





دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

پایان نامه کارشناسی ارشد

عدد افراز و پوشش خوشه‌ای گراف‌ها

نگارنده: شیما طاهری

استاد راهنما

دکتر میثم علیشاهی

استاد مشاور

دکتر عبدالله آل هوز

شهریور ۱۳۹۶

تقدیم به بهترین حامیان زندگی ام، پدر و مادرم،
تقدیم به آموزگاران‌ی که برایم زندگی بودن و انسان بودن را معنا کردند،
و تقدیم به همه آنان که دوستان دارم.

سپاس‌گزاری

شکر و سپاس معبودی را که عشق به آموختن را در دل انسان‌ها به ودیعه نهاد. خداوند را سپاس می‌گوییم که به من فرصت داد تا عمر خود را در راه تحصیل علم و دانش سپری کنم. از پدر و مادر عزیزم که از کودکی، شور دانستن و لذت کشف و جستجو را در من بیدار کردند و استقامت و تلاش را به من آموختند و در تمام این سالها، با فراهم کردن آرامش روحی، بسیاری از دشواری‌ها را بر من آسان نمودند، با تمام وجود، قدر دانم. به پاس احترام به مقام والای معلم، در مقابل تمام اساتید بزرگواری که در محضرشان کسب فیض نموده و کویر تشنه وجودم را از چشمه جوشان معرفتشان سیراب ساخته‌ام، سر تعظیم فرود آورده و مراتب سپاس‌گزاری خود را از ایشان ابراز می‌دارم. از استاد راهنمای بردبارم، **جناب آقای دکتر میثم علیشاهی**، که تمام روزهایی که تحت نظارت ایشان مشغول به تحقیق بودم سرشار از آموختن توأم با علم و اخلاق بود، نهایت تشکر را دارم. در پرتو پر از امید ایشان بود که تمام دلسردی‌ها رنگ می‌باخت و در سایه وجود خستگی ناپذیرشان، پرسش‌های گاه و بی‌گاهم پاسخ می‌یافت. در آخر هم از استاد مشاورم، **جناب آقای دکتر عبدالله آل‌هوز** برای راهنمایی‌ها و یاری بی‌دریغشان صمیمانه سپاسگزارم.

شکر خدا که هر چه طلب کردم از خدا برشتهای همت خود کامران شدم

تعهد نامه

اینجانب شیما طاهری دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان عدد افراز و پوشش خوشه‌ای گراف‌ها، تحت راهنمایی میثم علیشاهی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

شیما طاهری

شهریور ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

یک افراز خوشه‌ای از گراف G یک مجموعه از خوشه‌های G است که هر یال G را دقیقاً یکبار در برمی‌گیرند. کوچکترین اندازه یک افراز خوشه‌ای از G را عدد افراز خوشه‌ای G می‌نامیم. همچنین به یک مجموعه از خوشه‌های G که هر یال G را حداقل یکبار پوشش می‌دهند، یک پوشش خوشه‌ای G می‌نامیم. در این پایان‌نامه به بررسی و بیان نتایج در خصوص عدد خوشه‌ای و پوشش خوشه‌ای گراف‌ها می‌پردازیم. در این راستا قضیه‌های اردیش-گودمن-پوسا و بورن-اردیش را بیان و اثبات می‌کنیم همچنین عدد خوشه‌ای بعضی از گراف‌های خاص را محاسبه می‌کنیم.

کلمات کلیدی: خوشه، افراز خوشه‌ای، عدد افراز خوشه‌ای، پوشش خوشه‌ای، مکمل گراف

فهرست مطالب

م	فهرست تصاویر	
س	فهرست جداول	
۱	۱ مقدمات و تعاریف	
۱	۱.۱ مقدمه	۱
۱	۲.۱ مفاهیم اولیه	۱
۹	۲ افراز خوشه‌ای	
۹	۱.۲ مقدمه	۹
۱۰	۲.۲ قضیه اردیش-گودمن-پوسا	۱۰
۱۲	۳.۲ سیستم‌های اشتاینر، صفحه‌های تصویری و افرازهای خوشه‌ای	۱۲
۱۳	۴.۲ قضیه بورن-اردیش	۱۳
۱۶	۵.۲ مکمل یک خوشه	۱۶
۱۶	۶.۲ قضیه دونالد-پولمن	۱۶
۱۸	۷.۲ قضیه اردیش-فوردی-اردمن	۱۸
۲۰	۸.۲ مکمل گراف‌های کوچک	۲۰
۲۲	۹.۲ مکمل مسیره‌ها، دورها و تطابق کامل	۲۲
۲۴	۱۰.۲ مکمل جنگل	۲۴
۲۸	۱۱.۲ مکمل گراف با حداکثر درجه کرانداری	۲۸
۳۳	۳ پوشش خوشه‌ای	
۳۳	۱.۳ مقدمه	۳۳
۳۳	۲.۳ گراف متقاطع و گراف کنسر	۳۳
۳۵	۳.۳ پوشش خوشه‌ای گراف‌های کامل چند بخشی	۳۵
۳۶	۴.۳ قضیه اردیش-کو-رادو و پوشش خوشه‌ای	۳۶
۳۷	۵.۳ خانواده‌های t -متوازن	۳۷
۳۹	۶.۳ مکمل مسیره‌ها، دورها و تطابق کامل	۳۹

۴۰	دورها و مسیرهای القایی در گراف کنسر	۷.۳
۴۳	مکمل گرافها با حداکثر درجه دو	۸.۳
۴۵	مکمل جنگلها	۹.۳
۴۷		مراجع	
۵۱		آ کران پایین برای $\sigma_t(s)$	
۵۳	یک رابطه بازگشتی	۱.آ
۵۵		واژهنامه فارسی به انگلیسی	
۵۷		واژهنامه انگلیسی به فارسی	

فهرست تصاویر

۳	G و $\langle S \rangle$.	۱.۱
۴	گراف‌های یکرخت G و G' .	۲.۱
۷	گراف کنسر $K_{5:2}$.	۳.۱
۷	گراف کنسر $K_{5:2}$ (گراف پترسن)	۴.۱
۱۳	صفحه فانو .	۱.۲

فهرست جداول

۳۹ ۱.۳ جدول ۱

فصل ۱

مقدمات و تعاریف

۱.۱ مقدمه

در این فصل برخی از تعاریف و مفاهیم اولیه و همچنین قضیه‌هایی از نظریه گراف که در فصل‌های بعد به آن‌ها نیاز داریم را بیان می‌کنیم. تمام اصطلاحات و تعاریف نظریه گراف در این پایان‌نامه برگرفته از مراجع [۱۲] و [۳۰] است.

۲.۱ مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۲.۱. منظور از یک گراف^۱ یک سه‌تایی $(V(G), E(G), \Psi(G))$ است که در آن $V(G)$ یک مجموعه ناتهی از عناصر به نام رئوس و $E(G)$ مجموعه‌ای از یال‌ها و $\Psi(G)$ تابع وقوع است که به هر یال G یک جفت نامرتب (نه لزوماً مجزا) از رأس‌های G را متناظر می‌کند.

اگر e یک یال و v_1 و v_2 رأس‌های آن باشند که $\Psi_G(e) = v_1 v_2$ گویند e را به v_1 و v_2 وصل می‌کند و این دو رأس را دو انتهای e نامند. از این پس گراف را به‌طور خلاصه به صورت $G = (V, E)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۲.۱. دو رأس u و v را مجاور^۲ گوئیم هرگاه بین آن‌ها یالی موجود باشد.

تعریف ۳.۲.۱. یک رأس را در گراف G تنها^۳ گوئیم هرگاه هیچ یالی متصل با آن نباشد. مجموعه رئوس

^۱Graph

^۲Adjacent

^۳Single

تنها از گراف G را با $isol(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۲.۱. طوقه^۴ در یک گراف یالی است که دو رأس انتهایی‌اش برهم منطبق باشند. همچنین، اگر در یک گراف بین دو رأس دلخواه u و v دو یال یا بیش از دو یال وجود داشته باشند، آن‌گاه آن‌ها را **یال‌های چندگانه**^۵ می‌نامیم.

تعریف ۵.۲.۱. گرافی که هیچ طوقه‌ای نداشته باشد و بین هر دو رأس آن بیش از یک یال موجود نباشد را **گراف ساده**^۶ می‌نامیم.

در این پایان‌نامه، منظور از گراف G ، گراف ساده G است.

تعریف ۶.۲.۱. تعداد رئوس گراف G را **مرتبه**^۷ گراف نامیم و با $n(G)$ یا n نشان می‌دهیم.

تعریف ۷.۲.۱. **گراف تهی (پوچ)**^۸ گرافی است، شامل $n \geq 1$ رأس، که مجموعه یال‌های آن تهی است.

تعریف ۸.۲.۱. گرافی که یک رأس داشته باشد، **بدیهی**^۹ و سایر گراف‌ها را **غیر بدیهی**^{۱۰} می‌نامیم.

تعریف ۹.۲.۱. اگر مجموعه رأس‌های یک گراف، متناهی باشد گراف مذکور را **متناهی**^{۱۱} می‌نامند در غیر این صورت گراف **نامتناهی**^{۱۲} است.

تعریف ۱۰.۲.۱. یک **زیرگراف**^{۱۳} از گراف G ، گرافی است مانند H بطوریکه $E(H) \subseteq E(G)$ و همچنین $V(H) \subseteq V(G)$.

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنید G یک گراف با مجموعه رئوس V و $S \subseteq V$ باشد. زیرگرافی از G که مجموعه رئوس آن S باشد و یال‌هایی از G در آن باشند که هر دو نقطه پایانی آنها متعلق به S است را **زیرگراف القایی**^{۱۴} توسط S می‌نامیم و با نماد $\langle S \rangle$ نشان می‌دهیم. برای نمونه در شکل ۱.۱، اگر گراف سمت راست G و $S = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ ، آن‌گاه گراف سمت چپ $\langle S \rangle$ خواهد بود.

تعریف ۱۲.۲.۱. تعداد یال‌های مرتبط با رأس v در گراف G را **درجه**^{۱۵} رأس v گوئیم و اگر یال مذکور طوقه باشد در محاسبه درجه رأس دو بار به‌شمار می‌آید. درجه رأس v را با نماد $\deg(v)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۲.۱. **ماکزیمم درجه** رئوس یک گراف را با $\Delta(G)$ یا Δ و **مینیمم درجه** رئوس را با $\delta(G)$ یا δ نمایش می‌دهیم.

^۴ Loop

^۵ Multiple edges

^۶ Simple graph

^۷ Order

^۸ Empty graph

^۹ Trivial graph

^{۱۰} Nontrivial graph

^{۱۱} Finite graph

^{۱۲} Infinite graph

^{۱۳} Subgraph

^{۱۴} Induced subgraph

^{۱۵} Degree



شکل ۱.۱: G و $\langle S \rangle$.

تعریف ۱۴.۲.۱. یک گشت^{۱۶} به طول k در گراف G یک دنباله متناوب $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$ از رأس‌ها و یال‌ها است به طوری که به ازای $i = 1, 2, \dots, k$ $e_i = v_{i-1}v_i$ یک یال باشد.

تعریف ۱۵.۲.۱. گشتی که در آن هیچ یالی تکرار نشده باشد را گذر^{۱۷} می‌نامیم.

تعریف ۱۶.۲.۱. یک مسیر^{۱۸} گشتی است که هیچ رأس تکراری نداشته باشد. یک مسیر را در یک گراف به صورت فهرست مرتبی از رأس‌های متمایز v_0, v_1, \dots, v_n در نظر می‌گیریم به طوری که $v_{i-1}v_i$ به ازای هر $1 \leq i \leq n$ یک یال باشد. یک مسیر n رأسی را با P_n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۷.۲.۱. یک دور^{۱۹} گشت بسته‌ای به طول حداقل یک است که در آن رأس ابتدایی و رأس انتهایی بر یکدیگر منطبق هستند و هیچ رأس تکراری نداریم. یک دور n رأسی را با C_n نمایش می‌دهیم.

تعداد یال‌های موجود در یک گشت، گذر، مسیر یا دور را طول آن می‌نامیم.

تعریف ۱۸.۲.۱. گرافی که بین هر دو رأس آن یک مسیر وجود داشته باشد را **گراف همبند**^{۲۰} می‌نامیم. گرافی که همبند نباشد، را **ناهمبند**^{۲۱} می‌نامیم و هر یک از اجزای همبند آن را یک مؤلفه می‌نامیم. بنابراین گراف $G = (V, E)$ ناهمبند است اگر و تنها اگر بتوان مجموعه V را به دو مجموعه ناتهی V_1 و V_2 چنان افراز کرد که هیچ یالی در E به صورت $\{x, y\}$ که $x \in V_1$ و $y \in V_2$ وجود نداشته باشد. گراف همبند است اگر و تنها اگر فقط یک مؤلفه داشته باشد.

تعریف ۱۹.۲.۱. **گراف دوبخشی**^{۲۲} گرافی است که مجموعه رأس‌های آن به دو زیر مجموعه X و Y چنان افراز شود، که یک سر تمام یال‌های G در X و سر دیگر آن‌ها در Y باشد. یک گراف دوبخشی با بخش‌های X و Y ، که در آن هر رأس X ، به هر رأس Y وصل شده باشد، گراف دوبخشی کامل نامیده می‌شود. اگر $|X| = m$ و $|Y| = n$ ، آن‌گاه گراف دوبخشی کامل را با $K_{m,n}$ نمایش می‌دهیم. شکل؟؟ گراف $K_{2,4}$ را نشان می‌دهد.

تعریف ۲۰.۲.۱. گراف G را **منتظم**^{۲۳} گوییم هرگاه درجه تمام رئوس با هم برابر باشند. اگر درجه تمام رئوس r باشد، آن‌گاه گراف را r -منتظم می‌نامیم.

^{۱۶} Walk

^{۱۷} Trail

^{۱۸} Path

^{۱۹} Cycle

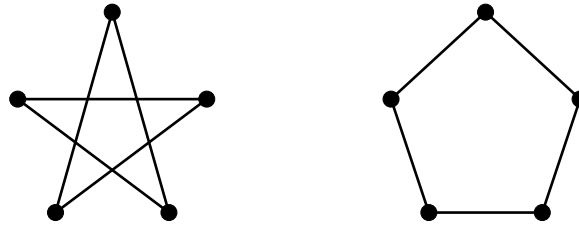
^{۲۰} Connected graph

^{۲۱} Disconnected graph

^{۲۲} Bipartite graph

^{۲۳} Regular graph

تعریف ۲۱.۲.۱. دو گراف $G = (V, E)$ و $G' = (V', E')$ را **یکریخت**^{۲۴} گوئیم هرگاه تابع یک به یک و پوشای $f : V(G) \rightarrow V(G')$ موجود باشد که اگر $uv \in E(G)$ آن گاه $f(u)f(v) \in E(G')$ دو گراف یکریخت G و G' را با نماد $G \cong G'$ نشان می‌دهیم. برای مثال گراف‌های شکل زیر یکریخت هستند.



شکل ۲.۱: گراف‌های یکریخت G و G' .

تعریف ۲۲.۲.۱. گرافی که در آن هر دو رأس متمایز توسط یک یال به یکدیگر متصل شده باشند، **گراف کامل**^{۲۵} نامیده می‌شود. یک گراف کامل n رأسی را با K_n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۳.۲.۱. فرض کنید G گرافی n رأسی باشد. **مکمل**^{۲۶} (متمم) گراف G را با \bar{G} نشان می‌دهیم و بدین صورت تعریف می‌کنیم، $V(G) = V(\bar{G})$ و هر دو رأس مانند u و v در \bar{G} مجاور هستند اگر و تنها اگر در G مجاور نباشند. توجه کنید که مکمل گراف کامل، گراف تهی است و مکمل گراف کامل دوبخشی، اجتماع دو گراف کامل است.

تعریف ۲۴.۲.۱. برای هر $k \geq 1$ درخت یکریخت با یک گراف دوبخشی $K_{1,k}$ را **ستاره**^{۲۷} می‌نامیم و با نماد $S_{1,k}$ یا همان نماد $K_{1,k}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۵.۲.۱. یک گراف فاقد دور را **جنگل**^{۲۸} گوئیم.

تعریف ۲۶.۲.۱. یک جنگل همبند را یک **درخت**^{۲۹} می‌نامیم. به عبارت دیگر یک گراف همبند فاقد دور را درخت گوئیم. هر رأس از درجه یک در یک درخت را **برگ**^{۳۰} می‌نامیم.

تعریف ۲۷.۲.۱. زیرمجموعه S از رأس‌های گراف G را یک **پوشش رأسی**^{۳۱} می‌نامیم هرگاه حداقل یکی از نقاط پایانی هر یال در G در S باشد. کوچکترین اندازه یک پوشش رأسی در G را عدد پوششی رأسی G نامیم و با نماد $\alpha_0(G)$ نمایش می‌دهیم.

^{۲۴} Isomorphic

^{۲۵} Complete graph

^{۲۶} Complementary

^{۲۷} Star

^{۲۸} Forest

^{۲۹} Tree

^{۳۰} Leaf

^{۳۱} Vertex covering

تعریف ۲۸.۲.۱. زیرمجموعه M از یال‌های گراف G را یک **تطابق**^{۳۲} گوییم هرگاه هیچ دو یالی در M رأس مشترک نداشته باشند. اگر M یک تطابق در G باشد و x رأسی روی یکی از یال‌های M باشد، آن‌گاه گوییم M ، x را اشباع می‌کند. بزرگترین اندازه یک تطابق در G را عدد تطابقی می‌نامیم و با $\mu(G)$ نمایش می‌دهیم. یک تطابق از اندازه $\mu(G)$ را تطابق ماکزیمم یا $\mu(G)$ -مجموعه می‌نامیم.

تعریف ۲۹.۲.۱. اگر هر رأس از گراف G توسط تطابق M اشباع شود آن‌گاه M را یک **تطابق کامل** می‌نامیم. به وضوح هر تطابق کامل، یک تطابق ماکزیمم نیز است.

تعریف ۳۰.۲.۱. یک **مجموعه مستقل**^{۳۳} در گراف G ، مجموعه‌ای از رئوس می‌باشد که هیچ دو رأس از آن مجاور نباشند.

تعریف ۳۱.۲.۱. فرض کنید $A \neq \emptyset$ باشد، تابع $f : V(G) \rightarrow A$ را یک **رنگ آمیزی**^{۳۴} رأسی برای گراف G می‌نامیم و A را مجموعه رنگ‌ها می‌نامیم. رنگ آمیزی f را معتبر نامیم، هرگاه برای هر دو رأس مجاور x و y داشته باشیم $f(x) \neq f(y)$.
گراف G را k -رنگ پذیر نامیم هرگاه یک رنگ آمیزی معتبر f موجود باشد که $k = |f(V(G))|$. عدد رنگی گراف G عبارت است از مینیمم مقدار k ای که G ، k -رنگ پذیر باشد و آن را با $\chi(G)$ نشان می‌دهیم. توجه شود که رأس‌های هم‌رنگ در یک رنگ آمیزی معتبر گراف G ، تشکیل یک مجموعه مستقل می‌دهند.

تعریف ۳۲.۲.۱. گراف G با مجموعه رئوس $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ را در نظر بگیرید. یک زیرگراف کامل از G را یک **خوشه**^{۳۵} می‌نامیم.

تعریف ۳۳.۲.۱. یک **افراز خوشه‌ای**^{۳۶} از G یک مجموعه از خوشه‌های G است که این خوشه‌ها روی هم رفته هر یال G را فقط یکبار دربرگیرد.

تعریف ۳۴.۲.۱. کوچکترین اندازه یک افراز خوشه‌ای از G **عدد افراز خوشه‌ای**^{۳۷} G نامیده می‌شود و با $cp(G)$ نشان داده می‌شود. یک افراز خوشه‌ای از G با سایز $cp(G)$ به حداقل افراز خوشه‌ای از G اشاره می‌کند. توجه داشته باشید که حداقل افراز خوشه‌ای شامل خوشه‌هایی با سایز یک و گراف تهی نمی‌شود.

تعریف ۳۵.۲.۱. فرض کنید G یک گراف باشد. یک **پوشش خوشه‌ای**^{۳۸} برای یال‌های G ، خانواده‌ای از خوشه‌ها مانند C است به طوری که هر یال از G در حداقل یک عضو از C قرار دارد.

^{۳۲} Matching^{۳۳} Independent set^{۳۴} Coloring^{۳۵} Clique^{۳۶} Clique partitions^{۳۷} Clique partition number^{۳۸} Clique Covering

تعریف ۳۶.۲.۱. کوچکترین اندازه یک پوشش خوشه‌ای از G عدد پوشش خوشه‌ای G ^{۳۹} نامیده می‌شود و با $cc(G)$ نشان داده می‌شود. این عدد همواره موجود است زیرا مجموعه یال‌های G یک پوشش خوشه‌ای برای G تشکیل دهند.

تعریف ۳۷.۲.۱. یک گراف بدون مثلث^{۴۰} گرافی بدون جهت است که هیچ سه رأس آن تشکیل مثلث ندهند. معادل گراف‌های بدون مثلث می‌تواند گراف‌هایی که عدد خوشه‌ای آن‌ها حداکثر ۲ است، گراف‌هایی که کوچکترین دور در آن‌ها حداقل ۴ است یا گراف‌های بدون دور ۳ تایی باشد.

تعریف ۳۸.۲.۱. یک افزاز خوشه‌ای بدیهی^{۴۱} گفته می‌شود اگر شامل یک خوشه واحد باشد در غیر این صورت غیر بدیهی^{۴۲} است.

تعریف ۳۹.۲.۱. یک پادزنجیر^{۴۳} یک خانواده \mathcal{F} از مجموعه‌ها است به طوری که در \mathcal{F} برای هر $F \neq G$ ، $F \not\subseteq G$ است.

تعریف ۴۰.۲.۱. \mathcal{F} را یک پادزنجیر متقاطع^{۴۴} گوئیم اگر پاد زنجیری از مجموعه‌های F_i باشد به طوری که برای همه F_i, F_j ها در \mathcal{F} ، $F_i \cap F_j \neq \emptyset$ باشد.

تعریف ۴۱.۲.۱. گراف کنسر^{۴۵} برای گراف $G = (V, E)$ گرافی است که در آن به هر رأس از گراف یک مجموعه نظیر می‌شود به طوری که دو رأس متمایز مجاور هستند اگر و تنها اگر مجموعه‌های نظیر آن‌ها مجزا باشند.

برای مثال گراف نمایش داده شده در ۳.۱ را در نظر بگیرید. به هر رأس $v_i \in V(G)$ یک مجموعه A_i نظیر شده است با این خاصیت که رئوس v_i و v_j مجاور هستند اگر و تنها اگر $A_i \cap A_j = \emptyset$. اعداد صحیح و مثبت n و k که $n \geq 2k$ داده شده‌اند. گراف کنسر با پارامترهای n و k که با نماد $K_{n:k}$ نمایش داده می‌شود. گرافی است که مجموعه رئوس آن $[n]^k$ ، یعنی مجموعه تمام زیرمجموعه‌های k عضوی از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\} := [n]$ است و دو رأس در آن مجاور هستند اگر و تنها اگر مجموعه‌های نظیر آن‌ها مجزا باشند. به عنوان مثال $K_{5:2}$ ، موسوم به گراف پترسن، گرافی است با $|V(K_{5:2})| = \binom{5}{2} = 10$ رأس که در شکل ۴.۱ نشان داده شده است.

^{۳۹} Clique Covering Number

^{۴۰} triangle-free

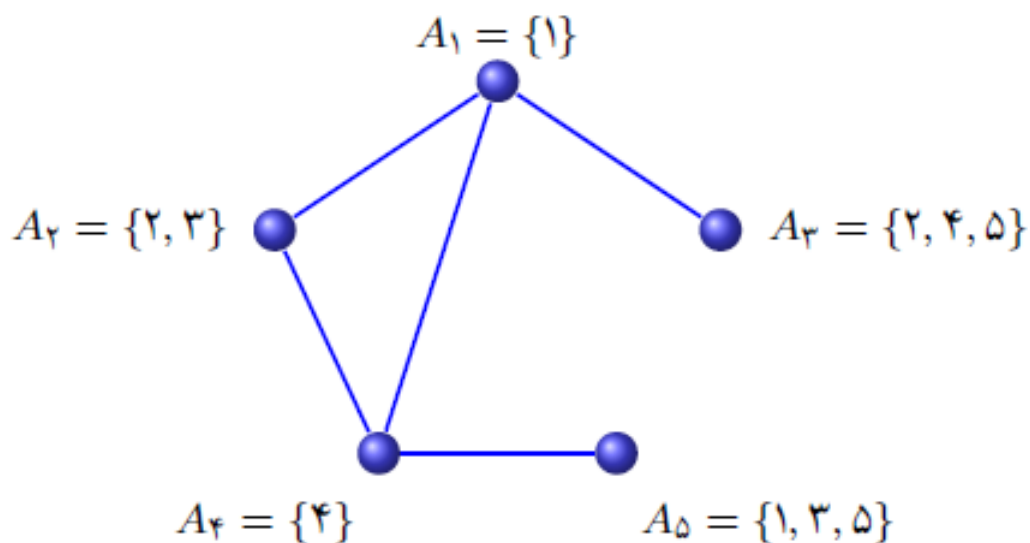
^{۴۱} Trivial

^{۴۲} Non-trivial

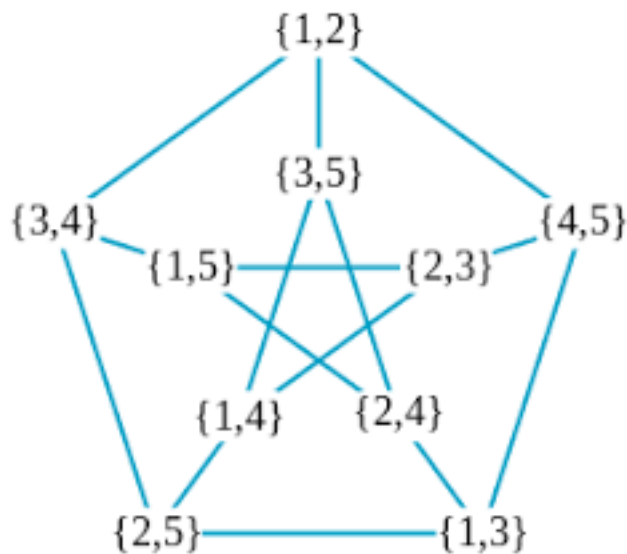
^{۴۳} Antichain

^{۴۴} Intersecting antichain

^{۴۵} Kneser graph



شکل ۳.۱: گراف کنسر $K_{5:2}$



شکل ۴.۱: گراف کنسر $K_{5:2}$ (گراف پترسن)

تعریف ۴۲.۲.۱. فرض کنید $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های $[n]$ باشد. **گراف متقاطع**^{۴۶} $\Omega(\mathcal{S})$ گرافی است با مجموعه رئوس \mathcal{S} که دو رأس آن مجاورند اگر مجموعه‌های متناظر آنها یکدیگر را قطع کنند، یعنی رأس S_i مجاور رأس S_j است اگر و تنها اگر $i \neq j$ و $S_i \cap S_j \neq \emptyset$.

تعریف ۴۳.۲.۱. خانواده \mathcal{F} را t -متوازن^{۴۷} گوئیم هرگاه گراف متقاطع این خانواده یک گراف چند

^{۴۶}Intersection graph

^{۴۷}t-Balanced

بخشی کامل از مرتبه $|\mathcal{F}|$ باشد به گونه‌ای که هریک از بخش‌های آن از اندازه t باشند.

تعریف ۴۴.۲.۱. یک مربع لاتین^{۴۸} از مرتبه n آرایه $n \times n$ از n نماد که در هر سطر و در هر ستون نماد تکراری نداشته باشیم. شکل؟؟ یک مربع لاتین از مرتبه ۴ است.

^{۴۸}Latin squares

فصل ۲

افراز خوشه‌ای

۱.۲ مقدمه

در این فصل قصد داریم مفهوم افراز خوشه‌ای را در گراف‌ها مورد بررسی قرار داده و عدد افراز خوشه‌ای را برای آن‌ها مشخص کنیم.

ارلین^۱ [۲۲] ابتدا مطرح کرد که یک افراز خوشه‌ای از G به یک افراز خوشه‌ای از $G \setminus V$ منجر می‌گردد. به عبارت دیگر، V رأس از هر خوشه از افراز G را حذف کنید اگر با این کار یک خوشه تک رأسی ایجاد شد آن‌گاه این رأس را از افراز خوشه‌ای حذف کنید.

در مقابل، یک افراز خوشه‌ای از $G \setminus V$ به یک افراز خوشه‌ای از G منجر می‌گردد. به عبارت دیگر، یال‌های مجاور به V را به افراز خوشه‌ای از $G \setminus V$ اضافه کنید تا به یک افراز خوشه‌ای از G برسید.

لم ۱.۱.۲. برای گراف G و رأس $v \in V(G)$ داریم:

$$cp(G) - \deg(v) \leq cp(G \setminus v) \leq cp(G),$$

این لم می‌تواند به صورت زیر تعمیم داده شود.

لم ۲.۱.۲. اگر H یک زیرگراف القایی از G باشد آن‌گاه

$$cp(G) - (|E(G)| - |E(H)|) \leq cp(H) \leq cp(G),$$

^۱Orlin

همچنین اگر H یک زیرگراف از G باشد، آن‌گاه برای هر $n \geq |V(G)|$ داریم

$$cp(K_n \setminus H) \leq cp(K_n \setminus G) + |E(G)| - |E(H)| \quad (*)$$

برهان. قرار دهید $t = cp(H)$ ، فرض کنید یال‌های H را با t خوشه افراز کرده‌ایم. اکنون هر یک از یال‌های G که در H قرار ندارند را به عنوان یک خوشه k_2 به این t خوشه اضافه می‌کنیم، بدیهی است که این خوشه‌های جدید یک افراز خوشه‌ای برای G هستند و تعداد آنها $t + (|E(G)| - |E(H)|)$ است بنابراین

$$cp(G) \leq t + (|E(G)| - |E(H)|)$$

لذا

$$cp(G) - (|E(G)| - |E(H)|) \leq cp(H) \leq cp(G),$$

حال (*) را اثبات می‌کنیم. برای بدست آوردن یک افراز خوشه‌ای از $K_n \setminus H$ ابتدا یک افراز خوشه‌ای از اندازه $cp(K_n \setminus G)$ برای $K_n \setminus G$ در نظر می‌گیریم، حال همه‌ی یال‌هایی از $K_n \setminus H$ که در $K_n \setminus G$ قرار ندارند، به عنوان یک خوشه k_2 به این افراز اضافه می‌کنیم. بدیهی است که خوشه‌های حاصل یک افراز خوشه‌ای از اندازه $cp(K_n \setminus G) + |E(G)| - |E(H)|$ برای $K_n \setminus H$ است. لذا

$$cp(K_n \setminus H) \leq cp(K_n \setminus G) + |E(G)| - |E(H)|$$

□

مانسن^۲ [۲۰] نتایج دیگری از تأثیر حذف رأس و یال بر روی تعداد افراز خوشه‌ای از یک گراف را مطرح نموده است.

۲.۲ قضیه اردیش-گودمن-پوسا

ابتدا این سوال مطرح می‌شود که $cp(G)$ برای یک گراف ساده n رأسی چه اندازه‌ای می‌تواند باشد؟ اردیش، گودمن و پوسا^۳ [۱۴] نشان دادند که مجموعه یال‌های هر گراف ساده G با n رأس می‌تواند با حداکثر $\lfloor n^2/4 \rfloor$ مثلث و یال افراز گردد و در گراف کامل دوبخشی $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lfloor n/2 \rfloor}$ تساوی حاصل می‌شود. این اولین نتیجه اساسی در افرازهای خوشه‌ای گراف‌هاست. همچنین با کمی تغییر در اثبات آن‌ها می‌توان نشان داد که تنها گرافی که در تساوی $cp(G) = \lfloor n^2/4 \rfloor$ صدق می‌کند همان گراف دوبخشی $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lfloor n/2 \rfloor}$ است.

قضیه ۱.۲.۲. فرض کنید G گرافی ساده با n رأس باشد. آن‌گاه G یک افراز خوشه‌ای با حداکثر اندازه $\lfloor n^2/4 \rfloor$ متشکل از مثلث‌ها و یال‌ها را دارد. لذا

$$cp(G) \leq \lfloor n^2/4 \rfloor.$$

و تساوی اتفاق می‌افتد اگر و فقط اگر $G \cong K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lfloor n/2 \rfloor}$.

^۲Monson

^۳Erdős, Goodman and Pósa

برهان. ابتدا توجه داشته باشید که برای هر عدد صحیح مثبت n داریم،

$$\lfloor n^2/4 \rfloor = \lfloor (n-1)^2/4 \rfloor + \lfloor n/2 \rfloor,$$

قضیه را با استقراء بر روی تعداد رئوس گراف G اثبات می‌کنیم. اگر $n = 1, 2$ آن‌گاه حکم قضیه برقرار است. فرض کنید که این حکم برای همه‌ی گراف‌های با کمتر از n رأس درست باشد و G یک گراف ساده با n رأس باشد. فرض کنید که حداقل درجه‌ی G ، $\delta = \lfloor n/2 \rfloor + r$ باشد که r یک عدد صحیح است و همچنین فرض کنید که رأس x دارای کمترین درجه در G باشد. حالت اول: اگر $r \leq 0$ آن‌گاه $\deg(x) \leq \lfloor n/2 \rfloor$ است. با استقراء، $G \setminus x$ را می‌توان بر $\lfloor (n-1)^2/4 \rfloor$ از یال‌ها و مثلث‌ها افزاز کرد. از این رو بنا به لم ۱.۱.۲ داریم

$$\begin{aligned} cp(G) &\leq cp(G \setminus x) + \deg(x) \\ &\leq \lfloor (n-1)^2/4 \rfloor + \lfloor n/2 \rfloor \\ &= \lfloor n^2/4 \rfloor. \end{aligned}$$

علاوه بر این، این افزاز خوشه‌ای از G شامل یال‌ها و مثلث‌ها از افزاز خوشه‌ای $G \setminus x$ و یال‌های مجاور x است. برای برقراری تساوی در قضیه به $cp(G \setminus x) = \lfloor (n-1)^2/4 \rfloor$ و $\deg(x) = \lfloor n/2 \rfloor$ نیاز داریم. با استقراء روی $K_{\lfloor (n-1)/2 \rfloor, \lceil (n-1)/2 \rceil}$. $G \setminus x \cong K_{\lfloor (n-1)/2 \rfloor, \lceil (n-1)/2 \rceil}$ از آن‌جایی که $\deg(x) = \lfloor n/2 \rfloor$ و $cp(G) = \lfloor n^2/4 \rfloor$ لذا x می‌تواند تنها با رأس‌های یک طرف از $G \setminus x$ مجاور باشد (در غیر این صورت برای یک مثلث که ممکن است شامل افزاز خوشه‌ای $\lfloor n^2/4 \rfloor < cp(G)$ باشد تشکیل می‌دهیم) بنابراین $G \cong K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$.

حالت ۲: اگر $r > 0$ باشد. فرض کنید $\Gamma(x) = \{y_1, y_2, \dots, y_\delta\}$ و H یک زیر گراف القایی از G توسط $\Gamma(x)$ باشد. ادعا می‌کنیم که H دارای حداقل r یال مستقل است این ادعا را با تناقض اثبات می‌کنیم. فرض کنید H دارای حداکثر $r-1$ یال مستقل باشد. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید مجموعه‌ای از یال‌ها برای حداکثر عدد صحیح $2r-2$ به صورت زیر باشد

$$\{y_1 y_2, y_3 y_4, \dots, y_{s-1} y_s\},$$

از طرفی بنا به فرض داریم $\deg(y_{s+1}) \geq \delta$. توجه داشته باشید که

$$\Gamma(y_{s+1}) \subseteq V(G) \setminus \{y_{s+1}, y_{s+2}, \dots, y_\delta\},$$

از این رو

$$\begin{aligned} \deg(y_{s+1}) &\leq n - (\delta - s) \\ &\leq (2r - 2) + (n - \delta) \\ &= \lfloor n/2 \rfloor + r - 2 \\ &\leq \lfloor n/2 \rfloor + r - 1 \\ &< \lfloor n/2 \rfloor + r \\ &= \delta. \end{aligned}$$

و این در تناقض با $deg(y_{s+1}) \geq \delta$ است. بنابراین H دارای حداقل r یال مستقل است. بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض کنید که $\{y_1y_2, y_3y_4, \dots, y_{2r-1}y_{2r}\}$ یال‌ها باشند. حال برای راحتی تعریف می‌کنیم

$$G' = (G - x) \setminus \{y_1y_2, y_3y_4, \dots, y_{2r-1}y_{2r}\}.$$

با استقراء G' را می‌توان به حداکثر $\lfloor (n-1)^2/4 \rfloor$ یال و مثلث افراز کرد. این یال‌ها و مثلث‌ها همراه با مثلث ناشی از $\{x, y_{2i-1}, y_{2i}\}$ برای $i = 1, 2, \dots, r$ یال‌های $\{xy_{2r+1}, xy_{2r+2}, \dots, xy_\delta\}$ را به یک افراز از G به حداکثر

$$\lfloor (n-1)^2/4 \rfloor + r + (\delta - 2r) = \lfloor (n-1)^2/4 \rfloor + r + \lfloor n/2 \rfloor + r - 2r = \lfloor n^2/4 \rfloor,$$

یال و مثلث می‌دهد. برای برقراری تساوی در قضیه به $cp(G') = \lfloor (n-1)^2/4 \rfloor$ نیاز داریم. با استقراء روی $G' \cong K_{\lfloor (n-1)/2 \rfloor, \lfloor (n-1)/2 \rfloor}$ ممکن است فرض کنیم که G گراف کامل نیست، از آنجایی که $n > 2$ و $cp(G) > 1$ است بنابراین یک رأس به نام z وجود دارد که مجاور x نیست (x به عنوان حداقل درجه). از طرفی z مجاور به حداکثر $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ رأس در G است که z متعلق به یکی از بخش‌های G' می‌باشد. بنابراین $r > 0$

$$deg(z) \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor = \lfloor n/2 \rfloor < \lfloor n/2 \rfloor + r = \delta,$$

که تناقض است با اینکه δ حداقل درجه G است. \square

۳.۲ سیستم‌های اشتاینر، صفحه‌های تصویری و افرازهای خوشه‌ای

یک خانواده از افرازهای خوشه‌ای از K_n با وجود سیستم‌های اشتاینر^۴ ارائه شده است. برای تعریف سیستم اشتاینر به [۹] مراجعه می‌کنیم که کمرون^۵ و ون لیت^۶ سیستم اشتاینر را مطرح و تعریف کردند. یک سیستم اشتاینر $\mathcal{S}(n, k)$ یک جفت (X, \mathcal{B}) که در آن X مجموعه‌ای از نقاط با اندازه n و \mathcal{B} یک مجموعه از زیرمجموعه‌های k - عضوی از X بنام بلوک است، با این ویژگی که هر دو نقطه دقیقاً در یک بلوک قرار دارند. فرض کنیم که X و \mathcal{B} تهی نیستند و $n \geq k \geq 2$. همانطور که هر دو نقطه از سیستم اشتاینر $\mathcal{S}(n, k)$ دقیقاً در یک بلوک ظاهر می‌شوند، ما می‌توانیم بلوک‌های $\mathcal{S}(n, k)$ مانند خوشه‌هایی از K_n فرض کنیم، به طوری که هر یال از K_n دقیقاً یک خوشه به نظر برسد. از این رو ما یک افراز خوشه‌ای از K_n به خوشه‌های $\binom{n}{2} / \binom{k}{2}$ با اندازه k داریم. یک صفحه تصویری^۷ از مرتبه q یک سیستم اشتاینر $\mathcal{S}(q^2 + q + 1, q + 1)$ است. هر بلوک را یک خط در صفحه‌ی تصویری می‌نامیم. به عبارت دیگر یک صفحه‌ی تصویری از مرتبه q شامل $q^2 + q + 1$ نقطه است، که در آن هر دو نقطه یک خط و هر دو خط یک نقطه را مشخص می‌کنند، هر نقطه $q + 1$ خط روی آن دارد و هر خط دارای

^۴ Steiner system

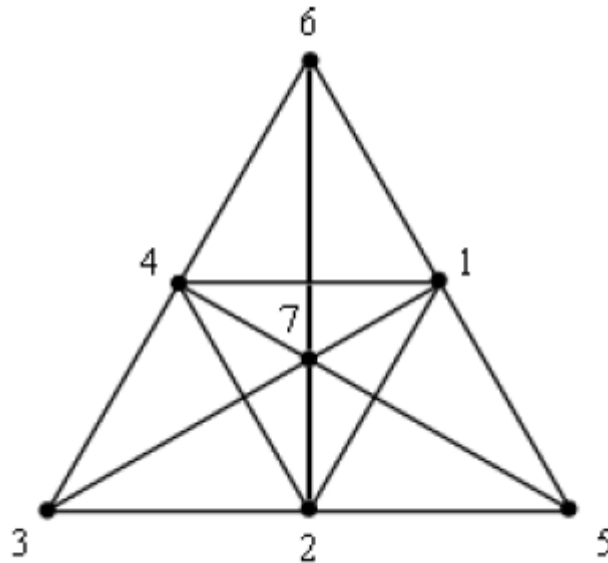
^۵ Cameron

^۶ Van Lit

^۷ Projective plane

$q + 1$ نقطه است. صفحه‌های تصویری برای همه‌ی مرتبه‌های توان اول شناخته شده است اما برای صفحه از مرتبه توان غیر اول شناخته نشده است.

به‌عنوان مثال، شکل ۱.۲ یک صفحه‌ی تصویری از مرتبه‌ی ۲ است و یک افراز خوشه‌ای از k_7 به هفت خوشه فراهم می‌کند که هر یک از اندازه سه هستند. این صفحه فانو^۸ نامیده می‌شود و متناظر با سیستم اشتاینر $S(7, 3)$ است. خوشه‌ها مثلث‌هایی هستند که توسط مجموعه‌های



شکل ۱.۲: صفحه فانو

$$\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 6, 7\}, \{1, 3, 7\},$$

القاء شدند که متناظر با خطوط صفحه‌ی فانو هستند. همچنین یک صفحه‌ی آفین از مرتبه q یک سیستم اشتاینر $S(q^2, q)$ است. توجه داشته باشید که یک صفحه‌ی آفین را می‌توان از یک صفحه‌ی تصویری با حذف تمام نقاط از یک بلوک خاص ایجاد کرد. بلوک‌های یک صفحه‌ی آفین را خطوط می‌نامیم و می‌گوییم دو خط موازی هستند اگر آن‌ها برابر باشند، لذا اگر L یک خط و p یک نقطه باشد یک خط موازی منحصر به فرد L وجود دارد که شامل p است.

۴.۲ قضیه بورن-اردیش

برای $n \geq 3$ بورن^۹ و اردیش [۸] ثابت کردند که اگر C یک افراز خوشه‌ای غیربدیهی از K_n باشد. آن‌گاه $|C| \geq n$ علاوه بر این نشان دادند که تساوی اتفاق می‌افتد اگر و تنها اگر C متشکل از یک خوشه در

^۸Fano

^۹Bruijn

$n - 1$ رأس و $n - 1$ نسخه از K_2 با یک رأس تک از K_n است یا C متشکل از n نسخه از K_{q+1} و $n = q^2 + q + 1$ و هر رأس از K_n دقیقا یک رأس از $q + 1$ خوشه از C است. این شرط دوم معادل وجود یک صفحه تصویری از مرتبه q است. ما به دنبال اثبات مطرح شده توسط کنوی^{۱۰} هستیم که ممکن است در باتن^{۱۱} و بیوت اسپیچر^{۱۲} [۴] یافت شود.

قضیه ۱.۴.۲. اگر $n \geq 3$ و C یک افراز خوشه‌ای غیربدهی از K_n باشد. آن‌گاه $|C| \geq n$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر

۱. C متشکل از یک خوشه بر $n - 1$ رأس و $n - 1$ نسخه از K_2 با یک رأس تنها از K_n یا،
۲. C متشکل از n نسخه از K_{q+1} و $n = q^2 + q + 1$ و هر رأس از K_n دقیقا یک رأس از $q + 1$ خوشه از C است.

برهان. واضح است که اگر (۱) یا (۲) برقرار باشد. آن‌گاه قرار می‌دهیم $|C| = n$ فرض کنید C یک افراز خوشه‌ای از K_n با اندازه n باشد. نشان می‌دهیم که $|C| = n$ و (۱) یا (۲) برقرار است. فرض کنید V مجموعه رئوس از K_n است و برای $v \in V$ فرض کنید r_v عدد خوشه‌ای از C باشد که شامل رأس v است. از این رو $n \geq 3$ و برای هر رأس $v \in V$ ، $|C| - r_v > 0$. همچنین برای هر خوشه $K \in C$ ، $|C| - |V(K)| > 0$. این نتیجه می‌دهد که هر رأسی که در $V(K)$ نباشد (یک $|C| > 1$ وجود دارد) یال‌های مجموعه $|V(K)|$ را افزایش می‌دهد و هیچ دوتایی یک خوشه در C نیستند. برای هر رأس $v \in V$ و هر خوشه $K \in C$ ، تعریف می‌کنیم

$$\delta(v, K) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } v \text{ یک رأس از } K \text{ نباشد} \\ 1 & \text{اگر } v \text{ یک رأس از } K \text{ باشد} \end{cases}$$

توجه داشته باشید که برای هر $K \in C$ ،

$$\sum_{v \in V} \delta(v, K) = |V(K)|,$$

و برای هر ثابت $v \in V$

$$\sum_{K \in C} \delta(v, K) = r_v$$

حال،

$$n = \sum_{v \in V} \frac{|C| - r_v}{|C| - r_v} = \sum_{v \in V} \sum_{K \in C} \frac{1 - \delta(v, K)}{|C| - r_v},$$

از طرفی برای هر خوشه $K \in C$ و هر رأس v که رأسی از K نیست داریم $r_v \geq |V(K)|$. لذا دو یال متصل به v به یک رأس از K می‌تواند همان خوشه باشد. بدین ترتیب برای هر خوشه $K \in C$ و هر رأس $v \in V$ داریم

$$\frac{1 - \delta(v, K)}{|C| - r_v} \geq \frac{1 - \delta(v, K)}{|C| - |V(K)|}, \quad (1.2)$$

^{۱۰}Conway

^{۱۱}Batten

^{۱۲}Beutelspacher

بنابراین

$$\begin{aligned} n &\geq \sum_{v \in V} \sum_{K \in \mathcal{C}} \frac{1 - \delta(v, K)}{|\mathcal{C}| - |V(K)|} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{C}} \sum_{v \in V} \frac{1 - \delta(v, K)}{|\mathcal{C}| - |V(K)|} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{C}} \frac{n - |V(K)|}{|\mathcal{C}| - |V(K)|} \\ &\geq \sum_{K \in \mathcal{C}} \frac{n}{|\mathcal{C}|} = n, \end{aligned}$$

آخرین نامساوی از $n \geq |\mathcal{C}|$ و $|\mathcal{C}| > |V(K)|$ ، برای هر خوشه $K \in \mathcal{C}$ رابطه زیر را نتیجه می‌دهد

$$\frac{n - |V(K)|}{|\mathcal{C}| - |V(K)|} \geq \frac{n}{|\mathcal{C}|}.$$

بنابراین باید در همه جا $|\mathcal{C}| = n$ باشد. علاوه بر این برای هر رأس $v \in V$ که در خوشه K نیست، تساوی در رابطه (۱.۲) به معنی $r_v = |V(K)|$ است. ادعا می‌کنیم که هر دو خوشه $J, K \in \mathcal{C}$ در حداقل یک رأس یکدیگر را قطع می‌کنند. فرض کنید j و k در یک رأس یکدیگر را قطع نکنند. اگر $v \in V(J)$ آن‌گاه از آن‌جایی که $r_v = |V(K)|$ ، رأس v در $|V(K)|$ خوشه در \mathcal{C} ظاهر می‌شود همچنین از آن‌جا که v در خوشه J نیز قرار دارد نتیجه می‌شود که $r_v \geq |V(K)| + 1$ که امکان‌پذیر نیست. بنابراین هر دو خوشه باید در حداقل یک رأس یکدیگر را قطع کنند.

توجه داشته باشید که اگر از یک جفت از رئوس در دو خوشه مشترک باشند آن‌ها می‌توانند در یال‌های دو خوشه یکدیگر را قطع کنند که تناقض است با اینکه \mathcal{C} یک افراز خوشه‌ای است. بنابراین هر دو خوشه دقیقاً در یک رأس یکدیگر را قطع می‌کنند، همچنین هر دو رأس یک خوشه را مشخص می‌کنند. حال فرض کنید $J, K \in \mathcal{C}$ هر دو خوشه‌هایی متفاوت از \mathcal{C} باشند و رأس v را رأس مشترک J, K می‌نامیم.

ابتدا فرض کنید $V(K_n) = V(J \cup K)$ در این صورت $r_v = 2$ است یعنی همه خوشه‌های \mathcal{C} دارای اندازه ۲ هستند. این نتیجه می‌دهد که هر J یا K در $n - 1$ رأس یک خوشه هستند و بنابراین \mathcal{C} مورد قبول است.

حال فرض کنید که برای هر انتخاب از j و k ، همیشه یک رأس از K_n وجود دارد، آن را ω می‌نامیم به طوری که $\omega \notin V(J \cup K)$. آن‌گاه $r_\omega = |V(J)| = |V(K)|$ که J و K دلخواه هستند. هر خوشه در \mathcal{C} باید از اندازه $q + 1$ باشد. n خوشه در \mathcal{C} وجود دارد، با شمارش یال‌ها داریم

$$\frac{n(n-1)}{2} = n \frac{(q+1)q}{2},$$

لذا $n = q^2 + q + 1$ بنابراین \mathcal{C} مورد قبول است. لذا نتیجه می‌شود که \mathcal{C} در (۱) یا (۲) صدق می‌کند. \square

نتیجه ۲.۴.۲. اگر G یک گراف با n رأس باشد و گرافی کامل و تهی نباشد. آن‌گاه

$$cp(G) + cp(\bar{G}) \geq n.$$

برهان. فرض کنید G یک گراف با n رأس باشد که گرافی کامل و تهی نیست، اگر $cp(G) + cp(\bar{G}) < n$ آن‌گاه یک افراز خوشه‌ای از K_n با کمتر از n رأس گرفته شده است که با قضیه ۱.۴.۲ در تناقض است. □

۵.۲ مکمل یک خوشه

می‌خواهیم بدانیم که چه تعداد خوشه از افراز در مجموعه یال از $K_n \setminus K_m$ برای $m < n$ مورد نیاز است. برای $n \geq 3$ ، ارلین [۲۲] برای اولین بار اشاره کرد که قضیه ۱.۴.۲ نتیجه می‌دهد که $cp(K_n \setminus K_2) = n - 1$ و $cp(K_{q^2+q+1} \setminus K_{q+1}) = q^2 + q$ است. هر زمان که یک صفحه‌ی تصویری از مرتبه q وجود داشته باشد، برای یک کران پایین بنا به نتیجه ۲.۴.۲، برای $1 < m < n$ قرار می‌دهیم

$$cp(K_n \setminus K_m) \geq n - 1.$$

در بخش بعدی یک نتیجه از والیس^{۱۳} [۲۶] می‌بینیم که نشان می‌دهد اگر $m > 1$ ثابت باشد یا $m \leq \sqrt{n}$ ، آن‌گاه

$$cp(K_n \setminus K_m) \sim n,$$

با استفاده از عدد رنگی یک گراف، پولمن^{۱۴} و دونالد^{۱۵} [۲۳] نشان دادند که

$$cp(K_n \setminus K_m) = \frac{1}{4}(n - m)(3m - n + 1),$$

برای $n > m \geq \frac{1}{4}(n - x)$ ، $(x = 0)$ برای $n - m$ فرد و در غیر این صورت $x = 1$). اردیش و فوردی^{۱۶} و اردمن^{۱۷} [۵] با استفاده از صفحه آفین ثابت کردند که برای $m = o(n)$ ،

$$cp(K_n \setminus K_m) \sim \max\{n, m^2\}.$$

۶.۲ قضیه دونالد-پولمن

فرض کنید $\chi(G)$ عدد رنگی G باشد که حداقل تعداد رنگ مورد نیاز برای رنگ آمیزی یال‌های G است به طوری که هیچ دو یال مجاوری رنگ یکسان نداشته باشند. فرض کنیم H_1 و H_2 دو گراف رأس-مجزا باشند. در این صورت الصاق دو گراف H_1 و H_2 که با نماد $H_1 \vee H_2$ نمایش داده می‌شود، گرافی است که مجموعه رئوس آن $V(H_1) \cup V(H_2)$ می‌باشد و مجموعه یال‌های آن به صورت $\{ij \mid i \in V(H_1), j \in V(H_2)\} \cup E(H_1) \cup E(H_2)$ می‌باشد. پولمن و دونالد [۲۳] یک عدد افراز خوشه‌ای از همبندی H و \bar{K}_q برای $q \geq \chi(G)$ محاسبه کردند. با انتخاب $H = K_n$ یک عدد افراز خوشه‌ای از $K_n \setminus K_m$ برای یک m مشخص ارائه خواهیم کرد.

^{۱۳}Wallis

^{۱۴}Pullman

^{۱۵}Donald

^{۱۶}Faudree

^{۱۷}Ordman

قضیه ۱.۶.۲. فرض کنید H گرافی با رأس h و یال e باشد. اگر $q \geq \chi'(H)$ در این صورت داریم $cp(H \vee \bar{K}_q) = hq - e$. علاوه بر این حداقل هر افزاز خوشه‌ای فقط شامل یال‌ها و مثلث‌ها است.

برهان. فرض کنید H یک گراف با رأس h و یال e و $q \geq \chi'(H)$ ثابت باشد. ابتدا یک افزاز خوشه‌ای از $H \vee \bar{K}_q$ به $hq - e$ یال و مثلث می‌سازیم. فرض کنید E_i مجموعه‌ای از یال‌ها با رنگ i در حداقل یک رنگ آمیزی از H برای $1 \leq i \leq \chi'(H)$ است. برای راحتی رئوس \bar{K}_q را با $\{v_1, v_2, \dots, v_q\}$ نشان می‌دهیم.

توجه کنید که E_i یک تطابق است. فرض کنید T_i یک خانواده از $|E_i|$ از مثلث‌ها با یک رأس v_i و یک یال متقابل در E_i باشد، این یک افزاز خوشه‌ای از $H \vee \bar{K}_q$ به یال‌ها و مثلث‌ها است. یعنی از مثلث‌های $T_1, T_2, \dots, T_{\chi'(H)}$ و همه‌ی یال‌های باقی‌مانده استفاده می‌کنیم. مانند هر یال H که یک مثلث با استفاده از یک رأس از \bar{K}_q است. مثلث e وجود دارد که حذف این مثلث از $H \vee \bar{K}_q$ یک گراف بدون مثلث با $2e$ یال می‌دهد. بنابراین

$$cp(H \vee \bar{K}_q) \leq e + (hq - 2e) = hq - e,$$

حال فرض کنید \mathcal{C} یک افزاز خوشه‌ای از $H \vee \bar{K}_q$ با r عضو C_1, C_2, \dots, C_r یال‌هایی در H دارد. برای راحتی فرض کنید $c_j = |V(C_j) \cap V(H)|$. برای هر C_j یک خوشه روی رئوس $V(C_j) \cap V(H)$ و حداقل $c_j - 1$ یال دارد و تساوی اتفاق می‌افتد اگر $|V(C_j) \cap V(H)| = 2$ بنابراین $e + r \geq \sum_{j=1}^r c_j$. حال اگر $e + r = \sum_{j=1}^r c_j$ باشد. آن‌گاه هیچ یک از اعضای \mathcal{C} اندازه بیشتر از سه ندارند. فرض کنید s تعداد یال‌های خارج از H باشد که توسط C_1, C_2, \dots, C_r پوشش داده شده‌اند. آن‌گاه $s \leq \sum_{j=1}^r c_j$ توجه کنید که $|\mathcal{C}| = r + (hq - s)$ است. اگر با حذف C_1, C_2, \dots, C_r از \mathcal{C} یک گراف بدون مثلث با $hq - s$ یال داشته باشیم. آن‌گاه

$$|\mathcal{C}| = r + (hq - s) \geq r + hq - \sum_{j=1}^r c_j \geq hq - e,$$

اگر تساوی برقرار باشد. آن‌گاه ممکن است هیچ یک از اعضای \mathcal{C} بیشتر از سه رأس نداشته باشند. بنابراین $cp(H \vee \bar{K}_q) = hq - e$ و در کوچکترین افزاز خوشه‌ای فقط از مثلث‌ها و یال‌ها استفاده شده است. \square

اگر $q < \chi'(H)$ آن‌گاه قضیه ۱.۶.۲ ممکن است نادرست باشد. برای مثال اگر $n \geq 10$ و $H = K_{n-3}$ و $q = 3$ ، آن‌گاه بنا به قضیه ۱.۶.۲ داریم $cp(H \vee \bar{K}_q) = (n-3)3 - \binom{n-3}{2} \leq 0$ اما $cp(H \vee \bar{K}_q) > 0$ که $H \vee \bar{K}_q$ یک گراف تهی نیست. برای بدست آوردن نتیجه روی مکمل یک خوشه توجه کنید که

$$\chi'(K_{2k}) = \chi'(K_{2k-1}) = 2k - 1,$$

بنابراین وقتی $m \geq \chi'(K_{n-m})$ بنا به قضیه ۱.۶.۲ داریم

$$cp(K_n \setminus K_m) = (n-m)m - \binom{n-m}{2}.$$

قضیه ۲.۶.۲. برای $n > m \geq \frac{1}{2}(n-x)$ (برای $x = 0$ برای $n - m$ فرد و در غیر اینصورت $x = 1$)،

$$cp(K_n \setminus K_m) = \frac{1}{2}(n-m)(3m-n+1).$$

همچنین کوچکترین افراز خوشه‌ای فقط شامل یال‌ها و مثلث‌ها است.

۷.۲ قضیه اردیش-فوردی-اردمن

اردیش، فوردی و اردمن [۱۳] از اثبات قضیه ۱.۶.۲ برای گسترش چندین کران پایین در عدد افراز خوشه‌ای یک گراف استفاده کردند. ابتدا لم زیر مطرح می‌شود.

لم ۱.۷.۲. اگر $\sum_{i=1}^q e_i = c$ و $\sum_{i=1}^q e_i^2 \leq d$ آن‌گاه $c^2/d \geq q$.

برهان. توجه داشته باشید که e_i ‌ها ممکن است متمایز باشند. اگر برای $i = 1, 2, \dots, q$ قرار دهیم $e_i = c/q$ ، آن‌گاه مجموع اول درست است. این جایگزینی فقط می‌تواند $\sum_{i=1}^q e_i^2$ را کاهش دهد، مجموع e_i^2 ‌ها وقتی که $e_1 = e_2 = \dots = e_q = c/q$ باشد به حداقل می‌رسد زیرا $\sum_i x_i^2$ یک تابع محدب است. بنابراین $\sum_{i=1}^q (c/q)^2 \leq d$ لذا $(c/q)^2 \leq d$ است. \square

فرض کنید G یک گراف با n رأس و $V(G)$ به دو مجموعه A و B افراز شود. (که به آن‌ها بخش می‌گوییم) به طوری که $A \cap B = \emptyset$. حال یال‌های گراف G به سه دسته تقسیم می‌شوند که یال‌های A و یال‌های B را یال‌های متصل می‌نامیم که به این‌که هر دو انتهاش در A ، هر دو در B یا در یکی قرار داشته باشد بستگی دارد. اگر یک خوشه در G شامل بیش از یکی از یال‌های متصل از G باشد. آن‌گاه باید شامل برخی از یال‌های A یا یال‌های B (یا هر دو) باشد. اگر تعداد یال‌های متصل زیاد باشد آن‌گاه به اندازه کافی یال‌های A یا یال‌های B از G برای ترکیب یال‌های متصل در G به تعداد کمی از خوشه‌ها وجود ندارد. اردیش، فوردی و اردمن [۱۳] یک کران پایین در $cp(G)$ در صورتی که یکی از بخش‌ها آن یال‌ها را نداشته باشد مطرح کردند.

لم ۲.۷.۲. فرض کنید G یک گراف با n رأس باشد و $A, B \subseteq V(G)$ به طوری که $A \cap B = \emptyset$. اگر G دارای K یال در بخش A باشد و هیچ یالی در بخش B نباشد و c یال‌های بین دو بخش باشد. آن‌گاه

$$cp(G) \geq \frac{c^2}{(2k+c)}.$$

برهان. اگر G یک افراز توسط خوشه‌های q و i خوشه در یال‌های متصل e_i باشد. آن‌گاه خوشه i دارای $\frac{e_i(e_i-1)}{2}$ یال در ضلع A است. لذا $\sum_{i=1}^q e_i = c$ و

$$k \geq \sum_{i=1}^q \frac{e_i(e_i-1)}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^q e_i^2 - \sum_{i=1}^q e_i \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^q e_i^2 - c \right),$$

\square بنابراین $\sum_{i=1}^q e_i^2 \leq 2k + c$.

بدین ترتیب یک کران پایین برای عدد افراز خوشه‌ای از مکمل یک خوشه بدست آوردیم.

قضیه ۳.۷.۲. برای $1 < m < n$ ،

$$cp(K_n \setminus K_m) \geq \frac{(n-m)m^2}{(n-1)}.$$

برهان. قرار دهید $c = m(n-m)$ و $k = \binom{n-m}{2}$ بنا به لم ۲.۷.۲ ،

$$cp(K_n \setminus K_m) \geq \frac{(n-m)^2 m^2}{(n-m)(n-m-1) + m(n-m)} = \frac{(n-m)m^2}{(n-1)}.$$

□

برای بدست آوردن یک کران بالا برای مکمل یک خوشه، اردیش، فوردی و اردمن [۱۳] با یک تغییر از استراتژی که والیس [۲۶] استفاده کرده بود آن‌ها هم برای صفحه تصویری استفاده کردند. یکی از مشکلات ما عدم داشتن دانش از صفحه‌های تصویری است وقتی که توان q اول نباشد. برای حل این مشکل از لم زیر استفاده می‌کنیم.

لم ۴.۷.۲. یک ثابت $\alpha \in [1/2, 1)$ وجود دارد به طوری که اگر $p < q$ اعداد اول متوالی باشند. آن‌گاه

$$q - p = O(p^\alpha).$$

لازم به ذکر است که باکر^{۱۸}، هارمن^{۱۹} و پینتز^{۲۰} در [۳] نشان دادند که حکم لم قبل برای $\alpha = \frac{21}{40}$ برقرار است.

برای ساختن یک افراز خوشه‌ای با استفاده از صفحه آفین، اردیش، فوردی و اردمن [۱۳] نشان دادند که اگر $m = f(n)$ و برای n به اندازه کافی بزرگ $\sqrt{n} < m < n$ باشد. آن‌گاه

$$cp(k_n \setminus k_m) < m^2 + o(m^2).$$

قضیه ۵.۷.۲. فرض کنید $m = f(n)$ و $\sqrt{n} < m < n$ آن‌گاه برای n به اندازه کافی بزرگ داریم

$$cp(K_n \setminus K_m) < m^2 + o(m^2).$$

برهان. فرض کنید t کوچکترین عدد صحیح باشد به طوری که $t \geq m$ و یک صفحه تصویری از مرتبه t وجود داشته باشد. بنا به لم ۴.۷.۲، برای m به اندازه کافی بزرگ و برای $\alpha \in [1/2, 1)$ ثابت داریم

$$m \leq t \leq m + cm^\alpha,$$

^{۱۸}Baker

^{۱۹}Harman

^{۲۰}Pintz

بنابراین $t^2 = m^2 + o(m^2)$. در یک صفحه تصویری از مرتبه t یک خط L انتخاب کنید و همه‌ی نقاط L را به جز m تا از آن‌ها حذف کنید از سایر خطوط در مجموع $(t - m) - (t^2 - n)$ نقطه را حذف کنید در نهایت n نقطه باقی مانده است که m تای آن‌ها روی خط انتخابی قرار دارند از این روش استفاده می‌کنیم تا یک افراز خوشه‌ای از $K_n \setminus K_m$ به $t^2 + t - 1$ خوشه ارائه دهیم. بنابراین

$$cp(K_n \setminus K_m) \leq t^2 + t - 1 < m^2 + o(m^2).$$

□

قضیه ۶.۷.۲. اگر $m \geq \sqrt{n}$ و $m = o(n)$ باشد. آن‌گاه

$$cp(K_n \setminus K_m) \sim m^2.$$

برهان. اگر $m \geq \sqrt{n}$ و $m = o(n)$ آن‌گاه برای یک کران پایین، برای n به اندازه کافی بزرگ از قضیه ۳.۷.۲ داریم

$$cp(K_n \setminus K_m) \geq \frac{(n - m)m^2}{n - 1} \sim m^2.$$

و برای یک کران بالا برای n به اندازه کافی بزرگ، از قضیه ۵.۷.۲ داریم

$$cp(K_n \setminus K_m) \leq m^2 + o(m^2) \sim m^2,$$

□

اگر $m \leq \sqrt{n}$ در بخش بعدی خواهیم دید که $cp(K_n \setminus K_m) \sim n$. توجه کنید که زمانی که $m = cn$ برای $1/2 \leq c \leq 1$ طبق قضیه ۲.۶.۲ داریم

$$cp(K_n \setminus K_m) \sim \frac{(1 - c)(3c - 1)}{2c^2} m^2,$$

اگر $c = 1/2$ آن‌گاه $\frac{1}{8}n^2$ و اگر $c = 3/4$ داریم $\frac{5}{32}n^2$.

۸.۲ مکمل گراف‌های کوچک

در بخش قبلی عدد افراز خوشه‌ای از گراف $K_n \setminus H$ را بررسی کردیم که همان K_m است. برای عدد افراز خوشه‌ای از $K_n \setminus H$ اگر H یک خوشه نباشد چه می‌توان گفت؟ با بیان قضیه زیر به این موضوع می‌پردازیم.

قضیه ۱.۸.۲. فرض کنید H یک گراف باشد.

۱. اگر تعداد رئوس H ، \sqrt{n} یا کمتر باشد. آن‌گاه

$$cp(K_n \setminus H) = o(n).$$

۲. اگر H ، $o(\sqrt{n})$ رأس داشته باشد. آن‌گاه

$$cp(K_n \setminus H) \sim n.$$

۳. اگر H' یک زیرگراف H باشد که دارای $O(\sqrt{n})$ بخش است و هر بخش حداکثر \sqrt{n} رأس دارد علاوه بر این اگر $O(\sqrt{n})$ یال‌های بین بخش‌های H' باشد. آن‌گاه

$$cp(K_n \setminus H) = O(n^{3/2}).$$

برهان. فرض کنید گراف H در یکی از سه شرط قضیه صدق کند و H دارای h رأس باشد. t را کوچکترین عدد صحیح در نظر بگیرید به طوری که $t \geq \sqrt{n}$ و یک صفحه تصویری از مرتبه t وجود داشته باشد بنا به لم ۴.۷.۲، $t^2 = n + o(n)$. بنابراین $K_n \setminus H$ یک زیرگراف القایی از $K_{t^2+h} \setminus H$ است. لذا بنا به لم ۲.۱.۲ داریم

$$cp(K_n \setminus H) \leq cp(K_{t^2+h} \setminus H).$$

فرض کنید H در (۱) یا (۲) صدق کند. آن‌گاه یک صفحه تصویری از مرتبه t در نظر بگیرید و یک نسخه از K_{t^2+t+1} با یک زیرگراف متمایز از H بسازید. نقاطی از یک صفحه با رئوسی در چنین مسیری که رئوسی از H هستند با نقاطی از یک بلوک شناسایی می‌شود که آن را B می‌نامند بنابراین می‌تواند $h \leq t$ باشد. آن‌گاه از K_{t^2+t+1} همه‌ی نقاطی از B به جز آن‌هایی که متعلق به H است را حذف می‌کنیم. در نتیجه K_{t^2+h} افزاز به خوشه‌های $t^2 + t + 1$ با یک خوشه از اندازه h و باقیمانده خوشه‌ها از اندازه t یا $t+1$ است. خوشه‌ای از اندازه h را با یک افزاز خوشه‌ای از $K_h \setminus H$ با استفاده از خوشه‌های $cp(K_h \setminus H)$ جایگزین می‌کنیم که این یک افزاز خوشه‌ای از $K_{t^2+h} \setminus H$ به خوشه‌های $cp(K_h \setminus H) + t + t^2$ است. بنابراین

$$cp(K_n \setminus H) \leq cp(K_{t^2+h} \setminus H) \leq t^2 + t + cp(K_h \setminus H),$$

اگر H در (۱) صدق کند. آن‌گاه $t^2 < \frac{1}{2}h(h-1) \leq cp(K_h \setminus H)$ پس داریم

$$cp(K_n \setminus H) = O(t^2) = O(n),$$

اگر H در (۲) صدق کند. آن‌گاه $h = o(\sqrt{n})$ لذا $\frac{1}{2}h(h-1) = o(n)$ بنابراین $cp(K_n \setminus H) \leq n + o(n)$ اما $cp(K_n \setminus H) \geq n - \sqrt{n}$ است. لذا

$$cp(K_n \setminus H) \sim n,$$

در نهایت فرض کنید که H در (۳) صدق کند بنابراین رئوس H می‌تواند با نقاطی در یک صفحه تصویری از مرتبه t یکی شوند به طوری که یال‌هایی از H' در بلوک‌های $r = O(\sqrt{n})$ است. آن‌ها را B_1, B_2, \dots, B_r می‌نامیم. فرض کنید $e = O(\sqrt{n})$ یال در H وجود دارد که در H' نیست. لذا $K_{t^2+t+1} \setminus H$ می‌تواند افزازی به حداکثر

$$t^2 + t + 1 - (r + e) + (r + e)(n/2) \leq n + o(n) + O(n^{3/2}) = O(n^{3/2}),$$

خوشه باشد. یال‌هایی از H که در H' وجود ندارد و شامل حداکثر e بلوک و هر بلوک شامل یال‌هایی از H است می‌تواند افزایی به کمتر از $n/2$ یال باشد، بنابراین با حذف نقاطی که با رأسی از H یکی نشده باشد، یک افراز خوشه‌ای از $K_n \setminus H$ با حداکثر $O(n^{3/2})$ خوشه داریم. \square

توجه کنید که برای $m \leq \sqrt{n}$ اگر H گراف K_m باشد. آن‌گاه

$$cp(K_n \setminus K_m) \sim n,$$

که $cp(K_n \setminus H)$ در اثبات قضیه ۱.۸.۲ (۱) صفر خواهد شد. بنابراین در امتداد قضیه ۶.۷.۲ قضیه زیر را مطرح می‌کنیم.

قضیه ۲.۸.۲. اگر $m = o(n)$ ، آن‌گاه

$$cp(K_n \setminus K_m) \sim \max\{n, m^2\},$$

به طور کلی اثبات قضیه ۱.۸.۲ (۳) بر این موضوع دلالت می‌کند که اگر H' یک زیرگراف H باشد که دارای $O(\sqrt{n})$ مؤلفه است و هر مؤلفه حداکثر \sqrt{n} رأس دارد و $o(n)$ یال متصل به این مؤلفه‌ها باشد. آن‌گاه

$$cp(K_n \setminus H) = o(n^2).$$

۹.۲ مکمل مسیره‌ها، دورها و تطابق کامل

اگر یک H ثابت در قضیه ۱.۸.۲ (۳) برای یک گراف خاص در نظر بگیریم، می‌توانیم کران بهتری برای عدد افراز خوشه‌ای از مکمل H فراهم کنیم. به طور کلی در نظر گرفتن عدد افراز خوشه‌ای از مکمل یک مسیر P_n ، یک دور C_n و یک تطابق کامل M_n هریک با n رأس هستند. در این پایان نامه \bar{M}_n مکمل یک تطابق کامل با n رأس را جایی که n زوج باشد مشخص می‌کند. برای راحتی اگر n فرد باشد از \bar{M}_n برای مکمل گراف $K_n \setminus M_{n-1}$ استفاده می‌کنیم. ارلین [۲۲] اولین بار درباره‌ی عدد افراز خوشه‌ای از مکمل یک تطابق کامل پرسید. والیس [۲۷] نشان داد که برای هر ϵ ثابت و $\epsilon > 0$ ، $cp(\bar{M}_n) = o(n^{1+\epsilon})$ ، بعدها گرگوری^{۲۱}، مک‌گینس^{۲۲} و والیس [۱۵] برای n به اندازه کافی بزرگ ثابت کردند که

$$n \leq cp(\bar{M}_n) \leq (1 + o(1))n \log_2 \log_2 n,$$

و حدس زدند که $cp(\bar{M}_n) \sim n$.

اولین نتیجه با توجه به عدد افراز خوشه‌ای از مکمل یک دور توسط والیس [۲۹] مطرح شد که نشان داد $cc(\bar{C}_n) < \frac{3}{4}n^2$ است و برای مکمل یک تطابق کامل از همان استدلال استفاده کرد. والیس [۲۸] برای یک مسیر و برای n به اندازه کافی بزرگ ثابت کرد که $cp(\bar{P}_n) \leq (1 + o(1))n \log_2 \log_2 n$ است.

^{۲۱}Gregory

^{۲۲}McGuinness

والیس [۲۸] همچنین مطرح کرد (اما اثبات نکرد) که این را می‌توان به مکملی از H توسعه داد که هر رأس از درجه یک یا دو را C_n می‌نامیم. بنابراین کان^{۲۳} و گرگوری [۱۰] برای $n \geq 11$ ثابت کردند که $cp(\bar{C}_n) \geq n$ است و برای مکمل یک دور داریم

$$n \leq cp(\bar{C}_n) \leq (1 + o(1))n \log_2 \log_2 n,$$

بنا به لم ۲.۱.۲، $cp(\bar{P}_n) \geq cp(\bar{C}_{n-1})$ است. لذا برای مکمل یک مسیر داریم

$$n - 1 \leq cp(\bar{P}_n) \leq (1 + o(1))n \log_2 \log_2 n.$$

در این پایان نامه توسط والیس [۲۸] این نتیجه که $cp(\bar{P}_n) \leq (1 + o(1))n \log_2 \log_2 n$ را اثبات خواهیم کرد. توجه داشته باشید که این نتیجه برای نشان دادن $cp(\bar{C}_n)$ و $cp(\bar{M}_n)$ که $O(n \log_2 \log_2 n)$ هستند بنا به لم ۲.۱.۲ استفاده می‌شود.

قضیه ۱.۹.۲. اگر \bar{P}_n یک مسیر با n رأس باشد. آن گاه برای n به اندازه کافی بزرگ داریم

$$cp(\bar{P}_n) \leq (1 + o(1))n \log_2 \log_2 n.$$

برهان. توجه داشته باشید که برای $n \leq r$ بنا به لم ۲.۱.۲ داریم $cp(\bar{P}_n) \leq cp(\bar{P}_r)$. قرار دهید $d = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ و e را کوچکترین عدد صحیح بگیریید به طوری که $de \geq n$. t را بعنوان کوچکترین توان اول بگیریید به طوری که $t \geq \sqrt{n}$. یک مسیر \bar{P}_n را در یک صفحه‌ی آفین از مرتبه t قرار می‌دهیم. یک کلاس موازی که P_1 نامیده می‌شود انتخاب شده و همه به جز d را از خطوط حذف می‌کنیم حال یک کلاس موازی دیگر P_2 انتخاب می‌کنیم و $t - e$ از خطوطش را به جز خط e حذف می‌کنیم. نقطه تقاطع خط i از P_1 با خط j از P_2 را با a_{ij} نشان می‌دهیم. خط j را با یک نسخه از \bar{P}_d به خصوص توسط مکملی از مسیر $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{dj})$ برای $j = 1, 2, \dots, e$ جایگزین می‌کنیم. حال خط ۱ از P_1 توسط مکمل مسیر $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1e})$ و خط d از P_1 را توسط مکمل مسیر $(a_{d1}, a_{d2}, \dots, a_{de})$ جایگزین می‌کنیم. آنچه که ما انجام دادیم انتخاب $2 + e$ بلوک و جایگزین کردن آن‌ها با نسخه‌هایی از مسیره‌ها است در حالی که بقیه بلوک‌ها دست نخورده باقیمانده است. با این کار یک مسیر جایگذاری شده P_{ed} در امتداد با $e - 1$ یال اضافی در یک صفحه آفین از مرتبه t داریم. لذا

$$\begin{aligned} cp(\bar{P}_n) &\leq cp(\bar{P}_{ed}) \leq t^2 + t - (e + 2) + e cp(\bar{P}_d) + 2cp(\bar{P}_e) + e - 1, \\ &\leq t^2 + t - 3 + e cp(\bar{P}_d) + 2[cp(\bar{P}_d) + 3d - 1] \end{aligned}$$

بنابراین \bar{P}_e افزایشی به حداکثر $cp(\bar{P}_d) + 3d - 1$ خوشه می‌تواند باشد به طوری که $e \leq d + 3$ لذا

$$\begin{aligned} cp(\bar{P}_n) &\leq t^2 + d cp(\bar{P}_d) + 5 cp(\bar{P}_d) + t + 6d - 5 \\ &\leq t^2 + d cp(\bar{P}_d) + o(d^2). \end{aligned}$$

^{۲۳}Caen

بنا به قضیه ۱.۸.۲ (۳) شرط مسیر در قضیه صدق می‌کند، قرار می‌دهیم $c(x) = cp(\bar{P}_{[x]})$ به طوری که

$$c(x) \leq t^\gamma + \sqrt{x}c(\sqrt{x}) + o(x),$$

جایی که t نزدیکترین عدد صحیح بزرگتر از \sqrt{n} باشد. بنابراین

$$c(x) \leq x + \sqrt{x}c(\sqrt{x}) + o(x),$$

بنا به لم ۱.۱.آ، برای x به اندازه کافی بزرگ داریم

$$c(x) \leq (1 + o(1))x \log_2 \log_2 x.$$

□

۱۰.۲ مکمل جنگل

در این بخش از یک صفحه تصویری برای اثبات این که اگر F_n یک جنگل با n رأس باشد. آن گاه مجموعه یال‌های \bar{F}_n می‌تواند افزای به $O(n(\log_2 n)^{\log_2 3})$ خوشه باشد استفاده می‌کنیم و همچنین با استفاده از تکنیک‌های فصل قبل به حل آن می‌پردازیم.

اما ابتدا نیاز است بدانیم که می‌توانیم F_n را به مؤلفه‌هایی با اندازه حداکثر \sqrt{n} افراز کنیم به طوری که دو مؤلفه حداکثر یک رأس را قطع کنند. اگر مؤلفه‌ها کوچک باشند آن گاه این مربوط به استفاده تعداد زیادی از بلوک‌ها از صفحه تصویری است پس افزایش تعداد خوشه‌ها برای افراز \bar{F}_n لازم است. بنابراین یک کران پایین برای اندازه مؤلفه مطرح خواهیم کرد.

فرض می‌کنیم که با درخت‌ها کار می‌کنیم، یک افراز خوشه‌ای برای \bar{F}_n می‌تواند به یک افراز خوشه‌ای از مؤلفه‌های تعدادی درخت T_n با $E(F_n) \subseteq E(T_n)$ گسترش یابد، با اضافه کردن حداکثر $n - 1$ یال (از جمله یال‌های $(E(T_n) \setminus E(F_n))$) یک افراز خوشه‌ای از \bar{F}_n بدست می‌آید.

تعریف ۱.۱۰.۲. یک افراز درختی از یک درخت T_n یک خانواده‌ای از زیردرخت‌های $\{T^1, T^2, \dots, T^r\}$ است. به طوری که هر یال از T_n دقیقاً در یک زیر درخت باشد و $T_n = \cup_{i=1}^r T^i$ و برای هر $i \neq j$ داشته باشیم

$$|V(T^i) \cap V(T^j)| \leq 1.$$

برای اعداد صحیح مثبت b و k که $2 \leq k \leq n$ و $b > 1$ می‌گوییم یک افراز درختی (k, b) - هموار است اگر برای $i = 1, 2, \dots, r$ داشته باشیم $k/b \leq |T^i| \leq k$. ثابت خواهیم کرد که یک افراز خوشه‌ای $(k, 3)$ - هموار از T_n همیشه به وجود دارد.

لم ۲.۱۰.۲. فرض کنید T_n یک درخت با n رأس باشد و $2 \leq k \leq n$ یک عدد صحیح مثبت باشد. آن گاه یک افراز خوشه‌ای $(k, 3)$ - هموار از T_n وجود دارد.

برهان. فرض کنید T_n یک درخت با n رأس باشد و $2 \leq k \leq n$ یک عدد صحیح مثبت باشد. توجه کنید که همیشه یک افزاز درختی از T_n به دو زیر درخت وجود دارد. واضح است که یک افزاز درختی $\{T^1, T^2\}$ از T_n وجود دارد به طوری که به ازای $i = 1, 2$ ، $n/3 \leq |T^i| \leq 2n/3$ است. برای مشاهده یک افزاز درختی دلخواه $\{T^1, T^2\}$ از T_n به طوری که $\|V(T^1)\| - \|V(T^2)\|$ به حداقل رسیده است و فرض کنید T^1 و T^2 دارای رأس مشترک v باشند. اگر برای $i = 1, 2$ ، $n/3 \leq |T^i| \leq 2n/3$ باشد، بدون از دست دادن کلیت فرض کنید که $|T^1| < n/3$. به طوری که $\|V(T^1)\| - \|V(T^2)\|$ به حداقل رسیده است و v مجاور حداقل دو رأس از رأس های T^2 است. برای یک افزاز درختی $\{J^1, J^2\}$ از T^2 به طوری که J^1 و J^2 دارای رأس مشترک v باشند. آن گاه

$$\frac{2n}{3} + 1 < \{|T^1| + |J^1|\} + \{|T^1| + |J^2|\} < \frac{4n}{3} + 1,$$

که $n/3 < |V(T^1 \cup J^1)| < 2n/3 + 1$ است. لذا $2n/3 + 1 < 2|T^1| + |T^2| + 1 < 4n/3 + 1$ یا $n/3 < |V(T^1 \cup J^1)| < 2n/3$. بنابراین یک افزاز درختی از T_n متشکل از دو زیر درخت که دارای یک رأس مشترک با اندازه بین $n/3$ و $2n/3$ ایجاد کردیم.

یک افزاز خوشه ای $(k, 3)$ - هموار S از T_n ایجاد خواهیم کرد. بارها درختان با استفاده از استدلال بالا با اندازه بیش از k تقسیم می شوند. آن گاه برای همه ی زیردرخت های T^i از S به $k/3 \leq |T^i| \leq k$ نیاز داریم. یک افزاز خوشه ای $(k, 3)$ - هموار از T_n را در نظر می گیریم و هر بار یک زیرگراف را تقسیم می کنیم در نتیجه دو درخت دقیقاً یک رأس مشترک دارند. \square

برای راحت بودن در اثبات بعدی توابع $g(n)$ و $h(x)$ را در زیر تعریف می کنیم که در آن $n \in \mathbb{N}$ و $x \in \mathbb{R}^+$ است،

$$g(n) = \max\{cp(\bar{T}_n) : \text{است } T_n \text{ یک درخت روی رئوس } n \text{ است}\},$$

$$h(x) = \max\{cp(K_{q[x]} \setminus T_{[x]}) : \text{است } [x] \text{ رئوس } [x] \text{ است}\},$$

توجه کنید که $g(n) \leq h(n)$ و $cp(\bar{T}_n) \leq g(n)$ برای هر درخت T_n است.

قضیه ۳.۱۰.۲. اگر F_n یک جنگل با n رأس باشد. آن گاه برای n به اندازه کافی بزرگ داریم

$$cp(\bar{F}_n) = O(n(\log_3 n)^{\log_2 3}).$$

برهان. فرض کنید که با درخت ها کار می کنیم، یک افزاز خوشه ای برای \bar{F}_n می تواند به یک افزاز خوشه ای از \bar{T}_n گسترش یابد. برای تعدادی درخت T_n که $E(F_n) \subseteq E(T_n)$ است، $O(n)$ یال به افزاز خوشه ای از \bar{F}_n اضافه می کنیم، لذا $cp(\bar{T}_n) \leq g(n)$ است.

برای هر درخت T_n کافی است نشان دهیم که $g(n) = O(n(\log_3 n)^{\log_2 3})$. فرض کنید T_n یک درخت با n رأس باشد به طوری که $h(n) = cp(K_{q[n]} \setminus T_n)$ باشد. فرض کنید t کوچکترین عدد صحیح باشد که $t \geq 4\sqrt{n} + 11$ و یک صفحه تصویری از مرتبه t وجود دارد. بنا به لم ۴.۷.۲ داریم $t = 4\sqrt{n} + o(\sqrt{n})$ بنابراین $t^2 = 16n + o(n)$. حال فرض کنید که $\mathcal{S} = \{T^1, T^2, \dots, T^r\}$ یک

افراز خوشه‌ای $(\lfloor \sqrt{n} \rfloor, 3)$ - هموار از T_n است که بنا به لم ۲.۱۰.۲ به وجود آمده است. آن‌گاه برای $i = 1, 2, \dots, r$ داریم

$$\frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{3} \leq |T^i| \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor,$$

بدون از دست دادن کلیت فرض کنید که برای $i = 2, 3, \dots, r$

$$V(T^i) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} V(T^j) \right) = \{v_i\},$$

و توجه کنید که به $n = |T^1| + (|T^2| - 1) + (|T^3| - 1) + \dots + (|T^r| - 1)$ نیاز داریم. لذا

$$r \leq \frac{3(n-1)}{\sqrt{n}-4},$$

به طوری که $1 + \lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq \sqrt{n}$ آن‌گاه اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد داریم $r \leq 3\sqrt{n} + 13$. یک صفحه تصویری از مرتبه t انتخاب کنید. ادعا می‌کنیم که می‌توان بلوک‌های $\{B^1, B^2, \dots, B^r\}$ را یافت به طوری که B^i شامل T^i باشد، بدون دو رأس از T_n با همان نقاط از صفحه تصویری و بلوک‌های B^i درختی با همان ترکیب از زیرگراف T^i شناسایی می‌کنیم. ابتدا باید رئوسی از T^1 با نقاطی از بلوک دلخواه تلفیق کنیم آن را B^1 از صفحه تصویری می‌گوییم که رأس v_1 با همان نقاط ω_1 تلفیق می‌شود و رأس‌های دیگر از T^1 دلخواه با نقاطی از $B^1 \setminus \{\omega_1\}$ تلفیق می‌شوند. نشان خواهیم داد که بلوک‌های B^2, B^3, \dots, B^r را پیدا می‌کنیم که در شرایط صدق کنند.

فرض کنید برای $2 \leq i \leq r$ ، پیش از این رئوسی از T^{i-1} را با نقاطی از B^{i-1} تلفیق کردیم به طوری که رأس v_i با نقاط ω_i از بلوک B_i که $j \leq i - 1$ تلفیق شود. یک بلوک B^i در نظر بگیرید (متفاوت از B^1, B^2, \dots, B^{i-1}) که شامل نقاط ω_i باشد. یک بلوک وجود دارد که $11 + 4\sqrt{n} \geq t + 1$ که این بلوک‌ها شامل نقاط ω_i است. (و حداکثر $13 + 3\sqrt{n} \leq r$ بلوک استفاده شده است) رئوسی از T_i با نقاطی از B^i تلفیق می‌شود به طوری که v_i با ω_i تلفیق می‌شود و رأس‌های دیگر از T^i با نقاطی از $B^i \setminus W$ تلفیق می‌شود که W مجموعه‌ای از نقاط از $B^1 \cup B^2 \cup \dots \cup B^{i-1}$ است که در B^i یکدیگر را قطع می‌کنند. توجه کنید که $|W| < r$ به طوری که B^i هر بلوک دیگری را در حداکثر یک نقطه قطع می‌کند و این تطابق می‌تواند انجام شود که هر بلوک $12 + 4\sqrt{n} \geq t + 1$ نقطه دارد و هر درخت حداکثر $\sqrt{n} \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ رأس داشته باشد و حداکثر $12 + 3\sqrt{n} \leq r - 1$ نقطه از بلوک B^i که حداقل \sqrt{n} نقطه دارد که با T^i تلفیق می‌شود. این یک مجموعه‌ای از بلوک‌های $\{B^1, B^2, \dots, B^r\}$ است که شامل یال‌هایی از \bar{T}_n است. لذا بنا به لم ۲.۱۰.۲ داریم

$$g(n) \leq h(n) = cp(K_{9n} \setminus T_n) \leq cp(K_{t^2+t+1} \setminus T_n),$$

به طوری که r اندازه بلوک‌های B^i است که شامل یال‌هایی از T_n است. پس داریم

$$\begin{aligned} h(n) &\leq t^2 + t + 1 - r + \sum_{i=1}^r cp(K_{|B^i|} \setminus T^i) \\ &\leq O(n) + \sum_{i=1}^r cp(K_{|B^i|} \setminus T^i) \\ &\leq O(n) + \sum_{i=1}^r cp(K_{9\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \setminus T^i). \end{aligned}$$

از آخرین نامساوی بنا به لم ۴.۷.۲، برای n به اندازه کافی بزرگ داریم

$$t + 1 \leq 4\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \leq 9\lfloor\sqrt{n}\rfloor.$$

اما توجه کنید که اگر T_p یک زیرگراف القایی از T_q باشد. آن‌گاه طبق ۲.۱.۲، برای $p \leq q$ داریم $cp(\bar{T}_p) \leq cp(\bar{T}_q) + q - p$ لذا می‌توانیم درخت T^i را به $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ گسترش دهیم. بنابراین

$$\begin{aligned} h(n) &\leq O(n) + r \cdot h(\sqrt{n}) \\ &\leq O(n) + (3\sqrt{n} + 13)h(\sqrt{n}) \\ &= O(n) + 3\sqrt{n}h(\sqrt{n}). \end{aligned}$$

لذا $h(\sqrt{n}) = O(n)$ و

$$h(x) \leq O(x) + 3\sqrt{x}h(\sqrt{x}),$$

با تقسیم کردن x و قرار دادن $z = \log_2 \log_2 x$ و $r(z) = h(x)/x$ داریم

$$r(z) \leq O(1) + 3 \cdot r(z - 1).$$

بنابراین

$$r(z) = O(3^z),$$

برای x (و بنابراین z) دلخواه بزرگ،

$$h(x) < O(x3^z) = O(x(\log_2 x)^{\log_2 3}),$$

لذا

$$g(n) = O(n(\log_2 n)^{\log_2 3}).$$

□

جالب است بدانید که اگر F_n یک جنگل باشد به طوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{cp(\bar{F}_n)}{n} = \infty$. حدس می‌زنیم که یک کران از $O(n \log_2 \log_2 n)$ ممکن است.

حس ۱۰۳.۱۰.۲. اگر F_n یک جنگل با n رأس باشد. آن‌گاه برای n به اندازه کافی بزرگ داریم

$$cp(\bar{F}_n) = O(n \log_2 \log_2 n).$$

معتقد هستیم که F_n را می‌توان بر \sqrt{n} ($1 + o(1)$) مؤلفه که هریک از اندازه \sqrt{n} ($1 + o(1)$) هستند افراز کرد به طوری که هر دو مؤلفه در حداکثر یک رأس یکدیگر را قطع کنند. اگر این درست باشد آن‌گاه از قضیه ۳.۱۰.۲ داریم $O(n \log_2 \log_2 n)$.

۱۱.۲ مکمل گراف با حداکثر درجه کرانداری

استفاده از روش‌های احتمالاتی در نظریه گراف اخیرا به طور چشمگیری توسعه یافته است. از آلون^{۲۴} [۲] استفاده می‌کنیم و در خصوص سیستم‌های اشتاینر از بث^{۲۵}، جانیکل^{۲۶} و لنز^{۲۷} [۵] پیروی می‌کنیم. شرایط لازم برای وجود یک $\mathcal{S}(n, k)$ عبارت است از

$$n \equiv 1 \pmod{k-1},$$

$$n(n-1) \equiv 0 \pmod{k(k-1)}.$$

قضیه ویلسون^{۲۸} [۵] نشان می‌دهد که شرایط فوق برای وجود یک $\mathcal{S}(n, k)$ تقریبا برای همه $n \in N$ ها کافی است. اگر چه اثبات‌های ارائه شده توسط ویلسون یک $n_0(k)$ روشن و ثابت نمی‌دهد به طوری که یک $\mathcal{S}(n, k)$ برای $n \geq n_0(k)$ وجود داشته باشد و شرایط لازم را فراهم کند. اخیرا چانگ^{۲۹} نشان داده که $n_0(k) \leq \exp(\exp(k^{k^2}))$ است (به صفحه ۸۰۰ منبع [۵] مراجعه شود). در قضیه بعدی نشان می‌دهیم که اگر G یک گراف با حداکثر درجه کرانداری باشد، آن‌گاه وجود یک سیستم اشتاینر باعث به وجود آمدن یک افراز از \bar{G} می‌شود.

قضیه ۱.۱۱.۲. فرض کنید G گرافی با g رأس و حداکثر درجه $\Delta = o(n/\log^4 n)$ باشد که در آن $n = O(g)$ است. فرض کنید $k = \lceil \sqrt{n}/\sqrt{2\Delta} \rceil$. اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد و اگر یک سیستم اشتاینر $\mathcal{S}(n, k)$ وجود داشته باشد. آن‌گاه

$$cp(\bar{G}) = O(n^{3/2} \sqrt{\Delta} (\log_2 n)^2).$$

برهان. فرض کنید G ، n و K در شرایط قضیه صدق می‌کنند و $\mathcal{S}(X, B)$ یک سیستم اشتاینر با بلوک‌هایی از اندازه k با n نقطه باشد. برای یک جایگشت تصادفی از نقاط، احتمال اینکه مجموعه ثابتی از نقاط k یک بلوک ثابتی در B باشد، دقیقا $1/\binom{n}{k}$ است. فرض کنید که G گراف ثابتی بر روی همان

^{۲۴} Alon

^{۲۵} Beth

^{۲۶} Jungnickel

^{۲۷} Lenz

^{۲۸} Wilson's theorem

^{۲۹} Chang

مجموعه از نقاط n با حداکثر درجه Δ باشد و فرض کنید که G_B نشان دهنده زیرگراف G با یال‌های فراگیر مشمول در یک بلوک $B \in \mathcal{B}$ است. پیشامد $|E(G_B)| \geq r$ را برای عدد صحیح r در نظر بگیرید. زیرگراف H_B را از G_B با یال‌های r انتخاب کنید، اگر حداکثر اندازه یک تطابق در H_B برای یک عدد صحیح i ، $i \leq r$ باشد و اگر s رأس از H_B وجود داشته باشند که با حداکثر تطابق اشباع نشده باشند، آن‌گاه

$$\max \left\{ \frac{r - \binom{2i}{2}}{2i}, 0 \right\} \leq s \leq r - i,$$

برای سهولت قرار دهید $s_i = (r - \binom{2i}{2})/2i$. فرض کنید $A_B(i, s)$ نشان دهنده این پیشامد است که بزرگترین تطابق در H_B دارای اندازه i و H_B دارای $s + 2i$ رأس است. با تثبیت تطابق M با اندازه i در G ، حداکثر $(2i\Delta)^s$ روش برای انتخاب یک مجموعه S از رئوس وجود دارد که $V(M) \cup S = H_B$ باشد. بنابراین $\binom{n - 2i - s}{k - 2i - s}$ روش برای انتخاب رئوس $B \setminus V(H_B)$ از G وجود دارد. لذا

$$\mathbb{P}[A_B(i, s)] \leq \frac{1}{\binom{n}{k}} \binom{\Delta n}{i} (2i\Delta)^s \binom{n - 2i - s}{k - 2i - s}.$$

از آنجایی که $\{|E(G_B)| \geq r\} \subset \cup_{i,s} A_B(i, s)$ ، لذا می‌توان نتیجه گرفت که

$$\mathbb{P}[|E(G_B)| \geq r] \leq \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{i=1}^r \sum_{\substack{s > s_i \\ s \geq 0}}^{r-i} \binom{\Delta n}{i} (2i\Delta)^s \binom{n - 2i - s}{k - 2i - s}.$$

برای تخمین زدن حاصل جمع‌های سمت راست از نامعادله زیر استفاده می‌کنیم

$$\frac{\binom{a-t}{b-t}}{\binom{a}{b}} < \frac{b^t}{a^t},$$

فرض کنید که j بزرگترین عدد صحیح است به طوری که

$$r - \binom{2j}{2} \geq 0,$$

که قطعاً $1 \leq j \leq \sqrt{r/2} + 1$ است. قرار دهید $k = \lceil \sqrt{n}/\sqrt{2\Delta} \rceil$. آن‌گاه

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[|E(G_B)| \geq r] &\leq \sum_{i=1}^r \sum_{\substack{s > s_i \\ s \geq 0}}^{r-i} \binom{\Delta n}{i} (2i\Delta)^s \frac{\binom{n - 2i - s}{k - 2i - s}}{\binom{n}{k}} \\ &< \sum_{i=1}^r \sum_{\substack{s > s_i \\ s \geq 0}}^{r-i} (\Delta n)^i (2r\Delta)^s \frac{k^{2i+s}}{n^{2i+s}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^r \left(\frac{\Delta k^2}{n}\right)^i \sum_{\substack{s > s_i \\ s \geq 0}}^{r-i} \left(\frac{2rk\Delta}{n}\right)^s \\
 &\leq \sum_{i=1}^j \left(\frac{1}{2}\right)^i \sum_{s=s_i}^{r-i} \left(\frac{1}{2}\right)^s + \sum_{i=j+1}^r \left(\frac{1}{2}\right)^i \sum_{s=0}^{r-i} \left(\frac{1}{2}\right)^s \quad (*) \\
 &\leq 2 \sum_{i=1}^j \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{s_i} + 4 \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} \\
 &= \sqrt{2} \sum_{i=1}^j \left(\frac{1}{2}\right)^{r/(2i)} + \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} \\
 &\leq \sqrt{2} j \left(\frac{1}{2}\right)^{r/(2j)} + \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}.
 \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که $2rk\Delta/n \leq 1/2$ در صورتی درست است که $r = 2(\log_2(2n^2\Delta))^2$ و فرض کنید برای n به اندازه کافی بزرگ

$$\frac{\Delta(\log_2 n)^4}{n} \rightarrow 0,$$

همچنین $\Delta k^2/n \leq 1/2$. انتخاب k دلخواه است بنابراین حاصل (*) است، می‌خواهیم عبارت بالا کمتر از $1/|B|$ باشد. یعنی

$$\left[\sqrt{2} j \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{r}{2j}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} \right] \frac{n(n-1)}{k(k-1)} < 1$$

اما سمت چپ آن هست

$$\begin{aligned}
 &= O\left(\frac{n^2}{k^2} j \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{r}{2j}}\right) \\
 &= O\left(\Delta n \log_2(2n^2\Delta) \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{r}{2 \log_2(2n^2\Delta)+1}}\right) \\
 &= O\left(\Delta n \log_2(2n^2\Delta) \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2(2n^2\Delta)}\right) \\
 &= O\left(\frac{\log_2(2n^2\Delta)}{n}\right) \\
 &= O\left(\log_2 n/n\right).
 \end{aligned}$$

بنابراین با احتمال مثبت $|E(G_B)| < r$ برای هر $B \in \mathcal{B}$ و اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد. آن‌گاه

$$cp(\bar{G}) < rk|B| = O(n^{3/2} \sqrt{\Delta} \log^2 n).$$

□

به شرط آنکه $\Delta = o(n/\log^4 n)$ باشد، عبارت موجود در قضیه عبارت است از $o(n^2)$. لذا حدس زیر مطرح می‌شود.

حدس ۱.۱.۱۱.۲. فرض کنید G_n گرافی با n رأس و یال‌های $o(n^2)$ باشد. آن‌گاه عدد افراز خوشه‌ای \bar{G}_n عبارت است از $o(n^2)$.

فصل ۳

پوشش خوشه‌ای

۱.۳ مقدمه

در این فصل قصد داریم مفهوم پوشش خوشه‌ای را در گراف‌ها مورد بررسی قرار داده و عدد پوشش خوشه‌ای را برای آن‌ها مشخص کنیم. و در ادامه عدد پوشش خوشه‌ای را برای مکمل مسیر، دور و جنگل بررسی کنیم.

۲.۳ گراف متقاطع و گراف کنسر

طبق تعریف پوشش خوشه‌ای، یک پوشش خوشه‌ای از G با اندازه $cc(G)$ به حداقل پوشش خوشه‌ای از G اشاره می‌کند. نتایج افزایش خوشه‌ای در بخش‌های ۲.۱ و ۲.۲ برای پوشش خوشه‌ای نیز صدق می‌کنند. از جمله لم ۱.۱.۲، لم ۲.۱.۲ و قضیه ۱.۲.۲. بریگهام^۱ و داتون^۲ [۷] به نتایج دیگری برای تأثیر حذف رأس و یال بر روی عدد پوشش خوشه‌ای یک گراف اشاره می‌کنند.

قبل از آن‌که اردیش گودمن و پوسا [۱۴] قضیه ۱.۲.۲ را برای افزایش خوشه‌ای اثبات کنند، هال^۳ [۱۸] اثبات کرد که مجموعه یال‌های هر گراف G با n رأس را می‌توان با حداکثر $\lfloor n^2/4 \rfloor$ خوشه پوشش داد که نیاز نیست هیچ یک از آن‌ها بزرگتر از یک مثلث باشند. از طرفی افزایش خوشه‌ای یک گراف G ، یک پوشش خوشه‌ای از G نیز است. بنابراین نامعادله $cc(G) \leq cp(G)$ را داریم پس با توجه به قضیه ۱.۲.۲

^۱Brigham

^۲Dutton

^۳Hall

داریم

$$cc(G) \leq cp(G) \leq \lfloor n^2/4 \rfloor,$$

و تساوی اتفاق می افتد اگر و تنها اگر $G \cong K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lfloor n/2 \rfloor}$.

گراف کنسر $K_{n:k}$ مکمل گراف متقاطع $\Omega(S)$ از k زیرمجموعه مجزا از n مجموعه است. بین گراف های متقاطع و پوشش خوشه ای رابطه زیر را داریم که پرداختن به اسپیلران مارکزووویسکی^۴ [۲۴] و اردیش گودمن و پوسا [۱۴] ضروری است.

قضیه ۱.۲.۳. برای گراف G ، $cc(G) \leq n$ اگر تنها اگر خانواده $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ از زیرمجموعه های مجموعه $[n]$ چنان وجود داشته باشد که $G \cong \Omega(\mathcal{S})$.

برهان. ابتدا ثابت می کنیم که $G \cong \Omega(\mathcal{S})$ لذا $cc(G) \leq n$ است. فرض کنید $G \cong \Omega(\mathcal{S})$ که در آن $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ و $S_i \subseteq [n]$ است. همچنین فرض کنید که برای هر $j \in [n]$ $C_j = \{S_i : j \in S_i, i \in [m]\}$ است. پس هرگاه $|C_j| \geq 2$ باشد C_j یک خوشه به وجود می آورد، بنابراین $\{C_j : |C_j| \geq 2\}$ یک افراز خوشه ای G با حداکثر اندازه n است. لذا $cc(G) \leq n$.

حال نشان می دهیم که برای خانواده \mathcal{S} از $[n]$ زیرمجموعه $cc(G) \leq n$ است. به این معنی که $G \cong \Omega(\mathcal{S})$ است. فرض کنید $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ یک پوشش خوشه ای G با اندازه n است. قرار دهید $\mathcal{S} = \{S_v : v \in V(G)\}$ و $S_v = \{i \in [n] : v \in V \in (C_i)\}$ لذا G گرافی متقاطع از \mathcal{S} است. □

توجه کنید که اگر رئوس جدا از G حذف شوند، $cc(G)$ تغییر نمی کند. عمل دیگری بر روی G انجام می دهیم که بر $cc(G)$ تأثیر نمی گذارد. می دانیم که رئوس $x, y \in V(G)$ را هم ارز هستند اگر $xy \in E(G)$ و $\Gamma(x) \setminus \{y\} = \Gamma(y) \setminus \{x\} \neq \emptyset$ باشد. پس اگر x با رأس دیگر G هم ارز باشد، $cc(G) = cc(G - x)$ است. جیارفاش^۵ [۱۷] به گرافی که فاقد رأس تنها است و هیچ دو رأسی در آن هم ارز نمی باشند کران پایین نسبت می دهد.

قضیه ۲.۲.۳. فرض کنید G یک گراف با n رأس باشد که فاقد رأس تنها است و هیچ دو رأسی در آن هم ارز نمی باشند. آن گاه داریم

$$cc(G) \geq \log_2(n + 1).$$

برهان. فرض کنید C یک پوشش خوشه ای از G و حداقل از اندازه k باشد. رأس های G را با v_1, v_2, \dots, v_n نشان دهید. فرض کنید F_i شامل آن اعضای C است که دارای v_i است و قرار دهید

$$\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$$

پس $\Omega(\mathcal{F})$ با G یکرخت است. از آن جایی که G هیچ رأسی جدایی ندارد لذا برای $i \in [n]$ $F_i \neq \emptyset$ است. حال نشان می دهیم که برای $i \neq j$ $F_i \neq F_j$ است. فرض کنید که برای $i \neq j$ اگر $v_i v_j \notin E(G)$

^۴Spilrajn-Marczewski

^۵Gyárfás

آن‌گاه $F_i \neq F_j$ است. زیرا مجموع‌های جدا از هم هستند. اگر $v_i v_j \in E(G)$ باشد آن‌گاه طبق فرض هم ارز نیستند. بنابراین برای $r \in [n] \setminus \{i, j\}$ یک رأس v_r وجود دارد به طوری که v_r دقیقاً در مجاورت v_j و v_i قرار دارد. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید $v_i v_r \in E(G)$ و $v_j v_r \notin E(G)$. همچنین فرض کنید $K \in C$ خوشه‌ای است که یال $v_i v_r$ را پوشش می‌دهد. بنابراین $K \in F_i$ و $K \notin F_j$ نشان می‌دهد که $F_i \neq F_j$. از آن‌جا که مجموعه‌های F_i ، زیرمجموعه‌های مجزا و غیرتهی از $[k]$ هستند لذا

$$n = |\mathcal{F}| \leq 2^K - 1.$$

بنابراین $k \geq \log_2(n + 1)$ که نتیجه مورد نظر است. \square

جی‌ارفاش [۱۷] نشان داد که نامعادله موجود در قضیه ۲.۲.۳ برای بی‌نهایت n محدود است. با این حال اگر اطلاعات بیشتری درباره ویژگی‌های اشتراکی مجموعه‌های F_i در اثبات قضیه ۲.۲.۳ داشته باشیم می‌توانیم در $|\mathcal{F}|$ به کران بهتری از $2^k - 1$ برسیم و در نتیجه کران پایین را در عدد پوشش خوشه‌ای بهبود بخشیم.

۳.۳ پوشش خوشه‌ای گراف‌های کامل چند بخشی

در بخش ۵.۲ نگاهی به عدد افراز خوشه‌ای از مکمل یک گراف داشتیم. مسئله متناظر برای پوشش خوشه‌ای مسئله ساده‌ای است به عنوان مثال برای $m > 2$ $cc(K_n \setminus K_m) = m$ است. زیرا در پوشش خوشه‌ای خود برای هر رأس K_m به یک خوشه منحصر بفرد نیاز داریم.

مسئله جالب‌تر تعیین عدد پوشش خوشه‌ای از مکمل اجتماع گراف‌های کامل است. گرگوری و پولمن [۱۶] عدد پوشش خوشه‌ای مکمل یک تطابق کامل را محاسبه می‌کنند. این نتیجه گرگوری و پولمن را تعمیم می‌دهیم تا برای عدد پوشش خوشه‌ای مکمل گراف‌های کامل، کران‌هایی در نظر بگیریم. توجه کنید که مکمل اجتماع گراف‌های کامل، گراف کامل s بخشی K_{t_1, t_2, \dots, t_s} است که بخش‌های آن به ترتیب دارای اندازه t_1, t_2, \dots, t_s هستند. اگر همه‌ی بخش‌ها اندازه یکسانی داشته باشند یعنی $1 < t_1 = t_2 = \dots = t_s = t$ آن‌گاه گراف را با $K_s(t)$ نشان می‌دهیم. در بخش بعد قضیه زیر را اثبات خواهیم کرد.

قضیه ۱.۳.۳. اگر $0 < \epsilon < 1$ و $t > 1$ ثابت باشند. آن‌گاه برای s به اندازه کافی بزرگ داریم

$$cc(K_s(t)) \geq \log_b(st) + \frac{1 - \epsilon}{4} \log_b \log_b(st)$$

که $b = \frac{t}{(t-1)^{(t-1)/t}}$ است.

۴.۳ قضیه اردیش-کو-رادو و پوشش خوشه‌ای

از قضیه اردیش کو رادو [۶] استفاده می‌کنیم تا برای عدد پوشش خوشه‌ای $K_s(t)$ کران پایین در نظر بگیریم و همچنین از تعاریف معمول در نظریه مجموعه‌ها که در نظریه بولوباس^۶ [۶] مشاهده می‌شود استفاده می‌کنیم. در سال ۱۹۲۸ اسپرنر^۷ [۶] قضیه زیر را با حداکثر اندازه یک پادزنجیر اثبات کرد. که یک پادزنجیر یک خانواده \mathcal{F} از مجموعه‌ها است، به طوری که در \mathcal{F} برای هر $F \neq G$ ، $F \not\subseteq G$ است.

قضیه ۱.۴.۳. فرض کنید \mathcal{F} یک پادزنجیر در $[n]$ است. آن‌گاه

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

در سال ۱۹۶۱ اردیش کو رادو [۶] برای حداکثر اندازه یک خانواده متقاطع از مجموعه‌های k -عضوی در $[n]$ که در آن $n > 2k$ است یک کران بالا در نظر گرفت. که قضیه اردیش کو رادو می‌باشد.

قضیه ۲.۴.۳. اگر \mathcal{F} یک خانواده متقاطع از مجموعه‌های k عنصر در $[n]$ باشد که در آن $n \geq 2k$ است. آن‌گاه $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$. همچنین اگر $n > 2k$ باشد. آن‌گاه تساوی زمانی اتفاق می‌افتد که همه مجموعه‌ها در \mathcal{F} عنصر مشترکی داشته باشند.

اگر \mathcal{F} پادزنجیر متقاطعی باشد که مجموعه‌های آن از اندازه حداکثر k هستند. آن‌گاه گونه دیگری از قضیه اردیش کو رادو صدق می‌کند. این اثبات از تکنیک دیگری به نام روش دایره کاتونا^۸ [۶] استفاده می‌کند.

قضیه ۳.۴.۳. فرض کنید $n \geq 2k$ اگر \mathcal{F} پادزنجیر و خانواده متقاطعی از مجموعه‌ها با حداکثر اندازه k در $[n]$ باشد. آن‌گاه $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$.

برهان. فرض کنید که \mathcal{F} یک خانواده متقاطع از زیر مجموعه‌های $[n]$ است به طوری که \mathcal{F} یک پادزنجیر باشد. توجه داشته باشید که دقیقاً $(n-1)!$ جایگشت دایره‌ای در n وجود دارد. زوج‌های مرتب را (π, F) فرض می‌کنیم که در آن π یک جایگشت دایره‌ای از $[n]$ است و F مجموعه‌ای در \mathcal{F} است که تصویر آن در زیر π یک بازه است. هر جایگشت دایره‌ای ویژه π را ثابت در نظر بگیرید. حداکثر K عضو از \mathcal{F} تصویرشان در زیر π به عنوان یک بازه است، زیرا هر عضو F با سایر اعضا متقاطع است (و حداکثر اندازه آن K است). بنابراین تعداد زوج‌های مرتب (π, F) حداکثر $(n-1)! \cdot \frac{1}{k}$ است.

حال هر عضو خاص F در \mathcal{F} را در نظر بگیرید. لذا F تصویر یک بازه برای جایگشت‌های دایره‌ای $(n-|F|)! \cdot |F|!$ است، زیرا $|F|!$ روش برای جابه‌جا کردن عناصر F و $(n-|F|)!$ روش برای جابه‌جا کردن عناصر باقی مانده برای جایگشت دایره‌ای وجود دارد. بنابراین تعداد زوج‌های مرتب (π, F) عبارت است از

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} \frac{1}{k} \cdot |F|! \cdot (n-|F|)! \leq k \cdot \frac{1}{k} (n-1)!,$$

^۶Bollobás

^۷Sperner

^۸Katona Circle Method

بنابراین کافی است نشان دهیم که

$$|\mathcal{F}| \cdot k! \cdot (n - k)! \leq \sum_{F \in \mathcal{F}} |F|! \cdot (n - |F|)!,$$

اما

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} \frac{|F|! \cdot (n - |F|)!}{k! \cdot (n - k)!} = \sum_{F \in \mathcal{F}} \left[\binom{n}{k} / \binom{n}{|F|} \right] \geq \sum_{F \in \mathcal{F}} 1 = |\mathcal{F}|,$$

بنابراین $\binom{n}{k} \geq \binom{n}{|F|}$ برای هر $F \in \mathcal{F}$ ، لذا $|F| \leq k \leq n/2$.

□

۵.۳ خانواده‌های t -متوازن

فرض کنید \mathcal{F} یک خانواده t -متوازن باشد یعنی گراف متقاطع این خانواده یک گراف چند بخشی کامل از مرتبه $|\mathcal{F}|$ باشد به گونه‌ای که هریک از مؤلفه‌های آن از اندازه t باشند. لذا می‌توان گفت که $|\mathcal{F}|$ قابل تقسیم به t است و \mathcal{F} مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های $[n]$ است که در آن $n \in \mathbb{N}$ می‌باشد. به سادگی می‌توان مشاهده کرد که یک خانواده t -متوازن یک پادزنجیر است. عکس این مسئله را در نظر بگیرید یعنی \mathcal{F} یک خانواده t -متوازن است که یک پادزنجیر نمی‌باشد. آن‌گاه مجموعه‌های $A, B \in \mathcal{F}$ وجود دارند که در آن $A \subset B$ است. $D \in \mathcal{F}$ را چنان در نظر بگیرید که $B \cap D = \emptyset$ اما بنا به تعریف خانواده‌های t -متوازن $A \cap D \neq \emptyset$ که تناقض است. با استفاده از قضیه اردیش کو-رادو می‌توان یک کران بالا برای $|\mathcal{F}|$ از خانواده t -متوازن فراهم کرد.

قضیه ۱.۵.۳. فرض کنید \mathcal{F} خانواده‌ای t -متوازن متشکل از مجموعه‌های موجود در $[n]$ است. آن‌گاه

$$|\mathcal{F}| \leq t \binom{n-1}{\lceil n/t \rceil}.$$

علاوه بر این یک خانواده 2 -متوازن وجود دارد که نامساوی فوق را به تساوی تبدیل می‌کند.

برهان. فرض کنید که \mathcal{F} یک مجموعه t -متوازن از مجموعه‌های موجود در $[n]$ است. آن‌گاه برای s ، $\Omega(\mathcal{F}) \cong K_s(t)$ و رئوس $K_s(t)$ با مجموعه‌های موجود در $[n]$ مطابقت دارد. برای هر بخش از $K_s(t)$ یک رأس واحد که در مجموعه $[n]$ است، انتخاب کنید که در میان سایر رئوس آن بخش، کوچکترین است. فرض کنید که B مجموعه این رئوس است. پس B شامل مجموعه‌های s با حداکثر اندازه $\lceil n/t \rceil$ است. چون \mathcal{F} ، t -متوازن است و از طرفی \mathcal{F} یک پادزنجیر است لذا B یک پادزنجیر است. همچنین B متقاطع است زیرا دارای یک رأس از هر بخش می‌باشد. بنابراین طبق قضیه ۲.۴.۳ داریم

$$|\mathcal{F}| = t|B| \leq t \binom{n-1}{\lceil n/t \rceil - 1} = t \binom{n-1}{\lceil n/t \rceil}.$$

توجه داشته باشید که تساوی زمانی اتفاق می‌افتد که $t = 2$ باشد. فرض کنید $n/2 - 1 < \lceil n/2 \rceil - 1$ و B مجموعه‌ای از r زیرمجموعه موجود در $[n]$ باشد که شامل یک نقطه x است. پس $\mathcal{F} = B \cup \bar{B}$ □
تساوی را نتیجه می‌دهد.

این قضیه کران پایینی برای $cc(K_s(t))$ به وجود می‌آورد. در این پایان نامه برای سهولت قرار دهید

$$\sigma_s(t) = \min \left\{ n : s \leq \binom{n-1}{\lceil n/t \rceil} \right\}$$

نتیجه ۲.۵.۳. برای هر $s, t > 1$ داریم $cc(K_s(t)) \geq \sigma_t(s)$ که در بالا تعریف شده است.

برهان. فرض کنید C یک پوشش خوشه‌ای $K_s(t)$ با حداقل اندازه k است. رئوس $K_s(t)$ را با v_1, v_2, \dots, v_{ts} نشان دهید. فرض کنید که F_i شامل آن اعضای C است که دارای رأس v_i هستند و قرار دهید $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_{ts}\}$. از آنجایی که $\Omega(\mathcal{F})$ با $K_s(t)$ یکرخت است. لذا خانواده \mathcal{F} ، t - متوازن است. بنابراین طبق قضیه ۱.۵.۳ داریم

$$|\mathcal{F}| = ts \leq t \binom{k-1}{\lceil k/t \rceil},$$

و در نتیجه بنا به تعریف $\sigma_t(s) = k \geq cc(K_s(t))$ است. \square

برای $t = 2$ ممکن است تساوی برقرار باشد. به طور کلی فرض کنید که برابری در قضیه ۱.۵.۳ برقرار است. فرض کنید $k = \sigma_t(s)$ و یک خانواده \mathcal{F} ، t - متوازن در $S = \{1, 2, \dots, k\}$ انتخاب کنید و قرار دهید

$$|\mathcal{F}| = ts \leq t \binom{k-1}{\lceil k/t \rceil},$$

پس طبق قضیه ۱.۲.۳ گراف متقاطع \mathcal{F} با $K_s(t)$ و $cc(\Omega(\mathcal{F})) \leq k$ یکرخت است. بنابراین برای مقادیری از t تساوی در قضیه ۱.۵.۳ برقرار می‌شود که $cc(K_s(t)) = k = \sigma_t(s)$ باشد. فرض می‌کنیم که برای $t > 1$ ، $cc(K_s(t)) = \sigma_t(s)$ است. حال با استفاده از قضیه ۱.۳.۳ محاسبه کران پایینی $\sigma_t(s)$ راحت است. طبق قضیه ۲.۲.۳ داریم

$$cc(K_s(t)) \geq \log_2(st + 1),$$

قضیه ۱.۳.۳ این نتایج را بهبود می‌دهد زیرا هنگامی که $b \rightarrow 1$ لذا $t \rightarrow \infty$ می‌رود. این امر به گراف‌های چندبخشی کامل که بخش‌های آنها دارای اندازه متفاوتی هستند یک کران پایینی می‌دهد. اگر K_{t_1, t_2, \dots, t_s} دارای r بخش با اندازه بزرگتر از یک باشد و اگر

$$t = \min\{t_i : t_i > 1, i = 1, 2, \dots, s\},$$

آن‌گاه

$$cc(K_{t_1, t_2, \dots, t_s}) \geq \sigma_t(r) \geq \log_b r,$$

که

$$b = \frac{t}{(t-1)^{(t-1)/t}}.$$

این امر از لم ۲.۱.۲ برای پوشش خوشه‌ای پیروی می‌کند.

۶.۳ مکمل مسیره‌ها، دورها و تطابق کامل

در بخش ۹.۲ به تحلیل عدد افراز خوشه‌ای از مکمل مسیره‌ها، دورها و تطابق کامل پرداختیم. خوب است بدانیم که رفتار عدد پوشش خوشه‌ای با این گراف‌ها چگونه است. نخستین بار ارلین [۲۲] بود که درباره‌ی مجانب‌های عدد پوشش خوشه‌ای از مکمل یک تطابق کامل پرسشی طراحی کرد. گرگوری و پولمن به این سؤال پاسخ دادند و نشان دادند که به لحاظ مجانبی $cc(\bar{M}_m) \sim \log_2 m$ است. در خصوص مکمل یک دور و یک مسیر کان، گرگوری و پولمن [۱۶] مقادیر دقیق برای $cc(\bar{P}_m)$ و $cc(\bar{C}_m)$ را برای مقادیر کوچک m محاسبه کردند.

m	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
$cc(\bar{C}_m)$	۲	۵	۵	۷	۶	۷	۶	۸	۷	۷	۷	۸	۷	۸	۷	۸	۸
$cc(\bar{P}_m)$	۳	۴	۵	۵	۶	۶	۶	۶	۷	۷	۷	۷	۷	۷	۷	۷	۸

جدول ۱.۳: جدول ۱

آن‌ها نشان دادند که برای m به اندازه کافی بزرگ داریم

$$\log_2 m \leq cc(\bar{C}_m) - 2 \leq cc(\bar{P}_m) \leq 2 \log_2 m,$$

و حدس زدند که به لحاظ مجانبی $cc(\bar{P}_m) \sim \log_2 m$ و $cc(\bar{C}_m) \sim \log_2 m$ است. آلس^۹ و پولجاک^{۱۰} [۱] کران بالا را برای m به اندازه کافی بزرگ تا $1.695 \log_2 m \sim cc(\bar{P}_m)$ بهبود دادند. کوهایاکاوا^{۱۱} [۱۹] با یافتن یک مسیر القایی طولانی در گراف کنسر، مجدداً کران بالا را برای m ای که به اندازه کافی بزرگ است بهبود می‌دهد.

ابتدا توجه داشته باشید که اگر برای \bar{P}_{m-1} یک پوشش خوشه‌ای داشته باشیم آن‌گاه با استفاده از حداکثر $2 + cc(\bar{P}_{m-1})$ خوشه یک پوشش خوشه‌ای از \bar{C}_m بدست می‌آید. با استفاده از لم ۱.۱.۲ برای پوشش خوشه‌ای داریم

$$cc(\bar{C}_m) \leq cc(\bar{P}_{m-1}) + 2 \leq cc(\bar{P}_m) + 2.$$

نکته ۱.۶.۳. $cc(\bar{C}_m) \leq cc(\bar{P}_m) + 2$.

حال از نتایج بخش قبل استفاده می‌کنیم تا برای پوشش خوشه‌ای مکمل یک دور و در نتیجه مسیر یک کران پایین مطرح کنیم. توجه کنید که اگر برای \bar{C}_m یک پوشش خوشه‌ای داشته باشیم. آن‌گاه با افزودن حداکثر سه خوشه، یک پوشش خوشه‌ای برای \bar{M}_m بدست می‌آوریم.

نکته ۲.۶.۳. $cc(\bar{M}_m) \leq cc(\bar{C}_m) + 3$.

^۹ Alles

^{۱۰} Poljac

^{۱۱} Kohayakawa

بنابراین برای m به اندازه کافی بزرگ و $\epsilon > 0$ ثابت، بنا به قضیه ۱.۳.۳ داریم

$$\log_2 m + \frac{1-\epsilon}{2} \log_2 \log_2 m - 3 \leq cc(\bar{C}_m) \leq cc(\bar{P}_m) + 2,$$

لذا برای m به اندازه کافی بزرگ داریم

$$\log_2 m \leq cc(\bar{C}_m) - 2 \leq cc(\bar{P}_m).$$

۷.۳ دورها و مسیرهای القایی در گراف کنسر

در این بخش نگاهی خواهیم داشت به نحوه بدست آوردن یک کران بالا برای عدد پوشش خوشه‌ای مکمل یک مسیر و در نتیجه مکمل یک دور. برای اکثر نتایج این بخش از واندن مولن^{۱۲} [۲۵] استفاده می‌کنیم. بنا به قضیه ۱.۲.۳ یافتن یک گراف القایی H در گراف کنسر $K_{n:k}$ موجب به وجود آمدن یک پوشش خوشه‌ای \bar{H} می‌شود. بنابراین به مسئله یافتن مرتبه بزرگ‌ترین دور (یا مسیر) در گراف کنسر $K_{n:k}$ نگاهی می‌کنیم. $p(n, k)$ و $c(n, k)$ را طوری تعریف می‌کنیم که به ترتیب نشان دهنده حداکثر مرتبه (تعداد رئوس) یک مسیر و یک دور در $K_{n:k}$ باشند. کران‌های بالای $p(n, k)$ و $c(n, k)$ توسط آلنز و پولجاک [۱] و کوهایاکاوا [۱۹] ارائه شده‌اند. یک استدلال ساده این دو عدد را به هم مرتبط می‌کند. اگر C_m دور القایی در یک گراف باشد، آن‌گاه حذف یک رأس، یک مسیر القایی از مرتبه $m - 1$ را می‌دهد.

گزاره ۱.۷.۳. $k \geq 1$ را ثابت بگیرید. آن‌گاه برای $n \geq 2k + 1$ داریم $p(n, k) \geq c(n, k)$.

به علاوه اگر H یک زیرگراف القایی از گراف کنسر $K_{n:k}$ باشد. گراف متقاطع $V(H)$ مکمل H است. لذا $cc(\bar{H}) \leq n$. همچنین اگر یک مسیر القایی از مرتبه m در $K_{n:k}$ باشد، آن‌گاه $cc(\bar{P}_m) \leq n$ است. و اگر H یک مسیر یا دور القایی باشد در این صورت $cc(\bar{P}_m) \leq cc(\bar{P}_{m+1})$ است. لذا لم زیر مطرح می‌شود.

لم ۲.۷.۳. $k \geq 1, n > 2k$ را در نظر بگیرید. برای همه عددهای صحیح مثبت $s \leq p(n, k)$ داریم $cc(\bar{P}_s) \leq n$ و $cc(\bar{C}_{c(n,k)}) \leq n$.

برای ایجاد یک کران بالا برای عدد پوشش خوشه‌ای مکمل یک مسیر باید یک کران پایین برای $p(2k + 1, k)$ بدست آوریم. کوهایاکاوا [۱۹] با استفاده از یک گراف دو بخشی و در نظر گرفتن یک ساختار بازگشتی برای یک مسیر القایی در $K_{2k+1:k}$ به $p(2k + 1, k)$ کران پایین می‌دهد. فرض کنید $s \in \mathbb{N}$ است و G_s را طوری تعریف کنید که یک گراف دو بخشی با رده‌های رأسی $[2s]^{(s)}$ و $[2s]^{(s-1)}$ حاصل شود. دو رأس در رده‌های مختلف، مجاور یکدیگر قرار دارند اگر و تنها اگر جدا از هم باشند. (توجه داشته باشید که از G_s برای نشان دادن یک گراف دو بخشی استفاده می‌کنیم و برای گرافی بر روی رئوس s استفاده نمی‌کنیم).

^{۱۲}Vander Mulen

$w(s)$ را طوری تعریف می‌کنیم تا حداکثر تعداد رئوس در یک مسیر القایی در G_s برابر $[2s]^{(s)}$ باشد. توجه داشته باشید که $w(s)$ تقریباً نیمی از مرتبه یک مسیر القایی بیشینه در G_s است. با اثبات قضیه زیر ساختاری از مسیره‌های القایی طولانی در گراف کنسر $K_{2k+1:k}$ بدست می‌آید. برای اثبات دیگر از $K_{a_1, a_2, \dots, a_l:k}$ برای نشان دادن گرافی استفاده می‌کنیم که مجموعه رئوس آن شامل k زیرمجموعه از $\{a_1, a_2, \dots, a_l\}$ است و در آن دو رأس مجاور یکدیگر قرار دارند اگر و تنها اگر جدا از هم باشند. توجه داشته باشید که $K_{a_1, a_2, \dots, a_l:k}$ با $K_{l:k}$ یکرخت است.

قضیه ۳.۷.۳. برای $k \geq 2, s \geq 1$ ،

$$p(2(k+s)+1, k+s) \geq \begin{cases} w(s) \cdot (p(2k+1, k) + 1) - 1, & \text{اگر } p(2k+1, k) \text{ فرد باشد} \\ w(s) \cdot p(2k+1, k) - 1, & \text{اگر } p(2k+1, k) \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

برهان. فرض کنید $A_1 B_1 A_2 B_2 \dots B_{m-1} A_m$ یک مسیر القایی در G_s است. که برای $1 \leq i \leq m$ ، $A_i \in [2s]^{(s)}$ و برای $1 \leq j \leq m-1$ ، $B_j \in [2s]^{(s-1)}$ است. فرض کنید که $V_1 V_2 \dots V_n$ یک مسیر القایی از مرتبه n (که فرد است) در $K_{2s+1, 2s+2, \dots, 2(k+s)+1:k}$ است که با $K_{2k+1:k}$ یکرخت است. مسیر زیر را در نظر بگیرید که

$$P_i = A_i \cup V_1, \bar{A}_i \cup V_2, A_i \cup V_3, \dots, \bar{A}_i \cup V_{n-1}, A_i \cup V_n$$

که در آن \bar{A}_i مکمل A_i در $[2s]^{(s)}$ برای $1 \leq i \leq m$ است. توجه کنید که مسیر در $A_i \cup V_n$ به پایان می‌رسد زیرا n فرد در نظر گرفتیم.

لذا مجموعه مسیره‌های $P = \cup_i P_i$ مجموعه‌ای از مسیره‌های القایی جدا از هم m رأس در $K_{2(k+s)+1:k+s}$ است. توجه داشته باشید که برای $i \neq j$ می‌توانیم قرار دهیم $A_i = \bar{A}_j$ زیرا $A_i \in [2s]^{(s)}$ است. این مسیره‌ها را به یکدیگر متصل می‌کنیم تا مسیری از مرتبه $m(n+1) - 1$ در $K_{2(k+s)+1:k+s}$ به وجود آوریم. فرض کنید $b \in V_3 \setminus V_1$ و $a \in V_{n-2} \setminus V_n$ باشد. آن‌گاه برای $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ تعریف کنید

$$C_i = \begin{cases} V_{n-1} \cup B_i \cup \{a\}, & \text{اگر } i \text{ فرد باشد} \\ V_2 \cup B_i \cup \{b\}, & \text{اگر } i \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

لذا رئوس C_i مجاور نیستند، زیرا $V_{n-1} \cap V_2 \subseteq C_i \cap C_j$ و $V_{n-1} \cap V_2 \neq \emptyset$ است. (برای $n \geq 5$ و $1 \leq i, j \leq m-1$) همچنین هر C_i دقیقاً به دو رأس در P متصل است یعنی $V_n \cup A_{i+1}$ و $V_1 \cup A_i$ برای i فرد، یا $V_1 \cup A_{i+1}$ و $V_1 \cup A_i$ زوج.

بنابراین مسیری از مرتبه $m(n+1) - 1$ در $K_{2(k+s)+1:k+s}$ بدست می‌آوریم. از آنجایی که طولانی‌ترین مسیر القایی در G_s ممکن است رأس ابتدا و انتهایی در $[2s]^{(s)}$ نداشته باشد، این رئوس را حذف می‌کنیم تا مسیری مثل بالا را بدست آوریم. این کار را می‌توان هنگامی که $w(s)$ رئوس را در $[2s]^{(s)}$ می‌شمارد انجام داد. با فرض $m = w(s)$ و

$$n = \begin{cases} p(2k+1, k) - 1, & \text{اگر } p(2k+1, k) \text{ زوج باشد} \\ p(2k+1, k), & \text{اگر } p(2k+1, k) \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

نتیجه بدست می آید. □

قضیه ۲.۷.۳ برای $p(2k+1, k)$ یک کران پایین به وجود می آورد.

نتیجه ۴.۷.۳. $s \geq 1$ را ثابت بگیرید. آن گاه برای هر $k \geq 1$ ، $p(2k+1, k) \geq w(s)^{\lfloor (k-1)/s \rfloor}$ است.

برهان. توجه داشته باشید که این قضیه زمانی برقرار است که $s = 1$ و لذا $w(s) = 1$ باشد. $s \geq 2$ را ثابت در نظر بگیرید و به صورت بازگشتی از $p(2(k-s)+1, k-s) - 1$ استفاده کنید که برای هر عدد صحیح $1 \leq t \leq \frac{k-1}{s}$ داریم

$$p(2k+1, k+1) \geq w(s)^t \cdot p(2(k-ts)+1, k-ts) - \sum_{i=0}^{t-1} w(s)^i,$$

لذا برای $s \geq 1$ و $w(s) \geq 2$ داریم

$$p(2k+1, k+1) \geq w(s)^t \cdot [p(2(k-ts)+1, k-ts) - 1],$$

به طوری که $p(3, 1) = 2$ ، قرار دهید $t = \lfloor (k-1)/s \rfloor$ لذا داریم

$$p(2k+1, k+1) \geq w(s)^{\lfloor (k-1)/s \rfloor} [p(3, 1) - 1] = w(s)^{\lfloor (k-1)/s \rfloor}.$$

□

کوهایاکاوا [۱۹] با استفاده از یک جست و جوی کامپیوتری، یک مسیر القایی طولانی در G_6 یافت.

نکته ۵.۷.۳. یک مسیر القایی در G_6 با 300 رأس در $[12]^6$ وجود دارد (یعنی $w(6) \geq 300$).

بنابراین طبق نتیجه ۴.۷.۳، برای هر $k \geq 1$ ، $p(2k+1, k) \geq 300 \cdot \lfloor k-1/6 \rfloor \geq (2.587)^{k-1}$ است. طبق لم ۲.۷.۳ برای $m \leq p(2k+1, k)$ ، $cc(\bar{P}_m) \leq 2k+1$ است. قرار دهید $m = \lfloor (2.587)^{k-1} \rfloor + 1$ آن گاه داریم $k \leq \frac{\log_2 m}{\log_2 2.587} + 1$ لذا برای m به اندازه کافی بزرگ داریم

$$cc(\bar{P}_m) \leq 2k+1 \leq 1.459 \log_2 m.$$

کوهایاکاوا [۱۹] حدس زد که $w(s)^{1/s} = 4$ است اگر این مسئله درست باشد آن گاه قادر خواهیم بود که 1.459 را در کران بالا تا $o(1) + 1$ بهبود دهیم. توجه داشته باشید که کان و گرگوری [۱۱] نیز حدس زدند که $cc(\bar{P}_m) \sim \log_2 m$ است. بنابراین قضیه زیر را مطرح می کنیم.

قضیه ۶.۷.۳. برای m به اندازه کافی بزرگ،

$$\log_2 m \leq cc(\bar{C}_m) - 2 \leq cc(\bar{P}_m) \leq 1.459 \log_2 m$$

۸.۳ مکمل گراف‌ها با حداکثر درجه دو

در این بخش کران‌های عدد پوشش خوشه‌ای مکمل گراف‌هایی را بدست خواهیم آورد که دارای حداکثر درجه دو هستند. فرض کنید که G_n گرافی با n رأس و حداکثر درجه دو است. لذا G_n گرافی است که مؤلفه‌های آن مسیرها و دورها هستند. فرض می‌کنیم مسیرها و دورها بدیهی نیستند. کان، گرگوری و پولمن [۱۱] اثبات می‌کنند که برای n به اندازه کافی بزرگ داریم

$$\log_2 n \leq cc(\bar{G}_n) \leq 5.8 \log_2 n.$$

برای ایجاد یک کران پایین در $cc(\bar{G}_n)$ که در آن G_n گرافی است که مؤلفه‌های آن مسیرها و دورها هستند، از مکمل یک تطابق کامل استفاده می‌کنیم. توجه داشته باشید که با حذف حداکثر $\lfloor 3n/5 \rfloor$ رأس از G_n یک تطابق کامل بر روی حداقل $\lfloor 2n/5 \rfloor$ رأس بدست می‌آوریم. بنابراین طبق لم ۲.۱.۲ و لم ۱.۰.۲ اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد. داریم

$$cc(\bar{G}_n) \geq cc(\bar{M}_{\lfloor 2n/5 \rfloor}) \geq \log_2 n.$$

برای یک کران بالا در $cc(\bar{G}_n)$ ابتدا به لم زیر نیاز داریم که در مقالات کان، گرگوری و پولمن [۱۱] یافت می‌شود.

لم ۱.۸.۳. فرض کنید G گرافی با مؤلفه‌های G^i برای $i = 1, 2, \dots, s$ باشد. آن‌گاه

$$cc(\bar{G}) \leq \max\{cc(\bar{G}^i) : i = 1, 2, \dots, s\} + cc(K_{t_1, t_2, \dots, t_s}),$$

که در آن t_i عدد رنگی G^i برای $i = 1, 2, \dots, s$ است.

برهان. ابتدا یال‌هایی که به صورت vw هستند را پوشش خواهیم داد. به طوری که

$$v \in G^i \implies w \notin G^i.$$

از آنجایی که t_i عدد رنگی G^i است می‌توانیم خوشه‌های t_i در \bar{G}^i را انتخاب کنیم که رؤس \bar{G}^i را افزایش می‌کنند. این خوشه‌ها را $K^i(1), K^i(2), \dots, K^i(t_i)$ بنامید. توجه داشته باشید که اگر $t_j = 1$ باشد، $K^i(j)$ می‌تواند یک رأس واحد باشد. به اجتماع و پیوستن گراف‌ها در [۱۲] توجه کنید. گراف زیر را در نظر بگیرید

$$H = \bigvee_{i=1}^s (K^i(1) \cup K^i(2) \cup \dots \cup K^i(t_i)).$$

یک پوشش خوشه‌ای از H یال‌هایی که به صورت vw هستند را پوشش می‌دهد به طوری که

$$v \in G^i \implies w \notin G^i.$$

توجه داشته باشید که اگر $x, y \in V(K^i(j))$ آن‌گاه x, y هم‌ارز هستند. بنابراین اگر K^i یک خوشه در \bar{G}^i برای هر $i = 1, 2, \dots, s$ باشد. آن‌گاه $cc(H) = cc(K_{t_1, t_2, \dots, t_s})$. پیوستن $K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_s$

یک خوشه در \bar{G} است. با پیوستن خوشه‌ها از حداقل پوشش‌های خوشه‌ای \bar{G}^i برای $i = 1, 2, \dots, s$ ، یال‌های باقیمانده در گراف‌های \bar{G}^i را می‌توان با $\max\{cc(G^i) : i = 1, 2, \dots, s\}$ خوشه در G پوشش داد. \square

کان، گرگوری و پولمن [۱۱] از این نتیجه برای دستیابی به کران بالای $cc(\bar{G}_n)$ استفاده می‌کنند. **قضیه ۲.۸.۳.** اگر G_n مؤلفه‌هایی داشته باشد که شامل دورها و مسیرهای غیربدهی باشند. آن‌گاه برای n به اندازه کافی بزرگ داریم

$$cc(\bar{G}_n) = O(\log_2 n).$$

برهان. فرض کنید که G_n دارای مؤلفه‌های G^i برای $i = 1, 2, \dots, s$ است و در آن هر G^i یک دور یا یک مسیر بر روی رأس‌های $1 > n_i$ است. به دلیل آن که عدد رنگی هر G^i حداکثر سه است. بنا به **لم ۱.۸.۳** داریم

$$cc(\bar{G}_n) \leq \max\{cc(\bar{G}^i) : i = 1, 2, \dots, s\} + cc(K_s(\mathfrak{Z})),$$

توجه داشته باشید که طبق **قضیه ۶.۷.۳** برای n_i به اندازه کافی بزرگ و $n_i > 1$ داریم

$$cc(\bar{G}^i) \leq 1.459 \log_2 n_i + O(1).$$

لذا برای یک کران بالا در $cc(K_s(\mathfrak{Z}))$ بنا به **لم ۱.۸.۳** داریم

$$cc(K_{\mathfrak{Z}s}(\mathfrak{Z})) \leq cc(K_s(\mathfrak{Z})) + cc(K_{\mathfrak{Z}}(\mathfrak{Z})) = cc(K_s(\mathfrak{Z})) + 9.$$

بنابراین

$$cc(K_s(\mathfrak{Z})) \leq 9 \log_2 s + O(1).$$

توجه داشته باشید که کان، گرگوری و پولمن [۱۱] با استفاده از مربع‌های لاتین یک کران بالا از $6 \log_2 s + O(1)$ برای $cc(K_s(\mathfrak{Z}))$ به وجود آوردند. با این حال $9 \log_2 s + O(1)$ برای اهداف ما کافی است. لذا برای n به اندازه کافی بزرگ داریم

$$cc(\bar{G}_n) \leq 1.459 \log_2 n + 9 \log_2 s = O(\log_2 n).$$

\square

کان، گرگوری و پولمن [۱۱] این سؤال را مطرح کردند که آیا برای n به اندازه کافی بزرگ می‌توانیم $cc(\bar{G}_n) < (1 + o(1)) \log_2 n$ را در **قضیه ۲.۸.۳** بدست آوریم یا خیر. مثالی مطرح می‌کنیم از گرافی که مکمل مسیرها و دورها است و این مسئله برای آن صدق نمی‌کند. G_n را گرافی در نظر بگیرید که در آن هر $K_{\mathfrak{Z}}$ یک مؤلفه است و n قابل تقسیم بر سه است. بنابراین

$$cc(\bar{G}_n) \geq 1.088 \log_2 n.$$

لذا \bar{G}_n یک مثال نقض است.

۹.۳ مکمل جنگل‌ها

در این بخش از تکنیک‌های بخش قبل استفاده می‌کنیم تا کران‌های عدد پوشش خوشه‌ای مکمل یک جنگل یعنی \bar{F}_n را بدست آوریم که F_n نشان‌دهنده جنگلی با n رأس است. نشان می‌دهیم

$$\log_2 k \leq cc(\bar{F}_n) \leq 10.3 \log_2 n,$$

که در آن k طول طولانی‌ترین مسیر در F_n است.

برای ایجاد یک کران پایین در $cc(\bar{F}_n)$ از مکمل یک مسیر استفاده می‌کنیم. فرض کنید که P_k یک مسیر القایی در F_n با رأس‌های k باشد. لذا بنا به لم ۲.۱.۲ و قضیه ۶.۷.۳ اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد. آن‌گاه

$$cc(\bar{F}_n) \geq cc(\bar{P}_k) \geq \log_2 k.$$

توجه داشته باشید که این کران با استفاده از گراف ستاره بدست می‌آید. همچنین توجه داشته باشید که این کران پایین در صورتی برقرار می‌شود که با اندازه بزرگترین تطابق القایی از F_n جایگزین شود. حال یک کران بالا در $cc(\bar{F}_n)$ بدست می‌آوریم. در ادامه این بخش فرض کنید g تابعی است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$g(n) = \max\{cc(\bar{F}_n) : F_n \text{ یک جنگل با رئوس } n \text{ است}\},$$

به سادگی می‌توان مشاهده کرد که $g(n) \leq g(n+1) \leq g(n) + 2$.

لم ۱.۹.۳

$$g(n) \leq g(\lfloor 2n/3 \rfloor) + 6.$$

برهان. فرض کنید F_n یک جنگل است به طوری که $g(n) = cc(\bar{F}_n)$ باشد. بنا به لم ۲.۱۰.۲، F_n را به جنگل‌های F^1 و F^2 تقسیم می‌کنیم به طوری که $|F^i| \leq \lfloor 2n/3 \rfloor$ برای $i = 1, 2$ و برای رأس v از F_n ، $V(F^1) \cup V(F^2) = \{v\}$ باشد، یک پوشش خوشه‌ای \bar{F}_n ایجاد خواهیم کرد. بنا به لم ۱.۸.۳ $F_n - v$ را می‌توان با حداکثر

$$\max\{cc(\overline{F^1 - v}), cc(\overline{F^2 - v})\} + cc(K_2(2))$$

خوشه پوشش داد. اما $cc(K_2(2)) = 4$ است. همچنین یال‌های مجاور v در \bar{F}_n را می‌توان با حداکثر دو خوشه پوشش داد. حال داریم

$$\max\{cc(\overline{F^1 - v}), cc(\overline{F^2 - v})\} \leq g(\lfloor 2n/3 \rfloor).$$

□

نشان خواهیم داد که اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد. آن‌گاه $cc(\bar{F}_n) = O(\log_2 n)$ است.

قضیه ۲.۹.۳. فرض کنید F_n جنگلی با n رأس باشد. آن گاه برای n به اندازه کافی بزرگ داریم

$$cc(\bar{F}_n) \leq 10.3 \log_2 n.$$

برهان. فرض کنید F_n جنگلی با n رأس باشد. آن گاه $cc(\bar{F}_n) \leq g(n)$ بنابراین کافی است ثابت کنیم که $g(n) \leq 10.3 \log_2 n$ است. فرض کنید $r = \log_{3/2} n$ باشد به طوری که $n \leq \lfloor (3/2)^r \rfloor + 1$ آن گاه با استفاده از لم ۱.۹.۳ و $g(n) \leq g(n+1) \leq g(n) + 2$ ، برای n به اندازه کافی بزرگ داریم

$$g(n) \leq g(\lfloor (3/2)^r \rfloor + 1) \leq 6r + O(1) \leq 10.3 \log_2 n.$$

□

حال این سوال مطرح می شود که آیا برای n به اندازه کافی بزرگ داریم

$$cc(\bar{F}_n) \leq (1 + o(n)) \log_2 n$$

درحقیقت اگر $cc(\bar{P}_n) \sim \log_2 n$ باشد. آن گاه این مسئله حدس معقولانه ای به نظر می رسد. احتمالاً کران بالا $O(\log_2 k)$ است که در آن k از اندازه بزرگترین تطابق در F_n است.

مراجع

- [1] P. Alles and S. Poljak Long induced paths and cycles in Kneser graphs *Graphs and Combinatorics* **5** (1989) 303-306.
- [2] N. Alon and J.H. Spencer, *The Probabilistic Method*, Wiley, New York, (1992). (Second Edition, 2000).
- [3] R.C. Baker, G. Harman, and J. Pintz, The difference between consecutive primes, *Proc. London Math. Soc.* **83**(3) (2001) 532-562.
- [4] L.M. Batten and A. Beutelspacher, *The theory of finite linear spaces*, Cambridge Univ. Press, New York, (1993).
- [5] T. Beth, D. Jungnickel, and H. Lenz, *Design Theory, Volume 2, Second Edition*, Cambridge Univ. Press, New York, (1999).
- [6] B. Bollobás, *Combinatorics: set systems, hypergraphs, families of vectors, and combinatorial probability*, Univ. of Cambridge, New York, (1994).
- [7] R.C. Brigham and R.D. Dutton, Changing and unchanging invariants: The edge clique covering number, *Congr. Numer.* **70** (1990) 145-152.
- [8] N.G. de Bruijn and P. Erdos, On a combinatorial problem, *Indag. Math.***10** (1948)421-423.
- [9] P.J. Cameron and J.H. Van Lint, *Designs, graphs, codes and their links* , London Mathematical Society Student Texts **22**, Cambridge Univ. Press, New York, (1991).
- [10] D. de Caen and D.A. Gregory, Partitions of the edge-set of a multigraph by complete subgraphs, *Congressus Numerantium* **47** (1985) 255-263.
- [11] D. de Caen, D.A. Gregory, and N.J. Pullman, Clique coverings of complements of paths and cycles, *Annals of Discrete Math.* **27** (1985) 25-268.

-
- [12] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, *Graph theory with applications*, MacMillan, London, (1972).
- [13] P. Erdos, R. Faudree, and E.T. Ordman, Clique partitions and clique coverings, *Discrete Math.* **72** (1988) 93-101.
- [14] P. Erdos, A.W. Goodman, and L. Posa, The representation of a graph by set intersections, *Can. J. Math.* **18** (1966) 106-112.
- [15] D.A. Gregory, S. McGuinness, and W. Wallis, Clique partitions of the cocktail party graph, *Discrete Math.* **59** (1986) 267-273.
- [16] D.A. Gregory and N.J. Pullman, On a clique covering problem of Orlin, *Discrete Math.* **41** (1982) 97-99.
- [17] A. Gy'arfás, A simple lower bound on edge coverings by cliques, *Discrete Math.* **85** (1990) 103-104.
- [18] M. Hall, Jr., A problem in partitions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **47** (1941) 801-807
- [19] Y. Kohayakawa, A note on induced cycles in Kneser graphs, *Combinatorica*, **11** (1991) 245-251.
- [20] S.D. Monson, The effects of vertex deletion and edge deletion on the clique partition number, *Ars Combin.* **42** (1996), 89-96.
- [21] S.D. Monson, N.J. Pullman, and R. Rees, A survey of clique and biclique coverings and factorizations of $(0, 1)$ -matrices, *Bull. Inst. Combin. Appl.* **14** (1995), 17-86.
- [22] J. Orlin, Contentment in Graph Theory, *Indag. Math.* **39** (1977), 406-424.
- [23] N.J. Pullman and A. Donald, Clique coverings of graphs II - Compliments of cliques, *Utilitas Mathematica* **19** (1981) 207-213.
- [24] E. Spilrajn-Marczewski, Sur des propri'et'es des classes d'ensembles, *Fund. Math.* **33** (1945), 303-307.
- [25] K. Vander Meulen, Induced subgraphs of Kneser graphs, M.Sc. Thesis, Queen's University, Kingston, ON (1991).
- [26] W.D. Wallis, Asymptotic values of clique partition numbers, *Combinatorica*, **2**(1) (1982) 99-101.

- [27] W.D. Wallis, Clique partitions of the complement of a one-factor, *Congressus Numerantium*, **46** (1985) 317-319.
- [28] W.D. Wallis, Finite planes and clique partitions, *Contemporary Mathematics*, **111** (1990) 279-285.
- [29] W.D. Wallis, The clique partition number of the complement of a cycle, *Annals of Discrete Mathematics*, **27** (1985) 335-344.
- [30] D. B. West , *Introduction to graph theory* , prentice Hall, 2001.

پیوست آ

کران پایین برای $\sigma_t(s)$

لم ۱۰۰. فرض کنید که $t > 1$ یک عدد صحیح است، $\sigma_t(s) = \min\{n : s \leq \binom{n-1}{\lceil n/t \rceil}\}$ و $0 < \epsilon < 1$ را ثابت در نظر بگیرید. آن گاه برای s به اندازه کافی بزرگ داریم

$$\sigma_t(s) \geq \log_b(st) + \frac{1-\epsilon}{2} \log_b \log_b(st),$$

که

$$b = \frac{t}{(t-1)^{(t-1)/t}}.$$

برهان. ابتدا از فرمول استرینگ^۱ استفاده می‌کنیم

$$\sqrt{2\pi n} (n/e)^n e^{1/(12n+1)} \leq n! \leq \sqrt{2\pi n} (n/e)^n e^{1/(12n)},$$

لذا نامعادله زیر را می‌توان از فرمول استرینگ بدست آورد

$$\binom{tn}{n} \leq \sqrt{\frac{t}{2\pi(t-1)}} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{t^t}{(t-1)^{t-1}} \right)^n.$$

از طرفی طبق فرض $\sigma_t(s) = \min\{n : s \leq \binom{n-1}{\lceil n/t \rceil}\}$ است. لذا

$$s \leq \binom{n-1}{\lceil n/t \rceil} = \frac{n - \lceil n/t \rceil}{n} \binom{n}{\lceil n/t \rceil} \leq \frac{t-1}{t} \binom{n}{\lceil n/t \rceil} \leq \frac{t-1}{t} \binom{t \lceil n/t \rceil}{\lceil n/t \rceil},$$

^۱Stirling's

بنابراین

$$s \leq \frac{t-1}{t} \sqrt{\frac{t}{2\pi(t-1)}} \frac{1}{\sqrt{n/t}} \left(\frac{t^t}{(t-1)^{t-1}} \right)^{\lceil n/t \rceil},$$

برای سهولت قرار می‌دهیم

$$b = \frac{t}{(t-1)^{(t-1)/t}}, \quad c = \frac{t^2 b^2 (t-1)}{2\pi},$$

آن‌گاه $b > 1$ برای $t > 1$ ،

$$st \leq \sqrt{\frac{t-1}{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot b^{n+1} t = b^n \sqrt{\frac{c}{n}},$$

لذا

$$\log_b(st) \leq n - \frac{1}{2} \log_b n + \frac{1}{2} \log_b c,$$

$$n \geq \log_b(st) + \frac{1}{2} \log_b n - \frac{1}{2} \log_b c,$$

s را به اندازه کافی بزرگ در نظر بگیرید. بنابراین

$$\log_b(st) \geq c(\log_b(st))^{1-\epsilon} + \frac{1}{2} \log_b bc,$$

پس می‌توان این t, b, c, ϵ را ثابت در نظر گرفت. لذا

$$\begin{aligned} n &\geq \log_b(st) + \frac{1}{2} \log_b(c(\log_b(st))^{1-\epsilon}) - \frac{1}{2} \log_b c \\ &= \log_b(st) + \frac{1-\epsilon}{2} \log_b \log_b(st). \end{aligned}$$

□ از آن‌جا که $\sigma_t(s)$ کوچکترین n است لذا اثبات به پایان می‌رسد.

توجه داشته باشید که $b = 2$ است وقتی که $t = 2$ باشد همچنین $t \rightarrow \infty$ و $b \rightarrow 1$ می‌توان از استدلال مشابهی برای دادن یک کران پایین به $\sigma_t(s)$ استفاده کرد. که در واقع داریم

$$\binom{tn}{n} \sim \sqrt{\frac{t}{2\pi(t-1)}} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{t^t}{(t-1)^{t-1}} \right)^n,$$

برای سهولت $\sigma = \sigma_t(s)$ قرار می‌دهیم. بنابراین برای یک کران بالا در s می‌توانیم از

$$s \geq \binom{\sigma-2}{\lceil \frac{\sigma-1}{t} \rceil} \geq d_1(t) \binom{t \lceil \frac{\sigma-1}{t} \rceil}{\lceil \frac{\sigma-1}{t} \rceil},$$

استفاده کنیم که $d_1(t)$ یک تابع از t است. آن‌گاه برای تابع $d_2(t)$ داریم

$$s \geq d_2(t) \frac{b^\sigma}{\sqrt{\sigma}}$$

همچنین یک تابع $d_{\gamma}(t)$ وجود دارد. بنابراین

$$d_{\gamma}(t) \frac{b^{\sigma}}{\sqrt{\sigma}} \leq s \leq d_{\gamma}(t) \frac{b^{\sigma}}{\sqrt{\sigma}},$$

با گرفتن لگاریتم مبنای b ، تقسیم بر σ و با حد گرفتن $s \rightarrow \infty$ (و در نتیجه $\sigma \rightarrow \infty$) داریم

$$1 \leq \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\log_b s}{\sigma} \leq 1,$$

بنابراین، $\sigma_t(s) \sim \log_b s$ که

$$b = \frac{t}{(t-1)^{(t-1)/t}}.$$

۱.۱ یک رابطه بازگشتی

لم ۱.۱.۱. فرض کنید x یک عدد حقیقی مثبت و $\epsilon > 0$ باشد. اگر

$$\frac{c(x)}{x} \leq 1 + \epsilon + \frac{c(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

آن گاه برای M ثابت،

$$c(x) \leq (1 + \epsilon)x \log_{\gamma} \log_{\gamma} x + Mx.$$

برهان. فرض کنید $z = \log_{\gamma} \log_{\gamma} x$ و قرار دهید $h(z) = \frac{c(x)}{x}$. آن گاه

$$\begin{aligned} \log_{\gamma} \log_{\gamma} \sqrt{x} &= \log_{\gamma} \frac{1}{\gamma} \log_{\gamma} x \\ &= \log_{\gamma} \log_{\gamma} x + \log_{\gamma} \frac{1}{\gamma} \\ &= z - 1, \end{aligned}$$

بنابراین $h(z-1) = \frac{c(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$. لذا بنا به فرض داریم

$$h(z) \leq 1 + \epsilon + h(z-1).$$

مجداد با استفاده از این نامساوی داریم

$$h(z) \leq (1 + \epsilon)[z] + h(z - [z]).$$

حال قرار دهید

$$M = \sup_{z \in [0, 1]} h(z),$$

آن گاه

$$h(z) \leq (1 + \epsilon)z + M,$$

لذا

$$c(x) \leq (1 + \epsilon)x \log_{\gamma} \log_{\gamma} x + Mx.$$

□

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Clique partitions	افراز خوشه‌ای
Leaf	برگ
Antichain	پادزنجیر
Clique Covering	پوشش خوشه‌ای
Vertex Covering	پوشش رأسی
Matching	تطابق
Forest	جنگل
Clique	خوشه
Tree	درخت
Cycle	دور
Degree	درجه
Induced Subgraph	زیرگراف القایی
Stem	ساقه
Loop	طوقه
Empty graph	گراف تهی
Bipartite graph	گراف دوبخشی
Complete graph	گراف کامل
Kneser graph	گراف کنسر
Regular graph	گراف منتظم
Walk	گشت
Adjacent	مجاور
Order	مرتبه
Path	مسیر
Complementary	مکمل
Isomorphic	یکریخت

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adjacent	مجاور
Antichain	پادزنجیر
Bipartite graph	گراف دوبخشی
Clique	خوشه
Clique Covering	پوشش خوشه‌ای
Clique partitions	افراز خوشه‌ای
Complementary	مکمل
Complete graph	گراف کامل
Cycle	دور
Degree	درجه
Empty graph	گراف تهی
Forest	جنگل
Induced Subgraph	زیرگراف القایی
Isomorphic	یکریخت
Kneser graph	گراف کنسر
Leaf	برگ
Loop	طوقه
Matching	تطابق
Order	مرتب‌ه
Path	مسیر
Regular graph	گراف منتظم
Stem	ساقه
Tree	درخت
Vertex Covering	پوشش رأسی
Walk	گشت

Abstract

Let G be a graph with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$. We call a complete subgraph of G a clique of G . A clique partition of G is a set of cliques of G , which together contain each edge of G exactly once. The smallest cardinality of any clique partition of G is called the clique partition number of G . A clique cover of a graph G is a set of cliques of G such that each edge of G appears in at least one clique. The smallest size of a clique cover is called the clique cover number of G . In this thesis, we will investigate the clique partition and clique cover numbers of graphs. In this regard we prove two famous theorems, the Erdős-Goodman-pósa theorem and Bruijn-Erdős theorem. Also, the clique partition numbers of some special families of graphs will be computed.

Keywords: clique, clique partition, clique partition number, clique covering, complement of graphs.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Graph and Combinatorics

Clique partitions and coverings of graphs

By: Shima Taheri

Supervisor

Dr. Meysam Alishahi

Advisor

Dr. Abdollah Alhevaz

September 2017