

حاشا  
الرحمن الرحيم  
الرحمن الرحيم





دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی ، گرایش مالی

پایان نامه کارشناسی ارشد

# قیمت گذاری قراردادهای صندوق سرمایه گذاری پویا و حفاظت شده به روش سوئیچینگ

نگارنده: مریم لطفی

استادان راهنما

دکتر الهام دسترنج  
دکتر مجتبی میرلوحی

بهمن ۱۳۹۶



شماره:  
تاریخ:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم مریم لطفی با شماره دانشجویی ۹۴۱۵۵۰۴ رشته ریاضی گرایش ریاضی مالی تحت عنوان: قیمت گذاری قراردادهای صندوق سرمایه گذاری پویا و حفاظت شده به روش سوئیچینگ که در تاریخ ۱۳۹۶/۱۱/۱۱ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه: عالی)  / مردود   
نوع تحقیق: نظری  / عملی

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر الهام دسترنج	استادیار	
۲- استاد راهنمای دوم	دکتر سیدمجتبی میرلوحی	استادیار	
۳- استاد مشاور	-----	-----	-----
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر حجت احسنی طهرانی	دانشیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر احمد معتمدنژاد	دانشیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر مجتبی غیائی	استادیار	



نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابوالحسن

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).



# تقدیم به پدر و مادرم

این پایان نامه را تقدیم می کنم به پدر و مادری که مهر آسمانی شان آرام بخش آلام زمینی است و تقدیم به تمام آزادمردانی که عقل و منطق را پیشه‌ی خود نموده، نیک می اندیشند، نیک می گویند و نیک عمل می کنند.

آنان که در تعریف نمی گنجند

رفتنی اند و به اثر ماندگارند

امروز دیروزی اند و همیشه فردایی اند...

## سپاس‌گزاری...

از اساتید گرانقدر و گرامی‌ام، سرکار خانم الهام دسترنج و جناب آقای مجتبی میرلوحی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و همواره راهنما و راهگشای نگارنده در اتمام و اکمال پایان‌نامه بودند و زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را برعهده داشتند؛ کمال سپاس‌گزاری و قدر دانی را دارم.

از اساتید فرزانه و شایسته جناب آقای دکتر غیاثی و جناب آقای دکتر زیره که زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شدند بی نهایت سپاس‌گزارم.

مریم لطفی  
بهمن ۱۳۹۶



## تعهد نامه

اینجانب **مریم لطفی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **قیمت گذاری قراردادهای صندوق سرمایه گذاری پویا و حفاظت شده به روش سوئیچینگ**، تحت راهنمایی **الهام دسترنج** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

**مریم لطفی**

**بهمن ۱۳۹۶**

### مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.



## چکیده

این پایان نامه به ارزیابی ارزش قراردادهای صندوق سرمایه گذاری پویا و حفاظت شده تحت رژیم-سوئیچینگ مارکوفی می پردازد. نوسانات در طول زمان با توجه به زنجیره مارکوف زمان-پیوسته تغییر می کنند.

با استفاده از فرآیند انتشار رژیم-سوئیچینگ ارزش اولیه قراردادهای صندوق سرمایه گذاری پویا و حفاظت شده توصیف می شود. راه حل صریح تبدیل لاپلاس ارزش قراردادهای صندوق سرمایه گذاری پویا و حفاظت شده با استفاده از روش مارتینگل به دست می آید. با توجه به پیچیده بودن سوئیچینگ مارکوف و پرش به دست آوردن فرمول برای قراردادهای صندوق تقریباً غیر ممکن است. در این پایان نامه، الگوریتم عددی یا توجه به روش های تقریبی زنجیره مارکوف طراحی شده است و نتایج عددی ارزش قراردادهای صندوق سرمایه گذاری پویا و حفاظت شده ارائه شده است.

کلمات کلیدی:

قراردادهای صندوق سرمایه گذاری مشترک، زنجیره مارکوف، روش سوئیچینگ، روش مارتینگل



## لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. مقاله اول
۲. مقاله دوم
۳. مقاله سوم



# فهرست مطالب

ف	فهرست تصاویر
ق	فهرست جداول
۱	۱ تعاریف و مفاهیم
۱	۱.۱ مقدمه
۱	۲.۱ مفاهیم نظریه اندازه و احتمال
۲	۳.۱ مفاهیم فرآیندهای تصادفی
۵	۴.۱ فرآیند لوی
۶	۵.۱ فرآیند پواسون
۷	۶.۱ حرکت براونی
۹	۷.۱ انتگرال ایتو
۱۱	۱.۷.۱ فرمول ایتو
۱۲	۲.۷.۱ قضیه فاینمن-کاک
۱۳	۸.۱ قضیه گیرسانوف یک بعدی
۱۳	۹.۱ قضیه گیرسانوف $d$ -بعدی
۱۴	۱۰.۱ مفاهیم ریاضی مالی
۱۴	۱.۱۰.۱ سبد سهام
۱۷	۲.۱۰.۱ اختیار معامله
۱۹	۳.۱۰.۱ انواع معامله‌گران
۲۱	۲ قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت مدل پرش-انتشار
۲۱	۱.۲ مقدمه
۲۲	۲.۲ قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت مدل پرش-انتشار
۲۷	۳ مدل رژیم سوئیچینگ
۲۷	۱.۳ پیشینه تحقیق

۲۹	.....	مقدمه	۲.۳
۲۹	.....	زنجیره مارکوف زمان پیوسته	۳.۳
۳۰	.....	رژیم سوئیچینگ	۴.۳
۳۳		<b>۴ صندوق سرمایه گذاری پویا و حفاظت شده</b>	
۳۳	.....	مقدمه	۱.۴
۳۵	.....	مدل انتشار سوئیچینگ	۲.۴
۴۵	.....	مدل انتشار پرش رژیم- سوئیچینگ	۳.۴
۴۶	.....	۱.۳.۴ فرمول بندی و محاسبه عددی	
۵۰	.....	مثال های عددی	۴.۴
۵۲	.....	نتیجه گیری	۵.۴
۵۵		<b>مراجع</b>	
۵۹		واژه نامه فارسی به انگلیسی	
۶۱		واژه نامه انگلیسی به فارسی	



# فهرست تصاویر

۶	.....	نمودار حاصل از فرآیند لوی	۱.۱
۷	.....	نمودار حاصل از تابع چگالی احتمال توزیع پواسون	۲.۱
۸	.....	نمودار حاصل از فرآیند پواسون مرکب با پرش $N(0, 1)$	۳.۱
۹	.....	نمودار حاصل از حرکت براونی استاندارد	۴.۱
۹	.....	نمودار حاصل از حرکت براونی استاندارد در حالت سه بعدی	۵.۱
۱۹	.....	نمودار حاصل از خرید یا فروش اختیار معامله اروپایی	۶.۱
۵۱	.....	ارزش $DFP$ در برابر ارزش سرمایه و زمان	۱.۴
۵۱	.....	ارزش $DFP$ در برابر حداقل مقدار	۲.۴
۵۲	.....	ارزش $DFP$ در برابر ارزش سرمایه	۳.۴



# فهرست جداول



# فصل ۱

## تعاریف و مفاهیم

### ۱.۱ مقدمه

در این فصل به معرفی مفاهیم و تعاریف مورد نیاز در فصل‌های آتی می‌پردازیم، تعاریف و مفاهیم این فصل از مراجع [۱]، [۳]، [۶]، [۹]، [۲۷] و [۳۲] جمع‌آوری شده است.

### ۲.۱ مفاهیم نظریه اندازه و احتمال

**تعریف ۱.۲.۱.** اگر  $\Omega$  مجموعه‌ی ناتهی و  $\mathcal{F}$  دسته‌ی ناتهی از زیرمجموعه‌های  $\Omega$  باشد،  $\mathcal{F}$  را یک  $\sigma$ -میدان گوییم هرگاه

$$\Omega \in \mathcal{F}.$$

۲. اگر  $C \in \mathcal{F}$  آن‌گاه  $C^c \in \mathcal{F}$ .

۳. اگر دنباله‌ی نامتناهی از مجموعه‌ها مانند  $C_1, C_2, \dots$  متعلق به  $\mathcal{F}$  باشند، آن‌گاه

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \in \mathcal{F},$$

تحت اجتماع‌های شمارش پذیر نامتناهی بسته باشد.

**تعریف ۲.۲.۱.** فرض کنیم  $\Omega = \mathbb{R}$  و  $\mathcal{F}$  دسته‌ی تمام بازه‌ها باشد،  $\sigma$ -میدان تولید شده توسط  $\mathcal{F}$  را  $\sigma$ -میدان بورل گوییم و با  $\mathcal{B}$  نشان می‌دهیم.

**تعریف ۳.۲.۱.** فرض کنید  $\mathcal{F}$  یک  $\sigma$ -میدان از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی ناتهی  $\Omega$  باشد، تابع  $(\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty])$  را اندازه می‌گوییم هرگاه دارای خواص زیر باشد

۱. برای هر مجموعه  $A \in \mathcal{F}$  داشته باشیم  $0 \leq \mu(A) \leq \infty$
۲. اگر دنباله‌ی از اعضای دو به دو جدا از هم  $\mathcal{F}$  باشند به طوری که  $\bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{F}$  باشد آن‌گاه داشته باشیم

$$\mu\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) = \sum_{i \geq 1} \mu(A_i),$$

که این خاصیت را خاصیت  $\sigma$ -جمع‌پذیری برای  $\mu$  می‌گوییم.

**تعریف ۴.۲.۱.** فرض کنید  $\Omega$  یک مجموعه‌ی ناتهی و  $\mathcal{F}$  یک  $\sigma$ -میدان از زیرمجموعه‌های آن باشد، زوج مرتب  $(\Omega, \mathcal{F})$  را فضای اندازه‌پذیر می‌گویند. اگر اندازه‌ی روی  $\mathcal{F}$  باشد آن‌گاه سه‌تایی  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  را فضای اندازه می‌نامیم.

**تعریف ۵.۲.۱.** فرض کنید  $\mathcal{F}$  یک  $\sigma$ -میدان از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی ناتهی  $\Omega$  باشد، تابع  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  را اندازه احتمال می‌نامیم هرگاه

۱.  $P(\Omega) = 1$

۲. اگر دنباله‌ی از اعضای دو به دو جدا از هم در  $\mathcal{F}$  باشند به طوری که  $\bigcup_{n \geq 1} C_n \in \mathcal{F}$  آن‌گاه داشته باشیم

$$P\left(\bigcup_{n \geq 1} C_n\right) = \sum_{n \geq 1} P(C_n).$$

سه‌تایی  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  را فضای احتمال می‌نامیم.

**تعریف ۶.۲.۱.** اندازه  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$  را روی فضای اندازه‌پذیر  $(X, \mathcal{F})$ ،  $\sigma$ -متناهی می‌گوییم هرگاه دنباله‌ی از اعضای دو به دو جدا از هم  $\mathcal{F}$  وجود داشته باشد به طوری که

$$X = \bigcup_{i \geq 1} A_i,$$

و برای هر  $i \geq 1$  داشته باشیم  $\mu(A_i) < \infty$ .

## ۳.۱ مفاهیم فرآیندهای تصادفی

**تعریف ۱.۳.۱.** هر تابع اندازه‌پذیر حقیقی از فضای احتمال  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  به فضای اندازه‌پذیر  $(R, \mathcal{B})$  که  $\mathcal{B}$   $\sigma$ -میدان، را یک متغیر تصادفی می‌گوییم. معمولاً برای نشان دادن متغیرهای تصادفی از حروف بزرگ لاتین مثل  $X, Y, Z, \dots$  استفاده می‌کنیم. برای هر متغیر تصادفی  $X$  می‌توان تابع  $\mathcal{F}_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  به صورت

$$\mathcal{F}_X(x) = P(X \leq x) = P\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\},$$

تعریف کرد که **توزیع متغیر تصادفی** نامیده می‌شود. برای توزیع  $F_X$  خواص زیر برقرار است

$$1. \quad \forall a, b \in \mathcal{R}$$

$$F_X(b) - F_X(a) = P(a < X < b),$$

۲. تابع  $F_X$  غیر نزولی است و در هر نقطه از سمت راست پیوسته است،

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0.$$

**تعریف ۲.۳.۱.** اگر  $(X, \mathcal{A})$  یک فضای اندازه‌پذیر و  $\mu_1$  و  $\mu_2$  دو اندازه روی این فضا باشند گوییم این دو اندازه **مطلقاً پیوسته** هستند (با نماد  $\mu_1 \ll \mu_2$  نمایش داده می‌شود) برای هر  $A \in \mathcal{A}$  داشته باشیم

$$\mu_2(A) = 0 \implies \mu_1(A) = 0.$$

**تعریف ۳.۳.۱.** فرض کنیم  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  یک فضای احتمال و  $\tilde{P}$  اندازه احتمال معادل  $P$  باشد. اگر  $Z$  متغیر تصادفی مثبتی باشد که

$$\tilde{P}(A) = \int_A Z dP.$$

آنگاه  $Z$  را **مشتق رادون-نیکودیم**<sup>۱</sup> نسبت به  $P$  می‌نامیم و می‌نویسیم

$$Z = \frac{d\tilde{P}}{dP}.$$

**تعریف ۴.۳.۱.** اگر  $A$  مجموعه دلخواه از  $\sigma$ -میدان  $\mathcal{A}$  باشد، **تابع مشخصه**ی مجموعه‌ی  $A$  را با  $\chi_A$  نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

**تعریف ۵.۳.۱.** فرض کنید  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  فضای احتمال و  $Y$  متغیر تصادفی نامنفی باشد هم‌چنین فرض کنید  $\mathcal{D}$  یک زیر  $\sigma$ -میدان از  $\mathcal{F}$  باشد در این صورت **امیدشرطی** تابعی است  $\mathcal{D}$  اندازه‌پذیر و حقیقی روی  $\Omega$  و با  $E(Y|\mathcal{D})$  نشان می‌دهیم. داریم

$$\forall D \in \mathcal{D} \quad \int_D E(Y|\mathcal{D}) dP = \int_D Y dP,$$

**خواص امیدشرطی**

$$1. \quad \text{اگر } X \geq 0$$

$$E(X|\mathcal{D}) \geq 0, \quad a.s.$$

<sup>۱</sup>Radon-Nikodym

۲.

$$E(X + Y|D) = E(X|D) + E(Y|D), \quad a.s.$$

۳.  $\forall a \in \mathcal{R}$

$$E(aX|D) = aE(X|D), \quad a.s.$$

۴. اگر  $D = \{\emptyset, \Omega\}$  آن گاه

$$E(X|D) = E(X), \quad a.s.$$

۵. اگر  $D_1 \subset D_2$  آن گاه

$$E(E(X|D_2)|D_1) = E(X|D_1), \quad a.s.$$

۶.

$$E(E(X|D)) = E(X) \quad a.s.$$

**تعریف ۶.۳.۱.** متغیر تصادفی  $z$  دارای **توزیع نرمال**<sup>۲</sup> است اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد

$$\phi(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2},$$

توزیع نرمال با  $\mu = 0$  و  $\sigma = 1$  را **توزیع نرمال استاندارد** می نامند.

**تعریف ۷.۳.۱.** متغیر تصادفی  $X$  **توزیع لگ-نرمال**<sup>۳</sup> دارد، هرگاه  $Y = \ln(X)$  توزیع نرمال داشته باشد، بدیهی است که توزیع لگ نرمال فقط مقادیر حقیقی مثبت را می گیرند.

**تعریف ۸.۳.۱.** متغیر تصادفی  $X$  دارای **توزیع نمایی**<sup>۴</sup> با  $\lambda > 0$  است، هرگاه تابع توزیع آن به صورت زیر باشد

$$F_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

**تعریف ۹.۳.۱.** برای متغیر تصادفی  $X$  **تابع مولد گشتاور**<sup>۵</sup> به صورت زیر تعریف می شود

$$M_X(t) = E[e^{tX}], \quad t \in \mathcal{R}.$$

**تعریف ۱۰.۳.۱.** هر خانواده (شمارا یا ناشمارا) از متغیرهای تصادفی، یک **فرآیند تصادفی** نامیده می شود. خانواده  $\{X_i\}_{i \in I}$  از متغیرهای تصادفی روی فضای احتمال  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ،

$$X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (\mathcal{R}, \mathcal{B}),$$

رافرآیندهای تصادفی می گوئیم که مجموعه اندیس گذار  $(I)$  شمارا یا ناشمارا باشد.

<sup>۲</sup>Normal distribution

<sup>۳</sup>Log-Normal distribution

<sup>۴</sup>Exponential distribution

<sup>۵</sup>Moment generating function



**تعریف ۱۱.۳.۱.** فرآیند تصادفی  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  را نسبت به فیلتر  $\{\mathcal{F}_t\}_t$  سازگار گوییم هرگاه برای هر  $X_t \in \mathcal{F}_t, t \geq 0$  به عبارتی متغیر تصادفی  $X_t, \mathcal{F}_t$  -اندازه پذیر باشد.

**تعریف ۱۲.۳.۱.** فرآیند تصادفی  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$  را نسبت به فیلتر  $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ ، **مارتینگال**<sup>۶</sup> گوییم هرگاه

۱.  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$  نسبت به فیلتر  $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$  سازگار باشد یا  $\mathcal{F}_n$  اندازه پذیر باشد،

۲. برای هر  $n, E(|X_n|) < \infty$  یعنی  $X_n$  انتگرال پذیر باشد،

۳. برای هر  $n \geq 1$  داشته باشیم

$$E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n. \quad a.s.$$

**تعریف ۱۳.۳.۱.** تابع  $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$  را نسبت به فیلتر  $\{\mathcal{F}_t\}$  **زمان توقف** گوییم هرگاه برای هر  $t \geq 0$  داشته باشیم

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

**تعریف ۱۴.۳.۱.** فرض می‌کنیم  $\{X_t\}$  یک فرآیند تصادفی باشد.  $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$  نسبت به فیلتر  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  زمان توقف باشد. فرآیند متوقف شده را با نماد  $X^{\tau_n}(\omega)$  نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\forall \omega \in \Omega \quad X^{\tau_n}(\omega) = X_{\tau_n \wedge t}(\omega)$$

## ۴.۱ فرآیند لوی

در نظریه احتمال، فرآیند لوی<sup>۷</sup> یکی از مهمترین رده خانواده فرآیندهای تصادفی که در سال ۱۹۳۰ توسط ریاضیدان فرانسوی پل لوی مورد مطالعه قرار گرفته است. در دهه‌های اخیر نقش پررنگی را در دنیای ریاضیات مالی ایفا نموده است. طی دو دهه گذشته فرآیندهای لوی به ویژه در ارزیابی و قیمت گذاری اختیار معامله بسیار مورد توجه قرار گرفتند. فرآیند لوی، فرآیند تصادفی بانموهای مستقل ثابت است، این فرآیند حرکت یک نقطه که جابه‌جایی‌های پی‌درپی آن به صورت تصادفی و مستقل هستند. از نظر آماری در زمان‌های مختلف با طول برابر یکسان هستند، در نتیجه یک فرآیند لوی ممکن است به عنوان گام تصادفی زمان پیوسته آنالوگ بررسی شود.

شناخته شده‌ترین نمونه فرآیند لوی، فرآیند براونی و فرآیند پواسون هستند.

**تعریف ۱.۴.۱.** فرآیند تصادفی  $X_t$  **فرآیند لوی** گفته می‌شود هرگاه داشته باشیم

<sup>۶</sup> Martingale

<sup>۷</sup> Levy process

$$۱. P(X_0 = 0) = 1$$

۲. نموهای  $X_t$  مستقل هستند یعنی اگر  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$  آن گاه

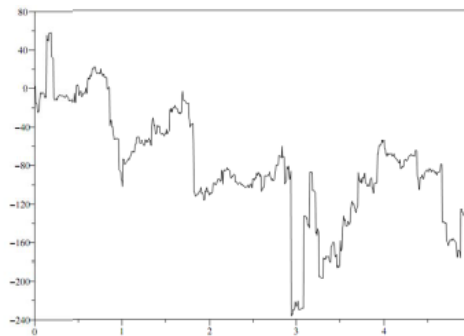
$$X_{t_1} - X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}},$$

مستقل هستند،

۳.  $X_t$  فرآیندی ایستا است یعنی  $X_t - X_s$  با  $X_{t-s}$  هم توزیع است،

۴. فرآیند در احتمال پیوسته باشد یعنی

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim P(|X_t| > \varepsilon) = 0.$$



شکل ۱.۱: نمودار حاصل از فرآیند لوی

## ۵.۱ فرآیند پواسون

**تعریف ۱.۵.۱.** فرآیند تصادفی  $\{N(t); t \geq 0\}$  را یک فرآیند شمارشی گوئیم، هرگاه  $N(t)$  تعداد کل پیشامدهایی باشد که تا زمان  $t$  رخ داده‌اند و در شرایط زیر صدق کند

۱.  $N(t)$  مقادیر صحیح نامنفی را اختیار می‌کند،

۲. اگر  $s \leq t$  آنگاه  $N(s) \leq N(t)$ ،

۳. برای  $s < t$ ،  $N(t) - N(s)$  برابر تعداد پیشامدهایی است که در فاصله زمانی  $(s, t]$  رخ می‌دهند.

**تعریف ۲.۵.۱.** به فرآیند شمارشگر  $\{N(t); t \geq 0\}$  فرآیند پواسون<sup>۸</sup> بانرخ  $\lambda > 0$  گفته می‌شود اگر داشته باشیم

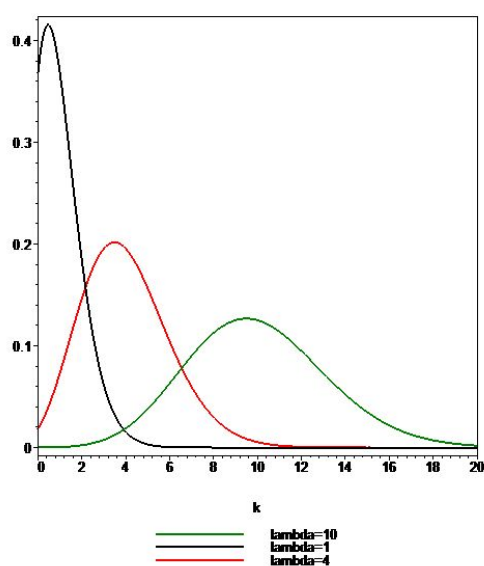
<sup>۸</sup>Poisson process

$$N(0) = 0.$$

۲. فرآیند  $N_t$  دارای نمونه‌های مستقل باشد یعنی برای هر عدد صحیح  $k > 0$  و مقادیر زمانی  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$  متغیرهای تصادفی  $N(t_1) - N(t_0), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_k) - N(t_{k-1})$  دو به دو از هم مستقل باشند،

۳. تعداد رویدادهای اتفاق افتاده در بازه زمانی به طول  $\tau$  به صورت پواسون توزیع شده است و میانگین  $\lambda\tau$  دارد و در واقع برای تمام  $t$  ها

$$Pr\{N(t + \tau) - N(t) = k\} = \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$



شکل ۲.۱: نمودار حاصل از تابع چگالی احتمال توزیع پواسون

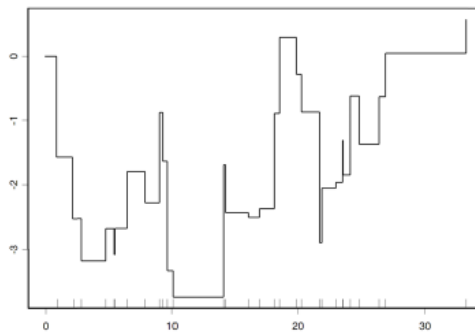
تعریف ۳.۵.۱. فرآیند پواسون مرکب با شدت تصادفی  $\lambda > 0$  و اندازه پرش  $Y$  از فرآیند تصادفی  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$X_t = \sum_{i=1}^N Y_i,$$

که اندازه پرش‌های  $Y_i$  با توزیع یکسان و مستقل و  $N_t$  فرآیند پواسون هستند.

## ۶.۱ حرکت براونی

حرکت براونی از اساسی‌ترین فرآیندهای تصادفی و سنگ بنای نظریه‌ی احتمال مدرن، آنالیز تصادفی و معادلات دیفرانسیل است.



شکل ۳.۱: نمودار حاصل از فرآیند پواسون مرکب با پرش  $N(\circ, 1)$

در سال ۱۸۲۷ رابرت براون (گیاه‌شناس) هنگامی که توسط میکروسکوپ به گرده‌های گیاه معلق در آب نگاه می‌کرد، متوجه حرکت ذرات در آب شد ولی نتوانست توجیهی برای آن پیدا کند، اتم و مولکول بسیار قبل از آن شناخته شده بودند، اما این آلبرت اینشتین بود که چند دهه بعد در مقاله‌ای که در ۱۹۰۵ منتشر کرد توضیح داد که حرکتی که براون مشاهده کرده در نتیجه برخورد مولکول‌های آب با گرده بوده است، جهت نیروی حاصل از برخورد مولکول‌ها مرتباً تغییر می‌کند و ذره در زمان‌های مختلف ممکن است از یک سمت بیشتر مورد اصابت قرار گیرد تا از سمت دیگر که هر دو موجب حرکت اتفاقی ذرات می‌شود، این پدیده به افتخار رابرت براون حرکت براونی نامگذاری شده است. حرکت براونی یک فرآیند تصادفی است که مسیره‌های پیوسته دارد و مشتق آن در هیچ نقطه‌ای وجود ندارد.

**تعریف ۱.۶.۱.** فرآیند تصادفی  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  را **حرکت براونی استاندارد**<sup>۹</sup> گوییم هرگاه

$$1. \quad W_0 = 0.$$

۲. برای  $0 \leq t \leq s$ ، متغیر تصادفی  $W_s - W_t$  دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس  $s - t$  باشد،

۳. متغیرهای تصادفی  $W_{t_1}, \dots, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$  برای  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$  مستقل و هم‌توزیع باشند،

حرکت براونی استاندارد را فرآیند وینر<sup>۱۰</sup> نیز می‌گوییم.

**قضیه ۱.۶.۱.** اگر  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  یک حرکت براونی و  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  فیلتر استاندارد فرآیند براونی باشد آن‌گاه داریم

$$1. \quad \text{برای هر } t, s \text{ که } t \leq s, E(W_t W_s) = t,$$

$$2. \quad \{W_t\}_{t \geq 0} \text{ یک مارتینگل است،}$$

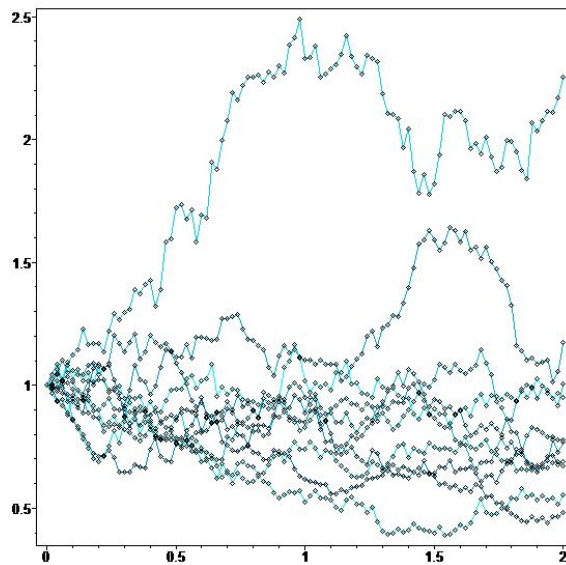
$$3. \quad \{W_t^2 - t\} \text{ مارتینگل است.}$$

<sup>۹</sup> Standard Brownian motion

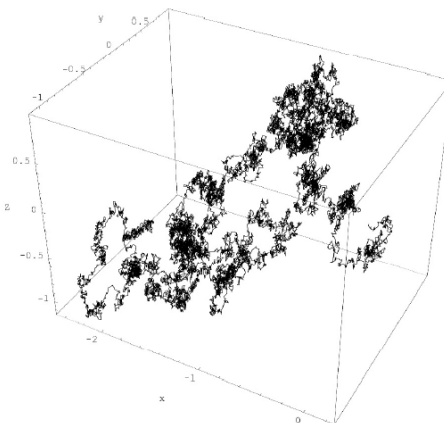
<sup>۱۰</sup> Wiener process

برهان. به [۳۲] رجوع شود.

□



شکل ۴.۱: نمودار حاصل از حرکت براونی استاندارد



شکل ۵.۱: نمودار حاصل از حرکت براونی استاندارد در حالت سه بعدی

## ۷.۱ انتگرال ایتو

شایان ذکر است که انتگرال ایتو یک متغیر تصادفی است اما انتگرال ریمان یک مقدار حقیقی را نتیجه می‌دهد، قصد داریم معادله حرکت ذره‌ای که در سطح آب جوی حرکت می‌کند را نسبت به زمان به دست آوریم. از آنجا که مسیر حرکت ذره مورد نظر به دلیل ضرباتی که وزش باد و مولکول‌های آب به آن وارد می‌کنند تصادفی است، معادله آن به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)(\text{نوفه}), \quad (1.1)$$

که در آن  $\sigma$  و  $b$  توابع حقیقی داده شده روی  $\Omega \times (0, \infty)$  هستند و نوفه فرآیند تصادفی مانند  $W_t$  است که در سه شرط زیر صدق می‌کند.

- برای هر  $t_1, t_2 \in [0, T]$  که  $t_1 \neq t_2$ ،  $W_{t_1}$  و  $W_{t_2}$  مستقل از هم باشند.
- توزیع توام متغیرهای تصادفی  $W_{t_1+t}, \dots, W_{t_n+t}$ ،  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq T$  به  $t$  بستگی نداشته باشد.
- برای هر  $t \in (0, T]$ ،  $E(W_t) = 0$ .

فرآیندی که دارای مسیرهای پیوسته است و به ویژگی‌های بالا نزدیک است فرآیند براونی است. لذا می‌توان نوشت

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t,$$

از عبارت بالا داریم

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, w)ds + \int_0^t \sigma(s, w)dW_s.$$

فرآیند تصادفی  $X_t$  جواب معادله اخیر است. بنابراین برای پیدا کردن فرآیند  $\{X_t\}_t$  لازم است به محاسبه انتگرال‌های به فرم زیر بپردازیم

$$\int_s^t f(s, w)dW_s(w),$$

**گام اول:** فرض کنید که  $f$  تابعی ابتدایی<sup>۱۱</sup>  $\mathbb{R} \rightarrow \Omega \times (0, \infty) : \phi$  باشد. یعنی

$$\phi(t, w) = X(w)\chi_{(a,b]}(t), \quad a, b \in [0, \infty),$$

در این صورت تعریف می‌کنیم

$$\int_a^t \phi(s, w)dW_s = \int_a^t X(w)\chi_{[a,b]}dW_s(w) = X(w)[W_{b \wedge t}(w) - W_{a \wedge t}(w)],$$

که در آن برای هر  $x, y \in \mathbb{R}$ ،  $x \wedge y = \min\{x, y\}$ .

**گام دوم:** فرض کنید  $f$  تابعی ساده<sup>۱۲</sup> روی  $\Omega \times (0, \infty)$  باشد. یعنی

$$f = \sum_{j=0}^n \phi_j,$$

که  $\phi_i$ ها توابع ابتدایی هستند. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$\int_a^t f dW_s = \sum_{j=0}^n \int_a^t \phi_j dW_s. \quad (2.1)$$

<sup>۱۱</sup>Elementary function

<sup>۱۲</sup>Simple function

**تعریف ۱.۷.۱.** رده‌ی  $\mathcal{P}_T$  از توابع  $f(t, w)$  روی مجموعه‌ی  $\Omega \times [0, \infty)$ ، رده‌ای از توابع با ویژگی‌های زیر است

- تابع  $f(t, w) \rightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{F}$  - اندازه‌پذیر است،
- به ازای هر  $t$ ، تابع  $f(t, \cdot)$  -  $\mathcal{F}_t$  - اندازه‌پذیر باشد،
- برای هر  $T \geq 0$ ،  $E \left[ \int_0^T f^2(s, w) ds \right] < \infty$ .

**لم ۱.۷.۱.** (لم ایزومتري ایتو) اگر تابع  $\phi(t, w)$  کران‌دار و ابتدایی باشد، آن‌گاه

$$E \left[ \left( \int_0^T \phi(s, w) dW_s(w) \right)^2 \right] = E \left[ \int_0^T \phi^2(s, w) ds \right].$$

برهان. به [۲۷] رجوع کنید. □

**لم ۲.۷.۱.** اگر  $f \in \mathcal{P}_T$ ، آن‌گاه دنباله‌ی  $\{\phi_n\}$  از توابع ساده وجود دارد به طوری که

$$E \left[ \int_0^T |f(s) - \phi_n(s)|^2 ds \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

برهان. به [۲۷] رجوع کنید. □

اکنون می‌توان انتگرال ایتو را برای رده توابع  $\mathcal{P}_T$  تعریف کرد

$$\int_0^T f(s, w) dW_s(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \phi_n dW_s(w),$$

که در آن همگرایی مفروض در میانگین دوم است یعنی

$$E \left[ \int_0^T |f(s) - \phi_n(s)|^2 ds \right] \rightarrow 0.$$

## ۱.۷.۱ فرمول ایتو

**تعریف ۲.۷.۱.** فرض کنید  $\{W_t\}_{t \geq 0}$  حرکت براونی استاندارد روی  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  باشد، انتگرال تصادفی یک بعدی، درحقیقت فرآیند تصادفی  $\{X_t\}_t$  به فرم زیر است

$$X_t(w) = X_0(w) + \int_0^t u(s, w) ds + \int_0^t v(s, w) dW_s,$$

که در آن  $u$  و  $v$  دو تابع حقیقی روی  $\mathbb{R} \rightarrow \Omega \times [0, \infty)$  هستند.

**قضیه ۱.۷.۱ (فرمول ۱- بعدی ایتو) اگر**

$$dX_t = u dt + v dW_t, \quad Y_t = g(t, X_t)$$

آن‌گاه

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) (dX_t)^2,$$

که در این جا  $dW_t^2 = dt$  و  $dt dt = dt dW_t = dW_t dt = 0$ .

**قضیه ۲.۷.۱.** (فرمول چند بعدی ایتو) فرض کنید  $dX_t = u dt + v dW_t$  یک انتگرال  $n$ -بعدی و  $g: [0, \infty) \times R^n \rightarrow R^1$  یک نگاشت  $C^2$  باشد، آن گاه  $Y(t, w) = g(t, X_t)$  یک انتگرال تصادفی است و داریم

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(t, X_t)dX_i + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t)dX_i dX_j,$$

که در اینجا  $dW_i dW_j = \rho_{ij} dt$  و  $dtdt = dtdW_i = dW_i dt = 0$ .

**تعریف ۳.۷.۱.** یکی از بلوک های اصلی مدل سازی قیمت سهام، فرآیند براونی هندسی<sup>۱۳</sup> است معادله یادشده درحقیقت تعمیم طبیعی معادله دیفرانسیل معمولی است که به فرم زیر می باشد

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \quad (3.1)$$

در واقع می توان فرآیند براونی هندسی را معادله دیفرانسیل معمولی با ضرایب تصادفی دانست که جواب آن به فرم زیر است

$$X_t = x_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}. \quad (4.1)$$

**تعریف ۴.۷.۱.** فرم کلی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به صورت زیر است

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^n(x)) = 0$$

فرض می کنیم  $u(x, y, z)$  یک تابع از متغیرهای مستقل  $X, Y, Z$  در این صورت مشتق نسبی  $u$  نسبت به  $x$  در نقطه  $(X, Y, Z)$  برابر است با

$$D_x u = \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h, y, z) - u(x, y, z)}{h}$$

**تعریف ۵.۷.۱.** تبدیل لاپلاس تابع  $f(t)$  در مجموعه ای اعداد حقیقی برای  $t \geq 0$  تابع  $F(s)$  است که به صورت زیر تعریف می شود

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

$s$  عددی مختلط به صورت  $s = \sigma + i\omega$  که  $\sigma$  و  $\omega$  حقیقی هستند.

## ۲.۷.۱ قضیه فاینمن-کاک

**قضیه ۳.۷.۱ (فاینمن-کاک<sup>۱۴</sup>).** فرض کنیم  $F$  جوابی برای مسئله ای مقدار مرزی زیر باشد

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + \mu(t, x) \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) = 0, \\ F(T, x) = \phi(x). \end{cases}$$

<sup>۱۳</sup> Geometric Brownian motion

<sup>۱۴</sup> Feynman-Kac



همچنین فرض کنیم که فرایند

$$\sigma(s, X_s) \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s),$$

متعلق به  $\mathcal{L}^2$  است که در آن  $X$  جواب معادله دیفرانسیل تصادفی زیر است.

$$\begin{cases} dX_s = \mu(X_s, s)ds + \sigma(X_s, s)dW_s, \\ X_t = x. \end{cases}$$

در این صورت  $F$  دارای نمایشی به صورت زیر می باشد.

$$F(t, x) = E[\phi(X_T) | X_t = x].$$

## ۸.۱ قضیه گیرسانوف یک بعدی

قضیه ۱.۸.۱. (قضیه گیرسانوف یک بعدی<sup>۱۶</sup>) فرض کنید  $W(t)$  برای هر  $(0 \leq t \leq T)$  فرآیند براونی روی فضای احتمال  $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$  باشد، همچنین فرض کنید  $\theta(t)$  فرآیند سازگار تحت فیلتر  $\mathcal{F}_t$  باشد. تعریف می کنیم

$$\tilde{W}(t) = \int_0^t \theta(u)du + W(t),$$

$$Z(t) = \exp\left\{-\int_0^t \theta(u)dW(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \theta^2(u)du\right\},$$

و یک اندازه احتمال جدید به صورت زیر تعریف می کنیم

$$P(A) = \int_A Z(T)dP, \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

در این صورت  $\tilde{W}(t)$  تحت اندازه احتمال  $P$  فرآیند براونی استاندارد است.

□

برهان. به [۳۲] رجوع کنید

## ۹.۱ قضیه گیرسانوف $d$ -بعدی

قضیه ۱.۹.۱. (قضیه گیرسانوف  $d$ -بعدی) فرض کنید  $W_{(t)} = (W_1(t), \dots, W_d(t))$  برای  $0 \leq t \leq T$  فرآیند براونی  $d$ -بعدی روی فضای احتمال  $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$  باشد و همچنین فرض کنید  $f$  فرآیند  $f$  متعلق به کلاس  $\mathcal{L}^2[a, b]$  است، هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

$$\int_a^b E[f^2(s)]ds < \infty \quad \bullet$$

• فرایند  $f$  با فیلتر  $\mathcal{F}_t^W$  سازگار باشد.

$\theta(t) = (\theta_1(t), \dots, \theta_d(t))$  فرآیند سازگار  $d$ -بعدی روی فیلتر  $\mathcal{F}_t$  باشد حال تعریف کنید

$$\tilde{W}_j(t) = \int_0^t \theta_j(u) du + W_j(t) \quad j = 1, 2, \dots, d$$

$$Z(t) = \exp\left\{-\int_0^t \theta(u) dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \|\theta(u)\|^2 du\right\}, \quad (5.1)$$

و یک اندازه احتمال جدید به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\tilde{P}(A) = \int_A Z(T) dP, \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

در این صورت فرآیند  $\tilde{W}(t) = \tilde{W}_1(t), \dots, \tilde{W}_d(t)$  تحت اندازه احتمال  $P$  فرآیند براونی  $d$ -بعدی اسن.

□

برهان. به [۳۲] رجوع کنید

## ۱۰.۱ مفاهیم ریاضی مالی

### ۱.۱۰.۱ سبد سهام

**تعریف ۱.۱۰.۱.** مجموعه سرمایه‌گذاری، مجموعه‌ای از اوراق بهادار و مشتقات مالی است که این اوراق و مشتقات هر کدام دارای بازده و ریسک جداگانه‌ای هستند. به مجموعه سرمایه‌گذاری در اصطلاح مالی، **سبد مالی** یا پرتفوی<sup>۱۷</sup> گفته می‌شود.

فضای احتمال  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم فضای نمونه‌ای  $\Omega$  متناهی باشد. با گذشت زمان اطلاعات ما راجع به بازار افزایش می‌یابد و ما این جریان اطلاعات را با فیلتر  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$  نشان می‌دهیم. به لحاظ شهودی  $\mathcal{F}_t$  عبارت است از اطلاعات ما از بازار تا زمان  $t$ . معمولاً فرض می‌شود  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$  و  $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ .

همچنین فرض می‌کنیم در بازار تنها دو دارایی خرید و فروش می‌شود، یکی دارایی بدون ریسک (مثلاً ورق قرضه) و دیگری دارایی ریسکی (مثلاً سهام). قیمت این دو دارایی را به ترتیب با فرایندهای تصادفی مثبت و  $\mathcal{F}_t$ -سازگار  $S_t^{(0)}$  و  $S_t^{(1)}$  نشان می‌دهیم. در اینجا تنها یک دارایی ریسکی در نظر گرفته‌ایم در حالی که می‌توان تمام نتایج را به حالتی که در بازار بیش از یک دارایی ریسکی موجود است تعمیم داد. معمولاً برای سهولت بازار را نرمال می‌کنند، یعنی تمام قیمت‌ها را به قیمت دارایی بدون ریسک تقسیم می‌کنند. بدین ترتیب قیمت نرمال شده‌ی دارایی بدون ریسک همواره برابر یک و قیمت نرمال شده‌ی دارایی ریسکی برابر  $S_t = \frac{S_t^{(1)}}{S_t^{(0)}}$  است. از این پس منظور ما از قیمت، قیمت نرمال شده خواهد بود.

<sup>۱۷</sup>Portfolio

یک سبد مالی فرایند تصادفی پیش‌بینی‌پذیری چون  $\varphi = \{\varphi_t\}_{t \in [0, T]}$  است که  $\varphi_t = (\xi_t, \eta_t)$  در زمان  $t$ ،  $\xi_t$  تعداد سهام و  $\eta_t$  تعداد اوراق قرضه موجود در سبد مالی را نشان می‌دهد. پیش‌بینی‌پذیر بودن  $\varphi$  یعنی  $\varphi_t \in \mathcal{F}_{t-1}$  برای هر  $t \in [0, T]$ .

ارزش سبد مالی عبارت است از فرایند تصادفی  $V = \{V_t\}_{t \in [0, T]}$  که  $V_t = \xi_t S_t + \eta_t$  در لحظه  $t$  پس از مشاهده قیمت‌ها، با استفاده از پیش‌بینی‌پذیر بودن  $\varphi$ ،  $\varphi_{t+1}$  تعیین می‌شود که ارزش آن برابر  $\xi_{t+1} S_t + \eta_{t+1}$  است. در لحظه  $t+1$  پس از مشاهده قیمت‌ها و قبل از تعیین سبد سرمایه جدید، ارزش سبد مالی  $\xi_{t+1} S_{t+1} + \eta_{t+1}$  می‌باشد. پس عایدی حاصل از این سبد مالی روی بازه  $(t, t+1]$  برابر است با  $\xi_{t+1}(S_{t+1} - S_t)$ . بنابراین تعریف عایدی به عنوان فرایند تصادفی  $G = \{G_t\}_{t \in [0, T]}$  که  $G_T(\varphi) = \sum_{i=0}^{T-1} \xi_{i+1}(S_{i+1} - S_i)$  مناسب به نظر می‌رسد.

**تعریف ۲.۱۰.۱.** منظور از یک استراتژی خودتأمین، سبد مالی ای است که در آن سرمایه‌گذاری‌ها منحصر به خرید سهام و اوراق قرضه و درآمدها ناشی از فروش سهام و اوراق قرضه باشد.

برای فرمول‌بندی ریاضی این مفهوم توجه می‌کنیم که ارزش سبد مالی در لحظه  $t$  برابر است با  $\xi_t S_t + \eta_t$  و این مبلغ صرف تشکیل سبد مالی جدید به ارزش  $\xi_{t+1} S_t + \eta_{t+1}$  می‌شود، سبد مالی  $\varphi = (\xi, \eta)$  را خودتأمین می‌گوییم هرگاه

$$\forall t \in [0, T], \quad \Delta \xi_t S_t + \Delta \eta_t = 0,$$

که  $\Delta \xi_t = \xi_{t+1} - \xi_t$  به آسانی می‌توان بررسی کرد که این تعریف معادل است با ثابت بودن فرایند هزینه‌ی  $C(\varphi) := V(\varphi) - G(\varphi)$ . به عبارت دقیق‌تر، خودتأمین بودن سبد مالی معادل است با این که بنویسیم

$$\forall t \in [0, T], \quad C_t(\varphi) = \text{ثابت} = V_0(\varphi).$$

**تعریف ۳.۱۰.۱.** یک ادعای مشروط<sup>۱۸</sup>، چیزی نیست جز یک متغیر تصادفی نامنفی و  $-F_T$  اندازه‌پذیر.

**تعریف ۴.۱۰.۱.** ادعای مشروط  $H$  را دست‌یافتنی<sup>۱۹</sup> می‌نامیم هرگاه سبد مالی خودتأمین  $\varphi$  موجود باشد که

$$V_T(\varphi) = H, \quad a.s.$$

در این صورت  $\varphi$  یک پوشش ریسک<sup>۲۰</sup> برای  $H$  نامیده می‌شود.

**تعریف ۵.۱۰.۱.** بازار را کامل می‌نامیم هرگاه هر ادعای مشروط، دست‌یافتنی باشد. در غیر این صورت بازار ناکامل است.

<sup>۱۸</sup>Contingent claim

<sup>۱۹</sup>attainable

<sup>۲۰</sup>Hedging

**قضیه ۱.۱۰.۱** (قضیه اساسی اول قیمت‌گذاری). مدل عاری از آربیتراژ است اگر و فقط اگر اندازه احتمال مارتینگل موجود باشد.

برهان. به [۳۲] رجوع کنید. □

این قضیه بین یک مفهوم اقتصادی (وجود بازار بدون آربیتراژ) و یک مفهوم ریاضی (وجود اندازه احتمال مارتینگل) ارتباط ایجاد می‌کند.

**قضیه ۲.۱۰.۱** (قضیه اساسی دوم قیمت‌گذاری). فرض کنیم بازار عاری از آربیتراژ باشد، آنگاه بازار کامل است اگر و تنها اگر اندازه احتمال مارتینگل منحصر بفرد باشد.

برهان. به [۳۲] رجوع کنید. □

**تعریف ۶.۱۰.۱**. **نوسان‌پذیری<sup>۲۱</sup>** یک سهم، معیاری برای اندازه‌گیری عدم اطمینان در مورد بازده‌های آن سهم است. در واقع نوسان‌پذیری قیمت یک سهم انحراف معیار بازده سهم در طول یک سال است.

**تعریف ۷.۱۰.۱**. **نرخ بهره<sup>۲۲</sup>**، نرخ است که توسط قرض‌گیرنده، بابت استفاده از پولی که از قرض‌دهنده گرفته، پرداخت می‌شود. به طور خاص، هرگاه مبلغی پول برای مدت معینی وام داده شود، مبلغی که در آینده وام‌گیرنده به وام‌دهنده می‌پردازد، بیش از مبلغ دریافتی اولیه خواهد بود. این پرداخت اضافی یا نرخ بهره را می‌توان به صورت نسبت مابه‌التفاوت مبلغ دریافتی و مبلغ بازپرداخت در پایان یک دوره معین به کل پول دریافتی بیان کرد. بدین ترتیب هرگاه ۱۰۰ ریال وام داده شود و در پایان سال ۱۰۵ ریال دریافت گردد، نرخ بهره سالانه برابر خواهد بود با ۵ درصد.  $(105-100)/100=0/05$

معمولاً نرخ بهره برای یک سال محاسبه می‌شود و هرگاه مدت آن مشخص نشود، منظور همان دوره سالانه است.

**تعریف ۸.۱۰.۱** (نرخ تنزیل). پایه و اساس تجزیه و تحلیل‌های مالی درک مفهوم این جمله است که هر رقم پیش‌بینی شده برای قیمت دارایی در سال‌های آتی برابر یک سرمایه‌گذاری با نرخ سود سالانه در زمان حال می‌باشد. برای حذف عامل زمان در محاسبات، ارزش دارایی را که در سال‌های آتی کسب می‌گردد با استفاده از ضریب تنزیل  $e^{-rt}$  به ارزش روز تبدیل می‌نماییم. در این حالت نرخ بهره سالانه  $r$  که در محاسبات به عنوان نرخ بهره سرمایه‌گذاری در یک بازار بورس بدون ریسک می‌باشد را به عنوان **نرخ تنزیل** در نظر می‌گیرند. لذا فرض کنید نرخ بهره، یک فرایند سازگار  $R(t)$  باشد. فرایند تنزیل را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$D(t) = e^{-\int_0^t R(s)ds}$$

<sup>۲۱</sup> Volatility

<sup>۲۲</sup> Interest rate

**تعریف ۹.۱۰.۱.** اندازه احتمال  $Q$  را اندازه ریسک خنثی<sup>۲۳</sup> گوییم هرگاه داشته باشیم

۱.  $Q$  و  $P$  دو اندازه احتمال معادل باشند.

۲. فرایند قیمت دارایی تنزیل شده  $D(t)S(t)$  تحت  $Q$  مارتینگل باشد.

در صورت ثابت بودن نرخ بهره، نرخ تنزیل  $e^{-rt}$  می باشد.

## ۲.۱۰.۱ اختیار معامله

اختیار معامله<sup>۲۴</sup> قراردادی است بین خریدار و فروشنده، بنحوی که خریدار از فروشنده اختیار معامله، حق خرید یا فروش یک دارایی را در یک قیمت معین و در یک زمان مشخص خریداری می کند. در اینجا نیز همانند تمام قراردادهای، هر طرف امتیازی را به طرف مقابل اعطاء می کند، خریدار به فروشنده مبلغی تحت عنوان حق شرط پرداخت می کند که در واقع همان قیمت اختیار معامله می باشد. فروشنده نیز حق خرید یا فروش دارایی مذکور را در یک قیمت معین به خریدار اعطاء می نماید. اختیاری که برای خرید یک دارایی داده می شود را اختیار خرید<sup>۲۵</sup> و اختیاری که برای فروش یک دارایی داده می شود را اختیار فروش<sup>۲۶</sup> گویند. قیمت تعیین شده ای را که خریدار می تواند دارایی را خریداری نموده یا بفروشد، قیمت اعمال یا قیمت توافقی<sup>۲۷</sup> نامیده می شود به علاوه اختیار معامله مدت معینی دارد، حق خرید یا فروش دارایی در یک قیمت معین فقط تا تاریخ انقضای<sup>۲۸</sup> که قبلاً مشخص شده است امکان خواهد داشت.

**تعریف ۱۰.۱۰.۱.** اختیار معامله اروپایی قرار دادی است که به دارنده اش این اختیار و نه اجبار را می دهد تا قرار دادی درست در زمان  $T$  به قیمت  $K$  بخرد یا بفروشد.

**تعریف ۱۱.۱۰.۱.** اختیار معامله آمریکایی قراردادی است که به دارنده اش این اختیار و نه اجبار را می دهد تا قراردادی را در هر زمان تا رسیدن به زمان  $T$  به قیمت  $K$  بخرد یا بفروشد.

اگر  $K$  قیمت توافقی و  $S_T$  قیمت دارایی در لحظه  $T$  باشد، به طور کلی چهار موقعیت برای یک اختیار معامله اروپایی وجود دارد

۱. موقعیت خرید در قرارداد اختیار خرید

$$\max\{S_T - K, 0\} = [S_T - K]^+$$

<sup>۲۳</sup> Risk neutral measure

<sup>۲۴</sup> Option

<sup>۲۵</sup> Call Option

<sup>۲۶</sup> Put Option

<sup>۲۷</sup> Strike price

<sup>۲۸</sup> Expiration price

۲. موقعیت فروش در قرارداد اختیار خرید

$$-max\{S_T - K, 0\} = min\{K - S_T, 0\}$$

۳. موقعیت خرید در قرارداد اختیار فروش

$$max\{K - S_T, 0\} = [K - S_T]^+$$

۴. موقعیت فروش در قرارداد اختیار فروش

$$-max\{K - S_T, 0\} = min\{S_T - K, 0\}$$

نمودارهای شکل ۶.۱ این حالات را به خوبی نشان می‌دهند.

**تعریف ۱۲.۱۰.۱.** (رابطه برابری اختیار فروش و اختیار خرید<sup>۲۹</sup>)

$$C + Ke^{-rT} = P + S_0$$

رابطه فوق را رابطه برابری اختیار فروش و اختیار خرید برای اختیار معامله استاندارد گوییم، رابطه فوق نشان می‌دهد که می‌توان قیمت یک اختیار خرید اروپایی با قیمت توافقی و سررسید معین را از قیمت یک اختیار فروش اروپایی با همان قیمت توافقی و همان سررسید به دست آورد و برعکس.

## آشنایی با شاخص

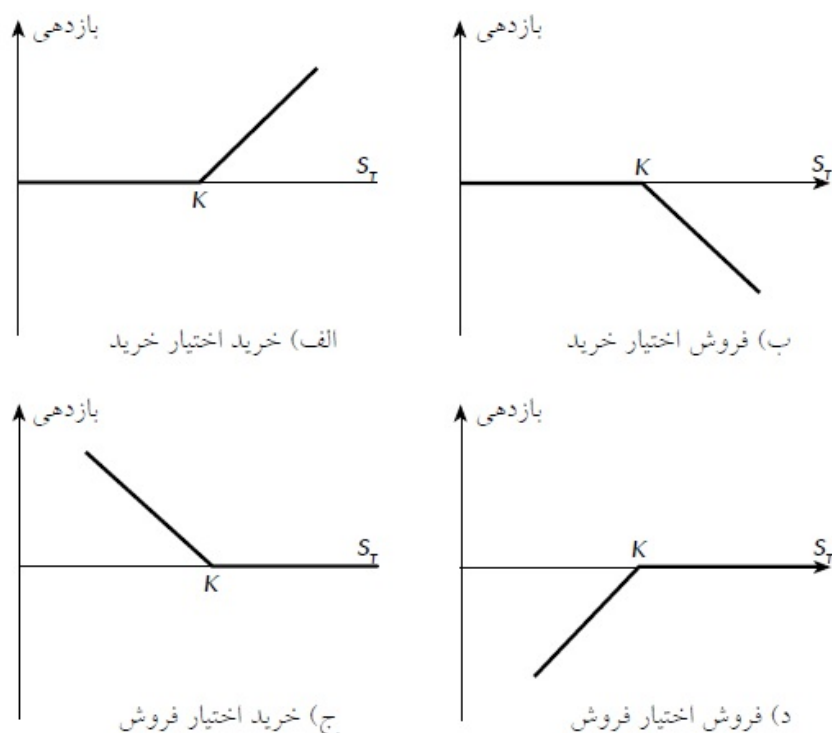
یکی از مهم‌ترین معیارهای ارزیابی عملکرد سرمایه‌گذاری در بورس و حتی سرمایه‌گذاری غیر مالی، شاخص‌های بورس است. **شاخص سهام** یک شاخص معیار آماری است که تغییر حرکت و جهت اقتصاد یک بازار سهام را نشان می‌دهد. هر شاخص دارای روش محاسباتی خاصی است که معمولاً بر حسب تغییر از ارزش مبنا بیان می‌شود. در هر بازار بورس اوراق بهادار می‌توان بنا بر احتیاج و کارایی شاخص‌های زیادی را تعریف و محاسبه نمود.

### شاخص S&P

شاخص قیمت سهام استاندارد اند پور<sup>۳۰</sup> یکی از شناخته‌ترین شاخص‌هاست. شاخص S&P یک شاخص مرتبط با سرمایه‌گذاری است که از سال ۱۹۵۷ شروع به کار کرده است. شاخص

<sup>۲۹</sup> Put-Call parity

<sup>۳۰</sup> Standard & Poor



شکل ۶.۱: نمودار حاصل از خرید یا فروش اختیار معامله اروپایی

$S\&P$  از میانگین وزنی ۵۰۰ سهام شرکت‌های بزرگ به دست می‌آید. پس از میانگین صنعتی داو جونز، شاخص  $S\&P$  بزرگترین شاخص سهام آمریکا است. این شاخص به عنوان یکی از بزرگ‌ترین شاخص‌ها در اقتصاد آمریکا محسوب می‌شود و در مقوله شاخص‌های تاثیرگذار اقتصاد جای داده می‌شود بسیاری از صندوق‌های مشترک سرمایه‌گذاری، صندوق‌های تبادل ارز و دیگر صندوق‌ها هم‌چون صندوق باز نشستگی بسیار تحت تاثیر عملکرد شاخص هستند.

### ۳.۱۰.۱ انواع معامله‌گران

عملکرد بازارهای آتی و پیمان‌های آتی و اختیار معاملات، به طور قابل توجهی موفقیت‌آمیز بوده است. مهم‌ترین دلیل آن، توانایی این بازارها برای جذب تعداد کثیری از انواع معامله‌گران و ایجاد قابلیت نقدینگی فراوان برای انجام مبادلات است، به طوری که چنانچه سرمایه‌گذاری بخواهد یک موقعیت معاملاتی را اتخاذ کند، معمولاً مشکلی در یافتن طرف دوم قرارداد ندارد، سه گروه عمده معامله‌گران را می‌توان پوشش‌دهندگان ریسک، سفته‌بازان و آربیتراژگران در نظر گرفت.

## پوشش دهندگان ریسک

پوشش دهندگان ریسک<sup>۳۱</sup> با استفاده از قراردادهای آتی، پیمان های آتی و اختیار معاملات به دنبال کاهش ریسکی هستند، که از حرکت بالقوه ی آتی در یک متغیر ناشی می شود. (هزینه یا قیمت دریافتی بابت دارایی پایه، تضمین می شود ولی این که نتیجه ی ناشی از پوشش ریسک بهتر از حالت عدم پوشش ریسک باشد، هیچ اطمینانی وجود ندارد).

## سفته بازان

سفته بازان یا سوداگران<sup>۳۲</sup> از پیش بینی، جهت حرکت آتی قیمت در یک متغیر بازار استفاده می کنند. (سفته بازان به استقبال ریسک می روند و موقعیت هایی را متناسب با نوع پیش بینی خود درباره ی تغییر قیمت ها، کسب می کنند)

## آربیتراژگران

آربیتراژگران<sup>۳۳</sup> با اتخاذ موقعیت های متناسب در دو یا چند بازار مختلف به دنبال کسب سود بدون ریسک هستند. می گوییم بازار فرصت آربیتراژ دارد اگر

$$1. \quad V_0^h = 0,$$

$$2. \quad P(V_T^h \geq 0) = 1,$$

$$3. \quad P(V_T^h > 0) > 0.$$

بنابراین در صورت وجود آربیتراژ گوییم سبدهی خودتامین که اجازه کسب سود بدون ریسک را بدهد وجود نداشته باشد.

<sup>۳۱</sup> To hedge a risk

<sup>۳۲</sup> Speculation

<sup>۳۳</sup> Arbitrage



## فصل ۲

# قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت مدل پرش-انتشار

### ۱.۲ مقدمه

ارزش‌گذاری اختیار معامله مبحث گسترده‌ای است که در ادبیات مالی مطرح می‌شود. این مبحث که به نظریه قیمت‌گذاری اختیار معامله موسوم است توجه متخصصان زیادی را به خود جلب کرده است. از بین آن‌ها فیشر بلک<sup>۱</sup> و میرن شولز<sup>۲</sup> در سال ۱۹۷۰ برای حل مساله قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی راهبرد نوینی را پیشنهاد کردند که مبتنی بر تشکیل سبدی خودتامین در یک فضای بدون آربیتراژ بود. آن‌ها نشان دادند که اگر فردی در یک بازار کامل به جای خرید یک اختیار، با پولی یکسان سهام و ورقه قرضه بخرد می‌تواند در سررسید، سودی مشابه با اعمال این اختیار را کسب کند.

برای انجام این کار آن‌ها قیمت سهام را با کمک یک فرآیند وینر هندسی مدل‌سازی کردند و با پوشش کامل سبد و حذف عامل‌های نوسان‌پذیر توانستند مدل بلک شولز را پیشنهاد بدهند. این مدل توانست دنیای قیمت‌گذاری مشتقات مالی را که دارایی پایه آن‌ها سهام بود متحول کند.

---

<sup>۱</sup>Black

<sup>۲</sup>Scholes

## ۲.۲ قیمت گذاری اختیار معامله تحت مدل پرش-انتشار

در مدل های پرش-انتشار فرآیند لگ-قیمت دارایی شامل بخش انتشاری و بخش پرشی است که در زمان های پواسون اتفاق می افتد. لذا در این فصل در نظر داریم مدل قیمت گذاری اختیار بلک شولز را به دست آوریم که دارایی پایه آن از دو بخش انتشار و پرش تشکیل شده است. نظر به اینکه در حالت کلی فرآیند تغییر قیمت سهام انتشاری نبوده و در بعضی از حالات دارای جهش های بزرگ می باشد. همچنین در اکثر مواقع لگ بازده سهام به صورت نرمال نیست. لذا مدل فرآیند براونی هندسی نمی تواند تصویر واقعی از مدل دارایی پایه داشته باشد بنابراین از مدل جایگزین برای دارایی پایه استفاده می کنیم. از مزایای استفاده از روش پرش-انتشار اول اینکه مدل قادر است خصوصیات مشاهده شده مهمی چون چولگی یا لبخند تلاطم را نشان دهد دوم اینکه فرآیند پرش می تواند ناکامی بازار مالی را توضیح دهد. به این معنا که بازار واقعی در زمان کوتاهی به منظور جلوگیری از زیان واکنش نشان دهد. در نهایت اینکه رویدادهای پیش بینی در بازار مالی نقش مهمی در تحقیقات مالی بازی می کنند و استفاده از یک فرآیند پرش برای مدل سازی حوادث مناسب باشد.

**تعریف ۱.۲.۲. فرآیند پرش-انتشار** مجموع مدل بلک شولز و مولفه پرش است که در حالت کلی به صورت زیر نوشته می شود

$$X_t = \mu t + \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

که دو جمله اول  $\mu$  نرخ بهره بدون ریسک،  $\sigma$  نوسان پذیری دارایی پایه،  $B_t$  حرکت براونی استاندارد است، بیانگر پیوستگی هستند و جمله  $\sum_{i=1}^{N_t} Y_i$  بیانگر ناپیوستگی (پرش)، و در آن  $N_t$  دارای توزیع پواسون با شدت  $\lambda$  است.

فرض کنید فرآیند قیمت دارایی پایه سهام از مدل بلک شولز پیروی می کند

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_t S_t dW_t \quad (1.2)$$

که در آن  $r$  نرخ بهره بدون ریسک،  $S_t$  دارایی پایه،  $\sigma_t$  نوسان پذیری دارایی پایه و  $W_t$  حرکت براونی هندسی است. فرض کنید یک پرش در بازه زمانی  $[t, t + dt]$  با احتمال  $\lambda dt$  اتفاق افتاده باشد. اندازه پرش ها مستقل از بازه زمانی ولی احتمال پرش رخ داده وابسته به زمان است. به طوری که ارزش جدید دارایی پایه به میزان  $J$  تغییر می کند. ( $J$  میزان پرش)  $J$  ها دارای توزیع نرمال با میانگین  $\mu$  و واریانس  $\gamma^2$  باشد بنابراین  $e^J$  دارای توزیع لگ-نرمال خواهد بود [۲۹]. تغییرات ناشی از پرش برای قیمت دارایی به صورت

لذا اگر یک پرش رخ دهد داریم  $dS_J = (J - 1)S_{J-}dN_t$  است.

$$S_{J+} = S_{J-} + dS_J = S_{J-} + (J - 1)S_{J-} = JS_{J-},$$

که در آن  $S_{J-}$  قیمت دارایی قبل از پرش،  $S_{J+}$  قیمت دارایی بعد از پرش است. بنابراین قیمت دارایی ترکیبی از انتشار و پرش به فرم زیر است

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_t S_t dW_t + (J - 1)S_{J-} dN_t. \quad (2.2)$$

حال مدل بلک شولز را برای فرآیند قیمت دارایی پایه به همراه فرآیند پواسون مرکب به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_t S_t dW_t + (J - 1)S_{J-} dN_t - E\{(J - 1)S_t dN_t\} \quad (3.2)$$

از طرفی چون  $J$ ها هم توزیع و مستقل هستند،  $dN_t$  توزیع پواسون با شدت تصادفی  $\lambda$ ،

$$E\{(J - 1)S_t dN_t\} = E(J - 1)E(dN_t)S_t = m\lambda S_t dt, \quad (4.2)$$

که در آن

$$m = E(J - 1) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} - 1,$$

$$E(dN_t) = 1 \cdot \lambda dt + 0 \cdot (1 - \lambda dt) = \lambda dt,$$

بنابراین بجای گذاری رابطه (4.2) در رابطه (3.2) داریم

$$dS_t = \underbrace{(r - \lambda m)S_t dt + \sigma_t S_t dW_t}_{dS_W} + \underbrace{(J - 1)S_{J-} dN_t}_{dS_J} = dS_W + dS_J, \quad (5.2)$$

که  $dS_W$  جمله براونی بلک شولز و  $dS_J$  جمله پرش است. فرض کنید  $g(J)$  تابع چگالی اندازه پرش باشد لذا احتمال یک پرش در بازه  $[t, t + dt]$ ، برای تابع چگالی  $g(J)dJ$  به فرم زیر است

$$E(f) = \int_0^{+\infty} f(J)g(J)dJ. \quad (6.2)$$

فرض کنید سبدهی داریم که از یک اختیار خرید اروپایی  $C$  و  $\Delta$  دارایی پایه که قیمت آن از مدل ذکر شده تبعیت می‌کند. ارزش این پرتفوی به فرم زیر است

$$\Pi = C - \Delta S_t,$$

و تغییرات ارزش این پرتفوی برابر است با

$$d\Pi = d\Pi_W + d\Pi_J, \quad (7.2)$$

که در آن  $d\Pi_W$  تغییرات ارزش پرتفوی به ازای دارایی پایه مدل بلک شولز و  $d\Pi_J$  به ازای تغییرات ارزش پرتفوی پرش. در این صورت بنا به لم ایتو<sup>۳</sup> داریم

$$\begin{aligned} d\Pi_W &= dC_W - \Delta dS_W \\ &= \left[ \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S_t}(r - \lambda m)S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \sigma_t^2 S_t^2 \right] dt + \frac{\partial C}{\partial S_t} \sigma_t S_t dW_t \\ &\quad - \Delta[(r - \lambda m)S_t dt + \sigma_t S_t dW_t^{(1)}] \\ &= \left[ \frac{\partial C}{\partial t} + \left[ \frac{\partial C}{\partial S_t} - \Delta \right] (r - \lambda m) S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \sigma_t^2 S_t^2 \right] dt + \left[ \frac{\partial C}{\partial S_t} - \Delta \right] \sigma_t S_t dW_t^{(1)}, \end{aligned} \quad (۸.۲)$$

برای حذف جمله تصادفی در پرتفوی مورد نظر می‌توان  $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$  را فرض کرد که چنین فرضی در بازارهای کامل (فاقد آربیتراژ) امکان‌پذیر است. لذا با این فرض خواهیم داشت

$$d\Pi_W = \left[ \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \sigma_t^2 S_t^2 \right] dt, \quad (۹.۲)$$

با توجه به متناهی بودن اندازه پرش داریم

$$\begin{aligned} d\Pi_J &= dC_J - \Delta dS_J \\ &= [C(JS, t) - C(S, t)] dN_t^c - \Delta(J - 1) S_t dN_t^c, \end{aligned} \quad (۱۰.۲)$$

با جای‌گذاری (۹.۲) و (۱۰.۲) در (۷.۲) داریم

$$d\Pi = \left[ \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \sigma_t^2 S_t^2 \right] dt + [C(JS, t) - C(S, t)] dN_t^c - \Delta(J - 1) S_t dN_t^c, \quad (۱۱.۲)$$

جز تصادفی است و پیوسته نیست و به همین دلیل تغییرات ارزش سبد را نمی‌توان پوشش داد لذا با امید گرفتن از (۱۱.۲) جز تصادفی  $dN_t^c$  را حذف می‌کنیم

$$\begin{aligned} E[d\Pi] &= E \left[ \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \sigma_t^2 S_t^2 \right] E[dt] + E[C(JS, t) - C(S, t)] E[dN_t^c] \\ &\quad - E \left[ \frac{\partial C}{\partial S_t} \right] E[(J - 1) S_t] E[dN_t^c], \end{aligned} \quad (۱۲.۲)$$

فرض کرده‌ایم که احتمال اندازه‌های پرش مستقل هستند. قرار می‌دهیم  $E(J - 1) = m$  داریم

$$E[d\Pi] = \left[ \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \sigma_t^2 S_t^2 \right] dt + E[C(JS, t) - C(S, t)] \lambda dt - \frac{\partial C}{\partial S_t} m S_t \lambda dt, \quad (۱۳.۲)$$

پرش‌های این‌گونه سبدها را ناهمبسته و واریانس آن را کوچک در نظر می‌گیریم. بنابراین بازده مورد انتظار

$$E[d\Pi] = f\Pi dt = f(C - \Delta S_t) dt = fC dt - f \frac{\partial C}{\partial S_t} S_t dt,$$

<sup>۳</sup> Lemma Ito

لذا رابطه (۱۲.۲) به صورت زیر درمی آید

$$fCdt - f \frac{\partial C}{\partial S_t} S_t dt = \left[ \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \sigma_t^2 S_t^2 \right] dt + E[C(JS, t) - C(S, t)] \lambda dt - \frac{\partial C}{\partial S_t} m S_t \lambda dt, \quad (14.2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \sigma_t^2 S_t^2 + E[C(JS, t)] \lambda + \frac{\partial C}{\partial S_t} S_t (f - m\lambda) - C(S, t) (\lambda + f) = 0, \quad (15.2)$$

با توجه به معادله (۶.۲) داریم

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \sigma_t^2 S_t^2 + \frac{\partial C}{\partial S_t} S_t (f - m\lambda) - C(S, t) (\lambda + f) + \int_0^{+\infty} C(JS, t) \lambda g(J) dJ = 0, \quad (16.2)$$

معادله (۱۶.۲) رایک معادله دیفرانسیل-انتگرال جزئی تحت مدل پرش-انتشار گوییم. کاربرد این مدل در بازارهای مالی به این صورت است که علاوه بر تخمین نوسانات بازار، پرش‌های بزرگ نیز اندازه‌گیری می‌شود. محققین ریاضیات کاربردی می‌توانند روش‌های پیشرفته‌ی ریاضی برای حل این مدل ارائه دهند تا برخی از ناکامی‌های روش‌های پیشین از جمله دقت همگرایی، بدخیمی و غیره رفع شوند [۵]، [۲۰].



## فصل ۳

# مدل رژیم سوئیچینگ

### ۱.۳ پیشینه تحقیق

در سال‌های اخیر اکثر مطالعات تجربی بر روی شکست‌های ساختاری بازار دارایی پایه (سهام) تمرکز یافته است. افزایش قیمت نفت خام (۱۹۷۳-۱۹۷۴)، ورشکستگی بازار سهام (۱۹۷۸)، حمله عراق به کویت (۱۹۹۰) و یا بحران مالی در کشورهای آسیای شرقی (۱۹۹۷)، نمونه‌ای از رخدادهایی است که موجب تغییر در فرایند سری زمانی مالی می‌شود. مدلی که می‌تواند این تغییر را توضیح دهد و اندازه‌گیری کند مدل رژیم سوئیچینگ است. مدل رژیم سوئیچینگ به‌طور موثر خواص سری‌های زمانی پیچیده از چندین متغیر مهم، از جمله نرخ بهره و نرخ ارز و غیره را محاسبه می‌کند. تحقیقات و پژوهش‌های رسیده، اقتصاد سنجی را با مدل‌های رژیم سوئیچینگ توسعه داده و برتری این مدل را نسبت به سایر مدل‌ها ثابت کرده است.

بدین ترتیب مدل رژیم سوئیچینگ به‌طور گسترده در بازارهای سهام و مشتقات مورد استفاده قرار گرفت. ایده‌ی اصلی، در نظر گرفتن تغییرات رفتار رژیم است. هیشیما<sup>۱</sup> وجود احتمالی رژیم سوئیچینگ را در بازدهی بازار سهام پنج اقتصاد توسعه یافته بررسی کرد و تغییر رفتار رژیم را در تمامی نوسانات بازارهای سهام تشخیص داد. نتایج حاصله از مقاله‌ی ارایه شده توسط وانگ<sup>۲</sup> یک مدرک قوی برای وجود بیش از یک رژیم در هر بازار مالی می‌باشد.

<sup>۱</sup>Hichima

<sup>۲</sup>Wang

او بیان کرد که: انصافاً، تغییرات پویای قیمت‌های دارایی‌های پایه به وسیله مدل‌هایی که با یک مولفه‌ی رژیم سوئیچینگ ترکیب شده‌اند، بهتر می‌توانند توصیف شوند. در نتیجه حضور رژیم سوئیچینگ در پویایی بازار به خوبی تصدیق شده است. بارها این پدیده مشاهده شده است که یک مرحله تغییر بین بحران و توسعه چرخه تجارت معمولاً به یک تغییر معناداری در بازگشتی سهام، نرخ بهره و دیگر شاخص‌های مالی منجر می‌شود. این تغییرات نشان‌دهنده‌ی الگوهای چرخه‌ای و دوره‌ای معین است.

اما در ارزیابی اختیارات با رژیم سوئیچینگ توجه کمتری شده است. خطای قیمت‌گذاری با معادله بلک-شولز زمانی که یک فرایند رژیم سوئیچینگ بازدهی دارایی پایه را کنترل می‌کند، به خوبی نشان داده می‌شود. به علاوه، قیمت‌گذاری اختیارات با رژیم سوئیچینگ اثر تلاطم در اکثر مطالعات تجربی را نشان می‌دهد. این نتایج حمایت‌های دلگرم‌کننده‌ی را تدارک می‌بیند که این تکنیک ارزیابی، پر اهمیت است و به اندازه‌ی کافی در محاسبه‌ی اجزای اصلی معاملات قیمت اختیار غنی است.

بینش پشت سر مدل‌های رژیم سوئیچینگ واضح است. پژوهش‌های گذشته روش‌های اقتصادی را برای تخمین پارامترهای مدل رژیم سوئیچینگ توسعه داده‌اند. در این پژوهش‌ها ثابت شده است که مدل‌های رژیم سوئیچینگ رفتار سری‌های زمانی از چندین متغیر را نسبت به مدل تک رژیمی بهتر توصیف می‌کنند. همیلتون<sup>۳</sup> بر روی یک مدل رژیم سوئیچینگ با گام‌های ثابت در هر رژیم مطالعه کرد. او یک تابع درست‌نمایی لگاریتمی را بر پایه‌ی احتمال در رژیم‌ها برای تخمین پارامترها ساخت و سپس آن را ماکسیمم کرد. همیلتون و گرای<sup>۴</sup> با دوباره مدل کردن مسئله، تخمین را برحسب احتمال بودن در رژیم خاص به صورت شرطی روی داده‌های قابل مشاهده، ساده کردند.

گرای (۱۹۹۶) بر روی نرخ‌های بهره، مطالعه کرد و نشان داد که مدل رژیم سوئیچینگ، پیش‌بینی‌های نوسانات را بهتر از مدل‌هایی که در آن واریانس ثابت است و یا یک مدل گارچ<sup>۵</sup> تک رژیمی نشان می‌دهد. نتایج او نشان داد که قیمت‌گذاری دقیق اختیارات نیازمند یک فرایند رژیم سوئیچینگ برای بازگشتی دارایی پایه است زیرا که پیش‌بینی نوسانات کلید ورودی برای همه‌ی روش‌های ارزیابی مشتقات است.

بولن<sup>۶</sup> یک درخت پنج جمله‌ای را برای حالت دو رژیم که برای تقریبی از قیمت اختیار اروپایی و آمریکایی می‌تواند استفاده شود، طراحی کرد. بافینگتون و الیوت<sup>۷</sup> بر روی اختیارات اروپایی و آمریکایی با مدل رژیم سوئیچینگ مطالعه کردند و به یک سیستم از معادلات دیفرانسیل جزئی شبیه معادله بلک شولز در قیمت اختیار با بکارگیری اصل قیمت‌گذاری ریسک

<sup>۳</sup> Hamilton

<sup>۴</sup> Gray

<sup>۵</sup> Garch

<sup>۶</sup> Bollen

<sup>۷</sup> Buffington and Elliott



خنثی دست یافتند. یائو<sup>۸</sup> بر روی سیستمی از معادله دیفرانسیل جزئی که با دقت شرایط کران هموار را برای تقریب قیمت اختیار انتخاب می‌کند، بررسی کرده و به توسعه‌ی روش‌های تقریبی پرداخته است.

## ۲.۳ مقدمه

همان‌گونه که در فصل اول اشاره کردیم، قیمت‌گذاری اختیارات<sup>۹</sup> از مباحث اصلی در تجزیه و تحلیل مشتقات مالی است. از آن‌جا که مدل‌سازی اختیارات بر مدل‌های پایه استوار است لذا، نخست با استفاده از خواص فرایند مارکوف و مفهوم رژیم‌های اقتصادی، رفتار قیمت‌های پایه (سهام) را مدل‌سازی می‌کنیم و مدل بدست‌آمده را مدل رژیم سوئیچینگ<sup>۱۰</sup> می‌نامیم.

## ۳.۳ زنجیره مارکوف زمان پیوسته

فرض کنید  $X_t$ ، برای هر  $t \geq 0$ ، یک متغیر تصادفی روی فضای احتمال  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  باشد و مقادیر خود را از مجموعه  $S$  بگیرد. در این صورت مجموعه‌ی  $\{X_t, t \geq 0\}$  یک فرایند تصادفی روی فضای حالت  $S$  است.

یک فرایند تصادفی  $\{X_t, t \geq 0\}$  روی فضای احتمال  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ، با مقادیرش در مجموعه‌ی شمارشی  $S$  (که فضای حالت<sup>۱۱</sup> نامیده می‌شود)، زنجیره مارکوف زمان پیوسته<sup>۱۲</sup> است، اگر برای هر دنباله‌ی متناهی از زمان‌های  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$  و مجموعه‌ی متناظر از حالات  $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i, j$  در  $S$ ، رابطه‌ی زیر برقرار باشد.

$$P(X_{t_{n+1}} = j | X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i) = P(X_{t_{n+1}} = j | X_{t_n} = i) \quad (1.3)$$

که در آن

$$P(X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, X_{t_n} = i) > 0.$$

رابطه (۱.۳) خاصیت مارکوف نامیده می‌شود و برای هر  $s \leq t$ ،

$$P(s, i, t, j) := P(X_t = j | X_s = i), \quad i, j \in S, \quad (2.3)$$

تابع (احتمال) انتقال زنجیره<sup>۱۳</sup> می‌باشد.  $P(s, i, t, j)$  بیانگر احتمال انتقال فرایند به حالت  $j$  در زمان  $t$  است وقتی که در زمان  $s$  در حالت  $i$  باشد.

<sup>۸</sup>Yao et al

<sup>۹</sup>Option pricing

<sup>۱۰</sup>Regime switching

<sup>۱۱</sup>State space

<sup>۱۲</sup>Continuous-time Markov chain

<sup>۱۳</sup>The chain's transition (probability) function

گزاره ۱.۳.۳. فرض کنید  $P(s, i, t, j)$  تابع انتقال از یک زنجیره مارکوف باشد. برای هر  $i, j \in S$  و  $0 \leq s \leq t$  داریم

$$1. \quad P(s, i, t, j) \geq 0$$

$$2. \quad \sum_{j \in S} P(s, i, t, j) = 1$$

$$3. \quad P(s, i, t, j) = \delta_{ij}$$

۴. برای هر  $i, j \in S$  و  $0 \leq s \leq v \leq t$  داریم

$$P(s, i, t, j) = \sum_{k \in S} P(s, i, v, k) P(v, k, t, j)$$

از آنجا که تابع احتمال انتقال زمان پیوسته در بیشتر موارد قابل محاسبه نیست، معمولاً زنجیره مارکوف زمان پیوسته بر حسب نرخ‌های انتقال<sup>۱۴</sup> مشخص می‌شود نه تابع احتمال انتقال آن.

تعریف ۱.۳.۳. یک تابع انتقال استاندارد<sup>۱۵</sup> است، اگر علاوه بر شرایط گزاره (۱.۳.۳) در شرط زیر نیز صادق باشد

$$\lim_{t \downarrow s} P(s, i, t, j) = \delta_{ij}$$

حال فرض کنید  $P(s, i, t, j)$  یک تابع استاندارد باشد، آنگاه برای هر دو حالت  $i \neq j$  و  $s \geq 0$  خواهیم داشت

$$1. \quad q_{ii} = \lim_{t \rightarrow s^+} \frac{P(s, i, t, i) - 1}{t - s} \text{ موجود و منفی است.}$$

$$2. \quad q_{ij} = \lim_{t \rightarrow s^+} \frac{P(s, i, t, j)}{t - s} \text{ موجود، نامنفی و متناهی است.}$$

$$3. \quad \sum_{j \neq i} q_{ij}(s) < q_i(s), \text{ که } q_i(s) := -q_{ii}(s) > 0 \text{ (نرخ انتقال نامیده می‌شود).}$$

## ۴.۳ رژیم سوئیچینگ

بسیاری از پارامترها دستخوش حوادثی می‌شوند که به واسطه آن دینامیک دارایی پایه (رفتار سری) به طور چشم‌گیری تغییر می‌کند.

این مطلب در هر اقتصاد کلانی و در سری‌های زمانی مالی برای دوره‌های به اندازه کافی طولانی دیده می‌شود. چنین تغییراتی در فرایند سری زمانی می‌تواند در نتیجه رخدادهایی چون جنگ، بحران‌های مالی، تغییرات مهم در سیاست‌های حکومتی و غیره پدید آید [۳۰]. بی‌ثباتی در

<sup>۱۴</sup>The transition rates

<sup>۱۵</sup>Standard transition function

مدل، اغلب به عنوان سوئیچ در یک معادله از یک رژیم به رژیم دیگر تعریف شده است. در اکثر تحقیقات ممکن است اطلاعات کمی در مورد زمان‌هایی که پارامترها تغییر می‌کنند وجود داشته باشد. در ابتدا برخی محققین مدل‌هایی را در نظر گرفتند که فقط یک رژیم را در سری داده‌ها دارا باشد، سپس مدل‌هایی با بیش از یک رژیم طراحی شد که احتمال سوئیچ در آن‌ها وابسته است و این وابستگی با مدل رژیم سوئیچینگ معرفی شد. این مدل قابلیت آن را دارد که تغییرات متناوب و تکراری رژیم‌های اقتصادی را در نظر بگیرد [۲۴].

بازار مالی را در نظر بگیرید که در آن  $M$  وضعیت اقتصادی مطرح باشد در این بازار نوسان‌پذیری و جابه‌جایی دارایی پایه می‌تواند مقادیر مختلف در رژیم اختیار کند. برای مدل کردن این بازار زنجیره مارکوف زمان-پیوسته  $\varepsilon_t$  با تعداد  $M$  وضعیت را در نظر می‌گیریم. پس مدل دارایی پایه در این بازار به صورت زیر است

$$\frac{ds_t}{s_t} = \mu_{\varepsilon_t} dt + \sigma_{\varepsilon_t} dw_t, \quad 0 < t < T$$

که در آن  $dw_t$  فرآیند براونی استاندارد،  $s_t$  دارایی پایه،  $\sigma_{\varepsilon_t}$  نوسان‌پذیری دارایی پایه و  $\mu_{\varepsilon_t}$  جابه‌جایی نرخ بهره بدون ریسک است. مدل فوق را مدل رژیم-سوئیچینگ می‌نامیم.



# فصل ۴

## صندوق سرمایه گذاری پویا و حفاظت شده

### ۱.۴ مقدمه

مفهوم قراردادهای صندوق سرمایه گذاری پویا و حفاظت شده<sup>۱</sup> (DFP) اولین بار در سال ۱۹۸۸ توسط شیو<sup>۲</sup>، جربر<sup>۳</sup> ارائه شد که نوعی حفاظت مداوم است و مانع از دست رفتن غیر منتظره سرمایه در تمام طول دوره سرمایه گذاری می شود. DFP تضمین می کند که ارزش سرمایه در طول دوره هرگز کمتر از سطحی که از پیش تعیین شده نشود. (حتی اگر شاخص سهام به پایین ترین سطح برسد).

با تضمین و گزینه های قرار داده شده در این محصول مالی، به سرمایه گذاران یا بیمه گذاران اطمینان بیشتری ارائه می دهد. این محصول باعث افزایش رقابت بین بیمه گر ها نیز می شود. به طور کلی، چنین تضمین ها و حمایت ها بسیار گران هستند و با حمایت شرکت بیمه ارائه می شود.

---

<sup>۱</sup>Dynamic Found Protection

<sup>۲</sup>Shiu

<sup>۳</sup>Gerber

چو<sup>۴</sup>، نو<sup>۵</sup> تنظیم مجدد و باز پس گرفتن مقدار پرداختی را با حرکت براونی- هندسی بررسی کرده‌اند.

جربر<sup>۶</sup> سطح ضمانت و قیمت گذاری DFP را بدون در نظر گرفتن تاریخ سررسید مورد مطالعه قرار داده‌اند.

قیمت گذاری DFP و پیش بینی آن کار سختی است. مطالعه قیمت گذاری DFP در مدل های مختلف تصادفی صورت گرفته است.

جربر، پافومی<sup>۷</sup> قیمت گذاری DFP را با حرکت براونی هندسی بررسی کرده‌اند. با این حال، تحلیل بیشتر به مدل کلاسیک بلک-شولز<sup>۸</sup> محدود می‌شود.

برای صندوق سرمایه گذاری پویا و حفاظت شده که سود انباشته در دراز مدت را هدف قرار می‌دهد، سوئیچ‌های ناگهانی حالت‌های بازار مورد توجه قرار می‌گیرند. فرآیند سوئیچ بین رژیم‌ها با زنجیره مارکوف متناهی برابری می‌کند. بدین ترتیب، فرمول بندی مارکوف سوئیچینگ همه جانبه است. در این پایان نامه نوسانات سرمایه ریسکی و نرخ بهره بازار با زنجیره مارکوف حالت-متناهی<sup>۹</sup> و زمان-پیوسته<sup>۱۰</sup> که وضعیت های مختلف اقتصادی را نشان می‌دهد، مدل می‌شود.

ارزش صندوق سرمایه گذاری مشترک در ابتدا به صورت رژیم-سوئیچینگ مارکوفی، هندسی براونی فرض شده است. در شرایط ساده، تبدیل لاپلاس (DFP) به روش مارتینگل به دست می‌آید که با توزیع زمان گذر اول سروکار دارد.

در این پایان نامه، یک قرارداد اروپایی در نظر گرفته می‌شود و یک مدل انتشار پرش رژیم-سوئیچینگ برای مقدار سرمایه پیشنهاد می‌شود.

وانگ<sup>۱۱</sup> راه حل تحلیلی برای (DFP) تحت (CEV)<sup>۱۲</sup> را با تبدیل لاپلاس به دست آورد.

ادامه پایان نامه به این شرح است: در بخش ۲، تبدیل لاپلاس ارزش DFP تحت یک مدل براونی هندسی و رژیم-سوئیچینگ را به دست می‌آوریم. در بخش ۳، یک مدل انتشار پرش رژیم-سوئیچینگ با تابع چگالی عمومی ارائه شده است. الگوریتم عددی برای حل DFP با استفاده از روش تقریبی زنجیره مارکوف و مثال عددی برای نشان دادن کاربرد روش عددی ارائه شده است. در پایان، نتیجه گیری و برخی مطالعات آینده در بخش ۴ نیز مورد بحث قرار گرفته است.

<sup>۴</sup>Chu

<sup>۵</sup>Know

<sup>۶</sup>Gerber

<sup>۷</sup>Pafumi

<sup>۸</sup>Black-Scholes

<sup>۹</sup>Finite- state

<sup>۱۰</sup>Continuous- time

<sup>۱۱</sup>Wong

<sup>۱۲</sup>Constant elasticity of variance

## ۲.۴ مدل انتشار سوئیچینگ

فرض کنید  $S(t)$  ارزش صندوق سرمایه‌گذاری مشترک در زمان  $t$  باشد  $(0 \leq t < T)$ ،  $T$  تاریخ سررسید DFP باشد.

بنابراین، فرض می‌کنیم که  $Q$  اندازه‌ی ریسک خنثی برای بازار است. پس فرآیند ارزش نرخ تنزیل  $S(t)$  یک  $-Q$  -مارتینگل است و فرآیند ارزش صندوق سرمایه‌گذاری مشترک با دینامیک  $Q$  به صورت زیر است

$$ds(t) = s(t)(r dt + \sigma(\alpha_t) dw_t), \quad (1.4)$$

که در آن  $\alpha_t$  یک زنجیره‌ی مارکوف زمان پیوسته با مولد  $Q = (q_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  و نرخ بهره‌ی بدون ریسک است.  $\sigma(i)$  تلاطم بازار را در حالی نشان می‌دهد که زنجیره‌ی مارکوف مقدار  $\alpha_t = i$  را اختیار کند. حرکت براونی استاندارد و مستقل از فرآیند  $\alpha_t$  است. دو فیلتر تولید شده توسط  $\{w_t\}_{0 \leq t < T}$ ،  $\{\alpha_t\}_{0 \leq t < T}$  هستند.

**تذکر ۱.۲.۴.** توجه داشته باشید برای به دست آوردن بیان صریح برای قیمت‌گذاری DFP، در این بخش فرض کنید  $r$  ثابت است. در بخش ۳،  $r$  توسط رژیم سوئیچینگ تولید می‌شود و به آن وابسته است.

DFP، یک سطح حفاظت از پیش تعیین شده را برای سرمایه‌گذاری که در این صندوق سرمایه‌گذاری کرده است، ضمانت می‌کند. نرخ بازده روی سبد سهام حفاظت شده با صندوق سرمایه‌گذاری مشترک یکسان است تا زمانی که ارزش صندوق سرمایه‌گذاری مشترک بیشتر از سطح حفاظتی که تعیین شده باقی بماند.

هنگامی که ارزش صندوق پایین‌تر از سطح حفاظت قرار گیرد، مبلغ اضافی به صورت فوری به سبد سهام افزوده می‌شود تا ارزش آن بالاتر از سطح حفاظت قرار گیرد.

سطح حفاظت را با  $k$  نمایش می‌دهند و داریم  $k \leq s(0)$  تابع بازده DFP را با  $F(T)$  نمایش می‌دهند و به صورت زیر به دست می‌آید

$$F(T) = s(T) \max\{1, \max_{0 \leq t < T} \frac{k}{s(t)}\} - s(T). \quad (2.4)$$

ارزش DFP در زمان  $t$  را با  $V(t)$  نمایش می‌دهند.

$$V(0) = E_Q[e^{-rT} F(T)] = E_Q[e^{-rT} s(T) \max\{1, \max_{0 \leq t < T} \frac{k}{s(t)}\} - s(0)]. \quad (3.4)$$

**گزاره ۱.۲.۴.** فرض کنید  $\xi(t)$  مشتق رادون-نیکودیم  $Q_s$  نسبت به  $Q$  باشد. داریم

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \frac{dQ_s}{dQ} \Big|_{g_t} = \frac{s(t)}{E_Q[s(t) | \mathcal{F}_t^\alpha]} \\ &= e^{\int_0^t \sigma(\alpha_s) dw_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(\alpha_s) ds}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

پس با توجه به  $w_t^*$ ،  $\mathcal{F}_t^\alpha$  یک  $Q_s$  - فرآیند وینراست.

$$w_t^* = w_t - \int_0^t \sigma(\alpha_s) ds. \quad (5.4)$$

برهان. طبق لم ایتو داریم

$$z(t) = \ln s(t)$$

$$dz(t) = \frac{1}{s(t)}(rs(t)dt + \sigma(\alpha_t)s(t)dw_t) - \frac{1}{s^2(t)}(\sigma^2(\alpha_t)s^2(t)dt)$$

$$= rdt + \sigma(\alpha_t)dw_t - \frac{1}{s} \sigma^2(\alpha_t)dt$$

$$= (r - \frac{1}{s} \sigma^2(\alpha_t))dt + \sigma(\alpha_t)dw_t.$$

$$z(t) = \ln s(0) + \int_0^t (r - \frac{1}{s} \sigma^2(\alpha_s))ds + \int_0^t \sigma(\alpha_s)dw_s$$

$$s(t) = e^{z(t)} = e^{\ln s(0) + \int_0^t (r - \frac{1}{s} \sigma^2(\alpha_s))ds + \int_0^t \sigma(\alpha_s)dw_s}$$

$$s(t) = s(0)e^{\int_0^t (r - \frac{1}{s} \sigma^2(\alpha_s))ds + \int_0^t \sigma(\alpha_s)dw_s}. \quad (6.4)$$

$$ds(t) = rs(t)dt + \sigma(\alpha_t)s(t)dw_t$$

$$\frac{ds(t)}{s(t)} = rdt + \sigma(\alpha_t)dw_t.$$

از این رو داریم

$$\ln s(t) = \int_0^t rds + \int_0^t \sigma(\alpha_s)dw_s$$

$$s(t) = e^{\ln s(0) + \int_0^t rds} = s(0)e^{\int_0^t rds}$$

$$\xi(t) = \frac{s(0)e^{\int_0^t (r - \frac{1}{s} \sigma^2(\alpha_s))ds + \int_0^t \sigma^2(\alpha_s)dw_s}}{s_0 e^{\int_0^t rds}} = e^{\int_0^t \sigma(\alpha_s)dw_s - \frac{1}{s} \sigma^2(\alpha_s)ds}.$$

□

طبق قضیه گیرسانوف،  $W^*$  یک  $Q_s$  - فرآیند وینر روی  $\mathcal{F}_t^\alpha$  است.

قرار دهید

$$\mu(i) = r + \sigma^2(i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.4)$$

باتوجه به (5.4) و (7.4) داریم

$$ds(t) = s(t)(\mu(\alpha_t)dt + \sigma(\alpha_t)dw_t^*). \quad (8.4)$$

سپس (8.4) معادل زیر است

$$s(t) = s(0)e^{\int_0^t (\mu(\alpha_s - \frac{1}{s} \sigma^2(\alpha_s))ds) + \int_0^t \sigma(\alpha_s)dw_s^*}. \quad (9.4)$$



به علاوه تعریف می‌کنیم

$$X(t) := \ln \frac{s(t)}{s(\circ)} = \int_{\circ}^t (\mu(\alpha_s) - \frac{1}{\tau} \sigma^2(\alpha_s)) ds + \int_{\circ}^t \sigma(\alpha_s) dw_s^*,$$

$$m(s) := \min_{\circ \leq t \leq s} X(t),$$

$$\tau_b := \inf \{t \geq \circ, X(t) \leq b\}.$$

$\tau_b$  زمان توقف است. ( جایی که برای اولین بار ارزش سرمایه کمتر از سطح حفاظت از پیش تعیین شده می‌شود.) پس داریم

$$Q_s(\tau_b \leq t) = Q_s(m(t) \leq b),$$

$$\max_{\circ \leq t \leq T} \frac{1}{s(t)} = \frac{1}{\min_{\circ \leq t \leq T} s(t)} = \frac{e^{-m(T)}}{s(\circ)}.$$

در بندهای بعدی تبدیل لاپلاس  $Q_s(\tau_b \leq t)$  را به دست می‌آوریم. در مقاله‌های قبلی، معمولاً از فرآیند وینر- هاف برای مطالعه زمان گذر اول استفاده شده است. کوز<sup>۱۳</sup>، کاز<sup>۱۴</sup> تبدیل لاپلاس زمان گذر اول با فرآیند انتشار پرش نمایی مضاعف را با روش مارتینگل ترکیب کرده‌اند. ما روش مارتینگل را انتخاب کرده‌ایم. روش مارتینگل کارایی بهتری برای به دست آوردن تبدیل لاپلاس اولین زمان گذر دارد و طبق فرمول بندی این پایان‌نامه انتخاب مناسب‌تری است. برای سادگی محاسبات، فرض می‌کنیم که زنجیره مارکوف  $\alpha_t$  فقط دارای دو حالت باشد.

$M = \{1, 2\}$  مولد  $\alpha_t$  به صورت زیر به دست می‌آید

$$Q = (q_{ij}) = \begin{pmatrix} -\theta_1 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_2 \end{pmatrix}$$

لم ۱.۲.۴. جواب معادلات زیر

$$\begin{cases} \mu(1) \frac{\partial u(x, 1)}{\partial x} + \frac{1}{\tau} \sigma^2(1) \frac{\partial^2 u(x, 1)}{\partial x^2} - \theta_1 u(x, 1) + \theta_1 u(x, 2) - au(x, 1) = 0, \\ \mu(2) \frac{\partial u(x, 2)}{\partial x} + \frac{1}{\tau} \sigma^2(1) \frac{\partial^2 u(x, 2)}{\partial x^2} + \theta_2 u(x, 1) - \theta_2 u(x, 2) - au(x, 2) = 0, \end{cases} \quad (10.4)$$

به فرم زیر است

$$\begin{cases} u(x, 1) = \sum_{i=1}^4 A_i e^{\eta_{i,a}(x-b)}, \\ u(x, 2) = \sum_{i=1}^4 k_i A_i e^{\eta_{i,a}(x-b)}. \end{cases} \quad (11.4)$$

به ازای هر  $i = 1, \dots, 4$ ،  $A_i$  نامعین و ثابت است. داریم

$$k_i = \frac{-1}{\theta} (\mu(1) \eta_i + \frac{1}{\tau} \sigma^2(1) \eta_i^2 - (\theta_1 + a)).$$

$\eta_{i,a}$  جواب (۱۴.۴) هستند و  $-\infty < \eta_{1,a} < \eta_{2,a} < \circ < \eta_{3,a} < \eta_{4,a} < \infty$ .

<sup>۱۳</sup> Kou

<sup>۱۴</sup> Caz

برهان. اثبات با توجه به معادله اول (۱۰.۴) داریم:

$$\begin{aligned} \mu(1) \frac{\partial u(x, 1)}{\partial x} + \frac{1}{\gamma} \sigma^2(1) \frac{\partial u^2(x, 2)}{\partial x^2} - \theta_1 u(x, 1) - au(x, 1) &= -\theta_1 u(x, 2), \\ u(x, 2) &= \frac{-1}{\theta_1} (\mu(1) \frac{\partial u(x, 1)}{\partial x} + \frac{1}{\gamma} \sigma^2(1) \frac{\partial u^2(x, 1)}{\partial x^2} - (\theta_1 + a)u(x, 1)). \end{aligned} \quad (12.4)$$

طبق [۲۰] با توجه به معادلات (۱۰.۴) و (۱۲.۴) و ضرب متناظر داریم

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\gamma} \sigma^2(1) \frac{\partial u^2(x, 1)}{\partial x^2} \right) \left( \frac{1}{\gamma} \sigma^2(2) \frac{\partial u^2(x, 1)}{\partial x^2} \right) \\ & + \left( \frac{1}{\gamma} \sigma^2(1) \frac{\partial u^2(x, 1)}{\partial x^2} \right) \left( \mu(2) \frac{\partial u(x, 1)}{\partial x} \right) \\ & + \left( \frac{1}{\gamma} \sigma^2(2) \frac{\partial u^2(x, 1)}{\partial x^2} \right) \left( \mu(1) \frac{\partial u(x, 1)}{\partial x} \right) \\ & + \left( \frac{1}{\gamma} \sigma^2(1) \frac{\partial u^2(x, 1)}{\partial x^2} \right) (\theta_2 - a) - \left( \frac{1}{\gamma} \sigma^2(2) \frac{\partial u^2(x, 1)}{\partial x^2} \right) (\theta_1 + a) \\ & + \left( \mu(2) \frac{\partial u(x, 1)}{\partial x} \right) \left( \mu(1) \frac{\partial u(x, 1)}{\partial x} \right) \\ & - \left( \mu(2) \frac{\partial u(x, 1)}{\partial x} \right) (\theta_1 + a) + \left( \mu(1) \frac{\partial u(x, 1)}{\partial x} \right) (\theta_2 + a) \\ & + \theta_1 au(x, 1) + \theta_2 au(x, 1) + (au(x, 1)au(x, 1)) \\ & = \frac{\sigma^2(1)\sigma^2(2)}{\gamma} \frac{\partial^2 u(x, 1)}{\partial x^2} + \frac{\sigma^2(1)\mu(2) + \sigma^2(2)\mu(1)}{\gamma} \frac{\partial^2 u(x, 1)}{\partial x^2} \\ & + \left( \mu(1)\mu(2) - \frac{(\theta_1 + a)\sigma^2(2)}{\gamma} - \frac{(\theta_2 + a)\sigma^2(1)}{\gamma} \right) \frac{\partial^2 u(x, 1)}{\partial x^2} \\ & - ((\theta_1 + a)\mu(2) + (\theta_2 + a)\mu(1)) \frac{\partial u(x, 1)}{\partial x} + [a^2 + (\theta_1 + \theta_2)a]u(x, 1) = 0. \end{aligned} \quad (13.4)$$

معادله مشخصه متناظر با (۱۳.۴) به صورت زیر به دست می آید

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma^2(1)\sigma^2(2)}{\gamma} y^4 + \frac{\sigma^2(2)\mu(2) + \sigma^2(1)\mu(1)}{\gamma} y^3 + (\mu(2)\mu(1) - \frac{(\theta_1 + a)\sigma^2(2)}{\gamma}) \\ & - \frac{(\theta_2 + a)\sigma^2(1)}{\gamma} y^2 - ((\theta_1 + a)\mu(2) + (\theta_2 + a)\mu(1))y + [a^2 + (\theta_1 + \theta_2)a] = 0. \end{aligned} \quad (14.4)$$

تعریف می کنیم

$$\Psi(y) = \left( \frac{\sigma^2(1)}{\gamma} y^2 + \mu(1)y - (\theta_1 + a) \right) \left( \frac{\sigma^2(2)}{\gamma} y^2 + \mu(2)y - (\theta_2 + a) \right) - \theta_1 \theta_2.$$

$\beta_1$  و  $\beta_2$  ریشه های معادله مشخصه درجه دوم  $\frac{\sigma^2(1)}{\gamma} y^2 + \mu(1)y - (\theta_1 + a) = 0$  و  $\beta_3$  و  $\beta_4$

ریشه‌های معادله مشخصه درجه دوم  $\frac{\sigma^2(\gamma)}{\gamma}y^2 + \mu(\gamma)y - (\theta_\gamma + a) = 0$  هستند.

$$\Delta = \mu(1)^2 + \frac{4\sigma^2(1)\theta_1 + 4\sigma^2(1)a}{4} = \mu(1)^2 + 2\sigma^2(1)\theta_1 + 2\sigma^2(1)a,$$

$$\beta_1 = \frac{-\mu(1) + \sqrt{\mu(1)^2 + 2\sigma^2(1)\theta_1 + 2\sigma^2(1)a}}{\sigma^2(1)},$$

$$\beta_2 = \frac{-\mu(1) - \sqrt{\mu(1)^2 + 2\sigma^2(1)\theta_1 + 2\sigma^2(1)a}}{\sigma^2(1)}.$$

$$\beta_1\beta_2 = -\frac{2\sigma^2(1)(\theta_1 + a)}{\sigma^4(1)} = -\frac{2(\theta_1 + a)}{\sigma^2(1)} < 0.$$

به همین ترتیب  $\beta_3\beta_4 = (-\frac{2(\theta_2+a)}{\sigma^2(2)})$  به علاوه داریم

$$\Psi(0) = a^2 + (\theta_1 + \theta_2)a > 0,$$

$$\Psi(\infty) = \Psi(-\infty) = \infty.$$

بدین صورت معادله (۱۴.۴) دارای ۴ ریشه یکتا و حقیقی

□  $-\infty < \eta_{1,a} < \eta_{2,a} < 0 < \eta_{3,a} < \eta_{4,a} < \infty$  است از این رو، قضیه زیر نتیجه می‌شود.

**قضیه ۱.۲.۴.** به ازای هر  $a > 0$  و  $b < 0$  داریم

$$E_{Q_s}[e^{-a\tau_b}] = \sum_{i=1}^2 A_i e^{\eta_{i,a} b} [p_1 + k_i p_2],$$

که در آن  $p_1 = Q(\alpha_0 = 1)$  و  $p_2 = Q(\alpha_0 = 2)$  است.

به ازای هر  $i = 1, 2$  و  $\eta_{i,a}$  و  $k_i$  طبق لم ۱.۲.۴ تعریف شده‌اند و  $A_i$  از رابطه (۱۷.۴) به دست می‌آید.

برهان. ابتدا به ازای هر  $i = 1, 2$  تابع کران‌دار  $u(x, i)$  را می‌یابیم.

به ازای هر  $i$ ،  $u(x, i)$  در چهار زمان روی  $x$  پیوسته است.

$PDE$  به صورت زیر است

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x, i) = au(x, i) & x > b, \\ u(x, i) = 1 & x \leq b, \end{cases}$$

که در آن  $L$  یک مولد بی‌نهایت کوچک است.

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x, 1) = \mu(1)\frac{\partial u(x, 1)}{\partial x} + \frac{1}{\gamma}\sigma^2(1)\frac{\partial^2 u(x, 1)}{\partial x^2} - \theta_1 u(x, 1) + \theta_1 u(x, 2), \\ \mathcal{L}u(x, 2) = \mu(2)\frac{\partial u(x, 2)}{\partial x} + \frac{1}{\gamma}\sigma^2(2)\frac{\partial^2 u(x, 2)}{\partial x^2} + \theta_2 u(x, 2) - \theta_2 u(x, 1). \end{cases} \quad (15.4)$$

طبق لم (۱.۲.۴) می‌دانیم که برای  $i = 1, 2$  و  $x > b$ ،  $u(x, i)$  فرمی به صورت معادله ۱۱.۴ دارد و کران داراست. زمانی که  $x \rightarrow \infty$   $A_1 = A_2 = 0$  است.  $u(x, i)$  در  $b$  پیوسته است، پس  $u(b, i) = 1$ .

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1, \\ A_1 k_1 + A_2 k_2 = 1. \end{cases} \quad (۱۶.۴)$$

$$k_1 = -\frac{1}{\theta_1}(\mu(1)\eta_1 + \frac{1}{\rho}\sigma^2(1)\eta_1^{\check{}} - (\theta_1 + a)),$$

$$k_2 = -\frac{1}{\theta_1}(\mu(1)\eta_2 + \frac{1}{\rho}\sigma^2(1)\eta_2^{\check{}} - (\theta_1 + a)).$$

$$\begin{cases} -k_1 A_1 - k_2 A_2 = -k_1, \\ A_1 k_1 + A_2 k_2 = 1. \end{cases}$$

آن گاه باحل معادلات داریم

$$A_2 \left( \frac{1}{\theta_1}(\mu(1)\eta_1 + \frac{1}{\rho}\sigma^2(1)\eta_1^{\check{}} - (\theta_1 + a)) \right) + A_2 \left( -\frac{1}{\theta_1}(\mu(1)\eta_2 + \frac{1}{\rho}\sigma^2(1)\eta_2^{\check{}} - (\theta_1 + a)) \right)$$

$$A_2 \frac{1}{\theta_1}(\mu(1)(\eta_1 - \eta_2) + \frac{1}{\rho}\sigma^2(1)(\eta_1^{\check{}} - \eta_2^{\check{}}))$$

$$= 1 + \frac{1}{\theta_1}(\mu(1)\eta_1 + \frac{1}{\rho}\sigma^2(1)\eta_1^{\check{}} - (\theta_1 + a)) = \frac{\theta_1 + \mu(1)\eta_1 + \frac{1}{\rho}\sigma^2(1)\eta_1^{\check{}} - \theta_1 - a}{\theta_1}$$

$$A_2 \frac{1}{\theta_1}(\mu(1)(\eta_1 - \eta_2) + \frac{1}{\rho}\sigma^2(1)(\eta_1^{\check{}} - \eta_2^{\check{}})) = \frac{1}{\theta_1}(\mu(1)\eta_1 + \frac{1}{\rho}\sigma^2(1)\eta_1^{\check{}} - a)$$

$$A_2 = \frac{\mu(1)\eta_1 + \frac{1}{\rho}\sigma^2(1)\eta_1^{\check{}} - a}{\mu(1)(\eta_1 - \eta_2) + \frac{1}{\rho}\sigma^2(1)(\eta_1^{\check{}} - \eta_2^{\check{}})}.$$

با جای گذاری داریم

$$A_1 = 1 - A_2,$$

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 - \frac{\mu(1)\eta_1 + \frac{1}{\rho}\sigma^2(1)\eta_1^{\check{}} - a}{\mu(1)(\eta_1 - \eta_2) + \frac{1}{\rho}\sigma^2(1)(\eta_1^{\check{}} - \eta_2^{\check{}})} \\ &= \frac{\mu(1)(\eta_1 - \eta_2) + \frac{1}{\rho}\sigma^2(1)(\eta_1^{\check{}} - \eta_2^{\check{}}) - \mu(1)\eta_1 - \frac{1}{\rho}\sigma^2(1)\eta_1^{\check{}} + a}{\mu(1)(\eta_1 - \eta_2) + \frac{1}{\rho}\sigma^2(1)(\eta_1^{\check{}} - \eta_2^{\check{}})}. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A_1 = \frac{-\mu(1)\eta_2 - \frac{1}{\rho}\sigma^2(1)\eta_2^{\check{}} + a}{\mu(1)(\eta_1 - \eta_2) + \frac{1}{\rho}\sigma^2(1)(\eta_1^{\check{}} - \eta_2^{\check{}})}, \\ A_2 = \frac{\mu(1)\eta_1 + \frac{1}{\rho}\sigma^2(1)\eta_1^{\check{}} - a}{\mu(1)(\eta_1 - \eta_2) + \frac{1}{\rho}\sigma^2(1)(\eta_1^{\check{}} - \eta_2^{\check{}})}. \end{cases} \quad (۱۷.۴)$$

بنابراین

$$u(x, 1) = \begin{cases} 1 & x \leq b, \\ \sum_{i=1}^2 A_i e^{\eta_i, a(x-b)} & x > b, \end{cases}$$

$$u(x, \nu) = \begin{cases} 1 & x \leq b, \\ \sum_{i=1}^{\nu} k_i A_i e^{\eta_i a(x-b)} & x > b. \end{cases}$$

قرارد دهید  $\alpha_0 = i$  و براساس لم ایتو روی  $z(t) = e^{-at}u(X(t), \alpha_t)$  فرآیند زیر به دست می آید

$$z(t) = z_0 - \int_0^t e^{-as}(-au(X(s), \alpha_s) + \mathcal{L}u(X(s), \alpha_s))ds, \quad t \geq 0$$

طبق [۲۵]،  $z_0$  فرآیند متوقف شده است و به صورت زیر نشان داده می شود

$$z(0) = e^{-a(t \wedge \tau_b)}u(X(t \wedge \tau_b), \alpha_{t \wedge \tau_b})$$

$$(t \wedge \tau_b) = \min\{t, \tau_b\}$$

$$z(t) = e^{-a(t \wedge \tau_b)}u(X(t \wedge \tau_b), \alpha_{t \wedge \tau_b}) - \int_0^{t \wedge \tau_b} e^{-as}(-au(X(s), \alpha_s) + \mathcal{L}u(X(s), \alpha_s))ds, \quad t \geq 0$$

$z(t)$  مارتینگل است که با  $z(0) = u(X(0), \alpha_0) = u(0, i)$  شروع می شود. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} E_{Q_s}^i[z(t)] &= E_{Q_s}^i[e^{-a(t \wedge \tau_b)}u(X(t \wedge \tau_b), \alpha_{t \wedge \tau_b}) \\ &- \int_0^{t \wedge \tau_b} e^{-as}(-au(X(s), \alpha_s) + \mathcal{L}u(X(s), \alpha_s))ds] = u(0, i). \end{aligned}$$

که در آن  $E_{Q_s}^i[\cdot] = E_{Q_s}^i[\cdot | \alpha_0 = i]$ . علاوه براین،

$$\begin{aligned} u(0, i) &= E_{Q_s}^i[e^{-a(t \wedge \tau_b)}u(X(t \wedge \tau_b), \alpha_{t \wedge \tau_b})] \\ &= E_{Q_s}^i[e^{-a(t \wedge \tau_b)}u(X(t \wedge \tau_b), \alpha_{t \wedge \tau_b})\chi(\tau_b < \infty)] \\ &+ E_{Q_s}^i[e^{-at}u(X(t), \alpha_t)\chi(\tau_b = \infty)]. \end{aligned} \quad (18.4)$$

زمانی که  $t \rightarrow \infty$ ،  $u$  کران دار نیست، روی بازه  $\{\tau_b < \infty\}$  داریم

$$\begin{aligned} u(0, i) &= E_{Q_s}^i[e^{-a\tau_b}u(X(\tau_b))\chi(\tau_b < \infty)], \\ &= E_{Q_s}^i[e^{-a\tau_b}\chi(\tau_b < \infty)] = E_{Q_s}^i[E^{-a\tau_b}]. \end{aligned} \quad (19.4)$$

طبق [۲۵]،  $u(X(\tau_b)) = 1$ . بنابراین داریم

$$\begin{aligned} E_{Q_s}^i[e^{-a\tau_b}] &= \sum_{i=1}^{\nu} u(0, i)Q_s(\alpha_0 = i) \\ &= u(0, 1)Q_s(\alpha_0 = 1) + u(0, 2)Q_s(\alpha_0 = 2) \\ &= A_1 e^{\eta_1 a b} Q_s(\alpha_0 = 1) + k_1 A_1 e^{\eta_1 a b} Q_s(\alpha_0 = 2) \\ &= A_1 e^{\eta_1 a b} [Q_s(\alpha_0 = 1) + k_1 Q_s(\alpha_0 = 2)]. \end{aligned}$$

زنجیره مارکوف  $\alpha_t$  مستقل از  $W$  است. بنابراین تغییر اندازه‌ی احتمال  $Q$  به  $Q_s$  در  $\alpha_t$  تغییری ایجاد نمی کند.

$$E_{Q_s}^i[e^{-a\tau_b}] = \sum_{i=1}^{\nu} A_i e^{\eta_i a b} [Q_s(\alpha_0 = 1) + Q_s(\alpha_0 = 2)].$$

□

**تذکر ۲.۲.۴.** برای  $i = 1, 2$ ، ممکن است پیوستگی  $u(x, i)$  روی  $x$  در نقطه  $b$  قابل تشخیص نباشد، نمی‌توانیم به طور مستقیم فرمول ایتورا بر روی فرآیند  $\{e^{-\alpha t} u(X(t), \alpha_t)\}$  اعمال کنیم. با این وجود می‌توانیم مجموعه‌ای از توابع به اندازه کافی هموار  $\{u_n(x, i) : n = 1, 2, \dots\}$  را برای تقریب زدن  $u(x, i)$  بسازیم. به طور دقیق تر  $u_n(x, i)$  در همه جا هموار است و پیوستگی آن روی  $x$  در ۴ زمان قابل تشخیص است. علاوه بر این  $u_n(x, i) \equiv u(x, i)$  برای هر  $x \leq b - \frac{1}{n}$  یا  $x \geq b$  و برای  $b - \frac{1}{n} < x < b$ ،  $0 < u_n(x, i) < L$ ، که  $L$  مثبت و ثابت است. پس برای هر  $x$ ،  $u_n(x, i) \rightarrow u(x, i)$  همگراست، زمانی که  $x \rightarrow \infty$ .

برهان. طبق [۲۵] و [۲۶] داریم

$$\begin{aligned} Lu_n(x, 1) &= \mu(1) \frac{\partial u_n(x, 1)}{\partial x} + \frac{1}{\Upsilon} \sigma^2(1) \frac{\partial^2 u_n(x, 1)}{\partial x^2} - \theta_1 u_n(x, 1) + \theta_1 u_n(x, 2) \\ &\quad + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} [u_n(x, 1) + z - u_n(x, 1)] f_Z(z) dz \\ &= \mu(1) \frac{\partial u_n(x, 1)}{\partial x} + \frac{1}{\Upsilon} \sigma^2(1) \frac{\partial^2 u_n(x, 1)}{\partial x^2} - \theta_1 u_n(x, 1) + \theta_1 u_n(x, 2) - \lambda u_n(x, 1) \\ &\quad + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} u_n(x, 1) + z) f_Z(z) dz \\ &= \mu(1) \frac{\partial u(x, 1)}{\partial x} + \frac{1}{\Upsilon} \sigma^2(1) \frac{\partial^2 u(x, 1)}{\partial x^2} - \theta_1 u(x, 1) + \theta_1 u(x, 2) - \lambda u(x, 1) \\ &\quad + \lambda \int_{-\infty}^{x-b} u(x, 1) + z) f_Z(z) dz \\ &\quad + \lambda \int_{x-b}^{x-b+\frac{1}{n}} u_n(x, 1) + z) f_Z(z) dz + \lambda \int_{x-b+\frac{1}{n}}^{\infty} u(x, 1) + z) f_Z(z) dz \\ &= \lambda u(x, 1) + \lambda \int_{x-b}^{x-b+\frac{1}{n}} u_n(x, 1) + z) f_Z(z) dz - \lambda \int_{x-b}^{x-b+\frac{1}{n}} u(x, 1) + z) f_Z(z) dz \\ &\quad - \lambda \int_{x-b}^{x-b+\frac{1}{n}} u(x, 1) + z) f_Z(z) dz + \lambda \int_{x-b}^{x-b+\frac{1}{n}} u(x, 1) + z) f_Z(z) dz = 0 \end{aligned}$$

به طور مشابه برای  $Lu_n(x, 2)$  نیز اثبات می‌شود. پس برای هر  $x$ ،  $u_n(x, i) \rightarrow u(x, i)$  همگراست، زمانی که  $x \rightarrow \infty$ .

□

**لم ۲.۲.۴.** به ازای هر  $t > 0$  داریم

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} e^{-y} Q_s(m(t) \leq y) = 0.$$

برهان.  $\theta > 1$  و  $e^{G(\theta,t)} := E_{Q_s}[e^{-\theta X(t)}]$  را در نظر می گیریم

$$E_{Q_s}[e^{-\theta X(t)}] = E_{Q_s}[e^{-\theta X(t)} | \mathcal{F}_t^\alpha]$$

طبق لم ایتو داریم

$$z(t) = e^{-\theta X(t)},$$

$$dz(t) = \circ - \theta e^{-\theta X(t)} dw_t + \frac{1}{\gamma} \theta^2 e^{-\theta X(t)} dt.$$

هم چنین برای  $X(t)$  داریم

$$f(w, t) = (\mu(\alpha_t) - \frac{1}{\gamma} \sigma^2(\alpha_t)t) + \sigma(\alpha_t)w,$$

$$\partial_w f = \sigma f \quad \partial_w^2 f = \sigma^2 f \quad \partial_t f = (\mu - \frac{1}{\gamma} \sigma^2) f$$

$$df((\mu(\alpha_t) - \frac{1}{\gamma} \sigma^2(\alpha_t))t + \sigma(\alpha_t)w) = \frac{1}{\gamma} \sigma^2(\alpha_t) + \mu(\alpha_t) - \frac{1}{\gamma} \sigma^2(\alpha_t) dt,$$

$$E_{Q_s}(e^{-\theta X(t)} | \mathcal{F}_t^\alpha) = E_{Q_s} \left[ e^{\int_0^t -\theta(\mu(\alpha_s) - \frac{1}{\gamma} \sigma^2(\alpha_s)) + \frac{\theta^2}{\gamma} \sigma^2(\alpha_s) ds} \right]. \quad (20.4)$$

$J_1$  را زمان اشغال شده  $\alpha_t$  در حالت ۱ روی  $[0, t]$  در نظر بگیرید،

$$M = \max\{ | -\theta(\mu(1) - \frac{1}{\gamma} \sigma^2(1)) + \frac{\theta^2}{\gamma} \sigma^2(1) |,$$

$$= | -\theta(\mu(2) - \frac{1}{\gamma} \sigma^2(2)) + \frac{\theta^2}{\gamma} \sigma^2(2) |$$

پس (20.4) را می توان به صورت زیر نوشت

$$E_{Q_s}[\exp\{(-\theta(\mu(1) - \frac{1}{\gamma} \sigma^2(1)) + \frac{\theta^2}{\gamma} \sigma^2(1))J_1 +$$

$$(-\theta(\mu(2) - \frac{1}{\gamma} \sigma^2(2)) + \frac{\theta^2}{\gamma} \sigma^2(2))(t - J_1)\}] \leq e^{Mt}$$

که  $e^{G(\theta,t)} < e^{Mt}$  بنابراین داریم

$$e^{-y} Q_s(m(t) \leq y) = e^{(\theta-1)y} e^{-\theta y} Q_s(m(t) \leq y) \leq e^{(\theta-1)y} E_{Q_s}[e^{-\theta X(t \wedge \tau_y)}]$$

$$= e^{(\theta-1)y} E_{Q_s}[e^{G(\theta,t \wedge \tau_y)}] \leq e^{(\theta-1)y} E_{Q_s}[e^{M(t \wedge \tau_y)}] \leq e^{(\theta-1)y} e^{Mt}$$

□ زمانی که  $y \rightarrow -\infty$  نتیجه حاصل می شود.

**قضیه 2.2.4.** برای هر  $a > \max\{0, \frac{1}{\gamma} \sigma^2(1) - \mu(1) - \theta_1, \frac{1}{\gamma} \sigma^2(2) - \mu(2) - \theta_2\}$  تبدیل لاپلاس

ارزش DFP به صورت زیر به دست می آید

$$\int_0^\infty e^{-aT} V(\circ) dT = \frac{k}{a} \sum_{i=1}^2 A_i [p_1 + k_i p_2] \frac{(\frac{s(\circ)}{k})^{\eta_{i,a}+1}}{-\eta_{i,a} - 1} \quad (21.4)$$

برهان.

$$\begin{aligned} V(\circ) &= E_{Q_s}[s(\circ)\max\{1, \max\frac{k}{s(t)}\}] - s(\circ) \\ &= E_{Q_s}[\max\{s(\circ), s(\circ)\frac{ke^{-mT}}{s(\circ)}\}] - s(\circ) \\ &= E_{Q_s}[\max\{s(\circ), ke^{-mT}\}] - s(\circ) \\ V(\circ) &= s(\circ)Q_s(m(T) > -\ln\frac{s(\circ)}{k}) + E_{Q_s}[ke^{-mT}I(m(T) \leq -\ln\frac{s(\circ)}{k})] - s(\circ). \end{aligned}$$

$$E_{Q_s}[ke^{-mT}I(m(T) \leq -\ln\frac{s(\circ)}{k})] = \int_{-\infty}^{-\ln\frac{s(\circ)}{k}} ke^{-y}dQ_s(m(T) \leq y).$$

با انتگرال گیری جزبه جز نسبت به  $y$  داریم

$$\begin{aligned} &ke^{-y}Q_s(m(T) \leq y) \Big|_{-\infty}^{-\ln\frac{s(\circ)}{k}} - \int_{-\infty}^{-\ln\frac{s(\circ)}{k}} -ke^{-y}Q_s(m(T) \leq y)dy \\ &= (\frac{s(\circ)}{k})kQ_s(m(T) \leq -\ln\frac{s(\circ)}{k}) + \int_{-\infty}^{-\ln\frac{s(\circ)}{k}} ke^{-y}Q_s(m(T) \leq y)dy \\ &= s(\circ)Q_s(m(T) \leq -\ln\frac{s(\circ)}{k}) + \int_{-\infty}^{-\ln\frac{s(\circ)}{k}} ke^{-y}Q_s(m(T) \leq y)dy. \end{aligned}$$

داریم

$$V(\circ) = s(\circ) + \int_{-\infty}^{-\ln\frac{s(\circ)}{k}} ke^{-y}Q_s(m(T) \leq y)dy - s(\circ) = \int_{-\infty}^{-\ln\frac{s(\circ)}{k}} ke^{-y}Q_s(m(T) \leq y)dy. \quad (۲۲.۴)$$

بنابراین

$$\int_{\circ}^{\infty} e^{-aT}V(\circ)dT = \int_{\circ}^{\infty} e^{-aT} \int_{-\infty}^{-\ln\frac{s(\circ)}{k}} ke^{-y}Q_s(m(T) \leq y)dydT. \quad (۲۳.۴)$$

علاوه براین،

$$\begin{aligned} &\int_{\circ}^{\infty} e^{-aT} \int_{-\infty}^{-\ln\frac{s(\circ)}{k}} ke^{-y}Q_s(m(T) \leq y)dydT = k \int_{-\infty}^{-\ln\frac{s(\circ)}{k}} e^{-y} \int_{\circ}^{\infty} e^{-aT}Q_s(m(T) \leq y)dTdy \\ &= k \int_{-\infty}^{-\ln\frac{s(\circ)}{k}} e^{-y} \int_{\circ}^{\infty} e^{-aT}Q_s(m(T) \leq y)dTdy \\ &= k \int_{-\infty}^{-\ln\frac{s(\circ)}{k}} e^{-y} \int_{\circ}^{\infty} e^{-aT}Q_s(\tau_y \leq T)dTdy \\ &= k \int_{-\infty}^{-\ln\frac{s(\circ)}{k}} e^{-y} \frac{1}{a} E_{Q_s}[e^{-a\tau_y}]dy. \quad (۲۴.۴) \end{aligned}$$

یاد آوری می کنیم که  $s(\circ) \geq k$  و همچنین  $-\ln\frac{s(\circ)}{k} < \circ$

علاوه براین،  $a > \max\{\circ, \frac{1}{\rho}\sigma^2(1) - \mu(1) - \theta_1, \frac{1}{\rho}\sigma^2(2) - \mu(2) - \theta_2\}$



می دانیم برای  $i = 1, 2$ ،  $\eta_{i,a} < -1$  است. با توجه به قضیه ۱.۲.۴ روابط زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-aT} V(\circ) dT &= \frac{k}{a} \int_{-\infty}^{-\ln \frac{s(\circ)}{k}} e^{-y} \sum_{i=1}^2 A_i e^{\eta_{i,a} y} [p_1 + k_i p_2] dy \\ &= \frac{k}{a} \sum_{i=1}^2 A_i [p_1 + k_i p_2] \int_{-\infty}^{-\ln \frac{s(\circ)}{k}} e^{-y} e^{\eta_{i,a} y} dy \\ &= \frac{k}{a} \sum_{i=1}^2 A_i [p_1 + k_i p_2] \int_{-\infty}^{-\ln \frac{s(\circ)}{k}} e^{\eta_{i,a} y - y} dy \\ &= \frac{k}{a} \sum_{i=1}^2 A_i [p_1 + k_i p_2] \int_{-\infty}^{-\ln \frac{s(\circ)}{k}} e^{y(\eta_{i,a} - 1)} dy \\ &= \frac{k}{a} \sum_{i=1}^2 A_i [p_1 + k_i p_2] \frac{1}{\eta_{i,a} - 1} e^{y(\eta_{i,a} - 1)} \Big|_{-\infty}^{-\ln \frac{s(\circ)}{k}} \\ &= \frac{k}{a} \sum_{i=1}^2 A_i [p_1 + k_i p_2] \frac{\left(\frac{s(\circ)}{k}\right)^{\eta_{i,a} + 1}}{-\eta_{i,a} - 1}. \end{aligned}$$

□

**تذکر ۳.۲.۴.** تابع مشخصه، یکتا وابسته به توزیع احتمال و با توجه به آن تعیین می شود. پس می توانیم توزیع احتمال زمان گذر اول را با قضیه ۱.۲.۴ به دست آوریم. در واقع، تبدیل لاپلاس توزیع احتمال و تابع مشخصه زمان گذر اول از رابطه‌ی زیر به دست می آید

$$\int_0^{\infty} e^{-aT} Q_s(\tau_b \leq t) dt = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} dQ_s(\tau_b \leq t) = \frac{1}{a} E_{Q_s}[e^{-a\tau_b}].$$

این راه ساده ای برای به دست آوردن توزیع احتمال زمان گذر اول است و ارزش گذاری  $DFP$  با توجه به قضیه ۱.۲.۴ و ۲.۲.۴ با استفاده از معکوس لاپلاس عددی انجام می شود.

تحت مدل رژیم- سوئیچینگ با حرکت براونی هندسی می توانیم یک راه حل صریح برای تبدیل لاپلاس ارزش  $DFP$  به دست آوریم. اما این کار در عمل غیر ممکن است. روش های عددی این امکان را فراهم می کنند و ما با استفاده از تقریب زنجیره مارکوف در بخش بعدی به حل این مشکل پرداخته ایم.

## ۳.۴ مدل انتشار پرش رژیم- سوئیچینگ

در این بخش، ما قیمت گذاری  $DFP$  را تحت انتشار پرش رژیم سوئیچینگ مورد مطالعه قرار می دهیم. پرش یک تغییر ناگهانی است که به توصیف فرآیند ارزش قراردادهای صندوق سرمایه گذاری مشترک می پردازد.

پرش ناپیوسته و ویژگی های مارکوف سوئیچینگ برای پیدا کردن راه حل تحلیلی مشکل ساز هستند. اگرچه سیستم دوتایی معادلات انتگرال تفاضلی می تواند به پیدا کردن ارزش  $DFP$  کمک کند ولی در عمل حل آن ممکن نیست. هدف ما طراحی یک طرح عددی برای تقریب زدن ارزش  $DFP$  است.

### ۱.۳.۴ فرمول بندی و محاسبه عددی

فرآیند ارزش قراردادهای صندوق سرمایه گذاری مشترک با  $Q$  - دینامیک زیر به دست می آید

$$\frac{ds(t)}{s(t)} = (r(\alpha_t) - \lambda\xi)dt + \sigma(\alpha_t)dw_t + d \sum_{i=1}^{N(t)} (V_i - 1). \quad (25.4)$$

که  $N(t)$  فرآیند پواسون با نرخ  $\lambda$  است.  $\xi = E_Q(V_i - 1)$  و  $\{Z_i = \ln(V_i - 1)\}$  دنباله ای مستقل با توزیع یکسان و تابع چگالی  $f_Z(z)$  است. دیگر نمادها در ۱.۴ تعریف شده اند. برای سادگی،  $\mu'(i) = ri - \lambda\xi$  و  $M(t) = \min(s(t), k)$  در نظر گرفته می شود. پس ارزش  $DFP$  در زمان  $t$  به صورت زیر است

$$V(s, M, i, t) = E_Q[e^{-\int_t^T r(\alpha_s)ds} s(T) \max\{1, \max \frac{k}{s(t)}\} - s(T) | s(t) = s, M(t) = M, \alpha_t = i]. \quad (26.4)$$

به ازای هر  $i \in M$ ، ارزش  $DFP$  از سیستم معادلات انتگرال - دیفرانسیل جزئی زیر پیروی می کند

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2(i)s^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + \mu'(i)s \frac{\partial V}{\partial s} - (r(i) + \lambda)V + \sum_{j=1}^m q_{ij}V(s, M, j, t) \\ + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} V(se^z, \min(M, se^Z), i, t) f_Z(z) dz = 0; \quad s \neq M, t > 0 \\ \frac{\partial V}{\partial M} \Big|_{s=M} = 0, \\ V(s, M, i, t) \rightarrow s \{ \max(1, \frac{k}{M}) - 1 \}, \quad s \rightarrow \infty, \\ V(s, M, i, t) = s \{ \max(1, \frac{k}{M}) - 1 \}. \end{array} \right. \quad (27.4)$$

حل ۲۷.۴ به صورت تحلیلی بسیار دشوار است. ما روش تقریب زنجیره مارکوف را برای به دست آوردن راه حل های عددی به عنوان یک جایگزین اتخاذ خواهیم کرد. برای ساده کردن ۲۷.۴ ما  $\tilde{M}(t) = \ln M(t)$ ،  $\tilde{s}(t) = \ln s(t)$  را در نظر می گیریم. بنابراین  $\tilde{V}(\cdot)$  به صورت زیر است

$$\tilde{V}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, t) = V(s, M, i, t).$$

بنابراین ۲۷.۴ را می توان به صورت زیر نوشت

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + \frac{\sigma^2(i)s^2}{\gamma} \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \tilde{s}^2} + \mu'(i) - \frac{\sigma^2(i)}{\gamma} s \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{s}} - (r(i) + \lambda)\tilde{V} + \sum_{j=1}^m q_{ij} \tilde{V}(\tilde{s}, \tilde{M}, j, t) \\ + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}(\tilde{s} + z, \min(\tilde{M}, \tilde{s} + z)) f_Z(z) dz = 0 \quad \tilde{s} \neq \tilde{M}, t > 0 \\ \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{M}} \Big|_{\tilde{s}=\tilde{M}} = 0 \\ \tilde{V}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, t) \rightarrow e^{\tilde{s}} \{ \max(1, \frac{k}{\tilde{M}}) - 1 \}, \quad \tilde{s} \rightarrow \infty \\ \tilde{V}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, T) = e^{\tilde{s}} \{ \max(1, \frac{k}{\tilde{M}}) - 1 \}. \end{array} \right. \quad (28.4)$$

برای طراحی یک الگوی عددی برای  $DFP$  تحت رژیم سوئیچینگ، ما باید زنجیره مارکوف زمان گسسته حالت-متناهی بسازیم که منطبق بر پویایی سیستم ماست. در عمل، ما نیازی به حل کردن ۲۸.۴ نداریم بلکه از آن به عنوان یک راهنما استفاده می کنیم. که راه را برای ساختن زنجیره های مارکوف زمان گسسته ارائه می دهد. توجه کنید که  $\tilde{V}(\cdot)$  به دو حالت  $\tilde{s}, \tilde{M}$  و  $t$  متغیر زمان بستگی دارد. دو اندازه پرش ضروری هستند. ما از  $h > 0$  برای نشان دادن اندازه پرش در حالت های  $\tilde{s}, \tilde{M}$  و  $\delta > 0$  برای نشان دادن اندازه پرش برای زمان استفاده می کنیم. برای هر  $T > 0$ ، از  $N = N(\delta) = \lfloor \frac{T}{\delta} \rfloor$  استفاده می کنیم.

به عنوان یک قرارداد، در مورد زیر، ما اغلب نشانه  $[\cdot]$  را حذف می کنیم و به صورت  $\lfloor \frac{T}{\delta} \rfloor$  می نویسیم و ساده تر  $\frac{T}{\delta}$ . قصد داریم زنجیره مارکوف زمان-گسسته را به منظور به دست آوردن تقریب  $\tilde{V}(\cdot)$  با ۳ مولفه بسازیم. این مولفه ها به ترتیب  $\tilde{s}, \tilde{M}, \alpha_t$  هستند. با این حال، با توجه به ۲۸.۴ مشتق  $\tilde{M}$  وجود ندارد. به این ترتیب برای به دست آوردن تقریبی از  $\tilde{V}(\cdot)$  کافی است دو مولفه  $\tilde{s}, \alpha_t$  تقریب زده شوند. یاد آوری می کنیم که  $s, M \in (0, \infty)$  پس  $\tilde{s}, \tilde{M} \in (-\infty, \infty)$  برای انجام محاسبات کاربردی ما یک مقدار ثابت به اندازه کافی بزرگ و مثبت  $\mathcal{K}$  را به عنوان کران بالا از ارزش دارایی تعیین می کنیم. بنابراین، ارزش  $DFP$  با محدوده دارایی  $G = (-\mathcal{K}, \mathcal{K})$  و محدوده ی زمانی  $\tau = [0, T]$  محاسبه خواهد شد. ما  $s'_h$  شامل  $\tilde{s}$  را به فرم  $\tilde{s} = kh$  قرار می دهیم. یعنی ثابت چند برابر  $h$  برای هر  $k \geq 0$ . یعنی به ازای هر  $h > 0$  داریم

$$s'_h = \{ \tilde{s} : \tilde{s} = kh, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \}.$$

توجه کنید که تقریب فضای حالت برای  $z$  به وسیله  $s_h$  به دست می آید. پس  $s_h = s'_h \cap G$ . قرار دهید  $\{(\xi_n^{h,\delta}, \alpha_n^{h,\delta}), n < \infty\}$  زنجیره مارکوف زمان-گسسته روی فضای حالت گسسته  $s_h \times M$  با احتمال انتقال از حالت  $(x, i) \in s_h \times M$  به حالت دیگر  $(y, j) \in s_h \times M$  به صورت  $P_D^{h,\delta}((x, i), (y, j))$  نمایش داده می شود. برای تقریب  $\tilde{V}(\cdot)$  به یک بازه تعامل زمان-پیوسته نیاز داریم که به صورت  $(\cdot), \xi_n^{h,\delta}(\cdot), \alpha_n^{h,\delta}(\cdot)$  نمایش داده می شوند و به صورت زیر تعریف می شوند

$$\xi_n^{h,\delta}(t) = \xi_n^{h,\delta}, \quad \alpha_n^{h,\delta} = \alpha_n^{h,\delta}, \quad t \in [n\delta, n\delta + \delta]. \quad (29.4)$$

قرار دهید  $\Delta t^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, \delta) > 0$  که بازه ی تعامل است. فرض کنید که به ازای هر  $h > 0$ ،  
 $inf_{\tilde{s}, \tilde{M}, i, \delta} \Delta t^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, \delta) > 0$  و هم چنین داریم

$$\lim_{h, \delta \rightarrow 0} \Delta t^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, \delta) \rightarrow 0.$$

برای تشخیص فرم احتمال از زنجیره مارکوف تقریبی زمان - گسسته تفاضلات متناهی را برای تقریب ۲۸.۴ تعریف می کنیم. برای به دست آوردن راه حل عددی با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ابتدا مشتق جزئی اول و سپس مشتق جزئی دوم را تعریف می کنیم

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, t) &\rightarrow \tilde{V}^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, t), \\ \tilde{V}_t(\tilde{s}, \tilde{M}, i, t) &\rightarrow \frac{\tilde{V}^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, t + \delta) - \tilde{V}^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, t)}{\delta}, \\ \tilde{V}_{\tilde{s}}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, t) &\rightarrow \frac{\tilde{V}^{h,\delta}(\tilde{s} + h, \tilde{M}, i, t + \delta) - \tilde{V}^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, t + \delta)}{h} \quad \mu'(i) - \frac{\sigma^2(i)}{2} > 0, \\ \tilde{V}_{\tilde{s}}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, t) &\rightarrow \frac{\tilde{V}^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, t + \delta) - \tilde{V}^{h,\delta}(\tilde{s} - h, \tilde{M}, i, t + \delta)}{h} \quad \mu'(i) - \frac{\sigma^2(i)}{2} < 0, \\ \tilde{V}_{\tilde{s}\tilde{s}}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, t) &\rightarrow \frac{\tilde{V}^{h,\delta}(\tilde{s} + h, \tilde{M}, i, t + \delta) - 2\tilde{V}^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, t + \delta) + \tilde{V}^{h,\delta}(\tilde{s} - h, \tilde{M}, i, t + \delta)}{h^2}. \end{aligned}$$

در ادامه احتمال انتقال زنجیره مارکوف تقریبی زمان - گسسته برای فرآیند های انتشار تعریف می شود

$$\begin{aligned} P_D^{h,\delta}((\tilde{s}, \tilde{M}, i, n\delta), (\tilde{s}, \tilde{M}, i, n\delta + \delta)) &= 1 - \sigma^2(i) \frac{\delta}{h^2} - |\mu'(i) - \frac{\sigma^2(i)}{2}| \frac{\delta}{h} + q_{ii}\delta, \\ P_D^{h,\delta}((\tilde{s}, \tilde{M}, i, n\delta), (\tilde{s} + h, \tilde{M}, i, n\delta + \delta)) &= \frac{\sigma^2(i)}{2} \frac{\delta}{h^2} + (\mu'(i) - \frac{\sigma^2(i)}{2}) \frac{\delta}{h}, \\ P_D^{h,\delta}((\tilde{s}, \tilde{M}, i, n\delta), (\tilde{s} - h, \tilde{M}, i, n\delta + \delta)) &= \frac{\sigma^2(i)}{2} \frac{\delta}{h^2} + (\mu'(i) - \frac{\sigma^2(i)}{2}) \frac{-\delta}{h}, \quad (30.4) \\ P_D^{h,\delta}((\tilde{s}, \tilde{M}, i, n\delta), (\tilde{s}, \tilde{M}, j, n\delta + \delta)) &= q_{ij}\delta, \quad i \neq j \\ P_D^{h,\delta}(\cdot) = 0, \quad o.w. \quad \Delta t^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, \delta) &= \frac{\delta}{1 + r(i)\delta}, \end{aligned}$$

که  $(\mu'(i) - \frac{\sigma^2(i)}{2})^+$  و  $(\mu'(i) - \frac{\sigma^2(i)}{2})^-$  بخش مثبت و منفی  $(\mu'(i) - \frac{\sigma^2(i)}{2})$  هستند. بدین ترتیب با انتخاب نرخ تنزیل و  $\Delta t^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, \delta)$  که در (۳۰.۴) تعریف شده است ما می توانیم زمانی که  $\delta \rightarrow 0$  آن را بازنویسی کنیم

$$\begin{aligned} & (1 - \lambda \Delta t^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, \delta) + O(\Delta t^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, \delta))) e^{-r(i) \Delta t^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, t)} \\ &= \frac{1}{1 + (r(i) + \lambda)\delta} + O(\delta), \\ &= (\lambda \Delta t^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, \delta) + O(\Delta t^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, \delta))) e^{-r(i) \Delta t^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, t)} \\ &= \frac{\lambda \delta}{1 + (r(i) + \lambda)\delta} + O(\delta). \end{aligned}$$

در عمل، با حل معادلات مربوطه به زنجیره مارکوف تقریبی که در بالا ساخته شد،  $\tilde{V}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, t)$  را محاسبه می‌کنیم برای هر  $\tilde{s} \in s_h$  و  $i \in M$  به شرح زیر است

$$\tilde{V}^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, n\delta) = \begin{cases} (\lambda - \lambda \Delta t^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, \delta) + O(\Delta t^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, \delta))) e^{-r(i)\Delta t^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, n\delta)} \\ \times \sum P_D^{h,\delta}((x, i), (y, j)) \tilde{V}^{h,\delta}(y, \tilde{M}, j, n\delta + \delta) \\ + (\lambda \Delta t^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, \delta) + O(\Delta t^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, \delta))) e^{-r(i)\Delta t^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, \delta)} \\ \times \int_{-k}^k \tilde{V}^{h,\delta}(\tilde{s} + z, \min(\tilde{M}, \tilde{s} + z), i, n\delta + \delta) f_Z(z) dz. \end{cases} \quad (31.4)$$

همگرایی  $\tilde{V}^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, n\delta) \rightarrow \tilde{V}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, n\delta)$  اثبات می‌شود.

برهان.

$$V(s, M, i, t) = E_Q[e^{-\int_t^T r(\alpha_s) ds} (s(T) \max\{1, \max \frac{k}{s(t)}\} - s(T)) | s(t) = s, M(t) = M, \alpha = i]$$

$$V(s, M, i, t) = J,$$

$$J \leq V(s, M, i, t)$$

$$V(s, M, i, t) \geq \limsup_h \tilde{V}^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, t)$$

$$\limsup_h \tilde{V}^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, t) = J \quad (32.4)$$

$$V(s, M, i, t) \leq \liminf_h \tilde{V}^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, t) \quad (33.4)$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad J \geq V(s, M, i, t) - \epsilon$$

$$\liminf_h \tilde{V}^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, t) \rightarrow J$$

$$\liminf_h \tilde{V}^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, t) \geq V(s, M, i, t) - \epsilon,$$

چون  $\epsilon$  دلخواه است داریم

$$\liminf_h \tilde{V}^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, t) \geq V(s, M, i, t)$$

با توجه به (32.4) و (33.4)

$$\tilde{V}^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, t) \rightarrow V(s, M, i, t)$$

$$V(s, M, i, t) = \tilde{V}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, t), t = n\delta$$

$$\tilde{V}^{h,\delta}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, n\delta) \rightarrow \tilde{V}(\tilde{s}, \tilde{M}, i, n\delta)$$

□

## ۴.۴ مثال های عددی

مثال های عددی مدل انتشارپرش رژیم- سوئیچینگ را پیش رو داریم. برای سادگی، ما حالت گسسته که دارای دو حالت با سوئیچینگ های مختلف را بررسی می کنیم. از این رو زنجیره مارکوف زمان- پیوسته دارای دو حالت با مقادیر  $M = \{1, 2\}$  است. مولد زنجیره مارکوف زمان- پیوسته  $\alpha_t$  که نشان دهنده ی گسسته حالت است به صورت زیر تعریف می شود

$$Q = \begin{pmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

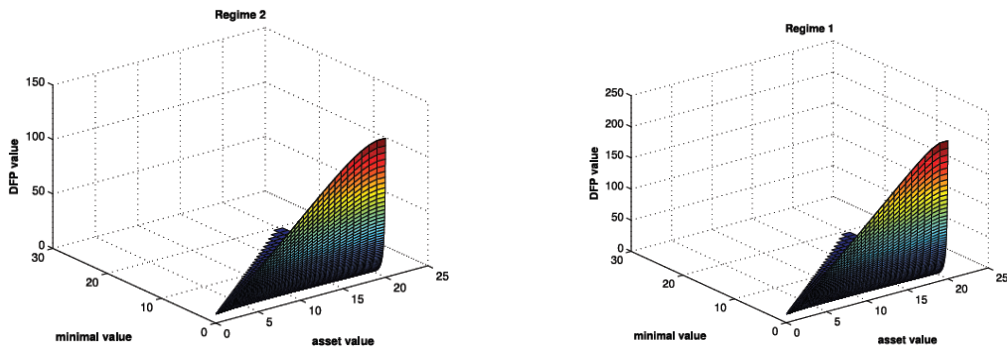
اصطلاح پرش  $Z_i$  دارای توزیع نرمال با تابع چگالی  $f(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(z-1)^2}{2}}$  است.  $\xi = e^{1/5}$ . با توجه به حالت های گسسته مختلف، نرخ بهره دارایی بدون ریسک  $r(1) = 0.04$  و  $r(2) = 0.06$  است. نوسان ارزش سرمایه  $\sigma(\alpha_t)$  به صورت  $\sigma(1) = 0.4$ ،  $\sigma(2) = 0.6$  هستند.

قیمت  $DFP$  را در یک دوره با تاریخ سررسید  $T = 2$  محاسبه می کنیم. ارزش  $DFP$  را زمانی که مقدار سرمایه بین  $[e^{-2}, e^3]$  به دست می آوریم. سپس فرض می کنیم  $s(t), M(t) \in [e^{-2}, e^3]$  که  $M(t)$  حداقل مقدار است. قیمت سررسید  $k$  را  $2$  در نظر می گیریم. توجه داشته باشید که  $V(s, M, i, t)$  یک تابع با  $4$  مولفه است، برای ارائه دید بهتر از اثرات مقدار سرمایه و تاریخ سررسید،  $t = 1$  را تعیین می کنیم.

شکل ۱.۴ شامل دو سطح است که، در مورد دو رژیم بررسی می کنیم. مقادیر  $DFP$  در زمان صفر در رژیم های مختلف به ترتیب نشان داده شده است. از آن جا که  $M \leq s$  مقادیر  $DFP$  در ناحیه مثلی که در آن ناهموازی وجود دارد ترسیم می شوند. علاوه بر این شکل ۳.۱ نشان می دهد که مقادیر  $DFP$  به طور قابل ملاحظه ای بالا هستند زمانی که  $M$  به کران پایین  $s$  و به کران بالا میل کند. این با ساختار  $DFP$  یعنی  $\frac{k}{M} \rightarrow \infty$  به طوری که  $M \rightarrow 0$  سازگار است. علاوه بر این، مقدار سرمایه فعلی  $s$  و مقدار حداقل  $M$ ، هر دو به کران بالا میل می کنند. ارزش مقادیر  $DFP$  به صفر نزدیک می شوند. این بدین دلیل است که کران بالای  $s$  و  $M$  بسیار بیشتر از قیمت سررسید هستند.

اگر صندوق بتواند به ارزشی به اندازه کافی بالاتر از قیمت سر رسید دست پیدا کند بعید است که مقدار سرمایه پایین تر از قیمت سر رسید در طول دوره قرار بگیرد. از این رو، حفاظت بی معنی می شود. در شکل ۱.۴ ارزش  $DFP$  در دو نمودار ثابت است اگرچه بازارها در دو رژیم متفاوت هستند.

در شکل ۲.۴ (آ)  $s = e$  را تعیین می کنیم و رابطه ی بین  $V$  و  $M$  را بررسی می کنیم. از آن جا که مقدار سرمایه  $e$  است، محدوده ی حداقل مقدار تا زمان فعلی  $[e^{-2}, e]$  است. می بینیم که ارزش  $DFP$  افزایش می یابد هنگامی که  $M$  به  $e^{-2}$  میل می کند.  $M$  به عنوان حداقل مقدار

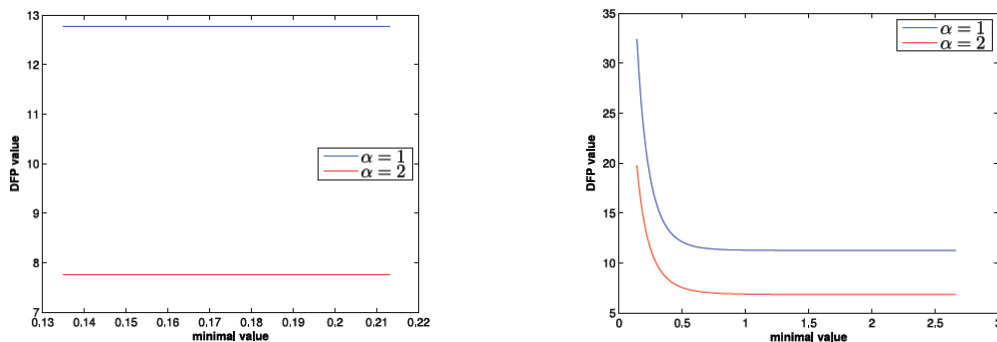


(ب) ارزش  $DFP$  در بازاری که  $r(2) = 0.06$  و  $\sigma(2) = 0.06$  است  
 (آ) ارزش  $DFP$  در بازاری که  $r(1) = 0.04$  و  $\sigma(1) = 0.04$  است

شکل ۱.۴: ارزش  $DFP$  در برابر ارزش سرمایه و زمان

به اندازه کافی کم است، ارزش  $DFP$  افزایش می یابد. این با تابع بازده صندوق حفاظت شده سازگار است.

علاوه بر این، زمانی که حداقل مقدار بزرگتر می شود،  $\frac{k}{M}$  کوچکتر می شود و ارزش  $DFP$  هموار می شود. ارزش سرمایه هنوز فرصتی برای کمتر شدن از قیمت سررسید را دارد به عنوان مثال هنگامی که  $M = 2/5$  و مقدار سرمایه  $e$  است، هرچند هر دو بالاتر از  $k$  هستند مقدار سرمایه همچنان این شانس را دارد که تا قبل از سررسید  $T$  کمتر از ۲ شود. بنابراین، ارزش  $DFP$  با تابع بازده صندوق حفاظت شده سازگار است به طور مشابه رابطه‌ی بین مقادیر  $DFP$  و حداقل مقدار را هنگامی که مقدار سرمایه  $e^{-1/5}$  است، تعیین می کنیم. توجه داشته باشید که مقدار سرمایه و مقدار حداقل هر دو نزدیک به مرز پایین هستند و شرایط مرزی  $\frac{\partial V}{\partial M}|_{s=M} = 0$  غالب است. که در شکل ۲.۴ (ب) نشان داده شده است که ارزش  $DFP$  در هر دو حالت مسطح است.



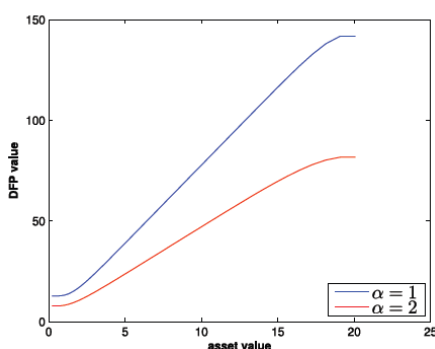
(ب) ارزش  $DFP$  در زمان  $s = t = 0$  و  $e^{-1/5}$   
 (آ) ارزش  $DFP$  در زمان  $s = e$  و  $t = 0$

شکل ۲.۴: ارزش  $DFP$  در برابر حداقل مقدار

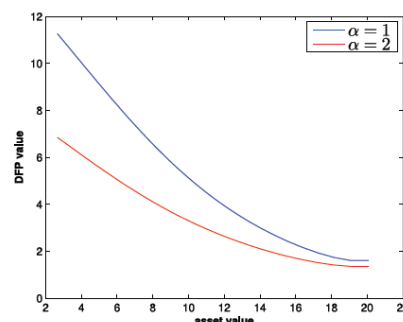
در شکل ۳.۴ مقادیر  $DFP$  روندهای متفاوتی را نسبت به مقادیر سرمایه در  $M$  های مختلف نشان می دهد. در شکل ۳.۴(ا) حداقل مقدار در زمان  $t$  با  $e$  برابر است و بیشتر از قیمت سر رسید است. از این رو  $DFP$  با افزایش مقادیر سرمایه کاهش می یابد. از سوی دیگر شکل ۳.۴(ب) نشان می دهد که ارزش  $DFP$  به طور قابل ملاحظه ای افزایش می یابد هم چنان که مقدار سرمایه به کران بالا میل می کند ولی حداقل مقدار تا زمان  $t$  کمتر از قیمت سر رسید است. علاوه بر این، با توجه به (۲۶.۴) داریم

$$\begin{aligned} V(s, M, i, t) &= E_Q[e^{-\int_t^T r(\alpha_s) ds} (s(T) \{ \frac{k}{\min(s(t))} \} - 1) | s(t) = s, M(t) = M, \alpha_t = i] \\ &\geq E_Q[e^{-\int_t^T r(\alpha_s) ds} (s(T) \{ \frac{k}{M} \} - 1) | s(t) = s, M(t) = M, \alpha_t = i] \\ &= (\frac{k}{M} - 1) E_Q[e^{-\int_t^T r(\alpha_s) ds} s(T) | s(t) = s, M(t) = M, \alpha_t = i]. \end{aligned} \quad (34.4)$$

از این رو، هنگامی که فرآیند ارزش سرمایه از انتشار پخش رژیم سوئیچینگ پیروی کند ارزش  $DFP$  بیشتر از تابع خطی مقدار مورد انتظار (امید) نرخ تنزیل ارزش سرمایه است.



(ب) ارزش  $DFP$  در زمان  $t = 0$  و  $M = e^{-1/5}$



(ا) ارزش  $DFP$  در زمان  $t = 0$  و  $M = e$

شکل ۳.۴: ارزش  $DFP$  در برابر ارزش سرمایه

## ۵.۴ نتیجه گیری

$DFP$  یک حفاظت مداوم را فراهم می کند و باعث می شود سرمایه گذار در طول قرارداد نگرانی نداشته باشد.  $DFP$  یکی از محبوب ترین محصولات در صنعت بیمه است. در این مقاله به ترتیب قیمت گذاری  $DFP$  تحت مدل انتشار رژیم-سوئیچینگ و مدل انتشار پخش رژیم-سوئیچینگ را بررسی کردیم.

مسئله کلیدی برای قیمت گذاری  $DFP$  یافتن توزیعی پویا در حداکثر یا حداقل فرآیند ارزش



سرمایه‌ی مشترک است. در این مقاله تحت مدل انتشار رژیم- سوئیچینگ مارکوف، از تکنیک مارتینگل برای به دست آوردن تبدیل لاپلاس در فرآیند انتشار رژیم- سوئیچینگ استفاده کردیم.

تبدیل لاپلاس ارزش  $DFP$  که به دست می‌آید، می‌تواند به طور مستقیم توسط سرمایه‌گذاران مورد استفاده قرار بگیرد. با این حال، هنگامی که جهش گنجانیده شود تکنیک مارتینگل برای به دست آوردن تبدیل لاپلاس فرآیند انتشار پرش رژیم سوئیچینگ دشوار است. در مدل پیشنهادی انتشار پرش رژیم- سوئیچینگ ارزش قراردادهای صندوق سرمایه گذاری پویا و حفاظت شده را نمی‌توان به صورت تحلیلی حل کرد.

ما روش تقریبی زنجیره مارکوف و یک الگوریتم عددی جایگزین پیشنهاد می‌کنیم. نتایج عددی به مدیران مالی و بیمه این امکان را می‌دهد که ضررهای ناشی از تصمیمات ضعیف را کاهش دهند. در مطالعات بیشتر، می‌توان سطح تضمین تصادفی  $DFP$  را به عنوان یک فرصت در نظر گرفت.



# مراجع

- [۱] سیاح س. و صالح آبادی ع.، (۱۳۸۴)، ”مبانی مهندسی مالی و مدیریت ریسک”، گروه رایانه تدبیر پرداز.
- [۲] ظهوری زنگنه ب. و جهانی پور ر.ا.، (۲۰۰۴)، ”حرکت براونی یا فرآیند وینر: ریاضی مدل ساز پدیده های طبیعی”، **مجله فرهنگ و اندیشه ریاضی**، ص ۱-۲۰.
- [۳] عسکری ر.، (۱۳۹۶)، پایان نامه ارشد: ”روشی سریع ودقیق برای قیمت گذاری اختیار معامله در بازاری با مدل پرش نمایی مضاعف با تلاطم و اندازه شدت تصادفی”، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [۴] نمازی ن. ، (۱۳۹۶)، پایان نامه ارشد: ”مینیمم سازی موضعی ریسک قیمت گذاری اختیار معامله در بازارهای ناکامل مارکوفی”، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [۵] نیسی ع.، ملکی ب. و رضائیان ر.، (۱۳۹۵)، ”تخمین پارامترهای مدل قیمت گذاری اختیار معامله اروپایی تحت دارایی پایه با تلاطم تصادفی با کمک رهیافت تابع زیان”، **مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار**، شماره ۲۸.

[6] Aliprantis C.D. and Burkinshaw O. (1998), ”Principles of real analysis”, Gulf Professional Publishing.

[7] Ang A. ,and Bekaert G.(2002) ,” International asset allocation with regime shifts”,**Rev. Finan. Stud.** , 15 (4), 1137–1187.

[8] Bernyk V., Dalang R.C. ,and Peskir G. (2008), ”The law of the supremum of a stable Lévy process with no negative jumps”,**Ann. Probab.**, 1777–1789.

[9] Black F. and Scholes M. (1973) , ”The pricing of options and corporate liabilities”, **Journal of political economy** , 637–654.

[10] Cai N.,and Kou S.G.(2011),” Option pricing under a mixed-exponential jump diffusion model”,**Manage. Sci.**, 57 (11) , 2067–2081.

- [11] Fung H.K. , and Li L.K. (2003) ,” Pricing discrete dynamic fund protections”,**N. Am. Actuar. J** ,7 (4) ,23–31.
- [12] Gerber H.U. , Landry B. (1998) , ”On the discounted penalty at ruin in a jump-diffusion and the perpetual put option”, *Insurance Math. Econom*, 22 (3) 263–276.
- [13] Gerber H.U. ,and Pafumi G.(2000) ” Pricing dynamic investment fund protection”,**N. Am. Actuar. J** , 4 (2) ,28–37.
- [14] Gerber H.U., and Shiu E.S. (1998),” Pricing perpetual options for jump processes”,**N. Am. Actuar. J** , 2 (3) , 101–107.
- [15] Gerber H.U., and Shiu E.S.(1999),” From ruin theory to pricing reset guarantees and perpetual put options”,**Insurance Math. Econom**, 24 (1), 3–14.
- [16] Gerber H.U.,and Shiu E.S. (2003),” Pricing lookback options and dynamic guarantees”,**N. Am. Actuar. J** , 7 (1), 48–66.
- [17] Gerber H.U.,and Shiu E.S.(2003),” Pricing perpetual fund protection with withdrawal option”,**N. Am. Actuar. J** , 7 (2), 60–77,
- [18] Gerber H.U. , Shiu E.S. ,and Yang H.(2012) ,” Valuing equity-linked death benefits and other contingent options: a discounted density approach”, **Insurance Math. Econom**, 51 (1), 73–92.
- [19] Gerber H.U. , Shiu E.S. ,and Yang H.(2013) , ”Valuing equity-linked death benefits in jump diffusion models”, **Insurance Math. Econom**, 53 (3), 615–623.
- [20] Hamilton J.D. (1994), ”**Time Series Analysis**”, Princeton University Press, 2.
- [21] Imai J.,and Boyle P.P.(2001) ,” Dynamic fund protection”,**N. Am. Actuar. J** , 5 (3) , 31–47.
- [22] Jin Z., Qian L., Wang W., and Wang R.(2016),”Pricing dynamic fund protections with regime-switching”,**Journal of computational and applied mathematics** ,297,13-25.
- [23] Jin Z., Yang H. ,and Yin G.(2013),” Numerical methods for optimal dividend payment and investment strategies of regime-switching jump diffusion models with capital injections”,**Automatica**, 49 (8) , 2317–2329.
- [24] Kim C. J. and Nelson C. R. (1999), ”**State-space models with regime switching**, The MIT Press, England.

- [25] Kou S.G.,and Wang H.(2003) ," First passage times of a jump diffusion process",**Adv. Appl. Probab**, 35 ,504–531.
- [26] Kou S.G. ,and Wang H.(2004) ," Option pricing under a double exponential jump diffusion model", **Manage. Sci.**, ,50 (9) , 1178–1192.
- [27] Øksendal B. (2003), "**Stochastic differential equations**", In Stochastic differential equations Springer Berlin Heidelberg, 65-84.
- [28] Peszat S. and Zabczyk J. (2007),"**Stochastic partial differential equations with Lévy noise: An evolution equation approach**", Cambridge University Press, 113.
- [29] Pillay E. and O'Hara J. (2011), "FFT based option pricing under a mean reverting process with stochastic volatility and jumps", **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 235 (12), 3378–3384.
- [30] Raymond J. E. and Rich R. W. (1997), "Oil and the macroeconomy: A Markov state-switching approach" **Journal of Money, Credit, and Banking**, pp 193-213.
- [31] Siu C.C., Yam S.C.P., Yang H. (2015), "Valuing equity-linked death benefits in a regime-switching framework", **ASTIN Bull**, 45 (02) , 355–395.
- [32] Sturm A. and Björk, T. (2001), "**Arbitrage Theory in Continuous Time**".
- [33] Tse W.M. , Chang E.C., and Mok L.K. Li, H.M. (2008), "Pricing and hedging of discrete dynamic guaranteed funds",**J. Risk Insurance** ,75 (1) ,167–192.
- [34] Wong H.Y. (2007), "Analytical valuation of dynamic fund protection under CEV, WSEAS Trans",**Math**, 6 (2) ,324–329.
- [35] Wong H.Y. , and Chan C.M. (2007) ," Lookback options and dynamic fund protection under multiscale stochastic volatility",**Insurance Math. Econom**, 40 (3) , 357–385.
- [36] Wong H.Y. ,and Lam K.W. (2009), "Valuation of discrete dynamic fund protection under Lévy processes",**N. Am. Actuar. J**, 13 (2), 202–216.



# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Option	اختیار معامله
Call Option	اختیار خرید
Put Option	اختیار فروش
Strike price	قیمت توافقی
Exercise price	تاریخ انقضا
Stock price	قیمت توافقی
Pay off	بازده
Portfolio	سبد سهام
Interest rate	نرخ بهره
Dividend rate	نرخ سود نقدی
To hedge a risk	پوشش دهندگان ریسک
Speculation	سفته بازان
Arbitrage	آربیتراژ
Contingent Claim	ادعای مشروط
Self financing	خودتامین
Fast Fourier transform	تبدیل فوریه سریع
Monte Carlo	شبیه سازی مونت کارلو
Discounted	گسسته
Binary	دوتایی





# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Probability	احتمال
Measure	اندازه
Discrete	گسسته
Distribution	توزیع
Stochastic	تصادفی
Expectation	امید ریاضی
Characteristic function	تابع مشخصه
Brownian motion	حرکت براونی
Poisson process	فرآیند پواسون
Levy process	فرآیند لوی
Ito	ایتو
Volatility	تلاطم
Intensity	شدت
Jump	پرش
Diffusion	انتشار

## **Abstract**

This dissertation deals with the valuation of dynamic fund protections in a Markov regime-switching environment. The volatility switches over time subject to a continuous-time Markov chain. Using a regime-switching diffusion process to describe the primary mutual fund value, explicit solutions of the Laplace transforms of the value of the dynamic fund protection are obtained through martingale technique. Moreover, we analyze the value of dynamic fund protections under a generalized regime-switching jump diffusion model. Due to the complexity of Markov regime-switching, the jump process involved, and the nonlinearity, closed-form formulas for dynamic fund protection prices are virtually impossible to obtain. We design a numerical algorithm according to the Markov chain approximation techniques and obtain numerical results of the value of dynamic fund protection.

Keywords: Dynamic fund protection, Martingale technique, Markov chain, Regime switching



**Shahrood University of Technology**

**Faculty of Mathematical Sciences**

**MSc Thesis in: Financial Mathematics**

**Pricing dynamic fund protections with  
regime switching**

**By: Maryam Lotfi**

**Supervisors**

**Dr. Elham Dastranj**

**Dr. Mojtaba Mirlohi**

**January 2018**