بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

نتایجی در عدد احاطه‌گری مکانی همسایه باز در گراف‌ها

نگارنده: زبیده بادودم

استاد راهنما

دکتر نادر جعفری‌راد

مهر ۱۳۹۶

شماره:
تاریخ:

باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود
مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم **زبیده بادودم** با شماره دانشجویی **۹۴۰۳۲۷۴** رشته ریاضی کاربردی گرایش گراف و ترکیبیات تحت عنوان **نتایجی در عدد احاطه‌گری مکانی همسایه باز در گراف‌ها** که در تاریخ **۹۶/۷/۱۷** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه: عالی/خوب) ☑ **مردود** ☐

نوع تحقیق: **نظری** ☑ **عملی** ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	دکتر نادر جعفری‌راد	دانشیار	
۲- استادراهنمای دوم	-	-	
۳- استاد مشاور	-	-	
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر محمدرضا ربیعی	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر میثم علیشاهی	استادیار	
۶ـ استاد ممتحن دوم	دکتر صادق رحیمی شعرباف	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم به پدر و مادر عزیزتر از جانم ...

تنها حامیان زندگی ام

چراغ راهنمای تاریکی ام

پشتیبان روزهای دلتنگی ام

که موهای خود را در راه من سپید کردید و تقدیم به خانواده ی عزیز و عموی بزرگوارم

که همواره مشوق و پشتوانه ی من بودید و هر چه بکوشم قطره ای از دریای بی کران

مهربانیتان را نتوانم سپاس گویم

و تقدیم به آنان که دوستشان دارم.

سپاس‌گزاری...

خداوند منان را شاکرم که عشق به آموختن را در دلم نهاد تا قدر لحظه به لحظه‌های زندگی را بدانم و از تجربه بودن در کنار یکدیگر درس خوب زندگی کردن، حق و اخلاق را بیاموزم. باشد که در فرصت باقی‌مانده عمر ادای دین فرموده و در زندگی خود به کار ببندم.

در ابتدا از اولین و بزرگترین حامیان زندگیم پدر و مادر عزیز و بزرگوارم که مرا به جان پروردند و امید رسیدن به افق‌های روشن پیروزی را در دلم شکوفا کردند، از صمیم قلب تشکر می کنم.

بر خود لازم می‌دانم از استاد راهنمای گرامی‌ام، جناب آقای دکتر نادر جعفری‌راد که با در اختیار گذاشتن وقت گرانبهایشان در بهتر شدن این پایان‌نامه کمک کردند، تشکر کنم.

از جناب آقای دکتر میثم علیشاهی و جناب آقای دکتر صادق رحیمی شعرباف که قبول زحمت کرده، داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند و با دقت و حوصله فراوان در باز خوانی و تصحیح این پایان‌نامه مرا یاری دادند تشکر می‌کنم.

در پایان به پاس احترام به مقام والای معلم در مقام تمام معلمان و اساتید محترم که در محضرشان کسب فیض نموده و کویر تشنه وجودم را از چشمه جوشان معرفتشان سیراب ساخته‌ام، سر تعظیم فرود آورده و مراتب سپاس‌گزاری خود را از ایشان ابراز می‌دارم.

زبیده بادودم
مهر ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب **زبیده بادودم** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **نتایجی در عدد احاطه‌گری مکانی همسایه باز در گراف‌ها** ، تحت راهنمایی دکتر **نادر جعفری‌راد** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ’’ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

زبیده بادودم
مهر ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

زیرمجموعه D از رئوس گراف $G=(V,E)$، یک مجموعه احاطه‌گر مکانی همسایه باز (مجموعه OLD) برای G است، اگر برای هر دو رأس متمایز u و v از $V(G)$ مجموعه‌های $N(u)\cap D$ و $N(v)\cap D$ ناتهی و متمایز باشند. عدد احاطه‌گری مکانی همسایه باز $OLD(G)$ کوچک‌ترین اندازه مجموعه OLD برای G است.

در این پایان‌نامه نشان داده خواهد شد که تعیین مجموعه احاطه‌گر مکانی همسایه باز از جمله مسائل NPـ کامل است. سپس مینیمم امکان درصدی رئوس مجموعه های احاطه‌گر مکانی همسایه باز را در شبکه گراف‌های نامتناهی گوناگون بررسی می‌کنیم. همچنین به بررسی و بیان نتایجی در خصوص عدد احاطه‌گری مکانی همسایه باز در مسیرها، درخت‌ها و گراف‌ها می‌پردازیم و کران‌هایی برای عدد احاطه‌گری مکانی همسایه باز را برای این نوع از گراف‌ها به دست می‌آوریم.

کلمات کلیدی: مجموعه احاطه‌گر مکانی همسایه باز، عدد احاطه‌گر مکانی همسایه باز، مینیمم امکان درصدی رئوس برای شبکه گراف‌های نامتناهی

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فصل ۱

مقدمات و تعاریف

۱.۱ مقدمه

مفهوم احاطه‌گری[۱] در گراف‌ها کاربردهای زیادی در زمینه‌های مختلف مانند علوم کامپیوتر، شبکه‌های الکترونیکی و ... دارد.
از جمله کاربردهای آن می‌توان در زمینه مخابرات، انتخاب بهترین مکان برای احداث بیمارستان و مراکز آتش‌نشانی و ... نام برد. این مفهوم نخستین بار در سال ۱۹۸۳ توسط دوجیکنیش،[۲] روی صفحه‌ی شطرنج مورد استفاده قرار گرفت اما بعدها به عنوان یک بحث نظری در نظریه‌ی گراف‌ها مورد بررسی و مطالعه قرار گرفت و تاکنون مقالات متعددی در این زمینه به چاپ رسیده است.
برای مثال یک مرکز آتش‌نشانی برای کمک رسانی برای مردم یک شهر با در نظر گرفتن تراکم جمعیت در آن شهر اقداماتی انجام دهد. با این حال این مرکز در نظر دارد که تعداد پرسنل آتش‌نشانی مورد نظر را به حداقل برساند و در عین حال همه‌ی نقاط مختلف شهر را نیز پوشش دهد.
برای این منظور نقاط مختلف منطقه‌ی مورد نظر را به عنوان رئوس گراف در نظر می‌گیریم و با قرار دادن پرسنل‌های آتش نشانی، تمامی مناطقی که می‌تواند پوشش دهد را به کمک

[۱] Dominating
[۲] Do Jacnish

خطوطی به آن متصل می‌کنیم و به این ترتیب یال‌های گراف مورد نظر را رسم کرده و گرافی طراحی می‌کنیم. حال به دنبال کمترین نقاطی هستیم که تمامی نقاط بیرونی را پوشش دهد.
امروزه نظریه‌ی احاطه‌گری در گراف‌ها از حیطه‌های جذاب پژوهشی می‌باشد و بسیاری از پژوهش‌گران در این خصوص مشغول مطالعه و تحقیق هستند.
مجموعه‌های احاطه‌گر مکانی همسایه باز در سال ۲۰۱۰ توسط پیتر[۳] معرفی شده است. ایده تعریف مجموعه‌های احاطه‌گر مکانی همسایه باز بر اساس مدل جدیدی از حفاظت از رأس‌های یک گراف از جمله بیگانگان گرفته شده است و کاربردهای گوناگون در مسائل از جمله حفاظت از اهداف محرمانه و مخابرات دارد.

۲.۱ تعاریف

در این بخش به تعاریفی که در پایان‌نامه مورد استفاده قرار گرفته می‌پردازیم. تمام تعاریف این فصل برگرفته از مراجع [۵، ۱۳] می‌باشد.

۱.۲.۱ مفاهیم نظریه گراف

تعریف ۱.۲.۱. منظور از یک **گراف**[۴] یک سه‌تایی $(V(G), E(G), \Psi(G))$ است که در آن $V(G)$ یک مجموعه ناتهی از عناصر به نام رئوس و $E(G)$ مجموعه‌ای از یال‌ها و $\Psi(G)$ تابع وقوع است که به هر یال G یک جفت نامرتب (نه لزوماً مجزا) از رأس‌های G را متناظر می‌کند. اگر e یک یال و v_1 و v_2 رأس‌های آن باشند به قسمی‌که $\Psi(e) = v_1v_2$ آن‌گاه گویند e، v_1 را به v_2 وصل می‌کند و این دو رأس را دو انتهای e نامند. از این پس گراف به طور خلاصه به صورت $G = (V, E)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱. در گراف G، دو رأس v و w را **مجاور**[۵] گویند، هرگاه به وسیله یک یال به هم وصل شوند. همچنین دو یال متمایز از G را مجاور گویند، هرگاه یک رأس مشترک داشته باشند.

تعریف ۳.۲.۱. یک رأس را در گراف G **تنها**[۶] گویند، هرگاه هیچ یالی متصل با آن نباشد.

تعریف ۴.۲.۱. **طوقه**[۷] در یک گراف یالی است که دو رأس انتهایی آن‌ها برهم منطبق باشند. همچنین، اگر در یک گراف بین دو رأس دلخواه u و v دو یا بیش از دو یال وجود داشته باشند، آن‌گاه آن‌ها را **یال‌های چندگانه**[۸] می‌نامند.

[۳] Peter
[۴] Grapg
[۵] Adjacent
[۶] Sigle
[۷] Loop
[۸] Multiple edges

تعریف ۵.۲.۱. یک **گراف ساده**[۹] گرافی است که هیچ طوقه‌ای نداشته باشد و بین هر دو رأس آن بیش از یک یال موجود نباشد.

تعریف ۶.۲.۱. اگر $v \in V(G)$ باشد تعداد یال‌های واقع بر رأس v را **درجه**[۱۰] رأس v می‌گویند و آن را با $\deg(v)$ یا $d_G(v)$ نشان می‌دهند. بزرگ‌ترین درجه در میان درجات رئوس گراف G با $\Delta(G)$ و کوچک‌ترین درجه با $\delta(G)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۷.۲.۱. **گراف تهی**[۱۱] گرافی است، شامل $n \geq 1$ رأس، که مجموعه یال‌های آن تهی باشد.

تعریف ۸.۲.۱. گرافی که یک رأس داشته باشد، **گراف بدیهی**[۱۲] و سایر گراف‌ها را **گراف غیر بدیهی**[۱۳] می‌نامند.

تعریف ۹.۲.۱. اگر مجموعه رأس‌های یک گراف، متناهی باشد گراف مذکور را **گراف متناهی**[۱۴] می‌نامند. در غیر این صورت گراف، **گراف نامتناهی**[۱۵] است.

تعریف ۱۰.۲.۱. **گراف به طور محلی متناهی**[۱۶] گرافی است که درجه هر رأس آن متناهی باشد. درخت‌های kـ منتظم مثالی از گراف‌های به طور محلی متناهی هستند.

تعریف ۱۱.۲.۱. اگر مجموعه رأس‌های یک گراف نامتناهی قابل شمارش باشد گراف مذکور را **گراف شمارای نامتناهی**[۱۷] می‌نامند.

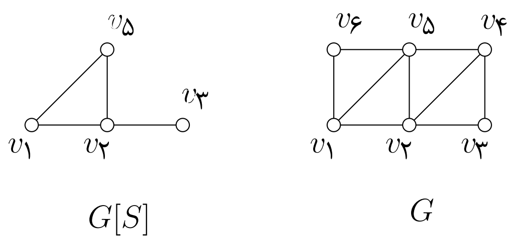
تعریف ۱۲.۲.۱. یک **زیرگراف**[۱۸] از گراف G، گرافی است مانند H به طوری‌که $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$.

تعریف ۱۳.۲.۱. تعداد رئوس گراف G را **مرتبه**[۱۹] گراف G می‌نامند و با $n(G)$ یا n نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنید G یک گراف با مجموعه رئوس V و $S \subseteq V$ باشد. زیرگرافی از G که مجموعه رئوس آن S باشد و یال‌هایی از G در آن باشند که هر دو رأس پایانی آن‌ها متعلق

---
[۹] Simple graph
[۱۰] Degree
[۱۱] Empty graph
[۱۲] Trivial graph
[۱۳] Nonrtivial graph
[۱۴] Finite graph
[۱۵] Infinite graph
[۱۶] Locally-finite graph
[۱۷] Countably infinite graphs
[۱۸] Sub graph
[۱۹] Order

به S است را **زیرگراف القایی**[۲۰] S می‌نامند و با نماد $G[S]$ نشان داده می‌شود. برای نمونه در شکل (۱.۱)، گراف سمت راست G و اگر $S=\{v_1,v_2,v_3,v_5\}$، آن‌گاه گراف سمت چپ $G[S]$ خواهد بود.



شکل ۱.۱: گراف G و $G[S]$

تعریف ۱۵.۲.۱. [۲۷] یک رأس از درجه یک را **رأس پایانی**[۲۱] گراف G می‌نامند.

تعریف ۱۶.۲.۱. [۲۸] مجموعه‌ای از رئوس گراف G که با رأس v مجاور باشند را **همسایگی باز**[۲۲] رأس v و $N(v)\cup\{v\}$ را **همسایگی بسته**[۲۳] رأس v می‌نامند و به ترتیب با $N(v)$ و $N[v]$ نمایش داده می‌شود. به عبارت دیگر داریم:

$$N(v)=\{w\in V(G)\;:\;vw\in E(G)\},$$

$$N[v]=N(v)\cup\{v\}.$$

تعریف ۱۷.۲.۱. یک **گشت**[۲۴] به طول k در گراف G یک دنباله متناوب $v_0,e_1,v_1,e_2,\ldots,e_k,v_k$ از رأس‌ها و یال‌ها است به‌طوری‌که به ازای $i=1,2,\ldots,k$، $e_i=v_{i-1}v_i$ یک یال باشد.

تعریف ۱۸.۲.۱. گشتی که در آن هیچ یالی تکرار نشده باشد را **گذر**[۲۵] می‌نامند.

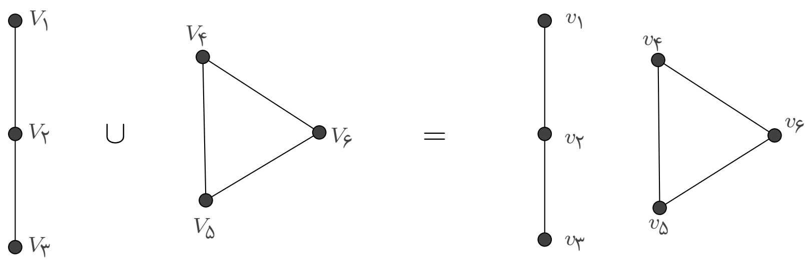
تعریف ۱۹.۲.۱. یک **مسیر**[۲۶] گشتی است که هیچ رأس تکراری نداشته باشد. یک مسیر را در یک گراف به صورت دنباله فهرست مرتبی از رأس‌های متمایز $v_0,v_1,\ldots,v_n$ در نظر می‌گیرند به‌طوری‌که $v_{i-1}v_i$ به ازای هر $1\le i\le n$، یک یال باشد. یک مسیر n رأسی را با P_n نمایش می‌دهند.

[۲۰] Induced subgraph
[۲۱] End-vertex
[۲۲] Open neighbourhood
[۲۳] Closed neighbourhood
[۲۴] Walk
[۲۵] Trail
[۲۶] Path

تعریف ۲۰.۲.۱. در مسیر $v_1v_2\dots v_mv_{m+1}$ اگر $v_1 = v_{m+1}$ باشد آن را یک **دور**[۲۷] می‌نامند و یک دور با طول m را با C_m نشان می‌دهند.

تعریف ۲۱.۲.۱. فرض کنید u و v دو رأس از گراف G باشند که حداقل یک مسیر بین آن‌ها در G موجود است. **فاصله**[۲۸] بین u و v در گراف G، طول کوتاه‌ترین مسیر از u به v است. فاصله بین u و v در گراف G را با $d_G(u,v)$ و یا به طور مختصر با $d(u,v)$ نشان می دهند. اگر G دارای چنین مسیری نباشد، آن‌گاه تعریف می‌کنند $d(u,v) = \infty$.

تعریف ۲۲.۲.۱. گراف $G = (V,E)$ که در آن $V = V_1 \cup V_2$ و $E = E_1 \cup E_2$ را **اجتماع** G_1 و G_2 نامیده و با $G_1 \cup G_2$ نشان می‌دهند. شکل (۲.۱) مثالی از اجتماع دو گراف را نشان می‌دهد.



شکل ۲.۱: اجتماع دو گراف G_1 و G_2.

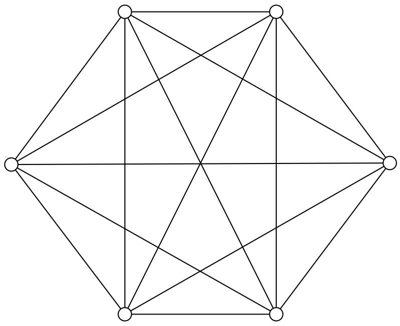
تعریف ۲۳.۲.۱. گرافی که بین هر دو رأس آن مسیری وجود دارد را یک **گراف همبند**[۲۹] نامند. گرافی که همبند نباشد، را **ناهمبند**[۳۰] و هر یک از اجزای همبند آن را یک مؤلفه می‌نامند.

تعریف ۲۴.۲.۱. گراف G را **منتظم**[۳۱] نامند هرگاه درجه تمام رئوس آن با هم برابر باشند. اگر درجه هر رأس r باشد، آن‌گاه گراف را rـ منتظم می‌نامند.

تعریف ۲۵.۲.۱. یک گراف ساده را که هر دو رأس متمایز آن مجاور باشند، یک **گراف کامل**[۳۲] می‌نامند. گراف کامل با n رأس را معمولاً به صورت K_n نشان می‌دهند.

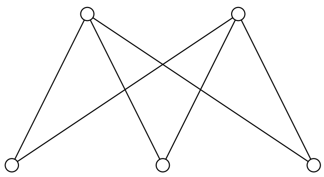
تعریف ۲۶.۲.۱. **گراف دوبخشی**[۳۳] گرافی است که مجموعه رأس‌های آن به دو زیرمجموعه X و Y چنان افراز شود، که یک سر تمام یال‌های G در X و سر دیگر آن‌ها در Y باشد. یک

[۲۷] cycle
[۲۸] Distance
[۲۹] connected graph
[۳۰] Disconnected graph
[۳۱] regular
[۳۲] Complete graph
[۳۳] bipartite graph



شکل ۳.۱: گراف کامل $K_۵$

گراف دوبخشی با بخش‌های X و Y، که در آن هر رأس X، به هر رأس Y وصل شده باشد، گراف دوبخشی کامل نامیده می‌شود. اگر $|X| = m$ و $|Y| = n$، آن‌گاه گراف دوبخشی کامل با بخش‌های X و Y را با $K_{m,n}$ نمایش می‌دهند.



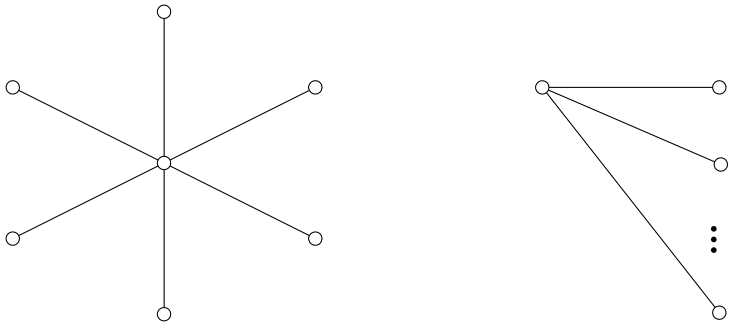
شکل ۴.۱: گراف دوبخشی کامل $K_{۲,۳}$

تعریف ۲۷.۲.۱. گراف ستاره[۳۴] به صورت $K_{۱,n-۱}$، یک رأس از درجه $n-۱$ و $n-۱$ رأس از درجه یک دارد. گراف ستاره را با $S_{n-۱}$ نیز نشان می‌دهند.

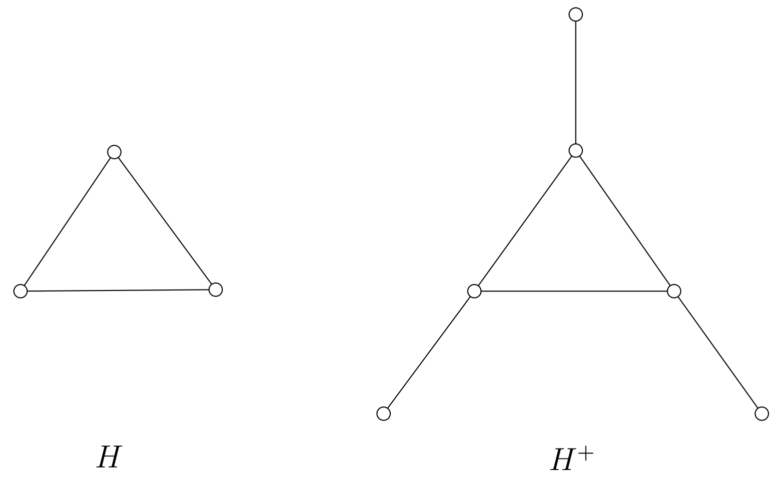
تعریف ۲۸.۲.۱. تاج[۳۵] در یک گراف مانند H که با H^+ یا $cor(H)$ نمایش داده می‌شود، گرافی از مرتبه $۲|V(H)|$ است که با اضافه کردن یک یال آویزان به هر رأس از گراف H به دست می‌آید.

تعریف ۲۹.۲.۱. فرض کنید G و H دو گراف به ترتیب از مرتبه‌ی $n_۱$ و $n_۲$ باشند. **گراف تاج**[۳۶] گراف GoH به عنوان گراف به دست آمده از G و H با استفاده از گرفتن یک کپی از G، $n_۱$ کپی از H و متصل کردن آن به هر رأس از iـامین کپی از H با یالی به iـامین رأس از G،

[۳۴] Star graph
[۳۵] Corona
[۳۶] Corona graph



شکل ۵.۱: مثالی از گراف ستاره



شکل ۶.۱: H^+ مثالی از گراف تاج

تعریف می‌شود. از این پس، ما مجموعه رئوس G را با $V = \{u_۱, u_۲, \dots, u_n\}$، و iــامین کپی از H در GoH را توسط $H_i = (V_i.E_i)$ تعریف خواهیم کرد.

تعریف ۳۰.۲.۱. یک گراف فاقد دور را **جنگل**[۳۷] می‌نامند.

تعریف ۳۱.۲.۱. یک جنگل همبند را یک **درخت**[۳۸] می‌نامند. به عبارت دیگر گراف همبند فاقد دور را درخت می‌نامند. از آن‌جایی که طوقه و یال چندگانه دور تشکیل می‌دهند لذا جنگل‌ها و درخت‌ها گراف‌های ساده هستند.

[۳۷] Forest
[۳۸] Tree

تعریف ۳۲.۲.۱. هر رأس از درجه یک از درخت را رأس آویخته یا **برگ**[۳۹] می‌نامند. هر درخت از مرتبه‌ی بزرگتر از یک، حداقل دو برگ دارد. مجموعه برگ‌های درخت را با $Leaf(T)$ نمایش می‌دهند که رأسی از درجه یک می‌باشد.

تعریف ۳۳.۲.۱. [۲۷] رأس پشتیبان، یک رأس غیر برگ است که مجاور با یک برگ باشد. در واقع همسایه یک رأس پایانی را یک **رأس پشتیبان**[۴۰] گویند.

تعریف ۳۴.۲.۱. [۷] یک **رأس پشتیبان قوی**[۴۱] x، حداقل دو رأس پایانی در $N(x)$ دارد.

تعریف ۳۵.۲.۱. [۲۲] فرض کنید G گرافی همبند و v رأسی دلخواه از آن باشد. **خروج از مرکز**[۴۲] یک رأس u که آن را با $e(u)$ نشان می‌دهند را به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$e(u) = \max\{d(u,v) : v \in V(G)\}.$$

تعریف ۳۶.۲.۱. در گراف همبند G، بزرگ‌ترین خروج از مرکز به ازای همه رئوس را **قطر**[۴۳] گراف G گویند و با $diam(G)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$diam(G) = \max\{e(u) : u \in V(G)\}.$$

و کوچک‌ترین خروج از مرکز به ازای همه رئوس G را **شعاع**[۴۴] G می‌گویند و با $r(G)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنند:

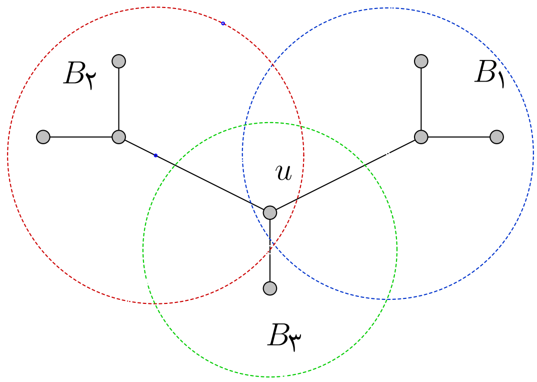
$$r(G) = min\{e(u) : v \in V(G)\}.$$

تعریف ۳۷.۲.۱. رأس v از گراف G را **رأس مرکزی**[۴۵] می‌گویند هرگاه $e(G) = r(G)$ باشد. مجموعه رأس‌های مرکزی G را مرکز G می‌نامند.

تعریف ۳۸.۲.۱. طول کوتاه‌ترین دور در گراف را **کمر**[۴۶] گراف G گویند و آن را با $g(G)$ نمایش می‌دهند. برای مثال کمر گرافی که شامل مثلث است، سه است. توجه کنید اگر گراف هیچ دوری نداشته باشد کمر گراف را صفر در نظر می‌گیرند.

تعریف ۳۹.۲.۱. [۲۲] یک **شاخه**[۴۷] در رأس u از درخت T یک زیردرخت ماکسیمال شامل u است که u به عنوان یک رأس پایانی است. تعداد شاخه‌ها در u را با $d(u)$ نشان می‌دهند. به عنوان مثال در شکل (۷.۱) $B_۱$ و $B_۲$ و $B_۳$ شاخه‌های موجود در رأس u را نشان می‌دهند.

[۳۹] leaf
[۴۰] support vertex
[۴۱] strong support vertex
[۴۲] Eccentricity
[۴۳] Diameter
[۴۴] Radius
[۴۵] Path center
[۴۶] girth
[۴۷] branch



شکل ۷.۱: $B_۱$ و $B_۲$ و $B_۳$ شاخه‌ها در رأس u.

تعریف ۴۰.۲.۱. **هزارپا**[۴۸] درختی است که همه رئوس آن به فاصله یک از یک مسیر مرکزی است.

تعریف ۴۱.۲.۱. [۲۲] وزن شاخه مسیر مرکزی یک هزارپا، **اسپین**[۴۹] گراف نامیده می‌شود.

تعریف ۴۲.۲.۱. یک گراف را $F-free$ گوییم، هرگاه شامل زیرگراف F نباشد.

تعریف ۴۳.۲.۱. یک گراف $C_۴-free$ گرافی است که دور $C_۴$ نداشته باشد.

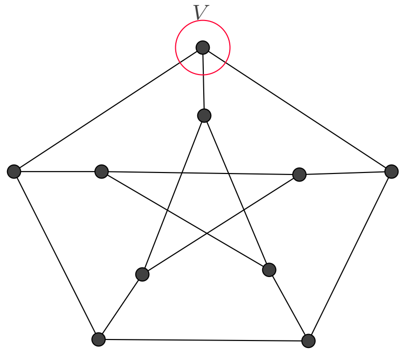
تعریف ۴۴.۲.۱. **زیرتقسیم**[۵۰] یک یال uv از یک گراف G عبارت است از عمل حذف uv و افزودن یک مسیر u,w,v میان یک رأس جدید w.

تعریف ۴۵.۲.۱. یک زیرتقسیم گراف G گرافی است که می‌توان از گراف G با دنباله‌ای از زیرتقسیم‌های یالی به‌دست آورد.

تعریف ۴۶.۲.۱. **گراف پترسن**[۵۱] دارای توصیف ساده‌ای با استفاده از مجموعه S است که از زیرمجموعه‌های ۲ـ عنصری از یک مجموعه ۵ـ عنصری تشکیل شده است.

تعریف ۴۷.۲.۱. [۱۲] زیرمجموعه S از رأس‌های گراف G را انباشته گوییم هرگاه برای هر رأس $v \in V$، داشته باشیم $|N(v) \cap S| \leq ۱$. همچنین به ازای هر دو رأس متمایز $v,u \in S$ داشته باشیم $N[u] \cap N[v] = \emptyset$. ماکسیمم مقدار یک انباشتگی در G **عدد انباشتگی**[۵۲] است و آن را با P نشان می‌دهند. مینیمم مقدار یک انباشتگی ماکسیمال در G، عدد انباشتگی پایینی است و آن را با p نشان می‌دهند. در شکل (۸.۱) مجموعه $S = \{v\}$ یک مجموعه انباشته است.

[۴۸] caterpillar
[۴۹] spine
[۵۰] Subdivision
[۵۱] petersen
[۵۲] packing number



شکل ۸.۱: گراف پترسن

۲.۲.۱ مفاهیم نظریه پیچیدگی

نظریه پیچیدگی، مسائل محاسباتی هستند که در این جا به دسته بندی مسائل از لحاظ زمان اجرای آن‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۴۸.۲.۱. مسأله‌ای که پاسخ آن بلی یا خیر باشد (یا به طور رسمی ۱ یا ۰ باشد)، **مسأله تصمیم**[۵۳] است.

تعریف ۴۹.۲.۱. فرض کنید $A = \{0,1\}$ باشد، تابع $f : A^n \to A$ را یک تابع بولی گویند که در آن صفر به معنای نادرست و ۱ معنی درست را می‌دهد (A^n رشته‌ای با طول n از مجموعه A).

تعریف ۵۰.۲.۱. اگر x یک متغیر بولی باشد نفی x را به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$\bar{x} = \begin{cases} 1, & \text{اگر } x \text{ نادرست باشد} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تعریف ۵۱.۲.۱. یک متغیر بولی یا نفی آن را یک عنصر بولی می‌نامند.

تعریف ۵۲.۲.۱. یک مجموعه از عناصر بولی که به صورت زیر نمایش داده می‌شود را ترکیب عطفی می‌گویند.

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n = \begin{cases} 1, & \text{اگر همه‌ی } x_i \text{ ها درست باشند} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

[۵۳] Decision problem

تعریف ۵۳.۲.۱. یک مجموعه ازعناصر بولی که به صورت زیر نمایش داده می‌شود را ترکیب فصلی می‌گویند.

$$x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n = \begin{cases} 1, & \text{اگر همه‌ی } x_i \text{ ها درست باشند} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تعریف ۵۴.۲.۱. فرم نرمال ترکیب عطفی یک تابع بولی به صورت $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge_{k=1}^{n} C_k$ نمایش داده می‌شود که در آن C_kها به صورت ترکیب فصلی یک مجموعه از عناصر بولی نوشته می‌شود و آن را با CNF[۵۴] نشان می‌دهند.

تعریف ۵۵.۲.۱. **الگوریتم با زمان چندجمله‌ای**[۵۵] الگوریتم‌هایی هستند با اندازه ورودی[۵۶] n، که زمان اجرای بدترین حالت آن‌ها برای مقدار ثابت k برابر $O(n^k)$ است.

تعریف ۵۶.۲.۱. **کلاس p** شامل مسأله‌هایی است که در زمان چندجمله‌ای قابل حل هستند. به خصوص مسأله‌هایی که برای ثابت k می‌توانند در زمان $O(n^k)$ اجرا شوند (n اندازه ورودی مسأله است).

تعریف ۵۷.۲.۱. **کلاس NP**[۵۷] شامل مسأله‌هایی است که در زمان چندجمله‌ای **تصدیق‌پذیر**[۵۸] است. منظور این است که اگر کسی **گواهی**[۵۹] جوابی را در اختیار ما قرار دهد، در زمان چندجمله‌ای بر حسب اندازه ورودی مسأله می‌توان تصدیق کرد که گواهی درست است.

تعریف ۵۸.۲.۱. یک مسأله تصمیم $A \in NP$، **NP ـ کامل**[۶۰] محسوب می‌گردد اگر تمام مسائل دیگر رده NP در زمان چندجمله‌ای قابل کاهش به مسأله A باشند.

تعریف ۵۹.۲.۱. **صدق‌پذیری**

ورودی: یک تابع بولی به فرم CNF، $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigwedge_{k=1}^{n} C_k$.

سؤال: آیا f برقرار است؟

تعریف ۶۰.۲.۱. **k ـ صدق‌پذیری**

ورودی: یک فرمول بولی به فرم CNF که در هر کلاس k عنصر بولی وجود دارد.

سؤال: آیا f برقرار است؟

تعریف ۶۱.۲.۱. **۳ ـ صدق‌پذیری**

مجموعه‌ای از کلاس‌ها به صورت $C = \{c_1, \cdots, c_M\}$ و مجموعه عناصر بولی با $U = \{u_1, \ldots, u_N\}$ که هر کدام از کلاس‌ها (c_iها) برای $1 \leq i \leq M$، سه عنصر بولی وجود دارد.

---

[۵۴] Conjunctive normal form

[۵۵] Polynomial-time algorithm

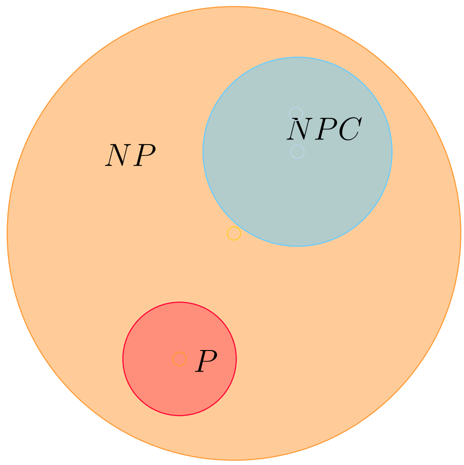
[۵۶] input size

[۵۷] Nondeterministic polynomial

[۵۸] Verifiable

[۵۹] Certificate

[۶۰] NP-complete



شکل ۹.۱: رابطه بین P و NP و NPـ کامل

۳.۲.۱ اعداد احاطه‌گر

تعریف ۶۲.۲.۱. [۳۲] زیرمجموعه D' از رأس‌های گراف G را یک مجموعه احاطه‌گر نامند، هرگاه هر رأس از $V-D'$ با رأسی از D' مجاور باشد.

تعریف ۶۳.۲.۱. [۳۲] کوچک‌ترین اندازه در میان اندازه مجموعه‌های احاطه‌گر برای گراف G را عدد احاطه‌گر گراف G نامند و با $\gamma(G)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۶۴.۲.۱. [۷] زیرمجموعه D از رئوس گراف $G=(V,E)$ را یک مجموعه **احاطه‌گر مکانی همسایه باز**[۶۱] برای G نامند، هرگاه به ازای هر دو رأس متمایز u و v از $V(G)$ مجموعه‌های $N(u)\cap D$ و $N(v)\cap D$ ناتهی و متمایز باشند و آن را با OLD نشان می‌دهند.

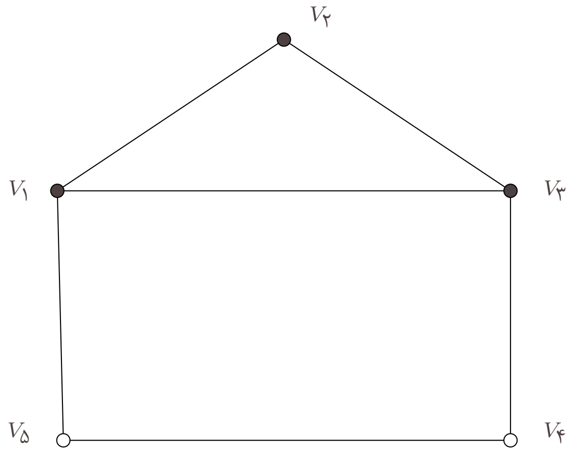
تعریف ۶۵.۲.۱. [۷] کوچک‌ترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر مکانی همسایه باز را **عدد احاطه‌گری مکانی همسایه باز**[۶۲] گراف G می‌گویند و آن را با $OLD(G)$ نشان می‌دهند.

مثال ۱.۲.۱. گراف H در شکل (۱۰.۱)، $D=\{v_1,v_2,v_3\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مکانی همسایه باز می‌باشد، چون مجموعه‌های زیر متمایز و ناتهی هستند. لذا، $OLD(H)=|D|=3$.

$$N(v_1)\cap D=\{v_2,v_3\}،\quad N(v_2)\cap D=\{v_1,v_3\}،\quad N(v_3)\cap D=\{v_1,v_2\}،$$
$$N(v_4)\cap D=\{v_3\}،\quad N(v_5)\cap D=\{v_1\}.$$

[۶۱] Open neighborhood locating-dominating

[۶۲] open neighborhood locating-dominating number



شکل ۱.۱۰: $OLD(G) = 3$

تعریف ۱.۲.۶۶. [۳۲] زیرمجموعه S از رئوس گراف G را یک مجموعه **احاطه‌گر مکانی**[۶۳] نامند، هرگاه به ازای هر دو رأس متمایز v و w از $V - S$ داشته باشیم:

$$N(v) \cap S \neq \emptyset \neq N(w) \cap S,$$

که آن را با LD[۶۴] نشان می‌دهند.

تعریف ۱.۲.۶۷. [۳۲] مینیمم اندازه یک مجموعه LD در G را عدد احاطه‌گری مکانی می‌نامند و آن را با $LD(G)$ نشان می‌دهند. عناصر یک مجموعه LD را یک مجموعه احاطه‌گر مرجع یا به طور ساده‌تر مجموعه LD می‌نامند.

تعریف ۱.۲.۶۸. [۳۴] فرض کنید G یک گراف محلاً متناهی، شمارای نامتناهی باشد. k همسایگی از یک رأس v، $N_k[v] = \{w \in V(G) : d(v,w) \leq k\}$ است، مجموعه رئوس در فاصله‌ی حداکثر k از v است. **مینیمم امکان درصد رئوس**[۶۵] برای مجموعه احاطه‌گر مکانی که با $LD\%$ نشان داده شده به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$LD\%(G) = \min\{\lim_{k\to\infty} sup \frac{|D \cap N_k[v]|}{|N_k[v]|} : \text{یک مجموعه احاطه‌گر مکانی است } D\},$$

که مینیمم روی همه $V(G)$ گرفته شده است.

---

[۶۳] Locating-dominating

[۶۴] Locating dominating

[۶۵] Minimum possible percentage of vertices

فصل ۲

عدد احاطه‌گری مکانی همسایه باز در مسیرها و شبکه‌های نامتناهی

۱.۲ مقدمه

در این فصل نشان داده می‌شود که تعیین مجموعه احاطه‌گر مکانی همسایه باز یکی از مسائل NPــ کامل است. همچنین عدد احاطه‌گر مکانی همسایه باز را در مسیرها و مینیمم امکان درصدی رئوس را در شبکه‌گراف‌های نامتناهی بررسی می‌کنیم.

مشاهده ۱.۱.۲. گراف G مجموعه احاطه‌گر مکانی همسایه باز دارد، اگر و فقط اگر $\delta(G) \geq ۱$ و برای هر دو رأس $w \neq x$، داشته باشیم $N(w) \neq N(x)$.

برهان. فرض کنید گراف G با مجموعه رأس‌های V و مجموعه یال‌های E داده شده و $D \subseteq V(G)$ مجموعه OLD برای گراف G باشد. طبق تعریف مجموعه OLD برای هر رأس $v \in V(G)$ داریم $N(v) \cap D \neq \emptyset$. لذا حداقل یک رأس w در $N(v) \cap D$ وجود دارد که $vw \in E(G)$ است. در نتیجه $\delta(G) \geq ۱$ می‌باشد. همچنین برای هر دو رأس متمایز x و w داریم:

$$N(x) \cap D \neq N(w) \cap D,$$

آن‌گاه $N(x) \neq N(w)$ است. برای اثبات عکس مطلب فوق، فرض کنید $\delta(G) \geq ۱$ باشد و برای هر دو رأس متمایز v و w از $V(G)$ داریم $N(v) \neq N(w)$. به وضوح $V(G)$ یک مجموعه

احاطه‌گر مکانی همسایه باز است. در نتیجه گراف G یک مجموعه احاطه‌گر مکانی همسایه باز دارد. □

مشاهده ۲.۱.۲. اگر $OLD(G) = h$ باشد، آن‌گاه $|V(G)| \leq ۲^h - ۱$ است.

برهان. فرض کنید گراف G با مجموعه رأس‌های V و مجموعه یال‌های E داده شده و $D \subseteq V(G)$ یک مجموعه OLD برای گراف G باشد که $|D| = h$ است. لذا طبق تعریف مجموعه OLD برای گراف G به ازای هر دو رأس متمایز از $V(G)$ اولاً هر کدام از این رئوس یک اشتراک ناتهی منحصر به فرد با D دارند، ثانیاً این اشتراک‌ها متمایز می‌باشند. از طرفی طبق فرض $|D| = h$، لذا مجموعه D حداکثر $۲^h - ۱$ زیرمجموعه ناتهی و متمایز دارد. بنابراین هر کدام از رئوس $V(G)$ متناظر با یکی از زیرمجموعه‌های ناتهی D است. در نتیجه داریم:

$$|V(G)| \leq ۲^h - ۱.$$

□

ملاحظه ۱.۱.۲. اگر $D = C_h$ یک دور با $h \geq ۵$ و $v_۱, v_۲, \ldots, v_h$ و $v_۱v_۲, v_۲v_۳, \ldots, v_{h-۱}v_h, v_hv_۱$ به ترتیب مجموعه رأس‌ها و مجموعه یال‌های D باشد و $N(v_i) = \{v_{i-۱}, v_{i+۱}\}(mod h)$ باشد. هر کدام از رئوس C_h دو رأس در همسایگی باز خود دارند. پس $N(v_۱), N(v_۲), \ldots, N(v_h)$ مجموعه‌های دو عضوی متمایز می‌باشند. لذا مجموعه D حداکثر $۲^h - ۱ - h$ زیرمجموعه ناتهی و متمایز دیگر دارد. پس طبق مشاهده ۲.۱.۲ با اضافه کردن $۲^h - ۱ - h$ رئوس جدید به C_h و تناظر ساختن آن‌ها با یکی از زیرمجموعه‌های ناتهی و متمایز D گراف G_h با $|V(G_h)| = ۲^h - ۱$ رأس و $OLD(G_h) = h$ به دست می‌آید.

۲.۲ پیچیدگی محاسبات در OLD

NP یکی از بنیادی‌ترین کلاس‌هاست که به زمان اجرای آن اشاره دارد. NP مجموعه کلیه مسائل تصمیم‌است که پیدا کردن جواب ''بله''برای آن شامل اثبات ساده‌ای است که جواب حقیقتاً باید ''بله'' باشد. کلاس پیچیدگی P یکی از اعضای آن است اما NP شامل کلاس‌های مهم دیگری نیز هست که پیچیده‌ترین آن‌ها NPـ کامل است که هیچ الگوریتم شناخته شده قابل اجرا در زمان چندجمله‌ای برای آن وجود ندارد. به منظور تعریف مسأله NP مسأله مجموع زیرمجموعه‌ها را در نظر بگیرید. فرض کنید به ما تعدادی عدد صحیح داده شده است مثلاً $\{-۷, -۳, -۲, ۵, ۸\}$ و ما می‌خواهیم بدانیم که آیا مجموع اعضای یکی از زیرمجموعه‌های آن صفر می‌شود یا نه؟ در این مثال جواب بله است زیرا اعداد ۳،۵-و ۲- می‌توانند این شرط را بررسی کنند. هنگامی‌که مقدار اعداد صحیح ورودی زیاد شود تعداد زیرمجموعه‌ها به طور توانی افزایش می‌یابد و در حقیقت مسأله فوق یک مسأله NPـ کامل است. در هر حال توجه

شود که اگر به ما یک زیرمجموعه مشخص بدهند ما به راحتی می‌توانیم بررسی کنیم که آیا مجموع آن صفر است یا خیر و اگر آن مجموع صفر باشد آن زیرمجموعه یک شاهد برای این است که جواب بله است. در مورد این مسأله زمان اجرای آن خطی است که این دلیلی است برای این‌که این مسأله NP است.

بسیاری از مسائل NP به سختی حل می‌شوند به این علت که مسأله‌های مهم بسیاری در این کلاس وجود دارد. تلاش‌های فراوانی برای پیدا کردن الگوریتم‌هایی با زمان اجرای چندجمله‌ای برای مسائل NP صورت گرفته است با این وجود باز هم مسائلی از NP باقی می‌ماند که در برابر این تلاش‌ها مقاومت می‌کنند و به نظر می‌رسد که نیازمند زمان اجرای فراتر از چندجمله‌ای هستند این‌که آیا این مسائل اصلاً قابل بررسی در زمان اجرای چندجمله‌ای هستند یا خیر از بزرگ‌ترین مسائل در علوم کامپیوتر است. یکی از مفاهیم مهم در این مبحث مجموعه مسائل NPـ کامل است که زیرمجموعه NP به شمار می‌آید و به صورت غیر رسمی‌تر می‌تواند به عنوان سخت‌ترین مسائل NP به شمار بیایند. اگر یک الگوریتم زمان اجرای چندجمله‌ای حتی برای یکی از مسائل پیدا شود آن‌گاه برای تمام این مسائل الگوریتمی با زمان اجرای چندجمله‌ای پیدا خواهد شد. بنابراین علت و همچنین این علت که تاکنون تمام تحقیقات برای به دست آوردن چنین الگوریتمی با زمان اجرای چندجمله‌ای برای آن بعید به نظر می‌رسد.

حال برای اینکه نشان دهیم تعیین مسأله OLD از جمله مسائل NPـ کامل است از قضیه، لم‌ها و گزاره‌های زیر استفاده می‌کنیم.

لم ۱.۲.۲. [۱۳] اگر $B \in NP$ و $A \leq_m B$ باشد، آن‌گاه $A \in NP$ است.

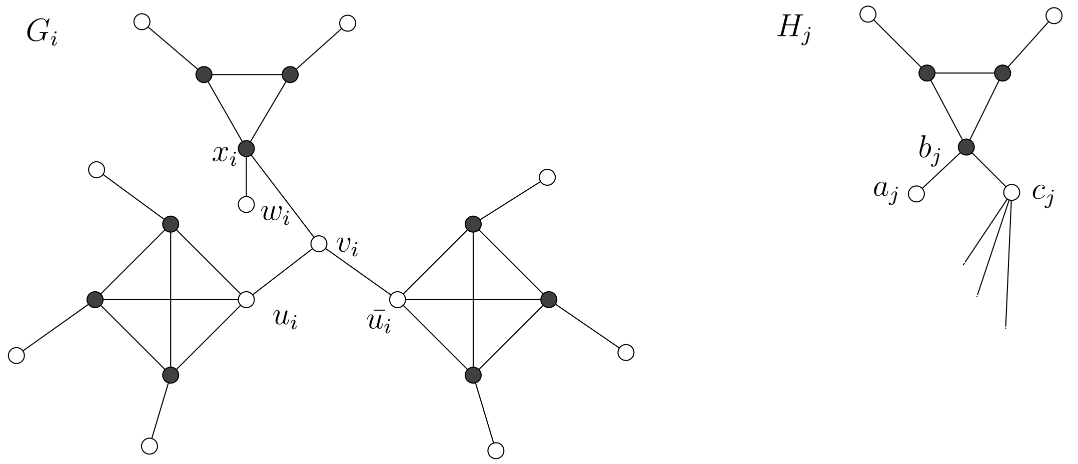
گزاره ۱.۲.۲. [۱۳] اگر L یک مسأله NPـ کامل باشد، $A \in NP$ و $L \leq_m A$ باشد، آن‌گاه A یک مسأله NPـ کامل است.

قضیه ۱.۲.۲. [۱۳] مسأله صدق‌پذیری یک مسأله NPـ کامل است.

گزاره ۲.۲.۲. [۱۳] مسأله ۳ـ صدق‌پذیری یک مسأله NPـ کامل است.

قضیه ۲.۲.۲. مسأله OLD، یک مسأله NPـ کامل است.

برهان. فرض کنید گراف G داده شده باشد. اگر بخشی از این گراف را در نظر بگیریم به راحتی می‌توانیم تعیین کنیم که این بخش از گراف G دارای مجموعه OLD است یا خیر. در نتیجه $OLD \in NP$ است. از طرفی مسأله ۳ـ صدق‌پذیری طبق گزاره ۲.۲.۲ یک مسأله NPـ کامل است. اگر نشان داده شود مسأله ۳ـ صدق‌پذیری چندجمله‌ای کاهشی به مسأله OLD است. در واقع $۳ - SAT \leq_m OLD$ ، آن‌گاه طبق گزاره ۱.۲.۲ می‌توان نتیجه گرفت که مسأله OLD یک مسأله NPـ کامل است. برای این منظور کافی است یک مثال از مسأله ۳ـ صدق‌پذیری را به یک مثال از مسأله OLD تبدیل کرد و با حل مسأله OLD یک جواب برای مسأله



شکل ۱.۲: متغیر و کلاس گراف‌های G_i و H_j، $1 \leq i \leq N$، $1 \leq j \leq M$

۳ـ صدق‌پذیری به دست آورد. در این صورت می‌توان نتیجه گرفت که مسأله OLD یک مسأله NP ـ کامل است.

حال فرض می‌کنیم $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_M\}$ مجموعه‌ای از کلاس‌ها و $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_N\}$ مجموعه عناصر بولی باشد. برای هر u_i ساختار گراف G_i که $1 \leq i \leq n$، روی ۲۱ رأس در شکل (۱.۲) و برای هر c_j ساختار گراف H_j که $1 \leq j \leq M$، در شکل (۱.۲) نشان داده شده است. حال یک مثال از مسأله ۳ـ صدق‌پذیری که در هر کلاس c_j شامل سه عنصر بولی است را در نظر می‌گیریم. اگر $c_j = \{u_{j,1}, u_{j,2}, u_{j,3}\}$ که هر $u_{j,t}$ یکی از رئوس u_i یا $\bar{u}_i$ است در این صورت ساختار گراف G کامل می‌شود. فرض کنید کلاس رأس c_j مجاور به رأس‌های $u_{j,1}$، $u_{j,2}$ و $u_{j,3}$ است. توجه کنید که G دارای $21N + 7M$ رأس و $27N + 10M$ یال است. اگر $D \subseteq V(G)$ یک مجموعه OLD برای گراف G باشد، چون D مجموعه احاطه‌گر باز است، بنابراین D باید هر رأس مجاور به رئوس پایانی از گراف G باشد. یعنی شامل $9N + 3M$ رئوس تیره در شکل (۱.۲) است. همچنین برای $1 \leq i \leq N$ داریم:

$$N(w_i) \cap D = \{x_i\} = N(v_i) \cap D.$$

پس طبق تعریف مجموعه احاطه‌گر مکانی همسایه باز $N(v_i) \cap D$ و $N(w_i) \cap D$ نباید با هم برابر باشند، لذا $N(v_i) \cap D) \cap \{u_i, \bar{u}_i\} \neq \emptyset$ است. بنابراین حداقل یکی از رئوس u_i یا $\bar{u}_i$ در D قرار می‌گیرد. به طور مشابه خواهیم داشت:

$$N(a_j) \cap D = \{b_j\} = N(c_j) \cap D.$$

بنابراین $D \cap \{u_{j,1}, u_{j,2}, u_{j,3}\} \neq \emptyset$ است، یعنی حداقل یکی از $u_{j,t}$ در D قرار دارد. پس هر دو رأس متمایز از $V(G)$ اشتراک ناتهی و متمایز با D دارد. لذا با تبدیل یک مثال از مسأله

۳ـ صدق‌پذیری به یک مثال از مسأله OLD یک جوابی برای مجموعه OLD به دست آمد، در نتیجه یک جواب برای مثال ۳ـ صدق‌پذیری وجود دارد اگر و فقط اگر:

$$OLD(G) = (9N + 3M) + N = 10N + 3M.$$

بنابراین مسأله ۳ـ صدق‌پذیری یک چند جمله‌ای کاهشی به مسأله OLD است در نتیجه مسأله OLD یک مسأله NPـ کامل است. □

۳.۲ OLD(G) در مسیرها

در سراسر این بخش فرض کنید T_n یک درخت از مرتبه $|V(T_n)| = n \geq 2$ باشد. و $\Im$ مجموعه همه‌ی درخت‌های T_n از مرتبه $n \geq 2$، باشد، که هر دو رأس پایانی آن همسایه یکسان ندارند.
به عبارت دیگر مجموعه OLD دارند.
$OLD(T_n)$ تعریف شده است، اگر و فقط اگر $T_n \in \Im$ باشد.
برای اثبات این مسأله فرض کنید T_n یک درخت از مرتبه n و $D \subseteq V(T_n)$ مجموعه احاطه‌گر مکانی همسایه باز باشد. طبق مشاهده ۱.۱.۲ به ازای هر دو رأس متمایز v_1 و v_2 داریم $N(v_1) \neq N(v_2)$، لذا هر دو رأس پایانی همسایه یکسان ندارند. برای نشان دادن عکس این مسأله فرض کنید v_1 و v_2 دو رأس پایانی از درخت T_n باشند که همسایه یکسان ندارند. یعنی، $N(v_1) \neq N(v_2)$ است. حال برای هر دو رأس دلخواه از یک درخت T_n اگر داشته باشیم $N(v_1) = N(v_2)$ آن‌گاه یک دور ایجاد می‌شود و به تناقض می‌رسیم. در نتیجه $N(v_1) \neq N(v_2)$، است. لذا طبق مشاهده ۱.۱.۲، T_n مجموعه OLD دارد.
در این بخش به چند تعریف در مورد درخت‌ها بسنده می‌کنیم و در فصل بعد به طور مفصل در مورد عدد احاطه‌گری مکانی همسایه باز در درخت‌ها بررسی می‌کنیم. در این بخش مسیرهای P_n را روی n رأس را در نظر می‌گیریم و به بررسی کرانی برای عدد احاطه‌گری مکانی همسایه باز را در مسیرهای P_n می‌پردازیم. ابتدا برای $n = 2,3,4$ داریم.

- $OLD(P_2) = 2$.

برای اینکه نشان دهیم عدد احاطه‌گری مکانی همسایه باز برای مسیر P_2 برابر با ۲ است، فرض می‌کنیم $\{v_1, v_2\}$ مجموعه رئوس و $D \subseteq V(P_2)$ یک مجموعه OLD برای این مسیر باشد. با استفاده از تعریف مجموعه OLD هر کدام از رئوس $\{v_1, v_2\}$ اشتراک ناتهی منحصر به فرد با D دارند. لذا v_1 و v_2 هر دو در D قرار می‌گیرند. لذا داریم $OLD(P_2) = 2$.

- $P_3 \notin \Im$.

برای اینکه نشان دهیم $P_3 \notin \Im$، فرض می‌کنیم v_1، v_2 و v_3 به ترتیب مجموعه رئوس و $D \subseteq V(P_3)$ مجموعه احاطه‌گر مکانی همسایه باز برای مسیر P_3 باشد. چون D مجموعه

احاطه‌گری باز است، پس $v_۲ \in D$ است. از طرفی $N(v_۱) = \{v_۲\} = N(v_۳)$. چون هیچ دو رأس پایانی همسایه یکسان ندارند، لذا داریم $P_۳ \notin \Im$.

- $OLD(P_۴) = ۴$.

فرض کنید $v_۱$، $v_۲$، $v_۳$ و $v_۴$ به ترتیب مجموعه رئوس و $D \subseteq V(P_۴)$ مجموعه احاطه‌گر مکانی همسایه باز برای مسیر $P_۴$ باشد. چون رئوس مجاور به رئوس پایانی در D قرار می‌گیرند، پس $v_۲, v_۳ \in D$ است. از طرفی $N(v_۲) \cap D = \{v_۳\} = N(v_۴) \cap D$ و طبق تعریف مجموعه OLD این دو مجموعه نباید با هم برابر باشند، لذا $v_۱ \in D$ است. همچنین $N(v_۱) \cap D = \{v_۲\} = N(v_۳) \cap D$، است و به طور مشابه بنابه تعریف مجموعه OLD، $v_۴ \in D$ است. در نتیجه $\{v_۱, v_۲, v_۳, v_۴\} \subseteq D$ و $OLD(P_۴) = ۴$ است.

حال فرض کنید $n \geq ۴$ و P_n یک مسیر با مجموعه رئوس $\{v_۱, v_۲, \dots, v_n\}$ باشد و به ازای $۱ \leq i \leq n-۱$، $v_i v_{i+۱} \in E(P_n)$ و $D \subseteq V(P_n)$ مجموعه OLD برای P_n باشد. اگر $v_i \notin D$، طبق تعریف مجموعه OLD، $N(v_{i+۱}) \cap D \neq \emptyset$ است. در نتیجه $v_{i+۲} \in D$ است. همچنین داریم:

$$N(v_{i+۱}) \cap D = \{v_{i+۲}\} = N(v_{i+۳}) \cap D,$$

پس طبق تعریف مجموعه OLD، $v_{i+۴} \in D$ است. از طرفی $N(v_{i+۳}) = \{v_{i+۲}, v_{i+۴}\}$ است. در نتیجه اگر $v_i \notin D$، آن‌گاه $(\{v_{i-۴}, v_{i-۲}, v_{i+۱}, v_{i+۴}\} \cap V(P_n)) \subseteq D$ است. در حالت کلی $\{v_۲, v_۴, v_{n-۳}, v_{n-۱}\} \subseteq D$ است.

گزاره ۱.۳.۲. اگر $n \geq ۵$ و $D \subseteq V(P_n)$ یک مجموعه OLD برای P_n باشد، آن‌گاه:

۱. $|D \cap \{v_۱, v_۲, v_۳, v_۴, v_۵\}| = ۴$ و دقیقاً یکی از رئوس $v_۱, v_۲, v_۳$ در D نیست.

برهان. فرض کنید P یک مسیر از مرتبه‌ی n و $D \subseteq V(P_n)$ یک مجموعه احاطه‌گر مکانی همسایه باز باشد، چون D مجموعه احاطه‌گری باز است، لذا رئوس مجاور به رئوس پایانی در D قرار می‌گیرند. بنابراین $v_۲, v_۴ \in D$ است.

- اگر $v_۱ \notin D$، چون $N(v_۲) \cap D \neq \emptyset$ لذا $v_۳ \in D$ است. از طرفی $N(v_۲) \cap D = \{v_۳\}$ و $N(v_۴) \cap D = \{v_۳\}$ است. پس $v_۵ \in D$ است. بنابراین $\{v_۲, v_۳, v_۴, v_۵\} \subseteq D$ است.
- اگر $v_۳ \notin D$، چون $N(v_۲) \cap D \neq \emptyset$ و $N(v_۴) \cap D \neq \emptyset$ پس $v_۱, v_۵ \in D$ است. بنابراین $\{v_۱, v_۲, v_۴, v_۵\} \subseteq D$ است.
- اگر $v_۵ \notin D$، چون $N(v_۲) \cap D \neq \emptyset$ و $N(v_۴) \cap D \neq \emptyset$ لذا $v_۱, v_۳ \in D$ است. بنابراین $\{v_۱, v_۲, v_۳, v_۴\} \subseteq D$ است.

در نتیجه $|D \cap \{v_۱, v_۲, v_۳, v_۴, v_۵\}| = ۴$ و دقیقاً یکی از رئوس $v_۱$، $v_۳$ و $v_۵$ در D قرار ندارد. □

۲. برای $5 \leq i \leq n-5$، اگر $D \cap \{v_i, v_{i+1}\} = \emptyset$ باشد، آن‌گاه:

$$\{v_{i-4}, v_{i-3}, v_{i-2}, v_{i-1}, v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+4}, v_{i+5}\} \subseteq D.$$

برهان. به وضوح با استفاده از تعریف مجموعه OLD ثابت می‌شود. □

۳. برای $3 \leq i \leq n-2$، اگر $D \cap \{v_{i-1}, v_i, v_{i+1}\} = \{v_{i-1}, v_{i+1}\}$ باشد، آن‌گاه:

$$\{v_{i-2}, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+2}\} \subseteq D.$$

برهان. فرض کنید برای $3 \leq i \leq n-2$، $v_i \notin D$ و $\{v_{i-1}, v_{i+1}\} \subseteq D$ باشد. طبق تعریف مجموعه OLD، $N(v_{i+1}) \cap D \neq \emptyset$ و $N(v_{i-1}) \cap D \neq \emptyset$ است، لذا $v_{i+2}, v_{i-2} \in D$ است. در نتیجه $\{v_{i-2}, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+2}\} \subseteq D$ است. □

لم ۱.۳.۲. اگر $n \geq 6$ و D یک مجموعه OLD برای P_n باشد، آن‌گاه برای $1 \leq i \leq n-5$، داریم:

$$|\{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+4}, v_{i+5}\} \cap D| \geq 4.$$

برهان. فرض کنید P یک مسیر از مرتبه $n \geq 6$ و $D \subseteq V(P_n)$ یک مجموعه OLD برای P_n باشد. همچنین $S = \{v_i, v_{i+1}v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+4}, v_{i+5}\}$ باشد. اگر هر دو رأس متوالی از مجموعه S در D نباشد، بدون از دست دادن کلیت مسأله، فرض کنید v_i و v_{i+1} دو رأس متوالی از مجموعه S در D نباشد. یعنی اگر $\{v_i, v_{i+1}\} \cap D = \emptyset$ باشد، آن‌گاه طبق قسمت دوم گزاره ۱.۳.۲ داریم:

$$\{v_{i-4}, v_{i-3}, v_{i-2}, v_{i-1}, v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+4}, v_{i+5}\} \subseteq D.$$

لذا چهار عضو دیگر مجموعه S یعنی، $\{v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+4}, v_{i+5}\}$ در D قرار دارند. حال فرض کنید هر جفت از عناصر S حداقل یک عنصر در D داشته باشند و اگر در یک جفت شامل هر دو عنصر باشد، آن‌گاه به طور کامل حداقل چهار عضو در D قرار می‌گیرند. بنابراین بدون از دست دادن کلیت مسأله، فرض کنید $v_{i+2} \in D$ و $v_{i+3} \notin D$، یعنی اگر:

$$D \cap \{v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+4}\} = \{v_{i+2}, v_{i+4}\},$$

طبق قسمت سوم گزاره ۱.۳.۲، $\{v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+4}, v_{i+5}\} \subseteq D$ است. لذا $v_i, v_{i+3} \notin D$. در نتیجه حداقل چهار عضو از مجموعه S در D قرار دارند. □

لم ۲.۳.۲ $OLD(P_n) \geq \lceil (\frac{2}{3})n \rceil$.

برهان. فرض کنید P_n یک مسیر از مرتبه‌ی n و $D \subseteq V(P_n)$ یک مجموعه OLD برای P_n باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که $OLD(P_n) \geq \lceil (\frac{2}{3}n) \rceil$. به عبارت دیگر، حداقل دو رأس از سه رأس در مجموعه D قرار می‌گیرند، کافیست برای هر $v_i \notin D$، دو رأس را وابسته به رأس v_i وجود داشته باشد.

اگر $v_1 \notin D$، آن‌گاه طبق قسمت اول گزاره ۱.۳.۲، $\{v_2, v_3, v_4, v_5\} \subseteq D$ است. لذا دو v_2 و v_3 وابسته به رأس v_1 و به طور مشابه اگر $v_n \notin D$، آن‌گاه $\{v_{n-1}\}$ و $\{v_{n-2}\}$ دو رأس وابسته به رأس $\{v_n\}$ می‌باشند.

برای $3 \leq i \leq n-2$، اگر $D \cap \{v_{i-1}, v_i, v_{i+1}\} = \{v_{i-1}, v_{i+1}\}$ باشد، آن‌گاه می‌توانیم طبق قسمت سوم گزاره ۱.۳.۲، دو رأس v_{i+1} و v_{i+2} وابسته به رأس v_i وجود دارد.

برای $5 \leq i \leq n-5$، اگر $D \cap \{v_i, v_{i+1}\} = \emptyset$ باشد، در این صورت بنابه قسمت دوم گزاره ۱.۳.۲، دو رأس v_{i-1} و v_{i-2} وابسته به رأس v_i و v_{i+2} و v_{i+3} وابسته به v_{i+1} وجود دارد.

لذا طبق گزاره ۱.۳.۲، به ازای هر رأسی که در D نباشد دو رأس وابسته به آن رأس در D قرار دارد. $\square$

گزاره ۲.۳.۲. ثابت کنید $OLD(P_{6k}) = 4k$ و S مجموعه احاطه‌گر مکانی باز منحصر به فرد برای P_{6k} می‌باشد.

$$\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, \dots, v_{6k-4}, v_{6k-3}, v_{6k-2}, v_{6k-1}\} = S$$

برهان. فرض کنید مسیر P_{6k} داده شده باشد. طبق لم ۲.۳.۲ داریم:

$$OLD(P_{6k}) \geq \lceil \frac{2}{3} \cdot 6k \rceil = 4k.$$

اگر ثابت کنیم که S یک مجموعه OLD برای مسیر P_{6k} باشد، آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت که $OLD(P_{6k}) = 4k$ است. اثبات را به استقرا روی k انجام می‌دهیم. ابتدا پایه‌ی استقرا را برای $k = 1$ نشان می‌دهیم. چون هر مجموعه OLD برای P_n شامل $\{v_2, v_4, v_{n-3}, v_{n-1}\}$ است. لذا برای $k = 1$ مجموعه منحصر به فرد $OLD(P_6)$ برابر با $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ است. بنابراین $OLD(P_6) = 4$.

فرض می‌کنیم $OLD(P_6k) = 4k$ برای $k \geq 2$ برقرار باشد، حکم استقرا را برای $k \geq 1$ ثابت می‌کنیم. لذا برای هر مجموعه $OLD(P_{6k})$ که آن را با D نشان می‌دهیم به ازای $0 \leq j \leq k-1$، باید داشته باشیم:

$$|D \cap \{v_{6j+1}, v_{6j+2}, v_{6j+3}, v_{6j+4}, v_{6g+5}, v_{6j+6}\}| = 4.$$

از طرفی چون دقیقاً یکی از رئوس v_1، v_3، v_5 در مجموعه D قرار ندارد، لذا $v_6 \notin D$. طبق فرض استقرا $D \cap \{v_7, v_8, \dots, v_{6k}\}$ یک مجموعه منحصر به فرد برای $OLD(P_{6k-6})$ می‌باشد،

پس $OLD(P_{6k-6}) = 4k-4$. لذا داریم:

$$D \cap \{v_7, v_8, v_9, \dots, v_{6k}\} = \{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, \dots, v_{6k-4}, v_{6k-3}, v_{6k-2}, v_{6k-1}\}.$$

چون $D \cap \{v_6, v_7\} = \emptyset$، طبق قسمت دوم گزاره‌ی ۱.۳.۲ مجموعه منحصر به فرد $\{v_2, v_3, v_4, v_5\} \subseteq D$. در نتیجه برای $k \geq 1$ داریم:

$$D = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, \cdots, v_{6k-4}, v_{6k-3}, v_{6k-2}, v_{6k-1}\}.$$

بنابراین $D = S$ و S یک مجموعه احاطه‌گر مکانی همسایه باز منحصر به فرد برای مسیر P_{6k} می‌باشد، در نتیجه $OLD(P_{6k}) = 4k$ است. □

گزاره ۳.۳.۲. ثابت کنید به ازای $k \geq 1$، $OLD(P_{6k+3}) = 4k+3$ می‌باشد.

برهان. فرض کنید مسیر P_{6k+3} داده شده و $D \subseteq V(P_{6k+3})$ یک مجموعه احاطه‌گر مکانی همسایه باز برای این مسیر باشد. به استقرا روی k ثابت می‌کنیم که $OLD(P_{6k+3}) = 4k+3$. پایه استقرا را برای $k=1$ نشان می‌دهیم و به راحتی می‌توان نشان داد که $\{v_2, v_3, \dots, v_8\}$ یک مجموعه که OLD برای P_9 است. چون به ازای هر دو رأس متمایز x و y از مجموعه $\{v_1, v_2, \dots, v_8, v_9\}$ باید داشته باشیم، $N(x) \cap D \neq \emptyset \neq N(y) \cap D$. بنابراین $OLD(p_9) = |\{v_2, v_3, \dots, v_8\}| = 7$ است.
حال فرض کنید برای $k < k^*$ برقرار باشد، حکم استقرا را برای k ثابت می‌کنیم. مجموعه

$$\{v_2, v_3, \dots, v_8, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, v_{20}, \dots, v_{6k-1}, v_{6k}, v_{6k+1}, v_{6k+2}\},$$

یک OLD برای P_{6k+3} است، بنابراین $OLD(P_{6k+3}) \leq 4k+3$. همچنین طبق لم ۲.۳.۲ داریم $OLD(P_{6k+3}) \geq 4k+2$. برای اینکه نشان دهیم $OLD(P_{6k+3}) = 4k+3$، سه حالت از گزاره ۱.۲.۲ را در نظر می‌گیریم.

۱. فرض کنید $v_3 \notin D$، طبق گزاره ۱.۳.۲ داریم $\{v_1, v_2, v_4, v_5\} \subseteq D$. از طرفی $D^* = D - \{v_1, v_2\}$ یک مجموعه OLD برای $P^* = v_4, v_5, \dots, v_{6k+3} = P - \{v_1, v_2, v_3\}$ شامل v_4 است، طبق لم ۱.۳.۲، $OLD(P^*) \geq 4k+1$. از طرفی $\{v_1, v_2\} \subseteq D$. لذا داریم:

$$OLD(P_{6k+3}) \geq 4k+3.$$

۲. فرض کنید $v_5 \notin D$، طبق گزاره ۱ داریم $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subseteq D$. از طرفی $D - \{v_1, v_2, v_3\}$ مجموعه OLD برای $P^* = P - \{v_1, v_2, v_3\}$ است، طبق لم۱.۳.۲ (هر ۶ رأس متوالی حداقل ۴ عضو درD دارند) پس $OLD(P^*) \geq 4k$. از طرفی $\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq D$. لذا

$$OLD(P_{6k+3}) \geq 4k+3.$$

۳. • فرض کنید $D \notin v_1$ و $D \notin v_6$، پس بنابه گزاره ۱.۳.۲، $\{v_2, v_3, v_4, v_5\} \subseteq D$. $D^* = D - \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ مجموعه OLD برای $P^* = P - \{v_1, \ldots, v_6\}$ می‌باشد. طبق فرض $|D^*| \geq 4(k-1) + 3 = 4k - 1$، از طرفی $\{v_2, v_3, v_4, v_5\} \subseteq D$. لذا داریم:

$$|D| = |D^*| + 4 \geq 4k + 3.$$

• اگر $v_1, v_7 \notin D$ و $v_6 \in D$ باشد. طبق لم ۲.۳.۲ داریم:

$$|D \cap \{v_8, v_9, \ldots, v_{6k+3}| \geq \lceil (\frac{2}{3})(6k - 4) \rceil = \lceil 4k - (\frac{8}{3}) \rceil = 4k - 2.$$

بنابه قسمت اول گزاره ۱.۳.۲ داریم $|D| \cap \{v_1, v_2, \ldots, v_5\}| = 4$ و از طرفی $v_6 \in D$ و $v_7 \notin D$، بنابراین $|D \cap \{v_1, \ldots, v_6, v_7\}| = 5$. در نتیجه داریم:

$$|D \cap \{v_1, v_2, \ldots, v_{6k+3}| \geq 4k - 2 + 5 = 4k + 3.$$

• اگر $v_1 \notin D$ و $v_6, v_7 \subseteq D$ باشد و $D^* = D - \{v_2, v_3\}$ مجموعه OLD برای $P^* = P - \{v_1, v_2, v_3\}$ باشد. چون $D \cap \{v_1, \ldots, v_6\} = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$، آن‌گاه $v_4 \in D$ است. لذا P^* شامل v_4 می‌باشد. طبق گزاره ۲.۳.۲، $|D^*| \geq 4k + 1$، از طرفی $v_2, v_3 \subseteq D$ است. بنابراین داریم:

$$|D| \geq 4k + 3.$$

لذا در هر سه حالت از گزاره ۱.۳.۲، $OLD(P_{6k+3}) \geq 4k + 3$. در نتیجه داریم:

$$OLD(P_{6k+3}) = 4k + 3.$$

□

گزاره ۴.۳.۲. ثابت کنید $OLD(P_{6k+4}) = 4k + 4$.

برهان. فرض کنید مسیر P_{6k+4} داده شده و $D \subseteq V(P_{6k+4})$ یک مجموعه OLD برای P_{6k+4} باشد. مجموعه

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16} \ldots v_{6k+1}, v_{6k+2}, v_{6k+3}, v_{6k+4}\}$$

یک مجموعه OLD برای P_{6k+4} است، بنابراین $OLD(P_{6k+4}) \leq 4k + 4$. طبق گزاره ۱.۳.۲، داریم:

$$D \cap \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} = |D \cap \{v_{6k}, v_{6k+1}, v_{6k+2}, v_{6k+3}, v_{6k+4}\}| = 4.$$

بنابه لم ۱.۳.۲، $|D \cap \{v_6, v_7, \ldots, v_{6k-1}\}| \geq 4k - 4$، بنابراین $|D| \geq 4k + 4$. در نتیجه داریم:

$$OLD(P_{6k+4}) = 4k + 4.$$

□

گزاره ۵.۳.۲. ۱. ثابت کنید $OLD(P_{6k+5}) = 4k+4$.

برهان. فرض کنید مسیر P_{6k+5} داده شده باشد. طبق لم ۲.۳.۲، داریم:

$$OLD(P_{6k+5}) \geq \lceil (\frac{2}{3})(6k+5) \rceil = 4k+4.$$

مجموعه $\{v_1, v_2, v_4, v_5, v_7, v_8, \cdots v_{6k+1}, v_{6k+2}, v_{6k+4}, v_{6k+5}\}$ یک OLD برای P_{6k+5} است، لذا $OLD(P_{6k+5}) \leq 4k+4$. در نتیجه داریم:

$$OLD(P_{6k+5}) = 4k+4.$$

□

۲. ثابت کنید $OLD(P_{6k+2}) = 4k+2$.

برهان. فرض کنید مسیر P_{6k+2} داده شده باشد. طبق لم ۲.۳.۲، داریم:

$$OLD(P_{6k+2}) \geq \lceil \frac{2}{3}(6k+2) \rceil = 4k+2.$$

مجموعه $\{v_1, v_2, v_4, v_5, v_7, v_8, \ldots, v_{6k-2}, v_{6k-1}, v_{6k}, v_{6k+1}\}$ یک OLD برای P_{6k+2} است، لذا $OLD(P_{6k+2}) \leq 4k+2$. در نتیجه داریم:

$$OLD(P_{6k+2}) = 4k+2.$$

□

۳. ثابت کنید $OLD(P_{6k+1}) = 4k+1$.

برهان. فرض کنید مسیر P_{6k+1} داده شده باشد. طبق لم ۲.۳.۲، داریم:

$$OLD(P_{6k+1}) \geq \lceil \frac{2}{3}(6k+1) \rceil = 4k+1.$$

مجموعه $\{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{15}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, \ldots, v_{6k-3}, v_{6k-2}, v_{6k-1}, v_{6k}\}$ یک OLD برای P_{6k+1} است، بنابراین $OLD(P_{6k+1}) \leq 4k+1$. در نتیجه داریم:

$$OLD(P_{6k+1}) = 4k+1.$$

□

۴.۲ شبکه‌های نامتناهی

پارامترهای درصدی برای گراف‌های به طور محلی متناهی، شمارای نامتناهی در [۳۴] تعریف شده است. مشابه [۳۴] در این بخش مینیمم امکان درصدی رئوس را برای گراف‌های شمارای نامتناهی در یک مجموعه احاطه‌گر مکانی همسایه باز بررسی می‌کنیم و آن را با $OLD\%(G)$ نمایش می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$OLD\%(G) = MIN\{\lim_{k\to\infty} \frac{|N_k[v] \cap D|}{|N_k(v)|} : \text{یک مجموعه احاطه‌گر مکانی همسایه باز است } D\}.$$

مینیمم روی همه‌ی $v \in V(G)$ در نظر گرفته شده است و

$$N_k[v] = \{w \in V(G) : d(v, w) \le k\}.$$

مجموعه رئوس در فاصله‌ی حداکثر k از v است.
بعلاوه در [۳۴] مفهومی به نام " شار" $sh^o(v; D)$ از رأس v در یک مجموعه احاطه‌گر مکانی D تعریف شده است. به طور مشابه "شار باز"[۱]، $sh^o(v; D)$ از یک رأس v در یک مجموعه احاطه‌گر باز D به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$sh^o(v; D) = \sum_{w\in N(v)} \frac{۱}{|N(w) \cap D|}.$$

همچنین برای گراف‌های متناهی G با یک مجموعه احاطه‌گر مکانی همسایه باز D به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sum_{v\in D} sh^o(v; D) = |v(G)|,$$

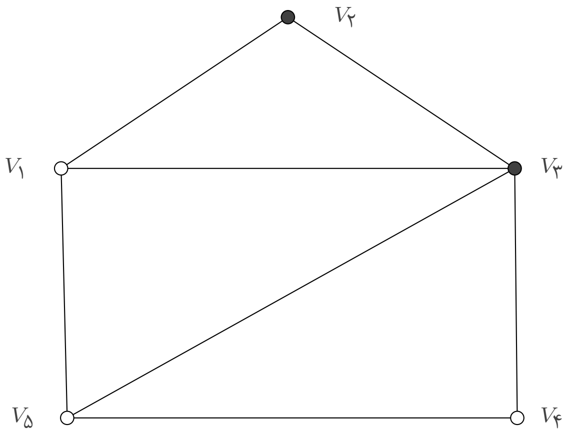
$$|D| \ge \frac{|v(G)|}{MAX_{v\in V} sh^o(v; D)}.$$

بعلاوه اگر D یک مجموعه احاطه‌گر مکانی همسایه باز و $v \in D$ باشد، آن‌گاه داریم:

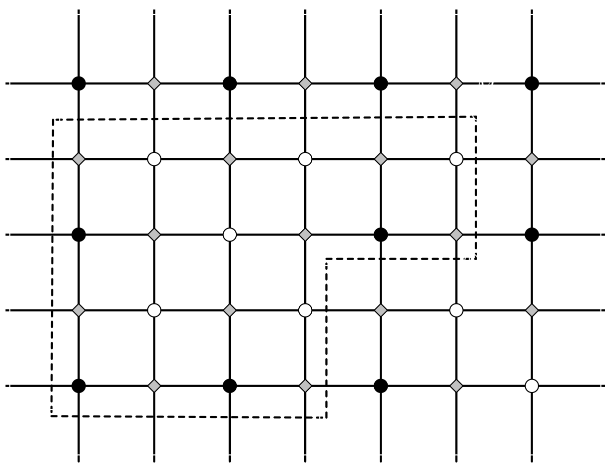
$$sh^o(v; D) \le ۱ + \frac{۱}{۲(deg(v) - ۱)}.$$

مثال ۱.۴.۲. برای مثال، در شکل (۲.۲) چون $N(v_۱) \cap \{v_۲, v_۳\} = \{v_۲, v_۳\}$ هر کدام از رئوس $v_۲$ و $v_۳$ $\frac{۱}{۲}share$ در مجموعه احاطه‌گری $v_۱$ دارند. به طور مشابه چون $N(v_۴) \cap \{v_۲, v_۳\} = \{v_۳\}$ رأس $v_۳$ یک شار تمام در احاطه‌گر رأس $v_۴$ دارد.

قضیه ۱.۴.۲. ([۳۴]) اگر G یک گراف منتظم از درجه r باشد، آن‌گاه $OLD(G) \ge \frac{۲}{(۱+r)}|v(G)|$.
اگر G یک گراف شمارای نامتناهی منتظم از درجه r باشد، آن‌گاه $OLD\%(G) \ge \frac{۲}{(۱+r)}$.



شکل ۲.۲: $sh(v_۲;\{v_۲,v_۳\}) = \frac{۱}{۲}+۰+۱=\frac{۳}{۲}$



(a)

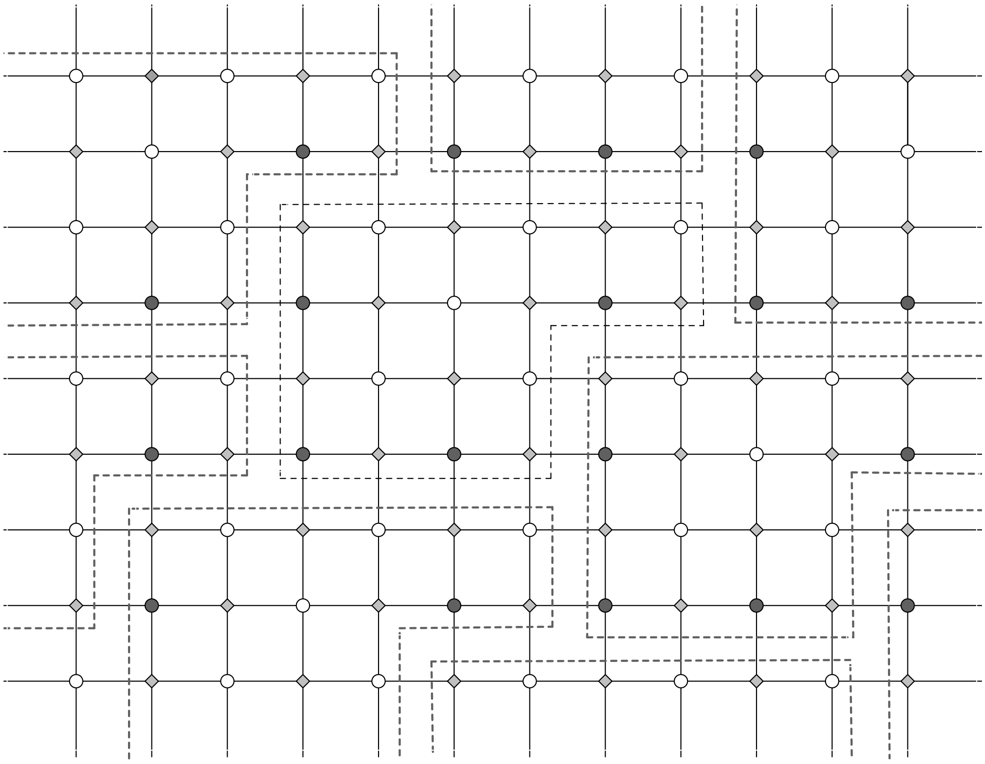
قضیه ۲.۴.۲. برای شبکه مربعی نامتناهی $Z\times Z$، $OLD\%(Z\times Z)=\frac{۲}{۱+۴}=\frac{۲}{۵}$.

برهان. برای شبکه نامتناهی $Z\times Z$ منتظم از درجه ۴ طبق قضیه ۱.۴.۲، داریم:

$$OLD\%\,(Z\times Z)\geq \frac{۲}{۱+۴}=\frac{۲}{۵}.$$

همان‌طور که در شکل (b)(۳.۲) مشاهده می‌کنید، شبکه $Z\times Z$ دو قسمتی است و $V(Z\times Z)$ به دو دسته افراز شده است که با رئوس لوزی و دایره‌ای نشان داده شده است. اگر ما از $\frac{۴}{۱۰}$ رئوس دایره‌ای با تکرار الگوی کاشی نشان داده شده در شکل (a,b)(۳.۲)، استفاده کنیم، همه‌ی

[۱]Open share



(b)

شکل ۳.۲: یک الگوی کاشی $OLD(Z \times Z)$

رئوس لوزی با این رئوس احاطه‌گری باز و مکان‌یابی می‌شوند. به طور مشابه $\frac{۲}{۵}$ رئوس لوزی نیز می‌توانند رئوس دایره‌ای را احاطه‌گر باز و مکان‌یابی کنند، بنابراین $OLD\%(Z \times Z) \leq \frac{۲}{۵}$، در نتیجه داریم:

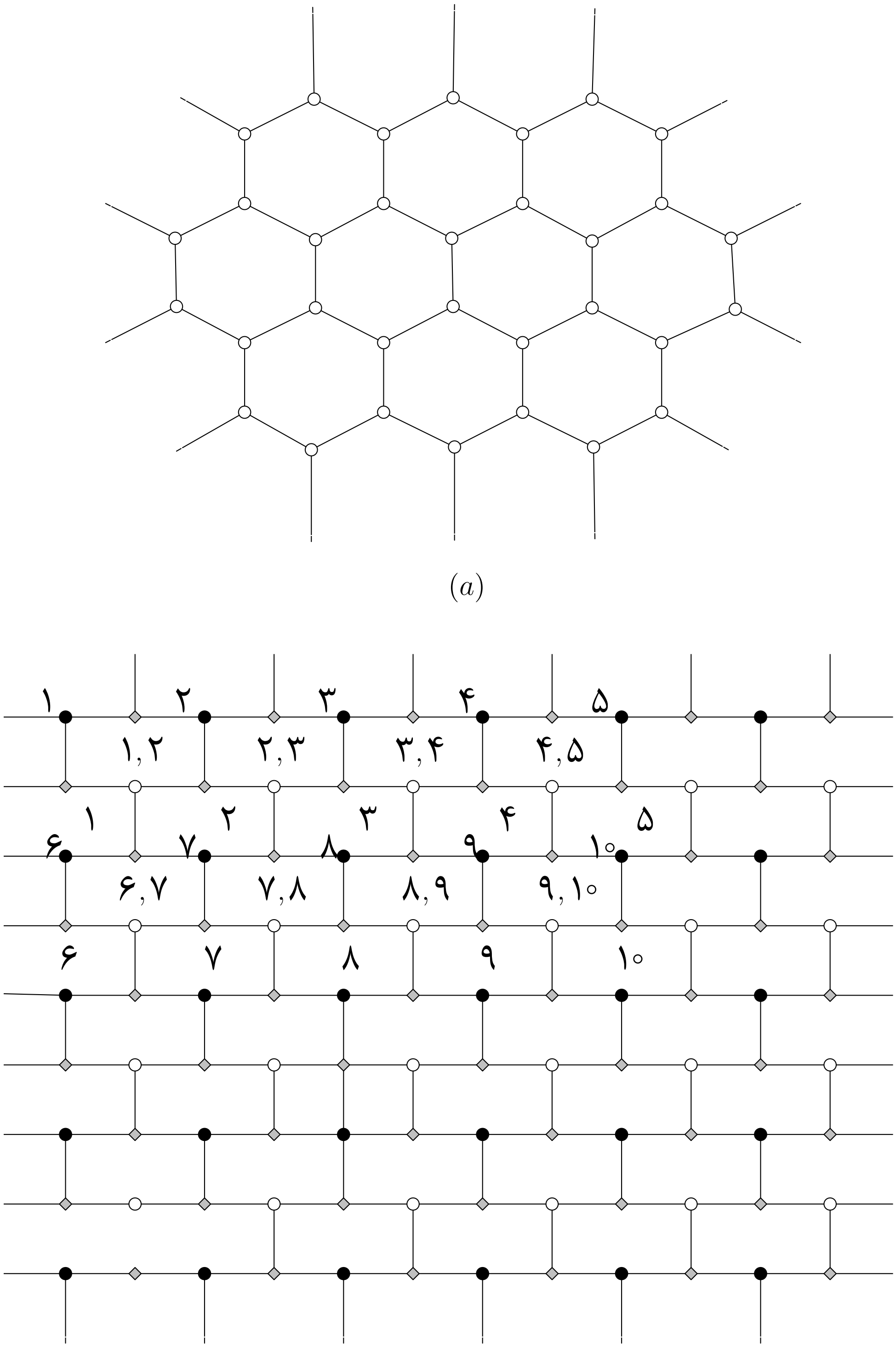
$$OLD\%(Z \times Z) = \frac{۲}{۱+۴} = \frac{۲}{۵}.$$

□

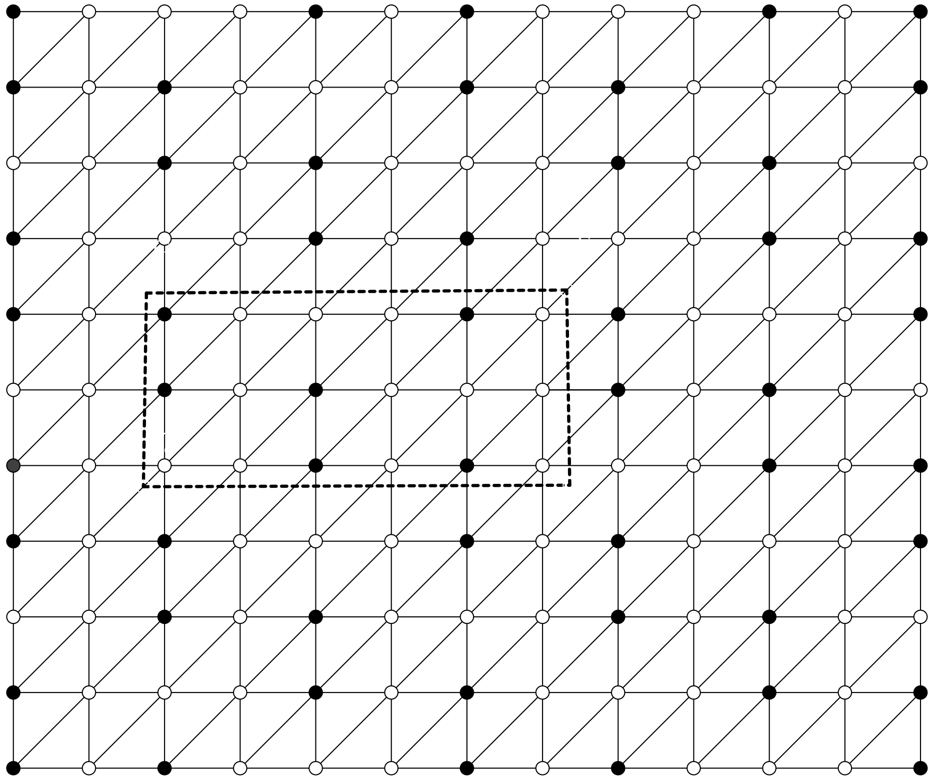
قضیه ۳.۴.۲. برای شبکه شش ضلعی نامتناهی HX[۲]، $OLD\%(HX) = \frac{۲}{۱+۳} = \frac{۱}{۲}$.

برهان. هر شبکه شش ضلعی نامتناهی HX منتظم از درجه‌ی ۳ است. طبق قضیه‌ی ۱.۴.۲، $OLD\%(HX) \geq \frac{۲}{۱+۳} = \frac{۱}{۲}$. نشان می‌دهیم که $OLD\%(HX) \leq \frac{۲}{۱+۳} = \frac{۱}{۲}$. مشاهده می‌کنیم که شبکه شش ضلعی نامتناهی HX، دو قسمتی است و $V(HX)$ به دو قسمت رئوس لوزی و رئوس دایره‌ای افراز شده است. همان‌طور که در شکل (b) (۴.۲) نشان داده شده است، مجموعه‌ای شامل $\frac{۱}{۲}$ رئوس دایره‌ای همه‌ی رئوس لوزی را احاطه‌گری باز و مکان‌یابی می‌کنند. به طور مشابه $\frac{۱}{۲}$ رئوس مربعی می‌توانند رئوس دایره‌ای را احاطه‌گر باز و مکان‌یابی کنند. بنابراین داریم $OLD\% (HX) \leq \frac{۱}{۲}$. □

[۲]Hexagonal



شکل ۴.۲: شبکه شش ضلعی نامتناهی HX



شکل ۵.۲: شبکه مثلثی نامتناهی TR

قضیه ۴.۴.۲. هر شبکه مثلثی نامتناهی TR[۳] منتظم از درجه شش است، داریم:

$$\frac{۲}{۷} \leq OLD\%(TR) \leq \frac{۱}{۳}.$$

برهان. هر شبکه مثلثی نامتناهی TR منتظم از درجه شش است، طبق قضیه ۱.۴.۲، داریم $OLD\%(TR) \geq \frac{۲}{۱+۶} = \frac{۲}{۷}$. مجموعه رئوس تیره در مستطیل شکل (۵.۲) یک مجموعه OLD است که از هجده رأس، شش رأس آن در مجموعه OLD قرار دارند. لذا اندازه آن $\frac{۱}{۳}$ است. به این ترتیب برای سایر قسمت‌های شبکه مثلثی ترتیب قرار گرفتن رئوس تیره مانند مستطیل شکل (۵.۲) که اندازه آن $\frac{۱}{۳}$ است. بنابراین داریم $\frac{۲}{۷} \leq OLD\%(TR) \leq \frac{۱}{۳}$. □

---
[۳] Triangular

فصل ۳

عدد احاطه‌گری مکانی همسایه باز در درخت‌ها

۱.۳ مقدمه

در این فصل به تعیین کرانی برای عدد احاطه‌گری مکانی همسایه باز در درخت‌ها پرداخته و درخت اکستریمال در $\mathfrak{I}$ را که به این مقدار $\lceil \frac{n}{۲} \rceil + ۱ \leq OLD(T_n) \leq n - ۱$ دست پیدا می‌کنند تعیین می‌کنیم.

مشاهده ۱.۱.۳. (۱.۱.۲) گراف G یک مجموعه احاطه‌گر مکانی همسایه باز دارد، اگر و فقط اگر $\delta(G) \geq ۱$ و برای هر دو رأس $w \neq x$ داشته باشیم $N(x) \neq N(w)$.

نتیجه ۱.۱.۳. اگر درخت T یک مجموعه OLD داشته باشد، آن‌گاه هیچ رأس پشتیبانی نمی توان(د) مجاور به دو رأس پایانی باشد.

برهان. به برهان خلف فرض کنید T درختی از مرتبه n که مجموعه OLD داشته باشد و w رأس پشتیبانی برای دو رأس پایانی متمایز x و y از درخت T باشد، یعنی

$$N(x) = N(y) = \{w\}.$$

بنابه مشاهده ۱.۱.۲، تناقض است. لذا یک رأس پشتیبان نمی‌تواند مجاور به دو رأس پایانی باشد.

□

نتیجه ۲.۱.۳. اگر هر دو رأس پایانی از درخت T رأس پشتیبان یکسانی نداشته باشد، آن‌گاه هر رأس پایانی v یک همسایه‌ی باز $N(v)$ منحصر به فرد دارد.

برهان. فرض کنید v و w دو رأس پایانی متمایز از درخت T و u و z به ترتیب رئوس پشتیبانی برای این دو رأس پایانی باشند. چون رئوس پایانی از درجه یک می‌باشند لذا داریم:

$$N(v)=\{u\}, \qquad N(w)=\{z\}.$$

در نتیجه هر رأس پایانی از درخت T همسایگی باز منحصر به فرد دارد. □

نتیجه ۳.۱.۳. در هر درخت T، هیچ دو رأسی نمی‌تواند دو یا بیش از دو همسایه‌ی مشترک داشته باشند.

برهان. به برهان خلف، فرض کنید x و y دو رأس از درخت T و z و w همسایه‌های مشترک این دو رأس باشند، در این صورت دور x,z,y,w,x ایجاد می‌شود. چون درخت T دور ندارد، به تناقض می‌رسیم. برای بیش از دو رأس نیز به طور مشابه ثابت می‌شود. □

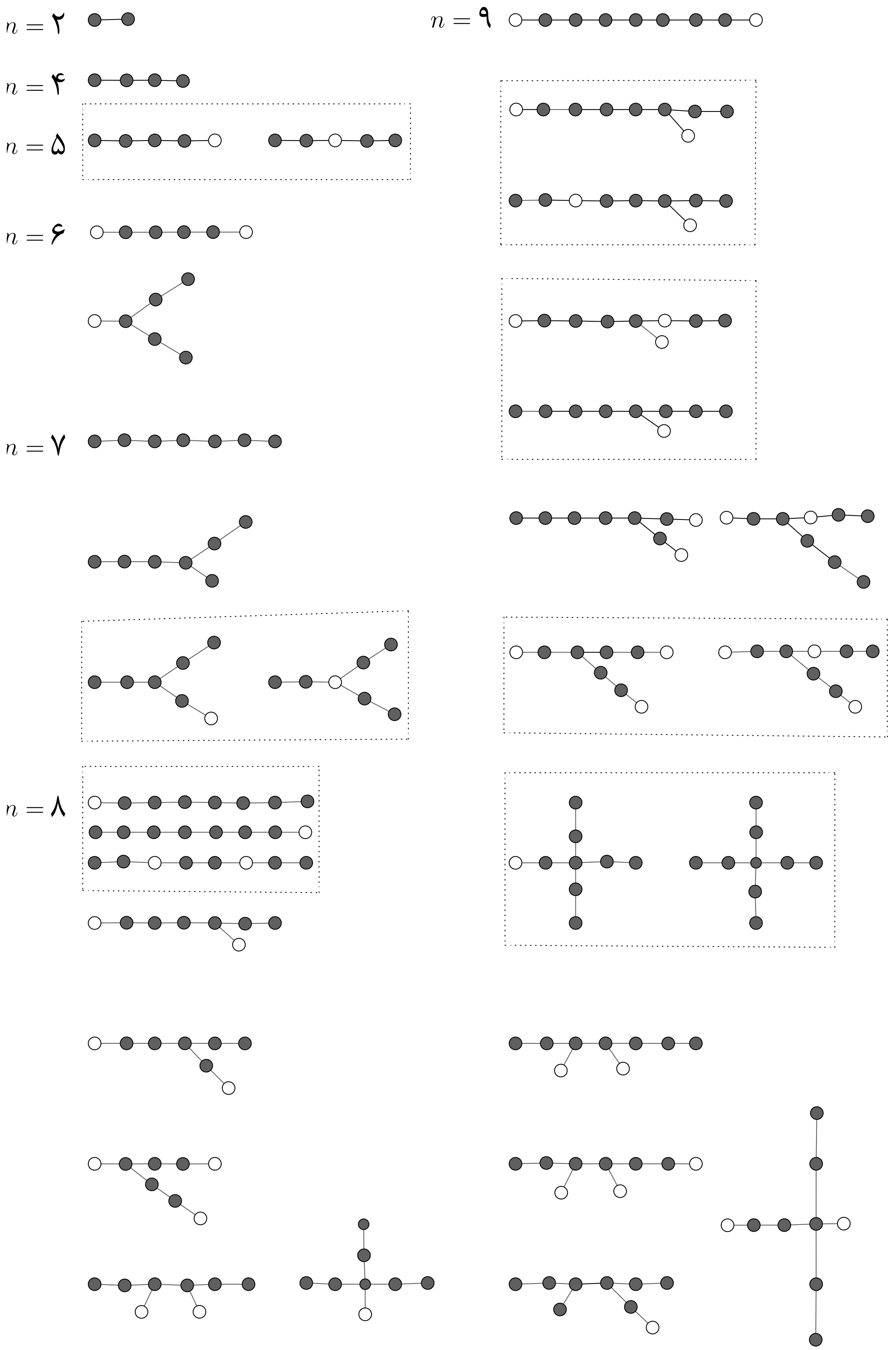
مشاهده ۲.۱.۳. هر درخت T_n از مرتبه‌ی $n\geq ۲$، مجموعه OLD (به ویژه، $V(T_n)$ یک مجموعه OLD است) دارد، اگر و تنها اگر هیچ دو رأس پایانی از درخت Tn رئوس پشتیبان یکسانی نداشته باشند.

برهان. فرض کنید T درختی از مرتبه $n\geq ۲$ داده شده و $D\subseteq V(T_n)$ یک مجموعه OLD برای T باشد. طبق مشاهده ۱.۱.۲، به ازای هر دو رأس متمایز آن از جمله دو رأس پایانی u و w داریم، $N(u)\neq N(w)$. لذا هر دو رأس پایانی رئوس پشتیبان یکسان ندارند. باالعکس فرض کنید u و w دو رأس پایانی از درخت T_n و e و z به ترتیب رئوس پشتیبان برای این دو رأس باشند. بنابراین داریم:

$$N(u)=\{e\}, \quad N(w)=\{z\}.$$

لذا $N(u)\neq N(w)$. در نتیجه طبق مشاهده ۱.۱.۲، درخت T_n مجموعه OLD دارد. □

همان‌طور که در فصل قبل اشاره کردیم، $\Im$ نشان‌دهنده خانواده درخت‌هایی باشد که مجموعه OLD دارند. همه درخت‌های $T\in\Im$ که در شکل ۱.۳ و ۲.۳ نشان داده شده‌اند از مرتبه $n\leq ۱۰$ می‌باشد. رئوس تیره نشان‌دهنده مجموعه OLD برای T_n است. اشاره می‌کنیم که یک درخت T ممکن است چندین مجموعه OLD داشته باشد. به این ترتیب درخت‌هایی با مجموعه OLD متفاوت برای $n\leq ۹$ در شکل ۱.۳ نشان داده شده است و مسیر $P_{۱۰}$ در شکل ۲.۳ شش مجموعه OLD مختلف دارد.



شکل ۱.۳: همه درخت‌های $T \in \Im$ از مرتبه ۹ $\geq n$

.

شکل ۲.۳: همه درخت‌های $T \in \Im$ از مرتبه $n = ۱۰$

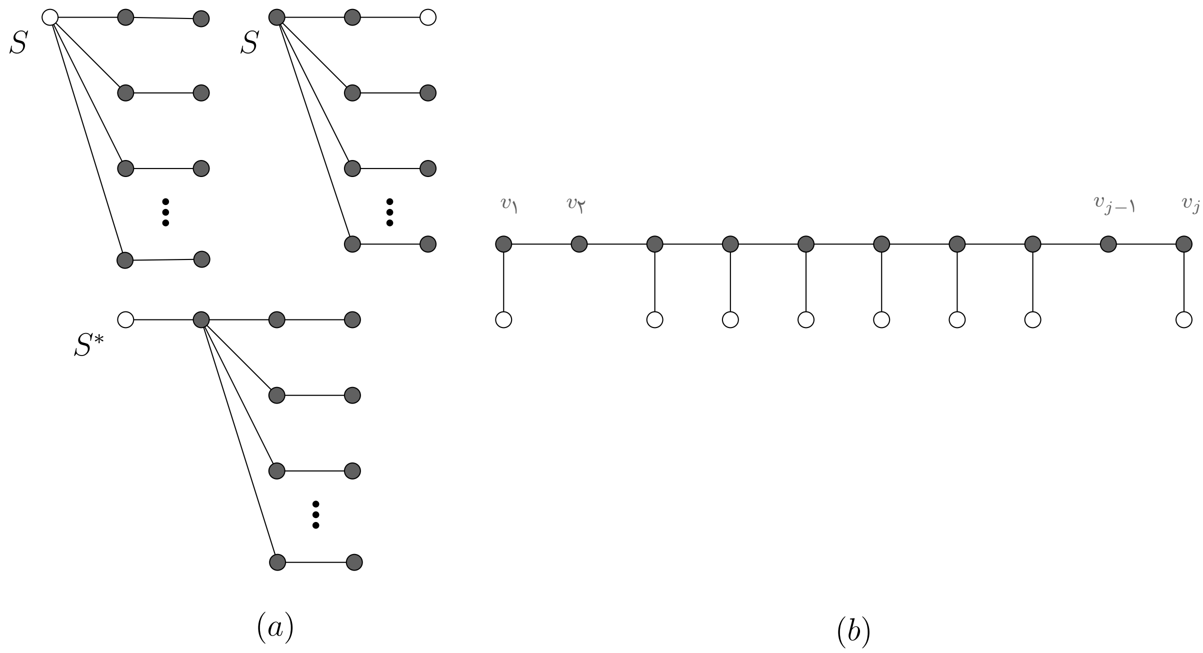
.

۲.۳ کران برای عدد احاطه‌گری مکانی همسایه باز در درخت‌ها

در [۳۲] نشان داده شده است که عدد احاطه‌گر مکانی برای درخت‌های T از مرتبه n به صورت زیر برقرار است:

$$\frac{n}{۳} < LD(T_n) \leq n - ۱.$$

توجه کنید که هر درخت $S(K_{۱,t-۱})$ از مرتبه $۲t - ۱$ از ستاره $K_{۱,t-۱}$ همراه با زیرتقسیم‌های یالی هر یال از آن به دست می‌آید. همچنین درخت S^* از $S(K_{۱,t-۱})$ با اضافه کردن یک رأس پایانی و وصل کردن آن به رأس مرکزی به دست آمده است، برای $t \geq ۳$، همان‌طور که در شکل (a) (۳.۳) نشان داده شده است، داریم $OLD(S^*) = ۲t - ۱ = n - ۱$ و $OLD(S(K_{۱,t-۱})) =$



شکل ۳.۳: $(a)\, OLD(T_n) = n-1$ $\quad$ $(b)\, OLD(T_n) \to \frac{1}{2}(n)$

$n-1 = 2t-2$. درخت T_{2j-2} از مرتبه $n = 2j-2$ در شکل (b) (۳.۳) داریم:

$$OLD(T_{2j-2}) = j > \frac{n}{2},$$

و

$$\lim_{j\to\infty} \frac{OLD(T_{2j-2})}{(2j-2)} = \frac{1}{2}.$$

قضیه ۱.۲.۳. اگر $T_n \in \Im$ از مرتبه $n \geq 5$ باشد، آن‌گاه $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq OLD(T_n) \leq n-1$.

برهان. فرض کنید T_n یک درخت از مرتبه $n \geq 5$ و $D \subseteq V(T_n)$ یک مجموعه احاطه‌گر مکانی همسایه باز برای T_n باشد. برای اثبات کران بالا، به وضوح اگر v, w, x, y یک مسیر در T_n با $\deg(v) = 1$ و $\deg(x) = \deg(w) = 2$، یا v, w, x, y, z مسیری با $\deg(v) = \deg(z) = 1$ و $\deg(w) = \deg(y) = 2$ و یا v, w, x, y یک مسیر با $\deg(v) = \deg(y) = 1$ و $\deg(x) = 2$ و $\deg(w) \geq 3$ باشد، آن‌گاه $V(T_n) - v$ یک مجموعه OLD برای T_n است. برای اثبات کران پایین به استقرا روی n ثابت می‌کنیم.

پایه استقرا برای $n \leq 7$، $OLD(T_n) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ است. اگر $n = 5$ باشد، همان‌طور که در شکل (۱.۳) نشان داده شده است $OLD(T_5) = 4$ از طرفی $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 = \lceil \frac{5}{2} \rceil + 1 = 4$ لذا در این حالت $OLD(T_5) = \lceil \frac{5}{2} \rceil + 1$.

اگر $n = 6$، دو مجموعه OLD متفاوت برای T_6 در شکل (۱.۳) وجود دارد که در هر دو صورت

$OLD(T_6) \geq ۴$، از طرفی $۴ = ۱ + \lceil \frac{۶}{۲} \rceil = ۱ + \lceil \frac{n}{۲} \rceil$ بنابراین $OLD(T_6) \geq \lceil \frac{۶}{۲} \rceil + ۱$.
اگر $n = ۷$، چهار مجموعه OLD متفاوت برای T_7 در شکل (۱.۳) وجود دارد که در هر چهار حالت $OLD(T_7) \geq ۵$، از طرفی $۵ = ۱ + \lceil \frac{۷}{۲} \rceil = ۱ + \lceil \frac{n}{۲} \rceil$ در نتیجه $OLD(T_7) \geq \lceil \frac{۷}{۲} \rceil + ۱$.
اگر $n \geq ۸$، فرض کنید برای $m < n$، $OLD(T_m) \geq \lceil \frac{n}{۲} \rceil + ۱$ باشد. حکم استقرا را برای n ثابت می‌کنیم. فرض کنید $D \subseteq V(T_n)$ یک مجموعه OLD برای درخت T_n و v یک رأس درونی T_n باشد که $v \notin D$. اگر $\deg(v) \geq ۳$ باشد، فرض کنید $n_1, n_2, \ldots, n_t$ مرتبه مؤلفه‌های $T_n - v$ باشند چون $t \geq ۳$ اشد و D مجموعه احاطه‌گر مکانی همسایه باز است لذا $n_i \geq ۲$، آن‌گاه طبق فرض استقرا داریم:

$$
\begin{aligned}
|D| &\geq (\frac{n_1}{۲} + ۱) + \cdots + (\frac{n_t}{۲} + ۱) \\
&\geq \frac{۱}{۲}(n_1 + n_2 + \cdots + n_t) + t \\
&\geq \frac{۱}{۲}(n_1 + n_2 + \cdots + n_t + ۱) + \frac{۲t - ۱}{۲} \\
&= \frac{n}{۲} + \frac{۲t - ۱}{۲} \\
&\geq \lceil \frac{n}{۲} \rceil + ۱.
\end{aligned}
$$

اگر $\deg(v) = ۲$، فرض کنید n_1 و n_2 مرتبه مؤلفه‌های $T_n - v$ باشند، دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. اگر n_1 یا n_2 زوج باشند. فرض کنید n_1 زوج باشد، آن‌گاه برای nهای زوج داریم:

$$
\begin{aligned}
|D| &\geq (\frac{n_1}{۲} + ۱) + (\frac{n_2 + ۱}{۲} + ۱) \\
&= \frac{(n_1 + n_2 + ۱)}{۲} + ۲ \\
&= \frac{n}{۲} + ۲ \\
&\geq \lceil \frac{n}{۲} \rceil + ۱.
\end{aligned}
$$

۲. اگر n_1 و n_2 هر دو فرد باشند، آن‌گاه $n = n_1 + n_2 + ۱$ نیز فرد است. لذا برای nهای فرد داریم:

$$
\begin{aligned}
|D| &\geq (\frac{n_1 + ۱}{۲} + ۱) + (\frac{n_2 + ۱}{۲} + ۱) \\
&= \frac{n_1 + n_2 + ۲}{۲} + ۲ \\
&\geq \frac{n + ۱}{۲} + ۱ \\
&\geq \lceil \frac{n}{۲} \rceil + ۱.
\end{aligned}
$$

پس در هر دو حالت داریم:

$$OLD(T_n) \geq \lceil \frac{n}{۲} \rceil + ۱.$$

حال فرض کنید که هر رأس درونی T_n در D قرار دارد و e تعداد رئوس پایانی T_n باشد. چون هیچ رأس پشتیبان با دو یا بیش از دو رأس پایانی مجاور نیست، لذا $e \leq \frac{n}{۲}$. حال کافی است نشان دهیم که دقیقاً نمی‌توانیم $\frac{n}{۲}$ رئوس پایانی داشته باشیم که هیچکدام در D نباشند. فرض کنید T_n تاج $T^*OK_۱$ باشد. چون $n \geq ۸$ لذا $V(T^*) \geq ۴$. فرض کنید u یک رأس پایانی از درخت T^* مجاور به $v \in V(T^*)$ و x و y رئوس پایانی از T_n به ترتیب مجاور به رئوس u و v باشند، آن‌گاه $N(u) \cap D = \{v\} = N(y) \cap D$ لذا چون $T_n \in \Im$ است. به تناقض می‌رسیم و در نتیجه داریم:

$$OLD(T_n) \geq \lceil \frac{n}{۲} \rceil + ۱.$$

□

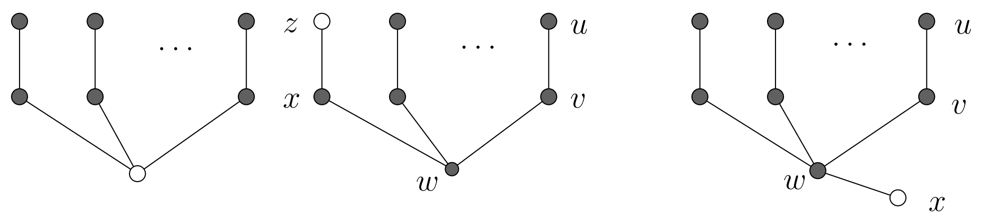
۳.۳ درخت‌های اکستریمال در $\Im$

در این بخش درخت‌های اکستریمال در $\Im$ را که به این مقدار با $\lceil \frac{n}{۲} \rceil + ۱ \leq OLD(T_n) \leq n - ۱$ می‌رسند را مشخص می‌کنیم. برای هر درخت T که $T \in \Im$ باشد، آن‌گاه هیچ دو رأس پایانی آن رئوس پشتیبان یکسان ندارند.

تعریف ۱.۳.۳. گوییم مجموعه $S \subseteq V(G)$، رأس u را به طور باز مشخص می‌کند، اگر

$$\forall x \in V(G) - u, \quad N(u) \cap S \neq \emptyset \neq N(x) \cap S.$$

نکته ۱.۳.۳. هر مجموعه OLD برای G هر رأس از $V(G)$ را به طور باز مشخص می‌کند.



شکل ۴.۳: اگر $T_n \in \Im$ از مرتبه $n \geq ۵$ باشد، آنگاه $\lceil \frac{n}{۲} \rceil + ۱ \leq OLD(T_n) \leq n - ۱$.

مشاهده ۱.۳.۳.

۱. اگر u رأس پشتیبانی از یک رأس پایانی $v \in V(G)$ باشد، آن‌گاه هر مجموعه OLD رأس v را احاطه می‌کند، در این صورت u در هر مجموعه OLD از G قرار دارد.

برهان. فرض کنید گراف G داده شده و $D \subseteq V(G)$ یک مجموعه OLD برای گراف G باشد. همچنین u رأس پشتیبانی از یک رأس پایانی $v \in V(G)$ باشد. طبق تعریف مجموعه OLD داریم $N(v) \cap D \neq \emptyset$، لذا $u \in D$ است. در نتیجه مجموعه D رأس پایانی v را احاطه می‌کند و u در هر مجموعه OLD از G قرار دارد. □

۲. اگر x, w, v, u یک مسیر در یک گراف G با $\deg(u) = \deg(x) = ۱$ و $\deg(v) = ۲$ (شکل (۴.۳)) و D یک مجموعه OLD برای گراف G باشد، آن‌گاه $u \in D$ (در غیر این صورت $N(v) \cap D = N(x) \cap D$) همچنین v و w در D قرار دارند.

برهان. فرض کنید G یک گراف و $D \subseteq V(G)$ یک مجموعه OLD برای گراف G باشد. همچنین u, v, w, x یک مسیر در گراف G با $\deg(u) = \deg(x) = ۱$ و $\deg(v) = ۲$ باشند. چون u و x رئوس پایانی گراف G، v و w به ترتیب رئوس پشتیبان برای این دو رأس می‌باشند، بنابه قسمت اول مشاهده ۱.۳.۳، $v, w \in D$ است. از طرفی داریم $N(x) \cap D = \{w\} = N(v) \cap D$، طبق تعریف مجموعه OLD دو مجموعه $N(x) \cap D$ و $N(v) \cap D$ نباید با هم برابر باشند لذا $u \in D$ است. □

۳. اگر $g(G) \geq ۵$ (به ویژه اگر G یک درخت باشد) و $|N(v) \cap D| \geq ۲$ باشد، آن‌گاه D رأس v را به طور باز مشخص می‌کند.

برهان. فرض کنید گراف G داده شده و $D \subseteq V(G)$ مجموعه‌ای OLD برای گراف G باشد. همچنین $g(G) \geq ۵$ و $v \in V(G)$ که $|N(v) \cap D| \geq ۲$ است. به برهان خلف فرض کنید D رأس v را به طور باز مشخص نمی‌کند در این صورت برای هر رأس $x \in V(G) - v$ داریم $N(v) \cap D = N(x) \cap D$. چون $|N(v) \cap D| \geq ۲$ در نتیجه $g(G) = ۴$ لذا به تناقض می‌رسیم و مجموعه D رأس v را به طور باز مشخص می‌کند. □

قضیه ۱.۳.۳. اگر $n \geq ۵$ باشد، درختی منحصر به فرد از مرتبه n با $OLD(T_n) = n - ۱$ وجود دارد. اگر $n = ۲k$، باشد، آن‌گاه T_n همراه با همه زیرتقسیم‌های یالی به جز یکی از یال‌های ستاره $k_{۱,k}$ به دست می‌آید. و برای n های زوج $OLD(T_n)$ آن منحصر به فرد است. اگر $n = ۲k + ۱$ باشد، آن‌گاه T_n از زیر تقسیم همه‌ی یال‌های T_n به دست می‌آید و برای nهای فرد گراف $K_{۱,k}$ است و دو مجموعه با $OLD(T_{۲k+۱})$ متفاوت وجود دارد که در شکل (۳.۳) نشان داده شده است.

برهان. فرض کنید درخت T از مرتبه n داده شده و $D \subseteq V(T)$ یک مجموعه OLD برای T باشد. درخت‌های T_n (از قطر چهار) در شکل (۳.۳) برای مجموعه‌های OLD دقیقاً برابر با $n-1$ است. اگر $n=2k$، مسیر u,v,w,x موجود در شکل (۳.۳) طبق قسمت دوم مشاهده ۱.۳.۳، $OLD(T)=V(T)-1$ دارد. اگر $n=2k+1$ با اضافه کردن رأس z به رأس x در مسیر u,v,w,x موجود در شکل (۳.۳) طبق مشاهده ۱.۳.۳، $x \in D$ است. در نتیجه $OLD(T_{2k+1})=n-1$.

اگر $T \in \Im$ و $diam(T) \leq 3$[1] باشد، آن‌گاه $T=P_3$ یا $T=P_4$ است. زیرا $OLD(P_3)=2$ و $OLD(P_4)=4$ بنابراین $OLD(T_n)=n$. همچنین اگر $T \in \Im$ و $diam(T) \geq 5$ باشد. فرض کنید $u,v,w,\ldots,a,b,c$ یک مسیر قطری باشد (لازم است $\deg(v)=\deg(b)=2$). اگر رأس w پشتیبانی برای رأس x باشد، فرض کنید $v_1=x$ یا به عبارت دیگر، $u=v_1$ باشد. همچنین اگر d رأسی پایانی مجاور به رأس a باشد، فرض کنید $v_2=d$ یا $v_2=c$ باشد، آن‌گاه $V(T)-\{v_1,v_2\}$ یک مجموعه OLD برای T است. بنابراین برای $diam(T) \geq 5$، $OLD(T) \leq |V(T)|-2$ است. لذا درخت‌های $T \in \Im$ با $OLD(T)=n-1$ درخت‌های موجود در شکل ۳.۳ از قطر چهار هستند. □

فرع ۱.۳.۳. درخت $T \in \Im$ از مرتبه n و $OLD(T)=n-1$ است، اگر و تنها اگر $diam(T)=4$.

برهان. فرض کنید T یک درخت از مرتبه n و $OLD(T_n)=n-1$ داده شده باشد، طبق قضیه ۱.۳.۳، T_n درخت‌های موجود در شکل (۳.۳) از قطر چهار هستند. در نتیجه $diam(T)=4$. برای اثبات عکس به وضوح طبق قسمت اول و دوم مشاهده ۱.۳.۳ درخت‌های نشان داده شده در شکل (۳.۳) از قطر چهار برابر $OLD(T_n)=n-1$ است. □

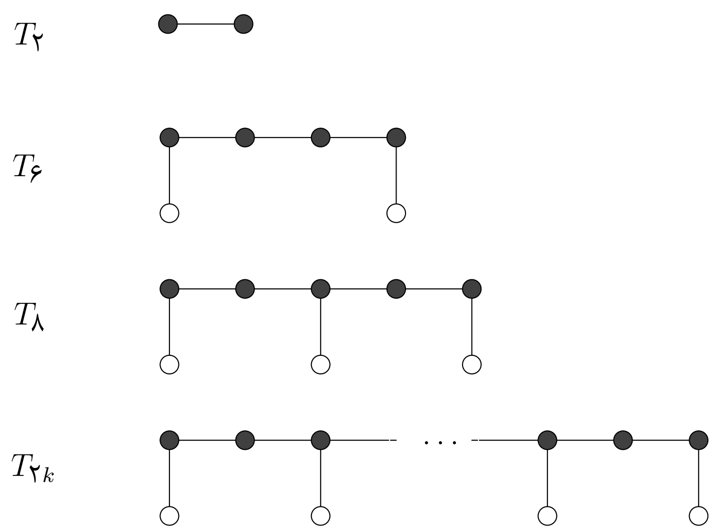
ملاحظه ۱.۳.۳. در نظر داریم که $OLD(P_5)=5-1=\lceil\frac{5}{2}\rceil+1$ و همان طور که در شکل (۱.۳) نشان داده شده است، برای $n=7$ و $n=9$ بیش از یک درخت با $OLD(T_n)=\lceil\frac{n}{2}\rceil+1$ و برای $n=6$ و $n=8$ درختی منحصر به فرد با $OLD(T_n)=\frac{n}{2}+1$ وجود دارد. درخت منحصر به فرد T_{2k} با $OLD(T_{2k})=k+1$ در شکل (۵.۳) برای $k \neq 2$ نشان داده شده است.

از این پس فرض کنید $T \in \Im$ یک درخت از مرتبه n با $OLD(T_n)=\lceil\frac{n}{2}\rceil+1$ و $D \subseteq V(T_n)$ مجموعه $OLD(T_n)$ باشد. همچنین T_n^* زیردرختی از T_n که با حذف رئوس پایانی T_n به دست آمده است. رأس $v \in V(T_n^*)$ را یک رأس درونی T_n می‌نامند.

لم ۱.۳.۳. اگر $v \in V(T_n)$ از درجه $\deg(v) \geq 3$ باشد، آن‌گاه $v \in D$ است.

برهان. به برهان خلف فرض کنید T یک درخت از مرتبه n که $v \notin D$ و $\deg(v) \geq 3$ باشد. همچنین $v_1,v_2,\ldots,v_d$ رئوس مجاور به v و $T^1,T^2,\ldots,T^d$ مؤلفه‌هایی از T_n-v باشد. برای $i=1,2,\ldots,d$، $v_i \in V(T_i)$ و $n_i=|V(T^i)|$ باشد و $n=n_1+n_2+\cdots+n_d+1$ است.

[1] Diameter



شکل ۵.۳: درخت منحصر به فرد $T_{۲k}$ از مرتبه $n = ۲k \neq ۴$ با $OLD(T_{۲k}) = k + ۱ = \lceil \frac{n}{۲} \rceil + ۱$

.

چون $v \notin D$، هر $D_i = D \cap V(T^i)$ یک مجموعه OLD برای T^i است. از طرفی $d \geq ۳$، از این رو داریم:

$$\begin{aligned}
OLD(T_n) &\geq (\lceil \frac{n_۱}{۲} \rceil + ۱) + \cdots + (\lceil \frac{n_d}{۲} \rceil + ۱) \\
&\geq (\frac{n_۱}{۲} + ۱) + (\frac{n_۲}{۲} + ۱) + \cdots + (\frac{n_d}{۲} + ۱) \\
&= \frac{(n_۱ + n_۲ + \cdots + n_d)}{۲} + d \\
&= \frac{(n - ۱)}{۲} + d \\
&\geq \frac{n}{۲} - \frac{۱}{۲} + ۳ \\
&= \frac{n}{۲} + \frac{۵}{۲} \\
&\geq \lceil \frac{n}{۲} \rceil + ۲.
\end{aligned}$$

لذا تناقض است و رأس v در D قرار دارد. $\square$

لم ۲.۳.۳. فرض کنید T درختی از مرتبه n و $v \in V(T_n)$ با $\deg(v) = ۲$ داده شده و به ازای $i = ۱,۲$ $N(v) = \{v_۱, v_۲\}$ همسایگی باز رأس v و $n_i = |V(T^i)|$ باشد. همچنین درخت T^i مؤلفه‌ای از $T_n - v$ شامل v_i باشد. اگر $n_۱$ یا $n_۲$ فرد باشد، آن‌گاه $v \in D$ است و اگر $n_۱$ و $n_۲$ هر دو زوج باشند و $v \notin D$، آن‌گاه رئوس $v_۱$ و $v_۲$ در D قرار دارند.

برهان. به برهان خلف فرض کنید T درختی از مرتبه n و $D \subseteq V(T_n)$ مجموعه OLD برای T^n باشد و $v \notin D$. درخت T^i برای $i = ۱,۲$ مؤلفه‌هایی از $T_n - v$ شامل v_i است. بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض کنید $n_۱$ فرد و $D_i = D \cap V(T^i)$ مجموعه OLD برای T^i باشد. آن‌گاه داریم:

$$
\begin{aligned}
OLD(T_n) &\geq \lceil \frac{n_۱}{۲} \rceil + ۱ + \lceil \frac{n_۲}{۲} \rceil + ۱ \\
&\geq \frac{(n_۱ + ۱)}{۲} + ۱ + \lceil \frac{n_۲}{۲} \rceil + ۱ \\
&\geq \lceil \frac{n_۱ + n_۲ + ۱}{۲} \rceil + ۲ \\
&= \lceil \frac{n}{۲} \rceil + ۲.
\end{aligned}
$$

لذا یک تناقض است و $v \in D$ است.

حال فرض کنید $n_۱$ و $n_۲$ هر دو زوج باشند و $v \notin D$. چون D یک مجموعه OLD است، لذا $D \cap \{v_۱, v_۲\} \neq \emptyset$ است، بدون از دست دادن کلیت مسأله، فرض کنید $v_۲ \notin D$. حال $D_۱ = D \cap V(T^۱)$ مجموعه‌ای OLD برای $T^۱ \cup \{v\}$ و $D_۲ = D \cap V(T^۲)$ نیز مجموعه OLD برای $T^۲$ باشد. آن‌گاه داریم:

$$
\begin{aligned}
OLD(T_n) &= |D| \\
&= |D_۱| + |D_۲| \\
&\geq \lceil \frac{(n_۱ + ۱)}{۲} \rceil + ۱ + \lceil \frac{n_۲}{۲} \rceil + ۱ \\
&= \frac{n_۱}{۲} + ۲ + \frac{n_۲}{۲} + ۱ \\
&= \lceil \frac{n_۱ + n_۲ + ۱}{۲} \rceil + ۲.
\end{aligned}
$$

لذا یک تناقض است و هر دو رأس $v_۱$ و $v_۲$ در D قرار دارند. □

از لم‌های ۱.۳.۳ و ۲.۳.۳ می‌توان گزاره زیر را نتیجه گرفت.

گزاره ۱.۳.۳. فرض کنید v رأسی درونی از T_n باشد که $v \notin D$، آن‌گاه $\deg(v) = ۲$ و هر مؤلفه از $T_n - v$ مقادیر زوج دارند و دو همسایه v در D قرار می‌گیرند. به ویژه اگر n زوج باشد، آن‌گاه هر رأس درونی T_n در D قرار دارد.

برهان. فرض کنید T درختی از مرتبه n و v رأس درونی از T_n باشد که $v \notin D$، همچنین هر دو رأس $v_۱$ و $v_۲$ مجاور به v باشند. به برهان خلف، فرض کنید $\deg(v) \neq ۲$ باشد، آن‌گاه $\deg(v) \geq ۳$، است، طبق لم ۱.۳.۳، $v \in D$ است. لذا با فرض مسأله در تناقض است و $\deg(v) = ۲$. حال فرض کنید $\deg(v) = ۲$ و هر مؤلفه $T_n - v$ مقادیر زوج دارد و $v \notin D$، طبق لم ۲.۳.۳، $v_۱, v_۲ \in D$. از طرفی اگر n زوج و $\deg(v) = ۲$، آن‌گاه یکی از مؤلفه‌های T_n فرد است. لذا طبق لم ۲.۳.۳، $v \in D$ است. □

لم ۳.۳.۳. اگر T_n درختی از مرتبه $n = ۲k \geq ۶$ و D مجموعه‌ای OLD برای T_n از اندازه $|D| = \frac{n}{۲} + ۱ = k + ۱$ باشد، آن‌گاه هیچ رأس پایانی T_n در D قرار ندارد.

برهان. فرض کنید T_n درختی از اندازه $n = ۲k \geq ۶$ و $D \subseteq V(T_n)$ مجموعه OLD برای T_n از اندازه $k+۱$ باشد. به برهان خلف، فرض کنید v رأس پایانی از T_n که $v \in D$ و w رأسی پشتیبانی برای این رأس v باشد. طبق گزاره ۱.۳.۳، چون n زوج است، لذا هر رأس درونی T_n در D قرار دارد. و از طرفی چون هیچ دو رأس پایانی رئوس پشتیبان یکسان ندارند لذا $T_{۲k}$ دقیقاً k رأس درونی داشته باشد که همگی در D قرار دارند و هر کدام از این رئوس با یک رأس پایانی متمایز مجاورند. فرض کنید x یک رأس پایانی از درخت T_n^* از مرتبه $k \geq ۲$ باشد که $x \neq w$ است. همچنین $N(x) \cap V(T_n^*) = \{t\}$ که ممکن است $t = w$ و y رأسی پایانی از T_n مجاور به t باشد. آن‌گاه داریم:

$$N(y) \cap D = \{t\} = N(x) \cap D.$$

لذا یک تناقض است و هیچ رأس پایانی T_n در D قرار ندارد. □

فرع ۲.۳.۳. اگر $OLD(T_{۲k}) = k + ۱ \geq ۴$ باشد، آن‌گاه $T_{۲k}$ مجموعه $OLD(T_{۲k})$ منحصر به فردی شامل $k + ۱$ رئوس درونی است و دقیقاً دو رأس درونی وجود دارد که مجاور به $k - ۱$ رأس پایانی نیستند.

برهان. فرض کنید T_n درختی از مرتبه $n = ۲k$ و $D \subseteq V(T_{۲k})$ مجموعه OLD برای $T_{۲k}$ باشد که $OLD(T_{۲k}) = k + ۱ \geq ۴$. طبق لم ۳.۳.۳، هیچ رأس پایانی T_n در D قرار ندارد. بنابر فرض $|D| = k + ۱$، لذا $k + ۱$ رأس درونی در D قرار دارند. از طرفی $n = ۲k$، لذا $k - ۱$ رأس پایانی مجاور به $k - ۱$ از $k + ۱$ رأس درونی است. بنابراین دقیقاً دو رأس درونی وجود دارد که مجاور به $k - ۱$ رأس پایانی نیستند. □

لم ۴.۳.۳. اگر $OLD(T_{۲k}) = k + ۱ \geq ۴$ باشد، آن‌گاه $T_{۲k}^*$ مسیری شامل $k + ۱$ رأس است.

برهان. فرض کنید T_n درختی از مرتبه $۲k$ و $D \subseteq V(T_n)$ مجموعه OLD برای T_n باشد. ثابت می‌کنیم که T^* مسیری با $k + ۱$ رأس است. اگر x رأس پایانی از $T_{۲k}^*$ مجاور به رأس پشتیبان $t \in V(T_{۲k}^*)$ باشد، آن‌گاه t نمی‌تواند رأس پشتیبانی برای رأس پایانی $T_{۲k}$ باشد. در غیر این صورت اگر y رأس پایانی از $T_{۲k}$ با رأس پشتیبان t باشد، آن‌گاه داریم:

$$N(y) \cap D = \{t\} = N(x) \cap D.$$

یک تناقض است. از طرفی چون $n = ۲k$ طبق لم ۳.۳.۳، هیچ رأس پایانی T_n در D قرار ندارد. پس $T_{۲k}^*$ شامل $k + ۱$ رأس که همگی در D قرار دارند. همچنین فرض کنید دو رأس پایانی $x_۱$ و $x_۲$ از $T_{۲k}^*$ نمی‌توانند دارای همسایه مشترک t باشند زیرا در غیر این صورت داریم:

$$N(x_۱) \cap D = \{t\} = N(x_۲) \cap D,$$

یک تناقض است. حال اگر T^*_{2k} یک رأس از درجه حداقل ۳ داشته باشد، آن‌گاه T^*_{2k} سه رأس پایانی با رئوس پشتیبان متمایز دارند که رئوس پشتیبانی برای رئوس پایانی T_{2k} نیستند. طبق فرع ۲.۳.۳ در تناقض است. چون دقیقاً دو رأس پشتیبان در $V(T^*_{2k})$ وجود دارد که رئوس پشتیبان برای رئوس پایانی T_{2k} نیستند، لذا T^*_{2k} مسیری شامل $k+1$ رأس است. $\square$

قضیه ۲.۳.۳. اگر $4 \geq k+1 = OLD(T_{2k})$ باشد، آن‌گاه $OLD(T_{2k})$ مسیر $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}$ است و v_i رأس پشتیبانی از T_{2k} است، اگر و فقط اگر $i \notin \{2, k\}$.

برهان. فرض کنید T درختی از مرتبه $n = 2k$ و $D \subseteq V(T_n)$ مجموعه OLD برای T_{2k} باشد که $4 \geq k+1 = OLD(T_{2k})$، آن‌گاه طبق لم ۴.۳.۳، T^*_{2k} مسیری با $k+1$ رأس است. همچنین فرض کنید $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}$ مسیر T^*_{2k} باشد که هر v_i رأسی از T^*_{2k} است. واضح است که v_i برای $i = 2, k$ رئوس پشتیبان T_{2k} نیستند. در غیر این صورت اگر y رأس پایانی مجاور به v_2 باشد داریم:

$$N(y) \cap D = \{v_2\} = N(v_1) \cap D.$$

همچنین اگر x رأس پایانی از T_{2k} مجاور به v_k باشد، خواهیم داشت:

$$N(x) \cap D = \{v_k\} = N(v_{k+1}) \cap D.$$

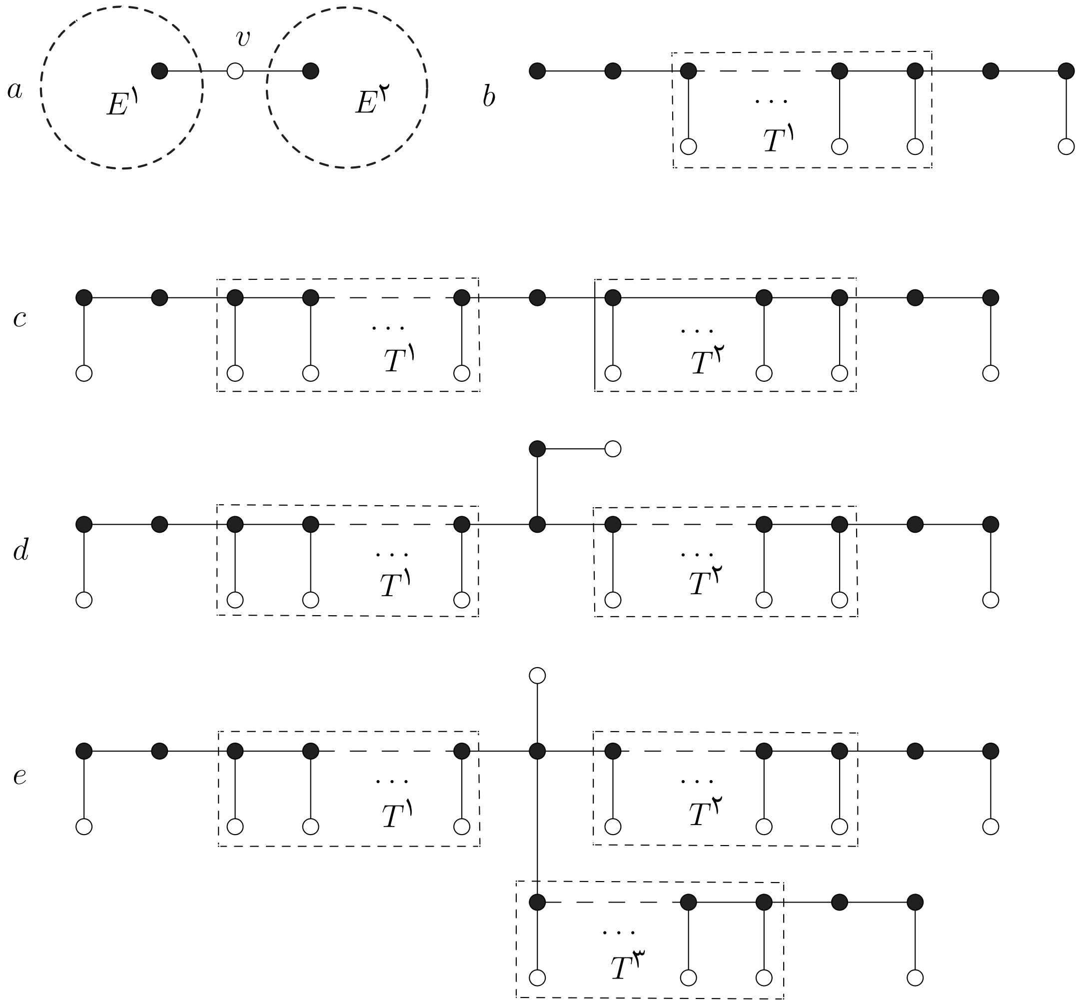
لذا یک تناقض است و v_2 و v_k رئوس پشتیبان برای هیچ رأس پایانی از T_{2k} نیستند. برعکس برای هر رأس v_i که $i \notin \{2, k\}$. یک رأس پشتیبان از T_{2k} است. $\square$

لم ۵.۳.۳. اگر $OLD(T_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$ و D مجموعه $OLD(T_n)$ باشد، آن‌گاه حداکثر یک رأس درونی T_n در D قرار ندارد.

برهان. فرض کنید درخت T از مرتبه n و $D \subseteq V(T_n)$ مجموعه‌ای OLD برای T_n باشد به‌طوریکه $OLD(T_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$. به برهان خلف، فرض کنید v_1 و v_2 دو رأس درونی متمایز در D قرار ندارند، طبق گزاره ۱.۳.۳، n فرد است و $\deg(v_1) = \deg(v_2) = 2$. همچنین زیردرخت T^1 مؤلفه‌ای از $T_n - v_1$ شامل رأس v_2 نیست و زیردرخت T^2 مؤلفه‌ای از $T_n - v_2$ به طوری‌که شامل v_1 نباشد و T^3 نیز سومین مؤلفه $T_n - v_1 - v_2$ است. همچنین $n_i = |V(T_i)|$. طبق گزاره ۱.۳.۳، $|V(T^1)|$ و $|V(T^2)|$ زوج هستند، لذا $(V(T^3))$ نیز فرد است. فرض کنید برای $1 \leq i \leq 3$، $D_i = D \cap V(T^i)$، آن‌گاه چون $v_1, v_2 \notin D$، نشان می‌دهد که D_i یک مجموعه OLD برای T^i است. در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}
|D| &\geq \frac{n_1}{2} + 1 + \frac{n_2}{2} + 1 + \frac{n_3 + 1}{2} + 1 \\
&= \frac{(n_1 + n_2 + n_3 + 1)}{2} + 3 \\
&= \frac{(n_1 + n_2 + n_3 + 2)}{2} + \frac{5}{2} \\
&\geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2.
\end{aligned}$$

لذا تناقض است و حداکثر یک رأس درونی T_n در D قرار ندارد. □



شکل ۶.۳: $OLD(T_{2k+1}) = k+2$. هر T^i یک شانه است

.

از گزاره ۱.۳.۳ و لم ۶.۳.۳ قضیه زیر را داریم.

قضیه ۳.۳.۳. اگر $OLD(T_{2k+1}) = k+2$ و $D \subseteq V(T_n)$ مجموعه $OLD(T_{2k+1})$ باشد که رأس درونی $v \notin D$، آن‌گاه T_{2k+1} شکل $5(a)$ موجود در (۶.۳) است. درخت‌های E^1 و E^2 درخت‌هایی از مرتبه زوج با n_1 و n_2 رأس به طوری‌که $OLD(E^i) = \frac{n_i}{2}+1$ باشد و همسایه‌های v در D قرار دارند. (قضیه۲.۳.۳ و شکل (۴.۳))

برهان. فرض کنید T درختی از مرتبه $2k+1$ و $D \subseteq V(T_n)$ مجموعه OLD باشد به طوری‌که $OLD(T_{2k+1}) = k+2$ و رأس درونی $v \notin D$. طبق گزاره ۱.۳.۳، تعداد رئوس هر کدام از مؤلفه‌ها زوج است. لذا $OLD(E^i) = \frac{n_i}{2}+1$ و همسایه‌های v در D قرار دارند. □

باقی می‌ماند نشان دهیم درخت‌هایی از مرتبه فرد با مجموعه $OLD(T_{2k+1})$ که آن را با D نشان می‌دهند از مرتبه $k+2$ است که هر رأس درونی آن در D قرار دارد. در واقع، $V(T^*_{2k+1}) \subseteq D$ باشد. بسته به این‌که رأس پایانی از T_{2k+1} در D قرار دارد یا نه، دو حالت در نظر گرفته شده است.

لم ۶.۳.۳. اگر $OLD(T_{2k+1}) = k+2$ و D مجموعه $OLD(T_{2k+1})$ با $V(T^*_{2k+1}) \subseteq D$ باشد، آن‌گاه حداکثر یک رأس پایانی از T_{2k+1} در D قرار دارد.

برهان. به برهان خلف فرض کنید v_1 و v_2 دو رأس پایانی متمایزی باشند که در D قرار دارند و w_1 و w_2 به ترتیب رئوس پشتیبانی برای این دو رأس باشند. حال $V(T_{2k+1}) - D$ شامل $k-1$ رئوس پایانی که هر کدام مجاور به یکی از $k-2$ رأس در $D - \{v_1, v_2, w_1, w_2\}$ است. چون، دو رأس پایانی از T_{2k+1} رأس پشتیبان یکسان دارند، $T_{2k+1} \notin \Im$. بنابراین یک تناقض است. در نتیجه حداکثر یک رأس پایانی T_{2k+1} در D قرار ندارد. □

تعریف ۲.۳.۳. [۲۷] درخت T یک شانه نامیده می‌شود اگر یک هزارپا از مرتبه $2t$ که هر t رئوس از اسپین[۲] آن مجاور به دقیقاً یک رأس پایانی است (یعنی، تاج مسیر P_t).

قضیه ۴.۳.۳. اگر $OLD(T_{2k+1}) = k+2$ و D یک مجموعه $OLD(T_{2k+1})$ شامل $V(T^*_{2k+1})$ و یک رأس پایانی v باشد، آن‌گاه T_{2k+1} درخت موجود در شکل (b) (۵.۳) است.

برهان. فرض کنید T درختی از مرتبه $2k+1$ و $D \subseteq V(T_n)$ مجموعه OLD برای T_n که $OLD(T_{2k+1}) = k+2$ باشد و w رأس پشتیبانی برای رأس پایانی v باشد. و $V(T_{2k+1}) - D$ شامل $k-1$ رأس پایانی از T_{2k+1} که هر کدام مجاور به یک k رأس درونی از $D - \{v, w\}$ است. به ویژه w و یک رأس درونی دیگری چون z وجود دارد که $N[z] \subseteq D$ و $N[w] \subseteq D$ است. کافی است نشان داده شود که D یک مسیر

$$v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}, v_{k+2}$$

است. طبق مشاهده ۱.۳.۳، $z = v_{k+1}$. از طرفی هیچ دو رأس پایانی از T^*_{2k+1} نمی‌تواند رئوس پشتیبان یکسان داشته باشد. حال اگر T^*_{2k+1} حداقل ۳ رأس پایانی داشته باشد. لذا w و دو رأس پشتیبان z_1 و z_2 وجود دارد که

$$N[w] \subseteq D, \qquad N[z_1] \subseteq D, \qquad N[z_2] \subseteq D.$$

یک تناقض است. چون $k-1$ رأس پایانی مجاور به k رأس درونی از $D - \{v, w\}$ است. لذا $N[w] \subseteq D$ و $N[v_{k+1}] \subseteq D$ و T_{2k+1} درخت‌های موجود در شکل (b) (۵.۳) است. □

قضیه ۵.۳.۳. اگر $OLD(T_{2k+1}) = k+2$ و $D = V(T^*_{2k+1})$ یک مجموعه $OLD(T_{2k+1})$ باشد، اگر و فقط اگر T_{2k+1} همان درخت‌های (c)، (d) و (e) شکل (۵.۳) است.

[۲] spin

برهان. فرض کنید درخت T از مرتبه $۲k+۱$ داده شده و $D \subseteq V(T_n)$ مجموعه OLD از مرتبه $k+۲$ باشد. واضح است رئوس تیره در هر درخت $T_{۲k+۱}$ در شکل (۵.۳) یک مجموعه OLD از مرتبه $k+۲$ است.

فرض کنید $V(T^*_{۲k+۱}) = k+۲ = OLD(T_{۲k+۱})$، بنابراین $k-۱$ رأس پایانی از $T_{۲k+۱}$ مجاور به $k-۱$ از $k+۲$ رئوس درونی است. لذا، دقیقاً سه رئوس درونی، رئوس پشتیبان از $T_{۲k+۱}$ نیستند. طبق تعریف، هر رأس پایانی از $T^*_{۲k+۱}$ یک رأس پشتیبان در $T_{۲k+۱}$ است. اگر u یک رأس پشتیبان از یک رأس پایانی v از $T^*_{۲k+۱}$ همچنین یک رأس پشتیبان از یک رأس پایانی w از $T_{۲k+۱}$ باشد، بنابراین داریم:

$$N(w) \cap S = \{u\} = N(v) \cap S.$$

یک تناقض است. لذا رأس پشتیبان $T^*_{۲k+۱}$ رأس پشتیبانی برای $T_{۲k+۱}$ نیست. بعلاوه هیچ دو رأس پایانی از $T^*_{۲k+۱}$ رأس پشتیبان یکسان ندارند. در نتیجه، $T^*_{۲k+۱}$ حداکثر سه رأس پایانی دارد. اگر $T^*_{۲k+۱}$ یک مسیر

$$v_۱, v_۲, \dots, v_{k+۱}, v_{k+۲}$$

باشد، آن‌گاه $v_۲$ و $v_{k+۱}$ و یک رأس v_i که $i \notin \{۱, k+۲\}$، رئوس پشتیبان از $T_{۲k+۱}$ نیستند، در این حالت درخت $T_{۲k+۱}$ درخت موجود در شکل (۵.۳)(c) است. فرض کنید $T^*_{۲k+۱}$ یک (منحصر به فرد) رأس v از درجه سه دارد. شاخه‌های $T^*_{۲k+۱}$ در v مسیرهایی هستند که حداکثر یکی از آن‌ها طول یک دارد. اگر v مجاور به یک رأس پایانی w از $T^*_{۲k+۱}$ باشد، آن‌گاه v و رئوس ما قبل آخر روی دو شاخه دیگر مسیرها در v سه رئوس از $T^*_{۲k+۱}$ هستند که رئوس پشتیبان در $T_{۲k+۱}$ نیستند، و در این حالت $T_{۲k+۱}$ درخت موجود در شکل (۵.۳)(d) است. اگر هر سه شاخه مسیرهای v در $T^*_{۲k+۱}$ طول حداقل دو داشته باشد، آن‌گاه سه رأس ماقبل آخر روی مسیر آنها سه عنصر از $V(T^*_{۲k+۱})$ هستند که رئوس پشتیبان از $T_{۲k+۱}$ نیستند و در این صورت $T_{۲k+۱}$ درخت موجود در شکل (۵.۳)(e) است. □

فصل ۴

عدد احاطه‌گری مکانی همسایه باز در گراف‌ها

۱.۴ مقدمه

در فصل دوم و سوم عدد احاطه‌گری مکانی همسایه را باز در مسیرها و درخت‌ها بررسی کردیم. در این فصل عدد احاطه‌گری مکانی همسایه باز را در گراف‌ها و رابطه بین عدد احاطه‌گری مکانی همسایه باز با عدد انباشته را بررسی می‌کنیم.

۲.۴ نتایج موجود

واضح است که اگر برای هر دو رأس متمایز u و v داشته باشیم $N(u) = N(v)$، آن‌گاه برای هر $D \subseteq V(G)$، داریم $N(u) \cap D = N(v) \cap D$. بنابراین G نمی‌تواند مجموعه OLD داشته باشد.

مشاهده ۱.۲.۴. (مشاهده ۲.۱.۱). گراف G مجموعه OLD دارد، اگر و فقط اگر G هیچ رأس تنهایی نداشته باشد و برای هر دو رأس متمایز u و v داریم $N(u) \neq N(v)$.

نتیجه ۱.۲.۴. اگر G رأس پشتیبان قوی داشته باشد، آن‌گاه G مجموعه OLD ندارد.

برهان. فرض کنید G یک گراف و u رأس پشتیبان قوی برای G باشد، آن‌گاه حداقل دو رأس پایانی x و y را در همسایگی باز خود دارد. لذا داریم:

$$N(x) = \{u\} = N(y).$$

طبق مشاهده ۱.۱.۲ گراف G مجموعه OLD ندارد. □

گزاره ۱.۲.۴. (۱.۱.۳) درخت T از مرتبه $n \geq ۳$، مجموعه OLD دارد، اگر و فقط اگر T شامل رأس پشتیبان قوی نباشد.

سؤال ۱.۲.۴. آیا می‌توان گفت که دسته ای از گراف‌ها دارای مجموعه OLD و دسته‌ای از گراف‌هایی که دارای مجموعه OLD نیستند، شامل زیرگراف القایی ممنوعه می‌باشند؟ جواب منفی است. برای اثبات این مطلب گزاره زیر ارائه شده است.

گزاره ۲.۲.۴. کلاس $S_۱$ دسته‌ای از گراف‌هایی که مجموعه OLD دارند و کلاس $S_۲$ دسته‌ای از گراف‌هایی که دارای این مجموعه نیستند، هیچ کدام از این دسته‌ها زیرگراف القایی ممنوعه ندارند.

برهان. فرض کنید گراف G داده شده باشد، با انتخاب رأس $v \in V(G)$ و اضافه کردن دو رئوس جدید $v_۱$ و $v_۲$ و یال‌های $vv_۱$ و $vv_۲$ به G یک گراف G^* از مرتبه $|V(G)| + ۲$ به دست می‌آید. چون

$$N(v_۱) = \{v\} = N(v_۲),$$

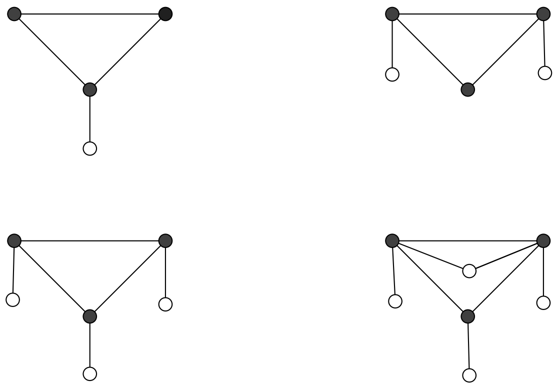
لذا گراف G^* مجموعه OLD ندارد و G زیرگراف القایی از G^* است. نشان می‌دهد که کلاس $S_۲$ از دسته گراف‌هایی که دارای مجموعه OLD نیستند زیرگراف القایی ممنوعه ندارند.
همچنین برای هر رأس $v \in V(G)$، با اضافه کردن دو رأس جدید $v_۱$ و $v_۲$ و یال‌های $vv_۱$، $vv_۲$ و $v_۱v_۲$ گرافی به صورت $H = GOK_۲$ (تاج گراف G با $K_۲$) از مرتبه $|V(G)|.۳$ به دست می‌آید. آن‌گاه H دارای مجموعه OLD است و آن را با D نشان می‌دهیم، لذا داریم:

$$D = \{v_۱, v_۲ | v \in V(G)\} = V(H) - V(G)\}$$

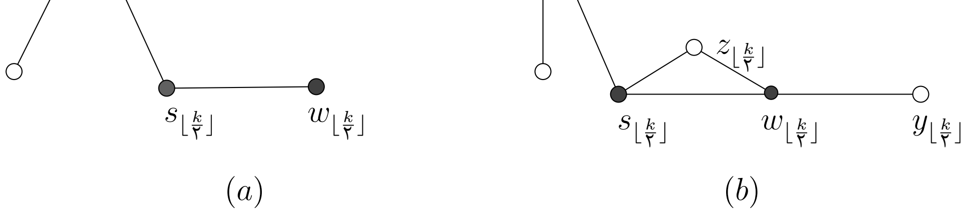
و $|D| = ۲.|V(G)$ پس G یک زیرگرافی القایی از H است. از این‌رو کلاس $S_۱$ از دسته گراف‌هایی که مجموعه OLD دارند، زیرگراف القایی ممنوعه ندارند. □

در فصل دوم در مشاهده ۲.۱.۲ نشان داده بودیم که مرتبه گراف G دارای مجموعه OLD حداکثر $۲^{OLD(G)} - ۱$ است. نتایجی برای عدد احاطه‌گری مکانی همسایه باز از یک گراف در زیر ثابت شده است.

گزاره ۳.۲.۴. فرض کنید (تعدادی وسیله‌ی ردیابی موجود است) $k \geq ۲$ و $k+۱ \leq n \leq ۲^k - ۱$ باشد، آن‌گاه گراف همبند G از مرتبه n با $OLD(G) = k$ وجود دارد.



شکل ۱.۴: گراف‌هایی با $OLD(G) = ۳$.



شکل ۲.۴: (a) گراف H و (b) گراف G با $OLD(G) = k$.

برهان. فرض کنید G گرافی از مرتبه $k+1 \leq n \leq 2^k - 1$ و k و n اعداد صحیح و $k \geq 1$ داده باشد. اگر $k = 2$ باشد، آن‌گاه $OLD(k_3) = 2$ است و اگر $k = 3$ باشد، آن‌گاه گرافی از مرتبه $4 \leq n \leq 7$ (شکل (۱.۴)) وجود دارد. اگر $k \geq 4$ و $k+1 \leq n \leq 2^k - 1$ باشند. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. $k+1 \leq n \leq 2k - 1$.
فرض کنید H گرافی که از ستاره $k_{1,\lceil \frac{k}{2} \rceil}$ همراه با زیرتقسیم $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ یال (شکل (a)(۲.۲.۴)) باشد، آن‌گاه گراف H از مرتبه $k+1$ و $OLD(G) = k$ است. به این ترتیب رئوس پشتیبان از درجه دو را با $s_1, s_2, \ldots, s_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$، و همسایه برگ آن‌ها را با $w_1, \ldots, w_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$ نشان می‌دهیم.
اگر $n \leq \lceil \frac{3k}{2} \rceil$، برای به دست آوردن گراف G، $n - (k+1)$ رئوس پایانی $y_1, \ldots, y_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$ را به $\{w_i : i = 1, \ldots, \lceil \frac{k}{2} \rceil - 1\}$ اضافه می‌کنیم، آن‌گاه طبق تعریف مجموعه احاطه‌گر مکانی همسایه باز گراف G از مرتبه n و $OLD(G) = k$ است.
اگر $n > \lceil \frac{3k}{2} \rceil$، برای به دست آوردن گراف G رئوس پایانی y_i را به هر رأس w_i به جز $w_{\lceil \frac{k}{2} \rceil}$ به گراف H اضافه می‌کنیم. به خصوص اگر k زوج باشد، آن‌گاه گراف G برای $i = 1, \ldots, n - \lceil \frac{3k}{2} \rceil$، با وصل کردن رأس z_i به رئوس s_i و w_i (شکل (b)(۲.۲.۴)) به دست می‌آید. آن‌گاه G گرافی از مرتبه n و $OLD(G) = |D| = k$ می‌باشد.

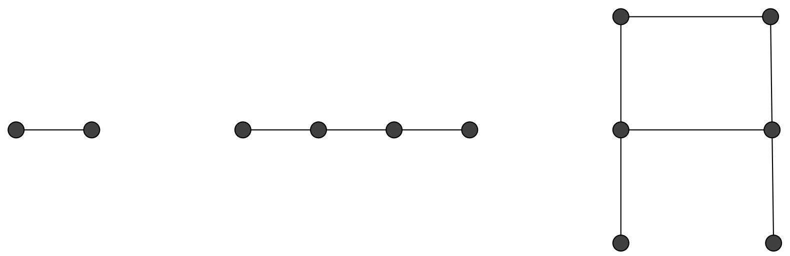
۲. $2k \leq n \leq 2^k - 1$.
فرض کنید G_k تاج گراف کامل K_k و $D = V(K_k)$ مجموعه‌ای OLD برای این گراف باشد. چون گراف G_k، k رأس از درجه $k-1$ و k رأس از درجه یک دارد. لذا $2^k - 1 - 2k$ زیرمجموعه متمایز از اندازه i که $2 \leq i \leq k$ و $i \neq k-1$ دارد. طبق مشاهده ۲.۱.۲ چون مرتبه گراف G_k حداکثر به تعداد زیرمجموعه‌های ناتهی D است، از این رو از چنین زیرمجموعه‌های D، به تعداد $n-2k$ زیرمجموعه متمایز انتخاب می‌کنیم. گراف G گرافی که با اضافه کردن $n - 2k$ رأس جدید به گراف G_k و وصل کردن این رئوس تنها به یکی از زیرمجموعه‌های انتخاب شده به دست می‌آید. بنابراین هیچ دو رأس جدید مجاور به زیرمجموعه‌های یکسان نیستند. لذا گراف G گرافی از مرتبه n و $OLD(G) = |D| = k$ است.

□

درفصل دوم برای مسیر P_4 نشان داده شد که $OLD(P_4) = 4$ می‌باشد. اما برای حالت خواصی از درخت‌ها قضایای زیر را داریم.

قضیه ۱.۲.۴. (قضیه ۱.۲.۳) اگر درخت T از مرتبه $n \geq 5$ یک مجموعه OLD داشته باشد، آن‌گاه $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq OLD(T) \leq n - 1$.

قضیه ۲.۲.۴. ([۲۶]) اگر $n \geq 5$ و $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1 \leq j \leq n - 1$ باشد، آن‌گاه درختی $T_{n,j}$ از مرتبه n با $OLD(T_{n,j}) = j$ وجود دارد.



شکل ۳.۴: سه گراف $P_۲$، $P_۴$ و H با $OLD(G) = V(G)$.

۳.۴ گراف‌های G با OLD(G) بزرگ یا کوچک

می‌دانیم اگر گراف G مجموعه OLD داشته باشد، آن‌گاه $۲ \leq OLD(G) \leq n$. در این بخش به تعیین گراف‌های G با $OLD(G) = ۲,۳$ یا $OLD(G) = n$ می‌پردازیم.

مشاهده ۱.۳.۴. گراف G با $OLD(G) = ۲$ باشد، اگر و فقط اگر $G = K_۲$ یا $G = K_۳$.

برهان. فرض کنید G گرافی با V رأس و E یال داده شده و D مجموعه‌ای OLD برای گراف G با $OLD(G) = ۲$ باشد. بنابه مشاهده ۲.۱.۲، $|V(G)| \leq ۲^h - ۱$ است. لذا گراف G حداکثر سه رأس دارد. چون $|D| = ۲$ پس $|V(G) - D| \leq ۱$. از طرفی D رئوس تنها ندارد، بنابراین تنها می‌تواند گراف کامل $K_۲$ باشد. در نتیجه داریم:

- اگر $|D| = |V(G)|$ آن‌گاه $G = K_۲$.
- اگر $|V(G) - D| = ۱$، چون اندازه رئوس گراف G به تعداد زیرمجموعه‌های متمایز و ناتهی D است، پس فقط یک زیرمجموعه از اندازه دو داریم. با اضافه کردن رأسی جدید و وصل کردن آن به زیرمجموعه دو عضوی D گراف $K_۳$ به دست می‌آید.

□

تعریف ۱.۳.۴. فرض کنید $\varepsilon_۱$ دسته گراف‌های به دست آمده از تاج $K_۳OK_۱$ که با حذف حداکثر دو برگ و امکان اضافه کردن یال‌هایی بین باقی برگ های گراف باشد و $\varepsilon_۲$ دسته گراف‌هایی که از تاج $K_۴OK_۱$ با حذف حداقل یک یال آویخته و امکان اضافه کردن یال‌هایی بین سایر برگ‌ها به دست آمده باشد.

گزاره ۱.۳.۴. گراف G با $OLD(G) = ۳$ باشد، اگر و فقط اگر $G \in \varepsilon_۱ \cup \varepsilon_۲$ است.

برهان. فرض کنید گراف G داده شده و $G \in \varepsilon_۱ \cup \varepsilon_۲$ باشد. طبق تعریف مجموعه OLD بررسی اینکه $OLD(G) = ۳$ سرراست است.

حال فرض کنید G گرافی با $OLD(G)=۳$ و $D\subseteq V$ مینیمم اندازه مجموعه OLD باشد. $G[D]$ (زیرگراف القا شده به وسیله D) نمی‌تواند شامل یک رأس تنها و یا مسیر $P_۳$ باشد. طبق مشاهده۱.۱.۲ $\delta(G)\geq ۱$ همچنین با اضافه کردن رأس جدیدی به رئوس پایانی $OLD(G)\geq ۴$، به تناقض می‌رسیم. بنابراین $G[D]$ باید کامل باشد. در واقع $G[D]\cong K_۳$. طبق مشاهده۲.۱.۲، $|V(G)|\leq ۲^{|D|}-۱$ است. لذا، گراف G حداکثر ۷ رأس دارد. از طرفی بنابه مشاهده۱.۳.۴، $OLD(K_۳)=۲$، پس $V(G)-D\neq\emptyset$ است. از طرفی (مشاهده ۱.۲.۳) رئوس گراف G حداکثر به تعداد زیرمجموعه‌های ناتهی و متمایز D است. چون هر کدام از رئوس D با دو رأس D مجاور هستند، هر رأسی در $V(G)-D$ با یک یا سه رأس D مجاور هستند. به عبارت دیگر حداکثر یک رأس که آن را با v^* نشان می‌دهیم در $V(G)-D$ قرار دارد مجاور به همه رئوس D است. در نظر داریم که $V(G)-D$ ممکن است شامل رئوس مجاور نیز باشد. اگر رأس v^* در $V(G)-D$ قرار نداشته باشد، آن‌گاه $G\in\varepsilon_۱$ و اگر رأس v^* در $V(G)-D$ قرار داشته باشد، آن‌گاه $v^*\in\varepsilon_۲$ است. در نتیجه داریم:

$$G\in\varepsilon_۱\cup\varepsilon_۲.$$

□

فرض کنید H گرافی از مرتبه شش در شکل (۳.۴) باشد.

قضیه ۱.۳.۴. گراف G از مرتبه n با $OLD(G)=n$، باشد، اگر و فقط اگر هر مؤلفه از آن G، $P_۲$، $P_۴$ یا H باشد.

برهان. فرض کنید G گرافی از مرتبه n با $OLD(G)=n$ باشد. بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض کنید G یک گراف همبند باشد. اگر $n\leq ۴$، باشد ($OLD(P_۲)=۲$ و $OLD(P_۴)=۴$)، آن‌گاه $G=P_۲$ یا $G=P_۴$ می‌باشد. حال اگر $n\geq ۵$ باشد ($OLD(K_n)=n-۱$)، آن‌گاه $G\neq K_n$ می‌باشد. برای هر رأس $v\in V(G)$، فرض کنید $V_r=V(G)-\{r\}$ و G_r زیرگراف القا شده G با V_r باشد. همچنین v رأسی از درجه مینیمم که $\deg(v)=\delta(G)$ باشد.در نظر داریم که G_v هیچ رأس تنها ندارد. چون V_v مجموعه OLD از گراف G نیست، لذا دو رأس غیرمجاور x و y وجود دارد که $x\in N(v)$ و $y\notin N(v)$ به طوری‌که $N(x)=N(y)\cup\{v\}$. می‌دانیم G_y رأس تنها ندارد. بنابراین چون V_y مجموعه OLD از G نیست، لذا دو رأس غیرمجاور z و w دارد که $z\in N(y)$ و $w\notin N(y)$ می‌باشد به طوری‌که $N(z)=N(w)\cup\{y\}$. چون $y\in N(z)$ و $N(x)=N(y)\cup\{v\}$، پس داریم $x\in N(z)$ و $x\neq w$ (اگر $x=w$، خواهیم داشت $w\in N(z)$ که تناقض است). حال لازم است ادعاهای زیر را ثابت کنیم.

ادعا ۱.۳.۴. $w=v$.

به برهان خلف، فرض کنید $w\neq v$ باشد، چون $z\in N(y)$ و $N(x)=N(y)\cup\{v\}$، پس $xz\in E(G)$ است. همچنین $N(z)=N(w)\cup\{y\}$، لذا داریم $x\in N(w)$. از طرفی $N(x)=N(y)\cup\{v\}$

بنابراین $wy \in E$ است. در واقع $w \in N(y)$ می‌باشد، یک تناقض است، از این رو $w = v$ و $N(z) = N(v) \cup \{y\}$.

ادعا ۲.۳.۴. $\deg(v) = ۱$.

فرض کنید $\deg(v) \geq ۲$ و $\deg(x) = ۲$، باشد، آن‌گاه $\deg(y) = ۱$. چون $\deg(v) = \delta(G)$ لذا تناقض است. حال اگر $\deg(x) \geq ۳$ باشد، لذا $\deg(y) \geq ۲$. از طرفی $\delta(G) \geq ۲$، لذا G_z رأس تنها ندارد. همچنین V_z مجموعه OLD از G نیست، لذا دو رأس غیر مجاور a و b که $a \in N(z)$ است و $b \notin N(z)$. به طوری‌که $N(a) = N(b) \cup \{z\}$. اگر $a \neq y$ باشد، چون $N(z) = N(v) \cup \{y\}$، آن‌گاه $a \in N(v)$ است. از طرفی $N(a) = N(b) \cup \{z\}$، لذا $b \in N(v)$ و $b \in N(z)$ می‌باشد. لذا تناقض است. در نتیجه $a = y$، نشان می‌دهد که $N(y) = N(b) \cup \{z\}$. یاد آوری می‌کنیم که $N(x) = N(y) \cup \{v\}$ و $\deg(y) \geq ۲$ است. چون G_b رأس تنها ندارد و V_b مجموعه OLD برای G نیست، پس دو رأس غیرمجاور $\alpha \in N(b)$ و $\beta \notin N(b)$ داریم به طوری‌که $N(\alpha) = N(\beta) \cup \{b\}$. چون $\alpha \in N(b)$ و $N(y) = N(b) \cup \{z\}$ است. پس $\alpha \in N(y)$ می‌باشد. لذا داریم $\alpha \in N(x)$. پس α مجاور به دو رأس x و y است، در واقع $x, y \in N(a)$ می‌باشد. چون $N(\alpha) = N(\beta) \cup \{b\}$ در نتیجه $x, y \in N(\beta)$ است. بنابراین $\beta \in N(x) \cap N(y)$، از طرفی $N(y) = N(b) \cup \{z\}$ نشان می‌دهد که $\beta \in N(b)$ است. لذا تناقض است. در نتیجه $\deg(v) = ۱$.

ادعا ۳.۳.۴. $\deg(y) = ۲$.

بنا به ادعای ۲، $\deg(v) = ۱$. چون $N(z) = N(v) \cup \{y\}$ و اگر $\deg(y) = ۱$ باشد، داریم $\deg(z) = ۲$. از طرفی $N(x) = N(y) \cup \{v\}$، لذا $\deg(x) = ۲$، پس G مسیری از مرتبه $n = ۴$ است. لذا تناقض است. بنابراین $\deg(y) \geq ۲$ و $\deg(x) \geq ۳$. حال اگر $\deg(y) \geq ۳$ باشد، چون $N(x) = N(y) \cup \{v\}$، نشان می‌دهد که هر رأسی که در $N(y)$ باشد، درجه حداقل دو دارد. چون $N(z) = \{x, y\}$ لذا خواهیم داشت که G_z رأس تنها ندارد. همچنین V_z مجموعه OLD از G نیست. بنابراین دو رأس متمایز y و b وجود دارد به طوری‌که $y \notin N(y)$ و $z \notin N(b)$ و $N(y) = N(b) \cup \{z\}$. چون $N(y) \geq ۳$، لذا $|N(b)| \geq ۲$ است. حال G_b رأس تنها ندارد و V_b مجموعه OLD برای G نیست. بنابراین دو رأس متمایز α و β وجود دارد به طوری‌که $\beta \notin N(b)$ و $\alpha \in N(b)$ و $N(\alpha) = N(\beta) \cup \{b\}$. $N(y) = N(b) \cup \{z\}$ پس $\alpha \in N(x) \cap N(y)$. از طرفی $N(\alpha) = N(\beta) \cup \{b\}$ لذا $\beta \in N(x) \cap N(y)$ است. بنابراین $\beta \in N(b)$ است، لذا به تناقض رسیدیم. در نتیجه $\deg(y) = ۲$. است. از ادعای ۲ و ۳ داریم $\deg(v) = ۱$ و $\deg(y) = ۲$. چون $N(x) = N(y) \cup \{v\}$، نشان می‌دهد که $\deg(x) = ۳$. حال فرض کنید $y_۱$ همسایه دوم y باشد. از طرفی $y_۱ \in N(x)$ پس $\deg(y_۱) \geq ۲$ است. چون G_z رأس تنها ندارد و V_z مجموعه OLD از G نیست، رأس u وجود دارد به طوری‌که $N(y) = N(u) \cup \{z\}$ است. چون $u \in N(y_۱)$ از طرفی $\deg(y) = ۲$ پس $\deg(u) = ۱$ است. در نتیجه داریم $G = H$.

اگر $G = P_۲$ یا $G = P_۴$ باشد، آن‌گاه $OLD(P_۲) = ۲$ و $OLD(P_۴) = ۴$ و اگر $G = H$، طبق تعریف مجموعه OLD، $OLD(H) = ۶$ است.

□

کاربرد گزاره ۳.۲.۴ و قضیه ۱.۳.۴ را در فرع زیر داریم.

فرع ۱.۳.۴. ([۷]) اگر $k \geq ۷$ باشد، آن‌گاه گراف $G_{n,k}$ از مرتبه n با $OLD(G_{n,k}) = k$ وجود دارد، اگر و فقط اگر $k+۱ \leq n \leq ۲^k - ۱$.

یک دور روی n رأس با C_n نشان داده می‌شود. بعداً، گراف‌های G از مرتبه n با مینیمم درجه $\delta(G) \geq ۲$، که بدون دور $C_۴$ و $OLD(G) = n - ۱$ است تعیین می‌شود. توجه کنید که گراف‌های بدون دور $C_۴ - free$ گراف‌هایی که دور $C_۴$ ندارند.

قضیه ۲.۳.۴. فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه n با $\delta(G) \geq ۲$ باشد که بدون دور $C_۴$ است، آن‌گاه $OLD(G) = n - ۱$، اگر و فقط اگر G دور $C_۵$ یا گراف $K_۱ + t.P_۲$ باشد (در شکل (۵.۴)(a) نشان داده شده است).

برهان. فرض کنید گراف G داده شده باشد. طبق تعریف مجموعه OLD، $OLD(C_۵) = ۴$ و $G = K_۱ + t.P_۲$ در شکل (a) (۵.۴) نشان می‌دهد که هر کدام از $V(G) - z_۱$ یا $V(G) - z_۲$ مجموعه $OLD(G)$ با $OLD(K_۱ + t.P_۲) = ۲t = n - ۱$ است. $G - z_۲$ گرافی از مرتبه زوج در شکل ۵(a) با $OLD(G - z_۲) = n - ۲$ است. اما $OLD(G - z_۱) = OLD(t.P_۲) = ۲t = |V(G - z_۱)|$ است. برای عکس قضیه نشان دادیم که هر گراف G از مرتبه n که بدون دور $C_۴$ است، شامل رأس z به طوری‌که $OLD(G - z) = n - ۱$ است. حال فرض کنید رأس x به طوری‌که $V(G) - x$ یک مجموعه $OLD(G)$ است. می‌دانیم که $V(G) - x$ همچنین یک مجموعه OLD برای $G - x$ است، بنابراین $OLD(G - x)$ تعریف شده است. اگر $OLD_(G - x) \leq n - ۲$ و D مجموعه $OLD(G - x)$ باشد.

- اگر $|D| \leq n - ۳$ باشد. چون D مجموعه $OLD(G - x)$ است، اما مجموعه OLD برای G نیست، پس رأس $x_۱$ وجود دارد به طوری‌که،

$$N(x) \cap D = N(x_۱) \cap D.$$

اگر $D \subseteq N(x)$ باشد، آن‌گاه چون $\deg(x) \geq ۲$، $x_۱$ و x دو همسایه مشترک دارند، لذا G شامل یک دور $C_۴$ است، پس به تناقض رسیدیم. بنابراین رأس w وجود دارد که $w \in N(x)$ است و $w \notin D$. $D \cup \{w\}$ را در نظر بگیرید. اگر $y \in V(G - x)$ و $N(y) \cap (D \cup \{w\}) = N(x) \cap (D \cup \{w\})$ باشد، آن‌گاه $N(y) \cap D \neq \emptyset$ نشان می‌دهد که x و y دو همسایه مشترک دارند، پس دور $C_۴$ داریم، یک تناقض است. هر دو رئوس در $G - x$ با D متمایز می‌شوند. بنابراین $D \cup \{w\}$ مجموعه OLD از G با $|D \cup \{w\}| < n - ۱$ است، لذا یک تناقض است.

- اگر $|D| = n-2$ و $V(G)-D = \{x, a\}$ باشد. چون D مجموعه $OLD(G-x)$ است، اما یک مجموعه OLD برای G نیست، پس رأس y وجود دارد به طوری‌که $N(x) \cap D = N(y) \cap D$. اگر $|N(x) \cap D| \geq 2$ باشد، آن‌گاه x و y دو همسایه مشترک دارند. لذا C_4 داریم که با فرض مسأله در تناقض است. بنابراین $\deg(x) = 2$ و $N(x) = \{a, b\}$ که $b \in D$ است. حال اگر $ay \in E(G)$ باشد، نشان می‌دهد x, a, y, b یک دور C_4 داریم. لذا داریم $ay \notin E(G)$. حالا اگر $y \neq a$ باشد، آن‌گاه $d_G(y) \geq 2$ نشان می‌دهد که x و y دو همسایه مشترک در D دارند، پس تناقض است. بنابراین $y = a$ و $N(a) = \{x, b\}$ است. اگر $\deg(b) = 2$، باشد، آن‌گاه $n = 3$ و $G = k_1 + P_2$. حال اگر $\deg(b) \geq 2$ باشد. ادعا می‌کنیم که $D^* = V(G) - \{b\}$ مجموعه $OLD(G)$ است. a فقط رأس w با $N(w) \cap D^*$ است، x فقط رأس w با $N(w) \cap D^* = \{a\}$، و b فقط رأس w با $N(w) \cap D^*$ شامل $\{a, x\}$ است. فرض کنید y_1 و y_2 داده شده است و $N(y_1) \cap D^* = N(y_2) \cap D^*$. چون $N(y_1) \cap D \neq N(y_2) \cap D$، یکی از y_1 و y_2 مجاور به b است، فرض کنید y_1 مجاور به b است. حال اگر $\deg(y_2) \geq 2$ باشد نشان می‌دهد که y_1 و y_2 دو همسایه‌ی مشترک دارند، لذا تناقض است. چون $\deg(b) \geq 3$ و $V(G) - b$ مجموعه $OLD(G)$ است، دلایل بالا نشان می‌دهد که $OLD(G-b) = n-1 = |V(G)-b|$ است. طبق قضیه ۱.۳.۴، هر مؤلفه گراف بدون دور C_4، $G-b$، P_2 یا P_4 است و چون $\delta(G) \geq 2$ نشان می‌دهد که $N(b)$ شامل همه رئوس پایانی در هر مؤلفه از $G-b$ است. چون G C_4-free است، هیچ رأسی از درجه دو در یک مؤلفه P_4 از $G-b$ مجاور به b نیست. حال اگر مؤلفه $G-b$ دارای P_4 باشد، فرض کنید a_1 و a_2 رئوس پایانی از P_4 باشند. آن‌گاه $G-a_1-a_2$ مجموعه OLD از G به جز $n=5$ و $G = C_5$ است. اثبات کامل است.

□

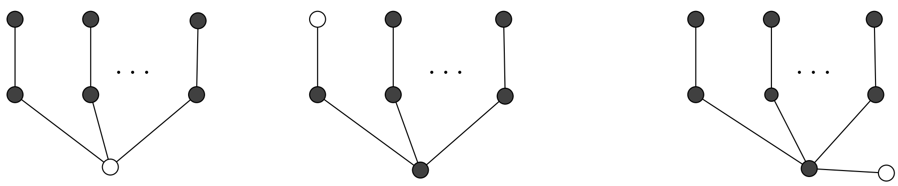
فرع ۲.۳.۴. اگر G گرافی همبند از مرتبه n با $\delta(G) \geq 2$، کمر $g(G) \geq 5$ و $OLD(G) = n-1$ باشد، آن‌گاه G یک دور C_5 است.

شکل (۴.۴) همه‌ی درخت‌ها از مرتبه n با $OLD(G) = n-1$ را نشان می‌دهد و شکل (۵.۴) خانواده نامتناهی از گراف‌هایی با $OLD(G) = n-1$ را نشان می‌دهد.

۴.۴ کران‌ها

در این بخش رابطه بین $OLD(G)$ با عدد انباشته[1] که آن را با $\rho(G)$ نشان می‌دهند، بررسی می‌کنیم.

[1] packing number



$(a)T_{2k+1}$ $(b)T_{2k}$

شکل ۴.۴: مجموعه‌های $OLD(T_n)$ با $OLD(T_n) = n - 1$ است.

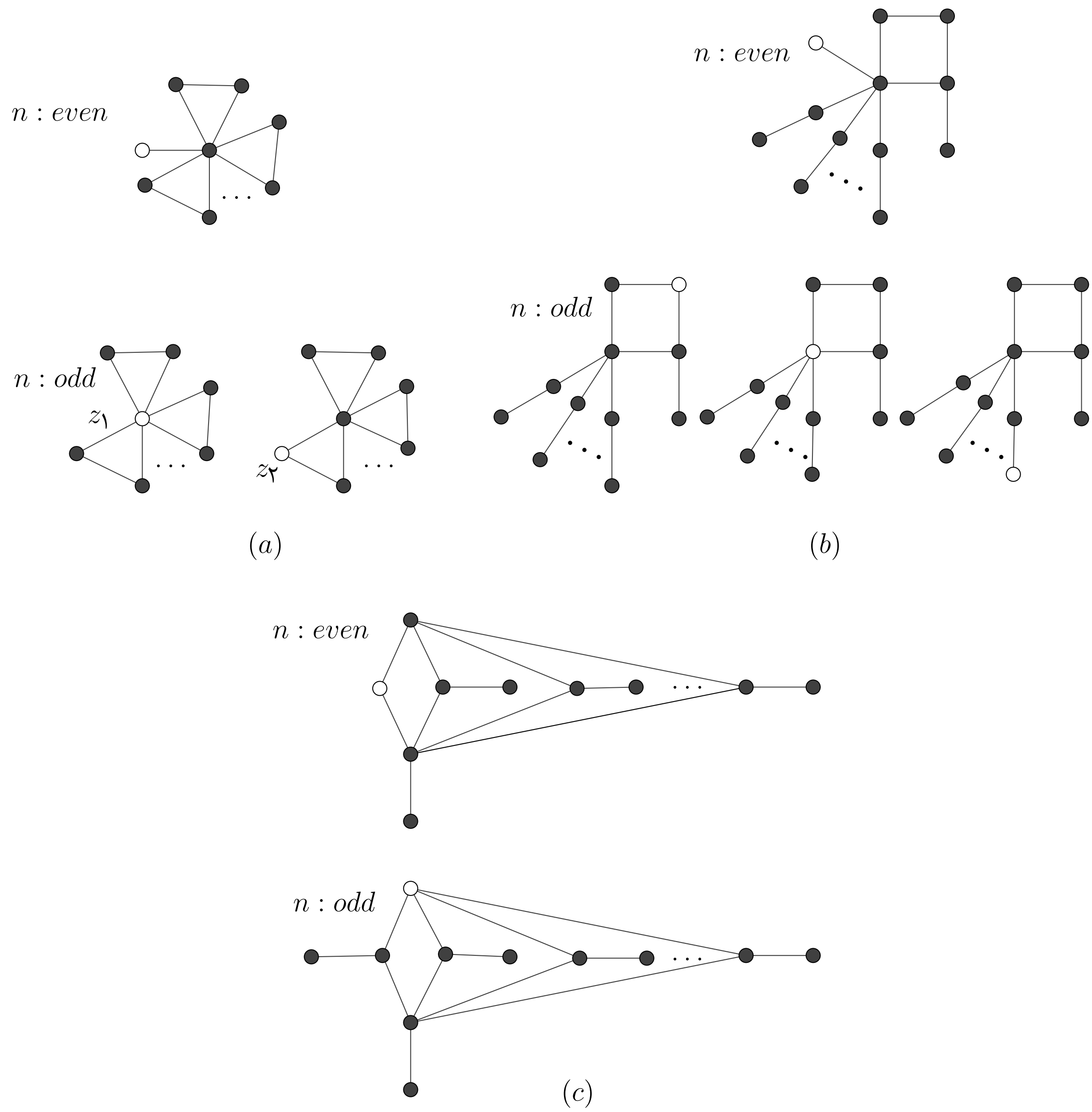
قضیه ۱.۴.۴. فرض کنید G گرافی همبند، $\delta(G) \geq 3$ و گراف بدون دور C_4 باشد، آن‌گاه:

$$OLD(G) \leq n - \rho(G).$$

برهان. فرض کنید G گرافی همبند، $\delta(G) \geq 3$ و $C_4 - free$ است و P ماکزیمم مجموعه انباشته G باشد. طبق تعریف مجموعه انباشته هر رأس $v \in V(G) - P$ داریم $|N(v) \cap P| \leq 1$. لذا هر رأسی که در P نباشد حداکثر یک همسایه در P دارد. زیرگراف القا شده با $V(G) - P$ از درجه حداقل دو است. بنابراین این زیرگراف رأس تنها ندارد. حال فرض کنید که $D = V(G) - P$ مجموعه OLD از G نباشد. از این‌رو دو رأس متمایز x و y وجود دارد به طوری‌که $N(x) \cap D = N(y) \cap D$. به ازای هر دو رأس $u, v \in P$، داریم $N[u] \cap N[v] = \emptyset$. نشان می‌دهد که $xy \notin E$، لذا حداکثر یکی از رئوس x و y متعلق به P است. هر کدام از رئوس x و y حداقل دو همسایه در D دارند (چون مینیمم درجه سه است و یک همسایه آن در P است). اما زیر گراف القا شده به وسیله $N[x] \cup N[y]$ شامل دور C_4 است، (نه لزوما القا شده) که یک تناقض است. بنابراین D یک مجموعه OLD برای G است. نشان می‌دهد که

$$OLD(G) \leq |V(G)| - P = n - \rho(G).$$

□



شکل ۵.۴: خانواده نامتناهی از گراف‌هایی با $OLD(G) = n - ۱$.

پیوست آ

نماد

نماد	نام
$N(v)$	همسایگی باز رأس v
$N[v]$	همسایگی بسته رأس v
$\deg(v)$	درجه رأس v
$g(G)$	کمر گراف G
$\delta(G)$	کم‌ترین درجه G
$\Delta(G)$	بیش‌ترین درجه G
G_n	n مرتبه رئوس گراف G
K_n	گراف کامل
$G(v_۱, v_۲)$	گراف دوبخشی
$K_{r,s}$	گراف دوبخشی کامل
$K_{۱,n-۱}$	گراف ستاره
GOH	گراف تاج
$LD\%(G)$	مینیمم امکان درصدی رئوس در فاصله حداکثر k از v

نماد	نام
$d(u,v)$	فاصله رأس u و v
$e(u)$	خروج از مرکز رأس u
$G[D]$	زیرگراف القا شده به وسیله D
$G_1 \cup G_2$	اجتماع دو گراف
$free\_C_4$	گراف بدون دور C_4
$\rho(G)$	عدد انباشته
P	ماکزیمم مجموعه انباشته
p	عدد انباشتگی پایینی
x	متغیر بولی
$\bar{x}$	نفی x
$x_1 \wedge x_2$	ترکیب عطفی
$x_1 \vee x_2$	ترکیب فصلی
D'	مجموعه احاطه‌گر
$\gamma(G)$	عدد احاطه‌گر
D	مجموعه احاطه‌گر مکانی همسایه باز
$OLD(G)$	عدد احاطه‌گری مکانی همسایه باز
$OLD\%(G)$	مینیمم امکان درصدی رئوس در یک مجموعه OLD

نام	نماد
رشته‌ای با طول n از مجموعه $\{۰,۱\}$	$\{۰,۱\}^n$
احاطه‌گر مکانی	LD
عدد احاطه‌گری مکانی	$LD(G)$
مجموعه رئوس در فاصله حداکثر k از v	$N_k[v]$
قطر گراف G	$diam(G)$
شعاع گراف G	$r(G)$
A چند جمله‌ای کاهشی به B	$A \leq B$
مسیر با n رأس	P_n
خانواده درخت‌هایی که مجموعه OLD دارند.	$\Im$
مسیر با n رأس	P_n
زیرتقسیم هر یال $S(K_{۱,t-۱})$	$S(k_{۱,t-۱})$
شار باز از یک رأس v در یک مجموعه OLD	$Sh(v,D)$
شبکه مربعی نامتناهی	$Z \times Z$
شبکه شش ضلعی نامتناهی	HX
شبکه مثلثی نامتناهی	TR
زیردرخت T_n که با حذف رئوس پایانی T_n به دست می‌آید	T_n^*
v رأس درونی از T	$v \in T^*$
مؤلفه درخت T	T^d
گرافی از مرتبه n و $OLD(G)=k$	$G_{n,k}$

مراجع

[1] N. Bertrand, I. Charon, O. Hudry and A. Lobstein, Identifying and locating-dominating codes on chains and cycles, *European Journal of Combinatorics*, 25 (2004), 969–987.

[2] U. Blass, I. Honkala and S. Litsyn, Bounds on identifying codes, *Discrete Mathematics*, 241 (2001), 119–128.

[3] M. Blidia, M. Chellali, R. Lounes and F. Maffray, Characterizations of trees with unique minimum locating-dominating sets, *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* , 76 (2011), 225–232.

[4] M. Blidia, M. Chellali, F. Maffray, J. Moncel and A. Semri, Locating-domination and identifying codes in trees, *Australasian Journal of Combinatorics*, 39 (2007), 219–232.

[5] A. Bondy J. and Murty U. S. R., *Graph theory with applications* , North Holland York, 290, 1976.

[6] D. I. Carson, On generalized location domination, *Graph Theory, Combinatorics and Applications, Wiley, New York* , 1 (1995), 161–179.

[7] M. Chellali, N. Jafari Rad, S. J. Seo, Peter and J. Slater, On open neighborhood locating-dominating in graphs, *Electronic Journal of Graph Theory and Applications (EJGTA)*, 2 (2014), 87-98.

[8] G. Cohen, I. Honkala, A. Lobstein and G. Zémor, New bounds for codes identifying vertices in graphs, *the electronic journal of combinatorics* , 6 (1999), R19.

[9] C. J. Colbourn, P. J. Slater and L.K. Stewart, Locating dominating sets in series parallel networks, *Congr. Numer*, 56 (1987), 135–162.

[10] G. Exoo, V. Junnila and T. Laihonen, Locating-dominating codes in cycles, *Australasian Journal of Combinatorics*, 49 (2011), 177–194.

[11] A. S. Finbow and B. L. Hartnell, On locating dominating sets and well-covered graphs, *Congr. Numer*, 65 (1988) 191–200.

[12] R. Gallant, G. Gunther, B. Hartnell and D. Rall, Limited packings in graphs, *Discrete Applied Mathematics*, 158 (2010), 1357–1364.

[13] R. G. Michael and S. J. David, Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness, *WH Free. Co., San Fr*, (1979).

[14] F. Harary and R. A. Melter, On the metric dimension of a graph, *Ars Combin*, 2(1976), 191–195.

[15] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and P. J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, Inc. New York, 1998.

[16] T. W. Haynes, M.A. Henning and J. Howard, Locating and total dominating sets in trees, *Discrete Applied Mathematics*, 154 (2006), 1293–1300.

[17] M. A. Henning and A. Yeo, Distinguishing-transversal in hypergraphs and identifying open codes in cubic graphs, *Graphs and Combinatorics*, 30 (2014), 909-932.

[18] C. Hernando, M. Mora, and I. M. Pelayo, Nordhaus-Gaddum bounds for locating domination European, *European Journal of Combinatorics*, 36 (2014), 1–6.

[19] I. Honkala, T. Laihonen and S. Ranto, On strongly identifying codes, *Discrete Mathematics*, 254 (2002), 191–205.

[20] M. G. Karpovsky, K. Chakrabarty and L.B. Levitin, On a new class of codes for identifying vertices in graphs, *IEEE Transactions on Information Theory*, 44 (1998), 599–611.

[21] J. Moncel, On graphs on n vertices having an identifying code of cardinality dlog2(n + 1)e, *Discrete Applied Mathematics*, 154 (2006), 2032–2039.

[22] C.A. Morgan, P.J. Slater, A linear algorithm for a core of a tree, *Journal of Algorithms*, 1 (1980), 247–258.

[23] D. F. Rall and P. J. Slater, On location-domination numbers for certain classes of graphs, *Congr. Numer*, 45 (1984), 97–106.

[24] S. J. Seo and P. J. Slater, Graphical Parameters for Classes of Tumbling Block Graphs, *Congressus Numerantium*, 213 (2012), 155–168.

[25] S. J. Seo and P. J. Slater, OLD Trees with Maximum Degree Three, *Utilitas Mathematica*, 94 (2014), 361–380.

[26] S. J. Seo and P. J. Slater, Open Locating-Dominating Interpolation for Trees, *Congressus Numerantium*, 215 (2013), 145–152.

[27] S. J. Seo and P. J. Slater, Open neighborhood locating-dominating in trees. *Discrete Applied Mathematics*, 159 (2011), 484–489.

[28] S.J. Seo, P.J. Slater, Open neighborhood locating-dominating sets, *The Australasian Journal of Combinatorics*, 46 (2010), 109–120.

[29] S. J. Seo and P. J. Slater, Open Neighborhood Locating-Domination for Grid-like Graphs, *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, 65 (2012), 89–100.

[30] S. J. Seo and P. J. Slater, Open Neighborhood Locating-Domination for Infinite Cylinders, *Proceedings of the 49th Annual Southeast Regional Conference*, (2011), 334–335.

[31] P. J. Slater, Dominating and reference sets in a graph, *J. Math. Phys. Sci*, 22 (1988), 445–455.

[32] P. J. Slater, Domination and location in acyclic graphs, *Networks*, 17 (1987), 55–64.

[33] P. J. Slater, Domination and location in graphs, *National University of Singapore Research Report No*, 93 (1983).

[34] P. J. Slater, Fault-tolerant locating-dominating sets, *Discrete Mathematics*, 249 (2002), 179–189.

[35] P.J. Slater, Locating central paths in a graph, *Transportation Science*, 16 (1982), 1–18.

[36] P. J. Slater, Leaves of trees, *Congr. Numer*, 14 (1975), 549–559.

[37] P. J. Slater, Locating dominating sets and locating-dominating sets, *in: Graph Theory, Combinatorics, and Applications: Proc. 7th Quadrennial Int. Conf. Theory Applic. Graphs* , 2 (1995), 1073–1079.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

آویخته_آویزان	Pendant
اسپین	Spin
استقرا	Induction
افراز	Partition
الگوریتم زمان چند جمله‌ای	Polynomial-time algorithm
الگوریتم کاهشی	Reduction algorithm
برگ	Leaf
بیرون	External
تصدیق‌پذیر	Verifable
تصمیم	Decision
تناقض	Contradiction
دسته	Characterization
دو به دو_جفت جفت	Pairwise
دور	Cycle
دوقسمتی	Bipartite
رأس پشتیبان	Support vertex
رأس پشتیبان قوی	Strong Support Vertex
ستاره	Star
شاخه	Branch
شبکه	Grid
شش ضلعی	Hexagonal
شمارای نامتناهی	Countably infinite
عدد احاطه‌گری مکانی همسایه باز	Open neighborhood locating-dominating
عدد انباشته	Packing Number
فاصله	Distance
قطر	Diameter

کامل	complete
کمر	Girth
گراف دوبخشی	Bipatite Graph
گراف همبند	Connected graph
متمایز	Distinct
متوالی	Consecutive
مثلثی	Triangular
مجاور	Adjacent
محلاً متناهی	Locally-finite
مربعی	Square
مسیر مرکزی	Path-Centroid
ممنوعه	Forbidden
منتظم	Regular
مؤلفه	Component

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adjacent	مجاور
Bipatite Graph	گراف دوبخشی
Branch	شاخه
Bipartite	دوقسمتی
Characterization	دسته
complete	کامل
Component	مؤلفه
Connected graph	گراف همبند
Consecutive	متوالی
Contradiction	تناقض
Countably infinite	شمارای نامتناهی
Cycle	دور
Decision	تصمیم
Diameter	قطر
Distance	فاصله
Distinct	متمایز
External	بیرون
Forbidden	ممنوعه
Girth	کمر
Grid	شبکه
Hexagonal	شش ضلعی
Induction	استقرا
Leaf	برگ
Locally-finite	محلاً متناهی
Open neighborhood locating-dominating	عدد احاطه‌گر مکانی همسایه باز
Packing-number	عدد انباشته

Pairwise .... دو به دو_جفت جفت

Partition .... افراز

Path-Centroid .... مسیر مرکزی

Pendant .... آویخته_آویزان

Polynomial-time algorithm .... الگوریتم زمان چند جمله‌ای

Reduction algorithm .... الگوریتم کاهشی

Regular .... منتظم

Spin .... اسپین

Star .... ستاره

Strong Support Vertex .... رأس پشتیبان قوی

Support Vertex .... رأس پشتیبان

Square .... مربعی

Triangular .... مثلثی

Verifable .... تصدیق‌پذیر

Abstract

A subset D of vertices in a graph $G = (V; E)$ is an open neighborhood locating-dominating set (OLD-set) for G if for every two vertices $u; v$ of $V(G)$ the sets $N(u) \cap D$ and $N(v) \cap D$ are non-empty and different. The open neighborhood locating-domination number $OLD(G)$ is the minimum cardinality of an OLD-set for G.
It is shown in this thesis that the problem finding the open neighborhood locating-dominating number NP-complete problems. Then, we describe minimum possible percentage of vertex OLD-sets for various infinte grid graphs. Alsoو we examin the results of the open neighborhood locating-domination number on paths, trees and graphs and the bounds for open neighborhood locating-domination number for these types of graphs.

Keywords: Open neighborhood locating-dominating set, Open neighborhood locating-dominating number, Minimum possible percentage of vertex for infinte grid graphs.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Graph and Combinatorics

Results on the open neighborhood locating-domination in graphs

By: Zobeide Badoodam

Supervisor

Dr. Nader Jafari Rad

October 2017