این تابع تا مرتبه n ـام برابر است با:

$$U^{(n)} := U \times U_{۱} \times \cdots \times U_n,$$

بعد فضای $U^{(n)}$ برابر است با:

$$q + qp_{۱} + qp_{۲} + \cdots + qp_k = q\binom{p+q}{n} := qp^{(n)}.$$

توجه: زین پس هر نقطه در $U^{(n)}$ به صورت $u^{(n)} = f^{(n)}(x)$ یا $u^{(n)} = pr^{(n)}f(x)$ نشان داده می‌شود که به آن امتداد مرتبه n ـ ام تابع f می‌گوییم. $u^{(n)}$ شامل $qp^{(n)}$ متغیر متمایز به شکل u_J^{α} است که $\alpha = ۱, \cdots, q$ و $J = (j_{۱}, \cdots, j_k)$ اندیسی چندگانه با شروط $۱ \leq j_k \leq p$ ، $\circ \leq k \leq n$ می باشد.

تعریف ۲.۲.۲. فضایی که شامل تمامی متغیرهای مستقل، وابسته و مشتقات وابسته تا مرتبه n ـ ام است را فضای جت مرتبه n ـ ام می گوییم.

به عبارتی دیگر به فضای جت مرتبه n ـ ام یک تابع منهای متغیرهای مستقل آن، امتداد تابع تا مرتبه‌ی n ـ ام گفته می‌شود.

مثال ۱.۲.۲. تابع $u = f(x,y)$ که شامل دو متغیر مستقل و یک متغیر وابسته است را در نظر بگیریم. کافیست مشتقات جزیی تابع فوق را تا مرتبه دوم بنویسیم تا $J^{۲}$ را بیابیم. پس:

$$J^{۲} = \{(x, y; u; u_x, u_y; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})\}$$

مثال ۲.۲.۲. در مثال (۱.۲.۲) امتداد مرتبه دوم تابع f به صورت زیر است:

$$f^{(۲)}(x,y) = \{(f; f_x, f_y; f_{xx}, f_{xy}, f_{yy})\}$$

۳.۲ امتداد میدان های برداری و یافتن تقارن ها

اکنون زمان آن است که با توجه به تعریف فضای جت ، به بیان دقیق تر دستگاه معادلات دیفرانسیل بپردازیم:

تعریف ۱.۳.۲. یک دستگاه l ـ معادله دیفرانسیل مرتبه n ـ ام با p ـ متغیر مستقل و q ـ متغیر وابسته تابعی مانند Δ به صورت

$$\Delta : J^n \to \mathbb{R}^l \qquad (۸.۲)$$

با ضابطه

$$\Delta_\nu (x, u^n) = ۰ \qquad \nu = ۱, \cdots l \qquad (۹.۲)$$

است که می‌توان آن را بصورت

$$\Delta_\nu (x, u^n) = \left(\Delta^{۱}(x, u^n), \cdots, \Delta^{l}(x, u^n)\right),$$

نوشت. دستگاه (۱.۳.۲) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی نام دارد ، اگر $p \succ ۱$ باشد. اگر $p = ۱$ باشد، آنگاه دستگاه را یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی می‌گوییم.

۴.۲ تقارن

بررسی تقارن اشیاء ساده می تواند در تفهیم تقارن معادلات دیفرانسیل مفید باشد. به طور تقریبی می توان گفت منظور از تقارن برای یک شیء هندسی تبدیلی است که آن شیء را ظاهراً بدون تغییر بگذارد. تقارن تبدیلی است که در شرایط زیر صدق می کند:

۱. باید تبدیل حافظ ساختار باشد.

۲. باید تبدیل دیفئومورفیسم باشد.

۳. باید تبدیل شئ مورد نظر را به خودش بنگارد.

۵.۲ تقارن های معادلات دیفرانسیل

برای شروع ابتدا تقارن یک دستگاه معادلات جبری را تعریف می‌کنیم:

تعریف ۱.۵.۲. یک دستگاه معادلات جبری به صورت زیر است:

$$F_{\nu}(x) = 0 \qquad \nu = 1, 2. \cdots, l, \tag{۱۰.۲}$$

که در آن $F_1(x), \cdots, F_l(x)$ به ازای هر نقطه متعلق به منیفلد توابع حقیقی مقدارند.

تعریف ۲.۵.۲. یک گروه موضعی از تبدیلات مانند G که روی منیفلد M عمل می کند را یک گروه تقارن برای معادلات (۱۰.۲) می گوییم هرگاه جواب‌ها را به جواب‌های دیگر ببرد.

تعریف ۳.۵.۲. فرض کنیم M و N دو منیفلد هموار باشند و G یک گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی M عمل می کند. تابع $F : M \to N$ را G ـ ناوردا می‌گوییم اگر برای هر $g \in G$ ، $x \in M$ بطوری که $g.x$ تعریف شده باشد، آنگاه:

$$F(g.x) = F(x),$$

تعریف ۴.۵.۲. منظور از یک جواب هموار از دستگاه معادلات (۹.۲) تابعی هموار مانند $u = f(x)$ است، بطوریکه:

$$\Delta_{\nu}\left(x, f^{(n)}\right) = 0 \qquad \nu = 1, \cdots, l \quad , \tag{۱۱.۲}$$

تعریف ۵.۵.۲. امتداد دهی عمل گروه : فرض کنید که G یک گروه از تبدیلات باشد که روی یک زیر مجموعه باز از فضای کامل E مانند $\mathcal{O}$ عمل می‌کند. این عمل را می‌توان به فضای جت مرتبه nــام $\mathcal{O}$ یعنی $j^n(\mathcal{O})$ تعمیم داد، که به امتداد مرتبه nــام عمل گروه G روی $\mathcal{O}$ گفته و آن را با $G^{(n)}$ نمایش می‌دهیم. به عبارت ساده تر منظور از امتداد عمل یک گروه، تعمیم عمل آن به روی مشتقات جزئی تا مرتبه n ـ ام تابع $u = f(x)$ می‌باشد. این فرایند به این صورت است که :هرگاه $\mathfrak{g}$ یک تبدیل از گروه G باشد، آنگاه با در نظر گرفتن $\mathfrak{g}$ به عنوان یک تابع به‌صورت $\mathfrak{g} : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$ ، امتداد آن روی $\mathcal{O}$ به‌صورت :

$$\mathfrak{g}^{(n)} : J^n(\mathcal{O}) \longrightarrow J^n(\mathcal{O}),$$

با ضابطه‌ی $\mathfrak{g}^{(n)} \cdot \left(x_0, u_0^{(n)}\right) = \left(\tilde{x}_0, \tilde{u}_0^{(n)}\right)$ به ازای هر نقطه دلخواه $\left(x_0, u_0^{(n)}\right) \in J^n(\mathcal{O})$ تعریف می‌شود.

بنابر آنچه گذشت، عمل یک گروه قابل امتداد به روی فضای جت می‌باشد. اکنون نشان می‌دهیم که میدان‌های برداری را هم می‌توان امتداد داد که به آن‌ها مولدهای بینهایت کوچک گفته می‌شود. و این نخستین قدم جهت یافتن تقارن‌های معادلات دیفرانسیل است.

تعریف ۶.۵.۲. فرض کنید که $\mathcal{O}$ زیر مجموعه بازی از فضای $E = X \times U$ بوده و V یک میدان برداری روی $\mathcal{O}$ با گروه تک پارامتری $\exp(\varepsilon V)$ باشد، در این صورت ، امتداد مرتبه nــام V را که با $V^{(n)}$ نشان می‌دهیم یک میدان برداری روی $J^n(\mathcal{O})$ بوده که به آن مولد بینهایت کوچک گروه تک پارامتری $[\exp(\varepsilon V)]^{(n)}$ گفته می‌شود.

این به این معناست که:

$$V^{(n)}|_{(x,u^{(n)})} = \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}[\exp(\varepsilon V)]^{(n)}\left(x,u^{(n)}\right), \qquad \left(x,u^{(n)}\right) \in J^{(n)}(\mathcal{O}). \tag{۱۲.۲}$$

تعریف ۷.۵.۲. فرض کنید که $\mathcal{O} \subset E$ مجموعه باز بوده و $F\left(x,u^{(n)}\right)$ تابعی هموار روی $J^n(\mathcal{O})$ باشد. مشتق کامل F نسبت به x^i را با $D_iF\left(x,u^{(n+1)}\right)$ نشان می دهیم. مشتق کامل تابعی هموار است که روی $J^{n+1}(\mathcal{O})$ تعریف شده و خاصیت مهمش این است که هرگاه $u = F(x)$ تابعی هموار باشد، داریم:

$$D_iF\left(x,f^{(n+1)}(x)\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left[F(x,u^n)\right].$$

لم زیر که به طور مستقیم از قاعده زنجیره ای مشتق حاصل می‌شود، فرمولی صریح به منظور محاسبه مشتق کامل در غالب یک عملگر مشتق ارائه می‌نماید:

لم ۱.۵.۲. تابع $F(x,u^n)$ را روی فضای جت $J^n(\mathcal{O})$ در نظر بگیرید. هرگاه $J=(j_i,\cdots,j_k)$ یک اندیس چندگانه بوده و $u^\alpha_{j,i} = \dfrac{\partial u^\alpha_j}{\partial x^i}$ باشد آنگاه :

$$D_iF = \frac{\partial F}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_J u^\alpha_{J,i}\frac{\partial F}{\partial u^\alpha_J}, \tag{۱۳.۲}$$

هر گاه $E \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ با مختصات (x,y,u) باشد، داریم:

$$D_xF = \frac{\partial F}{\partial x} + u_x\frac{\partial F}{\partial u} + u_{xx}\frac{\partial F}{\partial u_x} + u_{xy}\frac{\partial F}{\partial u_y} + u_{xxx}\frac{\partial F}{\partial u_{xx}} + \cdots$$

$$D_yF = \frac{\partial F}{\partial y} + u_y\frac{\partial F}{\partial u} + u_{xy}\frac{\partial F}{\partial u_x} + u_{yy}\frac{\partial F}{\partial u_y} + u_{xxy}\frac{\partial F}{\partial u_{xx}} + \cdots$$

به ترتیب مشتق کامل F نسبت به x ، y می‌باشد. بهمین ترتیب ، مشتق کامل مراتب بالاتر را می‌توان نسبت به اندیس چندگانه $J=(j_i,\cdots,j_k)$ به صورت ذیل بیان نمود.

$$D_J = D_{j_1}D_{j_2}\cdots D_{j_k},$$

اکنون شرایط مهیاست تا با بیان یک قضیه به نحوه محاسبه امتداد میدان‌های برداری بپردازیم.

قضیه ۱.۵.۲. فرض کنید

$$V = \sum_{i=1}^{p}\xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q}\varphi^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \tag{۱۴.۲}$$

یک میدان برداری روی زیر مجموعه باز $\mathcal{O} \subset E$ باشد. در اینصورت امتداد مرتبه nـام V میدان برداری

$$V^{(n)} = V + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_{J} \varphi_J^{\alpha} \left(x, u^{(n)}\right) \frac{\partial}{\partial u_J^{\alpha}}. \tag{۱۵.۲}$$

است که بر روی $J^n(\mathcal{O})$ تعریف شده است . ضرایب ϕ_J^{α} در (۱۵.۲) با فرمول

$$\varphi_J^{\alpha} \left(x, u^{(n)}\right) = D_J \left(\varphi^{\alpha} - \textstyle\sum_{i=1}^{p} \xi^i u_i^{\alpha}\right) + \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_{J,i}^{\alpha}, \tag{۱۶.۲}$$

قابل محاسبه هستند.

عبارت $Q^{\alpha} = \varphi^{\alpha} - \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_i^{\alpha}$ در (۱.۵.۲) مشخصه میدان برداری نامیده می‌شود.

برهان. [۸] $\square$

مثال ۱.۵.۲. فرض کنید $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. میدان برداری کلی $V = \varepsilon(x,u)\frac{\partial}{\partial x} + \varphi(x,u)\frac{\partial}{\partial u}$ بر $M = \mathbb{R}^2$ را در نظر بگیرید.مشخصه میدان برداری V تابع زیر است:

$$Q\left(x, u, u_x\right) = \varphi\left(x, u\right) - \varepsilon\left(x, u\right) u_x,$$

تابع $u = f(x)$ تحت گروه یک پارامتری تولید شده توسط V ناورداست اگر و تنها اگر در معادله دیفرانسیل معمولی $\varphi\left(x, u\right) = \varepsilon\left(x, u\right) u_x$ صدق کند. امتداد مرتبه دوم V یک میدان برداری بر J^2 به صورت:

$$V^{(2)} = \varepsilon(x,u)\frac{\partial}{\partial x} + \varphi(x,u)\frac{\partial}{\partial u} + \varphi^x(x, u^{(1)})\frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi^{xx}(x, u^{(2)})\frac{\partial}{\partial u_{xx}},$$

که ضرایب φ^x و φ^{xx} به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\varphi^x = D_x Q + \varepsilon u_{xx} = \varphi_x + \left(\varphi_u - \varepsilon_x\right) u_x - \varepsilon_u u_x^2.$$

$$\varphi^{xx} = D_x^2 Q + \varepsilon u_{xxx} = \varphi_{xx} + \left(2\varphi_{xu} - \varepsilon_{xx}\right) u_x + \left(\varphi_{uu} - 2\varepsilon_{xu}\right) u_x^3.$$

مثال ۲.۵.۲. به عنوان مثال امتداد دوم از مولد بینهایت کوچک $V = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u}$ به صورت زیر است:

$$V^{(2)} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u} + \left(1 + u_x^2\right)\frac{\partial}{\partial u_x} + 3u_x u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}},$$

که ضرایب به صورت زیر محاسبه شده‌اند:

$$\varphi^x = D_x Q + \varepsilon u_{xx} = \varphi_x + D_x\left(x + u u_x\right) - u u_{xx} = 1 + u_x^2.$$

$$\varphi^{xx} = D_x^2 Q + \varepsilon u_{xxx} = D_x^2\left(x + u u_x\right) - u u_{xxx} = 3u_x u_{xxx}.$$

در اینصورت گروه تبدیلات را با انتگرال گیری از دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر می‌توان بدست آورد.جهت سهولت قرار می‌دهیم: $u_{xx}=q, u_x=p$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-u \quad , \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=x \quad , \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=۱+p^{۲} \quad , \quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=۳pq \quad ,$$

در نتیجه امتداد دوم گروه دورانی به صورت زیر است:

$$\left(x\cos t-u\sin t, x\sin t+u\cos t, \frac{\sin t+\cos t}{\cos t-p\sin t}, \frac{q^{۳}}{\cos t-p\sin t}\right),$$

تعریف ۸.۵.۲. فرض کنیم:

$$\Delta_\nu\left(x,u^{(n)}\right)=\circ, \qquad \nu=۱,\cdots,l,$$

یک دستگاه معادلات دیفرانسیل باشد، این دستگاه از رتبه‌ی ماکسیمال است هرگاه ماتریس ژاکوبین آن

$$\mathbb{J}_\Delta\left(x,u^{(n)}\right)=\left(\frac{\partial\Delta_\nu}{\partial x^i},\frac{\partial\Delta_\nu}{\partial u_j^\alpha}\right)_{m\times\left(p+qp^{(n)}\right)},$$

از رتبه m باشد.

مثال ۳.۵.۲. معادله لاپلاس به صورت $\Delta=u_{xx}+u_{yy}=\circ$ از رتبه ماکسیمال است. زیرا ماتریس ژاکوبین متغیرهای $(x,y;u;u_x,u_y;u_{xx},u_{xy},u_{yy})$ در $X\times U^{۲}$ به صورت

$$\mathbb{J}_\Delta=(\circ,\circ;\circ;\circ,\circ;۱,\circ,۱),$$

می باشد که به وضوح از رتبه ۱ است.

مثال ۴.۵.۲. معادله دیفرانسیل $\tilde{\Delta}=(u_{xx}+u_{yy})^{۲}=\circ$ از رتبه ماکسیمال نیست. چون:

$$\mathbb{J}_{\tilde{\Delta}}=\left(\circ,\circ;\circ;\circ,\circ;۲\left(u_{xx}+u_{yy}\right),\circ,۲\left(u_{xx}+u_{yy}\right)\right),$$

می باشد،در حالیکه $(u_{xx}+u_{yy})^{۲}=\circ$.

قضیه ۲.۵.۲. فرض کنیم :

$$\Delta_\nu\left(x,u^{(n)}\right)=\circ, \qquad \nu=۱,\cdots,l,$$

یک دستگاه معادلات دیفرانسیل از رتبه ی ماکسیمال روی یک زیر مجموعه‌ی باز از E مانند Oباشد، اگر G گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی O عمل کرده و v یک مولد بینهایت کوچک آن باشد، آنگاه $\Delta_\nu\left(x,u^{(n)}\right)=\circ$ ،G را به عنوان یک گروه تقارن می پذیرد اگر:

$$V^{(n)}(\Delta)=\circ, \qquad \Delta=\circ.$$

برهان. [۴] □

این قضیه که نحوه‌ی ارتباط بین گروه های تقارنی و ناوردایی دستگاه معادلات دیفرانسیل تحت مولدهای کوچک را بیان می کندو یک روش کارآمد برای پیداکردن تقارن های معادلات دیفرانسیل ارائه می دهد به قضیه ناوردای معادلات دیفرانسیل معروف است. این روش با در نظر گرفتن ضرایب $\varphi^\alpha(x,u)$ و $\xi^i(x,u)$ از میدان برداری که روی فضای کامل معادله‌ی تعریف شده و با پیدا کردن φ^α_J ـ‌ها شروع شده و سپس با اثر دادن $V^{(n)}$روی دستگاه معادلات و صفر قرار دادن ضرایب در دوطرف معادلات به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی خواهیم رسید که با حل این دستگاه به ضرایب ξ^i ها و φ^α ـ‌ها دست خواهیم یافت. در ادامه با ارائه چند مثال این بخش را به پایان می‌بریم:

مثال ۵.۵.۲. معادله گرما

$$u_t = u_{xx},$$

معادله ای خطی است که اختلاف دما (توزیع حرارت)را در یک میله توصیف می کند. این معادله روی فضای کامل $E \simeq \mathbb{R}^۲ \times \mathbb{R}$ تعریف شده است. معادله مرتبه دوم است پس میدان برداری به صورت

$$V = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \varphi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u},$$

روی E تعریف می شود وتا مرتبه دوم امتداد می‌یابد. فضای جت مرتبه دوم این معادله به صورت زیر است:

$$J^{(۲)} = \{(x,t;u;u_x,u_t;u_{xx},u_{xt},u_{tt})\}.$$

مشتقات کامل روی چارت (x,t,u) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u} + u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xt}\frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xxx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + u_{xxt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + u_{xtt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}},$$

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t\frac{\partial}{\partial u} + u_{xt}\frac{\partial}{\partial u_x} + u_{tt}\frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xxt}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + u_{xtt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + u_{ttt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}},$$

امتداد مرتبه دوم V برابر است با:

$$V^{(۲)} = V + \varphi^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \varphi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \varphi^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \varphi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}},$$

از طرفی مشخصه میدان برداری V

$$Q = \varphi - \xi u_x - \tau u_t,$$

است، ضرایب φ^x،φ^t، φ^{xx}، φ^{xt}، φ^{tt} را مطابق زیر بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}\varphi^x &= D_x\left(\varphi-\xi u_x-\tau u_t\right)+\xi u_{xx}+\tau u_{xt}\\ &= D_x\varphi-u_xD_x\xi-u_tD_x\tau\\ &= \varphi_x+\left(\varphi_u-\xi_x\right)u_x-\tau_xu_t-\xi_uu_x^{2}-\tau_uu_xu_t \quad ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi^t &= D_t\left(\varphi-\xi u_x-\tau u_t\right)+\xi u_{xt}+\tau u_{tt}\\ &= D_t\varphi-u_xD_t\xi-u_tD_t\tau\\ &= \varphi_t-\xi_tu_x+\left(\varphi_u-\tau_t\right)u_t-\xi_uu_xu_t-\tau_uu_t^{2} \quad ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{xx} &= D_x^{2}\left(\varphi-\xi u_x-\tau u_t\right)+\xi u_{xxx}+\tau u_{xxt}\\ &= D_x^{2}\varphi-u_xD_x^{2}\xi-u_tD_x^{2}\tau-2u_{xx}D_x\xi-2u_{xt}D_x\tau\\ &= \varphi_{xx}+\left(2\varphi_{xu}-\xi_{xx}\right)u_x-\tau_{xx}u_t+\left(\varphi_{uu}-2\xi_{xu}\right)u_x^{2}\\ &-2\tau_{xu}u_xu_t-\xi_{uu}u_x^{3}-\tau_{uu}u_x^{2}u_t+\left(\varphi_u-2\xi_x\right)u_{xx}\\ &-2\tau_xu_{xt}-3\xi_uu_xu_{xx}-\tau_uu_tu_{xx}-2\tau_uu_xu_{xt} \quad ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{xt} &= D_xD_t\left(\varphi-\xi u_x-\tau u_t\right)+\xi u_{xxt}+\tau u_{xtt}\\ &= \varphi_{xt}+\left(\varphi_{ut}-\xi_{xt}\right)u_x+\left(\varphi_{xu}-\tau_{xt}\right)u_t-\xi_{ut}u_x^{2}-\tau_{xu}u_t^{2}\\ &+\left(\varphi_{uu}-\xi_{xu}-\xi_{ut}\right)u_xu_t-\xi_{uu}u_x^{2}u_t-\tau_{uu}u_xu_t^{2}-\xi_tu_{xx}\\ &+\left(\varphi_u-\xi_x-\tau_t\right)u_{xt}-\xi_uu_{xx}u_t-2\xi_uu_xu_{xt}-2\tau_uu_tu_{xt}-\tau_xu_{tt}-\tau_uu_xu_{tt} \quad ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{tt} &= D_t^{2}\left(\varphi-\xi u_x-\tau u_t\right)+\xi u_{ttt}+\tau u_{xtt}\\ &= \varphi_{tt}+\left(2\varphi_{ut}-\xi_{tt}\right)u_t-\xi_{tt}u_x+\left(\varphi_{uu}-2\tau_{ut}\right)u_t^{2}\\ &-2\xi_{ut}u_xu_t-\tau_{uu}u_t^{2}-\xi_{uu}u_xu_t^{2}+\left(\varphi_u-2\tau_t\right)u_{tt}\\ &-2\xi_tu_{xt}-3\tau_uu_tu_{tt}-\xi_uu_xu_{tt}-2\xi_uu_tu_{xt} \quad ,\end{aligned}$$

حال با اثر دادن $V^{(2)}$ بر معادله گرما داریم:

$$\varphi^t=\varphi^{xx} \quad ,$$

و با جایگذاری ضرایب امتداد در این عبارت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\varphi_t-\xi_tu_x+\left(\varphi_u-\tau_t\right)u_{xx}-\xi_uu_xu_{xx}-\tau_uu_{xx}^{2} &= \varphi_{xx}+\left(2\varphi_{xx}-\xi_{xx}\right)u_x-\tau_{xx}u_{xx}\\ &+\left(\varphi_{uu}-2\xi_{xu}\right)u_x^{2}-\tau_{uu}u_x^{2}u_{xx}+\left(\varphi_u-2\xi_x\right)u_{xx}\\ &-2\tau_xu_{xt}-3\xi_uu_xu_{xx}-\tau_uu_{xx}^{2}-2\tau_uu_xu_{xt} \quad ,\end{aligned}$$

حال ضرایب مختصات جت را مساوی هم قرار می‌دهیم و به دستگاه PDE خطی زیر می رسیم:

$$\tau_u = \tau_x = \tau_{uu} = \xi_{uu} = 0 \quad , \qquad \varphi_{uu} = 2\xi_{xu} \quad , \qquad \xi_u = 2\tau_{xu} + 3\xi_u \quad ,$$

$$\varphi_u - \tau_t = -\tau_{xx} + \varphi_u - 2\xi_x \quad , \qquad \varphi_t = \varphi_{xx} \quad , \qquad -\xi_t = 2\varphi_{xu} - \xi_{xx} \quad ,$$

با حل این دستگاه مقادیر ξوτوφ به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\xi = c_1 + c_4 x + 2c_5 t + 4c_6 xt,$$

$$\tau = c_2 + 2c_4 t + 4c_6 t^2,$$

$$\varphi = \left(c_3 - c_5 x - 2c_6 t - c_6 x^2\right) u + \alpha\left(x, t\right),$$

با قراردادن ξ و τ و φ در V داریم:

$$V = c_1\partial_x + c_2\partial_t + c_3 u\partial_u + \left(x\partial_x + 2t\partial_t\right) c_4 + \left(2t\partial_x - xu\partial_u\right) c_5$$
$$+ \left(4tx\partial_x + 4t^2\partial_t - \left(x^2 + 2t\right) u\partial_u\right) c_6 + \alpha\left(x, t\right)\partial_u,$$

بنابراین مولدهای جبر لی گروه‌های تقارن معادله گرما عبارت است از:

$$V_1 = \partial_x,$$

$$V_2 = \partial_t,$$

$$V_3 = u\partial_u,$$

$$V_4 = x\partial_x + 2t\partial_t,$$

$$V_5 = 2t\partial_x - xu\partial_u,$$

$$V_6 = 4tx\partial_x + 4t^2\partial_t - \left(x^2 + 2t\right) u\partial_u,$$

$$V_\alpha = \alpha\left(x, t\right)\partial_u,$$

پس $V_1, \cdots, V_6$ جبر لی شش ـ بعدی گروه تقارن معادله‌ی گرما می باشد. با اضافه شدن V_α به آن یک جبر لی با بعد نامتناهی برای معادله‌ی گرما است.

جدول لی تقارن های معادله‌ی خطی گرما

$[,]$	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
V_1	0	0	0	V_6	$-V_3$	$2V_5$
V_2	0	0	0	$2V_2$	$2V_1$	$4V_4 - 2V_3$
V_3	0	0	0	0	0	0
V_4	$-V_1$	$-2V_2$	0	0	V_5	$2V_6$
V_5	V_3	$-2V_1$	0	$-V_5$	0	0
V_6	$-2V_5$	$2V_3 - 4V_4$	0	$-2V_6$	0	0

جدول ۵.۵.۲ به جدول لی معروف است و ارتباط بین کروشه‌های لی مولد های $\{V_۱, \cdots, V_۶\}$ را نشان می دهد و ادعای جبر لی ساختن آنها را تایید می کند.

گروه‌های یک پارامتری G_iتولید شده توسط V_i به صورت زیر خواهد بود:

$$G_۱ : (x,t,u) \to (x+\varepsilon, t, u)\,,$$

$$G_۲ : (x,t,u) \to (x, t+\varepsilon, u)\,,$$

$$G_۳ : (x,t,u) \to \left(x, t, e^{۲\varepsilon} u\right),$$

$$G_۴ : (x,t,u) \to \left(e^{\varepsilon} x, e^{۲\varepsilon} t, u\right),$$

$$G_۵ : (x,t,u) \to \left(x + ۲\varepsilon t, t, u \cdot \exp\left(-\varepsilon x - \varepsilon^۲ t\right)\right),$$

$$G_۶ : (x,t,u) \to \left(\frac{x}{۱-۴\varepsilon t}, \frac{t}{۱-۴\varepsilon t}, u\sqrt{۱-۴\varepsilon t}\exp\left(\frac{-\varepsilon x^۲}{۱-۴\varepsilon t}\right)\right),$$

$$G_\alpha : (x,t,u) \to (x, t, u + \alpha(x,t))\,,$$

هر گروه G_i یک گروه تقارنی می‌باشد.

برای نمونه گروه متناظر با $V_۵$ را محاسبه میکنیم و بقیه گروه‌ها به طور مشابه بدست می آیند.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varepsilon} = ۰ \Rightarrow \mathrm{d}t = ۰ \Rightarrow t = c_۱,$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varepsilon} = ۲t \Rightarrow \mathrm{d}x = ۲c_۱ \mathrm{d}\varepsilon \Rightarrow x = ۲c_۱\varepsilon + c_۲,$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varepsilon} = -xu \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\left(۲c_۱\varepsilon + c_۲\right)\mathrm{d}\varepsilon \Rightarrow \ln u = -\left(۲c_۱\varepsilon^۲ + c_۲\varepsilon\right) + \ln c_۳ \quad ,$$

$$\Rightarrow u = c_۳ \exp\left(-۲c_۱\varepsilon^۲ - c_۲\varepsilon\right).$$

بنابراین:

$$G_۵ = \left(۲c_۱\varepsilon + c_۲, c_۱, c_۳\exp\left(-۲c_۱\varepsilon^۲ - c_۲\varepsilon\right)\right) \quad ,$$

به ازای $\varepsilon = ۰$ داریم:

$$G_۵ = (x,t,u) = (c_۲, c_۱, c_۳)\,,$$

بنابراین گروه متناظر با $V_۵$ عبارت است از:

$$G_۵ = \left(۲t\varepsilon + x, c_۱, u\exp\left(-۲t\varepsilon^۲ - x\varepsilon\right)\right).$$

فرض کنیم $u = f(x)$ یک جواب معادله گرما باشد. بعنوان نمونه با استفاده از این جواب ،جواب متناظر با $c_۶$ را محاسبه میکنیم. (جوابهای متناظر با گروههای دیگر به طور مشابه

محاسبه می‌شوند.)
داریم:

$$G_6 : (x,t,u) \to \left(\frac{x}{1-4\varepsilon t}, \frac{t}{1-4\varepsilon t}, u\sqrt{1-4\varepsilon t}\exp\left(\frac{-\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}\right)\right) \quad ,$$

بنابراین:

$$\bar{t} = \frac{t}{1-4\varepsilon t} \Longrightarrow t = \frac{\bar{t}}{1+4\varepsilon \bar{t}} \quad ,$$

$$\bar{x} = \frac{x}{1-4\varepsilon t} \Longrightarrow x = \bar{x} - 4\varepsilon \frac{\bar{t}}{1+4\varepsilon \bar{t}} \Longrightarrow x = \frac{\bar{x}}{1+4\varepsilon \bar{t}} \quad ,$$

$$\bar{u} = u\sqrt{1-4\varepsilon t}\exp\left(\frac{-\varepsilon x^2}{1-4\varepsilon t}\right) \Longrightarrow \bar{u} = \frac{u}{\sqrt{1+4\varepsilon \bar{t}}}\exp\left(\frac{-\varepsilon \bar{x}^2}{1+4\varepsilon \bar{t}}\right),$$

$$\Longrightarrow u = \bar{u}\sqrt{1+4\varepsilon \bar{t}}\exp^{-1}\left(\frac{-\varepsilon \bar{x}^2}{1+4\varepsilon \bar{t}}\right),$$

با جایگذاری در $u = f(x,u)$ داریم:

$$\bar{u} = u\sqrt{1-4\varepsilon \bar{t}}\exp^{-1}\left(\frac{-\varepsilon \bar{x}^2}{1+4\varepsilon \bar{t}}\right) = f\left(\frac{\bar{x}}{1+4\varepsilon \bar{t}}, \frac{\bar{t}}{1+4\varepsilon \bar{t}}\right) \quad ,$$

$$\Longrightarrow \bar{u} = \frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon \bar{t}}}\exp\left(\frac{-\varepsilon \bar{x}^2}{1+4\varepsilon \bar{t}}\right) f\left(\frac{\bar{x}}{1+4\varepsilon \bar{t}}, \frac{\bar{t}}{1+4\varepsilon \bar{t}}\right) \quad ,$$

اگر به جای $\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}$ به ترتیب x,t,u جایگذاری کنیم، جواب متناظر G_6 به صورت زیر خواهد بود:

$$u = \frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon t}}\exp\left(\frac{-\varepsilon x^2}{1+4\varepsilon t}\right) f\left(\frac{x}{1+4\varepsilon t}, \frac{t}{1+4\varepsilon t}\right),$$

بنابراین توابع زیر نیز جوابهای معادله‌ی گرما می‌باشند:

$$u^{(1)} = f(x-\varepsilon, t),$$

$$u^{(2)} = f(x, t-\varepsilon),$$

$$u^{(3)} = e^{\varepsilon} f(x,t),$$

$$u^{(4)} = f\left(e^{-\varepsilon}x, e^{-2\varepsilon}t\right),$$

$$u^{(5)} = e^{-\varepsilon x+\varepsilon^2} f\left(x-2\varepsilon t, t\right),$$

$$u^{(6)} = \frac{1}{\sqrt{1+4\varepsilon t}}\exp\left(\frac{-\varepsilon x^2}{1+4\varepsilon t}\right) f\left(\frac{x}{1+4\varepsilon t}, \frac{t}{1+4\varepsilon t}\right),$$

$$u^{(\alpha)} = f(x,t) + \varepsilon\alpha(x,t),$$

که ε هر عدد حقیقی و$\alpha(x,t)$ هر جواب دیگر معادله می تواند باشد. اگر یک جواب معادله را با یک جواب دیگر معادله جمع کنیم، حاصل یک جواب دیگر از معادله است و الخ.
یک جواب برای این معادله جواب ثابت $u=c$ که با جایگذاری در $u^{(۶)}$ خواهیم داشت:

$$u=\frac{c}{\sqrt{۱+۴\varepsilon t}}\exp\left(\frac{-\varepsilon x^{۲}}{۱+۴\varepsilon t}\right),$$

یک جواب بنیادین در نقطه $\left(\circ,\frac{-۱}{۴\pi}\right)=(x_\circ,t_\circ)$ با قراردادن $c=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi}}$ به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$u=\frac{۱}{۴\varepsilon t}\exp\left(\frac{-x^{۲}}{۴t}\right),$$

مثال ۶.۵.۲. معادله KdV با ضابطه ی

$$u_t+u_{xxx}+uu_x=\circ,$$

که یک معادله دیفرانسیل جزئی غیر خطی مرتبه سه است را در نظر بگیرید. این معادله روی فضای کامل $E\simeq\mathbb{R}^{۲}\times\mathbb{R}$ تعریف شده است. پس مولد بینهایت کوچک متناظر با آن به صورت زیر است:

$$V=\xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x}+\tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t}+\varphi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u},$$

چون مرتبه معادله سه است ، باید V را تا مرتبه سه امتداد دهیم.

$$\begin{aligned}V^{(۳)}=V&+\varphi^x\frac{\partial}{\partial u_x}+\varphi^t\frac{\partial}{\partial u_t}+\varphi^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}+\varphi^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}}+\varphi^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}}\\&+\varphi^{xxx}\frac{\partial}{\partial u_{xxx}}+\varphi^{xxt}\frac{\partial}{\partial u_{xxt}}+\varphi^{xtt}\frac{\partial}{\partial u_{xtt}}+\varphi^{ttt}\frac{\partial}{\partial u_{ttt}},\end{aligned}$$

مشخصه‌ی میدان برداری V ، به صورت

$$Q=\varphi-\xi u_x-\tau u_t,$$

می باشد. با استفاده از قضیه ناوردایی داریم:

$$V^{(۳)}(u_t+u_{xxx}+uu_x)=\circ.$$

بنابراین شرط ناوردایی به صورت زیر است:

$$\varphi^t+\varphi^{xxx}+u\varphi^x+u_x\varphi=\circ.$$

که ضرایب φ^x ،φ^t ،φ^{xx} به صورت زیر بدست می آید:

$$\varphi^x=D_x(\varphi-\xi u_x-\tau u_t)+\xi u_{xx}+\tau u_{xt}=D_x\varphi-u_xD_x\xi-u_tD_x\tau,$$

$$\varphi^t=D_t(\varphi-\xi u_x-\tau u_t)+\xi u_{xt}+\tau u_{tt}=D_t\varphi-u_xD_t\xi-u_tD_t\tau,$$

$$\varphi^{xxx} = D_x^3(\varphi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xxxx} + \tau u_{xxxt}$$
$$= D_x^3\varphi - u_x D_x^3\xi - u_t D_x^3\tau - 3u_{xx}D_x^2\xi - 3u_{xt}D_x^2\tau - 3u_{xxx}D_x\xi - 3u_{xxt}D_x\tau.$$

اکنون با جایگذاری این مقادیر برای φ^{x}، φ^{t}، φ^{xx} درشرط ناوردایی و ساده کردن و برابر قرار دادن ضرایب چند جمله‌ای‌های متشابه یک دستگاه معادلات دیفرانسیل PDE خواهیم داشت که با حل آن ضرایب ξ وτ وφ عبارتند از:

$$\xi = c_1 + c_3 t + c_4 x, \qquad \tau = c_2 + 3c_4 t, \qquad \varphi = c_3 - 2c_4 u.$$

که c_1، c_2، c_3، c_4 ثابت های دلخواهند. با جایگذاری مقادیر بدست آمده برای ξ وτ وφ در مولد بینهایت کوچک V خواهیم داشت:

$$V = (c_1 + c_3 t + c_4 x)\frac{\partial}{\partial x} + (c_2 + 3c_4 t)\frac{\partial}{\partial t} + (c_3 - 2c_4 u)\frac{\partial}{\partial u}$$
$$= c_1\frac{\partial}{\partial x} + c_2\frac{\partial}{\partial t} + c_3\left(t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}\right) + c_4\left(t\frac{\partial}{\partial x} + 3t\frac{\partial}{\partial t} - 2u\frac{\partial}{\partial u}\right).$$

بنابراین چهار میدان زیر را می‌توان تولید کننده تقارن های لی معادله ی KdV مرتبه سوم دانست:

$$V_1 = \partial_x,$$
$$V_2 = \partial_t,$$
$$V_3 = t\partial_x + \partial_u,$$
$$V_4 = x\partial_x + 3t\partial_t - 2u\partial u.$$

پس $V_1, \cdots, V$ جبر لی چهار ـ بعدی معادله‌ی KdV می باشد.

$[,]$	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	0	0	0	V_1
V_2	0	0	V_1	$3V_2$
V_3	0	$-V_1$	0	$-2V_3$
V_4	$-V_1$	$-3V_2$	$2V_3$	0

جدول ۶.۵.۲ به جدول لی معروف است و ارتباط بین کروشه‌های لی مولد های $\{V_1, \cdots, V_4\}$ را نشان می دهد و ادعای جبر لی ساختن آنها را تایید می کند.

گروه‌های یک پارامتری G_iتولید شده توسط V_i به صورت زیر خواهد بود:

$$G_1 : (x, t, u) \to (x + \varepsilon, t, u),$$

$$G_۲ : (x, t, u) \to (x, t + \varepsilon, u)\,,$$

$$G_۳ : (x, t, u) \to (x + t\varepsilon, t, u + \varepsilon)\,,$$

$$G_۴ : (x, t, u) \to \left(xe^{\varepsilon}, te^{۳\varepsilon}, ue^{-۲\varepsilon}\right).$$

هر گروه G_i یک گروه تقارنی می‌باشد.

برای مثال اگر $u = f(x, t)$ یکی از جواب های معادله باشد، آنگاه توابع زیر نیز جوابهای معادله اند:

$$u^{(۱)} = f\left(x - \varepsilon, t\right),$$

$$u^{(۲)} = f\left(x, t - \varepsilon\right),$$

$$u^{(۳)} = f\left(x - \varepsilon t, t\right) + \varepsilon,$$

$$u^{(۴)} = e^{-۲\varepsilon} f\left(e^{-\varepsilon} x, e^{-۳\varepsilon} t\right)$$

توجه کنید که ε هر عدد حقیقی می تواند باشد.

فصل ۳

جواب های گروه ـ ناوردای معادله KdV مرتبه پنجم تعمیم یافته

در سال ۱۸۳۴ با آزمایش‌های جان اسکات راسل [۱] بحث در مورد معادلاتی آغاز شد که بعدها به معادلات کورتوگ ـ دوـ وریس [۲] (به اختصار KdV) مشهور گردید. تحقیقات نظری لرد رایلی [۳] و ژوزف بوزینسک [۴] در سال ۱۸۷۰ و کورتوگ و دوریس در سال ۱۸۹۵ در این زمینه ادامه یافت. معادله KdV یک مدل ریاضی برای موج‌ها، روی سطوح آبی کم عمق است و به صورت عمومی

$$\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial t}+\varepsilon u\left(x,t\right)\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x}+\mu\frac{\partial^{n}u\left(x,t\right)}{\partial x^{n}},$$

نمایش داده می‌شود، که در آن ε و μ ثابت‌های مثبت هستند. معادله عمومی KdV جهت مطالعه‌ی موج‌های بلند بطور ضعیف غیر خطی نیز کاربرد دارد. همچنین حضور قدرتمند این نوع معادلات در فیزیک خوشه‌ها، هسته های تغییرشکل دهنده ، شکافت، لایه های نازک، رادار و رئولوژی، ارتباطات فیبر نوری و ابررساناها قابل توجه است. برای حل این معادلات روش‌های گوناگونی ارائه گردیده است، که مهمترین آنها عبارتند از:روش tanh ، روش سینوس

---

[۱] John Scott Russel

[۲] Kortweg - de vries

[۳] Lord Rayleigh

[۴] Joseph Boussinesq

ـ کسینوس، روش تعادل همگن، روش بسط ریکاتی با ضرایب ثابت و ... هرچند که گاردنر و همکارانش وجود ویکتایی جواب‌های معادلات KdV را نشان داده‌اند اما از آنجا که دست یابی به جوابهای دقیق اینگونه معادلات اغلب کاری دشوار است از این رو روش‌هایی که منجر به یافتن جوابهای تقریبی برای این معادلات می‌شوند نیز مورد توجه قرار می‌گیرند.
معادله KdV با ضابطه ی

$$u_t = u_{xxxxx} + u^{۲} u_x, \tag{۱.۳}$$

که یک معادله دیفرانسیل جزئی غیر خطی مرتبه پنج است را در نظر بگیرید. این معادله روی فضای کامل $E \simeq \mathbb{R}^{۲} \times \mathbb{R}$ تعریف شده است. مولد تقارن بینهایت کوچک متناظر با آن به صورت زیر است:

$$V = \xi\left(x,t,u\right)\frac{\partial}{\partial x} + \tau\left(x,t,u\right)\frac{\partial}{\partial t} + \eta\left(x,t,u\right)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{۲.۳}$$

چون مرتبه معادله پنج است ، باید V را تا مرتبه پنج به صورت زیر امتداد دهیم:

$$\begin{aligned} V^{(۵)} = V &+ \eta^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \eta^{xx}\frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \eta^{xt}\frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \eta^{tt}\frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \eta^{xxx}\frac{\partial}{\partial u_{xxx}} \\ &+ \eta^{xxt}\frac{\partial}{\partial u_{xxt}} + \eta^{xtt}\frac{\partial}{\partial u_{xtt}} + \eta^{ttt}\frac{\partial}{\partial u_{ttt}} + \eta^{xxxx}\frac{\partial}{\partial u_{xxxx}} + \eta^{xxxt}\frac{\partial}{\partial u_{xxxt}} \\ &+ \eta^{xxtt}\frac{\partial}{\partial u_{xxtt}} + \eta^{xttt}\frac{\partial}{\partial u_{xttt}} + \eta^{tttt}\frac{\partial}{\partial u_{tttt}} + \eta^{xxxxx}\frac{\partial}{\partial u_{xxxxx}} + \eta^{xxxxt}\frac{\partial}{\partial u_{xxxxt}} \\ &+ \eta^{xxxtt}\frac{\partial}{\partial u_{xxxtt}} + \eta^{xxttt}\frac{\partial}{\partial u_{xxttt}} + \eta^{xtttt}\frac{\partial}{\partial u_{xtttt}} + \eta^{ttttt}\frac{\partial}{\partial u_{ttttt}} \quad , \end{aligned}$$

مشخصه‌ی میدان برداری V ، به صورت

$$Q = \eta - \xi u_x - \tau u_t,$$

می باشد. با استفاده از قضیه ناوردایی ، اگر V یک تقارن معادله باشد، باید داشته باشیم:

$$V^{(۵)}(\Delta) = ۰.$$

با اعمال شرط ناوردایی خواهیم داشت:

$$V^{(۵)}(\Delta) = \eta^t - \eta^{xxxxx} - ۲uu_x\eta^x - u^{۲}\eta^x = ۰. \tag{۳.۳}$$

که ضرایب امتداد η^x ،η^t ،η^{xxxxx} به صورت زیر بدست می آید:

$$\eta^x = D_x\left(\eta - \xi u_x - \tau u_t\right) + \xi u_{xx} + \tau u_{xt} = D_x\eta - u_x D_x\xi - u_t D_x\tau,$$

$$\eta^t = D_t\left(\eta - \xi u_x - \tau u_t\right) + \xi u_{xt} + \tau u_{tt} = D_t\eta - u_x D_t\xi - u_t D_t\tau,$$

$$\begin{aligned} \eta^{xxxxx} &= D_x^{۵}\left(\eta - \xi u_x - \tau u_t\right) + \xi u_{xxxxxx} + \tau u_{xxxxxt} \\ &= D_x^{۵}\eta - u_x D_x^{۵}\xi - u_t D_x^{۵}\tau - ۳u_{xxxx}D_x^{۴}\xi - ۳u_{xt}D_x^{۴}\tau - ۳u_{xxxx}D_x\xi - ۳u_{xxxt}D_x\tau. \end{aligned}$$

اکنون داریم:

$$\eta^x = -\xi_u u_x^2 - \tau_u u_x u_t + \eta_u u_x - \xi_x u_x - \tau_x u_t + \eta_x \quad ,$$
$$\eta^t = -\xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2 + \eta_u u_t - \xi_t u_x - \tau_t u_t + \eta_t \quad ,$$

$$\begin{aligned}
\eta^{xxxxx} = & -30 u_x \tau_{xxuu} u_t u_{xx} - 30 u_x^2 \tau_{xuuu} u_t u_{xx} - 60 u_x \tau_{xuu} u_{xx} u_{xt} - 20 u_x^2 \tau_{uuu} u_t u_{xxx} \\
& - 10 u_x^3 \tau_{uuuu} u_t u_{xx} - 30 u_x^2 \tau_{uuu} u_{xx} u_{xt} - 10 u_x^2 \tau_{xxu} u_t u_{xxx} - 15 u_x \tau_{uuu} u_t u_{xx}^2 \\
& - 60 u_x u_{xx} \xi_{uu} u_{xxx} - 30 u_x u_{xx} \tau_{uu} u_{xxt} - 20 u_x \tau_{uu} u_{xt} u_{xxx} - 5 u_x \tau_{uu} u_t u_{xxxx} \\
& - 10 u_{xx} \tau_{uu} u_t u_{xxx} + \eta_{xxxxx} - 10 \tau_{xxx} u_{xxt} - 5 \xi_{xxxxu} u_x^2 + 5 u_x \eta_{xxxxu} \\
& - \xi_{xxxxx} u_x - \tau_{xxxxx} u_t - 10 \xi_{xxxu} u_x^3 + 10 \eta_{xxxuu} u_x^2 + 10 \eta_{xxxu} u_{xx} \\
& - 5 \eta_{xxxx} u_{xx} + \eta_u u_{xxxxx} + \eta_{uuuuu} u_x^5 - \xi_{uuuuu} u_x^6 - 15 \xi_{uu} u_{xx}^3 - 10 \xi_u u_{xxx}^2 \\
& - 5 \xi_x u_{xxxxx} - 5 \tau_x u_{xxxxt} - 5 \tau_{xxxx} u_{xt} + 5 \eta_{xuuuu} u_x^4 - 5 \xi_{xuuuu} u_x^5 + 15 \eta_{xuu} u_{xx}^2 \\
& \eta_{xu} u_{xxxx} - 10 \xi_{xx} u_{xxxx} - 10 \tau_{xx} u_{xxxt} - 10 \xi_{xxuuu} u_x^4 + 10 \eta_{xxuuu} u_x^3 - 30 \xi_{xxu} u_{xx}^2 \\
& + 10 \eta_{xxu} u_{xxx} - 10 \xi_{xxx} u_{xxx} - 6 \xi_u u_x u_{xxxxx} - 5 \tau_u u_x u_{xxxxt} - \tau_u u_t u_{xxxxx} \\
& - 20 \xi_{uuu} u_x^3 u_{xxx} - 10 \tau_{uuu} u_x^3 u_{xxt} - \tau_{uuuuu} u_x^5 u_t - 15 \xi_{uuuu} u_x^4 u_{xx} \\
& + 10 u_x^3 \eta_{uuuu} u_{xx} - 5 \tau_{uuuu} u_x^4 u_{xt} + 10 u_x^2 \eta_{uuu} u_{xxx} - 45 u_x^2 \xi_{uuu} u_{xx}^2 \\
& - 15 \xi_{uu} u_x^2 u_{xxxx} - 10 \tau_{uu} u_x^2 u_{xxxt} + 5 u_x \eta_{uu} u_{xxxx} + 15 u_x \eta_{xxx} u_{xx}^2 \\
& - 15 \tau_{uu} u_{xx}^2 u_{xt} - 15 u_{xx} \xi_u u_{xxxx} - 10 u_{xx} \tau_u u_{xxxt} + 10 u_{xx} \eta_{uu} u_{xxx} \\
& - 5 u_{xt} \tau_u u_{xxxx} - 10 u_{xxx} \tau_u u_{xxxt} - 20 \tau_{xxxu} u_x u_{xt} - 10 \tau_{xxuuu} u_x^3 u_t \\
& - 60 \xi_{xxuu} u_x^2 u_{xx} + 30 u_x \eta_{xxuu} u_{xx} - 30 \tau_{xxuu} u_x^2 u_{x,t} - 30 \tau_{xxu} u_{xx} u_{xt} \\
& - 40 \xi_{xxu} u_x u_{xxx} - 10 \tau_{xxu} u_t u_{xxx} - 30 \tau_{xxu} u_x u_{xxt} - 50 \xi_{xuu} u_x^2 u_{xxx} \\
& - 30 \tau_{xuu} u_x^2 u_{xxt} - 5 \tau_{xuuuu} u_x^4 u_t - 50 \xi_{xuuu} u_x^3 u_{xx} + 30 u_x^2 \eta_{xuuu} u_{xx} \\
& - 20 \tau_{xuuu} u_x^3 u_{xt} + 20 u_x \eta_{xuu} u_{xxx} - 75 u_x \xi_{xuu} u_{xx}^2 - 15 \tau_{xuu} u_t u_{xx}^2 \\
& - 50 u_{xx} \xi_{xu} u_{xxx} - 30 u_{xx} \tau_{xu} u_{xxt} - 20 \tau_{xu} u_{xt} u_{xxx} - 25 \xi_{xu} u_x u_{xxxx} \\
& - 5 \tau_{xu} u_t u_{xxxx} - 20 \tau_{xu} u_x u_{xxxt} - 5 \tau_{xxxxu} u_x u_t - 10 \tau_{xxxuu} u_x^2 u_t \\
& - 30 \xi_{xxxu} u_x u_{xx} - 10 \tau_u u_{xxxu} u_t u_{xx} \quad ,
\end{aligned}$$

حال با جایگذاری ضرایب فوق در شرط ناوردایی (۳.۳) دستگاه معادلات مشخصه زیر بدست می آید.

$$\tau_u = \tau_x = \tau_{tt} = \xi_t = \xi_u = 0,$$
$$\xi_x = \frac{1}{5}\tau_t,$$
$$\eta = -\frac{2}{5}\tau_t.u,$$

با حل این دستگاه مقادیر ξ و τ و η عبارتند از:

$$\xi = \frac{۱}{۵}c_۱x + c_۳,$$
$$\tau = c_۱t + c_۲,$$
$$\eta = -\frac{۳}{۱۰}c_۱u,$$

که ضرایب $c_۳$، $c_۱$، $c_۱$ مقادیر ثابتی هستند. اکنون با جایگذاری مقادیر τ, η, ξ در مولد بینهایت کوچک (۲.۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} V =& \left(\frac{۱}{۵}c_۱x + c_۳\right)\frac{\partial}{\partial x} + (c_۱t + c_۲)\frac{\partial}{\partial t} + \left(-\frac{۳}{۱۰}c_۱u\right)\frac{\partial}{\partial u} \\ =& \frac{۱}{۵}c_۱x\frac{\partial}{\partial x} + c_۳\frac{\partial}{\partial x} + c_۱t\frac{\partial}{\partial t} + c_۲\frac{\partial}{\partial t} - \frac{۳}{۱۰}c_۱u\frac{\partial}{\partial u}, \end{aligned}$$

بنابراین مولدهای جبر لی تقارن این معادله عبارتند از:

$$X_۱ = \frac{\partial}{\partial x},$$
$$X_۲ = \frac{\partial}{\partial t},$$
$$X_۳ = \frac{x}{۵}\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t} - \frac{۳}{۱۰}u\frac{\partial}{\partial u},$$

جدول زیر نشان می‌دهد که این سه میدان برداری یک جبر لی برای تقارن‌های معادله می سازند:

[,]	$X_۱$	$X_۲$	$X_۳$
$X_۱$	۰	۰	$\frac{۱}{۵}X_۱$
$X_۲$	۰	۰	$X_۲$
$X_۳$	$-\frac{۱}{۵}X_۳$	$-X_۲$	۰

برای یافتن فرم کلی جواب معادلات تحت تقارنهای فوق لازم است که گروههای یک پارامتری این تقارنها را به صورت زیر بدست آوریم:

$$\exp(\varepsilon X_۱) = (x + \varepsilon, t, u)\,,$$
$$\exp(\varepsilon X_۲) = (x, t + \varepsilon, u)\,,$$
$$\exp(\varepsilon X_۳) = \left(xe^{\frac{\varepsilon}{۵}}, te^{\varepsilon}, ue^{\frac{-۳}{۱۰}\varepsilon}\right),$$

بنابراین اگر $u = f(x,t)$ یکی از جواب های معادله باشد، آنگاه توابع زیر فرم کلی جوابهای معادله تحت تقارنهای فوق می‌باشند:

$$u^{(۱)} = f\,(x - \varepsilon, t)\,,$$

$$u^{(2)} = f\left(x, t-\varepsilon\right),$$

$$u^{(3)} = e^{-2\varepsilon} f\left(e^{-\varepsilon}x, e^{-3\varepsilon}t\right),$$

توجه کنید که ε هر عدد حقیقی می تواند باشد.

۱.۳ کاهش مرتبه معادلات دیفرانسیل

در ادامه روشی را شرح خواهیم داد که تحت آن معادله KdV را می توان کاهش مرتبه داد. معادلات بدست آمده را معادلات کاهش یافته تحت گروه تقارن معادله می‌گوییم. فرض کنیم :

$$\Delta\left(x, u^{(n)}\right) = \Delta\left(x, u, u_x, \cdots, u_n\right) = 0, \qquad (۴.۳)$$

یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه nــ‌ام باشد بطوریکه در آن $u_n = \mathrm{d}^n u / \mathrm{d}x^n$. می خواهیم نشان دهیم که چگونه با داشتن یک گروه تقارنی یک ـ پارامتری می توان مرتبه معادله (۴.۳) را یک واحد کاهش دهیم. ابتدا با استفاده از دستگاه مختصات $y = \eta\left(x, u\right)$ و $w = \chi\left(x, u\right)$ تقارن مورد نظر را اصلاح و به صورت $V = \partial_w$ می‌نویسیم. اکنون با استفاده از قاعده زنجیره‌ای مشتق، مشتقات u نسبت به‌x را بر حسب yو w می‌نویسیم. بنابراین به ازاء تابعی مانند δ_k داریم:

$$\frac{\mathrm{d}^k u}{\mathrm{d}x^k} = \delta_k\left(y, w, \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^k w}{\mathrm{d}y^k}\right),$$

با جایگذاری در معادله (۴.۳) به معادله‌ي

$$\bar{\Delta}\left(x, w^{(n)}\right) = \bar{\Delta}\left(y, w, w_y, \ldots, w_n\right) = 0, \qquad (۵.۳)$$

خواهیم رسید، که چون با معادله (۴.۳) هم ارز است پس جبرلی تقارنهای آن را می‌پذیرد. اما برای آنکه V یک تقارن برای معادله (۵.۳) باشد، باید شرط زیر برقرار گردد:

$$\bar{\Delta}\left(y, w^{(n)}\right) = 0,$$

هرگاه

$$V^{(n)}\left(\bar{\Delta}\left(w, w^{(n)}\right)\right) = \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial w} = 0$$

بنابراین با توجه به (۵.۳) معادله هم ارز برای $\Delta = 0$ مانند

$$\tilde{\Delta}\left(y, \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^n w}{\mathrm{d}y^n}\right) = 0,$$

وجود دارد که مستقل از w می‌باشد. حال اگر در این معادله قرار دهیم: $z = \mathrm{d}w/\mathrm{d}y$. آنگاه معادله مرتبه $(n-۱)$ ـ ام

$$\tilde{\Delta}\left(y, z, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-۱}z}{\mathrm{d}y^{n-۱}}\right) = \tilde{\Delta}\left(y, z^{(n-۱)}\right) = \circ,$$

بدست می‌آید. اگر $z = h(y)$ جوابی از این معادله باشد، آنگاه $w = \int h(y)\mathrm{d}y + c$ جوابی برای معادله (۵.۳) خواهد بود. پس با جایگزین کردن x و u به جای y و w به جوابی از معادله (۴.۳) دست پیدا خواهیم کرد.

۲.۳ طبقه بندی جواب‌های گروه ـ ناوردا و کاهش دادن

اصولا هدف اصلی یافتن جواب‌های دقیق برای یک دستگاه پیچیده از معادلات دیفرانسیل جزیی است. قضیه بنیادی مبتنی بر این اصل می‌باشد که آن دسته از جواب‌های دستگاه مورد مطالعه که تحت یک گروه تقارنی r ـ پارامتری ناوردا می‌باشد را می توان با حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل که مرتبه آن r واحد از مرتبه دستگاه اصلی کمتر است بدست آورد. بخصوص، هر گاه تعداد پارامترهای گروه تقارن یکی کمتر از تعداد متغیرهای مستقل باشد، یعنی $r = p - ۱$ ، آنگاه کلیه جوابهای ناوردای گروهی با حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی حاصل می‌شوند. حتی در بعضی موارد، دسته ای از جواب های ناوردای گروهی پیداشده، در حقیقت همان جواب های دقیق مورد انتظار می‌باشند.

دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta = \circ$ را در نظر بگیرید که بر روی یک زیر مجموعه باز $\mathcal{O}$ از فضای کلی دستگاه $E \simeq \mathbb{R}^{p+q}$ تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنید G یک گروه از تبدیلات موضعی است که روی $\mathcal{O}$ عمل میکند. به طور کلی جواب $u = f(x)$ از این دستگاه ، یک جواب ناوردا گفته می‌شود هرگاه تحت تبدیلات گروه ناوردا بماند. به‌عبارت دیگر ، منظور از یک جواب G ـ ناوردای یک دستگاه معادله دیفرانسیل جزیی ، جوابی مانند $u = f(x)$ بطوریکه گراف آن $\Gamma_f = \{(x, f(x))\} \subset \mathcal{O}$ موضعاً یک زیر مجموعه G ـ ناوردا از $\mathcal{O}$ باشد.

به عنوان مثال معادله لاپلاس دوبعدی را در نظر بگیرید:

$$u_{xx} + u_{yy} = \circ,$$

در این‌صورت ، جواب $u = \ln\left(x^۲ + y^۲\right)$ تحت گروه دوران تک پارامتری

$$SO(۲) : (x, y, u) \mapsto (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta),$$

ناوردا می‌باشد. با توجه به قضیه ۱.۴.۱ هرگاه $I = I(x,u)$ ناوردایی از گروه تک پارامتری مولد بینهایت کوچک

$$V = \sum_{i=1}^{p} \xi^i (x,u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \eta^\alpha (x,u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}.$$

برای متغیرهای مستقل و وابسته به ترتیب $x = \left(x^1, \ldots, x^p\right)$ و $x = \left(u^1, \ldots, u^q\right)$ باشد، آنگاه در معادله دیفرانسیل جزیی همگن ، خطی و مرتبه اول زیر صادق خواهد بود:

$$\sum_{i=1}^{p} \xi^i (x,u) \frac{\partial I}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \eta^\alpha (x,u) \frac{\partial I}{\partial u^\alpha} = 0.$$

با استفاده از روش مشخصه ها می توان جواب معادله فوق را یافت. یعنی با جایگزین کردن معادله دیفرانسیل معمولی زیر داریم:

$$\frac{\mathrm{d}x^1}{\xi^1 (x,u)} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x^p}{\xi^p (x,u)} = \frac{\mathrm{d}u^1}{\eta^1 (x,u)} = \cdots = \frac{\mathrm{d}u^q}{\eta^q (x,u)}.$$

به شکل موضعی ، جواب عمومی معادله فوق به صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$I_1 (x,u) = c_1, \quad I_2 (x,u) = c_2, \quad \cdots \quad I_{p-1} (x,u) = c_{p-1},$$

که c_iها ثوابت انتگرالی هستند. در اینصورت ، مجموعه کاملی از ناورداهای مستقل تابعی از گروه تک پارامتری Vتوسط توابع نتیجه شده‌ی $I_1, I_2, \cdots, I_{p-1}$ معرفی می شوند. همچنین ناورداهای بدست آمپه در واقع همان انتگرال‌های اول مستقل از دستگاه مشخصه مربوط به مولد بینهایت کوچک V هستندوجواب عمومی زیر از دستگاه معادلات مربوط به گروه تقارنی فراهم می‌گردد:

$$S(x,u) = \mu \left(I_1 (x,u) . I_2 (x,u) . \cdots I_{p-1} (x,u)\right).$$

که در آن μ تابعی دلخواه است که در معادله $V[\mu] = 0$ صدق می‌کند. با قراردادن S در معادله اصلی می‌توان جواب مشابه معادله اصلی را یافت.

یک دستگاه معادله دیفرانسیل جزیی به فرم کلی

$$\Delta_\nu \left(x, u^{(n)}\right) = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, m,$$

در نظر بگیرید. در هفت گام می توان شیوه یافتن جواب‌های ناوردای گروهی را شرح داد:

۱. ابتدا با توجه به قضیه ۲.۵.۲ مولدهای بینهایت کوچک جبرلی گروه تقارن را بدست می‌آوریم.

۲. فرض کنیم که $1 \leq s \leq p$ بعد مدارهای نظیر گروه تقارنی باشد در این حالت ، دستگاه کاهش یافته برای یافتن جواب‌های ناوردای گروهی به $p-s$ متغیر مستقل وابسته است. به منظور کاهش مرتبه دستگاه معادلات دیفرانسیل جزیی به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باید مدارهایی بابعد $s = p-1$ انتخاب گردد.

۳. کلیه زیرگروه‌های s ـ بعدی گروه تقارنی G را به کمک زیرجبرهای s ـ بعدی جبر لی تقارن ها بدست می‌آوریم. قابل توجه است که هریک از این زیرگروه‌ها متناظر با یک دسته از جواب‌های ناوردای گروهی می‌باشد که توسط G تولید می‌شود.

۴. یک مجموعه کامل از ناورداهای مستقل تابعی برای G می‌یابیم. مانند:

$$y^{1} = \Psi^{1}(x,u), \cdots, y^{p-s}(x,u) = \Psi^{p-s}(x,u) \quad ,$$

$$\omega^{1} = \vartheta^{1}(x,u), \cdots, \Psi^{q}(x,u) = \vartheta^{q}(x,u) \quad , \tag{۶.۳}$$

۵. در حالتی‌که s بعد مدارهای متناظر با گروه تقارنی G از p کوچکتر است ، می‌توان $p-s$ ناوردای مستقل تابعی مانند $y^{1} = \Psi^{1}(x,u), \cdots, y^{p-s}(x,u) = \Psi^{p-s}(x,u)$ ، برای گروه تبدیلات تقارنی نقطه ای یافت که خود ناوردای تعریف شده $\mathcal{O}$ می‌باشند. علاوه بر این، q ناوردای دیگر مانند $\omega^{1} = \vartheta^{1}(x,u), \cdots, \Psi^{q}(x,u) = \vartheta^{q}(x,u)$ از عمل G موجود است که بهمراه‌ناورداهای Ψ^{i} یک مجموعه کامل $(p+q-s)$ ـ تایی از ناورداهای مستقل تابعی برای عمل G روی $\mathcal{O}$ می‌سازند. این مجموعه را با $\{y = \Psi(x,u), \omega = \vartheta(x,u)\}$ نشان داده و زین پس به منظور ساختن دستگاه کاهش یافته مورد نظر y هارا بعنوان متغیرهای مستقل جدیدو ωها را به عنوان متغیرهای وابسته جدید در نظر می‌گیریم. لذا در این حالت ، تعداد متغیرهای مستقل به$p-s$ کاهش می‌یابد. اما نکته حائز اهمیت این است که هیچ تناظر یک به یکی میان جوابهای G ناوردای $u = f(x)$ و توابع $v = h(y)$ موجود نیست. برای یافتن تناظر بین دو تابع ، قضیه تابع ضمنی را برای دستگاه $y = \Psi(x,u)$ با $p-s$ متغیر به کار می‌بریم. این متغیرهای جدید را به جای $y^{1}, \cdots, y^{p-s}$ با $\hat{x} = (x^{i_1}, \cdots, x^{i_{p-s}})$ وs متغیر باقیمانده را با $\hat{x} = (x^{j_1}, \cdots, x^{j_{p-s}})$ نمایش می دهیم. اکنون دستگاه را نسبت به $\hat{x} = (x^{i_1}, \cdots, x^{i_{p-s}})$ وu بر حسب متغیرهای ω و y و پارامترهای $\hat{x}$ حل می کنیم. در این‌صورت داریم:

$$\hat{x} = \gamma(\hat{x}, y, \omega), \quad u = \mu(\hat{x}, y, \omega). \tag{۷.۳}$$

اکنون با فرض ω به عنوان تابعی از y و مدنظر قرار دادن روابط ۶.۳و ۷.۳ و قاعده زنجیره‌ای قادریم از u مشتق گیری کنیم. در نتیجه:

$$u^{(n)} = \mu^{(n)}\left(\hat{x}, y, \omega^{(n)}\right). \tag{۸.۳}$$

۶. معادلات ۷.۳، ۸.۳ را در دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta(x, u^{n} = 0)$ قرار می‌دهیم. معادلات حاصل هم ارز دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$\Delta/G(y, \omega^{(n)}) = 0. \tag{۹.۳}$$

است که همان دستگاه کاهش یافته برای یافتن جواب‌های ناوردای گروهی می‌باشد.

۷. دستگاه ۹.۳ را حل می‌کنیم. هریک از جواب‌های این دستگاه ، $\omega = h(y)$ متناظر با یک جواب G ـ ناوردا از دستگاه اصلی است که با فرمول زیر بیان می‌گردد:

$$\vartheta(x,u) = h\left[\Psi(x,u)\right].$$

۱.۲.۳ جواب های گروه ـ ناوردای معادله KdV

مثال ۱.۲.۳. دیدیم که یکی از تقارن های معادله KdV مرتبه سوم، مولدی به صورت

$$V_4 = x\partial_x + 3t\partial_t - 2u\partial u.$$

است که تبدیل نظیر آن بصورت

$$(x,t,u) \mapsto \left(\lambda x, \lambda^3 t, \lambda^{-2} u\right),$$

می باشد. به ازای $t > 0$ این تبدیل دارای دو ناوردا است:

$$y = t^{\frac{-1}{3}} x \quad , \qquad\qquad \upsilon = t^{\frac{2}{3}} u \quad ,$$

اکنون با اعمال قاعده زنجیره ای مشتق داریم:

$$u_x = \frac{1}{t}\upsilon_y \quad , \qquad u_{xxx} = t^{-\frac{5}{3}}\upsilon_{yyy} \quad , \qquad u_t = -\frac{1}{3}t^{-\frac{5}{3}}\left(y\upsilon_y + 2\upsilon\right),$$

بنابراین معادله KdV به معادله‌ی ODE مرتبه سوم کاهش می‌یابد.

$$\upsilon_{yyy} + \upsilon\upsilon_y - \frac{1}{3}y\upsilon_y - \frac{2}{3}\upsilon = 0.$$

حل این معادله با روش‌های ممکن امکان پذیر نیست. اما تحت تبدیل

$$\upsilon = \omega_y - \frac{1}{6}\omega^2,$$

معادله فوق به معادله‌ی

$$\omega_{yyy} - \frac{1}{6}\omega^2\omega_y - \frac{1}{3}y\omega_y - \frac{1}{3}\omega = 0,$$

تبدیل می‌شود. با یکبار انتگرال گیری به معادله‌ی

$$\omega_{yy} - \frac{1}{18}\omega^3 - \frac{3}{2}y\omega - \kappa = 0,$$

کاهش می یابد که قابل حل است و با حل آن جوابهای ناوردای نظیر این تبدیل را می‌سازد.

حال با استفاده از روشی که در بالا بیان شد، معادله KdV مرتبه پنجم را کاهش می‌دهیم.

- کاهش مرتبه معادله بوسیله تقارن $X_{1}=\frac{\partial}{\partial x}$

به کمک روش مشخصه‌ها که قبلاً توضیح داده شد، دستگاه زیر را حل می کنیم تا ناورداهای متناظر با این تقارن بدست آید:

$$\frac{\mathrm{d}x}{1}=\frac{\mathrm{d}t}{0}=\frac{\mathrm{d}u}{0},$$

با حل این دستگاه دو ناوردای $y=t$ و $v(y)=u$ را بدست می آوریم. حال با جایگذاری این مقادیر در معادله (۱.۳) خواهیم داشت:

$$\acute{v}=0, \qquad (۱۰.۳)$$

که در آن منظور از $\,'\,$ مشتق تابع v نسبت به متغیر y است. در نتیجه معادله (۱.۳) با تقارن X_{1} به ODE (۱۰.۳) کاهش می‌یابد.

بدیهیست $v=ay+b$ یک جواب این معادله است. با اعمال تغییر متغیر لازم، جواب دقیق $u=at+b$ را برای معادله (۱.۳) بدست می‌آوریم.

- کاهش مرتبه معادله بوسیله تقارن $X_{2}=\frac{\partial}{\partial t}$

مشابه آنچه که در بالا بیان شد، با حل دستگاه

$$\frac{\mathrm{d}x}{0}=\frac{\mathrm{d}t}{1}=\frac{\mathrm{d}u}{0}\quad ,$$

دو ناوردای $y=x$ و $v(y)=u$ متناظر با X_{2}بدست می آید. با جایگذاری این دو ناوردا در معادله (۱.۳) به ODE زیر می رسیم:

$$v'''''+v\acute{v}=0\quad , \qquad (۱۱.۳)$$

با یکبار انتگرال گیری از معادله (۱۱.۳) می‌توان یک مرتبه معادله را کاهش دادو به معادله

$$v''''+\frac{1}{2}v^{2}=c\quad , \qquad (۱۲.۳)$$

رسید که در آن c یک عدد ثابت است. این معادله را به روش های مختلفی می‌توان حل کرد، از جمله به کمک سریها. مثلاً اگر شرایط اولیه معادله را حول مبدا داشته باشیم، آنگاه یک جواب معادله (۱۲.۳) بصورت زیر است:

$$v\left(y\right)=v\left(0\right)+\acute{v}\left(0\right)y+\frac{1}{2}v''\left(0\right)y^{2}+\frac{1}{6}v'''(0)y^{3}-\frac{1}{48}v^{2}(0)y^{4}-\frac{1}{120}v(0)\acute{v}\left(0\right)y^{5}+\mathcal{O}\left(y^{6}\right)\quad ,$$

که در نهایت با تغییر y به x یک جواب برای معادله (۱.۳) بدست خواهد آمد.

- کاهش مرتبه بوسیله تقارن X_{3}

در نهایت متناظر با X_{3} ، با حل دستگاه

$$\frac{\mathrm{d}x}{\frac{x}{5}}=\frac{\mathrm{d}t}{t}=\frac{\mathrm{d}u}{\frac{-3u}{10}}\quad ,$$

ناورداهای زیر بدست می‌آیند:

$$x=\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{1}{5}},\quad t=z,\quad u\left(x,t\right)=\left(\frac{z}{y}\right)^{\frac{-3}{10}}v\left(y,z\right)\quad ,$$

با قرار دادن این ناورداها در معادله (۱.۳) به ODE مرتبه پنجم زیر می‌رسیم.

$$3125y^5v'''''+43750y^4v''''+172500y^3v'''+207000y^2v''$$
$$+5v^2yv'+54720yv'+v'+720v=0\quad .$$

که در آن منظور از $'$ مشتق تابع v نسبت به متغیر y است. حل این معادله بسیار پیچیده بوده و مستلزم استفاده از شرایط اولیه و روشهای عددی می‌باشد که از بحث ما خارج است. لازم به ذکر است که با ترکیبات خطی مختلف از تقارنهای فوق می توان معادله را به صورتهای مختلفی کاهش داد.

مراجع

[۱] طهماسبی جایدر ح، (۱۳۹۵)، پایان‌نامه ارشد: ''بررسی جواب های معادله سه بعدی کودریاشف_سینلشیکوف''، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود،

[۲] پاییزه مهدوی هروانی ح، (۱۳۹۴)، پایان‌نامه ارشد: ''روش مستقیم ساختن قوانین پایستگی''، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود،

[3] P.J Olver, (1986), "**Symmetry groups and group invariant solutions of partial differential equatons**", J.Diff.Geo.14(1979),143-160

[4] P.J Olver, (1993), "**Application of lie groups to differential equation,**", springer ,Newyork.

[5] P.J Olver, (1986), "**Application of lie groups to differential equation,**", springer ,Newyork.

[6] L.V.Ovsiannikov, (1982), "**Group Analysis of Differential Equations.**", Academic Press ,Newyork.

[7] Lee J.M., (2002), "**Introduction to smooth Manifolds**",GTM,Springer,New York.

[8] l.V Ovsiannikov, (1958)"Groups and group-invariant solutions of differential equation", Dokl.Akad. Nauk USSR 118, p 439-442, Russian

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اطلس	Atlas
اقلیدسی	Euclidean
اندازه	Measure
امتداددهی	Prolongation
انتگرال گیری	Quadrature
ایمبدینگ	Embedding
ایمرژن	immersion
بردار مماس	Tangent vector
بعد	Dimensional
پاد متقارن	Antisymmetric
تابع ناوردا	Invariant function
تقارن	Symmetry
تقارن لی	Lie symmetry
تقارن معادله دیفرانسیل	Symmetry of differential equation
توپولوژیکی	Topological
توپولوژی	Topology
جبر لی	Lie algebra
جواب های ناوردای گروهی	Group invariant solutions
چارت مختصاتی	Coordinate chart
دستگاه معادلات جبری	System of algebraic Equation
دستگاه معادلات دیفرانسیل	System of differential Equation
دو سویی	Bijective
دیفیومورفیسم	Diffeomorphism
رتبه	Rank
رتبه‌ی ماکسیمال	Maximal rank
زیر جبر	Subalgebra

زیر جبر لی .... Lie subalgebra
زیر گروه .... Subgroup
زیر گروه لی .... Lie subgroup
زیر منیفلد .... Submanifold
سابمرژن .... submersion
ضرب چپ .... Left multiplication
عمل .... Action
عمل راست .... Right action
عمل منظم .... Regular action
عمل موثر .... Effective action
عمل نیم‌ـ منظم .... Semi-regular action
غیر خطی .... Nonlinear
فضای برداری .... Vector space
فضای جت .... Jet space
فضای کامل .... Total space
قاعده‌ی زنجیره‌ای .... Chain rule
قضیه تیلور .... Taylors theorem
کروشه‌ی لی .... Lie bracket
کلاف مماسی .... Tangent bundel
گروه تقارن .... Symmetry group
گروه لی .... Lie group
گروه یک پارامتری .... One-parameter group
ماتریس ژاکوبین .... Jacobian matrix
متغیر وابسته .... Dependent variable
مختصات موضعی .... Local coordinate
مدار .... Orbit
مستقل .... Independent
مستقل تابعی .... Functionallay independent
مشتق .... Derivative
مشتق جزیی .... Partial derivative
مشتق کامل .... Total derivative
مشتق لی .... Lie derivative
معادله دیفرانسیل جزیی .... Partial differential equation
معادله‌ی دیفرانسیل معمولی .... Ordinary differential equation

منیفلد	Manifold
منیفلد توپولوژیک	Topological manifold
منیفلد هموار	Smooth manifold
موضعاً اقلیدسی	Locally euclidean
مولد بینهایت کوچک	Infinitesimal generator
میدان برداری	Vector field
ناوردا	invariant
ناوردای چپ	Left invariant
ناوردای دیفرانسیلی	Defferential invariant
ناوردای راست	Right invariant
نگاشت هموار	Smooth map
وارون	Inverse
هموار	Smooth

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Action	عمل
Antisymmetric	پاد متقارن
Atlas	اطلس
Bijective	دوسویی
Bilinear	دو خطی
Chain rule	قاعده زنجیری
Characteristic system	دستگاه مشخصه
Connected	همبند
Coordinate chart	چارت مختصاتی
Dependent variable	متغیر وابسته
Derivation	مشتق
Diffeomorphism	دیفئومورفیسم
Differential invariant	ناوردای دیفرانسیلی
Dimensional	بعد
Effective action	عمل مؤثر
Embedding	ایمبدینگ
Equivalent	هم ارز
Euler equation	معادلات اویلر
Euclidean	اقلیدسی
Exponential map	نگاشت نمایی
Flow	شار
Functionallay independent	مستقل تابعی
Fandamental	بنیادی
General linear group	گروه خطی عام
Graph	گراف
Group invariant solutions	جواب های ناوردای گروهی

Heat equation	معادله گرما
Immersed submanifold	زیر منیفلد ایمرژن
Immersion	ایمرژن
Independent	مستقل
Infinitesimal generator	مولد بینهایت کوچک
Invariant	ناوردا
Invariant function	تابع ناوردا
Inverse	وارون
Inversion map	نگاشت وارون ساز
Jacobi identity	اتحاد ژاکوبی
Jacobian matrix	ماتریس ژاکوبین
Jet space	فضای جت
Laplace equation	معادله لاپلاس
Left invariant	ناوردای چپ
Left multiplication	ضرب چپ
Lie algebra	جبر لی
Lie bracket	کروشه لی
Lie derivative	مشتق لی
Lie group	گروه لی
Lie series	سری لی
Lie subalgebra	زیر جبر لی
Lie subgroup	زیر گروه لی
Lie symmetry	تقارن لی
Local coordinate	مختصات موضعی
Euclidean	موضعاً اقلیدسی
Manifold	منیفلد
Maximal rank	رتبه ماکسیمال
Nonlinear	غیر خطی
One-parameter group	گروه یک پارامتری
Open submanifold	زیر منیفلد باز
Orbit	مدار
Ordinary differential equation	معادله دیفرانسیل معمولی
Partial differential equation	معادله دیفرانسیل جزیی
Partial Derivation	مشتق جزیی

تبدیل نقطه ای .... Point transformation
امتداد دهی .... Prolongation
انتگرال گیری .... Quadrature
رتبه .... Rank
عمل منظم .... Regular action
عمل راست .... right action
ناوردای راست .... right- invariant
شمارای نوع دوم .... Second countable
عمل نیم منظم .... Semi-regular action
جواب‌های مشابه .... Similarity solutions
هموار .... Smooth
منیفلد هموار .... Smooth manifold
نگاشت هموار .... Smooth map
زیر جبر .... Subalgebra
زیر گروه .... Subgroup
زیر منیفلد .... Submanifold
سابمرژن .... Submersion
تقارن .... Symmetry
تقارن معادله دیفرانسیل .... Symmetry of differential equation
دستگاه معادلات جبری .... System of algebraic equation
دستگاه معادلات دیفرانسیل .... System of differential equation
کلاف مماسی .... Tangent bundle
بردار مماس .... Tangent vector
قضیه تیلور .... Teylors theorem
توپولوژیکی .... Topological
گروه توپولوژیک .... Topological group
منیفلد توپولوژیک .... Topological manifold
توپولوژی .... Topology
مشتق کامل .... Total derivative
فضای کامل .... Total space
میدان برداری .... Vector field
فضای برداری .... Vector space

نمایه

Aabstract

The main goal of this thesis is to analyse the invariance conditions of fifth-order KdV equation. This is done by finding symmetry transformations and the equivalence reduced equations. For this purpose firstly, we start with fundamental geometric concepts to clarify the geometric structure of the considered equation. Then by obtained symmetry group and the amended algorithm the invariance conditions, reduced forms and group-invariant solutions are given.

Key word: Vector feild, Lie algebra, Jet space, Lie symmetry, reduction of order, KdV equation.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

M.Sc. Thesis in Geometric

Study of Invariance properties of 5-th order Generalized KdV equation

By: Zohreh Amini

Supervisor

Seyed Reza Hejazi

January 2018