

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ





دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات

پایان نامه کارشناسی ارشد

# روش‌های نوین برای حل مسائل کوتاه‌ترین مسیر همراه با پارامترهای فازی

نگارنده: فاطمه پوراکبری

استاد راهنما

دکتر جعفر فتحعلی

استاد مشاور

دکتر مریم قرآنی

شهریور ۹۶

# تقدیم بہ پدر و مادر عزیزم

آنان کہ ہمارہ بر کوتاہی و درستی من، قلم عفو کشیدہ و کریمانہ از کنار غفلت ہایم گذشتہ اند و در تمام عرصہ ہای زندگی یار و یاور بی چشم داشت برای من بودہ اند.

## سپاس‌گزاری...

سپاس خداوند بی‌همتایی که جزء او کسی شایسته‌ی پرستش نیست. به مصداق «من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق» بسی شایسته است از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای **دکتر جعفر فتحعلی** و سرکار خانم **دکتر مریم قرآنی** که با کرامتی چون خورشید، سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و دانش را با راهنمایی‌های کارساز و سازنده بارور ساختند؛ تقدیر و تشکر نمایم.

**فاطمه پوراکبری**

**شهریور ۹۶**

## تعهد نامه

اینجانب فاطمه پورا کبری دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان روش های نوین برای حل مسائل کوتاه ترین مسیر همراه با

پارامترهای فازی، تحت راهنمایی جعفر فتحعلی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فاطمه پورا کبری

شهریور ۹۶

### مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.



## چکیده

پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر در گراف یکی از مسائل مهم در نظریه‌ی گراف است. این مسأله می‌تواند در حمل و نقل، مسیریابی، ارتباطات و... مورد استفاده قرار گیرد. در کاربردهای واقعی مسأله‌ی کوتاه‌ترین مسیر طول کمان ممکن است نشان‌دهنده‌ی زمان یا هزینه باشد که یک عدد واقعی نیست. در این مورد استفاده از اعداد فازی مناسب است. در این پایان‌نامه، ما مسأله‌ی کوتاه‌ترین مسیر فازی را در نظر می‌گیریم که در آن طول کمان‌ها اعداد فازی هستند. برای حل این مسأله دو الگوریتم در نظر گرفته شده و مقایسه می‌شوند. ما همچنین تصمیم‌گیری فازی چند معیاره را بررسی می‌کنیم.

کلمات کلیدی: اعداد فازی مثلثی، برنامه‌ریزی ریاضی فازی، مسأله‌ی کوتاه‌ترین مسیر، مجموعه‌ی مبهم، شبکه‌ی چند محدودیتی، رتبه‌بندی فاصله‌ی علامت‌دار.



# فهرست مطالب

م	فهرست تصاویر	
س	فهرست جداول	
۱	۱ مفاهیم و مقدمات	
۱	۱.۱ گراف	۱
۲	۲.۱ مسأله کمترین هزینه جریان در شبکه	۲
۳	۳.۱ مسأله‌ی کوتاه‌ترین مسیر	۳
۴	۴.۱ روش‌های حل مسأله‌ی کوتاه‌ترین مسیر	۴
۴	۱.۴.۱ الگوریتم دایکسترا	۴
۵	۲.۴.۱ الگوریتم فلوید	۵
۵	۳.۴.۱ برنامه‌ریزی پویا	۵
۷	۴.۴.۱ الگوریتم فورد-مور-بلمن (FMB)	۷
۱۱	۲ نظریه‌ی مجموعه‌های فازی	
۱۱	۱.۲ مقدمه	۱۱
۱۱	۲.۲ تعاریف اولیه	۱۱
۱۳	۳.۲ اعداد فازی	۱۳
۱۳	۴.۲ اعداد فازی مثلثی	۱۳
۱۴	۵.۲ سطح $\lambda$ عدد فازی	۱۴
۱۵	۶.۲ فاصله علامت‌دار: تعاریف و ویژگی‌ها	۱۵
۱۷	۷.۲ رتبه‌بندی اعداد فازی	۱۷
۲۰	۸.۲ متغیرهای زبانی	۲۰
۲۱	۳ روش‌های حل مسأله کوتاه‌ترین مسیر فازی	
۲۱	۱.۳ مقدمه	۲۱
۲۲	۲.۳ کوتاه‌ترین مسیر فازی با وزن یال نامشخص	۲۲

۲۲	.....	مسأله‌ی کوتاه‌ترین مسیر بر اساس اعداد فازی	۱.۲.۳
۲۳	.....	مسأله‌ی کوتاه‌ترین مسیر فازی	۲.۲.۳
۲۷	.....	مقایسه‌ی طول کوتاه‌ترین مسیر و کوتاه‌ترین مسیر فازی	۳.۲.۳
۲۸	.....	کوتاه‌ترین مسیر در شبکه با پارامترهای فازی	۳.۳
۲۸	.....	فرمول ریاضی کوتاه‌ترین مسیر فازی	۱.۳.۳
۲۸	.....	الگوریتم فازی کوتاه‌ترین مسیر	۲.۳.۳
۳۱	.....	همگرایی الگوریتم	۳.۳.۳
۳۱	.....	پیچیدگی الگوریتم	۴.۳.۳
۳۹		<b>کوتاه‌ترین مسیر با استفاده از تصمیم‌گیری چند معیاره</b>	<b>۴</b>
۳۹	.....	مقدمه	۱.۴
۴۰	.....	مفاهیم اولیه	۲.۴
۴۱	.....	کیفیت سرویس	۳.۴
۴۲	.....	نظریه‌ی اساسی و عملیات بین مجموعه‌های مبهم	۴.۴
۴۵	.....	اندازه‌گیری شباهت پیشنهادی بین مجموعه‌های مبهم	۱.۴.۴
۴۶	.....	عبارت زبانی مبهم و ارزش‌ها	۲.۴.۴
۴۷	.....	فرمول ریاضی برای کوتاه‌ترین مسیر فازی	۵.۴
۵۰	.....	روشی برای کوتاه‌ترین مسیر مبهم	۶.۴
۵۰	.....	روش طول مسیر ایده‌آل مبهم	۱.۶.۴
۵۱	.....	الگوریتم کوتاه‌ترین مسیر مبهم	۲.۶.۴
۵۵		<b>نتیجه‌گیری و پیشنهادها</b>	<b>۵</b>
۵۷		<b>واژه‌نامه انگلیسی به فارسی</b>	
۵۹		<b>واژه‌نامه فارسی به انگلیسی</b>	
۶۱		<b>مراجع</b>	

# فهرست تصاویر

۶	.....	گراف و کوتاه‌ترین مسیر	۱.۱
۷	.....	روش جدولی برای حل مسأله کوتاه‌ترین مسیر	۲.۱
۸	.....	گراف	۳.۱
۱۴	.....	عدد فازی مثلثی	۱.۲
۲۳	.....	عدد فازی $\tilde{c}_{ij}$	۱.۳
۲۷	.....	گراف فازی	۲.۳
۲۸	.....	روش جدولی کوتاه‌ترین مسیر فازی	۳.۳
۳۲	.....	گراف بدون دور	۴.۳
۳۶	.....	گراف با یال منفی	۵.۳
۴۳	.....	مجموعه مبهم $A$	۱.۴
۴۳	.....	نمایش گرافیکی عناصر مبهم	۲.۴
۴۴	.....	نمایش گرافیکی $\mu_A(x) \in [t_A(x), t_A^*]$	۳.۴
۴۹	.....	گراف جهت‌دار بدون دور	۴.۴



# فهرست جداول

۳۲	.....	طول یال گراف	۱.۳
۳۶	.....	نتیجه‌ی مثال ۱.۳.۳	۲.۳
۳۷	.....	طول یال‌های مثال ۲.۳.۳	۳.۳
۳۸	.....	نتیجه‌ی مثال ۲.۳.۳	۴.۳
۴۷	.....	مقیاس متغیرهای زبانی	۱.۴



# فصل ۱

## مفاهیم و مقدمات

در این فصل به بیان مفاهیم اولیه و تعاریفی که در این پایان نامه آمده است می‌پردازیم.

### ۱.۱ گراف

**تعریف ۱.۱.۱.** یک گراف<sup>۱</sup> عبارت است از زوج  $G = (V, E)$  که  $V$  و  $E$  به ترتیب مجموعه‌ای از رئوس و یال‌ها می‌باشند.

**تعریف ۲.۱.۱.** مرتبه<sup>۲</sup> گراف  $G$  تعداد رئوس گراف  $G$  می‌باشد و با  $n(G)$  یا  $n$  نمایش داده می‌شود.

**تعریف ۳.۱.۱.** یک گشت<sup>۳</sup> به طول  $k$ ، یک دنباله‌ی متناوب  $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$  از رأس‌ها و یال‌هاست، به طوری که به ازای هر  $i = 1, 2, \dots, k$  یک یال  $e_i = v_{i-1}v_i$  باشد.

**تعریف ۴.۱.۱.** یک مسیر<sup>۴</sup> گشتی است که هیچ رأس تکراری نداشته باشد. یک مسیر را در یک گراف به صورت رأس‌های متمایز  $v_0, v_1, \dots, v_n$  در نظر می‌گیریم، به طوری که به ازای هر  $i = 1, 2, \dots, k$  یک یال  $e_i = v_{i-1}v_i$  باشد. یک مسیر  $n$  رأسی را با  $P_n$  نشان می‌دهیم.

<sup>۱</sup>Graph

<sup>۲</sup>Order

<sup>۳</sup>Walk

<sup>۴</sup>Path

**تعریف ۵.۱.۱.** اگر در یک گشت رئوس ابتدا و انتهای آن یکسان باشند یعنی به صورت  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n = v_1$  باشند آن را یک **گشت بسته**<sup>۵</sup> می‌نامیم.

**تعریف ۶.۱.۱.** یک **دور**<sup>۶</sup> گشت بسته‌ای به طول حداقل یک است که در آن رأس ابتدایی و رأس انتهایی بر یکدیگر منطبق هستند و هیچ رأس تکراری دیگری نداریم. یک دور  $n$  رأسی را با  $C_n$  نشان می‌دهیم.

**تعریف ۷.۱.۱.** فرض کنید به هر یال  $e$  از  $G$ ، یک عدد  $c(e)$ ، که وزن آن نامیده می‌شود نسبت داده‌ایم در این صورت  $G$  به همراه وزن روی یال‌هایش، یک **گراف وزن‌دار**<sup>۷</sup> نامیده می‌شود.

**تعریف ۸.۱.۱.** دوری که مجموع وزن یال‌های آن عدد منفی باشد **دور منفی**<sup>۸</sup> نامیده می‌شود.

**تعریف ۹.۱.۱.** **درجه**<sup>۹</sup> رأس  $v$  در گراف  $G$ ، برابر تعداد یال‌های واقع بر  $v$  می‌باشد.

**تعریف ۱۰.۱.۱.** اگر در گراف  $G = (V, E)$  از رأس  $v_1$  به  $v_2$  یک مسیر وجود داشته باشد آن‌گاه این دو رأس را **همبند**<sup>۱۰</sup> می‌گوییم.

**تعریف ۱۱.۱.۱.** گراف جهت‌دار بدون دور<sup>۱۱</sup>، یک گراف جهت‌دار است که هیچ دور جهت‌داری ندارد (یعنی هیچ مسیر جهت‌داری که رأس ابتدا و انتهای آن یکی باشد، وجود ندارد).

**تعریف ۱۲.۱.۱.** **درخت**<sup>۱۲</sup> یک گراف بی‌دور همبند است.

## ۲.۱ مسأله کمترین هزینه جریان در شبکه

فرض کنید  $G = (V, E)$  یک گراف جهت‌دار باشد که دارای  $n$  رأس و  $m$  یال است. هزینه‌ی ارسال جریان روی هر یال  $(i, j) \in E$  برابر  $c_{ij}$  است. همچنین هر یال  $(i, j) \in E$  دارای حداکثر ظرفیت  $u_{ij}$  است. می‌خواهیم جریانی را از یک مجموعه رئوس به نام مبدأ که با  $V_1$  نشان می‌دهیم به مجموعه‌ی دیگری از رئوس به نام مقصد که با  $V_2$  نشان می‌دهیم با کمترین هزینه ارسال کنیم. سایر رئوس شبکه، رئوس میانی هستند که با  $V_3$  نشان می‌دهیم. برای هر رأس  $i \in V_1$  حداکثر مقدار عرضه‌ی جریان برابر  $a_i$  است و برای هر رأس  $i \in V_3$  میزان تقاضای جریان

<sup>۵</sup>closed walk

<sup>۶</sup>Cycle

<sup>۷</sup>Weighted Graph

<sup>۸</sup>Negative circuite

<sup>۹</sup>Degree

<sup>۱۰</sup>Connective

<sup>۱۱</sup>Directed acyclic graph

<sup>۱۲</sup>Tree



### مسأله‌ی کوتاه‌ترین مسیر ۳

برابر  $b_i$  است. همچنین میزان ارسال جریان روی یال  $(i, j)$  با  $x_{ij}$  نشان داده می‌شود. مدل مسأله کمترین هزینه جریان به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{\{j:(i,j) \in E\}} x_{ij} - \sum_{\{j:(j,i) \in E\}} x_{ji} = \begin{cases} \leq a_i & i \in V_1 \\ = 0 & i \in V_2 \\ \leq (-b_i) & i \in V_3 \end{cases} \\ & 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad (i, j) \in E. \end{aligned}$$

به طوری که

- کل کالای خروجی از رأس  $i$ :  $\{j : (i, j) \in E\}$
- کل کالای ورودی به رأس  $i$ :  $\{j : (j, i) \in E\}$

توجه کنید که اگر به تمام تقاضاها پاسخ داده شود و تمام کالاهای رئوس مبدأ ارسال شود در این صورت نامساوی‌ها به مساوی تبدیل می‌شود و مسأله‌ی حاصل در صورتی جواب دارد که

$$\sum_{i \in V_1} a_i = \sum_{i \in V_3} b_i.$$

## ۳.۱ مسأله‌ی کوتاه‌ترین مسیر

مسأله‌ی کوتاه‌ترین مسیر<sup>۱۳</sup> (SPP) یکی از موضوعات اساسی در نظریه‌ی گراف است و در حال حاضر تا حد زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است و در بسیاری از برنامه‌های کاربردی از قبیل حمل و نقل، مسیریابی، ارتباطات و ... کاربرد دارد. در مسأله‌ی کوتاه‌ترین مسیر هر یال شبکه دارای یک وزن است. طول هر مسیر جمع وزن یال‌ها در مسیر است. مسیرهای زیادی بین هر جفت از گره‌ها وجود دارد اما هدف پیدا کردن یک مسیر با کمترین هزینه است. در برنامه‌های کاربردی وزن یال می‌تواند به عنوان زمان، هزینه و ... استفاده شود. سه نوع مسأله‌ی کوتاه‌ترین مسیر وجود دارد:

۱. کوتاه‌ترین مسیر از گره مبدأ به گره مقصد

۲. کوتاه‌ترین مسیر از گره مبدأ به گره‌های دیگر

۳. کوتاه‌ترین مسیر بین هر جفت از گره‌ها

<sup>۱۳</sup> Shortest Path Problem

ما روی مسأله‌ی کوتاه‌ترین مسیر از گره مبدأ به گره‌ی مقصد بحث می‌کنیم، به طوری که مسیر روی شبکه‌ی بدون دور در نظر گرفته شده است. یک شبکه می‌تواند وزن منفی داشته باشد ولی شامل دور منفی نباشد.

## ۴.۱ روش‌های حل مسأله‌ی کوتاه‌ترین مسیر

### ۱.۴.۱ الگوریتم دایکسترا

الگوریتم دایکسترا<sup>۱۴</sup> [۱۱] یک راهکار حریصانه برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر از یک رأس مانند  $s$  به سایر گره‌های گراف وزن دار است. تنها شرط لازم برای استفاده از این الگوریتم نامنفی بودن وزن یال‌های گراف است.

الگوریتم دایکسترا به صورت حریصانه عمل کرده و در تکرارهای متوالی طول کوتاه‌ترین مسیر از مبدأ به یکی از گره‌های گراف را به دست می‌آورد. روند کلی الگوریتم به این صورت است: مرحله ۱، ابتدا قرار می‌دهیم  $g(s) = 0$  و  $u = s$  به ازای  $f(j)$ ،  $j = 2, \dots, n$  را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$f(j) = \begin{cases} c_{sj}, & \text{اگر از رأس } s \text{ به } j \text{ مسیر وجود داشته باشد} \\ \infty, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

مرحله ۲، قرار می‌دهیم  $i = \min f(j)$  و  $g(i) = f(i)$  و  $U = u \cup \{i\}$  اگر  $U = V$  متوقف کنید. که  $V$  مجموعه رئوس گراف است.

مرحله ۳، به ازای تمام رئوسی که  $j \in u$  و  $(i, j) \in G$  قرار می‌دهیم

$$f(j) = \{f(j), g(i) + c_{ij}\}$$

و به مرحله ۲ بروید.

$f(j)$  را برچسب موقتی و  $g(i)$  را برچسب دائم می‌نامند.  $u$  مجموعه رئوسی است که کوتاه‌ترین مسیر از رأس  $s$  به آن‌ها پیدا شده است و  $g(i)$  اندازه‌ی کوتاه‌ترین مسیر از رأس  $s$  به رأس  $i$  است.

### پیچیدگی الگوریتم

فرض می‌کنیم  $n$  تعداد رأس‌های گراف باشد. در این صورت الگوریتم دایکسترا نیاز به  $O(n^2)$  محاسبه دارد پس پیچیدگی محاسباتی آن  $O(n^2)$  است.

<sup>۱۴</sup>Dijkstra

## ۲.۴.۱ الگوریتم فلویید

الگوریتم فلویید<sup>۱۵</sup> [۴] کوتاه‌ترین مسیر بین هر دو رأس را برای گراف‌های با وزن مثبت پیدا می‌کند. فرض کنید یک گراف با  $n$  رأس داده شده است که وزن یال  $(i, j)$  برابر  $c_{ij}$  است. الگوریتم فلویید با شروع از یک جدول اولیه در هر تکرار جدولی را با استفاده از جدول قبل به دست می‌آورد که در انتها بعد از  $n$  تکرار به جدولی می‌رسیم که مؤلفه  $a_{ij}$  آن برابر کوتاه‌ترین مسیر از رأس  $i$  به رأس  $j$  است. جدول اولیه را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$T_{ij}^{(0)} = \begin{cases} c_{ij}, & (i, j) \in E \\ 0, & i = j \\ \infty & \text{و.س.} \end{cases}$$

در این جدول یک سطر  $n+1$  و ستون  $n+1$  نیز داریم که سطر  $n+1$  برابر سطر اول و ستون  $n+1$  را برابر ستون اول قرار می‌دهیم. جدول  $k$ -ام از روش فلویید به ازای  $i = 1, 2, \dots, n$  و  $j = 1, 2, \dots, n$  به صورت زیر به دست می‌آید.

$$T_{ij}^{(k)} = \min\{T_{ij}^{(k-1)}, T_{i, n+1}^{(k-1)} + T_{n+1, j}^{(k-1)}\}$$

در این جدول سطر  $(k+1)$ -ام را در سطر  $(n+1)$  و ستون  $(k+1)$ -ام را در ستون  $n+1$  قرار می‌دهیم. الگوریتم تا زمانی که  $k < n$  ادامه می‌یابد و در تکرار  $n$ -ام به جواب می‌رسیم.

## ۳.۴.۱ برنامه‌ریزی پویا

روش‌های زیادی برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر وجود دارد. یک روش استفاده از برنامه‌ریزی پویا<sup>۱۶</sup> (DP) است که به صورت زیر می‌باشد: یک گراف جهت‌دار  $G = (V, E)$  با  $n$  رأس به طوری که ۱ گره مبدأ و  $n$  گره مقصد است را در نظر بگیرید. در این صورت قرار می‌دهیم:

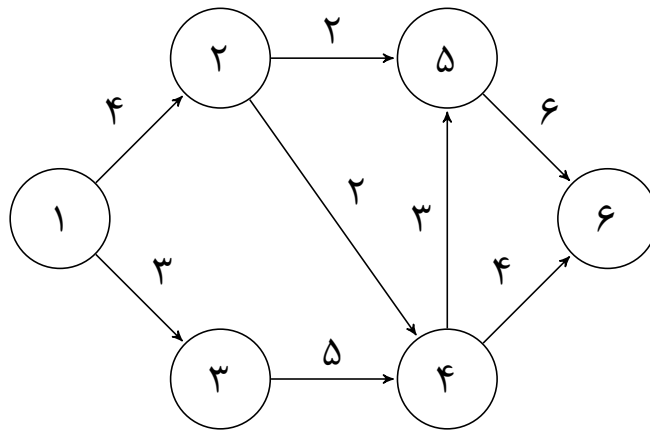
$$\begin{aligned} f(n) &= 0 \\ f(i) &= \min_{i < j} \{c_{ij} + f(j) \mid \langle i, j \rangle \in E\}, \quad i = 1, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (1.1)$$

که  $c_{ij}$  وزن یال جهت‌دار  $\langle i, j \rangle$  و  $f(i)$  طول کوتاه‌ترین مسیر از رأس  $i$  به رأس  $n$  است. حل مسأله‌ی کوتاه‌ترین مسیر زمانی که وزن یال‌ها نامنفی باشد آسان است و پیچیدگی این روش مانند الگوریتم دایکسترا  $O(n^2)$  است.

<sup>۱۵</sup>Floyd

<sup>۱۶</sup>Dynamic Programming

مثال ۱.۴.۱. برای توضیح بیشتر گراف زیر را در نظر بگیرید به طوری که اعداد روی یال‌ها، وزن یال‌ها هستند.



شکل ۱.۱: گراف و کوتاه‌ترین مسیر

شکل ۱.۱ نشان می‌دهد که  $V = \{j | j = 1, 2, 3, \dots, 6\}$  و

$$E = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 5, 6 \rangle, \langle 4, 6 \rangle \}$$

بنابراین داریم:

$$f(6) = 0,$$

$$f(5) = \min_{5 < j} \{c_{5j} + f(j) | \langle 5, j \rangle \in E\} = c_{56} = 6,$$

$$f(4) = \min_{4 < j} \{c_{4j} + f(j) | \langle 4, j \rangle \in E\} = \min\{c_{46} + f(6), c_{45} + f(5)\} = c_{46} = 4,$$

$$f(3) = \min_{3 < j} \{c_{3j} + f(j) | \langle 3, j \rangle \in E\} = c_{34} + c_{46} = 9,$$

$$f(2) = \min_{2 < j} \{c_{2j} + f(j) | \langle 2, j \rangle \in E\} = \min\{c_{24} + f(4), c_{25} + f(5)\} = c_{24} + c_{46} = 6,$$

$$f(1) = \min_{1 < j} \{c_{1j} + f(j) | \langle 1, j \rangle \in E\} = \min\{c_{12} + f(2), c_{13} + f(3)\} = c_{12} + c_{24} + c_{46} = 10.$$

پس کوتاه‌ترین مسیر از ۱ تا ۶، به صورت  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$  با طول کل  $f(1) = 10$  است.

مثال ۱.۴.۱ را به می‌توان به صورت جدولی حل کرد (شکل ۱.۴.۱ را ببینید)، برای این منظور ابتدا وزن یال‌ها را در جدول قرار داده و  $f(j)$  را به صورت معکوس  $j = 6, 5, 4, 3, 2, 1$  محاسبه می‌کنیم و قرار می‌دهیم  $f(6) = 0$  و با  $j = 5$  شروع می‌کنیم. چون در سطر  $i = 5$ ،  $c_{56} = 6$  است ستون  $j = 6$  را بررسی می‌کنیم،  $f(6) = 0$  بدست می‌آید. بنابراین  $f(5)$  به صورت

$$f(5) = c_{56} + f(6) = 6$$

## روش‌های حل مسأله‌ی کوتاه‌ترین مسیر ۷

تعریف می‌شود. سپس قرار می‌دهیم  $j = 4$  چون در سطر  $i = 4$ ، دو ورودی  $c_{45}$  و  $c_{46}$  را داریم بنابراین  $f(4)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(4) = \min\{c_{45} + f(5), c_{46} + f(6)\} = \min\{4 + 0, 3 + 6\} = 4$$

به همین ترتیب

$$f(3) = c_{34} + f(4) = 5 + 4 = 9$$

و

$$f(2) = \min\{c_{24} + f(4), c_{25} + f(5)\} = \min\{2 + 4, 2 + 6\} = 6$$

بدست می‌آید. در نهایت، قرار می‌دهیم  $j = 1$  چون در سطر  $i = 1$  دو ورودی  $c_{12}$  و  $c_{13}$  وجود دارد، بنابراین  $f(1)$  به صورت زیر بدست می‌آید:

$$f(1) = \min\{c_{12} + f(2), c_{13} + f(3)\} = \min\{4 + 6, 3 + 9\} = 10$$

به‌طور خلاصه، کوتاه‌ترین مسیر را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(1) = c_{12} + f(2) = c_{12} + c_{24} + f(4) = c_{12} + c_{24} + c_{46} + f(6) = c_{12} + c_{24} + c_{46} = 10$$

f(j)	10	6	9	4	6	0	i
j	1	2	3	4	5	6	
		4	3				1
				2	2		2
				5			3
					3	4	4
						6	5
							6

$c_{12}$  (از 1 به 2)  
 $c_{13}$  (از 1 به 3)  
 $c_{45}$  (از 4 به 5)  
 $c_{56}$  (از 5 به 6)

شکل ۲.۱: روش جدولی برای حل مسأله کوتاه‌ترین مسیر

### ۴.۴.۱ الگوریتم فورد-مور-بلمن (FMB)

الگوریتم فورد-مور-بلمن<sup>۱۷</sup> نسبت به الگوریتم‌های معرفی شده که برای یال‌های نامنفی به کار می‌رود عمومیت بیشتری داشته و برای یال‌های مثبت و منفی به کار می‌رود. روند کلی این الگوریتم به این صورت است:

<sup>۱۷</sup>Ford-Moore-Bellman

مرحله ۱: ابتدا قرار می‌دهیم  $f^0(1) = 0$  و  $f^0(j) = \infty$  به ازای  $j \in V - \{1\}$ ، قرار می‌دهیم  $k = 1$

مرحله ۲: به ازای هر  $j \in V$  مقدار زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$f^k(j) = \min\{\min\{c_{ij} + f^{k-1}(i)\}, f^{k-1}(j)\}.$$

مرحله ۳: معیار توقف:

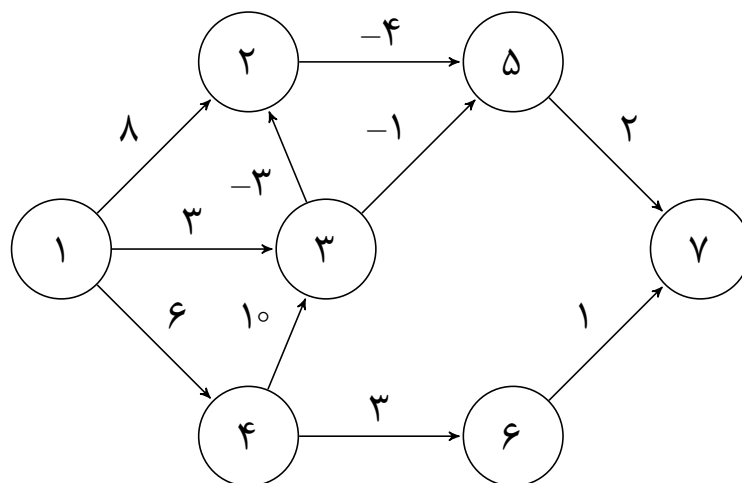
- اگر به ازای هر  $j \in V$   $f^k(j) = f^{k-1}(j)$  به مرحله ۴ برو.
- در غیر این صورت اگر  $f^k(j) \neq f^{k-1}(j)$  و  $k = n$  برو به مرحله ۴. گراف شامل دور منفی است.
- اگر  $k < n$ ، قرار دهید  $k = k + 1$  و به مرحله ۲ بروید.

مرحله ۴: پایان اجرای الگوریتم.

## همگرایی الگوریتم

فرض می‌کنیم  $n$  تعداد رأس‌های گراف باشد. در این صورت الگوریتم فورد-مور-بلمن در  $n - 1$  یا به جواب می‌رسد یا یک دور منفی در گراف پیدا می‌کند.

مثال ۲.۴.۱. شکل ۳.۱ را در نظر بگیرید.



شکل ۳.۱: گراف

در تکرار اول داریم:

$$k = 1$$

$$f^{\circ}(1) = 0 \quad f^{\circ}(j) = \infty \quad j \neq 1$$

$$f^1(1) = 0$$

$$f^1(2) = \min\{\min\{c_{12} + f^{\circ}(1), c_{32} + f^{\circ}(3)\}, f^{\circ}(2)\} = 8$$

$$f^1(3) = \min\{\min\{c_{13} + f^{\circ}(1), c_{43} + f^{\circ}(4)\}, f^{\circ}(3)\} = 3$$

$$f^1(4) = \min\{\min\{c_{14} + f^{\circ}(1)\}, f^{\circ}(4)\} = 6$$

$$f^1(5) = f^1(6) = f^1(7) = \infty$$

و تکرار دوم به صورت زیر است:

$$k = 2$$

$$f^2(1) = 0$$

$$f^2(2) = \min\{\min\{c_{12} + f^1(1), c_{32} + f^1(3)\}, f^1(2)\} = 0$$

$$f^2(3) = \min\{\min\{c_{13} + f^1(1), c_{43} + f^1(4)\}, f^1(3)\} = 3$$

$$f^2(4) = \min\{\min\{c_{14} + f^1(1)\}, f^1(4)\} = 6$$

$$f^2(5) = \min\{\min\{c_{25} + f^1(2), c_{35} + f^1(3)\}, f^1(5)\} = 2$$

$$f^2(6) = \min\{\min\{c_{46} + f^1(4)\}, f^1(6)\} = 9$$

$$f^2(7) = \min\{\min\{c_{57} + f^1(5), c_{67} + f^1(6)\}, f^1(7)\} = 1$$

تکرارهای بعدی به صورت زیر است:

تکرار سوم

$$k = 3$$

$$f^3(2) = \min\{\min\{c_{12} + f^2(1), c_{32} + f^2(3)\}, f^2(2)\} = 0$$

$$f^3(3) = \min\{\min\{c_{13} + f^2(1), c_{43} + f^2(4)\}, f^2(3)\} = 3$$

$$f^3(4) = \min\{\min\{c_{14} + f^2(1)\}, f^2(4)\} = 6$$

$$f^3(5) = \min\{\min\{c_{25} + f^2(2), c_{35} + f^2(3)\}, f^2(5)\} = -4$$

$$f^3(6) = \min\{\min\{c_{46} + f^2(4)\}, f^2(6)\} = 9$$

$$f^3(7) = \min\{\min\{c_{57} + f^2(5), c_{67} + f^2(6)\}, f^2(7)\} = 1$$

تکرار چهارم

$$k = 4$$

$$\begin{aligned}
 f^f(1) &= 0 \\
 f^f(2) &= \min\{\min\{c_{12} + l^f(1), c_{32} + f^f(3)\}, f^f(2)\} = 0 \\
 l^f(3) &= \min\{\min\{c_{13} + f^f(1), c_{43} + f^f(4)\}, f^f(3)\} = 3 \\
 f^f(4) &= \min\{\min\{c_{14} + f^f(1)\}, f^f(4)\} = 6 \\
 f^f(5) &= \min\{\min\{c_{25} + f^f(2), c_{35} + f^f(3)\}, f^f(5)\} = -4 \\
 f^f(6) &= \min\{\min\{c_{46} + f^f(4)\}, f^f(6)\} = 9 \\
 f^f(7) &= \min\{\min\{c_{57} + f^f(5), c_{67} + f^f(6)\}, f^f(7)\} = -2
 \end{aligned}$$

تکرار پنجم

$$\begin{aligned}
 k &= 5 \\
 f^5(1) &= 0 \\
 f^5(2) &= \min\{\min\{c_{12} + f^5(1), c_{32} + f^5(3)\}, f^5(2)\} = 0 \\
 f^5(3) &= \min\{\min\{c_{13} + f^5(1), c_{43} + f^5(4)\}, f^5(3)\} = 3 \\
 f^5(4) &= \min\{\min\{c_{14} + f^5(1)\}, f^5(4)\} = 6 \\
 f^5(5) &= \min\{\min\{c_{25} + f^5(2), c_{35} + f^5(3)\}, f^5(5)\} = -4 \\
 f^5(6) &= \min\{\min\{c_{46} + f^5(4)\}, f^5(6)\} = 9 \\
 f^5(7) &= \min\{\min\{c_{57} + f^5(5), c_{67} + f^5(6)\}, f^5(7)\} = -2
 \end{aligned}$$

چون  $f^5 = f^4$  الگوریتم متوقف می‌شود.

برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر از رأس ۱ به  $n$  از انتها به ابتدا برمی‌گردیم، فرض کنید در رأس  $j$  قرار داریم برای پیدا کردن رأس قبلی در مسیر رأسی مانند  $i$  می‌یابیم که  $(i, j) \in E$  و  $f(j) = f(i) + c_{ij}$  مراحل فوق را تا رسیدن به رأس ابتدایی یعنی ۱ ادامه می‌دهیم. مثلاً برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر از رأس ۱ به ۷ داریم:

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 7$$

که مقدار آن  $f(7) = -2$  است.



## فصل ۲

# نظریه‌ی مجموعه‌های فازی

### ۱.۲ مقدمه

نظریه‌ی مجموعه‌های فازی در سال ۱۹۶۵ میلادی (۱۳۴۴ ه.ش.) توسط پروفیسور لطفی عسگرزاده دانشمند ایرانی تبار عرضه شد. این نظریه از زمان ارائه تاکنون، گسترش و تعمیق زیادی یافته و کاربردهای گوناگونی در زمینه‌های مختلف پیدا کرده است. به‌طور خلاصه، نظریه‌ی مجموعه‌های فازی نظریه‌ای برای اقدام در شرایط عدم اطمینان است. این نظریه قادر است بسیاری از مفاهیم و متغیرها و سیستم‌هایی را که نادقیق و مبهم هستند، همان‌گونه که در عالم واقع اکثراً چنین است، صورت‌بندی ریاضی ببخشد و زمینه را برای استدلال، استنتاج، کنترل و تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان فراهم آورد. در ادامه تعاریف اولیه مربوط به نظریه‌ی فازی آمده است.

### ۲.۲ تعاریف اولیه

**تعریف ۱.۲.۲.** اگر  $A$  زیر مجموعه‌ای از مجموعه‌ی مرجع  $X$  باشد تابع مشخصه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

حال اگر برد تابع مشخصه را از مجموعه دو عضوی  $\{0, 1\}$  به بازه‌ی  $[0, 1]$  توسعه دهیم، یک تابع خواهیم داشت که به هر  $x \in X$  عددی از  $[0, 1]$  نسبت می‌دهد. این تابع را تابع عضویت  $A$  می‌نامند و با  $\mu_A(x)$  نشان می‌دهند. این عدد بیانگر درجه عضویت آن عنصر در مجموعه فازی  $A$  است. به‌طور کلی **مجموعه‌ی فازی**<sup>۱</sup> توسط یک زوج مرتب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$$

**تعریف ۲.۲.۲.** گوییم مجموعه‌ی فازی  $A$ ، زیر مجموعه‌ی مجموعه فازی  $B$  است و می‌نویسیم  $A \subseteq B$ ، اگر برای هر  $x \in X$   $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ .

**تعریف ۳.۲.۲.** مجموعه عناصری از  $X$  که درجه عضویت آن‌ها در مجموعه‌ی فازی  $A$  حداقل به بزرگی  $\alpha$  باشد،  $\alpha$ -برش  $A$  گوییم و با  $A_{\alpha}$  نشان می‌دهیم، یعنی

$$A_{\alpha} = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}.$$

همچنین  $\alpha$ -برش قوی  $A$ ،  $A_{\alpha}$ ، به صورت  $A_{\alpha} = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}$  است.

**تعریف ۴.۲.۲.** هسته<sup>۲</sup> مجموعه‌ی فازی  $\tilde{A}$  عبارت است از زیر مجموعه‌ای از مجموعه‌ی مرجع  $X$  که درجه عضویت عناصر آن در  $\tilde{A}$  برابر ۱ است.

$$\text{core}(\tilde{A}) = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}.$$

**تعریف ۵.۲.۲.** ارتفاع<sup>۳</sup> یک مجموعه‌ی فازی، بزرگترین مقدار درجه عضویت در آن مجموعه است. یعنی:

$$\text{height}(\tilde{A}) = \max\{\mu_{\tilde{A}}(x)\}$$

**تعریف ۶.۲.۲.** یک مجموعه‌ی فازی را **نرمال**<sup>۴</sup> می‌نامند، اگر درجه عضویت حداقل یکی از اعضای آن برابر ۱ باشد.

**تعریف ۷.۲.۲.** یک مجموعه‌ی فازی  $\tilde{A}$  روی  $\mathbb{R}$  را **محدب**<sup>۵</sup> گویند، اگر و تنها اگر

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$$

**تعریف ۸.۲.۲. (الف)** یک زیر مجموعه‌ی فازی  $\tilde{A}$  روی  $\mathbb{R}$  محدب است اگر و فقط اگر برای هر زیر مجموعه‌ی معمولی  $A(\alpha) = \{x | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ ،  $\alpha \in [0, 1]$  محدب باشد. به این معنا که، یک فاصله‌ی بسته روی  $\mathbb{R}$  است.

**(ب)** یک زیر مجموعه‌ی فازی  $\mathbb{R}$  نرمال است اگر و فقط اگر  $\bigvee_{x \in \mathbb{R}} \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ .

**(ج)** یک عدد فازی روی  $\mathbb{R}$  یک زیر مجموعه‌ی فازی  $\mathbb{R}$  است که محدب و نرمال باشد.

<sup>۱</sup>Fuzzy set

<sup>۲</sup>Core

<sup>۳</sup>Height

<sup>۴</sup>Normal

<sup>۵</sup>Convex

## ۳.۲ اعداد فازی

اعداد فازی مجموعه‌های فازی هستند که برای توصیف مفاهیمی نظیر "تقریباً" و در "حدود" و "نزدیک به هم" استفاده می‌شوند. مثلاً در جمله من «حدوداً ساعت ۲ ظهر به منزل رسیدم» زمان به صورت مبهم بیان شده است.

**تعریف ۱.۳.۲.** یک مجموعه‌ی فازی  $A$  در  $\mathbb{R}$  عدد فازی نامیده می‌شود اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱.  $A$  نرمال باشد.

۲.  $-\alpha$  برش‌های  $A$  به ازای هر  $\alpha \in [0, 1]$  فاصله بسته باشد.

۳. پشتیبان  $A$  کران‌دار باشد.

## ۴.۲ اعداد فازی مثلثی

**تعریف ۱.۴.۲.** یک عدد فازی مثلثی<sup>۶</sup> با یک سه تایی  $\tilde{a} = (m, y, z)$  با تابع عضویت  $\mu_{\tilde{a}}(x)$ ، به صورت زیر است:

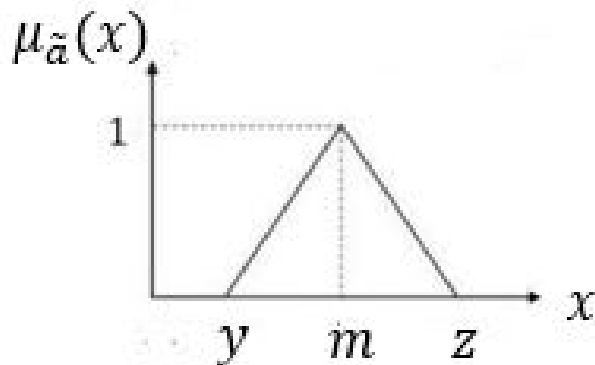
$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq y, \\ \frac{x-y}{m-y} & \text{if } y < x < m, \\ 1 & \text{if } x = m, \\ \frac{z-x}{z-m} & \text{if } m < x < z, \\ 0 & \text{if } x \geq z \end{cases} \quad (1.2)$$

که  $m$  مرکز،  $y$  گسترش چپ و  $z$  گسترش راست است (شکل ۱.۲ را ببینید).

**تعریف ۲.۴.۲.** عدد فازی مثلثی  $\tilde{a} = (m, y, z)$  را در نظر بگیرید،  $-\alpha$  برش عدد فازی مثلثی بازه‌ی بسته  $\tilde{a}_\alpha = [a_\alpha^L, a_\alpha^R]$  می‌باشد که به صورت زیر می‌تواند بیان شود:

$$\tilde{a}_\alpha = [\alpha(m - y) + y, z - (z - m)\alpha] \quad \alpha \in [0, 1].$$

<sup>۶</sup>Triangular fuzzy number



شکل ۱.۲: عدد فازی مثلثی

## عملیات ریاضی روی اعداد فازی مثلثی

جمع دو عدد فازی  $\tilde{a} = (m_1, y_1, z_1)$  و  $\tilde{b} = (m_2, y_2, z_2)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{a} \oplus \tilde{b} = (m_1, y_1, z_1) \oplus (m_2, y_2, z_2) = (m_1 + m_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2),$$

تفاضل دو عدد فازی  $\tilde{a} = (m_1, y_1, z_1)$  و  $\tilde{b} = (m_2, y_2, z_2)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{b} \ominus \tilde{a} = (m_2 - m_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

## ۵.۲ سطح $\lambda$ عدد فازی

تعریف ۱.۵.۲. یک مجموعه‌ی فازی  $\tilde{m}_\lambda$  روی  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$  که دارای تابع عضویت

$$\mu_{\tilde{m}_\lambda}(x) = \begin{cases} \lambda, & x = m \\ 0, & o.w. \end{cases} \quad (2.2)$$

است، سطح  $\lambda$  نقطه‌ی فازی<sup>۷</sup> نامیده می‌شود، به طوری که  $0 < \lambda \leq 1$ .

تعریف ۲.۵.۲. یک مجموعه‌ی فازی  $[y_\alpha, m_\alpha]$  روی  $\mathbb{R}$  که دارای تابع عضویت زیر است،

$$\mu_{[y_\alpha, m_\alpha]} = \begin{cases} \alpha, & y \leq x \leq m \\ 0, & o.w. \end{cases} \quad (3.2)$$

<sup>۷</sup> Level  $\lambda$  fuzzy point

سطح  $\alpha$  فاصله فازی<sup>۸</sup> نامیده می‌شود، به طوری که  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

**تعریف ۳.۵.۲.** سطح  $\lambda$  عدد فازی مثلثی<sup>۹</sup>  $\tilde{A}$ ، که  $0 < \lambda \leq 1$  و توسط  $\tilde{A} = (m, y, z; \lambda)$  نشان داده می‌شود و روی  $\mathbb{R}$  تعریف می‌شود دارای تابع عضویت زیراست:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda(x-y)}{m-y}, & y \leq x \leq m \\ \frac{\lambda(z-x)}{z-m}, & m \leq x \leq z \\ 0, & o.w. \end{cases} \quad (4.2)$$

فرض می‌کنیم خانواده‌ی تمام اعداد فازی توسط

$$F_N(\lambda) = \{(m, y, z; \lambda) | \forall y < m < z, m, y, z \in \mathbb{R}\}$$

و  $0 < \lambda \leq 1$  نشان داده شوند، همچنین فرض می‌کنیم  $(m, y, z; 1)$  اعداد فازی مثلثی باشند که توسط  $(m, y, z)$  نشان داده شده است.

## عملیات ریاضی روی سطح $\lambda$ اعداد فازی

فرض می‌کنیم  $\tilde{A} = (m, y, z; \lambda)$  و  $\tilde{B} = (q, p, r; \lambda)$  سطح  $\lambda$  اعداد فازی باشند. در این صورت داریم:

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (m + q, p + y, r + z; \lambda) \in F_N(\lambda)$$

## ۶.۲ فاصله علامت‌دار: تعاریف و ویژگی‌ها

تعاریف این بخش برگرفته از مراجع [۳۲] و [۳۳] می‌باشد.

**تعریف ۱.۶.۲.** برای هر  $y, m \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ، فاصله‌ی علامت‌دار<sup>d\*</sup> بین  $m$  و  $y$  به صورت  $d^*(y, m) = y - m$  تعریف می‌شود. چون  $d^*(m, 0) = m$  بنابراین

$$d^*(y, m) = y - m = d^*(y, 0) - d^*(m, 0)$$

پس  $d^*(m, 0)$  نشان دهنده‌ی فاصله علامت‌دار  $m$  از اندازه ۰ است. اگر  $m > 0$  یعنی این که  $m$  در سمت راست ۰ قرار دارد و فاصله بین  $m$  و ۰ به صورت زیراست:

$$m = d^*(m, 0)$$

<sup>۸</sup>Level  $\alpha$  Fuzzy Interval

<sup>۹</sup>Level  $\lambda$  Triangular Fuzzy Number

به طور مشابه اگر  $m < \circ$  یعنی این که  $m$  در سمت چپ  $\circ$  قرار دارد و فاصله‌ی بین  $m$  و  $\circ$  به صورت زیر است:

$$-m = -d^*(m, \circ)$$

همانطور که گفته شد فرض می‌کنیم  $F_N$  خانواده‌ی تمام اعداد فازی روی  $\mathbb{R}$  باشد که در تعریف ۸.۲.۲ (ج) صدق می‌کند. به طوری که نقطه‌ی سمت چپ  $-\alpha$  برش  $(\circ \leq \alpha \leq 1)$ ،  $A_L(\alpha)$  و نقطه‌ی سمت راست  $-\alpha$  برش  $(\circ \leq \alpha \leq 1)$ ،  $A_R(\alpha)$  است. طبق تعریف ۸.۲.۲ (الف)  $\alpha$  - برش فاصله بسته  $[A_L(\alpha), A_R(\alpha)]$  است.

**ملاحظه ۱.۶.۲.** سطح  $\alpha$  فواصل فازی  $[A_L(\alpha)_\alpha, A_R(\alpha)_\alpha]$  و  $[B_L(\alpha)_\alpha, B_R(\alpha)_\alpha]$  مشابه فاصله‌ی واقعی  $[A_L(\alpha), A_R(\alpha)]$  و  $[B_L(\alpha), B_R(\alpha)]$  است که وسط آن‌ها  $M(A(\alpha)) = \frac{1}{2}[A_L(\alpha) + A_R(\alpha)]$  و  $M(B(\alpha)) = \frac{1}{2}[B_L(\alpha) + B_R(\alpha)]$  است.

**تعریف ۲.۶.۲.** فاصله‌ی علامت دار قطعی بین  $M(A(\alpha))$  و  $M(B(\alpha))$  برابر است با

$$d^*(M(A(\alpha)), M(B(\alpha))) = M(A(\alpha)) - M(B(\alpha))$$

**تعریف ۳.۶.۲.** برای هر  $A, B \in F_N$  فاصله‌ی علامت دار  $\tilde{A}$  و  $\tilde{B}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} d^*(A, B) &= \frac{1}{1-\circ} \int_{\circ}^1 [M(A(\alpha)) - M(B(\alpha))] d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \int_{\circ}^1 [A_L(\alpha) + A_R(\alpha) - B_L(\alpha) - B_R(\alpha)] d\alpha \end{aligned}$$

**تعریف ۴.۶.۲.** برای هر  $\lambda \in (\circ, 1]$  و  $\tilde{A} = (m, y, z; \lambda) \in F_N(\lambda)$ ، فاصله علامت دار  $\tilde{A}$  از اندازه‌ی  $\tilde{\circ}_1$  به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} d^\circ(\tilde{A}, \tilde{\circ}_1) &= \frac{1}{2} \int_{\circ}^1 [A_L(\alpha) + A_R(\alpha)] d\alpha \\ &= \frac{1}{2} (2m + y + z) \end{aligned}$$

**تعریف ۵.۶.۲.** برای هر فاصله‌ی بسته  $[A, B]$  فاصله علامت دار  $[A, B]$  از اندازه‌ی  $\circ$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d^*([A, B], \circ) = \frac{1}{2} (A + B)$$

**تعریف ۶.۶.۲.** فرض می‌کنیم  $\tilde{A} = (m, y, z; \lambda) \in F_N(\lambda)$  و  $\tilde{B} = (q, p, r; \lambda) \in F_N(\lambda)$  برای  $\lambda \in (\circ, 1)$  رتبه سطح  $\lambda$  اعداد فازی روی  $F_N(\lambda)$  به صورت زیر است:

$$\tilde{A} \prec \tilde{B} \leftrightarrow d^\circ(\tilde{A}, \tilde{\circ}_1) < d^\circ(\tilde{B}, \tilde{\circ}_1)$$

$$\tilde{A} \approx \tilde{B} \leftrightarrow d^\circ(\tilde{A}, \tilde{\circ}_1) = d^\circ(\tilde{B}, \tilde{\circ}_1)$$

فاصله‌ی علامت‌دار دارای ویژگی زیر است:

فرض می‌کنیم  $\tilde{A} = (m, y, z; \lambda)$  و  $\tilde{B} = (q, p, r; \lambda) \in F_N(\lambda)$  سپس جمع دوتایی به صورت زیر است:

$$d(\tilde{A} \oplus \tilde{B}, \tilde{\sigma}_1) = d(\tilde{A}, \tilde{\sigma}_1) + d(\tilde{B}, \tilde{\sigma}_1)$$

## ۷.۲ رتبه‌بندی اعداد فازی

**تعریف ۱.۷.۲.** فرض می‌کنید  $\tilde{a}$  و  $\tilde{b}$  دو عدد فازی مثلثی باشند، در این صورت  $\tilde{a}$  به  $\tilde{b}$  ترجیح داده می‌شود ( $\tilde{a} < \tilde{b}$ ) اگر و تنها اگر  $\tilde{a} < \tilde{b}$ .

فرض کنید  $N(\mathbb{R})$  مجموعه‌ی تمام اعداد فازی روی  $\mathbb{R}$  و  $A, B \in N(\mathbb{R})$ . در این صورت یک تابع  $F: N(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  وجود دارد که تابع یا شاخص نامیده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F(A) \leq F(B) \rightarrow A \leq B.$$

روش‌های زیادی برای رتبه‌بندی اعداد فازی پیشنهاد شده است. در این بخش چند روش را به اختصار توضیح می‌دهیم.

### شاخص لیو و وانگ<sup>۱۰</sup> [۲۳]

لیو و وانگ روش مقادیر صحیح را برای اعداد فازی در نظر گرفتند، طبق تعریف ۱.۴.۲، برای عدد فازی مثلثی  $\tilde{a} = (m, y, z)$  تابع عضویت زیر را داریم:

$$f_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} f_{\tilde{a}}^L & y \leq x \leq m \\ 1 & x = m \\ f_{\tilde{a}}^R & m \leq x \leq z \end{cases} \quad (5.2)$$

به طوری که  $f_{\tilde{a}}^L(x) : [y, m]$  گسترش چپ تابع عضویت عدد فازی  $\tilde{a}$  و  $f_{\tilde{a}}^R(x) : [m, z]$  گسترش راست تابع عضویت عدد فازی  $\tilde{a}$  است.

### ویژگی‌ها:

۱. چون  $f_{\tilde{a}}^L : [y, m] \rightarrow [0, 1]$  یک تابع پیوسته و اکیداً صعودی است، معکوس آن یعنی  $f_{\tilde{a}}^{L^{-1}} : [0, 1] \rightarrow [y, m]$  وجود دارد و یک تابع پیوسته و اکیداً صعودی روی بازه‌ی بسته  $[0, 1]$  است.

۲. چون  $f_{\tilde{a}}^R : [m, z] \rightarrow [0, 1]$  یک تابع پیوسته و اکیداً نزولی است، معکوس آن یعنی  $f_{\tilde{a}}^{R^{-1}} : [0, 1] \rightarrow [m, z]$  وجود دارد و یک تابع پیوسته و اکیداً نزولی روی بازه‌ی بسته  $[0, 1]$  است.

$$S_L(\tilde{a}) = y + \int_y^m f_{\tilde{a}}^L(x) dx = \int_0^1 f_{\tilde{a}}^{L^{-1}}(y) dy, \quad (6.2)$$

$$S_D(\tilde{a}) = m + \int_m^z f_{\tilde{a}}^R(x) dx = \int_0^1 f_{\tilde{a}}^{R^{-1}}(y) dy, \quad (7.2)$$

در نتیجه با ترکیب دو انتگرال فوق، شاخص لیو و وانگ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$LW^\beta(\tilde{a}) = \beta S_D(\tilde{a}) + (1 - \beta) S_L(\tilde{a}) \quad (8.2)$$

که  $\beta \in [0, 1]$  درجه‌ی خوش بینی تصمیم‌گیرندگان را نشان می‌دهد. طبق تعریف ۱.۷.۲ برای شاخص لیو و وانگ داریم:

$$\tilde{a} < \tilde{b} \Leftrightarrow LW^\beta(\tilde{a}) < LW^\beta(\tilde{b}).$$

### شاخص گراسیا و لاماتا<sup>۱۱</sup> [۱۴]

شاخص گراسیا و لاماتا تعمیمی از شاخص لیو و وانگ است که شامل درجه‌ی خوش بینی  $\beta$  و شاخص کیفیت  $\delta$  است که  $\delta \in [0, 1]$ . فرض کنید:

$$I(\tilde{a}) = (1 - \delta)[\beta S_D(\tilde{a}) + (1 - \beta) S_L(\tilde{a})] + \delta m. \quad (9.2)$$

که در آن  $m$  میانگین  $y$  و  $z$  و  $\delta \geq 0$  است. طبق تعریف ۱.۷.۲ برای شاخص گراسیا و لاماتا داریم.

$$\tilde{a} < \tilde{b} \Leftrightarrow I(\tilde{a}) < I(\tilde{b}).$$

### شاخص اوکادا و سوپر<sup>۱۲</sup> [۱]

فرض کنید  $\tilde{a} = (m, y, z)$  و  $\alpha$  عدد دلخواهی از بازه‌ی  $[0, 1]$  باشد،  $-\alpha$  برش عدد فازی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$[(y)_\alpha, (z)_\alpha]$$

**تعریف ۲.۷.۲.** فرض کنید  $\tilde{a} = (m_1, y_1, z_1)$  و  $\tilde{b} = (m_2, y_2, z_2)$  دو عدد فازی مثلثی باشند به طوری که  $\alpha \in [0, 1]$  گوییم عدد فازی  $\tilde{a}$  بر  $\tilde{b}$  غلبه می‌کند هرگاه:

$$(\tilde{a} < \tilde{b}) \Leftrightarrow m_1 \leq m_2, \quad y_1 \leq y_2, \quad z_1 \leq z_2.$$

**تعریف ۳.۷.۲.** حال تعمیم تعریف فوق را به صورت زیر در نظر می‌گیریم فرض کنید  $\tilde{a} = (m_1, y_1, z_1)$  و  $\tilde{b} = (m_2, y_2, z_2)$  دو عدد فازی مثلثی باشند به طوری که  $\alpha \in [0, 1]$  گوییم عدد

<sup>۱۱</sup>Garcia and Lamata index

<sup>۱۲</sup>Okada and Soper



فازی  $\tilde{a}$  بر  $\tilde{b}$  با درجه عضویت  $\alpha$  غلبه می‌کند هرگاه:

$$(\tilde{a} <_{\alpha} \tilde{b}) \Leftrightarrow m_1 \leq_{\alpha} m_2, \quad y_1 \leq_{\alpha} y_2, \quad z_1 \leq_{\alpha} z_2, \\ \tilde{a} \neq \tilde{b}.$$

تعریف فوق همان شاخص ارائه شده توسط اوکادا و سوپر است. طبق تعریف ۱.۷.۲ برای شاخص اوکادا و سوپر داریم:

$$\tilde{a} < \tilde{b} \Leftrightarrow \tilde{a} <_{\alpha} \tilde{b}$$

### شاخص قابل قبول نایم و پال [۲۷]<sup>۱۳</sup>

نایم و پال شاخص قابل قبول برای اعداد فازی مثلثی را ارائه دادند (شاخص اصلی توسط سنگوپتا و پال برای اعداد بازه‌ای پیشنهاد شده بود).

$$A(\tilde{a} < \tilde{b}) = \frac{m_2 - m_1}{z_1 + z_2}. \quad (10.2)$$

**ملاحظه ۱.۷.۲.** هنگام استفاده از شاخص قابل قبول برای حل مسأله‌ی کوتاه‌ترین مسیر فازی ممکن است بیش از یک جواب داشته باشد و این در صورتی است که ارزش معین اعداد فازی مثلثی با هم برابر باشد یعنی  $m_1 = m_2$ .

طبق تعریف ۱.۷.۲ برای شاخص قابل قبول داریم.

$$\tilde{a} < \tilde{b} \Leftrightarrow A(\tilde{a} < \tilde{b}) > A(\tilde{b} < \tilde{a}).$$

شاخص‌های رتبه‌بندی به دو گروه تقسیم می‌شوند: شاخص‌هایی که اعداد فازی را به غیر فازی تبدیل می‌کنند مانند شاخص لیو و وانگ و گراسیا و لاماتا و شاخص‌هایی که برای مقایسه دو عدد فازی به کار می‌روند مانند شاخص اوکادا و سوپر و شاخص قابل قبول نایم و پال.

**مثال ۱.۷.۲.** فرض کنید  $\tilde{a} = (2, 1, 3)$  و  $\tilde{b} = (4, 3, 5)$  با استفاده از شاخص لیو و وانگ برای  $\beta = 1$  داریم:

$$LW^{\beta}(\tilde{a}) = 2/5 \quad \text{و} \quad LW^{\beta}(\tilde{b}) = 4/5$$

$$.LW^{\lambda}(\tilde{a}) < LW^{\lambda}(\tilde{b}) \text{ در نتیجه}$$

شاخص گراسیا و لاماتا برای  $\beta = 1$  و  $\delta = 0/5$  داریم:

$$I(\tilde{a}) = 4/5 \quad \text{و} \quad I(\tilde{b}) = 1/5$$

$$.I(\tilde{a}) < I(\tilde{b}) \text{ در نتیجه}$$

با استفاده از شاخص قابل قبول نایم و پال به این صورت است:

$$A(\hat{a} < \tilde{b}) = 0/25 \quad \text{و} \quad A(\hat{b} < \tilde{a}) = -0/25$$

در نتیجه  $A(\tilde{a} < \tilde{b}) > A(\tilde{b} < \tilde{a})$ .

با استفاده از شاخص اوکادا و سوپر برای  $\alpha = 0$  داریم:

$$\tilde{a}_\alpha = [1, 3] \quad \text{و} \quad \tilde{b}_\alpha = [3, 5]$$

## ۸.۲ متغیرهای زبانی

انسان‌ها در زبان طبیعی و در استدلال‌های خود از متغیرهایی که مقادیر آن‌ها نادقیق و مبهم هستند بیشتر استفاده می‌کنند تا متغیرهایی که مقادیر آن‌ها دقیق و کاملاً مشخص‌اند. منظور از یک متغیر زبانی، متغیری است که مقادیرش کلمات یا عبارات یک زبان طبیعی یا مصنوعی باشد. برای مثال فاصله یک متغیر زبانی است اگر مقادیر آن به جای آن که عددی باشد، مانند  $1km$ ،  $5km$ ،  $100km$ ، ...، زبانی باشد مانند خیلی نزدیک، نزدیک، دور و ....

## فصل ۳

# روش‌های حل مسأله کوتاه‌ترین مسیر فازی

### ۱.۳ مقدمه

مسأله‌ی کوتاه‌ترین مسیر فازی<sup>۱</sup> (FSPP) یکی از موضوعات اساسی در نظریه‌ی گراف است. این مسأله به عنوان یک زیر مجموعه مهم و کاربردی از مسائل بهینه‌سازی در سال‌های اخیر تبدیل شده است.

دابویس و پراد<sup>۲</sup> [۱۳] نخستین کسانی بودند که کوتاه‌ترین مسیر فازی را در سال ۱۹۸۰ که تعمیمی از الگوریتم فلوید و الگوریتم فورد-مورد-بلمن (FMB) است ارائه دادند، اشکال عمده مسأله‌ی کوتاه‌ترین مسیر فازی عدم تفسیر است، یعنی ممکن است کوتاه‌ترین مسیر فازی پیدا شود اما به یک مسیر واقعی در شبکه مربوط نباشد. این مشکل با مدل‌های جدید براساس کوتاه‌ترین مسیر فازی و اهداف چندگانه توسط کلاین<sup>۳</sup> [۲۱] برطرف شد. او یک الگوریتم چند معیاره ترکیبی بر اساس برنامه‌ریزی پویا ارائه داد تا این نوع از مسائل را حل

---

<sup>۱</sup>Fuzzy Shortest Path Problem

<sup>۲</sup>Dubios and Prade

<sup>۳</sup>klein

کند. مارز و هوراک<sup>۴</sup> [۲۵] پیشنهاد کردند که عدم اطمینان در ارتباط با داده‌های ورودی شبکه با استفاده از مجموعه‌های فازی می‌تواند توصیف و بررسی شود. اوکادا و سوپر<sup>۵</sup> [۲۸] جواب را نه به عنوان کوتاه‌ترین مسیر، بلکه به عنوان یک جواب مجموعه‌ی فازی مشخص کردند که در آن هر عنصر یک مسیر غیرمغلوب یا مسیر بهینه پارتو با یال‌های فازی است. در این فصل دو الگوریتم مسأله‌ی کوتاه‌ترین مسیر فازی را مورد بررسی قرار می‌دهیم: الگوریتم اول توسط جین شینگ یا و فنگ تس لین<sup>۶</sup> [۳۲] ارائه شد که روشی متفاوت از روش‌های ذکر شده است به طوری که وزن یال گراف را به صورت نامشخص در نظر گرفته است، در نتیجه از اعداد فازی مثلثی برای مسائل مبهم و از رتبه‌بندی فاصله‌ی علامت‌دار برای نشان دادن کوتاه‌ترین مسیر فازی استفاده کردند. الگوریتم دوم که توسط هرناندز و همکاران<sup>۷</sup> [۱۷] ارائه شد، یک الگوریتم تکراری است که برای گراف با پارامترهای منفی به کار می‌رود و قادر است دور منفی گراف را تشخیص دهد.

## ۲.۳ کوتاه‌ترین مسیر فازی با وزن یال نامشخص

### ۱.۲.۳ مسأله‌ی کوتاه‌ترین مسیر بر اساس اعداد فازی

در این بخش وزن یال‌ها،  $c_{ij}$ ، را مبهم در نظر می‌گیریم. وزن یال‌ها باید با استفاده از متغیرهای زبانی بیان شود. بنابراین متغیرهای زبانی مورد استفاده برای وزن یال مبهم منجر به استفاده از اعداد فازی مثلثی شده است.  $\tilde{c}_{ij}$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم (شکل ۱.۳ را ببینید).

$$\tilde{c}_{ij} = (c_{ij} - \Delta_{ij1}, c_{ij}, c_{ij} + \Delta_{ij2}), \quad (1.3)$$

که  $\Delta_{ij1} < c_{ij}$  و  $\Delta_{ij2} > 0$ .

توجه کنید که  $\Delta_{ij1}$  و  $\Delta_{ij2}$  باید توسط تصمیم‌گیرندگان مشخص شود. برای

$\lambda = 1$  از تعریف ۴.۶.۲ داریم:

$$\begin{aligned} d^{\circ}(\tilde{C}, \tilde{\circ}_1) &= \frac{1}{4}(2c_{ij} + c_{ij} - \Delta_{ij1} + c_{ij} + \Delta_{ij2}) \\ &= c_{ij} + \frac{1}{4}(\Delta_{ij2}) (= c_{ij}^*) \end{aligned} \quad (2.3)$$

که  $\Delta_{ij} = \Delta_{ij2} - \Delta_{ij1}$ ، اندازه‌ی فاصله‌ی علامت‌دار  $\tilde{c}_{ij}$  از  $\tilde{\circ}_1$  است. چون

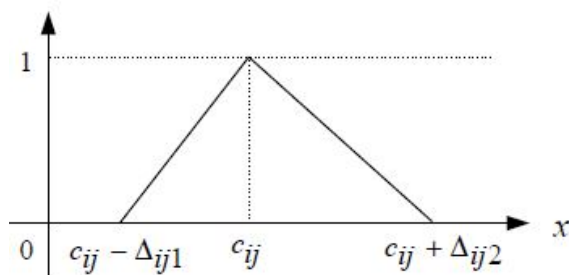
$$c_{ij}^* = d^{\circ}(\tilde{C}, \tilde{\circ}_1) = \frac{1}{4}(2c_{ij} + \Delta_{ij2}) + \frac{1}{4}(c_{ij} - \Delta_{ij1}) > 0$$

<sup>۴</sup>Mares and Horak

<sup>۵</sup>Okada and Soper

<sup>۶</sup>Jing-Shing Yao and Feng Tse Lin

<sup>۷</sup>Hernandes et al



شکل ۱.۳: عدد فازی  $\tilde{c}_{ij}$

نتیجه می‌گیریم که  $d^\circ(\tilde{C}, \tilde{\sigma}_1)$  فاصله‌ی اندازه‌گیری مثبت از  $\tilde{c}_{ij}$  به  $\tilde{\sigma}_1$  و  $\tilde{c}_{ij}^*$  عدد مثبت اندازه‌گیری است. در فرمول (۲.۳) اگر  $\Delta_{ij1} = \Delta_{ij2}$  در این صورت  $c_{ij}^* = c_{ij}$  و مسأله‌ی فازی تبدیل به مسأله‌ی غیر فازی می‌شود. به  $c_{ij}^* = c_{ij} + \frac{1}{\alpha} \Delta_{ij}$  یک تقریبی از وزن یال  $\langle i, j \rangle$  به مفهوم فازی می‌گوییم.

### ۲.۲.۳ مسأله‌ی کوتاه‌ترین مسیر فازی

همان طور که گفته شد مسیره‌های منتهای از  $i$  تا  $n$  در یک گراف وجود دارد. بنابراین باید یک مسیر مانند  $p = \langle i, i_1, i_2, \dots, i_{m(i)}, n \rangle$  برای  $p = \langle i, i_1, i_2, \dots, i_{m(i)}, n \rangle$  توجه کنید که  $f(i) = c_{ii_1} + c_{i_1 i_2} + \dots + c_{i_{m(i)} n}$  طول کوتاه‌ترین مسیر از  $i$  تا  $n$  است، یعنی برای هر  $p = \langle i, k_1, k_2, \dots, k_{p(k)}, n \rangle$  از رأس  $i$  تا  $n$  داریم:

$$c_{ii_1} + c_{i_1 i_2} + \dots + c_{i_{m(i)} n} \leq c_{ik_1} + c_{k_1 k_2} + \dots + c_{k_{p(k)} n}, \quad (3.3)$$

یا به طور خلاصه برای  $f(i)$  داریم:

$$f(i) = \min\{c_{ik_1} + c_{k_1 k_2} + \dots + c_{k_{p(k)} n} \mid \forall p = \langle i, k_1, k_2, \dots, k_{p(k)}, n \rangle\}.$$

تصمیم‌گیرندگان باید مقادیر مناسب برای پارامترها انتخاب کنند تا در فرمول زیر صدق کند.

$$\Delta_{ii_1} + \Delta_{i_1 i_2} + \dots + \Delta_{i_{m(i)} n} \leq \Delta_{ik_1} + \Delta_{k_1 k_2} + \dots + \Delta_{k_{p(k)} n}, \quad (4.3)$$

با اضافه کردن یک چهارم رابطه (۴.۳) به (۳.۳) و طبق معادله‌ی (۲.۳) و تعریف ۴.۶.۲ و ویژگی فاصله علامت‌دار ذکر شده در فصل ۱۶.۴ داریم:

$$\frac{1}{\alpha}(\Delta_{ii_1} + c_{ii_1}) + \dots + \frac{1}{\alpha}(\Delta_{i_{m(i)} n} + c_{i_{m(i)} n}) \leq \frac{1}{\alpha}(\Delta_{ik_1} + c_{ik_1}) + \dots + \frac{1}{\alpha}(\Delta_{k_{p(k)} n} + c_{k_{p(k)} n})$$

$$d(\tilde{c}_{ii_1} \oplus \tilde{c}_{i_1 i_2} \oplus \dots \oplus \tilde{c}_{i_{m(i)} n}) \leq d(\tilde{c}_{ik_1} \oplus \tilde{c}_{k_1 k_2} \oplus \dots \oplus \tilde{c}_{k_{p(k)} n}), \quad (5.3)$$

طبق تعریف ۶.۶.۲ از رتبه‌بندی سطح  $\lambda$  اعداد فازی نتیجه می‌گیریم که رابطه (۴.۳) مساوی است با

$$\tilde{c}_{ii_1} \oplus \tilde{c}_{i_1 i_2} \oplus \dots \oplus \tilde{c}_{i_{m(i)} n} \lesssim \tilde{c}_{ik_1} \oplus \tilde{c}_{k_1 k_2} \oplus \dots \oplus \tilde{c}_{k_{p(k)} n}, \quad (6.3)$$

که حداقل یک  $\approx$  برای همه‌ی مسیرهای ممکن از رأس  $i$  تا  $n$  اتفاق بیفتد. توجه کنید که  $\lesssim$  و  $\approx$  رتبه‌بندی تعریف شده ۶.۶.۲ در  $f_N(1)$  هستند. از تعریف ۴.۶.۲ و ویژگی فاصله علامت‌دار داریم:

$$\begin{aligned} d(\tilde{c}_{ii_1} \oplus \tilde{c}_{i_1 i_2} \oplus \dots \oplus \tilde{c}_{i_{m(i)} n}, \tilde{\circ}_1) &= d(\tilde{c}_{ii_1}, \tilde{\circ}_1) + d(\tilde{c}_{i_1 i_2}, \tilde{\circ}_1) + \dots + d(\tilde{c}_{i_{m(i)} n}, \tilde{\circ}_1) \\ &= c_{ii_1}^* + c_{i_1 i_2}^* + \dots + c_{i_{m(i)} n}^*. \end{aligned}$$

به‌طور مشابه داریم:

$$\begin{aligned} d(\tilde{c}_{ik_1} \oplus \tilde{c}_{k_1 k_2} \oplus \dots \oplus \tilde{c}_{k_{p(k)} n}, \tilde{\circ}_1) &= d(\tilde{c}_{ik_1}, \tilde{\circ}_1) + d(\tilde{c}_{k_1 k_2}, \tilde{\circ}_1) + \dots + d(\tilde{c}_{k_{p(k)} n}, \tilde{\circ}_1) \\ &= c_{ik_1}^* + c_{k_1 k_2}^* + \dots + c_{k_{p(k)} n}^*. \end{aligned} \quad (7.3)$$

از فرمول (۲.۳) و (۵.۳) و (۶.۳) و تعریف ۶.۶.۲ نامساوی زیر را نتیجه می‌گیریم.

$$c_{ii_1}^* + c_{i_1 i_2}^* + \dots + c_{i_{m(i)} n}^* \leq c_{ik_1}^* + c_{k_1 k_2}^* + \dots + c_{k_{p(k)} n}^*, \quad (8.3)$$

فرض می‌کنیم  $f^*(i)$  طول کوتاه‌ترین مسیر از  $i$  تا  $n$  با  $\{c_{ij}^* \mid \langle i, j \rangle \in E\}$  باشد. از رابطه (۷.۳) داریم:

$$f^*(i) = c_{ii_1}^* + c_{i_1 i_2}^* + \dots + c_{i_{m(i)} n}^*.$$

به‌طور مشابه

$$f^*(j) = c_{jj_1}^* + c_{j_1 j_2}^* + \dots + c_{j_{m(j)} n}^*. \quad (9.3)$$

با باز نویسی فرمول (۱.۱) در فصل ۱ برای هر  $i$  ثابت  $f(i) \leq c_{ij} + f(j)$  و  $\forall i, j \in E$  داریم:

$$c_{ii_1} + c_{i_1 i_2}, \dots, c_{i_{m(i)} n} \leq c_{ij} + c_{jj_1} + c_{j_1 j_2}, \dots, c_{j_{m(j)} n}, \forall i, j \in E, \quad (10.3)$$

تصمیم‌گیرندگان باید مقادیر مناسب برای پارامترها انتخاب کنند تا در فرمول زیر صدق کند.

$$\Delta_{ii_1} + \Delta_{i_1 i_2}, \dots, \Delta_{i_{m(i)} n} \leq \Delta_{jj_1} + \Delta_{j_1 j_2}, \dots, \Delta_{j_{m(j)} n}, \forall i, j \in E, \quad (11.3)$$

طبق رابطه (۱۰.۳) و (۱۱.۳) داریم:

$$\tilde{c}_{ii_1} \oplus \tilde{c}_{i_1 i_2} \oplus \dots \oplus \tilde{c}_{i_m(i)n} \lesssim \tilde{c}_{ij} \oplus \tilde{c}_{j_1 j_2} \oplus \dots \oplus \tilde{c}_{j_m(j)n}, \forall i < j, < i, j > \in E, \quad (12.3)$$

از تعریف ۲.۳ و ۴.۶.۲ ویژگی فاصله علامت‌دار ذکر شده در فصل ۱۶.۴ داریم:

$$c_{ii_1}^* + c_{i_1 i_2}^* + \dots + c_{i_m(i)n}^* \leq c_{jj_1}^* + c_{j_1 j_2}^* + \dots + c_{j_m(j)n}^*, \forall i < j, < i, j > \in E, \quad (13.3)$$

ملاحظه ۱.۲.۳. توجه کنید که رابطه (۱۰.۳) و (۱۱.۳) دارای خاصیت یکسان هستند. با استفاده از رابطه (۹.۳) و (۱۳.۳) برنامه‌ریزی پویای بازگشتی فازی به صورت زیر خواهد بود.

$$f^*(i) = \min_{i < j} \{c_{ij}^* + f^*(j) \mid < i, j > \in E\},$$

و

$$f^*(n) = \circ.$$

و در نهایت بحث فوق در قضیه‌ی زیر خلاصه شده است.

**قضیه ۱.۲.۳. [۳۲].** یک گراف  $G = (V, E)$  را در نظر بگیرید که شامل  $n$  رأس  $1, 2, \dots, n$  با وزن یال‌های  $\{c_{ij} \mid < i, j > \in E\}$  می‌باشد. تقریبی از وزن یال،  $c_{ij}^*$ ، که براساس عدد فازی مثالی (۱.۳) نوشته شده است به صورت  $c_{ij}^* = c_{ij} + \frac{1}{4}(\Delta_{ij2} - \Delta_{ij1}) = c_{ij} + \frac{1}{4}\Delta_{ij}$  تعریف می‌شود که در آن که  $\Delta_{ij1}$  و  $\Delta_{ij2}$  پارامترهایی هستند که مقادیر آن‌ها توسط تصمیم‌گیرندگان مشخص می‌شوند که در رابطه (۱۱.۳) صدق کند بنابراین یک مجموعه از وزن یال‌ها به مفهوم فازی به صورت  $\{c_{ij}^* \mid < i, j > \in E\}$  تولید می‌شود. فرم بازگشتی برنامه‌ریزی پویای مسأله کوتاه‌ترین مسیر به مفهوم فازی به صورت زیر است.

$$f^*(i) = \min_{i < j} \{c_{ij}^* + f^*(j) \mid < i, j > \in E\}, \quad (14.3)$$

$$f^*(n) = \circ.$$

اگر  $\Delta_{ij1} = \Delta_{ij2}$  در این صورت  $c_{ij}^* = c_{ij}$  و در نتیجه مسأله‌ی کوتاه‌ترین مسیر فازی تبدیل به مسأله‌ی غیر فازی می‌شود.

**مثال ۱.۲.۳. مثال ۱.۴.۱** را به صورت فازی حل می‌کنیم. نامساوی (۱۰.۳) برای  $i = 1, 2, 4$  را در نظر بگیرید:

$$i = 1, c_{12} + f(2) < c_{13} + f(3), c_{12} + c_{24} + c_{46} < c_{13} + c_{34} + c_{46},$$

$$i = 2, c_{24} + f(4) < c_{25} + f(5), c_{24} + c_{46} < c_{25} + c_{56}$$

$$i = 4, c_{46} + f(6) < c_{45} + f(5), c_{46} < c_{45} + c_{56}$$

طبق ملاحظه ۱.۲.۳ و پارامترهای (۱۱.۳) نامساوی زیر را نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \Delta_{۱۲} + \Delta_{۲۴} + \Delta_{۴۶} &< \Delta_{۱۳} + \Delta_{۳۴} + c_{۴۶}, \\ \Delta_{۲۴} + \Delta_{۴۶} &< \Delta_{۲۵} + \Delta_{۵۶} \\ \Delta_{۴۶} &< \Delta_{۴۵} + \Delta_{۵۶} \end{aligned} \quad (۱۵.۳)$$

$\Delta_{ij}$  پارامترهایی هستند که مقادیر آن‌ها توسط تصمیم‌گیرندگان مشخص می‌شود که در رابطه (۱۵.۳) صدق کند.

فرض کنید  $\Delta_{۱۲} = ۰/۵, \Delta_{۱۳} = ۱, \Delta_{۲۴} = ۰/۸, \Delta_{۴۶} = ۱, \Delta_{۲۵} = ۱/۳, \Delta_{۵۶} = ۱/۵, \Delta_{۳۴} = ۰/۷, \Delta_{۴۵} = ۰/۹$  نشان داده می‌شوند، داریم:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{۱۲} &= (۴ - ۰/۲, ۴, ۴ + ۰/۷) & \tilde{c}_{۱۳} &= (۳ - ۰/۵, ۳, ۳ + ۱/۵) \\ \tilde{c}_{۲۴} &= (۲ - ۰/۳, ۲, ۲ + ۱/۱) & \tilde{c}_{۴۶} &= (۶ - ۱, ۶, ۶ + ۲) \\ \tilde{c}_{۲۵} &= (۲ - ۰/۲, ۲, ۲ + ۱/۵) & \tilde{c}_{۵۶} &= (۶ - ۰/۵, ۶, ۶ + ۲) \\ \tilde{c}_{۳۴} &= (۵ - ۰/۲, ۵, ۵ + ۰/۹) & \tilde{c}_{۴۵} &= (۳ - ۰/۳, ۳, ۳ + ۱/۲) \end{aligned}$$

از قضیه‌ی ۱.۲.۳ تقریبی از وزن یال  $c_{ij}^*$  براساس اعداد فازی مثلثی به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} c_{۱۲}^* &= ۴/۱۲۵ & c_{۱۳}^* &= ۳/۲۵ & c_{۳۴}^* &= ۲/۲ \\ c_{۴۶}^* &= ۶/۲۵ & c_{۲۵}^* &= ۲/۳۲۵ & c_{۵۶}^* &= ۶/۳۷۵ \\ c_{۳۴}^* &= ۵/۱۷۵ & c_{۴۵}^* &= ۳/۲۲۵ & & \end{aligned}$$

شکل ۲.۳ گراف فازی را نشان می‌دهد. روش جدولی برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر در جدول ۳.۳ نشان داده شده است که ابتدا وزن یال‌ها را در جدول قرار داده و  $f^*(j)$  را به صورت معکوس  $۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶$  محاسبه می‌کنیم و قرار می‌دهیم  $f^*(۶) = ۰$  و با  $j = ۵$  شروع می‌کنیم. چون در سطر  $i = ۵$ ،  $c_{۵۶}^* = ۶/۳۷۵$  است ستون  $j = ۶$  را بررسی می‌کنیم،  $f^*(۶) = ۰$  بدست می‌آید. بنابراین  $f^*(۵)$  به صورت

$$f^*(۵) = c_{۵۶}^* + f^*(۶) = ۶/۳۷۵$$

تعریف می‌شود. سپس قرار می‌دهیم  $j = ۴$  چون در سطر  $i = ۴$ ، دو ورودی  $c_{۴۵}^*$  و  $c_{۴۶}^*$  را داریم بنابراین  $f^*(۴)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f^*(۴) = \min\{c_{۴۵}^* + f^*(۵), c_{۴۶}^* + f^*(۶)\} = \min\{۳/۲۲۵ + ۶/۳۷۵, ۶/۲۵ + ۰\} = c_{۴۶}^* + f^*(۶) = ۶/۲۵$$

به همین ترتیب

$$f^*(۳) = c_{۳۴}^* + f^*(۴) = ۵/۱۷۵ + ۶/۲۵ = ۱۱/۴۲۵$$



$$f(2) = \min\{c_{24}^* + f^*(4), c_{25}^* + f^*(5)\} = \min\{2/2 + 6/25, 2/325 + 6/375\} = c_{24}^* + f^*(4) = 8/45$$

بدست می‌آید. در نهایت، قرار می‌دهیم  $z = 1$  چون در سطر  $i = 1$  دو ورودی  $c_{13}^*$  و  $c_{12}^*$  وجود دارد، بنابراین  $f^*(1)$  به صورت زیر بدست می‌آید:

$$f^*(1) = \min\{c_{12}^* + f^*(2), c_{13}^* + f^*(3)\} = \min\{4/125 + 8/45, 3/25 + 11/425\} = c_{12}^* + f^*(2) = 12/575$$

به‌طور خلاصه، کوتاه‌ترین مسیر را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f^*(1) = c_{12}^* + f^*(2) = c_{12}^* + c_{24}^* + f^*(4) = c_{12}^* + c_{24}^* + c_{46}^* + f^*(6) = c_{12}^* + c_{24}^* + c_{46}^* = 12/575$$

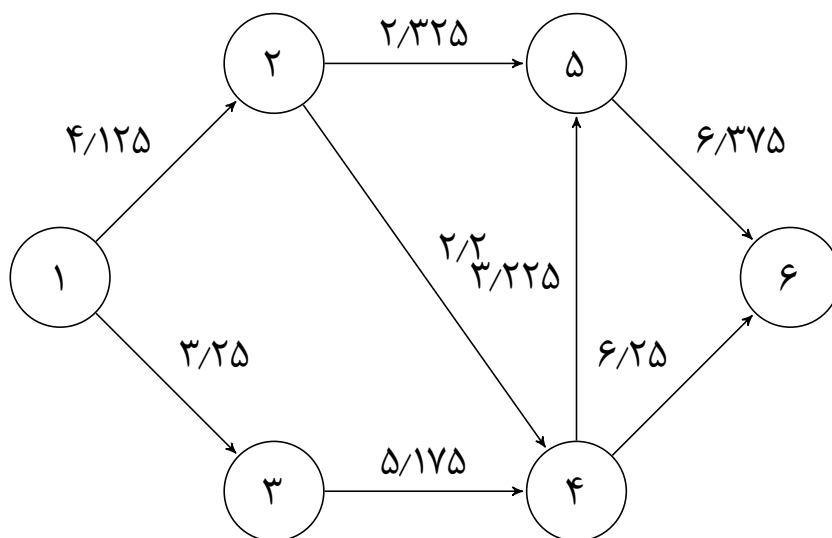
پس کوتاه‌ترین مسیر  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$  با طول  $12/575$  است.

### ۳.۲.۳ مقایسه‌ی طول کوتاه‌ترین مسیر و کوتاه‌ترین مسیر فازی

همان‌طور که دیدیم طول کوتاه‌ترین مسیر  $1^\circ$  و کوتاه‌ترین مسیر فازی  $12/575$  است. پس طول کوتاه‌ترین مسیر فازی بزرگتر است. خطای نسبی به صورت زیر است:

$$\frac{f^*(1) - f(1)}{f(1)} * 100 = \frac{12/575 - 1^\circ}{1^\circ} * 100 = 25/75$$

بنابراین همان‌طور که گفته شد در کوتاه‌ترین مسیر فازی تصمیم‌گیرندگان باید مقادیر پارامترها را تعیین کنند.



شکل ۲.۳: گراف فازی

$f^*(j)$	۱۲,۵۷۵	۸,۴۵	۱۱,۴۲۵	۶,۲۵	۶,۳۷۵	۰	$j$
$j$	۱	۲	۳	۴	۵	۶	
		۴,۱۲۵	۳,۲۵				۱
				۲,۲	۲,۳۲۵		۲
				۵,۱۷۵			۳
					۳,۲۲۵	۶,۲۵	۴
						۶,۳۷۵	۵
							۶

شکل ۳.۳: روش جدولی کوتاه‌ترین مسیر فازی

### ۳.۳ کوتاه‌ترین مسیر در شبکه با پارامترهای فازی

#### ۱.۳.۳ فرمول ریاضی کوتاه‌ترین مسیر فازی

در این بخش یک فرمول ریاضی برای مسأله‌ی کوتاه‌ترین مسیر فازی ارائه شده است. یک گراف جهت‌دار که یال‌های آن توسط  $(i, j)$  نشان داده شده است به طوری که ۱ گره مبدأ و  $n$  گره مقصد است. در این صورت فرمول کوتاه‌ترین مسیر با استفاده از برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر است [۲۹]:

$$\min \tilde{f}(x) = \sum_{(i,j) \in E} \tilde{c}_{ij} x_{ij}$$

s.t.

$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ 0 & i \neq 1, n \\ -1 & i = n \end{cases} \quad (۱۶.۳)$$

$$x_{ij} = 0 \quad \text{یا} \quad 1 \quad (i, j) \in E$$

و  $n$  تعداد گره‌ها و نماد  $\sum$  در تابع هدف به جمع  $\oplus$  اعداد فازی اشاره دارد.  $\min$  در تابع هدف مبهم است و بستگی به شاخص رتبه‌بندی مورد استفاده دارد.

#### ۲.۳.۳ الگوریتم فازی کوتاه‌ترین مسیر

همان‌طور که گفته شد الگوریتم ارائه شده برگرفته از الگوریتم  $FMB$  برای گراف‌های کلاسیک است. این الگوریتم یک الگوریتم تکراری، که شاخص رتبه‌بندی به کار رفته در آن عمومی است

و دارای معیار توقف به صورت تعداد تکرارها یا عدم تغییر هزینه‌ی مسیرهای پیدا شده بین گره قبلی و گره جاری است. چون شاخص‌های رتبه بندی ممکن است بیش از یک مسیر بین گره‌ها ایجاد کند از برچسب گذاری استفاده می‌کنیم. مراحل کلی الگوریتم به صورت زیر است:

**(الف)** در مرحله ۰، مقدار دهی متغیرها انجام می‌شود. برچسب‌ها و فاصله‌ها به مسیرها نسبت داده می‌شود.

**(ب)** در مرحله ۱، سه کار اصلی انجام می‌شود. اول همه‌ی مسیرهای بین گره ۱ و  $i$  با مسافت‌هایی که در مرحله ۰ و طول  $\tilde{c}_{ij}$  از یال  $(i, j)$  مشخص شده بود نشان داده می‌شود. دوم برای گره‌هایی که بیش از یک مسیر بین آن‌ها وجود دارد مسیر مغلوب<sup>۸</sup> را حذف می‌کنیم. سوم دور منفی بررسی می‌شود اگر دور منفی وجود داشته باشد الگوریتم پایان می‌یابد در غیر این صورت الگوریتم ادامه می‌یابد.

**(ج)** در مرحله ۲، معیار توقف بررسی می‌شود. اگر برقرار بود کوتاه‌ترین مسیر ساخته می‌شود و الگوریتم در مرحله ۴ پایان می‌یابد در غیر این صورت به مرحله ۱ برمی‌گردیم ( در این الگوریتم مانند الگوریتم  $FMB$  کلاسیک تمام گره‌ها در هر تکرار بررسی می‌شوند و مسافت بعضی از مسیرها ممکن است ارزش خود را تغییردهند). الگوریتم در صورتی پایان می‌یابد که همه‌ی مسیرها و مسافت‌ها در تکرار جاری مساوی با تکرار قبلی باشند و یا تعداد تکرارها با تعداد گره‌ها با هم برابر باشند که در این صورت وجود دور منفی بررسی می‌شود و الگوریتم در یک حلقه‌ی بی نهایت قرار می‌گیرد سپس الگوریتم پایان می‌یابد و نشان دادن کوتاه‌ترین مسیر ممکن نیست.

الگوریتمی که ارائه شده است برای اعداد فازی مثلثی است اما برای هر نوع از اعداد فازی می‌توان استفاده کرد. نمادهای زیر برای الگوریتم استفاده می‌شوند:

- $n$ : تعداد گره‌ها،
- $it$ : تعداد تکرارها،
- $E$ : مجموعه‌ی یال‌ها،
- $(m+z)^i$ : گسترش راست  $(m+y)$  از هزینه‌ی کمان  $(i, j)$ ،
- $M = \sum_{i=1}^E |(m+z)^i|$ : یک عدد بزرگ جایگزین  $\infty$  در الگوریتم  $FMB$ ،
- $\tilde{c}_{ji}$ : هزینه‌ی کمان  $(ji)$ ،

<sup>۸</sup>Dominated

- $p(1, t)$ : مسیر بین گره‌ی ۱ و  $i$ ،
- $\tilde{d}_k^{it}(p(1, t))$ : طول مسیر  $p(1, t)$  از برجسب  $k$  در تکرار  $n$ ،
- $\Gamma_i^{-1}$ : مجموعه‌ی گره‌های قبلی  $i$ ،
- $d_k^{it}$ : شاخص رتبه‌بندی در نظر گرفته شده برای مقایسه‌ی مسیر  $p(1, t)$  با برجسب  $k$  در تکرار  $it$ .

به‌طور خلاصه مراحل الگوریتم را می‌توان به صورت زیر نوشت:  
مرحله ۰، مقدار دهی به متغیرها به صورت زیر انجام می‌شود.

$$1. \tilde{d}_1^0(p(1,1)) = (\circ, \circ, \circ)$$

$$2. \tilde{d}_1^0(p(1,j)) = (M + 2, 1, 1), \quad j = 2, 3, \dots, n$$

$$3. it \rightarrow 1$$

مرحله ۱، در این مرحله مسیرها مشخص و غلبگی و دور منفی بررسی می‌شود.

$$1. \tilde{d}_1^{it}(p(1,1)) = (\circ, \circ, \circ)$$

2. تعیین طول مسیر فازی: فاصله فازی بین گره ۱ و  $i$  به علاوه مسیر با گره‌ی قبلی در یک تکرار قبل،  $\tilde{d}_l^{it-1}(p(1,j))$  و هزینه‌ی یال  $(j, i)$  که به صورت زیر نشان داده شده است.

• برای  $i = 2, 3, \dots, n$ ،  $\forall j \in \Gamma_i^{-1}$  قرار دهید:

$$\tilde{d}_k^{it}(p(1,i)) = \tilde{d}_l^{it-1}(p(1,j)) \oplus \tilde{c}_{ji}$$

3. بررسی غلبگی: برای هر گره‌ی  $i \in N$  غلبگی برای همه‌ی برجسب‌های گره  $i$  بررسی و یک به یک مقایسه می‌شوند.

• اگر  $\tilde{d}_k^{it}(p(1,i)) > \tilde{d}_l^{it}(p(1,i))$  برجسب  $k$  را حذف کنید.

• اگر  $\tilde{d}_k^{it}(p(1,i)) < \tilde{d}_l^{it}(p(1,i))$  برجسب  $l$  را حذف کنید.

4. تأیید دورمنفی: دور منفی به وسیله‌ی به کار بردن شاخص رتبه‌بندی روی مسیر  $p(i,j)$  بررسی می‌شود. اگر  $p(i,j)$  منفی بود الگوریتم در یک حلقه‌ی بی نهایت قرار دارد.

• اگر حداقل یک گره‌ی  $i$  وجود دارد به طوری که  $\tilde{d}_k^{it}(p(1,i)) < \circ$

- برو به مرحله ۴ (دورمنفی است و متوقف شوید).
- در غیر این صورت برو به مرحله ۲.

مرحله ۲، معیار توقف:

$$\tilde{d}_k^{it}(p_{(1,i)}) = (\tilde{d}_k^{it-1}(p_{(1,i)})) \quad \text{یا} \quad (it = n) \quad \text{اگر } ۱.$$

$$\bullet \quad \text{اگر } (it = n) \quad \text{و} \quad (\tilde{d}_k^{it}(p_{(1,i)}) \neq \tilde{d}_k^{it-1}(p_{(1,i)}))$$

- برو به مرحله ۴ (دورمنفی است و متوقف شوید).
- در غیر این صورت برو به مرحله ۳

۲. در غیر این صورت  $it = it + 1$ ، برو به مرحله ۱.

مرحله ۳. ترکیب کوتاه‌ترین مسیر: کوتاه‌ترین مسیر از گرهی ۱ تا  $i$  بدست می‌آید بنابراین کافی است گره‌های قبلی با برچسب‌هایشان را ذخیره کنیم.  
مرحله ۴، پایان اجرای الگوریتم.

### ۳.۳.۳ همگرایی الگوریتم

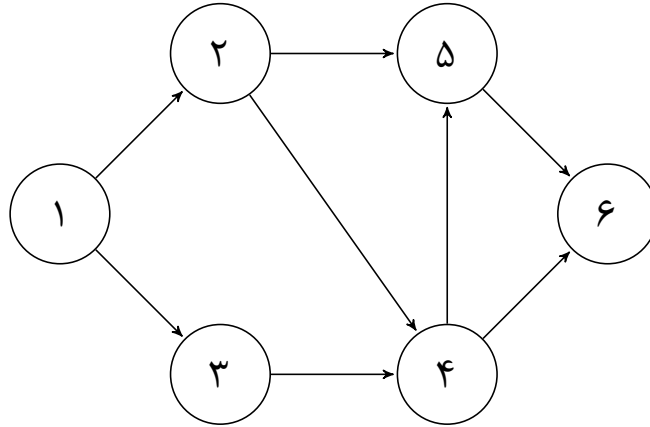
چون الگوریتم ارائه شده برگرفته از الگوریتم  $FMB$  است ساختار آن حفظ می‌شود. الگوریتم  $FMB$  در صورت عدم وجود دور منفی در  $n - 1$  تکرار همگرا خواهد شد پس این الگوریتم نیز در  $n - 1$  تکرار همگرا خواهد شد.

### ۴.۳.۳ پیچیدگی الگوریتم

در مرحله ۱ حداکثر  $nV_{max}$  جمع برای هزینه‌ی هر مسیر داریم که  $V_{max}$  حداکثر تعداد برچسب‌های تمام گره‌هاست. در مرحله ۲ حداکثر  $nV_{max}^2$  مقایسه غلبگی برای هر تکرار داریم که پیچیدگی به صورت  $O(nV_{max}^2)$  است. با توجه به اینکه الگوریتم ارائه شده حداکثر در  $n - 1$  تکرار همگرا می‌شود، بنابراین دارای پیچیدگی زیر است:

$$O((n - 1)(nV_{max}^2)) = O(n^2V_{max}^2 + nV_{max}^2) = O(n^2V_{max}^2).$$

مثال ۱.۳.۳. این مثال را با استفاده از شاخص گراسیا و لاماتا معرفی شده در فصل ۲ برای  $\beta = 1$  و  $\delta = 5\%$  حل می‌کنیم، کوتاه‌ترین مسیر در جدول ۱.۳ آمده است.



شکل ۴.۳: گراف بدون دور

گروه مبدأ	گروه مقصد	وزن یال
۱	۲	(۴, ۳/۸, ۴/۷)
۱	۳	(۳, ۲/۵, ۳/۵)
۲	۴	(۲, ۱/۷, ۳/۱)
۲	۵	(۲, ۱/۸, ۳/۵)
۳	۴	(۵, ۴/۸, ۵/۹)
۴	۶	(۶, ۵, ۸)
۴	۵	(۳, ۲/۷, ۴/۲)
۵	۶	(۶, ۵/۵, ۸)

جدول ۱.۳: طول یال گراف

مقدار دهی اولیه:

$$it = \circ,$$

$$\tilde{d}_1^{\circ}(p(1, 1)) = (\circ, \circ, \circ),$$

$$\tilde{d}_1^{\circ}(p(1, j)) = (73/9, 1, 1) \quad j = 2, 3, \dots, 6.$$

تکرار اول  $it = 1$

$$i = 2 \quad \Gamma_2^{-1} = \{1\},$$

$$\tilde{d}_1^1(p(1, 1)) = (\circ, \circ, \circ),$$

$$\tilde{d}_1^1(p(1, 2)) = \tilde{d}_1^{\circ}(p(1, 1)) \oplus \tilde{c}_{12} = (\circ, \circ, \circ) \oplus (4, 3/8, 4/7) = (4, 3/8, 4/7),$$

$$i = 3 \quad \Gamma_3^{-1} = \{1\}$$

$$\tilde{d}_1^{\downarrow}(p(1, 3)) = \tilde{d}_1^{\circ}(p(1, 1)) \oplus \tilde{c}_{13} = (\circ, \circ, \circ) \oplus (3, 2/5, 3/5) = (3, 2/5, 3/5),$$

$$i = 4 \quad \Gamma_4^{-1} = \{2, 3\},$$

$$\tilde{d}_1^{\downarrow}(p(1, 4)) = \tilde{d}_1^{\circ}(p(1, 2)) \oplus \tilde{c}_{24} = (73/9, 1, 1) \oplus (2, 1/7, 3/1) = (75/9, 2/7, 4/1),$$

$$\tilde{d}_4^{\downarrow}(p(1, 4)) = \tilde{d}_1^{\circ}(p(1, 3)) \oplus \tilde{c}_{34} = (73/9, 1, 1) \oplus (5, 4/8, 5/9) = (78/9, 5/8, 6/9),$$

$$i = 5 \quad \Gamma_5^{-1} = \{2, 4\},$$

$$\tilde{d}_1^{\downarrow}(p(1, 5)) = \tilde{d}_1^{\circ}(p(1, 2)) \oplus \tilde{c}_{25} = (73/9, 1, 1) \oplus (2, 1/7, 3/1) = (75/9, 2/8, 4/5),$$

$$\tilde{d}_4^{\downarrow}(p(1, 5)) = \tilde{d}_1^{\circ}(p(1, 4)) \oplus \tilde{c}_{45} = (73/9, 1, 1) \oplus (3, 2/7, 4/2) = (76/9, 3/7, 5/2),$$

$$i = 6 \quad \Gamma_6^{-1} = \{4, 5\},$$

$$\tilde{d}_1^{\downarrow}(p(1, 6)) = \tilde{d}_1^{\circ}(p(1, 4)) \oplus \tilde{c}_{46} = (73/9, 1, 1) \oplus (6, 5/8, 8) = (79/9, 6, 9),$$

$$\tilde{d}_4^{\downarrow}(p(1, 6)) = \tilde{d}_1^{\circ}(p(1, 5)) \oplus \tilde{c}_{56} = (73/9, 1, 1) \oplus (6, 5/5, 8) = (79/9, 6/5, 9).$$

$$\tilde{d}_1^{\downarrow}(p(1, 4)) = 23/4$$

$$\tilde{d}_4^{\downarrow}(p(1, 4)) = 27/8$$

$$\tilde{d}_1^{\downarrow}(p(1, 5)) = 23/75$$

$$\tilde{d}_4^{\downarrow}(p(1, 5)) = 24/975$$

$$\tilde{d}_1^{\downarrow}(p(1, 6)) = 29/725$$

$$\tilde{d}_4^{\downarrow}(p(1, 6)) = 29/975$$

طبق شاخص گراسیا و لاماتا برچسب ۲ برای گره ۴ و ۵ و برچسب ۱ برای گره ۶ حذف می‌شوند. پس کوتاه‌ترین مسیر برای گره ۴ و ۵ برچسب ۱ و برای گره ۶ برچسب ۲ است. از طرفی شرط توقف برقرار نیست تکرار بعدی را ادامه می‌دهیم.

تکرار دوم  $it = 2$

$$i = 2 \quad \Gamma_2^{-1} = \{1\}$$

$$\tilde{d}_1^{\downarrow}(p(1, 1)) = (\circ, \circ, \circ),$$

$$\tilde{d}_1^{\downarrow}(p(1, 2)) = \tilde{d}_1^{\downarrow}(p(1, 1)) \oplus \tilde{c}_{12} = (\circ, \circ, \circ) \oplus (4, 3/8, 4/7) = (4, 3/8, 4/7),$$

$$i = 3 \quad \Gamma_3^{-1} = \{1\},$$

$$\tilde{d}_1^{\downarrow}(p(1, 3)) = \tilde{d}_1^{\downarrow}(p(1, 1)) \oplus \tilde{c}_{13} = (\circ, \circ, \circ) \oplus (3, 2/5, 3/5) = (3, 2/5, 3/5),$$

$$i = 4 \quad \Gamma_4^{-1} = \{2, 3\},$$

$$\tilde{d}_1^{\downarrow}(p(1, 4)) = \tilde{d}_1^{\downarrow}(p(1, 2)) \oplus \tilde{c}_{24} = (4, 3/8, 4/7) \oplus (2, 1/7, 3/1) = (6, 5/5, 7/8),$$

$$\tilde{d}_3^{\downarrow}(p(1, 4)) = \tilde{d}_1^{\downarrow}(p(1, 3)) \oplus \tilde{c}_{34} = (3, 2/5, 3/5) \oplus (5, 4/8, 5/9) = (8, 7/3, 9/4),$$

$$i = 5 \quad \Gamma_5^{-1} = \{2, 4\},$$

$$\tilde{d}_1^{\downarrow}(p(1, 5)) = \tilde{d}_1^{\downarrow}(p(1, 2)) \oplus \tilde{c}_{25} = (4, 3/8, 4/7) \oplus (2, 1/8, 3/5) = (6, 5/6, 8/2),$$

$$\tilde{d}_3^{\downarrow}(p(1, 5)) = \tilde{d}_1^{\downarrow}(p(1, 4)) \oplus c_{45} = (75/9, 2/7, 4/1) \oplus (3, 2/7, 4/2) = (78/9, 5/4, 8/3),$$

$$i = 6 \quad \Gamma_6^{-1} = \{4, 5\},$$

$$\tilde{d}_1^{\sim}(p(1, 6)) = \tilde{d}_1^{\sim}(p(1, 4)) \oplus \tilde{c}_{46} = (75/9, 2/7, 4/1) \oplus (6, 5, 8) = (81/9, 7/7, 12/1),$$

$$\tilde{d}_7^{\sim}(p(1, 6)) = \tilde{d}_1^{\sim}(p(1, 5)) \oplus \tilde{c}_{56} = (75/9, 2/8, 4/5) \oplus (6, 5/5, 8) = (81/9, 7/8, 10/3).$$

$$\tilde{d}_1^{\sim}(p(1, 4)) = 10/1$$

$$\tilde{d}_7^{\sim}(p(1, 4)) = 12/7$$

$$\tilde{d}_1^{\sim}(p(1, 5)) = 11/9$$

$$\tilde{d}_7^{\sim}(p(1, 5)) = 28/65$$

$$\tilde{d}_1^{\sim}(p(1, 6)) = 33/4$$

$$\tilde{d}_7^{\sim}(p(1, 6)) = 32/1$$

برچسب ۲ در گره ۴ و ۵ و برچسب ۱ برای گره ۶ حذف می‌شوند.

تکرار سوم  $it = 3$

$$i = 2 \quad \Gamma_2^{-1} = \{1\}$$

$$\tilde{d}_1^{\sim}(p(1, 1)) = (\circ, \circ, \circ),$$

$$\tilde{d}_1^{\sim}(p(1, 2)) = \tilde{d}_1^{\sim}(p(1, 1)) \oplus \tilde{c}_{12} = (\circ, \circ, \circ) \oplus (4, 3/8, 4/7) = (4, 3/8, 4/7),$$

$$i = 3 \quad \Gamma_3^{-1} = \{1\},$$

$$\tilde{d}_1^{\sim}(p(1, 3)) = \tilde{d}_1^{\sim}(p(1, 1)) \oplus \tilde{c}_{13} = ((\circ, \circ, \circ)) \oplus (3, 2/5, 3/5) = (3, 2/5, 3/5),$$

$$i = 4 \quad \Gamma_4^{-1} = \{2, 3\},$$

$$\tilde{d}_1^{\sim}(p(1, 4)) = \tilde{d}_1^{\sim}(p(1, 2)) \oplus \tilde{c}_{24} = (4, 3/8, 4/7) \oplus (2, 1/7, 3/1) = (6, 5/5, 7/8),$$

$$\tilde{d}_7^{\sim}(p(1, 4)) = \tilde{d}_1^{\sim}(p(1, 3)) \oplus \tilde{c}_{34} = (3, 2/5, 3/5) \oplus (5, 4/8, 5/9) = (8, 7/3, 9/4)$$

$$i = 5 \quad \Gamma_5^{-1} = \{2, 4\},$$

$$\tilde{d}_1^{\sim}(p(1, 5)) = \tilde{d}_1^{\sim}(p(1, 2)) \oplus c_{25} = (4, 3/8, 4/7) \oplus (2, 1/8, 3/5) = (6, 5/6, 8/2),$$

$$\tilde{d}_7^{\sim}(p(1, 5)) = \tilde{d}_1^{\sim}(p(1, 4)) + \tilde{c}_{45} = (6, 5/5, 7/8) \oplus (3, 2/7, 4/2) = (9, 8/2, 12),$$

$$i = 6 \quad \Gamma_6^{-1} = \{4, 5\},$$

$$\tilde{d}_1^{\sim}(p(1, 6)) = \tilde{d}_1^{\sim}(p(1, 4)) \oplus \tilde{c}_{46} = (6, 5/5, 7/8) + (6, 5, 8) = (12, 10/5, 15/8),$$

$$\tilde{d}_7^{\sim}(p(1, 6)) = \tilde{d}_1^{\sim}(p(1, 5)) \oplus \tilde{c}_{56} = (6, 5/6, 8/2) \oplus (6, 5/5, 8) = (12, 11/1, 16/2).$$

$$\tilde{d}_1^{\sim}(p(1, 4)) = 10/1$$

$$\tilde{d}_7^{\sim}(p(1, 4)) = 12/7$$

$$\tilde{d}_1^{\sim}(p(1, 5)) = 10/45$$

$$\tilde{d}_7^{\sim}(p(1, 5)) = 15/35$$

$$\tilde{d}_1^{\sim}(p(1, 6)) = 20/1$$

$$\tilde{d}_7^{\sim}(p(1, 6)) = 20/7$$

برچسب ۲ برای گره‌های ۴ و ۵ و ۶ حذف می‌شود.

تکرار چهارم  $it = 4$

$$i = 2 \quad \Gamma_2^{-1} = \{1\}$$

$$\tilde{d}_1^{\sim}(p(1, 1)) = (\circ, \circ, \circ),$$



$$\tilde{d}_1^f(p(1, 2)) = \tilde{d}_1^f(p(1, 1)) \oplus \tilde{c}_{12} = (0, 0, 0) \oplus (4, 3/8, 4/7) = (4, 3/8, 4/7),$$

$$i = 3 \quad \Gamma_3^{-1} = \{1\},$$

$$\tilde{d}_1^f(p(1, 3)) = \tilde{d}_1^f(p(1, 1)) \oplus \tilde{c}_{13} = ((0, 0, 0)) \oplus (3, 2/5, 3/5) = (3, 2/5, 3/5),$$

$$i = 4 \quad \Gamma_4^{-1} = \{2, 3\},$$

$$\tilde{d}_1^f(p(1, 4)) = \tilde{d}_1^f(p(1, 2)) \oplus \tilde{c}_{24} = (4, 3/8, 4/7) \oplus (2, 1/7, 3/1) = (6, 5/5, 7/8),$$

$$\tilde{d}_1^f(p(1, 4)) = \tilde{d}_1^f(p(1, 3)) \oplus \tilde{c}_{34} = (3, 2/5, 3/5) \oplus (5, 4/8, 5/9) = (8, 7/3, 9/4),$$

$$i = 5 \quad \Gamma_5^{-1} = \{2, 4\},$$

$$\tilde{d}_1^f(p(1, 5)) = \tilde{d}_1^f(p(1, 2)) \oplus \tilde{c}_{25} = (4, 3/8, 4/7) \oplus (2, 1/8, 3/5) = (6, 5/6, 8/2),$$

$$\tilde{d}_1^f(p(1, 5)) = \tilde{d}_1^f(p(1, 4)) \oplus \tilde{c}_{45} = (6, 5/5, 7/8) \oplus (3, 2/7, 4/2) = (9, 8/2, 12),$$

$$i = 6 \quad \Gamma_6^{-1} = \{4, 5\},$$

$$\tilde{d}_1^f(p(1, 6)) = \tilde{d}_1^f(p(1, 4)) \oplus \tilde{c}_{46} = (76, 5/5, 7/8) \oplus (6, 5, 8) = (12, 10/5, 15/8),$$

$$\tilde{d}_1^f(p(1, 6)) = \tilde{d}_1^f(p(1, 5)) \oplus \tilde{c}_{56} = (6, 5/6, 8/2) \oplus (6, 5/5, 8) = (12, 11/1, 16/2).$$

$$\tilde{d}_1^f(p(1, 4)) = 10/1$$

$$\tilde{d}_1^f(p(1, 4)) = 12/7$$

$$\tilde{d}_1^f(p(1, 5)) = 10/45$$

$$\tilde{d}_1^f(p(1, 5)) = 15/35$$

$$\tilde{d}_1^f(p(1, 6)) = 20/1$$

$$\tilde{d}_1^f(p(1, 6)) = 20/7$$

چون همه‌ی مسیرها در تکرار جاری مساوی با تکرار قبلی است الگوریتم پایان می‌یابد. در نتیجه برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر از گره ۱ به گره  $i$ ،  $i = 1, 2, \dots, n$  کافی است گره‌های مقدم گره  $i$  با برچسب متناظرشان را ذخیره کنیم.

**(الف)** کوتاه‌ترین مسیر برای گره ۴ برچسب ۱ است و گره مقدم آن ۲ است پس کوتاه‌ترین مسیر بین گره ۱ و ۴ به صورت  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$  است.

**(ب)** کوتاه‌ترین مسیر برای گره ۵ برچسب ۱ است و گره مقدم آن ۲ است پس کوتاه‌ترین مسیر بین گره ۱ و ۵ به صورت  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5$  است.

**(ج)** کوتاه‌ترین مسیر برای گره ۶ برچسب ۱ است و گره مقدم آن ۴ است و کوتاه‌ترین مسیر بین گره ۱ و ۴ به صورت  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$  است. در این صورت کوتاه‌ترین مسیر بین ۱ و ۶ به صورت  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$  است.

به‌طور خلاصه کوتاه‌ترین مسیر در جدول ۲.۳ نشان داده شده است.



گره مبدأ	گره مقصد	طول یال
۱	۲	(۲, ۱, ۱)
۱	۳	(۷, ۲, ۲)
۲	۴	(۱۱, ۱, ۱)
۲	۵	(۶, ۱, ۱)
۳	۴	(۹, ۱, ۱)
۴	۶	(۱۳, ۲, ۱)
۴	۵	(-۸, ۱, ۱)
۵	۶	(۹, ۱, ۱)
۲	۳	(۴, ۳, ۵)

جدول ۳.۳: طول یال‌های مثال ۲.۳.۳

(الف) گره مقدم گره ۲، گره ۱ است چون یک مسیر بین گره ۱ و ۲ وجود دارد با بررسی غلبگی با استفاده از شاخص‌های معرفی شده مسیر  $۱ \rightarrow ۲$  با طول یال (۲, ۱, ۱) به دست می‌آید.

(ب) بین گره ۱ و ۳ دو مسیر متفاوت وجود دارد با بررسی غلبگی با استفاده از شاخص اوکادا و سوپر  $(\alpha = 0, \delta = 0/5)$ ، لیو و وانگ  $(\beta = 1)$ ، گراسیا و لاماتا  $(\beta = 1, \delta = 0)$  و  $(\beta = 1, \delta = 0/5)$  مسیر  $۱ \rightarrow ۳$  با طول یال (۷, ۲, ۲) به دست می‌آید. و با استفاده از تمام شاخص‌ها به جز لیو و وانگ  $(\beta = 1)$ ، گراسیا و لاماتا  $(\beta, \delta = 0)$  مسیر  $۱ \rightarrow ۲ \rightarrow ۳$  با طول یال (۶, ۴, ۶) به دست می‌آید.

(ج) گره مقدم گره ۴، گره ۲ و ۳ است با بررسی غلبگی با استفاده از شاخص‌های معرفی شده مسیر  $۱ \rightarrow ۲ \rightarrow ۳ \rightarrow ۴$  با طول یال (۱۳, ۲, ۲) به دست می‌آید. و با استفاده از شاخص اوکادا و سوپر  $(\alpha = 0)$  مسیر  $۱ \rightarrow ۲ \rightarrow ۴$  به دست می‌آید.

(د) گره مقدم گره ۵، گره ۲ و ۴ است. کوتاه‌ترین مسیر بین گره ۱ و ۵ با بررسی غلبگی با استفاده از تمام شاخص‌ها مسیر  $۱ \rightarrow ۲ \rightarrow ۴ \rightarrow ۵$  و با استفاده از شاخص اوکادا و سوپر  $(\alpha = 0)$  مسیر  $۱ \rightarrow ۲ \rightarrow ۳ \rightarrow ۴ \rightarrow ۵$  است.

(ح) در نهایت گره مقدم گره ۶، گره ۴ و ۵ است و دو مسیر متفاوت وجود دارد که با بررسی غلبگی با استفاده از تمام شاخص‌ها مسیر  $۱ \rightarrow ۲ \rightarrow ۴ \rightarrow ۵ \rightarrow ۶$  و با استفاده از شاخص اوکادا و سوپر  $(\alpha = 0)$  مسیر  $۱ \rightarrow ۲ \rightarrow ۳ \rightarrow ۴ \rightarrow ۵ \rightarrow ۶$  است.

کوتاه‌ترین مسیر به طور خلاصه در جدول ۴.۳ آمده است.

شاخص رتبه‌بندی	طول پال	کوتاه‌ترین مسیر	گره مقصد
تمام شاخص‌ها	(۲, ۱, ۱)	۱ → ۲	۲
اوکادا و سوئیز (α = ۰, ۰/۵)؛ لیو و وانگ (β)؛ گراسیا و لاماتا (β, δ = ۰/۵)	(۷, ۲, ۲)	۱ → ۳	۳
تمام شاخص‌ها به جز لیو و وانگ (β)؛ گراسیا و لاماتا (β, δ = ۰)	(۴, ۴, ۴)	۱ → ۲ → ۳	۳
تمام شاخص‌ها	(۱۳, ۲, ۲)	۱ → ۲ → ۴	۴
اوکادا و سوئیز (α = ۰)	(۱۵, ۵, ۷)	۱ → ۲ → ۳ → ۴	۴
تمام شاخص‌ها	(۵, ۳, ۳)	۱ → ۲ → ۴ → ۵	۵
اوکادا و سوئیز (α = ۰)	(۷, ۴, ۸)	۱ → ۲ → ۳ → ۴ → ۵	۵
تمام شاخص‌ها	(۱۴, ۴, ۴)	۱ → ۲ → ۴ → ۵ → ۶	۶
اوکادا و سوئیز (α = ۰)	(۱۶, ۷, ۹)	۱ → ۲ → ۳ → ۴ → ۵ → ۶	۶

جدول ۴.۳: نتیجه‌ی مثال ۲.۳.۳

# فصل ۴

## کوتاه‌ترین مسیر با استفاده از تصمیم‌گیری چند معیاره

### ۱.۴ مقدمه

مسأله‌ی مسیریابی چند محدودیت<sup>۱</sup> (MCRP) مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. تعدادی از مطالعات برای مسیریابی چند محدودیت بر اساس نظریه‌ی فازی انجام شده است. هدف این مقالات گسترش الگوریتم‌های کارا برای شبکه‌های چندگانه جمع‌پذیری کیفیت سرویس<sup>۲</sup> (QoS) بوده است. سیستم شبکه‌ی کنونی برای وجود قاعده‌ی منطق فازی که در انتخاب مسیر چند محدودیتی مورد استفاده قرار گیرد بسیار ناکامل و مبهم است. به عبارت دیگر ایجاد و توسعه‌ی قاعده‌ی منطق فازی برای مسیریابی بهینه شبکه نسبتاً سخت است. الگوریتم‌های بسیاری برای حل این مسأله پیشنهاد شده است. مهدوی و همکاران<sup>۳</sup> [۲۴] یک روش برنامه‌ریزی پویا برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر فازی ارائه دادند. جونگ و کونگ<sup>۴</sup> [۲۲] یک روش اکتشافی برای طول کوتاه‌ترین مسیر ارائه دادند به

<sup>۱</sup>Multiple Constrained Routing Problem

<sup>۲</sup>Quality of Service

<sup>۳</sup>Mahdavi et al

<sup>۴</sup>Chuang and Kung

طوری که در میان همه‌ی مسیرهای انتخابی در یک شبکه و اندازه‌گیری درجه شباهت<sup>۵</sup> بین طول کوتاه‌ترین مسیر فازی و هر طول مسیر فازی، مسیر با بزرگترین درجه‌ی نسبت کوتاه‌ترین مسیر است. مطالعات قبلی مربوط به محدودیت‌های چندگانه به دو روش انجام می‌شدند، یکی ترکیب معیارهای چندگانه به یک محدودیت و دیگری محدودیت‌های مختلف را جداگانه بررسی می‌کرد. مشکل روش اول این است که همیشه امکان ترکیب محدودیت‌ها به یک محدودیت وجود ندارد و دوم اینکه در عمل معیارهای شبکه باید بر اساس نیازهای عملی تقسیم شوند. یالینگ دو و همکاران<sup>۶</sup> [۱۲] محدودیت‌های چندگانه را به طور مستقل بعد از جداسازی درگروه‌های مختلف بررسی کردند. در این روش خواص هر یک از محدودیت‌ها برای انتخاب مسیر مطلوب نیاز نیست. در این فصل به انتخاب کوتاه‌ترین مسیر در یک شبکه چند محدودیت با استفاده از تصمیم‌گیری‌ها چند معیاره براساس اندازه‌گیری شباهت مبهم می‌پردازیم به طوری که طول هر یال نشان دهنده‌ی معیارهای چندگانه است.

## ۲.۴ مفاهیم اولیه

تعاریف این بخش از مراجع [۲] و [۳] می‌باشد.

**تعریف ۱.۲.۴.** به ملاک‌هایی که متضمن هدف و سازنده‌ی آن هستند و تصمیم‌گیرنده به منظور افزایش مطلوبیت و رضایت خود آن‌ها را مدنظر قرار می‌دهد معیار<sup>۷</sup> گفته می‌شود.

**تعریف ۲.۲.۴.** به معیارهایی که ارزش آن‌ها بالاتر از عالی است محدودیت مثبت<sup>۸</sup> و به معیارهایی که ارزش آن‌ها پایین‌تر از عالی است محدودیت منفی<sup>۹</sup> می‌گوییم.

**تعریف ۳.۲.۴.** اغلب مسائل تصمیم‌گیری دنیای واقعی دارای معیار سنجش متفاوت و متضاد و چندگانه هستند چنانچه در تصمیم‌گیری‌ها، تصمیم‌گیرندگان به جای یک معیار چندین معیار را مورد ارزیابی قرار می‌دهند به آن تصمیم‌گیری چند معیاره<sup>۱۰</sup> می‌گویند.

**تعریف ۴.۲.۴.** روش شباهت به گزینه ایده‌آل<sup>۱۱</sup> (TOPSIS) توسط یون و هوانگ<sup>۱۲</sup> [۲۰] در سال ۱۹۸۱ ارائه شد که مورد استقبال محققین و کاربران مختلف واقع شد. این روش بر این مفهوم استوار است که گزینه‌ی انتخابی، باید کمترین فاصله با بهترین ایده‌آل و بیشترین فاصله را با بدترین ایده‌آل داشته باشد.

<sup>۵</sup> Similarity Measure

<sup>۶</sup> Yaling Dou, Lichun Zhu, Ho Simon Wang

<sup>۷</sup> Criteria

<sup>۸</sup> Positive constraint

<sup>۹</sup> Negative constraint

<sup>۱۰</sup> Multi criteria decision

<sup>۱۱</sup> Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution

<sup>۱۲</sup> Hwang and Yoon

## مسیریابی چند محدودیتی

مسأله‌ی کوتاه‌ترین مسیر یک مسأله بهینه‌سازی مهم در شبکه کلاسیک است. به طوری که برای پیدا کردن مسیر بهینه به بهترین وجه با محدودیت‌های چندگانه مواجه می‌شود. در این فصل برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر از محدودیت‌های چندگانه کیفیت سرویس استفاده می‌کنیم به طوری که وزن روی یال‌ها معیارهای چندگانه کیفیت سرویس هستند، بنابراین برای انتخاب کوتاه‌ترین مسیر باید بیش از یک پارامتر در شبکه را در نظر بگیریم. پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر با دو یا چند محدودیت که در سیستم شبکه صدق کند یک مسأله‌ی  $NP$ -کامل<sup>۱۳</sup> است. [۱۸]، [۸] و [۱۶].

## ۳.۴ کیفیت سرویس

مفهوم کیفیت سرویس همراه با توسعه‌ی شبکه‌های ارتباطی تغییر زیادی نموده است. امروزه با رشد سریع شبکه‌ها کیفیت سرویس به فاکتوری کلیدی در به کارگیری شبکه‌ها و سرویس‌های امروزی تبدیل شده است.

با وجود اینکه که کیفیت سرویس اخیراً به مسأله‌ی مهمی در بین محققان شبکه تبدیل شده است، هنوز هم ابهاماتی در شیوه‌ی فهم و تعریف آن وجود دارد. به طور کلی کیفیت سرویس به معنی ارائه سرویسی سازگار و قابل پیش بینی به منظور تأمین کاربردهای مختلف است.

### پارامترهای کیفیت سرویس

پارامترهای متداول کیفیت سرویس که برای توصیف کارایی شبکه به کار می‌روند عبارتند از:

۱. پهنای باند<sup>۱۴</sup>: تعداد بایت‌هایی که در یک دوره‌ی تناوب خاص از طریق شبکه انتقال می‌یابند.

۲. تأخیر<sup>۱۵</sup>: زمانی که طول می‌کشد تا یک بسته داده از مبدا خود به سمت مقصد حرکت کند. تأخیر شامل سه مؤلفه است: تأخیر انتشار، تأخیر انتقال و تأخیر صف بندی

۳. ازدست دادن بسته<sup>۱۶</sup>: به علت وجود تراکم در شبکه است.

۴. قابلیت اطمینان<sup>۱۷</sup>: قابلیت اطمینان یک سیستم عبارت است از احتمال عملکرد رضایت بخش آن سیستم تحت شرایط کار مشخص برای مدت زمان معین.

<sup>۱۳</sup> NP-Complete

<sup>۱۴</sup> Bandwidth

<sup>۱۵</sup> Delay

<sup>۱۶</sup> Paket loss

<sup>۱۷</sup> Reliability

## انواع معیارها

فرض کنید  $d(i, i_1)$  نشان دهنده‌ی معیار  $(i, i_1)$  باشد. برای هر مسیر  $p = \{i, i_1, \dots, i_k, j\}$ ، معیار  $d$  به یکی از سه صورت زیر است:

• جمع:  $d(p) = d(i, i_1) + d(i_1, i_2) + \dots + d(i_k, j)$

• ضرب:  $d(p) = d(i, i_1) * d(i_1, i_2) * \dots * d(i_k, j)$

• تقعر<sup>۱۸</sup>:  $d(p) = \min\{d(i, i_1), d(i_1, i_2), \dots, d(i_k, j)\}$

۱. معیار مقعر مانند پهنای باند ۲. معیارهای جمعی مانند تعداد هاپ، تأخیر انتشار، هزینه‌ی مسیر ۳. معیار ضربی مانند قابلیت اطمینان. چنانچه از چندین معیار اندازه‌ی فوق به صورت ترکیبی برای محاسبه‌ی مسیر بهینه استفاده شود، در این صورت پیچیدگی عملیات تولید جدول‌های مسیریابی به شدت زیاد می‌گردد.

## ۴.۴ نظریه‌ی اساسی و عملیات بین مجموعه‌های مبهم

مجموعه‌ی مبهم<sup>۱۹</sup> یک تعمیم از مفهوم مجموعه‌ی فازی است که در سال ۱۹۹۳ توسط جیو و بوهرر<sup>۲۰</sup> [۱۵] معرفی شد، این همان مجموعه‌ی فازی شهودی (IFSS) است که توسط اتناسوو<sup>۲۱</sup> [۵] ارائه شده است.

**تعریف ۱.۴.۴.** یک مجموعه‌ی مبهم  $A$  توسط یک تابع عضویت راست  $t_A$  و عضویت چپ  $f_A$  نشان داده می‌شود. فرض می‌کنیم  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$  مجموعه‌ی مرجع و  $t_A^* = 1 - f_A$  در این صورت داریم:

$$A = \{(x, [t_A(x), 1 - f_A(x)]) | x \in X\} = \{(x, [t_A(x), t_A^*(x)]) | x \in X\} \quad (1.4)$$

که  $t_A(x)$  کران پایین درجه عضویت  $x$ ، و  $f_A(x)$  کران پایین نگاشت  $x$  و  $t_A(x) + f_A(x) \leq 1$ . به عبارت دیگر،  $t_A(x) \leq t_A^*(x)$ . درجه عضویت  $x$  در مجموعه‌ی مبهم در یک فاصله  $[t_A, t_A^*] \in [0, 1]$  تعریف شده است. ارزش مبهم  $[t_A, t_A^*] \in [0, 1]$  نشان می‌دهد که درجه عضویت  $\mu_A(x)$  ممکن است ناشناخته باشد اما کران دار است، به طوری که  $t_A(x) \leq \mu_A(x) \leq t_A^*(x)$  و وقتی مجموعه‌ی مرجع  $X$  پیوسته باشد مجموعه‌ی مبهم به صورت زیر است:

$$A = \int_X \frac{[t_A(x), t_A^*(x)]}{x} \quad (2.4)$$

<sup>۱۸</sup>Concave

<sup>۱۹</sup>Vague set

<sup>۲۰</sup>Gau and Buehrer

<sup>۲۱</sup>Atanassov



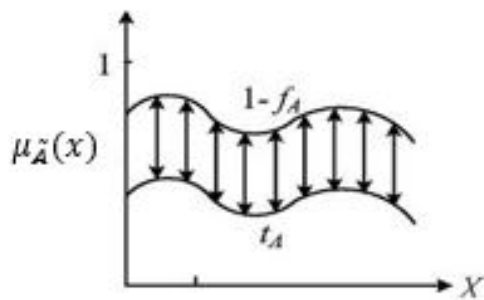
به طوری که  $x \in X$ . وقتی مجموعه‌ی مرجع  $X$  گسسته باشد مجموعه‌ی مبهم به صورت زیر است:

$$A = \sum_{i=1}^n \int_X \frac{[t_A(x), t_A^*(x)]}{x_i} \quad (۳.۴)$$

به طوری که  $x_i \in X$ .

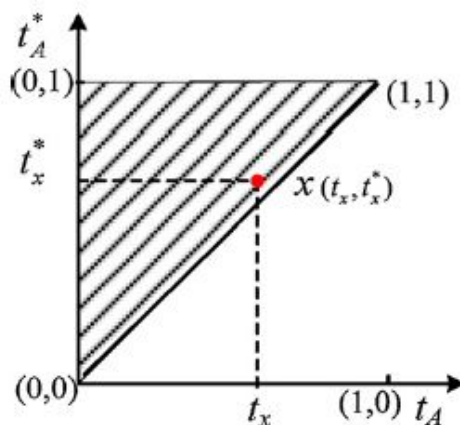
برای توضیح بیشتر شکل‌های زیر را در نظر بگیرید:

شکل ۱.۴ مجموعه‌ی مبهم را نشان می‌دهد. شکل ۲.۴ نمایش گرافیکی عناصر مبهم را



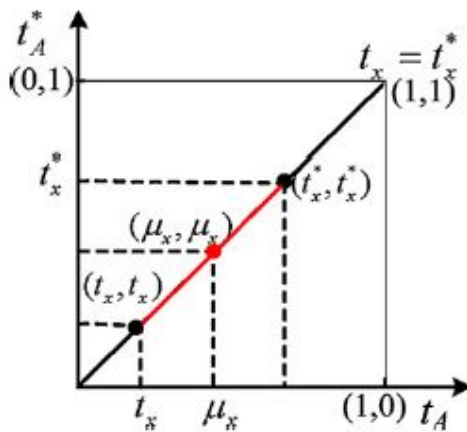
شکل ۱.۴: مجموعه مبهم  $A$

نشان می‌دهد که در آن هر عنصر مبهم در قسمت هاشور خورده و مرز است.



شکل ۲.۴: نمایش گرافیکی عناصر مبهم

شکل ۳.۴ نمایش گرافیکی  $\mu_A(x) \in [t_A(x), t_A^*]$  را نشان می‌دهد که هر یک از عناصر مبهم روی خط مورب قرار دارند. فرض می‌کنیم  $a$  و  $b$  دو ارزش مبهم باشند و  $a = [t_a, t_a^*]$  و  $b = [t_b, t_b^*]$  به طوری که  $0 \leq t_a \leq t_a^*$  و  $0 \leq t_b \leq t_b^*$  و بیشینه و کمینه مجموعه‌های مبهم به صورت زیر تعریف



شکل ۳.۴: نمایش گرافیکی  $\mu_A(x) \in [t_A(x), t_A^*]$

می‌شود:

$$a \wedge b = [\min(t_a, t_b), \min(t_a^*, t_b^*)] \quad (۴.۴)$$

$$a \vee b = [\max(t_a, t_b), \max(t_a^*, t_b^*)] \quad (۵.۴)$$

**تعریف ۲.۴.۴.** جمع ارزش مبهم  $a$  و  $b$  به صورت  $c = a + b$  تعریف می‌شود و تابع عضویت  $c$  به صورت زیر است:

$$t_c(z) = \max(t_a(x), t_b(y)) \quad (۶.۴)$$

$$t_c^*(z) = t_a^*(x) + t_b^*(y) * t_a^*(x) + t_b^*(y)$$

**تعریف ۳.۴.۴.** ضرب ارزش مبهم  $a$  و  $b$  به صورت  $c = a * b$  تعریف می‌شود و تابع عضویت  $c$  به صورت زیر است:

$$t_c(z) = t_a(x) * t_b(y) \quad (۷.۴)$$

$$t_c^*(z) = \min(t_a^*(x), t_b^*(y))$$

فرض می‌کنیم  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  مجموعه‌ی مرجع و  $A$  و  $B$  دو مجموعه‌ی مبهم باشند به طوری که  $A = \sum_{i=1}^n \frac{[t_A(u_i), t_A^*(u_i)]}{u_i}$  و  $B = \sum_{i=1}^n \frac{[t_B(u_i), t_B^*(u_i)]}{u_i}$  اجتماع و اشتراک مجموعه‌های مبهم به صورت زیر است:

$$A \cap B = \sum_{i=1}^n \frac{\{[t_A(u_i), t_A^*(u_i)] \wedge [t_B(u_i), t_B^*(u_i)]\}}{u_i} \quad (۸.۴)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{[\min(t_A(u_i), t_B(u_i)), \min(1 - f_A(u_i), 1 - f_B(u_i))]}{u_i}$$

$$\begin{aligned}
 A \cup B &= \sum_{i=1}^n \frac{\{[t_A(u_i), t_A^*(u_i)] \vee [t_B(u_i), t_B^*(u_i)]\}}{u_i} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{[\max(t_A(u_i), t_B(u_i)), \max(1 - f_A(u_i), 1 - f_B(u_i))]}{u_i}
 \end{aligned} \tag{۹.۴}$$

### ۱.۴.۴ اندازه‌گیری شباهت پیشنهادی بین مجموعه‌های مبهم

اندازه‌گیری شباهت<sup>۲۲</sup> بین ارزش مبهم و بین مجموعه‌های مبهم یک موضوع تحقیقاتی مهم در نظریه‌ی فازی و در کاربردهای مختلف مانند تشخیص دو مجموعه، گروه‌ها و الگوهای مشابه است. در سال‌های اخیر اندازه‌گیری شباهت بر اساس مدل هندسی پیشنهاد شده است و مورد مطالعه قرار گرفته است. در این بخش به اندازه‌گیری شباهت براساس ویژگی‌های چندگانه هندسی که یک اندازه‌گیری قوی شباهت برای مجموعه‌های مبهم است می‌پردازیم. یک اندازه‌گیری شباهت باید خواص زیر را دارا باشد.

۱. درجه‌ی اندازه‌گیری شباهت کران‌دار است،  $0 \leq S(A, B) \leq 1$

۲.  $S(A, B) = 1$  اگر و تنها اگر  $A = B$

۳.  $S(A, B) = 0$  اگر و تنها اگر

$$|t_A(x_k) - t_B(x_k)| = |f_A(x_k) - f_B(x_k)| = |t_A^*(x_k) - t_B^*(x_k)| = 1, \forall k = 1, 2, \dots, n$$

به عبارت دیگر،  $A = [0, 0]$  و  $A = [1, 1]$  یا  $B = [1, 1]$  و  $B = [0, 0]$ .

۴. درجه‌ی شباهت جابه‌جایی پذیر است،

$$S(A, B) = S(B, A)$$

۵. فرض می‌کنیم  $C$  مجموعه‌ی مبهم باشد در این صورت اگر  $A \subseteq B \subseteq C$  سپس

$$S(A, C) \leq S(A, B)$$

و

$$S(A, C) \leq S(B, C).$$

**تعریف ۴.۴.۴.** فرض می‌کنیم  $A$  و  $B$  دو مجموعه‌ی مبهم متعلق به مجموعه مرجع  $X$  و  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k\}$  و  $k$  نشان‌دهنده‌ی تعداد معیارها باشد. در این صورت درجه‌ی

<sup>۲۲</sup> Similarity Measure

اندازه‌گیری شباهت بین مجموعه‌های مبهم  $A$  و  $B$  به صورت زیر است:

$$S_D(A, B) = 1 - \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \sum_{i=1}^k \left( \sqrt{|t_A^*(x_i) - t_A^{\checkmark}(x_i) - (t_B^*(x_i) - t_B^{\checkmark}(x_i))|} \right. \\ \left. + \sqrt{\left| \frac{t_A(x_i) + t_A^*(x_i)}{2} - \frac{t_B(x_i) + t_B^*(x_i)}{2} \right|} \right). \quad (10.4)$$

اگر مجموعه‌ی مبهم به مجموعه‌ی فازی کاهش پیدا کند در این صورت فرمول زیر را داریم:

$$S_{Df}(A, B) = 1 - \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \sum_{i=1}^k \left( \sqrt{|t_A^{\checkmark}(x_i) - t_B^{\checkmark}(x_i)|} + |t_A(x_i) - t_B(x_i)| \right) \\ = 1 - \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \sum_{i=1}^k \left( \sqrt{|t_A^*(x_i) - t_B^*(x_i)|} + |t_A^*(x_i) - t_B^*(x_i)| \right). \quad (11.4)$$

**تعریف ۵.۴.۴.** فرض می‌کنیم وزن عناصر  $x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k\} = X$  به صورت  $w_i = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$  باشد که  $0 \leq w_i \leq 1$  و  $\sum_{i=1}^k w_i = 1$ . در این صورت درجه‌ی اندازه‌گیری شباهت بین مجموعه‌های مبهم  $A$  و  $B$  به صورت زیر است:

$$S_D^w(A, B) = 1 - \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \sum_{i=1}^k w_i \left( \sqrt{|t_A^*(x_i) - t_A^{\checkmark}(x_i) - (t_B^*(x_i) - t_B^{\checkmark}(x_i))|} \right. \\ \left. + \left| \frac{t_A(x_i) + t_A^*(x_i)}{2} - \frac{t_B(x_i) + t_B^*(x_i)}{2} \right| \right). \quad (12.4)$$

اگر مجموعه‌ی مبهم به مجموعه‌ی فازی کاهش پیدا کند در این صورت فرمول زیر را داریم:

$$S_{Df}^w(A, B) = 1 - \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \sum_{i=1}^k w_i \left( \sqrt{|t_A^*(x_i) - t_B^*(x_i)|} + |t_A(x_i) - t_B(x_i)| \right) \\ S_D^w(A, B) = 1 - \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \sum_{i=1}^k w_i \left( \sqrt{|t_A^{\checkmark}(x_i) - t_B^{\checkmark}(x_i)|} + |t_A^*(x_i) - t_B^*(x_i)| \right). \quad (13.4)$$

اندازه‌گیری شباهت ارائه شده خواص ۱.۴.۴ را داراست. همانطور که قبلاً ذکر شد اندازه‌گیری شباهت به تصمیم‌گیرندگان کمک خواهد کرد تا کوتاه‌ترین مسیر را در شبکه‌ی چند محدودیت به دست آورند.

بحث تکمیلی در این زمینه را می‌توانید در منابع [۹]، [۱۹]، [۱۰]، [۳۱]، [۳۰] و [۳۴] بیابید.

## ۲.۴.۴ عبارت زبانی مبهم و ارزش‌ها

این بخش یک روش جدید برای تعیین عبارت زبانی مبهم و اعداد مبهم با توجه به معیارهای مختلفی که کیفیت سرویس نیاز دارد معرفی می‌کند. در اغلب تصمیم‌گیری‌ها، تصمیم‌گیرندگان به جای یک معیار خواستار بهینه کردن چندین معیار هستند. بدیهی است این معیارها به دلیل داشتن مقیاس‌های مختلف با هم قابل مقایسه نبوده و حتی در برخی مسائل متضاد می‌باشند

به همین دلیل برای ارزیابی معیارها از عبارت های زبانی استفاده می‌کنند. رتبه‌بندی معیارها را می‌توان بر اساس عبارت زبانی (شاخص بدون بعد) که در جدول ۱.۴ نشان داده شده است ، ارزیابی کرد.

ارزش مبهم	رتبه‌ی معیارها	سطح تدریجی فازی
$[0/0, 0/1]$	خیلی پایین VL	۱
$[0/1, 0/3]$	پایین L	۲
$[0/3, 0/4]$	متوسط به پایین ML	۳
$[0/4, 0/6]$	متوسط M	۴
$[0/6, 0/7]$	متوسط به بالا MH	۵
$[0/7, 0/9]$	بالا H	۶
$[0/9, 1/0]$	خیلی بالا VH	۷

جدول ۱.۴: مقیاس متغیرهای زبانی

## ۵.۴ فرمول ریاضی برای کوتاه‌ترین مسیر فازی

بر اساس نظریه‌ی گراف یک شبکه‌ی بدون دور و جهت‌دار که دارای  $n$  رأس و  $m$  یال است در نظر می‌گیریم. مسیر  $p_{ij}$  یک دنباله‌ی متناوب  $\{i = i_1, (i_1, i_2), i_2, \dots, i_{k-1}, (i_{k-1}, i_k), i_k = j\}$  است که از رأس‌ها و یال‌ها تشکیل شده است [۷]. به‌طوری‌که به هر یال  $(i, j)$  محدودیت‌های مختلف اختصاص داده شده است. معیارهای چندگانه مدل یک شبکه را با دقت بیشتری نشان می‌دهد. بنابراین پیدا کردن یک مسیر چند معیاره دارای پیچیدگی زمانی چند جمله‌ای سخت <sup>۲۳</sup> است. پیچیدگی محاسبات عمدتاً توسط ترکیب معیارها تعیین می‌شود.  $\tilde{p}_{ij}$  یک مجموعه‌ی مبهم مثبت است که همراه با یال  $(i, j)$  نشان داده شده است و مجموعه‌ی مرجع  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$  به عنوان محدودیت چندگانه تعریف شده است. مثال زیر را در نظر بگیرید.

**مثال ۱.۵.۴.** فرض کنید  $\tilde{p}_{ij} = \frac{[0/1, 0/3]}{C_1} + \frac{[0/9, 0/1]}{C_2}$ ، یعنی اینکه رتبه‌ی  $C_1$  و  $C_2$  روی یال  $(1, 2)$  پایین و خیلی بالاست (جدول ۱.۴ را ببینید).

طول مسافت فازی یک مسیر  $p$  توسط  $L(p)$  نشان داده می‌شود و به صورت زیر است:  
 $L(p) = \sum_{(i,j) \in E} \tilde{P}(i,j)$  که  $\sum$  به عملگرهای مختلف مجموعه‌ی مبهم شامل جمع و ضرب و عملگرهای کمینه بیشینه اشاره دارد. از نمادهای زیر در این بخش استفاده شده است.

<sup>۲۳</sup> Hard polynomial time

- $n$ : تعداد رأس‌ها در شبکه‌ی بدون دور و جهت‌دار را نشان می‌دهد،
- $\tilde{p}_{ij}$ : طول مجموعه‌ی مبهم از یال  $i$  به  $j$  برای هر  $(i, j) \in N$  است،
- $C_{ij}$ : مجموعه‌ی مرجع برای  $\tilde{p}_{ij}$  و  $C_{ij} = \{c_{ij}^a, c_{ij}^b, c_{ij}^m\}$  را نشان می‌دهد،
- $c_{ij}^a$ : ارزش مبهم معیارهای جمعی از رأس  $i$  به  $j$  برای هر  $(i, j) \in N$  است،
- $c_{ij}^b$ : ارزش مبهم معیارهای مقعر از رأس  $i$  به  $j$  برای هر  $(i, j) \in N$  است،
- $c_{ij}^m$ : ارزش مبهم معیارهای ضربی از رأس  $i$  به  $j$  برای هر  $(i, j) \in N$  را نشان می‌دهد.

فرمول مسأله با استفاده از برنامه ریزی خطی به صورت زیر است:

$$\min L(x) = \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{p}_{ij} x_{ij} = \min (\oplus_{i,j=1}^n c_{ij}^a x_{ij}, \odot_{i,j=1}^n c_{ij}^m x_{ij}, \otimes_{i,j=1}^n c_{ij}^b x_{ij})$$

$$s.t. \sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ 0 & i \neq 1, n \\ -1 & i = n \end{cases} \quad (14.4)$$

$$x_{ij} = 0 \quad \text{یا} \quad 1 \quad (i, j) \in A$$

$\Sigma$  در تابع هدف فرمول (۱۴.۴) به جمع  $\oplus$  و ضرب  $\otimes$  و کمینه-بیشینه  $\odot$  اشاره دارد. لازم به ذکر است که  $\min$  در تابع هدف هنوز مبهم است و تعریف نشده است.

**مثال ۲.۵.۴.** شکل ۴.۴ با طول کمان مبهم را در نظر بگیرید، هدف پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر بین گره ۱ و گره ۴ است.

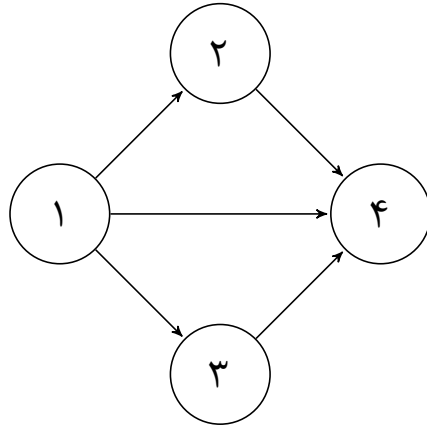
$$\tilde{p}_{12} = \frac{[0, 0/1]}{c_{12}^a} + \frac{[0/6, 0/7]}{c_{12}^m};$$

$$\tilde{p}_{13} = \frac{[0, 0/1]}{c_{13}^a} + \frac{[0/1, 0/3]}{c_{13}^m};$$

$$\tilde{p}_{14} = \frac{[0, 0/1]}{c_{14}^a} + \frac{[0/4, 0/6]}{c_{14}^m};$$

$$\tilde{p}_{24} = \frac{[0, 0/1]}{c_{24}^a} + \frac{[0/3, 0/4]}{c_{24}^m};$$

$$\tilde{p}_{34} = \frac{[0, 0/1]}{c_{34}^a} + \frac{[0/7, 0/9]}{c_{34}^m};$$



شکل ۴.۴: گراف جهت‌دار بدون دور

مسئله پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر بین رأس ۱ و ۴ است. طبق فرمول (۱۴.۴) داریم:

$$\min L(x) = \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{p}_{ij} x_{ij} = \min (\oplus_{i,j=1}^4 c_{ij}^a x_{ij}, \otimes_{i,j=1}^4 c_{ij}^m x_{ij})$$

$$s.t : x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$

$$-x_{13} + x_{34} = 0$$

$$-x_{12} + x_{24} = 0$$

$$x_{14} - x_{24} - x_{34} = -1$$

$$x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{24}, x_{34} = 0 \text{ یا } 1$$

با توجه به محدودیت‌ها سه مسیر به صورت زیر نشان داده شده است:

$$L_1 = x_{12} = x_{24} = 1, x_{13} = x_{14} = x_{34} = 0 \quad 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$$

$$L_2 = x_{14} = 1, x_{12} = x_{13} = x_{24} = x_{34} = 0 \quad 1 \rightarrow 4$$

$$L_3 = x_{13} = x_{34} = 1, x_{12} = x_{14} = x_{24} = 0 \quad 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$$

بنابراین کوتاه‌ترین مسیر  $\min(L_1, L_2, L_3)$  است. با استفاده از تعریف ۲.۴.۴ و ۳.۴.۴ داریم:

$$L_1 = \frac{[0, 0/19]}{c^a} + \frac{[0/18, 0/4]}{c^m}$$

$$L_2 = \frac{[0, 0/1]}{c^a} + \frac{[0/4, 0/6]}{c^m}$$

$$L_3 = \frac{[0, 0/19]}{c^a} + \frac{[0/07, 0/3]}{c^m}$$

با انجام این کار طول هر مسیر از گره مبدأ به مقصد توسط مجموعه‌ی مبهم نشان داده شده است. هدف تعیین چگونگی مقایسه مجموعه‌ی مبهم و پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر است که در بخش بعد به آن می‌پردازیم.

## ۶.۴ روشی برای کوتاه‌ترین مسیر مبهم

در این بخش روشی برای پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر مبهم ارائه شده است براساس نظریه‌ی تاپسیس دو فرآیند مهم وجود دارد: یک روش پیدا کردن بهترین و بدترین مسیر ایده‌آل و دیگری ارائه‌ی روش جدید برای مقایسه‌ی مجموعه‌های مبهم است. ابتدا درجه‌ی شباهت همه‌ی مسیرهای انتخابی و دو مسیر ایده‌آل را ارزیابی می‌کنیم و سپس به مقایسه‌ی تفاوت درجه‌ی شباهت بین یک مسیر انتخابی و دو مسیر ایده‌آل می‌پردازیم.

### ۱.۶.۴ روش طول مسیر ایده‌آل مبهم

همان‌طور که گفته شد هر طول کمان نشان دهنده‌ی معیارهای چندگانه کیفیت سرویس است. چند محدودیت براساس مجموعه‌ی مبهم معادل چند معیاره است. بنابراین طول یال را می‌توان به عنوان مجموعه‌ی مبهم و طول یک مسیر در نظر گرفت. فرض می‌کنیم  $m$  مسیر مبهم با طول  $L_i$  برای  $i = 1, 2, \dots, n$  وجود دارد و  $L_i = \frac{[t_{i1}, t_{i1}^*]}{c_1} + \frac{[t_{i2}, t_{i2}^*]}{c_2} + \dots + \frac{[t_{ik}, t_{ik}^*]}{c_n}$  که  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$  مجموعه مرجع و نشان دهنده‌ی محدودیت‌های چندگانه است که در شبکه‌ی واقعی مشخص می‌شود. مانند پهنای باند، از دست دادن بسته، تأخیرانتشار، هزینه‌ی مسیر و تعداد هاپ‌ها. بنابراین طول بهترین و بدترین مسیر ایده‌آل یعنی  $L_{best}$  و  $L_{worst}$  را از طریق زیر می‌یابیم.

ابتدا به ازای  $i = 2, \dots, n$  و  $j = 1, \dots, k$  قرار می‌دهیم  $L_{best} = L_1$ . مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱. اگر  $c_j$  معیار مثبت باشد:

$$\frac{[t_{best_j}, t_{best_j}^*]}{c_j} = \frac{[\max(t_{best_j}, t_{ij}), \max(t_{best_j}^*, t_{ij}^*)]}{c_j} \quad (15.4)$$

۲. اگر  $c_j$  معیار منفی باشد:

$$\frac{[t_{best_j}, t_{best_j}^*]}{c_j} = \frac{[\min(t_{best_j}, t_{ij}), \min(t_{best_j}^*, t_{ij}^*)]}{c_j} \quad (16.4)$$

برای بدست آوردن بدترین ایده‌آل ابتدا به ازای  $i = 2, \dots, n$  و  $j = 1, \dots, k$  قرار می‌دهیم  $L_{worst} = L_1$ . مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۳. اگر  $c_j$  معیار مثبت باشد:

$$\frac{[t_{best_j}, t_{worst_j}^*]}{c_j} = \frac{[\min(t_{best_j}, t_{ij}), \min(t_{worst_j}^*, t_{ij}^*)]}{c_j} \quad (17.4)$$

۴. اگر  $c_j$  معیار منفی باشد:

$$\frac{[t_{worst_j}, t_{worst_j}^*]}{c_j} = \frac{[\max(t_{best_j}, t_{ij}), \max(t_{worst_j}^*, t_{ij}^*)]}{c_j} \quad (18.4)$$



مثال ۱.۶.۴. فرض کنید سه مسیر با طول مبهم وجود دارد به طوری که

$$L_1 = \frac{[0/1, 0/3]}{c_1} + \frac{[0/4, 0/5]}{c_2} + \frac{[0/9, 1]}{c_3} + \frac{[0/2, 0/3]}{c_4} + \frac{[0/3, 0/4]}{c_5}$$

$$L_2 = \frac{[0/0, 0/1]}{c_1} + \frac{[0/3, 0/6]}{c_2} + \frac{[0/4, 0/6]}{c_3} + \frac{[0/5, 0/6]}{c_4} + \frac{[0/7, 0/8]}{c_5}$$

$$L_3 = \frac{[0/4, 0/5]}{c_1} + \frac{[0/7, 0/8]}{c_2} + \frac{[0/7, 0/8]}{c_3} + \frac{[0/2, 0/3]}{c_4} + \frac{[0/4, 0/5]}{c_5}$$

که  $c_1$  و  $c_3$  معیارهای منفی و  $c_2$  و  $c_4$  و  $c_5$  معیارهای مثبت هستند. برای به دست آوردن بهترین ایده‌آل، قرار می‌دهیم  $L_{best} = L_1$ ، چون  $c_1$  و  $c_3$  معیار منفی هستند از فرمول (۱۵.۴) استفاده می‌کنیم و چون  $c_2$  و  $c_4$  و  $c_5$  معیار مثبت هستند از فرمول (۱۶.۴) استفاده می‌کنیم، بنابراین طول بهترین ایده‌آل به دست می‌آید.

$$L_{best} = \frac{[0/0, 0/1]}{c_1} + \frac{[0/7, 0/8]}{c_2} + \frac{[0/4, 0/6]}{c_3} + \frac{[0/5, 0/6]}{c_4} + \frac{[0/7, 0/8]}{c_5}$$

به طور مشابه برای به دست آوردن بدترین ایده‌آل از فرمول (۱۷.۴) و (۱۸.۴) استفاده می‌کنیم.

$$L_{worst} = \frac{[0/4, 0/5]}{c_1} + \frac{[0/3, 0/5]}{c_2} + \frac{[0/9, 1/0]}{c_3} + \frac{[0/2, 0/3]}{c_4} + \frac{[0/3, 0/5]}{c_5}$$

## ۲.۶.۴ الگوریتم کوتاه‌ترین مسیر مبهم

یک گراف جهت دار بدون دور در نظر بگیرید. که طول یال‌ها مجموعه‌های مبهم هستند هدف پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر از رأس ۱ به  $n$  است که کوچکترین طول مبهم در یک محیط چند معیاره قرار دارد. الگوریتم به صورت زیر است:

۱. در مرحله ۰، معیارهای چندگانه بر اساس معامله‌ی جریان در شبکه‌ی واقعی تعیین می‌شوند به عنوان مثال پهنای باند، قابلیت اطمینان، از دست دادن بسته، تأخیر انتشار و دیگر معیارهای کیفیت سرویس.

معامله‌ی جریان شامل داده‌های زمان غیر واقعی و جریان زمان واقعی است. به عنوان مثال جریان صوتی یا ویدیویی و جریان تصویری. معیارهای کیفیت سرویس با توجه به معامله‌ی جریان و کاربردها متفاوت هستند. به عنوان مثال در شبکه صوتی یا ویدیویی معیارهای کیفیت سروس تأخیر، پهنای باند و از دست دادن بسته است.

۲. در مرحله ۱، همه‌ی مسیرها از مبدأ ۱ به مقصد  $n$  مشخص می‌شوند.  $L_\theta, \theta = 1, 2, \dots, m$ . نماینده‌ی تمام  $m$  مسیر انتخابی است به طوری که  $L_\theta = 1 \rightarrow i, \dots, j \rightarrow n$ .

۳. در مرحله ۲، معیارهای کمان  $(i, j)$  تعیین می‌شود و  $\tilde{p}_{ij}$  به عنوان مجموعه‌ی مبهم نشان داده شده است. همچنین تعیین مجموعه‌ی مرجع  $C_{ij} = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$  انجام

می‌شود. توجه کنید که  $c_1, c_2, \dots, c_k$  معیارهای چندگانه هستند و به معیارهای جمعی، مقعر یا ضربی تعلق دارد.

نکته‌ی کلیدی این است که چگونه ارزش مبهم را تعیین کنیم. ارزش هر معیار با استفاده از هفت متغیر زبانی در جدول ۱.۴ به عنوان مجموعه‌ی مبهم بیان شده است.

۴. در مرحله ۳، محاسبه‌ی مسیرهای  $L_\theta, \theta = 1, 2, \dots, m, L_\theta(p) = \sum_{(i,j) \in E} \tilde{p}_{ij}$  انجام می‌شود، که  $\sum$  عملگرهای  $\oplus$  (جمع) و  $\otimes$  (ضرب) و  $\odot$  (بیشینه-کمینه) بین ارزش‌های مبهم با استفاده از فرمول (۴.۴) و (۵.۴) و (۶.۴) و (۷.۴) است.  $L_\theta$  به عنوان مجموعه‌ی مبهم در نظر گرفته شده است، به عبارت دیگر

$$L_\theta = \frac{[t_{\theta 1}, t_{\theta 1}^*]}{c_1} + \frac{[t_{\theta 2}, t_{\theta 2}^*]}{c_2} + \dots + \frac{[t_{\theta k}, t_{\theta k}^*]}{c_k} \quad (19.4)$$

۵. در مرحله ۴، بهترین و بدترین طول مسیرهای ایده‌آل با استفاده از روش  $L_{best}$  و  $L_{worst}$  تعیین می‌شود.

۶. در مرحله ۵، وزن بردار  $w = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$  تعیین می‌شود، اگر وزن معیارها با هم برابر باشد از  $\frac{1}{k}$  به جای  $w_v$  استفاده می‌کنیم، که  $v \in \{0, 1\}$ .

قابل ذکر است که وزن بردار  $w = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$  باید بر اساس توجه و عملکرد تصمیم‌گیرندگان انتخاب می‌شود زیرا به دنبال پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر چند معیاره در شبکه‌ی واقعی هستیم.

۷. در مرحله ۶، استفاده از اندازه‌گیری شباهت تعریف شده در ۵.۴.۴ برای محاسبه‌ی دو مجموعه‌ی درجه شباهت، یکی  $S(L_\theta, L_{best})$  بین  $L_\theta$  و  $L_{best}$ ، دیگری  $S(L_\theta, L_{worst})$  بین  $L_\theta$  و  $L_{worst}$  به ازای  $\theta = 1, 2, \dots, m$  محاسبه می‌شود.

۸. در مرحله ۷، درجه‌ی نسبت یعنی  $R_d(L_\theta)$  از  $S(L_\theta, L_{best})$  و  $S(L_\theta, L_{worst})$  محاسبه شده و سپس با مقایسه  $m$  مسیر متفاوت، مسیر با بزرگترین تفاوت درجه‌ی شباهت به عنوان کوتاه‌ترین مسیر تعیین می‌شود.  $R_d$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_d(L_\theta) = \frac{(S(L_\theta, L_{best}) - S(L_\theta, L_{worst}))}{(S(L_\theta, L_{best}) + S(L_\theta, L_{worst}))} \quad (20.4)$$

لازم به ذکر است که  $R_d$  به معنی کوتاه‌ترین مسیر باید درجه‌ی شباهت بزرگتری برای مقایسه با  $L_{best}$  و درجه شباهت کوچکتری برای مقایسه با  $L_{worst}$  یعنی نزدیک به بهترین ایده‌آل و دورتر به بدترین ایده‌آل داشته باشد. این روش مقایسه جدید با معیارهای شباهت معقول‌تر از روش‌های ارائه شده است. روش‌های ارائه شده فقط درجه شباهت بین طول مسیر  $L_d$  و طول کوتاه‌ترین مسیر ایده‌آل را محاسبه می‌کنند.

مثال ۲.۶.۴. اکنون مثال ۲.۵.۴ را با دو معیار تأخیر و قابلیت اطمینان در نظر بگیرید به طوری که قابلیت اطمینان معیار مثبت و تأخیر معیار منفی است و وزن معیارها  $w = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$  است، در این صورت کوتاه‌ترین مسیر بین گره ۱ و ۴ را با استفاده از الگوریتم کوتاه‌ترین مسیر مبهم به دست می‌آوریم.

$$L_{best} = \frac{[0/0, 0/19]}{c^a} + \frac{[0/0, 0/19]}{c^m}$$

$$L_{worst} = \frac{[0/0, 0/1]}{c^a} + \frac{[0/07, 0/3]}{c^m}$$

$$S(L_1, L_{best}) = 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} \left( \sqrt{|(0/19)^2 - (0/19)^2|} + \left| \frac{0/19}{2} - \frac{0/19}{2} \right| \right) + \frac{2}{3} \left( \sqrt{|(0/4)^2 - (0/18)^2 - (0/19)^2|} + \left| \frac{0/18 + 0/4}{2} - \frac{0/19}{2} \right| \right) \right) = 0/4812$$

$$S(L_2, L_{best}) = 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} \left( \sqrt{|(0/1)^2 - (0/19)^2|} + \left| \frac{0/1}{2} - \frac{0/19}{2} \right| \right) + \frac{2}{3} \left( \sqrt{|(0/6)^2 - (0/4)^2 - (0/19)^2|} + \left| \frac{0/6 + 0/4}{2} - \frac{0/19}{2} \right| \right) \right) = 0/4565$$

$$S(L_3, L_{best}) = 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} \left( \sqrt{|(0/19)^2 - (0/19)^2|} + \left| \frac{0/19}{2} - \frac{0/19}{2} \right| \right) + \frac{2}{3} \left( \sqrt{|(0/3)^2 - (0/07)^2 - (0/19)^2|} + \left| \frac{0/3 + 0/07}{2} - \frac{0/19}{2} \right| \right) \right) = 0/1557$$

$$S(L_1, L_{worst}) = 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} \left( \sqrt{|(0/19)^2 - (0/1)^2|} + \left| \frac{0/19}{2} - \frac{0/1}{2} \right| \right) + \frac{2}{3} \left( \sqrt{|(0/4)^2 - (0/18)^2 - ((0/3)^2 - (0/7)^2)|} + \left| \frac{0/18 + 0/4}{2} - \frac{0/3 + 0/07}{2} \right| \right) \right) = 0/4671$$

$$S(L_1, L_{worst}) = 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} \left( \sqrt{|(0/1)^2 - (0/1)^2|} + \left| \frac{0/1}{2} - \frac{0/1}{2} \right| \right) + \frac{2}{3} \left( \sqrt{|(0/6)^2 - (0/4)^2 - ((0/3)^2 - (0/7)^2)|} + \left| \frac{0/4 + 0/6}{2} - \frac{0/3 + 0/07}{2} \right| \right) \right) = 0/5446$$

$$S(L_3, L_{worst}) = 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} \left( \sqrt{|(0/19)^2 - (0/1)^2|} + \left| \frac{0/19}{2} - \frac{0/1}{2} \right| \right) + \frac{2}{3} \left( \sqrt{|(0/3)^2 - (0/07)^2 - ((0/3)^2 - (0/07)^2)|} + \left| \frac{0/3 + 0/07}{2} - \frac{0/3 + 0/07}{2} \right| \right) \right) = 0/1032$$

$$R_d(L_1) = \frac{(S(L_1, L_{best}) - S(L_1, L_{worst}))}{(S(L_1, L_{best}) + S(L_1, L_{worst}))} = 0/0148$$

$$R_d(L_2) = \frac{(S(L_2, L_{best}) - S(L_2, L_{worst}))}{(S(L_2, L_{best}) + S(L_2, L_{worst}))} = -0/088$$

$$R_d(L_3) = \frac{(S(L_3, L_{best}) - S(L_3, L_{worst}))}{(S(L_3, L_{best}) + S(L_3, L_{worst}))} = 0/2027$$

## ۵۴ کوتاه‌ترین مسیر با استفاده از تصمیم‌گیری چند معیاره

---

مسیر با بزرگترین درجه نسبت کوتاه‌ترین مسیر است. پس کوتاه‌ترین مسیر  $۱ \rightarrow ۳ \rightarrow ۴$  است.

# فصل ۵

## نتیجه‌گیری و پیشنهادها

### نتیجه‌گیری

مسأله‌ی کوتاه‌ترین مسیر یکی از موضوعات اساسی در نظریه‌ی گراف است که در حال حاضر تا حد زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است. در مسأله‌ی کوتاه‌ترین مسیر ممکن است طول کمان، نشان دهنده‌ی زمان یا هزینه باشد که یک عدد واقعی نیست. در این مورد استفاده از اعداد فازی مناسب است. در این پایان‌نامه، سه الگوریتم کوتاه‌ترین مسیر را مورد بررسی قرار دادیم. الگوریتم اول با استفاده از برنامه ریزی پویا برای وزن یال‌های نامشخص در نظر گرفتیم. الگوریتم دوم یک الگوریتم تکراری که شاخص رتبه‌بندی به کار رفته در آن عمومی است، به عبارت دیگر هر زمان تصمیم‌گیرنده بخواهد مسأله‌ای را حل کند می‌تواند شاخصی را که برای آن مسأله بهترین است انتخاب کند. همچنین برای شبکه با پارامترهای منفی به کار می‌رود و قادر است دور منفی گراف را تشخیص دهد. علاوه بر این دو الگوریتم، الگوریتم دیگری که با استفاده از تصمیم‌گیری چند معیاره بر اساس اندازه‌گیری شباهت مبهم است معرفی کردیم به طوری که هر یال نشان دهنده‌ی معیارهای چندگانه است.

## پیشنهاد برای کارهای آتی

به منظور تکمیل و در ادامه روند این پایان‌نامه، روش زیر به منظور اجرای پژوهش‌های آینده پیشنهاد می‌گردد:  
به‌جای استفاده از اعداد فازی مثلثی از اعداد فازی دوزنقه‌ای استفاده شود.

# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Acyclic	بدون دور
Bandwidth	پهنای باند
Concave	مقعر
Connective	همبند
Core	هسته
Convex	محدب
Criteria	معیار
Cycle	دور
Degree	درجه
Delay	تأخیر
Direct	گراف جهت‌دار
Dynamic Programming	برنامه‌ریزی پویا
Fuzzy Interval	فاصله‌ی فازی
Fuzzy Point	نقطه‌ی فازی
Fuzzy shortest path Problem	مسأله‌ی کوتاه‌ترین مسیر فازی
Height	ارتفاع
Intuitionistic Fuzzy	فازی شهودی
Multiple Constraint Routing	مسیریابی چند محدودیت
Multi Criteria Decision	تصمیم‌گیری چند معیاره
Negative Constraint	محدودیت منفی
Normal	نرمال
Order	مرتب‌ه
Positive Constraint	محدودیت مثبت
Quality of service	کیفیت سرویس
Reliability	قابلیت اطمینان
Shortest Path Problems	مسأله کوتاه‌ترین مسیر

Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution .....	تاپسیس
Tree .....	درخت
Triangular Fuzzy Number .....	عدد فازی مثلثی
Vague Set .....	مجموعه‌ی مبهم
Walk .....	گشت



# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Height	ارتفاع
Pack loss	از دست دادن بسته
Triangular Fuzzy Number	عدد فازی مثلثی
Similarity Measure	اندازه گیری شباهت
Dynamic Programming	برنامه‌ریزی پویا
Acyclic	غیر مدور
BandWith	پهنای باند
Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution	تاپسیس
Delay	تأخیر
Multi Criteria Decision	تصمیم‌گیری چند معیاره
Fuzzy Point	نقطه‌ی فازی
Fuzzy Interval	فاصله‌ی فازی
Degree	درجه
Tree	درخت
Cycle	دور
Intuitionistic Fuzzy	فازی شهودی
Reliability	قابلیت اطمینان
Shortest Path	کوتاه‌ترین مسیر
Fuzzy Shortest Path	کوتاه‌ترین مسیر فازی
Quality of Service	کیفیت سرویس
Direct graph	گراف جهت‌دار
Walk	گشت
Vague Set	مجموعه مبهم
Convex	محدب
Positive Constraint	محدودیت مثبت
Negative Constraint	محدودیت منفی

Path	مسیر
Multiple Constraint Routing	مسیریابی چند محدودیتی
Order	مرتب‌ه
Concave	مقعر
Criteria	معیار
Core	هسته
Connective	همبند
Normal	نرمال

# مراجع

- [۱] شریفی ل، (۱۳۸۹)، پایان نامه ارشد: ”یافتن کوتاه‌ترین مسیر در شبکه‌های با پارامترهای فازی”، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز.
- [۲] عطائی م، (۱۳۹۴)، ”تصمیم‌گیری چند معیاره” چاپ سوم انتشارات دانشگاه صنعتی شاهرود، صفحه ۷ و ۹۵.
- [۳] یغمایی مقدم م، ”شبکه‌های کامپیوتری” انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، صفحه ۳۵۹.
- [4] Ahuja R. K. Magnanti T. L. and Orlin J. B. (1993), ”**Network flows: theory, algorithms, and applications**”.
- [5] Atanassov K. T. (1986), ”Intuitionistic fuzzy sets”, **Fuzzy Sets and Systems**. 20(1), pp .87-96
- [6] Bector C. R. and Chandra S. (2005), ”**Fuzzy mathematical Programming and Fuzzy Matrix Games**”, Vol. 169, Berlin, Springer, pp 53-54.
- [7] Blue M, Bush B. and Puckett J. (2002), ”Unified approach to fuzzy graph problems”, **Fuzzy Sets and Systems**, 125(3), pp 355-368.
- [8] Chen S. M. and Tan J. M. (1994), ”Handling multicriteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory”, **Fuzzy Sets and Systems**, 67(2), 163-172.
- [9] Chen S. M. (1995), ”Measures of similarity between vague sets”, **Fuzzy Sets and Systems**, 74(2), pp 217-223.
- [10] Dengfeng L. and Chuntian C. (2002), ”New similarity measures of intuitionistic fuzzy sets and application to pattern recognitions”, **Pattern Recognition Letters**, 23(1), pp 221-225.
- [11] Dijkstra E. W. (1959), ”A note on two problems in connexion with graphs”, **Numerische mathematik**, 1(1), pp 269-271.

- 
- [12] Dou Y. Zhu L. and Wang H. S. (2012), "Solving the fuzzy shortest path problem using multi-criteria decision method based on vague similarity measure", **Applied Soft Computing**, 12(6), pp 1621-1631.
- [13] Dubois D. J. (1980), "Fuzzy Sets and Systems: theory and Applications", Vol. 144, Academic Press.
- [14] García-Cascales. M. S. and Lamata, M. T. (2005), "The Fuzzy Sets in Maintenance Process", **In EUSFLAT Conf**, pp 118-123.
- [15] Gau W. L. and Buehrer D. J. (1993), "Vague sets", **IEEE Transactions on Systems, man, and cybernetics**, 23(2), pp 610-614.
- [16] Guerin R. A. and Orda A. (1999), "QoS routing in networks with inaccurate information: theory and algorithms", **IEEE/ACM Transactions on Networking**, 7(3), 350-364.
- [17] Hernandez F. Lamata M. T. Verdegay J. L. and Yamakami A. (2007), "The shortest path problem on networks with fuzzy parameters", **Fuzzy Sets and Systems**, 158(14), pp 1561-1570.
- [18] Hong D. H. and Choi C. H. (2000), "Multicriteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory", **Fuzzy Sets and Systems**, 114(1), 103-113.
- [19] Hung W. L. and Yang M. S. (2004), "Similarity measures of intuitionistic fuzzy sets based on Hausdorff distance", **Pattern Recognition Letters**, 25(14), pp 1603-1611.
- [20] Hwang C.L. and Yoon K. 1981, **Multiple Attributes Decision Making Methods and Applications**, Springer, Berlin.
- [21] Klein C. M. (1991), "Fuzzy shortest paths", **Fuzzy Sets and Systems**, 39(1), pp 27-41.
- [22] Kung J. Y. and Chuang T. N. (2005), "The shortest path problem with discrete fuzzy arc lengths", **Computers and Mathematics with Applications**, 49(2), pp 263-270.
- [23] Liou T. S. and Wang M. J. J. (1992), "Ranking fuzzy numbers with integral value", **Fuzzy Sets and Systems**, 50(3), pp 247-255.
- [24] Mahdavi I. Nourifar R. Heidarzade A. and Amiri N. M. (2009), "A dynamic programming approach for finding shortest chains in a fuzzy network", **Applied Soft Computing**, 9(2), pp 503-511.

- [25] Mareš M. and Horák J. (1983), "Fuzzy quantities in networks" , **Fuzzy Sets and Systems**, 10(1-3), pp 123-134.
- [26] Nasseri H. and Taghi-Nezhad N.A."A novel method for ranking fuzzy quantities using centre of incircle and its application to a petroleum distribution centre evaluation problem", **Industrial and Systems Engineering**, pp 1-28.
- [27] Nayeem S. M. A.and Pal M. (2005), "Shortest path problem on a network with imprecise edge weight", **Fuzzy Optimization and Decision Making**, 4(4), pp 293-312.
- [28] Okada S. and Soper T. (2000)," A shortest path problem on a network with fuzzy arc lengths", **Fuzzy Sets and Systems**, 109(1), pp 129-140.
- [29] Okada S. (2004)," Fuzzy shortest path problems incorporating interactivity among paths", **Fuzzy Sets and Systems**, 142(3), pp 335-357.
- [30] Xu Z. (2007)," Some similarity measures of intuitionistic fuzzy sets and their applications to multiple attribute decision making" , **Fuzzy Optimization and Decision Making**, 6(2), pp 109-121.
- [31] Wei S. H. and Chen S. M. (2009), "A new approach for fuzzy risk analysis based on similarity measures of generalized fuzzy numbers", **Expert Systems with Applications**, 36(1), pp 589-598.
- [32] Yao J. S. and Lin F. T. (2003)," Fuzzy shortest-path network problems with uncertain edge weights" , **J. Inf. Sci. Eng.**, 19(2),pp .329-351
- [33] Yao J. S. and Wu K. (2000), "Ranking fuzzy numbers based on decomposition principle and signed distance", **Fuzzy sets and Systems**, 116(2), pp 275-288.
- [34] Zhang C. and Fu H. (2006), "Similarity Measures on Three Kinds of Fuzzy Sets", **Pattern Recognition Letters**, 27(12), pp 1307-1317.

## **Aabstract**

Finding the shortest path in a graph is one of important problems in graph theory.. This problem can be applied in transportation, routing, communication and so on. In the real application of shortest path problem the arc length may represent time or cost which is not a real number. In this case it is applicable to utilize fuzzy numbers. In this thesis we consider the fuzzy shortest path problem where the arc lengths are fuzzy numbers. Two algorithms are considered and compared for solving this problem. We also consider the multi-criteria fuzzy decision-making problem.

**Keywords:** Triangular fuzzy numbers, Fuzzy mathematical programming, Shortest path problems, Vague sets, Multi-constrained network, Signed-distanc ranking



**Shahrood University of Technology**

**Faculty Of Mathematical Sciences**

**MSc Thesis in: Operation Research**

**New methods for shortest path problems  
with fuzzy parameters**

**By: Fateme Pourakbari**

**Supervisor**

**Dr. Jafar Fathali**

**Advisor**

**Dr. Maryam Ghorani**

**Agust 2017**