

حاشا
الرحمن الرحيم



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

بررسی تحدب توابع همساز تک ارز در یک جهت

نگارنده: سارا نظام پرست

استاد راهنما

دکتر احمد معتمدنژاد

شهریور ۱۳۹۶

شماره:

تاریخ:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم سارا نظام پرست با شماره دانشجویی ۹۴۳۹۴۳۴ رشته ریاضی محض گرایش آنالیز تحت عنوان بررسی تحذب توابع همساز تک ارز در یک جهت که در تاریخ ۱۳۹۶/۰۶/۲۲ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

<input type="checkbox"/> مردود	<input checked="" type="checkbox"/> قبول (با درجه: <u>خیلی خوب</u>)
<input type="checkbox"/> عملی	<input type="checkbox"/> نظری

امضاء	مرتبه علمی	نام و نام خانوادگی	عضو هیأت داوران
	دانشیار	دکتر احمد معتمد نژاد	۱- استاد راهنمای اول
	---	---	۲- استاد راهنمای دوم
	---	---	۳- استاد مشاور
	استادیار	دکتر محمدرضا ربیعی	۴- نماینده تحصیلات تکمیلی
	دانشیار	دکتر کامران شریفی	۵- استاد ممتحن اول
	دانشیار	دکتر مهدی ایران منش	۶- استاد ممتحن دوم



نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی حجت علوم، فنی و مهندسی
تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

این پایان نامه را ضمن تشکر و سپاس بیکران و در کمال افتخار و امتنان تقدیم می‌نمایم؛

به همسر مهربانم که نشانه‌ی لطف الهی در زندگی من است او که در تمام طول تحصیل همراه و همگام من بوده و سایه مهربانیش سایه سار زندگی من باشد، او که اسوه صبر و تحمل بوده و مشکلات مسیر را برایم تسهیل نمود؛
به پدرم کوهی استوار و حامی من در طول تمام زندگی؛
به مادر مهربانم مقدس‌ترین واژه‌ها در لغت نامه دلم، که زندگی من را مدیون مهر و عطوفت آن می‌دانم آنکه آفتاب مهرش در آستان قلبم همچنان پابرجاست و هرگز غروب نخواهد کرد؛

به فرزندانم (سارینا و ارمیا) که همراه همیشگی و پشتوانه‌های زندگی هستند و وجودشان شادی بخش و مایه آرامش من است.

سپاس‌گزاری...

شکر شایان نثار ایزد منان که توفیق را رفیق راهم ساخت تا این رساله را به پایان برسانم. بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی‌شائبه‌ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگارم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می‌کند و سلامت امانت‌هایی که به دستش سپرده‌اند تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر الله عزوجل؛ از استاد فاضل و اندیشمندم جناب آقای دکتر احمد معتمدنژاد که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند با راهنمایی‌ها و یاری بی‌چمشداشت ایشان سختی‌ها را برایم آسان‌تر نمودند.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، همسر گرامی و پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس شان را تشکر می‌کنم که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

سارا نظام‌پرست

شهریور ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب سارا نظام‌پرست دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان بررسی تحذب توابع همساز تک ارز در یک جهت ، تحت راهنمایی احمد معتمدنژاد متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سارا نظام‌پرست

شهریور ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان نامه ابتدا رده های \mathcal{S}_H ، \mathcal{S}_H° از نگاشت های کانفرمال همساز و رده $\mathcal{S}_H(\kappa, \gamma, \phi)$ از نگاشت های شبه کانفرمال همساز را معرفی کرده و شرایط کافی برای ترکیبات خطی نگاشت های این رده ها در یک رده مشابه که در یک جهت محدب می باشند را بررسی می کنیم. کران هایی برای $|f_z(z)|$ ، $|f_{\bar{z}}(z)|$ و $|f(z)|$ می یابیم. هم چنین به بررسی توابع همساز محدب نرمالیزه در جهت محور حقیقی یا موهومی می پردازیم.

واژه های کلیدی: توابع تحلیلی، توابع تک ارز، توابع ستاره گون، توابع محدب، توابع همساز، انحراف تحلیلی، جهت نگهدار، نگاشت کانفرمال، کران ضرایب، ترکیبات خطی.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

فهرست مطالب

۱	تعاریف مقدماتی	۱
۱	۱.۱ نمادگذاری و تعاریف	۱
۳	۲.۱ رده S	۳
۸	۳.۱ رده S^*	۸
۱۱	۴.۱ رده \mathcal{K}	۱۱
۱۷	۲ بررسی رشد، انحراف و کران‌های ضرایب	۱۷
۱۷	۱.۲ مقدمه	۱۷
۲۰	۲.۲ قضایای رشد و انحراف برای یک رده خاص از نگاشت‌های همساز	۲۰
۲۳	۳.۲ کران‌های انحراف و رشد تعمیم یافته	۲۳
۲۵	۴.۲ کران‌هایی برای $ a_n $ و $ b_n $	۲۵
۲۹	۳ ترکیبات خطی از نگاشت‌های همساز شبه کانفرمال محدب	۲۹
۲۹	۱.۳ مقدمه	۲۹
۳۰	۲.۳ نتایج اولیه	۳۰
۳۲	۳.۳ نتایج اصلی	۳۲
۳۹	۴ ترکیبات خطی نگاشت‌های تک ارز همساز	۳۹
۳۹	۱.۴ مقدمه	۳۹
۴۰	۲.۴ نتایج اصلی	۴۰
۴۴	۳.۴ دو مثال	۴۴
۵۱	مراجع	۵۱
۵۵	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	۵۵
۵۷	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	۵۷

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

۱.۱ نمادگذاری و تعاریف

در این پایان نامه از نمادهای زیر استفاده می‌شود:

\mathbb{R} مجموعه اعداد حقیقی

\mathbb{N} مجموعه اعداد طبیعی

\mathbb{C} مجموعه اعداد مختلط

Re قسمت حقیقی اعداد مختلط

Im قسمت موهومی اعداد مختلط

تعریف ۱.۱. فرض کنیم Ω یک مجموعه باز و $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ یک تابع مختلط باشد گوییم f در

$z_0 \in \Omega$ مشتق پذیر است هرگاه

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

موجود باشد و آن را با $f'(z_0)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱. تابع $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ را در z_0 تحلیلی گوییم هرگاه در یک همسایگی z_0 مشتق پذیر

باشد.

تعریف ۳.۱. هر مجموعه باز و همبند در \mathbb{C} ، یک میدان نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۱. (قرارداد) رده همه توابع $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ که در دیسک واحد $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ تحلیلی می‌باشند را با A نمایش می‌دهیم.

لم ۱.۱. (لم شوارتز^۱) فرض کنیم $f(z)$ تابعی تحلیلی در دیسک $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ باشد و برای ثابت M ، رابطه $|f(z)| < M$ برقرار باشد. اگر $z = 0$ صفر مرتبه m تابع f باشد، در این صورت:

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R^m} |z|^m \quad (z \in \mathbb{D}_R)$$

همچنین در رابطه‌ی فوق، تساوی زمانی برقرار می‌شود که

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{M}{R^m} z^m$$

به طوری که در آن θ مقداری ثابت است.

تعریف ۵.۱. تابع حقیقی مقدار و پیوسته $U(x, y)$ که در میدان D تعریف شده، در D همساز^۲ گویند هرگاه دارای مشتقات نسبی مراتب اول و دوم پیوسته بوده و در معادله زیر صدق نماید.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

این معادله به معادله لاپلاس^۳ مشهور است.

تعریف ۶.۱. اگر u و v توابع همساز بر ناحیه Ω باشند، گوییم v مزدوج همساز u است هرگاه در هر نقطه Ω توابع u و v در معادلات کوشی ریمان صدق کنند.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

تعریف ۷.۱. اگر u و v توابع حقیقی همساز بر ناحیه همبند ساده D باشند آنگاه تابع پیوسته $f = u + iv$ که بر D تعریف شده بر D همساز نامیده می‌شود.

یادآوری ۱.۱. این خاصیت پادتقارنی زیر را داریم که v مزدوج همساز u است اگر و تنها اگر u مزدوج همساز $-v$ باشد. اثبات این مطلب از توجه به این امر نتیجه می‌شود که هر جا f تحلیلی باشد، $if = i(u + iv) = -v + iu$ نیز تحلیلی است.

معادله لاپلاس شرط لازمی را بیان می‌کند که تابعی همساز با قسمت حقیقی (یا موهومی) یک تابع تحلیلی باشد.

^۱Schwarz

^۲Harmonic

^۳Laplace equation

قضیه ۱.۱. (نگاشت ریمان^۴) [۲۰] فرض کنیم D میدان همبند ساده‌ای به غیر از تمام صفحه و z_0 نقطه‌ای در این میدان باشد. در این صورت تابع منحصر به فرد تحلیلی، یک به یک و پوشا $f(z)$ موجود است که D را بر دیسک $|z| < 1$ می‌نگارد و $f(z_0) = 0$ و $f'(z_0) > 0$ است.

تعریف ۸.۱. تابع $f(z)$ را روی \mathbb{D} تک ارز^۵ گوییم هرگاه برای هر z_1 و z_2 در \mathbb{D} که $z_1 \neq z_2$ داشته باشیم $f(z_1) \neq f(z_2)$.

تعریف ۹.۱. تابع $f(z)$ را در نقطه $z \in \mathbb{D}$ موضعا تک ارز گوییم هرگاه در یک همسایگی z تک ارز باشد.

۲.۱ رده S

توابعی که هم تحلیلی و هم تک ارز (یک به یک) هستند، واجد شرایط جالبی هستند که میدان‌های همبند ساده را بر میدان‌های همبند ساده می‌نگارند. به موجب قضیه نگاشت ریمان، هر تابع تک ارز، که در میدان همبند ساده (به غیر از تمامی صفحه) تعریف شده باشد را می‌توان با تابعی که در دیسک واحد تعریف شده است متناظر کرد. بنابراین خود را به توابعی که بر دیسک واحد تعریف شده‌اند محدود می‌کنیم و اگر چنانچه فرض کنیم تابع در مبدا صفر است (که تنها صفر تابع نیز خواهد بود) و در مبدا مشتق مخالف صفر دارد، در این صورت نتایج حاصله از شکل زیباتری برخوردار خواهند بود. زیرا مشتق تابع تک ارز هرگز صفر نیست، هر تابع تک ارز $f(z)$ را می‌توان به $\frac{|f(z) - f(0)|}{f'(0)}$ ، که تابعی است از شکل مذکور، تحویل کرد. رده توابعی که در محدودیت‌های مذکور صادق‌اند با یک حرف مشخص می‌شوند.

تعریف ۱۰.۱. رده همه توابع $f(z)$ را که در دیسک واحد $|z| < 1$ تحلیلی و تک ارز بوده و با شرایط $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ نرمالیزه گردیده‌اند با S نمایش می‌دهیم. پس تابع $f(z)$ در S دارای نمایش توانی زیر است:

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \quad (|z| < 1)$$

لم ۲.۱. اگر $f(z) \in S$ ، آنگاه $g(z) = z \sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} \in S$

برهان. فرض کنید $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ لذا داریم:

$$g(z) = z \sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} = z \sqrt{1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \dots} \quad (1.1)$$

^۴Riemann

^۵Univalent

(شاخه‌ی اصلی $\sqrt{\cdot}$ را در نظر می‌گیریم)، تابع $g(z)$ بر دیسک واحد تحلیلی می‌باشد و $g(0) = 0$ و $g'(0) = 1$ است. برای اثبات تک ارزی، اگر $g(z_1) = g(z_2)$ یعنی $\sqrt{\frac{f(z_1)}{z_1}} = \sqrt{\frac{f(z_2)}{z_2}}$ در این صورت $f(z_1) = f(z_2)$ و چون f یک به یک می‌باشد داریم $z_1 = z_2$ یا $z_1 = -z_2$. از (۱.۱) ملاحظه می‌شود که $g(z)$ تابع فرد است لذا $z_1 = -z_2$ تساوی $g(z_1) = -g(z_2)$ را نتیجه می‌دهد که با فرض در تناقض است. پس $z_1 = z_2$ و تک ارزی $g(z)$ اثبات می‌شود. \square

قضیه ۲.۱. [۲۰] اگر $f(z) \in \mathcal{S}$ باشد، آنگاه $|a_2| \leq 2$.

مثال ۱.۱. (تابع کوئب^۶) در قضیه ۲.۱، اگر $a_2 = 2e^{i\alpha}$ و α حقیقی باشد آنگاه

$$\text{لذا } g(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha}z)^2} = z \sqrt{\frac{f(z)}{z^2}}$$

$$f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha}z)^2} = z + 2e^{i\alpha}z^2 + 3e^{2i\alpha}z^3 + \dots$$

با قرار دادن $\alpha = 0$ به تابع زیر می‌رسیم:

$$k(z) = \frac{z}{(1 - z)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - \frac{1}{4}$$

که به تابع کوئب معروف است. این تابع دیسک $|z| < 1$ را بر صفحه‌ای که در امتداد محور حقیقی منفی از $\frac{-1}{4}$ تا ∞ بریده شده است، می‌نگارد.

قضیه ۳.۱. (پوشش). اگر $f(z) \in \mathcal{S}$ و برای $|z| < 1$ که $f(z) \neq c$ ، آنگاه $|c| \geq \frac{1}{4}$.

برهان. می‌دانیم $f(z) = z + a_2z^2 + \dots$ چون $f(z) \neq c$ پس تابع $g(z) = \frac{cf(z)}{c - f(z)}$ نیز متعلق به \mathcal{S} می‌باشد.

$$\frac{cf(z)}{c - f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{c}\right)z^2 + \dots$$

بنا به قضیه ۲.۱ داریم $|a_2 + \frac{1}{c}| \leq 2$ از طرفی:

$$\left| \frac{1}{c} \right| - |a_2| \leq |a_2 + \frac{1}{c}| \leq 2 \implies \left| \frac{1}{c} \right| \leq 2 + |a_2|$$

چون $f(z) \in \mathcal{S}$ ، پس $|a_2| \leq 2$ است. لذا داریم:

$$\left| \frac{1}{c} \right| \leq 4 \implies |c| \geq \frac{1}{4}$$

\square

^۶Koebe

لم 3.1. اگر $f(z) \in \mathcal{S}$ و $z = re^{i\theta}$ باشد، آنگاه :

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} = r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)|$$

برهان. چون برای $|z| < 1$ ، $f'(z) \neq 0$ پس می توان شاخه ای از $\log f'(z)$ را برای $|z| < 1$ در نظر گرفت. حال برای $f(z) = f(re^{i\theta})$ داریم $f'(z) = f'(re^{i\theta})$ لذا :

$$\frac{\partial}{\partial r} \log f'(re^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}$$

با ضرب طرفین رابطه ی فوق در r داریم:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \log f'(re^{i\theta}) = \frac{re^{i\theta} f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} = \frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

با محاسبه ی قسمت های حقیقی داریم:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(re^{i\theta})| = \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\}$$

□

قضیه 4.1. اگر $f(z) \in \mathcal{S}$ باشد، آنگاه :

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \quad (|z| = r < 1)$$

برهان. می دانیم تابع $\omega = \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}$ تحلیلی، یک به یک و پوشاست و دیسک واحد را بر خودش می نگارد. لذا تابع $g(z) = f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2$ نیز به ازای $(|z| < 1)$ تحلیلی و تک ارز است، داریم:

$$g(\circ) = b_0 = f(z_0) \quad b_1 = g'(\circ) = f'(z_0)(1 - |z_0|^2)$$

$$b_2 = \frac{g''(\circ)}{2} = \frac{1}{2} (f''(z_0)(1 - |z_0|^2)^2 - 2f'(z_0)\bar{z}_0(1 - |z_0|^2))$$

چون $g(z)$ نرمالیزه نمی باشد پس متعلق به \mathcal{S} نیست، با توجه به این که تابع $\frac{g(z) - g(\circ)}{g'(\circ)} = z + \frac{b_2}{b_1} z^2 + \dots$ در \mathcal{S} قرار می گیرد، لذا بنابر قضیه 2.1، یعنی $\left| \frac{b_2}{b_1} \right| \leq 2$:

$$\frac{1}{2} \left| \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} (1 - |z_0|^2) - 2\bar{z}_0 \right| \leq 2$$

با قرار دادن $z_0 = re^{i\theta}$ و ضرب طرفین در $\frac{2|z_0|}{1 - |z_0|^2}$ داریم :

$$\left| \frac{zf''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{2|z_0|^2}{1 - |z_0|^2} \right| \leq \frac{4|z_0|}{1 - |z_0|^2}$$

حال چون z دلخواه است، قرار می‌دهیم:

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{4r}{1-r^2}$$

یعنی $\frac{zf''(z)}{f'(z)}$ در دایره‌ای به شعاع $\frac{4r}{1-r^2}$ و به مرکز $\frac{2r^2}{1-r^2}$ واقع است لذا:

$$\frac{2r^2 - 4r}{1-r^2} \leq \operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)} \leq \frac{2r^2 + 4r}{1-r^2}$$

بنا به لم ۳.۱ می‌دانیم $\operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)} = r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)|$ یعنی:

$$\frac{2r^2 - 4r}{1-r^2} \leq r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)| \leq \frac{2r^2 + 4r}{1-r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2r - 4}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)| \leq \frac{2r + 4}{1-r^2}$$

حال از طرفین نامساوی از r تا r انتگرال می‌گیریم:

$$\log(1-r) - 3 \log(1+r) \leq \log |f'(z)| \leq \log(1+r) - 3 \log(1-r)$$

در نتیجه:

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \quad (|z| = r < 1)$$

□

مثال ۲.۱. مشتق تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \dots$ برابر است با

$$k'(z) = \frac{1+z}{(1-z)^3}$$

لذا کران بالای قضیه ۴.۱، در مورد این تابع در $z = r$ و کران پایین در $z = -r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۵.۱. اگر $f(z) \in S$ باشد، آنگاه:

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2} \quad (|z| = r < 1)$$

برهان. بنا بر قضیه ۴.۱ برای $|z| = r < 1$ داریم $|f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$. نقطه‌ی \circ را با یک خط مستقیم به z وصل کرده و روی این پاره خط انتگرال می‌گیریم:

$$|f(z)| \leq \int_0^r |f'(t)| dt \leq \int_0^r \frac{1+t}{(1-t)^3} dt = \frac{r}{(1-r)^2}$$

نامساوی $\frac{r}{(1+r)^2} \leq \frac{1}{4}$ همواره برقرار است.

حال اگر $|f(z)| \geq \frac{1}{4}$ باشد، آنگاه $|f(z)| \leq \frac{r}{(1+r)^2}$ و اگر $|f(z)| < \frac{1}{4}$ باشد، بنا بر قضیه ۳.۱ مسیر c داخل دایره‌ی یکه از z تا z موجود است که تصویر آن پاره خط مستقیم c_0 از z تا z را می‌پوشاند در این صورت :

$$|f(z)| = \int_{c_0} |d\omega| = \int_c |f'(s)||ds|$$

از طرفی بنا به قضیه ۴.۱ :

$$|f(z)| = \int_c |f'(s)||ds| \geq \int_c |f'(s)||d|s| \geq \int_0^1 \frac{1-t}{(1+t)^2} dt = \frac{r}{(1+r)^2}$$

لذا داریم :

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}$$

□

مثال ۳.۱. برای تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \dots$ کران بالای قضیه ۵.۱ در $z = r$ و کران پایین در $z = -r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۶.۱. (لیتلوود^۷) [۲۰] اگر $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در رده‌ی S باشد آنگاه برای هر n ، $|a_n| \leq en$.

قضیه ۷.۱. اگر تابع $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در رده‌ی S باشد و ضرایب حقیقی داشته باشد، آنگاه برای هر n داریم $|a_n| \leq n$.

برهان. برای $z = re^{i\theta}$ ، $r < 1$ قرار می‌دهیم:

$$Im f(z) = v(re^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \sin k\theta$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی فوق در $\sin n\theta$ و انتگرال‌گیری از 0 تا π داریم :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} v(re^{i\theta}) \sin n\theta d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} a_n r^n \sin^2 n\theta d\theta = a_n r^n \quad (2.1)$$

با توجه به رابطه‌ی

$$|\sin(n+1)\theta| = |\sin n\theta \cos \theta + \cos n\theta \sin \theta| \leq |\sin n\theta| + |\sin \theta|$$

^۷Littlewood's

و به روش استقرایی می توان نشان داد که $|sin n\theta| \leq n|sin\theta|$ لذا از رابطه‌ی (۲.۱) نتیجه می شود که

$$|a_n r^n| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |v(re^{i\theta})| \sin \theta d\theta \quad (3.1)$$

حال نشان می دهیم $v(re^{i\theta}) \neq 0$ که در آن $(0 < \theta < \pi, 0 < r < 1)$:

$$0 \neq f(re^{i\theta}) - f(re^{-i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n (e^{in\theta} - e^{-in\theta}) = 2i \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin n\theta = 2iv(re^{i\theta})$$

چون $v(re^{i\theta})$ نسبت به θ تابعی پیوسته است، پس در فاصله $0 < \theta < \pi$ علامت جبری ثابتی دارد. لذا :

$$r = |a_1 r| = \left| \frac{2}{\pi} \int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin \theta d\theta \right| = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |v(re^{i\theta})| \sin \theta d\theta \quad (4.1)$$

با جایگزینی (۴.۱) در (۳.۱) ، رابطه $|a_n r^n| \leq nr$ بدست می آید و با $r \rightarrow 1$ قضیه ثابت می گردد. \square

۳.۱ رده‌ی \mathcal{S}^*

تعریف ۱۱.۱. میدان D را نسبت به z_0 ستاره‌گون گوییم هرگاه پاره خط مستقیمی که هر نقطه از D را به z_0 وصل می کند در D قرار بگیرد. تابع $f(z) \in \mathcal{S}$ را نسبت به مبدا ستاره‌گون گوییم هرگاه دیسک $|z| < 1$ با $f(z)$ بر میدانی نگاشته شود که نسبت به $z_0 = \omega$ ستاره‌گون است. این زیر رده‌ی \mathcal{S} با \mathcal{S}^* نشان داده می شود.

لم ۴.۱. فرض کنیم $f(z) \in \mathcal{S}$ ، در این صورت $f(z) \in \mathcal{S}^*$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر دیسک $|z| < 1$ را بر میدان ستاره‌گون بنگارد.

برهان. ابتدا فرض کنیم $f(z) \in \mathcal{S}^*$ و D تصویر $|z| < 1$ و D_r تصویر $|z| < r < 1$ در تابع $f(z)$ باشد. اگر $w \in D$ باشد، آنگاه برای $0 < t < 1$ ، $tw \in D$ (چون D ستاره‌گون نسبت به مبدا می باشد) لذا تابع $g(z) = f^{-1}(tf(z))$ در $|z| < 1$ تحلیلی است و در نامساوی $|g(z)| < 1$ صدق می کند. چون $g(z_0) = f^{-1}(tf(z_0))$ ، با توجه به لم شوارتز $|g(z)| \leq |z|$. اکنون نقطه‌ی $w_1 \in D_r$ را انتخاب می کنیم. در این صورت برای نقطه‌ی z_1 ای با فرض $|z_1| < 1$ و برای t دلخواه با فرض $0 < t < 1$ داریم :

$$|f^{-1}(tw_1)| = |f^{-1}(tf(z_1))| = |g(z_1)| \leq |z_1| < r$$

ولی این بدان معنی است که tw_1 در D_r قرار دارد. چون این مطلب برای همه‌ی $w_1 \in D_r$ ها در D_r و همه‌ی t ها که $0 < t < 1$ درست است، میدان D_r نسبت به $w = z_0$ ستاره‌گون است.

بر عکس، اگر $f(z)$ در رده‌ی S^* قرار نداشته باشد، آنگاه نقطه $w_0 \in D$ موجود است به طوری که برای t_0 ای، $(0 < t_0 < 1)$ ، $t_0 w_0$ متعلق به D نمی‌باشد. اینک دیسک $|z| < r < 1$ را انتخاب می‌کنیم به طوری که تصویرش D_r شامل نقطه‌ی w_0 باشد. چون $D_r \subset D$ ، نقطه‌ی $t_0 w_0$ متعلق به D_r نیست. پس $f(z)$ ، $|z| < 1$ را بر میدان ستاره‌گون نمی‌نگارد. \square

قضیه ۸.۱. فرض کنیم $f(z) \in S$ باشد، در این صورت $f(z) \in S^*$ اگر و تنها اگر:

$$Re \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0$$

برهان. با توجه به لم ۴.۱ $f(z) \in S^*$ اگر و تنها اگر تصویر D_r از $|z| < r < 1$ یک میدان ستاره‌گون باشد. به بیان معادل برای هر θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) بردار شعاعی از $w = 0$ تا $w = f(re^{i\theta})$ باید در D_r باشد ولی این بدان معنی است که $\arg f(re^{i\theta})$ تابعی است که نسبت به θ اکیدا صعودی است، زیرا در غیر این صورت بردار شعاعی می‌بایست مرز D_r را حداقل در دو نقطه قطع کند. پس یک تابع در S^* با شرط $\frac{\partial}{\partial \theta} \arg f(re^{i\theta}) > 0$ مشخص می‌شود. ولی $\arg f(re^{i\theta}) = Im \log f(re^{i\theta})$ بنابراین:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ Im \log f(re^{i\theta}) \right\} = Im \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(re^{i\theta}) \right\} = Im \left\{ i \frac{re^{i\theta} f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right\} = Re \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0$$

\square

مثال ۴.۱. تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ در رده‌ی S^* قرار دارد، زیرا تصویر $|z| < 1$ صفحه‌ی w می‌باشد که در امتداد پرتو $\frac{1}{4}$ تا ∞ بریده شده است و همچنین:

$$Re \left\{ \frac{zk'(z)}{k(z)} \right\} = Re \left\{ \frac{1+z}{1-z} \right\}$$

قضیه ۹.۱. فرض کنیم برای $|z| < 1$ ، $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ ، $|z| < 1$ اگر برای $|z| < 1$ ، $Re f(z) > 0$ ، آنگاه برای هر n ، $|a_n| \leq 2$.

قضیه ۱۰.۱. فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در S^* باشد آنگاه برای هر n ، $|a_n| \leq n$.

برهان. چون برای $0 < |z| < 1$ ، $f(z) \neq 0$ تابع

$$P(z) = z \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1}}{1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1}} \quad (5.1)$$

در $|z| < 1$ تحلیلی است. لذا می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$P(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n z^n \quad (6.1)$$

از طرفی برای $|z| < 1$ ، $f(z) \in \mathcal{S}^*$ پس $Re\{P(z)\} > 0$. بنا بر قضیه ۲.۱ می‌دانیم:

$$|\alpha_n| \leq 2 \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.1)$$

از (۵.۱) و (۶.۱) داریم:

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1}\right) \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n\right)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$k a_k = a_k + a_{k-1} \alpha_1 + a_{k-2} \alpha_2 + \dots + a_2 \alpha_{k-2} + \alpha_{k-1}$$

و یا به صورت معادل:

$$(k-1)a_k = a_{k-1} \alpha_1 + a_{k-2} \alpha_2 + \dots + a_2 \alpha_{k-2} + \alpha_{k-1} \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (8.1)$$

با استفاده از کران (۷.۱) می‌توان نامساوی مثلث را در (۸.۱) به کار برد لذا

$$(k-1)|a_k| \leq 2(|a_{k-1}| + |a_{k-2}| + \dots + |a_2| + 1)$$

از رابطه‌ی فوق داریم $|a_2| \leq 2$. سپس فرض کنیم برای $k = 2, 3, \dots, n-1$ داشته باشیم $|a_k| \leq k$ در این صورت:

$$(n-1)|a_n| \leq 2[(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1] = \frac{2(n-1)n}{2}$$

□ و لذا رابطه $|a_n| \leq n$ برقرار می‌باشد لذا به استقرا قضیه برای هر n درست است.

تعریف ۱۲.۱. تابع $f(z) \in \mathcal{S}$ ستاره‌گون از مرتبه α ($0 \leq \alpha < 1$) نامیده می‌شود هرگاه:

$$Re \left\{ \frac{z f'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha \quad (|z| < 1)$$

این زیر رده‌ی \mathcal{S} را به $\mathcal{S}^*(\alpha)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۱.۱. فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ ، $f(z) \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$$

آنگاه $f(z) \in \mathcal{S}^*(\alpha)$.

برهان. بنا بر تعریف ۱۲.۱ کافی است نشان دهیم $z \frac{f'(z)}{f(z)}$ در یک دایره به شعاع $1-\alpha$ و به مرکز

۱ قرار دارد.

$$\left| z \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right| = \left| \frac{z f'(z) - f(z)}{f(z)} \right| = \left| \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_n z^n}{z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n} \right|$$

$$\leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) |a_n| |z|^{n-1}}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |z|^{n-1}} \leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) |a_n|}{1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|}$$

آخرین جمله قبل دارای کران بالای $1 - \alpha$ می‌باشد اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)|a_n| \leq (1-\alpha)(1 - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|)$$

که معادل است با $1 - \alpha \leq \sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha)|a_n|$. بنا بر فرض، این رابطه برقرار است. بنابراین \square

$$\left| z \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right| \leq 1 - \alpha$$

۴.۱ رده‌ی \mathcal{K}

تعریف ۱۳.۱. میدان D را محدب گوییم هرگاه پاره خط مستقیمی که هر دو نقطه از D را به هم وصل می‌کند در D قرار بگیرد.

تعریف ۱۴.۱. تابع $f(z) \in \mathcal{S}$ را محدب گوییم هرگاه دیسک واحد $|z| < 1$ تحت تابع $f(z)$ بر یک میدان محدب نگاشته شود، این زیر رده‌ی \mathcal{S} را با \mathcal{K} نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۲.۱. فرض کنیم $f(z) \in \mathcal{S}$ ، در این صورت $f(z) \in \mathcal{K}$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر دیسک $|z| < r < 1$ را بر میدان محدب تصویر کند.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $f(z) \in \mathcal{K}$ و $f(z)$ تصویر D و D_r تصویر $|z| < r < 1$ تحت $f(z)$ باشد. نقاط w_1, w_2 را در D_r انتخاب می‌کنیم. باید نشان دهیم که پاره خط $(0 < t < 1)$ $tw_1 + (1-t)w_2$ هم در D_r قرار دارد. نقاط z_1 و z_2 در دیسک $|z| < 1$ موجود هستند به طوری که $w_1 = f(z_1)$ و $w_2 = f(z_2)$. بدون از دست دادن کلیت فرض کنیم $|z_1| \leq |z_2|$ آنگاه تصویر $|z| < 1$ تحت تابع $g(z) = tf\left(\frac{z_1}{z_2}z\right) + (1-t)f(z)$ در D واقع است. لذا تابع $h(z) = f^{-1}(g(z))$ در $|z| < 1$ تحلیلی است و چون $f(z) \in \mathcal{S}$ لذا در شرایط $|h(z)| < 1$ و $h(0) = 0$ صدق می‌کند، به موجب لم شوارتز $|h(z)| \leq |z|$. به‌ویژه:

$$|h(z_2)| = |f^{-1}(tw_1 + (1-t)w_2)| \leq |z_2| < r \quad (9.1)$$

چون $\mathbb{D}_r \subset D$ ، نقطه‌ی z_0 ای در دیسک $|z| < 1$ موجود است که $tw_1 + (1-t)w_2 = f(z_0)$ ولی بنا بر (۹.۱) نقطه‌ی $f^{-1}(f(z_0)) = z_0$ نیز می‌بایست در دیسک $|z| < 1$ باشد. پس هر نقطه بر پاره خط $tw_1 + (1-t)w_2$ در D_r قرار دارد.

برعکس، اگر $f(z)$ در رده‌ی \mathcal{K} نباشد آنگاه دو نقطه در D وجود دارند که پاره خط مار بر این دو نقطه در D قرار ندارد. اینک دیسکی مانند $|z| < r < 1$ انتخاب می‌کنیم که تصویرش D_r شامل این دو نقطه باشد. چون $D_r \subset D$ پاره خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند، نمی‌تواند در D_r قرار داشته باشد، لذا $f(z)$ دیسک $|z| < r$ را بر یک میدان محدب تصویر نمی‌کند. \square

قضیه ۱۳.۱. فرض کنیم $f(z)$ در $|z| < 1$ تحلیلی باشد و $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$. در این صورت $f(z) \in \mathcal{K}$ اگر و تنها اگر:

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0 \quad (|z| < 1)$$

برهان. بنا بر قضیه ۹.۱، $f(z) \in \mathcal{K}$ اگر و تنها اگر تصویر \mathbb{D}_r از $|z| < r < 1$ یک میدان محدب باشد. از نظر هندسی این بدان معنی است که تابع $w = f(re^{i\theta})$ دایره $|z| = r < 1$ را بر یک مرز ساده می‌نگارد و مماس بر این مرز، با افزایش θ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند. می‌دانیم زاویه‌ای که خط مماس در صفحه‌ی w با محور حقیقی می‌سازد برابر است با:

$$\frac{\pi}{2} + \theta + \arg f'(z)$$

لذا تابع محدب با شرط زیر مشخص می‌گردد:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\pi}{2} + \theta + \arg f'(re^{i\theta}) \right) > 0$$

و لذا:

$$1 + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{Im} \log f'(re^{i\theta}) \right) = 1 + \operatorname{Im} \left\{ (ire^{i\theta}) \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0$$

□

قضیه ۱۴.۱. (الکساندر^۸) فرض کنیم f یک تابع تحلیلی در \mathbb{D} باشد با $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$. در این صورت $f(z) \in \mathcal{K}$ اگر و تنها اگر $zf'(z) \in \mathcal{S}^*$.

برهان. اگر $g(z) = zf'(z)$ در این صورت:

$$\left\{ \frac{zg'(z)}{g(z)} \right\} = \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0$$

لذا تابع سمت چپ در \mathbb{D} تحلیلی و مثبت است اگر و تنها اگر تابع سمت راست نیز چنین باشد. □

قضیه ۱۵.۱. فرض کنیم $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در \mathcal{K} باشد. در این صورت برای هر n ، $|a_n| \leq 1$.

برهان. با توجه به قضیه ۱۴.۱ تابع $zf'(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^n$ در \mathcal{S}^* قرار دارد لذا بنا بر قضیه ۱۰.۱ برای هر n ، $|n a_n| \leq n$ و در نتیجه $|a_n| \leq 1$. □

قضیه ۱۶.۱. اگر $f(z) \in \mathcal{K}$ برای $|z| < 1$ داشته باشیم $f(z) \neq c$ آنگاه $|c| \geq \frac{1}{2}$.

^۸Alexander

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم تابع کمکی $g(z) = (c - f(z))^2$ در $|z| < 1$ تک ارز است، دو نقطه متمایز z_0 و z_1 در دیسک واحد انتخاب می‌کنیم در این صورت:

$$g(z_0) - g(z_1) = \left((c - f(z_0))^2 - (c - f(z_1))^2 \right) = (f(z_0) - f(z_1)) (f(z_0) + f(z_1) - 2c)$$

اکنون $f(z_0) \neq f(z_1)$ زیرا $f(z)$ تک ارز می‌باشد. همچنین چون $f(z)$ محدب است، نقطه‌ی $\frac{1}{2} [f(z_0) + f(z_1)]$ به تصویر $|z| < 1$ متعلق است لذا نمی‌تواند مساوی c باشد. پس $f(z_0) + f(z_1) - 2c \neq 0$

و لذا تک ارزی $g(z)$ ثابت می‌شود. چون $g(z) = c^2 - 2cz + z^2 + \dots$ تابع نرمال زیر در S است.

$$h(z) = \frac{g(z) - c^2}{-2c} = z + \left(\frac{-z^2}{2c} \right) + \dots$$

بعلاوه در $|z| < 1$ ، $h(z) \neq \frac{c}{2}$ ، زیرا $g(z)$ هرگز در آن جا صفر نیست. با به کار بردن قضیه‌ی پوششی در می‌یابیم $\frac{1}{2} \leq |c|$ و یا $\frac{1}{2} \leq |c|$. □

قضیه ۱۷.۱. اگر $f(z) \in \mathcal{K}$ باشد، آنگاه برای $|z| = r < 1$:

$$\frac{1}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2}$$

برهان. می‌دانیم تابع $w = \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}$ ($|z_0| < 1$) تحلیلی، یک به یک و پوشاست و دیسک واحد را بر خودش می‌نگارد، پس تابع

$$g(z) = f\left(\frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}\right) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2$$

نیز به ازای $|z| < 1$ تحلیلی و تک ارز است. بنابراین:

$$g(0) = b_0 = f(z_0) \quad b_1 = g'(0) = f'(z_0)(1 - |z_0|^2)$$

$$b_2 = \frac{g''(0)}{2} = \frac{1}{2} \left(f''(z_0)(1 - |z_0|^2)^2 - 2f'(z_0)\bar{z}_0(1 - |z_0|^2) \right)$$

چون تابع $g(z)$ نرمالیزه نمی‌باشد لذا $g(z)$ در رده‌ی S قرار ندارد. با توجه به این که تابع

$$\frac{g(z) - g(0)}{g'(0)} = z + \frac{b_2}{b_1} z^2 + \dots$$

در S قرار می‌گیرد لذا در \mathcal{K} نیز وجود دارد پس بنا به قضیه‌ی ۱۵.۱:

$$\frac{1}{2} \left| \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} (1 - |z_0|^2) - 2\bar{z}_0 \right| \leq 1$$

با قرار دادن $z_0 = re^{i\theta}$ و ضرب طرفین در $\frac{2|z_0|}{1-|z_0|^2}$ داریم:

$$\left| \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{2|z_0|^2}{1-|z_0|^2} \right| \leq \frac{2|z_0|}{1-|z_0|^2}$$

حال چون z_0 دلخواه است داریم:

$$\left| \frac{z f''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{2r}{1-r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2r^2 - 2r}{1-r^2} \leq \frac{z f''(z)}{f'(z)} \leq \frac{2r^2 + 2r}{1-r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2r-2}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)| \leq \frac{2r+2}{1-r^2}$$

حال از 0 تا r انتگرال می‌گیریم:

$$-2 \log(1+r) \leq \log |f'(z)| \leq -2 \log(1-r)$$

لذا:

$$\frac{1}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2}$$

□

قضیه ۱۸.۱. اگر $f(z) \in \mathcal{K}$ باشد آنگاه برای $|z| = r < 1$,

$$\frac{r}{1+r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{1-r}$$

برهان. بنا بر قضیه ۱۷.۱ برای $|z| = r < 1$ داریم $|f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2}$ نقطه‌ی 0 را به z با یک خط مستقیم وصل کرده و روی این پاره خط انتگرال می‌گیریم:

$$|f(z)| = \int_0^r |f'(t)| dt \leq \int_0^r \frac{1}{(1-t)^2} dt = \frac{r}{1-r}.$$

نامساوی $\frac{r}{1+r} \leq |f(z)|$ همواره برقرار است، حال اگر $|f(z)| \geq \frac{1}{4}$ و اگر $|f(z)| < \frac{1}{4}$ طبق قضیه‌ی پوششی مسیر c داخل دایره‌ی یکه از 0 تا z موجود است که تصویر آن پاره خط مستقیم c_0 از 0 تا $f(z)$ را می‌پوشاند در این صورت:

$$|f(z)| = \int_{c_0} |dw| = \int_c |f'(s)| |ds|$$

از طرفی بنا بر قضیه‌ی قبل :

$$|f(z)| = \int_c |f'(s)| |ds| \geq \int_c |f'(s)| d|s| \geq \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^r} dt = \frac{r}{1+r}$$

لذا داریم :

$$\frac{r}{(1+r)} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)}$$

□

فصل ۲

بررسی رشد، انحراف و کران‌های ضرایب

۱.۲ مقدمه

در این فصل به بررسی توابع همساز محدب در جهت محور حقیقی یا موهومی می‌پردازیم. کران‌هایی برای $|f_z(z)|$ ، $|f_{\bar{z}}(z)|$ و $|f(z)|$ به دست می‌آوریم. هم‌چنین در ادامه به قضیه رشد، انحراف و کران ضرایب روی $|a_n|$ و $|b_n|$ بسط سری توانی این رده از توابع می‌پردازیم و در پایان مثالی با رسم شکل خواهیم آورد.

تعریف ۱.۲. تابع مختلط مقدار $f(z)$ روی دیسک واحد $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ را یک تابع همساز گوییم هرگاه f دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته باشد و در رابطه زیر صدق کند.

$$\Delta f = 4f_{z\bar{z}} = 0$$

تعریف ۲.۲. فرض کنید $f = u + iv$ ژاکوبین تابع f را با $J_f(z)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$J_f(z) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - v_x u_y$$

تعریف ۳.۲. تابع همساز f در دامنه همبند ساده D را جهت نگهدار^۱ گویند هرگاه $J_f(z) > 0$ و جهت برگردان گویند هرگاه $J_f(z) < 0$ باشد.

قضیه ۱.۲ (قضیه لوی). فرض کنید f یک تابع همساز مختلط موضعا یک به یک بر دامنه D باشد. آنگاه به ازای هر $z \in \mathbb{D}$ ، $J_f(z) \neq 0$.

لم ۱.۲. برای هر تابع همساز $f(z)$ تعریف شده در دیسک واحد \mathbb{D} توابع تحلیلی $h(z)$ و $g(z)$ موجودند به طوری که

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)}.$$

تعریف ۴.۲. \mathcal{H} را رده همه توابع همساز مختلط مقدار $f(z)$ نامیم که بر دیسک واحد \mathbb{D} تعریف شده و $f(0) = f_z(0) - 1 = 0$.

تعریف ۵.۲. S_H را زیر رده‌ای از رده \mathcal{H} شامل توابع تک ارز و جهت نگهدار می‌نامیم. چنین تابعی را می‌توان به صورت $f = h + \bar{g}$ نوشت به طوری که

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (1.2)$$

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

بر \mathbb{D} تحلیلی می‌باشند.

تعریف ۶.۲. رده S شامل توابع تحلیلی تک ارز و نرمالیزه شده با $g(z) \equiv 0$ را زیر رده‌ای از S_H تعریف می‌کنیم.

تعریف ۷.۲. دامنه Ω در صفحه مختلط را محدب در جهت γ ($0 \leq \gamma < \pi$) گویند هرگاه برای هر $a \in \mathbb{C}$ ، مجموعه $\Omega \cap \{a + te^{i\gamma} : t \in \mathbb{R}\}$ همبند یا تهی باشد.

در حالت خاص یک دامنه را محدب در جهت محور حقیقی گویند و با CHD نمایش می‌دهند هرگاه اشتراك آن دامنه با خطوط افقی همبند (یا تهی) باشد. یک نگاشت همساز تک ارز را CHD گویند هرگاه برد آن CHD باشد.

تعریف ۸.۲. تابع $f(z)$ را محدب در جهت γ نامیم هرگاه \mathbb{D} تحت f بطور تک ارز بر یک دامنه محدب در جهت γ نگاشته شود.

تعریف ۹.۲. انحراف تحلیلی^۲ یک تابع همساز را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\omega(z) = \frac{g'(z)}{h'(z)}$$

^۱Sense-preserving

^۲Analytic dilatation

توجه کنید که اگر f موضعا تک ارز و جهت نگهدار باشد در این صورت داریم:

$$|\omega(z)| < 1$$

تعریف ۱۰.۲. زیر رده \mathcal{S}_H° را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\mathcal{S}_H^\circ = \{f = h + \bar{g} : f \in \mathcal{S}_H, g'(\circ) = \circ\}$$

تعریف ۱۱.۲. \mathcal{A} را زیر رده ای از \mathcal{S}_H° شامل توابع تحلیلی تعریف می کنیم.

مک گریگور^۳ نشان داد حتی اگر f و g توابع تحلیلی محدب باشند نیاری نیست

$$\lambda f + (1 - \lambda)g \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

تک ارز باشد [۱۳]. در ادامه به بررسی شرایط لازم برای همساز شدن ترکیب خطی از دو تابع همساز می پردازیم. در این فصل دو رده از توابع محدب شامل توابع در \mathcal{S}_H° که در جهت محور حقیقی و موهومی محدب و به صورت ساختار برش^۴ ساخته می شوند را بررسی می کنیم.

قضیه ۲.۲ (تکنیک برش). [۵] فرض کنید تابع همساز $f = h + \bar{g}$ روی \mathbb{D} موضعا تک ارز باشد. آنگاه f روی \mathbb{D} تک ارز و CHD است اگر و تنها اگر $h - g$ روی \mathbb{D} تک ارز و CHD باشد.

قضیه ۲.۲ راهی برای ساخت توابع همساز تک ارز با یک انحراف تحلیلی خاص مانند ω را فراهم می کند.

با استفاده از تکنیک برش^۵ اولین بار کلونی^۶ و شیل-اسمال^۷ روشی را برای ساخت توابع همساز و تک ارز $f = h + \bar{g}$ ارائه نمودند، این روش مبتنی بر دو تابع $\varphi(z)$ و $\omega(z)$ (انحراف-تحلیلی) می باشد که در آن $\varphi := h(z) - g(z)$ یک تابع تحلیلی روی \mathbb{D} و محدب در جهت محور حقیقی (CHD) و انحراف تحلیلی $\omega(z) := \frac{g'(z)}{h'(z)}$ روی \mathbb{D} تحلیلی و $|\omega(z)| < 1$ می باشد. با استفاده از این توابع می توان به معادلات زیر دست یافت. $h'(z) = \frac{\varphi'(z)}{1 - \omega(z)}$ و $g'(z) = \frac{\varphi'(z)\omega(z)}{1 - \omega(z)}$. با انتگرال گیری از $h'(z)$ و $g'(z)$ می توان قسمت آنالیتیک^۸ و کو-آنالیتیک^۹ تابع $f = h + \bar{g}$ را به دست می آوریم. این روش را برش افقی از $\varphi(z)$ با $\omega(z)$ انحراف تحلیلی گویند.

^۳Macgregor

^۴shear construction

^۵Shearing Technique

^۶Clunie

^۷Sheil-Small

^۸Analytic

^۹Co- Analytic

یادآوری ۱.۲. فرض کنیم تابع f در جهت α محدب باشد لذا $e^{-i\alpha}f$ و $e^{i\alpha}g$ تابعی CHD می‌باشد. بنابراین $h - e^{i\alpha}$ در جهت α محدب است و لذا می‌توان قضیه ۲.۲ را برای توابعی که در جهت غیر از محور حقیقی محدب می‌باشند را به کار برد. به طور خاص می‌توان از این ساختار وقتی که $\alpha = (\frac{\pi}{2})$ برای ساخت توابعی که در جهت محور موهومی محدب هستند استفاده کنیم این رده را با CIA نمایش می‌دهیم.

۲.۲ قضایای رشد و انحراف برای یک رده خاص از نگاشت‌های همساز

تعریف ۱۲.۲. گوئیم تابع $\psi(z)$ نرمالیزه است هرگاه نقاط z'_n همگرا به $z = 1$ و z''_n همگرا به $z = -1$ موجود باشند، به طوری که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}\{\psi(z'_n)\} = \sup_{|z| < 1} \operatorname{Re}\{\psi(z)\} \quad (2.2)$$

و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}\{\psi(z''_n)\} = \inf_{|z| < 1} \operatorname{Re}\{\psi(z)\}$$

هنگارترنر و اسچوبر توابع تحلیلی ψ که در جهت محور موهومی محدب هستند را مورد مطالعه و بررسی قرار دادند و قضیه زیر را برای این توابع نشان دادند [۸].

قضیه ۳.۲. [۸] فرض کنید ψ برای $|z| < 1$ تحلیلی و غیر ثابت باشد در این صورت برای $|z| < 1$ داریم:

$$\operatorname{Re}\{(1 - z^2)\psi'(z)\} \geq 0$$

اگر و تنها اگر

۱. ψ روی \mathbb{D} تک ارز باشد.

۲. $\psi(\mathbb{D}) \in CIA$.

۳. ψ در رابطه (۲.۲) صدق نماید.

قضیه ۴.۲. [۸] فرض کنید ψ در دیسک واحد تحلیلی و $\operatorname{Re}\{(1 - z^2)\psi'(z)\} \geq 0$ باشد. آنگاه

$$\frac{(1-r)|\psi'(0)|}{(1+r)(1+r^2)} \leq |\psi'(z)| \leq \frac{|\psi'(0)|}{(1-r)^2} \quad (|z| \leq r < 1) \quad (3.2)$$

قضیه ۵.۲. فرض کنید $f = h + \bar{g}$ محدب در جهت محور حقیقی، $f \in S_H^o$ و $\varphi = h' - g'$ ، $\omega = \left(\frac{g'}{h'}\right)$ و φ در رابطه (۲.۲) صدق کند. آنگاه برای $|z| \leq r$ داریم:

$$\frac{1-r}{(1-r)^2(1+r^2)} \leq |f_z(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^3} \quad (4.2)$$

و

$$\frac{|\omega(z)|(1-r)}{(1+r)^2(1+r^2)} \leq |f_{\bar{z}}(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^3} \quad (5.2)$$

برای کران بالا روابط (۴.۲) و (۵.۲) به ازای $\omega(z) = -iz$ و $\varphi(z) = \frac{z}{1+iz}$ و برای کران پایین روابط (۴.۲) و (۵.۲) به ازای $\omega(z) = z$ و $\varphi(z) = \frac{1}{r} \log \left(\frac{1+z^2}{(1-z)^2} \right)$ برقرار است.

برهان. از آنجایی که

$$\varphi' = h' - g'$$

و

$$g' = \omega h'$$

داریم :

$$f_z(z) = h'(z) = \frac{\varphi'(z)}{1-\omega(z)}$$

و

$$\overline{f_z(z)} = g'(z) = \frac{\omega(z)\varphi'(z)}{1-\omega(z)}$$

با توجه به اینکه $\omega(z)$ روی \mathbb{D} یک تابع شوارتز است، بنابراین

$$|f_z(z)| = \left| \frac{\varphi'(z)}{1-\omega(z)} \right| \leq \frac{|\varphi'(z)|}{1-|\omega(z)|} \leq \frac{|\varphi'(z)|}{1-|z|}$$

به عبارت دیگر

$$|f_z(z)| \geq \frac{|\varphi'(z)|}{1+|\omega(z)|} \geq \frac{|\varphi'(z)|}{1+|z|}$$

طبق قضیه ۴.۲ رابطه (۴.۲) به دست می‌آید. به طور مشابه

$$|\overline{f_z(z)}| \leq \frac{|\varphi'(z)||\omega(z)|}{1-|\omega(z)|} \leq |\varphi'(z)| \frac{|z|}{1-|z|}$$

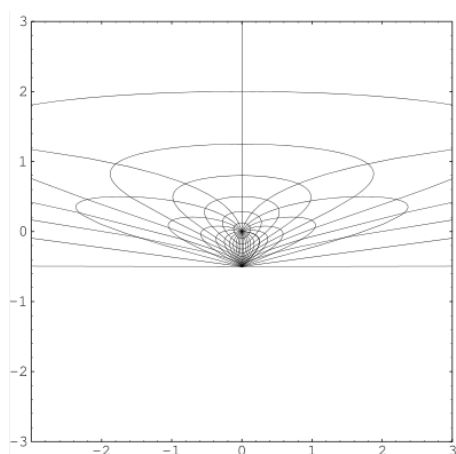
و

$$|\overline{f_z(z)}| \geq \frac{|\varphi'(z)||\omega(z)|}{1+|\omega(z)|} \geq |\varphi'(z)| \frac{|z|}{1+|z|}$$

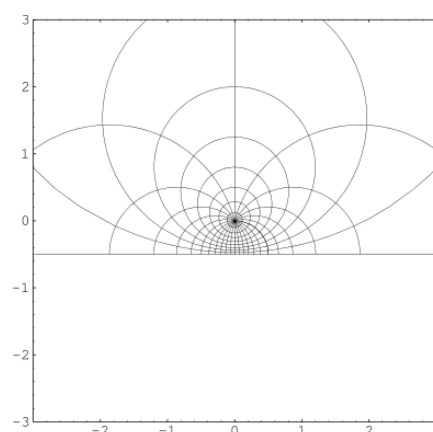
طبق قضیه ۴.۲ رابطه (۵.۲) به دست می‌آید.

از بررسی تساوی توابع ارائه شده در قضیه ۴.۲ به ازای انحراف تحلیلی $\omega(z)$ و با فرض $\varphi(z) = \psi(e^{-i(\frac{\pi}{4})} z)$ به دست می‌آیند.

در شکل‌های ۱.۲ و ۲.۲ تصویر دیسک واحد \mathbb{D} تحت φ و $f(z)$ به ازای انحراف تحلیلی $\omega(z)$ نشان داده شده است. شماره‌های تصاویر دایره‌های هم مرکز و با شعاع مساوی را نشان می‌دهند. \square

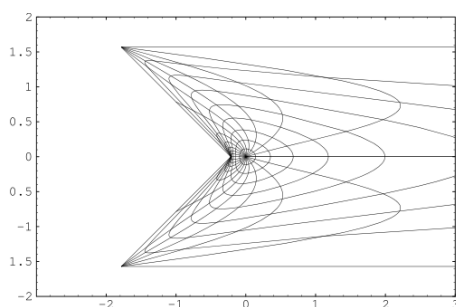


(ب) برشی از $\varphi(z)$

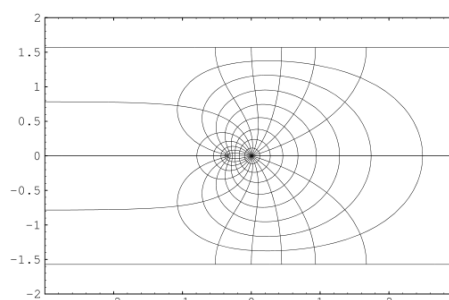


$$\varphi(z) = \left(\frac{z}{1+iz} \right) \quad (\bar{A})$$

شکل ۱.۲: برشی از $\varphi(z) = \left(\frac{z}{1+iz} \right)$ با انحراف $\omega(z) = -iz$



(ب) برشی از $\varphi(z)$



$$\varphi(z) = \frac{1}{4} \log \left(\frac{1+z^2}{(1-z)^2} \right) \quad (\bar{A})$$

شکل ۲.۲: برشی از $\varphi(z) = \left(\frac{1}{4} \right) \log \left(\frac{1+z^2}{(1-z)^2} \right)$ با انحراف $\omega(z) = z$

با استفاده از نامساوی در قضیه ۵.۲ با $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ می‌توان کران بالایی برای $|f(z)|$ پیدا کنیم.

قضیه ۶.۲. فرض کنید $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^\circ$ در جهت محور حقیقی محدب و $\varphi = h - g$ در رابطه (۲.۲) نرمالیزه باشد. آنگاه برای $|z| \leq r$ داریم:

$$|f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}$$

برهان. از آنجایی که

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$$

$$h = \int f_z \rightarrow |h| = \left| \int f_z \right| \leq \int |f_z|$$

$$g = \int f_{\bar{z}} \rightarrow |g| = \left| \int f_{\bar{z}} \right| \leq \int |f_{\bar{z}}|$$

لذا طبق مساوی زیر داریم:

$$\begin{aligned} f(z) &= h(z) + \overline{g(z)} \\ &= \int_0^r h'(\rho e^{i\theta}) e^{i\theta} d\rho + \int_0^r \overline{g'(\rho e^{i\theta}) e^{i\theta} d\rho} \\ &= \int_0^r h'(\rho e^{i\theta}) e^{i\theta} d\rho + \int_0^r \overline{g'(\rho e^{i\theta})} e^{-i\theta} d\rho \\ &= \int_0^r f_z(\rho e^{i\theta}) e^{i\theta} d\rho + \int_0^r f_{\bar{z}}(\rho e^{i\theta}) e^{-i\theta} d\rho \end{aligned}$$

از این رو

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \int_0^r f_z(\rho e^{i\theta}) d\rho + \int_0^r f_{\bar{z}}(\rho e^{i\theta}) d\rho \right| \\ &\leq \int_0^r |f_z(\rho e^{i\theta})| d\rho + \int_0^r |f_{\bar{z}}(\rho e^{i\theta})| d\rho \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه (۴.۲) و (۵.۲) برای نامساوی فوق داریم:

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \int_0^r \frac{1}{(1-\rho)^3} d\rho + \int_0^r \frac{\rho}{(1-\rho)^3} d\rho \\ &= \frac{r}{(1-r)^2} \end{aligned}$$

□

۳.۲ کران‌های انحراف و رشد تعمیم یافته

قضیه ۷.۲ [۱۲] فرض کنید $\varphi(z)$ یک تابع غیرثابت منظم در \mathbb{D} باشد. تابع $\varphi(z)$ دامنه D را بطور تک ارز بر روی دامنه Ω که در جهت محور موهومی محدب است می‌نگارد، اگر و تنها اگر اعداد $0 \leq \nu < \pi$ و $0 \leq \mu < 2\pi$ موجود باشند به طوری که

$$\operatorname{Re}\{-ie^{-i\mu}(1 - 2 \cos \nu e^{-i\mu})z + e^{-2i\mu}z^2\} \varphi'(z) \geq 0, \quad z \in \mathbb{D} \quad (۶.۲)$$

تعریف ۱۳.۲. فرض کنید Γ رده‌ای از همه توابع حقیقی و تک ارز، به طوری که \mathbb{D} را به روی دامنه محدب در جهت محور موهومی می‌نگارد. سپس $\varphi \in \Gamma$ اگر و تنها اگر $\varphi(0) = 0$ و $\varphi'(0) = 1$ و برای بعضی μ و ν در رابطه (۶.۲) صدق می‌کند. در رابطه (۶.۲) وابستگی روی پارامترهای μ و ν را به وسیله $\Gamma(\nu, \mu)$ به عنوان مجموعه همه توابع Γ که در رابطه (۶.۲) صدق می‌کند برای جفت ν, μ و $\Gamma(\nu) = \bigcup_{\mu} \Gamma(\nu, \mu)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۸.۲. [۱۷] اگر $\varphi(z)$ متعلق به $\Gamma(\nu)$ باشد. آنگاه

$$\frac{1-r}{(1+r)(1+2r|\cos\nu|+r^2)} \leq |\varphi'(z)| \quad (7.2)$$

و

$$|\varphi'(z)| \leq \begin{cases} \frac{1+r}{(1-r)(1-2r|\cos\nu|+r^2)} & r < \frac{1-\sin\nu}{|\cos\nu|} \\ \frac{1-\sin\nu}{\sin\nu(1-r)^2} & \frac{1-\sin\nu}{|\cos\nu|} \leq r < 1 \end{cases} \quad (8.2)$$

قضیه ۹.۲. فرض کنید $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^\circ$ در جهت محور موهومی محدب، $\varphi = h + g$ و $\omega = \frac{g'}{h'}$ باشد به طوری که f برشی در جهت محور موهومی از φ با انحراف تحلیلی ω و $\varphi(z) \in \Gamma(\nu)$. آنگاه برای $|z| \leq 1$ داریم:

$$\frac{1-r}{(1+r)^2(1+2r|\cos\nu|+r^2)} \leq |f_z(z)| \quad (9.2)$$

$$|f_z(z)| \leq \begin{cases} \frac{1+r}{(1-r)^2(1-2r|\cos\nu|+r^2)} & r < \frac{1-\sin\nu}{|\cos\nu|} \\ \frac{1-\sin\nu}{\sin\nu(1-r)^3} & \frac{1-\sin\nu}{|\cos\nu|} \leq r < 1 \end{cases} \quad (10.2)$$

$$\frac{|\omega(z)|(1-r)}{(1+r)^2(1+2r|\cos\nu|+r^2)} \leq |f_{\bar{z}}(z)| \quad (11.2)$$

$$|f_{\bar{z}}(z)| \leq \begin{cases} \frac{r(1+r)}{(1-r)^2(1-2r|\cos\nu|+r^2)} & r < \frac{1-\sin\nu}{|\cos\nu|} \\ \frac{r}{\sin\nu(1-r)^3} & \frac{1-\sin\nu}{|\cos\nu|} \leq r < 1 \end{cases} \quad (12.2)$$

برهان. از آنجایی که $f = h + \bar{g}$ و $\omega h' = g'$ داریم:

$$f_z(z) = h'(z) = \frac{\varphi'(z)}{1+\omega(z)}$$

و

$$\overline{f_{\bar{z}}(z)} = g'(z) = \frac{\omega(z)\varphi'(z)}{1+\omega(z)}$$

سپس با استفاده از روش اثبات در قضیه ۵.۲ اثبات قضیه کامل می‌شود. \square

قضیه ۱۰.۲. فرض کنید $f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^\circ$ و $|z| \leq r$. آنگاه برای $\nu = \pi$ یا $\nu = 0$ داریم:

$$|f(z)| \leq \frac{r(3+r^2)}{3(1-r)^3}$$

اگر $\nu = \frac{\pi}{3}$ آنگاه

$$|f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}$$

برهان. با استفاده از برهان قضیه ۶.۲ می‌توان نوشت:

$$f(z) = \int_0^r f_z(\rho e^{i\theta}) e^{i\theta} d\rho + \int_0^r f_{\bar{z}}(\rho e^{i\theta}) e^{-i\theta} d\rho.$$

بنابراین اگر $\nu = \pi$ یا $\nu = 0$

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \int_0^r |f_z(\rho e^{i\theta})| d\rho + \int_0^r |f_{\bar{z}}(\rho e^{i\theta})| d\rho \\ &\leq \int_0^r \frac{1+\rho}{(1-\rho)^4} + \int_0^r \frac{\rho(1+\rho)}{(1-\rho)^4} d\rho \\ &= \frac{r(3+r^2)}{3(1-r)^3} \end{aligned}$$

□

برای حالت $\nu = \frac{\pi}{4}$ مشابه برهان قضیه ۶.۲ است.

۴.۲ کران‌هایی برای $|a_n|$ و $|b_n|$

شیل-اسمال [۱۹] ثابت کرد که اگر $f \in \mathcal{S}_H^\circ$ و $f(\mathbb{D})$ محدب باشد آنگاه

$$|a_n| \leq \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

و

$$|b_n| \leq \frac{(n-1)(2n-1)}{6}$$

که

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n}.$$

قضیه ۱۱.۲. [۸] فرض کنید

$$\psi(z) = a_0 + (\alpha + i\beta)z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

در \mathbb{D} تحلیلی و

$$\operatorname{Re}\{(1-z^2)\psi'(z)\} \geq 0$$

باشد. آنگاه

$$|a_n| \leq \alpha, \quad n = 2, 4, 6, \dots \quad (13.2)$$

$$|a_n| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)\alpha + \frac{1}{n} |\alpha + i\beta|, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (14.2)$$

در نتیجه

$$|a_n| \leq |\psi'(0)|, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (15.2)$$

همچنین اگر $\psi(z) = \frac{1}{1-z}$ باشد آنگاه هر سه نامساوی فوق تبدیل به مساوی می‌شوند.

تعریف ۱۴.۲. فرض کنید $f(z)$ و $g(z)$ توابع تحلیلی در دیسک واحد \mathbb{D} باشند. گوئیم تابع $f(z)$ را زیرترتیب^{۱۰} $g(z)$ و با نماد $f(z) \prec g(z)$ نمایش می‌دهیم هرگاه تابع تحلیلی $\varphi(z)$ روی دیسک واحد \mathbb{D} با $\varphi(0) = 0$ و $|\varphi(z)| < 1$ موجود باشد به طوری که

$$f(z) = g(\varphi(z)), \quad (|z| < 1)$$

قضیه ۱۲.۲. فرض کنید $g(z)$ در دیسک واحد \mathbb{D} تک ارز باشد آنگاه $f(z) \prec g(z)$ اگر و تنها اگر $f(\mathbb{D}) \subset g(\mathbb{D})$ و $f(0) = g(0)$.

قضیه ۱۳.۲. فرض کنید $f \in \mathcal{S}_H^\circ$,

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$$

و $f(\mathbb{D})$ در جهت محور حقیقی محدب و $\varphi(z) = h(z) - g(z)$ در رابطه نرمالیزه (۲.۲) صدق کند، آنگاه برای $n \geq 2$ داریم:

$$|a_n| \leq \frac{n+1}{2}$$

و

$$|b_n| \leq \frac{n-1}{2}.$$

برهان. برای توابع $h(z)$ و $g(z)$ نمایش انتگرالی زیر را می‌توان نوشت:

$$h(z) = \int_0^z \frac{\varphi'(\zeta)}{1-\omega(\zeta)} d\zeta$$

و

$$g(z) = \int_0^z \frac{\varphi'(\zeta)\omega(\zeta)}{1-\omega(\zeta)} d\zeta$$

که در آن

$$\omega(z) = \frac{g'(z)}{h'(z)}$$

حال فرض کنیم

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n z^n$$

و

$$\frac{\omega(z)}{1-\omega(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n z^n$$

لذا

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_0^z [\phi_1 + 2\phi_2\zeta + 3\phi_3\zeta^2 + \dots][\omega_1\zeta + \omega_2\zeta^2 + \omega_3\zeta^3 + \dots] d\zeta \\ &= \int_0^z [\phi_1\omega_1\zeta + (\phi_1\omega_2 + 2\phi_2\omega_1)\zeta^2 + (\phi_1\omega_3 + 2\phi_2\omega_2 + 3\phi_3\omega_1)\zeta^3 + \dots] d\zeta \\ &= \frac{1}{2}(\phi_1\omega_1)z^2 + \frac{1}{3}(\phi_1\omega_2 + 2\phi_2\omega_1)z^3 + \frac{1}{4}(\phi_1\omega_3 + 2\phi_2\omega_2 + 3\phi_3\omega_1)z^4 + \dots \end{aligned}$$

^{۱۰} subordinate

بنابراین چون $f \in \mathcal{S}_H^\circ$ لذا $b_1 = 0$ و بسط g به صورت زیر است.

$$g(z) = b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots$$

با مقایسه بسط g به تساوی‌های زیر می‌رسیم:

$$b_1 = 0$$

$$b_2 = \frac{1}{2} \phi_1 \omega_1$$

$$b_3 = \frac{1}{3} (\phi_1 \omega_2 + 2 \phi_2 \omega_1)$$

⋮

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k \phi_k \omega_{n-k} \quad n \geq 2$$

همچنین برای $h(z)$ داریم:

$$\begin{aligned} h(z) &= \int_0^z \varphi'(\zeta) \frac{1}{1-\omega(\zeta)} d\zeta \\ &= \int_0^z \varphi'(\zeta) \left(\frac{\omega(\zeta)}{1-\omega(\zeta)} + 1 \right) d\zeta \end{aligned}$$

لذا

$$a_n = b_n + \phi_n = \phi_n + \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k \phi_k \omega_{n-k} \right).$$

از طرفی $\left(\frac{\omega(z)}{1-\omega(z)} \right)$ زیر ترتیب به $\left(\frac{z}{1-z} \right)$ است، بنابراین به ازای هر n ، داریم $|\omega_n| \leq 1$.
همچنین طبق قضیه ۱۱.۲ داریم:

$$|\phi_k| \leq |\varphi'(\circ)| = 1$$

حال با استفاده از کران‌های به دست آمده برای ϕ_k و ω_n می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} |b_n| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k \phi_k \omega_{n-k} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k |\phi_k| |\omega_{n-k}| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= \frac{n-1}{2} \end{aligned}$$

به طور مشابه برای $|a_n|$ داریم:

$$\begin{aligned}
 |a_n| &\leq |\phi_n| + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k |\phi_k| \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k |\phi_k| \\
 &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \\
 &= \frac{n+1}{2}
 \end{aligned}$$

□

فصل ۳

ترکیبات خطی از نگاشت‌های همساز شبه کانفرمال محدب

۱.۳ مقدمه

در این فصل ابتدا رده جدید $\mathcal{S}_H(k, \gamma, \phi)$ از نگاشت‌های شبه کانفرمال همساز را معرفی کرده که در آن $\gamma \in [0, \pi)$ ، $k \in [0, 1)$ و ϕ یک تابع تحلیلی است. و در ادامه شرایط کافی برای ترکیبات خطی از نگاشت‌های این رده و تحدب در یک جهت بررسی می‌کنیم. در حالت خاص ثابت می‌کنیم تصویر دیسک واحد تحت ترکیبات خطی در این رده برای انتخاب‌های خاص γ و ϕ محدب هستند.

تعریف ۱.۳. تابع f را همساز K -شبه کانفرمال در \mathbb{D} می‌نامیم اگر $f = h + \bar{g}$ یک نگاشت همساز تک ارز و در شرط زیر صدق کند.

$$\left| \frac{g'(z)}{h'(z)} \right| \leq k < 1 \quad (z \in \mathbb{D})$$

$$K = \frac{1+k}{1-k} \text{ و}$$

تعریف ۲.۳. $\mathcal{S}_H(k)$ را زیر رده‌ای از \mathcal{S}_H° شامل نگاشت‌های K -شبه کانفرمال همساز تعریف می‌کنیم.

اخیرا چندین نویسنده شرایطی را برای نگاشت‌های K -شبه کانفرمال همساز تک ارز بررسی کرده‌اند. ([۱۶، ۱۰، ۹، ۱]).

تعریف ۳.۳. برای $k \in [0, 1)$ ، $\gamma \in [0, \pi)$ و $\phi \in \mathcal{A}$ زیر رده $\mathcal{S}_H(k, \gamma; \phi)$ از \mathcal{S}_H را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathcal{S}_H(k, \gamma; \phi) := \{f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H(k) : h - e^{i\gamma}g = \phi\}$$

برای راحتی می‌نویسیم

$$\mathcal{S}_H(k, 0; \phi) := \mathcal{S}_H^-(k; \phi)$$

و

$$\mathcal{S}_H(k, \frac{\pi}{2}; \phi) := \mathcal{S}_H^+(k; \phi)$$

رده‌های فوق از نگاشت‌های همساز برای انتخاب خاص از ϕ و γ در [۱۵، ۲۴] معرفی و مطالعه شده‌اند.

۲.۳ نتایج اولیه

لم ۱.۳. [۵] تابع همساز جهت نگهدار $f = h + \bar{g}$ در \mathbb{D} یک نگاشت تک ارز روی یک دامنه محدب در جهت محور حقیقی (موهومی) است اگر و تنها اگر $h - g$ یک نگاشت تحلیلی تک ارز روی یک دامنه محدب در جهت محور حقیقی (موهومی) باشد.

لم ۲.۳. [۱۸] تابع همساز جهت نگهدار $f = h + \bar{g}$ در \mathbb{D} یک نگاشت تک ارز روی یک دامنه محدب در جهت γ است اگر و تنها اگر $h - e^{i\gamma}g$ یک نگاشت تحلیلی تک ارز روی یک دامنه محدب در جهت γ باشد.

لم ۳.۳. [۱۷] فرض کنید f یک تابع تحلیلی در \mathbb{D} با $f(0) = 0$ ، $f'(0) \neq 0$ و

$$\kappa(z) = \frac{z}{(1 + ze^{i\theta})(1 + ze^{-i\theta})} \quad (\theta \in \mathbb{R}) \quad (1.3)$$

اگر

$$\operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{\kappa(z)} \right) > 0 \quad (z \in \mathbb{D})$$

آنگاه f در جهت محور حقیقی محدب است.

لم ۴.۳. [۱۷] فرض کنید $\varphi(z)$ یک تابع غیر ثابت تحلیلی در \mathbb{D} باشد. تابع $\varphi(z)$ بر \mathbb{D} تک ارز و در جهت محور موهومی محدب است اگر و تنها اگر اعداد $0 \leq \mu < 2\pi$ و $0 \leq \nu \leq \pi$ موجود باشند به طوری که

$$\operatorname{Re} \left(-ie^{i\mu}(1 - 2ze^{-i\mu} \cos \nu + z^2 e^{-2i\mu})\varphi'(z) \right) \geq 0 \quad (z \in \mathbb{D}) \quad (2.3)$$

لم ۵.۳. فرض کنید $f_j \in S_H(k, \gamma; \phi)$ ($j = 1, 2$). آنگاه انحراف ω از ترکیبات خطی

$$f = tf_1 + (1-t)f_2, \quad (0 \leq t \leq 1)$$

در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$|\omega| = \left| \frac{tg'_1 + (1-t)g'_2}{th'_1 + (1-t)h'_2} \right| \leq k < 1$$

برهان. از آنجایی که $h_j - e^{\gamma i \omega} g_j = \phi$ ($j = 1, 2$) و $g'_j = \omega_j h'_j$ داریم:

$$h'_j = \frac{\phi'}{1 - e^{\gamma i \omega_j}} \quad (j = 1, 2)$$

لذا نگاشت همساز جدید زیر را به دست می‌آوریم:

$$f = tf_1 + (1-t)f_2 = [th_1 + (1-t)h_2] + \overline{[tg_1 + (1-t)g_2]} = h + \bar{g}$$

انحراف $\omega = \frac{g'}{h'}$ در شرط زیر صدق می‌کند.

$$\begin{aligned} |\omega| &= \left| \frac{tg'_1 + (1-t)g'_2}{th'_1 + (1-t)h'_2} \right| = \left| \frac{\frac{t\omega_1\phi'}{1 - e^{\gamma i \omega_1}} + \frac{(1-t)\omega_2\phi'}{1 - e^{\gamma i \omega_2}}}{\frac{t\phi'}{1 - e^{\gamma i \omega_1}} + \frac{(1-t)\phi'}{1 - e^{\gamma i \omega_2}}} \right| \quad (3.3) \\ &= \left| \frac{\frac{t\omega_1}{1 - e^{\gamma i \omega_1}} + \frac{(1-t)\omega_2}{1 - e^{\gamma i \omega_2}}}{\frac{t}{1 - e^{\gamma i \omega_1}} + \frac{1-t}{1 - e^{\gamma i \omega_2}}} \right| \end{aligned}$$

طبق رابطه (۳.۳) نتیجه می‌گیریم $|\omega| \leq k$ اگر و تنها اگر

$$k^2 \left| \frac{t}{1 - e^{\gamma i \omega_1}} + \frac{1-t}{1 - e^{\gamma i \omega_2}} \right|^2 - \left| \frac{t\omega_1}{1 - e^{\gamma i \omega_1}} + \frac{(1-t)\omega_2}{1 - e^{\gamma i \omega_2}} \right|^2 \geq 0$$

فرض کنیم

$$\omega_j = \rho_j e^{i\theta_j}, \quad (0 \leq \rho_j \leq k < 1, \theta_j \in \mathbb{R}; \quad j = 1, 2)$$

$$\Phi := \frac{2t(1-t)}{|1 - e^{\gamma i \omega_1}|^2 |1 - e^{\gamma i \omega_2}|^2} \geq 0$$

پس داریم:

$$\begin{aligned}
 k^2 & \left| \frac{t}{1 - e^{2i\gamma}\omega_1} + \frac{1-t}{1 - e^{2i\gamma}\omega_2} \right|^2 - \left| \frac{t\omega_1}{1 - e^{2i\gamma}\omega_1} + \frac{(1-t)\omega_2}{1 - e^{2i\gamma}\omega_2} \right|^2 \\
 &= \frac{t^2(k^2 - |\omega_1|^2)}{|1 - e^{2i\gamma}\omega_1|^2} + \frac{(1-t)^2(k^2 - |\omega_2|^2)}{|1 - e^{2i\gamma}\omega_2|^2} \\
 &+ 2t(1-t)\operatorname{Re}\left(\frac{k^2 - \omega_1\bar{\omega}_2}{(1 - e^{2i\gamma}\omega_1)(1 - e^{-2i\gamma}\bar{\omega}_2)}\right) \\
 &\geq \frac{2t(1-t)}{|1 - e^{2i\gamma}\omega_1|^2 |1 - e^{2i\gamma}\omega_2|^2} \operatorname{Re}((k^2 - \omega_1\bar{\omega}_2)(1 - e^{-2i\gamma}\bar{\omega}_1)(1 - e^{2i\gamma}\omega_2)) \\
 &= \Phi((k^2 - \rho_1^2\rho_2^2) + \rho_1(\rho_2^2 - k^2)\cos(2\gamma + \theta_1) \\
 &+ \rho_2(\rho_1^2 - k^2)\cos(2\gamma + \theta_2) + \rho_1\rho_2(k^2 - 1)\cos(\theta_2 - \theta_1)) \\
 &\geq \Phi((k^2 - \rho_1^2\rho_2^2) - \rho_1(k^2 - \rho_2^2) - \rho_2(k^2 - \rho_1^2) - \rho_1\rho_2(1 - k^2)) \\
 &= \Phi(k^2 - \rho_1\rho_2)(1 - \rho_1)(1 - \rho_2) \geq 0
 \end{aligned}$$

□ بدین ترتیب اثبات لم ۵.۳ کامل شد.

نتیجه ۱.۳. فرض کنید $f_j \in \mathcal{S}_H(k, \gamma; \phi)$ ($j = 1, 2, \dots, n$). آنگاه انحراف ω از ترکیبات خطی

$$f = t_1 f_1 + t_2 f_2 + \dots + t_n f_n$$

در شرط زیر صدق می‌کند.

$$|\omega| = \left| \frac{t_1 g'_1 + t_2 g'_2 + \dots + t_n g'_n}{t_1 h'_1 + t_2 h'_2 + \dots + t_n h'_n} \right| \leq k < 1$$

به طوری که $0 \leq t_j \leq 1$ و $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$.

۳.۳ نتایج اصلی

قضیه ۱.۳. فرض کنید $f_j = h_j + \bar{g}_j \in \mathcal{S}_H(k, \gamma; \phi)$ ($j = 1, 2$) اگر ϕ در جهت γ محدب باشد آنگاه

$$f = t f_1 + (1-t) f_2 \in \mathcal{S}_H(k, \gamma; \phi) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

در جهت γ محدب است.

برهان. طبق لم ۵.۳ می‌دانیم که انحراف ω از $f = t f_1 + (1-t) f_2$ در شرط $|\omega| \leq k$ صدق می‌کند. از آنجایی که $h_j - e^{2i\gamma} g_j = \phi$ ($j = 1, 2$) داریم:

$$\begin{aligned}
 h - e^{2i\gamma} g &= [t h_1 + (1-t) h_2] - e^{2i\gamma} [t g_1 + (1-t) g_2] \\
 &= t(h_1 - e^{2i\gamma} g_1) + (1-t)(h_2 - e^{2i\gamma} g_2) = \phi
 \end{aligned}$$

که طبق فرض در جهت γ محدب است.

بنابراین طبق لم ۲.۳ تابع $f \in \mathcal{S}_H(k, \gamma; \phi)$ و در جهت γ محدب است. \square

نتیجه ۲.۳. فرض کنید $f_j = h_j + \bar{g}_j \in \mathcal{S}_H(k, \gamma; \phi)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) اگر ϕ در جهت γ محدب باشد، آنگاه

$$f = \sum_{j=1}^n t_j f_j \in \mathcal{S}_H(k, \gamma; \phi) \quad (0 \leq t_j \leq 1, \sum_{j=1}^n t_j = 1)$$

در جهت γ محدب است.

قضیه ۲.۳ (وانگ ۱). فرض کنید $f_j = h_j + \bar{g}_j \in \mathcal{S}_H$ و $h_j + \bar{g}_j = \frac{z}{1-z}$ برای $(j = 1, 2)$. آنگاه

$$f_t = t f_1 + (1-t) f_2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

در جهت محور حقیقی محدب است.

یادآوری ۱.۳. اگر در نتیجه ۲.۳ قرار دهیم $n = 2$ ، $\gamma = 0$ و $\phi = \frac{z}{1-z}$ آنگاه قضیه وانگ [۲۲] به دست می‌آید.

نتیجه ۳.۳. فرض کنید $f_j = h_j + \bar{g}_j \in \mathcal{S}_H(k, \gamma; \phi)$ ($j = 1, 2$) به طوری که

$$\phi(z) = \int_0^z \frac{e^{i\gamma} d\zeta}{(1 + \zeta e^{i\theta})(1 + \zeta e^{-i\theta})} \quad (\theta \in \mathbb{R}) \quad (4.3)$$

آنگاه

$$f = t f_1 + (1-t) f_2 \in \mathcal{S}_H(k, \gamma; \phi) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

در جهت γ محدب است.

برهان. با به کار بردن $\kappa(z)$ داده شده در (۱.۳) داریم:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{z e^{-i\gamma} (h' - e^{i\gamma} g')}{\kappa(z)} \right) &= \operatorname{Re} \left(\frac{z e^{-i\gamma}}{\kappa(z)} [t(h'_1 - e^{i\gamma} g'_1) + (1-t)(h'_2 - e^{i\gamma} g'_2)] \right) \\ &= t \operatorname{Re} \left(\frac{z e^{-i\gamma} \phi'(z)}{\kappa(z)} \right) + (1-t) \operatorname{Re} \left(\frac{z e^{-i\gamma} \phi'(z)}{\kappa(z)} \right) \\ &= t + (1-t) = 1 > 0 \end{aligned}$$

بنابراین طبق لم ۳.۳ می‌بینیم که $e^{-i\gamma}(h - e^{i\gamma}g)$ در جهت محور حقیقی محدب است، از این رو تابع $h - e^{i\gamma}g$ در جهت γ محدب است. لذا طبق لم ۲.۳ و ۵.۳ نتیجه می‌گیریم که \square $f \in \mathcal{S}_H(k, \gamma; \phi)$ در جهت γ محدب است.

نتیجه ۴.۳. فرض کنید $\theta \in (0, \pi)$ ، $\alpha \in [-1, 1]$ و $A, B \geq 0$ ، $A + B \neq 0$. همچنین $f_j = h_j + \overline{g_j} \in S_H^+(k; \phi)$ ($j = 1, 2$) به طوری که

$$\phi = A \frac{z(1-\alpha z)}{1-z^2} + B \frac{1}{2i \sin \theta} \log \left(\frac{1+ze^{i\theta}}{1+ze^{-i\theta}} \right) \quad (5.3)$$

آنگاه $f = tf_1 + (1-t)f_2 \in S_H^+(k; \phi)$ ($0 \leq t \leq 1$) در جهت محور موهومی محدب است. برهان. با در نظر گرفتن $\mu = \nu = \frac{\pi}{2}$ در رابطه (۲.۳) داریم:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}((1-z^2)\phi'(z)) &= A \operatorname{Re} \left(\frac{1-2\alpha z+z^2}{1-z^2} \right) + B \operatorname{Re} \left(\frac{1-z^2}{(1+ze^{i\theta})(1+ze^{-i\theta})} \right) \\ &= A \frac{(1-|z|^2)(1-2\alpha \operatorname{Re}(z) + |z|^2)}{|1-z^2|^2} \\ &\quad + B \frac{(1-|z|^2)(1+2 \cos \theta \operatorname{Re}(z) + |z|^2)}{|1+ze^{i\theta}|^2 |1+ze^{-i\theta}|^2} > 0. \end{aligned}$$

بنابراین طبق لم ۴.۳ تابع ϕ در جهت محور موهومی محدب است. از این رو طبق قضیه ۱.۳ با $\gamma = \frac{\pi}{2}$ می بینیم که $f \in S_H(k; \phi)$ در جهت محور موهومی محدب است. \square

نتیجه ۵.۳. فرض کنید $A, B \geq 0$ ، $A + B \neq 0$ و $c \in [-2, 2]$. همچنین $f_j = h_j + \overline{g_j} \in S_H^-(k; \phi)$ ($j = 1, 2$) به طوری که

$$\phi = A \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) + B \frac{z}{1+cz+z^2} \quad (6.3)$$

آنگاه $f = tf_1 + (1-t)f_2 \in S_H^-(k; \phi)$ ($0 \leq t \leq 1$) در جهت محور حقیقی محدب است. قضیه ۳.۳. فرض کنید $f_1 = h_1 + \overline{g_1} \in S_H(k, \gamma; \psi)$ و $f_2 = h_2 + \overline{g_2} \in S_H(k, \gamma; \phi)$. اگر $\operatorname{Re}(k^\gamma h_1' \overline{h_2'} - g_1' \overline{g_2'}) \geq 0$

و $t\phi + (1-t)\psi$ در جهت γ محدب باشد. آنگاه $f = tf_1 + (1-t)f_2 \in S_H(k)$ ($0 \leq t \leq 1$) در جهت γ محدب است. برهان. برای $g_j' = \omega_j h_j'$ با شرط این که $|g_j'| \leq k < 1$ ($j = 1, 2$) داریم:

$$|\omega| = \left| \frac{tg_1' + (1-t)g_2'}{th_1' + (1-t)h_2'} \right| = \left| \frac{t\omega_1 h_1' + (1-t)\omega_2 h_2'}{th_1' + (1-t)h_2'} \right| \quad (7.3)$$

با توجه به فرض داریم:

$$\begin{aligned} &k^\gamma |th_1' + (1-t)h_2'|^2 - |t\omega_1 h_1' + (1-t)\omega_2 h_2'|^2 \quad (8.3) \\ &= t^\gamma |h_1'|^2 (k^\gamma - |\omega_1|^\gamma) + (1-t)^\gamma |h_2'|^2 (k^\gamma - |\omega_2|^\gamma) \\ &\quad + 2t(1-t) \operatorname{Re}((k^\gamma - \omega_1 \overline{\omega_2}) h_1' \overline{h_2'}) \\ &\geq 2t(1-t) \operatorname{Re}(k^\gamma h_1' \overline{h_2'} - g_1' \overline{g_2'}) \geq 0 \end{aligned}$$

از این رو $1 < k \leq |\omega|$.
از آنجایی که

$$h_1 - e^{\gamma} g_1 = \phi$$

و

$$h_2 - e^{\gamma} g_2 = \psi$$

داریم :

$$\begin{aligned} h - e^{\gamma} g &= [th_1 + (1-t)h_2] - e^{\gamma} [tg_1 + (1-t)g_2] \\ &= t(h_1 - e^{\gamma} g_1) + (1-t)(h_2 - e^{\gamma} g_2) = t\phi + (1-t)\psi \end{aligned}$$

که طبق فرض در جهت γ محدب است.

بنابراین طبق لم ۲.۳ می بینیم که $f \in \mathcal{S}_H(k)$ و در جهت γ محدب است. \square

قضیه ۴.۳. فرض کنید $f_1 = h_1 + \overline{g_1} \in \mathcal{S}_H(k, \gamma; \phi)$ و $f_2 = h_2 + \overline{g_2} \in \mathcal{S}_H(k, \gamma + \frac{\pi}{2}; \phi)$ که در آن

$$\phi(z) = \int_0^z \frac{e^{i\theta} d\zeta}{(1 + \zeta e^{i\theta})(1 + \zeta e^{-i\theta})} \quad (\theta \in \mathbb{R}) \quad (9.3)$$

همچنین با فرض این که

$$\operatorname{Re}(k^{\gamma} h_1' \overline{h_2'} - g_1' \overline{g_2'}) \geq 0$$

آنگاه $f = tf_1 + (1-t)f_2 \in \mathcal{S}_H(k)$ ($0 \leq t \leq 1$) در جهت γ محدب است.

برهان. با استفاده از استدلال مشابه برهان قضیه ۳.۳ و طبق روابط (۷.۳) و (۸.۳) می توان به دست آورد که انحراف ω از $f = tf_1 + (1-t)f_2$ در شرط $|\omega| \leq k < 1$ صدق می کند.

حال نشان می دهیم f در جهت γ محدب است. توجه کنید

$$h_2' - e^{\gamma} g_2' = (h_2' + e^{\gamma} g_2') \left(\frac{h_2' - e^{\gamma} g_2'}{h_2' + e^{\gamma} g_2'} \right) = \phi'(z) \left(\frac{1 - e^{\gamma} \omega_2}{1 + e^{\gamma} \omega_2} \right) = \phi'(z) P(z)$$

که در آن

$$P(z) = \frac{1 - e^{\gamma} \omega_2}{1 + e^{\gamma} \omega_2}$$

و $\operatorname{Re}(p(z)) > 0$. با استفاده از $\kappa(z)$ داده شده در (۱.۳) داریم:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{ze^{-i\gamma}(h' - e^{\gamma} g')}{\kappa(z)} \right) &= \operatorname{Re} \left(\frac{ze^{-i\gamma}}{\kappa(z)} [t(h_1' - e^{\gamma} g_1') + (1-t)(h_2' - e^{\gamma} g_2')] \right) \\ &= t \operatorname{Re} \left(\frac{ze^{-i\gamma} \phi'(z)}{\kappa(z)} \right) + (1-t) \operatorname{Re} \left(\frac{ze^{-i\gamma} \phi'(z) P(z)}{\kappa(z)} \right) \\ &= t + (1-t) \operatorname{Re}(P(z)) > 0 \end{aligned}$$

بنابراین طبق لم ۳.۳ می‌بینیم که $e^{-i\gamma}(h - e^{2i\gamma}g)$ در جهت محور حقیقی محذب است. از این رو تابع $h - e^{2i\gamma}g$ در جهت γ محذب است. علاوه بر این طبق لم ۲.۳ و ۵.۳ نتیجه می‌گیریم $f \in S_H(k)$ و در جهت محور γ محذب است. \square

قضیه ۵.۳. فرض کنید $f_j = h_j + \bar{g}_j \in S_H^-(k; \phi)$ ($j = 1, 2$) که در آن

$$\phi(z) = \frac{1}{\gamma} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \quad (z \in \mathbb{D})$$

آنگاه $(0 \leq t \leq 1)$ $f = tf_1 + (1-t)f_2 \in S_H^-(k; \phi)$ و f محذب است.

برهان. با توجه به نتیجه ۵.۳ داریم $f = h + \bar{g} \in S_H^-(k; \phi)$ سپس با استفاده از لم ۲.۳ مجموعه $f(\mathbb{D})$ محذب خواهد بود اگر و تنها اگر تابع تحلیلی $h - e^{2i\theta}g$ در جهت θ که $0 \leq \theta < \pi$ تک ارز و محذب باشند. کفایت نشان دهیم تابع $F_\theta = ie^{-i\theta}(h - e^{2i\theta}g)$ در جهت محور موهومی تک ارز و محذب هستند. توجه کنید که

$$\begin{aligned} h'(z) - g'(z) &= [th'_1(z) + (1-t)h'_2(z)] - [tg'_1(z) + (1-t)g'_2(z)] \\ &= t(h'_1(z) - g'_1(z)) + (1-t)(h'_2(z) - g'_2(z)) \\ &= \frac{1}{1-z^2} \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن $\mu = \nu = \frac{\pi}{4}$ در رابطه ۲.۳ داریم

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}((1-z^2)F'_\theta(z)) &= -\operatorname{Im}(e^{-i\theta}[h'(z) - e^{2i\theta}g'(z)](1-z^2)) \\ &= -\operatorname{Im}([e^{-i\theta}h'(z) - e^{i\theta}g'(z)](1-z^2)) \\ &= -\operatorname{Im}\left([(h'(z) - g'(z)) \cos \theta - i(h'(z) + g'(z)) \sin \theta](1-z^2) \right) \\ &= -\operatorname{Im} \left(\cos \theta - i \sin \theta \frac{h'(z) + g'(z)}{h'(z) - g'(z)} \right) \\ &= \operatorname{Re}(p(z)) \sin \theta \geq 0 \end{aligned}$$

که در آن

$$p(z) = \frac{h'(z) + g'(z)}{h'(z) - g'(z)}$$

و $\operatorname{Re}(P(z)) > 0$. لذا طبق لم ۴.۳ تابع F_θ در جهت محور موهومی محذب و تک ارز است.

نتیجه ۶.۳. فرض کنید $f_j = h_j + \bar{g}_j \in S_H^-(k; \phi)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) که در آن

$$\phi(z) = \frac{1}{\gamma} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \quad (z \in \mathbb{D})$$

آنگاه

$$f = \sum_{j=1}^n t_j f_j \in S_H^-(k; \phi) \quad (0 \leq t_j \leq 1, \quad \sum_{j=1}^n t_j = 1)$$

و $f(\mathbb{D})$ محدب است .

قضیه ۴.۳. فرض کنید $(j = 1, 2)$ $f_j = h_j + \bar{g}_j \in \mathcal{S}_H^+(k; \phi)$ که در آن

$$\phi(z) = \frac{z}{1-z} \quad (z \in \mathbb{D})$$

آنگاه

$$f = tf_1 + (1-t)f_2 \in \mathcal{S}_H^+(k; \phi) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

و $f(\mathbb{D})$ محدب است.

برهان. طبق نتیجه ۴.۳ با در نظر گرفتن $A = 1$ ، $B = 0$ و $\alpha = -1$ داریم:

$$f = h + \bar{g} \in \mathcal{S}_H^+(k; \phi).$$

به عبارت دیگر ثابت می کنیم که $f(\mathbb{D})$ محدب است. طبق لم ۲.۳ کافی است نشان دهیم تابع $h - e^{i\theta}g$ در جهت θ محدب است به طوری که $\theta \in [0, \pi)$. تابع $h - e^{i\theta}g$ در جهت θ محدب است اگر و تنها اگر $F_\theta = ie^{-i\theta}(h - e^{i\theta}g)$ در جهت محور موهومی محدب باشد. توجه کنید که

$$\begin{aligned} h'(z) + g'(z) &= [th_1'(z) + (1-t)h_2'(z)] + [tg_1'(z) + (1-t)g_2'(z)] \\ &= t(h_1'(z) + g_1'(z)) + (1-t)(h_2'(z) + g_2'(z)) \\ &= \frac{1}{(1-z)^2} \end{aligned}$$

برای $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ ، با در نظر گرفتن $\mu = \nu = 0$ در رابطه (۲.۳) داریم:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(-iF_\theta'(z)(1-z)^2) &= \operatorname{Re}(e^{-i\theta}[h'(z) - e^{i\theta}g'(z)](1-z)^2) \\ &= \operatorname{Re}([e^{-i\theta}h'(z) - e^{i\theta}g'(z)](1-z)^2) \\ &= \operatorname{Re}([(h'(z) - g'(z)) \cos \theta - i(h'(z) + g'(z)) \sin \theta](1-z)^2) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{h'(z) - g'(z)}{h'(z) + g'(z)} \cos \theta - i \sin \theta \right) \\ &= \operatorname{Re}(P(z)) \cos \theta \geq 0 \end{aligned}$$

که در آن

$$P(z) = \frac{h'(z) - g'(z)}{h'(z) + g'(z)}$$

در $0 < \operatorname{Re}(P(z)) < 1$ صدق می کند.

بنابراین طبق لم ۴.۳ تابع F_θ برای $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ در جهت محور موهومی محدب است، اگر در لم ۴.۳ قرار دهیم $\mu = \gamma = \pi$ برای تابع F_θ با $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ به نتیجه مطلوب می رسیم. \square

۳۸ ترکیبات خطی از نگاشت‌های همساز شبه کانفرمال محدب

نتیجه ۷.۳. فرض کنید $f_j = h_j + \bar{g}_j \in S_H^+(k; \phi)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) با

$$\phi(z) = \frac{z}{1-z} \quad (z \in \mathbb{D})$$

آنگاه

$$f = \sum_{j=1}^n t_j f_j \in S_H^+(k; \phi) \quad (0 \leq t_j \leq 1, \quad \sum_{j=1}^n t_j = 1)$$

و $f(\mathbb{D})$ محدب است.

فصل ۴

ترکیبات خطی نگاشت‌های تک ارز همساز

۱.۴ مقدمه

در فصل‌های قبل از تکنیک برش برای ساخت یک تابع همساز تک ارز $f = h + \bar{g}$ استفاده شد. این تکنیک تنها روش به دست آوردن یک تابع همساز تک ارز نیست اگر دو تابع از رده S_H داشته باشیم تحت شرایطی خاص از ترکیبات خطی این دو تابع، به تابع همساز تک ارز جدیدی خواهیم رسید.

یادآوری ۱.۴. فرض کنید $f_1 = h_1 + \bar{g}_1$ و $f_2 = h_2 + \bar{g}_2$ متعلق به رده S_H باشند. برای $0 \leq \lambda \leq 1$ ،
 $f_3 = \lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2$ را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$\begin{aligned} f_3 &= \lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2 = \lambda(h_1 + \bar{g}_1) + (1 - \lambda)(h_2 + \bar{g}_2) \\ &= (\lambda h_1 + (1 - \lambda) h_2) + (\lambda \bar{g}_1 + (1 - \lambda) \bar{g}_2) \\ &= (\lambda h_1 + (1 - \lambda) h_2) + \overline{(\lambda g_1 + (1 - \lambda) g_2)} = h_3 + \bar{g}_3 \end{aligned}$$

در ادامه به بررسی شرایط لازم برای همساز شدن ترکیب خطی از دو تابع همساز می‌پردازیم.

لم ۱.۴. [۲۱] فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{C}$ یک دامنه محدب در جهت محور حقیقی و P یک تابع پیوسته حقیقی در Ω باشد. آنگاه نگاشت $\omega \mapsto \omega + p(\omega)$ در Ω تک ارز است اگر و تنها اگر موضعا تک ارز باشد. اگر نگاشت $\omega \mapsto \omega + p(\omega)$ تک ارز باشد آنگاه بردش در جهت محور حقیقی محدب است.

۲.۴ نتایج اصلی

قضیه ۱.۴. فرض کنید $f_j = h_j + \bar{g}_j \in S_H$ ($j = 1, 2$) با $\omega_1 = \omega_2$. هم‌چنین $F_j = h_j - g_j$ ($j = 1, 2$) برای هر $z \in \mathbb{D}$ در شرط $\operatorname{Re}\left(\frac{z f'_j(z)}{\varphi(z)}\right) > 0$ صدق کند. به طوری که φ در رابطه (۱.۳) داده شده است. آنگاه

$$f_3 = t f_1 + (1-t) f_2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

تک ارز و در جهت محور حقیقی محدب است.

برهان. با توجه به این که $g'_1 = \omega_1 h'_1$ و $g'_2 = \omega_2 h'_2$ داریم:

$$\omega_3 = \frac{g'_3}{h'_3} = \frac{t g'_1 + (1-t) g'_2}{t h'_1 + (1-t) h'_2} = \frac{t \omega_1 h'_1 + (1-t) \omega_2 h'_2}{t h'_1 + (1-t) h'_2} = \omega_1$$

از آنجا که $f_1 \in S_H$ با توجه به رابطه بالا $|\omega_3| = |\omega_1| < 1$. در نتیجه f_3 موضعا تک ارز می‌باشد. حال نشان می‌دهیم f_3 در جهت محور حقیقی محدب است. از آنجایی که $f_1, f_2 \in S_H$ ، لذا توابع $F_j = h_j - g_j$ ($j = 1, 2$) در \mathbb{D} تحلیلی هستند. طبق فرض داریم

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z(h'_j - g'_j)}{\varphi(z)}\right) > 0 \quad (z \in \mathbb{D}; j = 1, 2)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\frac{z(h'_3 - g'_3)}{\varphi(z)}\right) &= \operatorname{Re}\left(\frac{z}{\varphi(z)}[t(h'_1 - g'_1) + (1-t)(h'_2 - g'_2)]\right) \\ &= t \operatorname{Re}\left(\frac{z}{\varphi(z)}(h'_1 - g'_1)\right) + (1-t) \operatorname{Re}\left(\frac{z}{\varphi(z)}(h'_2 - g'_2)\right) > 0 \end{aligned}$$

از این رو طبق لم ۲.۳ می‌بینیم که $h_3 - g_3$ در جهت محور حقیقی محدب است. بعلاوه طبق قضیه ۲.۲ نتیجه می‌گیریم f_3 تک ارز و در جهت محور حقیقی محدب است. \square

نتیجه ۱.۴. فرض کنید

$$f_j = h_j + \bar{g}_j \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n)$$

با $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_n$ نگاشت‌های تک ارز همساز باشند، همچنین

$$F_j(z) = h_j - g_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

برای هر $z \in \mathbb{D}$ در شرط زیر صدق کنند.

$$\operatorname{Re} \left(\frac{z f_j'(z)}{\varphi(z)} \right) > 0$$

که در آن φ تابع (۱.۳) می‌باشد.

آنگاه برای $(j = 1, 2, \dots, n)$ $0 \leq t_j \leq 1$ ، $\sum_{j=1}^n t_j = 1$ ، تابع $F = t_1 f_1 + \dots + t_n f_n$ در جهت محور حقیقی تک ارز و محدب است.

قضیه ۲.۴. فرض کنید $f_j = h_j + \bar{g}_j \in \mathcal{S}_H$ ($j = 1, 2$) با $\operatorname{Re} \left((1 - \omega_1 \bar{\omega}_2) h_1' \bar{h}_2' \right) \geq 0$ نگاشت تک ارز همساز و محدب در جهت محور حقیقی باشد.

آنگاه $(0 \leq t \leq 1)$ در جهت محور حقیقی محدب است.

برهان. از آنجایی که f_1 و f_2 متعلق به رده \mathcal{S}_H می‌باشند برای $(j = 1, 2)$ ω_j که در آن $\omega_j = \frac{g_j'}{h_j'}$ است داریم:

$$|\omega_j| < 1 \quad (j = 1, 2)$$

از طرفی برای ω_3 می‌توان نوشت:

$$|\omega_3| = \left| \frac{t g_1' + (1-t) g_2'}{t h_1' + (1-t) h_2'} \right| = \frac{|t \omega_1 h_1' + (1-t) \omega_2 h_2'|}{|t h_1' + (1-t) h_2'|}. \quad (1.4)$$

حال نشان می‌دهیم $|\omega_3| < 1$.

$$\begin{aligned} |t h_1' + (1-t) h_2'|^2 - |t \omega_1 h_1' + (1-t) \omega_2 h_2'|^2 &= (t h_1' + (1-t) h_2') \overline{(t h_1' + (1-t) h_2')} \\ &\quad - (t \omega_1 h_1' + (1-t) \omega_2 h_2') \overline{(t \omega_1 h_1' + (1-t) \omega_2 h_2')} \\ &= t^2 (1 - |\omega_1|^2) |h_1'|^2 + (1-t)^2 (1 - |\omega_2|^2) |h_2'|^2 \\ &\quad + 2t(1-t) \operatorname{Re}((1 - \omega_1 \bar{\omega}_2) h_1' \bar{h}_2') > 0 \end{aligned}$$

لذا $|\omega_3| < 1$ و f_3 موضعا تک ارز است.

حال نشان می‌دهیم $f_3 \in \mathcal{S}_H$.

$$f_1(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \bar{z}^n \in \mathcal{S}_H$$

$$f_2(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \bar{z}^n \in \mathcal{S}_H$$

داریم

$$\begin{aligned} f_3(z) &= t f_1(z) + (1-t) f_2(z) \\ &= t \left(z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \bar{z}^n \right) + (1-t) \left(z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \bar{z}^n \right) \\ &= z + \sum_{n=2}^{\infty} [t a_n + (1-t) A_n] z^n + \sum_{n=1}^{\infty} [t b_n + (1-t) B_n] \bar{z}^n \in \mathcal{S}_H \end{aligned}$$

طبق قضیه ۲.۲ می‌دانیم که $F_j = h_j - g_j$ ($j = 1, 2$) در \mathbb{D} تک ارز و $\Omega_j = f_j(\mathbb{D})$ دامنه‌های محدب در جهت محور حقیقی هستند. بنابراین

$$f_j = F_j + 2 \operatorname{Re}(g_j)$$

و

$$f_j [F_j^{-1}(\omega)] = \omega + 2 \operatorname{Re}(g_j(F_j^{-1}(\omega))) = \omega + q_j(\omega) \quad (j = 1, 2)$$

به طوری که

$$q_j(\omega) \quad (j = 1, 2)$$

توابع پیوسته حقیقی می‌باشند. از طرفی می‌دانیم

$$\begin{aligned} f_3 [F_3^{-1}(\omega)] &= t f_1 [F_1^{-1}(\omega)] + (1-t) f_2 [F_2^{-1}(\omega)] \\ &= t [\omega + q_1(\omega)] + (1-t) [\omega + q_2(\omega)] \\ &= \omega + [t q_1(\omega) + (1-t) q_2(\omega)] \\ &= \omega + q_3(\omega) \end{aligned}$$

در Ω تک ارز است. لذا طبق لم ۱.۴، f_3 در Ω تک ارز و برد آن یک دامنه محدب در جهت محور حقیقی می‌باشد. \square

قضیه ۳.۴. فرض کنید $f_j = h_j + \bar{g}_j \in \mathcal{S}_H$ ($j = 1, 2$) و $h_j + g_j = \frac{z}{1-z}$ باشد. آنگاه

$$f_3 = t f_1 + (1-t) f_2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

تک ارز و در جهت محور حقیقی محدب است.

برهان. از آنجایی که $h_j + g_j = \frac{z}{1-z}$ و $g'_j = \omega_j h'_j$ برای $j = 1, 2$ داریم:

$$h'_j = \frac{1}{(1 + \omega_j)(1 - z)^2} \quad (j = 1, 2)$$

لذا

$$|\omega_3| = \left| \frac{tg'_1 + (1-t)g'_2}{th'_1 + (1-t)h'_2} \right| = \left| \frac{t\omega_1 h'_1 + (1-t)\omega_2 h'_2}{th'_1 + (1-t)h'_2} \right| \quad (2.4)$$

$$= \frac{|t\omega_1 + (1-t)\omega_2 + \omega_1\omega_2|}{|1 + (1-t)\omega_1 + t\omega_2|}$$

حال نشان می‌دهیم $|\omega_3| < 1$.
فرض کنیم

$$\omega_j := \rho_j(\cos\theta_j + i \sin\theta_j) \quad (0 \leq \rho_j < 1; j = 1, 2)$$

لذا

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \left| 1 + (1-t)\omega_1 + t\omega_2 \right|^2 - \left| t\omega_1 + (1-t)\omega_2 + \omega_1\omega_2 \right|^2 \\ &= \left| [1 + (1-t)\rho_1 \cos\theta_1 + t\rho_2 \cos\theta_2] + i[(1-t)\rho_1 \sin\theta_1 + t\rho_2 \sin\theta_2] \right|^2 \\ &\quad - \left| [t\rho_1 \cos\theta_1 + (1-t)\rho_2 \cos\theta_2 + \rho_1\rho_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)] \right. \\ &\quad \left. + i[t\rho_1 \sin\theta_1 + (1-t)\rho_2 \sin\theta_2 + \rho_1\rho_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)] \right|^2 \\ &= [1 + (1-t)\rho_1 \cos\theta_1 + t\rho_2 \cos\theta_2]^2 + [(1-t)\rho_1 \sin\theta_1 + t\rho_2 \sin\theta_2]^2 \\ &\quad - [t\rho_1 \cos\theta_1 + (1-t)\rho_2 \cos\theta_2 + \rho_1\rho_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)]^2 \\ &\quad + [t\rho_1 \sin\theta_1 + (1-t)\rho_2 \sin\theta_2 + \rho_1\rho_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)]^2 \\ &= [1 + (1-t)^2\rho_1^2 + t^2\rho_2^2 \\ &\quad + 2t(1-t)\rho_1\rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 2(1-t)\rho_1 \cos\theta_1 + 2t\rho_2 \cos\theta_2] \\ &\quad - [t^2\rho_1^2 + (1-t)^2\rho_2^2 + \rho_1^2\rho_2^2 \\ &\quad + 2t(1-t)\rho_1\rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + 2(1-t)\rho_1\rho_2^2 \cos\theta_1 + 2t\rho_1^2\rho_2 \cos\theta_2] \\ &= [2\rho_2 \cos\theta_2(1 - \rho_1^2) - 2\rho_1 \cos\theta_1(1 - \rho_2^2) + 2(\rho_2^2 - \rho_1^2)]t \\ &\quad + (1 - \rho_2^2)(\rho_1^2 + 2\rho_1 \cos\theta_1 + 1) \end{aligned}$$

می‌دانیم که $\phi(t)$ یک تابع پیوسته و یکنواخت از t در بازه $[0, 1]$ است.
علاوه بر این مشاهده می‌کنیم

$$\phi(0) = (1 - \rho_2^2)(\rho_1^2 + 2\rho_1 \cos\theta_1 + 1) = (1 - \rho_2^2)[(\rho_1 + \cos\theta_1)^2 + \sin^2\theta_1] > 0$$

و

$$\phi(1) = (1 - \rho_1^2)[(\rho_2 + \cos\theta_2)^2 + \sin^2\theta_2] > 0$$

لذا

$$\forall t \in [0, 1] \implies \phi(t) > 0$$

بنابراین $|\omega_3| < 1$ و f_3 موضعا تک ارز است. حال ثابت می‌کنیم f_3 در جهت محور حقیقی محدب است. توجه کنید

$$\begin{aligned} h'_j - g'_j &= (h'_j + g'_j) \left(\frac{h'_j - g'_j}{h'_j + g'_j} \right) \\ &= (h'_j + g'_j) \left(\frac{1 - \omega_j}{1 + \omega_j} \right) = \frac{P_j}{(1 - z)^2} \quad (j = 1, 2) \end{aligned}$$

که

$$P_j = \frac{1 - \omega_j}{1 + \omega_j} \quad (j = 1, 2)$$

در شرط $\text{Re}(P_j) > 0$ صدق می‌کند.

بنابراین با جایگزینی

$$\varphi(z) := \frac{z}{(1 - z)^2}$$

داریم:

$$\begin{aligned} \text{Re} \left(\frac{z(h'_3 - g'_3)}{\varphi(z)} \right) &= \text{Re} \left(\frac{z}{\varphi(z)} [t(h'_1 - g'_1) + (1 - t)(h'_2 - g'_2)] \right) \\ &= t \cdot \text{Re}((1 - z)^2 (h'_1 - g'_1)) + (1 - t) \text{Re}((1 - z)^2 (h'_2 - g'_2)) \\ &= t \cdot \text{Re}(P_1) + (1 - t) \text{Re}(P_2) > 0 \end{aligned}$$

بنابراین طبق لم ۳.۳ می‌دانیم که $h_3 - g_3$ در جهت محور حقیقی محدب است. لذا طبق قضیه ۳.۲ نتیجه می‌گیریم f_3 تک ارز و در جهت محور حقیقی محدب است. \square

نتیجه ۲.۴. فرض کنید $f_j = h_j + \bar{g}_j \in \mathcal{S}_H$ ($j = 1, 2$) با

$$h_j + g_j = \frac{1}{2i \sin \theta} \log \left(\frac{1 + ze^{i\theta}}{1 + ze^{-i\theta}} \right) \quad (j = 1, 2; 0 < \theta < \pi)$$

آنگاه

$$f_3 = t f_1 + (1 - t) f_2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

تک ارز و محدب در جهت محور حقیقی است.

۳.۴ دو مثال

در این بخش به بررسی دو مثال که نتایج اصلی را روشن تر می‌کند می‌پردازیم.

مثال ۱.۴. فرض کنید $f_2 = z + \frac{1}{4}z^3$, $f_1 = z - \frac{1}{4}z^2$ به ترتیب با انحراف $\omega_1 = -z$ و $\omega_2 = z^2$ باشند به طوری که $f_1, f_2 \in \mathcal{S}_H$. آنگاه شرایط قضیه ۲.۴ را برای $f_3 = t f_1 + (1 - t) f_2$ با انحراف

$\omega_3 = -tz + (1-t)z^2$ بررسی می‌کنیم.

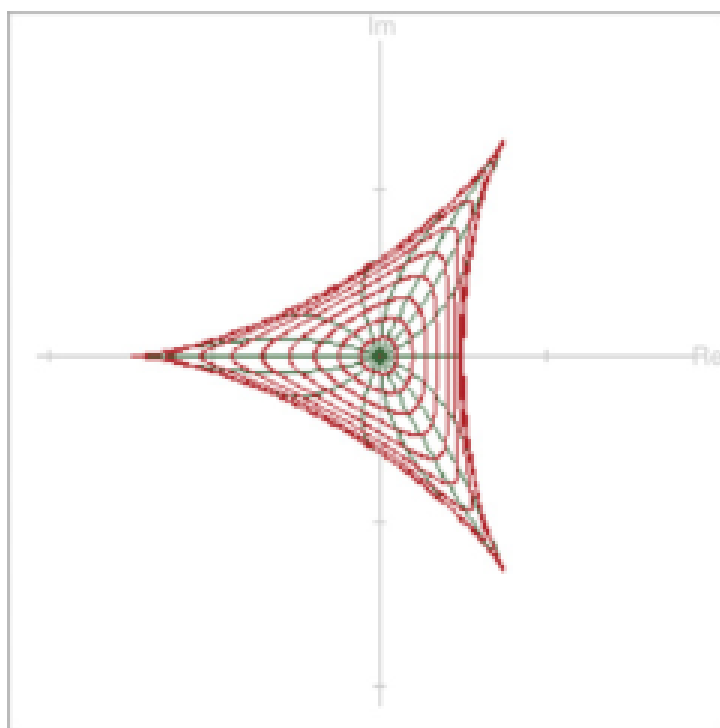
داریم:

$$|\omega_3| \leq t|z| + (1-t)|z|^2 < t|z| + (1-t)|z| < |z| < 1$$

لذا f_3 موضعا تک ارز است هم‌چنین

$$\operatorname{Re}\left((1 - \omega_1 \bar{\omega}_2) h_1' \bar{h}_2'\right) = \operatorname{Re}(1 + |z|^2 \bar{z}) \geq 0$$

بنابراین f_1 و f_2 در شرایط قضیه ۲.۴ صدق می‌کنند. لذا f_3 تک ارز و در جهت محور حقیقی محدب است. تصویری از \mathbb{D} تحت f_1 و f_2 به ترتیب در شکل ۱.۴، ۲.۴ و تصویری از \mathbb{D} تحت f_3 با $t = \frac{1}{4}$ در شکل ۳.۴ نشان داده شده است.

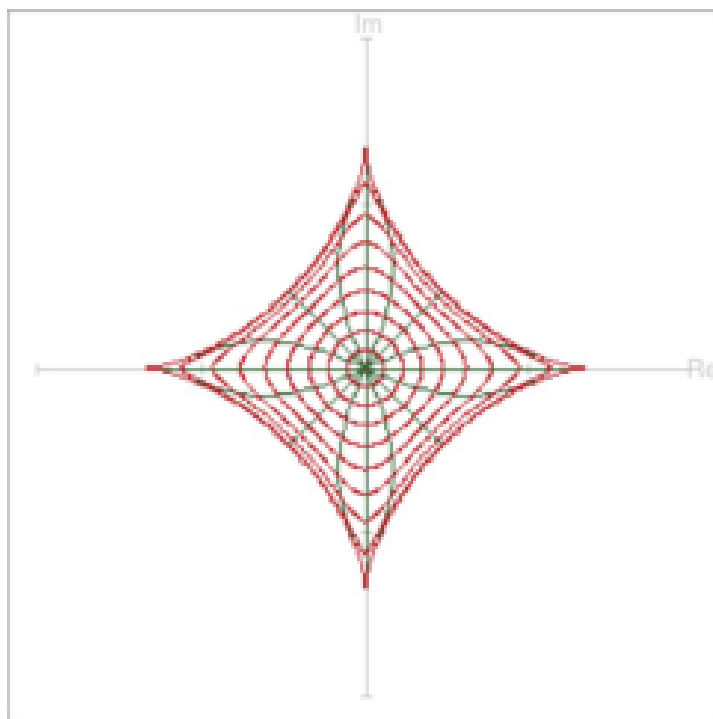


شکل ۱.۴: تصویری از \mathbb{D} تحت $f_1 = z - \frac{1}{4}z^2$

مثال ۲.۴. فرض کنید $f_1 = h_1 + \bar{g}_1$ به طوری که $h_1 + g_1 = \frac{z}{1-z}$ و $\omega_1 = z$ آنگاه

$$h_1 = \frac{1}{4} \log \frac{1+z}{1-z} + \frac{1}{2} \frac{z}{1-z}$$

$$g_1 = -\frac{1}{4} \log \frac{1+z}{1-z} + \frac{1}{2} \frac{z}{1-z}$$



شکل ۲.۴: تصویری از \mathbb{D} تحت $f_2 = z - \frac{1}{3}z^3$.

هم‌چنین فرض کنید $f_2 = h_2 + \overline{g_2}$ به طوری که $h_2 + g_2 = \frac{z}{1-z}$ و $\omega_2 = -z^2$.
 آنگاه

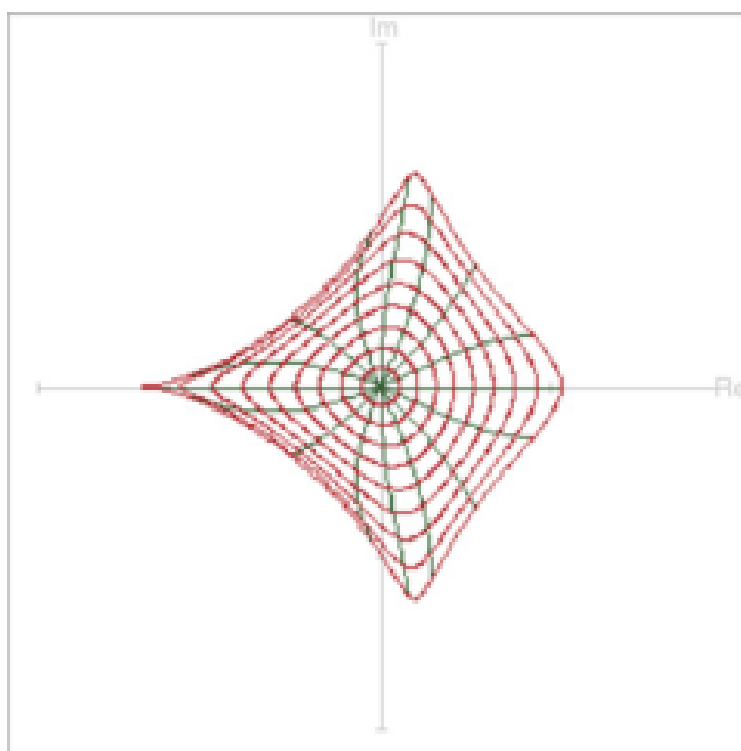
$$h_2 = \frac{1}{\lambda} \log \frac{1+z}{1-z} + \frac{\frac{3}{4}z - \frac{1}{4}z^2}{(1-z)^2},$$

$$g_2 = -\frac{1}{\lambda} \log \frac{1+z}{1-z} + \frac{\frac{1}{4}z - \frac{1}{4}z^2}{(1-z)^2}$$

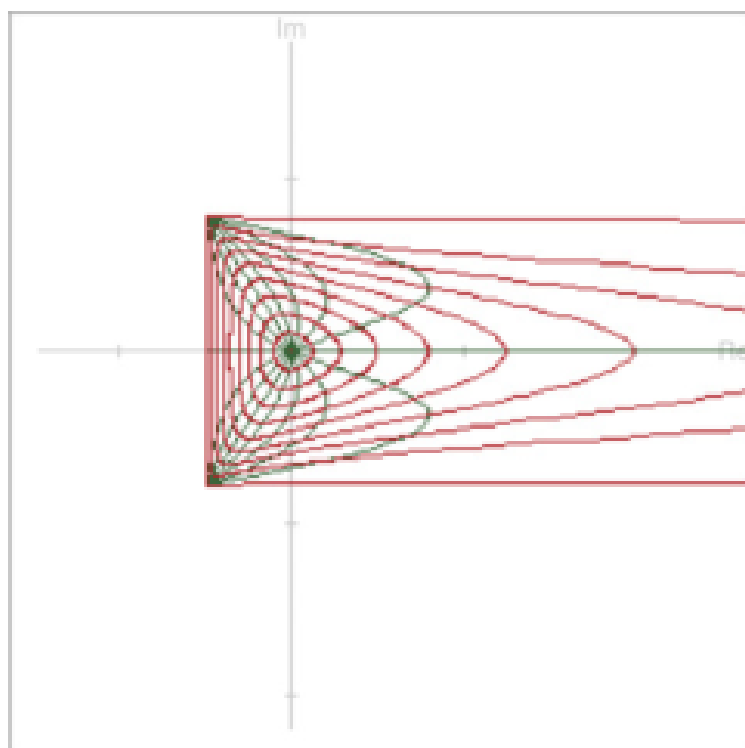
از آنجایی که f_1 و f_2 در شرایط قضیه ۳.۴ صدق می‌کنند (شکل ۴.۴ و ۵.۴)، لذا

$$f_3 = t f_1 + (1-t) f_2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

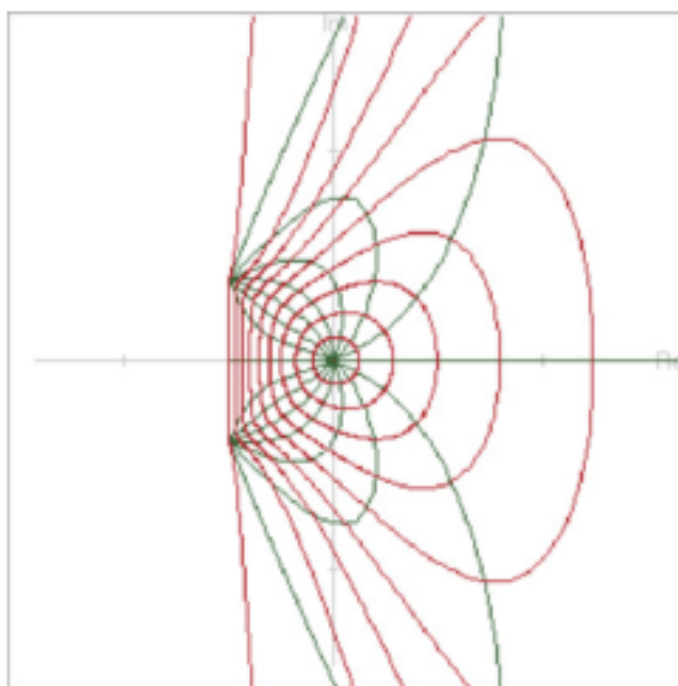
در جهت محور حقیقی محدب است، تصویر \mathbb{D} تحت f_3 با $t = \frac{1}{4}$ در شکل ۶.۴ نشان داده شده است.



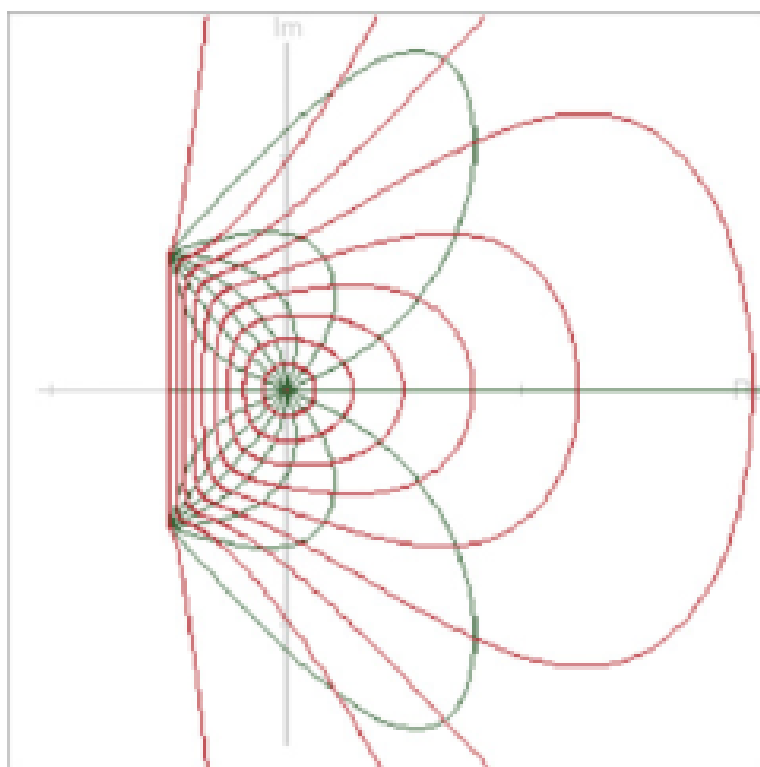
شکل ۳.۴: تصویری از \mathbb{D} تحت $f_3 = \frac{1}{3}f_1 + \frac{2}{3}f_2$.



شکل ۴.۴: تصویری از \mathbb{D} تحت f_1 .



شکل ۵.۴: تصویری از \mathbb{D} تحت f_2 .



شکل ۶.۴: تصویری از \mathbb{D} تحت $f_3 = \frac{1}{3}f_1 + \frac{1}{3}f_2$.

مراجع

- [1] Ahuja, Om P. "Use of theory of conformal mappings in harmonic univalent mappings with directional convexity." *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society* 35.3 (2012): 775-784.
- [2] Boyd, Z., et al. "Univalence of convolutions of harmonic mappings." *Applied Mathematics and Computation* 234 (2014): 326-332.
- [3] Bshouty, D., Lyzzaik, A., and Weitsman, A. "On the boundary behaviour of univalent harmonic mappings." *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math* 37 (2012): 135-147.
- [4] Chen, Sh., Ponnusamy, S., and Wang, X. "Integral means and coefficient estimates on planar harmonic mappings." *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math* 37 (2012): 69-79.
- [5] Clunie, J., and Sheil-Small, T. "Harmonic univalent functions. *Ann. Acad. Sci. Fenn.*" (1984).
- [6] Duren, P. "Harmonic mappings in the plane (Cambridge University Press, 2004), 0 521 64121 7 (hardback)£ 40." *Edinburgh Mathematical Society. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* 49.1 (2006): 253.
- [7] Hengartner, W., and Schober, G. "Univalent harmonic functions." *Transactions of the American Mathematical Society* 299.1 (1987): 1-31.
- [8] Hengartner, W., and Schober, G. "On Schlicht mappings to domains convex in one direction." *Commentarii Mathematici Helvetici* 45.1 (1970): 303-314.
- [9] Huang, X. Z. "Harmonic quasiconformal homeomorphism of the unit disk." *Chinese Ann. Math.(Chin. Ser.) A* 29 (2008): 519-524.

- [10] Kalaj, D., and Pavlovic, M., "Boundary correspondence under quasiconformal harmonic diffeomorphisms of a half-plane." *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ*. 30.1 (2005): 159-165.
- [11] Liulan, L., and Ponnusamy, S., "Injectivity of sections of univalent harmonic mappings." *Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications* 89 (2013): 276-283.
- [12] Lisbeth, E., Schaubroeck."Growth, distortion and coefficient bounds for plane harmonic mappings convex in one direction." *Journal of Mathematics* 31.2 (2001): 1-15.
- [13] MacGregor, T. H., "The univalence of a linear combination of convex mappings." *Journal of the London Mathematical Society* 1.1 (1969): 210-212.
- [14] Muir, S., "Harmonic mappings convex in one or every direction." *Computational Methods and Function Theory* 12.1 (2012): 221-239.
- [15] Nagpal, S., and Ravichandran, V., "Univalence and convexity in one direction of the convolution of harmonic mappings." *Complex Variables and Elliptic Equations* 59.9 (2014): 1328-1341.
- [16] Pavlovic, M., "Boundary correspondence under harmonic quasiconformal homeomorphisms of the unit disk." *Annales-Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica* 27.2 (2002): 365-372.
- [17] Royster, W. C., and Mr Ziegler. "Univalent functions convex in one direction." *Notices of The American Mathematical Society* 23 (1976): 339-345.
- [18] Sun, Y., Rasila, A., and Jiang, Y., "Linear combinations of harmonic quasiconformal mappings convex in one direction." *Kodai Mathematical Journal* 39.2 (2016): 366-377.
- [19] Sheil-Small, T., "Constants for planar harmonic mappings." *Journal of the London Mathematical Society* 2.2 (1990): 237-248.
- [20] Thomas, R., Subramanian, Kg., and M., Jahanairi Jay. "Goodman-Ronning-type harmonic univalent functions." *Kyungpook Mathematical Journal* 41.1 (2001): 45-45.
- [21] Wang, Z., Liu, Z., and Li, Y., "On the linear combinations of harmonic univalent mappings." *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 400.2 (2013): 452-459.
- [22] Wang, Z., Liu, Z., and Li, Y., "On the linear combinations of harmonic univalent mappings." *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 400.2 (2013): 452-459.

- [23] Wang, Z., Liu, Z., and Li, Y., "On convolutions of harmonic univalent mappings convex in the direction of the real axis." *J. Appl. Anal* 6.1 (2016): 145-155.
- [24] Wang, Z., Shi, L., and Jiang, Y., "Construction of harmonic univalent mappings convex in one direction." *Scientia Sinica Mathematica* 44.2 (2014): 139-150.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Sharp	اکید
Analytic dilatation	انحراف تحلیلی
Taylor-Maclaurin expansion	بسط سری تیلور-مکلورن
Analytic Fuction	تابع تحلیلی
Convex Fuction	تابع محدب
Harmonic Fuction	تابع همساز
Starlike Function	تابع ستاره‌گون
Univalent Function	تابع تک‌ارز
Bounded Function	تابع کراندار
Coefficient estimate	تخمین ضرایب
Linear Combination	ترکیبات خطی
Sense-preserving	جهت نگهدار
Simply connected domain	دامنه همبند ساده
Unit disk	دیسک واحد
Subordination	زیر ترتیب
Subclass	زیر رده
Jacobian	ژاکوبین
Shear construction	ساختار برش
Complex number	عدد مختلط
Differential operator	عملگر مشتق
Distortion theorem	قضیه انحراف
Growth theorem	قضیه رشد
Coefficient bound	کران ضرایب
Schwarz lemma	لم شوارتس
convex in real axis direction	محدب در جهت محور حقیقی

Differentiable	مشتق پذیر
Locally univalent	موضعا تک ارز
Conformal mapping	نگاشت هم‌دیس
Harmonic mapping	نگاشت هم‌ساز
Identity mapping	نگاشت همانی
Quasiconformal mapping	نگاشت شبه هم‌دیس
Extreme Point	نقطه بحرانی
Complex	مختلط
Order	مرتبه

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Analytic Function	تابع تحلیلی
Analytic dilatation	انحراف تحلیلی
Bounded Function	تابع کراندار
Coefficient estimate	تخمین ضرایب
Convex Fuction	تابع محدب
Complex number	عدد مختلط
Coefficient bound	کران ضرایب
Convex in real axis direction	محدب در جهت محور افقی
Conformal mapping	نگاشت هم‌مدیس
Complex	مختلط
Differential operator	عملگر مشتق
Distortion theorem	قضیه انحراف
Differentiable	مشتق پذیر
Extreme Point	نقطه بحرانی
Growth theorem	قضیه رشد
Harmonic Fuction	تابع هم‌ساز
Harmonic mapping	نگاشت هم‌ساز
Jacobian	ژاکوبین
Linear Combination	ترکیبات خطی
Locally univalent	موضعا تک ارز
Order	مرتبه
Quasiconformal mapping	نگاشت شبه هم‌مدیس
Identity mapping	نگاشت همانی
Sense-preserving	جهت نگه‌دار
Starlike Function	تابع ستاره‌گون

Shear construction	ساختار برش
Sharp	اکید
Simply connected domain	دامنه همبند ساده
Subordination	زیر ترتیب
Subclass	زیر رده
Schwarz lemma	لم شوارتز
Taylor-Maclaurin expansion	بسط سری تیلور-مکلورن
Univalent Function	تابع تک‌ارز
Unit disk	دیسک واحد

Abstract

In this theses we introduce a classes $\mathcal{S}_H, \mathcal{S}_H^0$ of harmonic conformal mappings and class $\mathcal{S}_H(\kappa, \gamma, \phi)$ of harmonic quasiconformal mappings, Suffcient conditions for the linear combinations of mappings in such classes to be in a similar class, and convex in a given direction, are established. we find bounds for $|f_z(z)|, |f_{\bar{z}}(z)|$ and $|f_{(z)}|$. we examine normalized harmonic functions convex in the direction of either the real or the imaginary axis.

keywords: Analytic Functions, Starlike Functions, Univalent Functions, Convex Functions, Harmonic Functions, Analytic Dilatation, Sense-Preserving, Conformal Mapping, Coefficient Bound, Linear Combination.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Math Analysis

**On harmonic univalent mappings convex in
one direction**

By: Sara Nezamparast

Supervisor

Ahmad Motamed nezhad

September 2017