بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته آمار ، گرایش آمار ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

توزیع‌های مبتنی بر کوماراسوامی و تعمیم آن‌ها

نگارنده: امیر علی‌نیایی

استاد راهنما

دکتر احمد نزاکتی رضازاده

استاد مشاور

دکتر حسین باغیشنی

بهمن ۱۳۹۶

شماره:
تاریخ:

باسمه‌تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای **امیر علی‌نیایی** با شماره دانشجویی **۹۴۱۲۶۳۴** رشته **آمار** گرایش **آمار ریاضی** تحت عنوان **توزیع‌های مبتنی بر کوماراسوامی و تعمیم آن‌ها** که در تاریخ **۹۶/۱۱/۹** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه: خوب) ☒ **مردود** ☐

نوع تحقیق: **نظری** ☒ **عملی** ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	دکتر احمد نزاکتی رضازاده	دانشیار	
۲- استادراهنمای دوم			
۳- استاد مشاور	دکتر حسین باغیشنی	استادیار	
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر محمدرضا ربیعی	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر محمد آرشی	دانشیار	
۶ـ استاد ممتحن دوم	دکتر داود شاهسونی	دانشیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشکده ریاضی

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

این مجموعه تقدیم می‌شود به:
مادر مهربان و پدر بزرگوار و خواهر عزیزم،
به پاس از خود گذشتگی و دریادلی و صبوری و فداکاری‌های بی‌دریغشان.

مقدمه

امروزه در جوامع بشری، پیشرفت تکنولوژی و تاثیرات آن روی زندگی مردم بسیار وسیع بوده است. با بالا رفتن سطح توقعات مردم، رقابت شدیدی بین تولیدکنندگان محصولات در سطح بین المللی به‌وجود آمده است و شرکت‌های تولیدی سعی بر بالا بردن کیفیت محصولات خود دارند. از آن‌جایی که در مطالعات قابلیت اطمینان و طول عمر محصولات با کیفیت آن‌ها سروکار داریم و در مواقعی ممکن است که محصول انتخابی ما دارای قابلیت اعتماد بالایی باشد لذا بدست آوردن داده گاه بسیار وقت‌گیر و گاهی اوقات بسیار پرهزینه می‌باشد. در بسیاری از موارد، با نمونه‌هایی روبه‌رو می‌شویم که بنا به هر دلیلی نمی‌توان زمان از کار افتادن واحدهای آزمایش را دید.

سانسور یک پدیده متداول در قابلیت اعتماد و آزمون‌های طول عمر می‌باشد. داده‌های سانسور شده زمانی رخ می‌دهند که در یک آزمایش، آزمایشگر نتواند اطلاعات کاملی را ارائه دهد یا ماهیت آزمایش به‌گونه‌ای باشد که محدودیت‌هایی را در مشاهدات به‌وجود آورد. بر اساس این‌که یک آزمایش چه زمانی پایان می‌یابد و چگونه داده‌ها جمع‌آوری می‌شوند، انواع سانسور پدید می‌آیند. برای اولین بار کریچ[۱] (۱۹۴۹) عنوان سانسور شده را برای این نمونه‌ها پیشنهاد کرد. در این پایان‌نامه، از سانسور نوع یک و سانسور نوع دو استفاده شده است و شامل چهار فصل می‌باشد که به خلاصه به شرح زیر است:

- در فصل اول مفاهیم، مقدمات و تعاریف مورد نیاز سایر فصل‌ها را بیان می‌کنیم.
- در فصل دوم یک کلاس جدید از توزیع‌های تعمیم‌یافته را معرفی می‌کنیم و آماره‌های ترتیبی و گشتاورها و گشتاورهای احتمال موزون و همچنین برآوردهای ماکسیمم درستنمایی را برای توزیع‌های تعمیم‌یافته کوماراسوامی با استفاده از داده‌های کامل بیان می‌کنیم.
- در فصل سوم برآوردهای ماکسیمم درستنمایی را برای توزیع‌های تعمیم یافته کوماراسوامی را با استفاده از سانسور نوع یک و سانسور نوع دو بررسی می‌کنیم.
- در فصل چهارم مطالعات شبیه‌سازی را برای دو توزیع کوماراسوامی گاما و کوماراسوامی وایبل برای داده‌های سانسور نوع یک و نوع دو بررسی کرده و نتایج را گزارش می‌کنیم.

[۱] Kerrich

- ضمیمه این پایان‌نامه شامل برنامه‌های نوشته شده در نرم‌افزار R برای اجرای مطالعات شبیه‌سازی می‌باشد.

در آخر هم برخورد لازم می‌دانم که مراتب سپاس و قدردانی را نسبت به استاد ارجمند و بزرگوارم جناب آقای دکتر نزاکتی رضازاده که با راهنمایی‌هایشان مرا یاری رسانده‌اند، ابراز نمایم. همچنین از جناب آقای دکتر باغیشنی که مشاوره این پایان‌نامه را بر عهده داشته‌اند، کمال تشکر را دارم. در نهایت از دوستان عزیزم که با کمک‌های بی‌دریغشان مرا یاری کردند تا این پایان‌نامه را به اتمام برسانم، سپاسگزارم.

امیر علی‌نیایی
بهمن ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب **امیر علی‌نیایی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **آمار علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **توزیع‌های مبتنی بر کوماراسوامی و تعمیم آن‌ها** ، تحت راهنمایی **احمد نزاکتی رضازاده** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خو٥د، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچجا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ‘‘ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

امیر علی‌نیایی
بهمن ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

کوماراسوامی یک تابع چگالی احتمال را برای فرآیندهای تصادفی دو کرانه ارائه کرد. برای اولین بار، بر اساس این توزیع، یک خانواده جدید از توزیع‌های تعمیم‌یافته به‌وجود آمد. برخی از توزیع‌های ویژه مانند کوماراسوامی گاما، کوماراسوامی نرمال، کوماراسوامی وایبل و ... در خانواده جدید مورد بحث قرار گرفته‌اند و گشتاورها و آماره‌های ترتیبی این توزیع‌ها را بدست می‌آوریم.
از روش ماکزیمم درستنمایی برای برآورد توزیع‌های تعمیم‌یافته کوماراسوامی استفاده کرده و برای داده‌های سانسور شده نوع یک و داده‌های سانسور شده نوع دو یک مطالعه شبیه‌سازی را انجام داده و برای هر سانسور، برآورد پارامترها، میانگین توان دوم خطا، فاصله اطمینان تقریبی و نرخ پوشش را محاسبه کرده‌ایم. همچنین کارآیی پارامترها را با مقادیر از قبل ثابت مورد بررسی قرار داده‌ایم.

کلمات کلیدی: توزیع تعمیم‌یافته کوماراسوامی، سانسور نوع یک، سانسور نوع دو، برآورد ماکزیمم درستنمایی، توزیع گاما، توزیع وایبل و فاصله اطمینان

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل، مفاهیم و نمادهایی را که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار خواهند گرفت، معرفی می‌کنیم. در بخش اول آماره‌های ترتیبی، بخش دوم روش‌های جمع‌آوری داده‌ها که شامل داده‌های کامل و انواع داده‌های سانسور شده می‌باشد، بخش سوم شرایط نظم، بخش چهارم روش ماکزیمم درستنمایی، توابع قابلیت و فاصله اطمینان و دربخش پنجم توزیع‌های آماری را بیان می‌کنیم.

۱.۱ آماره‌های ترتیبی

فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$، n متغیر تصادفی باشند. آن‌ها را به ترتیب صعودی مرتب کرده و با $X_{(1)}, X_{(2)}, ..., X_{(n)}$ نشان می‌دهیم. در این حالت $X_{(j)}$، j امین آماره ترتیبی است. بنابراین $X_{(1)}$ را کوچکترین و $X_{(n)}$ را بزرگترین آماره ترتیبی می‌نامیم.

۱.۱.۱ ویژگی‌های آماره‌های ترتیبی

آماره‌های ترتیبی تشکیل یک زنجیر مارکف می‌دهند، زیرا هر آماره ترتیبی فقط به آماره ترتیبی ماقبل خود وابسته است و از دیگر آماره‌ها مستقل است. فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع پیوسته $F(x)$ باشد. در این صورت:

۱. تابع چگالی توام آماره‌های ترتیبی عبارت است از:

$$f_{X_{(1)},\ldots,X_{(n)}}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=n!\prod_{i=1}^{n}f(x_i)\qquad -\infty<x_1<x_2<\cdots<x_n<\infty.$$

۲. تابع چگالی حاشیه‌ای یک آماره ترتیبی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$f_{X_{(i)}}(x)=\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}[F(x)]^{i-1}[1-F(x)]^{n-i}f(x)\qquad -\infty<x_i<\infty.$$

۳. تابع چگالی توام دو آماره ترتیبی نیز به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}f_{X(i),X(j)}(x_i,x_j) &= \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}[F(x_i)]^{i-1}[F(x_i)-F(x_j)]^{j-i-1}\\ &\quad\times[1-F(x_j)]^{n-j}f(x_i)f(x_j)\qquad ;-\infty<x_i<x_j<\infty.\end{aligned}$$

۲.۱.۱ کاربرد آماره‌های ترتیبی

آماره‌های ترتیبی در قسمت‌های مختلف توصیفی و استنباطی علم آمار، دارای کاربرد می‌باشد. یکی از کاربردهای آن‌ها در آمار توصیفی، کشف داده‌های پرت (داده‌های خیلی کوچک یا خیلی بزرگ) در یک مجموعه از داده‌ها می‌باشد. همان‌طور که می‌دانیم یکی از ضعف‌های استفاده از میانگین به‌عنوان معیاری جهت تمرکز داده‌ها، میزان حساسیت بالای آن‌ها نسبت به داده‌های پرت و تغییرات الگو است. در مقابل، میانه، که از معیارهای مرکزی می‌باشند، نسبت به تغییرات الگو از حساسیت کمتری برخوردار هستند که در محاسبه آن، آماره‌های ترتیبی نقش عمده‌ای ایفا می‌کنند.

در آمار استنباطی می‌توان به مثال‌های زیر در خصوص کاربرد آماره‌های ترتیبی اشاره نمود:

۱. در موضوعات کنترل کیفیت برای بررسی تحت کنترل بودن تولیدات، اغلب از نمودار میانگین و دامنه تغییرات یا از نمودار میانه و دامنه تغییرات استفاده می‌شود که برای محاسبه میانه و دامنه تغییرات ناگزیر به استفاده از آماره‌های ترتیبی می‌باشیم.

۲. در محاسبه تابع توزیع تجربی، نیازمند استفاده از آماره‌های ترتیبی هستیم و از آن‌جا که در آزمون نیکویی برازش، معمولا تمرکز روی تغییرات بین تابع توزیع تجربی و تابع فرضی است، آماره‌های ترتیبی در این آزمون‌ها نقش اساسی دارند.

۳. در آزمایشات طول عمر اغلب به دلایلی از قبیل محدودیت‌های زمانی یا اعتبار مالی، امکان شرکت دادن تمام واحدها در آزمایش وجود ندارد. بنابراین مشاهده طول عمر تمام واحدها امکان‌پذیر نیست. به همین دلیل از روش‌های سانسور[۱] استفاده می‌شود و آماره‌های ترتیبی نقش مهمی در سانسورها دارند.

---
[۱] censoring

۴. آماره‌های ترتیبی، در بسیاری از موارد به عنوان آماره‌های بسنده معرفی می‌شوند که برآوردگرهای نااریب با کمترین واریانس، فواصل اطمینان و پرتوان‌ترین آزمون برای پارامترهای نامعلوم را فراهم می‌کنند.

برای جزئیات بیشتر در مورد ویژگی‌های آماره‌های ترتیبی و کاربردر آن‌ها، می‌توان به دیوید و ناگاراجاه[۲] [۱۰] یا آرنولد[۳] و همکاران [۴] مراجعه نمود.

۲.۱ داده‌های کامل و سانسور شده

در این پایان‌نامه از داده‌های کامل و داده‌های سانسور شده استفاده شده است که هریک از آن‌ها را تعریف می‌کنیم.

۱.۲.۱ داده‌های کامل

داده‌های کامل[۴] بدان معناست که ارزش هرواحد نمونه، مشاهده یا شناخته شده باشد. برای مثال، اگر بخواهیم میانگین نمره آزمونی برای یک نمونه ده تایی از دانش‌آموزان را محاسبه کنیم به اطلاعات کاملی شامل دانستن نمره هریک از دانش‌آموزان احتیاج خواهیم داشت. به‌همین ترتیب، در مورد تحلیل داده‌های عمر، داده‌های کامل مجموعه‌ای از زمان شکست همه واحدهای نمونه تشکیل خواهد شد. برای مثال اگر پنج واحد آزمون شده و همه آن‌ها شکست خورده باشند (زمان شکست هریک ثبت شده باشد)، پس اطلاعات کامل، به‌عنوان زمان هر شکست در نمونه مورد مطالعه قرار خواهد گرفت.

۲.۲.۱ داده‌های سانسور شده

اگر یک نمونه به حجم n تحت آزمون طول عمر قرار بگیرد، در این صورت اولین زمان خرابی مشاهده شده خودبه‌خود کوچکترین آماره مرتب $x_{(1)}$ است و به طور مشابه دومین خرابی ثبت شده عبارت است از$x_{(2)}$ و الی آخر. اگر همه‌ی n مشاهده‌ی مرتب شده بدست آیند آن‌را نمونه‌گیری کامل گویند. اما موارد زیادی وجود دارد که در آزمون‌های طول عمر به دلیل عوامل بازدارنده‌ای مانند:

۱. هزینه بر بودن آزمایش

۲. عدم دسترسی به همه واحدها یا مأیوس شدن از نتیجه دادن همه واحدها

۳. اشکالات فنی

---

[۲] David and Nagaraga

[۳] Arnold

[۴] Complete Data

۴. طولانی شدن مدت آزمایش

۵. فرصت کم برای اعلام نتایج

همه مشاهدات نمونه ثبت نشده‌اند و با یک نمونه سانسور شده روبرو هستیم.
برخی از انواع سانسور عبارتند از:

۱. سانسور نوع یک

۲. سانسور نوع دو

۳. سانسور ترکیبی

۴. سانسور فزاینده نوع یک

۵. سانسور فزاینده نوع دو

در این بخش، سانسورهای نوع یک و دو که در این پایان‌نامه استفاده شده‌اند را به تفصیل توضیح می‌دهیم. برای جزئیات بیشتر در مورد انواع سانسورها و کاربرد آن‌ها به کوهن[۵] [۸]، بالاکریشنان[۶] و کوهن [۶]، لاولس[۷] [۱۷] و همچنین نلسن[۸] [۲۱] مراجعه نمایید.

سانسور نوع اول

فرض کنید متغیرهای تصادفی مرتب شده $X_{(1)}, \cdots, X_{(n)}$ طول عمر nواحد تحت آزمایش در یک آزمون طول عمر باشند. گاهی به‌دلیل وجود عوامل بازدارنده، یک آزمون طول عمر در زمان مشخص t به پایان رسانده می‌شود، بنابراین در ابتدا همه واحدها فعال می‌شوند و شروع به‌کار می‌کنند تا وقتی که تعدادی از واحدها قبل از زمان t از کار می‌افتند که در این صورت طول عمر این واحدها به‌طور دقیق معلوم خواهد بود. این تعداد را با R نشان می‌دهیم و $n - R$ واحد باقیمانده تا رسیدن به زمان t کار می‌کنند اما به دلیل اتمام آزمایش در لحظه t این واحدها نیز از کار می‌افتند و طول عمر t برای این واحدها ثبت می‌شود. واضح است که طول عمر واقعی $n - R$ واحد سانسور شده لااقل برابر t است. این نوع سانسور، سانسور نوع اول نامیده می‌شود. در این سانسور t معلوم و R تعداد مشاهدات یک متغیر تصادفی است. اگر مشاهدات به‌دست آمده از آزمایش انجام شده بر اساس سانسور نوع اول را با $x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)}$ نشان دهیم و طول عمر واحدها دارای تابع چگالی احتمال $f(x;\theta)$ و تابع توزیع تجمعی $F(x;\theta)$ باشند، آن‌گاه تابع درستنمایی به‌صورت زیر خواهد شد:

$$L(\theta) = \frac{n!}{(n-r)!} \left(\prod_{i=1}^{r} f(x;\theta) \right) [1 - F(x;\theta)]^{n-r}$$

---

[۵] Chohen

[۶] Balakrishan

[۷] Lawless

[۸] Nelson

از آن‌جا که R تعداد واحدهایی است که تا قبل از زمان t از کار افتاده‌اند، یک متغیر تصادفی است، ممکن است یک عدد کوچک یا حتی صفر باشد، بنابراین می‌توان این موضوع را به عنوان یک ضعف در ساختار این نوع از داده‌های سانسور نوع اول به حساب آورد. همچنین سانسور نوع اول را سانسور زمانی نیز می‌گویند.

مثال

یک مجموعه شامل n قطعه الکترونیکی، زمانی که در حالت روشن قرار دارند را در نظر بگیرید. آزمایش تا ۲۰ روز ادامه پیدا می‌کند. در طی آزمایش مدت زمان خرابی هر قطعه یادداشت می‌شود بعد از ۲۰ روز (زمان اتمام آزمایش)برای قطعاتی که تا این زمان سالم هستند، فقط می‌دانیم که زمان لازم تا خرابی آن‌ها بیشتر از ۲۰ روز است. این مثال، نمونه‌ای از داده‌های سانسور نوع یک است که نقطه سانسور آن ۲۰ روز است.

سانسور نوع دوم

با توجه به آن‌چه گفته شده در سانسور نوع اول، R، تعداد واحدهایی از کار افتاده قبل از زمان t، تصادفی بود. اکنون موقعیتی را در نظر می‌گیریم که در یک آزمون طول عمر، r طول عمر واقعی مشاهده شود، در این صورت زمان لازم برای رسیدن به r ـامین از کارافتادگی یعنی $T = X_{(r)}$ یک متغیر تصادفی است. بنابراین آزمون طول عمر پس از اینکه فقط r مشاهده‌ی مرتب شده‌ی اول دهد به پایان رسانده می‌شود. این نوع سانسور را سانسور نوع دوم می‌نامند، در سانسور نوع دو $r < n$ می‌باشد و همچنین اگر در $r = n$، آنگاه با یک نمونه کامل روبه‌رو هستیم.
اگر $x_{(1)}, \cdots, x_{(r)}$ نمایانگر r مشاهده‌ی مرتب شده‌ی یک نمونه تصادفی به حجم n با تابع چگالی احتمال $f(x;\theta)$ و تابع توزیع تجمعی $F(x;\theta)$ باشند، آن‌گاه تابع درستنمایی در این حالت به‌صورت زیر است:

$$L(\theta) = \frac{n!}{(n-r)!}\left(\prod_{i=1}^{r} f(x;\theta)\right)[1 - F(x;\theta)]^{n-r}$$

در سانسور نوع دوم نمی‌توان از قبل زمان طول کشیدن آزمایش را مشخص نمود، این موضوع را می‌توان به عنوان یکی از ضعف‌های سانسور نوع دوم به حساب آورد و این نوع سانسور، سانسور شکست نیز نامیده می‌شود.

مثال

فرض کنید هدف برآورد میانگین طول عمر یک قطعه تولید شده باشد. آزمایش استفاده از قطعه‌های تولید شده را تا زمان خرابی قطعه ۵۰ام ادامه می‌دهیم. بعد از این‌که ۵۰ قطعه

خراب شد آزمایش را متوقف می‌کنیم. در این‌جا زمان خرابی سایر قطعات مشخص نیست. در این سانسور تعداد واحدهایی که خراب می‌شوند از قبل مشخص و برابر مقدار ثابتی است که توسط محقق تعیین می‌شود، ولی زمان اتمام آزمایش یک متغیر تصادفی است.

۳.۱ شرایط نظم

فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال $f(\cdot;\theta)$ و فضای پارامتر Θ باشد، آن‌گاه شرایط نظم برای این خانواده به‌صورت زیر تعریف می‌شود (احمد پارسیان، ۱۳۸۶):

۱. Θ یک زیر بازه از مجموعه اعداد حقیقی است ($\Theta \subseteq R$) و دامنه تغییرات X به θ بستگی ندارد.

۲. مشتق تابع چگالی نسبت به θ وجود دارد. یا به‌عبارت دیگر $\frac{\partial}{\partial\theta}f(x;\theta)$ معنی‌دار است. در نتیجه $\frac{\partial}{\partial\theta}logf(x;\theta)$ برای هر $\theta \subseteq \Theta$ تعریف شده است.

۳. اگر A که زیر مجموعه‌ای از دامنه تغییرات است، یک مجموعه اندازه‌پذیر نسبت به‌فضای احتمال باشد، آن‌گاه تعویض مکان عملگرهای مشتق و انتگرال با یکدیگر مجاز است. یعنی:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_A f(x;\theta)dx = \int_A \frac{\partial}{\partial\theta}f(x;\theta)dx$$

۴. مشتق دوم نسبت به فضای مشاهدات وجود داشته باشد و رابطه زیر برقرارباشد:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}f(x;\theta) = \frac{\partial^۲}{\partial\theta\partial x}F(x;\theta) = \frac{\partial^۲}{\partial x\partial\theta}F(x;\theta).$$

۵. اگر T برآوردگری برای پارامتر θ باشد، رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}E_\theta(T(x)) = \frac{\partial}{\partial\theta}\int T(x)f(x;\theta)dx = \int \frac{\partial}{\partial\theta}T(x)f(x;\theta)dx$$

۱.۳.۱ اطلاع فیشر

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی $f(x;\theta)$ باشد و مشتق این تابع نسبت به θ را با $f'_\theta(x;\theta)$ نمایش دهیم، در این صورت تحت شرایط نظم، میزان تغییر نسبی تابع چگالی احتمال، زمانی که θ به $\theta + \Delta\theta$ تغییر می‌کند، به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\frac{f(x;\theta+\Delta\theta) - f(x;\theta)}{\Delta\theta f(x;\theta)}$$

حد کسر فوق وقتی که $\Delta\theta$ به سمت صفر میل می‌کند را با$S(x;\theta)$ نشان می‌دهیم و داریم:

$$S(x;\theta) = \frac{\lim \frac{f(x;\theta+\Delta\theta)-f(x;\theta)}{\Delta\theta}}{f(x;\theta)} = \frac{f'_\theta(x;\theta)}{f(x;\theta)} = \frac{\partial}{\partial\theta}logf(x;\theta) \qquad (۱.۱)$$

با تبدیل x به X متغیر تصادفی

$$S(X;\theta)=\frac{f'_\theta(X;\theta)}{f(X;\theta)}$$

به‌دست می‌آید که به متغیر نمره[۹] (یا امتیاز) معروف است. به‌سادگی ثابت می‌شود که تحت شرایط نظم $E[S(X;\theta)]=۰$ و در نتیجه

$$Var[S(X;\theta)]=E^{۲}[S(X;\theta)]=E\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}logf(X;\theta)\right)^{۲}\right]>۰.$$

هر اندازه $Var[S(X;\theta)]$ بیشتر باشد، متوسط توان دوم تغییر نسبی چگالی x در θ بیشتر می‌باشد. از این رو $Var[S(X;\theta)]$ را مقدار اطلاع موجود در متغیر تصادفی X درباره پارامتر θ می‌نامند و آن را با نماد $I_X(\theta)$ نشان می‌دهند. این نوع اطلاع که به اطلاع فیشر[۱۰] مشهور است، برای اولین بار توسط فیشر[۱۱] (۱۹۲۵) آماردان انگلیسی، معرفی گردید اینک اطلاع فیشر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال $f(x;\theta)$ باشد. تحت شرایط نظم میزان اطلاع فیشر موجود در متغیر تصادفی X در خصوص پارامتر θ را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$I_X(\theta)=-E\left[\frac{\partial^{۲}}{\partial\theta^{۲}}logf(X;\theta)\right].$$

کاربرد اطلاع فیشر

از جمله کاربردهای اطلاع فیشر، نامساوی کرامر-رائو است که به نامساوی اطلاع نیز معروف می‌باشد. به‌دنبال تحقیق‌های مستقل کرامر[۱۲] (۱۹۴۶) و رائو[۱۳] (۱۹۴۵) در مورد واریانس برآوردگرها، این نامساوی به‌نام هردو یعنی کرامر-رائو معروف شده است. نامساوی کرامر-رائو کران پایینی برای واریانس برآوردگرها ارائه می‌دهد که در آمار کاربرد فراوان دارد و بر حسب اطلاع فیشر قابل بیان است. از کاربردهای دیگر اطلاع فیشر در محاسبه واریانس توزیع حدی برآوردگرهای ماکزیمم درستنمایی (MLE) می‌باشد، همچنین اطلاع فیشر با بسندگی و کارایی رابطه نزدیکی داشته و می‌تواند در انتخاب تعداد مشاهدات لازم برای سانسور، در نمونه سانسور شده نوع دو و همچنین ارزیابی اهمیت برآوردگرهای استفاده شده برای داده‌های سانسور شده نیز مورد استفاده قرار گیرد.

[۹] Score
[۱۰] Fisher information
[۱۱] Fisher
[۱۲] Cramer
[۱۳] Rao

۴.۱ روش ماکزیمم درستنمایی

فرض کنید توزیع یک متغیر طول عمر t دارای تابع چگالی احتمال $f(t;\theta)$ باشد که در آن θ یک بردار k مجهولی است. همچنین فرض کنید $t_1, t_2, ..., t_n$ یک نمونه تصادفی مستقل از تابع چگالی $f(t;\theta)$ باشد (t_iها زمان دقیق شکست را نشان می‌دهند). تابع درستنمایی را که با $L(\theta)$ نمایش می‌دهیم، به صورت زیر خواهد بود:

$$L(\theta; t_1, t_2, ..., t_n) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i;\theta). \tag{۲.۱}$$

لازم به ذکر است که

الف) تابع درستنمایی $L(\theta)$ لزوماً نسبت به θ مشتق‌پذیر نیست.

ب) تابع درستنمایی $L(\theta)$ لزوماً نسبت به θ یک تابع چگالی احتمال نیست.

توجه داشته باشید که پس از مشاهده مقادیر t_i، تابع درستنمایی تنها تابعی از پارامتر θ است. برای راحتی محاسبات، معمولا بهتر است از لگاریتم تابع درستنمایی استفاده کنیم. در این صورت تساوی (۲.۱) به تساوی زیر تبدیل می‌شود:

$$\ell(\theta; t_1, t_2, ..., t_n) = \sum_{i=1}^{n} log f(t_i;\theta)$$

که در آن $\ell(\theta) = logL(\theta)$ لگ تابع درستنمایی است. برآوردگر ماکزیمم درستنمایی (MLE) پارامتر θ از حل معادلات زیر به‌دست می‌آید که به آن معادله درستنمایی می‌گویند:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\ell(\theta) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, ..., k$$

در اغلب موارد به‌ویژه در آزمون‌های طول عمر، برآورد $\hat{\theta}$ به‌صورت تحلیلی قابل محاسبه نیست و باید آن‌ها را با استفاده از روش‌های عددی به‌دست آورد. بسیاری از نرم‌افزارهای موجود توانایی حل معادلات درستنمایی به روش عددی را دارند. برآوردگرهای ماکزیمم درستنمایی نه تنها از پشتوانه شهودی بسیار قوی‌ای برخوردار است، بلکه ویژگی‌های منحصربه‌فرد دیگری نیز دارد که آن‌ها را از دیگر برآوردگرها متمایز می‌کند. از جمله ویژگی‌های برجسته برآوردگرهای ماکزیمم درستنمایی عبارتست از:

۱. روش ماکزیمم درستنمایی پایا است. بدین معنی که اگر علاقه‌مند باشیم برآورد ماکزیمم درستنمایی تابعی پوشا مانند $\psi(\theta)$ را بیابیم، آن‌گاه $\hat{\psi} = \psi(\hat{\theta})$، برآورد ماکزیمم درستنمایی $\psi(\theta)$ است که در آن $\hat{\theta}$ برآورد ماکزیمم درستنمایی θ است.

۲. تحت بعضی شرایط نظم، برای حجم نمونه‌های بزرگ، توزیع برآوردگرهای ماکزیمم درستنمایی نرمال است.

۳. تحت شرایط نظم، برآوردگرهای ماکزیمم درستنمایی به‌طور مجانبی سازگار هستند، بدین معنی که برای حجم نمونه‌های بزرگ برآوردگر ماکزیمم درستنمایی تقریباً ناریب و دارای کمترین واریانس می‌باشند.

۴. روش درستنمایی را می‌توان برای شیوه‌های مختلف جمع‌آوری داده‌ها، مانند انواع روش‌های سانسور به‌کار برد. لذا برآورد ماکزیمم درستنمایی را می‌توان براساس مکانیزم‌های مختلف جمع‌آوری داده‌ها به‌دست آورد.

ساختار تابع درستنمایی داده‌های سانسور شده در کتاب‌ها و مقالات زیادی مورد بحث قرار گرفته‌اند. در سانسور نوع یک و نوع دو، n واحد آزمودنی را در لحظه $t = ۰$ وارد آزمون می کنیم و آزمون را تا لحظه t ادامه می‌دهیم و زمان شکست آن‌ها را ثبت می‌کنیم. فرض کنید $f(x)$ و $F(x)$ به‌ترتیب تابع چگالی احتمال و تابع توریع تجمعی طول عمر انتخاب شده با پارامتر θ و تعداد $(n-r)$ واحد بدون شکست در آزمایش باقی مانده باشند. آن‌گاه تابع درستنمایی آن‌ها به صورت زیر می‌باشد:

$$L(\theta) = \frac{n!}{(n-r)!}\left(\prod_{i=۱}^{r} f(x)\right)(۱ - F(x))^{n-r}. \qquad (۳.۱)$$

توجه کنید که در سانسور نوع یک $x = t$ و در سانسور نوع دو $x = x_{(r)}$ است.

۱.۴.۱ فاصله اطمینان

اگر $X_۱, X_۲, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی از تابع چگالی $f(\cdot;\theta)$ و $T_۱$ و $T_۲$ دو آماره باشند به‌طوری که $T_۱ \leq T_۲$ و $P_\theta[T_۱ < \theta < T_۲] = (۱-\alpha)$ باشند، در این صورت بازه تصادفی $[T_۱, T_۲]$ را یک فاصله اطمینان $(۱-\alpha)$ درصدی برای θ و $(۱-\alpha)$ را ضریب اطمینان می‌نامیم که به‌صورت دلخواه توسط پژوهشگر انتخاب می‌شود. اغلب مقادیر ٪۵ و ٪۱ که متناظر با سطوح اطمینان ٪۹۵ و ٪۹۹ می‌باشند، برای α در نظر گرفته می‌شود.
در اکثر مواقع، نیازمند جستجوی راهی برای دست‌یابی به فواصل اطمینان تقریبی با دقتی در سطح قابل قبول هستیم. یک راه برای رسیدن به فواصل اطمینان تقریبی، فاصله اطمینان مجانبی است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۴.۱. در بازه $[T_۱, T_۲]$ چون $T_۱$ و $T_۲$ برآوردگرهایی بر اساس نمونه n تایی می‌باشد آن را یک فاصله اطمینان مجانبی در سطح γ گویند، هرگاه گزاره

$$P_\theta[T_۱ < \theta < T_۲] = \gamma$$

به صورت حدی، وقتی n به سمت بی‌نهایت میل کند، درست باشد.

تعریف ۲.۴.۱. اگر X یک متغیر تصادفی و θ پارامتر توزیع آن باشد برای یک برآوردگر فاصله‌ای $[L(X), U(X)]$ پارامتر θ، احتمال پوشش $[L(X), U(X)]$ برابر است با احتمال اینکه فاصله تصادفی $[L(X), U(X)]$ پارامتر θ را بپوشاند و به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$P_\theta(\theta \in [L(X), U(X)]) = P(\theta \in [L(X), U(X)]|\theta)$$

۲.۴.۱ تابع قابلیت اعتماد

توابع متفاوتی در قابلیت اعتماد مورد استفاده قرار می‌گیرند که در این پایان‌نامه فقط با تابع قابلیت اعتماد در حالت پیوسته، آشنا می‌شویم.

تعریف ۳.۴.۱. تابع $f(x)$ در بازه $[a, b]$ که $0 \leq a \leq b \leq \infty$، مطلقاً پیوسته می‌باشد هرگاه برای هر مقدار مثبت ϵ، $\delta > 0$ای وجود داشته باشد به‌طوری که برای زیر دنباله‌های مجزای

$$[x_k, y_k] \qquad k = 1, 2, ..., n$$

که در شرط

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k| < \delta$$

صدق می‌کنند داشته باشیم:

$$\sum_{k=1}^{n} |f(y_k) - f(x_k)| < \epsilon.$$

تعریف ۴.۴.۱. فرض کنید متغیر تصادفی پیوسته نامنفی X طول عمر قطعه‌ای باشد که دارای تابع توزیع $F(\cdot)$ و تابع چگالی $f(\cdot)$ باشد که در این صورت می‌توان نوشت:

$$F(x) = \begin{cases} P(X \leq x) = \int_0^x f(t)dt & \text{اگر} x \geq 0 \\ 0 & \text{اگر} x < 0 \end{cases}$$

برای متغیر تصادفی پیوسته نامنفی X تابع نامنفی S را که در آن

$$S(x) = 1 - F(x) = P(X > x) \qquad (۴.۱)$$

تابع قابلیت اعتماد (بقاء) گوییم.

اگر تابع $F(.)$ مطلقاً پیوسته باشد، آن‌گاه تابع چگالی متغیر تصادفی X وجود دارد و $f_X(x) = -S'_X(x)$. در واقع $S(x)$ احتمال عدم وقوع خرابی در بازه $[0, x]$ را نشان می‌دهد. همانند تابع توزیع می‌توان خواص چهارگانه تابع قابلیت اعتماد متغیر تصادفی X را به‌صورت زیر بیان کرد:

۱. $0 \leq S(x) \leq 1; \quad \forall x \geq 0$

۲. $S(0) = 1, S(\infty) = \lim_{x\to\infty} S(x) = 0$

۳. S(x) تابعی یکنوا و غیر صعودی است.

۴. S(x) تابعی از چپ پیوسته است.

۵.۱ توزیع‌های آماری

۱.۵.۱ توزیع بتا

توزیع بتا توزیع احتمالی پیوسته‌ای است که بر بازه (۱ و ۰) تعریف می‌شود و دارای دو پارامتر شکل است. تابع چگالی، تابع توزیع تجمعی، میانگین، واریانس و تابع مولد گشتاور توزیع بتا به شکل زیر هستند:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \qquad 0 < x < 1, \alpha > 0, \beta > 0. \\
F(x) &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \left(\frac{(\alpha+\beta-1)x^{\alpha} - \alpha x^{\alpha+\beta-1}}{\alpha(\alpha+\beta-1)} \right), \\
E(x) &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \\
Var(x) &= \frac{\alpha+\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}, \\
M_x(t) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{r=0}^{k-1} \frac{\alpha+r}{\alpha+\beta+r} \right) \frac{t^k}{k!}.
\end{aligned}$$

۲.۵.۱ توزیع وایبل

توزیع وایبل از نام یک فیزیکدان اهل سوئد به نام والدی وایبل[۱۴]، گرفته شده است که در سال ۱۹۳۹ از این توزیع برای مدل‌بندی توزیع استحکام شکست مواد استفاده کرد. همچنین او در سال‌های ۱۹۵۱ و ۱۹۶۷ از توزیع وایبل برای مدل‌بندی زمینه‌های متنوعی از کاربردها، از جمله: فرسودگی، شکنندگی و استحکام مواد استفاده کرد. یکی از مهمترین دلایل شهرت این توزیع، برای برازش داده‌ها این است که توزیع وایبل دارای اشکال گوناگون است و این خاصیت موجب شده که از این توزیع برای برازش بسیاری از مجموعه داده‌ها استفاده شود. تابع چگالی و تابع توزیع وایبل به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

[۱۴] Waloddi Weibull

$$
\begin{aligned}
f(x) =& \alpha\lambda^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-(\lambda x)^{\alpha}} \quad x \geq 0, \alpha, \lambda > 0,\\
F(x) =& 1 - e^{-(\lambda x)^{\alpha}},\\
E(x) =& \frac{1}{\lambda}\Gamma(1+\frac{1}{k}),\\
Var(x) =& \frac{1}{\lambda^{2}}\Gamma(1+\frac{2}{k}) - \mu^{2},\\
M_X(t) =& \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!\lambda^n}\Gamma(1+\frac{n}{k}).
\end{aligned}
$$

۳.۵.۱ توزیع گاما

توزیع گاما یکی از توزیع‌های احتمالی پیوسته است و دارای دو پارامتر مقیاس λ، و پارامتر شکل α می‌باشد. تابع چگالی، میانگین و واریانس توزیع گاما به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\lambda^{\alpha}e^{-\lambda x}x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \qquad x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0.\\
E(x) &= \frac{\alpha}{\lambda},\\
Var(x) &= \frac{\alpha}{\lambda^{2}},\\
M_X(t) &= (1-\frac{t}{\lambda})^{-\alpha}.
\end{aligned}
$$

تابع توزیع تجمعی توزیع گاما فرم بسته‌ای ندارد.

۴.۵.۱ توزیع گامبل

توزیع گامبل یکی از پرکاربردترین توزیع‌های آماری در مدل‌های آب و هوا و همچنین تعیین توزیع طول عمر یا زمان‌های خرابی برخی قطعات می‌باشد، که این اساساً به دلیل شکل‌های گوناگون تابع چگالی و تابع نرخ خطر این توزیع برحسب مقادیر مختلف پارامترهای آن می‌باشد این توزیع دارای دو پارامتر مکان μ و مقیاس σ است.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}-e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}}, \quad x, \mu, \sigma > 0,\\
F(x) &= 1 - e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}},\\
E(x) &= \mu - \gamma\sigma, \quad (\gamma \approx 0/57722),\\
Var(x) &= \frac{\pi^{2}\sigma^{2}}{6},
\end{aligned}
$$

۵.۵.۱ توزیع گوسی معکوس

توزیع گوسی معکوس در سال ۱۹۱۵ توسط شرودینگر[۱۵] به دلیل خواص مهم فیزیکی آن تحت عنوان(زمان اولین گذر در حرکت براونی) مطرح گردید. این توزیع اکنون به عنوان مدلی برای طول عمر و زمان خرابی در بررسی قابلیت اعتماد یک فرآورده صنعتی و همچنین برای توصیف فراوانی سرعت باد جهت ارزیابی انرژی باد مورد استفاده قرار می‌گیرد.

تابع چگالی توزیع گوسی معکوس دارای دو پارامتر μ پارامتر مکان و σ پارامتر مقیاس است. همچنین تابع چگالی، تابع توزیع، میانگین و واریانس این توزیع به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\sigma^۲ x^۳}} e^{-\frac{۱}{۲\mu^۲\sigma^۲ x}(x-\mu)^۲}, \qquad x,\mu,\sigma > ۰,\\
F(X) &= \Phi\left(\frac{۱}{\sqrt{\sigma^۲ x}}(\frac{x}{\mu}-۱)\right) + e^{\frac{۲}{\mu\sigma^۲}}\Phi\left(-\frac{۱}{\sqrt{\sigma^۲ x}}(\frac{x}{\mu}+۱)\right),\\
E(x) &= \mu,\\
Var(x) &= \sigma^۲\mu^۳.
\end{aligned}$$

۶.۵.۱ توزیع نمایی

از توزیع نمایی بیشتر در تخمین زدن مدت زمان لازم برای رخداد یک پیشامد خاص استفاده می‌شود. برای نمونه، مدت زمان لازم (از هم‌اکنون) تا رخداد یک زمین‌لرزه، آغاز یک جنگ، دریافت یک تماس تلفنی اشتباه، و ... متغیرهای تصادفی با توزیع نمایی می‌باشند.

توزیع نمایی حالت خاصی از توزیع گاما است که پارامتر شکل آن برابر یک و پارامتر مقیاس آن λ می‌باشد، یعنی $\Gamma(۱,\lambda)$.

این توزیع تنها توزیع پیوسته‌ای است، که خاصیت بی‌حافظگی دارد و از این رو، بیشتر در حل مسائل احتمال وتئوری صف به کار گرفته می‌شود. هم‌چنین از این توزیع برای مدل‌سازی کردن و آسان ساختن شیوه حل مسائل واقعی استفاده می‌کنند. این ویژگی تابع را می‌توان اینطور تفسیر کرد که رویدادهایی را که در گذشته اتفاق افتاده می‌توانیم در نظر نگیریم و زمان حال به بعد، را مبدأ زمان قرار دهیم. مثلاً لامپی که طول عمرش ۱۰ ساعت است و تا ساعت ۶ هنوز نسوخته است را می‌توان مثل یک لامپ نو بحساب آورد. برخی ویژگی‌های توزیع نمایی

[۱۵] schrodinger

در زیر آورده شده:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x > 0, \lambda > 0),$$
$$F(X) = 1 - e^{-\lambda x},$$
$$E(x) = \frac{1}{\lambda},$$
$$Var(x) = \frac{1}{\lambda^2},$$
$$M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1}.$$

۶.۱ توزیع کوماراسوامی

کوماراسوامي[۱۶] يک متخصص آب‌شناسي هندي بود که در سال ۱۹۷۶ توزيع جديدي را با عنوان تابع چگالي احتمال توان سينوسي، که مخصوصاً در فرآيندهاي آبي کاربرد دارد، معرفي کرد. سپس، کوماراسوامي در سال ۱۹۸۰ تابع چگالي احتمال کلي‌تري را براي فرآيندهاي تصادفي دو طرف محدود شده معرفي و با نام توزيع کوماراسوامي ارائه نمود. اين توزيع در بسياري از پديده‌هاي طبيعي با نتايجي شامل حدود بالا و پايين مانند قد افراد، نمرات امتحاني، درجه حرارت هوا، داده‌هاي آبي و ... کاربرد دارد.

توزیع کوماراسوامی (از این پس با عنوان توزیع Kw نامیده می‌شود) روی بازه $(0,1)$،تعریف شده و دارای دو پارامتر نامنفی a و b و مشخصات زیر است:

۱. تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی به صورت زیر می‌باشند:

$$f(x) = abx^{a-1}(1 - x^a)^{b-1} \quad 0 < x < 1, a > 0, b > 0 \tag{۵.۱}$$

$$F(x) = 1 - (1 - x^a)^b \tag{۶.۱}$$

تابع چگالی در معادله بالا دارای خواص بسیار مشابه و یکسانی با توزیع بتا است که در فصل‌های بعدی به آن‌ها اشاره خواهیم کرد.

۲. گشتاورهای توزیع کوماراسوامی با رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$m_n = \frac{b\Gamma(1 + \frac{n}{a})\Gamma(b))}{\Gamma(1 + b + \frac{n}{a})} = bB(1 + \frac{n}{a}.b)$$

که B تابع بتا می‌باشد. واریانس را می‌توانیم با استفاده از این گشتاور به‌دست آوریم:

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2.$$

[۱۶] Kumaraswamy

رابطه توزیع کوماراسوامی با برخی توزیع‌ها به شرح زیر می‌باشند:

۱. اگر $X \sim U(۰,۱)$ آنگاه $X \sim Kw(۱,۱)$

۲. اگر $X \sim Beta(۱,b)$ آنگاه $X \sim Kw(۱,b)$

۳. اگر $X \sim Beta(a,۱)$ آنگاه $X \sim Kw(a,۱)$

۴. اگر $-L_n(X) \sim Exp(a)$ آنگاه $X \sim Kw(a,۱)$

فصل ۲

ساخت کلاسی از توزیع‌های تعمیم‌یافته کوماراسوامی

توزیع بتا یكي از توزیع‌های مهم و پرکاربرد در آمار است. برای تعمیم دادن برخي از توزیع‌ها، از این توزیع استفاده ميشود؛ زیرا دارای این ویژگي است که به‌جای x در ضابطه تابع چگالي احتمال آن می‌توان یک تابع توزیع قرار داد. توزیع‌های بتای تعمیم‌یافته به‌طور گسترده در آمار مطالعه شده و نویسندگان بسیاری رده‌های مختلف از آن را توسعه داده‌اند. یوجین[۱] و همکاران [۱۱] یک کلاس عمومی از توزیع‌ها را پیشنهاد دادند که به‌دنبال کار آن‌ها توزیع بتا نرمال معرفی شد، پس از آن ناداراجاه[۲] و کوتز[۳] [۱۹] و [۲۰] توزیع بتا گامبل و توزیع نمایی بتا و ناداراجاه و گوپته[۴] [۱۸] توزیع فریشته بتا را معرفی نمودند.
با این حال، همه این کارها منجر به برخی مشکلات ریاضی می‌شوند زیرا تابع بتا نرم (منعطف) نمی‌باشد. به‌ویژه تابع توزیع تجمعی آن درگیر تابع بتای ناقص می‌شود. کوماراسوامی[۵] [۲۲] یک توزیع احتمالی جدید برای فرآیندهای دو طرف محدود شده پیشنهاد کرد که تابع چگالی

[۱] Eugene
[۲] Nadaragah
[۳] Kotz
[۴] Gupta
[۵] Kumaraswamy

این توزیع دارای خواص بسیار مشابه با توزیع بتا است. جونز[۶] [۱۶] چندین برتری و مزیت از توزیع کوماراسوامی را روی توزیع بتا مشخص کرد: ثابت (پایای) نرمال‌ساز بسیار ساده دارد؛ فرمول صریح و ساده برای توابع توزیع و چندکی که هیچ توابع خاصی را شامل نیست؛ یک فرمول ساده برای تولید متغیر تصادفی؛ فرمول صریح و روشن برای L ـ گشتاورها و فرمول ساده برای گشتاورهای آماره‌های ترتیبی.
علاوه براین، توزیع بتا نیز دارای مزیت‌هایی روی توزیع کوماراسوامی است: فرمول ساده برای گشتاورها و تابع مولد گشتاور؛ یک زیر خانواده تک پارامتری از توزیع‌های متقارن؛ برآورد گشتاور ساده و راه‌های بیشتری از تولید توزیع از فرآیندهای فیزیکی.
تابع تجمعی دلخواه $G(x)$ را در نظر بگیرید. در این صورت تابع چگالی احتمال یک خانواده از توزیع‌ها روی بازه $(0,1)$ برابر است با: $g(x)=\frac{d}{dx}G(x)$

با توجه به تابع توزیع تجمعی اولیه دلخواه، تابع توزیع تجمعی توزیع‌های تعمیم‌یافته جدید به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$F(x)=1-(1-G(x)^a)^b. \tag{۱.۲}$$

که $a>0$ و $b>0$ پارامتر های فرعی هستند. تابع توزیع (۱.۲) می‌تواند کاملا مؤثر باشد حتی اگر داده‌ها سانسور شده باشند. علاوه بر این، تابع چگالی این خانواده از توزیع‌ها دارای یک فرم بسیار ساده هستند:

$$f(x)=abg(x)G(x)^{a-1}(1-G(x)^a)^{b-1} \tag{۲.۲}$$

۱.۲ توزیع‌های تعمیم‌یافته کوماراسوامی ویژه

۱.۱.۲ توزیع کوماراسوامی نرمال

تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی توزیع کوماراسوامی نرمال را با استفاده از فرمول‌های (۱.۲) و (۲.۲) به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} f(x)=&\frac{ab}{\sigma}\phi(\frac{x-\mu}{\sigma})\{\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})^{a-1}\}\{1-\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})^a\}^{b-1}\\ F(x)=&1-\{1-\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})^a\}^b \end{aligned}$$

که در آن $x,\mu\in R$ و $\sigma,a,b>0$. همچنین ϕ و Φ به ترتیب تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی توزیع نرمال استاندارد می‌باشند. توزیع کوماراسوامی نرمال با پارامترهای a,b,μ,σ را به صورت $KwN(a,b,\mu,\sigma^2)$ نمایش می‌دهیم.

[۶] Jones

۲.۱.۲ توزیع کوماراسوامی وایبل

تابع توزیع تجمعی توزیع وایبل با پارامترهای $\alpha, \lambda > ۰$ برای $x > ۰$ برابر $G(x) = ۱ - exp-(\lambda x)^{\alpha}$ می‌باشد. بنابراین تابع چگالی و تابع توزیع تجمعی توزیع کوماراسوامی وایبل با پارامترهای a, b, α, λ که با $KwW(a, b, \alpha, \lambda)$ نشان داده می‌شود، با استفاده از فرمول‌های (۱.۲) و (۲.۲) به شکل زیر می‌باشند:

$$f(x) = ab\alpha\lambda^{\alpha}x^{\alpha-۱}e^{-(\lambda x)^{\alpha}}\{۱ - e^{-(\lambda x)^{\alpha}}\}^{a-۱}\{۱ - (۱ - e^{-(\lambda x)^{\alpha}})^{a}\}^{b-۱}$$
$$F(x) = ۱ - \{۱ - (۱ - e^{-(\lambda x)^{\alpha}})^{a}\}^{b}$$

که در آن $x, a, b, \lambda, \alpha > ۰$. اگر $\alpha = ۱$ توزیع کوماراسوامی نمایی بدست می‌آید.

۳.۱.۲ توزیع کوماراسوامی گاما

فرض کنید Y یک متغیر تصادفی گاما با تابع توزیع تجمعی $G(y) = \Gamma_{\lambda y}(\alpha)/\Gamma(\alpha)$ برای $y, \alpha, \lambda > ۰$ باشد که $\Gamma(\cdot)$ تابع گاما و $\Gamma_z(\alpha) = \int_۰^z t^{\alpha-۱}e^{-t}dt$ تابع گامای ناقص می‌باشد. توزیع کوماراسوامی گاما با پارامترهای a, b, α, λ به شکل $KwGa(a, b, \alpha, \lambda)$ نمایش داده می‌شود و تابع چگالی و تابع توزیع تجمعی آن به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{ab\lambda^{\alpha}e^{-\lambda x}x^{\alpha-۱}}{\Gamma(\alpha)}\left\{\frac{\Gamma_{\lambda x}(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right\}^{a-۱}\left\{۱ - \left(\frac{\Gamma_{\lambda x}(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right)^{a}\right\}^{b-۱}$$
$$F(x) = ۱ - \left\{۱ - \left(\frac{\Gamma_{\lambda x}(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right)^{a}\right\}^{b}$$

که در آن $x, a, b, \lambda, \alpha > ۰$. اگر $\alpha = ۱$ آن‌گاه توزیع کوماراسوامی نمایی بدست می‌آید.

۴.۱.۲ توزیع کوماراسوامی گامبل

تابع چگالی و تابع توزیع تجمعی توزیع کوماراسوامی گامبل که به صورت $KwGu(a, b, \mu, \sigma)$ نشان داده می‌شود به شکل زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{ab}{\sigma}\exp\{-\frac{x-\mu}{\sigma} - \exp\{\frac{x-\mu}{\sigma}\}\} \\ &\times \left\{۱ - \exp\{-\frac{x-\mu}{\sigma} - \exp\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\}\}\right\}^{a-۱} \\ &\times \left\{۱ - \left(۱ - \exp\{-\frac{x-\mu}{\sigma} - \exp\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\}\}\right)^{a}\right\}^{b-۱} \\ F(x) &= ۱ - \left\{۱ - \left(۱ - \exp\{-\frac{x-\mu}{\sigma} - \exp\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\}\}\right)^{a}\right\}^{b} \end{aligned}$$

که در آن $a, b, \mu, \sigma > ۰$.

۵.۱.۲ توزیع کوماراسوامی گوسی معکوس

توزیع کوماراسوامی گوسی معکوس هم به صورت $KwIG(a, b, \mu, \sigma^۲)$ نمایش داده می‌شود و تابع چگالی و تابع توزیع تجمعی آن به شکل:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{ab}{\sqrt{۲\pi\sigma^۲x^۳}}\exp\{\frac{(x-\mu)^۲}{۲\mu^۲\sigma^۲x}\} \\ &\times\left\{\Phi(\frac{۱}{\sqrt{\sigma^۲x}}(\frac{x}{\mu}-۱))+e^{\frac{۲}{\mu\sigma^۲}}\Phi(-\frac{۱}{\sqrt{\sigma^۲x}}(\frac{x}{\mu}-۱))\right\}^{a-۱} \\ &\times\left\{۱-\left(\Phi(\frac{۱}{\sqrt{\sigma^۲x}}(\frac{x}{\mu}-۱))+e^{\frac{۲}{\mu\sigma^۲}}\Phi(-\frac{۱}{\sqrt{\sigma^۲x}}(\frac{x}{\mu}-۱))\right)^a\right\}^{b-۱} \\ F(x) &= ۱-\left\{۱-\left(\Phi(\frac{۱}{\sqrt{\sigma^۲x}}(\frac{x}{\mu}-۱))+e^{\frac{۲}{\mu\sigma^۲}}\Phi(-\frac{۱}{\sqrt{\sigma^۲x}}(\frac{x}{\mu}-۱))\right)^a\right\}^b \end{aligned}$$

می‌باشد که $a, b, x, \mu, \sigma > ۰$.

۶.۱.۲ توزیع کوماراسوامی نمایی

توزیع کوماراسوامی نمایی با پارامترهای a, b, λ را به صورت $KwE(a, b, \lambda)$ نشان داده و تابع چگالی و تابع توزیع تجمعی آن برابر:

$$\begin{aligned} f(x) =& ab\lambda e^{-\lambda x}(۱-e^{-\lambda x})^{a-۱}\{۱-(۱-e^{-\lambda x})^a\}^{b-۱} \\ F(x) =& ۱-\{۱-(۱-e^{-\lambda x})^a\}^b \end{aligned}$$

که $a, b, x, \lambda > ۰$.

۲.۲ یک بسط عمومی برای تابع چگالی

برای راحتی محاسبات می‌توانیم برای تابع چگالی توزیع‌های تعمیم‌یافته کوماراسوامی یک بسط بنویسیم و این تابع چگالی را بر حسب تابع توزیع تجمعی $G(x)$ بدست آوریم. برای $b > ۰$ حقیقی غیر صحیح، با استفاده از نمایش سری‌ها و بسط دوجمله‌ای داریم:

$$\{۱-G(x)^a\}^{b-۱} = \sum_{i=۰}^{\infty}(-۱)^i\binom{b-۱}{i}G(x)^{ai},$$

از بسط بالا و فرمول (۲.۲)، می‌توانیم تابع چگالی توزیع تعمیم‌یافته کوماراسوامی(Kw-G) را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$f(x) = g(x)\sum_{i=۰}^{\infty}w_iG(x)^{a(i+۱)-۱}, \tag{۳.۲}$$

که در آن، $w_i = w_i(a, b) = (-۱)^i ab\binom{b-۱}{i}$ و $\sum_{i=۰}^{\infty} w_i = ۱$.

اگر b یک عدد صحیح باشد، اندیس i در فرمول قبلی در $b-1$ متوقف می‌شود. اگر a یک عدد صحیح باشد، فرمول (۳.۲) نشان دهنده چگالی توزیع $Kw-G$ است که برابر است با ضرب چگالی توزیع G در یک سری توانی وزن‌دار نامتناهی از توزیع G. در غیر این صورت، اگر a حقیقی غیر صحیح باشد، می‌توانیم $G(x)^{a(i+1)-1}$ را به‌صورت زیر بسط دهیم:

$$\begin{aligned} G(x)^{a(i+1)-1} &= [1-\{1-G(x)\}]^{a(i+1)-1} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \binom{a(i+1)-1}{j}\{1-G(x)\}^j \end{aligned}$$

و سپس

$$G(x)^{a(i+1)-1} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{j}(-1)^{j+r}\binom{a(i+1)-1}{j}\binom{j}{r}G(x)^r.$$

علاوه بر این چگالی $f(x)$ در معادله (۲.۲) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$f(x) = g(x)\sum_{i,j=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{j} w_{i,j.r}G(x)^r, \tag{۴.۲}$$

که ضرایب

$$w_{i,j.r}(a,b) = (-1)^{i+j+r}ab\binom{a(i+1)-1}{j}\binom{b-1}{i}\binom{j}{r} \tag{۵.۲}$$

ثابت‌های مطلوبی هستند و $\sum_{i,j=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{j} w_{i,j,r} = 1$.

بسط (۴.۲)، که برای هر عدد حقیقی غیر صحیح a صدق می‌کند، تابع چگالی (pdf) توزیع $Kw-G$ را بر اساس سری‌های توانی وزن‌دار نامتناهی از توابع توزیع تجمعی توزیع G ارائه می‌دهد. اگر b یک صحیح باشد، اندیس i در در بسط (۴.۲) در $b-1$ متوقف می‌شود. از این رو، برای هر عدد حقیقی غیر صحیح، تابع چگالی توزیع $Kw-G$ توسط مجموع سه سری توانی وزن‌دار (دو نامتناهی و یک متناهی) از تابع توزیع تجمعی $G(x)$ داده می‌شود. ثابت‌های $w_{i,j,r}$ در فرمول (۵.۲)، با استفاده از نرم‌افزارهای موجود به آسانی با روش‌های عددی محاسبه می‌شوند. می‌دانیم، اگر a صحیح باشد، چگالی توزیع $Kw-G$ در فرمول (۳.۲) توسط یک جمع سری‌های توانی وزن‌دار نامتناهی تابع توزیع $G(x)$ داده می‌شود.

برای عدد حقیقی غیر صحیح a می‌توانیم یک بسط جایگزین را برای بررسی‌های دوگانه نتیجه بگیریم اگرچه با سه مجموع نامتناهی به‌جای دو مجموع نامتناهی و یک جمع متناهی در فرمول (۴.۲) محاسبات بسیار پر هزینه‌ای در بر دارد. اول از همه ما یک بسط سری توانی را برای $G(x)^q$ که برای هر عدد حقیقی غیر صحیح $q>0$ می‌باشد را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$G(x)^q = [1-\{1-G(x)\}]^q = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{q}{j}(-1)^j\{1-G(x)\}^j$$

وسپس

$$G(x)^q = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{j}(-1)^{j+r}\binom{q}{j}\binom{j}{r}G(x)^j.$$

و $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{j}$ با $\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{j=r}^{\infty}$ جایگزین می‌شود به‌دست می‌آوریم:

$$G(x)^q=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{j=r}^{\infty}(-1)^{j+r}\binom{q}{j}\binom{j}{r}G(x)^j$$

و

$$G(x)^q=\sum_{r=0}^{\infty}s_r(q)G(x)^j \tag{۶.۲}$$

که ضرایب برای $r=0,1,...$ به شکل زیر می‌باشند:

$$s_r(q)=\sum_{j=r}^{\infty}(-1)^{j+r}\binom{q}{j}\binom{j}{r}. \tag{۷.۲}$$

برای تابع چگالی (۲.۲) اگر در (۴.۲) از رابطه (۶.۲) استفاده کنیم، داریم:

$$f(x)=g(x)\sum_{j,r=0}^{\infty}t_j(a,b)G(x)^r, \tag{۸.۲}$$

که ضرایب $t_j(a,b)$ به صورت زیر تعریف شده‌اند.

$$t_j(a,b)=(-1)^j ab\binom{b-1}{j}s_r(a(j+1)-1). \tag{۹.۲}$$

از این‌رو برای a حقیقی غیر صحیح، pdf توزیع تعمیم‌یافته کوماراسوامی در حال حاضر توسط مجموع سه سری توانی وزن‌دار نامتناهی تابع توزیع $G(x)$ داده شده است، به‌عنوان مثال دو مجموع در معادله (۸.۲) و یک جمع برای ضرایب $t_j(a,b)$ تعریف شده در معادله (۹.۲) که از معادله (۷.۲) می‌آید. ضرایب $t_j(a,b)$ از طریق حل عددی با استفاده از نرم‌افزارهای آماری استاندارد به‌راحتی محاسبه می‌شوند. معادلات (۳.۲) و (۴.۲) و (۸.۲) نتایج اصلی این بخش می‌باشند. در روش‌های عددی به‌جای بینهایت در این معادلات، می‌توان یک عدد بزرگ در نظر گرفت. این بخش را با یک نتیجه فرعی مربوط به تابع چگالی $beta-G$ نتیجه می‌گیریم. برای عدد صحیح a، بسط تابع چگالی $beta-G$ به‌صورت زیر است:

$$f(x)=g(x)\sum_{i=0}^{\infty}w_iG(x)^{a+i-1}, \tag{۱۰.۲}$$

که در آن $w_i=w_i(a,b)=(-1)^i\binom{b-1}{j}/B(a,b)$. می‌دانیم که تفاوت اساسی بین شکل‌های آمیخته در معادلات (۳.۲) و (۱۰.۲) بر مبنای توان cdf، $G(x)$ است. برای توزیع $Kw-G$ توان، $a(i+1)-1$ است در حالی که برای توزیع $beta-G$، $(a+i-1)$ می‌باشد. همچنین وزن‌های هر دو توزیع نیز باهم متفاوت است. برای a حقیقی غیر صحیح، تفاوت اصلی در بسط های چگالی توسط وزن‌ها داده شده است.

۳.۲ فرمول عمومی برای گشتاورها

s امین گشتاور توزیع تعمیم‌یافته کوماراسوامی، برای a صحیح در معادله (۳.۲)، می‌تواند بر حسب یک مجموع وزن‌دار نامتناهی گشتاورهای احتمال وزنی[۷] $(PWMs)$ آماره (s,r) توزیع G بیان شود. همچنین برای a حقیقی غیر صحیح، s ـامین گشتاور از معادله (۴.۲) (یا از معادله (۸.۲))بیان می‌شود.

فرض کنیم Y و X به‌ترتیب، توزیع G و توزیع $Kw-G$ هستند. s امین گشتاور X، که μ'_s نامیده می‌شود، می‌تواند بر حسب (s,r) ـامین گشتاور احتمال موزون y یعنی $\tau_{s,r} = E\{Y^s G(Y)^r\}$ از Y برای $r = ۰, ۱, ...$ بیان شود که توسط گرین وود و همکاران [۱۳] تعریف شده است. برای a صحیح، به‌دست می‌آوریم:

$$\mu'_s = \sum_{r=۰}^{\infty} w_r \tau_{s,a(r+۱)-۱}, \tag{۱۱.۲}$$

که برای a حقیقی غیر صحیح، از فرمول (۴.۲) داریم:

$$\mu'_s = \sum_{i,j=۰}^{\infty} \sum_{r=۰}^{j} w_{i,j,r} \tau_{s,r}. \tag{۱۲.۲}$$

معادلات (۱۱.۲) و (۱۲.۲) نتایج این بخش را شامل می‌شوند. می‌توانیم گشتاورهای توزیع $Kw - G$ را از لحاظ مجموع‌های وزنی نامتناهی $PWMs$ توزیع G، محاسبه کرد. بسط‌های سری‌های توانی ثابت برای محاسبه گشتاورهای هر توزیع $Kw - G$ می‌تواند کاراتر از محاسبه این گشتاورها با انتگرال‌گیری عددی از بسط زیر باشد.

$$\mu'_s = ab \int x^s g(x) G(x)^{a-۱} \{۱ - G(x)^a\}^{b-۱} dx,$$

که منجر به گرد شدن خطاها می‌شود.

۴.۲ آماره‌های ترتیبی

آماره‌های ترتیبی شکل خود را در بسیاری از سطوح تئوری و عملی آماری، درست می‌کنند. تابع چگالی $f_{X_{(i)}}(x)$ در i امین آماره ترتیبی از متغیرهای تصادفی $X_۱, ..., X_n$ برای هر توزیع $Kw - G$، به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x) &= \frac{f(x)}{\mathbf{B}(i, n-i+۱)} F(x)^{i-۱} \{۱ - F(x)\}^{n-i} \\ &= \frac{ab}{\mathbf{B}(i, n-i+۱)} g(x) G(x)^{i-۱} [۱ - \{۱ - G(x)^a\}^b] \{۱ - G(x)^a\}^{b(n-i+۱)-۱} \end{aligned}$$

[۷] Prpbability Weighted Moments

که B(.،.) نماد تابع بتا است و سپس

$$f_{i:n}(x) = \frac{f(x)}{\mathbf{B}(i, n-i+1)} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} F(x)^{i+j-1} \qquad (۱۳.۲)$$

در حال حاضر یک بسط برای چگالی آماره‌های ترتیبی توزیع $Kw-G$ به‌عنوان یک تابع از چگالی پایه‌ای ضرب شده توسط مجموع‌های موزون نامتناهی از توان‌های $G(x)$ می‌باشد. این نتیجه، ما را قادر می‌سازد که گشتاورهای معمولی آماره‌های ترتیبی توزیع $Kw-G$ را به‌عنوان مجموع‌های موزون نامتناهی $PWMs$ از توزیع G، بدست آوریم. از معادله (۱.۲) یک بسط برای $F(x)^{i+j-1}$ بدست می‌آوریم:

$$F(x)^{i+j-1} = \sum_{k=0}^{i+j-1} \binom{i+j-1}{k} (-1)^k \{1 - G(x)^a\}^{kb}.$$

با استفاده از بسط سری‌ها برای $\{1 - G(x)^a\}^{kb}$

$$\{1 - G(x)^a\}^{kb} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{kb}{m} G(x)^{ma}$$

و سپس از معادله (۶.۲) بدست می‌آوریم:

$$F(x)^{i+j-1} = \sum_{k=0}^{i+j-1} \binom{i+j-1}{k} (-1)^k \sum_{r=0}^{\infty} v_r(a, b, k) G(x)^r. \qquad (۱۴.۲)$$

که ضرایب $v_r(a, b, k)$ به‌صوزت زیر تعریف شده‌اند:

$$v_r(a, b, k) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{kb}{m} s_r(ma)$$

و مقادیر $s_r(ma)$ به‌راحتی از معادله (۷.۲) محاسبه می‌شوند. توسط تبادل مجموع‌ها در فرمول (۱۴.۲) داریم:

$$F(x)^{i+j-1} = \sum_{r=0}^{\infty} p_{r,i+j-1}(a, b) G(x)^r,$$

که ضرایب $p_{r,u}(a, b)$ را برای $r, u = 0, 1, \ldots$ می‌توان به شکل زیر محاسبه کرد:

$$p_{r,u}(a, b) = \sum_{k=0}^{u} (-1)^k \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=r}^{\infty} (-1)^{mr+l} \binom{kb}{m} \binom{ma}{l} \binom{l}{r} \qquad (۱۵.۲)$$

اگر a حقیقی ناصحیح باشد، با جایگذاری معادلات (۴.۲) و (۱۴.۲) داخل معادله (۱۳.۲) و تغییر دادن اندیس‌ها، می‌توانیم چگالی $f_{i:n}(x)$ را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x) &= \frac{g(x)}{\mathbf{B}(i, n-i+1)} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} \\ &\times \sum_{r,u,v=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{v} w_{u,v,r} p_{r,i+j-1}(a, b) G(x)^{r+t}. \end{aligned}$$

اگر a صحیح باشد، می‌توانیم از فرمول‌های (۳.۲) ، (۱۳.۲) و (۱۴.۲) بنویسیم:

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x) &= \frac{g(x)}{\mathbf{B}(i, n-i+1)} \sum_{j=0}^{n-i} (-1)^j \binom{n-i}{j} \\ &\times \sum_{r,u=0}^{\infty} w_u p_{r,i+j-1}(a,b) G(x)^{a(u+l)+r-1}. \end{aligned} \tag{16.2}$$

معادله (۱۶.۲)، بلافاصله حاصل چگالی آماره‌های ترتیبی توزیع $Kw-G$ به‌عنوان یک تابع چگالی از توزیع پایه‌ای ضرب شده توسط مجموع‌های موزون نامتناهی از توان $G(x)$ می‌باشد. از این‌رو، گشتاورهای معمولی آماره‌های ترتیبی توزیع $Kw-G$ می‌توانند توسط مجموع‌های موزون نامتناهی $PWMs$ از توزیع G نوشته شوند. این گشتاورهای تعمیم‌یافته برای بعضی از توزیع‌های پایه‌ای را می‌توان از طریق انتگرال‌گیری عددی که قبلا ذکر شد، محاسبه کرد.

۵.۲ گشتاورهای احتمال وزنی

یک نظریه کلی برای گشتاورهای احتمال وزنی، خلاصه‌سازی و توصیف توزیع‌های احتمال نظری، خلاصه‌سازی و توصیف نمونه‌های داده‌های مشاهده شده، برآورد ناپارامتری توزیع مورد نظر یک نمونه مشاهده شده، برآورد پارامترها و چندک‌های توزیع‌های احتمال و آزمون فرض‌ها برای توزیع‌های احتمال را در بر می‌گیرد. روش PWM به‌طور کلی می‌تواند برای برآورد پارامترهای یک توزیع که معکوس آن نمی‌تواند به صراحت بیان شود، استفاده شود.
(s,r) امین گشتاور احتمال وزنی X که از توزیع $Kw-G$ پیروی میکند، $\tau_{s,r}^{Kw}$، به صورت زیر تعریف شده است:

$$\tau_{s,r}^{Kw} = E\{X^s F(X)^r\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^s F(x)^r f(x) dx.$$

از معادلات (۴.۲) و (۱۴.۲) می‌توانیم بنویسیم :

$$\tau_{s,r}^{Kw} = \sum_{m,u,v=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{v} p_{r,m}(a,b) w_{u,v,l} \tau_{s,m+l}, \tag{17.2}$$

که $\tau_{s,m+l} = \int_{-\infty}^{\infty} x^s G(x)^{m+l} g(x) dx$ (s،m+l) امین PWM توزیع G می‌باشد و ضرایب $p_{r,m}(a,b)$ در معادله (۱۵.۲) تعریف شده‌اند.
فرمول (۱۷.۲) نشان می‌دهد که هر PWM از توزیع $Kw-G$ می‌تواند از یک ترکیب خطی وزن‌دار نامتناهی از گشتاورهای احتمال وزنی توزیع G محاسبه شود. واضح است که، گشتاورهای تعمیم‌یافته $\tau_{s,r}^{Kw}$ می‌توانند در بسیاری از نرم‌افزارهای موجود به صورت عددی بدست آیند. $PWMs$ توزیع‌های پایه‌ای را می‌توان با انتگرال‌گیری عددی محاسبه نمود.
در مشکلات برآورد، ما اغلب از گشتاورهای ترتیبی $(1,r)$ استفاده می‌کنیم. برای مثال،

برای توزیع‌های گامبل و وایبل به‌ترتیب داریم:

$$\tau_{1,r}=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-1)^k\frac{\Gamma(1+\frac{1}{c})}{\beta(1+k)^{1+\frac{1}{c}}} \quad \text{و} \quad \tau_{1,r}=\frac{\mu+\sigma\{log(1+r)+\gamma\}}{1+r}$$

بنابراین مقادیر $\tau_{1,r}^{Kw}$، برای توزیع‌های $KwGu$ و KwW به‌راحتی از معادله (۱۷.۲) محاسبه می‌شوند.

۶.۲ فرمول جایگزین برای گشتاورهای آماره‌های ترتیبی

اکنون یک فرمول جایگزین برای گشتاورهای آماره‌های ترتیبی توزیع $Kw-G$ بر اساس $PWMs$ توزیع G ارائه می‌دهیم. ما برای s امین گشتاور از فرمول باراکت[۸] و عبدالقادر[۹] [۷] که برای یک مورد توزیع شده مستقل و یکسان به‌کار برده شده است، استفاده می‌کنیم

$$E(X_{i:n}^s)=s\sum_{j=n-i+1}^{n}(-1)^{j-n+i-1}\binom{j-1}{n-i}\binom{n}{j}I_j(s), \tag{۱۸.۲}$$

که $I_j(s)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_j(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x^{s-1}\{1-F(x)\}^j dx.$$

با استفاده از بسط دوجمله‌ای، انتگرال قبلی را می‌توان به‌شکل زیر نوشت:

$$I_j(s)=\sum_{m=0}^{j}(-1)^m\binom{j}{m}\tau_{s-1,m}^{Kw},$$

که $\tau_{s-1,m}^{Kw}=\int_{-\infty}^{\infty}x^{s-1}F(x)^m f(x)dx$. قرار دادن بسط برای $I_j(s)$ در فرمول (۱۸.۲) معادله زیر را می‌دهد:

$$E(X_{i:n}^s)=s\sum_{j=n-i+1}^{n}\sum_{m=0}^{j}(-1)^{j-n+i+m-1}\binom{j-1}{n-i}\binom{n}{j}\binom{j}{m}\tau_{s-1,m}^{Kw}, \tag{۱۹.۲}$$

که گشتاورهای احتمال وزنی $\tau_{s-1,m}^{Kw}$ توزیع $Kw-G$ از معادله (۱۷.۲) به‌عنوان تابعی خطی از گشتاورهای احتمال وزنی توزیع G به‌دست می‌آیند. بنابراین، نشان می‌دهیم که گشتاورهای آماره‌های ترتیبی توزیع $Kw-G$ را می‌توان بر حسب مجموع‌های وزنی نامتناهی $PWMs$ توزیع G بیان کرد.

L ـ گشتاورها شبیه گشتاورهای معمولی هستند اما می‌توان آن‌ها را با یک ترکیب خطی از آماره‌های ترتیبی برآورد کرد. L ـ گشتاورها چندین مزیت نظری نسبت به گشتاورهای معمولی دارند. هر زمان که میانگین توزیع وجود داشته باشد، حتی اگر بعضی گشتاورهای

[۸] Barakat

[۹] Abdelkader

بالاتر وجود نداشته باشند، وجود دارند. آن‌ها قادر به توصیف طیف وسیع‌تری از توزیع هستند و زمانی که از یک نمونه برآورد شوند، نسبت به اثرات نقاط دور افتاده داده‌ها استوارتر هستند. برخلاف برآوردهای گشتاورهای معمول، برآوردهای پارامترهای به‌دست آمده از L ـ گشتاورها بیشتر اوقات در نمونه‌های کوچک، حتی از برآوردهای ماکزیمم درستنمایی ($MLEs$) دقیق‌تر هستند. L ـ گشتاورها توابع خطی از آماره‌های ترتیبی مورد انتظار به صورت زیر تعریف شده‌اند [۱۴]:

$$\lambda_{r+1} = (r+1)^{-1}\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}E(X_{r+1-k:r+1}), \quad r = 0,1,\ldots$$

چهار L ـ گشتاور اول عبارتند از: $\lambda_1 = E(X_{1:1})$، $\lambda_2 = \frac{1}{2}E(X_{2:2} - X_{1:2})$، $\lambda_3 = \frac{1}{3}E(X_{3:3} - 2X_{2:3} + X_{1:3})$، $\lambda_4 = \frac{1}{4}E(X_{4:4} - 3X_{3:4} + 3X_{2:4} - X_{1:4})$. از معادله (۱۹.۲) که برای میانگین‌های آماره‌های ترتیبی ($s = 1$) استفاده شده است، می‌توانیم به‌راحتی بسط‌هایی برای L ـ گشتاورهای توزیع $Kw - G$ به‌دست آوریم. همچنین L ـ گشتاورها می‌توانند بر حسب $PWMs$ داده شده در معادله (۱۷.۲) محاسبه شوند و به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\lambda_{r+1} = \sum_{k=0}^{r}(-1)^{r-k}\binom{r}{k}\binom{r+k}{k}\tau_{1,k}^{Kw}, \quad r = 0,1,\ldots$$

به‌طور ویژه، $\lambda_1 = \tau_{1,0}^{Kw}$، $\lambda_2 = 2\tau_{1,1}^{Kw} - \tau_{1,0}^{Kw}$، $\lambda_3 = 6\tau_{1,2}^{Kw} - 6\tau_{1,1}^{Kw} + \tau_{1,0}^{Kw}$، $\lambda_4 = 20\tau_{1,3}^{Kw} - 30\tau_{1,2}^{Kw} + 12\tau_{1,1}^{Kw} - \tau_{1,0}^{Kw}$.

۷.۲ استنباط نتایج

فرض کنید γ بردار پارامتر p بعدی از توزیع پایه‌ای در معادلات (۱.۲) و (۲.۲) باشد. متغیرهای تصادفی مستقل $X_1, \ldots, X_n$، را ملاحظه می‌کنیم، هر X_i یک توزیع $Kw - G$ با بردار پارامتر $\theta = (a, b, \gamma)$ به دنبال دارد. تابع لگاریتم درستنمایی $\ell = \ell(\theta)$ برای پارامترهای بدست آمده از معادله (۲.۲) به شکل:

$$\begin{aligned}\ell(\theta) &= n\{log(a) + log(b)\} + \sum_{i=1}^{n} log\{g(x_i;\gamma)\} \\ &+ (a-1)\sum_{i=1}^{n} log\{G(x_i;\gamma)\} + (b-1)\sum_{i=0}^{n} log\{1 - G(x_i;\gamma)^a\}.\end{aligned}$$

اعضای بردار امتیاز برای $j = 1, \ldots, p$ در زیر داده شده‌اند:

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial a} = \frac{n}{a} + \sum_{i=1}^{n} log\{G(x_i;\gamma)\}\left\{1 - \frac{(b-1)G(x_i;\gamma)^a}{1 - G(x_i;\gamma)^a}\right\},$$

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial b} = \frac{n}{b} + \sum_{i=1}^{n} log\{1 - G(x_i;\gamma)^a\}$$

و

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \gamma_i}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{g(x_i;\gamma)}\frac{\partial g(x_i;\gamma)}{\partial \gamma_i}+\frac{1}{G(x_i;\gamma)}\frac{\partial G(x_i;\gamma)}{\partial \gamma_i}\left\{1-\frac{a(b-1)}{G(x_i;\gamma)^{-a}-1}\right\}\right]$$

این مشتقات جزئی به توزیع پایه‌ای مشخص وابسته هستند. ماکزیمم سازی عددی لگ درستنمایی با استفاده از روش RS [۲۴] انجام می‌شود که قابل دسترس در بسته $gamlss$ [۲۶] در هسته تیم توسعه[۱۰] R [۲۳] می‌باشد. از آن‌جا که به‌طور عددی برآورد ماکزیمم درستنمایی پارامترهای توزیع $Kw-G$ بسیار ساده‌تر از برآورد پارامترهای توزیع‌های بتای تعمیم‌یافته هستند، توصیه می‌کنیم از توزیع‌های $Kw-G$ به جای خانواده دوم توزیع‌ها استفاده کنیم. تحت شرایط نظم توزیع مجانبی برآوردگر ماکزیمم درستنمایی $\hat{\theta}$، دارای توزیع نرمال چند متغیره است. دوتا از توزیع‌های تودرتو $Kw-G$ را در نظر بگیرید: یک توزیع $Kw-G_A$ با پارامترهای مربوط $\theta_1,...,\theta_r$ و لگاریتم درستنمایی ماکزیمم شده $-2\ell(\hat{\theta}_A)$ و یک توزیع $Kw-G_B$ با همان پارامترهای مربوط $\theta_1,...,\theta_r$ و پارامترهای فرعی $\theta_{r+1},...,\theta_p$ و لگاریتم درستنمایی ماکزیمم شده$-2\ell(\hat{\theta}_B)$، در غیر این صورت سایر مدل‌های یکسان می‌باشند. برای آزمون توزیع $Kw-G_A$ در برابر $Kw-G_B$ آماره نسبت درستنمایی (LR) به‌راحتی برابر با تفاوت $-2\{\ell(\hat{\theta}_A)-\ell(\hat{\theta}_B)\}$ و دارای توزیع مجانبی χ^2_{p-r} است.

می‌توانیم توزیع‌های $Kw-G$ غیر تودرتو را با استفاده از معیار اطلاع آکایک داده شده توسط $AIC=-2\ell(\hat{\theta})+2p^*$ مقایسه کنیم که p^* تعداد پارامترهای مدل هستند. توزیع با کوچکترین مقدار AIC (در میان همه توزیع‌های در نظر گرفته شده) معمولا به‌عنوان بهترین مدل برای توصیف مجموعه‌ای از داده‌های داده شده در نظر گرفته می‌شود. این مقایسه بر اساس در نظر گرفتن مدلی که نماینگر نقص برازش است در برابر مدلی که نقصی ندارد، می‌باشد.

۸.۲ کاربرد

در این بخش مثالی را ارائه می‌دهیم که داده‌های آن برگرفته از مقاله یوجین و همکاران جدول(۲.۲)[۱۱] است. جدول (۱.۲) مقادیر AIC را برای برخی توزیع‌های برازش شده و برآورد ماکزیمم درستنمایی پارامترها همراه با خطای استاندارد آن‌ها می‌دهد.

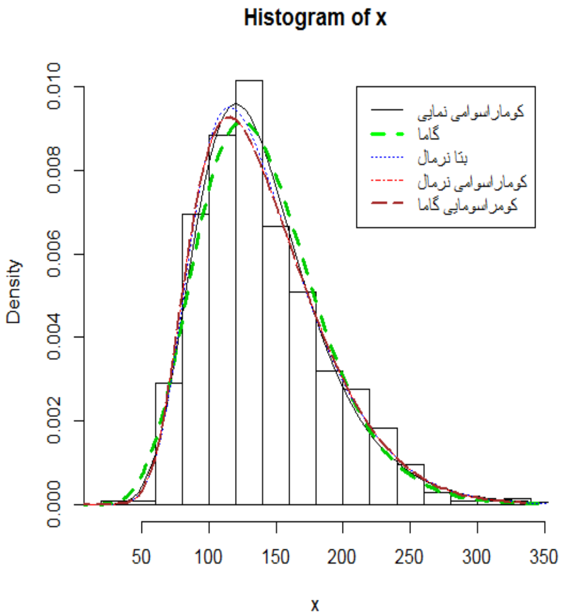
طبق AIC، عملکرد برازش‌های توزیع‌های بتانرمال و کوماراسوامی نرمال، خیلی کم با هم تفاوت دارند و عملکردی بهتر از سایر توزیع‌های انتخاب شده دارند. بنابراین می‌توانیم بجای توزیع بتا از توزیع کوماراسوامی نرمال استفاده کنیم. توجه کنید که در توزیع بتا نرمال تغییرپذیری در برآوردهای a و μ و σ به‌طور قابل ملاحظه‌ای بزرگتر است. نمودار هیستوگرام داده‌ها را برای توزیع‌های برازش شده در شکل زیر مشاهده می‌کنید که توزیع بتانرمال و

[۱۰] Development Core Team

جدول ۱.۲: AIC افزایشی مرتب شده، برآوردهای پارامترها و انحراف استاندارد توزیع‌های منتخب

توزیع	AIC	برآورد پارامترها (خطای استاندارد)			
		a	b		
بتا نرمال	۷۱۷۶/۹	۱۸/۲۰(۱۲/۷)	۰/۲۵(۰/۰۷۴۹)	μ= ۱۲/۶۹(۲۳/۴)	σ= ۴۲/۷۶(۸/۸۹)
کوماراسوامی نرمال	۷۱۷۷/۴	۱۴/۸۶(۱/۷۴)	۰/۲۷(۰/۰۵۳۱)	μ=۲۵/۵۲(۰/۵۹۲)	σ=۴۲/۲۴(۳/۸۶)
کوماراسوامی نمایی	۷۱۸۰/۳	۱۵/۵۴(۳/۶۱)	۱/۳۴(۰/۳۲۵)	β=۴۶/۲۲(۶/۹۸)	
کوماراسوامی گاما	۷۱۸۰/۹	۱/۸۵(۱/۳۶)	۰/۶۷(۰/۴۷۶)	α=۷/۳۷(۶/۳۱)	β=۱۴/۲۱(۱۱/۷)
گاما	۷۱۸۳/۹			α=۸/۹۹(۰/۴۷۴)	β=۱۵/۵۶(۰/۸۴۳)

کوماراسوامی نرمال بسیار نزدیک به‌هم هستند.



شکل ۱.۲: نمودار هیستوگرام.

در جدول (۲.۲) برای توزیع‌های گاما، کوماراسوامی نمایی، بتا نرمال و کوماراسوامی نرمال برای هر داده تعداد مورد انتظار را به‌دست آورده‌ایم. قدر مطلق انحراف میانگین(MAD) بین فراوانی مشاهدات و برآوردها برای توزیع بتا نرمال به کمترین مقدار خود می‌رسد.

جدول ۲.۲: مشاهدات و فراوانی‌های مورد انتظار و MAD بین فراوانی‌ها

داده	مشاهدات	مورد انتظار			
		گاما	کوماراسوامی نمایی	کوماراسوامی نرمال	بتا نرمال
۳۰	۱	۰/۷۵	۰/۱۹	۰/۲۱	۰/۲۲
۵۰	۱	۹/۸۵	۶/۳۲	۵/۷۷	۵/۶۷
۷۰	۴۰	۳۹/۷۲	۳۷/۸۲	۳۷/۴۳	۳۷/۳۹
۹۰	۹۶	۸۳/۵۹	۹۰/۷۵	۹۱/۸۵	۹۳/۷۰
۱۱۰	۱۲۲	۱۱۷/۱۵	۱۲۷/۱۴	۱۲۵/۵۳	۱۲۷/۵۴
۱۳۰	۱۴۰	۱۲۴/۵۶	۱۲۷/۸۱	۱۲۳/۹۵	۱۲۳/۷۳
۱۵۰	۹۲	۱۰۸/۵۱	۱۰۴/۲۲	۱۰۲/۴۱	۱۰۰/۷۷
۱۷۰	۷۰	۸۱/۳۵	۷۴/۳۵	۷۵/۹۵	۷۴/۳۰
۱۹۰	۴۴	۵۴/۲۴	۴۸/۶۸	۵۲/۰۰	۵۰/۹۷
۲۱۰	۳۸	۳۲/۹۳	۳۰/۱۶	۳۳/۱۸	۳۲/۸۰
۲۳۰	۲۵	۱۸/۵۱	۱۸/۰۳	۱۹/۸۰	۱۹/۸۶
۲۵۰	۱۳	۹/۷۶	۱۰/۵۳	۱۱/۰۶	۱۱/۳۲
۲۷۰	۴	۴/۸۷	۶/۰۶	۵/۷۹	۶/۰۸
۲۹۰	۱	۲/۳۲	۳/۴۶	۲/۸۴	۳/۰۸
۳۱۰	۱	۱/۰۶	۱/۹۶	۱/۳۱	۱/۴۷
۳۳۰	۲	۰/۴۷	۱/۱۰	۰/۵۶	۰/۶۶
جمع	۶۹۰	۶۸۹/۷	۶۸۸/۶	۶۸۹/۶	۶۸۹/۵
MAD		۶/۱۷	۴/۷۴	۴/۶۰	۴/۳۹

فصل ۳

برآورد پارامترهای توزیع Kw-G با استفاده از داده‌های سانسور شده

در خیلی از موارد، از جمله آزمون‌های طول عمر، آنالیز بقا، آزمایش‌های کلینیکی، تحقیقات زیست‌شناسی و دیگر زمینه‌های کاربردی علم آمار با نمونه‌های مواجه هستیم که همه مشاهدات بنا به دلایلی ثبت نشده و یا همه واحدهای نمونه به نتیجه نرسیده‌اند. این محدودیت‌ها ممکن است توسط شخص آزمایشگر بوجود آمده باشد یا ماهیت آزمایش به گونه‌ای باشد که به صورت ناخواسته محدودیت‌هایی را در مشاهدات اعمال کرده باشد. در چنین مواقعی با داده‌های سانسور شده مواجه هستیم. در واقع، داده‌های سانسور شده زمانی رخ می‌دهند که آزمایشگر نتواند اطلاعات جامع و کاملی از تمام واحدهای آزمایشی مورد مطالعه را بدست آورد.

در این فصل توزیع تعمیم یافته کوماراسوامی $(Kw-G)$ در حالت کلی را با داده‌های سانسور شده نوع یک و دو بررسی می‌کنیم. در سانسور نوع یک، همه موارد به طور همزمان وارد آزمایش شده و در لحظه از پیش تعیین شده t با یک مقدار تصادفی از شکست‌ها، خاتمه می‌یابد. همچنین در سانسور نوع دو، همه موارد به‌طور همزمان وارد آزمایش شده و بعد از r ـ امین شکست از پیش تعیین شده در لحظه تصادفی $t_{(r)}$ خاتمه می‌یابد.
در بخش اول به بررسی توزیع $Kw-G$ با داده‌های سانسور شده نوع یک و در بخش دوم توزیع $Kw-G$ را با داده‌های سانسور شده نوع دو بررسی خواهیم کرد.

۱.۳ داده‌های سانسور نوع یک

در این بخش می‌خواهیم برآورد ماکزیمم درستنمایی برای توزیع $Kw-G$ را با استفاده از داده‌های سانسور شده نوع اول به‌دست آوریم. تابع چگالی و تابع توزیع تجمعی توزیع $Kw-G$ را به‌صورت زیر داریم:

$$f(x) = abg(x)G(x)^{a-۱}\{۱ - G(x)^a\}^{b-۱}$$

و همچنین

$$F_X(x) = ۱ - \{۱ - G(x)^a\}^b$$

و احتمال این‌که یک واحد از مشاهدات در لحظه t سانسور شود، برابر است با

$$R_X(t) = ۱ - F_X(t) = \{۱ - G_X(t)^a\}^b$$

تابع چگالی iامین آماره‌های ترتیبی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$f_{X_{(i)}}(x) = \frac{n!}{(i-۱)!(n-i)!} f_X(x)(F_X(x))^{i-۱}(۱ - F_X(x))^{n-i}$$

که در آن $i = ۱, ۲, ..., r$ و r تعداد شکست‌ها تا لحظه t است.
اکنون با توجه به رابطه‌های بالا می‌توان تابع درستنمایی داده‌های مشاهده شده را به‌صورت زیر نوشت:

$$L = \frac{n!}{(n-r)!} f(x_{(۱)})f(x_{(۲)})...f(x_{(r)})(R_X(t))^{n-r}$$

۱.۱.۳ برآورد ماکزیمم درستنمایی

تابع درستنمایی برای توزیع $Kw-G$ برای داده‌های مشاهده شده را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} L(a,b) &= \frac{n!}{(n-r)!}\left(\prod_{i=۱}^{r} f(x_{(i)})\right)(R_X(t))^{n-r} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!}\left(\prod_{i=۱}^{r} abg(x_{(i)})G(x_{(i)})^{a-۱}\{۱ - G(x_{(i)})^a\}^{b-۱}\right) \\ &\times (\{۱ - G_X(t)^a\}^b)^{n-r} \end{aligned} \quad (۱.۳)$$

که $۰ \leq x_{(۱)} \leq x_{(۲)} \leq ... \leq x_{(r)} \leq t$.
همچنین لگاریتم تابع درستنمایی برابر است با:

$$\begin{aligned} \ell(a,b) &= rln(a) + rln(b) + ln(\frac{n!}{(n-r)!}) + \sum_{i=۱}^{r}[lng(x_{(i)}) \\ &+ (a-۱)lnG(x_{(i)}) + (b-۱)ln\{۱ - G(x_{(i)})^a\}] \\ &+ b(n-r)ln\{۱ - G_X(t)^a\} \end{aligned}$$

اکنون مشتق‌های اول از تابع لگاریتم درستنمایی بالا نسبت به پارامترهای a و b را به‌دست آورده و آن‌ها را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial \ell}{\partial a} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{r}{a} + \sum_{i=1}^{r}[ln(G(x_{(i)})) - (b-1)\frac{G(x_{(i)})^a ln(G(x_{(i)})}{1-G(x_{(i)})^a}]$$
$$-b(n-r)\frac{G_X(t)^a ln(G_X(t)}{1-G_X(t)^a} = 0$$

همچنین

$$\frac{\partial \ell}{\partial b} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{r}{b} + \sum_{i=1}^{r}[ln(1-G(x_{(i)})^a)] + (n-r)ln(1-G_X(t)^a) = 0$$

با حل معادلات بالا از طریق روش‌های عددی برآورد پارامتر a و b به‌دست می‌آیند.

۲.۱.۳ فاصله اطمینان تقریبی برای سانسور نوع یک

فرض کنید $I(a,b)$ نشان دهنده ماتریس اطلاع فیشر a,b باشد، آن‌گاه ماتریس اطلاع مشاهدات به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{I}(a,b) = \begin{bmatrix} \hat{I}_{11} & \hat{I}_{12} \\ \hat{I}_{21} & \hat{I}_{22} \end{bmatrix}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
\hat{I}_{11} &= -(\frac{\partial^2 \ell}{\partial a^2}) \\
&= -(-\frac{r}{a^2} \\
&\quad -\sum_{i=1}^{r}(b-1)\frac{ln^2 G(x_{(i)})G(x_{(i)})^a(1-G(x_{(i)})^a) + (ln(G(x_{(i)}))G(x_{(i)})^a)^2}{(1-G(x_{(i)})^a)^2}] \\
&\quad -b(n-r)\frac{ln^2 G_X(t)G_X(t)^a(1-G_X(t)^a) + (ln(G_X(t))G_X(t)^a)^2}{(1-G_X(t)^a)^2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \hat{I}_{11} &= (\frac{r}{a^2} + \sum_{i=1}^{r}[(b-1)\frac{ln^2 G(x_{(i)})G(x_{(i)})^a}{(1-G(x_{(i)})^a)^2}] \\
&\quad +b(n-r)\frac{ln^2(G_X(t))G_X(t)^a}{(1-G_X(t)^a)^2})
\end{aligned}$$

$$\hat{I}_{۲۲} = -(\frac{\partial^{۲}\ell}{\partial b^{۲}}) = -(-\frac{r}{b^{۲}}) = \frac{r}{b^{۲}}$$

$$\begin{aligned}\hat{I}_{۱۲} &= -(\frac{\partial^{۲}\ell}{\partial a\partial b}) = \hat{I}_{۲۱} \\ &= -(\sum_{i=۱}^{r}[-\frac{G(x_{(i)})^{a}lnG(x_{(i)})}{۱-G(x_{(i)})^{a}}] - (n-r)\frac{G_X(t)^{a}lnG_X(t)}{۱-G_X(t)^{a}})\end{aligned}$$

می‌توان ماتریس واریانس را برای a و b به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$V = \begin{bmatrix}\hat{I}_{۱۱} & \hat{I}_{۱۲} \\ \hat{I}_{۲۱} & \hat{I}_{۲۲}\end{bmatrix}^{-۱}$$

همچنین از ماتریس اطلاع مشاهده شده می‌توان برآورد واریانس a و b را به شکل زیر محاسبه نمود:

$$\begin{bmatrix}Var(\hat{a}) \\ Var(\hat{b})\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\hat{I}_{۱۱} \\ \hat{I}_{۲۲}\end{bmatrix}^{-۱}$$

از آن‌جا که برای حجم نمونه‌های بزرگ برآورد ماکزیمم درستنمایی به توزیع مجانبی نرمال میل می‌کند و با توجه به تعریف فاصله اطمینان مجانبی، یک فاصله اطمینان تقریبی $۱۰۰(۱-\theta)$٪ برای a و b به ترتیب برابر است با:

$$(\hat{a} \pm Z_{۱-\frac{\theta}{۲}}\sqrt{Var(\hat{a})}) \quad \textbf{و} \quad (\hat{b} \pm Z_{۱-\frac{\theta}{۲}}\sqrt{Var(\hat{b})})$$

۳.۱.۳ برآورد ماکزیمم درستنمایی توزیع‌های تعمیم‌یافته کوماراسوامی ویژه با استفاده از سانسور نوع یک

با استفاده از روابطی که در (۱.۲) برای برخی از توزیع‌های $Kw-G$ گفته شد و همچنین معادله (۱.۳)، توابع درستنمایی توزیع‌های تعمیم‌یافته ذکر شده را بدست می‌آوریم و برآورد پارامترهای موجود در هر توزیع را محاسبه می‌کنیم.

توزیع کوماراسوامی نرمال (KwN)

توزیع کوماراسوامی نرمال با پارامترهای μ و σ و b و a که با $KwN(a,b,\mu,\sigma)$ نمایش داده می‌شود دارای تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی داده شده در (۱.۱.۲) می‌باشد. تابع درستنمایی برای داده‌های سانسور نوع یک در (۱.۳) در حالت کلی ارائه شد. بنابراین تابع درستنمایی برای

داده های سانسور شده نوع یک برای توزیع KwN به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}L(a,b,\mu,\sigma) =&\frac{n!}{(n-r)!}\left(\prod_{i=1}^{r}\frac{ab}{\sigma}\phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})\Phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})^{a-1}\right.\\ &\left.\times\{1-\Phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})^{a}\}^{b-1}\right)\\ &\times\{1-\Phi(\frac{t-\mu}{\sigma})^{a}\}^{b(n-r)}\end{aligned}$$

که در آن $x,\mu\in R$ و $\sigma,a,b>0$

همچنین لگاریتم تابع درستنمایی KwN برابر است با

$$\begin{aligned}\ell(a,b,\mu,\sigma) =&ln(\frac{n!}{(n-r)!})+rln(a)+rln(b)-rln(\sigma)\\ &+\sum_{i=1}^{r}[ln\phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})+(a-1)ln\Phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})\\ &+(b-1)ln\{1-\Phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})^{a}\}]\\ &+b(n-r)ln\{1-\Phi(\frac{t-\mu}{\sigma})^{a}\}\end{aligned}$$

اکنون مشتق لگ درستنمایی را نسبت به پارامترهای a,b,μ,σ گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم:

مشتق نسبت به a:

$$\frac{\partial\ell}{\partial a}=0$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow&\frac{r}{a}+\sum_{i=1}^{r}\left[ln\phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})-(b-1)\frac{\Phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})^{a}ln\Phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})}{1-\Phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})^{a}}\right]\\ &-b(n-r)\frac{\Phi(\frac{t-\mu}{\sigma})^{a}ln\Phi(\frac{t-\mu}{\sigma})}{1-\Phi(\frac{t-\mu}{\sigma})^{a}}=0\end{aligned}$$

همچنین مشتق نسبت به b:

$$\frac{\partial\ell}{\partial b}=0$$

$$\Longrightarrow\frac{r}{b}+\sum_{i=1}^{r}[ln(1-\Phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})^{a}]+(n-r)ln(1-\Phi(\frac{t-\mu}{\sigma})^{a}=0$$

مشتق نسبت به μ:

$$\frac{\partial\ell}{\partial\mu}=0$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{r}\left[\frac{-\frac{1}{\sigma}\phi'(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})}{\phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})} + (a-1)\left(\frac{-\frac{1}{\sigma}\phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})}{\Phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})}\right)\right.$$
$$\left. +(b-1)\left(\frac{\frac{a}{\sigma}\Phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})^{a-1}\phi(\frac{(x-\mu)}{\sigma})}{1-\Phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})^{a}}\right)\right]$$
$$+ b(n-r)\left(\frac{\frac{a}{\sigma}\Phi(\frac{t-\mu}{\sigma})^{a-1}\phi(\frac{(t-\mu)}{\sigma})}{1-\Phi(\frac{t-\mu}{\sigma})^{a}}\right)$$
$$=0$$

مشتق نسبت به σ:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma}=0$$

$$\Longrightarrow -\frac{r}{\sigma}+\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma^2}\phi'(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})}{\phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})} + (a-1)\left(\frac{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma^2}\phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})}{\Phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})}\right)\right.$$
$$\left. +(b-1)\left(\frac{-a\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma^2}\Phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})^{a-1}\phi(\frac{(x-\mu)}{\sigma})}{1-\Phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})^{a}}\right)\right]$$
$$+ b(n-r)\left(\frac{-a\frac{t-\mu}{\sigma^2}\Phi(\frac{t-\mu}{\sigma})^{a-1}\phi(\frac{(t-\mu)}{\sigma})}{1-\Phi(\frac{t-\mu}{\sigma})^{a}}\right)=0$$

با حل معادلات بالا برآورد پارامترهای a,b,μ,σ به‌دست می‌آید.

توزیع کوماراسوامی وایبل (KwW)

توزیع کوماراسوامی وایبل با پارامترهایa و b و α و λ که با $KwW(a,b,\alpha,\lambda)$نمایش داده می‌شود و دارای تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی داده شده در (۲.۱.۲) می‌باشد. تابع درستنمایی برای KwW به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$L(a,b,\alpha,\lambda)=\frac{n!}{(n-r)!}(\prod_{i=1}^{r} ab\alpha\lambda^{\alpha}x_{(i)}^{\alpha-1}e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}}$$
$$\times(1-e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}})^{a-1}\{1-(1-e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}})^{a}\}^{b-1})$$
$$\times\{1-(1-e^{-(\lambda t)^{\alpha}})^{a}\}^{b(n-r)}$$

که در آن $\alpha,\lambda,x,a,b>0$ می‌باشد.
همچنین لگاریتم تابع درستنمایی KwW برابر است با

$$\ell(a,b,\alpha,\lambda)=ln(\frac{n!}{(n-r)!})+rln(a)+rln(b)+rln(\alpha)+r\alpha ln(\lambda)$$
$$+\sum_{i=1}^{r}\Big[(\alpha-1)lnx_{(i)}-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}+(a-1)ln(1-e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}})$$
$$+(b-1)ln\{1-(1-e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}})^{a}\}\Big]$$
$$+b(n-r)ln\{1-1-e^{-(\lambda t)^{\alpha}})^{a}\}$$

اکنون مشتق لگ درستنمایی را نسبت به پارامترهای a, b, α, λ گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم.

مشتق نسبت به a:

$$\frac{\partial \ell}{\partial a} = ۰$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \quad & \frac{r}{a} + \sum_{i=۱}^{r} \Big[ln(۱ - e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}}) \\ & - (b-۱)\frac{(۱ - e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}})^{a} ln(۱ - e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}})}{۱ - (۱ - e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}})^{a}} \Big] \\ & - b(n-r)\frac{(۱ - e^{-(\lambda t)^{\alpha}})^{a} ln(۱ - e^{-(\lambda t)^{\alpha}})}{۱ - (۱ - e^{-(\lambda t)^{\alpha}})^{a}} = ۰\end{aligned}$$

همچنین مشتق نسبت به b:

$$\frac{\partial \ell}{\partial b} = ۰$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \quad & \frac{r}{b} + \sum_{i=۱}^{r} [ln\{۱ - (۱ - e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}})^{a}\}] \\ & + (n-r) ln\{۱ - (۱ - e^{-(\lambda t)^{\alpha}})^{a}\} = ۰\end{aligned}$$

مشتق نسبت به α:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = ۰$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \quad & \frac{r}{\alpha} + r ln\lambda + \sum_{i=۱}^{r} \Big[ln x_{(i)} - (\lambda x_{(i)})^{\alpha} ln(\lambda x_{(i)}) \\ & + (a-۱)\frac{e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}} (\lambda x_{(i)})^{\alpha} ln(\lambda x_{(i)})}{(۱ - e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}})} \\ & - (b-۱)\left(\frac{a e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}} (\lambda x_{(i)})^{\alpha} ln(\lambda x_{(i)}) (۱ - e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}})^{a-۱}}{۱ - (۱ - e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}})^{a}} \right) \Big] \\ & - b(n-r)\left(\frac{a e^{-(\lambda t)^{\alpha}} (\lambda t)^{\alpha} ln(\lambda t) (۱ - e^{-(\lambda t)^{\alpha}})^{a-۱}}{۱ - (۱ - e^{-(\lambda t)^{\alpha}})^{a}} \right) \\ & = ۰\end{aligned}$$

مشتق نسبت به λ:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = ۰$$

$$\Longrightarrow \frac{r\alpha}{\lambda}+\sum_{i=1}^{r}\Big[(-\alpha\lambda^{\alpha-1}x_{(i)}^{\alpha}) + \left((a-1)\frac{\alpha\lambda^{\alpha-1}x_{(i)}^{\alpha}(-e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}})}{1-e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}}}\right) - \left((b-1)\frac{a\alpha\lambda^{\alpha-1}x_{(i)}^{\alpha}e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}}(1-e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}})^{a-1}}{1-(1-e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}})^{a}}\right)\Big] -b(n-r)\frac{a\alpha\lambda^{\alpha-1}t^{\alpha}e^{-(\lambda t)^{\alpha}}(1-e^{-(\lambda t)^{\alpha}})^{a-1}}{1-(1-e^{-(\lambda t)^{\alpha}})^{a}}=0$$

با حل معادلات بالا برآورد پارامترهای a,b,α,λ به‌دست می‌آید.

توزیع کوماراسوامی گاما ($KwGa$)

توزیع کوماراسوامی گاما با پارامترهایa و b و α و λ که با $KwGa(a,b,\alpha,\lambda)$نمایش داده می‌شود و دارای تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی داده شده در (۲.۱.۲) می‌باشد. تابع درستنمایی برای $KwGa$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} L(a,b,\alpha,\lambda) =& \frac{n!}{(n-r)!}(\prod_{i=1}^{r} ab\lambda^{\alpha}x_{(i)}^{\alpha-1}e^{-(\lambda x_{(i)})}(\frac{\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha)}{\Gamma(\alpha)})^{a-1} \\ & \times (1-(\frac{\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha)}{\Gamma(\alpha)})^{a})^{b-1})(1-(\frac{\Gamma_{\lambda t}(\alpha)}{\Gamma(\alpha)})^{a})^{b(n-r)} \\ =& \frac{n!}{(n-r)!}\left(\frac{ab\lambda^{\alpha}}{(\Gamma(\alpha))^{ab(1+n-r)}}\right)^{r}(\prod_{i=1}^{r} e^{-\lambda x_{(i)}}x_{(i)}^{(\alpha-1)} \\ & \times (\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha))^{(a-1)}((\Gamma(\alpha))^{a}-(\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha))^{a})^{(b-1)}) \\ & \times ((\Gamma(\alpha))^{a}-(\Gamma_{\lambda t}(\alpha))^{a})^{b(n-r)} \end{aligned}$$

که در آن $\alpha,\lambda,x,a,b>0$ می‌باشد.

همچنین لگاریتم تابع درستنمایی $KwGa$ برابر است با

$$\begin{aligned} \ell(a,b,\alpha,\lambda) =& ln(\frac{n!}{(n-r)!})+r(ln(a)+ln(b)+\alpha ln(\lambda)-ab(1+n-r)ln(\Gamma(\alpha))) \\ & +\sum_{i=1}^{r}\Big[(\alpha-1)lnx_{(i)}-(\lambda x_{(i)})+(a-1)ln(\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha)) \\ & +(b-1)ln((\Gamma(\alpha))^{a}-(\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha))^{a})\Big] \\ & +b(n-r)ln((\Gamma(\alpha))^{a}-(\Gamma_{\lambda t}(\alpha))^{a}) \end{aligned}$$

اکنون مشتق لگ درستنمایی را نسبت به پارامترهای a,b,α,λ گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم.

مشتق نسبت به a:

$$\frac{\partial\ell}{\partial a}=0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{r}{a} + b(1+n-r)ln(\Gamma(\alpha)) + \sum_{i=1}^{r}\Big[ln(\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha)) + (b-1)\frac{ln(\Gamma(\alpha))(\Gamma(\alpha))^a - ln(\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha))(\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha))^a)}{(\Gamma(\alpha))^a - (\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha))^a)}\Big] + b(n-r)\frac{ln(\Gamma(\alpha))(\Gamma(\alpha))^a - ln(\Gamma_{\lambda t}(\alpha))(\Gamma_{\lambda t}(\alpha))^a)}{(\Gamma(\alpha))^a - (\Gamma_{\lambda t}(\alpha))^a)} = 0$$

همچنین مشتق نسبت به b:

$$\frac{\partial \ell}{\partial b} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{r}{b} + a(1+n-r)ln(\Gamma(\alpha)) + \sum_{i=1}^{r}[ln((\Gamma(\alpha))^a - (\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha))^a)] + (n-r)ln((\Gamma(\alpha))^a - (\Gamma_{\lambda t}(\alpha))^a) = 0$$

مشتق نسبت به α:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad rln\lambda - \frac{ab(1+n-r)\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{i=1}^{r}\left[lnx_{(i)} + (a-1)\frac{\Gamma'_{\lambda x_{(i)}}(\alpha)}{\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha)} + (b-1)\left(\frac{a\Gamma'(\alpha)(\Gamma(\alpha))^{a-1} - a\Gamma'_{\lambda x_{(i)}}(\alpha)(\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha))^{a-1}}{(\Gamma(\alpha))^a - (\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha))^a}\right)\right] + b(n-r)\left(\frac{a\Gamma'(\alpha)(\Gamma(\alpha))^{a-1} - a\Gamma'_{\lambda t}(\alpha)(\Gamma_{\lambda t}(\alpha))^{a-1}}{(\Gamma(\alpha))^a - (\Gamma_{\lambda t}(\alpha))^a}\right) = 0$$

مشتق نسبت به λ:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{r\alpha}{\lambda} + \sum_{i=1}^{r}\left[(-x_{(i)}) + \left((a-1)\frac{\Gamma'_{\lambda x_{(i)}}(\alpha)}{\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha)}\right) - \left((b-1)\frac{a\Gamma'_{\lambda x_{(i)}}(\alpha)(\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha))^{(a-1)}}{(\Gamma(\alpha))^a - (\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha))^a}\right)\right] - b(n-r)\frac{a\Gamma'_{\lambda t}(\alpha)(\Gamma_{\lambda t}(\alpha))^{(a-1)}}{(\Gamma(\alpha))^a - (\Gamma_{\lambda t}(\alpha))^a} = 0$$

با حل معادلات بالا برآورد پارامترهای a, b, α, λ به‌دست می‌آید.

توزیع کوماراسوامی نمایی (KwE)

توزیع کوماراسوامی نمایی با پارامترهای λوaو b که با $KwE(a,b,\lambda)$نمایش داده می‌شود و دارای تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی به‌شکل زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} f(x) &= ab\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{a-1}\{1-(1-e^{-\lambda x})^a\}^{b-1} \\ F(x) &= 1-\{1-(1-e^{-\lambda x})^a\}^b \end{aligned}$$

تابع درستنمایی برای KwE به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} L(a,b,\lambda) &= \frac{n!}{(n-r)!}(\prod_{i=1}^{r} ab\lambda e^{-\lambda x_{(i)}}(1-e^{-\lambda x_{(i)}})^{a-1} \\ &\times\{1-(1-e^{-\lambda x_{(i)}})^a\}^{b-1})\{1-(1-e^{-\lambda t})^a\}^{b(n-r)} \end{aligned}$$

که $\lambda, x, a, b > 0$ می‌باشد.
لگاریتم تابع درستنمایی KwE برابر است با

$$\begin{aligned} \ell(a,b,\lambda) &= ln(\frac{n!}{(n-r)!}) + rln(a) + rln(b) + rln(\lambda) \\ &+ \sum_{i=1}^{r}\Big[(-\lambda x_{(i)}) + (a-1)ln(1-e^{-\lambda x_{(i)}}) \\ &+(b-1)ln(1-(1-e^{-\lambda x_{(i)}})^a)\Big] \\ &+b(n-r)ln(1-(1-e^{-\lambda t})^a) \end{aligned}$$

مشتق لگ درستنمایی را نسبت به پارامترهای a,b,λ گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم.
مشتق نسبت به a:

$$\frac{\partial \ell}{\partial a} = 0$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & \frac{r}{a} + \sum_{i=1}^{r}\Big[ln(1-e^{-\lambda x_{(i)}}) \\ & - (b-1)\frac{(1-e^{-\lambda x_{(i)}})^a ln(1-e^{-\lambda x_{(i)}})}{1-(1-e^{-\lambda x_{(i)}})^a}\Big] \\ & -b(n-r)\frac{(1-e^{-\lambda x_{(r)}})^a ln(1-e^{-\lambda t})}{1-(1-e^{-\lambda t})^a} \\ & = 0 \end{aligned}$$

همچنین مشتق نسبت به b:

$$\frac{\partial \ell}{\partial b} = 0$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & \frac{r}{b} + \sum_{i=1}^{r}[ln(1-(1-e^{-\lambda x_{(i)}})^a)] \\ & +(n-r)ln(1-(1-e^{-\lambda t})^a) = 0 \end{aligned}$$

مشتق نسبت به λ:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = 0$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad & \frac{r}{\lambda} + \sum_{i=1}^{r} \left[(-x_{(i)}) + (a-1)\frac{x_{(i)}e^{-\lambda x_{(i)}}}{1-e^{-\lambda x_{(i)}}} \right. \\ & \left. -(b-1)\left(\frac{a x_{(i)} e^{-\lambda x_{(i)}}(1-e^{-\lambda x_{(i)}})^{a-1}}{1-(1-e^{-\lambda x_{(i)}})^{a}} \right) \right] \\ & -b(n-r)\left(\frac{a t e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{a-1}}{1-(1-e^{-\lambda t})^{a}} \right) = 0 \end{aligned}$$

با حل معادلات بالا برآورد پارامترهای a, b, λ به‌دست می‌آید.

توزیع کوماراسوامی گامبل ($KwGu$)

توزیع کوماراسوامی گامبل با پارامترهای a و b و μ و σ که با $KwGu(a,b,\mu,\sigma)$ نمایش داده می‌شود و دارای تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی داده شده در (۴.۱.۲) می‌باشد. تابع درستنمایی برای $KwGu$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} L(a,b,\mu,\sigma) &= \frac{n!}{(n-r)!}(\prod_{i=1}^{r} \frac{ab}{\sigma} exp\{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma} - e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\} \\ & \times(1-exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\})^{a-1}(1-(1-exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\})^{a})^{b-1}) \\ & \times(1-(1-exp\{-e^{-\frac{t-\mu}{\sigma}}\})^{a})^{b(n-r)} \end{aligned}$$

که $\mu, \sigma, x, a, b > 0$ می‌باشد.
لگاریتم تابع درستنمایی $KwGu$ برابر است با

$$\begin{aligned} \ell(a,b,\mu,\sigma) =& ln(\frac{n!}{(n-r)!}) + rln(a) + rln(b) - rln(\sigma) \\ & + \sum_{i=1}^{r} \left[(-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma} - e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}) + (a-1)ln(1-exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\}) \right. \\ & \left. +(b-1)ln(1-(1-exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\})^{a}) \right] \\ & + b(n-r)ln(1-(1-exp\{-e^{-\frac{t-\mu}{\sigma}}\})^{a}) \end{aligned}$$

مشتق لگ درستنمایی را نسبت به پارامترهای a, b, μ, σ گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم:
مشتق نسبت به a:

$$\frac{\partial \ell}{\partial a} = 0$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\quad & \frac{r}{a}+\sum_{i=۱}^{r}\Bigg[ln(۱-exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\})\\ & -(b-۱)\frac{(۱-exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\})^a ln(۱-exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\})}{۱-(۱-exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\})^a}\Bigg]\\ & -b(n-r)\frac{(۱-exp\{-e^{-\frac{t-\mu}{\sigma}}\})^a ln(۱-exp\{-e^{-\frac{t-\mu}{\sigma}}\})}{۱-(۱-exp\{-e^{-\frac{t-\mu}{\sigma}}\})^a}\\ & =۰\end{aligned}$$

همچنین مشتق نسبت به b:

$$\frac{\partial \ell}{\partial b}=۰$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\quad & \frac{r}{b}+\sum_{i=۱}^{r}[ln(۱-(۱-exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\})^a)]\\ & +(n-r)ln(۱-(۱-exp\{-e^{-\frac{t-\mu}{\sigma}}\})^a)=۰\end{aligned}$$

مشتق نسبت به μ:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu}=۰$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\quad & \sum_{i=۱}^{r}\Bigg[\frac{۱}{\sigma}-\frac{۱}{\sigma}e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\\ & +(a-۱)\frac{-\frac{۱}{\sigma}e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\}}{۱-(۱-exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\})}\\ & -(b-۱)\left(\frac{a(۱-exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\})^{a-۱}\frac{۱}{\sigma}e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\}}{۱-(۱-exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\}))^a}\right)\Bigg]\\ & -b(n-r)\left(\frac{a(۱-exp\{-e^{-\frac{t-\mu}{\sigma}}\})^a\frac{۱}{\sigma}e^{-\frac{t-\mu}{\sigma}}exp\{-e^{-\frac{t-\mu}{\sigma}}\}}{۱-(۱-exp\{-e^{-\frac{t-\mu}{\sigma}}\}))^a}\right)\\ & =۰\end{aligned}$$

مشتق نسبت به σ:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma}=۰$$

$$\Longrightarrow \quad -\frac{r}{\sigma}+\sum_{i=1}^{r}\Bigg[\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma^2}-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma^2}e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}$$
$$+\left((a-1)\frac{\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma^2}e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\}}{1-exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\}}\right)$$
$$-\left((b-1)\frac{a(1-exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\})^{a-1}\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma^2}e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\}}{1-(1-exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\})^a}\right)\Bigg]$$
$$-b(n-r)\frac{a(1-exp\{-e^{-\frac{t-\mu}{\sigma}}\})^{a-1}\frac{t-\mu}{\sigma^2}e^{-\frac{t-\mu}{\sigma}}exp\{-e^{-\frac{t-\mu}{\sigma}}\}}{1-(1-exp\{-e^{-\frac{t-\mu}{\sigma}}\})^a}$$
$$=0$$

با حل معادلات بالا برآورد پارامترهای a, b, μ, σ به‌دست می‌آید.

۲.۳ داده‌های سانسور نوع دو

در سانسور نوع دو، آزمایش بعد از مشاهده r خاتمه می‌یابد. اگر r کوچکتر از نمونه جمع‌آوری شده باشد آن‌گاه زمان شکست را می‌توانیم به‌صورت $x_{(1)} \le x_{(2)} \le ... \le x_{(r)}$ بنویسیم. توجه داشته باشید که r از قبل مشخص می‌باشد. در این نوع سانسور آزمایش در r ـ امین شکست با زمان شکست $x_{(r)}$ به پایان می‌رسد و $(n-r)$تا سانسور شده‌اند. در سانسور نوع دو، تابع چگالی احتمال برای آماره ترتیبی $X_{(r)}$ برابر است با

$$f_{X(i)}(x)=\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}f_X(x)[F_X(x)]^{i-1}[1-F_X(x)]^{n-i}$$

که در آن $i=1,2,...,r$.

می‌دانیم که برای آن $(n-r)$ واحدی که در سانسور نوع دو بدون شکست باقی مانده‌اند، طول عمر هر یک از آن‌ها بیشتر از $x_{(r)}$ می‌باشد. احتمال این‌که یک واحد در زمان $x_{(r)}$ سانسور شود برابر است با

$$1-P(X\le x_{(r)})=\{1-G(x_{(r)})^a\}^b$$

که از رابطه‌های قبل در ساختار تابع درستنمایی استفاده می‌شود. در سانسور نوع دو تابع درستنمایی را به‌صورت زیر داریم:

$$L(a,b)=\frac{n!}{(n-i)!}\left(\prod_{i=1}^{r}f(x_{(i)})\right)[1-F_X(x_{(r)})]^{n-r} \qquad (۲.۳)$$

۱.۲.۳ برآورد ماکزیمم درستنمایی

تابع درستنمایی توزیع‌های $Kw - G$ برای داده‌های مشاهده شده را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم:

$$
\begin{aligned}
L(a,b) &= \frac{n!}{(n-r)!}\left(\prod_{i=1}^{r} abg(x_{(i)})G(x_{(i)})^{a-1}\{1-G(x_{(i)})^{a}\}^{b-1}\right)\\
&\times \left(\{1-G(x_{(r)})^{a}\}\right)^{b(n-r)}
\end{aligned}
$$

که در آن $0 \leq x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq ... \leq x_{(r)}$.
همچنین لگاریتم تابع درستنمایی برابر است با

$$
\begin{aligned}
\ell(a,b) &= ln(\frac{n!}{(n-r)!}) + rln(a) + rln(b) + \sum_{i=1}^{r}[lng(x_{(i)})\\
&+(a-1)lnG(x_{(i)}) + (b-1)ln\{1-G(x_{(i)})^{a}\}]\\
&+b(n-r)ln\{1-G(x_{(r)})^{a}\}
\end{aligned}
$$

با مشتق‌گیری از تابع لگاریتم درستنمایی نسبت به پارامترهای موجود و حل معادلات حاصل از آن‌ها برآورد پارامترها را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{\partial \ell}{\partial a} = 0$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \frac{r}{a} + \sum_{i=1}^{r}\left[ln(G(x_{(i)})) - (b-1)\frac{G(x_{(i)}^{a}ln(G(x_{(i)})}{1-G(x_{(i)})^{a}}\right]\\
-b(n-r)\frac{G(x_{(r)})^{a}ln(G(x_{(r)})}{1-G(x_{(r)})^{a}} = 0
\end{aligned}
$$

همچنین

$$\frac{\partial \ell}{\partial b} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{r}{b} + \sum_{i=1}^{r}[ln(1-G(x_{(i)})^{a})] + (n-r)ln(1-G(x_{(r)})^{a}) = 0$$

۲.۲.۳ فاصله اطمینان تقریبی برای سانسور نوع دو

فرض کنید $I(a,b)$ نشان دهنده ماتریس اطلاع فیشر a و b باشد، آن‌گاه ماتریس اطلاع مشاهدات به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{I}(a,b) = \begin{bmatrix} \hat{I}_{11} & \hat{I}_{12} \\ \hat{I}_{21} & \hat{I}_{22} \end{bmatrix}$$

که در آن

$$\begin{aligned}\hat{I}_{11} &= -(\frac{\partial^2 \ell}{\partial a^2}) \\ &= -(-\frac{r}{a^2} \\ &-\sum_{i=1}^{r}(b-1)\frac{G(x_{(i)})^a ln^2 G(x_{(i)})(1-G(x_{(i)})^a)-(G(x_{(i)})^a lnG(x_{(i)}))^2}{(1-G(x_{(i)})^a)^2}] \\ &-b(n-r)\frac{G(x_{(r)})^a ln^2 G(x_{(r)})(1-G(x_{(r)})^a)-(G(x_{(r)})^a ln(G(x_{(r)})))^2}{(1-G(x_{(r)})^a)^2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \hat{I}_{11} &= (\frac{r}{a^2}+\sum_{i=1}^{r}[(b-1)\frac{ln^2 G(x_{(i)})G(x_{(i)})^a}{(1-G(x_{(i)})^a)^2}] \\ &+b(n-r)\frac{ln^2(G(x_{(r)}))G(x_{(r)})^a}{(1-G(x_{(r)})^a)^2})\end{aligned}$$

$$\hat{I}_{22} = -(\frac{\partial^2 \ell}{\partial b^2}) = -(-\frac{r}{b^2}) = \frac{r}{b^2}$$

$$\begin{aligned}\hat{I}_{12} &= -(\frac{\partial^2 \ell}{\partial a \partial b}) = \hat{I}_{21} \\ &= -(\sum_{i=1}^{r} -[\frac{G(x_{(i)})^a lnG(x_{(i)})}{1-G(x_{(i)})^a}] - (n-r)\frac{G(x_{(r)})^a lnG(x_{(r)})}{1-G(x_{(r)})^a})\end{aligned}$$

می‌توان ماتریس واریانس را برای a و b به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$V = \begin{bmatrix} \hat{I}_{11} & \hat{I}_{12} \\ \hat{I}_{21} & \hat{I}_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

همچنین از ماتریس اطلاع مشاهده شده می‌توان برآورد واریانس a و b را به شکل زیر محاسبه نمود:

$$\begin{bmatrix} Var(\hat{a}) \\ Var(\hat{b}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{I}_{11} \\ \hat{I}_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

همچنین فاصله اطمینان تقریبی $100(1-\theta)\%$ برای a و b به ترتیب برابر به‌صورت زیر می‌باشند:

$$(\hat{a} \pm Z_{1-\frac{\theta}{2}}\sqrt{Var(\hat{a})}) \quad \text{و} \quad (\hat{b} \pm Z_{1-\frac{\theta}{2}}\sqrt{Var(\hat{b})})$$

۳.۲.۳ برآورد ماکزیمم درستنمایی توزیع‌های تعمیم‌یافته کوماراسوامی ویژه با داده‌های سانسور نوع دو

با استفاده از روابطی که در (۱.۲) برای برخی از توزیع‌های $Kw-G$ گفته شد، توابع درستنمایی را بدست می‌آوریم و برآورد پارامترهای موجود در هر توزیع را محاسبه می‌کنیم.

توزیع کوماراسوامی نرمال (KwN)

توزیع کوماراسوامی نرمال با پارامترهای μ و σ و b و a که با $KwN(a,b,\mu,\sigma)$ نمایش داده می‌شود دارای تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی داده شده در (۱.۱.۲) می‌باشد. تابع درستنمایی برای داده‌های سانسور نوع دو را، در (۱.۲.۳) داریم. بنابراین تابع درستنمایی برای KwN به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} L(a,b,\mu,\sigma) =& \frac{n!}{(n-r)!}\left(\prod_{i=1}^{r}\frac{ab}{\sigma}\phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})\Phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})^{a-1}\right. \\ &\left.\times\{1-\Phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})^{a}\}^{b-1}\right) \\ &\times\{1-\Phi(\frac{x_{(r)}-\mu}{\sigma})^{a}\}^{b(n-r)} \end{aligned}$$

که در آن $x,\mu\in R$ و $\sigma,a,b>0$

همچنین لگاریتم تابع درستنمایی KwN برابر است با

$$\begin{aligned} \ell(a,b,\mu,\sigma) =& ln(\frac{n!}{(n-r)!}) + rln(a) + rln(b) - rln(\sigma) \\ &+\sum_{i=1}^{r}[ln\phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}) + (a-1)ln\Phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}) \\ &+(b-1)ln\{1-\Phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})^{a}\}] \\ &+b(n-r)ln\{1-\Phi(\frac{x_{(r)}-\mu}{\sigma})^{a}\} \end{aligned}$$

اکنون مشتق لگ درستنمایی را نسبت به پارامترهای a,b,μ,σ گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم:

مشتق نسبت به a:

$$\frac{\partial\ell}{\partial a}=0$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow& \frac{r}{a}+\sum_{i=1}^{r}\left[ln\phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})-(b-1)\frac{\Phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})^{a}ln\Phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})}{1-\Phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})^{a}}\right] \\ &-b(n-r)\frac{\Phi(\frac{x_{(r)}-\mu}{\sigma})^{a}ln\Phi(\frac{x_{(r)}-\mu}{\sigma})}{1-\Phi(\frac{x_{(r)}-\mu}{\sigma})^{a}}=0 \end{aligned}$$

همچنین مشتق نسبت به b:

$$\frac{\partial\ell}{\partial b}=0$$

$$\Longrightarrow \frac{r}{b}+\sum_{i=1}^{r}[ln(1-\Phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})^{a}]+(n-r)ln(1-\Phi(\frac{x_{(r)}-\mu}{\sigma})^{a}=0$$

مشتق نسبت به μ:

$$\frac{\partial\ell}{\partial\mu}=0$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{r}\left[\frac{-\frac{1}{\sigma}\phi'(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})}{\phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})}+(a-1)\left(\frac{-\frac{1}{\sigma}\phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})}{\Phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})}\right)\right.$$
$$\left.+(b-1)\left(\frac{\frac{a}{\sigma}\Phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})^{a-1}\phi(\frac{(x-\mu)}{\sigma})}{1-\Phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})^{a}}\right)\right]$$
$$+b(n-r)\left(\frac{\frac{a}{\sigma}\Phi(\frac{x_{(r)}-\mu}{\sigma})^{a-1}\phi(\frac{(x_{(r)}-\mu)}{\sigma})}{1-\Phi(\frac{x_{(r)}-\mu}{\sigma})^{a}}\right)$$
$$=0$$

مشتق نسبت به σ:

$$\frac{\partial\ell}{\partial\sigma}=0$$

$$\Longrightarrow -\frac{r}{\sigma}+\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma^{2}}\phi'(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})}{\phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})}+(a-1)\left(\frac{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma^{2}}\phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})}{\Phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})}\right)\right.$$
$$\left.+(b-1)\left(\frac{-a\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma^{2}}\Phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})^{a-1}\phi(\frac{(x-\mu)}{\sigma})}{1-\Phi(\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma})^{a}}\right)\right]$$
$$+b(n-r)\left(\frac{-a\frac{x_{(r)}-\mu}{\sigma^{2}}\Phi(\frac{x_{(r)}-\mu}{\sigma})^{a-1}\phi(\frac{(x_{(r)}-\mu)}{\sigma})}{1-\Phi(\frac{x_{(r)}-\mu}{\sigma})^{a}}\right)=0$$

با حل معادلات بالا برآورد پارامترهای a,b,μ,σ به‌دست می‌آید.

توزیع کوماراسوامی وایبل (KwW)

توزیع کوماراسوامی وایبل با پارامترهای a و b و α و λ که با $KwW(a,b,\alpha,\lambda)$ نمایش داده می‌شود و دارای تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی داده شده در (۲.۱.۲) می‌باشد. تابع درستنمایی برای KwW به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$L(a,b,\alpha,\lambda)=\frac{n!}{(n-r)!}(\prod_{i=1}^{r}ab\alpha\lambda^{\alpha}x_{(i)}^{\alpha-1}e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}}$$
$$\times(1-e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}})^{a-1}\{1-(1-e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}})^{a}\}^{b-1})$$
$$\times\{1-(1-e^{-(\lambda x_{(r)})^{\alpha}})^{a}\}^{b(n-r)}$$

که در آن $\alpha,\lambda,x,a,b>0$ می‌باشد.

همچنین لگاریتم تابع درستنمایی KwW برابر است با

$$\ell(a,b,\alpha,\lambda)=ln(\frac{n!}{(n-r)!})+rln(a)+rln(b)+rln(\alpha)+r\alpha ln(\lambda)$$
$$+\sum_{i=1}^{r}\left[(\alpha-1)lnx_{(i)}-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}+(a-1)ln(1-e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}})\right.$$
$$\left.+(b-1)ln\{1-(1-e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}})^{a}\}\right]$$
$$+b(n-r)ln\{1-1-e^{-(\lambda x_{(r)})^{\alpha}})^{a}\}$$

اکنون مشتق لگ درستنمایی را نسبت به پارامترهای a, b, α, λ گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم:

مشتق نسبت به a:

$$\frac{\partial \ell}{\partial a} = ۰$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad & \frac{r}{a} + \sum_{i=۱}^{r} \Big[ln(۱ - e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}}) \\
& - (b-۱) \frac{(۱ - e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}})^{a} ln(۱ - e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}})}{۱ - (۱ - e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}})^{a}} \Big] \\
& -b(n-r) \frac{(۱ - e^{-(\lambda x_{(r)})^{\alpha}})^{a} ln(۱ - e^{-(\lambda x_{(r)})^{\alpha}})}{۱ - (۱ - e^{-(\lambda x_{(r)})^{\alpha}})^{a}} = ۰
\end{aligned}$$

همچنین مشتق نسبت به b:

$$\frac{\partial \ell}{\partial b} = ۰$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad & \frac{r}{b} + \sum_{i=۱}^{r} [ln\{۱ - (۱ - e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}})^{a}\}] \\
& +(n-r) ln\{۱ - (۱ - e^{-(\lambda x_{(r)})^{\alpha}})^{a}\} = ۰
\end{aligned}$$

مشتق نسبت به α:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = ۰$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad & \frac{r}{\alpha} + r ln\lambda + \sum_{i=۱}^{r} \Big[ln x_{(i)} - (\lambda x_{(i)})^{\alpha} ln(\lambda x_{(i)}) \\
& +(a-۱) \frac{e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}} (\lambda x_{(i)})^{\alpha} ln(\lambda x_{(i)})}{(۱ - e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}})} \\
& -(b-۱) \left(\frac{a e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}} (\lambda x_{(i)})^{\alpha} ln(\lambda x_{(i)}) (۱ - e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}})^{a-۱}}{۱ - (۱ - e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}})^{a}} \right) \Big] \\
& -b(n-r) \left(\frac{a e^{-(\lambda x_{(r)})^{\alpha}} (\lambda x_{(r)})^{\alpha} ln(\lambda x_{(r)}) (۱ - e^{-(\lambda x_{(r)})^{\alpha}})^{a-۱}}{۱ - (۱ - e^{-(\lambda x_{(r)})^{\alpha}})^{a}} \right) \\
& = ۰
\end{aligned}$$

مشتق نسبت به λ:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = ۰$$

$$\Longrightarrow \frac{r\alpha}{\lambda}+\sum_{i=1}^{r}\Bigg[(-\alpha\lambda^{\alpha-1}x_{(i)}^{\alpha}) + \left((a-1)\frac{\alpha\lambda^{\alpha-1}x_{(i)}^{\alpha}(-e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}})}{1-e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}}}\right) - \left((b-1)\frac{a\alpha\lambda^{\alpha-1}x_{(i)}^{\alpha}e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}}(1-e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}})^{a-1}}{1-(1-e^{-(\lambda x_{(i)})^{\alpha}})^{a}}\right)\Bigg] -b(n-r)\frac{a\alpha\lambda^{\alpha-1}x_{(r)}^{\alpha}e^{-(\lambda x_{(r)})^{\alpha}}(1-e^{-(\lambda x_{(r)})^{\alpha}})^{a-1}}{1-(1-e^{-(\lambda x_{(r)})^{\alpha}})^{a}}=0$$

با حل معادلات بالا برآورد پارامترهای a, b, α, λ به‌دست می‌آید.

توزیع کوماراسوامی گاما ($KwGa$)

توزیع کوماراسوامی گاما با پارامترهایa و b و α و λ که با $KwGa(a,b,\alpha,\lambda)$نمایش داده می‌شود، دارای تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی داده شده در (۲.۱.۲) می‌باشد. تابع درستنمایی برای $KwGa$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} L(a,b,\alpha,\lambda) =& \frac{n!}{(n-r)!}(\prod_{i=1}^{r}ab\lambda^{\alpha}x_{(i)}^{\alpha-1}e^{-(\lambda x_{(i)})}(\frac{\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha)}{\Gamma(\alpha)})^{a-1} \\ &\times(1-(\frac{\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha)}{\Gamma(\alpha)})^{a})^{b-1})(1-(\frac{\Gamma_{\lambda x_{(r)}}(\alpha)}{\Gamma(\alpha)})^{a})^{b(n-r)} \\ =& \frac{n!}{(n-r)!}\left(\frac{ab\lambda^{\alpha}}{(\Gamma(\alpha))^{ab(1+n-r)}}\right)^{r}(\prod_{i=1}^{r}e^{-\lambda x_{(i)}}x_{(i)}^{(\alpha-1)} \\ &\times(\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha))^{(a-1)}((\Gamma(\alpha))^{a}-(\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha))^{a})^{(b-1)}) \\ &\times((\Gamma(\alpha))^{a}-(\Gamma_{\lambda x_{(r)}}(\alpha))^{a})^{b(n-r)} \end{aligned}$$

که در آن $\alpha, \lambda, x, a, b > 0$ می‌باشد.
همچنین لگاریتم تابع درستنمایی $KwGa$ برابر است با

$$\begin{aligned} \ell(a,b,\alpha,\lambda) =& ln(\frac{n!}{(n-r)!})+r(ln(a)+ln(b)+\alpha ln(\lambda)-ab(1+n-r)ln(\Gamma(\alpha))) \\ &+\sum_{i=1}^{r}\Big[(\alpha-1)lnx_{(i)}-(\lambda x_{(i)})+(a-1)ln(\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha)) \\ &+(b-1)ln((\Gamma(\alpha))^{a}-(\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha))^{a})\Big] \\ &+b(n-r)ln((\Gamma(\alpha))^{a}-(\Gamma_{\lambda x_{(r)}}(\alpha))^{a}) \end{aligned}$$

اکنون مشتق لگ درستنمایی را نسبت به پارامترهای a, b, α, λ گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم:
مشتق نسبت به a:

$$\frac{\partial \ell}{\partial a}=0$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\quad &\frac{r}{a}+b(1+n-r)ln(\Gamma(\alpha))+\sum_{i=1}^{r}\Big[ln(\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha))\\ &+(b-1)\frac{ln(\Gamma(\alpha))(\Gamma(\alpha))^{a}-ln(\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha))(\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha))^{a})}{(\Gamma(\alpha))^{a}-(\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha))^{a})}\Big]\\ &+b(n-r)\frac{ln(\Gamma(\alpha))(\Gamma(\alpha))^{a}-ln(\Gamma_{\lambda x_{(r)}}(\alpha))(\Gamma_{\lambda x_{(r)}}(\alpha))^{a})}{(\Gamma(\alpha))^{a}-(\Gamma_{\lambda x_{(r)}}(\alpha))^{a})}=0\end{aligned}$$

همچنین مشتق نسبت به b:

$$\frac{\partial\ell}{\partial b}=0$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\quad &\frac{r}{b}+a(1+n-r)ln(\Gamma(\alpha))+\sum_{i=1}^{r}[ln((\Gamma(\alpha))^{a}-(\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha))^{a})]\\ &+(n-r)ln((\Gamma(\alpha))^{a}-(\Gamma_{\lambda x_{(r)}}(\alpha))^{a})=0\end{aligned}$$

مشتق نسبت به α:

$$\frac{\partial\ell}{\partial\alpha}=0$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\quad &rln\lambda-\frac{ab(1+n-r)\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}+\sum_{i=1}^{r}\Bigg[lnx_{(i)}+(a-1)\frac{\Gamma'_{\lambda x_{(i)}}(\alpha)}{\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha)}\\ &+(b-1)\left(\frac{a\Gamma'(\alpha)(\Gamma(\alpha))^{a-1}-a\Gamma'_{\lambda x_{(i)}}(\alpha)(\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha))^{a-1}}{(\Gamma(\alpha))^{a}-(\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha))^{a}}\right)\Bigg]\\ &+b(n-r)\left(\frac{a\Gamma'(\alpha)(\Gamma(\alpha))^{a-1}-a\Gamma'_{\lambda x_{(r)}}(\alpha)(\Gamma_{\lambda x_{(r)}}(\alpha))^{a-1}}{(\Gamma(\alpha))^{a}-(\Gamma_{\lambda x_{(r)}}(\alpha))^{a}}\right)\\ &=0\end{aligned}$$

مشتق نسبت به λ:

$$\frac{\partial\ell}{\partial\lambda}=0$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\quad &\frac{r\alpha}{\lambda}+\sum_{i=1}^{r}\Bigg[(-x_{(i)})+\left((a-1)\frac{\Gamma'_{\lambda x_{(i)}}(\alpha)}{\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha)}\right)\\ &-\left((b-1)\frac{a\Gamma'_{\lambda x_{(i)}}(\alpha)(\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha))^{(a-1)}}{(\Gamma(\alpha))^{a}-(\Gamma_{\lambda x_{(i)}}(\alpha))^{a}}\right)\Bigg]\\ &-b(n-r)\frac{a\Gamma'_{\lambda x_{(r)}}(\alpha)(\Gamma_{\lambda x_{(r)}}(\alpha))^{(a-1)}}{(\Gamma(\alpha))^{a}-(\Gamma_{\lambda x_{(r)}}(\alpha))^{a}}=0\end{aligned}$$

با حل معادلات بالا برآورد پارامترهای a,b,α,λ به‌دست می‌آید.

توزیع کوماراسوامی نمایی (KwE)

توزیع کوماراسوامی نمایی با پارامترهای λو a و b که با $KwE(a,b,\lambda)$نمایش داده می‌شود دارای تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی به‌شکل زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} f(x) &= ab\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{a-1}\{1-(1-e^{-\lambda x})^a\}^{b-1} \\ F(x) &= 1-\{1-(1-e^{-\lambda x})^a\}^b \end{aligned}$$

تابع درستنمایی برای KwE به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} L(a,b,\lambda) &= \frac{n!}{(n-r)!}(\prod_{i=1}^{r} ab\lambda e^{-\lambda x_{(i)}}(1-e^{-\lambda x_{(i)}})^{a-1} \\ &\times\{1-(1-e^{-\lambda x_{(i)}})^a\}^{b-1})\{1-(1-e^{-\lambda x_{(r)}})^a\}^{b(n-r)} \end{aligned}$$

که $\lambda, x, a, b > 0$ می‌باشد.

لگاریتم تابع درستنمایی KwE برابر است با

$$\begin{aligned} \ell(a,b,\lambda) &= ln(\frac{n!}{(n-r)!}) + rln(a) + rln(b) + rln(\lambda) \\ &+\sum_{i=1}^{r}\Big[(-\lambda x_{(i)}) + (a-1)ln(1-e^{-\lambda x_{(i)}}) \\ &+(b-1)ln(1-(1-e^{-\lambda x_{(i)}})^a)\Big] \\ &+b(n-r)ln(1-(1-e^{-\lambda x_{(r)}})^a) \end{aligned}$$

مشتق لگ درستنمایی را نسبت به پارامترهای a, b, λ گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم:

مشتق نسبت به a:

$$\frac{\partial \ell}{\partial a} = 0$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\quad & \frac{r}{a} + \sum_{i=1}^{r}\Big[ln(1-e^{-\lambda x_{(i)}}) \\ & -(b-1)\frac{(1-e^{-\lambda x_{(i)}})^a ln(1-e^{-\lambda x_{(i)}})}{1-(1-e^{-\lambda x_{(i)}})^a}\Big] \\ & -b(n-r)\frac{(1-e^{-\lambda x_{(r)}})^a ln(1-e^{-\lambda x_{(r)}})}{1-(1-e^{-\lambda x_{(r)}})^a} \\ & = 0 \end{aligned}$$

همچنین مشتق نسبت به b:

$$\frac{\partial \ell}{\partial b} = 0$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\quad & \frac{r}{b} + \sum_{i=1}^{r}[ln(1-(1-e^{-\lambda x_{(i)}})^a)] \\ & +(n-r)ln(1-(1-e^{-\lambda x_{(r)}})^a) = 0 \end{aligned}$$

مشتق نسبت به λ:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = ۰$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \quad & \frac{r}{\lambda} + \sum_{i=۱}^{r} \Bigg[(-x_{(i)}) + (a-۱) \frac{x_{(i)} e^{-\lambda x_{(i)}}}{۱ - e^{-\lambda x_{(i)}}} \\ & -(b-۱) \left(\frac{a x_{(i)} e^{-\lambda x_{(i)}} (۱ - e^{-\lambda x_{(i)}})^{a-۱}}{۱ - (۱ - e^{-\lambda x_{(i)}})^{a}} \right) \Bigg] \\ & -b(n-r) \left(\frac{a x_{(r)} e^{-\lambda x_{(r)}} (۱ - e^{-\lambda x_{(r)}})^{a-۱}}{۱ - (۱ - e^{-\lambda x_{(r)}})^{a}} \right) = ۰\end{aligned}$$

با حل معادلات بالا برآورد پارامترهای a, b, λ به‌دست می‌آید.

توزیع کوماراسوامی گامبل ($KwGu$)

توزیع کوماراسوامی گامبل با پارامترهای a و b و μ و σ که با $KwGu(a, b, \mu, \sigma)$ نمایش داده می‌شود، دارای تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی داده شده در (۴.۱.۲) می‌باشد. تابع درستنمایی برای $KwGu$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} L(a, b, \mu, \sigma) \; &= \frac{n!}{(n-r)!} \Big(\prod_{i=۱}^{r} \frac{ab}{\sigma} exp\{-\frac{x_{(i)} - \mu}{\sigma} - e^{-\frac{x_{(i)} - \mu}{\sigma}}\} \\ & \times (۱ - exp\{-e^{-\frac{x_{(i)} - \mu}{\sigma}}\})^{a-۱} (۱ - (۱ - exp\{-e^{-\frac{x_{(i)} - \mu}{\sigma}}\})^{a})^{b-۱}\Big) \\ & \times (۱ - (۱ - exp\{-e^{-\frac{x_{(r)} - \mu}{\sigma}}\})^{a})^{b(n-r)} \end{aligned}$$

که $\mu, \sigma, x, a, b > ۰$ می‌باشد.
لگاریتم تابع درستنمایی $KwGu$ برابر است با

$$\begin{aligned} \ell(a, b, \mu, \sigma) =& ln(\frac{n!}{(n-r)!}) + rln(a) + rln(b) - rln(\sigma) \\ & + \sum_{i=۱}^{r} \Bigg[(-\frac{x_{(i)} - \mu}{\sigma} - e^{-\frac{x_{(i)} - \mu}{\sigma}}) + (a-۱) ln(۱ - exp\{-e^{-\frac{x_{(i)} - \mu}{\sigma}}\}) \\ & + (b-۱) ln(۱ - (۱ - exp\{-e^{-\frac{x_{(i)} - \mu}{\sigma}}\})^{a}) \Bigg] \\ & + b(n-r) ln(۱ - (۱ - exp\{-e^{-\frac{x_{(r)} - \mu}{\sigma}}\})^{a}) \end{aligned}$$

مشتق لگ درستنمایی را نسبت به پارامترهای a, b, μ, σ گرفته و مساوی صفر قرار می‌دهیم:
مشتق نسبت به a:

$$\frac{\partial \ell}{\partial a} = ۰$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\quad & \frac{r}{a}+\sum_{i=1}^{r}\Bigg[ln(1-exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\})\\ & -(b-1)\frac{(1-exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\})^{a}ln(1-exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\})}{1-(1-exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\})^{a}}\Bigg]\\ & -b(n-r)\frac{(1-exp\{-e^{-\frac{x_{(r)}-\mu}{\sigma}}\})^{a}ln(1-exp\{-e^{-\frac{x_{(r)}-\mu}{\sigma}}\})}{1-(1-exp\{-e^{-\frac{x_{(r)}-\mu}{\sigma}}\})^{a}}\\ & =0\end{aligned}$$

همچنین مشتق نسبت به b:

$$\frac{\partial\ell}{\partial b}=0$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\quad & \frac{r}{b}+\sum_{i=1}^{r}[ln(1-(1-exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\})^{a})]\\ & +(n-r)ln(1-(1-exp\{-e^{-\frac{x_{(r)}-\mu}{\sigma}}\})^{a})=0\end{aligned}$$

مشتق نسبت به μ:

$$\frac{\partial\ell}{\partial\mu}=0$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\quad & \sum_{i=1}^{r}\Bigg[\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\\ & +(a-1)\frac{-\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\}}{1-(1-exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\})}\\ & -(b-1)\left(\frac{a(1-exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\})^{a-1}\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\}}{1-(1-exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\}))^{a}}\right)\Bigg]\\ & -b(n-r)\left(\frac{a(1-exp\{-e^{-\frac{x_{(r)}-\mu}{\sigma}}\})^{a}\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x_{(r)}-\mu}{\sigma}}exp\{-e^{-\frac{x_{(r)}-\mu}{\sigma}}\}}{1-(1-exp\{-e^{-\frac{x_{(r)}-\mu}{\sigma}}\}))^{a}}\right)\\ & =0\end{aligned}$$

مشتق نسبت به σ:

$$\frac{\partial\ell}{\partial\sigma}=0$$

$$\Longrightarrow \quad -\frac{r}{\sigma}+\sum_{i=۱}^{r}\Bigg[\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma^{۲}}-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma^{۲}}e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}$$
$$+\left((a-۱)\frac{\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma^{۲}}e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\}}{۱-exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\}}\right)$$
$$-\left((b-۱)\frac{a(۱-exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\})^{a-۱}\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma^{۲}}e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\}}{۱-(۱-exp\{-e^{-\frac{x_{(i)}-\mu}{\sigma}}\})^{a}}\right)\Bigg]$$
$$-b(n-r)\frac{a(۱-exp\{-e^{-\frac{x_{(r)}-\mu}{\sigma}}\})^{a-۱}\frac{x_{(r)}-\mu}{\sigma^{۲}}e^{-\frac{x_{(r)}-\mu}{\sigma}}exp\{-e^{-\frac{x_{(r)}-\mu}{\sigma}}\}}{۱-(۱-exp\{-e^{-\frac{x_{(r)}-\mu}{\sigma}}\})^{a}}$$
$$=\circ$$

با حل معادلات بالا برآورد پارامترهای a, b, μ, σ به‌دست می‌آیند.

فصل ۴

شبیه‌سازی

در فصل‌های قبل روش‌های استنباطی مطرح شده را برای توزیع‌های تعمیم‌یافته کوماراسوامی اعمال کردیم. برای ارزیابی و عملکرد این روش‌ها یک مطالعه شبیه‌سازی را انجام داده‌ایم. اجرای شبیه‌سازی با نرم‌افزار R صورت گرفته است. لازم به‌ذکر است که شبیه‌سازی برای دو توزیع کوماراسوامی وایبل و کوماراسوامی گاما می‌باشد.
در بخش اول، مطالعه شبیه‌سازی را برای داده‌های سانسور شده نوع اول و در بخش دوم هم مطالعه شبیه‌سازی را برای داده‌های سانسور شده نوع دوم بررسی نموده‌ایم.

۱.۴ نتایج شبیه‌سازی برای داده‌های سانسور شده نوع یک

برای ارزیابی روش‌های استنباطی مطرح شده این مطالعه شبیه‌سازی را ابتدا برای داده‌های سانسور شده نوع یک انجام می‌دهیم. در این مطالعه، برای توزیع‌های کوماراسوامی وایبل (KwW) و کوماراسوامی گاما ($KwGa$) با پارامترهای a و b و α و λ یک نمونه تصادفی nتایی تولید کرده‌ایم.
برای توزیع کوماراسوامی وایبل، مقادیر واقعی پارامترها را $a=$ ۱/۲ و $b=$ ۱/۰۲ و $\alpha=$ ۱/۰۵ و $\lambda=$ ۱/۰۳ در نظر گرفته و حجم نمونه را برای حالت‌های اول و دوم به ترتیب برابر ۱۴۰و۱۶۰

و برای حالت‌های سوم و چهارم برابر ۱۷۰ قرار داده‌ایم. در سانسور نوع اول، آزمون در لحظه t از قبل تعیین شده پایان می‌پذیرد. پس در حالت اول و دوم t=۲۰ و در حالت سوم و چهارم برابر ۲۵و۳۰ انتخاب شده است. بنابراین چهار حالت مختلف از t و n خواهیم داشت و برای این توزیع تعداد تکرارها برابر ۹۹۰ می‌باشد.
همچنین برای توزیع کوماراسوامی گاما، مقادیر واقعی پارامترها را $a = ۰/۸۱$ و $b = ۱/۱۲$ و $\alpha =۰/۶$ و $\lambda =۱/۲$ می‌باشند.
حجم نمونه در حالت‌های مختلف برابر۱۱۰،۱۰۰و۹۰ و لحظه t را برابر ۱۰، ۱۵ و ۲۰ در نظر گرفته و تعداد تکرارها ۵۰۰ می‌باشد
برآوردها و خلاصه نتایج را توسط مدل‌های پیشنهادی و براساس روش نیوتون رافسون بدست آورده‌ایم. همچنین برای پارامترها در حالت‌های مختلف، برآورد پارامترها، میانگین توان دوم خطا (MSE) و نرخ پوشش را محاسبه کرده‌ایم. نتایج در جدول‌های (۱.۴) و (۲.۴) گزارش شده‌اند. توجه داشته باشید که در تمامی حالات نرخ پوشش نزدیک به ۰/۹۵می‌باشد که درستی توزیع مجانبی را تایید می‌کند.

۱.۱.۴ نتایج شبیه‌سازی

جدول‌های (۱.۴) و (۲.۴) خلاصه‌ای از نتایج برآورد برای a و b و α و λ می‌باشند. برای توزیع کوماراسوامی وایبل، همانطور که در جدول (۱.۴) مشاهده می‌کنید، مقادیر واقعی پارامترها به‌خوبی با خطای نسبتاً کوچکی برآورد شده‌اند. زمانی که t ثابت است، با افزایش حجم نمونه میانگین توان دوم خطاها (MSE) کاهش می‌یابد. همچنین زمانی که حجم نمونه را ثابت در نظر می‌گیریم با افزایش t میانگین توان دوم خطاها کاهش می‌یابد و این انتظار را هم داشتیم زیرا با افزایش tتعداد شکست‌های بیشتری در اتمام آزمایش خواهیم داشت.
برای توزیع کوماراسوامی گاما که نتایج برآوردهای آن در جدول (۲.۴) آمده است، مشاهده می‌کنیم که پارامترها به‌خوبی برآورد شده‌اند و با افزایش حجم نمونه زمانی که t ثابت است، میانگین توان دوم خطاها (MSE) کاهش می‌یابد و برای حالتی که حجم نمونه ثابت و t را افزایش می‌دهیم MSE مانند حالت قبل کاهش می یابد.

جدول ۱.۴: نتایج شبیه‌سازی برای توزیع کوماراسوامی وایبل با استفاده از داده‌های سانسور نوع یک

پارامتر	مقادیر واقعی	برآورد	MSE	نرخ پوشش
حالت اول: n=۱۴۰ ، t=۲۰ ، simnum=۹۹۰				
a	۱/۲	۱/۲۰۶	۰/۰۵۸۶	۰/۹۳۸
b	۱/۰۲	۱/۰۲۱	۰/۰۱۱	۰/۹۸
α	۱/۰۵	۱/۰۴۶	۰/۰۲۲۴	۰/۹۸۸
λ	۱/۰۳	۱/۰۳۳	۰/۰۲۱۵	۱
حالت دوم: n=۱۶۰ ، t=۲۰ ، simnum=۹۹۰				
a	۱/۲	۱/۲۰۶	۰/۰۴۴۴	۰/۹۶۱
b	۱/۰۲	۱/۰۲۱	۰/۰۰۹۶	۰/۹۸۲
α	۱/۰۵	۱/۰۴۷	۰/۰۱۷۳	۰/۹۹۳
λ	۱/۰۳	۱/۰۳۲	۰/۰۱۸۴	۱
حالت سوم: n=۱۷۰ ، t=۲۵ ، simnum=۹۹۰				
a	۱/۲	۱/۲۰۷	۰/۰۵۰۵	۰/۹۵۷
b	۱/۰۲	۱/۰۲۱	۰/۰۱۱۳	۰/۹۸۱
α	۱/۰۵	۱/۰۴۷	۰/۰۲۰۱	۰/۹۸۸
λ	۱/۰۳	۱/۰۳۳	۰/۰۲۱۹	۱
حالت چهارم: n=۱۷۰ ، t=۳۰ ، simnum=۹۹۰				
a	۱/۲	۱/۲۰۷	۰/۰۵۰۳	۰/۹۵۷
b	۱/۰۲	۱/۰۲۱	۰/۰۱۱۲	۰/۹۸۱
α	۱/۰۵	۱/۰۴۷	۰/۰۲	۰/۹۸۸
λ	۱/۰۳	۱/۰۳۳	۰/۰۲۱۸	۱

جدول ۲.۴: نتایج شبیه‌سازی برای توزیع کوماراسوامی گاما با استفاده از داده‌های سانسور نوع یک

پارامتر	مقادیر واقعی	برآورد	MSE	نرخ پوشش
حالت اول: n=۱۰۰ ، t=۱۰ ، simnum=۵۰۰				
a	۰/۸۱	۰/۸۶۸	۰/۲۳۰۹۰	۰/۹۳۷۵
b	۱/۱۲	۱/۱۰۸	۰/۰۶۰۳	۰/۹۵۱
α	۰/۶	۰/۵۹۲	۰/۰۳۹۹۵	۰/۹۹۱
λ	۱/۲	۱/۲۰۱	۰/۱۲۵۱۵	۰/۹۹۴
حالت دوم: n=۱۰۰ ، t=۱۵ ، simnum=۵۰۰				
a	۰/۸۱	۰/۸۶۷	۰/۲۲۷۶۱	۱
b	۱/۱۲	۱/۱۰۹	۰/۰۵۲۵۷	۰/۹۵۳
α	۰/۶	۰/۵۹۲	۰/۰۳۹۳۳	۰/۹۹۴
λ	۱/۲	۱/۱۹۷	۰/۰۹۲۰۳	۰/۹۹۷
حالت سوم: n=۱۱۰ ، t=۲۰ ، simnum=۵۰۰				
a	۰/۸۱	۰/۸۶۷	۰/۲۳۵۱۴	۰/۹۲۸
b	۱/۱۲	۱/۱۱۶	۰/۰۴۲۲۳	۰/۹۷۸
α	۰/۶	۰/۵۹۲	۰/۰۴۰۶۲	۰/۹۹۴
λ	۱/۲	۱/۱۹۵	۰/۰۸۱۴۳	۰/۹۹۷
حالت چهارم: n=۹۰ ، t=۲۰ ، simnum=۵۰۰				
a	۰/۸۱	۰/۸۸	۰/۲۶۷۱	۰/۸۶
b	۱/۱۲	۱/۱۱	۰/۰۶۶۹	۰/۹۵۷
α	۰/۶	۰/۵۸	۰/۰۴۶۹۳	۰/۹۸۸
λ	۱/۲	۱/۱۸	۰/۰۹۹۶	۰/۹۹۴

۲.۴ نتایج شبیه‌سازی برای داده‌های سانسور شده نوع دوم

برای ارزیابی و عملکرد روش‌های استنباطی مطرح شده برای داده‌های سانسور نوع دو، همانند بخش قبل مطالعه شبیه‌سازی را انجام داده‌ایم.
در این مطالعه، برای توزیع کوماراسوامی وایبل مقادیر واقعی پارامترها را ۱/۳۲ $= a$ و ۱/۱۹ $= b$ و ۱/۶ $=\alpha$ و ۱/۱۱ $=\lambda$ قرار داده و حجم نمونه را در حالت‌های مختلف به‌ترتیب برابر ۱۵۵ و ۱۰۰ و ۱۷۰ در نظر گرفته‌ایم. همانطور که قبلاً گفته شده در سانسور نوع دو، آزمایش زمانی که r ـ امین شکست اتفاق می‌افتد، پایان می‌پذیرد و از آن‌جا که $r \leq n$ می‌باشد، ما چهار ترکیب از (n, r) داریم:
$(n, r) =$ (۱۷۰, ۲۹) و (۱۰۰, ۲۹) و (۱۵۵, ۲۶) و (۱۵۵, ۲۳)
تعداد تکرارها برای توزیع کوماراسوامی وایبل در سانسور نوع دوم ۱۰۰۰ می‌باشد.
همچنین برای توزیع کوماراسوامی گاما، مقادیر واقعی پارامترها را ۱/۰۹ $= a$ و ۰/۹۷ $= b$ و ۱/۱۴ $=\alpha$ و ۱/۱۳ $=\lambda$ قرار داده و برای حالات مختلف حجم نمونه را برابر ۵۰ و ۷۰ و ۸۰ و rـ امین شکست را برای این چهار حالت برابر ۴۶ و ۴۰ و ۶۰ در نظر گرفته‌ایم و تعداد تکرارها برای این توزیع ۱۱۰۰ می‌باشد.
در جدول‌های (۳.۴) و (۴.۴) نتایج شبیه‌سازی آمده است و برای مقادیر واقعی پارامترها، برآورد پارامترها، میانگین توان دوم خطا (MSE) و نرخ پوشش را بررسی نموده‌ایم.

۱.۲.۴ نتایج شبیه‌سازی

در توزیع کوماراسوامی وایبل، همانطور که در جدول (۳.۴) مشاهده می‌کنید پارامترها به خوبی با خطای کوچک برآورد شده‌اند. زمانی که r ثابت و حجم نمونه را افزایش می‌دهیم، میانگین توان دوم خطاها (MSE) کاهش یافته و وقتی که حجم نمونه را ثابت در نظر می‌گیریم، با افزایش r نیز میانگین توان دوم خطاها کاهش می‌یابد. زیرا در این توزیع زمانی که تعداد شکست‌ها افزایش می‌یابند، واریانس ماکزیمم درستنمایی پارامترها کاهش خواهد یافت.
برای توزیع کوماراسوامی گاما هم همانطور که می‌بینید، پارامترها خوب برآورد شده و با افزایش حجم نمونه زمانی که r ثابت است میانگین توان دوم خطاها کاهش می‌یابد و زمانی که r را کاهش می‌دهیم زمانی که حجم نمونه ثابت است، میانگین توان دوم خطاها کاهش می‌یابد.

جدول ۳.۴: نتایج شبیه‌سازی برای توزیع کوماراسوامی وایبل با استفاده از داده‌های سانسور نوع دو

پارامتر	مقادیر واقعی	برآورد	MSE	نرخ پوشش
حالت اول: n=۱۵۵ ، r=۲۳ ، simnum=۱۰۰۰				
a	۱/۳۲	۱/۳۰۳	۰/۰۵۸۱۲	۰/۹۳
b	۱/۱۹	۱/۱۹۷	۰/۰۲۴۱۲	۱
α	۱/۶	۱/۶۶	۰/۲۲۱۹۱	۰/۹۳
λ	۱/۱۱	۱/۱۷	۰/۲۲۱۸	۰/۹۸
حالت دوم: n=۱۵۵ ، r=۲۶ ، simnum=۱۰۰۰				
a	۱/۳۲	۱/۳۱	۰/۰۴۵۳۴	۰/۹۵
b	۱/۱۹	۱/۱۹۴	۰/۰۲۰۸۶	۱
α	۱/۶	۱/۶۴	۰/۱۹۴۳	۰/۹۴
λ	۱/۱۱	۱/۱۵	۰/۱۷۳۷	۰/۹۰
حالت سوم: n=۱۰۰ ، r=۲۹ ، simnum=۱۰۰۰				
a	۱/۳۲	۱/۳۲۴	۰/۰۷۱۴	۰/۹۷۷
b	۱/۱۹	۱/۱۸۹	۰/۰۴۹۹	۰/۹۹۸
α	۱/۶	۱/۶۲۹	۰/۱۱۶	۰/۸۹۳
λ	۱/۱۱	۱/۱۳۷	۰/۲۸۸	۰/۹۵
حالت چهارم: n=۱۷۰ ، r=۲۹ ، simnum=۱۰۰۰				
a	۱/۳۲	۱/۳۱۳	۰/۰۳۹۷۹	۰/۹۷
b	۱/۱۹	۱/۱۹۳	۰/۰۱۸۷	۱
α	۱/۶	۱/۶۳	۰/۱۶۷۴	۰/۹۴۴
λ	۱/۱۱	۱/۱۳۹	۰/۱۵۰۵	۰/۹۱۶

جدول ۴.۴: نتایج شبیه‌سازی برای توزیع کوماراسوامی گاما با استفاده از داده‌های سانسور نوع دو

پارامتر	مقادیر واقعی	برآورد	MSE	نرخ پوشش
حالت اول: n=۵۰ ، r=۴۶ ، simnum=۱۱۰۰				
a	۱/۰۹	۱/۰۸	۰/۱۲۴	۰/۹۷
b	۰/۹۷	۰/۹۶	۰/۰۶۹۱	۰/۹۵
α	۱/۱۴	۱/۰۶۶	۰/۱۲۲۷	۰/۷۳
λ	۱/۱۳	۱/۱۱	۰/۰۸۶۸۹	۰/۹۸۹
حالت دوم: n=۷۰ ، r=۴۶ ، simnum=۱۱۰۰				
a	۱/۰۹	۱/۰۷۵	۰/۰۲۲۸	۰/۹۹۴
b	۰/۹۷	۰/۹۷۲	۰/۰۱۳۱۵	۰/۹۹۸
α	۱/۱۴	۱/۰۹۴	۰/۰۷۱۳۴	۰/۹۲۴
λ	۱/۱۳	۱/۱۳۲	۰/۰۱۲۴	۰/۹۹۸
حالت سوم: n=۸۰ ، r=۴۰ ، simnum=۱۱۰۰				
a	۱/۰۹	۱/۰۷۴	۰/۰۲۳۳	۰/۹۹۵
b	۰/۹۷	۰/۹۷۳	۰/۰۱	۱
α	۱/۱۴	۱/۰۹۵	۰/۰۶۷۰۹	۰/۹۵۱
λ	۱/۱۳	۱/۱۳۳	۰/۰۰۹۷	۰/۹۹۸
حالت چهارم: n=۸۰ ، r=۶۰ ، simnum=۱۱۰۰				
a	۱/۰۹	۱/۰۷۵	۰/۰۲۹۴	۰/۹۸۴
b	۰/۹۷	۰/۹۷۰۳	۰/۰۲۲	۰/۹۹۵
α	۱/۱۴	۱/۰۹۳	۰/۰۷۱۶	۰/۹۲۱
λ	۱/۱۳	۱/۱۳۰۵	۰/۰۲۱۳	۰/۹۹۷

برای سایر توزیع‌ها هم مشابه توزیع‌های کوماراسوامی گاما و کوماراسوامی وایبل می‌توانیم این مطالعه شبیه‌سازی را برای سانسورهای نوع یک و دو انجام دهیم.

نتیجه‌گیری و آینده تحقیق

در این پایان‌نامه، به‌دنبال ایده کلاسی از توزیع‌های تعمیم‌یافته بتا [۱۱] و توزیع کوماراسوامی [۲۲]، خانواده‌ای از توزیع‌های تعمیم‌یافته کوماراسوامی را که به وسیله توزیع‌هایی مانند: توزیع نرمال، وایبل، گاما، گامبل و نمایی تعمیم داده شده است، تعریف می‌کنیم و می‌توان برخی خواص ریاضی آن‌ها را در حالت کلی به وسیله توزیع اولیه G بدست آورد. گشتاورها و گشتاورهای احتمال وزنی توزیع تعمیم‌یافته کوماراسوامی را بیان کردیم. درمورد برآوردهای ماکزیمم درستنمایی و استنباط روی پارامترها نیز بحث کردیم. برآورد ماکزیمم درستنمایی، میانگین توان دوم خطاها و نرخ پوشش را برای توزیع‌های تعمیم‌یافته کوماراسوامی با استفاده از داده‌های سانسور شده نوع یک و نوع دوم را به‌دست آوردیم و نتایج را گزارش کردیم و دیدیم که با افزایش حجم نمونه در تمامی حالات و همچنین افزایش شکست‌ها در اکثریت حالات، می‌توانیم خطای برآوردها را کاهش دهیم. علاوه براین به راحتی می‌توانیم ماکزیمم مقدارهای نامحدود و محدود لگ درستنمایی برای ساخت آماره نسبت درستنمایی (LR) برای آزمون مدل‌های تودرتو در توزیع‌های این خانواده یعنی توزیع‌های تعمیم‌یافته کوماراسوامی را محاسبه کنیم. امیدواریم که این تعمیم کاربردی گسترده در آمار پیدا کند. در ادامه تحقیق می‌توانیم بررسی‌های انجام شده را برای توزیع‌های دیگر و سانسورهای متفاوت بر اساس نیاز جامعه گسترش داد.

مراجع

[۱] بهلولی زفره م، (۱۳۸۸)،'' آزمون‌های طول عمر تسریع یافته''، **نشریه دانشجویی آمار، شماره ۱، دوره۷، ص ۳۲.**

[۲] پارسیان ا، (۱۳۸۶)،''مبانی آمار ریاضی''، چاپ اول، مرکز نشر دانشگاه صنعتی اصفهان، ص ۵۰-۳۸.

[۳] سید غراوی ه، (۱۳۹۵)، ''مدل‌های هندسی وایبل برای تحلیل آزمون‌های طول عمر تسریع‌یافته''، دانشگاه صنعتی شاهرود.

[4] Arnold B. C. and Balakrishnan N. and Nagaraja H. N. (2008), "A First course in Order Statistics",John Wiley and sons, New York.

[5] Bain L. J. and Engelhardt M.(1991), "Statistical Analysis of Reliability and Life Testing Models ", Secend Edition, Marcel Dekker, New York.

[6] Balakrishnan N. and Chohen A.C. (1991), "Order statistics and Inferenc: Estimation Methods", Academic Press, San Diego.

[7] Barakat H. M. and Abdelkader Y. H. (2004), "Computing the Moments of Order Statistics from Nonidentical Random Variables ", Stat. Meth. Appl, 13. 15-26.

[8] Chohen A.C. (1991), "Truncated and Censored Samples - Theory and Aplications", Maecel Dekker, New York.

[9] Cordeiro, G., and Castro, M. (2011). "A new family of generalized distributions", Journal of StatisticalCompution and Simulation, 81, 883-898.

[10] David H. A. and Nagaraja H. N. (2003), "Order statistics", Third Edition, John Wiley and sons, Hoboken.

[11] Eugene, N.,Lee, C. and Famoye, F. (2002). "Beta-normal distribution and its applications", Communication in Statistics, Theory Methods, 31. 497–512.

[12] Ganji A., Ponnambalam K., Khalili D. and Karamouz M. (2006), "Grain Yield Reliability Analysis with Crop Water Demand Uncertainty",Stoch. Environ. Res. Risk Assess, 20. 259-277.

[13] Greenwood J. A., Landwehr J.M. Matalas N.C. and Wallis J. R. (1979), "Probability Weighted Moments - Definition and relation to Parameters of Several Distribution Expressable in Invers from ", Water Resour. Res., 15, 1049-1054.

[14] Hosking J.R.M. (1990), "L-moments: Analysis and Estimation of Distribution Using Linear Combinations of Order Statistics", J.R. Stat. Soc. Series B 52. 105-124.

[15] Jones M.C. (2004), " Families of distributions Arising from Distributions of Order Statistics (with Discussion)",13. 1-43.

[16] Jones M.C. (2008), "Kumaraswamy's distribution: A Beta-type Distribution with some Tractability advantages", Stat. Meth., 6. 70-81.

[17] Lawles J. F. (1982), "Statistical Models and Methods for Life Time Data", John Wiley and Sons, Hoboken.

[18] Nadarajah S. and Gupta A.K. (2004), " The Beta Frechet Distribution ", Far East J. Theor Stat , 14. 15-24.

[19] Nadarajah S. and Kotz, S. (2004). "The beta Gumbel distribution", Mathematical Problems in Engineering . 10, 323–332.

[20] Nadarajah S. and Kotz, S. (2006). "The beta exponential distribution", Reliability Engineering and System Safety, S91, 689–697.

[21] Nelson W. (2004), " Applied Life Data Analysis", John Wiley and Sons, New York.

[22] Kumaraswamy, P. (1980). "Generalized probability density function for double-bounded random processes",Journal of Hydrology, 462, 79–88.

[23] R Development Core Team, (2009), " A Language and Environment for Statistical Computing", R Foundation for Statistical Computing, Vienna , Austria.

[24] Rigby R.A. and Stasinopoulos D. M. (2005), "General additive models for location, scale and shape (with discussion)", Appl. Stat., 54.507-554.

[25] Seifi A., ponnambalam K. and Vlach . J. (2000), "Maximization of Manufacturing Yield of Systems with Arbitary Distributions of Component Values", Ann. Oper. Res., 99. 373-383.

[26] Stasinopoulos D. M. and Rigby R.A. (2007), "Generalized additive models for location, scale and shape (GAMLSS) in R ", J. Stat. Soft. ,23. 1-46.

[27] Sunder V. and Subbiah K. (1989), " Application of Double Bounded Probability Density-function for Analysis of Ocean Waves ", Ocean Eng., 16. 193-200.

پیوست آ

کدهای نرم‌افزار R مربوط به شبیه‌سازی

۱. کد مربوط به شبیه‌سازی توزیع کوماراسوامی وایبل با استفاده از داده‌های سانسور شده نوع اول:

```
library(MASS)
library(AdequacyModel)
library(Newdistns)
rm(list=ls())

set.seed(2356)
n = 140
b = 1.02
alpha = 1.05
lambda = 1.03
a = 1.2
censor = 20
```

```
r=1
real.par = c(a, b,alpha, lambda)
simnum = 990

gen.data <- function(n, r,censor,a, b,alpha, lambda){
x <- matrix(rep(1,n), nrow=1, ncol=n)
xcensor <- matrix(rep(1,n), nrow=1, ncol=n)
xsort <- matrix(rep(1,n), nrow=1, ncol=n)
x <- rkumg(n,"weibull", a=1,b=1,shape=alpha)
xcensor <- pmin(x,censor)
r <- sum(as.numeric(x <= censor))
xsort <- sort(xcensor)

return(list(xsort, r))
}

xsort = gen.data(n=n, r=r,censor=censor,a=a, b=b,
alpha=alpha, lambda=lambda)
r = xsort[[2]]
###################################
loglik = function(theta){
ll = c(rep(NA,1))
a = theta[1]
      b = theta[2]
alpha= theta[3]
lambda = theta[4]

  ll =  log(factorial(n)/factorial(n-r)) + r*(log(a)+log(b)+
log(alpha)+(alpha*log(lambda))) + sum((alpha-1)*log(xsort[[1]])) -
sum((lambda*xsort[[1]])^alpha) + (a-1)*
sum(log(1-exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha))) +
(b-1)*sum(log(1-(1-exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha))^a)) +
b*(n-r)*log(1-(1-exp(-(lambda*censor)^alpha))^a)
```

```
return(ll)
}

gradi = function(theta){
c1 = c2 = c3 = c4 = c(rep(NA,1))
a = theta[1]
      b = theta[2]
alpha = theta[3]
lambda = theta[4]

     c1 = r/a + sum(log(1-exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha)) -
(b-1)*sum((1-exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha))^a *
log(1-exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha)))/
(1-(1-exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha))^a)) -
b*(n-r)*(((1-exp(-(lambda*censor)^alpha))^a)*
log(1-exp(-(lambda*censor)^alpha)))/
(1-(1-exp(-(lambda*censor)^alpha))^a)
     c2 = r/b + sum(log(1-(1-exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha))^a)) +
(n-r)*log(1-(1-exp(-(lambda*censor)^alpha))^a)

     c3 = r/alpha + log(lambda) + sum(log(xsort[[1]])) -
sum((lambda*xsort[[1]])^alpha*log(lambda*xsort[[1]]))+
(a-1)*sum(((lambda*xsort[[1]])^alpha*
exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha)*log(lambda*xsort[[1]]))/
(1-exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha))) - (b-1)*
sum((a*(lambda*xsort[[1]])^alpha*exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha)*
log(lambda*xsort[[1]])*(1-exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha))^(a-1))/
(1-(1-exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha))^a)) - b*(n-r)*
(a*(lambda*censor)^alpha*exp(-(lambda*censor)^alpha)*log(lambda*censor)*
(1-exp(-(lambda*censor)^alpha))^(a-1))/
(1-(1-exp(-(lambda*censor)^alpha))^a)
     c4 = alpha*r/lambda - sum(alpha*xsort[[1]]^alpha*lambda^(alpha-1)) +
(a-1)*sum((alpha*xsort[[1]]^alpha*lambda^(alpha-1)*
```

```
exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha))/(1-exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha))) -
(b-1)*sum((a*alpha*xsort[[1]]^alpha*lambda^(alpha-1)*
exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha)-(1-exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha))^(a-1))/
(1-(1-exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha))^a)) - b*(n-r)*
(a*alpha*censor^alpha*lambda^(alpha-1)*exp(-(lambda*censor)^alpha)-
(1-exp(-(lambda*censor)^alpha))^(a-1))/
(1-(1-exp(-(lambda*censor)^alpha))^a)

return(c(c1,c2,c3,c4))
}
fit2 = optim(par = c(1.2,1.02,1.05,1.03), loglik, gr = gradi, method = "BFGS",
hessian =TRUE,control=list(fnscale=-1))
fit2
fit2$par
se.par = sqrt(diag(solve(-fit2$hessian)))
se.par
#### Repeat#################################################################


eval.fit <- function(rep){
thetafinal = matrix(c(1.2,1.02,1.05,1.03), nrow=4,ncol=simnum)
setheta = matrix(c(1.2,1.02,1.05,1.03), nrow=4, ncol=simnum)
for (i in 1:rep){
xsort = gen.data(n=n, r=r,censor=censor,a=a, b=b,alpha=alpha, lambda=lambda)
loglik = function(theta){
ll = c(rep(NA,1))
a = theta[1]
       b = theta[2]
alpha= theta[3]
lambda = theta[4]

   ll =  log(factorial(n)/factorial(n-r)) + r*(log(a)+log(b)+
log(alpha)+(alpha*log(lambda))) +
sum((alpha-1)*log(xsort[[1]])) -
```

```
sum((lambda*xsort[[1]])^alpha) +
(a-1)*sum(log(1-exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha))) +
(b-1)*sum(log(1-(1-exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha))^a)) +
b*(n-r)*log(1-(1-exp(-(lambda*censor)^alpha))^a)



return(ll)
}

gradi = function(theta){
c1 = c2 = c3 = c4 = c(rep(NA,1))
a = theta[1]
      b = theta[2]
alpha = theta[3]
lambda = theta[4]

     c1 = r/a + sum(log(1-exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha)) -
(b-1)*sum((1-exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha))^a *
log(1-exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha)))/
(1-(1-exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha))^a)) -
b*(n-r)*(((1-exp(-(lambda*censor)^alpha))^a)*
log(1-exp(-(lambda*censor)^alpha)))/
(1-(1-exp(-(lambda*censor)^alpha))^a)
     c2 = r/b + sum(log(1-(1-exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha))^a)) +
(n-r)*log(1-(1-exp(-(lambda*censor)^alpha))^a)

     c3 = r/alpha + log(lambda) + sum(log(xsort[[1]])) -
sum((lambda*xsort[[1]])^alpha*log(lambda*xsort[[1]]))+
(a-1)*sum(((lambda*xsort[[1]])^alpha*
exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha)*log(lambda*xsort[[1]]))/
(1-exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha))) - (b-1)*
sum((a*(lambda*xsort[[1]])^alpha*exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha)*
log(lambda*xsort[[1]])*(1-exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha))^(a-1))/
(1-(1-exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha))^a)) - b*(n-r)*
```

```
(a*(lambda*censor)^alpha*exp(-(lambda*censor)^alpha)*
log(lambda*censor)*(1-exp(-(lambda*censor)^alpha))^(a-1))/
(1-(1-exp(-(lambda*censor)^alpha))^a)
     c4 = alpha*r/lambda - sum(alpha*xsort[[1]]^alpha*lambda^(alpha-1)) +
(a-1)*sum((alpha*xsort[[1]]^alpha*lambda^(alpha-1)*
exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha))/
(1-exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha))) - (b-1)*
sum((a*alpha*xsort[[1]]^alpha*lambda^(alpha-1)*
exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha)-(1-exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha))^(a-1))/
(1-(1-exp(-(lambda*xsort[[1]])^alpha))^a)) - b*(n-r)*
(a*alpha*censor^alpha*lambda^(alpha-1)*
exp(-(lambda*censor)^alpha)-(1-exp(-(lambda*censor)^alpha))^(a-1))/
(1-(1-exp(-(lambda*censor)^alpha))^a)

return(c(c1,c2,c3,c4))
}
fit = optim(par =c(1.2,1.02,1.05,1.03), loglik, gr = gradi, method = "BFGS",
hessian = TRUE,control=list(fnscale=-1))
se.par = sqrt(diag(solve(-fit$hessian)))
thetafinal[,i] = fit$par
setheta[,i] = se.par
i=i
cat("i=",i, "\n")
}
  return(list(thetafinal, setheta))
}

res = eval.fit(rep = simnum)

## Estimations, bias, and MSE
estimate = apply(res[[1]], 1, mean)
bias = estimate - real.par
diff = (res[[1]]-real.par)^2
MSE = sqrt(apply(diff, 1, mean))
```

```
SE = apply(res[[2]],1, function(x) mean(na.omit(x)))
## Coverage by asymptotic normal distribution: nominal level is 0.95
CIu = res[[1]]+1.96*res[[2]]
CIl = res[[1]]-1.96*res[[2]]
coveru = CIu - matrix(real.par, nrow=4, ncol = simnum)
coverl = matrix(real.par, nrow=4, ncol = simnum) - CIl
cover.a = sum(as.numeric(coveru[1,] > 0 & coverl[1,] >0),
na.rm = T)/sum(res[[2]][1,]!="NaN")

cover.b = sum(as.numeric(coveru[2,] > 0 & coverl[2,] >0),
na.rm = T)/sum(res[[2]][2,]!="NaN")
cover.alpha = sum(as.numeric(coveru[3,] > 0 & coverl[3,] >0),
na.rm = T)/sum(res[[2]][3,]!="NaN")
cover.lambda = sum(as.numeric(coveru[4,] > 0 & coverl[4,] >0),
na.rm = T)/sum(res[[2]][4,]!="NaN")

cover.a
cover.b
cover.alpha
cover.lambda
estimate
SE
MSE
CIu=CIl=c(NA,NA,NA,NA)
real.par=c(a,b,alpha,lambda)
for(j in 1:4){
CIu[j]=estimate[j]+1.96*SE[j]
CIl[j]=estimate[j]-1.96*SE[j]
}
CIu
CIl
```

۲. کد مربوط به شبیه‌سازی توزیع کوماراسوامی گاما با استفاده از داده‌های سانسور شده نوع اول:

```
library(MASS)
library(AdequacyModel)
library(Newdistns)
library(zipfR)
rm(list=ls())

set.seed(1234)
n = 90
a = .81
b = 1.12
alpha=.6
lambda = 1.2
censor = 20
r=1
real.par = c(a, b,alpha, lambda)
simnum = 500

gen.data <- function(n, r,censor,a, b,alpha, lambda){
x <- matrix(rep(1,1*n), nrow=1, ncol=n)
xcensor <- matrix(rep(1,1*n), nrow=1, ncol=n)
xsort <- matrix(rep(1,1*n), nrow=1, ncol=n)
x <- rkumg(n,"gamma",a=1,b=1,shape=alpha)
xcensor <- pmin(x,censor)
r <- sum(as.numeric(x <= censor))
xsort <- sort(xcensor)

return(list(xsort, r))
}

xsort = gen.data(n=n, r=r,censor=censor,a=a, b=b,
alpha=alpha, lambda=lambda)
```

```
r = xsort[[2]]
############################################################################
loglik = function(theta){
ll = c(rep(NA,1))
a = theta[1]
      b = theta[2]
alpha = theta[3]
lambda = theta[4]

  ll =  log(factorial(n)/factorial(n-r)) +
r*(log(a)+log(b)+alpha*log(lambda))-
n*a*b*log(gamma(alpha))+
     (alpha-1)*sum(log(xsort[[1]])) -
lambda*sum(xsort[[1]])+
(a-1)*sum(log(Igamma(alpha,lambda*xsort[[1]],lower=T)))+
  (b-1)*sum(log((gamma(alpha))^a-
(Igamma(alpha,lambda*xsort[[1]],lower=T))^a))+
  b*(n-r)*log((gamma(alpha))^a-
(Igamma(alpha,lambda*censor,lower=T))^a)

return(ll)
}

gradi = function(theta){
c1 = c2 = c3 = c4 = c(rep(NA,1))
a = theta[1]
      b = theta[2]
alpha=theta[3]
lambda = theta[4]

      c1 = r/a + b*n*log(gamma(alpha)) +
sum(log(Igamma(alpha,lambda*xsort[[1]],lower=T))) +
     (b-1)*sum( ( (gamma(alpha))^a *
log(gamma(alpha)) -
```

```
(Igamma(alpha,lambda*xsort[[1]],lower=T))^a *
log(Igamma(alpha,lambda*xsort[[1]],lower=T))  )/
( (gamma(alpha))^a -
(Igamma(alpha,lambda*xsort[[1]],lower=T))^a))+
b*(n-r)* ( (gamma(alpha))^a * log(gamma(alpha)) -
(Igamma(alpha,lambda*censor,lower=T))^a *
log(Igamma(alpha,lambda*censor,lower=T))  )/
((gamma(alpha))^a - (Igamma(alpha,lambda*censor,lower=T))^a)

c2 = r/b - a*n*log(gamma(alpha)) + sum(log( (gamma(alpha))^a -
     (Igamma(alpha,lambda*xsort[[1]],lower=T))^a  )) +
     (n-r)*log( (gamma(alpha))^a -
(Igamma(alpha,lambda*censor,lower=T))^a  )

c3 = r*log(lambda) - digamma(alpha)*a*b*n +
sum(log(xsort[[1]])) + (b-1)*sum( (a*gamma(alpha)*
digamma(alpha)*(gamma(alpha))^(a-1))/
( (gamma(alpha))^a -
(Igamma(alpha,lambda*xsort[[1]],lower=T))^a ) ) +
b*(n-r)*(a*gamma(alpha)*digamma(alpha)*(gamma(alpha))^(a-1))/
( (gamma(alpha))^a -
(Igamma(alpha,lambda*censor,lower=T))^a )

c4 = (r*alpha)/lambda - sum(xsort[[1]]) + (a-1)*
sum( (xsort[[1]]*(lambda*xsort[[1]])^(alpha-1)*
exp(-(lambda*xsort[[1]])))/
(Igamma(alpha,lambda*xsort[[1]],lower=T)) ) - (b-1)*
sum((a*xsort[[1]]*(lambda*xsort[[1]])^(alpha-1)*
exp(-(lambda*xsort[[1]]))*
(Igamma(alpha,lambda*xsort[[1]],lower=T))^(a-1))/
((gamma(alpha))^a - (Igamma(alpha,lambda*xsort[[1]],lower=T))^a)) -
b*(n-r)*(a*censor*(lambda*censor)^(alpha-1)*
exp(-(lambda*censor))*
(Igamma(alpha,lambda*censor,lower=T))^(a-1))/
```

```
((gamma(alpha))^a - (Igamma(alpha,lambda*censor,lower=T))^a)

return(c(c1,c2,c3,c4))
}
fit = optim(par = c(.81,1.12,.6,1.2), loglik, gr = gradi,
   method = "BFGS", hessian =TRUE,control=list(fnscale=-1))
fit
fit$par
se.par = sqrt(diag(solve(-fit$hessian)))
se.par

#### Repeat####################################################################

eval.fit <- function(rep){
thetafinal = matrix(c(.81,1.12,.6,1.2), nrow=4,ncol=simnum)
setheta = matrix(c(.81,1.12,.6,1.2), nrow=4, ncol=simnum)
for (i in 1:rep){
xsort = gen.data(n=n, r=r,censor=censor,a=a, b=b,alpha=alpha ,lambda=lambda)

loglik = function(theta){
ll = c(rep(NA,1))
a = theta[1]
      b = theta[2]
alpha = theta[3]
lambda = theta[4]

 ll = log(factorial(n)/factorial(n-r)) +
r*(log(a)+log(b)+alpha*log(lambda))-
n*a*b*log(gamma(alpha))+
           (alpha-1)*sum(log(xsort[[1]])) - lambda*sum(xsort[[1]])+
     (a-1)*sum(log(Igamma(alpha,lambda*xsort[[1]],lower=T)))+
        (b-1)*sum(log((gamma(alpha))^a-
     (Igamma(alpha,lambda*xsort[[1]],lower=T))^a))+
            b*(n-r)*log((gamma(alpha))^a-
```

```
(Igamma(alpha,lambda*censor,lower=T))^a)

return(ll)
}

gradi = function(theta){
c1 = c2 = c3 = c4 = c(rep(NA,1))
a = theta[1]
      b = theta[2]
alpha=theta[3]
lambda = theta[4]

      c1 = r/a + b*n*log(gamma(alpha)) +
sum(log(Igamma(alpha,lambda*xsort[[1]],lower=T))) +
     (b-1)*sum( ( (gamma(alpha))^a * log(gamma(alpha)) -
(Igamma(alpha,lambda*xsort[[1]],lower=T))^a *
log(Igamma(alpha,lambda*xsort[[1]],lower=T)))/
( (gamma(alpha))^a -
(Igamma(alpha,lambda*xsort[[1]],lower=T))^a)) +
b*(n-r)* ( (gamma(alpha))^a * log(gamma(alpha)) -
(Igamma(alpha,lambda*censor,lower=T))^a *
log(Igamma(alpha,lambda*censor,lower=T))  )/
((gamma(alpha))^a - (Igamma(alpha,lambda*censor,lower=T))^a)

c2 = r/b - a*n*log(gamma(alpha)) + sum(log( (gamma(alpha))^a -
(Igamma(alpha,lambda*xsort[[1]],lower=T))^a  )) +
(n-r)*log( (gamma(alpha))^a -
(Igamma(alpha,lambda*censor,lower=T))^a  )

c3 = r*log(lambda) - digamma(alpha)*a*b*n +
sum(log(xsort[[1]])) + (b-1)*
sum( (a*gamma(alpha)*digamma(alpha)*(gamma(alpha))^(a-1))/
( (gamma(alpha))^a -
(Igamma(alpha,lambda*xsort[[1]],lower=T))^a ) ) +
```

```
b*(n-r)*(a*gamma(alpha)*digamma(alpha)*(gamma(alpha))^(a-1))/
( (gamma(alpha))^a - (Igamma(alpha,lambda*censor,lower=T))^a )

c4 = (r*alpha)/lambda - sum(xsort[[1]]) + (a-1)*sum( (xsort[[1]]*
(lambda*xsort[[1]])^(alpha-1)*exp(-(lambda*xsort[[1]])))/
(Igamma(alpha,lambda*xsort[[1]],lower=T)) ) - (b-1)*
sum((a*xsort[[1]]*
(lambda*xsort[[1]])^(alpha-1)*exp(-(lambda*xsort[[1]]))*
(Igamma(alpha,lambda*xsort[[1]],lower=T))^(a-1))/
((gamma(alpha))^a - (Igamma(alpha,lambda*xsort[[1]],lower=T))^a)) -
b*(n-r)*(a*censor*(lambda*censor)^(alpha-1)*exp(-(lambda*censor))*
(Igamma(alpha,lambda*censor,lower=T))^(a-1))/
((gamma(alpha))^a - (Igamma(alpha,lambda*censor,lower=T))^a)


return(c(c1,c2,c3,c4))
}


fit = optim(par = c(.81,1.12,.6,1.2), loglik, gr = gradi, method = "BFGS",
hessian = TRUE,control=list(fnscale=-1))
se.par = sqrt(diag(solve(fit$hessian)))
thetafinal[,i] = fit$par
setheta[,i] = se.par
i=i
cat("i=",i, "\n")
}
  return(list(thetafinal, setheta))
}

res = eval.fit(rep = simnum)

## Estimations, bias, and MSE
estimate = apply(res[[1]], 1, mean)
```

```
bias = estimate - real.par
diff = (res[[1]]-real.par)^2
MSE = sqrt(apply(diff, 1, mean))
SE = apply(res[[2]],1, function(x) mean(na.omit(x)))
## Coverage by asymptotic normal distribution: nominal level is 0.95
CIu = res[[1]]+1.96*res[[2]]
CIl = res[[1]]-1.96*res[[2]]
coveru = CIu - matrix(real.par, nrow=4, ncol = simnum)
coverl = matrix(real.par, nrow=4, ncol = simnum) - CIl
cover.a = sum(as.numeric(coveru[1,] > 0 & coverl[1,] >0),
na.rm = T)/sum(res[[2]][1,]!="NaN")
cover.b = sum(as.numeric(coveru[2,] > 0 & coverl[2,] >0),
na.rm = T)/sum(res[[2]][2,]!="NaN")
cover.alpha = sum(as.numeric(coveru[3,] > 0 & coverl[3,] >0),
na.rm = T)/sum(res[[2]][3,]!="NaN")

cover.lambda = sum(as.numeric(coveru[4,] > 0 & coverl[4,] >0),
na.rm = T)/sum(res[[2]][4,]!="NaN")

cover.a
cover.b
cover.alpha
cover.lambda
estimate
SE
MSE
CIu=CIl=c(NA,NA,NA,NA)
real.par=c(a,b,alpha,lambda)
for(j in 1:4){
CIu[j]=estimate[j]+1.96*SE[j]
CIl[j]=estimate[j]-1.96*SE[j]
}
CIu
CIl
```

۳. کد مربوط به شبیه‌سازی توزیع کوماراسوامی وایبل با استفاده از داده‌های سانسور شده نوع دو:

```
library(MASS)
library(AdequacyModel)
library(Newdistns)
rm(list=ls())
set.seed(2345)
n = 155
b = 1.19
alpha = 1.6
lambda = 1.11
a = 1.32
r = 26
real.par = c(a,b,alpha, lambda)
simnum = 1000

gen.data <- function(n, r,a, b,alpha, lambda){
x <- matrix(rep(1,n), nrow=1, ncol=n)
xcensor <- matrix(rep(1,r), nrow=1, ncol=r)

x <- rkumg(n,"weibull" ,shape=alpha)
xcensor <- sort(x)[1:r]

return(xcensor)
}

xcensor = gen.data(n=n, r=r,a=a, b=b,
alpha=alpha, lambda=lambda)
xcensor[r]
######################################################################
loglik = function(theta){
ll = c(rep(NA,1))
a = theta[1]
```

```
      b = theta[2]
alpha = theta[3]
lambda = theta[4]


 ll = log(factorial(n)/factorial(n-r)) + r*(log(a)+log(b)+
log(alpha)+(alpha*log(lambda))) +
sum((alpha-1)*log(xcensor)) -
sum((lambda*xcensor)^alpha) + (a-1)*
sum(log(1-exp(-(lambda*xcensor)^alpha))) +
(b-1)*sum(log(1-(1-exp(-(lambda*xcensor)^alpha))^a)) +
b*(n-r)*log(1-(1-exp(-(lambda*xcensor[r])^alpha))^a)



return(ll)
}
####

gradi = function(theta){
c1 = c2 = c3 = c4 = c(rep(NA,1))
a = theta[1]
      b = theta[2]
alpha = theta[3]
lambda = theta[4]

 c1 = r/a + sum(log(1-exp(-(lambda*xcensor)^alpha)) -
(b-1)*sum((1-exp(-(lambda*xcensor)^alpha))^a *
 log(1-exp(-(lambda*xcensor)^alpha)))/
(1-(1-exp(-(lambda*xcensor)^alpha))^a)) -
 b*(n-r)*(((1-exp(-(lambda*xcensor[r])^alpha))^a)*
 log(1-exp(-(lambda*xcensor[r])^alpha)))/
(1-(1-exp(-(lambda*xcensor[r])^alpha))^a)
  c2 = r/b + sum(log(1-(1-exp(-(lambda*xcensor)^alpha))^a)) +
```

```
(n-r)*log(1-(1-exp(-(lambda*xcensor[r])^alpha))^a)
  c3 = r/alpha + log(lambda) + sum(log(xcensor) -
 sum((lambda*xcensor)^alpha*log(lambda*xcensor))+
(a-1)*sum(((lambda*xcensor)^alpha*exp(-(lambda*xcensor)^alpha)*
 log(lambda*xcensor))/(1-exp(-(lambda*xcensor)^alpha))) -
         (b-1)*sum((a*(lambda*xcensor)^alpha*exp(-(lambda*xcensor)^alpha)*
log(lambda*xcensor)*(1-exp(-(lambda*xcensor)^alpha))^(a-1))/
(1-(1-exp(-(lambda*xcensor)^alpha))^a)) - b*(n-r)*
((a*(lambda*xcensor[r])^alpha*exp(-(lambda*xcensor[r])^alpha)*
log(lambda*(xcensor[r]))*(1-exp(-(lambda*(xcensor[r]))^alpha))^(a-1))/
(1 - (1 - exp(-(lambda*(xcensor[r]))^alpha))^a)))
  c4 = ((alpha*r)/lambda) - sum(alpha*((xcensor)^alpha)*lambda^(alpha-1)) +
(a-1)*sum((alpha*((xcensor)^alpha)*lambda^(alpha-1)*
exp(-(lambda*(xcensor))^alpha))/
(1-exp(-(lambda*(xcensor))^alpha))) - (b-1)*
sum((a*alpha*((xcensor)^alpha)*lambda^(alpha-1)*
exp(-(lambda*(xcensor))^alpha)-
(1-exp(-(lambda*(xcensor))^alpha))^(a-1))/
(1-(1-exp(-(lambda*(xcensor))^alpha))^a)) - b*(n-r)*
(a*alpha*((xcensor[r])^alpha)*lambda^(alpha-1)*
exp(-(lambda*(xcensor[r]))^alpha)-
(1-exp(-(lambda*(xcensor[r]))^alpha))^(a-1))/
(1-(1-exp(-(lambda*(xcensor[r]))^alpha))^a)


return(c(c1,c2,c3,c4))
}


fit = optim(par = c(1.32,1.19,1.6,1.11), loglik, gr = gradi, method = "BFGS",
hessian = TRUE,control=list(fnscale=-1))
fit
fit$par
se.par = sqrt(diag(solve(-fit$hessian)))
```

```
se.par

########################
###Repeat####



eval.fit <- function(rep){
thetafinal = matrix(c(1.32,1.19,1.6,1.11), nrow=4,ncol=simnum)
setheta = matrix(c(1.32,1.19,1.6,1.11), nrow=4, ncol=simnum)
for (i in 1:rep){
xcensor = gen.data(n=n, r=r,a=a, b=b,alpha=alpha, lambda=lambda)
loglik = function(theta){
ll = c(rep(NA,1))
a = theta[1]
      b = theta[2]
alpha = theta[3]
lambda = theta[4]
 ll =   log(factorial(n)/factorial(n-r)) + r*(log(a)+log(b)+
    log(alpha)+(alpha*log(lambda))) + sum((alpha-1)*log(xcensor)) -
    sum((lambda*xcensor)^alpha) + (a-1)*
    sum(log(1-exp(-(lambda*xcensor)^alpha))) +
    (b-1)*sum(log(1-(1-exp(-(lambda*xcensor)^alpha))^a)) +
    b*(n-r)*log(1-(1-exp(-(lambda*xcensor[r])^alpha))^a)


return(ll)
}
####

gradi = function(theta){
c1 = c2 = c3 = c4 = c(rep(NA,1))
a = theta[1]
      b = theta[2]
alpha = theta[3]
```

```
lambda = theta[4]

c1 = r/a + sum(log(1-exp(-(lambda*xcensor)^alpha)) -
(b-1)*sum((1-exp(-(lambda*xcensor)^alpha))^a *
log(1-exp(-(lambda*xcensor)^alpha)))/
(1-(1-exp(-(lambda*xcensor)^alpha))^a)) -
b*(n-r)*(((1-exp(-(lambda*xcensor[r])^alpha))^a)*
log(1-exp(-(lambda*xcensor[r])^alpha)))/
(1-(1-exp(-(lambda*xcensor[r])^alpha))^a)
     c2 = r/b + sum(log(1-(1-exp(-(lambda*xcensor)^alpha))^a)) +
(n-r)*log(1-(1-exp(-(lambda*xcensor[r])^alpha))^a)
     c3 = r/alpha + log(lambda) + sum(log(xcensor) -
sum((lambda*xcensor)^alpha*log(lambda*xcensor))+
(a-1)*sum(((lambda*xcensor)^alpha*
exp(-(lambda*xcensor)^alpha)*log(lambda*xcensor))/
(1-exp(-(lambda*xcensor)^alpha))) - (b-1)*
sum((a*(lambda*xcensor)^alpha*exp(-(lambda*xcensor)^alpha)*
log(lambda*xcensor)*(1-exp(-(lambda*xcensor)^alpha))^(a-1))/
(1-(1-exp(-(lambda*xcensor)^alpha))^a)) - b*(n-r)*
((a*(lambda*xcensor[r])^alpha*exp(-(lambda*xcensor[r])^alpha)*
log(lambda*(xcensor[r]))*(1-exp(-(lambda*(xcensor[r]))^alpha))^(a-1))/
(1 - (1 - exp(-(lambda*(xcensor[r]))^alpha))^a)))
c4 = ((alpha*r)/lambda) - sum(alpha*((xcensor)^alpha)*lambda^(alpha-1)) +
(a-1)*sum((alpha*((xcensor)^alpha)*lambda^(alpha-1)*
exp(-(lambda*(xcensor))^alpha))/
(1-exp(-(lambda*(xcensor))^alpha))) - (b-1)*
sum((a*alpha*((xcensor)^alpha)*lambda^(alpha-1)*
exp(-(lambda*(xcensor))^alpha)-
(1-exp(-(lambda*(xcensor))^alpha))^(a-1))/
(1-(1-exp(-(lambda*(xcensor))^alpha))^a)) - b*(n-r)*
(a*alpha*((xcensor[r])^alpha)*lambda^(alpha-1)*
exp(-(lambda*(xcensor[r]))^alpha)-
(1-exp(-(lambda*(xcensor[r]))^alpha))^(a-1))/
(1-(1-exp(-(lambda*(xcensor[r]))^alpha))^a)
```

```
return(c(c1,c2,c3,c4))
}


fit = optim(par = c(1.32,1.19,1.6,1.11), loglik, gr = gradi, method = "BFGS",
 hessian = TRUE,control=list(fnscale=-1))
se.par = sqrt(diag(solve(fit$hessian)))
thetafinal[,i] = fit$par
setheta[,i] = se.par
i=i
cat("i=",i, "\n")
}
  return(list(thetafinal, setheta))
}

res = eval.fit(rep = simnum)

## Estimations, bias, and MSE
estimate = apply(res[[1]], 1, mean)
bias = estimate - real.par
diff = (res[[1]]-real.par)^2
MSE = sqrt(apply(diff, 1, mean))
SE = apply(res[[2]],1, function(x) mean(na.omit(x)))

## Coverage by asymptotic normal distribution: nominal level is 0.95
CIu = res[[1]]+1.96*res[[2]]
CIl = res[[1]]-1.96*res[[2]]
coveru = CIu - matrix(real.par, nrow=4, ncol = simnum)
coverl = matrix(real.par, nrow=4, ncol = simnum) - CIl
cover.a = sum(as.numeric(coveru[1,] > 0 & coverl[1,] >0),
na.rm = T)/sum(res[[2]][1,]!="NaN")
cover.b = sum(as.numeric(coveru[2,] > 0 & coverl[2,] >0),
na.rm = T)/sum(res[[2]][2,]!="NaN")
```

```
cover.alpha = sum(as.numeric(coveru[3,] > 0 & coverl[3,] >0),
na.rm = T)/sum(res[[2]][3,]!="NaN")
cover.lambda = sum(as.numeric(coveru[4,] > 0 & coverl[4,] >0),
na.rm = T)/sum(res[[2]][4,]!="NaN")

cover.a
cover.b
cover.alpha
cover.lambda
estimate
SE
MSE
CIu=CIl=c(NA,NA,NA,NA)
real.par=c(a,b,alpha,lambda)
for(j in 1:4){
CIu[j]=estimate[j]+1.96*SE[j]
CIl[j]=estimate[j]-1.96*SE[j]
}
CIu
CIl
```

۴. کد مربوط به شبیه‌سازی توزیع کوماراسوامی گاما با استفاده از داده‌های سانسور شده نوع دو:

```
library(MASS)
library(AdequacyModel)
library(Newdistns)
library(zipfR)
rm(list=ls())
set.seed(10)
n = 50
a = 1.09
b = .97
alpha = 1.14
lambda = 1.13
```

```
r = 46
real.par = c(a,b,alpha, lambda)
simnum = 1100

gen.data <- function(n, r,a, b,alpha, lambda){
x <- matrix(rep(1,n), nrow=1, ncol=n)
xcensor <- matrix(rep(1,r), nrow=1, ncol=r)

x <- rkumg(n,"gamma",a=1,b=1,shape=alpha)

xcensor <- sort(x)[1:r]

return(xcensor)
}

xcensor = gen.data(n=n, r=r,a=a, b=b,
alpha=alpha, lambda=lambda)
xcensor[r]
#############################################
loglik = function(theta){
ll = c(rep(NA,1))
a = theta[1]
      b = theta[2]
alpha = theta[3]
lambda = theta[4]

 ll = log(factorial(n)/factorial(n-r)) + r*(log(a)+log(b)+
alpha*log(lambda))-n*a*b*log(gamma(alpha))+
     (alpha-1)*sum(log(xcensor)) - lambda*sum(xcensor)+
(a-1)*sum(log(Igamma(alpha,lambda*xcensor,lower=T)))+
(b-1)*sum(log((gamma(alpha))^a-
(Igamma(alpha,lambda*xcensor,lower=T))^a))+
      b*(n-r)*log((gamma(alpha))^a-
(Igamma(alpha,lambda*xcensor[r],lower=T))^a)
```

```
 return(ll)
}
####

gradi = function(theta){
c1 = c2 = c3 = c4 = c(rep(NA,1))
a = theta[1]
      b = theta[2]
alpha = theta[3]
lambda = theta[4]


c1 = r/a + b*n*log(gamma(alpha)) +
sum(log(Igamma(alpha,lambda*xcensor,lower=T))) +
    (b-1)*sum( ( (gamma(alpha))^a * log(gamma(alpha)) -
    (Igamma(alpha,lambda*xcensor,lower=T))^a *
log(Igamma(alpha,lambda*xcensor,lower=T))  )/
( (gamma(alpha))^a - (Igamma(alpha,lambda*xcensor,lower=T))^a)) +
b*(n-r)* ( (gamma(alpha))^a * log(gamma(alpha)) -
(Igamma(alpha,lambda*xcensor[r],lower=T))^a *
log(Igamma(alpha,lambda*xcensor[r],lower=T))  )/
((gamma(alpha))^a -(Igamma(alpha,lambda*xcensor[r],lower=T))^a)

c2 = r/b - a*n*log(gamma(alpha)) + sum(log( (gamma(alpha))^a -
(Igamma(alpha,lambda*xcensor,lower=T))^a  )) +
(n-r)*log( (gamma(alpha))^a -
(Igamma(alpha,lambda*xcensor[r],lower=T))^a  )

c3 = r*log(lambda) - digamma(alpha)*a*b*n +
     sum(log(xcensor)) + (b-1)*sum( (a*gamma(alpha)*digamma(alpha)*
(gamma(alpha))^(a-1))/
( (gamma(alpha))^a - (Igamma(alpha,lambda*xcensor,lower=T))^a ) ) +
b*(n-r)*(a*gamma(alpha)*digamma(alpha)*(gamma(alpha))^(a-1))/
((gamma(alpha))^a - (Igamma(alpha,lambda*xcensor[r],lower=T))^a )
```

```
c4 = (r*alpha)/lambda - sum(xcensor) + (a-1)*
sum((xcensor*(lambda*xcensor)^(alpha-1)*exp(-(lambda*xcensor)))/
(Igamma(alpha,lambda*xcensor,lower=T)) ) - (b-1)*
sum((a*xcensor*(lambda*xcensor)^(alpha-1)*exp(-(lambda*xcensor))*
(Igamma(alpha,lambda*xcensor,lower=T))^(a-1))/
((gamma(alpha))^a - (Igamma(alpha,lambda*xcensor,lower=T))^a)) -
b*(n-r)*(a*xcensor[r]*(lambda*xcensor[r])^(alpha-1)*
exp(-(lambda*xcensor[r]))*
(Igamma(alpha,lambda*xcensor[r],lower=T))^(a-1))/
((gamma(alpha))^a - (Igamma(alpha,lambda*xcensor[r],lower=T))^a)
return(c(c1,c2,c3,c4))
}


fit = optim(par = c(1.08,.97,.9,1.03), loglik, gr = gradi, method = "BFGS",
 hessian = TRUE,control=list(fnscale=-1))
fit = optim(par = c(1.09,.92,1.14,1.13), loglik, gr = gradi, method = "BFGS",
 hessian = TRUE,control=list(fnscale=-1))

fit
fit$par
se.par = sqrt(diag(solve(-fit$hessian)))
se.par

########################
###Repeat####


eval.fit <- function(rep){
thetafinal = matrix(c(1.09,.97,1.14,1.13), nrow=4,ncol=simnum)
setheta = matrix(c(1.09,.97,1.14,1.13), nrow=4, ncol=simnum)
for (i in 1:rep){
xcensor = gen.data(n=n, r=r,a=a, b=b,alpha=alpha, lambda=lambda)
```

```
loglik = function(theta){
ll = c(rep(NA,1))
a = theta[1]
      b = theta[2]
alpha = theta[3]
lambda = theta[4]


 ll = log(factorial(n)/factorial(n-r)) +
r*(log(a)+log(b)+alpha*log(lambda))-n*a*b*log(gamma(alpha))+
     (alpha-1)*sum(log(xcensor)) - lambda*sum(xcensor)+
(a-1)*sum(log(Igamma(alpha,lambda*xcensor,lower=T)))+
(b-1)*sum(log((gamma(alpha))^a-
(Igamma(alpha,lambda*xcensor,lower=T))^a))+
b*(n-r)*log((gamma(alpha))^a-
(Igamma(alpha,lambda*xcensor[r],lower=T))^a)

return(ll)
}
####

gradi = function(theta){
c1 = c2 = c3 = c4 = c(rep(NA,1))
a = theta[1]
      b = theta[2]
alpha = theta[3]
lambda = theta[4]


c1 = r/a + b*n*log(gamma(alpha)) +
sum(log(Igamma(alpha,lambda*xcensor,lower=T))) +
     (b-1)*sum( ( (gamma(alpha))^a * log(gamma(alpha)) -
(Igamma(alpha,lambda*xcensor,lower=T))^a *
log(Igamma(alpha,lambda*xcensor,lower=T))  )/
```

```
( (gamma(alpha))^a -
(Igamma(alpha,lambda*xcensor,lower=T))^a )) +
b*(n-r)* ( (gamma(alpha))^a * log(gamma(alpha)) -
(Igamma(alpha,lambda*xcensor[r],lower=T))^a *
log(Igamma(alpha,lambda*xcensor[r],lower=T))  )/
((gamma(alpha))^a - (Igamma(alpha,lambda*xcensor[r],lower=T))^a)

c2 = r/b - a*n*log(gamma(alpha)) + sum(log( (gamma(alpha))^a -
(Igamma(alpha,lambda*xcensor,lower=T))^a  )) +
(n-r)*log( (gamma(alpha))^a -
(Igamma(alpha,lambda*xcensor[r],lower=T))^a  )

c3 = r*log(lambda) - digamma(alpha)*a*b*n +
sum(log(xcensor)) + (b-1)*sum((a*gamma(alpha)*digamma(alpha)*
(gamma(alpha))^(a-1))/
( (gamma(alpha))^a - (Igamma(alpha,lambda*xcensor,lower=T))^a)) +
b*(n-r)*(a*gamma(alpha)*digamma(alpha)*(gamma(alpha))^(a-1))/
( (gamma(alpha))^a - (Igamma(alpha,lambda*xcensor[r],lower=T))^a )

c4 = (r*alpha)/lambda - sum(xcensor) + (a-1)*
sum( (xcensor*(lambda*xcensor)^(alpha-1)*exp(-(lambda*xcensor)))/
(Igamma(alpha,lambda*xcensor,lower=T)) ) - (b-1)*
sum((a*xcensor*(lambda*xcensor)^(alpha-1)*
exp(-(lambda*xcensor))*
(Igamma(alpha,lambda*xcensor,lower=T))^(a-1))/
((gamma(alpha))^a - (Igamma(alpha,lambda*xcensor,lower=T))^a)) -
b*(n-r)*(a*xcensor[r]*(lambda*xcensor[r])^(alpha-1)*
exp(-(lambda*xcensor[r]))*
(Igamma(alpha,lambda*xcensor[r],lower=T))^(a-1))/
((gamma(alpha))^a - (Igamma(alpha,lambda*xcensor[r],lower=T))^a)


return(c(c1,c2,c3,c4))
}
```

```
fit = optim(par = c(1.09,.97,1.14,1.13), loglik, gr = gradi, method = "BFGS",
hessian = TRUE,control=list(fnscale=-1))
se.par = sqrt(diag(solve(fit$hessian)))
thetafinal[,i] = fit$par
setheta[,i] = se.par
i=i
cat("i=",i, "\n")
}
  return(list(thetafinal, setheta))
}

res = eval.fit(rep = simnum)

## Estimations, bias, and MSE
estimate = apply(res[[1]], 1, mean)
bias = estimate - real.par
diff = (res[[1]]-real.par)^2
MSE = sqrt(apply(diff, 1, mean))
SE = apply(res[[2]],1, function(x) mean(na.omit(x)))

## Coverage by asymptotic normal distribution: nominal level is 0.95
CIu = res[[1]]+1.96*res[[2]]
CIl = res[[1]]-1.96*res[[2]]
coveru = CIu - matrix(real.par, nrow=4, ncol = simnum)
coverl = matrix(real.par, nrow=4, ncol = simnum) - CIl
cover.a = sum(as.numeric(coveru[1,] > 0 & coverl[1,] >0),
na.rm = T)/sum(res[[2]][1,]!="NaN")
cover.b = sum(as.numeric(coveru[2,] > 0 & coverl[2,] >0),
na.rm = T)/sum(res[[2]][2,]!="NaN")
cover.alpha = sum(as.numeric(coveru[3,] > 0 & coverl[3,] >0),
na.rm = T)/sum(res[[2]][3,]!="NaN")
cover.lambda = sum(as.numeric(coveru[4,] > 0 & coverl[4,] >0),
```

```
na.rm = T)/sum(res[[2]][4,]!="NaN")

cover.a
cover.b
cover.alpha
cover.lambda
estimate
SE
MSE

CIu=CIl=c(NA,NA,NA,NA)
real.par=c(a,b,alpha,lambda)
for(j in 1:4){
CIu[j]=estimate[j]+1.96*SE[j]
CIl[j]=estimate[j]-1.96*SE[j]
}
CIu
CIl
```

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

آزمون فرض .... hypothesis testing
آماره ترتیبی .... order statistic
احتمال .... Probability
اشکال آمیخته .... mixture forms
اقتصاد سنجی .... econometrics
انتگرال‌گیری عددی .... numerical integration
انحراف .... deviation
انعطاف‌پذیری .... flexibility
برآورد ماکزیمم درستنمایی .... maximum likelihood estimate
پارامتر شکل .... shape parameter
پارامتر مقیاس .... scale parameter
پارامتر مکان .... location parameter
پوشش .... covering
تابع خطر .... hazard function
تبادل .... interchanging
توزیع اسمی .... name distribution
توزیع گاما .... gamma distribution
توزیع وایبل .... weibull distribution
جاسازی کردن، درج کردن .... insert
چولگی .... skewness
خلاصه‌سازی .... summarization
داده‌های سانسور شده .... censored data
زیر پایه، خط پایه .... baseline
شرایط نظم .... regularity conditions
عبارت تحلیلی .... analytic expression
فرآیند .... process

قابلیت اطمینان .... reliability

گشتاور .... moment

متناهی .... finite

محاسباتی .... computational

مستقل .... independent

مقادیر .... quantities

موزون .... weighted

نامتناهی .... infinite

نرخ .... rate

نظریه آماری .... statistical theory

یکسان .... identical

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

عبارت تحلیلی .... analytic expression
زیر پایه، خط پایه .... baseline
داده‌های سانسور شده .... censored data
محاسباتی .... computational
پوشش .... covering
انحراف .... deviation
اقتصاد سنجی .... econometrics
متناهی .... finite
انعطاف‌پذیری .... flexibility
توزیع گاما .... gamma distribution
تابع خطر .... hazard function
آزمون فرض .... hypothesis testing
یکسان .... identical
نامتناهی .... infinite
مستقل .... independent
درج کردن، جاسازی کردن .... insert
تبادل .... interchanging
پارامتر مکان .... location parameter
برآورد ماکزیمم درستنمایی .... maximum likelihood estimate
اشکال آمیخته .... mixture forms
گشتاور .... moment
توزیع اسمی .... name distribution
انتگرال‌گیری عددی .... numerical integration
آماره ترتیبی .... order statistic
احتمال .... Probability
فرآیند .... process

مقادیر .... quantities

نرخ .... rate

قابلیت اطمینان .... reliability

شرایط نظم .... regularity conditions

پارامتر مقیاس .... scale parameter

پارامتر شکل .... shape parameter

چولگی .... skewness

نظریه آماری .... statistical theory

خلاصه‌سازی .... summarization

توزیع وایبل .... weibull distribution

موزون .... weighted

Abstract

Kumaraswamy presented a probability density property for randomized two-side processes. For the first time, based on this distribution, a new family of generalized distributions was created. Some special distributions, such as the Kumaraswamy Gamma, Kumaraswamy Normal, Kumaraswamy Weibull, etc, are discussed in the new family and we have obtained the moments and order statistics of these distributions.
we have used The Maximum Likelihood Method for Estimating Generalized Distributions of Kumaraswamy and a simulation study for Type 1 censored data and Type II censored data, and for each censor, we estimate the parameters, the mean of second error, the approximate confidence interval, and the coverage rate. We also have examined parameters performance with pre-fixed values.

The Keywords: kumaraswamy generalized distribution, Type I censor, Type II censor, Maximum Likelihood Estimation, Gamma Distribution, Weibull Distribution and confidence interval.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Mathematical Statistics

Kumaraswamy based distributions and their generalization

By: Amir Aliniaei

Supervisor

Ahmad Nezakati Reza Zadeh

Advisor

Hossein Baghishani

January 2018