بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

روش‌هایی برای حل مسائل بهینه‌سازی خطی تماماً فازی

نگارنده: راضیه عربخانی

استادان راهنما

دکتر جعفر فتحعلی

دکتر فرخ فروهنده

استاد مشاور

دکتر مهرداد غزنوی

دی ۱۳۹۶

شماره:
تاریخ:

باسمه‌تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود
مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم **راضیه عربخانی** با شماره دانشجویی **۹۴۱۲۱۸۴** رشته ریاضی کاربردی گرایش تحت عنوان **روش هایی برای حل مسائل بهینه سازی خطی تماماً فازی** که در تاریخ **۹۶/۱۰/۲۵** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه: عالی) ☐ **مردود ☐**

نوع تحقیق: نظری ■ **عملی ☐**

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱- استادراهنمای اول	دکتر جعفر فتحعلی	دانشیار	
۲ـ استادراهنمای دوم	دکتر فرخ فروهنده	استادیار	
۳- استاد مشاور	دکتر مهرداد غزنوی	استادیار	غزنوی
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر ابراهیم هاشمی	استاد	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر محمدهادی نوری اسکندری	استادیار	نوری اسکندری
۶ـ استاد ممتحن دوم	دکتر سمیه مغاری	استادیار	مغاری

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده: ۹۶/۱۰/۲۵

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده ریاضی

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم به پدر و مادر عزیزم و همسر مهربانم

سپاس و ستایش مر خدای را جل و جلاله که آثار قدرت او بر چهره روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درفشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید.

ازاستاد، گرامیم جناب آقای دکتر جعفر فتحعلی بسیار سپاسگذارم چرا که بدون راهنماییهای ایشان تامین این پایان نامه بسیار مشکل می‌نمود.

ازاستاد، ارجمند جناب آقای دکتر مهرداد غزنوی به دلیل یاریها و راهنماییهای بی چشمداشت ایشان که بسیاری از سختیها را برایم آسانتر نمودند، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

در پایان از زحمات پدر و مادر بزرگوارم که در طول مدت زندگی و تحصیل همواره مرا یاری نموده‌اند و با تمام مشکلات موجود همواره مشوق من برای ادامه تحصیل بوده‌اند و نیز از زحمات همسر مهربانم که همیشه و همه حال در کنار من بوده، تقدیر و تشکر می‌نمایم.

راضیه عربخانی

دی۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب **راضیه عربخانی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **روش‌هایی برای حل مسائل بهینه‌سازی خطی تماماً فازی** ، تحت راهنمایی **جعفر فتحعلی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچجا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ‘‘ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

راضیه عربخانی
دی۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

نظریه مجموعه‌های فازی در بسیاری از زمینه ها از قبیل تحقیق در عملیات، نظریه کنترل، علوم مدیریت و ... کاربرد دارد. به ویژه یکی از کاربردهای این نظریه در مسائل تصمیم‌گیری مسائل برنامه‌ریزی خطی با اعداد فازی است. مدلسازی و حل مسائل بهینه‌سازی یکی از مهم‌ترین مسائل روز می‌باشد. باتوجه به ماهیت داده‌ها که در دنیای واقعی نادقیق و مبهم است، مسئله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی یک ابزار قدرتمند برای مدلسازی مسئله بهینه‌سازی خواهد بود.

در این پایان‌نامه به بررسی برخی روش‌ها برای حل مسائل بهینه‌سازی کاملاً فازی پرداخته شده است. یکی از روش‌های حل این مسائل قاعده الفبایی و حل تقریبی فازی است. با استفاده از مفهوم اعداد مثلثی فازی متقارن یک رویکرد برای غیر فازی کردن یک کمیت فازی کلی ارائه شده است. سپس یک روش جدید برای پیدا کردن جواب بهینه فازی مسائل برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی با محدودیت‌های نامساوی مورد بررسی قرار گرفته است. هم‌چنین روشی دیگر برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی با محدودیت های منعطف براساس یک رابطه‌ی ترتیبی جدید مطرح شده است. در این روش سه الگوریتم با تبدیل آن‌ها به برخی مسائل برنامه‌ریزی خطی قطعی هم‌ارز طراحی شده است. در ادامه یک تکنیک جدید اصلاح شده برای حل این گونه مسائل بیان شده است.

کلمات کلیدی: برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی، اعداد فازی، روش سیمپلکس فازی، رتبه‌بندی تابع، بهینه‌سازی چندهدفه، محدودیت منعطف

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

فصل ۱

مبانی نظریه فازی و بهینه‌سازی فازی

۱.۱ مقدمه

در این فصل ابتدا به نظریه مجموعه های فازی[1] و مفاهیم بهینه سازی می‌پردازیم. سپس برخی تعاریف، مقدمات اولیه و مسائل بهینه سازی فازی را بررسی می‌کنیم.

۱.۱.۱ مقدمه ای بر نظریه مجموعه‌های فازی

فازی در لغت به معنای نادقیق و مبهم است. اکثر اتفاقات و رویدادهایی که در روزمره برای ما اتفاق می‌افتد دارای ابهام می‌باشند. ابهام ممکن است با شکل، رنگ، مکان، ترکیب و محتوای رویدادها همراه باشد و معناها چه بودن آن ها را تشریح کنند. یعنی انسان با استفاده از معانی مختلف، چه بودن و ماهیت آن‌ها را تشریح و توصیف می‌کند.

نظریه مجموعه‌های فازی اولین بار در سال ۱۹۶۵ توسط پروفسور لطفی عسگر زاده[2] دانشمند ایرانی تبار و استاد دانشگاه های آمریکا معرفی گردید و ایده آن با این عبارت توسط ایشان ایجاد شد: «ما نیاز به یک نوع مختلف از ریاضیات داریم تا بتوانیم ابهامات و عدم دقت رویداد ها را مدل‌سازی نماییم مدلی که متفاوت از نظریه احتمالات است»

نظریه احتمال و نظریه مجموعه‌های فازی، هر دو برای مطالعه موارد شامل عدم قطعیت و

---

[1] Fuzzy

[2] Zadeh

اطمینان وضع شده اند. اولی به عنوان الگوی عدم قطعیت آماری (منسوب به پیشامدهای تصادفی) و دومی به عنوان الگوی عدم قطعیت ناشی از تشخیص و قضاوت انسانی است.

نظریه فازی نظریه ای است برای تصمیم گیری در شرایط عدم اطمینان. این نظریه بسیاری از مفاهیم و متغیرهایی را که نادقیق و مبهم هستند، همان‌طور که در دنیای واقعیت اکثرا چنین است، به صورت ریاضی مدل‌سازی می‌کند.

۲.۱ مفاهیم و تعاریف مقدماتی

فرض کنید X یک مجموعه مرجع دلخواه باشد، آن گاه تابع مشخصه[۳] هر زیر مجموعه‌ی معمولی A از X، یک تابع از X به $\{0,1\}$ است که به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\chi_A : X \longrightarrow \{0,1\}$$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

حال اگر تابع مشخصه را از مجموعه دو عضوی $\{0,1\}$ به تمام اعداد موجود در بازه $[0,1]$ تعمیم دهیم، شکل تابع مشخصه به تابع عضویت[۴] A تغییر می‌یابد و آن را با $\mu_A(x)$ نمایش می‌دهیم و به جای مجموعه‌های کلاسیک مجموعه‌ی فازی[۵] به‌کار می‌بریم. یک مجموعه فازی A در X به صورت یک مجموعه از زوج‌های مرتب به شکل زیر نمایش می‌دهیم:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\} \tag{۱.۱}$$

که در آن $\mu_{\tilde{A}} : X \longrightarrow [0,1]$ تابع عضویت آن می باشد و $\mu_{\tilde{A}}(x)$ درجه ی عضویت x در $\tilde{A}$ را نشان می‌دهد.

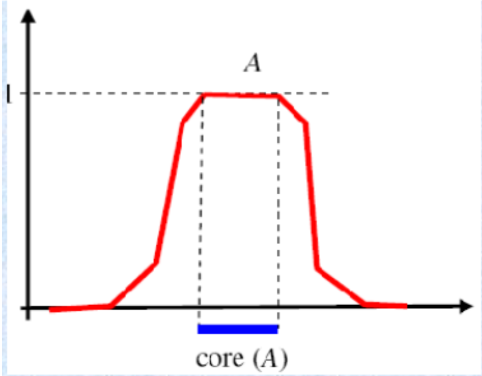
تعریف ۱.۲.۱. هسته[۶] یک مجموعه فازی، عبارت است از زیر مجموعه‌ای از مجموعه مرجع X مانند $\tilde{A}$ که درجه عضویت عناصر آن ۱ است (شکل ۱.۱).

$$Core(\tilde{A}) = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$$

تعریف ۲.۲.۱. ارتفاع[۷] یک مجموعه فازی بزرگترین مقدار درجه عضویت در آن مجموعه است. یعنی

$$h(\tilde{A}) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x) | x \in X\}$$

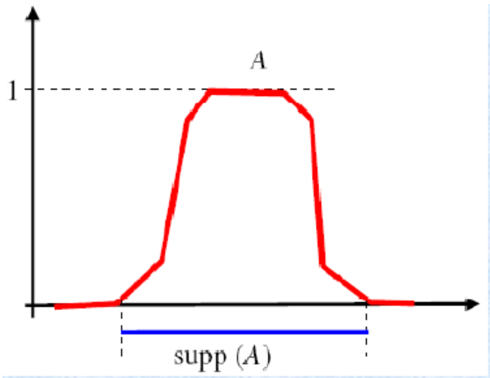
[۳] Indicator function
[۴] Membership function
[۵] Fuzzy set
[۶] Core
[۷] Height



شکل ۱.۱: هسته ی مجموعه فازی

تعریف ۳.۲.۱. مجموعه پشتیبان[۸] هر مجموعه فازی، یک مجموعه کلاسیک است که زیر مجموعه‌ای از عناصر مجموعه فازی مثبت است و به صورت زیر تعریف می‌کنیم (شکل۲.۱):

$$supp(\tilde{A}) = \{x \mid x \in R, \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$



شکل ۲.۱: پشتیبان مجموعه فازی

تعریف ۴.۲.۱. دو مجموعه فازي $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را مساوي گوئیم هرگاه:

$$\forall x \in X \quad \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$$

و مجموعه فازي $\tilde{A}$ تهی است هرگاه :

$$\forall x \in X \quad \mu_{\tilde{A}}(x) = 0$$

[۸] Support

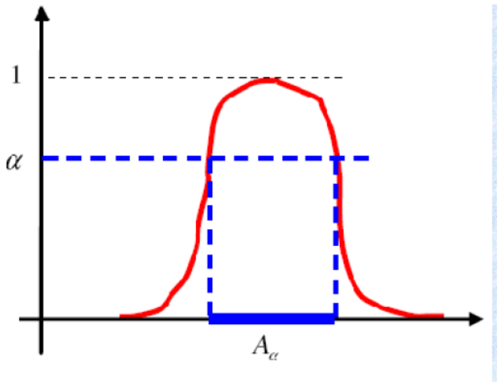
تعریف ۵.۲.۱. مجموعه $\tilde{A}$ زیر مجموعه $\tilde{B}$ است هرگاه برای هر $x \in X$ داشته باشیم: $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$ و با $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۲.۱. مجموعه α ـ برش[۹] $\tilde{A}$ با $A_{\tilde{\alpha}}$ نمایش داده می‌شود و به صورت

$$A_{\tilde{\alpha}} = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) \geqslant \alpha\}$$

تعریف می‌کنیم(شکل ۳.۱)، همچنین αـ برش قوی A، $A_{\tilde{\alpha}}$، به صورت زیر است:

$$A_{\tilde{\alpha}} = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}$$



شکل ۳.۱: α ـ برش در یک مجموعه فازی

تعریف ۷.۲.۱. یک مجموعه فازي $\tilde{A}$ روی $\mathbb{R}$ را محدب[۱۰] گویند هرگاه:

$$\mu_A(\lambda x_۱ + (۱ - \lambda)x_۲) \geq \min\{\mu_A(x_۱), \mu_A(x_۲)\}$$

برای این‌که یک مجموعه فازی محدب باشد، نمودار تابع عضویت آن بایستی تنها یک قله داشته باشد (شکل ۴.۱).

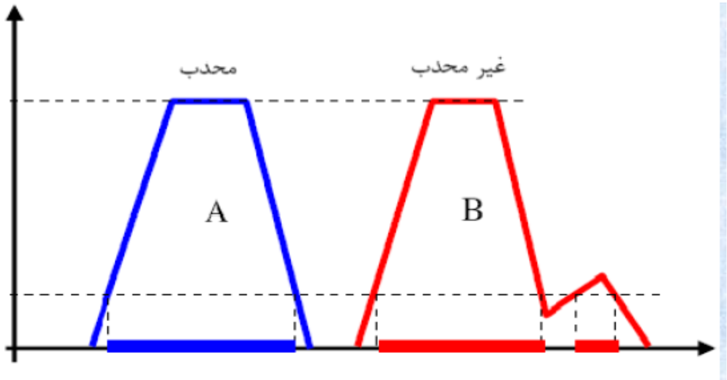
تعریف ۸.۲.۱. یک مجموعه فازي را نرمال[۱۱] می‌گوییم، اگر درجه عضویت حداقل یکی از اعضاي آن مثلا x_i برابر ۱ باشد.

ملاحظه ۱.۲.۱. براي نرمال کردن مجموعه فازي غیر نرمال، کافی است که درجه عضویت هر عنصر را بر ارتفاع $\tilde{A}$ تقسیم کنیم.

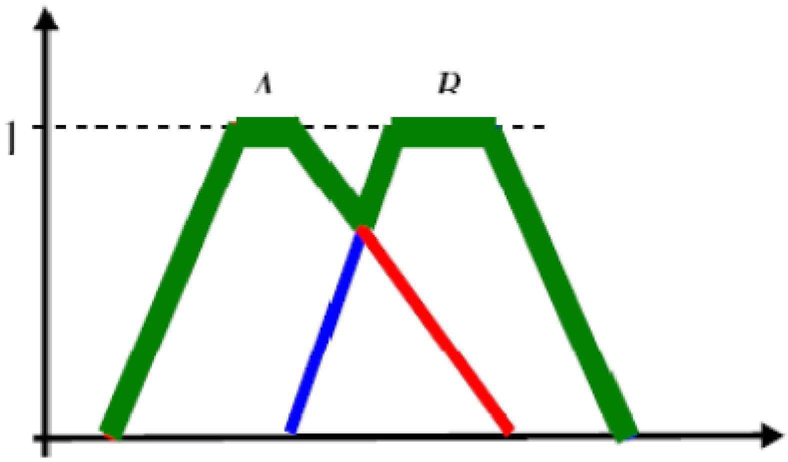
تعریف ۹.۲.۱. اجتماع دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}, \qquad \forall x \in X.$$

درشکل ۵.۱ خطوط پررنگ اجتماع دو مجموعه $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را نشان می‌دهد.



شکل ۴.۱: مجموعه فازی محدب و غیر محدب



شکل ۵.۱: اجتماع دو مجموعه فازی

تعریف ۱۰.۲.۱. اشتراک دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به صورت زیر تعریف می‌شود (شکل۶.۱):

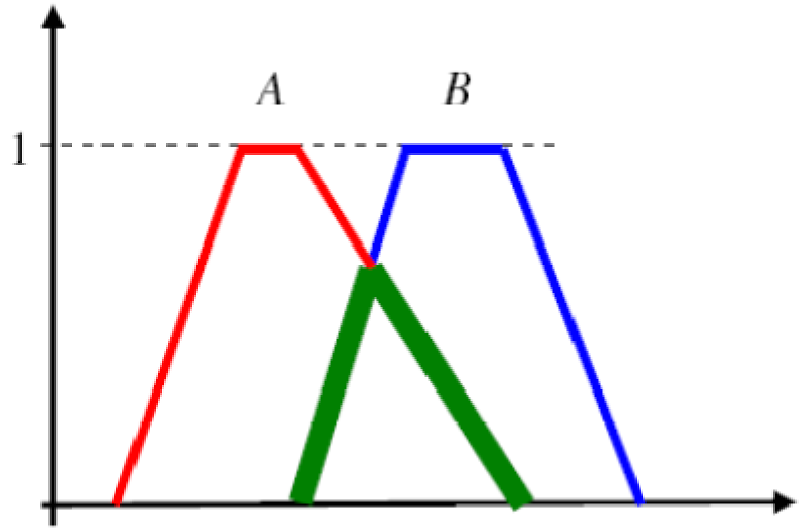
$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}, \qquad \forall x \in X.$$

درشکل ۶.۱ خطوط پررنگ اشتراک دو مجموعه $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را نشان می‌دهد.

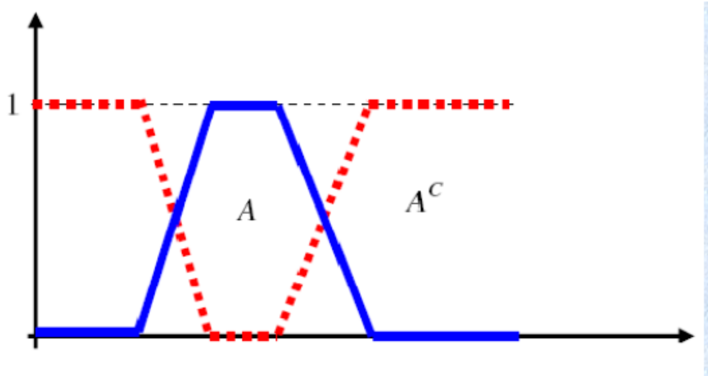
تعریف ۱۱.۲.۱. متمم[۱۲] مجموعه فازی $\tilde{A}$ را با $\tilde{A}^c$ یا $\overline{\tilde{A}}$، نشان می‌دهیم و درجه عضویت عناصر آن به صورت ذیل به دست می‌آیند. به شکل (۷.۱) مراجعه نمایید.

$$\mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x), \quad \forall x \in X.$$

[۹] Cut
[۱۰] Convex
[۱۱] Normal
[۱۲] Complement



شکل ۶.۱: اشتراک دو مجموعه فازی



شکل ۷.۱: متمم مجموعه فازی

۳.۱ عملگر های جبری

تعریف ۱.۳.۱. جمع جبری دو مجموعه فازی، یک مجموعه فازی خواهد بود که به صورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B}$$
$$\tilde{C} = \{(x, \mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x) \mid x \in X)\}$$

که در آن

$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x)\mu_{\tilde{B}}(x)$$

تعریف ۲.۳.۱. ضرب جبری دو مجموعه فازی، به صورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{C} = \tilde{A}.\tilde{B}$$
$$\tilde{C} = \{(x, \mu_{\tilde{A}.\tilde{B}}(x) \mid x \in X)\}$$

که در آن

$$\mu_{\tilde{A}.\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x).\mu_{\tilde{B}}(x)$$

تعریف ۳.۳.۱. جمع کران دار[۱۳] دو مجموعه فازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{C} = \tilde{A} \oplus \tilde{B}$$
$$\tilde{C} = (x, \mu_{\tilde{A}\oplus\tilde{B}}(x) \mid x \in X)$$

که درآن

$$\mu_{\tilde{A}\oplus\tilde{B}}(x) = \min\{۱, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x)\}$$

تعریف ۴.۳.۱. تفاضل کران دار[۱۴] دو مجموعه فازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{C} = \tilde{A} \ominus \tilde{B}$$
$$\tilde{C} = \{(x, \mu_{\tilde{A}\ominus\tilde{B}}(x) \mid x \in X)\}$$

که درآن

$$\mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(x) = \max\{\circ, \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - ۱\}$$

تعریف ۵.۳.۱. اصل توسیع[۱۵] : فرض کنید $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع و $\tilde{A}$ زیر مجموعه ای فازی روی X باشد. دراین صورت $f(\tilde{A}) = \tilde{B}$ یک زیرمجموعه ی فازی از Y خواهد بود به طوری که:

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} sup_{y=f(x)}\, \mu_{\tilde{A}}(x) & f^{-۱}\{y\} \neq \phi \\ \circ & f^{-۱}\{y\} = \phi. \end{cases}$$

---
[۱۳] Bounded sum
[۱۴] Bounded difference
[۱۵] Extention principle

۴.۱ اعداد فازی

بسیاری از پدیده های کمی با یک عدد مطلق و صریح قابل نمایش نمی‌باشند. مثلاً وقتی قیمت خودرویی سؤال می‌شود پاسخ می‌شنویم تقریباً ۲۲ میلیون، یا در جمله ''من حدوداً ساعت ۴:۳۰ عصر به منزل رسیدم'' زمان به صورت مبهم بیان شده است. در آزمایشگاه‌های مختلف اغلب اعدادی که به دست می آیند به صورت تقریبی می باشد. در همه‌ی این موارد می‌توان از اعداد فازی استفاده کرد. معمولاً به مفاهیم مبهم که دارای اصطلاحاتی مانند تقریباً، حدوداً، نزدیک به و ... باشد، مجموعه‌های فازی نسبت داده می‌شود که در اصل عدد فازی می‌باشند.

تعریف ۱.۴.۱. یک مجموعه فازی نرمال محدب $\mathbb{N}$ روی اعداد حقیقی را یک عدد فازی گوییم، هر گاه شرایط زیر را داشته باشد:

۱. $\mathbb{N}$ تک نمایی باشد. یعنی دقیقا یک $x_\circ \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که $\mathbb{N}(x_\circ) = ۱$

۲. $\mathbb{N}(x)$ قطعه به قطعه پیوسته باشد.

مجموعه تمام اعداد فازی را با $F(\mathbb{R})$ نمایش می‌دهیم.

از انواع پرکاربرد اعداد فازی می‌توان به عدد فازی مثلثی، عدد فازی ذوزنقه‌ای، عدد فازی گاوسی و عدد فازی زنگوله‌ای اشاره کرد که در اینجا ما به تعریف اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه‌ای بسنده می‌کنیم.

تعریف ۲.۴.۱. یک عدد فازي $\tilde{A}$ عدد فازی مثلثی[۱۶] نامیده می‌شود اگر به صورت $\tilde{A} = (a, b, c)$ نمایش داده شده و تابع عضویت آن به صورت زیر باشد (شکل ۸.۱):

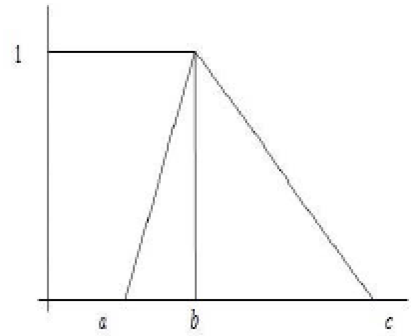
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{x-c}{b-c}, & b \leq x \leq c \\ \circ, & o.w \end{cases}$$

اگر در رابطه فوق $r = \frac{x-a}{b-a}$ و $r = \frac{x-c}{b-c}$ باشد آن‌گاه فرم پارامتری آن به این شکل می‌باشد:

$$\tilde{A} = (\underline{A}(r), \bar{A}(r)) = (a + (b-a)r, c + (b-c)r), \qquad \circ \leq r \leq ۱$$

مجموعه‌ی همه اعداد فازی مثلثی را با $TF(\mathbb{R})$ نمایش می‌دهیم.

[۱۶] Triangular



شکل ۸.۱: عدد فازی مثلثی

تعریف ۳.۴.۱. یک عدد فازی $\tilde{A}=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ عدد فازی ذوزنقه‌ای[۱۷] نامیده می‌شود، اگر تابع عضویت آن به صورت زیر باشد(شکل۹.۱):

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} 0 & if \quad x\leq a_1, \\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & if \quad a_1<x<a_2, \\ 1 & if \quad a_2<x<a_3, \\ \frac{a_4-x}{a_2-a_1} & if \quad a_3<x<a_4, \\ 0 & if \quad x\geq a_4 \end{cases} \tag{۲.۱}$$

تعریف ۴.۴.۱. عدد فازی مثلثی (a,b,c) عدد فازی نامنفی گوییم اگر و تنها اگر $a\geq 0$. مجموعه‌ی همه‌ی اعداد فازی مثلثی نامنفی را با$TF(\mathbb{R})^+$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۴.۱. دو عدد فازی مثلثی $\tilde{A}=(a,b,c)$ و $\tilde{B}=(e,f,g)$ را برابر می‌گوییم هرگاه $a=e$، $b=f$ و $c=g$.

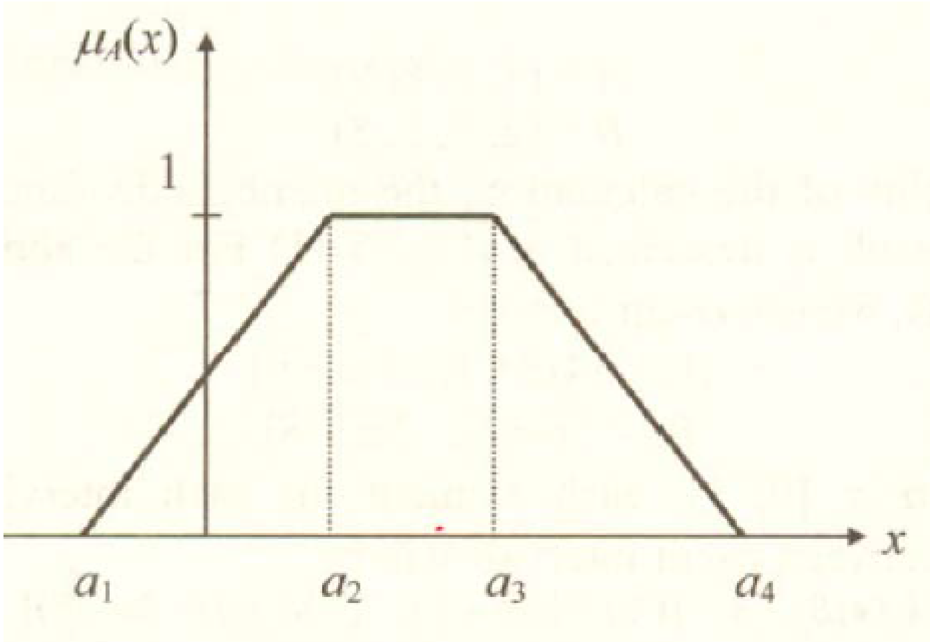
۱.۴.۱ عملیات بر روی اعداد فازی مثلثی

در این بخش، عملیات های حسابی بین دو عدد فازی مثلثی، که بر روی مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ تعریف شده است را بیان می‌کنیم،
فرض کنید $\tilde{A}=(a,b,c)$ و $\tilde{B}=(e,f,g)$ دو عدد فازی مثلثی باشند آنگاه

۱. $\tilde{A}\oplus\tilde{B}=(a,b,c)\oplus(e,f,g)=(a+e,b+f,c+g)$,

۲. $k\geq 0$ ، $k\tilde{A}=(ka,kb,kc)$،

[۱۷] Trapezoidal



شکل ۹.۱: عدد فازی ذوزنقه ای

۳. $k \leq 0$، $k\tilde{A} = (kc, kb, ka)$،

۴. $\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (a,b,c) \ominus (e,f,g) = (a-g, b-f, c-e)$،

۵. فرض کنید $\tilde{A} = (a,b,c)$ عدد فازی مثلثی دلخواه باشد و $\tilde{B} = (e,f,g)$ عددی فازی مثلثی نامنفی باشد آنگاه

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} \simeq \begin{cases} (ae, bf, cg), & a \geq 0, \\ (ag, bf, ce), & a < 0, c \geq 0 \\ (ag, bf, ce), & c < 0 \end{cases}$$

اما حاصل ضرب، معکوس و تقسیم دو عدد فازی مثلثی دلخواه، یک عدد فازی مثلثی نخواهد بود بلکه قدری متفاوت از آن به دست خواهد آمد. اما به جهت تفاوت عموماً اندک و نیز تسهیل محاسبات، عموماً به صورت تقریبی یک عدد فازی مثلثی در نظر گرفته می‌شود.

با این فرض داریم:

$$\tilde{A} \times \tilde{B} = (a_۱ \times b_۱, a_۲ \times b_۲, a_۳ \times b_۳)$$
$$\tilde{A}^{-۱} = (\frac{۱}{a_۳}, \frac{۱}{a_۲}, \frac{۱}{a_۱})$$
$$\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} = (\frac{a_۱}{a_۳}, \frac{a_۲}{b_۲}, \frac{a_۳}{b_۱})$$

همچنین ضرب یک عدد مثبت قطعی در یک عدد مثلثی فازی، یک عدد مثلثی فازی است:
$K \times \tilde{A} = (Ka_۱, Ka_۲, Ka_۳)$

۵.۱ بهینه سازی فازی و مدل برنامه‌ریزی خطی فازی

در سطوح متعدد برنامه‌ریزی و تصمیم‌گیری مدیریت و تولید از برنامه‌ریزی ریاضی کلاسیک استفاده می‌شود. درچنین مواردی توابع هدف و محدودیت‌های قطعی به کار گرفته می‌شود. اما در محیط دنیای واقعی این یک فرض واقع گرایانه نیست، درمسائل واقعی زندگی ممکن است عدم قطعیت در مورد پارامترها وجود داشته باشد. در چنین شرایطی از برنامه‌ریزی ریاضی فازی با محدودیت‌ها و توابع هدف فازی استفاده می‌شود.

۱.۵.۱ مدل برنامه‌ریزی خطی فازی

مدل برنامه‌ريزي خطي را مي توان به عنوان نوع خاصي از مدل تصميم گيري در نظر گرفت. در اين مدل فضاي تصميم توسط محدوديت‌ها تعريف مي گردد، هدف (مطلوبيت) با تابع هدف مشخص مي شود و نوع تصميم گيري، تصميم گيري در شرايط قطعيت است. مدل كلاسيك برنامه‌ريزي خطي را مي توان به صورت زير نوشت :

$$Max\,(\text{یا}\, Min) \quad f(x) = C^T x$$
$$s.t. \quad Ax \leq (\geq \text{ یا } = \text{ یا})\, b$$
$$x \geq ۰$$

در این مدل b یک عدد قطعی، C یک بردارقطعی و A یک ماتریس قطعی می‌باشند. علائم $=$ و $\geq$ و $\leq$ نشانگر تساوي يا نامساوي قطعي مي باشند و ماكزيمم و مينيمم بيانگر يك جمله امري قاطع مي‌باشد. حال اگر بخواهيم تصميم در محيط فازي اخذ گردد بايد تعديلاتي در مدل كلاسيك برنامه‌ریزی خطی صورت دهیم، اولاً تصمیم گیرنده ممکن است واقعا نخواهد تابع هدف را ماکزیمم یا مینیمم نماید بلکه ممکن است بخواهد به يك سطح دلخواه كه شايد

به صورت قطعي قابل تعريف نباشد دست يابد. مثل تابع هدف به صورت '' كاهش هزينه هاي فعلي به طور قابل ملاحظه‌اي صورت گيرد '' باشد. ثانياً محدوديت‌ها ممكن است به چندين صورت مبهم (نادقيق) باشد . مثلا علائم $\leq$ $=$ $\geq$ ممكن است به معني مساوي كوچكتر يا مساوي و بزرگتر يا مساوي قطعي نباشد بلكه انحراف كوچكي از آنها قابل قبول تلقي شود. همچنين ضرايب بردارهاي ماتريس A مي‌توانند شاخص‌هاي فازي داشته باشند چرا كه يا طبيعت آنها و يا درك آنها فازي (مبهم) است. بر اين اساس مي توان گفت كه برنامه ريزي خطي فازي يا همان بهينه سازی فازی راهي را براي مواجه با اين نوع ابهام‌ها (نادقيق بودنها) خواهد بود.

۶.۱ مسائل برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی

یک مسئله برنامه ریزی خطی در یک محیط کاملا فازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} &Max\,(\text{یا}Min) \quad \tilde{z} = \tilde{c}^t\tilde{x}, \\ &s.t. \qquad\qquad \tilde{A}\tilde{x} \leq \tilde{b}, \quad \tilde{x} \geq \circ. \end{aligned}$$

که در اینجا،
$\tilde{z}$، $\tilde{c}^t = (\tilde{c}_۱, \cdots, \tilde{c}_n)$، $\tilde{x} = (\tilde{x}_۱, \cdots, \tilde{x}_n)$، $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]_{m\times n}$ و $\tilde{b} = (\tilde{b}_۱, \cdots, \tilde{b}_n)^t$ همه پارامتر ها فازی می‌باشند.

۷.۱ بهینه سازی چندهدفه

مسائل بهینه‌سازی چندهدفه[۱۸]، همان گونه از اسم آن مشخص است، بیشتر از یک تابع هدف دارند.در بسیاری از مسائل تصمیم‌گیری عملی و کاربردی چندین هدف یا چندین معیار مورد نظر است. به طورکلی در یک مسئله بهینه‌سازی چندهدفه تصمیم‌گیرنده سعی می‌کند چند تابع هدف را که معمولاً با هم در تضاد هستند، به طور هم زمان بهینه کند و بهترین جواب ممکن را انتخاب کند.این گونه مسائل داری چندین جواب بهینه هستند. برای یک مسئله بهینه‌سازی چندهدفه، یک جواب بهینه جوابی است که هیچ یک از مؤلفه‌هایش نمی‌توانند بهبود یابند مگر این‌که حداقل یکی ازمؤلفه‌هایش بدتر شود.
یک مساله بهينه سازي چندهدفه در حالت کلی به صورت زير بيان می شود:

$$\begin{aligned} &\min \quad (f_۱(x), \cdots, f_n(x)) \\ &s.t.\ x \in S = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b, x \geq \circ\} \end{aligned} \tag{۳.۱}$$

[۱۸] Multiobjective optimization

تعریف ۱.۷.۱. یک جواب شدنی $x^* \in X$ بهینه‌ی پارتو نامیده می‌شود اگر هیچ $x \in X$ دیگری نباشد به‌طوری که به ازای $i \in ۱, \cdots, k$، $f_i(x) \leq f_i(x^*)$ و $f_j(x) < f_j(x^*)$ برای حداقل یک اندیس j.

تعریف ۲.۷.۱. یک بردار هدف $z^* \in Z$ بهینه‌ی پارتو است، هرگاه هیچ بردار $z \in Z$ دیگری وجود نداشته باشد به‌طوری که برای هر $i \in ۱, \cdots, k$، $z_i \leq z_i^*$ و $z_j < z_j^*$ برای حداقل یک اندیس j.

۱.۷.۱ مدل ریاضی مسئله بهینه‌سازی چندهدفه فازی

تعریف ۳.۷.۱. رابطه R تعریف شده بر $A \times A$، را یک رابطه ترتیب جزئی گوییم اگر به ازای هر a و b و c از A :

۱. $\forall a \in A, \ (a, a) \in R$ (ویژگی بازتابی).

۲. $(a, b) \in R, (b, a) \in R \Rightarrow a = b$ (ویژگی پاد تقارن)

۳. $(a, b) \in R, (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ (ویژگی تعدی)

یک مساله بهینه‌سازي چندهدفه فازی در حالت کلی به صورت زیر بیان می شود:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad (\tilde{f}_۱(x), \cdots, \tilde{f}_n(x)) \\
&s.t \quad \tilde{g}_j(x) \preceq ۰ \qquad j = ۱, ۲, \cdots, m \\
&x \in X,
\end{aligned}
\tag{۴.۱}
$$

که در آن $\tilde{f}_i$ و $\tilde{g}_j$ برای هر $i = ۱, ۲, \cdots, n$ و هر $j = ۱, ۲, \cdots, m$، توابع فازی مقدار تعریف شده روی X ($\tilde{f}: X \longrightarrow F(\mathbb{R})$) و $\preceq$ یک رابطه ترتیب جزئی روی $F(\mathbb{R})$ است.

۸.۱ روش برنامه ریزی الفبایی(قاعده الفبایی)

این روش یکی از روش های کلاسیک است که در حل مسائل بهینه سازی چندهدفه کاربرد دارد. در قاعده‌ی الفبایی[۱۹]، در مسائل بهینه‌سازی فرض براین است که از نظر تصمیم گیرنده اهمیت اهداف در مسائل برنامه‌ریزی چندهدفه یکسان نباشد، یعنی تصمیم گیرنده باید توابع هدف را براساس درجه اهمیت شان مرتب کند بدین مفهوم که یک هدف دارای اهمیت بیشتر بی‌نهایت بار از یک هدف کم اهمیت مهم تر است. در روش الفبایی این تمایز اهمیت با استفاده

[۱۹] Lexicography Call

از رتبه‌بندی توابع هدف براساس میزان اهمیت آن‌ها در k دسته متمایز انجام می‌گیرد. یک مسئله بهینه‌سازی چندهدفه با قاعده الفبایی در حالت کلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} &lex \max(f_1(x), \cdots, f_k(x)) \\ &s.t\, x \in X \end{aligned} \tag{۵.۱}$$

روشی که برای حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه با قاعده الفبایی وجود دارد روشی دنباله‌ای می‌باشد، به طوری‌که ابتدا $f_1(x)$ به‌قسمی که $x \in X$ را ماکزیمم می‌کنیم و یک جواب بهینه‌ی x^* می‌یابیم. فرض می‌کنیم $f_1(x^*) = \alpha_1$. لذا مسئله $f_2(x)$ به‌طوری که $f_1(x) \geq \alpha_1$ و $x \in X$ را ماکزیمم می‌کنیم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. به طور کلی در q امین تکرار به جواب مورد نظر خواهیم رسید.

فصل ۲

حل برنامه ریزی خطی کاملا فازی با استفاده از روش الفبایی

۱.۲ مقدمه

در این فصل مسائل برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی که در آن همه پارامتر ها و متغیرها اعداد فازی مثلثی هستند را بررسی می‌کنیم. ما از مفهوم عدد فازی مثلثی متقارن و با معرفی یک روش برای غیر فازی کردن[۱] کمیت فازی استفاده می‌کنیم. برای چنین مسائلی، ابتدا، عدد فازی مثلثی را به نزدیک ترین عدد فازی مثلثی متقارن تقریب می‌زنیم، هر مدل برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی به دو مسئله خطی قطعی تبدیل می‌شود که این مسئله را با قاعده الفبایی حل می‌کنیم.

۲.۲ تعاریف اولیه

دراین فصل هر عدد فازی مثلثی دلخواه را با یک زوج مرتب از توابع به صورت

$$\tilde{u} =: (\underline{u}(r), \bar{u}(r)), ۰ \leq r \leq ۱$$

[۱] Defuzzification

نمایش می‌دهیم که در شرایط زیر صدق می‌کنند.

- $\underline{u}(r)$ یک تابع نانزولی از چپ پیوسته و کراندار روی $[0,1]$ است .
- $\bar{u}(r)$ یک تابع ناصعودی از راست پیوسته و کراندار روی $[0,1]$ است .
- $\underline{u}(r), \bar{u}(r)$ هر دو در نقطه صفر از راست پیوسته اند .
- $\underline{u}(r) \leq \bar{u}(r), 0 \leq r \leq 1$

عدد قطعی α عبارت است از: $\underline{u}(r) = \bar{u}(r) = \alpha, 0 \leq r \leq 1$.

تعریف ۱.۲.۲. $w_{\tilde{u}}^R = \bar{u}(0) - C_{\tilde{u}} \geq 0,\ w_u^L = C_{\tilde{u}} - \underline{u}(0) \geq 0$, و $C_{\tilde{u}} = Core(\tilde{u}) = \underline{u}(1) = \bar{u}(1);$ به ترتیب مرکز، حاشیه‌های چپ و راست عدد فازی $\tilde{u}$ هستند.

تعریف ۲.۲.۲. عدد فازی با فرم پارامتری

$$\tilde{t} =: (\underline{t}(r), \bar{t}(r)) =: (C_{\tilde{t}} - w_t^L + w_t^L r, C_{\tilde{t}} + w_t^R - w_t^R r) =: (C_{\tilde{t}}, w_t^L, w_t^R), 0 \leq r \leq 1$$

یک عدد فازی مثلثی نامتقارن[۲] است به طوری که:

$$C_{\tilde{t}} - w_t^L + w_t^L r = \underline{t}(r) \text{ و } C_{\tilde{t}} + w_t^R - w_t^R r) = \bar{t}(r), \quad C_{\tilde{t}}, w_t^L, w_t^R \in \mathbb{R}$$

که این تعریف همانند تعریف ۲.۴.۱ در فصل اول می‌باشد که در اینجا برحسب حاشیه‌های چپ و راست اعداد فازی بیان شده است.

مجموعه‌ی همه اعداد فازی مثلثی نامتقارن را با $(\widehat{A.S.T})$ نمایش می‌دهیم.

به صورت قرارداد هر عدد فازی مثلثی متقارن را با $S[x_0, \sigma]$ که $w_S^L = w_S^R = \sigma$ نمایش می‌دهیم، که مرکز آن x_0 است و فرم پارامتری آن به صورت زیر می‌باشد :

$$S[x_0, \sigma] =: (x_0 - \sigma + r\sigma, x_0 + \sigma - r\sigma), 0 \leq r \leq 1, x_0, \sigma \in \mathbb{R}$$

یک عدد فازی مثلثی متقارن را با $(\widehat{STFN})$ و مجموعه‌ی همه‌ی اعداد فازی مثلثی متقارن را با $(\widehat{S.T})$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۲.۲. فرض کنید $\tilde{t} = (C_1, w_1^L, w_1^R), \tilde{u} = (C_2, w_2^L, w_2^R) \in \widehat{A.S.T}$ و $k \in \mathbb{R}$ با استفاده از اصل توسیع داریم:

۱. $\tilde{t} = \tilde{u}$ اگر و تنها اگر $C_1 = C_2$ و $w_1^L = w_2^L, w_1^R = w_2^R$.

۲. $\tilde{t} + \tilde{u} = (C_1 + C_2, w_1^L + w_2^L, w_1^R + w_2^R)$.

[۲] Asymmetric Triangular Fuzzy Number

.۳

$$k\tilde{t} = \begin{cases} (kC_1, kw_1^L, kw_1^R) & k \geq 0 \\ (kC_1, -kw_1^R, -kw_1^L) & k < 0 \end{cases}$$

تعریف ۴.۲.۲. برای هر دوعدد فازی در فرم پارامتری $\tilde{t} =: (\underline{t}(r), \bar{t}(r))$، $\tilde{u} =: (\underline{u}(r), \bar{u}(r))$ داریم

$$\tilde{t}\tilde{u} = \tilde{h} = (\underline{h}(r), \bar{h}(r))$$

که در آن

$$\underline{h}(r) = \min\{\underline{t}(r)\underline{u}(r), \bar{t}(r)\bar{u}(r), \bar{t}(r)\underline{u}(r), \underline{t}(r)\bar{u}(r)\},$$

و

$$\bar{h}(r) = \max\{\underline{t}(r)\underline{u}(r), \bar{t}(r)\bar{u}(r), \bar{t}(r)\underline{u}(r), \underline{t}(r)\bar{u}(r)\}$$

برای مثال برای دوعدد مثبت $(\widehat{S.T})$

$$\tilde{t} = \big(C_{\tilde{t}} + w_t^L(r-1), C_{\tilde{t}} + w_t^R(1-r)\big),$$

و

$$\tilde{u} = \big(C_{\tilde{u}} + w_{\tilde{u}}^L(r-1), C_{\tilde{u}} + w_{\tilde{u}}^R(1-r)\big)$$

که در آن $C_{\tilde{t}} - w_{\tilde{t}}^L \geq 0$ و $C_{\tilde{u}} - w_{\tilde{u}}^L \geq 0$ داریم:

$$\tilde{t}\tilde{u} = \big(C_{\tilde{t}}C_{\tilde{u}} + C_{\tilde{t}}w_{\tilde{u}}^L(r-1) + w_{\tilde{t}}^L(r-1)C_{\tilde{u}} + w_{\tilde{t}}^L w_{\tilde{u}}^L(r-1)^2, C_{\tilde{t}}C_{\tilde{u}} + C_{\tilde{t}} + w_{\tilde{u}}^R(r-1) + w_{\tilde{t}}^R(1-r)C_{\tilde{u}} + w_{\tilde{t}}^R w_{\tilde{u}}^R(1-r)^2\big).$$

لم ۱.۲.۲. فرض کنید $\tilde{A} \in E^{n\times n}$ که E فضای اقلیدسی[۳] اعداد فازی است.
$\tilde{X} = (\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \cdots, \tilde{t}_n)^T$ و $\tilde{Y} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \cdots, \tilde{u}_n)^T$ که $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \widehat{A.S.T}^n$. حال داریم:

۱. $Core(\tilde{X} + \tilde{Y}) = Core(\tilde{X}) + Core(\tilde{Y})$

۲. $Core(\tilde{A}\tilde{X}) = Core(\tilde{A})Core(\tilde{X}).$

۳. $\tilde{A}(\tilde{X} + \tilde{Y}) = \tilde{A}\tilde{X} + \tilde{A}\tilde{Y}.$

تعریف ۵.۲.۲. فرض کنید $\tilde{u} = (x_{02}; \sigma_2)$ و $\tilde{t} = (x_{01}; \sigma_1)$ اعداد فازی مثلثی متقارن باشند.
گوییم $\tilde{u} <^* \tilde{t}$ هرگاه داشته باشیم:

۱. $x_{01} < x_{02}$ یا

[۳] Euclidean space

۲. $\sigma_۱ > \sigma_۲$ و $x_{\circ_۱} = x_{\circ_۲}$.

به طور مشابه داریم $\tilde{u} =^* \tilde{t}$ هرگاه $(\sigma_۱ = \sigma_۲) \wedge (x_{\circ_۱} = x_{\circ_۲})$.
و $\tilde{u} \leq^* \tilde{t}$ اگر و تنها اگر $(\tilde{t} <^* \tilde{u} \vee \tilde{t} =^* \tilde{u})$
به این معنی است که

$$(x_{\circ_۱} < x_{\circ_۲}) \vee [(x_{\circ_۱} = x_{\circ_۲} \wedge \sigma_۱ = \sigma_۲) \vee (x_{\circ_۱} = x_{\circ_۲} \ \wedge \sigma_۱ = \sigma_۲)]$$

که با رابطه زیر هم ارز است:
$(x_{\circ_۱} < x_{\circ_۲}) \vee [(x_{\circ_۱} = x_{\circ_۲} \wedge \sigma_۱ = \sigma_۲)]$.
برای هر $\tilde{t}, \tilde{u} \in \widehat{S.T}$ فقط یکی از روابط زیر برقرار است:

الف. $\tilde{u} <^* \tilde{t}$ یا

ب. $\tilde{u} =^* \tilde{t}$ یا

ج. $\tilde{u} >^* \tilde{t}$.

تعریف ۶.۲.۲. برای هر دو عدد فازی A و B به ترتیب با $\alpha-$ برش $[A_l(\alpha), A_u(\alpha)]$ و $[B_l(\alpha), B_u(\alpha)]$، کمیت زیر

$$d(A,B) = \sqrt{\int_\circ^۱ (A_l(\alpha) - B_l(\alpha))^۲ \mathrm{d}\alpha + \int_\circ^۱ (A_u(\alpha) - B_u(\alpha))^۲ \mathrm{d}\alpha}$$

فاصله بین دو عدد فازی A و B می‌باشد.

۱.۲.۲ نزدیک ترین تقریب عدد مثلثی فازی متقارن [۱۶]

فرض کنید $\tilde{u}$ یک عدد فازی و در فرم پارامتری $(\underline{u}(r), \bar{u}(r))$ باشد. برای یافتن نزدیک ترین عدد فازی مثلثی متقارن به $\tilde{u}$ باید عبارت زیر را با توجه به σ و $x_\circ$ حداقل کنیم:

$$D(\tilde{u}, S[x_\circ, \sigma]) = \sqrt{\int_\circ^۱ (\underline{u}(r) - \underline{S[x_\circ,\sigma]}(r))^۲ \mathrm{d}r + \int_\circ^۱ (\bar{u}(r) - \overline{S[x_\circ,\sigma]}(r))^۲ \mathrm{d}r} \qquad (۱.۲)$$

برای حداقل کردن $D(\tilde{u}, S[x_\circ, \sigma])$ مشتقات جزئی آن را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{\partial D(\tilde{u}, S[x_\circ, \sigma])}{\partial \sigma} = \circ$$
$$\frac{\partial D(\tilde{u}, S[x_\circ, \sigma])}{\partial x_\circ} = \circ$$

با فرض اینکه فرم پارامتری $S[x_\circ, \sigma]$ برابر است با:

$$S[x_\circ, \sigma] =: (x_\circ - \sigma + r(\sigma), x_\circ + \sigma - r(\sigma)), 0 \leq r \leq 1, x_\circ, \sigma \in \mathbb{R}$$

و با جایگذاری آن در عبارت (۱.۲) یک‌بار نسبت به σ ویکبار نیز نسبت $x_\circ$ مشتق می‌گیریم، بنابراین از حل دستگاه معادلات فوق خواهیم داشت:

$$\sigma = \frac{3}{2}\int_0^1 (\bar{u}(r) - \underline{u}(r))(1-r)\mathrm{d}r \qquad (۲.۲)$$

$$x_\circ = \frac{1}{2}\int_0^1 (\bar{u}(r) + \underline{u}(r))\mathrm{d}r \qquad (۳.۲)$$

که نزدیک ترین عدد مثلثی فازی متقارن به $\tilde{u}$ به مرکز $x_\circ$ وحاشیه‌ی σ به دست می‌آید.

۳.۲ مسائل برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی

در این بخش ما می‌خواهیم مسئله برنامه‌ریزی خطی کاملا فازی زیر را به دو مسئله قطعی برنامه‌ریزی خطی تبدیل کنیم .

$$\begin{cases} \max \quad \tilde{C}\tilde{X} \\ s.t \quad \tilde{A}\tilde{X} =^* \tilde{b} \\ \tilde{X} \in N.S.T^n \end{cases} \qquad (۴.۲)$$

که درآن $\tilde{X} = (C_{\tilde{X}}, w^L_{\tilde{X}}, w^R_{\tilde{X}})$،$\tilde{b} = (C_{\tilde{b}}, w^L_{\tilde{b}}, w^R_{\tilde{b}})$،$\tilde{A} = (C_{\tilde{A}}, w^L_{\tilde{A}}, w^R_{\tilde{A}})$،$\tilde{C} = (C_{\tilde{C}}, w^L_{\tilde{C}}, w^R_{C})$ به طوری که $C_{\tilde{X}} = Core(\tilde{X})$،$C_{\tilde{b}} = Core(\tilde{b})$ ،$C_{\tilde{A}} = Core(\tilde{A})$،$C_{\tilde{c}} = Core(\tilde{C})$ و $w_{\tilde{C}}, w_{\tilde{A}}, w_{\tilde{b}}, w_{\tilde{X}}$ به ترتیب حاشیه‌های $\tilde{X}$، $\tilde{b}$، $\tilde{A}$ و $\tilde{C}$ هستند. $\tilde{A} \in E^{m\times n}$،$\tilde{b} \in E^m$، $\tilde{C}$ و $\tilde{x} \in E^n$ و $\tilde{A}, \tilde{C}, \tilde{X}, \tilde{b}$ ماتریس فازی و بردار اعداد فازی دلخواه هستتند، همچنین $C_{\tilde{A}} - w^L_{\tilde{A}} \geq 0$،$C_{\tilde{C}} - w^L_{\tilde{C}} \geq 0$،$C_{\tilde{b}} - w^L_{\tilde{b}} \geq 0$ و $C_{\tilde{X}} - w^L_{\tilde{X}} \geq 0$.

با توجه به دو رابطه‌ی اصلی (۲.۲) و (۳.۲) برای محاسبه مقادیر $(x_{\circ_{\tilde{c}\tilde{x}}}, \sigma_{\tilde{c}\tilde{x}})$،$(x_{\circ_{\tilde{A}\tilde{x}}}, \sigma_{\tilde{A}\tilde{x}})$ و $(x_{\circ_{\tilde{b}}}, \sigma_{\tilde{b}})$ که نزدیک ترین اعداد فازی مثلثی متقارن به $\tilde{C}\tilde{X}$،$\tilde{A}\tilde{X}$ و $\tilde{b}$ هستند ابتدا اعداد فازی $\tilde{C}$،$\tilde{X}$،$\tilde{A}$ و $\tilde{b}$ را به فرم پارامتری تبدیل می‌کنیم. سپس با توجه به تعریف ۴.۲.۲مقادیر $\tilde{C}\tilde{X}$ و $\tilde{A}\tilde{X}$ را بدست می‌اوریم که به صورت زیر خواهد بود:

$$\tilde{C}\tilde{X} = ((C_{\tilde{C}}C_{\tilde{X}} + C_{\tilde{C}}w^L_{\tilde{X}}(r-1) + + w^L_{\tilde{C}}w^L_{\tilde{X}}(r-1)^2, (C_{\tilde{C}}C_{\tilde{X}} + C_{\tilde{C}}w^R_{\tilde{X}}(1-r) + w^R_{\tilde{C}}C_{\tilde{X}}(1-r) + w^R_{\tilde{C}}w^R_{\tilde{X}}(1-r)^2))$$

$$\tilde{A}\tilde{X} = ((C_{\tilde{A}}C_{\tilde{X}} + C_{\tilde{A}}w^L_{\tilde{X}}(r-1) + + w^L_{\tilde{A}}w^L_{\tilde{X}}(r-1)^2), C_{\tilde{A}}C_{\tilde{X}} + C_{\tilde{A}}w^R_{\tilde{X}}(1-r) + w^R_{\tilde{A}}C_{\tilde{X}}(1-r) + w^R_{\tilde{A}}w^R_{\tilde{X}}(1-r)^2)$$

و

$$\tilde{b} = \left(C_{\tilde{b}} + w_b^L(r-1), C_{\tilde{b}} + w_b^R(1-r)\right)$$

حال با جایگذاری در روابط (۲.۲)و (۳.۲) مقادیر به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\tilde{c}\tilde{x}} &= \frac{3}{2}\int_0^1 (C_{\tilde{C}}C_{\tilde{X}} + C_{\tilde{C}}w_{\tilde{X}}^R(1-r) + w_{\tilde{C}}^R C_{\tilde{X}}(1-r) + w_{\tilde{C}}^R w_{\tilde{X}}^R(1-r)^2)(1-r)\mathrm{d}r \\
&-\frac{3}{2}\int_0^1 (C_{\tilde{C}}C_{\tilde{X}} + C_{\tilde{C}}w_{\tilde{X}}^L(r-1) + +w_{\tilde{C}}^L w_{\tilde{X}}^L(r-1)^2)(1-r)\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{2}C_{\tilde{C}}w_{\tilde{X}}^R + \frac{1}{2}w_{\tilde{X}}^R C_{\tilde{X}} + \frac{3}{8}w_{\tilde{C}}^R w_{\tilde{X}}^R + \frac{1}{2}C_{\tilde{X}}w_{\tilde{X}}^L + \frac{1}{2}w_{\tilde{X}}^L C_{\tilde{X}} - \frac{3}{8}w_{\tilde{C}}^L w_{\tilde{X}}^L
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{0\tilde{c}\tilde{x}} &= \frac{1}{2}\int_0^1 (C_{\tilde{C}}C_{\tilde{X}} + C_{\tilde{C}}w_{\tilde{X}}^R(1-r) + w_{\tilde{C}}^R C_{\tilde{X}}(1-r) + w_{\tilde{C}}^R w_{\tilde{X}}^R(1-r)^2)\mathrm{d}r \\
&+\frac{1}{2}\int_0^1 (C_{\tilde{C}}C_{\tilde{X}} + C_{\tilde{C}}w_{\tilde{X}}^L(r-1) + +w_{\tilde{C}}^L w_{\tilde{X}}^L(r-1)^2)\mathrm{d}r \\
&= C_{\tilde{C}}C_{\tilde{X}} + \frac{1}{4}C_{\tilde{X}}w_{\tilde{X}}^R + \frac{1}{4}w_{\tilde{C}}^R C_{\tilde{X}} + \frac{1}{6}w_{\tilde{C}}^R w_{\tilde{X}}^R - \frac{1}{4}C_{\tilde{X}}w_{\tilde{X}}^L - \frac{1}{4}w_{\tilde{C}}^L C_{\tilde{X}} + \frac{1}{6}w_{\tilde{C}}^L w_{\tilde{X}}^L
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\tilde{A}\tilde{X}} &= \frac{3}{2}\int_0^1 (C_{\tilde{A}}C_{\tilde{X}} + C_{\tilde{A}}w_{\tilde{X}}^R(1-r) + w_{\tilde{A}}^R C_{\tilde{X}}(1-r) + w_{\tilde{A}}^R w_{\tilde{X}}^R(1-r)^2)(1-r)\mathrm{d}r \\
&-\frac{3}{2}\int_0^1 (C_{\tilde{A}}C_{\tilde{X}} + C_{\tilde{A}}w_{\tilde{X}}^L(r-1) + +w_{\tilde{A}}^L w_{\tilde{X}}^L(r-1)^2)(1-r)\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{2}C_{\tilde{A}}w_{\tilde{X}}^R + \frac{1}{2}w_{\tilde{A}}^R C_{\tilde{X}} + \frac{3}{8}w_{\tilde{A}}^R w_{\tilde{X}}^R + \frac{1}{2}C_{\tilde{A}}w_{\tilde{X}}^L + \frac{1}{2}w_{\tilde{A}}^L C_{\tilde{X}} - \frac{3}{8}w_{\tilde{A}}^L w_{\tilde{X}}^L,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{0\tilde{A}\tilde{X}} &= \frac{1}{2}\int_0^1 (C_{\tilde{A}}C_{\tilde{X}} + C_{\tilde{A}}w_{\tilde{X}}^R(1-r) + w_{\tilde{A}}^R C_{\tilde{X}}(1-r) + w_{\tilde{A}}^R w_{\tilde{X}}^R(1-r)^2)\mathrm{d}r \\
&+\frac{1}{2}\int_0^1 (C_{\tilde{A}}C_{\tilde{X}} + w_{\tilde{A}}^L C_{\tilde{X}}(r-1) + +w_{\tilde{A}}^L w_{\tilde{X}}^L(r-1)^2)\mathrm{d}r \\
&= C_{\tilde{A}}C_{\tilde{X}} + \frac{1}{4}C_{\tilde{A}}w_{\tilde{X}}^R + \frac{1}{4}w_{\tilde{A}}^R C_{\tilde{X}} + \frac{1}{6}w_{\tilde{A}}^R w_{\tilde{X}}^R - \frac{1}{4}C_{\tilde{A}}w_{\tilde{X}}^L - \frac{1}{4}w_{\tilde{A}}^L C_{\tilde{X}} + \frac{1}{6}w_{\tilde{A}}^L w_{\tilde{X}}^L
\end{aligned}$$

برای اعداد سمت راست محدودیت ها خواهیم داشت :

$$\sigma_b = \frac{3}{2}\int_0^1 (C_{\tilde{b}} + w_b^R - w_b^R r)(1-r)\mathrm{d}r - \frac{3}{2}\int_0^1 (C_{\tilde{b}} - w_b^L + w_b^L r)(1-r)\mathrm{d}r = \frac{1}{2}w_b^R - \frac{1}{2}w_b^L,$$

$$x_{0_b} = \frac{1}{2}\int_0^1 ((C_{\tilde{b}} + w_b^R - w_b^R r) + (C_{\tilde{b}} - w_b^L + w_b^L r)) = C_{\tilde{b}} + \frac{1}{4}w_b^R - \frac{1}{4}w_b^R,$$

حال می‌بینیم که مسئله (۴.۲) یک مسئله برنامه ریزی خطی چندهدفه است که دوتابع هدف

دارد که تابع اول همان مرکز و تابع دوم حاشیه خواهد بود.

$$\left\{\begin{array}{l} \max\ (C_{\tilde{C}\tilde{X}}, \sigma_{\tilde{C}\tilde{X}}) \\ (C_{\tilde{A}\tilde{X}}, \sigma_{\tilde{A}\tilde{X}}) = (C_{\tilde{b}}, \sigma_{\tilde{b}}) \\ s.t. \quad (C_{\tilde{X}}, \sigma_{\tilde{X}}) \in N.S.T^n \end{array}\right. \tag{۵.۲}$$

بنابراین در اولین ضابطه $C_{\tilde{C}\tilde{X}} = F_۰(\tilde{X})$ و در ضابطه دوم $w_{\tilde{C}\tilde{X}} = F_۱(\tilde{X})$ را قرار می‌دهیم و در محدودیت‌ها خواهیم داشت $C_{\tilde{A}\tilde{X}} = C_{\tilde{b}}$ و $w_{\tilde{A}\tilde{X}} = w_{\tilde{b}}$.

با توجه به تعریف ۵.۲.۲ برای رتبه بندی اعداد فازی، برای حداکثر سازی تابع هدف مسئله (۵.۲) ما باید یک مسئله حداکثر سازی برای مرکز و یک مسئله حداقل سازی برای حاشیه حل کنیم. هم‌چنین می‌دانیم ترجیح جواب مرکز نسبت به حاشیه ها از نوع ترتیبی است، (یعنی تابع هدف اول که مرکز است بی نهایت بار از تابع هدف دوم که حاشیه است با اهمیت تر است) ،بنابراین با توجه به قاعده الفبایی مسائل زیر را به ترتیب برای مرکز و حاشیه خواهیم داشت:

$$\begin{array}{ll} \max & F_۰(\tilde{X}) \\ s.t. & \tilde{X} \in S \end{array} \tag{۶.۲}$$

$$\begin{array}{ll} \min & F_۱(\tilde{X}) \\ s.t. & \left\{\begin{array}{l} \tilde{X} \in S \\ C_{\tilde{C}\tilde{X}} = a^* \end{array}\right. \end{array} \tag{۷.۲}$$

که در آن a^* مقدار بهینه تابع هدف (۶.۲) است و $S = \left\{\tilde{X} | \tilde{A}\tilde{X} =^* b, C_{\tilde{X}} - w^L_{\tilde{X}} \geq ۰, \tilde{X} \in \widehat{N.S.T^n}\right\}$ آخرین شرط تضمین می‌کند که جواب بهینه مسئله(۷.۲) در مسئله (۶.۲) صدق می‌کند. با حل کردن مسئله (۷.۲) یکی از جواب‌های بهینه پارتو به دست می‌آوریم.

ملاحظه ۱.۳.۲. مسئله (۵.۲) به دو مسئله (۸.۲) و (۹.۲) تقلیل یافته است .

حال مسائل (۶.۲) و (۷.۲) به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{array}{ll} \max & C_{\tilde{C}}C_{\tilde{X}} + \frac{۱}{۴}C_{\tilde{X}}w^R_{\tilde{X}} + \frac{۱}{۴}w^R_{\tilde{C}}C_{\tilde{X}} + \frac{۱}{۶}w^R_{\tilde{C}}w^R_{\tilde{X}} - \frac{۱}{۴}C_{\tilde{X}}w^L_{\tilde{X}} - \frac{۱}{۴}w^L_{\tilde{C}}C_{\tilde{X}} + \frac{۱}{۶}w^L_{\tilde{C}}w^L_{\tilde{X}} \\ s.t. & \left\{\begin{array}{l} C_{\tilde{A}}C_{\tilde{X}} + \frac{۱}{۴}C_{\tilde{A}}w^R_{\tilde{X}} + \frac{۱}{۴}w^R_{\tilde{A}}C_{\tilde{X}} + \frac{۱}{۶}w^R_{\tilde{A}}w^R_{\tilde{X}} - \frac{۱}{۴}C_{\tilde{A}}w^L_{\tilde{X}} - \frac{۱}{۴}w^L_{\tilde{A}}C_{\tilde{X}} + \frac{۱}{۶}w^L_{\tilde{A}}w^L_{\tilde{X}} \\ = C_{\tilde{b}} + \frac{۱}{۴}w^R_{b} - \frac{۱}{۴}w^L_{b} \\ \frac{۱}{۲}C_{\tilde{A}}w^R_{\tilde{X}} + \frac{۱}{۲}w^R_{\tilde{A}}C_{\tilde{X}} + \frac{۳}{۸}w^R_{\tilde{A}}w^R_{\tilde{X}} + \frac{۱}{۲}C_{\tilde{A}}w^L_{\tilde{X}} + \frac{۱}{۲}w^L_{\tilde{A}}C_{\tilde{X}} - \frac{۳}{۸}w^L_{\tilde{A}}w^L_{\tilde{X}} \\ = \frac{۱}{۲}w^R_{b} - \frac{۱}{۲}w^L_{b} \\ C_{\tilde{X}} - w^L_{\tilde{X}} \geq ۰ \\ w^L_{\tilde{X}} \geq ۰, w^R_{\tilde{X}} \geq ۰ \end{array}\right. \end{array}$$

(۸.۲)

$$
\begin{array}{ll}
\min & \frac{۱}{۲}C_{\tilde{C}}w^R_{\tilde{X}} + \frac{۱}{۲}w^R_{\tilde{X}}C_{\tilde{X}} + \frac{۳}{۸}w^R_{\tilde{C}}w^R_{\tilde{X}} + \frac{۱}{۲}C_{\tilde{X}}w^L_{\tilde{X}} + \frac{۱}{۲}w^L_{\tilde{X}}C_{\tilde{X}} - \frac{۳}{۸}w^L_{\tilde{C}}w^L_{\tilde{X}} \\
s.t. & \begin{cases}
C_{\tilde{A}}C_{\tilde{X}} + \frac{۱}{۴}C_{\tilde{A}}w^R_{\tilde{X}} + \frac{۱}{۴}w^R_{\tilde{A}}C_{\tilde{X}} + \frac{۱}{۶}w^R_{\tilde{A}}w^R_{\tilde{X}} - \frac{۱}{۴}C_{\tilde{A}}w^L_{\tilde{X}} - \frac{۱}{۴}w^L_{\tilde{A}}C_{\tilde{X}} + \frac{۱}{۶}w^L_{\tilde{A}}w^L_{\tilde{X}} \\
= C_{\tilde{b}} + \frac{۱}{۴}w^R_{\tilde{b}} - \frac{۱}{۴}w^R_{\tilde{b}} \\
\frac{۱}{۲}C_{\tilde{A}}w^R_{\tilde{X}} + \frac{۱}{۲}w^R_{\tilde{A}}C_{\tilde{X}} + \frac{۳}{۸}w^R_{\tilde{A}}w^R_{\tilde{X}} + \frac{۱}{۲}C_{\tilde{A}}w^L_{\tilde{X}} + \frac{۱}{۲}w^L_{\tilde{A}}C_{\tilde{X}} - \frac{۳}{۸}w^L_{\tilde{A}}w^L_{\tilde{X}} \\
= \frac{۱}{۲}w^R_{\tilde{b}} - \frac{۱}{۲}w^L_{\tilde{b}} \\
C_{\tilde{X}} - w^L_{\tilde{X}} \geq \circ \\
w^L_{\tilde{X}} \geq \circ, w^R_{\tilde{X}} \geq \circ \\
C_{\tilde{C}\tilde{X}} = a^*
\end{cases}
\end{array}
\tag{۹.۲}
$$

قضیه ۱.۳.۲. اگر $(C_{\tilde{X}^*}, w^L_{\tilde{X}^*}, w^R_{\tilde{X}^*})$ یک جواب بهینه (۸.۲) و (۹.۲) باشد، آن‌گاه $\tilde{X}^* = (C_{\tilde{X}^*}, w^L_{\tilde{X}^*}, w^R_{\tilde{X}^*})$ یک جواب بهینه مسئله(۵.۲) است.

برهان. به برهان خلف، اگر $\tilde{X}^*$ جواب بهینه مسائل (۸.۲) و (۹.۲) باشد، ولی جواب بهینه (۵.۲) نباشد. با توجه به تعریف ۵.۲.۲ یک جواب شدنی مانند $\tilde{X}^\circ$ برای مسئله (۴.۲) وجود دارد به طوری که $(w_{\tilde{C}\tilde{X}^\circ} \leq w_{\tilde{C}\tilde{X}^*}) \wedge (C_{\tilde{C}\tilde{X}^\circ} > C_{\tilde{C}\tilde{X}^*})$. و از طرفی می‌دانیم که $\tilde{X}^\circ$ یک جواب شدنی برای مسائل (۸.۲) و (۹.۲) نیز است و این یک تناقض است با

$$(C_{\tilde{C}\tilde{X}^\circ} \geq C_{\tilde{C}\tilde{X}^*}) \wedge (w_{\tilde{C}\tilde{X}^\circ} < w_{\tilde{C}\tilde{X}^*})$$

که با تحلیل فوق ما با یک تناقض روبه رو می‌شویم . □

۱. اگر مسئله (۸.۲) جواب بهینه‌ی یکتا داشته باشد آن‌گاه $(C_{\tilde{X}}, W^L_{\tilde{X}}, w^R_{\tilde{X}})$ جواب بهینه‌ی پارتو مسئله(۵.۲) خواهد بود.

۲. فرض کنید مسئله (۸.۲) جواب های بهینه دگرین داشته باشد، آن‌گاه $(C_{\tilde{X}}, W^L_{\tilde{X}}, w^R_{\tilde{X}})$ جواب بهینه مسئله(۵.۲) است در صورتی‌که جواب بهینه مسئله(۹.۲) باشد.

بنابراین اگر مسئله (۸.۲) جواب بهینه منحصربه‌فرد داشته باشد لذا جواب بهینه مسئله (۵.۲)را بدست آوردیم، در غیراین‌صورت یعنی اگر مسئله (۸.۲) جواب بهینه دگرین داشته باشد آن‌گاه، ما مسئله (۹.۲) را روی مجموعه جواب‌های بهینه مسئله (۸.۲) حل خواهیم کرد. اما اگر مسئله (۸.۲) جواب بهینه دگرین داشته باشد به‌طوری که، جواب های بهینه بیشتری با مقدار تابع هدف یکتا وجود دارد، به این معنی است که ما جواب‌های فازی بیشتری با مرکز یکسان بدست می‌آوریم،بنابراین برای رتبه‌بندی جواب‌ها برطبق تعریف ۵.۲.۲ ما باید مسئله مربوط به حاشیه است را حل کنیم.

۴.۲ مثال کاربردی

مسئله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\tilde{C}=\begin{bmatrix}(۱۵,۵,۲)\\(۱۶,۶,۴)\\(۱۴,۴,۳)\\(۱۲,۲,۲)\end{bmatrix},\quad \tilde{A}=\begin{bmatrix}(۱۰,۲,۳)&(۱۱,۱,۲)&(۱۲,۳,۲)&(۱۵,۴,۲)\\(۱۴,۲,۲)&(۱۸,۴,۱)&(۱۷,۳,۳)&(۱۴,۱,۴)\end{bmatrix},\quad \tilde{b}=\begin{bmatrix}(۴۱۱/۷۵,۱۴۰,۱۶۲)\\(۵۳۹/۵,۱۵۴,۲۲۰)\end{bmatrix}$$

فرض کنید $\tilde{X}=\begin{bmatrix}(x_۱,x'_۱,x''_۱)\\(x_۲,x'_۲,x''_۲)\\(x_۳,x'_۳,x''_۳)\end{bmatrix}$. مسئله اول مربوط به مرکز جواب است که به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}
Max\quad a=&\,۱۴/۲۵x_۱+۱۵/۵x_۲+۱۱/۷۵x_۳+۱۲x_۴-۲/۹۲x'_۱-۳x'_۲-۲/۸۳x'_۳-۲/۷x'_۴+۴/۱x''_۱\\
&+۴/۷x''_۲+۴x''_۳+۳/۳x''_۴
\end{aligned}$$

$$s.t.\begin{cases}
\quad ۱۰/۲۵x_۱+۱۱/۲۵x_۲+۱۱/۵x_۳+۱۴/۵x_۴-۲/۱۷x'_۱-۲/۵۸x'_۲\\
-۲/۵x'_۳-۳/۰۸x'_۴+۳x''_۱+۳/۰۸x''_۲۳/۱۷x''_۳+۴/۰۸f''_۴=۴۱۱/۲۵\\
۱۴x_۱+۱۷/۲۵x_۲+۱۷x_۳+۱۴/۷۵x_۴-۳/۱۶x'_۱-۳/۸۳x'_۲-۳/۷۵x'_۳\\
-۳/۳x'_۴+۳/۸۵/۱x''_۱+۴/۶۶x''_۲+۴/۷۵x''_۳+۴/۱۶/۳x''_۴=۵۵۶\\
۲/۵x_۱+۱/۵x_۲+۲x_۳+۳x_۴-۴/۲۵x'_۱-۵/۱۲۵x'_۲-۴/۸۷۵x'_۳-۷x'_۴\\
+۶/۱۲۵x''_۱+۱/۲۵x''_۲+۶/۳۷۵x''_۳+۸/۲۵x''_۴=۱۵۱\\
۲x_۱+۲/۵x_۲+۳x_۳+۲/۵x_۴-۶/۲۵x'_۱-۷/۵x'_۲-۷/۳۷۵x'_۳-۶/۶۲۶x'_۴\\
+۷/۷۵۵x''_۱+۹/۳۷۵x''_۲+۹/۶۲۵۵x''_۳+۸/۵x''_۴=۱۸۷\\
\qquad x_۱-x'_۱\geq ۰\\
\qquad x_۲-x'_۲\geq ۰\\
\qquad x_۳-x'_۳\geq ۰\\
\qquad x_۴-x'_۴\geq ۰\\
\qquad x_۱,x_۲,x_۳,x_۴,x'_۱,x'_۲,x'_۳,x'_۴,x''_۱,x''_۲,x''_۳,x''_۴\geq ۰
\end{cases}$$

(۱۰.۲)

پس از حل این مسئله خواهیم داشت

$$a^* = ۵۶۰, \tilde{X}^* = \begin{bmatrix} (۳۸/۱۴, ۱۰/۲۵, ۰) \\ (۰, ۰, ۳/۳۰۹۱) \\ (۰, ۰, ۰) \\ (۲/۶۵, ۰, ۰) \end{bmatrix}$$

بنابراین مسئله دوم به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & ۳/۵x_۱ + ۵x_۲ + ۳/۵x_۳ + ۲x_۴ + ۵/۶۲x'_۱ + ۵/۷۵x'_۲ + ۵/۲۵x'_۴ + ۸/۲۵x''_۱ + ۵/۵۸x'_۳ \\ & + ۹/۵x''_۲ + ۸/۱۲۵x''_۳ + ۶/۷۵x''_۴ \\ s.t. & \begin{cases} ۱۰/۲۵x_۱ + ۱۱/۲۵x_۲ + ۱۱/۵x_۳ + ۱۴/۵x_۴ - ۲/۱۷x'_۱ - ۲/۵۸x'_۲ \\ -۲/۵x'_۳ - ۳/۰۸x'_۴ + ۳x''_۱ + ۳/۰۸x''_۲۳/۱۷x''_۳ + ۴/۰۸x''_۴ = ۴۱۱/۲۵ \\ ۱۴x_۱ + ۱۷/۲۵x_۲ + ۱۷x_۳ + ۱۴/۷۵x_۴ - ۳/۱۶x'_۱ - ۳/۸۳x'_۲ \\ -۳/۷۵x'_۳ - ۳/۳x'_۴ + ۳/۸۵/۱x''_۱ + ۴/۶۶x''_۲ + ۴/۷۵x''_۳ + ۴/۱۶/۳x''_۴ = ۵۵۶ \\ ۲/۵x_۱ + ۱/۵x_۲ + ۲x_۳ + ۳x_۴ - ۴/۲۵x'_۱ - ۵/۱۲۵x'_۲ \\ -۴/۸۷۵x'_۳ - ۷x'_۴ + ۶/۱۲۵x''_۱ + ۱/۲۵x''_۲ + ۶/۳۷۵x''_۳ + ۸/۲۵x''_۴ = ۱۵۱ \\ ۲x_۱ + ۲/۵x_۲ + ۳x_۳ + ۲/۵x_۴ - ۶/۲۵x'_۱ - ۷/۵x'_۲ - ۷/۳۷۵x'_۳ - ۶/۶۲۶x'_۴ \\ +۷/۷۵۵x''_۱ + ۹/۳۷۵x''_۲ + ۹/۶۲۵۵x''_۳ + ۸/۵x''_۴ = ۱۸۷ \\ ۱۴/۲۵x_۱ + ۱۵/۵x_۲ + ۱۱/۷۵x_۳ + ۱۲x_۴ - ۲/۹۲x'_۱ - ۳x'_۲ - ۲/۸۳x'_۳ - ۲/۷x'_۴ \\ +۴/۱x''_۱ + ۴/۷x''_۲ + ۴x''_۳ + ۳/۳x''_۴ = ۵۶۰ \\ \qquad x_۱ - x'_۱ \geq ۰ \\ \qquad x_۲ - x'_۲ \geq ۰ \\ \qquad x_۳ - x'_۳ \geq ۰ \\ \qquad x_۴ - x'_۴ \geq ۰ \\ \qquad x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x'_۱, x'_۲, x'_۳, x'_۴, x''_۱, x''_۲, x''_۳, x''_۴ \geq ۰ \end{cases} \end{aligned}$$

(۱۱.۲)

جواب به صورت $\tilde{X}^* = \begin{bmatrix} (۳۷/۴۷, ۸/۳۳, ۰) \\ (۰, ۰, ۳/۸۲) \\ (۰, ۰, ۰) \\ (۲/۹۷, ۱/۱۸, ۰) \end{bmatrix}$ و مقدار مسئله دوم ۲۲۶/۳۷۳۲ به دست می‌آید.

اگر جواب بدست آمده از بخش اول این مثال که مربوط به مرکز است با جواب به‌دست امده

از بخش دوم این مثال که مربوط به حاشیه است را در تابع هدف مسئله اصلی جایگذاری کنیم، آن‌گاه این یعنی مقدار بهینه تابع هدف مسئله اصلی یک عدد فازی است و به شکل فازی (۲۲۶/۳,۲۲۶/۳,۵۶۰) است.

فصل ۳

یک روش جدید برای حل مسائل برنامه ریزی خطی کاملا فازی

۱.۳ مقدمه

در فصل ۲ روش حل مسائل برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی را با استفاده از روش الفبایی بیان کردیم. حال در این فصل یک روش جدید برای پیدا کردن جواب بهینه فازی مسائل برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی با محدودیت های مساوی ارائه می‌دهیم. استفاده از این روش در مقایسه با روش های قبل آسان تر است. مطالب این فصل از مراجع [۲۶، ۲۵، ۱۰] می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۳. فرض کنید $F(R)$ مجموعه اعداد فازی تعریف شده روی اعداد حقیقی است. تابع رتبه بندی تابعی است $\Re\colon F(R) \longrightarrow R$ هر عدد فازی را به یک عدد حقیقی نگاشت می کند و ترتیب منظمی در آن است . فرض کنید $\tilde{A} = (a, b, c)$ یک عدد فازی مثلثی باشد انگاه $\Re(\tilde{A}) = \frac{a + ۲b + c}{۲}$.

۲.۳ مسئله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی

مسائل برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی با m محدودیت تساوی فازی و n متغیر فازی به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$\begin{aligned} & Maximize\ (or Minimize)(\tilde{C}^T \otimes \tilde{X}) \\ (p_1) \qquad & subject\ to \quad \tilde{A} \otimes \tilde{X} = \tilde{b} \\ & \tilde{X} \quad \text{عدد فازی نامنفی است} \end{aligned}$$

که درآن $\tilde{C}^T = [\tilde{c}_j]_{1\times n},\ \tilde{X} = [\tilde{x}_j]_{n\times 1},\ \tilde{A} = [\tilde{a}_j]_{m\times n},\ \tilde{b} = [\tilde{b}_i]_{m\times 1}$ و $\tilde{a}_{ij}, \tilde{c}_j, \tilde{x}_j, \tilde{b}_i \in F(\mathbb{R})$.

۱.۲.۳ کاربرد تابع رتبه بندی برای حل مسائلFFLP

جواب بهینه‌ی فازی مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی (P_1) یک عدد فازی $\tilde{X}$ خواهد بود اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱. $\tilde{X}$ عدد فازی نامنفی باشد ،

۲. $\tilde{A} \otimes \tilde{X} = \tilde{b}$،

۳. اگرهر عدد فازی نامنفی دیگری مانند $\tilde{X}'$ وجود داشته باشد، به طوری که $\tilde{A} \otimes \tilde{X}' = \tilde{b}$ آنگاه $\Re(\tilde{C}^T \otimes \tilde{X}) > \Re(\tilde{C}^T \otimes \tilde{X}')$ (در مورد مسئله ماکسیمم) و $\Re(\tilde{C}^T \otimes \tilde{X}') < \Re(\tilde{C}^T \otimes \tilde{X})$ (در مورد مسئله مینیمم)

ملاحظه ۱.۲.۳. فرض کنید $\tilde{X}$ جواب بهینه فازی مسئله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی (p_1) باشد، اگر عدد فازی $\tilde{Y}$ وجود داشته باشد به طوری‌که،

۱. $\tilde{Y}$ عدد فازی نامنفی باشد ،

۲. $\tilde{A} \otimes \tilde{Y} = \tilde{b}$،

۳. $\Re(\tilde{C}^T \otimes \tilde{X}) = \Re(\tilde{C}^T \otimes \tilde{Y})$

بنابراین $\tilde{Y}$ را جواب بهینه فازی دگرین مسئله (P_1) گویند.

۳.۳ کاستی و نکته ضعف های روش های موجود

۱. روش هایی برای مسائل برنامه ریزی خطی کاملاً فازی پیشنهاد شده است از جمله روش دهقان و همکاران [10] و روش لطفی و همکاران که در فصل ۲ بیان کردیم [۲۶]. در روش دهقان [1] و همکاران برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی فقط زمانی

[1] Dehghan

کاربرد دارد که تمام عناصر ماتریس ضرایب اعداد فازی نامنفی باشند. به عنوان نمونه به علت وجود اعداد فازی منفی نمی‌توان ازاین روش مثال زیر را حل کرد:

مثال ۱.۳.۳.

$$(۲,۳,۴) \otimes \tilde{x}_۱ \oplus (۱,۲,۳) \otimes \tilde{x}_۲ = (۵,۲۱,۴۳)$$
$$(-۱,۱,۲) \otimes \tilde{x}_۱ \oplus (۱,۳,۴) \otimes \tilde{x}_۲ = (-۶,۱۴,۳۴)$$
$\tilde{x}_۱, \tilde{x}_۲$ عدد فازی نامنفی است

۲. روش لطفی و همکاران [26] نیز زمانی کاربرد دارد که عناصر ماتریس ضرایب ماتریس اعداد فازی متقارن باشند. برای حل مسئله برنامه ریزی خطی کاملا فازی که عناصر ماتریس ضرایب عدد مثلثی نامتقارن فازی باشد، با استفاده از این روش ابتدا اعداد فازی نامتقارن را به نزدیک ترین عدد فازی متقارن تقریب می‌زنیم. به علت این تبدیل جواب های بدست آمده دقیق نخواهند بود.

۴.۳ روش پیشنهادی برای پیدا کردن جواب بهینه مسائل برنامه FFLP

در این بخش، یک روش جدید برای پیدا کردن جواب بهینه فازی برای مدل برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی $(p_۱)$ پیشنهاد شده است.
مراحل روش پیشنهادی عبارتنداز:
گام۱. جایگذاری $\tilde{C}^T = [\tilde{c}_j]_{۱\times n}, \tilde{X} = [\tilde{x}_j]_{n\times ۱}, \tilde{A} = [\tilde{a}_j]_{m\times n}, \tilde{b} = [\tilde{b}_i]_{m\times ۱}$ که مسئله فوق به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$Maximize\ (or Minimize)\ (\sum_{j=۱}^{n} \tilde{c}_j \otimes \tilde{x}_j)$$
$$subject\ to \quad \sum_{j=۱}^{n} \tilde{a}_{ij} \otimes \tilde{x}_j = \tilde{b}_i \quad \forall i = ۱,۲,\cdots,m.$$
$\tilde{x}_j$ عدد فازی مثلثی نامنفی است

گام۲. اگر تمام پارامتر ها $\tilde{a}_{ij}, \tilde{x}_j, \tilde{c}_j$ و b_i به ترتیب با اعداد فازی مثلثی $(p_j, q_j, r_j), (x_j, y_j, z_j), (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij})$ و (b_i, g_i, h_i) نشان داده شوند آنگاه مسئله بدست آمده در گام۱ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$Maximize\ (or Minimize)\ \sum_{j=1}^{n}(p_j, q_j, r_j) \otimes (x_j, y_j, z_j),$$

$$subject\ to \quad \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) \otimes (x_j, y_j, z_j) = (b_i, g_i, h_i) \quad \forall i = 1, 2, \cdots, m,$$

(x_j, y_j, z_j) عدد فازی مثلثی نامنفی است

گام۳. فرض کنید $(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) \otimes (x_j, y_j, z_j) = (m_{ij}, n_{ij}, o_{ij})$
مسئله بدست آمده در گام۲ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$Maximize\ (or Minimize)\ \Re\Big(\sum_{j=1}^{n}(p_j, q_j, r_j) \otimes (x_j, y_j, z_j)\Big),$$

$$subject\ to \quad \sum_{j=1}^{n}(m_{ij}, n_{ij}, o_{ij}) = (b_i, g_i, h_i) \quad \forall i = 1, 2, \cdots, m,$$

(x_j, y_j, z_j) عدد فازی مثلثی نامنفی است

گام۴. با استفاده از عملیات حسابی تعریف شده در بخش ۱.۴.۱ و تعریف۵.۴.۱، مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی در گام ۳ به مسئله برنامه ریزی خطی قطعی زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} &Maximize\ (or Minimize)\ \Re\Big(\sum_{j=1}^{n}(p_j, q_j, r_j) \otimes (x_j, y_j, z_j)\Big), \\ &subject\ to \quad \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = b_i, \quad \forall i = 1, 2, \cdots, m, \\ &\qquad\qquad\quad \sum_{j=1}^{n} n_{ij} = g_i, \quad \forall i = 1, 2, \cdots, m, \\ &\qquad\qquad\quad \sum_{j=1}^{n} o_{ij} = h_i, \quad \forall i = 1, 2, \cdots, m, \\ &\qquad y_j - x_j \geq 0, z_j - y_j \geq 0, \quad \forall j = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned}$$

گام۵. پیدا کردن جواب بهینه x_j، y_j و z_j با حل مسئله برنامه ریزی خطی قطعی که در گام ۴ بدست آمد .

گام۶. پیدا کردن جواب بهینه فازی با جایگذاری مقادیر x_j، y_j و z_j در $\tilde{x}_j = (x_j, y_j, z_j)$.

گام۷. پیدا کردن مقدار بهینه فازی با قرار دادن $\tilde{x}_j$ درتابع هدف $\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \otimes \tilde{x}_j$.

۵.۳ مثال کاربردی

مسئله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی زیر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم آن را با کمک روشی که بیان کردیم حل کنیم

$$
\begin{aligned}
&Maximize\,(1,6,9)\otimes\tilde{x}_1\oplus(2,3,8)\otimes\tilde{x}_2,\\
&subject\,to\quad (2,3,4)\otimes\tilde{x}_1\oplus(1,2,3)\otimes\tilde{x}_2=(6,16,30),\\
&\qquad\qquad\quad (-1,1,2)\otimes\tilde{x}_1\oplus(1,3,4)\otimes\tilde{x}_2=(1,17,30),\\
&\tilde{x}_1,\tilde{x}_2\quad \text{اعداد فازی مثلثی نامنفی هستند}
\end{aligned}
$$

فرض کنید $\tilde{x}_1=(x_1,y_1,z_1)$ و $\tilde{x}_2=(x_2,y_2,z_2)$. آنگاه مسئله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&Maximize\ ((1,6,9)\otimes(x_1,y_1,z_1)\oplus(2,3,8)\otimes(x_2,y_2,z_2),\\
&subject\,to\quad (2,3,4)\otimes(x_1,y_1,z_1)\oplus(1,2,3)\otimes(x_2,y_2,z_2)=(6,16,30),\\
&\qquad\qquad\quad (-1,1,2)\otimes(x_1,y_1,z_1)\oplus(1,3,4)\otimes(x_2,y_2,z_2)=(1,17,30),\\
&(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\quad \text{اعداد فازی مثلثی نامنفی هستند}
\end{aligned}
$$

با توجه به گام۳، مسئله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی فوق به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&Maximize\,\Re(1x_1+2x_2,6y_1+3y_2,9z_1+8z_2)\\
&subject\,to\quad (2x_1+x_2,3y_1+2y_2,4z_1+3z_2)=(6,16,30),\\
&\qquad\qquad\quad (-x_1+x_2,y_1+3y_2,2z_1+4z_2)=(1,17,30),\\
&(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\quad \text{اعداد فازی مثلثی نامنفی هستند}
\end{aligned}
$$

بااستفاده از گام ۴ روش ارائه شده و تابع رتبه بندی در تعریف ۱.۱.۳ مسئله برنامه‌ریزی خطی فوق به مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی زیر تبدیل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&Maximize\left(\frac{1}{4}(x_1+2x_2+12y_1+6y_2+9z_1+8z_2)\right)\\
&subject\,to\quad 2x_1+x_2=6,\\
&\qquad\qquad -x_1+x_2=1,\\
&\qquad\qquad 3y_1+2y_2=16,\\
&\qquad\qquad y_1+3y_2=17,\\
&\qquad\qquad 4z_1+3z_2=30,\\
&\qquad\qquad 2z_1+4z_2=30,\\
&y_1-x_1\geq 0,\ z_1-y_1\geq 0,\ y_2-x_2\geq 0,\ z_2-y_2\geq 0
\end{aligned}
$$

جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی فوق برابر است با:

$$x_1=1, y_1=2, z_1=3, x_2=4, y_2=5, z_2=6$$

با توجه به گام۶، جواب بهینه فازی $\tilde{x}_1=(1,2,3), \tilde{x}_2=(4,5,6)$ بدست می‌آید. ازاین رو با استفاده از گام۷، مقدار بهینه فازی مسئله FFLP برابر $(9,27,75)$ است .

مثال ۱.۵.۳. مسئله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی زیر را در نظر بگیرید. این مسئله را با کمک روشی که بیان کردیم حل می‌کنیم

$$
\begin{aligned}
&Maximize\,((1,2,3)\otimes\tilde{x}_1\oplus(2,3,4)\otimes\tilde{x}_2),\\
&subject\,to\quad (0,1,2)\otimes\tilde{x}_1\oplus(1,2,3)\otimes\tilde{x}_2=(2,10,24),\\
&\qquad\qquad (1,2,3)\otimes\tilde{x}_1\oplus(0,1,2)\otimes\tilde{x}_2=(1,8,21),\\
&\tilde{x}_1,\tilde{x}_2\quad \text{اعداد فازی مثلثی نامنفی هستند}
\end{aligned}
$$

فرض کنید $\tilde{x}_1=(x_1,y_1,z_1)$) و $\tilde{x}_2=(x_2,y_2,z_2)$. آنگاه مسئله برنامه‌ریزی خطی کاملا فازی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&Maximize\,((1,2,3)\otimes(x_1,y_1,z_1)\oplus(2,3,4)\otimes\tilde{x}_2),\\
&subject\,to\quad (0,1,2)\otimes(x_1,y_1,z_1)\oplus(1,2,3)\otimes(x_2,y_2,z_2)=(2,10,24),\\
&\qquad\qquad (1,2,3)\otimes(x_1,y_1,z_1)\oplus(0,1,2)\otimes(x_2,y_2,z_2)=(1,8,21),\\
&(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\quad \text{اعداد فازی مثلثی نامنفی هستند}
\end{aligned}
$$

با توجه به گام۳، مسئله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی فوق به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&Maximize\ \Re(۱x_۱+۲x_۲, ۲y_۱+۳y_۲, ۳z_۱+۴z_۲)\\
&subject\, to \quad (۰x_۱+x_۲, y_۱+۲y_۲, ۲z_۱+۳z_۲)=(۲,۱۰,۲۴),\\
&\qquad (x_۱+۰x_۲, ۲y_۱+y_۲, ۳z_۱+۲z_۲)=(۱,۸,۲۱),\\
&(x_۱,y_۱,z_۱),(x_۲,y_۲,z_۲) \quad \text{اعداد فازی مثلثی نامنفی هستند}
\end{aligned}
$$

با استفاده از گام ۴ روش ارائه شده مسئله برنامه‌ریزی خطی فوق به مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی زیر تبدیل می‌شود

$$
\begin{aligned}
&Maximize \left(\frac{۱}{۴}(x_۱+۲x_۲+۴y_۱+۶y_۲+۳z_۱+۴z_۲)\right)\\
&subject\, to \quad ۰x_۱+x_۲=۲,\\
&\qquad x_۱+۰x_۲=۱,\\
&\qquad y_۱+۲y_۲=۱۰,\\
&\qquad ۲y_۱+y_۲=۸,\\
&\qquad ۲z_۱+۳z_۲=۲۴,\\
&\qquad ۳z_۱+۲z_۲=۲۱,\\
&y_۱-x_۱\geq ۰,\ z_۱-y_۱\geq ۰,\ y_۲-x_۲\geq ۰,\ z_۲-y_۲\geq ۰
\end{aligned}
$$

جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی فوق برابر است با:

$$x_۱=۱, y_۱=۲, z_۱=۳, x_۲=۲, y_۲=۴, z_۲=۶$$

با توجه به گام۶، جواب بهینه فازی $\tilde{x}_۱=(۱,۲,۳), \tilde{x}_۲=(۲,۴,۶)$ بدست می‌آید. ازاین رو با استفاده از گام۷، مقدار بهینه فازی مسئله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی برابر $(۵,۱۶,۳۳)$ است.

۶.۳ مزایای روش مطرح شده نسبت به روش‌های موجود

در این بخش نشان می‌دهیم که با استفاده از روش مطرح شده همه‌ی کاستی هایی که در بخش ۳.۳ در روش های دهقان وهمکاران وروش لطفی و همکاران [۱۰، ۲۶] بیان شد رفع خواهد شد وهم چنین برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی این روش کارایی بیشتری دارد وبهتر است.

در بخش۳.۳، اشاره کردیم که روش دهقان وهمکاران [۱۰]تنها برای یافتن جواب دقیق یک نوع خاصی از مسائل برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی که همه پارامترها عناصر ضرائب ماتریس

اعداد فازی نامنفی هستند به کار می‌رود. مزیت روش مطرح شده نسبت به روش [۱۰، ۲۶] این است که برای تمام مسائل برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی بدون هیچ محدودیتی روی عناصر ماتریس ضرائب به کار گرفته می‌شود و همچنین نتایج بدست آمده تمام محدودیت‌ها را برآورده می‌کند. همچنین نسبت به دو روش [۱۰، ۲۶] میزان محاسبه ریاضی کمتر و از کارایی بیشتر برخوردار است: حال مثال ۱.۳.۳ را که دربخش ۳.۳ در نظر گرفته بودیم بااین روش جدید حل خواهیم کرد:

مثال ۱.۶.۳. مسئله زیر را با ضرایب دلخواه که در مثال ۱.۳.۳ بیان شد در نظر بگیرید و با روش مطرح شده حل خواهیم کرد

$$
\begin{aligned}
&(۲,۳,۴)\otimes\tilde{x}_۱\oplus(۱,۲,۳)\otimes\tilde{x}_۲=(۵,۲۱,۴۳)\\
&(-۱,۱,۲)\otimes\tilde{x}_۱\oplus(۱,۳,۴)\otimes\tilde{x}_۲=(-۶,۱۴,۳۴)\\
&\tilde{x}_۱,\tilde{x}_۲\quad \text{عدد فازی نامنفی است}
\end{aligned}
$$

فرض کنید $\tilde{x}_۱=(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $\tilde{x}_۲=(x_۲,y_۲,z_۲)$. آن‌گاه مسئله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&((۲,۳,۴)\otimes(x_۱,y_۱,z_۱)\oplus(۱,۲,۳)\otimes(x_۲,y_۲,z_۲)=(۵,۲۱,۴۳)\\
&(-۱,۱,۲)\otimes(x_۱,y_۱,z_۱)\oplus(۱,۳,۴)\otimes(x_۲,y_۲,z_۲)=(-۶,۱۴,۳۴),\\
&(x_۱,y_۱,z_۱),(x_۲,y_۲,z_۲)\quad \text{اعداد فازی مثلثی نامنفی هستند}
\end{aligned}
$$

مسئله فوق به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&(۲x_۱+x_۲,۳y_۱+۲y_۲,۴z_۱+۳z_۲)=(۵,۲۱,۴۳),\\
&(-x_۱+x_۲,y_۱+۳y_۲,۲z_۱+۴z_۲)=(-۶,۱۴,۳۴),\\
&(x_۱,y_۱,z_۱),(x_۲,y_۲,z_۲)\quad \text{اعداد فازی مثلثی نامنفی هستند}
\end{aligned}
$$

حال با استفاده از روش مطرح شده، مسئله فوق به دستگاه قطعی زیر تبدیل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&2x_1 + x_2 = 5,\\
&-x_1 + x_2 = -6,\\
&3y_1 + 2y = 21\\
&y_1 + 3y_2 = 14,\\
&4z_1 + 3z_2 = 43\\
&2z_1 + 4z_2 = 34,\\
&y_1 - x_1 \geq 0,\ z_1 - y_1 \geq 0
\end{aligned}
$$

بنا براین دستگاه خطی فوق را به روش دوفازی حل می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
&Minimize\,(r_1 + r_2 + r'_1 + r'_2 + r''_1 + r''_2),\\
&subject\ \ to \quad 2x_1 + x_2 + r_1 = 5,\\
&\qquad -x_1 + x_2 + r_2 = -6,\\
&\qquad 3y_1 + 2y + r'_1 = 21,\\
&\qquad y_1 + 3y_2 + r'_2 = 14,\\
&\qquad 4z_1 + 3z_2 + r''_1 = 43,\\
&\qquad 2z_1 + 4z_2 + r''_2 = 34,\\
&\qquad y_1 - x_1 \geq 0,\ \ z_1 - y_1 \geq 0, y_2 - x_2 \geq 0, z_2 - y_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

که در آن $(r_1, r_2, r'_1, r'_2, r''_1, r''_2) \geq 0$ متغیر های مصنوعی نامنفی هستند. جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی فوق برابراست با $x_1 = 2$، $y_1 = 5$، $z_1 = 7$، $x_2 = 1$، $y_2 = 3$ و $z_2 = 5$. با استفاده از گام ۶، جواب فازی به‌دست آمده نیز برابر است با $\tilde{x}_1 = (2,5,7)$ و $\tilde{x}_2 = (1,3,5)$.

فصل ۴

حل مسائل FFLP براساس یک رابطه‌ی ترتیبی جدید

۱.۴ مقدمه

دراین فصل، یک رابطه‌ی جدیدی برای رتبه‌بندی اعداد فازی و مسائل برنامه ریزی خطی کاملاً فازی با محدودیت‌های منعطف معرفی می‌کنیم. بر اساس این رابطه ی جدید ما دو نوع مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی به نام FFLP۱ وFFLP۲ داریم . محدودیت های مسئله FFLP۱ نامعادله های معمولی هستند درحالی که محدودیت‌های مسئله FFLP۲ نامعادله های منعطف می‌باشد. سه الگوریتم برای حل این مسائل ارائه می‌دهیم. الگوریتم اول برای حل مسئله FFLP بدون محدودیت منعطف به کار گرفته می‌شود، در حالی که الگوریتم دوم و سوم برای مسائل با محدودیت‌های منعطف استفاده می‌شود و در آخر یک مثال عددی برای روشن شدن کارایی و شدنی بودن این الگوریتم‌هاارائه می‌دهیم. مطالب این فصل از مرجع [۳۷] می‌باشد.

۲.۴ امید ریاضی و رابطه‌ی ترتیبی جدید

دراین بخش ما مفهوم بازه‌ی مورد انتظار[۱] و مقدار مورد انتظار[۲] (امید ریاضی) را بیان می‌کنیم. در حقیقت این رابطه‌ی ترتیبی جدید که برای مقایسه‌ی دو عددفازی مثلثی استفاده می‌شود، مهم ترین نقش را در حل مسائل FFLP بازی می‌کند .

تعریف ۱.۲.۴. فرض کنید $\tilde{a}$ یک عدد فازی با فرم پارامتری $\tilde{a} = (\underline{a}(r), \bar{a}(r))$، $r \in [0,1]$ باشد. بازه‌ی مورد انتظار و امید ریاضی عدد فازی $\tilde{a}$ به ترتیب با $EI(\tilde{a})$ و $EV(\tilde{a})$ نمایش داده می‌شوند. و به صورت زیر تعریف می‌شوند :

$$EI(\tilde{a}) = [E^-_{\tilde{a}}, E^+_{\tilde{a}}] = [\frac{\int_0^1 r\underline{a}(r)dr}{\int_0^1 rdr}, \frac{\int_0^1 r\bar{a}(r)dr}{\int_0^1 rdr}]$$

$$EV(\tilde{a}) = \frac{E^-_{\tilde{a}} + E^+_{\tilde{a}}}{2}$$

تعریف ۲.۲.۴. برای هر جفت عدد فازی $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ ، درجه بزرگتری $\tilde{a}$ از $\tilde{b}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P(\tilde{a},\tilde{b}) = \begin{cases} 0, & \text{اگر} E^+_{\tilde{a}} - E^-_{\tilde{b}} < 0 \\ \dfrac{E^+_{\tilde{a}} - E^-_{\tilde{b}}}{E^+_{\tilde{a}} - E^-_{\tilde{b}} - (E^-_{\tilde{a}} - E^+_{\tilde{b}})} & \text{اگر} E^+_{\tilde{a}} - E^-_{\tilde{b}} \geq 0 E^-_{\tilde{a}} - E^+_{\tilde{b}} \leq 0 \\ 1, & \text{اگر} E^-_{\tilde{a}} - E^+_{\tilde{b}} > 0 \end{cases}$$

تعریف ۳.۲.۴. فرض کنید $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ دوعدد فازی دلخواه باشند. آن‌گاه رابطه‌ی ترتیبی بین اعداد فازی به صورت زیر تعریف می‌شود .

۱. $\tilde{a} \succeq \tilde{b}$ اگر وتنها اگر $p(\tilde{a},\tilde{b}) \geq \frac{1}{2}$

۲. $\tilde{a} \preceq \tilde{b}$ اگر وتنها اگر $p(\tilde{b},\tilde{a}) \geq \frac{1}{2}$

۳. $\tilde{a} \simeq \tilde{b}$ اگر وتنها اگر $p(\tilde{a},\tilde{b}) = \frac{1}{2}$

به طور کلی در این فصل نماد " $\precsim$ " برای فرموله کردن برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی با محدودیت منعطف به کار می‌رود . در اینجا نامعادله منعطف $\tilde{a} \precsim \tilde{b}$. به این معناست که $\tilde{a}$ کمتر از $\tilde{b}$ از درجه‌ی α گفته می‌شود هرگاه $P(\tilde{b},\tilde{a}) \geq \alpha$. در این فصل نامعادله منعطف $\tilde{a} \precsim \tilde{b}$ را با $\tilde{a} \preceq_\alpha \tilde{b}$ نمایش می‌دهیم، که درآن $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$.
حال تعدادی از ویژگی‌های این رابطه ترتیبی جدید را درقالب تعدادی گزاره و نکات بیان می‌کنیم .

[۱] Expected Interval
[۲] Expected Value

گزاره ۱.۲.۴. فرض کنید $\tilde{a}, \tilde{b} \in F(\mathbb{R})$ ، آن گاه $P(\tilde{a}, \tilde{b}) + P(\tilde{b}, \tilde{a}) = ۱$.

برهان. بازه‌ی مورد انتظار $\tilde{a}$ و $\tilde{b}$ برابر است با $EI(\tilde{a}) = [E_{\tilde{a}}^{-}, E_{\tilde{a}}^{+}]$ و $EI(\tilde{b}) = [E_{\tilde{b}}^{-}, E_{\tilde{b}}^{+}]$
اگر $E_{\tilde{a}}^{+} - E_{\tilde{b}}^{-} < ۰$ ، آنگاه $E_{\tilde{b}}^{-} - E_{\tilde{a}}^{+} > ۰$. طبق تعریف ۲.۲.۴

$$P(\tilde{a}, \tilde{b}) + P(b,\tilde{}\tilde{a}) = ۰ + ۱ = ۱$$

اگر $E_{\tilde{a}}^{-} - E_{\tilde{b}}^{+} > ۰$ ، آنگاه $E_{\tilde{b}}^{+} - E_{\tilde{a}}^{-} < ۰$. طبق تعریف ۲.۲.۴

$$P(\tilde{a}, \tilde{b}) + P(b,\tilde{}\tilde{a}) = ۱ + ۰ = ۱$$

اگر $E_{\tilde{a}}^{+} - E_{\tilde{b}}^{-} \geq ۰$ و $E_{\tilde{a}}^{-} - E_{\tilde{b}}^{+} \leq ۰$ آن‌گاه

$$\begin{aligned} & P(\tilde{a}, \tilde{b}) + P(b,\tilde{}\tilde{a}) \\ &= \frac{E_{\tilde{a}}^{+} - E_{\tilde{b}}^{-}}{E_{\tilde{a}}^{+} - E_{\tilde{b}}^{-} - (E_{\tilde{a}}^{-} - E_{\tilde{b}}^{+})} + \frac{E_{\tilde{b}}^{+} - E_{\tilde{a}}^{-}}{E_{\tilde{b}}^{+} - E_{\tilde{a}}^{-} - (E_{\tilde{b}}^{-} - E_{\tilde{a}}^{+})} \\ &= ۱. \end{aligned}$$

□

گزاره ۲.۲.۴. فرض کنید $\tilde{a}$، $\tilde{b}$ و $\tilde{c}$ سه عدد فازی دلخواه باشند . آن‌گاه

۱. $\tilde{a} \preceq \tilde{a}$.

۲. اگر $\tilde{b} \preceq \tilde{a}$ و $\tilde{a} \preceq \tilde{b}$ آن‌گاه $\tilde{b} \simeq \tilde{a}$،

۳. اگر $\tilde{b} \preceq \tilde{a}$ و $\tilde{c} \preceq \tilde{b}$ آن‌گاه $\tilde{c} \preceq \tilde{a}$.

۴. برای هر $\tilde{b}$ و $\tilde{a}$، $\tilde{b} \preceq \tilde{a}$ یا $\tilde{b} \succeq \tilde{a}$.

برهان. ۱. ازآن جایی که

$$P(\tilde{a}, \tilde{a}) = \frac{E_{\tilde{a}}^{+} - E_{\tilde{a}}^{-}}{E_{\tilde{a}}^{+} - E_{\tilde{a}}^{-} - (E_{\tilde{a}}^{-} - E_{\tilde{a}}^{+})} = \tfrac{۱}{۲} \geq \tfrac{۱}{۲}$$

پس داریم $\tilde{a} \preceq \tilde{a}$.

۲. از اینکه $\tilde{b} \preceq \tilde{a}$ و $\tilde{a} \preceq \tilde{b}$ پس $P(\tilde{a}, \tilde{b}) \geq \tfrac{۱}{۲}$ و $P(\tilde{b}, \tilde{a}) \geq \tfrac{۱}{۲}$. با در نظر گرفتن

$$P(\tilde{a}, \tilde{b}) + P(\tilde{b}, \tilde{a}) = ۱$$

نتیجه می‌گیریم $P(\tilde{a}, \tilde{b}) = P(\tilde{b}, \tilde{a}) = \tfrac{۱}{۲}$. لذا طبق تعریف ۲.۲.۴ $\tilde{b} \simeq \tilde{a}$

۳. $\tilde{a} \preceq \tilde{b}$ و $\tilde{c} \preceq \tilde{b}$ لذا $P(\tilde{b}, \tilde{a}) \geq \frac{1}{2}$ و $P(\tilde{c}, \tilde{b}) \geq \frac{1}{2}$. یعنی

$$\frac{E^{+}_{\tilde{b}} - E^{-}_{\tilde{a}}}{E^{+}_{\tilde{b}} - E^{-}_{\tilde{a}} - (E^{-}_{\tilde{b}} - E^{+}_{\tilde{a}})} \geq \frac{1}{2},$$

$$\frac{E^{+}_{\tilde{c}} - E^{-}_{\tilde{b}}}{E^{+}_{\tilde{c}} - E^{-}_{\tilde{b}} - (E^{-}_{\tilde{c}} - E^{+}_{\tilde{b}})} \geq \frac{1}{2}$$

آن‌گاه

$$E^{-}_{\tilde{a}} + E^{+}_{\tilde{a}} \leq E^{-}_{\tilde{b}} + E^{+}_{\tilde{b}}, E^{-}_{\tilde{b}} + E^{+}_{\tilde{b}} \leq E^{-}_{\tilde{c}} + E^{+}_{\tilde{c}}.$$

از این رو

$$E^{-}_{\tilde{a}} + E^{+}_{\tilde{a}} \leq E^{-}_{\tilde{c}} + E^{+}_{\tilde{c}},$$

بنابراین

$$\frac{E^{+}_{\tilde{c}} - E^{-}_{\tilde{a}}}{E^{+}_{\tilde{c}} - E^{-}_{\tilde{a}} - (E^{-}_{\tilde{c}} - E^{+}_{\tilde{a}})} \geq \frac{1}{2}$$

یعنی

$$P(\tilde{c}, \tilde{a}) \geq \frac{1}{2}.$$

که طبق تعریف ۳.۲.۴ داریم $\tilde{a} \preceq \tilde{c}$.

۴. چون $P(\tilde{a}, \tilde{b}) \in [0, 1]$ واضح است که یا $P(\tilde{a}, \tilde{b}) \geq \frac{1}{2}$ یا $P(\tilde{a}, \tilde{b}) \leq \frac{1}{2}$ و اثبات کامل است

□

ملاحظه ۱.۲.۴. رابطه‌ی ترتیبی $\preceq$ یک رابطه‌ی ترتیبی تام روی مجموعه‌ی $F(\mathbb{R})$ است.
یعنی رابطه $\preceq$ اولاً روی $F(\mathbb{R})$ مجموعه مرتب جزئی باشد، ثانیا به ازای هر دو عضو $a, b \in F(\mathbb{R})$ یا $b \preceq a$ یا $a \preceq b$.

ملاحظه ۲.۲.۴. فرض کنید $\tilde{a}, \tilde{b} \in F(\mathbb{R})$. آن‌گاه ویژگی‌های زیر هم ارزند.

۱. $\tilde{a} \simeq \tilde{b}$،

۲. $\tilde{a} \preceq \tilde{b}$ و $\tilde{b} \preceq \tilde{a}$،

۳. $P(\tilde{a}, \tilde{b}) = \frac{1}{2}$،

۴. $P(\tilde{b}, \tilde{a}) = \frac{1}{2}$،

۳.۴ دو مدل از مسائل برنامه ریزی خطی کاملا فازی

در این بخش ما دو نوع از مسائل برنامه ریزی خطی کاملا فازی را معرفی می‌کنیم. قبل از مدل‌سازی بهینه‌سازی مسئله ابتدا مفروضات ضروری را بیان می‌کنیم.

فرض اول: مدل بهینه‌سازی به برنامه‌ریزی خطی کاهش پیدا می‌کند .به عبارتی دیگر همه‌ی توابع هدف ومحدودیت با شکل خطی بیان می‌شوند.

فرض دوم: همه‌ی پارامترها ومتغیر ها با اعداد فازی مثلثی ارزش گذاری می‌شوند.

نوع I: برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی بدون محدودیت منعطف: برنامه ریزی خطی کاملاً فازی بدون محدودیت منعطف به شکل زیر بیان می‌شود:

$$(FFLP1) \tag{۱.۴}$$
$$\max z(\tilde{x}) = \tilde{c_1} \otimes \tilde{x_1} \oplus \tilde{c_2} \otimes \tilde{x_2} \oplus \cdots \oplus \tilde{c_n} \otimes \tilde{x_n}$$
$$s.t. \begin{cases} \tilde{a}_{i1} \otimes \tilde{x}_1 \oplus \tilde{a}_{i2} \otimes \tilde{x}_2 \oplus \cdots \oplus \tilde{a}_{in} \otimes \tilde{x}_n \preceq \tilde{b}_i, & \forall i = 1, 2, \cdots, m, \\ \tilde{x}_j \in TF(\mathbb{R})^+, & \forall j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases}$$

که درآن $\tilde{b}_i$،$\tilde{a}_{ij}$،$\tilde{x}_j$ $\tilde{c}_j$ برای $i = 1, 2, \cdots, m$ و $j = 1, 2, \cdots, n$ اعداد فازی مثلثی هستند . رابطه‌ی ترتیبی $\preceq$ برای مقایسه‌ی بین اعداد فازی مثلثی که در تعریف ۳.۲.۴ آورده شده است، استفاده می‌شود.

نوع II: برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی با محدودیت های منعطف: مدل برنامه‌ریزی خطی کاملا فازی با محدودیت‌های منعطف به شرح زیر است:

$$(FFLP2) \tag{۲.۴}$$
$$\max z(\tilde{x}) = \tilde{c_1} \otimes \tilde{x_1} \oplus \tilde{c_2} \otimes \tilde{x_2} \oplus \cdots \oplus \tilde{c_n} \otimes \tilde{x_n}$$
$$s.t. \begin{cases} \tilde{a}_{i1} \otimes \tilde{x}_1 \oplus \tilde{a}_{i2} \otimes \tilde{x}_2 \oplus \cdots \oplus \tilde{a}_n \otimes \tilde{x}_n \preceq_\alpha \tilde{b}_i, & \forall i = 1, 2, \cdots, m, \\ \tilde{x}_j \in TF(\mathbb{R})^+, & \forall j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases}$$

که درآن $\tilde{b}_i$،$\tilde{a}_{ij}$،$\tilde{x}_j$ $\tilde{c}_j$، $\forall i = 1, 2, \cdots, m$ و $\forall j = 1, 2, \cdots, n$ اعداد فازی مثلثی هستند در مسئله‌ی فوق α منعطف است و $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$.

۴.۴ الگوریتمی برای حل مسئله FFLP1

ناحیه شدنی، جواب شدنی و جواب بهینه و مقدار بهینه این مسئله همانند مسائل برنامه‌ریزی خطی قطعی است. با استفاده از تعاریفی این مفاهیم را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۴.۴. در مسئله‌ی (FFLP1)، $D = \{\tilde{x} \in (TF(R)^+)^n | \tilde{a} \otimes \tilde{x} \preceq \tilde{b}\}$ را ناحیه‌ی شدنی گویند و هر $\tilde{x} \in D$ را یک جواب شدنی می‌گویند.

تعریف ۲.۴.۴. $\tilde{x}^* \in D$ راجواب بهینه‌ی مسئله (FFLP1) گویند، اگر برای هر $\tilde{x} \in D$، داشته باشیم $z(\tilde{x}) \preceq z(\tilde{x}^*)$. همچنین $z(\tilde{x}^*)$ را مقدار بهینه‌ی تابع هدف گویند.

بنابراین برای حل مسئله (FFLP1) سعی می‌کنیم این مسئله را به مسائل برنامه‌ریزی خطی قطعی هم ارز تبدیل کنیم.

لم ۱.۴.۴. $\tilde{a} \preceq \tilde{b} \Leftrightarrow EV(\tilde{a}) \leq EV(\tilde{b})$.

برهان. $\tilde{a} \preceq \tilde{b}$ طبق تعریف ۳.۲.۴ اگر و تنها اگر $p(\tilde{b}, \tilde{a}) \geq \frac{۱}{۲}$ لذا

$$\frac{E^+_{\tilde{b}} - E^-_{\tilde{a}}}{E^+_{\tilde{b}} - E^-_{\tilde{a}} - (E^-_{\tilde{b}} - E^+_{\tilde{a}})} \geq \frac{۱}{۲}$$

اگر و تنها اگر

$$E^-_{\tilde{a}} - E^+_{\tilde{a}} \leq E^-_{\tilde{b}} - E^+_{\tilde{b}}$$

اگر و تنها اگر

$$EV(\tilde{a}) \leq EV(\tilde{b}).$$

□

قضیه ۱.۴.۴. مدل (FFLP1) با مدل (LP1) هم ارزاست.

$$(LP۱) \qquad (۳.۴)$$

$$\max EV(z(\tilde{x})) = EV(\tilde{c} \otimes \tilde{x})$$

$$s.t. \begin{cases} EV(\tilde{a}_{i۱} \otimes \tilde{x}_۱ \oplus \tilde{a}_{i۲} \otimes \tilde{x}_۲ \oplus \cdots \oplus \tilde{a}_{in} \otimes \tilde{x}_n) \leq EV(\tilde{b}_i), & \forall i = ۱, ۲, \cdots, m, \\ \tilde{x}_j \in TF(\mathbb{R})^+, & \forall j = ۱, ۲, \cdots, n. \end{cases}$$

برهان. فرض کنید ناحیه شدنی مسئله (FFLP1) و (LP1) به ترتیب $D_{FFLP۱}$ و $D_{LP۱}$ باشد. طبق لم ۱.۴.۴

$$\tilde{a}_{i۱} \otimes \tilde{x}_۱ \oplus \tilde{a}_{i۲} \otimes \tilde{x}_۲ \oplus \cdots \oplus \tilde{a}_{in} \otimes \tilde{x}_n) \preceq \tilde{b}_i,$$

اگر و تنها اگر

$$EV(\tilde{a}_{i۱} \otimes \tilde{x}_۱ \oplus \tilde{a}_{i۲} \otimes \tilde{x}_۲ \oplus \cdots \oplus \tilde{a}_{in} \otimes \tilde{x}_n) \leq EV(\tilde{b}_i),$$

بنابراین قیود مسئلهمسئله (FFLP1) و (LP1) معادل اند، یعنی $D_{LP1} = D_{FFLP1}$. اگر $\tilde{x}^*$ جواب بهینه‌ی (FFLP1) باشد آن‌گاه برای هر $x \in D_{FFLP1}$، $z(\tilde{x}) \leq z(\tilde{x}^*)$ طبق لم ۱.۴.۴ ، برای هر $x \in D_{FFLP1} = D_{LP1}$، داریم $EV(z(\tilde{x}) = EV(z(\tilde{x}^*)$ این نشان می‌دهد که $\tilde{x}^*$ جواب بهینه‌ی مدل مسئله‌ی LP1 است. به همین شکل هر جواب بهینه‌ی (LP1) یک جواب بهینه‌ی (FFLP1) است. بنابراین مدل (FFLP1)و (LP1) باهم هم ارز می‌باشند. □

لم ۲.۴.۴. فرض کنید $\tilde{a} = (a_1, a_2, a_3) \in TF(\mathbb{R})$. آن‌گاه $E^-_{\tilde{a}} = \frac{1}{3}(a_1 + 2a_2)$، $E^+_{\tilde{a}} = \frac{1}{3}(2a_2 + a_3)$ و $EV(\tilde{a}) = \frac{1}{6}(a_1 + 4a_2 + a_3)$.

برهان. فرض کنید فرم پارامتری $\tilde{a}$ به صورت $r \in [0, 1]$، $\tilde{a} = (\underline{a}(r), \bar{a}(r))$ باشد. آن‌گاه

$$\underline{a}(r) = a_1 + r(a_2 - a_1), \quad \bar{a}(r) = a_3 - r(a_3 - a_2)$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned}
E^-_{\tilde{a}} &= \frac{\int_0^1 r\underline{a}(r)dr}{\int_0^1 r\mathrm{d}r} \\
&= 2\int_0^1 r(a_1 + r(a_2 - a_1))\mathrm{d}r = \frac{1}{3}(a_1 + 2a_2) \\
E^+_{\tilde{a}} &= \frac{\int_0^1 r\bar{a}(r)\mathrm{d}r}{\int_0^1 r\mathrm{d}r} \\
&= 2\int_0^1 r(a_3 - r(a_3 - a_2))\mathrm{d}r = \frac{1}{3}(2a_2 + a_3)
\end{aligned}$$

و آن‌گاه

$$EV(\tilde{a}) = \frac{1}{2}(E^-_{\tilde{a}} + E^+_{\tilde{a}}) = \frac{1}{6}(a_1 + 4a_2 + a_3).$$

□

قضیه ۲.۴.۴. مدل (LP1) یک مدل برنامه‌ریزی خطی قطعی است .

برهان. فرض کنید $\tilde{c}_j = (c^l_j, c^c_j, c^r_j)$، $\tilde{a}_{ij} = (a^l_{ij}, a^c_{ij}, a^r_{ij})$ و $\tilde{b}_i = (b^l_i, b^c_i, b^r_i)$ $i = 1, 2. \cdots, m$ ، $j = 1, 2, \cdots, n.$ از آن‌جایی که $j = 1, 2, \cdots, n, \tilde{x}_j \in TF(\mathbb{R})^+$ حاصل مقادیر $z(\tilde{x}) = \tilde{c} \otimes \tilde{x}$ و $\sum_{j=1^n} \tilde{a}_{ij}\tilde{x}_j = \tilde{a}_{i1} \otimes \tilde{x}_1 \oplus \tilde{a}_{i2} \otimes \tilde{x}_2 \oplus \cdots \oplus \tilde{a}_n, j = 1, \cdots, n$ با استفاده از عملیات حسابی روی $TF(\mathbb{R})$ محاسبه می‌شود. فرض کنید

$$X = (x^l_1, x^c_1, x^r_1, x^l_2, x^c_2, x^r_2, \cdots, x^l_n, x^c_n, x^r_n)$$

حاصل $\tilde{c} \otimes \tilde{x}$ و $\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}\tilde{x}_j$

همچنان اعداد فازی مثلثی هستند، و به صورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{c} \otimes \tilde{x} = (f^l(X), f^c(X), f^r(X))$$

و

$$\sum_{j=۱}^{n} \tilde{a}_{ij}\tilde{x}_j = (g_i^l(X), g_i^c(X), g_i^r(X)),$$

که در آن همه توابع $f^l(X), f^c(X), f^r(X)), g_i^l(X), g_i^c(X)$ و $g_i^r(X))$ توابع خطی با بردار متغیر $X, i = ۱, \cdots, m$ هستند. با توجه به لم ۲.۴.۴ داریم:

$$EV(\tilde{c} \otimes \tilde{x}) = \frac{۱}{۶}(f^l(X) + ۴f^c(X) + f^r(X)).$$
$$EV\left(\sum_{j=۱}^{n} \tilde{a}_{ij}\tilde{x}_j\right) = \frac{۱}{۶}(g_i^l(X) + ۴g_i^c(X) + g_i^r(X)),$$
$$EV(\tilde{b}_i) = \frac{۱}{۶}(b_i^l + ۴b_i^c + b_i^r).$$

لذا مدل LP1 به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(LP۱")$$
$$\max \frac{۱}{۶}(f^l(X) + ۴f^c(X) + f^r(X))$$
$$s.t. \begin{cases} \frac{۱}{۶}(g_i^l(X) + ۴g_i^c(X) + g_i^r(X)) \\ \leq \frac{۱}{۶}(b_i^l + ۴b_i^c + b_i^r), \\ x_j^l \geq ۰, x_j^l \leq x_j^c \leq x_j^r, \\ i = ۱, \cdots, m, j = ۱, \cdots, n. \end{cases}$$

که یک مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی با بردار متغیر تصمیم

$$X = (x_۱^l, x_۱^c, x_۱^r, x_۲^l, x_۲^c, x_۲^r, \cdots, x_n^l, x_n^c, x_n^r)$$

است. □

از قضایای ۱.۴.۴ و۲.۴.۴ ملاحظه زیر را نتیجه می‌گیریم.

ملاحظه ۱.۴.۴. مسئله (FFLP1)جواب بهینه دارد اگر و تنها اگر مسئله (”LP1) جواب بهینه داشته باشد.به‌علاوه، $\tilde{x}^* = ((x_۱^{l*}, x_۱^{c*}, x_۱^{r*}), (x_۲^{l*}, x_۲^{c*}, x_۲^{r*}), \cdots, (x_n^{l*}, x_n^{c*}, x_n^{r*}))$ جواب بهینه‌ی مسئله (FFLP1) است اگر و تنها اگر $(x_۱^{l*}, x_۱^{c*}, x_۱^{r*}, \cdots, x_n^{l*}, x_n^{c*}, x_n^{r*})$ جواب بهینه‌ی مسئله‌ی (”LP1) باشد.

براساس قضایای فوق الگوریتم زیر برای حل مسئله (FFLP1) ارائه شده است.

الگوریتم ۱.

گام ۱. فرض کنید $\tilde{c}_j = (c_j^l, \tilde{c}_j^c, c_j^r)$، $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij}^l, a_{ij}^c, a_{ij}^r)$ و $\tilde{b}_i = (b_i^l, b_i^c, b_i^r)$ $i = ۱,۲.\cdots,m$ ، $j = ۱,۲,\cdots,n$ آنگاه، با استفاده از قضایای ۱.۴.۴ و۲.۴.۴ مسئله (FFLP1) به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی قطعی هم ارز $LP1"$ تغییر دهید.

گام۲. مسئله برنامه ریز خطی ($LP1"$) که در گام ۱ بدست آمده است را حل کنید.

گام ۳ . اگر ($LP1"$) جواب نداشته باشد، انگاه (FFLP1) نیز جوابی ندارد و توقف کنید. در غیر این صورت، فرض کنید

$$X^* = (x_۱^{l*}, x_۱^{c*}, x_۱^{r*}, \cdots, x_n^{l*}, x_n^{c*}, x_n^{r*})$$

یک جواب بهینه‌ی مسئله‌ی ($LP1"$) باشد، و به گام۴ بروید.

گام۴ . جواب بهینه‌ی $\tilde{x}^*$ مسئله‌ی FFLP1 با استفاده از$\tilde{X}^*$ به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\tilde{x}^* &= (\tilde{x}_۱^*, \tilde{x}_۲^*, \cdots, \tilde{x}_n^*)\\ &= ((x_۱^{l*}, x_۱^{c*}, x_۱^{r*}), (x_۲^{l*}, x_۲^{c*}, x_۲^{r*}), \cdots, (x_n^{l*}, x_n^{c*}, x_n^{r*}))\end{aligned}$$

۵.۴ الگوریتم هایی برای حل مسئله FFLP2

فرض کنید $\alpha \in [۰,۱]$. مدل مسئله ($FFLP_\alpha$) به شرح زیر بیان می‌شود:

$$(FFLP_\alpha) \qquad (۴.۴)$$

$$\max(z(\tilde{x})) = \tilde{c_۱} \otimes \tilde{x_۱} \oplus \tilde{c_۲} \otimes \tilde{x_۲} \oplus \cdots \oplus \tilde{c_n} \otimes \tilde{x_n}$$

$$s.t. \begin{cases} \tilde{a}_{i۱} \otimes \tilde{x}_۱ \oplus \tilde{a}_{i۲} \otimes \tilde{x}_۲ \oplus \cdots \oplus \tilde{a}_{in} \otimes \tilde{x}_n \preceq_\alpha \tilde{b}_i, , & \forall i = ۱,۲,\cdots,m, \\ \tilde{x}_j \in TF(\mathbb{R})^+, & \forall j = ۱,۲,\cdots,n. \end{cases}$$

قضیه‌ی زیر را برای کمک به حل بهتر مسئله‌ی ($FFLP_\alpha$) بیان می‌کنیم .

قضیه ۱.۵.۴. فرض کنید $\tilde{a} = (a_۱, a_۲, a_۳)$ و $\tilde{b} = (b_۱, b_۲, b_۳)$ دو عدد فازی مثلثی دلخواه باشند و $\alpha \in [۰,۱]$. آنگاه $\tilde{b} \preceq_\alpha \tilde{a}$ اگر و تنها اگر

$$\frac{۲b_۲ + b_۳ - a_۱ - ۲a_۲}{b_۳ - b_۱ + a_۳ - a_۱} \geq \alpha.$$

برهان. $\tilde{b} \preceq_\alpha \tilde{a}$ اگر و تنها اگر

$$P(\tilde{b}, \tilde{a}) \geq \alpha.$$

اگر و تنها اگر

$$E^+_{\tilde{b}} - E^-_{\tilde{a}} \geq \circ \quad \text{و} \quad \frac{E^+_{\tilde{b}} - E^-_{\tilde{a}}}{E^+_{\tilde{b}} - E^-_{\tilde{a}} - (E^-_{\tilde{b}} - E^+_{\tilde{a}})} \geq \alpha.$$

از آن‌جایی که

$$E^+_{\tilde{b}} - E^-_{\tilde{a}} = \frac{۱}{۳}(۲b_۲ + b_۲) - \frac{۱}{۳}(a_۱ + ۲a_۲),$$

$$\frac{E^+_{\tilde{b}} - E^-_{\tilde{a}}}{E^+_{\tilde{b}} - E^-_{\tilde{a}} - (E^-_{\tilde{b}} - E^+_{\tilde{a}})} = \frac{۲b_۲ + b_۳ - a_۱ - ۲a_۲}{b_۳ - b_۱ + a_۳ - a_۱},$$

و

$$b_۳ - b_۱ + a_۳ - a_۱ \geq \circ, \quad \circ \leq \alpha \leq ۱,$$

بنابراین $\tilde{a} \preceq_\alpha \tilde{b}$ اگر و تنها اگر $\frac{۲b_۲ + b_۳ - a_۱ - ۲a_۲}{b_۳ - b_۱ + a_۳ - a_۱} \geq \alpha$.

□

ما می‌توانیم مسئله $FFLP_\alpha$ را وقتی که پارامتر α در بازه $[\circ, ۱]$ ثابت باشد، با استفاده از الگوریتم۲ حل کنیم.

الگوریتم۲.

گام ۱. فرض کنید $\tilde{c}_j = (c^l_j, c^c_j, c^r_j)$، $\tilde{a}_{ij} = (a^l_{ij}, a^c_{ij}, a^r_{ij})$ و $\tilde{b}_i = (b^l_i, b^c_i, b^r_i)$ $i = ۱,۲.\cdots, m$ ، $j = ۱,۲,\cdots, n$ آن‌گاه مسئله $FFLP_\alpha$ به شکل زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} &\max(f^l(X), f^c(X), f^r(X)) \\ &s.t. \begin{cases} (g^l_i(X), g^c_i(X), g^r_i(X)) \preceq_\alpha (b^l_i, b^c_i, b^r_i), \\ \tilde{x}_j \in TF(\mathbb{R})^+, \\ i = ۱,۲,\cdots, m, j = ۱,۲,\cdots, n. \end{cases} \end{aligned} \tag{۵.۴}$$

که در آن $f^l(X)$، $f^c(X)$، $f^r(X)$، $g^l_i(X)$، $g^c_i(X)$ و $g^r_i(X)$ توابع خطی با بردار متغیر زیر هستند:

$$X = (x^l_۱, x^c_۱, x^r_۱, x^l_۲, x^c_۲, x^r_۲, \cdots, x^l_n, x^c_n, x^r_n)$$

$$i = ۱,۲,\cdots, m.$$

گام۲. با توجه به قضایای ۱.۴.۴، ۲.۴.۴، ۱.۵.۴ مدل به‌دست آمده در گام ۱ به مدل برنامه‌ریزی

خطی قطعی هم ارز زیر تبدیل می‌شود :

$$(LP_\alpha) \qquad (۶.۴)$$

$$\max \frac{1}{6}(f^l(X) + 4f^c(X) + f^r(X))$$

$$s.t. \begin{cases} \dfrac{2b_i^c + b_i^r - g_i^l(X) - 2g_i^c(X)}{b_i^r - b_i^l + g_i^r - g_i^l(X)} \geq \alpha, \\ x_j^l \geq 0, x_j^l \leq x_j^c \leq x_j^r, \\ i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases}$$

گام۳. مسئله LP_α به‌دست آمده در گام ۲ را حل کنید.

گام۴. اگر LP_α جواب بهینه نداشته باشد آنگاه $FFLP_\alpha$ جواب بهینه ندارد و توقف کنید، در غیر این‌صورت فرض کنید

$$X_\alpha^* = (x_1^{l*}, x_1^{c*}, x_1^{r*}, \cdots, x_n^{l*}, x_n^{c*}, x_n^{r*})$$

یکی از جواب های بهینه‌ی LP_α باشد و به گام ۵ بروید.

گام ۵. جواب بهینه $\tilde{x}_\alpha^*$ از $(FFLP_\alpha)$ با استفاده از X_α^* به صورت زیر است :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_\alpha^* &= (\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, \cdots, \tilde{x}_n^*) \\ &= ((x_1^{l*}, x_1^{c*}, x_1^{r*}), (x_2^{l*}, x_2^{c*}, x_2^{r*}), \cdots, (x_n^{l*}, x_n^{c*}, x_n^{r*})) \end{aligned}$$

قضیه ۲.۵.۴. فرض کنید $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$ و $\alpha_1 \leq \alpha_2$. اگر $\tilde{x}_{\alpha_1}^*$ و $\tilde{x}_{\alpha_2}^*$ به ترتیب جواب های بهینه‌ی $(FFLP_{\alpha_1})$ و $(FFLP_{\alpha_2})$ باشند آن‌گاه $z(\tilde{x}_{\alpha_1}^*) \succeq z(\tilde{x}_{\alpha_2}^*)$.

برهان. فرض کنید (LP_{α_1}) و (LP_{α_1}) به ترتیب مدل های برنامه ریزی خطی هم ارز $(FFLP_{\alpha_1})$ و $(FFLP_{\alpha_2})$ هستند. ناحیه‌ی شدنی (LP_{α_1}) و (LP_{α_2}) به ترتیب (D_{α_1}) و (D_{α_2}) می‌باشد. در حقیقت

$$z(\tilde{x}_{\alpha_1}^*) \succeq z(\tilde{x}_{\alpha_2}^*)$$

اگر و تنها اگر

$$EV(z(\tilde{x}_{\alpha_1}^*)) \geq EV(z(\tilde{x}_{\alpha_2}^*))$$

در اینجا، $EV(z(\tilde{x}_{\alpha_1}^*))$ و $EV(z(\tilde{x}_{\alpha_1}^*))$ به ترتیب مقادیر هدف بهینه‌ی مسائل (LP_{α_1}) و (LP_{α_2}) هستند. هم‌چنین، (LP_{α_1}) و (LP_{α_2}) تابع هدف یکسانی دارند. از این‌رو، تنها کافی است ثابت کنیم $D_{\alpha_2} \subseteq D_{\alpha_1}$.

اگر $X_\alpha = (x_1^l, x_1^c, x_1^r, \cdots, x_n^l, x_n^c, x_n^r) \in D_{\alpha_2}$ آن‌گاه

$$\frac{2b_i^c + b_i^r - g_i^l(X) - 2g_i^c(X)}{b_i^r - b_i^l + g_i^r(X) - g_i^l(X)} \geq \alpha_2,$$

و

$$x_j^l \geq ۰, x_j^l \leq x_j^c \leq x_j^r,$$

$i = ۱,۲,\cdots,m, j = ۱,۲,\cdots,n.$ ازآن‌جایی که $\alpha_۲ \geq \alpha_۱$ پس داریم

$$\frac{۲b_i^c + b_i^r - g_i^l(X) - ۲g_i^c(X)}{b_i^r - b_i^l + g_i^r(X) - g_i^l(X)} \geq \alpha_۱, \quad i = ۱,۲,\cdots,m$$

و

$$x_j^l \geq ۰, x_j^l \leq x_j^c \leq x_j^r, \quad j = ۱,۲,\cdots,n$$

لذا $X_\alpha \in D_{\alpha_۱}$. بنابراین $D_{\alpha_۲} \subseteq D_{\alpha_۱}$. □

۶.۴ حل مسئله FFLP2 زمانی که α منعطف است

اگر $\alpha \in [\frac{۱}{۲}, ۱]$ باشد، ما بازه‌ی $[\frac{۱}{۲}, ۱]$ را به n زیر بازه‌ی مساوی تقسیم می‌کنیم، که n یک عدد صحیح مثبت است. یعنی $\alpha_k = \frac{۱}{۲} + \frac{k}{۲n}$ در نظر می‌گیریم و فرض کنید $\tilde{x}^*_{\alpha_k}$ جواب بهینه‌ی $(FFLP_{\alpha_k})$، به ازای $k = ۰,۱,\cdots,n$ باشد. واضح است که $\frac{۱}{۲} = \alpha_۰ \leq \alpha_۱ \leq \cdots, \alpha_n = ۱$.
باتوجه به قضیه‌ی(۲.۵.۴)، داریم

$$z(\tilde{x}^*_{\alpha_۰}) \succeq z(\tilde{x}^*_{\alpha_۱}) \succeq \cdots \succeq z(\tilde{x}^*_{\alpha_n}),$$

و

$$EV(z(\tilde{x}^*_{\alpha_۰})) \geq EV(z(\tilde{x}^*_{\alpha_۱})) \geq \cdots \geq EV(z(\tilde{x}^*_{\alpha_n})).$$

تابع عضویت $z(\tilde{x})$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu(z(\tilde{x})) = \begin{cases} ۰, & \text{اگر} EV(z(\tilde{x})) < EV(z(\tilde{x}^*_{\alpha_n})) \\ \dfrac{EV(z(\tilde{x})) - EV(z(\tilde{x}^*_{\alpha_n}))}{EV(z(\tilde{x}^*_{\alpha_۰})) - EV(z(\tilde{x}^*_{\alpha_n}))}, & \text{اگر} EV(z(\tilde{x}^*_{\alpha_n})) \leq EV(z(\tilde{x})) \leq EV(z(\tilde{x}^*_{\alpha_۰})), \\ ۱, & \text{اگر} EV(z(\tilde{x})) > EV(z(\tilde{x}^*_{\alpha_۰})). \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$۱ = \mu(z(\tilde{x}^*_{\alpha_۰})) \geq \mu(z(\tilde{x}^*_{\alpha_۱})) \geq \cdots \geq \mu(z(\tilde{x}^*_{\alpha_n})) = ۰.$$

فرض کنید $\beta_k = ۲\alpha_k - ۱$، $k = ۰,۱,\cdots,n.$ آن‌گاه

$$۰ = \beta_۰ \leq \beta_۱ \leq \cdots \leq \beta_n = ۱.$$

اگر

$$\min_k |\beta_k - \mu(z(\tilde{x}^*_{\alpha_k}))| = |\beta_{k_۰} - \mu(z(\tilde{x}^*_{\alpha_{k_۰}}))|$$

ما $\tilde{x}_{\alpha_{k_\circ}}$ را به عنوان جواب بهینه‌ی فازی مسئله‌ی برنامه ریزی خطی کاملا فازی $(FFLP۲)$ در نظر می‌گیریم . در اینجا، ما الگوریتم ۳ برای حل مسئله‌ی $(FFLP۲)$ معرفی می‌کنیم .

الگوریتم۳.

گام۱. عدد صحیح مثبت ثابت n را در نظر بگیرید و α_k با استفاده از رابطه‌ی زیر

$$\alpha_k = \frac{۱}{۲} + \frac{k}{۲n},\ k = \circ, ۱, \cdots, n$$

محاسبه کنید.

گام۲. به ترتیب مسائل $FFLP_{\alpha_\circ}, FFLP_{\alpha_۱}, \cdots, FFLP_{\alpha_n}$ را با الگوریتم ۲ حل کنید.

گام۳. فرض کنید $\tilde{x}^*_{\alpha_k}$ یکی از جواب های بهینه‌ی $(FFLP_{\alpha_k}), k = \circ, ۱, \cdots, n$ باشد. مقدار هدف بهینه‌ی $z(\tilde{x}^*_{\alpha_\circ})$،$z(\tilde{x}^*_{\alpha_۱})$،$\cdots$،$z(\tilde{x}^*_{\alpha_n})$ را محاسبه کنید و تابع عضویت $\mu(z(\tilde{x}))$ را به‌دست آورید.

گام۴. $\beta_k = ۲\alpha_k - ۱$ و $\mu(z(\tilde{x}^*_{\alpha_k})), k = \circ, ۱, \cdots, n$ را محاسبه کنید.

گام۵. $\min\limits_k |\beta_k - \mu(z(\tilde{x}_{\alpha_k}))|.$ را محاسبه کنید.

گام۶. فرض کنید

$$\min_k |\beta_k - \mu(z(\tilde{x}^*_{\alpha_k}))| = |\beta_{k_\circ} - \mu(z(\tilde{x}^*_{\alpha_{k_\circ}}))|.$$

آن‌گاه جواب بهینه‌ی فازی مسئله (FFLP2)، $\tilde{x}^* = \tilde{x}^*_{\alpha_{k_\circ}}$ است .

ملاحظه ۱.۶.۴. در اینجا، ما تنها حالتی را که هر مسئله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی $FFLP_{\alpha_k}\ (k \in \{\circ, ۱, \cdots, n\})$ حداقل یک جواب بهینه، در گام۳ داشته باشد را در نظر می‌گیریم.

۷.۴ مثال عددی

در این بخش ما روش مطرح شده را با یک مثال عددی توضیح می‌دهیم.

مثال ۱.۷.۴. مدل برنامه‌ریزی خطی کاملا فازی با محدودیت منعطف زیر را در نظر گیرید .

$$(FFLP۲۱)$$

$$\max z(\tilde{x}) = (۴۵, ۵\circ, ۵۲) \otimes \tilde{x_۱} \oplus (۵۶, ۶\circ, ۶۳) \otimes \tilde{x_۲}$$

$$s, t.$$

$$\begin{cases} (۹, ۱\circ, ۱۲) \otimes \tilde{x_۱} \oplus (۳, ۵, ۶) \otimes \tilde{x_۲} \precsim (۱۸\circ, ۲\circ\circ, ۲۱\circ) \\ (\circ, ۱, ۱) \otimes \tilde{x_۱} \oplus (۲, ۳, ۴) \otimes \tilde{x_۲} \precsim (۴۵, ۵\circ, ۵۵) \\ (۳, ۴, ۶) \otimes \tilde{x_۱} \oplus (۳, ۴, ۵) \otimes \tilde{x_۲} \precsim (۹\circ, ۱\circ\circ, ۱۲\circ) \\ \tilde{x_۱}, \tilde{x_۲} \in TF(\mathbb{R})^+ \end{cases}$$

حل:

گام۱. با فرض $n=۱۰$، قرار دهید $\alpha_k = \frac{۱}{۲} + \frac{k}{۲۰},\ k = ۰,۱,\cdots,n.$

گام۲. فرض کنید $\tilde{x}_j = (x_j^l, x_j^c, x_j^r)$، $j=۱,۲$.
مدل برنامه‌ریزی خطی کاملا فازی $(FFLP_{\alpha_k})$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&(FFLP_{\alpha_k})\\
&\max z(\tilde{x}) = (۴۵,۵۰,۵۲)\otimes(x_۱^l,x_۱^c,x_۱^r)\oplus(۵۶,۶۰,۶۳)\otimes(x_۲^l,x_۲^c,x_۲^r)\\
&s.t.\begin{cases}
(۹,۱۰,۱۲)\otimes(x_۱^l,x_۱^c,x_۱^r)\oplus(۳,۵,۶)\otimes(x_۲^l,x_۲^c,x_۲^r)\preceq_{\alpha_k}(۱۸۰,۲۰۰,۲۱۰)\\
(۰,۱,۱)\otimes(x_۱^l,x_۱^c,x_۱^r)\oplus(۲,۳,۴)\otimes(x_۲^l,x_۲^c,x_۲^r)\preceq_{\alpha_k}(۴۵,۵۰,۵۵)\\
(۳,۴,۶)\otimes(x_۱^l,x_۱^c,x_۱^r)\oplus(۳,۴,۵)\otimes(x_۲^l,x_۲^c,x_۲^r)\preceq_{\alpha_k}(۹۰,۱۰۰,۱۲۰)\\
(x_۱^l,x_۱^c,x_۱^r),(x_۲^l,x_۲^c,x_۲^r)\in TF(\mathbb{R})^+.
\end{cases}
\end{aligned}
$$

که در آن $k=۰,۱,\cdots,n.$ است.

این مدل‌های برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی را با استفاده از الگوریتم ۲ حل می‌کنیم.
گام۳. بعد از حل کردن $FFLP_{\alpha_k}$ ، $k=۰,۱,\cdots,n$، مقادیر بهینه‌ی هدف را که به شرح زیر است به دست می‌آوریم :

$$
\begin{aligned}
z(\tilde{x}^*_{\alpha_۰}) &= (۱۲۷۰/۶۰, ۱۳۸۱/۸۱, ۱۴۴۵/۱۸),\\
z(\tilde{x}^*_{\alpha_۱}) &= (۱۲۵۱/۴۶, ۱۳۶۱/۰۴, ۱۴۲۳/۴۴),\\
z(\tilde{x}^*_{\alpha_۲}) &= (۱۲۲۳/۶۷, ۱۳۴۰/۶۵, ۱۴۰۲/۱۰),\\
z(\tilde{x}^*_{\alpha_۳}) &= (۱۲۱۴/۲۸, ۱۳۲۰/۷۰, ۱۳۸۱/۲۲),\\
z(\tilde{x}^*_{\alpha_۴}) &= (۱۱۹۶/۲۶, ۱۳۰۱/۱۴, ۱۳۶۰/۷۶),\\
z(\tilde{x}^*_{\alpha_۵}) &= (۱۱۷۸/۶۰, ۱۲۸۱/۹۷, ۱۳۴۰/۶۹),\\
z(\tilde{x}^*_{\alpha_۶}) &= (۱۱۶۱/۳۰, ۱۲۶۳/۱۸, ۱۳۲۱/۰۳),\\
z(\tilde{x}^*_{\alpha_۷}) &= (۱۱۴۴/۳۳, ۱۲۴۴/۷۵, ۱۳۰۱/۷۵),\\
z(\tilde{x}^*_{\alpha_۸}) &= (۱۱۲۷/۷۰, ۱۲۲۶/۶۸, ۱۲۸۲/۸۶),\\
z(\tilde{x}^*_{\alpha_۹}) &= (۱۱۱۱/۳۹, ۱۲۰۸/۹۶, ۱۲۶۴/۳۲),\\
z(\tilde{x}^*_{\alpha_{۱۰}}) &= (۱۰۹۵/۳۹, ۱۱۹۱/۵۸, ۱۲۴۶/۱۴).
\end{aligned}
$$

مقادیرمورد انتظار نیز به شرح زیر است:

$$EV(z(\tilde{x}^*_{\alpha_۰})) = ۱۳۷۳/۸۵, \quad EV(z(\tilde{x}^*_{\alpha_۱})) = ۱۳۵۳/۱۷,$$
$$EV(z(\tilde{x}^*_{\alpha_۲})) = ۱۳۳۲/۹۰, \quad EV(z(\tilde{x}^*_{\alpha_۳})) = ۱۳۱۳/۰۵,$$
$$EV(z(\tilde{x}^*_{\alpha_۴})) = ۱۲۹۳/۶۰, \quad EV(z(\tilde{x}^*_{\alpha_۵})) = ۱۲۷۴/۵۳,$$
$$EV(z(\tilde{x}^*_{\alpha_۶})) = ۱۲۵۵/۸۳, \quad EV(z(\tilde{x}^*_{\alpha_۷})) = ۱۲۳۷,۵۳,$$
$$EV(z(\tilde{x}^*_{\alpha_۸})) = ۱۲۱۹/۵۵, \quad EV(z(\tilde{x}^*_{\alpha_۹})) = ۱۲۰۱/۹۳,$$
$$EV(z(\tilde{x}^*_{\alpha_{۱۰}})) = ۱۱۸۴/۶۵.$$

تابع عضویت $z(\tilde{x})$ نیز به شکل زیر است .

$$\begin{cases} ۰, & \text{اگر } EV(Z(\tilde{x})) < ۱۱۸۴/۶۵. \\ \dfrac{EV(Z(\tilde{x})) - ۱۱۸۴/۶۵}{۱۳۷۳/۸۵ - ۱۱۸۴/۶۵}, & \text{اگر } ۱۱۸۴/۶۵ < EV(Z(\tilde{x})) < ۱۳۷۳/۸۵, \\ ۱, & \text{اگر } EV(Z(\tilde{x})) > ۱۳۷۳/۸۵. \end{cases}$$

گام۴. نتایج محاسبه ی $\beta_k = ۲\alpha_k - ۱$ و $\mu(z(\tilde{x}^*_{\alpha_k})), k = ۰, ۱, \cdots, n$ در جدول ۱.۴ نشان داده شده است .

k	۰	۱	۲	۳	۴	۵
β_k	۰	۰.۱	۰.۲	۰.۳	۰.۴	۰.۵
$\mu(z(\tilde{x}^*_{\alpha_k}))$	۱	۰.۸۹۰۷۱	۰.۷۸۳۶	۰.۶۷۸۶	۰.۵۷۵۸	۰.۴۷۵۱
k	۶	۷	۸	۹	۱۰	
β_k	۰۶.	۰.۷	۰۸.	۰.۹	۱	
$\mu(z(\tilde{x}^*_{\alpha_k}))$	۰.۳۷۶۲	۰.۲۷۹۴	۰.۱۸۴۵	۰.۰۹۱۳	۰	

جدول ۱.۴: مقادیر β_k و $\mu(z(\tilde{x}^*_{\alpha_k}))$

گام۵. داریم:

$$\begin{aligned} &\min_k |\beta_k - \mu(z(\tilde{x}_{\alpha_k}))| \\ &= \min\{۱, ۰/۷۹۰۷, ۰/۵۸۳۶, ۰/۳۷۸۶, ۰/۱۷۵۸, ۰/۰۲۴۹, ۰/۲۲۸۳, ۰/۴۲۰۶, ۰/۶۱۵۵, ۰/۸۰۸۷, ۱\} = ۰/۰۲۴۹ \\ &= |\beta_۵ - \mu(z(\tilde{x}_{\alpha_۵}))|. \end{aligned}$$

گام۶. جواب بهینه‌ی فازی (FFLP21) برابر $\tilde{x}^* = \tilde{x}^*_{\alpha_۵}$، $\tilde{x}^*_۱ = (۱۰/۷۳۷۷, ۱۰/۷۳۷۷, ۱۰/۷۳۷۷)$ و $\tilde{x}^*_۲ = (۱۲/۴۱۸۰, ۱۲/۴۱۸۰, ۱۲/۴۱۸۰)$ است و مقدار بهینه‌ی هدف برابر است با:

$$z(\tilde{x}^*_{\alpha_۵}) = (۱۱۷۸/۶۰, ۱۲۸۱/۹۷, ۱۳۴۰/۶۹).$$

فصل ۵

یک تکنیک جدیداصلاح شده برای حل مسائل برنامه ریزی خطی کاملا فازی

۱.۵ مقدمه

در این فصل یک تکنیک جدید برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی در یک محیط کاملاً فازی ارائه می‌دهیم. این روش یک مدل اصلاح شده از سیمپلکس معروف است که برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی استفاده شده است و استفاده از تابع رتبه‌بندی همراه با روش حذفی گاوس[۱] در حل مسائل برنامه‌ریزی خطی در یک محیط نامعلوم به ما کمک می‌کند. دراین فصل از مراجع [۲۲، ۶] استفاده شده است.

[۱] Gaussian eliminathin

۲.۵ مسائل برنامه ریزی خطی در محیط کاملا فازی

یک مسئله برنامه‌ریزی خطی در یک محیط کاملاً فازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} &\text{Max/Min} \quad \tilde{z} = \tilde{c}^t \tilde{x}, \\ &s.t. \quad \tilde{A}\tilde{x} \leq \tilde{b}, \tilde{x} \geq ۰. \end{aligned}$$

که در اینجا،
$\tilde{z}$، $\tilde{c}^t = (\tilde{c}_۱, \cdots, \tilde{c}_n)$، $\tilde{x} = (\tilde{x}_۱, \cdots, \tilde{x}_n)$، $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]_{m\times n}$ و $\tilde{b} = (\tilde{b}_۱, \cdots, \tilde{b}_n)^t$ به ترتیب، تابع هدف فازی، ضرایب تابع هدف فازی، متغیرهای تصمیم فازی، ضرایب فنی فازی و بردار سمت راست فازی مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی نامیده می‌شود. سه برآورد o_{ij}، m_{ij} و p_{ij} در [۳۶، ۹، ۳۵] مطرح شده است، که به ترتیب به معنی برآورد خوشبینانه، احتمالی‌ترین و بدبینانه مورد استفاده در محدودیت است. این برآوردها بیشتر برای تخمین میانگین وزنی

$$w_ij = \frac{o_ij + ۴m_ij + p_ij}{۶}$$

به‌طوری که واریانس[۲] برابر $\sigma_{ij} = \frac{p_{ij} - o_{ij}}{۶}$ است، استفاده شده است. در این فصل $\tilde{z}$ را با اعداد فازی مثلثی نمایش می‌دهیم، که درآن $\tilde{c}^t = (\tilde{c}_۱, \cdots, \tilde{c}_n)$، $\tilde{x} = (\tilde{x}_۱, \cdots, \tilde{x}_n)$، $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]_{m\times n}$ و $\tilde{b} = (\tilde{b}_۱, \cdots, \tilde{b}_n)^t$ بردارهای فازی شامل اعداد فازی مثلثی با برآورد میانگین وزنی به صورت زیر داده شده است:

$$\begin{aligned} &\tilde{z} = (z_۱, z_۲, z_۳), \qquad \tilde{c} = (c_{ij}), \quad i = ۱,۲,۳,\cdots,n,, \ j = ۱,۲,۳, \\ &\tilde{x}_i = (x_{ij}), \quad i = ۱,۲,۳,\cdots,n, \ j = ۱,۲,۳, \\ &\tilde{b}_i = (b_{ij}), \quad i = ۱,۲,۳,\cdots,m, \ j = ۱,۲,۳, \\ &\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij} = (o_{ij}, w_{ij}, p_{ij})]_{m\times n} \end{aligned}$$

۳.۵ تابع رتبه‌بندی

فرض کنید $\mathrm{T}_۱ = (u_۱, v_۱, w_۲)$ و $\mathrm{T}_۱ = (u_۱, v_۱, w_۲)$ دو عدد فازی مثلثی باشند.
تابع رتبه‌بندی یک نگاشت از یک مجموعه‌ی فازی به مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}^n$ است[۳۱].
رتبه‌بندی روی $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

۱. $\mathrm{T}_۱ \underset{\mathcal{R}}{\geq} \mathrm{T}_۲$ اگر و تنها اگر $\mathcal{R}(\mathrm{T}_۱) \geq \mathcal{R}(\mathrm{T}_۲)$

[۲] Variance

۲. $\mathrm{T}_۲ \underset{\mathcal{R}}{\geq} \mathrm{T}_۱$ اگر وتنها اگر $\mathcal{R}(\mathrm{T}_۱) > \mathcal{R}(\mathrm{T}_۲)$

۳. $\mathrm{T}_۲ \underset{\mathcal{R}}{=} \mathrm{T}_۱$ اگر و تنها اگر $\mathcal{R}(\mathrm{T}_۱) = \mathcal{R}(\mathrm{T}_۲)$

۴. اگر $\mathrm{T}_۲ \underset{\mathcal{R}}{\geq} \mathrm{T}_۱$ و $\mathrm{T}_۴ \underset{\mathcal{R}}{\geq} \mathrm{T}_۳$ آن‌گاه $\mathcal{R}(\mathrm{T}_۱ + \mathrm{T}_۳) \geq \mathcal{R}(\mathrm{T}_۲ + \mathrm{T}_۴)$

برای رتبه‌بندی اعداد فازی مثلثی، در این فصل از تابع رتبه بندی زیر استفاده می کنیم.

$$\mathcal{R}(\mathrm{T}) = u + w - \sigma$$

که در اینجا، $\sigma = \frac{w-u}{۶}$ واریانس بین u و w است.

۴.۵ روش سیمپلکس اصلاح شده برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی

مسئله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی به شکل متعارفی زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \max \quad & \tilde{z} = \tilde{c}\tilde{x}, \\ s.t. \quad & \tilde{A}\tilde{x} \leq \tilde{b}, \tilde{x} \geq ۰ \end{aligned} \tag{۱.۵}$$

گام ۱. جدول اولیه_آغازین در جدول ۱.۵ داده شده است. که در اینجا $\tilde{x}_{n+i}, i = ۱,۲,۳,\cdots,m$

	$[\tilde{x}_j]_{۱\times n}$	$[\tilde{x}_s]_{۱\times n+m}$	$\tilde{b}$
$[\tilde{x}_s]_{n+۱}^{n+m}$	$[\tilde{a}_{ij}]_{m\times n}$	$[\tilde{I}]_{n+۱\times n+m}$	$[\tilde{b}_i]_{m\times ۱}$
$\tilde{z}$	$[-\tilde{c}_j]_{۱\times n}$	$[۰]_{۱\times n+m}$	

جدول ۱.۵: جدول اولیه روش سیمپلکس اصلاح شده

و $\tilde{x}_i, i = ۱,۲,۳,\cdots,n$ به ترتیب متغیرهای کمکی و تصمیم هستند. جواب شدنی اولیه نیز برابر $[۰,۰,\cdots,۰,\cdots,۰,\tilde{b}_۱,\tilde{b}_۲,\cdots,\tilde{b}_r,\cdots,\tilde{b}_m]^T$ است.
ماتریس محدودیت مسئله(۱.۵) به صورت زیر می‌باشد:

$$[\tilde{A}\tilde{I}]\begin{bmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{x}_s\end{bmatrix} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{I}\tilde{x}_s = \tilde{b}$$

که $\tilde{x}_s$ بردار متغیر های کمکی را نشان می‌دهد. ماتریس همانی $\tilde{I}$ شامل ستون‌های ماتریس افزوده متناظر با متغیرهای کمکی است. متغیر های $\{\tilde{x}_{n+i}\}_{i=۱}^{m}$ پایه ای و مجموعه آن‌ها را با $\tilde{B}$ نشان می‌دهیم. مجموعه متغیر های غیر پایه‌ای $\{\tilde{x}\}_{i=۱}^{m}$ را با $\tilde{N}$ نمایش می‌دهیم.

گام ۲. $\tilde{x}_r \in \tilde{B}$ جایگزین $\tilde{x}_s \in \tilde{N}$ می‌شود. متغیر $\tilde{x}_r$ پایه را ترک می‌کند و $\tilde{x}_s$ وارد پایه می‌شود. در نتیجه $\tilde{x}_s$ متغیر پایه‌ای و $\tilde{x}_r$ متغیر غیر پایه‌ای خواهند شد.
گام ۳. برای مسائل ماکسیمم سازی، یافتن مقدار $\tilde{c}_j$ با منفی ترین ارزش رتبه. فرض کنیم منفی ترین مقدار باشد.
گام ۴. یافتن مقادیر رتبه $\mathcal{R}(\tilde{b}_i), i = ۱,۲,۳,\cdots,m, \mathcal{R}(\tilde{a}_{ik}), i = ۱,۲,۳,\cdots,m.$ و نسبت رتبه $\frac{\mathcal{R}(\tilde{b}_i)}{\mathcal{R}(\tilde{a}_{ik})}, i = ۱,۲,۳,\cdots,m$
گام ۵. یافتن کمترین نسبت رتبه $\frac{\mathcal{R}(\tilde{b}_i)}{\mathcal{R}(\tilde{a}_{ik})}, i = ۱,۲,۳,\cdots,m$. فرض کنید کمترین مقدار مربوط به سطر $\tilde{x}_l$ باشد.
گام ۶. تولید کردن بردار یکه $(۱,۱,۱)$ در موقعیت عنصر محوری و صفر کردن (تولید بردار $(۰,۰,۰)$) بالا و پایین ستون محوری با استفاده از روش حذفی گاوس. بنابراین متغیر پایه‌ای $\tilde{x}_l$ پایه را ترک می‌کند و $\tilde{x}_k$ وارد پایه خواهد شد.
گام ۷. تکرار گام های ۳ تا ۶ تازمانی‌که هیچ رتبه منفی در ضرایب تابع هدف $\tilde{c}_j$ وجود نداشته باشد.
برای مینیمم‌سازی مسئله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی در شکل متعارفی به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \min \quad & \tilde{z} = \tilde{c}\tilde{x}, \\ s.t. \quad & \tilde{A}\tilde{x} \geq \tilde{b}, \tilde{x} \geq ۰ \end{aligned} \tag{۲.۵}$$

گام ۱ـ گام ۲. نوشتن جدول اولیه ـ آغازین مشابه گام ۱ـ گام ۲ در مسئله ماکسیمم‌سازی.
گام ۳. برای مسئله Minسازی جستجو مقدار $\tilde{c}_j$ که مثبت ترین رتبه را داشته باشد. فرض کنید $\tilde{c}_k$ مثبت ترین باشد.
گام ۴ـ گام ۶. مشابه گام ۴ـ گام ۶ برای مسئله ماکسیمم‌سازی.
گام ۷. تکرار گام‌های ۳ تا ۶ تا زمانی‌که هیچ مقدار رتبه مثبت در ضرایب تابع هدف وجود نداشته باشد.

۵.۵ روش سیمپلکس کاملاً فازی پیشنهادی برای مسائل در فرم استاندارد

ماتریس افزوده محدودیت ها و تابع هدف مسئله(۱.۵) به صورت زیر خواهد بود:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{N} & \tilde{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_N \\ \tilde{x}_B \end{bmatrix} = \tilde{N}\tilde{x}_N + \tilde{B}\tilde{x}_B = \tilde{b}, \tag{۳.۵}$$

$$\tilde{z} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_N^T & \tilde{c}_B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_N \\ \tilde{x}_B \end{bmatrix} = \tilde{c}_N^T \tilde{x}_N + \tilde{c}_B^T \tilde{x}_B \quad \tilde{z} - \tilde{c}_N^T \tilde{x}_N - \tilde{c}_B^T \tilde{x}_B = ۰. \qquad (۴.۵)$$

با ضرب $\tilde{B}^{-۱}$ در رابطه (۲.۵) معادله به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\tilde{B}^{-۱}\tilde{N}\tilde{x}_N + \tilde{x}_B = \tilde{B}^{-۱}\tilde{b}, \quad \tilde{x}_B = \tilde{B}^{-۱}\tilde{b} - \tilde{B}^{-۱}\tilde{N}\tilde{x}_N \qquad (۵.۵)$$

با جایگذاری رابطه (۵.۵) در رابطه (۴.۵)،

$$\tilde{z} - \tilde{c}_N^T \tilde{x}_N - \tilde{c}_B^T(\tilde{B}^{-۱}\tilde{b} - \tilde{B}^{-۱}\tilde{N}\tilde{x}_N) = ۰ \quad \tilde{z} - (\tilde{c}_N^T \tilde{x}_N - \tilde{c}_B^T \tilde{B}^{-۱}\tilde{N})\tilde{x}_N = \tilde{c}_B^T \tilde{B}^{-۱}\tilde{b}. \qquad (۶.۵)$$

حال $\tilde{c}_B^T \tilde{B}^{-۱}\tilde{N}$ یک بردار $(n-m)$ سطری است، لذا $\tilde{z}_N^T = \tilde{c}_B^T \tilde{B}^{-۱}\tilde{N}$. بنابراین داریم:

$$\tilde{z} - (\tilde{c}_N^T - \tilde{z}_N^T)\tilde{x}_N = \tilde{c}_B^T \tilde{B}^{-۱}\tilde{b} \qquad (۷.۵)$$

حال از رابطه (۵.۵) و (۷.۵) داریم:

$$\tilde{B}^{-۱}\tilde{N}\tilde{x}_N + \tilde{x}_B = \tilde{B}^{-۱}\tilde{b}, \quad \tilde{z} - (\tilde{c}_N^T - \tilde{z}_N^T)\tilde{x}_N = \tilde{c}_B^T \tilde{B}^{-۱}\tilde{b}. \qquad (۸.۵)$$

رابطه (۸.۵) نمایش عمومی مسئله برنامه‌ریزی خطی است. جدول اولیه‌ـآغازین در فرم ماتریسی به صورت زیر می‌باشد:

	$\tilde{x}_N$	$\tilde{I}$	$\tilde{b}$
$\tilde{x}_B$	$\tilde{B}^{-۱}\tilde{N}$	$\tilde{x}_B$	$\tilde{B}^{-۱}\tilde{b}$
$\tilde{z}$	$-(\tilde{c}_N^T - \tilde{z}_N^T)$	۰	$\tilde{c}_B^T \tilde{B}^{-۱}\tilde{b}$

جدول ۲.۵: جدول لولیه مسئله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی

برای مسائل ماکسیمم‌سازی، جواب بهینه است اگر $(\tilde{c}_j - \tilde{z}_j) \leq ۰$ و برای مسئله مینمم‌سازی، جواب بهینه است اگر $(\tilde{c}_j - \tilde{z}_j) \geq ۰$.

۶.۵ توابع عضویت برای تابع هدف و منابع محدودیت

در صورت مسئله اولیه، تابع عضویت تابع هدف و محدودیت ها به ترتیب به شکل زیر می‌باشد: اگر $\tilde{z} = (z_p, z_w, z_o)$ و $\tilde{x}_i = (x_p, x_w, x_o)$ باشد

$$\mu(\tilde{z}(x)) = \begin{cases} \frac{\tilde{z}(x) - z_p}{z_w - z_p}, & z_p \leq \tilde{z}(x) < z_w \\ ۱, & \tilde{z}(x) = z_w \\ \frac{z_o - \tilde{z}(x)}{z_o - z_w}, & z_w \leq \tilde{z}(x) < z_o \end{cases}$$

که درآن z_P، z_w و z_o به ترتیب مقادیر بدبینانه ، میانگین وزنی و مقدار خوشبینانه تابع هدف هستند. $\tilde{x}_i$ iامین محدودیت با x_p، x_w و x_o به ترتیب مقادیر بدبینانه، میانگین وزنی و مقدار خوشبینانه منابع محدودیت می‌باشند. برای مسئله دوگان نیز تابع عضویت تابع هدف (z'_o, z'_w, z'_p) و محدودیت‌ها به ترتیب به صورت زیر می‌باشد:

$$\mu(\tilde{x}_i) = \begin{Bmatrix} \frac{\tilde{x}_i - x_p}{x_w - x_p}, & x_p \leq \tilde{x}_i < x_w \\ ۱, & \tilde{x}_i = x_w \\ \frac{x_o - \tilde{x}_i}{x_o - x_w}, & x_w \leq \tilde{x}_i < x_o \end{Bmatrix}$$

$$\mu(\tilde{z}'(x)) = \begin{Bmatrix} \frac{\tilde{z}'(x) - z'_o}{z\prime_w - z'_o}, & z'_o \leq \tilde{z}'(x) < z'_w \\ ۱, & \tilde{z}'(x) = z'_w \\ \frac{z'_p - \tilde{z}'(x)}{z'_p - z'_w}, & z'_w \leq \tilde{z}'(x) < z'_o \end{Bmatrix}$$

$$\mu(\tilde{y}_i) = \begin{Bmatrix} \frac{\tilde{y}_i - y_o}{y_w - y_o}, & y_o \leq \tilde{y}_i < y_w \\ ۱, & \tilde{y}_i = x_w \\ \frac{y_p - \tilde{y}_i}{y_p - y_w}, & y_w \leq \tilde{y}_i < y_p \end{Bmatrix}$$

۷.۵ مثال کاربردی

الگوریتم مطرح شده را برای مسئله زیر به کار می‌بریم. جدول(۷.۵) هزینه ها وسودها را درباره‌ی منابع برای هر سه فعالیت نشان می‌دهد. آن‌گاه مسئله برنامه‌ریزی و دوگان آن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} & Max\, \tilde{z} = (۲,۵,۸)\tilde{x}_۱ + \left(۳, \frac{۳۷}{۶}, ۱۰\right)\tilde{x}_۲ + \left(۵, \frac{۳۴}{۳}, ۱۵\right)\tilde{x}_۳ \\ & s.t. \\ & (۲,۵,۸)\tilde{x}_۱ + \left(۳, \frac{۴۱}{۶}, ۱۰\right)\tilde{x}_۲ + \left(۵, \frac{۳۱}{۳}, ۱۸\right)\tilde{x}_۳ \leq \left(۶, \frac{۵۰}{۳}, ۳۰\right) \\ & \left(۴, \frac{۳۲}{۳}, ۱۲\right)\tilde{x}_۱ + \left(۵, \frac{۷۳}{۶}, ۲۰\right)\tilde{x}_۲ + \left(۷, \frac{۱۰۵}{۶}, ۳۰\right)\tilde{x}_۳ \leq (۱۰,۳۰,۵۰) \\ & (۳,۵,۷)\tilde{x}_۱ + (۵,۱۵,۲۰)\tilde{x}_۲ + (۵,۱۰,۱۵)\tilde{x}_۳ \leq \left(۲, \frac{۱۴۵}{۶}, ۳۰\right) \\ & \tilde{x}_۱, \tilde{x}_۲, \tilde{x}_۳ \geq ۰. \end{aligned} \tag{۹.۵}$$

جدول ۳.۵: هزینه ها و مقدار منابع موجود

منابع	فعالیت ۱	فعالیت ۲	فعالیت ۳	بردار سمت راست (RHS)
	$\tilde{a}_{ij} = (o_{ij}, w_{ij}, p_{ij})$	$\tilde{a}_{ij} = (o_{ij}, w_{ij}, p_{ij})$	$\tilde{a}_{ij} = (o_{ij}, w_{ij}, p_{ij})$	$\tilde{b}_j = (Optis, WgtdAve, Pessi)$
محدودیت ۱	$(۲,۵,۸)$	$(۳,\frac{۴۱}{۶},۱۰)$	$(۵,\frac{۳۱}{۳},۱۸)$	$(۶,\frac{۵۰}{۳},۳۰)$
محدودیت ۲	$(۴,\frac{۳۲}{۳},۱۲)$	$(۵,\frac{۷۳}{۶},۲۰)$	$(۷,\frac{۱۰۵}{۶},۳۰)$	$(۱۰,۳۰,۵۰)$
محدودیت ۳	$(۳,۵,۷)$	$(۵,۱۵,۲۰)$	$(۵,۱۰,۱۵)$	$(۲,\frac{۱۴۵}{۶},۳۰)$
سود	$(۲,۵,۸)$	$(۳,\frac{۳۷}{۶},۱۰)$	$(۵,\frac{۳۴}{۳},۱۵)$	

و

$$
\begin{aligned}
&Min\ \tilde{z}' = \left(۶,\frac{۵۰}{۳},۳۰\right)\tilde{y}_۱ + (۱۰,۳۰,۵۰)\tilde{y}_۲ + \left(۲,\frac{۱۴۵}{۶},۳۰\right)\tilde{y}_۳ \\
&s.t. \\
&(۲,۵,۸)\tilde{y}_۱ + \left(۴,\frac{۳۲}{۳},۱۲\right)\tilde{y}_۲ + (۳,۵,۷)\tilde{y}_۳ \geq (۲,۵,۸) \\
&\left(۳,\frac{۴۱}{۶},۱۰\right)\tilde{y}_۱ + \left(۵,\frac{۷۳}{۶},۲۰\right)\tilde{y}_۲ + (۵,۱۵,۲۰)\tilde{y}_۳ \geq \left(۳,\frac{۳۷}{۶},۱۰\right) \\
&\left(۵,\frac{۳۱}{۳},۱۸\right)\tilde{y}_۱ + \left(۷,\frac{۱۰۵}{۶},۳۰\right)\tilde{y}_۲ + (۵,۱۰,۱۵)\tilde{y}_۳ \geq \left(۵,\frac{۳۴}{۳},۱۵\right) \\
&\tilde{y}_۱, \tilde{y}_۲, \tilde{y}_۳ \geq ۰.
\end{aligned}
$$

جدول سیمپلکس اولیه در جدول (۷.۵) داده شده است.

	$\tilde{x}_۱$	$\tilde{x}_۲$	$\tilde{x}_۳$	$\tilde{x}_۴$	$\tilde{x}_۵$
$\tilde{x}_۴(R_۱)$	$(۲,۵,۸)$	$(۳,\frac{۴۱}{۶},۱۰)$	$(۵,\frac{۳۱}{۳},۱۸)$	$(۱,۱,۱)$	$(۰,۰,۰)$
$\tilde{x}_۵(R_۲)$	$(۴,\frac{۳۲}{۳},۱۲)$	$(۵,\frac{۷۳}{۶},۲۰)$	$(۷,\frac{۱۰۵}{۶},۳۰)$	$(۰,۰,۰)$	$(۱,۱,۱)$
$\tilde{x}_۶(R_۳)$	$(۳,۵,۷)$	$(۵,۱۵,۲۰)$	$(۵,۱۰,۱۵)$	$(۰,۰,۰)$	$(۰,۰,۰)$
$\tilde{z}(R_۴)$	$(-۸,-۵,-۲)$	$(-۱۰,-\frac{۳۷}{۶},-۳)$	$(-۱۵,-\frac{۳۴}{۳},-۵)$	$(۰,۰,۰)$	$(۰,۰,۰)$

$\tilde{x}_۶$	$\tilde{b}$
$(۰,۰,۰)$	$(۶,\frac{۵۰}{۳},۳۰)$
$(۰,۰,۰)$	$(۱۰,۳۰,۵۰)$
$(۱,۱,۱)$	$(۲,\frac{۱۴۵}{۶},۳۰)$
$(۰,۰,۰)$	$(۰,۰,۰)$

گام ۱: منفی‌ترین مقدار رتبه تابع در رابطه $\tilde{z}$ برابر است با: $(-۱۵,\frac{-۳۴}{۳},-۵)$.

جدول ۴.۵: محاسبات مقادیر رتبه برای ضرایب تابع هدف

	$\tilde{x}_۱$	$\tilde{x}_۲$	$\tilde{x}_۳$	$\tilde{x}_۴$	$\tilde{x}_۵$
$\tilde{c}$	$(-۸, -۵, -۲)$	$(-۱۰, \frac{-۳۷}{۶}, -۳)$	$(-۱۵, \frac{-۳۴}{۳}, -۵)$	$(۰, ۰, ۰)$	$(۰, ۰, ۰)$
$\sigma = \frac{w-u}{۶}$	۱	$\frac{۷}{۶}$	$\frac{۱۰}{۶}$	۰	۰
$u + w - \sigma$	-۱۱	$\frac{-۸۵}{۶}$	$\frac{-۱۳۰}{۶}$	۰	۰

جدول ۵.۵: محاسبات نسبت رتبه‌بندی برای عناصر سطر و ستون محوری (لولا)

$\tilde{a}_{ik}$	$\sigma = \frac{w-u}{۶}$	$\Re(\tilde{a}_{ik}) = u + w - \sigma$	$\tilde{b}_i$	$\sigma = \frac{w-u}{۶}$	$\Re(\tilde{b}_i) = u + w - \sigma$	$\frac{\Re(\tilde{b}_i)}{\Re(\tilde{a}_{ik})}$
$(۵, \frac{۳۱}{۳}, ۱۸)$	$\frac{۱۳}{۶}$	$\frac{۱۲۵}{۶}$	$(۶, \frac{۵۰}{۳}, ۳۰)$	$\frac{۲۴}{۶}$	$\frac{۱۹۲}{۶}$	$\frac{۱۹۲}{۱۲۵} = ۱/۵۳$
$(۷, \frac{۱۰۵}{۶}, ۳۰)$	$\frac{۲۳}{۶}$	$\frac{۱۹۹}{۶}$	$(۱۰, ۳۰, ۵۰)$	$\frac{۴۰}{۶}$	$\frac{۳۲۰}{۶}$	$\frac{۳۲۰}{۱۹۹} = ۱/۶۰$
$(۵, ۱۰, ۱۵)$	$\frac{۱۰}{۶}$	$\frac{۱۱۰}{۶}$	$(۲, \frac{۱۴۵}{۶}, ۳۰)$	$\frac{۲۸}{۶}$	$\frac{۱۶۴}{۶}$	$\frac{۲۵۵}{۱۱۰} = ۱/۴۹$

بردار $(-۱۵, \frac{-۳۴}{۳}, -۵)$ متناظر با ستون $\tilde{x}_۳$ می‌باشد، بنابراین ستون محوری را تشخیص می‌دهیم.

گام ۲. کمترین نسبت رتبه مربوط به نسبت بردار های $(۵, ۱۰, ۱۵)$ و $(۱۵, \frac{۱۴۵}{۶}, ۳۰)$ است. این بردارها مربوط به سطر متناظر با $\tilde{x}_۶$ است، بنابراین متغیر وارد شونده $\tilde{x}_۳$ و $\tilde{x}_۶$ متغیر خارج شونده است. عنصر محوری $(۵, ۱۰, ۱۵)$ است (جدول ۷.۵).

گام ۳. تولید بردار $(۱, ۱, ۱)$ در موقعیت عنصر محوری $(۵, ۱۰, ۱۵)$ به وسیله عملیات سطری $R_۳(\frac{۱}{۵}, \frac{۱}{۱۰}, \frac{۱}{۱۵})$ که به صورت زیر است:

$\tilde{x}_۴(R_۱)$	$(۲, ۵, ۸)$	$(۳, \frac{۴۱}{۶}, ۱۰)$	$(۵, \frac{۳۱}{۳}, ۱۸)$	$(۱, ۱, ۱)$	$(۰, ۰, ۰)$
$\tilde{x}_۵(R_۲)$	$(۴, \frac{۳۲}{۳}, ۱۲)$	$(۵, \frac{۷۳}{۶}, ۲۰)$	$(۷, \frac{۱۰۵}{۶}, ۳۰)$	$(۰, ۰, ۰)$	$(۱, ۱, ۱)$
$\tilde{x}_۳(R'_۳)$	$(\frac{۱}{۵}, \frac{۱}{۲}, \frac{۷}{۵})$	$(\frac{۱}{۳}, \frac{۱۷}{۱۲}, ۴)$	$(۱, ۱, ۱)$	$(۰, ۰, ۰)$	$(۰, ۰, ۰)$
$\tilde{z}(R_۴)$	$(-۸, -۵, -۲)$	$(-۱۰, \frac{-۳۷}{۶}, -۳)$	$(-۱۵, \frac{-۳۴}{۳}, -۵)$	$(۰, ۰, ۰)$	$(۰, ۰, ۰)$
$(۰, ۰, ۰)$	$(۶, \frac{۵۰}{۳}, ۳۰)$				
$(۰, ۰, ۰)$	$(۱۰, ۳۰, ۵۰)$				

گام ۴. تولید بردار صفر $(۰, ۰, ۰)$ در بالا و پایین عنصر محوری با عملیات سطری:

$$R_۱ + \left(-۱۸, \frac{-۳۱}{۳}, -۵\right) R'_۳, \quad R_۲ + \left(-۳۰, \frac{-۱۰۵}{۶}, -۷\right) R'_۳,$$
$$R_۴ + \left(۵, \frac{۳۴}{۳}, ۱۵\right) R'_۳$$

$\tilde{x}_{۴}(R'_{۱})$	$(\frac{-۸}{۵}, \frac{-۱}{۶}, ۱)$	$(-۳, \frac{-۲۸۱}{۳۶}, -۱۰)$	$(۰, ۰, ۰)$	$(۱, ۱, ۱)$	$(۰, ۰, ۰)$	$(\frac{-۶}{۵}, \frac{-۳۱}{۳۰}, -۱)$	$(-۱۲, \frac{-۲۹۹}{۳۶}, ۰)$
$\tilde{x}_{۵}(R'_{۲})$	$(-۲, \frac{۲۳}{۱۲}, \frac{۱۱}{۵})$	$(-۵, \frac{-۱۰۱}{۸}, -۸)$	$(۰, ۰, ۰)$	$(۰, ۰, ۰)$	$(۱, ۱, ۱)$	$(-۲, \frac{-۷}{۴}, \frac{-۷}{۵})$	$(-۲۰, \frac{۸۸۵}{۷۲}, ۸)$
$\tilde{x}_{۳}(R'_{۳})$	$(\frac{۱}{۵}, \frac{۱}{۲}, \frac{۷}{۵})$	$(\frac{۱}{۳}, \frac{۱۷}{۱۲}, ۴)$	$(۱, ۱, ۱)$	$(۰, ۰, ۰)$	$(۰, ۰, ۰)$	$(\frac{۱}{۱۵}, \frac{۱}{۱۰}, \frac{۱}{۵})$	$(۱, \frac{۲۹}{۱۲}, ۶)$
$\tilde{z}(R'_{۴})$	$(-۷, \frac{۲}{۳}, ۱۹)$	$(\frac{-۲۵}{۳}, \frac{۴}{۹}, ۵۷)$	$(۰, ۰, ۰)$	$(۰, ۰, ۰)$	$(۰, ۰, ۰)$	$(\frac{۱}{۳}, \frac{۳۴}{۳۰}, ۳)$	$(۵, \frac{۹۸۶}{۳۶}, ۹۰)$

تکرار اول کامل است. برای تکرار دوم، هیچ عددی در رابطه $\tilde{z}$ با مقدار رتبه منفی وجود ندارد، بنابراین جواب بهینه به صورت زیر خواهد بود:

$$\tilde{z} = (z_{۱}, z_{۲}, z_{۳}) = \left(۵, \frac{۹۸۶}{۳۶}, ۹۰\right) = (۵, ۲۷/۳۸, ۹۰)$$
$$\tilde{x}_{۱} = (x_{۱۱}, x_{۱۲}, x_{۱۳}) = (۰, ۰, ۰), \tilde{x}_{۲} = (x_{۲۱}, x_{۲۲}, x_{۲۳}) = (۰, ۰, ۰),$$
$$\tilde{x}_{۳} = (x_{۳۱}, x_{۳۲}, x_{۳۳}) = \left(۱, \frac{۲۹}{۱۲}, ۶\right) = (۱, ۲/۴۱, ۶)$$

جواب دوگان نیز به این صورت می‌باشد:

$$\tilde{z}' = (z'_{۱}, z'_{۲}, z'_{۳}) = \left(۵, \frac{۹۸۶}{۳۶}, ۹۰\right) = (۵, ۲۷/۳۸, ۹۰)$$
$$\tilde{y}_{۱} = (y_{۱۱}, y_{۱۲}, y_{۱۳}) = (۰, ۰, ۰), \tilde{y}_{۲} = (y_{۲۱}, y_{۲۲}, y_{۲۳}) = (۰, ۰, ۰),$$
$$\tilde{y}_{۳} = (y_{۳۱}, y_{۳۲}, y_{۳۳}) = \left(\frac{۱}{۳}, \frac{۳۴}{۳۰}, ۳\right) = (۰/۳۳۳, ۱/۱۳, ۳)$$

برای مسئله اولیه، تابع عضویت تابع هدف و محدودیت‌ها به ترتیب به صورت زیر است:

$$\mu(\tilde{z}(x)) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\tilde{z}(x) - ۵}{۲۲/۳۸}, & ۵ \leq \tilde{z}(x) < ۲۷/۳۸ \\ ۱, & \tilde{z}(x) = ۲۷/۳۸ \\ \frac{۹۰ - \tilde{z}(x)}{۶۲/۶۲}, & ۲۷/۳۸ < \tilde{z}(x) \leq ۹۰ \end{array} \right\}$$

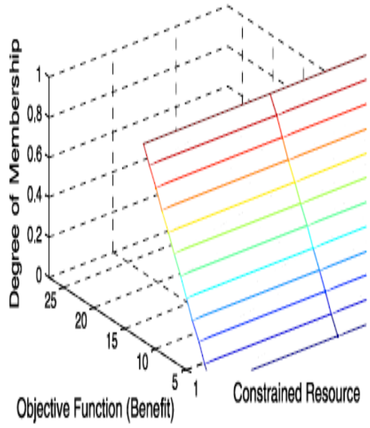
$$\mu(\tilde{x}_{۳}) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\tilde{x} - ۱}{۱/۴۱}, & ۱ \leq \tilde{x}_{۳} < ۲/۴۱ \\ ۱, & for \tilde{x}_{۳} = ۲/۴۱ \\ \frac{۶ - \tilde{x}_{۳}}{۳/۵۹}, & ۲/۴۱ < \tilde{x}_{۳} \leq ۶ \end{array} \right\}$$

بنابراین، برای دوگان نیز تابع عضویت برای تابع هدف و محدودیت‌ها به صورت زیر خواهد بود:

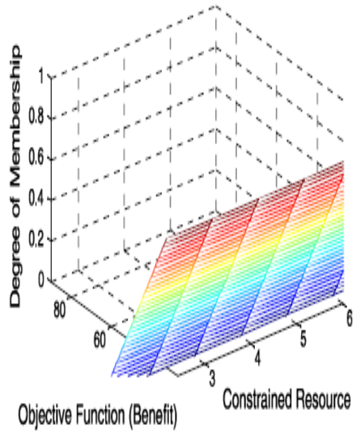
$$\mu(\tilde{z}'(x)) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{\tilde{z}'(x) - ۵}{۲۲/۳۸}, & ۵ \leq \tilde{z}'(x) < ۲۷/۳۸ \\ ۱, & \tilde{z}'(x) = ۲۷/۳۸ \\ \frac{۹۰ - \tilde{z}'(x)}{۶۲/۶۲}, & ۲۷/۳۸ < \tilde{z}'(x) \leq ۹۰ \end{array} \right\}$$

و

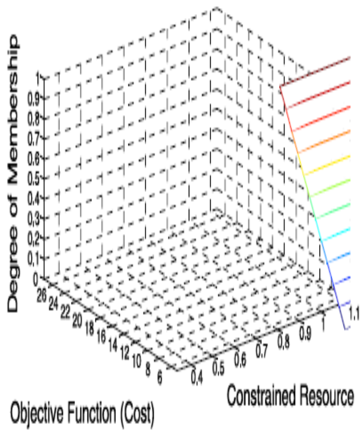
$$\mu(\tilde{y}_۳) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\tilde{y}_۳ - ۵}{۰/۳۳}, & ۵ \leq \tilde{y}_۳ < ۱/۱۳ \\ ۱, & \tilde{y}_۳ = ۱/۱۳ \\ \frac{۳ - \tilde{y}_۳}{۱/۸۷}, & ۱/۱۳ < \tilde{y}_۳ \leq ۳ \end{array} \right\}$$



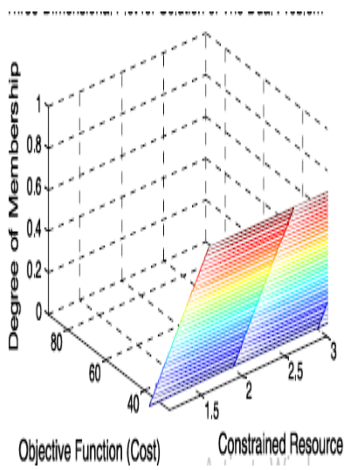
(آ) نمودارسه بعدی برای جواب اولیه مسئله



(ب) نمودار سه بعدی برای جواب اولیه مسئله



(ج) نمودار سه بعدی برای جواب دوگان مسئله



(د) نمودار سه بعدی برای جواب دوگان مسئله

شکل ۱.۵: (آ)جواب برای مسئله اولیه در محدوده [۲۷/۳۸ – ۵]: (ب) جواب برای مسئله اولیه در محدوده [۹۰ – ۲۷/۳۸]: (ج) جواب برای دوگان مسئله در محدوده [۲۷/۳۸ – ۵]: (د) جواب برای دوگان مسئله در محدوده [۹۰ – ۲۷/۳۸]

شکل ۱.۵(آ)ـ۱.۵(ب) نمودارهای سه بعدی جواب اولیه در محدوده های مختلف را نشان می‌دهد و شکل ۱.۵(ج)ـ۱.۵(د) نمودارهای سه بعدی جواب دوگان را در محدوده های

مختلف را نشان می‌دهد.

فصل ۶

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

۱.۶ نتیجه‌گیری

اخیراً مسائل برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی مورد توجه بسیاری از محققین حوزه‌ی تحقیق در عملیات و ریاضیات فازی قرار گرفته است. شهرت برنامه ریزی خطی فازی اساساً به واسطه توانایی تحلیل و مدلسازی مفاهیم نادقیق و مبهم است. از این‌رو مدل برنامه ریزی خطی یکی از مهم‌ترین و کاربردی ترین روش‌های تحقیق در عملیات است. هدف ما در این پایان‌نامه بررسی روش‌هایی برای حل مسائل بهینه‌سازی کاملاً فازی است.به عنوان مثال یک روش جدید برای تبدیل مسائل برنامه‌ریزی خطی کاملا ً فازی به دو مسئله برنامه ریزی خطی که با توجه به ویژگی های این مسائل از تکنیک برنامه ریزی خطی چندهدفه و قاعده الفبایی برای حل این مسائل ارائه شد. در ادامه یک روش برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی با محدویت های نامساوی بیان کردیم. با وجود اینکه بسیاری از محققان از تابع رتبه بندی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی استفاده کرده اند. در ادامه، یک روش جدید برای مقایسه اعداد فازی و دو نوع مسئله برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی بنام ۱FFLPł و FFLP2 تعریف کردیم. مسئله FFLP1 محدودیت هایی با نامساوی عادی دارد در حالی‌که مسئله FFLP2 محدودیت هایی با نامساوی منعطف دارد. سه الگوریتم برای حل این مسائل ارائه شد. الگوریتم۱ برای حل مسئله نوع اول و الگوریتم۲ و۳ برای حل مسئله نوع دوم ارائه کردیم. در الگوریتم ۱ و۲ مسائل FFLP1 و $FFLP_\alpha$ به مسائل برنامه‌ریزی خطی قطعی هم‌ارز تبدیل

می‌شود و آن‌گاه مسئله حل خواهد شد. الگوریتم ۲ پایه و اساس الگوریتم ۳ است. در الگوریتم ۳ نیز ابتدا مسئله را به $FFLP_\alpha$ تبدیل می‌کنیم سپس با استفاده از الگوریتم ۲ مسئله را حل می‌کنیم. در فصل آخر نیز روش سیمپلکس اصلاح شده را برای حل مسائل برنامه ریزی خطی کاملاً فازی مورد بررسی قرار دادیم. مسئله به طور مستقیم و بدون تبدیل به یک مسئله هم‌ارز حل خواهد شد. ذر این فصل از رتبه‌بندی اعداد فازی و روش حذفی گاوس استفاده کردیم، و آن‌گاه یک الگوریتم سیمپلکس اصلاح شده برای یافتن جواب ها برای مسائل برنامه‌ریزی خطی ارائه شده است.

مراجع

[۱] طاهری،محمود **"آشنایی با نظریه مجموعه های فازی"** انتشارات جهاد دانشگاهی مشهد، ۱۳۸:علوم پایه (۱۳۴۳)

[2] Allahviranloo, T. Lotfi, F.H. Kiasary, M.K. Kiani, N.A. Alizadeh, L."**Solving full fuzzy linear programming problem by the ranking function,**" Appl. Math. Sci. 2 (2008) 19–32.

[3] Baykasoglu, A. Gocken, T."**A direct solution approach to fuzzy mathematical programs with fuzzy decision variables,**" Expert Systems with Applications 39 (2012) 1972–1978.

[4] Bector, C.R. Chandra, S.: "**Fuzzy Mathematical Programming and Fuzzy Matrix Games. Studies in Fuzziness and Soft Computing.**" Springer, Berlin Heidelberg (2005)

[5] Bellman, R.E. Zadeh, L.A.: "**Decision making in a fuzzy environment.**" Manag. Sci. 17 (1970) 141–164.

[6] Bhardwaj, B. Kumar, A. : "**A Note on the Paper "A Simplified Novel Technique for Solving Fully Fuzzy Linear Programming Problems"**" J Optim Theory Appl 163 (2014) 685–696.

[7] Buckley, J. Feuring, T. "**Evolutionary algorithm solution to fuzzy problems: fuzzy linear programming,**" Fuzzy Set. Syst. 109 (2000) 35–53.

[8] Campos, L. Verdegay, J.L. "**Linear programming problems and ranking of fuzzy numbers,**" Fuzzy Set. Syst. 32 (1989) 1–11.

[9] Chu, M. Altwies, D. Walker, E. "**Achieve PMP Exam Success.**" PMBOK Guide, Companion, Concise Study Guide for Busy Project Manager. J. Ross, Plantation (2005)

[10] Dehghan, M.B. Hashemi, M. Ghatee, "**Computational methods for solving fully fuzzy linear systems,**" Appl. Math. Comput. 179 (2006) 328–343.

[11] Delgado, M. Verdegay, J.L. Vila, M.A. ”**A general model for fuzzy linear programming, Fuzzy Sets Syst.**” 29 (1989) 21–29.

[12] Ebrahimnejad, A. Nasseri, S.H. Lotfi, F.H. Soltanifar,M.”**A primal-dual method for linear programming problems with fuzzy variables,**” Eur. J. Ind. Eng. 4 (2010) 189–209.

[13] Fan, Y.R. Huang, G.H. and Yang,A.L. ”**Generalized fuzzy linear 514 programming for decision making under uncertainty: Feasi515 bility of fuzzy solutions and solving approach,**” Information 516 Sciences 241 (2013) 12–27.

[14] Fang, S.C. Hu, C. Wang, H.F. Wu, S.Y. ”**Linear programming with fuzzy coefficients in constraints,**” Comp. Math. Appl. 37 (1999) 63–76.

[15] Ganesan, K. Veeramani, P. ”**Fuzzy linear programs with trapezoidal fuzzy numbers,**” Ann. Oper. Res. 143 (2006) 305–315.

[16] Grzegorzewski, P. ”**Nearest interval approximation of a fuzzy number,**” Fuzzy Sets and Systems 130 (2002) 321 – 330

[17] Hashemi, S.M. Modarres, M. Nasrabadi,E. Nasrabadi, M.M. ”**Fully fuzzified linear programming, solution and duality,**” J. Intell. Fuzzy Syst. 17 (2006) 253–261.

[18] Kaufmann, A. Gupta, M.M. :”**Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science.**” Elsevier Science, Amsterdam (1988)

[19] Kandel, A. Ma, M. Friedman, M. ”**A new approach for defuzzification,**” Set Syst. 111 (2000) 351–356.

[20] Kaufmann, A. Gupta, M.M. ”**Introduction to Fuzzy Arithmetic Theory and Applications,** Van Nostrand Reinhold, New York, 1985.

[21] Kaur, J. and Kumar, A. ”**Mehar’s method for solving fully fuzzy linear programming problemswithL-Rfuzzy parameters,**” Applied Mathematical Modelling 37 (2013) 7142–7153.

[22] Khan, I.U. Ahmad, T. Maan, N.:”**A simplified novel technique for solving fully fuzzy linear programming problems.**” J. Optim. Theory Appl. 159 (2013) 536–546

[23] Khan, I.U. Ahmad, T. Maan, N. ”**A two phase approach for solving linear programming problems by using fuzzy trapezoidal membership functions.**” Int. J. Basic Appl. Sci. 6 (2010) 86–95

[24] Kumar, A. and Kaur, J. "**Exact fuzzy optimal solution of fully linear programming problemswith unrestricted fuzzy variables,**" Applied Intelligent 37 (2012) 145–154.

[25] Kumar, A. Kaur *, J. Singh, P. "**A new method for solving fully fuzzy linear programming problems,**" Applied Mathematical Modelling 35 (2011) 817-823

[26] Lotfi, F.H. Allahviranloo, T. Jondabeha, M.A. Alizadeh, L. "**Solving a fully fuzzy linear programming using lexicography method and fuzzy approximate.**" solution, Appl. Math. Modell. 33 (2009) 3151–3156.

[27] Mahadavi-Amiri, N. Nasseri, S.H. "**Duality results and a dual Simplex method for linear programming problems with trapezoidal fuzzy variables,**" Fuzzy Sets Syst. 158 (2007) 1961–1978.

[28] Maleki, H.R. "**Ranking functions and their applications to fuzzy linear programming,**" Far East J. Math. Sci. (FJMS) 4 (2002) 283–301.

[29] Maleki, H.R., Tata, M., Mashinchi, M. "**Linear programming with fuzzy variables.**" Fuzzy Sets Syst. 109 (2000) 21–33.

[30] Mishmast, N.H. Maleki, H.R. Mashinchi, M. "**Solving fuzzy number linear programming problem by lexicographic ranking function.**" Ital. J. Pure Appl. Math. 15 (2004) 9–20.

[31] Nasseri, S.H., Ardil, E. Yazdani, A. Zaefarian, R. "**Simplex method for solving linear programming problems with fuzzy numbers.**" Proc. World Acad. Sci. Eng. Technol. 10 (2005) 284–288.

[32] Rommelfanger, H., Hanuscheck, R., Wolf, J. "**Linear programming with fuzzy objective.**" Fuzzy Sets Syst. 29 (1989) 31–48

[33] Tanaka, H. Okuda, T. Asai, K. "**On fuzzy mathematical programming,**" J. Cybernetics Syst. 3 (1973) 37–46.

[34] Verdegay, J.L. "**A dual approach to solve the fuzzy linear programming problem,**" Fuzzy Sets Syst. 14 (1984) 131–141.

[35] Vohra, N.D.: "**Quantitative Techniques in Management.**" Tata McGraw-Hill, New Delhi (2007)

[36] Waters, D. "**Quantitative Methods for Business.**" Prentice Hall, Pearson Educational Limited, London (2008)

[37] Xiao-Peng Yanga, b, Bing-Yuan Caoa, c, and Xue-Gang Zhoua, d "**Solving fully fuzzy linear programming problems with flexible constraints based on a new order relation,**" Intelligent and Fuzzy Systems (2015)

[38] Xu, Z.Chen, J. "**An interactive method for fuzzy multiple attribute group decision making,**" Inform. Sci. 177 (2007) 248263.

[39] Zimmermann, H.J. "**Fuzzy programming and linear programming with several objective functions.**" Fuzzy Sets Syst. 1 (1978) 45–55

Aabstract

The fuzzy set theory has been applied in many fields, such as operations research, control theory, and management sciences, etc. In particular, an application of this theory in decision making problems is linear programming problems with fuzzy numbers. The modeling and solving the optimization problem is one of the most important daily problem.By notation the nature of data in practice which are imprecise, fully fuzzy linear programming problem (FFLP) is a power full tool to modeling the practical optimization problem. This thesis investigates some methods for solving fully fizzy optimization problems.One of the methods of solving these problems,is lexicography method and fuzzy approximate solution.By using the concept of the symmetric triangular fuzzy number an approach to defuzzify a general fuzzy quantity is presented.So,a new method has been considered to find the fuzzy optimal solution of FFLP problems with equality constraints.Also,another method has been proposed for solving fully fuzzy linear programming with flexible constraints based on a new order relation.In this method,three algorithms are developed to deal with FFLP problems by converting them into some equivalent crisp linear programming prbolems.Next,another method is considered which is a simplified novel technique for solving Fully Fuzzy linear programming problems.
Keywords: Fully fuzzy linear programming, Fuzzy numbers, Fuzzy simplex method, Ranking function, Multi objective linear programming (MOLP), Flexible constraint

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Operation Research

Some methods for solving fully fuzzy optimization problems

By: Razyeh Arabkhani

Supervisors

Dr. Jafar Fathali
Dr. Farokh Foruhande

Advisor

Dr. Mehrdad Ghaznavi

Junuary 2018