

حاشا
الرحمن الرحيم



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

پایان نامه کارشناسی ارشد

پایداری سیستم های تاخیری با یک تاخیر متغیر زمان

نگارنده: پروانه جمالی

استاد راهنما

دکتر حجت احسنی طهرانی

استاد مشاور

دکتر مهدی قوتمند

بهمن ۱۳۹۶

شماره:
تاریخ:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم پروانه جمالی با شماره دانشجویی ۹۴۰۵۱۴۴ رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی تحت عنوان پایداری سیستم‌های تأخیری با یک تأخیر متغیر زمان که در تاریخ ۱۳۹۶/۱۱/۱۱ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

<input type="checkbox"/> مردود <input checked="" type="checkbox"/> قبول (با درجه: <u>خوب</u>)			
نوع تحقیق: <input type="checkbox"/> نظری <input type="checkbox"/> عملی			
عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر حجت احسنی طهرانی	دانشیار	
۲- استاد راهنمای دوم			
۳- استاد مشاور	دکتر مهدی قوتمند	استادیار	
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر محمدهادی نوری اسکندری	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر علی مس فروش	استادیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر علیرضا ناظمی	دانشیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:



تبصره: در صورتی که کسی مردود نشود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می‌تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم به پدر و مادرم که پاک زیستن را
به من آموختند...

از پدر و مادر عزیزم، که همواره بر کوتاهی و درستی من،
قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و
در تمام عرصه‌های زندگی یار و یآوری بی‌چشم داشت برای
من بوده‌اند، کمال تشکر را دارم. جناب آقای دکتر حجت
احسنی طهرانی و جناب آقای مهدی قوتمند، اساتید راهنما
و مشاور: شما روشنایی بخش تاریکی جان هستید و ظلمت
اندیشه را نور می‌بخشی. چگونه سپاس گویم مهربانی و
لطف شما را که سرشار از عشق و یقین است.

پروانه جمالی
بهمن ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب پروانه جمالی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان پایداری سیستم های تاخیری با یک تاخیر متغیر زمان ، تحت راهنمایی حجت احسنی طهرانی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

پروانه جمالی

بهمن ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه قصد داریم سیستم‌های تأخیری را با استفاده از روش تجزیه‌ی تأخیر پایدار کنیم. با استفاده از تجزیه، فاصله زمانی تأخیر به دو بازه نابرابر توسط پارامتر α تنظیم می‌شود. یک تابع لیاپانوف - کراسوفسکی وابسته به تأخیر جدید برای بدست آوردن نامساوی ماتریسی خطی تعریف می‌کنیم که این منجر به کاهش محافظه کاری روی بیشترین کران بالای تأخیر زمانی می‌شود.

کلمات کلیدی: سیستم تأخیر زمانی، روش لیاپانوف مستقیم، روش لیاپانوف - کراسوفسکی، روش لیاپانوف - رازومیخین، نامساوی ماتریسی خطی، فرم همدم برداری، ناوردهای کرونگر، فاصله تأخیر متغیر با زمان، پایداری مجانبی، پایداری وابسته به تأخیر

فهرست مطالب

ک	فهرست تصاویر
ل	فهرست جداول
۱	۱ تعاریف و مباحث مقدماتی
۱	۱.۱ مقدمه
۲	۱.۱.۱ تاریخچه
۴	۲.۱ اهمیت تأخیر و اثرات آن
۵	۱.۲.۱ کنترل سیستم‌های تأخیری
۶	۲.۲.۱ کاربرد ورودی‌های تأخیری
۷	۳.۲.۱ پیاده‌سازی تأخیری سیستم‌های توزیع شده
۷	۴.۲.۱ کنترل برحسب مقدار تأخیر
۷	۳.۱ اثرات تأخیر بر روی خواص ساختاری سیستم‌ها
۸	۱.۳.۱ تأثیر تأخیر بر روی پایداری سیستم‌ها
۹	۴.۱ تعاریف
۱۱	۵.۱ مدل‌هایی از سیستم تأخیری
۱۳	۲ مروری بر سیستم‌های تأخیردار و نامساوی‌های ماتریسی خطی
۱۳	۱.۲ روش مستقیم لیاپانوف (قضایای پایداری)
۱۵	۱.۱.۲ پایداری سیستم‌های خطی تغییر ناپذیر با زمان
۱۵	۲.۱.۲ روش‌های مختلف لیاپانوف برای تحلیل پایداری
۱۷	۳.۱.۲ تحلیل پایداری سیستم‌های پیوسته خطی
۱۹	۴.۱.۲ پایداری سیستم گسسته خطی
۲۰	۲.۲ سیستم‌های تأخیر زمانی (TDSs) عمومی و روش مستقیم لیاپانوف
۲۰	۱.۲.۲ مقدمات تحلیل پایداری
۲۱	۳.۲ روش مستقیم لیاپانوف

۲۱ روش کراسوفسکی برای سیستم‌های تأخیری	۱.۳.۲
۲۳ روش رازومیخین برای برای سیستم‌های تأخیری	۲.۳.۲
۲۴ مروری بر نامساوی‌های مثلثی خطی	۴.۲
۲۵ خواص و ترفندهای LMI	۱.۴.۲
۲۵ ترفندهای LMI	۲.۴.۲
۲۷ رویکرد LMI به پایداری سیستم‌های خطی	۳.۴.۲
۲۷ حل نامساوی ماتریسی خطی با استفاده از جعبه ابزار یالمیپ	۵.۲
۲۷ تعریف متغیرهای تصمیم‌گیری	۱.۵.۲
۲۸ تعریف محدودیت‌ها	۲.۵.۲
۲۸ حل مسئله بهینه‌سازی یا حل‌پذیری	۳.۵.۲
۲۹ محاسبه مقادیر عددی مقادیر مجهول	۴.۵.۲
۳۱ پایداری سیستم‌های گسسته زمانی با تأخیر ثابت	۳
۳۱ مقدمه‌ای بر ناورداهای کرونکر و فرم همدم برداری	۱.۳
۳۵ تبدیلات تشابهی فضای حالت - فرم استاندارد اشلون	۲.۳
۳۷ فرم همدم برداری اولیه	۳.۳
۴۳ انواع تأخیر در سیستم‌های گسسته	۴.۳
۴۴ پایداری سیستم‌های گسسته زمانی با تأخیر ثابت متغیر ورودی	۱.۴.۳
۴۴ طراحی و پیاده‌سازی	۲.۴.۳
۴۸ بررسی انواع دیگر سیستم‌های گسسته زمانی با تأخیر ثابت	۳.۴.۳
۵۱ پایداری سیستم‌های گسسته زمانی با تأخیر متغیر	۴
۵۱ مقدمه‌ای کوتاه درباره روش تجزیه	۱.۴
۵۳ تعریف مسئله	۲.۴
۵۳ روش لیاپانوف - کراسوفسکی برای سیستم‌های گسسته	۱.۲.۴
۵۹ الگوریتم یافتن α	۲.۲.۴
۶۱ مثال‌های عددی	۳.۴
۶۴ نتیجه‌گیری	۴.۴
۶۵ ضمیمه	آ
۶۵ برنامه‌های کامپیوتری	۱.آ
۷۵ نمایه	۲.آ
۷۶ مراجع	

۸۰

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

۸۲

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فهرست تصاویر

۱۱	دوش آب	۱.۱
۱۲	سیستم نمونه- داده	۲.۱
۱۷	آونگ ساده	۱.۲
۲۳	ایده روش رازومیخین	۲.۲

فهرست جداول

۶۱	کران بالای مجاز تأخیر.	۱.۴
۶۲	کران بالای مجاز تأخیر.	۲.۴
۷۵	نمایه	۱.آ

فصل ۱

تعاریف و مباحث مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در اغلب کاربردهای امروزی، سیستم مورد مطالعه با فرضیات گوناگون مواجه است. یکی از این فرضیات معمول، علی بودن^۱ سیستم است که در ادامه آن را تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر در تحلیل و طراحی سیستم‌ها فرض می‌شود که نرخ تغییرات متغیر حالت سیستم در زمان حال، مستقل از متغیرهای حالت در زمان گذشته بوده و به‌طور یکتا توسط متغیرهای حالت زمان حال تعیین بشود، یا به بیان ریاضی $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ در معادلات دینامیکی سیستم‌ها نیز فرض بر وجود متغیرهای حالت و مشتقات آن‌ها در زمان جاری است و عمومی‌ترین آن وقتی است که علاوه بر وجود معادلات دیفرانسیلی معمولی، معادلات دیفرانسیلی جزئی نیز وجود داشته باشد. اما در یک بررسی موشکافانه‌تر متوجه می‌شویم که مدل واقعی اغلب سیستم‌ها یا فرآیندها، شامل تعدادی از وضعیت‌ها در زمان گذشته نیز می‌باشد. همچنین در تعدادی از مسائل عدم تاثیر وضعیت‌های زمان گذشته بی‌معنی است، فرآیندهایی نظیر فرآیندهای شیمیایی، بیولوژی، اقتصادی، فیزیکی سیستم‌های مکانیکی و الکتریکی، خود به نوعی درگیر این چنین مسائلی می‌باشند. به عنوان مثال مقدار تغییرات یک متغیر حالت مشخص در زمینه مسائل اقتصادی به هیچ وجه نمی‌تواند به مقادیر تغییرات گذشته آن متغیر حالت و یا متغیرهای حالت دیگر وابسته نباشد و یا میزان رشد یک باکتری خاص در یک فرایند بیولوژی بدون تاثیر از حالت‌های گذشته نمی‌باشد. اگرچه این موضوع،

^۱Causality

کاملاً روشن و شفاف می‌باشد اما تئوری تحلیل و طراحی این چنین سیستم‌ها بیشتر در دهه‌های اخیر رشد محسوسی داشته است. چنانچه در مدل ارائه شده از سیستم، تاثیرات گذشته متغیرهای حالت را نیز اعمال نمایم ادبیات ریاضی و معادلات دینامیکی حاکم بر این سیستم‌ها تغییر یافته و تمامی تحلیل و طراحی‌های لازم بایستی به گونه‌ای ساختار یافته تغییر یابد. البته این تغییرات به نسبت یکسان نبوده و بعضاً در مواردی نظیر تحلیل پایداری این گونه سیستم‌ها به مشکلات کاملاً غیرمتناسبی نسبت به سیستم‌های معمولی برخورد می‌نماییم. پس با توجه به مفاهیم استنباط شده از سیستم‌های تأخیر زمانی^۱، (TDS) می‌توان گفت که در آرگومان معادلات دینامیکی این سیستم‌ها، علاوه بر وجود متغیر زمان، متغیر تغییر زمان داده شده (شیفت داده شده زمان) نیز وجود داشته به طوری که اثرات گذشته متغیرهای حالت سیستم در تعیین متغیرهای حالت جاری بروز خواهد نمود. به همین دلیل شکل ظاهری معادلات سیستم دینامیکی تأخیری باعث شده که عناوین دیگری به این سیستم‌ها تعلق گیرد. به عنوان مثال می‌توان به نام‌هایی نظیر: سیستم‌های با اثر ثانوی،^۲ سیستم‌های موروثی^۳، سیستم‌های تأخیری^۴، معادلات با شیفت آرگومانی^۵ و معادلات دیفرانسیل تابعی^۶ اشاره (FDEs) نمود. نام معادلات دیفرانسیل معمولی (ODEs) در مقابل نام معادلات دیفرانسیل تابعی قرار گرفته که تفاوت اصلی آنها در آن است که برخلاف معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل تابعی، دارای بعد نامتناهی می‌باشند. دلیل اصلی آن نیز این است که به عنوان مثال اگر برای حل منحصر بفرده یک معادله دیفرانسیلی معمولی تنها به یک شرط اولیه نیاز داشته باشیم آن‌گاه معادله مزبور، مرتبه اول یا دارای بعد یک می‌باشد اما در یک معادله دیفرانسیلی تابعی متناظر، جهت حل منحصر بفرده معادله، نیاز به یک تابع اولیه‌ای باشد. به عبارت دیگر این تابع اولیه دارای بینهایت نقطه بوده که همین امر باعث می‌شود که این گونه معادلات دارای بعد نامتناهی شوند. [۱۴]

۱.۱.۱ تاریخچه

تحقیقات اولیه سیستم‌های تأخیر زمانی از قرن هجدهم آغاز گردید که اغلب راجع به مسائل هندسی این گونه سیستم‌ها بود. این مطالعات به صورت پراکنده تا شروع قرن بیستم ادامه داشت. این زمان، مطالعات سیستم‌های تأخیری به صورت پیشرفته تری توسط ولتررا^۷ (۱۹۲۰) آغاز گردید که مطالعات وی به سیستم‌های اکولوژی و ویسکوالاستیک و همچنین مدل‌های شکار و شکارچی^۸ ارتباط داشت. در حقیقت تا زمان وی، اغلب نتایج بدست آمده در ۱۷۰ سال قبل بیشتر راجع

^۱time delay Systems

^۲Systems with after Effect

^۳Hereditary Systems

^۴Retaliatory Systems

^۵equations with Deviating Argument

^۶ Functional Differential Equations

^۷Vito Volterra

^۸Predator-Prey Models

به خواص ویژه‌ای از معادلات بسیار خاص مربوط می‌گردید که همین امر باعث شده بود که برخلاف معادلات دینامیکی معمولی، یک ساختار ریاضی واحد و تئوری‌های منطقی جامع برای تمامی سیستم‌های تأخیری وجود نداشته باشد. ولترا تعدادی از معادلات دیفرانسیلی خطی کلی را که شامل متغیرهای حالت گذشته سیستم نیز بودند فرموله نمود و سپس مفهوم تابع انرژی را برای مدل‌های بعضی از سیستم‌های فیزیکی معرفی کرد. او با بررسی این تابع انرژی سعی نمود که رفتار مجانبی سیستم را برای زمانهای آینده پیش نماید. [۱۴]

در این دوره از زمان، اکثر دانشمندان پیشگام کنترل سیستم‌های تأخیری از اروپای شرقی بودند، از جمله این محققان می‌توان به نام افرادی نظیر: زیپکین^۱ در زمینه رگولاسیون سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان (۱۹۴۱)، هالانی^۲، کراسوفسکی^۳، رازومیخین^۴ در زمینه پایداری لیاپانوف و تئوری نوسانات (دهه ۵۰-۶۰) و اسمیت^۵ در مسائلی مانند کنترل کننده‌های پوسیکات^۶ و همچنین الگوریتم پیش بینی اسمیت (از ۱۹۵۷ تا ۱۹۵۹) اشاره نمود. در همان سال‌ها مینورسکی^۷ (۱۹۶۰) مطالعاتی را در زمینه پایداری کشتی‌ها و هدایت اتوماتیک انجام داد که در مکانیزم فیدبک آن‌ها، اثرات تأخیر لحاظ شده بود که همین امر، اهمیت کار ایشان را نشان می‌داد. از همین سال‌ها به بعد، علاقه‌مندی زیادی در زمینه کنترل این‌گونه سیستم‌ها به وجود آمد و منشاء جدیدی در جهت توسعه تئوری معادلات دیفرانسیلی با اثرات تئوری متغیرهای حالت تأخیر دار (معادلات دیفرانسل تابعی) گردید.

این موضوع علاقه‌مندی خاصی را نیز در ایالات متحده از دهه ۶۰ به بعد ایجاد کرد که از آن جمله می‌توان تحقیقات بلمن^۸ را نام برد. ایشان ابتدا با همکاری دانسکین^۹ (۱۹۵۴)، کاربردهای مختلفی را از معادلات شامل متغیرهای زمان گذشته در زمینه بیولوژی و اقتصاد به صورت مقالاتی ارائه نمودند. همچنین آن‌ها توانستند یک تئوری ساختاریافته خوبی را برای معادلات خطی تأخیری با ضرایب ثابت استخراج نموده و سپس مسیری را برای آغاز مباحث پایداری باز نمایند. بعد از آن، بلمن به اتفاق کوک^{۱۰} مسیر فرکانسی تحلیل این‌گونه سیستم را به صورت جامع‌تری در یک کتاب منتشر کرد (۱۹۶۳). با تحقیقات دانشمندان این دوره، کتاب‌های متعدد نیز با موضوع سیستم‌های تأخیری نوشته گردید. از آن جمله می‌توان به کتاب میشکیس^{۱۱} (۱۹۶۷) در زمینه تئوری معادلات دیفرانسیلی با مؤلفه‌های تأخیری اشاره نمود که ایشان پایه‌های اولیه کلی را

^۱ Y.Z.Zypkin

^۲ Halanay

^۳ Krasovskii

^۴ Elsgoltz Razumikhin

^۵ O.J.M.Smith

^۶ posicast

^۷ Minorsky

^۸ Bellman

^۹ Danskin

^{۱۰} cook

^{۱۱} A.D. Myshkis

برای سیستم‌های خطی تأخیری برداشتند. به دنبال آن، همکاری بلمن با هال^۱ باعث انتشار کتابی در زمینه تحلیل حوزه زمانی سیستم‌های خطی تأخیر زمانی گردید (۱۹۷۱). ادامه تحقیقات این دانشمندان باعث بهتر شکل گرفتن ساختار ریاضی این‌گونه سیستم‌ها شد و تحقیقات دانشمندان گذشته، به صورت ساختاری منظم در کتاب‌های مختلف منتشر گردید. در این میان، مقالات و کتاب‌های هال از اهمیت فوق‌العاده‌ای برخوردار است [۱۴]. ایشان مباحث پایداری کراسوفسکی را در قالب تئوری تابعی لیاپانوف به صورت منظمی جمع‌آوری و تدوین نمود و دیگران با استفاده از تئوری‌های موجود، تحقیقات خود را در زمینه سیستم پایداری سیستم‌های تأخیری به خصوص در حوزه خطی این سیستم‌ها، آغاز نمودند.

آنچه که لازم به ذکر است این است که تحقیقات به عمل آمده بیشتر راجع به سیستم‌های خطی بوده و مباحث مختلف این سیستم‌ها به ویژه مسائل پایداری آن‌ها، باعث گسترش تئوری‌های زیادی گردید. از سال‌های ۱۹۸۰ به بعد، تحقیقات در زمینه تحلیل و طراحی سیستم‌های خطی تأخیری گسترش یافت به طوری که سهم تحلیل پایداری این سیستم‌ها از همه بیشتر بود. در اواخر قرن بیستم، دانشمندان توانستند تابعی‌های لیاپانوفی را استخراج نمایند که شرایط کافی را جهت پایداری سیستم‌های تأخیری از نوع خطی ارائه دهند. اما بیشتر تلاش دانشمندان در این زمینه که امروزه نیز ادامه دارد در مسیر تحلیل پایداری مقاوم بوده به طوری که حجم زیادی از مقالات را به خود اختصاص داده است. شاید بتوان مهمترین مرکز تحقیقاتی امروز را یک مؤسسه فرانسوی دانست که در این ۱۰ سال اخیر فعالیت‌های در این زمینه داشته است.

۲.۱ اهمیت تأخیر و اثرات آن

مهمترین سوالی که در ذهن محققان به وجود می‌آید آن است که ”چه چیزی باعث علاقمندی و توجه خاص روی موضوع سیستم‌های تأخیری شده است؟“ البته می‌توان سه دیدگاه مختلف را در پاسخ به این سؤال مطرح کرد:

۱. اثر ثانوی، یک مساله کاربردی است. این مساله و همچنین اهمیت بهبود مشخصه دینامیکی یک سیستم ما را وادار می‌سازد که مدل‌ها را جهت بررسی سیستم‌هایی در نظر بگیریم که رفتارشان بسیار نزدیک به پروسه واقعی باشد. بنابراین بایستی اثرات تأخیر را در تحلیل و طراحی این‌گونه پروسه‌ها لحاظ کنیم. همان‌طور که قبلاً نیز بیان شد پروسه‌هایی نظیر: هوانوردی، هوافضا، بیولوژی، شیمیائی، اکولوژی، اقتصادی، پزشکی، مکانیکی، فیزیکی، فیزیولوژی و دینامیک‌های جمعیت از دسته این چنین سیستم‌ها می‌باشند. هم‌چنین سنسورها و محرک‌هایی که در حلقه‌های فیدبک وجود دارند معمولاً باعث ایجاد تأخیر می‌شوند.

^۱Hale

۲. تأخیرها هنوز استفاده چندانی در کنترل کننده ندارند زیرا در صورت لزوم نیز، ساده‌ترین راه، جایگزینی تقریبی آنها با سیستم‌های با ابعاد متناهی باشد. البته نادیده گرفتن، اثرات تأخیر، راه حل کلی نمی باشد زیرا در اکثر حالات منجر به نتایج بدی در پایداری و نوسانات می شود. اما مطالعات اخیر نشان داده است که کاربرد تأخیر می تواند مزایایی را در کنترل، نظیر پایداری سازی سیستم‌های ODEs داشته باشد.

۳. جدا از پیچیدگی بررسی معادلات دینامیکی تأخیری، TDSs می توانند به صورت مدل‌هایی با ابعاد نامتناهی، در معادلات دیفرانسیل جزئی ظاهر شوند. به عبارت دیگر، می توان با وارد کردن مقدار تأخیر در معادلات دیفرانسیل، مدل‌های ساده‌تری را جهت بیان معادلات دیفرانسیل جزئی ارائه داد.

دلایل جزئی‌تر دیگری نیز می توان بیان نمود که اهمیت مطالعه این سیستم‌ها را نشان دهد.

۱.۲.۱ کنترل سیستم‌های تأخیری

یکی از مباحث مهم و باز تحقیقاتی در زمینه سیستم‌های تأخیری مربوط به مسائل کنترلی آنها می باشد. البته با توجه به اینکه هدف اصلی این رساله، آنالیز پایداری سیستم‌های تأخیری می باشد، به همین علت مسائلی که در کنترل این سیستم‌ها وجود دارد را به طور خیلی خلاصه بیان می نمایم.

کنترل سیستم‌های تأخیری در اواخر دهه ۵۱ به طور وسیعی مورد بررسی قرار گرفت که طی ۱۱ سال گذشته، تحقیقات چشمگیری صورت گرفته است. اصولاً روش‌های عملی که تاکنون وجود داشته است بر اساس تقریب‌های بوده که عدم قطعیت‌های ناشی از تأخیر را صرف نظر می کردند. مسلماً این روش‌ها برای تأخیرهای متغیر با زمان، روش‌ها مطمئن نمی باشد. به طور کلی دو روش در کنترل این سیستم‌ها مورد بررسی قرار گرفته است؛ یکی روش کنترل مد لغزان^۱ بوده [۵] و دیگری کنترل تأخیر زمانی^۲ می باشد [۱۵]. نتایجی را که به طور خلاصه می توان برای کنترل مد لغزان ارائه داد بصورت زیر می باشد:

۱. برای سیستم‌های که تأخیر در متغیر حالت آن‌ها وجود دارد، کنترل مد لغزان، مشابه حالت سیستم‌های ODEs است که البته طراحی و محاسبات مربوطه پیچیده‌تر می باشد.

۲. اما اگر در ورودی تأخیر وجود داشته باشد، مسئله پیچیده‌تر شده که این موضوع هنوز از مسائل مطرح و در حال تحقیق می باشد.

اما در روش کنترل تأخیر زمانی (TDC) که ابتدا در دهه ۹۰ مطرح گردید نیز تکنیک به صورتی است که یک تأخیر کوچک h را در طراحی کنترل وارد می نمایند به طوریکه اثر اغتشاشات اضافی

^۱ Sliding Mode Control

^۲ Time-Delay Control

$d(k)$ (که نمایش دهنده دینامیکهای ناشناخته است) را کاهش دهند. نکته قابل اهمیت در این مقوله آن است که مسئله کنترل سیستم‌های تأخیری، یکی از مسائل تحقیقاتی است که هنوز در ابتدای راه قرار دارد. دلیل آن هم روشن است، زیرا که مبانی تحلیلی این سیستم‌ها به‌خصوص مباحث پایداری نیاز به تحقیقات بیشتری داشته و همین امر باعث شده تحقیقات کنترلی این سیستم‌ها، حرکت کندی داشته باشد. چندین مسئله باز تحقیقاتی در این زمینه می‌تواند مورد توجه قرار گیرد که در این قسمت، به‌صورت اجمالی به سه مورد اشاره می‌نماییم:

۲.۲.۱ کاربرد ورودی‌های تأخیری

کنترل‌کننده‌هایی که تا به امروز طراحی گردیده‌اند تنها متغیرهای حالت تأخیردار را در نظر گرفته بطوری که سیگنال‌های ورودی و خروجی بدون تأخیر بوده‌اند. اما در عمل سیستم‌هایی نظیر ردیاب‌های الکترواپتیکی وجود دارند که دارای زیرسیستم‌هایی با ورودی تأخیری هستند. به‌عنوان مثال زیرسیستم میز دو درجه آزادی علاوه بر داشتن متغیرهای حالت تأخیری، دارای ورودی تأخیری از زیرسیستم پردازش تصویر نیز می‌باشد. با وجود چنین سیستم‌هایی، اکثر کنترل‌کننده‌ها، بدون حافظه^۱ طراحی شده‌اند. یعنی قانون کنترلی به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$u(t) = Kx(t)$$

اما یک سوال مهم و مشکل این است که برای اکثر سیستم‌هایی که دسترسی به متغیرهای حالت لحظه‌های آن‌ها وجود ندارد و یا به‌عبارتی، تنها می‌توان به متغیرهای تأخیری دست پیدا نمود، با چه نوع طراحی می‌توان پروسه را کنترل نمود؟! این سوال اولین بار توسط افرادی نظیر زیپکین و سپس اسمیت مورد بررسی قرار گرفت. برای مثال آن‌ها هم از لحاظ تئوری و هم عملی، سیستم‌هایی را به‌صورت خطی زیر در نظر گرفتند: [۳۲]

$$\dot{x}(t) = A_0(t)x(t) + A_1(t-h) + B_0u(t) + B_1u(t-h)$$

که در آن فرض کردند (A_0, B_0) و یا $(A_0 + A_1, B_0)$ کنترل‌پذیر نباشند برای مثال $(B_0 = 0)$. این بدان معناست که جهت محاسبه قانون کنترلی مناسبی بایستی از جمله $B_1(t-h)$ استفاده نمود که مقالاتی که این چنین شرطی را اعمال نموده‌اند بسیار نادر می‌باشد و در اکثر تحقیقات انجام شده نیز، قسمت کنترلی تأخیری، به‌صورت یک جمله اغتشاشی در نظر گرفته شده و آن را به‌عنوان یک ورودی کنترلی مؤثر لحاظ نمودند.

۳.۲.۱ پیاده‌سازی تأخیری سیستم‌های توزیع شده

در دهه هفتاد، مقالات متعددی راجع به کنترل‌کننده‌های تأخیری توزیع شده برای سیستم‌های دارای تأخیر گسسته منتشر گردید. شبیه‌سازی این چنین کنترل‌کننده‌هایی ممکن است با توجه به وجود عدم قطعیت‌های پارامتری، به صورت مقاوم^۱ ظاهر شوند. اما مقاوم بودن نسبت به دوره زمان نمونه‌برداری می‌تواند یک مسئله مهم تحقیقاتی در نظر گرفته شود. گسسته‌سازی تأخیرهای توزیع شده و تغییر زمان نمونه‌برداری در شبیه‌سازی می‌تواند همگی باعث ناپایداری سیستم گردند [۳۲]. تحقیقات اخیر در این زمینه به صورتی است که بتوانند شرایط لازم را جهت پیاده‌سازی دیجیتال بدست آورند.

۴.۲.۱ کنترل برحسب مقدار تأخیر

یکی دیگر از مسائل باز تحقیقاتی در این زمینه، کنترل پروسه‌هایی است که ورودی به‌عنوان تأخیر سیستم در نظر گرفته می‌شود که برای مثال می‌توان معادله دینامیکی زیر را در نظر گرفت: [۳۲]

$$\dot{x}(t) = g[x(t - ku(t)) \quad u(t) \geq u_0 \geq 0$$

این چنین معادلاتی در بعضی از پروسه‌های فیزیکی نظیر فرایندهای بُرش وجود دارد که کنترل آنها یکی از مسائل مهم تحقیقاتی است، زیرا تاکنون هیچ مبحث تئوری جدی در مورد حل این‌گونه معادلات و استخراج شرایط لازم و کافی آنها ارائه نگردیده است (به تحقیقات اورلو^۲ (۱۹۸۰) مراجعه شود).

۳.۱ اثرات تأخیر بر روی خواص ساختاری سیستم‌ها

یکی از خواص مهم هر سیستم، ویژگی کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری آن بوده که در این بخش سعی شده به‌طور کاملاً اجمالی، این دو ویژگی برای سیستم‌های تأخیری نیز بررسی گردد. لذا جهت درک مطلب، بهتر است این ویژگی‌ها در دو حالت ODEs، FDEs مورد مقایسه قرار گیرند. با جمع بندی تحقیقات انجام شده می‌توان دو اختلاف عمده از دو ویژگی کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری سیستم‌های تأخیری با سیستم‌های معمولی را به صورت زیر بیان نمود. [۱۶]

۱. اولین اختلاف مربوط به متغیرهای حالت می‌باشد: در حالت ODEs مفهوم کنترل‌پذیری بدین معناست که متغیر حالت $x(t)$ از زمان t_1 حرکت کرده و در زمان $t_1 + h$ به یک نقطه از فضای حالت برسد. به عبارت دیگر معنای کنترل‌پذیری، یعنی رسیدن حالت $x(t_1)$ به حالت $x(t_e)$ توسط کنترل محدود u می‌باشد. اما در حالت تأخیری ما با یک مدل تابعی

^۱Robust

^۲Orlov

مواجه هستیم. به عبارت دیگر، مفهوم واقعی کنترل‌پذیری در سیستم‌های تأخیری بدین معناست که تابع وضعیت $x(t_i)$ در فاصله زمانی $k_i h_i \leq t_i \leq (k_i + 1)h$ به $x(t_j)$ در فاصله زمانی $k_j h_j \leq t_j \leq (k_j + 1)h$ توسط کنترل محدود u سوق داده می‌شود.

۲. دومین اختلاف مربوط به اجرای فرامین کنترلی است. به عنوان مثال اگر مدل تأخیری، خطی باشد آن‌گاه تأخیرهای موجود در سیستم باعث به وجود آمدن یک مینیمم زمان دسترسی خواهند شد. یعنی اینکه برای محاسبه سیگنال کنترل و اعمال آن به سیستم مورد نظر، یک حداقل زمانی نیاز می‌باشد.

در مورد مبحث کنترل‌پذیری سیستم‌های تأخیری، محققان متعددی تحقیقاتی را انجام داده‌اند و مفاهیمی نظیر کنترل‌پذیری قوی، مطلق، ضعیف، تقریبی و طیفی را تعریف نموده‌اند. اما مهمترین مطلب در مورد کنترل‌پذیری سیستم‌های تأخیری آن است که بتوان کوچکترین زمان ممکن t_1 را طوری پیدا کرد که متغیرهای حالت داده شده به مقدار مطلوب x_1 در فضای \mathbb{R}^n برسند. تعریف مشابه‌ای نیز برای رویت‌پذیری این سیستم‌ها می‌توان ارائه داد با این تفاوت که سیستم‌های تأخیری از نوع خنثی را از این تعریف خارج نمود زیرا به طور معمول این نوع سیستم‌ها پایدار نبوده و از این رو مسئله رویت‌کننده‌های مجانبی مطرح می‌شود که امروزه کم و بیش در حال تحقیق است.

۱.۳.۱ تأثیر تأخیر بر روی پایداری سیستم‌ها

تأثیر تأخیر روی پایداری سیستم‌های تأخیری یک بحث تحقیقاتی روز است زیرا تأخیر ممکن است باعث بروز رفتارهای پیچیده‌ای (مانند نوسان و ناپایداری) در سیستم‌های حلقه بسته شود. حتی یک تأخیر کوچک نیز ممکن است برای ناپایدار کردن بعضی از سیستم‌ها کافی باشد و یا این امکان وجود دارد که یک تأخیر بزرگ باعث پایدارسازی سیستم شود. همچنین اگر متغیرهای حالت تأخیری دارای یک تابع غیرخطی باشند ممکن است یک رفتار آشفته به وجود آید. تحلیل پایداری سیستم‌های تأخیری وقتی مشکل‌تر می‌شود که اولاً تأخیرها از نوع متغیر با زمان شده ثانیاً معادلات تأخیری به صورت غیرخطی بوده، ثالثاً نوع تأخیر سیستم خنثی باشد. همین امر موجب شده است که مسیرهای زیادی برای بحث و بررسی پایداری سیستم‌های تأخیری به وجود آید. همچنین به جهت پیچیدگی مطالعه نواحی پایداری، محققان دو ناحیه پایداری را برای این سیستم‌ها در نظر گرفته‌اند، یک ناحیه مربوط به "پایداری مستقل از تأخیر" و ناحیه دیگر "پایداری وابسته به تأخیر" می‌باشد. در نوع اول هدف بدست آوردن شرایطی است که در آن مقدار تأخیر اثر ندارد. بنابراین بررسی نوع اول پایداری راحت‌تر از نوع دوم است.

تمام تعاریف این بخش از مرجع [۶] است.

۴.۱ تعاریف

تعریف ۱.۴.۱. سیستم علی سیستمی است که خروجی آن در هر لحظه فقط وابسته به مقادیر حال و گذشته ورودی باشد و به آینده وابسته نباشد.

تعریف ۲.۴.۱. در نظریه کنترل، به سیستمی رویت پذیر یا مشاهده گفته می‌شود که بتوان از روی متغیرهای خروجی سیستم، متغیرهای حالت را مجاسبه کرد. به عبارت دیگر، از روی متغیرهای خروجی می‌توان رفتار کلی سیستم را به دست آورد.

قضیه ۱.۴.۱. ماتریس A را معین مثبت گوئیم هرگاه تمامی مقادیر ویژه اش مثبت باشد و یا در شرایط زیر صدق کند:

$$1. \quad A^T = A \text{ متقارن باشد یعنی}$$

$$2. \quad \forall x \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad x^T A x > 0$$

تعریف ۳.۴.۱. ماتریس A را نیمه معین مثبت گوئیم هرگاه:

$$1. \quad A^T = A \text{ متقارن باشد یعنی}$$

$$2. \quad \forall x \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad x^T A x \geq 0$$

تعریف ۴.۴.۱. زوج مرتب (X, d) که در آن X مجموعه‌ای از نقاط و d یک تابع حقیقی $d: \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ می‌باشد یک فضای متریک گویند هرگاه:

$$1. \quad d(p, q) \geq 0 \text{ (فاصله هیچ‌گاه منفی نمی‌تواند باشد)}$$

$$2. \quad d(p, q) = 0 \iff p = q \text{ (فاصله صفر است اگر و تنها اگر هر دو شیء یکی باشند)}$$

$$3. \quad d(q, p) = d(p, q) \text{ (بدون بستگی داشتن به مقادیر } p, q \text{ همواره دارای خاصیت تقارنی است)}$$

$$4. \quad d(p, q) + d(q, r) \geq d(p, r) \text{ (نامساوی مثلث یا قضیهٔ حمار)}$$

این خاصیت‌ها به طور شهودی مفهوم فاصله را بیان می‌کند.

تعریف ۵.۴.۱. دو فضای متریک (X, d_x) و (Y, d_y) در نظر می‌گیریم، که d_x یک متر روی X و d_y یک متر روی مجموعه Y یک تابع $f: X \rightarrow Y$ لپ‌شیتز پیوسته گویند اگر $K \geq 0$ حقیقی و ثابت وجود داشته باشد به طوری‌که، برای هر X_1 و X_2 در X داشته باشیم:

$$d_y(f(x_1), f(x_2)) \leq K d_x(x_1, x_2)$$

به طور خاص، یک تابع حقیقی $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ لپ‌شیتز پیوسته است اگر یک K حقیقی مثبت وجود داشته باشد به طوری که، برای همه x_1 و x_2 داشته باشیم:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$$

تعریف ۶.۴.۱. سیستم گسسته زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

سیستم فوق را کنترل‌پذیر گویند اگر بتوان حالت سیستم را از بردار دلخواه $x(k_0)$ به نام حالت اولیه در لحظه k_0 به بردار دلخواه دیگر مانند $x(k_e)$ به نام حالت تعادل در لحظه t_e رساند. منظور از کنترل سیستم انتخاب ورودی $u(k)$ به گونه‌ای است که رفتار سیستم حاصل تحت کنترل باشد به این ترتیب:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x \rightarrow x(k_s)$$

و همچنین

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y \rightarrow y(k_s)$$

تعریف ۷.۴.۱. برای سیستم توصیف شده با معادلات (۶.۴.۱) ماتریس کنترل‌پذیری را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

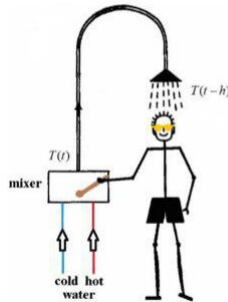
$$Q = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

قضیه ۲.۴.۱. سیستم خطی توصیف شده با معادلات (۶.۴.۱) کاملاً کنترل‌پذیر است اگر و فقط اگر ستون‌های ماتریس کنترل‌پذیری سیستم فضای \mathbb{R}^n را تولید کند یا به عبارت دیگر

$$\text{rank}(Q) = n$$

۵.۱ مدل‌هایی از سیستم تأخیری

یک نمونه از سیستم تأخیری به شرح زیر است [۶]:

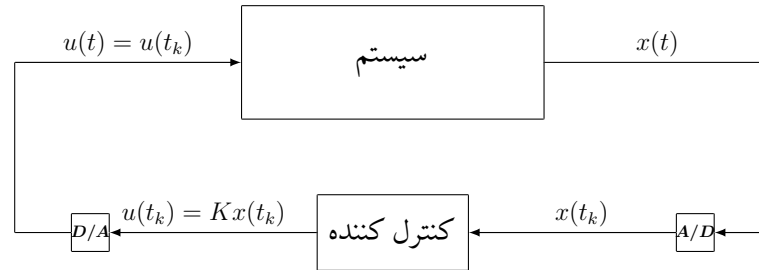


شکل ۱.۱: دوش آب

فرض کنید شخصی در حال دوش گرفتن است و مایل به دستیابی به مقدار دلخواه T_d از درجه حرارت آب با چرخاندن میکسر می‌باشد. در واقع عملگر ما میکسر است و با آن ورودی کنترلی را وارد می‌کنیم و می‌خواهیم دمای آب روی سر فرد را کنترل کنیم. $T(t)$ در لحظه t با میکسر تنظیم می‌کنیم تا از داخل لوله رد شود و به سر فرد برسد مقدار زمان h طول می‌کشد و دمای آبی که فرد دریافت می‌کند $T(t-h)$ است یعنی با h لحظه تأخیر. فرض کنید تغییرات درجه حرارت متناسب با زاویه چرخش دسته باشد در حالیکه سرعت چرخش دسته متناسب با $T(t) - T_d$ است. بنابراین معادله زیر با تأخیر ثابت است:

$$\dot{T}(t) = -k(T(t-h) - T_d) \quad k \in \mathbb{R}$$

کنترل سیستم‌های نمونه-داده^۱



شکل ۲.۱: سیستم نمونه-داده

سیستم‌های نمونه-داده مربوط به سیستم‌های کنترل دیجیتال می‌باشند. این سیستم‌ها دارای معادله دیفرانسیل پیوسته هستند، چون کنترل‌کننده سیستم دیجیتال است به همین دلیل باید $x(t)$ که وارد می‌کنیم، گسسته باشد. بعد از این‌که از مرحله A/D می‌گذرد نمونه‌ها از حالت آنالوگ به دیجیتال تبدیل و گسسته می‌شوند. در واقع یک نمونه که گرفته شد نمونه‌های بعدی را همان لحظه نداریم و بعد از یک تأخیر، نمونه بعدی به دست ما می‌رسد. معادله سیستم به شکل زیر است:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت، ورودی کنترلی $u(t)$ و A و B ماتریس‌های ثابت هستند.

$$u(t) = u_d(t_k) \quad t_k \leq t \leq t_{k+1} \quad \circ = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$$

$$u(t) = kx(t_k) \quad t_k \leq t \leq t_{k+1}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bkx(t_k) \quad t \in [t_k, t_{k+1}] \quad k \in \mathbb{Z}_+$$

زمان بین نمونه‌برداری سیگنال‌ها به صورت تأخیر در ورودی کنترلی مدل می‌شود

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bkx(t - \tau(t)) \quad \tau(t) = t - t_k \quad t \in [t_k, t_{k+1}]$$

فصل ۲

مروری بر سیستم‌های تأخیردار و نامساوی‌های ماتریسی خطی

در این فصل، ابتدا مقدمه‌ای در مورد روش مستقیم لیاپانوف برای سیستم‌های معمولی گفته می‌شود پس از آن سیستم‌های تأخیردار و مفاهیم مربوط به آنها بیان می‌شود پس از آن به آنالیز پایداری سیستم‌های تأخیردار با استفاده از روش لیاپانوف^۱ - کراسوفسکی^۲ و لیاپانوف - رازومیخین^۳ می‌پردازیم. در پایان با توجه به کاربرد نامساوی خطی در تحلیل پایداری سیستم‌های تأخیردار، نامساوی‌های ماتریسی خطی و بعضی خواص آن بیان می‌شود.

۱.۲ روش مستقیم لیاپانوف (قضایای پایداری)

[۲] یکی از روش‌های تحلیل پایداری سیستم‌ها منسوب به دانشمند روسی قرن ۱۹ لیاپانوف است.

معادله دیفرانسیل

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (1.2)$$

^۱ Lyapunov

^۲ Krasovskii

^۳ Razumikhin

را در نظر بگیرید.

تعریف ۱.۱.۲. [۲] نقطه x_e را نقطه تعادل معادله دیفرانسیل (۱.۲) است هر گاه برای $u(t) = 0$ داشته باشیم $f(x_e, 0, t) = 0$ برای هر t .

هم‌چنین به‌خاطر این‌که نقطه تعادل بردار ثابتی است می‌توانیم بنویسیم:

$$\dot{x}(t) = 0 = f(x_e(t), 0, t)$$

نقطه تعادل نشان‌دهنده پاسخ ثابت حالت ماندگار به معادله دینامیکی (۱.۲) است. اگر سیستم خطی باشد نقطه تعادل از معادله $Ax_e = 0$ زیر بدست می‌آید. بدیهی است که مبدأ مختصات همواره یک نقطه تعادل برای سیستم خطی است.

تعریف ۲.۱.۲.

● معادله دیفرانسیل حالت سیستم زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), 0, t) \quad (2.2)$$

نقطه تعادل x_e به مفهوم لیاپانوف پایدار گویند اگر:

$$\forall t_0, \exists \delta(\epsilon) > 0, \|x(t_0) - x_e\| < \delta(\epsilon)$$

پس برای کلیه $\epsilon, t \geq t_0, \|x(t) - x_e\| < \epsilon$ برقرار باشد. به عبارت دیگر حالت تعادل x_e را به مفهوم لیاپانوف پایدار گویند اگر پاسخ سیستم ناشی از هر حالت اولیه نزدیک x_e هیچ‌گاه از حالت تعادل خارج نشود.

● پایداری مجانبی^۱ نوع قوی‌تر و عملی‌تر از پایداری (نسبت به پایداری لیاپانوف) است. سیستم (۲.۲) را پایدار مجانبی گوئیم هر گاه اولاً پایدار لیاپانوف بوده و علاوه بر آن: برای کلیه مقادیر t_0 یک $\rho(t_0) > 0$ وجود داشته باشد که:

$$\|x(t_0) - x_e\| < \rho \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_e\| = 0$$

اگر انحرافات اولیه حالت سیستم از نقطه تعادل زیاد باشد آن‌گاه پایداری مجانبی اطلاع زیادی از رفتار پاسخ سیستم را نخواهد داد در واقع با انحراف زیاد ممکن است سیستم رفتاری ناپایدار داشته باشد بنابراین در عمل دانستن اندازه بزرگترین محدوده‌ی پایداری مجانبی لازم است.

● به بزرگترین محدوده پایداری مجانبی ناحیه جذب^۲ گویند به عبارت دیگر ناحیه جذب آن قسمت از فضای حالت است که در آن حرکت‌های پایدار مجانبی آغاز می‌گردد و یا اینکه هر حرکتی از ناحیه جذب سرچشمه گرفته باشد پایدار مجانبی است.

^۱Asymptotic Stability

^۲Region of Attraction

• اگر یک سیستم به مفهوم لیاپانوف پایدار باشد و به ازای هر شرط اولیه $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x - x_e\| = 0$ باشد، به آن پایدار مجانبی سراسری^۱ گویند چرا که شرایط اولیه در هر کجای فضا باشد، سیستم پایدار است.

۱.۱.۲ پایداری سیستم‌های خطی تغییر ناپذیر با زمان

سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان^۲ (LTI) زیر پایدار به مفهوم لیاپانوف است:

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

اگر و فقط اگر:

الف: کلیه مقادیر ویژه ماتریس A قسمت‌های حقیقی غیرمثبت داشته باشد

ب: آن دسته از مقادیر ویژه که قسمت‌های حقیقی آن‌ها صفر است، صفرهای چند جمله‌ای مشخصه A باشند.

سیستم LTI بالا پایدار مجانبی است اگر و فقط اگر کلیه مقادیر ویژه A قسمت‌های حقیقی اکیداً منفی داشته باشد

۲.۱.۲ روش‌های مختلف لیاپانوف برای تحلیل پایداری

دو روش برای تحلیل پایداری به روش لیاپانوف وجود دارد:

• روش اول لیاپانوف (خطی سازی)

• روش دوم لیاپانوف (روش مستقیم)

اگر سیستم غیرخطی باشد، در روش اول لیاپانوف با خطی سازی، ابتدا سیستم خطی شده و سپس پایداری سیستم خطی شده بررسی می‌شود. اگر سیستم خطی شده پایدار باشد، سیستم غیرخطی هم حول نقطه‌ی خطی سازی پایدار است.

روش دوم لیاپانوف بهتر و کلی‌تر است و نیازی به خطی سازی ندارد و به راحتی می‌توان به سیستم‌های مختلف از جمله سیستم‌های تأخیردار توسعه داد.

روش دوم لیاپانوف

این روش یک روش کلی برای سیستم‌های خطی و غیرخطی است که نیازی به محاسبه‌ی پاسخ معادله سیستم یا محاسبه‌ی مقادیر ویژه سیستم ندارد. اساس این روش تابع انرژی است، اگر سیستم یک حالت تعادل پایدار مجانبی داشته باشد، آنگاه انرژی ذخیره شده در سیستم در داخل

^۱Global Asymptotic Stability

^۲Linear Time-Invariant Systems

حوزه جذب با افزایش زمان کاهش یافته تا سرانجام به حداقل مقدار آن در حالت تعادل برسد. با توجه به اینکه تابع لیاپانوف از تابع انرژی الهام گرفته شده، بنابراین باید خواص تابع انرژی را داشته باشد. مثلاً می‌دانیم که انرژی ذخیره شده در سیستم همیشه مثبت است. بنابراین تابع لیاپانوف هم باید مثبت باشد. ($V > 0$) از طرف دیگر برای سیستم پایدار با گذشت زمان تابع انرژی همیشه کم می‌شود. بنابراین باید تابع لیاپانوف هم در گذر زمان کم شود تا سیستم پایدار گردد ($\dot{V} < 0$).

قضیه ۱.۱.۲ (پایداری مجانبی لیاپانوف). سیستم $\dot{x} = f(x)$ پایدار مجانبی است اگر تابع اسکالر تابع لیاپانوف ($V(x)$) وجود داشته باشد که:

۱. $V(x)$ در محدوده حول نقطه تعادل پیوسته و مشتقات جزئی اول آن پیوسته باشد.

$$2. \quad V(x) > 0 \text{ برای } x \neq 0$$

$$3. \quad V(0) = 0$$

$$4. \quad \dot{V} = \frac{dV(x)}{dt} < 0 \text{ برای } x \neq 0$$

قضیه ۲.۱.۲ (پایداری مجانبی سراسری لیاپانوف). یک سیستم پایدار مجانبی سراسری است، اگر و تنها اگر یک نقطه تعادل پایدار داشته باشد و یک تابع لیاپانوف وجود داشته باشد به طوریکه :

۱. $V(x)$ در محدوده حول نقطه تعادل پیوسته و مشتقات جزئی اول آن پیوسته باشد.

$$2. \quad V(x) > 0 \text{ برای } x \neq 0$$

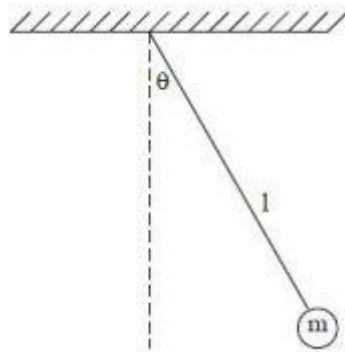
$$3. \quad V(0) = 0$$

$$4. \quad \forall \|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$$

$$5. \quad \dot{V} = \frac{dV(x)}{dt} < 0 \text{ برای } x \neq 0$$

۶. هر مکان هندسی در فضای حالت که در آن $\dot{V} = 0$ یک مسیر از سیستم نیست.

مثال ۱.۱.۲. در این مثال هدف بررسی پایداری سیستم آونگ با روش دوم لیاپانوف است.



شکل ۱.۲: آونگ ساده

از فیزیک مثال معلوم است که سیستم در نقطه تعادلش پایدار است ولی با روش لیاپانوف نیز بررسی می‌کنیم. معادله دیفرانسیل سیستم به صورت زیر است:

$$ml\ddot{\theta} + Bl\dot{\theta} + mg \sin \theta = 0$$

B اصطکاک بلبرینگهای لولا

mg نیروی وزن در حالت کلی برای راحتی حل یک معادله دیفرانسیل مرتبه n را، به n تا معادله مرتبه یک تبدیل می‌کنیم که همان فضای حالت می‌شود. برای این کار تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_1 = \theta \implies \dot{x}_1 = \dot{\theta} = x_2 \\ x_2 = \dot{\theta} \implies \dot{x}_2 = \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta - \frac{B}{m} \dot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{B}{m} x_2 \end{cases}$$

ما یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو را به دو تا معادله دیفرانسیل مرتبه یک تقسیم کردیم. پس تابع انرژی را می‌توان به آسانی بدست آورد.

$$V = \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1 - \cos \theta) \quad v = lx_2 = l\dot{\theta}$$

$$\dot{V} = \frac{1}{2}ml^2 \times 2x_2\dot{x}_2 + mgl(\dot{x}_1 \sin x_1) = -Bl^2 x_2^2 \leq 0$$

پس $\dot{V} \leq 0$ پس سیستم ما پایدار مجانبی است.

۳.۱.۲ تحلیل پایداری سیستم‌های پیوسته خطی

فرض کنید تابع لیاپانوف برای سیستم $\dot{x} = Ax$ برابر $V = x^T Px$ باشد. اگر $P > 0$ مثبت معین باشد، $V > 0$ خواهد بود و $V(0) = 0$ حال برای اینکه نشان دهیم سیستم

پایدار مجانبی است باید نشان دهیم $\dot{V} < 0$. داریم:

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T A^T P x + x^T P A x = x^T [A^T P + P A] x < 0$$

حال برای پایداری مجانبی باید نامساوی $A^T P + P A < 0$ برقرار باشد. قرار است $A^T P + P A$ یک ماتریس معین منفی باشد، پس فرض می‌کنیم برابر یک ماتریس معین منفی باشد:

$$A^T P + P A + Q = 0 \quad P, Q > 0$$

$$A^T P + P A = -Q \quad Q > 0 \Rightarrow -Q < 0$$

حال با استفاده از متلب می‌توان ماتریس P را بدست آورد.

مثال ۲.۱.۲. ماتریس P را برای سیستم زیر بدست آورید:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 4x_2 \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x$$

حالا برای حل معادله‌ی لیاپانوف باید یک ماتریس معین Q فرض کنیم مثلاً:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T P + P A + Q = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با حل معادله فوق ماتریس P به صورت زیر بدست می‌آید:

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{23}{60} & \frac{7}{60} \\ -\frac{7}{60} & \frac{11}{60} \end{bmatrix}$$

بنابراین سیستم بالا پایداری مجانبی است. البته از روی مقادیر ویژه ماتریس A نیز می‌توان تشخیص داد که سیستم پایدار است.

$$\lambda(A) = -2, -3 < 0$$

۴.۱.۲ پایداری سیستم گسسته خطی

سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$x(k+1) = Ax(k)$$

این سیستم پایدار مجانبی کلی است اگر یک تابع لیاپانوف $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ داشته باشیم به طوری که:

$$1. \quad V(x) > 0, \quad x \neq 0$$

$$2. \quad V(0) = 0$$

$$3. \quad V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0 \text{ برای هر } x(k)$$

فرض کنید تابع را به عنوان تابع لیاپانوف انتخاب می‌کنیم:

$$V(x) = x(k)^T P x(k), \quad P > 0 \Rightarrow V(x) > 0, V(0) = 0$$

$$\Delta V = V(x(k+1)) - V(x(k)) = x^T(k+1) P x(k+1) - x(k)^T P x(k)$$

$$= x(k)^T A^T P x(k) - x(k)^T P x(k) = x^T [A^T P A - P] x < 0$$

$$A^T P A - P = -Q, \quad Q > 0 \Rightarrow A^T P A - P + Q = 0, P, Q > 0$$

مثال ۳.۱.۲. ماتریس P را برای سیستم زیر بدست آورید:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix} x$$

حالا برای حل معادله‌ی لیاپانوف باید یک ماتریس معین Q فرض کنیم مثلاً:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T P A - P + Q = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با حل معادله فوق می‌توان P را بدست آورد.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{11}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{24}{5} \end{bmatrix}$$

۲.۲ سیستم‌های تأخیر زمانی (TDSs) عمومی و روش مستقیم لیاپانوف

[۶] سیستم غیرخطی و تأخیردار زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad t \geq t_0, \quad (3.2)$$

سیستم مورد نظر متغیر با زمان است که

$$\begin{cases} x_t : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R} : & x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad \theta \in [-h, 0] \\ f : \mathbb{R} \times C[-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n \end{cases}$$

تابع غیرخطی نسبت به هر دو آرگومان پیوسته و نسبت به آرگومان دوم به صورت محلی لیپ‌شیتز فرض می‌شود. همچنین فرض می‌کنیم که تابع (۳.۲) در شرط زیر صدق کند تا $x = 0$ پاسخ بدیهی سیستم باشد،

$$f(t, 0) = 0$$

۱.۲.۲ مقدمات تحلیل پایداری

اگر بخواهیم پایداری را در پاسخ غیربدیهی $y(t)$ سیستم (۳.۲) بررسی کنیم، تغییر متغیر زیر را انجام می‌دهیم:

$$z(t) = x(t) - y(t)$$

که منجر به سیستم زیر می‌شود

$$\dot{z}(t) = f(t, z_t + y_t) - f(t, y_t) \quad (4.2)$$

سیستم تغییر متغیر یافته دارای جواب بدیهی $z(t) = 0$ است. بنابراین بررسی پایداری هر پاسخ غیربدیهی سیستم (۳.۲) را می‌توان به بررسی پایداری پاسخ بدیهی سیستم تغییر یافته (۴.۲) کاهش داد. هم‌چنین برای سیستم‌های خطی، پایداری پاسخ بدیهی معادل پایداری تمام پاسخ‌ها است.

تعریف ۱.۲.۲

• معادله دیفرانسیل (۱.۲) پایدار یکنواخت است اگر به ازای هر زمان $t_0 \in \mathbb{R}$ ، یک $\delta = \delta(\epsilon)$ چنان وجود داشته باشد که از $\|x_{t_0}\|_c < \delta(\epsilon)$ برای تمام زمان‌های $t \geq t_0$ بتوان نتیجه گرفت

$$\|x(t)\| < \epsilon \quad \text{داریم} \quad \|\phi\| = \max_{\theta \in [a, b]} |\phi(\theta)|$$

- سیستم پایدار مجانبی است اگر پایدار یکنواخت باشد و یک $\delta_a > 0$ چنان وجود داشته باشد که برای هر $\eta > 0$ یک $T(\delta, \eta)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $\|x_{t_0}\|_c < \delta_a$ به ازای $t \geq t_0 + T(\delta_a, \eta)$ بتوان نتیجه گرفت $\|x(t)\| < \eta$. پایدار مجانبی یکنواخت کلی است اگر δ_a بتواند هر مقدار محدود ولی دلخواه را داشته باشد.

۳.۲ روش مستقیم لیاپانوف

مانند سیستم‌های بدون تأخیر، یک روش مؤثر برای تحلیل پایداری و یا عملکرد سیستم‌های تأخیردار روش مستقیم لیاپانوف است. روش مستقیم لیاپانوف به این صورت است که تابع لیاپانوفی را برای سیستم مورد نظر تشکیل می‌دهیم اگر دو شرط اینکه هر عبارت تابع لیاپانوف مثبت باشد و مشتق هر عبارت منفی شود برقرار باشد سیستم مورد نظر پایدار می‌شود. در سال ۱۹۵۶ روش مستقیم لیاپانوف به دو روش برای سیستم‌های تأخیردار توسعه پیدا کرد [۲۲]. دو روش تحلیل زمانی با روش مستقیم لیاپانوف، روش کراسوفسکی^۱ برای تابع‌های لیاپانوف^۲ و روش رازومیخین^۳ برای توابع لیاپانوف^۴ می‌باشد. در روش کراسوفسکی از تابع‌های لیاپانوف – کراسوفسکی $V(t, x_t)$ استفاده شده و در روش رازومیخین از توابع لیاپانوف $V(t, x(t))$ استفاده می‌شود. استفاده از تابع‌های لیاپانوف – کراسوفسکی^۵ (LKF) در واقع تعمیم مستقیم روش لیاپانوف از سیستم‌های ODE به TDS است به خاطر این که x_t می‌تواند حالت مناسبی برای سیستم‌های تأخیردار باشد.

۱.۳.۲ روش کراسوفسکی برای سیستم‌های تأخیری

تابع پیوسته زیر را برای سیستم روبرو در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad t \geq t_0$$

$$V : \mathbb{R} \times C[-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}$$

فرض کنید برای زمان‌های $\tau \geq t$ پاسخ سیستم بالا با شرایط اولیه $x_t = \phi$ با $x_\tau(t, \phi)$ نشان داده شود. در این صورت مشتق بالای سمت راست^۶ تابع بالا در مسیر غیرخطی به شکل زیر

^۱Krasovskii

^۲Lyapunov Functionals

^۳Razumikhin

^۴Lyapunov Function

^۵Lyapunov-Krasovskii Functionals

^۶Right Upper Derivative

تعریف می‌شود:

$$\dot{V}(t, \phi) = \limsup_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} [V(t + \Delta t, x_{t+\Delta t}(t, \phi)) - V(t, \phi)] \quad (5.2)$$

به لحاظ شهودی غیرمثبت بودن $\dot{V}(t, x_t)$ نشان می‌دهد که x_t با تغییر t افزایش نمی‌یابد یعنی سیستم پایدار است.

قضیه ۱.۳.۲ (قضیه لیاپانوف - کراسوفسکی). [۶] با فرض این‌که، تابع غیرخطی $f: \mathbb{R} \times C[-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ آرگومان محدود خود را به یک مجموعه محدود نگاشت کند یعنی شرط لیمپ شیتز بودن را داشته باشد و توابع $u, v, w: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ پیوسته و غیرکاهشی باشند و هم‌چنین $u(s)$ و $v(s)$ برای تمام $s > 0$ مثبت بوده و $u(0) = v(0) = 0$. در این صورت پاسخ بدیهی سیستم غیرخطی (۳.۲) پایدار یکنواخت است اگر یک تابع پیوسته معین مثبت به صورت $V: \mathbb{R} \times C[-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ وجود داشته باشد، که مثبت تعریف می‌شود و

$$u(|\phi(0)|) \leq V(t, \phi) \leq v(\|\phi\|_c) \quad (6.2)$$

$$\|\phi\|_c = \max_{\theta \in [a, b]} |\phi(\theta)|$$

آن چنانکه مشتق آن در راستای سیستم غیرخطی (۳.۲) غیرمثبت باشد.

$$\dot{V}(t, \phi) \leq -w(|\phi(0)|) \quad (7.2)$$

حال اگر برای هر $s > 0$ ، $w(s) > 0$ باشد، در این صورت پاسخ بدیهی پایدار مجانبی یکنواخت است.

به علاوه اگر $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = \infty$ باشد، در این صورت پاسخ بدیهی پایدار مجانبی سراسری^۱ است.

مثال ۱.۳.۲. سیستم غیرخطی اسکالر و نامتغیر با زمان در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = -ax^3(t) - a_1 x^3(t-h), \quad a > 0, a_1 \in \mathbb{R}$$

تابع لیاپانوف را به شکل زیر انتخاب کنید:

$$V(\phi) = \frac{\phi^4(0)}{4a} + \int_{-h}^0 \phi^4(s) ds.$$

فرض کنید $|a_1| > a$ باشد در این صورت داریم

$$V(x_1) = \frac{x^4(t)}{4a} + \int_{-h}^0 x^4(t+s) ds = \frac{x^4(t)}{4a} + \int_{t-h}^t x^4(s) ds.$$

در این صورت برای پایداری باید یک $\alpha > 0$ وجود دارد که:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= \frac{d}{dt}V(x_t) = \frac{\gamma x^\gamma(t)}{a} \dot{x}(t) + x^\epsilon(t) - x^\epsilon(t-h) \\ &= -[x^\epsilon(t) + \frac{\gamma a_1}{a} x^\gamma(t-h) + x^\epsilon(t-h)] \\ &= \begin{bmatrix} x^\gamma(t) & x^\gamma(t-h) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & \frac{-a_1}{a} \\ \frac{-a_1}{a} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^\gamma(t) \\ x^\gamma(t-h) \end{bmatrix} \leq -\alpha |x(t)|^\epsilon \end{aligned}$$

بنابراین اگر داشته باشیم $|a_1| \leq a$ ، سیستم مستقل از تأخیر پایدار مجانبی است. در حالت کلی برای $|a_1| \leq a$ سیستم زیر پایدار مجانبی است.

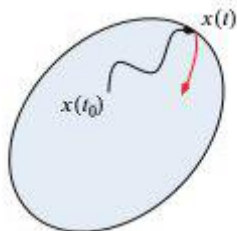
$$\dot{x}(t) = -ax^{\gamma p-1}(t) - a_1 x^{\gamma p-1}(t-h)$$

۲.۳.۲ روش رازومیخین برای سیستم‌های تأخیری

ایده روش رازومیخین به این شکل است که تابع لیاپانوف به شکل مرسوم $V(X) = x^T P x$ با $P > 0$ در نظر گرفته می‌شود.

فرض کنیم تابع اولیه ما داخل بیضی‌گون^۱ زیر باشد:

$$V(x(t_0 + \theta)) = x^T(t_0 + \theta) P x(t_0 + \theta) \leq \delta, \quad \forall \theta \in [-h, 0]$$



شکل ۲.۲: ایده روش رازومیخین

و برای $t \geq t_0$ بخواهد از بیضی‌گون خارج شود در این صورت

$$x^T(t + \theta) P x(t + \theta) \leq x^T(t) P x(t) \quad \forall \theta \in [-h, 0]$$

بنابراین اگر مشتق تابع لیاپانوف در راستای $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$ و برای تمام حالت‌های زیر

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \quad \theta \in [-h, 0]$$

که شرط رازومیخین زیر را برآورده می‌کنند:

$$V(x(t + \theta)) \leq V(x(t)), \quad \theta \in [-h, 0]$$

^۱Ellipsoid

منفی باشد، پاسخ سیستم بیضی‌گون $x^T(t)Px(t) \geq \delta$ را ترک نخواهد کرد. برای دادن فرمول دقیق روش رازومیخین، تابع مشتق‌پذیر $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ در نظر می‌گیریم و مشتق V روی $x(t)$ (۳.۲) به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\dot{V}(t, x(t)) = \frac{d}{dt}V(t, x(t)) = \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x(t))}{\partial x} f(t, x_t)$$

قضیه ۲.۳.۲ (قضیه لیاپانوف - رازومیخین). با فرض این‌که، تابع غیرخطی $f : \mathbb{R} \times C[-h, \circ] \rightarrow \mathbb{R}^n$ آرگومان محدود خود را به یک مجموعه محدود نگاشت کند و توابع $u, v, w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ پیوسته و غیرکاهشی باشند و همچنین $u(s)$ و $v(s)$ برای تمام $s > \circ$ مثبت بوده و $u(\circ) = v(\circ) = \circ$. در این صورت پاسخ بدیهی سیستم غیرخطی (۳.۲) پایدار یکنواخت است اگر یک تابع مشتق‌پذیر مثبت معین به صورت زیر وجود داشته باشد

$$u(|x|) \leq V(t, x) \leq v(|x|) \quad (۸.۲)$$

به طوری‌که مشتق آن در راستای سیستم (۳.۲) در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\dot{V}(t, x(t)) \leq -w(|x(t)|) \quad \text{if} \quad V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq V(t, x(t)) \quad \forall \theta \in [-h, \circ] \quad (۹.۲)$$

حال اگر برای هر $s > \circ$ ، $w(s) > \circ$ و یک تابع غیرکاهشی برای $s > \circ$ و به صورت $\rho(s) > \circ$ چنان وجود داشته باشد که شرط زیر برقرار باشد

$$\dot{V}(t, x(t)) \leq -w(|x(t)|) \quad \text{if} \quad V(t + \theta, x(t + \theta)) \leq \rho(V(t, x(t))) \quad \forall \theta \in [-h, \circ] \quad (۱۰.۲)$$

در این صورت پاسخ پایدار مجانبی یکنواخت است. به علاوه اگر $\lim_{s \rightarrow \infty} u(s) = \infty$ باشد، در این صورت پاسخ بدیهی پایدار مجانبی کلی است.

۴.۲ مروری بر نامساوی‌های مثلثی خطی

روش مستقیم لیاپانوف برای سیستم‌های با معادلات دیفرانسیل معمولی^۱ (ODE) منجر به شروط نامساوی ماتریسی خطی^۲ LMI می‌شود. در اکثر کارهای قدیمی شروط پایداری سیستم‌های خطی را به صورت معادلات لیاپانوف یا ریکاتی استخراج می‌کنند چون روش حل این معادلات را داشتند. علت این مساله بیشتر به خاطر در دسترس نبودن الگوریتم‌های عددی موثر برای حل LMIها بوده است.

تعریف ۱.۴.۲. معادلات ریکاتی که به طور وسیعی در کنترل بهینه استفاده می‌شوند یک نامساوی ماتریسی است. نمایش آن به صورت زیر است:

$$A^T P + PA + PBR^{-1}B^T P + Q < \circ$$

که در آن ماتریس‌های A و B معلوم و $P = P^T$ ، $R = R^T$ و $Q = Q^T$ مجهول هستند.

^۱Ordinary Differential Equations

^۲Linear Matrix Equality

تعریف ۲.۴.۲. یک نامساوی ماتریسی خطی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + x_2 F_2 + \dots + x_n F_n = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > \circ \quad (11.2)$$

که در آن نامساوی بیانگر این است که $F(x)$ مثبت معین است یعنی:

$$z^T F(x) z > \circ \quad \forall z \neq \circ \quad z \in \mathbb{R}^n$$

ماتریس‌های $F_i, i = 0, 1, 2, \dots, m$ ثابت و متقارن هستند و x متغیر است. بنابراین $F(x)$ یک تابع خطی از x است. نامساوی (۱۱.۲) یک نامساوی خطی اکید است، اگر برای $F(x)$ شرط مثبت نیمه معین بودن مورد نیاز باشد. نامساوی ماتریسی خطی غیراکید می‌شود اصطلاحاً گفته می‌شود نامساوی ماتریسی (۱.۲) شدنی^۱ اگر مجموعه $\{x \mid F(x) > \circ\}$ ناتهی باشد.

مثال ۱.۴.۲.

$$\begin{bmatrix} 4 + x_1 + 2x_2 & x_2 + x_3 + 2 \\ x_2 + x_3 + 2 & 3x_2 + x_4 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۱.۴.۲ خواص و ترفندهای LMI

محدب

یکی از مهمترین خواص مهم LMI خاصیت محدب بودن است. یک مجموعه C محدب گفته می‌شود اگر پاره‌خط بین دو نقطه در این مجموعه هم‌چنان در مجموعه C قرار داشته باشد و یا به عبارت دیگر برای هر $x, y \in C$ ، $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$ ، یکی از مهم‌ترین خواص LMI این است که مجموعه $\{x \mid F(x) > \circ\}$ یک مجموعه محدب است.

۲.۴.۲ ترفندهای LMI

اگرچه بسیاری از مسائل در کنترل را می‌توان به صورت مسئله LMI فرموله نمود، این مسائل ناشی از نابرابری ماتریس غیرخطی است. ترفندهایی خاص وجود دارد که می‌تواند برای تبدیل این نابرابری‌های غیرخطی به الگوی مناسب LMI استفاده شود. برخی از ترفندها که اغلب در کنترل استفاده می‌شود با مثال‌های مناسب توصیف می‌شوند.

تغییر متغیر

با تعریف متغیرهای جدید، غالباً ممکن است نامساوی ماتریس غیرخطی، خطی شود.

مثال ۲.۴.۲. سنتز کنترل کننده‌ی پس‌خورده حالت:

هدف ما تعیین ماتریس $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ است به طوری که همه مقادیر ویژه ماتریس $A + BF \in \mathbb{R}^{n \times n}$ در

^۱feasible

قسمت چپ محور موهومی صفحه مختصات باشد. با استفاده از نظریه لیاپانوف، می‌توان نشان داد که این معادل پیدا کردن ماتریس F و یک ماتریس معین مثبت $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ است به طوری که نامساوی زیر برقرار باشد:

$$(A + BF)^T P + P(A + BF) < \circ$$

یا

$$A^T P + PA + F^T B^T P + PBF < \circ$$

توجه کنید که جملاتی که P و F دارند غیرخطی هستند. هر دو طرف معادله فوق را در $Q = P^{-1}$ ضرب می‌کنیم، داریم:

$$QA^T + AQ + QF^T B^T + BFQ < \circ$$

این نامساوی ماتریسی جدید با متغیرهای $Q > \circ$ و F است. اما هنوز غیرخطی است بنابراین دوباره تغییر متغیر $L = FQ$ را در نظر می‌گیریم، داریم:

$$QA^T + AQ + L^T B^T + BL < \circ$$

این مسئله امکان‌پذیر بودن LMI در متغیرهای جدید $Q > \circ$ و $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$ فراهم می‌کند. بعد از حل LMI فوق، ماتریس پس‌خورد حالت F و متغیر لیاپانوف P را می‌توان با جایگذاری $F = LQ^{-1}$ و $P = Q^{-1}$ بدست بیاوریم.

لم ۱.۴.۲ (لم شور^۱). در نظریه LMI یکی از کلیدی‌ترین ابزار لم شور می‌باشد این لم دسته وسیعی از نامساوی‌های غیرخطی را به طور معمول در بسیاری از مسائل کنترلی رخ می‌دهد به یک نامساوی خطی تبدیل می‌نماید. این نامساوی غیرخطی عبارت است از:

$$C > \circ \quad A - BC^{-1}B^T > \circ$$

که در آن $A = A^T, C = C^T$ و B به صورت خطی به x وابسته است. طبق لم شور، این دسته از نامساوی‌های ماتریسی خطی معادل است با:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} > \circ$$

مثال ۳.۴.۲. به عنوان مثال قید نرم ماتریسی $|z(x)| < \circ$ که در آن نسبت $z(x)$ به x خطی است می‌توان با استفاده از لم شور به صورت LMI زیر نوشت:

$$I - ZZ^T > \circ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} I & Z(x) \\ Z(x)^T & I \end{bmatrix} > \circ$$

^۱ Lemma Schur Complement

۳.۴.۲ رویکرد LMI به پایداری سیستم‌های خطی

سیستم خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = Ax \quad x \in \mathbb{R}^n$$

با توجه به تابع لیاپانوف روبرو داریم: $V(x) = x^T P x$ $\circ < P = P^T \in \mathbb{R}^n$
 داریم: $\lambda_{\min}(P)|x|^2 \leq V(x) \leq \lambda_{\max}(P)|x|^2$ با مشتق‌گیری از
 تابع لیاپانوف در راستای مسیرهای سیستم داریم:

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \dot{x}^T P \dot{x}(t) = \dot{x}^T(t) P A x(t) = x^T(t) [P A + A^T P] x(t)$$

شرط پایداری لیاپانوف یک LMI به صورت زیر می‌باشد

$$P > \circ \quad A^T P + P A < \circ$$

۵.۲ حل نامساوی ماتریسی خطی با استفاده از جعبه ابزار یالمیپ

از آنجایی که نامساوی‌های ماتریسی خطی در مسائل کنترلی اهمیت زیادی دارند علاوه بر جعبه ابزار متلب روش دیگری برای حل آن‌ها وجود دارد و آن استفاده از جعبه ابزار یالمیپ است، اکثر برنامه‌های متلب که برای محاسبه پارامترهای ناشناخته استفاده می‌شوند با استفاده از جعبه ابزار یالمیپ است. یالمیپ یک نرم افزار مدل‌سازی پیشرفته برای مسائل بهینه‌سازی و محدب است. یکی از مزایای یالمیپ نسبت به متلب این است که به همان شکلی که LMI را بدست آوردیم به همان شکل به یالمیپ می‌دهیم. برخی از دستورات پایه‌ای جعبه ابزار یالمیپ:

۱.۵.۲ تعریف متغیرهای تصمیم‌گیری

متغیرهای تصمیم‌گیری جز مهمی در هر مسئله بهینه‌سازی هستند. در یالمیپ این متغیرها توسط `sdpvar` تعریف می‌شوند به صورت:

```
sdpvar(m,n,'type','field')
```

`type` نوع ماتریس را مشخص می‌کند، پیش فرض یالمیپ ماتریس متقارن است اگر می‌خواهیم ماتریس ما نامتقارن باشد به جای `type` دستور `full` را وارد می‌کنیم. به عنوان مثال:

```
X1=sdprvar(2,2)
```

یک ماتریس 2×2 متقارن به ما می‌دهد.

۲.۵.۲ تعریف محدودیت‌ها

با استفاده از دستور constraint قیدها را تعریف می‌کنیم. به عنوان مثال: کد زیر یک محدودیت را برای ماتریس تعریف می‌کند، ماتریس X یک ماتریس معین مثبت است و ماتریس Y یک ماتریس معین منفی است.

```
X=spdvar(n,n);
```

```
Y=spdvar(n,n);
```

```
constraint [X>0,Y<0]
```

یا

```
constraint [X>0]+[Y<0];
```

۳.۵.۲ حل مسئله بهینه سازی یا حل پذیری

هنگامی که تمام متغیرها و محدودیت‌ها مشخص شد، مسئله بهینه سازی را می‌توان با دستور solvesdp حل کرد.

```
solvesdp=optimize(C,objective,option)
```

اگر دو ورودی آخر مشخص نشوند در این صورت :

```
sol=optimize(C)
```

مسئله حل پذیری^۱ را که همان LMI‌های داخل محدودیت‌هاست حل می‌کند. اما اگر یک مسئله بهینه سازی داشته باشیم، آن تابع هدفی که باید مینیمم شود را در objective قرار می‌دهیم. به عنوان مثال:

می‌خواهیم مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس X را مینیمم کنیم (علاوه بر حل LMI‌های داخل C) در این صورت قبل از دستور optimize، باید بنویسیم:

```
objective=trace(X)
```

البته هر اسمی می‌توان بر روی متغیرها، قیود، تابع هدف و حل قرار داد این نام‌ها می‌توانند تغییر کنند.

گزینه option هم دارای تنظیمات حل مسئله توسط یالمیپ است که می‌تواند تغییر داده شود یا اینکه وارد نشود تا مقادیر پیش فرض استفاده شوند. مثلاً می‌توان با این گزینه، نوع حل کننده (solver) را تعیین کرد. برای مثال:

^۱feasibility


```
options=sdpsettings('solver','masek')
```

همیشه برای تولید options باید از دستور sdpsettings استفاده کرد. دستور بالا به یالمیپ بیان می‌کند که باید مسئله را با حل کننده masek حل کند.

۴.۵.۲ محاسبه مقادیر عددی مقادیر مجهول

بعد از حل مسئله با دستور optimize، باید از خروجی آن مقادیر عددی مجهولات محاسبه شود که این کار با دستور value انجام می‌شود:

```
X_v=value(X)
```

این دستور مقدار محاسبه شده X را توسط یالمیپ بدست آمده در متغیر X_v ذخیره می‌کند. در واقع X همیشه متغیر است و مقداری ندارد اما بعد از حل مسئله $value(X)$ مقدار بدست آمده از حل مسئله را فراهم می‌کند.

مثال ۱.۵.۲. پایداری سیستم خطی را بررسی کنید. سیستمی پایدار است که نامساوی‌های زیر برایش برقرار باشد:

$$P > \circ, \quad A^T P + P A < \circ$$

دو نامساوی را می‌توان به فرم LMI زیر ترکیب کرد:

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A & 0 \\ 0 & -P \end{bmatrix}$$

کد متلب زیر برای مسئله پایداری برای $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ به صورت زیر است:

```
%solution of Lyapunov Inequality  $A'P+PA<0$ ,  $P>0$ 
clear all
%System Matrix
A=[0,1;-2,-3];
%Define unknown variables
n=size(A,1);
P=spdvar(n,n);

M1=[A'*p+P*A zeros(n,1) zeros(n,1) -P];
const=[M1<0];
solvesdp(const);
P=double(P)
```

فصل ۳

پایداری سیستم‌های گسسته زمانی با تأخیر ثابت

در ابتدای این فصل مقدمه‌ای از ناوردهای کرونکر و فضای اشلون و فرم همدم برداری بیان می‌شود در ادامه انواع معادلات تأخیر زمانی با تأخیر ثابت را معرفی می‌کنیم و سپس با استفاده از تعریف بردار افزوده آن‌ها را به شکل سیستم‌های بدون تأخیر در می‌آوریم و با استفاده از فرم همدم برداری این سیستم‌ها را پایدار می‌کنیم.

۱.۳ مقدمه‌ای بر ناوردهای کرونکر و فرم همدم برداری

سیستم خطی کنترل‌پذیر زیر را در نظر می‌گیریم [۱]:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.3)$$

و یا در حالت گسسته زمانی به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (2.3)$$

به طوری که $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ، $u(t) \in \mathbb{R}^m$ و ماتریس‌های A و B ماتریس‌های ثابت و حقیقی با بعد به ترتیب $n \times n$ و $n \times m$ و همچنین $\text{rank}(B) = m$

تعریف ۱.۱.۳. زوج کنترل‌پذیر (A, B) را در نظر بگیرید، ماتریس کنترل‌پذیری سیستم را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$Q = [B, AB, A^2B, \dots, A^{p_1-1}b_1, A^{p_2-1}b_2, \dots, A^{p_m-1}b_m] \quad (۳.۳)$$

به طوری که $rank(Q) = n$ ، اعداد p_i ، $(i = 1, 2, \dots, m)$ که هر p_i به بردار ستونی متناظر b_i از ماتریس B مربوط می‌شود را ناوردهای کرونگر زوج (A, B) می‌نامند. همچنین

$$\sum_{i=1}^m p_i = n, \quad 1 \leq p_i \leq n. \quad (۴.۳)$$

تعریف ۲.۱.۳. ناوردهای کرونگر زوج کنترل‌پذیر (A, B) را منظم می‌نامند هرگاه اختلاف ماکزیمم و مینیمم آن‌ها حداکثر برابر یک باشد و اگر اختلاف بین ماکزیمم و مینیمم ناوردهای کرونگر زوج کنترل‌پذیر (A, B) بیشتر از واحد باشد آن‌ها را نامنظم می‌نامند. تعریف می‌کنیم:

$$\vartheta = \max\{p_1, p_2, \dots, p_m\} \quad (۵.۳)$$

در این صورت ϑ را اندیس کنترل‌پذیری سیستم می‌نامند زیرا هر بردار غیرصفر از فضای حالت را می‌توان در حداکثر ϑ واحد زمان برای سیستم گسسته به حالت تعادل رساند.

ملاحظه می‌شود در حالتی که ناوردهای کرونگر با هم برابرند حالت خاصی از ناوردهای کرونگر منظم می‌باشد که در این حالت نمی‌توان با ورودی‌های متفاوت سیستم را به حالت تعادل رساند و مجموعه‌ای از ورودی‌های منحصر به فرد برای کنترل حالت سیستم بدست آید. زیرا فرض کنید حالت تعادل سیستم بردار دلخواه x_e باشد $x(\vartheta) = x_e$ اگر بین معادلات

$$x(i+1) = Ax(i) + Bu(i), \quad (i = 0, 1, 2, \dots, \vartheta - 1) \quad (۶.۳)$$

بردارهای $x(1), x(2), \dots, x(\vartheta - 1)$ را حذف کنیم خواهیم داشت

$$x(\vartheta) - A^\vartheta x(0) = A^{\vartheta-1}Bu(0) + \dots + ABu(\vartheta - 2) + Bu(\vartheta - 1) \quad (۷.۳)$$

به عبارت دیگر

$$x(\vartheta) - A^\vartheta x(0) = [B, AB, \dots, A^{\vartheta-1}B] \begin{bmatrix} u(\vartheta - 1) \\ u(\vartheta - 2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \quad (۸.۳)$$

با توجه به اینکه ماتریس ضرایب دستگاه فوق یک ماتریس مربعی معکوس‌پذیر است در صورتی که x_e و $x(0)$ به دلخواه اختیار شوند، آنگاه این دستگاه جواب منحصر به فردی برای بردار ورودی

خواهد داشت.

در صورتی که ناورداهای کرونکر زوج (A, B) با هم برابر نباشند دستگاه دارای ماتریس ضرایب غیرمربعی رتبه کامل است پس دارای جواب‌های متعددی برای بردار مجهول ورودی خواهد بود. همچنین در حالتی که ناورداهای کرونکر زوج (A, B) با هم برابر باشند ماتریس پس‌خورد حالت k منحصر به فرد خواهد بود زیرا:

کافی است ثابت کنیم معادله زیر دارای جواب منحصر به فردی برای مجهول X است.

$$(A + BX)^{\theta} = 0 \quad (9.3)$$

در صورت لزوم می‌توان با جابجایی ستون‌های ماتریس B ناورداهای کرونکر را به صورت زیر مرتب ساخت.

$$p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_m \quad (10.3)$$

یا به‌طور معادل ماتریس B را با ماتریس BP که P یک ماتریس جایگشتی $m \times m$ است جایگزین ساخت.

قضیه ۱.۱.۳. [۱] اگر زوج (A, B) کنترل‌پذیر باشد آنگاه زوج (BP, A) نیز کنترل‌پذیر است و برعکس

برهان. فرض می‌کنیم Q ماتریس کنترل‌پذیری زوج (B, A) و \bar{Q} ماتریس کنترل‌پذیری زوج (BP, A) باشد آنگاه

$$Q = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \quad (11.3)$$

$$\bar{Q} = [BP, ABP, \dots, A^{n-1}BP]$$

از آنجایی که P یک ماتریس نگاشت است می‌توان گفت \bar{Q} همان Q است با این تفاوت که ستون‌های آن جابجا شده است و اگر رتبه Q برابر n باشد آنگاه رتبه \bar{Q} نیز برابر n است و برعکس. \square

قضیه ۲.۱.۳. [۱] اندیس کنترل‌پذیری زوج (B, A) با اندیس کنترل‌پذیری زوج (BP, A) برابر است، یعنی

$$\max\{p_1, p_2, \dots, p_m\} = \max\{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_m\}$$

قضیه ۳.۱.۳. [۱] اگر $P_{m \times m}$ ماتریس معکوس‌پذیر باشد و $K \in \{K | (A + BK)^{\theta} = 0\}$ آنگاه

$$P^{-1}K \in \{K | (A + BK)^{\theta} = 0\}$$

برهان. فرض کنیم که

$$(A + BK_0)^{\vartheta} = 0$$

پس می‌توان نوشت

$$(A + BPP^{-1}K_0)^{\vartheta} = 0$$

و از اینجا نتیجه می‌شود

$$P^{-1}K_0 \in \{K | (A + BK)^{\vartheta} = 0\}$$

و عکس آن نیز به آسانی اثبات می‌شود. \square

نتیجه ۱.۱.۳. حل مساله کنترل سیستم به روش پس‌خورد حالت برای زوج (B, A) با حل همان مساله برای زوج (BP, A) معادل است هرگاه P ماتریس معکوس پذیر باشد

فرض می‌کنیم ناوردهای کرونگر زوج (B, A) منظم باشند و به صورت زیر مرتب شده باشند

$$p_1 \geq p_2 \cdots \geq p_m$$

با توجه به تعریف ناوردهای کرونگر منظم نتیجه می‌گیریم r تا از ناوردهای کرونگر برابر $q + 1$ و s تای دیگر برابر q خواهد بود

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_r = q + 1 \quad p_{r+1} = p_{r+2} = \cdots = p_m = q \quad (12.3)$$

که در آن

$$q = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor \quad n = mq + r \quad s = m - r \quad (13.3)$$

بنابراین

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_m = r(q + 1) + (r + s)q = n$$

اگر $r = m$ باشد آن‌گاه $s = 0$ است و داریم

$$rq + r = m(q + 1) = n$$

و اندیس کنترل پذیری برابر است با

$$\vartheta = q + 1 = \frac{n}{m} = \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil \quad (14.3)$$

که حالت خاصی است که همه ناوردهای کرونگر با هم برابرند.

اگر $r < m$ باشد خواهیم داشت $n = mq + r$ و $q = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor$ و اندیس کنترل پذیری برابر است با

$$\vartheta = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor + 1$$

۲.۳ تبدیلات تشابهی فضای حالت - فرم استاندارد اشلون

فرض کنید T تبدیل تشابهی باشد که بر فضای \mathbb{R}^n تعریف شده است. معادله حالت سیستم به صورت

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (۱۵.۳)$$

است. حال فرض کنید بردار حالت سیستم توسط ماتریس تبدیل T^{-1} به فضای جدید تبدیل شود یعنی

$$\hat{x}(t) = T^{-1}x(t) \quad (۱۶.۳)$$

در نتیجه

$$x(t) = T\hat{x}(t) \quad (۱۷.۳)$$

با جایگذاری در معادله (۱۵.۳) خواهیم داشت

$$T\dot{\hat{x}}(t) = AT\hat{x}(t) + Bu(t)$$

با ضرب طرفین معادله بالا در T^{-1} خواهیم داشت

$$\dot{\hat{x}}(t) = T^{-1}AT\hat{x}(t) + T^{-1}Bu(t) \quad (۱۸.۳)$$

معادله سیستم بالا مشابه معادله (۱۵.۳) است با این تفاوت که A با $T^{-1}AT$ و B با $T^{-1}B$ عوض شده است، تعریف می‌کنیم

$$\hat{B} = T^{-1}B \quad , \quad \hat{A} = T^{-1}AT \quad (۱۹.۳)$$

با جایگذاری در معادله (۱۸.۳) خواهیم داشت

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \quad (۲۰.۳)$$

اگر هدف، کنترل حالت سیستم و رساندن حالت آن به تعادل (صفر) باشد با توجه به رابطه (۲۰.۳) می‌توان در فضای حالت جدید بردار حالت $\hat{x}(t)$ را به صفر رساند، در این صورت بدیهی است که $x(t)$ نیز که بردار حالت در فضای اولیه است به تعادل خواهد رسید. بدین‌سان حل مسأله مورد نظر با زوج (B, A) با حل همان مسأله با زوج (\hat{B}, \hat{A}) هم‌ارز است. ماتریس T را می‌توان به صورت منحصر به فردی با استفاده از ماتریس کنترل‌پذیری مشخص کرد، به این ترتیب که اولین n ستون مستقل خطی ماتریس Q را ستون‌های ماتریس تبدیل T قرار می‌دهیم، بنابراین

$$T = (B, AB, \dots, A^{q-1}B, A^q b_1, \dots, A^q b_r) \quad (۲۱.۳)$$

حال فرم استاندارد اشلون زوج (B, A) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} (\hat{B}, \hat{A}) &= (T^{-1}B, T^{-1}AT) = T^{-1}(B, A(B, AB, \dots, A^{q-1}B, A^q b_1, \dots, A^q b_r)) \\ &= T^{-1}(B, AB, \dots, A^{q-1}B, A^q b_1, \dots, A^q b_r, A^q b_{r+1}, \dots, A^q b_m, A^{q+1} b_1, \dots, A^{q+1} b_r) \\ &= T^{-1}(T, A^q b_{r+1}, \dots, A^q b_m, A^{q+1} b_1, \dots, A^{q+1} b_r) \\ &= (I_n, T^{-1}A^q(b_{r+1}, \dots, b_m, Ab_1, \dots, Ab_r)) \\ &= (I_n, V) \end{aligned} \quad (22.3)$$

بطوریکه V یک بردار ستونی $n \times m$ است که به صورت زیر به دست می‌آید،

$$v_i = T^{-1}A^q b_{i+r} \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (23.3)$$

$$v_j = T^{-1}A^{q+1} b_{j-s} \quad j = s+1, \dots, m \quad (24.3)$$

در حقیقت سطرهای زوج (\hat{B}, \hat{A}) می‌تواند به q بلوک مربعی $m \times m$ و یک بلوک غیرمربعی $r \times m$ مطابق زیر افزاز شود:

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} I_m \\ \dots \\ 0_{m \times m} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ 0_{m \times m} \\ \dots \\ 0_{r \times m} \end{bmatrix}, \hat{A} = \begin{bmatrix} 0_{m \times r} & | & 0_{m \times r} & | & \dots & | & 0_{m \times r} & | & V^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_n & | & 0_{m \times r} & | & \dots & | & 0_{m \times r} & | & V^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_{m \times r} & | & 0_{m \times r} & | & \dots & | & 0_{m \times r} & | & V^{(q)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_{r \times m} & | & 0_{r \times m} & | & \dots & | & I_r & | & V^{(q+1)} \end{bmatrix} \quad (25.3)$$

به طوری که هر $V^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, q$) یک ماتریس مربعی $m \times m$ است و $V^{(q+1)}$ یک ماتریس مستطیلی $r \times m$ است.

فرم استاندارد اشلون می‌تواند به طور عددی با انجام عملیات سطری تشابهی روی زوج (B, A) و به دنبال آن عملیات ستونی تشابهی، تنها روی ماتریس A بدست آید.

حال اگر عملیات ستونی مشابه بر روی یک ماتریس واحد $n \times n$ انجام شود ماتریس تبدیل T بدون احتیاج به تشکیل ماتریس کنترل‌پذیری به سادگی بدست می‌آید. به عبارت دیگر برای تبدیل زوج (B, A) به (\hat{B}, \hat{A}) ماتریس افزوده $Q = [B, A, I_n]$ را در نظر می‌گیریم و عملیات تشابهی زیر را تعریف می‌کنیم:

(۱) - ضرب یا تقسیم یک سطر از Q به کمیت اسکالر $k \neq 0$ و به دنبال آن تقسیم یا ضرب ستون متناظر از ماتریس A

$$\text{Row}(i) \rightarrow \text{Row}(i) \times k \quad \text{on } Q$$

$$\text{Column}(i) \rightarrow \text{Column}(i)/k \quad \text{on } A$$

(۲) - تفاضل مضربی از سطر i ام ماتریس Q از سطر j ام آن و به دنبال آن جمع همان مضرب از ستون j ام ماتریس A با ستون i ام ماتریس A

$$\text{Row}(j) \rightarrow \text{Row}(j) - k\text{Row}(i) \quad \text{on } Q$$

$$\text{Column}(i) \rightarrow \text{Column}(i) + k\text{Column}(j) \quad \text{on } A$$

(۳) - جابجایی سطر i ام و سطر j ام از ماتریس Q و به دنبال آن جابجایی ستون j ام و ستون i ام از ماتریس A

$$\text{Row}(i) \leftrightarrow \text{Row}(j) \quad \text{on } Q$$

$$\text{Column}(j) \leftrightarrow \text{Column}(i) \quad \text{on } A$$

در واقع این عملیات تشابهی مانند عملیات تشابهی در فرآیند حذف گاوسی به منظور حل یک دستگاه معادله خطی است، با این تفاوت که در آنجا تنها عملیات سطری انجام می شود در حالی که در اینجا عملیات ستونی متناظر با آن باید در ماتریس A نیز انجام شود، بدین سان $\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, T^{-1}]$ بدست می آید. قابل ذکر است که اگر عملیات ستونی در ماتریس I_n ذخیره شود ماتریس تبدیل T بدست خواهد آمد.

قابل توجه است که در صورتی که ناوردهای کرونکر زوج (B, A) منظم باشند فرم استاندارد اشلون به صورت منظم خواهد بود.

$$\hat{Q} = (\hat{B}, \hat{A}) = (I_n, V) \quad (۲۶.۳)$$

اما در حالتی که ناوردهای کرونکر نامنظم باشند دیگر ستون های ماتریس I_n به صورت منظم پشت سر یکدیگر مرتب نمی شوند بلکه در ماتریس \hat{Q} پخش می شوند.

فرم استاندارد اشلون برای تعیین قوانین کنترل مناسب نیست، برای رفع این مشکل بردارهای ستونی غیر واحد فرم استاندارد اشلون را با انتخاب یک تبدیل مناسب به بردارهای سطری تبدیل می کنیم این فرم به فرم همدم برداری معروف است و ثابت می شود که برای تعیین قوانین کنترل بسیار مفید خواهد بود و فرم همدم برداری که مستقیماً از فرم استاندارد اشلون بدست می آید فرم همدم برداری اولیه نامیده می شود.

۳.۳ فرم همدم برداری اولیه

فرض کنید S تبدیل خطی تشابهی باشد که بر فضای R^n تعریف شده است و بردار حالت سیستمی که به فرم استاندارد اشلون است توسط ماتریس تبدیل S^{-1} به فضای جدید تبدیل شود، یعنی،

$$\tilde{x}(t) = S^{-1}\hat{x}(t) = S^{-1}T^{-1}x(t) \quad (۲۷.۳)$$

با جایگذاری $\hat{x}(t)$ در معادله (۲۰.۳) خواهیم داشت

$$S\dot{\hat{X}}(t) = \hat{A}S\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \quad (28.3)$$

با ضرب طرفین معادله بالا در S^{-1} خواهیم داشت

$$\dot{\hat{X}}(t) = S^{-1}\hat{A}S\hat{x}(t) + S^{-1}\hat{B}u(t) \quad (29.3)$$

قرار می‌دهیم

$$\tilde{A} = S^{-1}\hat{A}S = S^{-1}T^{-1}ATS \quad (30.3)$$

$$\tilde{B} = S^{-1}\hat{B} = S^{-1}T^{-1}B \quad (31.3)$$

با جایگذاری در معادله (۲۹.۳) خواهیم داشت

$$\dot{\hat{X}}(t) = \tilde{A}\hat{x}(t) + \tilde{B}u(t) \quad (32.3)$$

به گونه‌ای که زوج (\tilde{B}, \tilde{A}) به فرم همدم برداری اولیه خواهد بود. حل معادله سیستم (۳۲.۳) هم‌ارز با حل معادله سیستم (۱۵.۳) است.

به‌علاوه با استفاده از عملیات تشابهی روی زوج (B, A) می‌توان بردارهای ستونی V در \hat{A} را به بردارهای سطری تبدیل ساخت، بدین منظور گام‌های زیر را انجام می‌دهیم:

(۱) - هر بلوک واحد I_m در زوج (\hat{B}, \hat{A}) را به بلوک‌های واحد I_r و I_s افراز می‌کنیم.

$$I_m = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & I_s \end{array} \right]$$

(۲) - هر بلوک مربعی $V^{(i)}$ در \hat{A} را به $V_{rm}^{(i)}$ و $V_{sm}^{(i)}$ افراز می‌کنیم.

$$V_{mm}^{(i)} = \left[\begin{array}{c} V_{rm}^{(i)} \\ \dots \\ V_{sm}^{(i)} \end{array} \right]$$

(۳) - بلوک مستطیلی $V_{rm}^{(q+1)}$ را به $V_{rs}^{(q+1)}$ و $V_{rr}^{(q+1)}$ افراز می‌کنیم

$$V_{rm}^{(q+1)} = \left[\begin{array}{c|c} V_{rs}^{(q+1)} & V_{rr}^{(q+1)} \end{array} \right]$$

حال اگر $V^{(i)}$ را مانند یک اسکالر در نظر بگیریم با انجام عملیات ستونی

$$\text{Column}(j) - V^{(i)}\text{Column}(j-1) \quad (33.3)$$

روی \hat{A} و به‌دنبال آن عملیات سطری

$$\text{Row}(j-1) + V^{(i)}\text{Row}(j) \quad (34.3)$$

به ازای هر $i = q+1, q, \dots, 2$ و $j = i, i-1, \dots, 2$ روی (\hat{B}, \hat{A}) می‌توان بلوک‌های $V^{(i)}$ را از گوشه سمت راست \hat{A} به قسمت بالای (\hat{B}, \hat{A}) انتقال داد. در این صورت (\tilde{B}, \tilde{A}) را فرم همدم برداری اولیه می‌نامند.

بنابراین فرم همدم برداری اولیه به صورت زیر خواهد بود:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} I_r & , & V_{rs}^{(q+1)} \\ \text{-----} \\ 0_{sr} & , & I_s \\ \text{-----} \\ & & 0_{rm} \\ \text{-----} \\ & & 0_{rm} \\ \text{-----} \\ & & \vdots \\ \text{-----} \\ & & 0_{rm} \end{bmatrix} \quad (35.3)$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} V_{rr}^{(q+1)} & | & \bar{V}_{rm}^{(q)} & | & \dots & | & \bar{V}_{rm}^{(2)} & | & \bar{V}_{rm}^{(1)} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0_{sr} & | & V_{sm}^{(q)} & | & \dots & | & V_{sm}^{(2)} & | & V_{sm}^{(1)} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ I_r & | & 0_{rm} & | & \dots & | & 0_{rm} & | & 0_{rm} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0_{sr} & | & I_s & | & \dots & | & 0_{sm} & | & 0_{sm} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \vdots & | & \vdots & | & \vdots & | & \vdots & | & \vdots \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 0_{rr} & | & 0_{rm} & | & \dots & | & I_r & | & 0_{rm} \end{bmatrix} \quad (36.3)$$

علاوه بر این اگر عملیات سطری مشابه (۳۴.۳) روی ماتریس واحد

$$I_n = \text{diag}\{I_r, I_s, I_r, I_s, \dots, I_r\} \quad (37.3)$$

انجام شود ماتریس تشابهی S^{-1} و اگر عملیات ستونی مشابه (۳۳.۳) روی ماتریس واحد (۳۷.۳)

انجام شود، ماتریس تشابهی S (که یک ماتریس بالامثلثی است) را مطابق زیر به دست می‌دهد.

$$(38.3) \quad S = \begin{bmatrix} I_r & | & -V_{rm}^{(q+1)} & | & -V_{rm}^{(q)} & | & \dots & | & -V_{rm}^{(2)} \\ \hline 0_{sr} & | & I_s & , & 0_{sr} & | & -V_{sm}^{(q)} & | & \dots & | & -V_{sm}^{(2)} \\ \hline 0_{rr} & | & 0_{rs} & , & I_r & | & 0_{rs} & , & 0_{rr} & | & \dots & | & -V_{rm}^{(2)} \\ \hline 0_{sr} & | & 0_{ss} & , & 0_{sr} & | & I_s & , & 0_{sr} & | & \dots & | & -V_{sm}^{(2)} \\ \hline \vdots & | & \vdots & | & \vdots & | & \vdots & | & \vdots & | & \vdots & | & \vdots \\ \hline 0_{rr} & | & 0_{rs} & , & 0_{rr} & | & 0_{rs} & , & 0_{rr} & | & \dots & | & -V_{rm}^{(q+1)} \\ \hline 0_{sr} & | & 0_{ss} & , & 0_{sr} & | & 0_{ss} & , & 0_{sr} & | & \dots & | & I_s & , & 0_{sr} \\ \hline 0_{rr} & | & 0_{rs} & , & 0_{rr} & | & 0_{rs} & , & 0_{rr} & | & \dots & | & 0_{rs} & , & I_r \end{bmatrix}$$

در نتیجه این عملیات $V_{rm}^{(q+1)}$, $V_{sm}^{(i)}$, $(i = 1, 2, \dots, q)$ بدون تغییر باقی می‌ماند در صورتی که تنها در \bar{A} داریم

$$\bar{V}_{rm}^{(i)} = V_{rm}^{(i)} + V_{rs}^{(q+1)} V_{sm}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (39.3)$$

از آن جایی که $V_{rm}^{(q+1)}$, $V_{rm}^{(i)}$, $V_{sm}^{(i)}$, $(i = 1, 2, \dots, q)$ منحصر به فرد هستند ماتریس‌های بدست آمده نیز منحصر به فرد هستند و ترتیب عملیات تشابهی مقدماتی در نتیجه آخر هیچ اثری ندارد. جالب توجه است در حالتی که ناوردهای کرونکر مساوی باشند داریم:

$$p_1 = q = [n/m], \quad r = 0, \quad s = m$$

در نتیجه

$$V_{rs}^{(q+1)} = 0, \quad V_{rr}^{(q+1)} = 0, \quad \bar{V}_{rm}^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (40.3)$$

و

$$V_{sm}^{(i)} = V_{mm}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, q \quad i = 1, 2, \dots, q \quad (41.3)$$

در این صورت بردار ستونی V در ماتریس \bar{A} به ازای 90° درجه در جهت گردش عقربه‌های ساعت دوران می‌کند و همه عناصرش بدون تغییر باقی می‌مانند.

بنابراین در حالتی که ناوردهای کرونگر مساوی هستند فرم همدم برداری اولیه به صورت منحصر به فرد زیر خواهد بود:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} I_m \\ \dots \\ 0_{mm} \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ 0_{mm} \\ \dots \\ 0_{mm} \end{bmatrix}, \tilde{A} = \begin{bmatrix} V^{(q)} & | & V^{(q-1)} & | & \dots & | & V^{(2)} & | & V^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_m & | & 0_{mm} & | & \dots & | & 0_{mm} & | & 0_{mm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & | & \vdots & | & \vdots & | & \vdots & | & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_{mm} & | & 0_{mm} & | & \dots & | & 0_{mm} & | & 0_{mm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0_{mm} & | & 0_{mm} & | & \dots & | & I_m & | & 0_{mm} \end{bmatrix} \quad (42.3)$$

به عبارت دیگر

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} I_m \\ \dots \\ 0_{(n-m) \times m} \end{bmatrix}, \tilde{A} = \begin{bmatrix} V^{(q)} & V^{(q-1)} & \dots & V^{(2)} & V^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_{n-m} & & & & 0_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} \quad (43.3)$$

در حقیقت برای تبدیل (B, A) به (\hat{B}, \hat{A}) ابتدا ماتریس افزوده $Q = [B, A, I_n]$ را در نظر گرفته و عملیات تشابهی را روی آن انجام داده تا به فرم استاندارد اشلون تبدیل شود، یعنی

$$\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, T^{-1}]$$

سپس ماتریس $\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, I_n]$ را در نظر گرفته و با استفاده از عملیات تشابهی آن را به فرم همدم برداری تبدیل می‌کنیم، یعنی

$$\tilde{Q} = [\tilde{B}, \tilde{A}, S^{-1}]$$

و به طور کلی

$$Q = [B, A, I_n] \xrightarrow{T^{-1}} \hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, T^{-1}] \xrightarrow{S^{-1}} \tilde{Q} = [\tilde{B}, \tilde{A}, S^{-1}T^{-1}]$$

که فرم همدم برداری در حالتی که ناوردهای کرونگر منظم باشند به صورت

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} D_0 \\ \dots \\ 0_{(n-m) \times m} \end{bmatrix}, \tilde{A} = \begin{bmatrix} G_0 \\ \dots \\ I_{n-m} & , & 0_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} \quad (44.3)$$

و در حالتی که ناوردهای کرونگر نامنظم باشند ستون‌های ماتریس I_{n-m} در بلوک پایین ماتریس \tilde{A} پخش می‌شوند.

الگوریتم مربوط به محاسبه فرم همدم برداری و برنامه کامپیوتری که براساس آن نوشته شده است در ضمیمه آمده است.

برای معادله (۱۵.۳) قانون کنترل به صورت $u(t) = Kx(t)$ تعریف می‌شود و به‌طور مشابه برای معادله (۳۲.۳) و معادله

$$\tilde{x}(k+1) = \tilde{A}\tilde{x}(k) + \tilde{B}u(k) \quad (۴۵.۳)$$

قانون کنترل به صورت

$$u(t) = \tilde{K}\tilde{x}(t) \quad (۴۶.۳)$$

تعریف می‌شود که \tilde{K} ماتریس پس خورد حالت معادله سیستم تبدیل شده به فرم همدم برداری اولیه است، با جایگذاری $(TS)^{-1}x(t)$ به جای $\tilde{x}(t)$ در معادله (۴۶.۳) داریم

$$u(t) = \tilde{K}s^{-1}T^{-1}x(t) \quad (۴۷.۳)$$

بنابراین ماتریس پس خورد حالت معادله سیستم معمولی به صورت زیر به دست می‌آید

$$K_p = \tilde{K}s^{-1}T^{-1} \quad (۴۸.۳)$$

که K_p ماتریس پس خورد حالت اولیه زوج (B, A) نامیده می‌شود.

به آسانی می‌توان نشان داد که مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{k}$ همگی صفرند:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{k} &= \begin{bmatrix} G_0 \\ \dots\dots\dots \\ I_{n-m} \quad , \quad 0_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 \\ \dots\dots\dots \\ 0_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} [-D_0^{-1}G_0] \\ &= \begin{bmatrix} G_0 \\ \dots\dots\dots \\ I_{n-m} \quad , \quad 0_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_0 \\ \dots\dots\dots \\ 0_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0_{m \times n} \\ \dots\dots\dots \\ I_{n-m} \quad , \quad 0_{(n-m) \times m} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (۴۹.۳)$$

از آنجایی که ماتریس حاصل یک ماتریس پایین مثلثی است که همه درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر صفرند مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\tilde{\Gamma}$ همگی برابر صفرند.

همچنین ماتریس $\tilde{\Gamma}$ شامل $q-1$ بلوک I_m و یک بلوک I_r در زیر قطر اصلی است و در حقیقت $\tilde{\Gamma}$ به فرم جوردن بلوکی است و با توجه به خواص ماتریس جوردن واضح است که اندیس پوچ توانی ماتریس $\tilde{\Gamma}$ برابر

$$\vartheta = p_1 = q + 1 \quad (۵۰.۳)$$

است.

بنابر آنچه گفته شد ماتریس $K = \tilde{K}s^{-1}T^{-1} = D_0^{-1}G_0S^{-1}T^{-1}$ موسوم به ماتریس پس خورد حالت در فضای (B, A) است که همان خواص ماتریس \tilde{K} در فضای (\tilde{B}, \tilde{A}) را دارد، یعنی همه مقادیر ویژه ماتریس حلقه بسته $\Gamma = A + BK$ توسط ماتریس پس خورد حالت K به صفر برده می‌شود و اندیس پوچ توانی آن نیز $\nu = p_1 = q + 1$ خواهد بود، زیرا تبدیلات تشابهی خواص ماتریس را تغییر نمی‌دهند.

حال الگوریتم چگونگی تعیین ماتریس پس خورد حالت اولیه را مطرح می‌نماییم:

ورودی: ماتریس‌های A, B و n, m اندازه‌های آن‌ها و $\text{rank}(B) = m$

گام ۱ - ماتریس افزوده $Q = [B, A, I_n]$ را تشکیل می‌دهیم.

گام ۲ - با عملیات تشابهی سطری و ستونی $\hat{Q} = [\hat{B}, \hat{A}, T^{-1}]$ را می‌سازیم. (الگوریتم آن ارائه شد)

گام ۳ - عملیات تشابهی سطری و ستونی را ادامه داده $\tilde{Q} = [\tilde{B}, \tilde{A}, S^{-1}T^{-1}]$ را می‌سازیم. (الگوریتم آن ارائه شد)

گام ۴ - سطر اول \tilde{B} را D_0 و سطر اول \tilde{A} را G_0 می‌نامیم.

گام ۵ - $\tilde{K} = -D_0^{-1}G_0$ را تشکیل می‌دهیم.

گام ۶ - $K_p = \tilde{K}S^{-1}T^{-1}$ ماتریس پس خورد حالت اولیه^۱ سیستم (B, A) را به دست می‌آوریم.

۴.۳ انواع تأخیر در سیستم‌های گسسته

سیستم‌های چند متغیره خطی با تأخیر ثابت زمانی به سه دسته تقسیم می‌شود:

(الف) زمانیکه تأخیر در متغیر ورودی باشد، در این حالت معادله حالت سیستم به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$x(k+1) = A_0x(k) + B_0u(k) + B_1u(k-1) + B_2u(k-2) + \dots + B_Lu(k-L)$$

(ب) زمانی که تأخیر در متغیر حالت باشد معادله حالت به شکل زیر است:

$$x(k+1) = A_0x(k) + A_1x(k-1) + A_2x(k-2) + \dots + B_0u(k)$$

(ج) وقتی که تأخیر در متغیر حالت و ورودی باشد معادله حالت سیستم به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$x(k+1) = A_0x(k) + A_1x(k-1) + \dots + A_rx(k-r) + B_0u(k) + \dots + B_Lu(k-L)$$

^۱primary state feedback matrix

در این فصل به بررسی تأخیر در متغیر حالت می‌پردازیم و نگاهی کوتاه و اجمالی به موارد (ب) و (ج) خواهیم داشت

۱.۴.۳ پایداری سیستم‌های گسسته زمانی با تأخیر ثابت متغیر ورودی

سیستم‌های چند متغیره خطی با تأخیر ورودی به دو دسته تقسیم می‌شوند. رده اول شامل سیستم‌هایی است که تمام ورودی‌ها با مقداری مشابه به تأخیر می‌افتند، که این سیستم‌ها را سیستم‌های تک تأخیری می‌نامند؛ رده دوم شامل سیستم‌هایی است که در آن ورودی‌ها با مقادیر مختلف به تأخیر می‌افتند، و با عنوان سیستم‌های چندتأخیر شناخته می‌شوند. در ابتدا بحث قوانین کنترل برای سیستم‌ها چند متغیره تک تأخیر هستند، و سپس برای سیستم‌های چندتأخیر با ذکر جزئیات مورد بررسی قرار می‌گیرند. کوچک^۱ روش بردار افزوده را برای سیستم‌های تأخیر زمانی پیشنهاد کرد و پس از آن تعدادی دیگر از محققان [۱۹] از ایده ایشان در طراحی قوانین کنترل برای سیستم‌های تأخیر زمانی استفاده کردند بر این اساس، یک سنتز بر پایه بردار افزوده حالت، که منجر به درک روشنی از رفتار سیستم نسبت به روش‌های دیگر می‌شود ارائه شده است. اخیراً کرباسی و تهرانی [۲۱] این روش را توسعه داده‌اند.

۲.۴.۳ طراحی و پیاده‌سازی

معادله حالت سیستم گسسته زمانی با تأخیر ثابت در متغیر ورودی را در نظر بگیرید:

$$x(k+1) = A \cdot x(k) + B \cdot u(k) + B_1 u(k-1) \quad (51.3)$$

ابتدا سیستم را به فرم بدون تأخیر درآورده و سپس سیستم را پایدار می‌کنیم و ماتریس پس‌خورد حالت را بدست می‌آوریم. پس از آن در حالت کلی روش را بسط می‌دهیم. فرض کنید تعداد ورودی‌ها m و تعداد حالت‌ها n است. در [۱۹] داریم که

$$u(k-1) = 0 \quad (k < 1)$$

بنابراین، برای $k = 0$

$$x(1) = A \cdot x(0) + B \cdot u(0)$$

که $x(0)$ بردار اولیه حالت است. حال فضای حالت سیستم با بردار افزوده حالت می‌تواند بزرگ شود به گونه‌ای که شامل بردارهای ورودی قبلی باشند [۱۹]. بنابراین بردار حالت جدید به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$X(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix} \quad (52.3)$$

^۱ Kopyce

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} x(k+1) \\ u(k) \end{bmatrix}$$

با استفاده از بردارهای افزوده بالا سیستم (۵۱.۳) به یک سیستم بدون تأخیر تبدیل شود.

$$X(k+1) = \bar{A}X(k) + \bar{B}u(k) \quad (53.3)$$

که

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_0 & B_1 \\ 0_{mn} & 0_{mm} \end{bmatrix} \quad (54.3)$$

یک ماتریس افزوده سیستم حلقه باز $(n+m) \times (n+m)$ است، و

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B_0 \\ I_m \end{bmatrix} \quad (55.3)$$

یک ماتریس ورودی از بعد $m \times (n+m)$ است. پس یک قانون کنترل بهینه مطلوب می‌توان برای سیستم ارائه شده در (۵۳.۳) با هر یک از روش‌های استاندارد یافت شود. در این پایان نامه روش کرباسی و بل [۲۰] برای به دست آوردن پس‌خورد حالت استفاده شده است. به این صورت که به وسیله تبدیلات تشابهی فرم همدم برداری ماتریس‌های \bar{A} ، \bar{B} ، و ماتریس تبدیل T_0^{-1} را بدست می‌آوریم که به فرم زیر هستند

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} D_0 \\ 0_{n-m,m} \end{bmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} G_0 \\ I_{n-m}, 0_{n-m,m} \end{bmatrix} \quad (56.3)$$

ماتریس پس‌خورد حالت برای جفت (\tilde{A}, \tilde{B}) به صورت زیر است:

$$\tilde{K} = -D_0^{-1}G_0$$

و همچنین ماتریس پس‌خورد حالت برای جفت (A, B) برابر است با:

$$K = \tilde{K}S^{-1}T^{-1}$$

در حالت کلی برای سیستم تأخیری با تأخیر ثابت داریم:

$$x(k+1) = A_0x(k) + B_0u(k) + B_1u(k-1) + B_2u(k-2) + \dots + B_Lu(k-L) \quad (57.3)$$

داریم که

$$u(k-l) = 0 \quad (k < l)$$

بنابراین، برای ik

$$x(k+1) = A_0 x(k) + B_0 u(k)$$

که $x(k)$ بردار حالت اولیه سیستم است. بردار افزوده حالت به فرم زیر است:

$$X(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \\ \vdots \\ \vdots \\ u(k-l) \end{bmatrix} \quad (58.3)$$

$$X(k) = \begin{bmatrix} x(k+1) \\ u(k) \\ \vdots \\ \vdots \\ u(k-l+1) \end{bmatrix}$$

بنابراین با بردارهای افزوده‌های بالا سیستم (57.3) به یک سیستم بدون تأخیر زیر تبدیل می‌شود

$$X(k+1) = \bar{A}X(k) + \bar{B}u(k)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_0 & B_1 & B_2 & \cdots & B_{L-1} & B_L \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

و

$$\bar{B} = [B_0 \quad I \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T$$

مطابق روش ذکر شده در بالا می‌توان ماتریس پس‌خورد حالت را بدست می‌آورد.

مثال ۱.۴.۳. سیستم گسسته زمانی با تأخیر ورودی زیر را در نظر بگیرید:

$$x_0(k+1) = A_0 x_0(k) + B_0 u(k) + B_1 u(k-1) \quad (59.3)$$

که (A_0, B_1) به صورت زیر است:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 16 & -12 & 11 \\ 5 & 1 & 3 \\ -26 & 20 & -18 \end{bmatrix} \quad B_0 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} \quad (60.3)$$

بردار افزوده سیستم به صورت زیر است:

$$X(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k-1) \end{bmatrix}$$

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} x(k+1) \\ u(k) \end{bmatrix}$$

بنابراین سیستم (۵۹.۳) به یک سیستم بدون تأخیر به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$x(k+1) = \bar{A}x(k) + \bar{B}u(k)$$

که \bar{A} و \bar{B} به صورت زیر است:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 16 & -12 & 11 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ -26 & 20 & -18 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فرم همدم برداری (\bar{A}, \bar{B}) و ماتریس تبدیل T به صورت زیر است:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{\circ}^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پس G_{\circ} و B_{\circ}^{-1} به صورت زیر هستند:

$$B_{\circ}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G_{\circ} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

حال ماتریس K به صورت زیر است:

$$K = \begin{bmatrix} 35 & -3 & 22 & 2 & 7 \\ -7 & -1 & -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

۳.۴.۳ بررسی انواع دیگر سیستم‌های گسسته زمانی با تأخیر ثابت

حال به بررسی تأخیر در متغیر حالت و متغیر حالت و ورودی می‌پردازیم و بردار افزوده هر کدام را معرفی می‌کنیم.

اگر تأخیر در متغیر حالت باشد

معادله حالت سیستم تأخیری با تأخیر در بردار حالت به صورت کلی زیر تعریف می‌شود:

$$x(k+1) = A_0 x(k) + A_1 x(k-1) + A_2 x(k-2) + \dots + A_r x(k-r) + Bu(k) = \sum_{i=0}^r A_i x(k-i) + Bu(k) \quad (۶۱.۳)$$

بردار افزوده برای سیستم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-1) \\ \vdots \\ x(k-r+1) \\ x(k-r) \end{bmatrix}$$

و

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k) \\ \vdots \\ x(k-r+1) \end{bmatrix}$$

بنابراین معادله (۶۱.۳) به یک معادله بدون تأخیر به صورت زیر می‌شود:

$$X(k+1) = \bar{A}X(k) + \bar{B}U(k)$$

که:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \dots & A_{r-1} & A_r \\ I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix}$$

و

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B_0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}^T$$

قانون کنترل برای سیستم فوق به صورت :

$$u(k) = Kx(k)$$

است.

زمانی که تأخیر در متغیر حالت و ورودی باشد

سیستم این حالت به فرم زیر است:

$$x(k+1) = A_0x(k) + A_1x(k-1) + \dots + A_r x(k-r) + B_0u(k) + \dots + B_L u(k-L)$$

مطابق روش بالا ابتدا بردار افزوده سیستم را می‌نویسیم و سیستم را به فرم بدون تأخیر تبدیل می‌کنیم
بردار افزوده سیستم به صورت زیر است:

$$X(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-1) \\ \vdots \\ x(k-r) \\ u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(k-l) \end{bmatrix}$$

و

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} x(k+1) \\ x(k) \\ \vdots \\ x(k-r+1) \\ u(k) \\ u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-L+1) \end{bmatrix}$$

بنابراین معادله سیستم به یک معادله بدون تأخیر به صورت زیر می‌شود:

$$X(k+1) = \bar{A}X(k) + \bar{B}U(k)$$

که

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_{r-1} & A_r & B_1 & B_2 & \cdots & B_{L-1} & B_L \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & I_m & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I_m & 0 \end{bmatrix}$$

و

$$\bar{B} = [B_0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ I \ 0 \ 0]^T$$

حال مطابق روش گفته شده سیستم را پایدار می‌کنیم یعنی ابتدا آن را به فرم همدم برداری درمی‌آوریم و پس از آن ماتریس پس‌خورد حالت سیستم را به دست می‌آوریم.

فصل ۴

پایداری سیستم‌های گسسته زمانی با تأخیر متغیر

در این فصل به پایداری سیستم‌های گسسته زمانی با تأخیر متغیر زمان از طریق رویکرد تجزیه^۱ می‌پردازیم و سیستم را پایدار می‌کنیم.

۱.۴ مقدمه‌ای کوتاه درباره روش تجزیه

تأخیر زمانی اغلب در بسیاری از سیستم‌های عملی، مانند سیستم‌های تولید، مخابرات و سیستم‌های اقتصادی و . رخ می‌دهد. از آنجایی که تأخیر زمانی منبع مهم بی‌ثباتی و عملکرد ضعیف است توجهات زیادی را به خود معطوف کرده است.

تجزیه و تحلیل و سنتز کنترل کننده‌ها برای سیستم‌های پیوسته زمانی در [۸، ۱۰، ۱۸] آمده است. می‌دانیم که سیستم‌های تأخیری گسسته زمانی را می‌توان به سیستم‌های بدون تأخیر تبدیل کرد که نقطه قوت این سیستم‌هاست و به تفصیل در فصل قبل توضیح داده شده به همین دلیل توجه کمتری به پایداری چنین سیستم‌هایی شده است. می‌توانید نتایج پایداری برای سیستم‌های گسسته زمانی را در مراجع [۳، ۴، ۳۸] مشاهده کنید، اما این روش برای سیستم‌های

^۱Decomposition

با تأخیر نامعلوم و سیستم‌هایی با تأخیر زمان متغیر که موضوع کار است مناسب نیست. به تازگی توجهات زیادی به شکل پایداری سیستم‌های وابسته به تأخیر چه سیستم‌های گسسته چه پیوسته شده است [۸، ۱۷] و معیارهای زیادی برای پایداری وابسته به تأخیر حاصل شده است. نکته کلیدی برای بدست آوردن پایداری وابسته به تأخیر انتخاب یک تابع لیاپانوف - کراسوفسکی (LKF) است. وجود یک تابع لیاپانوف - کراسوفسکی درجه دو کامل^۱ (CQLF) شرط لازم و کافی برای پایداری مجانبی سیستم‌های تأخیر زمانی است. با استفاده از (CQLF) می‌توانیم حداکثر مجاز کران بالای تأخیر^۲ (MAUB) که بسیار نزدیک به حد تأخیر تحلیلی برای پایداری است را بدست آوریم. به هر حال CQLF منجر به یک سیستم پیچیده معادلات دیفرانسیل جزئی و یک نامساوی ماتریسی خطی (LMI) با بعد بینهایت می‌شود. بنابراین، به منظور توسعه پایداری ساده‌تر بسیاری از محققان از فرم LKF به جای CQLF برای محدود کردن مرتبه LMI استفاده کردند. علاوه بر این برای کاهش محافظه‌کاری نتایج موجود، برخی از روش‌های تجزیه و تحلیل جدید پیشنهاد شده است. به عنوان مثال روش تحلیل سیستم توصیف‌گر [۸، ۱۰، ۱۱]، روش ماتریس وزن آزاد [۱۲، ۳۶]، روش نامساوی ماتریسی [۱۷، ۲۴، ۲۸] و رویکرد ورودی-خروجی می‌توان اشاره کرد. با استفاده از این روش‌ها، بسیاری از معیارهای پایداری با بررسی کردن تغییر LKF در یک فاصله کامل تأخیر زمانی بدست می‌آید.

برخلاف این روش در [۳۶، ۳۸] برای بدست آوردن شرایط محافظه‌کاری کمتر، فاصله تأخیر زمانی به چند زیر بازه مساوی تقسیم می‌شود این‌گونه فاصله تأخیر وابسته به تابع لیاپانوف - کراسوفسکی^۳ (ID-D LKF) ساخته شده است. با بازبینی تغییرات ID-D LKF تعریف شده روی زیر بازه‌ها، معیارهای جدید وابسته به تأخیر بدست می‌آید. لازم به ذکر است که تفاوت اصلی بین LKF و ID-D LKF، اجازه می‌دهد که ماتریس‌هایی با وزن‌های متفاوت روی زیر بازه‌های متفاوت گرفته شود. بنابراین انتظار می‌رود که ID-D LKF معیارهای پایداری شرایط وابسته به تأخیر را حفظ کند.

با الهام گرفتن از ایده ژو و یانگ [۳۶] در تقسیم تأخیر سیستم‌های پیوسته زمانی به دو زیر مجموعه نامساوی یک روش جدید برای تحلیل پایداری سیستم‌های گسسته زمانی با تأخیر متغیر زمان بدست آمده است.

فاصله زمانی تأخیر $[k - h_M, k - 1]$ در ID-D LKF به دو زیر بازه نامساوی $[k - h_M, k - 1]$ و $[k - \alpha, k - 1]$ تقسیم می‌شود که $0 < \alpha < h_M$ ، یک پارامتر تنظیم است. ID-D LKF جدید با ماتریس‌های مختلف وزن در زیر بازه‌های مختلف ساخته شده است. برای نشان اثر بخشی روش پیشنهادی مثال عددی در بخش سه آمده است.

^۱ complete quadratic Lyapunov-Krasovskii functional

^۲ maximum allowable upper bound

^۳ Interval delay-dependent LKF

۲.۴ تعریف مسئله

سیستم زیر را با تأخیر متغیر با زمان در نظر بگیرید:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k-h(k)) \quad (۱.۴)$$

که $x(k) \in \mathbb{R}$ بردار حالت سیستم در لحظه k می‌باشد و ماتریس‌های $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ثابت هستند و $h(k)$ ، عدد صحیح مثبت است که نشان دهنده تأخیر زمانی سیستم است و ما فرض می‌کنیم به زمان وابسته است و در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$0 \leq h(k) \leq h_M \quad (۲.۴)$$

که h_M معلوم و عدد صحیح و مثبت متناهی است. هدف ما بنا کردن شرایط کافی برای تضمین کردن پایداری وابسته به تأخیر سیستم (۱.۴) که نتایج محافظه کاری کمتری داشته باشد. برای اثبات نتایج اصلی نتایج ارائه شده در لم زیر را دنبال می‌کنیم.

لم ۱.۲.۴. [۳۶] فرض کنید $y(k) = x(k+1) - x(k)$ برای هر $R > 0$ داریم:

$$\begin{aligned} -(h_M - h_m) \sum_{m=k-h_M}^{k-1-h_m} y^T(m) R y(m) &\leq \begin{bmatrix} x(k-h_m) \\ x(k-h_M) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -R & R \\ R & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k-h_m) \\ x(k-h_M) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x(k-h_m) - x(k-h_M) \end{bmatrix}^T R \begin{bmatrix} x(k-h_m) - x(k-h_M) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

۱.۲.۴ روش لیانوف – کراسوفسکی برای سیستم‌های گسسته

تعریف می‌کنیم:

$$x_k(j) \triangleq x(k+j), \quad j = -h, \dots, -1, 0$$

لم ۲.۲.۴. اگر اعداد مثبت α و β و تابع $V : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{h+1 \text{ بار}}$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $K = 0, 1, 2, \dots$ و برای هر $x(t)$ که در معادله (۱.۴) صدق می‌کند داشته باشیم:

$$0 \leq V(x_k) \leq \beta \{ \max_{j \in [h, 0]} |x(k+j)| \} \quad (۳.۴)$$

و

$$V(x_{k+1}) - V(x_k) \leq -\alpha |x(k)| \quad (۴.۴)$$

آن‌گاه سیستم (۱.۴) پایدار مجانبی است.

برهان. از معادله (۴.۴) داریم:

$$\sum_{j=0}^k (V(x_{j+1}) - V(x_j)) = V(x_{k+1}) - V(x_0) \leq -\alpha \sum_{j=0}^k |x(j)|^2$$

بنابراین، برای $x(k)$ که در رابطه (۱.۴) و (۲.۴) صدق می‌کند کافی است رابطه (۴.۴) را داشته باشیم:

$$|x(k)|^2 \leq \sum_{j=0}^k |x(j)|^2 \leq \frac{1}{\alpha} V(x_0) \leq \frac{\beta}{\alpha} \max_{j \in [h, \infty]} |\phi(j)|^2 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+ \quad (5.4)$$

نامساوی (۵.۴) به اندازه کافی کوچک است اگر شرایط اولیه کوچک باشد ($\max_{j \in [h, \infty]} |\phi(j)|^2$). به علاوه اگر

$$\sum_{j=0}^{\infty} |x(j)|^2 \leq \frac{1}{\alpha} V(x_0) < \infty$$

از این رو $|x(j)|^2 \rightarrow 0$ برای $j \rightarrow \infty$.

□

قضیه ۱.۲.۴. برای اسکالره‌های $h_M > 0$ و $0 < \alpha < h_M$ ، سیستم (۱.۴)–(۲.۴) پایدار مجانبی است اگر ماتریس‌های $Q_i = Q_i^T, Z_i = Z_i^T, P = P^T > 0$ ، وجود داشته باشد که LMI زیر برقرار باشد:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & 0 & 0 & \Phi_{15} \\ * & \Phi_{22} & \Phi_{23} & 0 & \Phi_{25} \\ * & * & \Phi_{33} & \Phi_{34} & 0 \\ * & * & * & \Phi_{44} & 0 \\ * & * & * & * & \Phi_{55} \end{bmatrix} < 0 \quad (6.4)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} & 0 & \Psi_{15} \\ * & \Psi_{22} & \Psi_{23} & \Psi_{24} & \Psi_{25} \\ * & * & \Psi_{33} & 0 & 0 \\ * & * & * & \Psi_{44} & 0 \\ * & * & * & * & \Psi_{55} \end{bmatrix} < 0 \quad (7.4)$$

که:

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= A^T P A - P + Q_1 + Q_3 - \frac{1}{\alpha} (Z_1 + Z_3), \\ \Phi_{12} &= A^T P B + \frac{1}{\alpha} (z_1 + z_3), \quad \Phi_{15} = (A - I)^T U_1, \\ \Phi_{22} &= B^T P B - Q_3 - \frac{1}{\alpha} (\gamma Z_1 + Z_3), \quad \Phi_{23} = \frac{1}{\alpha} Z_1, \quad \Phi_{25} = B^T U_1, \end{aligned}$$

$$\Phi_{\gamma\gamma} = -Q_1 + Q_2 - \frac{1}{\alpha}Z_1 - \frac{1}{h_M - \alpha}Z_2, \Phi_{\gamma\epsilon} = \frac{1}{h_M - \alpha}Z_2,$$

$$\Phi_{\epsilon\epsilon} = -Q_2 - \frac{1}{h_M - \alpha}Z_2, \Phi_{\delta\delta} = -U_1,$$

$$\Psi_{11} = \Phi_{11}, \Psi_{12} = A^T B P, \Psi_{13} = \frac{1}{\alpha}(Z_1 + Z_2), \Psi_{1\delta} = (A - I)^T U_2,$$

$$\Psi_{22} = B^T P B - Q_3 - \frac{1}{h_M - \alpha}(2Z_2 + Z_3), \Psi_{23} = \frac{1}{h_M - \alpha}(Z_2 + Z_3),$$

$$\Psi_{2\epsilon} = \frac{1}{h_M - \alpha}Z_2, \Psi_{2\delta} = B^T U_2,$$

$$\Psi_{33} = -Q_1 + Q_2 - \frac{1}{\alpha}(Z_1 + Z_2) - \frac{1}{h_M - \alpha}(Z_2 + Z_3),$$

$$\Psi_{\epsilon\epsilon} = -Q_2 - \frac{1}{h_M - \alpha}Z_2, \Psi_{\delta\delta} = -U_2$$

$$U_1 = \alpha Z_1 + (h_M - \alpha)Z_2 + \alpha Z_3, U_2 = \alpha Z_1 + (h_M - \alpha)Z_2 + h_M Z_3$$

برهان. فاصله وابسته به تأخیر LKF را به صورت زیر می‌سازیم:

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x) + V_3(x) \quad (۸.۴)$$

که:

$$V_1(k) = x^T(k) P x(k) \quad (۹.۴)$$

$$V_2(k) = \sum_{i=k-\alpha}^{k-1} x^T(i) Q_1 x(i) + \sum_{i=k-\text{end}h_M}^{k-1-\alpha} x^T(i) Q_2 x(i) + \sum_{i=k-h(k)}^{k-1} x^T(i) Q_3 x(i) \quad (۱۰.۴)$$

$$V_3(k) = \sum_{i=-\alpha}^{-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} y^T(j) Z_1 y(j) + \sum_{i=-h_M}^{-1-\alpha} \sum_{j=k+i}^{k-i} y^T(j) Z_2 y(j) + \sum_{i=-h(k)}^{-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} y^T(j) Z_3 y(j) \quad (۱۱.۴)$$

که $\circ < \alpha < h_M$ یک پارامتر تنظیم است. دیفرانسل $\Delta V_i(k) = V_i(k+1) - V_i(k)$ را محاسبه LKF به دو زیر بازه نامساوی زیر تقسیم می‌شود: $[k-h_M, k-\alpha-1]$ و $[k-\alpha, k-1]$ و که در $[k-h_M, k-1]$ فاصله تأخیر $Z_i = Z_i^T > \circ (i=1, 2, 3)$ و $Q_i = Q_i^T \geq \circ, P = P^T > \circ$

می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 \Delta V_1(k) &= V_1(k+1) - V_1(k) = x^T(k+1)Px(k+1) \\
 &= [Ax(k) + Bx(k-h(k))]^T P [Ax(k) + Bx(k-h(k))] - x^T(k)Px(k) \\
 &= x^T(k)A^T P Ax(k) + x^T(k)A^T P Bx(k-h(k)) + x^T(k-h(k))B^T P Ax(k) \\
 &\quad + x^T(k-h(k))B^T P Bx(k-h(k)) - x^T(k)Px(k) \\
 &= x^T(k)[A^T P A - P]x(k) + x^T(k-h(k))B^T P Bx(k-h(k)) \\
 &\quad + \gamma x^T(k)A^T P Bx(k-h(k))
 \end{aligned}$$

(۱۲.۴)

$$\begin{aligned}
 \Delta V_\gamma(k) &= V_\gamma(k+1) - V_\gamma(k) \\
 V_\gamma(k+1) &= \sum_{i=k+1-\alpha}^k x^T(i)Q_i x(i) + \sum_{i=k+1-h_M}^{k-\alpha} x^T(i)Q_\gamma x(i) + \sum_{i=k+1-h(k)}^k x^T(i)Q_\gamma x(i) \\
 V_\gamma(k) &= \sum_{i=k-\alpha}^{k-1} x^T(i)Q_i x(i) + \sum_{i=k-h_M}^{k-1-\alpha} x^T(i)Q_\gamma x(i) + \sum_{i=k-h(k)}^{k-1} x^T(i)Q_\gamma x(i) \\
 \Delta V_\gamma(k) &= \sum_{i=k+1-\alpha}^k x^T(i)Q_i x(i) + \sum_{i=k+1-h_M}^{k-\alpha} x^T(i)Q_\gamma x(i) + \sum_{i=k+1-h(k)}^k x^T(i)Q_\gamma x(i) \\
 &\quad - \left[\sum_{i=k-\alpha}^{k-1} x^T(i)Q_i x(i) + \sum_{i=k-h_M}^{k-1-\alpha} x^T(i)Q_\gamma x(i) + \sum_{i=k-h(k)}^{k-1} x^T(i)Q_\gamma x(i) \right] \\
 \Delta V_\gamma(k) &= x^T(k)Q_i x(k) - x^T(k-\alpha)Q_i x(k-\alpha) + x^T(k-\alpha)Q_\gamma x(k-\alpha) \\
 &\quad - x^T(k-h_M)Q_\gamma x(k-h_M) + x^T(k)Q_\gamma x(k) - x^T(k-h(k))Q_\gamma x(k-h(k))
 \end{aligned}$$

(۱۳.۴)

$$\begin{aligned}
 \Delta V_\gamma(k) &= V_\gamma(k+1) - V_\gamma(k) \\
 V_\gamma(k+1) &= \sum_{i=-\alpha}^{-1} \sum_{j=k+i+1}^k y^T(j)Z_i y(j) + \sum_{i=-h_M}^{-1-\alpha} \sum_{j=k+i+1}^{k-i+1} y^T(j)Z_\gamma y(j) \\
 &\quad + \sum_{i=-h(k)}^{-1} \sum_{j=k+i+1}^k y^T(j)Z_\gamma y(j) \\
 V_\gamma(k) &= \sum_{i=-\alpha}^{-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} y^T(j)Z_i y(j) + \sum_{i=-h_M}^{-1-\alpha} \sum_{j=k+i}^{k-i} y^T(j)Z_\gamma y(j) \\
 &\quad + \sum_{i=-h(k)}^{-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} y^T(j)Z_\gamma y(j) \\
 \Delta V_\gamma(k+1) &= \sum_{i=-\alpha}^{-1} \sum_{j=k+i+1}^k y^T(j)Z_i y(j) + \sum_{i=-h_M}^{-1-\alpha} \sum_{j=k+i+1}^{k-i+1} y^T(j)Z_\gamma y(j)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=-h(k)}^{-1} \sum_{j=k+i+1}^k y^T(j) Z_{\uparrow} y(j) - \left[\sum_{i=-\alpha}^{-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} y^T(j) Z_{\downarrow} y(j) \right. \\
 & \left. + \sum_{i=-h_M}^{-1-\alpha} \sum_{j=k+i}^{k-i} y^T(j) Z_{\uparrow} y(j) + \sum_{i=-h(k)}^{-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} y^T(j) Z_{\uparrow} y(j) \right]
 \end{aligned}$$

$$\Delta V_{\uparrow}(k) = \sum_{i=-\alpha}^{-1} [y^T(k) Z_{\downarrow} y(k) - y^T(k+i) Z_{\downarrow} y(k+i)] \quad (14.4)$$

$$+ \sum_{i=-h_M}^{-1-\alpha} [y^T(k) Z_{\uparrow} y(k) - y^T(k+i) Z_{\uparrow} y(k+i)]$$

$$+ \sum_{i=-h(k)}^{-1} [y^T(k) Z_{\uparrow} y(k) - y^T(k+i) Z_{\uparrow} y(k+i)]$$

$$= \alpha y^T(k) Z_{\downarrow} y(k) - \sum_{i=-\alpha}^{-1} y^T(k+i) Z_{\downarrow} y(k+i) + (h_M - \alpha) y^T(k) Z_{\uparrow} y(k)$$

$$- \sum_{i=-h_M}^{-1-\alpha} y^T(k+i) Z_{\uparrow} y(k+i) + h(k) y^T(k) Z_{\uparrow} y(k) - \sum_{i=-h(k)}^{-1} y^T(k+i) Z_{\uparrow} y(k+i)$$

$$\Delta V_{\uparrow}(k) = y^T(k) [\alpha Z_{\downarrow} + (h_M - \alpha) Z_{\uparrow} + h(k) Z_{\uparrow}] y(k) - \sum_{m=k-\alpha}^{k-1} y^T(m) Z_{\downarrow} y(m) \quad (15.4)$$

$$- \sum_{m=k-h_M}^{k-1-\alpha} y^T(m) Z_{\uparrow} y(m) - \sum_{m=k-h(k)}^{k-1} y^T(m) Z_{\uparrow} y(m) \quad (16.4)$$

اکنون از رابطه (۲.۴) می‌دانیم که، برای هر $k \in \mathbb{Z}^+$ ، $h(k) \in [0, \alpha]$ یا $h(k) \in [\alpha + 1, h_M]$ است. دو مجموعه زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\Omega_{\downarrow} = \{k : h(k) \in [0, \alpha], k \in \mathbb{Z}^+\} \quad (17.4)$$

$$\Omega_{\uparrow} = \{k : h(k) \in [\alpha + 1, h_M], k \in \mathbb{Z}^+\} \quad (18.4)$$

در ادامه، ما تغییرات $\Delta V(k)$ برای موارد $k \in \Omega_{\downarrow}$ و $k \in \Omega_{\uparrow}$ بحث می‌کنیم.
حالت اول: برای $k \in \Omega_{\downarrow}$ ، یعنی $0 \leq h(k) \leq \alpha$.

$$\sum_{m=k-\alpha}^{k-1} y^T(m) Z_{\downarrow} y(m) = \sum_{m=k-\alpha}^{k-1-h(k)} y^T(m) Z_{\downarrow} y(m) + \sum_{m=k-h(k)}^{k-1} y^T(m) Z_{\downarrow} y(m) \quad (19.4)$$

$$\Delta V_{\uparrow}(k) = y^T(k) [\alpha Z_{\downarrow} + (h_M - \alpha) Z_{\uparrow} + h(k) Z_{\uparrow}] y(k) - \sum_{m=k-\alpha}^{k-1-h(k)} y^T(m) Z_{\downarrow} y(m) \quad (20.4)$$

$$- \sum_{m=k-h(k)}^{k-1} y^T(m) (Z_{\downarrow} + Z_{\uparrow}) y(m) - \sum_{m=k-h_M}^{k-1-\alpha} y^T(m) Z_{\uparrow} y(m)$$

چون $Z_1 + Z_2 > 0$ ، $h(k) \leq \alpha$ و $\alpha - h(k) \leq \alpha$ ، با استفاده از لم (۱.۲.۴)، داریم:

$$\begin{aligned} & - \sum_{m=k-h(k)}^{k-1} y^T(m)(Z_1 + Z_2)y(m) \\ & \leq \frac{-1}{h(k)} [x(k) - x(k-h(k))]^T (Z_1 + Z_2) [x(k) - x(k-h(k))] \\ & \leq \frac{1}{\alpha} x^T(k) (-Z_1 - Z_2)x(k) + \frac{1}{\alpha} x^T(k-h(k)) Z_1 x(k-\alpha) \\ & \quad + \frac{1}{\alpha} x^T(k-h(k)) (-Z_1 - Z_2)x(k-h(k)) \end{aligned} \quad (21.4)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{m=k-\alpha}^{k-1-h(k)} y^T(m) Z_1 y(m) \\ & \leq \frac{-1}{\alpha - h(k)} [x(k-h(k)) - x(k-\alpha)]^T Z_1 [x(k-h(k)) - x(k-\alpha)] \\ & \leq \frac{1}{\alpha} x^T(k-h(k)) (-Z_1)x(k-h(k)) + \frac{1}{\alpha} x^T(k-h(k)) Z_1 x(k-\alpha) \\ & \quad + \frac{1}{\alpha} x^T(k-\alpha) (-Z_1)x(k-\alpha) \\ & - \sum_{m=k-h_M}^{k-1-\alpha} y^T(m) Z_2 y(m) \\ & \leq \frac{-1}{h_M - \alpha} [x(k-\alpha) - x(k-h_M)]^T Z_2 [x(k-\alpha) - x(k-h_M)] \\ & \leq \frac{1}{h_M - \alpha} x^T(k-\alpha) (-Z_2)x(k-\alpha) + \frac{1}{h_M - \alpha} x^T(k-\alpha) Z_2 x(k-h_M) \\ & \quad + \frac{1}{h_M - \alpha} x^T(k-h_M) (-Z_2)x(k-h_M) \end{aligned} \quad (22.4)$$

با ترکیب کردن رابطه‌های (۱۲.۴) - (۲۳.۴) رابطه زیر را می‌سازد:

$$\Delta V(k) \leq \zeta^T(k) \hat{\Phi} \zeta(k)$$

$$\hat{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} + (A-I)^T U_1 (A-I) & \hat{\Phi}_{12} + (A-I)^T U_1 B & 0 & 0 \\ * & \hat{\Phi}_{22} + B^T U_1 B & \hat{\Phi}_{23} & 0 \\ * & * & \hat{\Phi}_{33} & \hat{\Phi}_{34} \\ * & * & * & \hat{\Phi}_{44} \end{bmatrix} \quad (24.4)$$

$$\zeta(k) = [x^T(k) \quad x^T(k-h(k)) \quad x^T(k-\alpha) \quad x^T(k-h_M)]^T$$

واضح است که، برای $k \in \Omega_1$ ، اگر $\hat{\Phi} < 0$ باشد آن‌گاه $\Delta V(k)$ است. با استفاده از لم شور روی $\hat{\Phi}$ ، ماتریس Φ را به دست می‌آوریم:

$$\hat{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} + (A-I)^T U_1 (A-I) & \hat{\Phi}_{12} + (A-I)^T U_1 B & 0 & 0 \\ * & \hat{\Phi}_{22} + B^T U_1 B & \hat{\Phi}_{23} & 0 \\ * & * & \hat{\Phi}_{33} & \hat{\Phi}_{34} \\ * & * & * & \hat{\Phi}_{44} \end{bmatrix} < 0$$

بعد از جداسازی

$$\hat{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \circ & \circ \\ * & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \circ \\ * & * & \Phi_{33} & \Phi_{34} \\ * & * & * & \Phi_{44} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (A-I)^T \\ B^T \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix} U_1 U_1^{-1} U_1 \begin{bmatrix} A-I & B & \circ & \circ \end{bmatrix} < \circ$$

$$\hat{\Phi} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \circ & \circ \\ * & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \circ \\ * & * & \Phi_{33} & \Phi_{34} \\ * & * & * & \Phi_{44} \end{bmatrix}}_A + \underbrace{\begin{bmatrix} (A-I)^T U_1 \\ B^T U_1 \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix}}_{B^T} \underbrace{U_1^{-1}}_{c^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} U_1(A-I) & U_1 B & \circ & \circ \end{bmatrix}}_B < \circ$$

حال لم شور را اعمال می‌کنیم:

$$A + BC^{-1}B^T < \circ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A & B^T \\ B & -c \end{bmatrix} < \circ$$

$$\Rightarrow \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \circ & \circ & (A-I)^T U_1 \\ * & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \circ & B^T U_1 \\ * & * & \Phi_{33} & \Phi_{34} & \circ \\ * & * & * & \Phi_{44} & \circ \\ * & * & * & * & -U_1 \end{bmatrix} < \circ$$

با استفاده از لم شور به آسانی می‌توان دید که $\Delta V(k) < \circ$ برقرار است اگر $\Phi < \circ$ و $h(k) \in [\circ, \alpha]$.
حالت دوم: به طور مشابه برای $k \in \Omega_2$ ، یعنی $\alpha + 1 \leq h(k) \leq h_M$ ، با استفاده از لم شور، به سادگی می‌توان دید که $\Delta V(k) < \circ$ برقرار است اگر $\Psi < \circ$.
 از بحث بالا، ما می‌توانیم ببینیم که برای همه $k \in \mathbb{Z}^+$ اگر (۶.۴) - (۷.۴) برقرار باشند، $\Delta V(k) < \circ$ ، که اثبات کامل می‌شود. \square

۲.۲.۴ الگوریتم یافتن α

تبصره ۱.۲.۴. قضیه (۱.۲.۴) یک نتیجه پایدار وابسته به کران بالای تأخیر h_M ارائه می‌دهد. شرایط قضیه (۱.۲.۴) بر حسب LMI بیان شده است و بنابراین می‌توان به آسانی با نرم افزارهای عددی بررسی شود.

تبصره ۲.۲.۴. فاصله تأخیری $[k - h_M, k - 1]$ در ID-D LKF به دو زیربازه نامساوی زیر تقسیم می‌شود: $[k - h_M, k - \alpha - 1]$ و $[k - \alpha, k - 1]$ ، که $\circ < \alpha < h_M$ پارامتر تنظیم است.

در نتیجه، ماتریس‌های آزاد وزن در توابع لیپانوف در زیربازه‌های مختلف استفاده می‌شود و اطلاعاتی که داخل حالت تأخیر یافته $x(k - \alpha)$ است می‌توان به صورت کامل در نظر گرفته شود، یعنی با تقسیم زیربازه اطلاعات بیشتری از سیستم داریم. به علاوه، با استفاده از زیربازه‌ها و لم (۱.۲.۴) کران بالای بعضی از جمله‌هایی که در $\Delta V_2(k)$ هستند نسبت به حالتی که از روش‌های قبلی استفاده می‌شود به صورت دقیق‌تری تخمین زده می‌شوند. تأخیر $h(k)$ روی بازه $0 \leq h(k) \leq h_M$ را می‌توان به دو زیربازه با محافظه‌کاری کمتر به طوریکه α و h_M کران‌های بالای این دو بازه باشند تقسیم کرد. بنابراین بازه تأخیر به دو زیربازه $0 \leq h(k) \leq \alpha$ و $0 < h(k) \leq h_M$ تقسیم می‌شود.

بنابراین روش تجزیه ارائه شده در قضیه (۱.۲.۴) می‌تواند بیشترین کران بالای مجاز MAUB را افزایش دهد.

یک الگوریتم برای جستجوی مقادیر متناظر α ($0 < \alpha < h_M$) مربوط به (۶.۴) – (۷.۴) ارائه شده است به طوری که بیشترین کران بالای مجاز h_M را می‌توان به آسانی می‌توان بدست آورد. الگوریتم:

- گام اول. $h = 0$ و $\alpha = 0$ در نظر می‌گیریم.
- گام دو. $h = h + 1$.
- گام سه. $\alpha = \alpha + 1$.
- گام چهار. اگر نامساوی (۶.۴) – (۷.۴) امکان‌پذیر^۱ باشد، سپس $\alpha_m = \alpha$ ، $\alpha = 0$ و به گام دو می‌رویم؛ در غیر این صورت به گام پنج می‌رویم.
- گام پنجم. اگر $\alpha = h - 1$ ؛ در غیر این صورت، به گام سه می‌رویم.
- گام شش. بیشترین تأخیر $h_M = h - 1$ و کمترین مقدار پارامتر تنظیم α_m است.

۳.۴ مثال‌های عددی

در این بخش، مثال‌هایی ارائه شده‌است. نتایج بدست آمده با نتایج قبلی که با روش‌های دیگر به دست آمده است مقایسه شده‌است.

مثال ۱.۳.۴. سیستم (۱.۴) با تأخیر متغیر زمان $h(k)$ که در رابطه (۲.۴) در نظر بگیرید و

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ -0.1 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \{0.91, 0.97\}$$

حالت اول ($\lambda = 0.91$). این سیستم در [۲۳] و [۳۵] در نظر گرفته شده است. جدول (۲.۴) لیستی از حداکثر کران بالای مجاز تأخیر بدست آمده از قضیه (۱.۲.۴) است. برای مقایسه، نتایجی از [۲۳، ۳۵] در جدول آمده‌است. واضح است که قضیه (۱.۲.۴) باعث نتایج بهتری شده‌است.

مقایسه کران بالای مجاز تأخیر براساس روش‌های متفاوت برای $\lambda = 0.91$	
h_M	روش
۴۱	[۲۳]
۴۲	نتیجه [۳۵]
$\alpha = 19, \dots, 30$ برای ۴۶	قضیه (۱.۲.۴)

جدول ۱.۴: کران بالای مجاز تأخیر

Example 1

lambda = 0.91;

A = [0.8 0; 0 lambda];

B = [-0.1 0; -0.1 -0.1];

alpha = 19;

h = 46;

[flag,P,Q1,Q2,Q3,Z1,Z2,Z3] = stojanovic(A,B,h,
alpha)

$$P = \begin{bmatrix} 467.97 & 7.0141 \\ 7.0141 & 7.3824 \end{bmatrix} \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 29.505 & -0.21734 \\ -0.21734 & 0.0001188 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 16.167 & 0.11977 \\ 0.11977 & 0.57792 \end{bmatrix} \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 108.95 & 1.392 \\ 1.392 & 0.71706 \end{bmatrix}$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 1.5812 & 0.27156 \\ 0.27156 & 1.2682 \end{bmatrix}$$

$$Z_2 = \begin{bmatrix} 1.3469 & 0.64176 \\ 0.64176 & 1.5488 \end{bmatrix}$$

$$Z_3 = \begin{bmatrix} 0.67669 & 0.11976 \\ 0.11976 & 0.45541 \end{bmatrix}$$

مقایسه کران بالای مجاز تأخیر براساس روش‌های متفاوت برای $\lambda = 0.97$	
h_M	روش
۴	قضیه یک [۱۲]
۸	قضیه سه [۱۱]
۸	لم دو [۱۰]
۱۰	قضیه یک [۴]
$\alpha = 9, 10, 11$ برای ۱۷	قضیه (۱.۲.۴)

جدول ۲.۴: کران بالای مجاز تأخیر

%%%% Example 1 %%%%%%%%%

lambda = 0.97;

A = [0.8 0;0 lambda];

B = [-0.1 0;-0.1 -0.1];

alpha = 11;

h = 46;

[flag,P,Q1,Q2,Q3,Z1,Z2,Z3] = stojanovic(A,B,h,alpha)

$$P = \begin{bmatrix} 1,2802e+8 & -1,8848e-9 \\ -1,8848e-9 & 1,1594e-16 \end{bmatrix} \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 1,0647e+08 & -3,9344e-10 \\ -3,9344e-10 & -3,9819e-18 \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 6,2344e+07 & -2,3089e-10 \\ -2,3089e-10 & 1,3382e-18 \end{bmatrix}$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 9,7176e+7 & 1,377e-10 \\ 1,377e-10 & 2,0154e-17 \end{bmatrix} \quad Z_1 = \begin{bmatrix} 1,6901e+07 & 2,8229e-09 \\ 2,8229e-09 & 1,5079e-16 \end{bmatrix}$$

$$Z_2 = \begin{bmatrix} 4,7051e+6 & 3,3223e-10 \\ 3,3223e-10 & 1,0413e-17 \end{bmatrix} \quad Z_3 = \begin{bmatrix} 3,7174e+06 & -1,3975e-09 \\ -1,3975e-09 & 1,5021e-17 \end{bmatrix}$$

۴.۴ نتیجه گیری

نتیجه ۱.۴.۴. در این پایان نامه مسئله بدست آوردن شروط پایداری وابسته به تأخیر برای کلاسی از سیستم‌های دارای تأخیر غیر صفر مورد بررسی قرار گرفته است. یک تابع لیاپانوف-کراسوفسکی وابسته به تأخیر محاسبه شده است با استفاده از تقسیم بازه تأخیر به دو تا زیر بازه نامساوی که یک پارامتر تنظیم α دارد. ماتریس‌های وزنی آزاد و تبدیل مدل برای محاسبه این شروط وابسته به تأخیر استفاده نشده با این همه به جواب‌های خوبی رسیده است. مثال‌های عددی نشان می‌دهند روش ارائه شده در مقایسه با روش‌های که در مراجع وجود دارد دارای محافظه کاری کمتری است بنابراین به ماکزیمم تأخیر قابل قبول می‌رسیم.

پیوست ضمیمه

۱.آ برنامه‌های کامپیوتری

برنامه مثال فصل سوم

```
% Given an n by m matrix B , an n by n matrix A
% This program obtains :
% (1)- The Standard form
% (2)- The primary vector companion form
% (3)- The feedback matrix F
% (4)- The transformation matrix T
% (5)- The Kronecker invariants
% *****
%
clear all;close all;clc
A =
    [16,-12,11,3,3;5,1,3,0,1;-26,20,-18,-5,-5;0,0,0,0,0;0,0,0,0,0];
```

```

B = [0,0;0,0;0,0;1,0;0,1];

t0=cputime;
disp('          This is the given plant matrix A')          %line
    1
disp('          *****')                                  %line
    2
A                                          %line 3
disp('          This is the given input matrix B')          %line
    4
disp('          *****')                                  %line
    5
B                                          %line 6
[n,m]=size(B);                                  %line
    7
r=n+m;
Q=[B,A];
T1=eye(n);                                      %line
    10
% The Echelon form of Q
% -----
i=1;j=1; tol=1e-6;
while ( i<=n ) & ( j<=r )
[q,k]=max(abs(Q(i:n,j))) ; k=k+i-1;
if (q<=tol)
Q(i:n,j)=zeros(n-i+1,1);
j=j+1;
else
% perform the similarity operations
% swap i-th row with k-th row:

o1
% divide the pivot row

```

```

o2
% subtract multiples of the pivot row

o3
i=i+1 ;
j=j+1;
end
end
% *****
% Now compute the Standard echelon form      !
% -----
s=1;
while s < n
i=s+1 ;
for j=i:r
if Q(i,j)~=0
for k=1:s
if Q(k,j)~=0
t=Q(k,j);
Q(k,:)=Q(k,:)-t*Q(i,:);
T1(k,:)=T1(k,:)-t*T1(i,:);
Q(:,i+m)=Q(:,i+m)+t*Q(:,k+m);
end
end
break
end
end
s=s+1;
end
%
*****

%      choice=input(' do you want the kronecker invariants
displayed,y/n %','s')

```

```

%      if choice=='y'
kronk3
%      end
%
*****

% The vector companion form
for i=n:-1:m+1
for k=i:r
if Q(i,k)==1
for j=k+1:r
t=Q(i,j);
Q(:,j)=Q(:,j)-t*Q(:,k);
Q(k-m,:)=Q(k-m,:)+t*Q(j-m,:);
T1(k-m,:)=T1(k-m,:)+t*T1(j-m,:);
end
break
end
end
end
%
*****

% choice=input('do you want the prim. vec comp form displayed,y/
n%','s')
%      if choice=='y'
%      disp('      The standard Vector Companion form ')
%      disp('      ***** ')
Q
%      end
% .....
disp('      This is the transformation matrix,T1')
disp('      ***** ')

```



```

T1
%
%           disp(' press any key to continue')
% *****
% pause
% The Feed-back matrix , F
B1=Q(:, [1:m]); A1=Q(:, [m+1:r])
B0=Q(1:m, 1:m); bo=inv(B0)
G=Q(1:m, m+1:r); F1=-bo*G; G0=G;
Fp=F1*T1;
% *****
disp('          This is the primdry feedback law ')
disp('          ***** ')

Fp
% *****
%disp('          The closed loop matrix A+B*F ')
%disp('          ***** ')
gama=A+B*Fp
% *****
%choice=input(' do you want to check the resultfeed,y/n ','s')
%if choice=='y'
%   g=gama^p(1);
%   for i=1:n
%       for j=1:n
%           if abs(g(i,j))<tol
%               g(i,j)=0;
%           end
%       end
%   end
% end
%end
%fprintf('          This is g=(A+B*F)^%g', p(1))
%disp('          ***** ')
%g
% *****

```

```

% generating parametric feed-back laws
%     q=fix(n/m);
%     if p(1)==q
%         disp('          The feed-back law is unique ! ')
%         disp('          ***** ')
%         disp('          The kronecker invariants are all
equal ')
%disp('          ***** ')
%     else
%         allfeeds
%     end
% *****
t1=cputime-t0

```

برنامہ مثال (۱.۳.۴)

```

% This function evaluates the feasibility of LMIs
% (3.4) and (4.4) for given matrices A and B and
% parameters hM and alpha
function flag = stojanovic(A,B,hM,alpha)

```

```

nx = size(A,1);

P = sdpvar(nx,nx); Q1 = sdpvar(nx,nx);
Q2 = sdpvar(nx,nx); Q3 = sdpvar(nx,nx);
Z1 = sdpvar(nx,nx);
Z2 = sdpvar(nx,nx); Z3 = sdpvar(nx,nx);

U1 = alpha*Z1+(hM-alpha)*Z2+alpha*Z3;
U2 = alpha*Z1+(hM-alpha)*Z2+hM*Z3;
phi11 = A'*P*A-P+Q1+Q3-(Z1+Z3)/alpha;
phi12 = A'*P*B+(Z1+Z3)/alpha;
phi15 = (A-eye(nx))'*U1;
phi22 = B'*P*B-Q3-(2*Z1+Z3)/alpha;
phi23 = Z1/alpha;

```

```

phi25 = B'*U1;
phi33 = -Q1+Q2-Z1/alpha-Z2/(hM-alpha);
phi34 = Z2/(hM-alpha);
phi44 = -Q2-Z2/(hM-alpha);
phi55 = -U2;
zz = zeros(nx);
phi = [phi11  phi12      zz      zz phi15;...
phi12' phi22  phi23      zz phi25;...
zz  phi23' phi33  phi34      zz;...
zz      zz  phi34' phi44      zz;...
phi15' phi25'      zz      zz phi55];
si11 = phi11;
si12 = A'*P*B;
si13 = (Z1+Z3)/alpha;
si15 = (A-eye(nx))'*U2;
si22 = B'*P*B-Q3-(2*Z2+Z3)/(hM-alpha);
si23 = (Z2+Z3)/(hM-alpha);
si24 = Z2/(hM-alpha);
si25 = B'*U2;
si33 = -Q1+Q2-(Z1+Z3)/alpha-(Z2+Z3)/(hM-alpha);
si44 = -Q2-Z2/(hM-alpha);
si55 = -U2;
si = [si11  si12  si13  zz si15;...
si12' si22  si23 si24 si25;...
si13' si23' si33  zz  zz;...
zz  si24'  zz si44  zz;...
si15' si25'  zz  zz si55];
Constraints = [ P>=0 ]+...
[ Q1>=0 ]+[ Q2>=0 ]+[ Q3>=0 ]+...
[ Z1>=0 ]+[ Z2>=0 ]+[ Z3>=0 ]+...
[ phi<=0 ]+[ si<=0 ];
options = sdpsettings('verbose',0);
solK=optimize(Constraints,[],options);
Pv=value(P);

```

```

Q1v=value(Q1);Q2v=value(Q2);Q3v=value(Q3);
Z1v=value(Z1);Z2v=value(Z2);Z3v=value(Z3);

%%%%%%%%%% checking feasibility %%%%%%%%%%%

U1v = alpha*Z1v+(hM-alpha)*Z2v+alpha*Z3v;
U2v = alpha*Z1v+(hM-alpha)*Z2v+hM*Z3v;
phi11v = A'*Pv*A-Pv+Q1v+Q3v-(Z1v+Z3v)/alpha;
phi12v = A'*Pv*B+(Z1v+Z3v)/alpha;
phi15v = (A-eye(nx))'*U1v;
phi22v = B'*Pv*B-Q3v-(2*Z1v+Z3v)/alpha;
phi23v = Z1v/alpha;
phi25v = B'*U1v;
phi33 = -Q1v+Q2v-Z1v/alpha-Z2v/(hM-alpha);
phi34v = Z2v/(hM-alpha);
phi44v = -Q2v-Z2v/(hM-alpha);
phi55v = -U2v;

phiv = [phi11v phi12v zz zz phi15v;...
phi12v' phi22v phi23v zz phi25v;...
zz phi23v' phi33 phi34v zz;...
zz zz phi34v' phi44v zz;...
phi15v' phi25v' zz zz phi55v];

si11v = phi11v;
si12v = A'*Pv*B;
si13v = (Z1v+Z3v)/alpha;
si15v = (A-eye(nx))'*U2v;
si22v = B'*Pv*B-Q3v-(2*Z2v+Z3v)/(hM-alpha);
si23v = (Z2v+Z3v)/(hM-alpha);
si24v = Z2v/(hM-alpha);
si25v = B'*U2v;
si33v = -Q1v+Q2v-(Z1v+Z3v)/alpha-(Z2v+Z3v)/(hM-alpha);
si44v = -Q2v-Z2v/(hM-alpha);

```

```

si55v = -U2v;

siv = [si11v  si12v  si13v  zz  si15v;...
si12v'  si22v  si23v  si24v  si25v;...
si13v'  si23v'  si33v  zz  zz;...
zz  si24v'  zz  si44v  zz;...
si15v'  si25v'  zz  zz  si55v];

if max(eig(phiv))<0 && max(eig(siv))<0 && min(eig(Pv))
    >=0 && min(eig(Q1v))>=0 && min(eig(Q2v))>=0 && min(
    eig(Q3v))>=0 && min(eig(Z1v))>=0 && min(eig(Z2v))>=0
    && min(eig(Z3v))>=0
flag = 1;
else
flag = 0;
end

end

%%%%%% Example 1 %%%%%%%%%%
lambda = 0.91;
A = [0.8 0;0 lambda];
B = [-0.1 0;-0.1 -0.1];

for h = 2:100
temp = 0;
for alpha = 1:h-1
if stojanovic(A,B,h,alpha)==1
alfa = alpha;
break
end
if alpha == h-1
temp = 1;
end
end
end

```

```
if temp == 1
    alpham = alfa;
    hM = h-1;
    break
end
end
alpham
hM
```

برنامه مثال (??)

```
%%%%% Example 1 %%%%%%%%%%
lambda = 0.97;
A = [0.8 0;0 lambda];
B = [-0.1 0;-0.1 -0.1];
for h = 2:100
    temp = 0;
    for alpha = 1:h-1
        if stojanovic(A,B,h,alpha)==1
            alfa = alpha;
            break
        end
    end
    if alpha == h-1
        temp = 1;
    end
end
if temp == 1
    alpham = alfa;
    hM = h-1;
    break
end
end
alpham
hM
```

نام	نماد
معادلات دیفرانسیل تابعی	$FDEs$
معادلات دیفرانسیل معمولی	$ODEs$
معادلات دیفرانسیل تأخیری	$TDEs$
روش کنترل تأخیری زمانی	TDC
تغییر ناپذیر با زمان	LTI
تابعک لیاپانوف - کراسوفسکی	LKF
نامساوی مثلثی خطی	LMI
تابع لیاپانوف - کراسوفسکی درجه دو	$CQLF$
درجه ورودی متوسط	d
حداکثر کران بالای مجاز	$MAUB$
فاصله تأخیر وابسته به تابع لیاپانوف - کراسوفسکی	$ID - DLKF$
پارامتر تنظیم	α
کران بالای تأخیر	h_M
ماتریس معین مثبت	P
ترانهاده	T
عناصر متقارن	*

جدول ۱.آ: نمایه

مراجع

- [۱] احسنی تهرانی ح (۱۳۷۹)، پایان نامه ارشد: "تخصیص مقادیر ویژه پس خورد حالت پارامتری غیر صریح و کاربردهای آن"، دانشکده ریاضی، دانشگاه یزد،
- [۲] خاکی صدیق ع، (۱۳۸۶) "اصول کنترل مدرن"، جلد اول، چاپ چهارم، انتشارات دانشگاه تهران، صص ۴۱-۴۰
- [3] Boukas E.K. (2006), "Discrete-time systems with time-varying time delay stability and stabilizability", **Mathematical Problems in Engineering**, Article ID 42489, 1-10.
- [4] Chen K.F. and Fong I-K (2008) , "Stability of discrete-time uncertain systems with a time-varying state delay", **Proc. IMechE, Part I: J. Systems and Control Engineering**, 493-500, 222.
- [5] Choi S.B, Hedrick J.K.(1991) "An Observer-Based Controller Design Method for Improving Air Characterization of Spark Ignition Engines", **Control Sys.**
- [6] Fridman E. (2014), "**Introduction to Time-Delay Systems**", Tel Aviv University.
- [7] Fridman E.(2001), "New Lyapunov–Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems", **Systems and Control Letters**, 43 ,309–319.
- [8] Fridman E. and Shaked U.(2002) , "A descriptor system approach to H_∞ control of linear time-delay systems", **IEEE Transactions on Automatic Control**, 47(2), 253-270.
- [9] Fridman E. and Shaked U.(2002), "control of linear state delay descriptor systems: an LMI approach", **Linear Algebra and Its Applications**, 351–352, 271–302.
- [10] Fridman E. and Shaked U.(2005), "Delay-Dependent H_∞ Control of Uncertain Discrete Delay Systems", **European Journal of Control**, 11 , 29-37.
- [11] Fridman E. and Shaked U.(2005), "Stability and guaranteed cost control of uncertain discrete delay systems", **International Journal of Control**, 78(4), 235-246.

- [12] Gao H., Lam J. and Wang Y.(2004), "Delay-dependent output-feedback stabilization of discretetime systems with time-varying state delay", **IEE Proc.: Control Theory Applications**, 151(6),691-698.
- [13] Gao H. and Chen T.(2007),"New results on stability of discrete-time systems with time-varying state delay", **IEEE Transactions on Automatic Control**, 52, 328–334 .
- [14] Hale JK.(1977), "**Theory of Functional Differential Equations**", Springer Verlag.
- [15] Dembrine M.,Gouaisbaut F., Perruquetti W., Richard J.P.(1998), "Robustness of Slidng Mode Cntrol under Delays Effects: A Case Study", **IEEE-IMACS Conf.CESA'98,Computational Engineering in Systems Applications**,817-821.
- [16] Hale JK. and Lunel SMV.(1993),"**Introduction to functional differential equations**".Springer, New York.
- [17] Han Q.L. and Yue D.(2007) ," Absolute stability of Lur'e systems with time-varying delay", **IET Control Theory**, 1(3), 854–859.
- [18] He Y., Wu M., She J.H. and Liu G.P.(2004), "Parameter-dependent Lyapunov functional for stability of time-delay systems with polytopic-type uncertainties", **IEEE Transactions on Automatic Control**, 49, 828–832.
- [19] Jiang X., Han Q.L. and Yu X.H.(2005)," Stability criteria for linear discrete-time systems with interval-like time-varying delay", Proc. American Control Conference,**New Orleans, USA**, 2817–2822.
- [20] Karbassi S.M. and Bell D.J.(1993), " Parametric time optimal control of linear discrete-time systems by state feedback-Part1:Regular Kronecker invariants", **Int. J.Control**,**57**,817-830.
- [21] Karbassi S.M. and Tehrani H.A.(2002), "Parameterizations of the state feedback controllers for linear multivariable systems",**Comp. Maths. with Appl.** ,44 ,1057-1065.
- [22] Krasovskii N. (1959, 1963),"**Stability of motion**", Stanford University Press, Redwood City. (in Russian)
- [23] Lee Y.S. and Kwon W.H.(2002), "Delay-dependent robust stabilization of uncertain discrete-time state-delayed systems", Proc."**15thIFAC World Congr**, 15(1): Barcelona, Spain .

-
- [24] Leite V. and Miranda M.(2008), "Robust Stabilization of Discrete-Time Systems with Time-Varying Delay"**An LMI Approach, Mathematical Problems in Engineering**,: Article ID 876509, 15 pages.
- [25] Liu X.G., Martin R.R., Wu M.and L. Tang M.(2006)," Delay-dependent robust stabilization of discrete-time systems with time-varying delay",**IEE Proc.: Control Theory and Applications**, 153(6), 689–702.
- [26] Mahmood M.S.(2000), "Robust control and filtering for time-delay systems",**Marcel-Dekker, New York**,.
- [27] Moon Y.S., Park P. and Kwon W.H.(2001)," Robust stabilization of uncertain input-delayed systems using reduction method",**Automatica**, 37, 307–312.
- [28] Park P. and Ko J.W.(2007), "Stability and robust stability for systems with a time-varying delay", **Automatica**, 43, 1855–1858.
- [29] Stojanovic S.B.,Debeljkovic D.LJ.,Dimitrijevic N.(2012),"Stability of Discrete-Time Systems with Time-Varying Delay: Delay Decomposition Approach",**Int j Comput Commun,Issn 1841-9836**,4,776-784.
- [30] Shustin E. and Fridman E.(2007), "On delay-derivative-dependent stability of systems with fastvarying delays",**Automatica**, 43, 1649–1655.
- [31] Razumikhin B.(1956),"On the stability of systems with a delay, Prikl Math Mech 20 ,500–512. (Russian)
- [32] Richard P. and Dambrine M. and Gouasibaut F. and Perruquetti W. "Syatems With Delays : An Overview of Some Recent Advances",**SACTA, vol. 1, No. 1**, 1-11, 1111.
- [33] Wu M., He Y., She J.H. and Liu G.P.(2004)," Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems",**Automatica**, 40,1435–1439.
- [34] Xu S. and Lam J.(2005), "Improved Delay-dependent Stability Criteria for time-delay systems", **IEEE Transactions on Automatic Control**, 50(3), 384-387.
- [35] Xu S., Lam J. and Zou Y.(2005), "Improved conditions for delay-dependent robust stability and stabilization of uncertain discrete time-delay systems",**Asian Journal of Control**, 7(3), 344- 348.

- [36] Yue D. and Han Q.L.(2004), "A delay-dependent stability criterion of neutral systems and its application to a partial element equivalent circuit model",**IEEE Transactions on Circuits and Systems-II**, 51(12), 685–689.
- [37] Yue D., Tian E. and Zhang Y.(2009) , "A piecewise analysis method to stability analysis of linear continuous/discrete systems with time-varying delay", **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, 19, 1493–1518.
- [38] Zhang X.M. and Han Q.L.(2009), "A delay decomposition to delay-dependent stability for linear systems with time-varying delays",**International Journal of Robust and Nonlinear Control**, 19, 1922–1930.
- [39] Zhu X.L. and Yang G.H.(2010), "New results of stability analysis for systems with time-varying delay",**International Journal of Robust and Nonlinear Control** 20, 596–606.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Input vector	بردار ورودی
Stability	پایداری
Asymptotically stable	پایداری مجانبی
Continuous-time	پیوسته-زمانی
Feedback	پس‌خورد
Assignment	تخصیص
Variation	تغییرات
Time-delay	تأخیر-زمانی
Globally	جامع
Multi-input	چند ورودی
Multi-output	چند-خروجی
Equilibrium state	حالت تعادل
Open-loop	حلقه-باز
Closed-loop	حلقه-بسته
Subintervals	زیر بازه
Eigenspectrum	طیف ویژه
interval	فاصله
Controllability	کنترل پذیری
Discrete-time	گسسته-زمانی
State weighting matrix	ماتریس وزن حالت
Free-weighting matrix	ماتریس وزن آزاد
Lyapunov matrix	معادله‌ی لیاپانوف
Augmented matrix	ماتریس افزوده
Conservative	محافظه‌کاری
Positive definite	معین مثبت
Robust	مقاوم

Desired	مطلوب
Time invariant	ناورادای زمانی
matrix inequality	نامساوی مثلثی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Assignment	تخصیص
Asymptotically stable	پایداری مجانبی
Augmented matrix	ماتریس افزوده
Closed-loop	حلقه بسته
Continuous-time	پیوسته زمانی
Controllability	کنترل پذیری
Conservative	محافظه کاری
Desired	مطلوب
Discrete-time	گسسته زمانی
Eigenspectrum	طیف ویژه
Equilibrium state	حالت تعادل
Feedback	پس خورد
Free-weighting matrix	ماتریس وزن آزاد
Globally	جامع
Input vector	برداری ورودی
interval	فاصله
Lyapunov matrix	معادله لیاپانوف
matrix inequality	نامساوی مثلثی
Multi-input	چند ورودی
Multi-output	چند خروجی
Open-loop	حلقه باز
Positive definite	معین مثبت
Robust	مقاوم
Stability	پایداری
State weighting matrix	ماتریس وزنی حالت
Subintervals	زیر بازه

Time invariant	ناوردای زمانی
Time-delay	تأخیر- زمان
Variation	تغییرات

Abstract

In this thesis, we intend to stabilize the delay system using the decomposition method. Using the decomposition approach, the time-delay interval is divided into two unequal intervals by the parameter α is set. We define a new delayed Lyapunov-Krasovskii function for obtaining a linear matrix inequality, which leads to a decrease in conservatism on the maximum boundary of the time delay.

keywords: Time delay system, direct Lyapunov method, Lyapunov-Krasovsky method, Lyapunov-Razumykhin method, linear matrix inequality, comonomer form, Kronecker invariance, variable delay time with time, asymptotic stability, delayed stability



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Partial Differential equations

**Stability of time delay systems with a time
varying delay**

By: Parvane Jamali

Supervisor

Hojat ahsani tehrani

Advisor

Mehdi Ghovatmand

Jan 2018