بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

بررسی نگاشت‌های حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی

نگارنده: علی زیبائی

استاد راهنما

دکتر علیرضا خدّامی

تیر ۱۳۹۶

تقدیم به آنان که وجودم جز هدیه وجودشان نیست، پدر و مادر عزیزم.

تقدیم به همسر مهربانم که با صبر و بردباری همدم و رفیق راه من بود.

تشکر و سپاس بی‌پایان مخصوص خدایی است که بشر را آفریده و به او قدرت اندیشیدن داده و توانایی‌های بالقوّه را در وجود انسان قرار داده و او را امر به تلاش و کوشش نموده و راهنمایانی را برای هدایت بشر فرستاده است. پس از ارادت خاضعانه به درگاه خداوند یکتا، لازم است از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر خدّامی بابت علومی که به من آموختند و راهنمایی‌هایی که در جمع‌آوری این مجموعه نمایند تشکر و قدردانی کنم. در پایان بر خود واجب می‌دانم از کلیه کسانی که در طول مراحل تحصیل بنده را یاری نمودند ،علی‌الخصوص خانواده عزیز و اساتید ارجمندم تشکر کنم.

علی زیبائی
تیر ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب **علی زیبائی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **بررسی نگاشت‌های حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی** ، تحت راهنمایی **علیرضا خدّامی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچجا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه صنعتی شاهرود " یا " Shahrood University of Technology " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

علی زیبائی
تیر ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در ابتدا مفاهیم نگاشت‌های حافظ حاصل‌ضرب صفر، حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن و حافظ حاصل‌ضرب صفر لی را یادآوری می‌کنیم. سپس تعمیمی از مفاهیم فوق را تحت عناوین نگاشت‌های حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی ، حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی و حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی را روی جبرهای نرم‌دار دلخواه تعریف می‌نماییم. در حالت خاص این مفاهیم را روی جبرهای خاصی که توسط یک فضای برداری نرم‌دار ناصفر و یک تابعک خطی غیرصفر کراندار روی آن تولید می‌شود مورد بررسی قرار می‌دهیم. درادامه بعضی از خواص موروثی از جمله جمع مستقیم، ترکیب و ضرب تانسوری را برای نگاشت‌های مذکور مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در نهایت راجع به دوگان دوم نگاشت‌های فوق و تعداد دیگری از خواص متنوع آنها بحث می‌کنیم.

کلمات کلیدی: منظم آرنز، دوگان دوم، نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی، نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی، نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی، مقسوم‌علیه صفر

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات و تعاریف

تعریف ۱.۰.۱. فضای برداری A روی میدان $\mathbb{F}$ یک جبر می‌باشد، هرگاه A، به همراه یک تابع ضرب $\cdot : A \times A \to A$ در شرایط زیر صدق کند

۱ـ برای هر $x, y, z \in A$،

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

۲ـ برای هر $x, y, z \in A$،

$$(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x \quad , \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

۳ـ برای هر $x, y \in A$ و برای هر $\alpha \in \mathbb{F}$،

$$(\alpha x) \cdot y = \alpha(x \cdot y) = x \cdot (\alpha y).$$

جبر A را یک‌دار گوییم هرگاه عضو ۱ در A موجود باشد به طوری‌که برای هر $a \in A$

$$۱ \cdot a = a = a \cdot ۱$$

یک زیرمجموعه از جبر A را یک زیرجبر A گوییم، هرگاه نسبت به عمل A، خود یک جبر باشد.

تعریف ۲.۰.۱. جبری که در آن عمل ضرب از قانون جابجایی پیروی کند را جبر جابه‌جایی می‌نامیم.

تعریف ۱.۰.۳. فرض کنید A یک جبر یک‌دار باشد. در این‌صورت عضو $a \in A$ را معکوس‌پذیر گوییم هرگاه $b \in A$ چنان موجود باشد که $ab = ba = 1$. این عضو در صورت وجود، یکتاست. و آن را با a^{-1} نمایش می‌دهیم. مجموعه‌ی تمام اعضای معکوس‌پذیر در A را با $Inv(A)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۰.۴. فرض کنید X یک فضای برداری و $\|\cdot\| : X \longrightarrow [0, \infty)$ یک تابع باشد به‌طوری‌که برای هر $x, y \in X$ و هر اسکالر α داشته باشیم

۱. $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

۲. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

۳. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

در این‌صورت $\|\cdot\|$ را یک نرم بر X می‌نامیم و X را یک فضای نرم‌دار می‌گوییم.

تذکر ۱.۰.۱. هر فضای نرم‌دار یک فضای متریک است چون برای هر $x, y \in X$ می‌توان نوشت $d(x, y) = \|x - y\|$.

لم ۱.۰.۱. فرض کنید $(X, \|\cdot\|_1)$ و $(Y, \|\cdot\|_2)$ دو فضای نرم‌دار باشند. در این‌صورت فضای $X \times Y$ با نرم $\|(x, y)\| = \|x\|_1 + \|y\|_2$ یک فضای نرم‌دار است.

برهان. به‌وضوح تابع مذکور شرایط یک نرم را دارد. □

تعریف ۱.۰.۵. فرض کنید X و Y دو فضای نرم‌دار باشند. در این‌صورت عملگر خطی $T : X \longrightarrow Y$ را کراندار می‌نامیم هرگاه عدد $K > 0$ چنان موجود باشد که برای هر $x \in X$ داشته باشیم $\|T(x)\| \leq K\|x\|$. به‌علاوه مجموعه‌ی تمام عملگرهای خطی کراندار از X به توی Y را با $B(X, Y)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۰.۶. فرض کنید X یک فضای نرم‌دار باشد در این‌صورت X یک فضای باناخ است هرگاه X نسبت به متر تولید شده به‌وسیله نرم، کامل باشد. یعنی هر دنباله کوشی در فضای X نسبت به متر تولید شده توسط نرم همگرا به عضوی از X باشد.

قضیه ۱.۰.۱. فرض کنید X و Y دو فضای نرم‌دار باشند. در این‌صورت مجموعه‌ی $B(X, Y)$ با جمع و ضرب اسکالر نقطه‌وار و نرم

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\|; \quad \|x\| \leq 1\}$$

یک فضای نرم‌دار است. به‌علاوه اگر Y یک فضای باناخ باشد، آن‌گاه $B(X, Y)$ یک فضای باناخ است.

برهان. برای اثبات به مرجع [۴] گزاره (۵.۴) مراجعه شود. □

تعریف ۷.۰.۱. فرض کنید X یک فضای نرم‌دار باشد، مجموعه $B(X,\mathbb{C})$ را که با X^* نشان می‌دهیم فضای دوگان X می‌نامیم. طبق قضیه ۱.۰.۱ X^* یک فضای باناخ است و نرم آن به‌صورت زیر است

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|; \quad \|x\| \leq ۱\}.$$

تذکر ۲.۰.۱. فضای دوگان X^* را با X^{**} نشان می‌دهیم در واقع X^{**} دوگان دوم X است. به عبارت دیگر $X^{**} = \{m : X^* \longrightarrow \mathbb{C} \mid$ خطی و کراندار است $m\}$.

تعریف ۸.۰.۱. فرض کنید X یک فضای نرم‌دار و همچنین X^{**} دوگان دوم آن باشد. در این‌صورت نگاشت $\phi : X \longrightarrow X^{**}$ را به‌صورت $\phi(x)(f) = f(x)$ تعریف می‌کنیم که در آن $x \in X$ و $f \in X^*$ است.

تعریف ۹.۰.۱. اگر نگاشت ϕ بیان شده در تعریف ۸.۰.۱ پوشا باشد به عبارت دیگر هرگاه $\phi(X) = X^{**}$ آن‌گاه X را انعکاسی می‌گوییم.

تعریف ۱۰.۰.۱. فرض کنید X یک فضای نرم‌دار و X^* دوگان X باشد. توپولوژی تولید شده توسط X^* روی X، یعنی ضعیف ترین توپولوژی روی X به طوری که هر $\Lambda \in X^*$ نسبت به آن پیوسته باشد را توپولوژی ضعیف روی X می‌گوییم و آن‌را با $\sigma(X, X^*)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۰.۱. اگر X یک فضای نرم‌دار و X^* دوگان آن باشد، آن‌گاه توپولوژی $\sigma(X^*, \phi(X))$ یعنی کوچک‌ترین توپولوژی روی X^* که نسبت به آن به ازای هر $x \in X$، $\phi(x)$ پیوسته می‌گردد را به‌صورت $\sigma(X^*, X)$ نشان داده و آن‌را توپولوژی ضعیف‌ـستاره روی X^* می‌نامیم.

قضیه ۲.۰.۱. اگر $\{\Lambda_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای در X^* باشد، آن‌گاه $\Lambda_n \xrightarrow{w^*} \Lambda$ اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in X$، $\Lambda_n(x) \longrightarrow \Lambda(x)$.

برهان. $\Lambda_n \xrightarrow{w^*} \Lambda$ اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $\phi(x)(\Lambda_n) \longrightarrow \phi(x)(\Lambda)$ و این معادل است با این‌که به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $\Lambda_n(x) \longrightarrow \Lambda(x)$. □

قضیه ۳.۰.۱ (باناخ آلاغلو [1]). گوی یکه بسته $S^* = \{\Lambda \in X^* ; \|\Lambda\| \leq ۱\}$ در توپولوژی ضعیف ـ ستاره فشرده است(به‌عبارت دیگر S^* نسبت به توپولوژی $\sigma(X^*, X)$ فشرده است).

برهان. به مرجع [۳]، فصل ۵ گزاره ۳.۱ مراجعه شود. □

قضیه ۴.۰.۱ (گلدشتاین [2]). هرگاه X یک فضای نرم‌دار باشد و $B_۱$ گوی واحد بسته در X و $B_۲$ گوی واحد بسته در X^{**} در نظر گرفته شود آن‌گاه $\overline{B_۱}^{w^*} = B_۲$. به‌علاوه $\overline{X}^{w^*} = X^{**}$.

برهان. به مرجع [۳]، فصل ۵ گزاره ۴.۱ مراجعه شود. □

---

[1] Banach-Alaoglu
[2] goldstine

تعریف ۱.۰.۱۲. رابطه $\leq$ روی مجموعه‌ی A را یک رابطه ترتیب جزیی می‌نامیم هرگاه برای هر
$\alpha, \beta, \gamma \in A$ داشته باشیم

۱. $\alpha \leq \alpha$.

۲. اگر $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \alpha$ آن‌گاه $\alpha = \beta$.

۳. اگر $\beta \leq \gamma$ و $\alpha \leq \beta$ آن‌گاه $\alpha \leq \gamma$.

تعریف ۱.۰.۱۳. مجموعه‌ی غیر تهی J را یک مجموعه‌ی جهت‌دار می‌گوییم هرگاه یک رابطه ترتیب جزیی مانند $\leq$ روی J وجود داشته باشد که برای هر دو عضو α و β از J عنصر γ از J موجود باشد به‌طوری‌که $\alpha \leq \gamma$ و $\beta \leq \gamma$.

تعریف ۱.۰.۱۴. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و J یک مجموعه‌ی جهت‌دار باشد. در این‌صورت یک تور در X، نگاشتی چون $x : J \longrightarrow X$ با ضابطه $\alpha \longrightarrow x(\alpha)$ می‌باشد که معمولاً آن‌را به‌صورت $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ می‌نویسیم.

تعریف ۱.۰.۱۵. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. در این‌صورت تور $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ را همگرا به $x \in X$ گوییم هرگاه برای هر همسایگی U حول x، یک $\alpha \in J$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $\beta \in J$ با شرط $\beta \geq \alpha$، داشته باشیم: $x_\beta \in U$. بنابراین می‌نویسیم $\lim\limits_\alpha x_\alpha = x$ یا $x_\alpha \longrightarrow x$.

قضیه ۱.۰.۵. اگر $(\Lambda_\alpha)_\alpha$ یک تور در X^* باشد و $\Lambda \in X^*$، آن‌گاه $\Lambda_\alpha \xrightarrow{w^*} \Lambda$ اگر وتنها اگر به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $\Lambda_\alpha(x) \longrightarrow \Lambda(x)$.

برهان. با استدلالی مشابه با قضیه ۱.۰.۲ واضح است. □

تعریف ۱.۰.۱۶ (جبر نرم‌دار). فرض کنید A یک جبر باشد که روی آن نرم $\|\cdot\|$ تعریف شده باشد. در این‌صورت اگر برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $\|a.b\| \leq \|a\|\|b\|$، آن‌گاه نرم $\|\cdot\|$ را نرم جبری می‌گوییم و $(A, \|\cdot\|)$ را یک جبر نرم‌دار می‌نامیم.

تعریف ۱.۰.۱۷. هرگاه جبر نرم‌دار A نسبت به نرم روی آن کامل باشد آن‌را یک جبر باناخ می‌نامیم.

مثال ۱.۰.۱. جبر نرم‌دار $(\mathbb{C}, \|\cdot\|)$ که نرم روی آن همان نرم قدر مطلق است یک جبر باناخ است.

مثال ۱.۰.۲. فضای توابع مختلط مقدار پیوسته روی فضای هاسدورف و فشرده K با نرم

$$\|f\| = \sup\{|f(x)||x \in K\}$$

یک جبر باناخ است که جمع و ضرب روی آن نقطه‌وار تعریف می‌شود.

تذکر ۱.۰.۳. اگر V یک فضای برداری نرم‌دار باشد آن‌گاه هر تابعک خطی غیرصفر متعلق به V^* پوشا است.

برهان. فرض کنید $f \in V^*$ و $f \neq 0$. در این‌صورت $Im(f) \subseteq \mathbb{C} = \langle 1 \rangle$. از آن‌جایی‌که $Im(f)$ زیرفضای(زیرمیدان)غیرصفر است در نتیجه $Im(f) = \mathbb{C}$ و لذا f پوشا است. □

تعریف ۱.۰.۱۸. فرض کنید V یک فضای برداری ناصفر و $f \in V^*$ یک تابعک خطی ناصفر باشد. در این‌صورت برای هر $a, b \in V$ تعریف می کنیم $a.b = f(a)b$. با این تعریف به سادگی می‌توان بررسی کرد که V با عمل $\cdot$ یک جبر شرکت‌پذیر است زیرا برای هر $a, b, c \in V$ داریم

$$\begin{aligned}(a \cdot b) \cdot c &= (f(a)b) \cdot c \\ &= f(a)f(b)c \\ &= f(a)(f(b)c) \\ &= f(a)(b \cdot c) \\ &= a \cdot (b \cdot c).\end{aligned}$$

سایر خواص جبری V به‌راحتی قابل بررسی می‌باشد. $(V, \cdot)$ را با نماد V_f نمایش می دهیم که یک جبر شرکت‌پذیر است.

لم ۱.۰.۲. جبر V_f یک‌دار است اگر و تنها اگر $\dim V = 1$.

برهان. فرض کنید V_f یک‌دار باشد. در این‌صورت $1_V \in V_f$ چنان موجود است که برای هر $a \in V_f$ داریم $1_V \cdot a = a \cdot 1_V = a$ پس می‌توان نوشت $f(1_V) = 1$.
برای اثبات این‌که $\dim V = 1$، کافی‌است نشان دهیم که $\ker f = \{0\}$.
فرض کنید $c \in \ker f$ دلخواه باشد پس $c \cdot 1_V = c$ و لذا $f(c)1_V = c$. در نتیجه $c = 0$.
برعکس فرض کنید $\dim V = 1$. در این‌صورت اگر $V_f = \langle c \rangle$ آن‌گاه با تعریف $e = \frac{c}{f(c)}$ خواهیم داشت $f(e) = 1$. برای هر عضو دلخواه $b \in V_f$ می‌توان نوشت $b = \lambda(b)c$ بنابراین

$$\begin{aligned}b \cdot e &= \lambda(b)c \cdot e \\ &= \lambda(b)f(c)e \\ &= \lambda(b)f(c)\frac{c}{f(c)} \\ &= \lambda(b)c \\ &= b.\end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned}e \cdot b &= f(e)b \\ &= 1 \cdot b \\ &= b.\end{aligned}$$

□

قضیه ۱.۰.۶. اگر $\dim V > 1$ آن گاه $Z(V_f) = \{0\}$ که $Z(V_f)$ مرکز جبری V_f است.

برهان. می‌دانیم که اگر $\dim V > 1$ آن‌گاه $\ker f \neq \{0\}$. حال فرض کنید $a \in Z(V_f)$ دلخواه باشد. برای $0 \neq c \in \ker f$ داریم

$$\begin{aligned} f(a)c &= ac \\ &= ca \\ &= f(c)a \\ &= 0. \end{aligned}$$

بنابراین $f(a) = 0$.
حال اگر $e \in f^{-1}(\{1\})$ آن‌گاه می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} a &= f(e)a \\ &= ea \\ &= ae \\ &= f(a)e \\ &= 0. \end{aligned}$$

در نتیجه $Z(V_f) = \{0\}$. □

تذکر ۱.۰.۴. در حالت کلی V_f یک جبر جابجایی نیست.

لم ۱.۰.۳. جبر V_f یک جبر جابجایی است اگر وتنها اگر $\dim V = 1$.

برهان. فرض کنید V_f جابجایی باشد. در این‌صورت نشان می‌دهیم که $\dim V = 1$. برای این کار کافی‌است نشان دهیم که $\ker f = \{0\}$. از آن‌جایی‌که تابعک f پوشا است پس عضوی چون a متعلق به V_f موجود است که $f(a) = 1$. حال فرض کنید $c \in \ker f$ دلخواه باشد. چون V_f جابه‌جایی است نتیجه می‌گیریم که $ac = ca$ و لذا $f(a)c = f(c)a = 0$ بنابراین $c = 0$.
برعکس فرض کنید $\dim V = 1$. در این‌صورت برای عضوی چون $a \in V$ داریم $V = \mathbb{C}a$.
حال برای دو عضو دلخواه $v_1, v_2 \in V_f$ عناصر $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ چنان موجودند که

$$v_1 = \lambda_1 a, \quad v_2 = \lambda_2 a$$

از طرفی

$$\begin{aligned} v_1 v_2 &= \lambda_1 a \lambda_2 a \\ &= \lambda_2 a \lambda_1 a \\ &= v_2 v_1. \end{aligned}$$

در نتیجه V_f جابجایی است. □

نتیجه ۱.۰.۱. اگر $dimV = 1$ باشد آنگاه $Z(V_f) = V_f$.

ویژگی های اساسی زیادی از V_f مانند منظم آرنز بودن و میانگین‌پذیری ضعیف و $\cdots$ در مرجع [۶] در حالتی‌که V یک فضای باناخ باشد بررسی شده است. در ادامه به برخی از آن‌ها اشاره می‌کنیم.

۱.۱ ضرب‌های آرنز نوع اول و دوم

تذکر ۱.۱.۱. اگر X یک فضای نرم‌دار و X^* دوگان آن باشد، آن‌گاه برای هر $f \in X^*$ و $x \in X$ اثر f بر x به یکی از صورت‌های $f(x)$ یا $\langle f, x\rangle$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱ (ضرب‌های آرنز)**.** برای جبر نرم‌دار شرکت‌پذیر A فرض کنید A^{**} دوگان دوم A باشد. ضرب‌های آرنز نوع اول و دوم روی A^{**} که به‌ترتیب با $\triangle$ و $\odot$ نمایش داده می‌شوند به‌صورت زیر تعریف می‌شوند. برای هر $a, b \in A$ و $f \in A^*$ و $m, n \in A^{**}$ داریم

$$\langle f\cdot a, b\rangle = \langle f, ab\rangle, \quad \langle n\cdot f, a\rangle = \langle n, f\cdot a\rangle, \quad \langle m\triangle n, f\rangle = \langle m, n\cdot f\rangle$$

و

$$\langle b, a\cdot f\rangle = \langle ba, f\rangle, \quad \langle a, f\cdot m\rangle = \langle a\cdot f, m\rangle, \quad \langle f, m\odot n\rangle = \langle f\cdot m, n\rangle$$

به سادگی قابل بررسی که $(A^{**}, \triangle), (A^{**}, \odot)$ جبرهای نرم‌دار شرکت‌پذیر هستند.

تعریف ۲.۱.۱. هرگاه ضرب‌های آرنز بر هم منطبق باشند به عبارتی دیگر هرگاه برای هر دو عضو دلخواه m, n متعلق به A^{**} داشته باشیم $m\triangle n = m\odot n$ آن‌گاه A را منظم آرنز می‌نامند.

گزاره ۱.۱.۱. فرض کنید V یک فضای نرم‌دار باشد و $f \in V^*$. در این صورت

۱. V_f منظم آرنز است.

۲. $(V_f)^{**} = (V^{**})_f$.

۳. برای هر $n \in \mathbb{N}$، $(V_f)^{(2n)}$ منظم آرنز است.

برهان. رجوع شود به مرجع [۶] گزاره (۲.۱) □

تعریف ۳.۱.۱. یک برگشت [3] روی جبر A یک نگاشت مزدوج خطی مانند $* : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}$ با ضابطه $*(\mathrm{a}) = \mathrm{a}^*$ است که برای هر $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{A}$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ در شرایط زیر صادق باشد

۱. $\mathrm{a}^{**} = \mathrm{a}$

[3] Involution

۲. $(ab)^* = b^*a^*$

۳. $(a+b)^* = a^* + b^*$

۴. $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$

در این صورت زوج $(A, *)$ یک $*$ ـ جبر نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۱.۱. یک $*$ ـ جبر مانند A یک $*$ ـ جبر باناخ است هرگاه یک جبر باناخ بوده و همچنین به ازای هر $a \in A$ داشته باشیم $\|a\| = \|a^*\|$. به علاوه اگر A یک‌دار باشد و $\|1\| = 1$، آن‌گاه A را یک $*$ ـ جبر باناخ یک‌دار می‌گوییم.

تعریف ۵.۱.۱. یک C^* ـ جبر یک‌دار، یک $*$ ـ جبر باناخ یک‌دار چون A است به طوری‌که به ازای هر $a \in A$ داشته باشیم $\|a\|^2 = \|a^*a\|$.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید A و B دو $*$ـ جبر باشند. در این‌صورت نگاشت خطی $\phi : A \longrightarrow B$ را حافظ $*$ می‌گوییم هرگاه برای هر $a \in A$ داشته باشیم $\phi(a^*) = \phi(a)^*$.

تذکر ۲.۱.۱. به‌وضوح هر $*$ـ همریختی بین $*$ جبرهای A و B یک نگاشت حافظ $*$ است.

تعریف ۷.۱.۱. اگر A و B جبرهای نرم‌داری روی میدان $\mathbb{C}$ باشند آن‌گاه حاصل‌ضرب تانسوری جبرهای A و B را با نماد $A \otimes B$ نشان می‌دهند. برای هر u متعلق به $A \otimes B$ نرم تصویری زیر روی $A \otimes B$ تعریف می‌شود،

$$\|u\| = \inf\{\sum_{k=1}^{n} \|a_k\|\|b_k\|, \quad u = \sum_{k=1}^{n} a_k \otimes b_k, \quad n \in \mathbb{N}, a_k \in A, b_k \in B\}.$$

همچنین به ازای هر دو عضو $u = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$ و $v = \sum\limits_{j=1}^{m} c_j \otimes d_j$ متعلق به $A \otimes B$، ضرب u و v به‌صورت $uv = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_ic_j \otimes b_id_j$ تعریف می‌شود. $A \otimes B$ با ضرب و نرم فوق یک جبر نرم‌دار است.

برای اطلاعات بیشتر در این زمینه به فصل ۶ در مرجع [۱] مراجعه کنید.

۲.۱ نگاشت‌های حافظ حاصل‌ضرب صفر، صفر جردن و صفر لی

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید A یک جبر باشد. در این‌صورت برای هر دو عضو $a, c \in A$ ضرب جردن به‌صورت $a \circ c = ac + ca$ تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید A یک جبر باشد. در این‌صورت برای هر دو عضو $a,c \in A$ ضرب لی به‌صورت $[a,c] = ac - ca$ تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید A و B جبرهایی روی میدان $\mathbb{C}$ باشند. در این‌صورت نگاشت خطی $\theta : A \longrightarrow B$ حافظ حاصل‌ضرب صفر نامیده می‌شود هرگاه برای هر $a,c \in A$ اگر $ac = 0$ آن‌گاه $\theta(a)\theta(c) = 0$.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید A و B جبرهایی روی میدان $\mathbb{C}$ باشند. در این‌صورت نگاشت خطی $\theta : A \longrightarrow B$ حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن نامیده می شود هرگاه برای هر $a,c \in A$ اگر $a \circ c = 0$ آن‌گاه $\theta(a) \circ \theta(c) = 0$.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید A و B جبرهایی روی میدان $\mathbb{C}$ باشند. در این‌صورت نگاشت خطی $\theta : A \longrightarrow B$ حافظ حاصل‌ضرب صفر لی نامیده می شود هرگاه برای هر $a,c \in A$ اگر $[a,c] = 0$ آن‌گاه $[\theta(a), \theta(c)] = 0$.

تذکر ۱.۲.۱. فرم متداول یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر به صورت $\theta = c\phi$ می‌باشد که در آن c متعلق به مرکز جبر B است و $\phi : A \longrightarrow B$ یک همریختی جبری است. اما این شکل در حالت کلی درست نیست.

در زمینه نگاشت‌های حافظ حاصل‌ضرب صفر خواننده را به مراجع [۲، ۵] ارجاع می‌دهیم.
در فصل ۲ قصد داریم نگاشت‌های حافظ حاصل‌ضرب صفر (حاصل‌ضرب صفر جردن) را روی V_f مشخص کنیم. همچنین نگاشت‌های حافظ حاصل‌ضرب صفر (حاصل‌ضرب صفر جردن) روی $(V_f)^{(2n)}$ مشخص می‌شوند که در آن $n \geq 0$، $(V_f)^{\circ} = V_f$ و $(V_f)^{(2n)}$ دوگان مرتبه $2n$ فضای V_f می باشد.
تاکید می‌کنیم که نگاشت‌های حافظ حاصل‌ضرب صفر در حالت کلی حاصل‌ضرب یک عضو مرکزی در یک همریختی نیستند. مثال‌های زیر نگاشت‌های حافظ حاصل‌ضرب صفر متفاوتی روی V_f می‌باشد.

۱. $\theta : V_f \longrightarrow V_f$ با ضابطه $\theta(a) = g(a)c$ که g یک تابعک خطی روی V است و c یک عنصر ثابت از $\ker f$ می‌باشد.

۲. $\theta : V_f \longrightarrow V_f$ با ضابطه $\theta(a) = f(a)b$ به طوری‌که b یک عنصر ثابت از V_f است. (دقت کنید که f یک همریختی جبری از V_f به توی $\mathbb{C}$ است.)

تذکر ۲.۲.۱. دقت داشته باشید که هرگاه $\dim V > 1$ آن‌گاه نگاشت خطی $\theta : V_f \longrightarrow V_f$ با ضابطه $\theta(a) = f(a)c$ (که در آن $0 \neq c \in \ker f$ است) یک نگاشت حافظ حاصل ضرب صفر (حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن) است در صورتی‌که θ حاصل‌ضرب یک عضو مرکزی در یک همریختی نیست.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید A و B جبرهایی روی میدان $\mathbb{C}$ باشند. در این‌صورت نگاشت $\theta : A \longrightarrow B$ یک همریختی جردن است هرگاه برای هر دو عضو دلخواه $a, c \in A$ داشته باشیم $\theta(a \circ c) = \theta(a) \circ \theta(c)$.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید A و B جبرهایی روی میدان $\mathbb{C}$ باشند. در این‌صورت نگاشت $\theta : A \longrightarrow B$ یک همریختی لی است هرگاه برای هر دو عضو دلخواه $a, c \in A$ داشته باشیم $\theta([a, c]) = [\theta(a), \theta(c)]$.

فصل ۲

نگاشت‌های حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی

۱.۲ نگاشت‌های حافظ حاصل‌ضرب صفر و حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن روی V_f

در این بخش ما نگاشت‌های حافظ حاصل‌ضرب صفر و نگاشت‌های حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن را روی V_f مشخص می‌کنیم.

قضیه ۱.۱.۲. فرض کنید V یک فضای برداری ناصفر باشد و $0 \neq f \in V^*$. در این‌صورت نگاشت خطی $\theta : V_f \longrightarrow V_f$ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر است اگر و تنها اگر $\theta(\ker f) \subseteq \ker f$.

برهان. به‌وضوح برای $\theta = 0$ حکم برقرار است. فرض کنید θ یک نگاشت ناصفر حافظ حاصل‌ضرب صفر باشد. همچنین فرض کنید که $a \in \ker f$ و $b \in V_f$ به طوری‌که $\theta(b) \neq 0$. در این‌صورت $ab = 0$ نتیجه می‌دهد که $\theta(a)\theta(b) = 0$. حال می‌توان نوشت $f(\theta(a))\theta(b) = 0$. لذا $f(\theta(a)) = 0$. بنابراین $\theta(\ker f) \subseteq \ker f$.
برعکس فرض کنید $\theta(\ker f) \subseteq \ker f$. نشان می دهیم که θ یک نگاشت حافظ حاصل ضرب صفر است. اگر $ab = 0$ آن‌گاه $f(a)b = 0$. در نتیجه $a \in \ker f$ یا $b = 0$. حال طبق فرض داریم

$f(\theta(a)) = \circ$. بنابراین

$$\theta(a)\theta(b) = f(\theta(a))\theta(b) = \circ.$$

در این‌صورت θ یک نگاشت حافظ حاصل ضرب صفر است. $\square$

قضیه ۲.۱.۲. فرض کنید V یک فضای برداری ناصفر باشد و $\circ \neq f \in V^*$. در این‌صورت نگاشت خطی $\theta : V_f \longrightarrow V_f$ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن است اگر و تنها اگر $\theta(\ker f) \subseteq \ker f$.

برهان. به وضوح حکم برای $\theta = \circ$ برقرار است. فرض کنید θ یک نگاشت ناصفر حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن باشد. در این‌صورت برای هر $a \in \ker f$

$$\begin{aligned} a \circ a &= a^{۲} + a^{۲} \\ &= ۲a^{۲} \\ &= \circ. \end{aligned}$$

لذا

$$\begin{aligned} \theta(a) \circ \theta(a) &= \theta(a)^{۲} + \theta(a)^{۲} \\ &= ۲\theta(a)^{۲} \\ &= \circ. \end{aligned}$$

بنابراین $\theta(a)^{۲} = \circ$ و می‌توان نوشت $f(\theta(a)^{۲}) = f(\theta(a))^{۲} = \circ$.
لذا $f(\theta(a)) = \circ$ و این یعنی $\theta(a) \in \ker f$ در نتیجه $\theta(\ker f) \subseteq \ker f$.
برعکس فرض کنید که $\theta(\ker f) \subseteq \ker f$. در این‌صورت نشان می دهیم که نگاشت θ حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن است. به ازای هر $a, b \in V_f$ اگر داشته باشیم $a \circ b = ab + ba = \circ$ آن‌گاه $f(ab + ba) = \circ$. بنابراین $f(a)f(b) + f(b)f(a) = \circ$ و لذا $۲f(a)f(b) = \circ$. در نتیجه $a \in \ker f$ یا $b \in \ker f$. بدون کاستن از کلیت مساله فرض کنید $a \in \ker f$ در این‌صورت طبق فرض $f(\theta(a)) = \circ$. طبق رابطه‌ی $f(a)b + f(b)a = ab + ba = \circ$ نتیجه می‌شود که $f(b)a = \circ$.
لذا $\theta(f(b)a) = \circ$ بنابراین $f(b)\theta(a) = \circ$. در نتیجه $b \in \ker f$ یا $\theta(a) = \circ$. از طرف دیگر

$$\begin{aligned} \theta(a) \circ \theta(b) &= \theta(a)\theta(b) + \theta(b)\theta(a) \\ &= f(\theta(a))\theta(b) + f(\theta(b))\theta(a) \\ &= \circ. \end{aligned}$$

بنابراین θ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن است. $\square$

نتیجه ۱.۱.۲. فرض کنید V یک فضای برداری ناصفر باشد و فرض کنید $\circ \neq f \in V^*$. در این صورت نگاشت خطی $\theta : V_f \longrightarrow V_f$ یک نگاشت حافظ حاصل ضرب صفر است اگر و تنها اگر یک نگاشت حافظ حاصل ضرب صفر جردن باشد.

نتیجه ۲.۱.۲. فرض کنید V یک فضای برداری ناصفر باشد و $0 \neq f \in V^*$. همچنین فرض کنید نگاشت خطی دوسویی $\theta : V_f \longrightarrow V_f$ یک نگاشت حافظ حاصل ضرب صفر (حافظ حاصل ضرب صفر جردن) باشد. در این‌صورت θ^{-1} یک نگاشت حافظ حاصل ضرب صفر (حافظ حاصل ضرب صفر جردن) است اگر و تنها اگر $\theta(\ker f) = \ker f$.

برهان. حکم را برای نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر ثابت می‌کنیم. برای جردن به‌طور مشابه ثابت می‌شود. فرض کنید θ^{-1} یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر باشد. در این‌صورت نشان می‌دهیم که $\theta(\ker f) = \ker f$.

از آن‌جایی‌که θ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر است پس داریم $\theta(\ker f) \subseteq \ker f$.

از طرفی چون θ^{-1} یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر است پس $\theta^{-1}(\ker f) \subseteq \ker f$.

در نتیجه می‌توان نوشت $\ker f \subseteq \theta(\ker f)$. بنابراین طبق روابط بالا داریم $\theta(\ker f) = \ker f$.

برعکس فرض کنید $\ker f = \theta(\ker f)$. در این‌صورت $\ker f \subseteq \theta(\ker f)$ و لذا $\theta^{-1}(\ker f) \subseteq \ker f$.

این نشان می‌دهد که θ^{-1} نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر است. □

لم ۱.۱.۲. فرض کنید V یک فضای برداری ناصفر و $0 \neq f \in V^*$. همچنین فرض کنید $\hat{f}$ تصویر متعارف f در $V^{(2n+1)}$ باشد که در آن ($n \geq 1$). در این‌صورت نگاشت خطی $\phi : (V_f)^{(2n)} \longrightarrow (V_f)^{(2n)}$ یک نگاشت حافظ حاصل ضرب صفر (حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن) است اگر و تنها اگر داشته باشیم $\hat{f} \circ \phi|_{\ker \hat{f}} = 0$.

برهان. طبق گزاره ۲ در مرجع [۶] داریم $(V_f)^{(2n)} = (V^{(2n)})_f$. همچنین با توجه به قضیه ۱.۱.۲ (۲.۱.۲) به‌راحتی قابل اثبات است. □

نتیجه ۳.۱.۲. فرض کنید V یک فضای برداری ناصفر باشد و $0 \neq f \in V^*$. همچنین فرض کنید $\theta : V_f \longrightarrow V_f$ یک نگاشت خطی ناصفر باشد دراین‌صورت نگاشت خطی $\theta^{**} : (V_f)^{**} \longrightarrow (V_f)^{**}$ یک نگاشت حافظ حاصل ضرب صفر (حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن) است اگر و تنها اگر داشته باشیم $\hat{f} \circ \theta^{**}|_{\ker \hat{f}} = 0$. (که در آن $\hat{f}$ تصویر متعارف f در V^{***} است.)

نتیجه ۴.۱.۲. فرض کنید V یک فضای برداری ناصفر باشد و $0 \neq f \in V^*$. به‌طوری‌که

$$\ker f = \ker \hat{f}.$$

دراین‌صورت نگاشت خطی ناصفر $\theta : V_f \longrightarrow V_f$ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر (حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن) است اگر و تنها اگر نگاشت $\theta^{(2n)} : (V_f)^{(2n)} \longrightarrow (V_f)^{(2n)}$ $(n \geq 0)$ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر (حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن) باشد.

برهان. فرض کنید θ نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر باشد. در نتیجه برای هر $a \in \ker f$ داریم $f(\theta(a)) = 0$. حال چون $\ker f = \ker \hat{f}$ بنابراین $\hat{f}(\theta^{(2n)}(a)) = 0$. لذا نگاشت $\theta^{(2n)}$ حافظ

حاصل ضرب صفر می باشد.
برعکس فرض کنید $\theta^{(2n)}$ نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر باشد. چون $\theta = \theta^{(2n)}|_{V_f}$ و $f = \hat{f}|_{V_f}$
بنابراین برای هر $a \in \ker f = \ker \hat{f}$ داریم $\hat{f} \circ \theta^{(2n)}(a) = 0$. در نتیجه $f \circ \theta(a) = 0$ و لذا $\theta(\ker f) \subseteq \ker f$. در این‌صورت θ نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر است. □

۲.۲ نگاشت‌های حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی روی V_f

در این بخش تعریف جدیدی تحت عنوان نگاشت‌های حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی روی جبرهای نرم‌دار ارایه می‌دهیم که متفاوت با نگاشت‌های حافظ حاصل‌ضرب صفر و در واقع تعمیمی از آن است. به‌وضوح هر نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر است. اما عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست. در پایان شرایط لازم و کافی برای این‌که یک نگاشت، حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی باشد را ارایه می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنید A و B دو جبر نرم‌دار باشند. در این‌صورت نگاشت خطی $\theta : A \longrightarrow B$ را یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی گوییم هرگاه برای هر دو دنباله $\{a_n\}_n$ و $\{c_n\}_n$ در A داشته باشیم

$$a_n c_n \longrightarrow 0 \Rightarrow \theta(a_n)\theta(c_n) \longrightarrow 0.$$

مثال ۱.۲.۲. ۱. فرض کنید A و B جبرهای نرم‌دار باشند. در این صورت هر همریختی پیوسته $\theta : A \longrightarrow B$ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی است.

برهان. فرض کنید $\{a_n\}_n, \{c_n\}_n \subseteq A$ به طوری‌که $a_n c_n \longrightarrow 0$. در این‌صورت چون θ پیوسته است لذا $\theta(a_n c_n) \longrightarrow 0$، همچنین چون θ همریختی است بنابراین $\theta(a_n)\theta(c_n) \longrightarrow 0$. □

۲. فرض کنید V یک فضای برداری نرم‌دار با شرط $\dim V > 1$ باشد. همچنین فرض کنید f یک تابعک خطی پیوسته ناصفر روی V در نظر گرفته شود. در این‌صورت نگاشت خطی $\theta : V_f \longrightarrow V_f$ با ضابطه $\theta(a) = g(a)c$ (که در آن $0 \neq c \in \ker f$ و g یک تابعک خطی روی V است) یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی است. (ضمناً θ در حالت کلی پیوسته نیست.)

تذکر ۱.۲.۲. به‌وضوح هر نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر است ، اما عکس این مطلب لزوماً درست نیست که مثال بعدی این‌را نشان می‌دهد.

مثال ۲.۲.۲. فرض کنید V یک فضای برداری نرم‌دار با پایه جبری شمارای $\beta = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ باشد به‌طوری‌که برای هر $n \geq 1$ داشته باشیم $\|e_n\| = 1$. همچنین فرض کنید $f \in V^*$ یک

تابعک خطی پیوسته باشد به‌طوری‌که $f(e_1) = 1$ و برای هر $n \geq 2$؛ $f(e_n) = 0$.
بنابراین $\ker f = \langle e_2, e_3, e_4, \dots \rangle$. حال نگاشت $\theta : V_f \longrightarrow V_f$ را با ضابطه

$$\theta(a) = f(a)e_1 + \phi(a)$$

تعریف می‌کنیم که در آن $\phi : V_f \longrightarrow \ker f$ یک نگاشت خطی است به‌طوری‌که $\phi(e_1) = 0$ و برای هر $n \geq 2$ داریم $\phi(e_n) = 2^n e_2$. واضح است که $\theta(\ker f) \subseteq \ker f$. زیرا اگر $a \in \ker f$ و $\theta(a) = f(a)e_1 + \phi(a)$ آن‌گاه داریم $f(\theta(a)) = f(a)f(e_1) + f(\phi(a)) = 0$ در نتیجه $f(\theta(a)) = 0$ و این یعنی $\theta(\ker f) \subseteq \ker f$. لذا بنا بر قضیه ۱.۱.۲ نگاشت θ حافظ حاصل‌ضرب صفر است.
نشان می‌دهیم که θ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی نیست.
فرض کنید که $a_n = \frac{e_1}{n}$ و $c_n = e_n$ پس داریم

$$\begin{aligned}
\|a_n c_n\| &= \|\frac{e_1}{n} e_n\| \\
&= \frac{1}{n}\|f(e_1)e_n\| \\
&= \frac{1}{n}\|e_n\| \\
&= \frac{1}{n} \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

از طرفی

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\|\theta(a_n)\theta(c_n)\| &= \lim_{n\to\infty}\|(f(a_n)e_1 + \phi(a_n))(f(c_n)e_1 + \phi(c_n))\| \\
&= \lim_{n\to\infty}\|(f(\frac{e_1}{n})e_1 + \phi(\frac{e_1}{n}))(f(e_n)e_1 + \phi(e_n)\| \\
&= \lim_{n\to\infty}\|\frac{e_1}{n}2^n e_2\| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n}\|e_1 e_2\| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n}\|f(e_1)e_2\| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n} \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که θ نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی نیست.

مثال ۲.۲.۲ نشان داد که مشخص کردن نگاشت‌های حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی روی V_f ارزشمند است.

قضیه ۱.۲.۲. فرض کنید V یک فضای برداری نرم‌دار ناصفر باشد و $f \neq 0$ یک تابعک خطی پیوسته روی V در نظر گرفته شود. در این‌صورت نگاشت خطی $\theta : V_f \longrightarrow V_f$ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی است اگر و تنها اگر نگاشت خطی $\phi : V_f \longrightarrow \ker f$ چنان موجود باشد که خواص زیر برقرار باشند

۱. به ازای عضوی چون $e \in f^{-1}(\{1\})$، $\phi(a) = \theta(a) - f(a)\theta(e)$.

۲. به ازای هر دو دنباله $\{a_n\}_n$ و $\{c_n\}_n$ در V_f اگر $a_n c_n \longrightarrow 0$ آن‌گاه $f(\theta(e))\phi(a_n c_n) \longrightarrow 0$.

برهان. فرض کنید $\theta : V_f \longrightarrow V_f$ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی باشد. لذا حافظ حاصل‌ضرب صفر نیز می‌باشد. در نتیجه $\theta(\ker f) \subseteq \ker f$.
چون $f \neq 0$ فرض کنید $e \in f^{-1}(\{1\})$. لذا برای هر $a \in V_f$ داریم $a - f(a)e \in \ker f$.
بنابراین تابع $\phi : V_f \longrightarrow \ker f$ موجود است به‌طوری‌که $\theta(a - f(a)e) = \phi(a)$. به طور معادل $\theta(a) - f(a)\theta(e) = \phi(a)$.
چون f و θ خطی هستند، لذا ϕ نیز به وضوح خطی است. اکنون فرض کنید $\{a_n\}_n, \{c_n\}_n$ دو دنباله متعلق به V_f باشند به طوری که $a_n c_n \longrightarrow 0$. در نتیجه $\theta(a_n)\theta(c_n) \longrightarrow 0$. از طرفی

$$\begin{aligned}(f(a_n)\theta(e) + \phi(a_n))(f(c_n)\theta(e) + \phi(c_n)) &= f(a_n)f(\theta(e))(f(c_n)\theta(e) + \phi(c_n)) \\ &= f(a_n c_n)f(\theta(e))\theta(e) + f(a_n)f(\theta(e))\phi(c_n) \\ &= f(a_n c_n)f(\theta(e))\theta(e) + f(\theta(e))\phi(a_n c_n) \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

همچنین f پیوسته است. بنابراین $f(a_n c_n)f(\theta(e))\theta(e) \longrightarrow 0$.
از این‌رو داریم $f(\theta(e))\phi(a_n c_n) = \theta(a_n)\theta(c_n) - f(a_n c_n)f(\theta(e))\theta(e) \longrightarrow 0$.
عکس قضیه واضح است. □

قضیه ۲.۲.۲. فرض کنید V یک فضای برداری نرم‌دار ناصفر و همچنین $f \neq 0$ یک تابعک خطی پیوسته روی V باشد. در این صورت نگاشت خطی $\theta : V_f \longrightarrow V_f$ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد

۱. $f \circ \theta = 0$.

۲. $\theta(\ker f) \subseteq \ker f$ و θ پیوسته است.

برهان. فرض کنید $\theta : V_f \longrightarrow V_f$ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی باشد. در نتیجه یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر نیز می‌باشد. لذا طبق قضیه ۱.۱.۲ $\theta(\ker f) \subseteq \ker f$.
اگر $f \circ \theta \neq 0$، آن‌گاه $a \in V_f$ چنان موجود است که $f \circ \theta(a) \neq 0$. از طرفی برای هر دنباله $\{c_n\}_n \subseteq V_f$ اگر $c_n \longrightarrow 0$ آن‌گاه $ac_n \longrightarrow 0$. بنابراین $\theta(a)\theta(c_n) \longrightarrow 0$ و به طور معادل $f(\theta(a))\theta(c_n) \longrightarrow 0$. در نتیجه $\theta(c_n) \longrightarrow 0$. بنابراین θ پیوسته است.
برای عکس این قضیه، شرط $f \circ \theta = 0$ به‌وضوح اشاره می کند که θ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی است. فرض کنید θ پیوسته باشد و $\theta(\ker f) \subseteq \ker f$. در این‌صورت $e \in f^{-1}(\{1\})$ و نگاشت خطی $\phi : V_f \longrightarrow \ker f$ چنان موجود است که برای هر $a \in V_f$، $\phi(a) = \theta(a) - f(a)\theta(e)$.

چون f و θ پیوسته هستند لذا ϕ نیز پیوسته است. حال فرض کنید $\{a_n\}_n$ و $\{c_n\}_n$ دو دنباله در V_f باشند به‌طوری‌که $a_nc_n \longrightarrow ۰$. در این‌صورت

$$\begin{aligned}\theta(a_n)\theta(c_n) &= (f(a_n)\theta(e)+\phi(a_n))(f(c_n)\theta(e)+\phi(c_n))\\ &= f(a_n)f(\theta(e))(f(c_n)\theta(e)+\phi(c_n))\\ &= f(a_nc_n)f(\theta(e))\theta(e)+f(\theta(e))\phi(a_nc_n) \longrightarrow ۰.\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که θ نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی است. □

قضیه ۳.۲.۲. فرض کنید A و B دو جبر نرم‌دار باشند. در این صورت نگاشت خطی $\phi : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی است اگر و تنها اگر $\mathrm{M} > ۰$ چنان موجود باشد که به ازای هر $\mathrm{a}, \mathrm{c} \in \mathrm{A}$ داشته باشیم $\|\phi(\mathrm{a})\phi(\mathrm{c})\| \leq \mathrm{M}\|\mathrm{ac}\|$.

برهان. با برهان خلف فرض کنید که ϕ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی باشد و برای هر $M > ۰$ نامساوی فوق برقرار نباشد. پس برای $M = ۱$ وجود دارند $a_۱, c_۱ \in A$ به‌طوری‌که $\|a_۱c_۱\| < \|\phi(a_۱)\phi(c_۱)\|$. برای $M = \frac{۲}{\|\phi(a_۱)\phi(c_۱)\|}$ اعضای $a_۲, c_۲ \in A$ چنان موجودند که $\frac{۲}{\|\phi(a_۱)\phi(c_۱)\|}\|a_۲c_۲\| < \|\phi(a_۲)\phi(c_۲)\|$. لذا می‌توان نوشت $\frac{\|\phi(a_۱)\phi(c_۱)\|}{۲} < \frac{\|a_۲c_۲\|}{\|\phi(a_۲)\phi(c_۲)\|}$. در نتیجه $\frac{\|\phi(a_۱)\phi(c_۱)\|}{۲} < \left\|\frac{a_۲}{\|\phi(a_۲)\phi(c_۲)\|}c_۲\right\|$. با استدلالی مشابه برای $M = \frac{n}{\|\phi(a_۱)\phi(c_۱)\|}$ اعضای $a_n, c_n \in A$ چنان موجودند که $\frac{\|\phi(a_۱)\phi(c_۱)\|}{n} < \left\|\frac{a_n}{\|\phi(a_n)\phi(c_n)\|}c_n\right\|$.
حال فرض کنید $c'_n = c_n$ و $a'_n = \frac{a_n}{\|\phi(a_n)\phi(c_n)\|}$. در این‌صورت به‌وضوح داریم $\|a'_nc'_n\| \longrightarrow ۰$ در صورتی‌که $\|\phi(a'_n)\phi(c'_n)\| \longrightarrow ۱$. این با فرض قضیه در تناقض است.
به‌راحتی می‌توان عکس قضیه را نشان داد. □

گزاره ۱.۲.۲. فرض کنید که A یک $*$ ـ‌جبر نرم‌دار و B یک C^* ـ‌جبر باشد. همچنین فرض کنید $\phi : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ یک نگاشت خطی حافظ $*$ همراه با خاصیت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی در نظر گرفته شود. در این صورت ϕ پیوسته است.

برهان. فرض کنید ϕ یک نگاشت خطی حافظ $*$ و همچنین حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی نیز باشد. در این‌صورت طبق قضیه قبل $M > ۰$ چنان موجود است که برای هر $a, c \in A$ داریم

$$\|\phi(a)\phi(c)\| \leq M\|ac\|.$$

قرار دهید $a = c^*$. بنابراین

$$\begin{aligned}\|\phi(c)\|^۲ &= \|\phi(c)^*\phi(c)\|\\ &= \|\phi(c^*)\phi(c)\|\\ &\leq M\|c^*c\|\\ &\leq M\|c^*\|\|c\|\\ &= M\|c\|^۲.\end{aligned}$$

در نتیجه $\|\phi(c)\| \leq \sqrt{M}\|c\|$ و این نشان می‌دهد که ϕ پیوسته است. □

مثال ۳.۲.۲. ۱. فرض کنید A و B جبرهایی نرم‌دار باشند. به‌طوری‌که B یک‌دار باشد. دراین‌صورت هر نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی و پوشا از A به توی B پیوسته است.

برهان. فرض کنید $\phi : A \longrightarrow B$ نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی و پوشا باشد. در این‌صورت $a \in A$ وجود دارد به‌طوری‌که $\phi(a) = 1_B$. حال در نظر بگیرید که $\{a_n\}_n$ دنباله‌ای در A باشد به‌طوری‌که $a_n \longrightarrow 0$. بنابراین $a_n a \longrightarrow 0$.
در نتیجه $\phi(a_n) = \phi(a_n)\phi(a) \longrightarrow 0$. □

۲. فرض کنید که A و B دو جبر نرم‌دار یک‌دار باشند. همچنین نگاشت $\phi : A \longrightarrow B$ حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی باشد به‌طوری‌که $\phi(1_A) = 1_B$. در این‌صورت ϕ پیوسته است.

برهان. فرض کنید که $\{a_n\}_n$ دنباله‌ای در A باشد. به‌طوری‌که $a_n \longrightarrow 0$. در این‌صورت $a_n 1_A \longrightarrow 0$. از آن‌جایی‌که ϕ حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی است لذا داریم

$$\begin{aligned}\phi(a_n)\phi(1_A) &= \phi(a_n)1_B \\ &= \phi(a_n) \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

□

مثال ۴.۲.۲. فرض کنید V یک فضای برداری نرم‌دار نامتناهی‌البعد با پایه جبری $\beta = \{e_1, e_2, e_3, \cdots\}$ باشد به‌طوری‌که برای هر $n \geq 1$، $\|e_n\| = 1$. همچنین فرض کنید $f \in V^*$ یک تابعک خطی پیوسته در نظر گرفته شود که $f(e_1) = 1$ و برای هر $n \geq 2$، $f(e_n) = 0$. در این‌صورت $\ker f = \langle e_2, e_3, e_4, \cdots \rangle$. حال نگاشت خطی $\phi : V_f \longrightarrow V_f$ را چنان تعریف می‌کنیم که $\phi(e_1) = 0$ و برای هر $n \geq 2$ داشته باشیم $\phi(e_n) = 2^n e_2$. از آن‌جایی‌که $f \circ \phi = 0$ به‌وضوح ϕ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی است. حال نشان می‌دهیم که ϕ نگاشتی پیوسته نیست و همچنین یک همریختی روی V_f نیست. فرض کنید $a_n = \frac{e_n}{n}$. در این‌صورت $\|a_n\| = \frac{1}{n}\|e_n\| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$.
اما

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|\phi(a_n)\| &= \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n}\|e_2\| \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n} \\ &= \infty.\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد ϕ نگاشتی پیوسته نیست. همچنین داریم

$$\begin{aligned} ۴e_۲ &= \phi(e_۲) \\ &= f(e_۱).\phi(e_۲) \\ &= \phi(f(e_۱).e_۲) \\ &= \phi(e_۱.e_۲) \\ &\neq \phi(e_۱)\phi(e_۲) = ۰. \end{aligned}$$

بنابراین ϕ همریختی نیست.

در مثال فوق نشان داده شد که نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی لزوماً پیوسته نیست.

۳.۲ نگاشت‌های حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی روی V_f

در این بخش نگاشت های حافظ حاصل ضرب صفر جردن قوی را معرفی می کنیم که تعریفی متفاوت با نگاشت حافظ حاصل ضرب صفر جردن می باشد.

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنید A و B دو جبر نرم‌دار روی $\mathbb{C}$ باشند. در این‌صورت نگاشت خطی $\theta : A \longrightarrow B$ را یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی گوییم هرگاه برای هر دو دنباله $\{a_n\}_n$ و $\{c_n\}_n$ در A داشته باشیم

$$a_n \circ c_n \longrightarrow ۰ \Rightarrow \theta(a_n) \circ \theta(c_n) \longrightarrow ۰.$$

قضیه ۱.۳.۲. فرض کنید V یک فضای برداری نرم‌دار ناصفر باشد و همچنین $f \neq ۰$ یک تابعک خطی پیوسته روی V در نظر گرفته شود. در این‌صورت نگاشت خطی $\theta : V_f \longrightarrow V_f$ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی است اگر و تنها اگر نگاشت خطی $\phi : V_f \longrightarrow \ker f$ چنان موجود باشد که خواص زیر برقرار باشند

۱. به ازای عضوی چون $e \in f^{-۱}(\{۱\})$ و برای هر $a \in V_f$ داشته باشیم

$$\phi(a) = \theta(a) - f(a)\theta(e).$$

۲. برای هر دو دنباله $\{a_n\}_n$ و $\{c_n\}_n$ در V_f اگر $a_n \circ c_n \longrightarrow ۰$ آن‌گاه $f(\theta(e))\phi(a_n \circ c_n) \longrightarrow ۰$.

برهان. فرض کنید $\theta : V_f \longrightarrow V_f$ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی باشد. در این‌صورت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن نیز می‌باشد. در نتیجه $\theta(\ker f) \subseteq \ker f$.
از آن‌جایی‌که f ناصفر است، فرض کنید $e \in f^{-۱}(\{۱\})$. از طرفی برای هر $a \in V_f$ داریم

$a - f(a)e \in \ker f$. بنابراین تابع $\phi : V_f \longrightarrow \ker f$ چنان موجود است که $\theta(a - f(a)e) = \phi(a)$.
به عبارت دیگر $\theta(a) - f(a)\theta(e) = \phi(a)$.
چون f و θ خطی هستند، لذا ϕ نیز به‌وضوح خطی است. اکنون فرض کنید $\{a_n\}_n$ و $\{c_n\}_n$ دو دنباله متعلق به V_f باشند به طوری که $a_n \circ c_n \longrightarrow 0$. در نتیجه $\theta(a_n) \circ \theta(c_n) \longrightarrow 0$. لذا می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
(f(a_n)\theta(e) + \phi(a_n)) \circ (f(c_n)\theta(e) + \phi(c_n)) &= (f(a_n)\theta(e) + \phi(a_n))(f(c_n)\theta(e) + \phi(c_n)) \\
&\quad + (f(c_n)\theta(e) + \phi(c_n))(f(a_n)\theta(e) + \phi(a_n)) \\
&= f(a_n)f(\theta(e))(f(c_n)\theta(e) + \phi(c_n)) \\
&\quad + f(c_n)f(\theta(e))(f(a_n)\theta(e) + \phi(a_n)) \\
&= f(a_nc_n)f(\theta(e))\theta(e) + f(a_n)f(\theta(e))\phi(c_n) \\
&\quad + f(c_na_n)f(\theta(e))\theta(e) + f(c_n)f(\theta(e))\phi(a_n) \\
&= (f(a_nc_n) + f(c_na_n))f(\theta(e))\theta(e) \\
&\quad + f(\theta(e))\phi(a_nc_n) + f(\theta(e))\phi(c_na_n) \\
&= (f(a_n \circ c_n))f(\theta(e))\theta(e) \\
&\quad + f(\theta(e))\phi(a_n \circ c_n) \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

همچنین چون f پیوسته است، پس داریم $f(a_n \circ c_n)f(\theta(e))\theta(e) \longrightarrow 0$.
بنابراین $f(\theta(e))\phi(a_n \circ c_n) \longrightarrow 0$.
عکس قضیه واضح است. □

قضیه ۲.۳.۲. فرض کنید V یک فضای برداری نرم‌دار ناصفر باشد و $f \neq 0$ یک تابعک خطی پیوسته روی V در نظر گرفته شود. در این‌صورت نگاشت خطی $\theta : V_f \longrightarrow V_f$ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد

۱. $f \circ \theta = 0$.

۲. $\theta(\ker f) \subseteq \ker f$ و θ پیوسته است.

برهان. فرض کنید $\theta : V_f \longrightarrow V_f$ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی باشد. در این‌صورت یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن نیز می‌باشد. لذا $\theta(\ker f) \subseteq \ker f$.
اگر $f \circ \theta \neq 0$ آن‌گاه $a \in V_f$ چنان موجود است که $fo\theta(a) \neq 0$. برای دنباله دلخواه $\{c_n\}_n \subseteq V_f$ هرگاه $c_n \longrightarrow 0$ آن‌گاه به‌وضوح $a \circ c_n \longrightarrow 0$. لذا طبق فرض $\theta(a) \circ \theta(c_n) \longrightarrow 0$. به طور معادل

$$\theta(a)\theta(c_n) + \theta(c_n)\theta(a) = f(\theta(a))\theta(c_n) + f(\theta(c_n))\theta(a) \longrightarrow 0.$$

در نتیجه $f(\theta(a))\theta(c_n) \longrightarrow 0$ و بنابراین $\theta(c_n) \longrightarrow 0$. این نشان می‌دهد θ پیوسته است.
برای عکس این قضیه طبق شرط ۱، اگر $f \circ \theta = 0$ آن‌گاه به‌وضوح نتیجه می‌شود که θ یک

نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی است. حال طبق شرط ۲ فرض کنید θ پیوسته باشد و $\theta(\ker f)\subseteq \ker f$. در این‌صورت $e\in f^{-1}(\{1\})$ و نگاشت خطی $\phi: V_f\longrightarrow \ker f$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $a\in V_f$ داریم $\phi(a)=\theta(a)-f(a)\theta(e)$.
چون f و θ پیوسته هستند لذا ϕ نیز پیوسته است. حال فرض کنید $\{a_n\}_n$ و $\{c_n\}_n$ دو دنباله در V_f باشند به‌طوری‌که $a_n\circ c_n\longrightarrow 0$. در این‌صورت

$$\begin{aligned}
\theta(a_n)\circ\theta(c_n) &= (f(a_n)\theta(e)+\phi(a_n))(f(c_n)\theta(e)+\phi(c_n))\\
&\quad + (f(c_n)\theta(e)+\phi(c_n))(f(a_n)\theta(e)+\phi(a_n))\\
&= f(a_n)f(\theta(e))(f(c_n)\theta(e)+\phi(c_n))\\
&\quad + f(c_n)f(\theta(e))(f(a_n)\theta(e)+\phi(a_n))\\
&= f(a_nc_n)f(\theta(e))\theta(e)+f(\theta(e))\phi(a_nc_n)\\
&\quad + f(c_na_n)f(\theta(e))\theta(e)+f(\theta(e))\phi(c_na_n)\\
&= f(\theta(e))\theta(e)(f(a_nc_n)+f(c_na_n))\\
&\quad + f(\theta(e))(\phi(a_nc_n)+\phi(c_na_n))\\
&= f(\theta(e))\theta(e)(f(a_n\circ c_n))\\
&\quad + f(\theta(e))(\phi(a_n\circ c_n))\longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که نگاشت θ حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی است. □

نتیجه ۱.۳.۲. بر طبق قضیه ۲.۲.۲ و ۲.۳.۲ فرض کنید V یک فضای برداری نرم‌دار ناصفر باشد و همچنین $f\neq 0$ یک تابعک خطی پیوسته روی V در نظر گرفته شود. در این صورت نگاشت خطی $\theta: V_f\longrightarrow V_f$ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی است اگر و تنها اگر یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی باشد.

لم ۱.۳.۲.

۱. فرض کنید A و B دو جبر نرم‌دار باشند و همچنین B یک‌دار باشد. در این‌صورت هر نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی که پوشا هم باشد، پیوسته است.

۲. فرض کنید A و B دو جبر نرم‌دار یک‌دار به ترتیب با یک‌های 1_A و 1_B باشند و همچنین $\phi: A\longrightarrow B$ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی باشد به‌طوری‌که $\phi(1_A)=1_B$. در این‌صورت ϕ پیوسته است.

برهان. مورد اولی را نشان می‌دهیم. فرض کنید $\phi: A\longrightarrow B$ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی باشد به‌طوری‌که پوشا نیز باشد. در این‌صورت $a\in A$ چنان موجود است که $\phi(a)=1_B$. همچنین فرض کنید $\{a_n\}_n\subseteq A$ به‌طوری‌که $a_n\longrightarrow 0$.

لذا $a \circ a_n = aa_n + a_n a \longrightarrow ۰$. از طرفی

$$\begin{aligned} ۲\phi(a_n) &= \phi(a_n) + \phi(a_n) \\ &= \phi(a_n)۱_B + ۱_B\phi(a_n) \\ &= \phi(a_n)\phi(a) + \phi(a)\phi(a_n) \\ &= \phi(a_n) \circ \phi(a) \longrightarrow ۰. \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که ϕ پیوسته است. □

تذکر ۱.۳.۲. در حالت کلی هر نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی پیوسته و یا همریختی نیست. به مثال زیر دقت کنید.

مثال ۱.۳.۲. فرض کنید V یک فضای برداری نرم‌دار متناهی‌البعد با پایه جبری $\beta = \{e_۱, e_۲, e_۳, \cdots\}$ باشد به‌طوری‌که برای هر $n \geq ۱$، $\|e_n\| = ۱$. همچنین فرض کنید $f \in V^*$ یک تابعک خطی پیوسته باشد به‌طوری‌که $f(e_۱) = ۱$ و برای هر $n \geq ۲$، $f(e_n) = ۰$. در این‌صورت $\ker f = \{e_۲, e_۳, e_۴, \cdots\}$. اکنون نگاشت $\phi : V_f \longrightarrow V_f$ را چنان تعریف می‌کنیم که $\phi(e_۱) = ۰$ و برای هر $n \geq ۲$، $\phi(e_n) = ۲^n e_n$. با این شرایط $f \circ \phi = ۰$. این بدین معنی است که ϕ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی است. حال نشان می‌دهیم که ϕ نه پیوسته و نه همریختی روی V_f است. فرض کنید $a_n = \frac{e_n}{n}$. بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \|a_n\| &= \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n}\|e_n\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n} \\ &= ۰. \end{aligned}$$

از طرفی

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \|\phi(a_n)\| &= \lim_{n\to\infty} \frac{۲^n}{n}\|e_۲\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{۲^n}{n} \\ &= \infty. \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که ϕ یک نگاشت پیوسته نیست. همچنین داریم

$$\begin{aligned} ۴e_۲ &= \phi(e_۲) \\ &= \phi(e_۱e_۲) \\ &\neq \phi(e_۱)\phi(e_۲) \\ &= ۰. \end{aligned}$$

لذا ϕ همریختی نیست.

مثال ۲.۳.۲. هر همریختی پیوسته بین جبرهای نرم‌دار، یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی است.

قضیه ۳.۳.۲. فرض کنید A و B دو جبر نرم‌دار باشند. در این صورت نگاشت خطی $\phi : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی است اگر و تنها اگر $\mathrm{M} > ۰$ چنان موجود باشد که به ازای هر $\mathrm{a}, \mathrm{c} \in \mathrm{A}$ داشته باشیم $\|\phi(\mathrm{a}) \circ \phi(\mathrm{c})\| \leq \mathrm{M}\|\mathrm{a} \circ \mathrm{c}\|$.

برهان. با برهان خلف فرض کنید که ϕ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی باشد و برای هر $M > ۰$ نامساوی فوق برقرار نباشد. پس برای $M = ۱$ عناصر $a_۱, c_۱ \in A$ وجود دارند به‌طوری‌که $\|\phi(a_۱) \circ \phi(c_۱)\| > \|a_۱ \circ c_۱\|$. برای $M = \frac{۲}{\|\phi(a_۱)\circ\phi(c_۱)\|}$ عناصر $a_۲, c_۲ \in A$ وجود دارند به‌طوری‌که $\|\phi(a_۲) \circ \phi(c_۲)\| > \frac{۲}{\|\phi(a_۱)\circ\phi(c_۱)\|}\|a_۲ \circ c_۲\|$. در نتیجه $\|\frac{a_۲}{\|\phi(a_۲)\circ\phi(c_۲)\|} \circ c_۲\| < \frac{\|\phi(a_۱)\circ\phi(c_۱)\|}{۲}$. به طور مشابه برای $M = \frac{n}{\|\phi(a_۱)\circ\phi(c_۱)\|}$ عناصر $a_n, c_n \in A$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$\Big\|\frac{a_n}{\|\phi(a_n) \circ \phi(c_n)\|} \circ c_n\Big\| < \frac{\|\phi(a_۱) \circ \phi(c_۱)\|}{n}.$$

فرض کنید $c'_n = c_n$ و $a'_n = \frac{a_n}{\|\phi(a_n)\circ\phi(c_n)\|}$. در این‌صورت داریم $\|a'_n \circ c'_n\| \longrightarrow ۰$. ولی $\|\phi(a'_n) \circ \phi(c'_n)\| \longrightarrow ۱$. این با فرض قضیه در تناقض است.
برعکس به‌راحتی قابل اثبات است. □

گزاره ۱.۳.۲. فرض کنید A یک $*$ ـ جبر نرم‌دار و B یک C^* ـ جبر باشد و همچنین $\phi : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ یک نگاشت خطی حافظ $*$ همراه با خاصیت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی در نظر گرفته شود. در این‌صورت ϕ پیوسته است.

برهان. فرض کنید ϕ یک نگاشت خطی حافظ $*$ باشد و همچنین حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی باشد. دنباله $\{a_n\}_n$ را در A با شرط $a_n \longrightarrow ۰$ در نظر بگیرید. لذا می‌توان نوشت $a_n = b_n + ic_n$ که در آن $b_n = \frac{a_n + a_n^*}{۲}$ و $c_n = \frac{a_n - a_n^*}{۲i}$. واضح است که b_n و c_n عناصر خودالحاق هستند. بنابراین $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = ۰$ پس داریم $b_n \circ b_n \longrightarrow ۰$ و $c_n \circ c_n \longrightarrow ۰$. در نتیجه $\phi(b_n) \circ \phi(b_n) \longrightarrow ۰$ و $\phi(c_n) \circ \phi(c_n) \longrightarrow ۰$. از طرفی

$$\begin{aligned}
\|\phi(b_n)\|^۲ &= \|\phi(b_n)\phi(b_n)^*\| \\
&= \|\phi(b_n)\phi(b_n^*)\| \\
&= \|\phi(b_n)\phi(b_n)\| \\
&= \frac{۱}{۲}\|\phi(b_n) \circ \phi(b_n)\| \longrightarrow ۰.
\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که $\phi(b_n) \longrightarrow ۰$. مشابهاً $\phi(c_n) \longrightarrow ۰$. در نتیجه $\phi(a_n) \longrightarrow ۰$. لذا ϕ پیوسته است. □

تذکر ۲.۳.۲. در حالت کلی مفاهیم نگاشت‌های حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی و حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی با یکدیگر متفاوت‌اند. در مثال زیر این مطلب را بررسی می‌کنیم.

مثال ۳.۳.۲. ۱. فرض کنید $A = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$ و $B = M_{2\times 2}(\mathbb{C})$. به‌وضوح A و B با جمع و ضرب معمولی و با نرم $\left\| \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \right\| = 2\max\{|\alpha|, |\beta|, |\gamma|, |\delta|\}$ جبرهای باناخ هستند. نگاشت $\phi : A \longrightarrow B$ با ضابطه $\phi(\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$ را تعریف می‌کنیم. خطی بودن ϕ واضح است. حال نشان می‌دهیم که ϕ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی است. برای هر $a = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $c = \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ متعلق به A داریم

$$\begin{aligned}
\|a \circ c\| &= \|ac + ca\| \\
&= \left\| \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{bmatrix} \alpha\lambda & \alpha\mu \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{bmatrix} 2\alpha\lambda & \alpha\mu + \lambda\beta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|.
\end{aligned}$$

از طرفی

$$\begin{aligned}
\|\phi(a) \circ \phi(c)\| &= \|\phi(a)\phi(c) + \phi(c)\phi(a)\| \\
&= \left\| \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \lambda \\ \mu & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda & \lambda \\ \mu & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta & 0 \end{bmatrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{bmatrix} 2\alpha\lambda + \alpha\mu + \lambda\beta & 2\alpha\lambda \\ \beta\lambda + \alpha\mu & \beta\lambda + \alpha\mu \end{bmatrix} \right\| \\
&\leq 2\|a \circ c\|.
\end{aligned}$$

در نتیجه ϕ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی است. حال فرض کنید که

$a_n = \begin{bmatrix} \circ & n \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$ و $c_n = \begin{bmatrix} n & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$. در این‌صورت به‌وضوح $\|a_n c_n\| \longrightarrow \circ$. ولی

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \|\phi(a_n)\phi(c_n)\| &= \lim_{n\to\infty} \left\| \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ n^{۲} & n^{۲} \end{bmatrix} \right\| \\ &= \lim_{n\to\infty} ۲n^{۲} \\ &= \infty. \end{aligned}$$

یعنی نگاشت ϕ حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی نیست.

۲. فرض کنید $A = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$ و $B = M_{۲\times۲}(\mathbb{C})$. در این‌صورت به‌وضوح A و B جبرهای نرم‌داری روی میدان $\mathbb{R}$ با نرم ذکر شده در قسمت قبل هستند. بنابراین هر عضو غیرصفر از A وارون‌پذیر است. نگاشت $\phi : A \longrightarrow B$ را با ضابطه $\phi(\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$ تعریف می‌کنیم. به‌وضوح ϕ یک نگاشت خطی حقیقی است. نشان می‌دهیم که ϕ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی است. طبق قضیه ۳.۲.۲ اگر $a = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}$ و $c = \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ -\bar{\mu} & \bar{\lambda} \end{bmatrix}$ دو عضو از A باشند. آن‌گاه کافی است نشان دهیم $M > \circ$ چنان موجود است که $\|\phi(a)\phi(c)\| \leq M\|ac\|$. از این‌رو

$$\begin{aligned} \|\phi(a)\phi(c)\| &= \left\| \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \lambda & \mu \end{bmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \beta\lambda & \beta\mu \end{bmatrix} \right\| \\ &= ۲ \max\{|\beta\lambda|, |\beta\mu|\}. \end{aligned}$$

از طرفی قرار می‌دهیم $ac = \begin{bmatrix} \alpha\lambda - \beta\bar{\mu} & \alpha\mu + \beta\bar{\lambda} \\ -\bar{\beta}\lambda - \bar{\alpha}\bar{\mu} & -\bar{\beta}\mu + \bar{\alpha}\bar{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & t \\ -\bar{t} & \bar{s} \end{bmatrix}$ بنابراین

$$\begin{cases} \alpha\lambda - \beta\bar{\mu} = s \\ \alpha\mu + \beta\bar{\lambda} = t. \end{cases} \qquad (۱.۲)$$

فرض کنید ماتریس c ناصفر باشد. در این‌صورت $|\lambda|^{۲} + |\mu|^{۲} \neq \circ$. با حل دستگاه فوق خواهیم داشت

$$\beta = \frac{-\mu}{|\lambda|^{۲} + |\mu|^{۲}} s + \frac{\lambda}{|\lambda|^{۲} + |\mu|^{۲}} t.$$

بنابراین $\beta\lambda = \frac{-\lambda\mu}{|\lambda|^۲+|\mu|^۲}s + \frac{\lambda^۲}{|\lambda|^۲+|\mu|^۲}t$ و همچنین $\beta\mu = \frac{-\mu^۲}{|\lambda|^۲+|\mu|^۲}s + \frac{\lambda\mu}{|\lambda|^۲+|\mu|^۲}t$.
در نتیجه

$$\begin{aligned} |\beta\lambda| &\leq \frac{|-\lambda\mu|}{|\lambda|^۲+|\mu|^۲}|s| + \frac{|\lambda|^۲}{|\lambda|^۲+|\mu|^۲}|t| \\ &\leq \frac{۱}{۲}|s| + |t| \\ &\leq \|ac\|. \end{aligned}$$

به‌طور مشابه $|\beta\mu| \leq \|ac\|$. بنابراین $\|\phi(a)\phi(c)\| \leq ۲\|ac\|$. این نشان می‌دهد که نگاشت ϕ حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی است. اکنون نشان می‌دهیم که ϕ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی نیست.
فرض کنید $a_n = \begin{bmatrix} \circ & ۱ \\ -۱ & \circ \end{bmatrix}$ و $c_n = \begin{bmatrix} ni & \circ \\ \circ & -ni \end{bmatrix}$ دو دنباله متعلق به جبر A باشند. در این‌صورت به‌وضوح $a_n \circ c_n = \circ$ و در نتیجه $\lim_{n\to\infty} a_n \circ c_n = \circ$. از طرف دیگر

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \|\phi(a_n)\circ\phi(c_n)\| &= \lim_{n\to\infty} \left\| \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ ni & \circ \end{bmatrix} \right\| \\ &= \lim_{n\to\infty} ۲|ni| \\ &= \infty. \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد ϕ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی نیست. (همچنین دقت کنید که ϕ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن نیز نیست.)

۴.۲ نگاشت‌های حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی روی V_f

تعریف ۱.۴.۲. فرض کنید A و B جبرهایی نرم‌دار روی میدان $\mathbb{C}$ باشند. در این‌صورت نگاشت خطی $\theta : A \longrightarrow B$ حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی است هرگاه برای هر دو دنباله $\{a_n\}_n$ و $\{c_n\}_n$ در جبر A داشته باشیم

$$[a_n, c_n] \longrightarrow \circ \Rightarrow [\theta(a_n), \theta(c_n)] \longrightarrow \circ.$$

مثال ۱.۴.۲. ۱ـ فرض کنید A و B جبرهای نرم‌دار باشند. در این صورت هر همریختی لی پیوسته مانند $\theta : A \longrightarrow B$ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی است.

۲ـ فرض کنید V یک فضای برداری نرم‌دار متناهی البعد با پایه جبری $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ باشد. همچنین $f \in V^*$ به‌طوری‌که $f(e_1) = 1$ و $f(e_2) = f(e_3) = 0$. اگر $\theta : V_f \longrightarrow V_f$ یک نگاشت خطی با ضابطه $\theta(a) = g(a)e_2$ باشد به‌طوری‌که در آن $g \in V^*$ و $g(e_1) = g(e_2) = 0$ و $g(e_3) = 1$ آن‌گاه به‌راحتی می‌توان نشان داد که θ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی است ولی همریختی لی نیست. همچنین نگاشت θ حاصل‌ضرب یک همریختی لی در یک عنصر مرکزی از V_f نیست.

۳ـ فرض کنید A و B دو جبر نرم‌دار باشند به‌طوری‌که جبر B جابجایی باشد. در این‌صورت هر نگاشت خطی از A به توی B حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی است.

تذکر ۱.۴.۲. به‌وضوح هر نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر لی است، ولی عکس این مطلب همواره درست نیست. برای درک بهتر به یک مثال می‌پردازیم.

مثال ۲.۴.۲. فرض کنید V یک فضای برداری نرم‌دار متناهی البعد با پایه جبری شمارای $\beta = \{e_1, e_2, e_3, \cdots\}$ باشد به‌طوری‌که برای هر $n \geq 1$، $\|e_n\| = 1$. همچنین $f \in V^*$ یک تابعک خطی کراندار باشد به‌طوری‌که $f(e_1) = 1$ و برای هر $n \geq 2$، $f(e_n) = 0$. نگاشت خطی $\theta : V_f \longrightarrow V_f$ را چنان در نظر بگیرید که $\theta(e_1) = e_1$ و برای هر $n \geq 2$، $\theta(e_n) = 2^n e_2$. مشاهده می‌شود که θ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر لی است. ولی نشان خواهیم داد که حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی نیست.

فرض کنید $a_n = \frac{e_1}{n}$ و $c_n = e_{n+1}$. در این‌صورت به‌وضوح داریم $\lim\limits_{n\to\infty}[a_n, c_n] = 0$.

ولی $\lim\limits_{n\to\infty}\|[\theta(a_n), \theta(c_n)]\| = \lim\limits_{n\to\infty}\|\frac{2^{n+1}}{n}e_2\| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{n} = \infty$.

قضیه ۱.۴.۲. فرض کنید V یک فضای برداری نرم‌دار و $f \in V^*$ عنصری ناصفر باشد به‌طوری‌که $\|f\| \leq 1$. در این‌صورت نگاشت خطی $\theta : V_f \longrightarrow V_f$ حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد

۱. $f \circ \theta = 0$.

۲. $\theta(\ker f) \subseteq \ker f$ و به ازای $e \in f^{-1}(\{1\})$، نگاشت خطی پیوسته $\varphi : V_f \longrightarrow \ker f$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $a \in V_f$ داشته باشیم $\theta(a) = f(a)\theta(e) + \theta \circ \varphi(a)$ و $\theta \circ \varphi|_{\ker f}$ پیوسته است.

۳. به ازای $e \in f^{-1}(\{1\})$ نگاشت خطی پیوسته $\varphi : V_f \longrightarrow \ker f$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $a \in V_f$ داشته باشیم $\theta(a) = f(a)\theta(e) + f \circ \theta \circ \varphi(a)e$ و یکی از دو شرط زیر نیز برقرار باشد

(آ) $f \circ \theta \circ \varphi|_{\ker f}$ پیوسته باشد.

(ب) $[\theta(e), e] = \circ$.

برهان. فرض کنید θ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی باشد به طوری‌که $f \circ \theta \neq \circ$. همچنین $e \in V_f$ به طوری‌که $f(e) = ۱$. در این‌صورت برای هر $a, c \in V_f$ داریم $a = f(a)e + \varphi(a)$ که در آن $\varphi : V_f \longrightarrow \ker f$ و $\varphi(a) = a - f(a)e$. در نتیجه داریم $\theta(a) = f(a)\theta(e) + \theta \circ \varphi(a)$ و $\theta(c) = f(c)\theta(e) + \theta \circ \varphi(c)$.

اگر $\theta(\ker f) \subseteq \ker f$ آن‌گاه

$$\begin{aligned}
[\theta(a), \theta(c)] &= [f(a)\theta(e) + \theta \circ \varphi(a), f(c)\theta(e) + \theta \circ \varphi(c)] \\
&= f(a)[\theta(e), \theta \circ \varphi(c)] + f(c)[\theta \circ \varphi(a), \theta(e)] \\
&= [\theta(e), \theta \circ \varphi(ac)] + [\theta \circ \varphi(ca), \theta(e)] \\
&= [\theta(e), \theta \circ \varphi(ac)] - [\theta(e), \theta \circ \varphi(ca)] \\
&= [\theta(e), \theta \circ \varphi(ac - ca)] \\
&= [\theta(e), \theta \circ \varphi([a, c])] \\
&= f \circ \theta(e)\theta \circ \varphi([a, c]).
\end{aligned}$$

ادعا می‌کنیم $f \circ \theta(e) \neq \circ$.

چون اگر $f \circ \theta(e) = \circ$ آن‌گاه $f \circ \theta(a) = f(a) f \circ \theta(e) + f \circ \theta \circ \varphi(a) = \circ$ و این تناقض است. فرض کنید دنباله $\{a_n\}$ متعلق به $\ker f$ باشد به طوری‌که $a_n \longrightarrow \circ$. در این‌صورت خواهیم داشت $[e, a_n] \longrightarrow \circ$. از آن‌جایی‌که θ حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی است می‌توان نتیجه گرفت

$$\begin{aligned}
\|\theta \circ \varphi(a_n)\| &= \|\theta \circ \varphi([e, a_n])\| \\
&= \frac{\|[\theta(e), \theta(a_n)]\|}{|f \circ \theta(e)|} \longrightarrow \circ.
\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که $\theta \circ \varphi$ روی هسته f پیوسته است.

اگر $\theta(\ker f) \not\subseteq \ker f$ آن‌گاه عنصر $a_\circ \in \ker f$ چنان موجود است که $f(\theta(a_\circ)) = ۱$. قرار می‌دهیم $e = \theta(a_\circ)$. می‌دانیم که برای هر $a, c \in \ker f$ اگر $[a, c] = \circ$ آن‌گاه $[\theta(a), \theta(c)] = \circ$. بنابراین

$$f(\theta(a))\theta(c) = f(\theta(c))\theta(a). \tag{۲.۲}$$

$a = a_\circ$ را در رابطه (۲.۲) جای‌گذاری می‌کنیم. بنابراین

$$\theta(c) = f(\theta(c))\theta(a_\circ) = f \circ \theta(c)e. \tag{۳.۲}$$

برای هر $a \in V_f$ داریم $a = f(a)e + \varphi(a)$ که در آن $\varphi : V_f \longrightarrow \ker f$ و $\varphi(a) = a - f(a)e$. از طرفی برای هر $a, c \in V_f$ داریم $\theta(a) = f(a)\theta(e) + \theta \circ \varphi(a)$ و $\theta(c) = f(c)\theta(e) + \theta \circ \varphi(c)$. از آن‌جایی که

$\varphi(a), \varphi(c) \in \ker f$ با استفاده از رابطه (۳.۲) خواهیم داشت $\theta(a) = f(a)\theta(e) + f \circ \theta \circ \varphi(a)e$ و $\theta(c) = f(c)\theta(e) + f \circ \theta \circ \varphi(c)e$. بنابراین

$$\begin{aligned}[\theta(a), \theta(c)] &= [f(a)\theta(e) + f \circ \theta \circ \varphi(a)e, f(c)\theta(e) + f \circ \theta \circ \varphi(c)e] \\ &= f(a)[\theta(e), f \circ \theta \circ \varphi(c)e] - f(c)[\theta(e), f \circ \theta \circ \varphi(a)e] \\ &= [\theta(e), f \circ \theta \circ \varphi(ac)e] - [\theta(e), f \circ \theta \circ \varphi(ca)e] \\ &= [\theta(e), f \circ \theta \circ \varphi([a, c])e] \\ &= f \circ \theta \circ \varphi([a, c])[\theta(e), e]. \end{aligned} \tag{۴.۲}$$

فرض کنید $[\theta(e), e] \neq ۰$ و همچنین $\{a_n\} \subseteq \ker f$ به طوری‌که $a_n \longrightarrow ۰$. در این‌صورت $[e, a_n] \longrightarrow ۰$. چون نگاشت θ حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی است می‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$\begin{aligned}|f \circ \theta \circ \varphi(a_n)| &= |f \circ \theta \circ \varphi([e, a_n])| \\ &= \frac{\|[\theta(e), \theta(a_n)]\|}{\|[\theta(e), e]\|} \longrightarrow ۰. \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که $f \circ \theta \circ \varphi$ روی $\ker f$ پیوسته است.

برعکس اگر $f \circ \theta = ۰$ آن‌گاه به‌وضوح θ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی است.

برای هر $a, c \in V_f$ طبق شرط ۲ داریم $[\theta(a), \theta(c)] = f \circ \theta(e)\theta \circ \varphi([a, c])$. لذا طبق شرط ۳ داریم $[\theta(a), \theta(c)] = f \circ \theta \circ \varphi([a, c])[\theta(e), e]$. حال اگر $[a_n, c_n] \longrightarrow ۰$ آن‌گاه بنا به پیوستگی $f \circ \theta$ و $f \circ \theta \circ \varphi$ روی $\ker f$ نتیجه می‌شود که $[\theta(a_n), \theta(c_n)] \longrightarrow ۰$. لذا θ نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی است. □

نتیجه ۱.۴.۲. فرض کنید V یک فضای برداری نرم‌دار غیرصفر و $۰ \neq f \in V^*$. همچنین فرض کنید $\theta : V_f \longrightarrow V_f$ یک نگاشت خطی پیوسته باشد به‌طوری‌که $\theta(\ker f) \subseteq \ker f$. در این‌صورت نگاشت θ حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی است.

برهان. با استفاده از قضیه قبل واضح است. □

قضیه ۲.۴.۲. فرض کنید A و B دو جبر نرم‌دار باشند. در این‌صورت نگاشت خطی $\theta : A \longrightarrow B$ حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی است اگر و تنها اگر $M > ۰$ چنان موجود باشد که برای هر $a, c \in A$ داشته باشیم

$$\|[\theta(a), \theta(c)]\| \leq M\|[a, c]\|.$$

برهان. با استفاده از برهان خلف فرض کنید نگاشت θ حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی باشد ولی برای $M > ۰$ نامساوی فوق برقرار نباشد پس برای هر $n \in \mathbb{N}$ عناصر $a_n, c_n \in A$ چنان موجودند که

$$\|[\theta(a_n), \theta(c_n)]\| > n\|[a_n, c_n]\|.$$

لذا

$$\| [\frac{a_n}{\|[\theta(a_n), \theta(c_n)]\|}, c_n] \| < \frac{1}{n}.$$

قرار دهید: $a'_n = \frac{a_n}{\|[\theta(a_n),\theta(c_n)]\|}$ و $c'_n = c_n$. واضح است که $[a'_n, c'_n] \longrightarrow 0$.
از طرف دیگر داریم

$$\|[\theta(a'_n), \theta(c'_n)]\| = \frac{\|[\theta(a_n), \theta(c_n)]\|}{\|[\theta(a_n), \theta(c_n)]\|} \longrightarrow 1.$$

این با فرض قضیه در تناقض است.
عکس قضیه به‌راحتی قابل اثبات است. □

نتیجه ۲.۴.۲. فرض کنید A و B دو جبر نرم‌دار باشند. در این‌صورت هر همریختی لی پیوسته از A به توی B حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی است.

۵.۲ خواص موروثی

در این بخش نشان می‌دهیم که حاصل‌جمع مستقیم و ترکیب دو نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی (حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی و حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی) مجدداً حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی (حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی و حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی) است. اما حاصل‌ضرب تانسوری آنها لزوماً حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی (حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی) نیست.

گزاره ۱.۵.۲. فرض کنید که A، B، C و D جبرهای نرم‌داری باشند به طوری‌که نگاشت‌های $\phi : A \longrightarrow B$ و $\psi : C \longrightarrow D$ حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی باشند. در این‌صورت نگاشت جمع مستقیم $\phi \oplus \psi : A \oplus C \longrightarrow B \oplus D$ حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی است.

برهان. چون نگاشت‌های ϕ و ψ حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی هستند. پس $M, N > 0$ چنان موجود هستند که برای هر $a, a' \in A$ داریم $\|\phi(a)\phi(a')\| \leq M\|aa'\|$ و برای هر $c, c' \in C$ داریم $\|\psi(c)\psi(c')\| \leq N\|cc'\|$.

بنابراین:

$$\begin{aligned}\|(\phi\oplus\psi)((a,c))(\phi\oplus\psi)((a',c'))\| &= \|(\phi(a),\psi(c))(\phi(a'),\psi(c'))\|\\ &= \|(\phi(a)\phi(a'),\psi(c)\psi(c'))\|\\ &= \|\phi(a)\phi(a')\|+\|\psi(c)\psi(c')\|\\ &\leq M\|aa'\|+N\|cc'\|\\ &\leq M(\|aa'\|+\|cc'\|)+N(\|aa'\|+\|cc'\|)\\ &= (M+N)(\|aa'\|+\|cc'\|)\\ &= (M+N)\|(aa',cc')\|\\ &= (M+N)\|(a,c)(a',c')\|.\end{aligned}$$

□

گزاره ۲.۵.۲. فرض کنید که A، B، C و D جبرهای نرم‌داری باشند و همچنین نگاشت‌های $\phi : A \longrightarrow B$ و $\psi : C \longrightarrow D$ حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی باشند. در این‌صورت نگاشت $\phi\oplus\psi : A\oplus C \longrightarrow B\oplus D$ حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی است.

برهان. چون ϕ و ψ نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی هستند. لذا مقادیر $M, N > ۰$ چنان موجودند که برای هر $a, a' \in A$ داریم $\|\phi(a)\circ\phi(a')\| \leq M\|a\circ a'\|$ و برای هر $c, c' \in C$ داریم $\|\psi(c)\circ\psi(c')\| \leq N\|c\circ c'\|$.
بنابراین

$$\begin{aligned}\|(\phi\oplus\psi)((a,c))\circ(\phi\oplus\psi)((a',c'))\| &= \|(\phi(a),\psi(c))\circ(\phi(a'),\psi(c'))\|\\ &= \|(\phi(a)\circ\phi(a'),\psi(c)\circ\psi(c'))\|\\ &= \|\phi(a)\circ\phi(a')\|+\|\psi(c)\circ\psi(c')\|\\ &\leq M\|a\circ a'\|+N\|c\circ c'\|\\ &\leq M(\|a\circ a'\|+\|c\circ c'\|)+N(\|a\circ a'\|+\|c\circ c'\|)\\ &= (M+N)(\|a\circ a'\|+\|c\circ c'\|)\\ &= (M+N)\|(a\circ a',c\circ c')\|\\ &= (M+N)\|(a,c)\circ(a',c')\|.\end{aligned}$$

حال طبق قضیه ۳.۳.۲ نتیجه می‌شود که $\phi\oplus\psi$ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی است. □

گزاره ۳.۵.۲. فرض کنید A،B و C جبرهایی نرم‌دار باشند و همچنین دو نگاشت $\phi : A \longrightarrow B$ و $\psi : B \longrightarrow C$ حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی باشند. در این‌صورت ترکیب نگاشت‌های ψ و ϕ یعنی $\psi\circ\phi : A \longrightarrow C$ حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی است.

برهان. از آن‌جایی‌که ϕ و ψ نگاشت‌های حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی هستند پس مقادیر $M, N > 0$ وجود دارند به‌طوری‌که برای هر $a, a' \in A$ داریم $\|\phi(a)\phi(a')\| \leq M\|aa'\|$ و برای هر $b, b' \in B$ داریم $\|\psi(b)\psi(b')\| \leq N\|bb'\|$.
حال ترکیب را بررسی می‌کنیم

$$\begin{aligned}\|(\psi \circ \phi)(a)(\psi \circ \phi)(a')\| &= \|\psi(\phi(a))\psi(\phi(a'))\| \\ &\leq N\|\phi(a)\phi(a')\| \\ &\leq MN\|aa'\|.\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که نگاشت $\psi \circ \phi$ حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی است. □

گزاره ۴.۵.۲. فرض کنید A،B و C جبرهایی نرم‌دار باشند و همچنین دو نگاشت $\phi : A \longrightarrow B$ و $\psi : B \longrightarrow C$ حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی باشند. در این‌صورت $\psi \circ \phi : A \longrightarrow C$ نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی است.

برهان. از آن‌جایی‌که نگاشت‌های ϕ و ψ حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی هستند پس مقادیر $M, N > 0$ چنان موجودند که برای هر $a, a' \in A$ داریم $\|\phi(a) \circ \phi(a')\| \leq M\|a \circ a'\|$ و برای هر $b, b' \in B$ داریم $\|\psi(b) \circ \psi(b')\| \leq N\|b \circ b'\|$.
حال ترکیب این دو نگاشت را بررسی می‌کنیم

$$\begin{aligned}\|(\psi \circ \phi)(a) \circ (\psi \circ \phi)(a')\| &= \|\psi(\phi(a)) \circ \psi(\phi(a'))\| \\ &\leq N\|\phi(a) \circ \phi(a')\| \\ &\leq MN\|a \circ a'\|.\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که ترکیب دو نگاشت یعنی $\psi \circ \phi$ حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی است.
□

گزاره ۵.۵.۲. فرض کنید که A، B، C و D جبرهای نرم‌داری باشند. همچنین فرض کنید $\phi : A \longrightarrow B$ و $\psi : C \longrightarrow D$ نگاشت‌های حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی باشند. در این‌صورت نگاشت $\phi \oplus \psi : A \oplus C \longrightarrow B \oplus D$ حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی است.

برهان. چون φ و ψ نگاشت‌های حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی هستند پس طبق قضیه ۲.۴.۲ مقادیر $M, N > 0$ چنان موجودند که برای هر $a, a' \in A$ داریم

$$\|[\phi(a), \phi(a')]\| \leq M\|[a, a']\|$$

و برای هر $c, c' \in C$ داریم

$$\|[\psi(c), \psi(c')]\| \leq N\|[c, c']\|.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\|[(\varphi\oplus\psi)((a,c)),(\varphi\oplus\psi)((a',c'))]\| &= \|[(\varphi(a),\psi(c)),(\varphi(a'),\psi(c'))]\|\\ &= \|(\varphi(a)\varphi(a')-\varphi(a')\varphi(a),\psi(c)\psi(c')\\ &\quad -\psi(c')\psi(c))\|\\ &= \|([\varphi(a),\varphi(a')],[\psi(c),\psi(c')])\|\\ &= \|([\varphi(a),\varphi(a')]\|+\|[\psi(c),\psi(c')]\|\\ &\leq M\|[a,a']\|+N\|[c,c']\|\\ &\leq M(\|[a,a']\|+\|[c,c']\|)\\ &\quad +N(\|[a,a']\|+\|[c,c']\|)\\ &= (M+N)(\|[a,a']\|+\|[c,c']\|)\\ &= (M+N)\|([a,a'],[c,c'])\|\\ &= (M+N)\|[(a,c),(a',c')]\|.\end{aligned}$$

بنابراین طبق قضیه ۲.۴.۲ نگاشت $\psi\oplus\varphi$ حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی است. □

گزاره ۶.۵.۲. فرض کنید A،B و C جبرهای نرم‌دار باشند و همچنین $\varphi : A\longrightarrow B$ و $\psi : B\longrightarrow C$ دو نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی باشند. در این‌صورت نگاشت $\psi\circ\varphi : A\longrightarrow C$ حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی است.

برهان. از آن‌جایی‌که φ و ψ نگاشت‌های حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی هستند پس مقادیر $M,N>0$ چنان موجود است که برای هر $a,a'\in A$ داریم

$$\|[\varphi(a),\varphi(a')]\|\leq M\|[a,a']\|$$

و برای هر $b,b'\in B$ داریم

$$\|[\psi(b),\psi(b')]\|\leq N\|[b,b']\|.$$

حال ترکیب را بررسی می‌کنیم

$$\begin{aligned}\|[\psi\circ\varphi(a),\psi\circ\varphi(a')]\| &= \|[\psi(\varphi(a)),\psi(\varphi(a'))]\|\\ &\leq N\|[\varphi(a),\varphi(a')]\|\\ &\leq MN\|[a,a']\|.\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که $\psi\circ\varphi$ نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی است. □

تذکر ۱.۵.۲. حاصل‌ضرب تانسوری دو نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی لزوماً نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی نیست. درستی این مطلب را با یک مثال بررسی می‌کنیم.

مثال ۱.۵.۲. فرض کنید $A = \{a+bi+cj+dk \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$ یک مجموعه باشد به‌طوری‌که $i^۲ = j^۲ = k^۲ = -۱$ و $ij = -ji = k$ و $jk = -kj = i$ و $ki = -ik = j$. با این شرایط A یک جبر تقسیم روی $\mathbb{R}$ است پس یک جبر روی $\mathbb{R}$ است که هر عنصر ناصفر متعلق به آن وارون‌پذیر است.

روی جبر A نرم مقابل را تعریف می‌کنیم. $\|a+bi+cj+dk\| = ۴\max\{|a|,|b|,|c|,|d|\}$.
بنابراین A یک جبر نرم‌دار روی $\mathbb{R}$ است. نگاشت $\phi : A \longrightarrow A$ را با ضابطه $\phi(a+bi+cj+dk) = bi$ در نظر می‌گیریم.
نشان می‌دهیم که ϕ نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی است. برای این‌کار فرض کنید x,y دو عنصر دلخواه از A باشند پس $x = a+bi+cj+dk$ و $y = e+fi+gj+hk$ لذا

$$xy = A+Bi+Cj+Dk. \tag{۵.۲}$$

از رابطه (۵.۲) می‌توان نتیجه گرفت که

$$\begin{cases} ea-fb-gc-hd = A \\ fa+eb+hc-gd = B \\ ga-hb+ec+fd = C \\ ha+gb-fc+ed = D. \end{cases} \tag{۶.۲}$$

فرض کنید $y = e+fi+gj+hk \neq ۰$. در این‌صورت $e^۲+f^۲+g^۲+h^۲ \neq ۰$.
اکنون با استفاده از دستور کرامر مقدار b را از رابطه (۶.۲) پیدا می‌کنیم پس داریم

$$\begin{aligned} b = &-\frac{f}{e^۲+f^۲+g^۲+h^۲}A + \frac{e}{e^۲+f^۲+g^۲+h^۲}B - \frac{h}{e^۲+f^۲+g^۲+h^۲}C \\ &+ \frac{g}{e^۲+f^۲+g^۲+h^۲}D. \end{aligned}$$

لذا

$$\begin{aligned} bf = &-\frac{f^۲}{e^۲+f^۲+g^۲+h^۲}A + \frac{fe}{e^۲+f^۲+g^۲+h^۲}B - \frac{fh}{e^۲+f^۲+g^۲+h^۲}C \\ &+ \frac{fg}{e^۲+f^۲+g^۲+h^۲}D. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} |bf| \le &\frac{|f^۲|}{e^۲+f^۲+g^۲+h^۲}|A| + \frac{|fe|}{e^۲+f^۲+g^۲+h^۲}|B| + \frac{|fh|}{e^۲+f^۲+g^۲+h^۲}|C| \\ &+ \frac{|fg|}{e^۲+f^۲+g^۲+h^۲}|D| \\ \le &|A| + \frac{۱}{۲}|B| + \frac{۱}{۲}|C| + \frac{۱}{۲}|D|. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \|\phi(x)\phi(y)\| &= \|(bi)(fi)\| = \|bf\| = ۴|bf| \\ &\leq ۴|A| + ۲(|B| + |C| + |D|) \\ &\leq ۱۶ max\{|A|, |B|, |C|, |D|\} \\ &= ۴\|xy\|. \end{aligned} \tag{۷.۲}$$

در حالتی که $y = e + fi + gj + hk = ۰$. داریم

$$\|\phi(x)\phi(y)\| = ۰ \leq ۴\|xy\|. \tag{۸.۲}$$

بنابراین طبق روابط (۷.۲) و (۸.۲) نتیجه می‌شود که برای هر $x, y \in A$ داریم $\|\phi(x)\phi(y)\| \leq ۴\|xy\|$. این نشان می‌دهد که ϕ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی است. اما نگاشت $\phi \otimes \phi : A \otimes A \longrightarrow A \otimes A$ حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی نیست. چون نگاشت $\phi \otimes \phi$ حافظ حاصل‌ضرب صفر نیست. به‌وضوح $(i \otimes i + j \otimes j)(i \otimes i - j \otimes j) = ۰$. اما

$$\begin{aligned} \phi \otimes \phi(i \otimes i + j \otimes j)\phi \otimes \phi(i \otimes i - j \otimes j) &= (\phi(i) \otimes \phi(i) + \phi(j) \otimes \phi(j)) \\ (\phi(i) \otimes \phi(i) - \phi(j) \otimes \phi(j)) &= (i \otimes i)(i \otimes i) \\ &= ۱ \otimes ۱ \neq ۰. \end{aligned}$$

بنابراین $\phi \otimes \phi$ نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر نیست و لذا نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی نیز نیست.

مثال زیر نشان می‌دهد که حاصل‌ضرب تانسوری دو نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی لزوماً یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی نیست.

مثال ۲.۵.۲. فرض کنید $A = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$ و $B = M_{۲\times۲}(\mathbb{C})$. نگاشت $\phi : A \longrightarrow B$ را با ضابطه $\phi(\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta & ۰ \end{bmatrix}$ تعریف می‌کنیم. طبق مثال ۳.۳.۲ ϕ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی است. نشان خواهیم داد که $\phi \otimes \phi : A \otimes A \longrightarrow B \otimes B$ یک نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی نیست. برای این‌کار فرض کنید $x = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

و $\begin{bmatrix} \circ & 1 \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} = y$ باشند. در این‌صورت

$$\begin{aligned} x \circ y &= \begin{bmatrix} \circ & 1 \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \circ & 1 \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \circ & 1 \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \circ & 1 \\ \circ & \circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \circ & 1 \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & 1 \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \\ &= \circ. \end{aligned}$$

اما $\circ \neq \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = (\phi\otimes\phi)(x) \circ (\phi\otimes\phi)(y)$. این نشان می‌دهد نگاشت $\phi\otimes\phi$ حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی نیست.

۶.۲ دوگان دوم نگاشت‌های حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی

در این قسمت دوگان دوم نگاشت‌های حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی (حاصل‌ضرب صفر جردن قوی و حاصل‌ضرب صفر لی قوی) تعریف شده روی یک کلاس خاص از جبرهای نرم‌دار را بررسی می‌کنیم. فرض کنید A و B جبرهای نرم‌دار باشند. برای نگاشت خطی کراندار $\theta : A \longrightarrow B$ اگر نگاشت $\theta^{**} : A^{**} \longrightarrow B^{**}$ حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی (حاصل‌ضرب صفر جردن قوی و حاصل‌ضرب صفر لی قوی) باشد آن‌گاه نگاشت $\theta : A \longrightarrow B$ نیز چنین است. سوال اینجا است که برای کدام‌یک از جبرهای A و B عکس این مطلب درست است. در ادامه منظور از $a * c$ هر کدام از ضرب های ac ، $a \circ c$ و $[a, c]$ می‌توانند باشند. همچنین منظور از نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر $*$ قوی یعنی نگاشتی خطی بین دو جبر نرم‌دار که حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی، حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی یا حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی می‌باشد. منظور از $*$ ـ همریختی همان همریختی، همریختی جردن یا همریختی لی می‌باشد.

قضیه ۱.۶.۲. فرض کنید A و B دو جبر نرم‌دار منظم آرنز باشند و $\theta : A \longrightarrow B$ یک نگاشت خطی کراندار باشد. همچنین فرض کنید عدد $M \geq \circ$ چنان موجود باشد که برای هر $a, c \in A$ و هر $g \in \overline{B_1^{(\circ)}}$ (گوی واحد بسته از B^*) نامساوی زیر برقرار باشد

$$|\langle \theta(a) * \theta(c), g\rangle| \leq M|\langle a * c, \theta^*(g)\rangle|. \qquad (۹.۲)$$

در این‌صورت نگاشت $\theta^{**} : A^{**} \longrightarrow B^{**}$ حافظ حاصل‌ضرب صفر $*$ قوی است.

برهان. قضیه را برای حالتی که $*$ حاصل‌ضرب لی باشد اثبات می‌کنیم. فرض کنید $m, n \in A^{**}$ و $(a_\alpha)_\alpha$ و $(c_\beta)_\beta$ دو تور در A باشند به طوری‌که

$$m = w^* - \lim_\alpha a_\alpha, \quad n = w^* - \lim_\beta c_\beta.$$

از آن‌جایی‌که A و B منظم آرنز هستند به‌وضوح داریم:

$$[m,n] = w^* - \lim_{\alpha} w^* - \lim_{\beta}[a_\alpha, c_\beta]. \tag{۱۰.۲}$$

و

$$[\theta^{**}(m), \theta^{**}(n)] = w^* - \lim_{\alpha} w^* - \lim_{\beta}[\theta(a_\alpha), \theta(c_\beta)]. \tag{۱۱.۲}$$

بنابراین با استفاده از روابط (۹.۲) ، (۱۰.۲) و (۱۱.۲) برای هر $g \in \overline{B_1^{(\circ)}}$ داریم

$$|\langle[\theta^{**}(m), \theta^{**}(n)], g\rangle| \leq M|\langle[m,n], \theta^*(g)\rangle|.$$

این نشان می‌دهد که

$$\|[\theta^{**}(m), \theta^{**}(n)]\| \leq M\|\theta\|\|[m,n]\|.$$

طبق قضیه ۲.۴.۲ نگاشت θ^{**} حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی است. در حالتی که $*$ ضرب اصلی یا ضرب جردن باشد، استدلال مشابهی می‌توان به‌کار برد. دقت کنید هنگامی که $*$ ضرب اصلی باشد آن‌گاه بدون فرض منظم آرنز بودن A و B حکم درست است. □

نتیجه ۱.۶.۲. فرض کنید A و B جبرهای نرم‌دار منظم آرنز باشند و $\theta : A \longrightarrow B$ یک $*$ـ همریختی کراندار باشد. در این‌صورت θ^{**} حافظ حاصل‌ضرب صفر $*$ قوی است.

برهان. چون θ یک $*$ ـ همریختی است پس برای اعضای $a, c \in A$ و $g \in \overline{B_1^{(\circ)}}$ داریم $\theta(a * c) = \theta(a) * \theta(c)$. در نتیجه

$$\begin{aligned}|\langle\theta(a) * \theta(c), g\rangle| &= |\langle\theta(a * c), g\rangle| \\ &= |\langle a * c, \theta^*(g)\rangle|.\end{aligned}$$

طبق قضیه ۱.۶.۲ نتیجه می‌شود که نگاشت θ^{**} حافظ حاصل‌ضرب صفر $*$ قوی است. دقت کنید زمانی که $*$ ضرب اصلی است شرط منظم آرنز برای A و B لازم نیست. □

قضیه ۲.۶.۲. فرض کنید V یک فضای برداری نرم‌دار ناصفر و $0 \neq f \in V^*$. به طوری‌که $\|f\| \leq 1$. همچنین نگاشت کراندار $\theta : V_f \longrightarrow V_f$ حافظ حاصل‌ضرب صفر $*$ قوی باشد. در این‌صورت نگاشت $\theta^{**} : (V_f)^{**} \longrightarrow (V_f)^{**}$ حافظ حاصل‌ضرب صفر $*$ قوی است.

برهان. طبق گزاره ۲.۱ از مرجع [۶] جبر V_f منظم آرنز است. کافی‌است نشان دهیم که نامساوی (۹.۲) برقرار است. در صورتی که $*$ ضرب اصلی یا ضرب جردن و نگاشت θ حافظ حاصل‌ضرب صفر $*$ قوی باشد در این‌صورت طبق قضیه ۲.۲.۲ و ۲.۳.۲ $f \circ \theta = 0$ یا $\theta(\ker f) \subseteq \ker f$. در صورتی که $*$ ضرب لی و نگاشت θ حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی باشد طبق قضیه ۱.۴.۲، $f \circ \theta = 0$ یا $\theta(\ker f) \subseteq \ker f$ یا $\theta(a) = f(a)\theta(e) + f \circ \theta \circ \varphi(a)e$ که در آن $e \in f^{-1}(\{1\})$ و $\varphi : V_f \longrightarrow \ker f$ نگاشت خطی پیوسته است. نتیجه‌گیری را در تمام موارد زیر بدست می‌آوریم.

۱ـ $f \circ \theta = 0$. لذا برای هر $a, c \in V_f$ داریم $\theta(a) * \theta(c) = 0$. بنابراین نامساوی (۹.۲) برای هر $M \geq 0$ برقرار است. در نتیجه اگر $f \circ \theta = 0$ آن‌گاه نگاشت θ^{**} حافظ حاصل‌ضرب صفر $*$ قوی است.

۲ـ $\theta(\ker f) \subseteq \ker f$. به ازای $e \in f^{-1}(\{1\})$، نگاشت $\varphi : V_f \longrightarrow \ker f$ را چنان تعریف می‌کنیم که برای هر $a \in V_f$، $\varphi(a) = a - f(a)e$. بنابراین می‌توان نوشت که $a = f(a)e + \varphi(a)$ و لذا $\theta(a) = f(a)\theta(e) + \theta \circ \varphi(a)$. از طرفی برای هر $g \in \overline{B_1^{(0)}}$ و هر $a, c \in V_f$ داریم

$$\begin{aligned}\langle \theta(a) * \theta(c), g\rangle &= \langle (f(a)\theta(e) + \theta \circ \varphi(a)) * (f(c)\theta(e) + \theta \circ \varphi(c)), g\rangle \\ &= f \circ \theta(e)\langle a * c, \theta^*(g)\rangle. \end{aligned} \tag{۱۲.۲}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}|\langle \theta(a) * \theta(c), g\rangle| &= |f \circ \theta(e)\langle a * c, \theta^*(g)\rangle| \\ &\leq \|f\|\|e\|\|\theta\||\langle a * c, \theta^*(g)\rangle| \\ &\leq \|e\|\|\theta\||\langle a * c, \theta^*(g)\rangle|.\end{aligned}$$

بنابراین برای $M = \|e\|\|\theta\|$ نامساوی (۹.۲) برقرار است. لذا نتیجه می‌شود که نگاشت θ^{**} حافظ حاصل‌ضرب صفر $*$ قوی است. دقت کنید به‌عنوان مثال وقتی که $*$ ضرب جردن باشد درستی رابطه (۱۲.۲) برای هر $a, c \in V_f$ به‌صورت زیر است.

$$\begin{aligned}\theta(a) * \theta(c) &= \theta(a) \circ \theta(c) \\ &= (f(a)\theta(e) + \theta \circ \varphi(a)) \circ (f(c)\theta(e) + \theta \circ \varphi(c)) \\ &= f(f(a)\theta(e) + \theta \circ \varphi(a))\theta(c) + f(f(c)\theta(e) + \theta \circ \varphi(c))\theta(a) \\ &= f(a)f \circ \theta(e)\theta(c) + f(c)f \circ \theta(e)\theta(a) \\ &= f \circ \theta(e)\theta(f(a)c) + f \circ \theta(e)\theta(f(c)a) \\ &= f \circ \theta(e)(\theta(ac) + \theta(ca)) \\ &= f \circ \theta(e)\theta(a \circ c) \\ &= f \circ \theta(e)\theta(a * c).\end{aligned}$$

۳ـ $*$ ضرب لی باشد و $\theta(a) = f(a)\theta(e) + f \circ \theta \circ \varphi(a)e$ که در آن $\varphi : V_f \longrightarrow \ker f$ نگاشت خطی پیوسته است و $e \in f^{-1}(\{1\})$ عضوی وجودی است. لذا با استفاده از رابطه (۴.۲) برای هر $a, c \in V_f$ داریم

$$\begin{aligned}[\theta(a), \theta(c)] &= f \circ \theta \circ \varphi([a, c])[\theta(e), e] \\ &= \theta \circ \varphi([a, c])[\theta(e), e].\end{aligned}$$

در نتیجه برای هر $g \in \overline{B_۱^{(۰)}}$ داریم

$$\begin{aligned}|\langle[\theta(a),\theta(c)],g\rangle| &= |\langle\theta\circ\varphi([a,c]).[\theta(e),e],g\rangle|\\ &= |\langle\theta\circ\varphi([a,c]),[\theta(e),e].g\rangle|\\ &= |\langle[a,c],(\theta\circ\varphi)^*([\theta(e),e].g)\rangle|.\end{aligned}$$

مشابه اثبات قضیه ۱.۶.۲ می‌توانیم به‌سادگی بررسی کنیم که برای $m,n \in (V_f)^{**}$ خواهیم داشت

$$|\langle[\theta^{**}(m),\theta^{**}(n)],g\rangle| = |\langle[m,n],(\theta\circ\varphi)^*([\theta(e),e].g)\rangle|.$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که

$$\|[\theta^{**}(m),\theta^{**}(n)]\| \le \|(\theta\circ\varphi)^*\|\|[\theta(e),e]\|\|[m,n]\|.$$

این نشان می‌دهد که نگاشت θ^{**} حافظ حاصل‌ضرب صفر لی قوی است.

$\square$

۷.۲ ماتریس‌های ۲×۲ با درایه‌های در V_f

فرض کنید که $M_{۲\times۲}(V_f) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in V_f \right\}$ مجموعه‌ی همه ماتریس‌های ۲×۲ با درایه‌هایی در V_f باشد. به‌وضوح $M_{۲\times۲}(V_f)$ با جمع و ضرب ماتریس‌ها و ضرب اسکالر در ماتریس‌ها یک جبر شرکت‌پذیر است. در این‌جا خودتوانی و پوچ‌توانی و همچنین عناصر مقسوم‌علیه صفر راست و چپ از $M_{۲\times۲}(V_f)$ را بررسی خواهیم کرد.

تعریف ۱.۷.۲. عنصر r از حلقه R را مقسوم‌علیه صفر راست می‌نامیم هرگاه عنصر ناصفر $y \in R$ چنان موجود باشد که $yr = ۰$.

تعریف ۲.۷.۲. عنصر r از حلقه R را مقسوم‌علیه صفر چپ می‌نامیم هرگاه عنصر ناصفر $x \in R$ چنان موجود باشد که $rx = ۰$.

تعریف ۳.۷.۲. عنصر r از حلقه R که هم مقسوم‌علیه صفر چپ و هم مقسوم‌علیه صفر راست باشد را مقسوم‌علیه صفر دوطرفه یا به‌طور خلاصه مقسوم‌علیه صفر می‌نامیم.

تعریف ۴.۷.۲. عنصر r از حلقه R را خودتوان می‌نامیم هرگاه : $r^۲ = r$.

تعریف ۵.۷.۲. عنصر r از حلقه R را پوچ‌توان گوییم هرگاه وجود داشته باشد $n > ۰$ که $r^n = ۰$.

قضیه ۱.۷.۲. فرض کنید $Hom(V_f, \mathbb{C})$ مجموعه‌ی همه همریختی‌های جبری از V_f به توی $\mathbb{C}$ باشد. در این‌صورت : $Hom(V_f, \mathbb{C}) = \{0, f\}$.

برهان. فرض کنید $0 \neq \varphi \in Hom(V_f, \mathbb{C})$. در این‌صورت عضو $b \in V_f$ چنان موجود است که $\varphi(b) \neq 0$. از طرفی با توجه به این‌که

$$\begin{aligned} f(a)\varphi(b) &= \varphi(f(a)b) \\ &= \varphi(ab) \\ &= \varphi(a)\varphi(b) \end{aligned}$$

پس می‌توان نتیجه گرفت که $(f(a) - \varphi(a))\varphi(b) = 0$.
لذا به ازای هر $a \in V_f$ داریم: $f(a) = \varphi(a)$. و این نشان می‌دهد که $\varphi = f$. □

قضیه ۲.۷.۲. فرض کنید که V یک فضای برداری ناصفر باشد. و همچنین f یک عنصر ناصفر از V^* باشد. در این‌صورت عنصر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(V_f)$ خودتوان است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

۱. $A = 0$.

۲. $f(a) = f(d) = 1, \quad b, c \in \ker f$.

۳. $f(a) = f(d) = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} a &= 2f(b)c \quad , \quad c = 2f(c)a, \\ b &= 2f(b)d \quad , \quad d = 2f(c)b. \end{aligned}$$

۴. $f(a) + f(d) = 1$

$$\begin{aligned} f(a)a + f(b)c &= a \quad , \quad f(a)b + f(b)d = b, \\ f(c)a &= f(a)c \quad , \quad f(c)b = f(a)d. \end{aligned}$$

برهان. فرض کنید A خودتوان باشد. در این‌صورت $A^2 = A$ و لذا

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

طبق ضرب روی V_f داریم

$$\begin{bmatrix} f(a)a+f(b)c & f(a)b+f(b)d \\ f(c)a+f(d)c & f(c)b+f(d)d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$f(a)a+f(b)c=a \tag{۱۳.۲}$$

$$f(a)b+f(b)d=b \tag{۱۴.۲}$$

$$f(c)a+f(d)c=c \tag{۱۵.۲}$$

$$f(c)b+f(d)d=d \tag{۱۶.۲}$$

و متناظراً از روابط بالا نتیجه می‌شود

$$f(a)^۲+f(b)f(c)=f(a) \tag{۱۷.۲}$$

$$f(a)f(b)+f(b)f(d)=f(b) \tag{۱۸.۲}$$

$$f(c)f(a)+f(d)f(c)=f(c) \tag{۱۹.۲}$$

$$f(c)f(b)+f(d)^۲=f(d) \tag{۲۰.۲}$$

با کم کردن رابطه (۲۰.۲) از رابطه‌ی (۱۷.۲) خواهیم داشت $f(a)^۲-f(d)^۲=f(a)-f(d)$.
از طرفی $(f(a)-f(d))(f(a)+f(d)-۱)=۰$.
بنابراین $f(a)=f(d)$ یا $f(a)+f(d)=۱$.
در حالتی که $f(a)=f(d)$
از روابط (۱۸.۲) و (۱۹.۲) نتیجه می‌شود که

$$f(a)f(b)+f(b)f(a)=f(b) \Longrightarrow ۲f(a)f(b)=f(b),$$

$$f(c)f(a)+f(a)f(c)=f(c) \Longrightarrow ۲f(a)f(c)=f(c)$$

بنابراین

$$f(b)(۲f(a)-۱)=۰ \tag{۲۱.۲}$$

$$f(c)(۲f(a)-۱)=۰ \tag{۲۲.۲}$$

و لذا $۲f(a) - ۱ = ۰$ یا $f(b) = f(c) = ۰$.
اگر $۲f(a) - ۱ = ۰$ باشد آن‌گاه $f(a) = f(d) = \frac{۱}{۲}$.
همچنین طبق روابط (۱۳.۲)،(۱۴.۲)،(۱۵.۲) و (۱۶.۲)

$$\frac{۱}{۲}a + f(b)c = a \Longrightarrow a = ۲f(b)c$$

$$\frac{۱}{۲}b + f(b)d = b \Longrightarrow b = ۲f(b)d$$

$$f(c)a + \frac{۱}{۲}c = c \Longrightarrow c = ۲f(c)a$$

$$f(c)b + \frac{۱}{۲}d = d \Longrightarrow d = ۲f(c)b$$

بنابراین درستی شرط ۳ بررسی شد.
حال اگر $۲f(a) - ۱ \neq ۰$. آن‌گاه طبق روابط (۲۱.۲) و (۲۲.۲) داریم $f(b) = f(c) = ۰$. با استفاده رابطه (۱۷.۲) خواهیم داشت $f(a)^۲ = f(a)$ و در نتیجه $f(a) = ۰$ یا $f(a) = ۱$. حال اگر $f(a) = ۰$ آن‌گاه $f(a) = f(d) = ۰$. بنا به روابط (۱۳.۲)،(۱۴.۲)،(۱۵.۲) و (۱۶.۲) نتیجه می‌شود $A = ۰$ و شرط ۱ برقرار است.
اگر $f(a) = ۱$. آن‌گاه $f(a) = f(d) = ۱$ و $b, c \in \ker f$. و شرط ۲ نیز برقرار شد.
اما در حالتی که $f(a) + f(d) = ۱$
طبق روابط (۱۳.۲) و (۱۴.۲) داریم $f(a)a + f(b)c = a$ و $f(a)b + f(b)d = b$. با جای‌گذاری $f(d) = ۱ - f(a)$ در (۱۶.۲), (۱۵.۲) نتیجه می‌شود که $f(c)a = f(a)c$ و $f(c)b = f(a)d$. و لذا شرط ۴ نیز برقرار است.
برعکس اگر شرط ۱ برقرار باشد یعنی اگر $A = ۰$ آن‌گاه به‌وضوح A خودتوان است.
اگر شرط ۲ برقرار باشد یعنی $f(a) = f(d) = ۱$ و $f(b) = f(c) = ۰$ آن‌گاه

$$\begin{aligned} A^۲ &= \begin{bmatrix} f(a)a + f(b)c & f(a)b + f(b)d \\ f(c)a + f(d)c & f(c)b + f(d)d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

اگر شرط ۳ برقرار باشد آن‌گاه

$$\begin{aligned} A^۲ &= \begin{bmatrix} f(a)a + f(b)c & f(a)b + f(b)d \\ f(c)a + f(d)c & f(c)b + f(d)d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{a}{۲} + \frac{a}{۲} & \frac{b}{۲} + \frac{b}{۲} \\ \frac{c}{۲} + \frac{c}{۲} & \frac{d}{۲} + \frac{d}{۲} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

اگر شرط ۴ برقرار باشد آن‌گاه

$$\begin{aligned} A^{۲} &= \begin{bmatrix} f(a)a+f(b)c & f(a)b+f(b)d \\ f(c)a+f(d)c & f(c)b+f(d)d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ f(a)c+f(d)c & f(a)d+f(d)d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ f(a)c+(۱-f(a))c & (۱-f(d))d+f(d)d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

قضیه ۳.۷.۲. فرض کنید V یک فضای برداری ناصفر و f یک عنصر ناصفر از V^* باشد. در این‌صورت عضو $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ متعلق به $M_{۲\times۲}(V_f)$ مقسوم‌علیه صفر چپ است اگر و تنها اگر $\det(A) \in ker f$ یا به طور معادل $f(\det(A)) = ۰$.

برهان. فرض کنید که A یک مقسوم‌علیه صفر چپ باشد پس عضو ناصفر $\begin{bmatrix} x & y \\ s & t \end{bmatrix}$ چنان موجود است که $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ s & t \end{bmatrix} = ۰$.

در واقع $\begin{bmatrix} ax+bs & ay+bt \\ cx+ds & cy+dt \end{bmatrix} = ۰$ و لذا داریم
$$\begin{cases} ax+bs = ۰ \\ cx+ds = ۰ \\ ay+bt = ۰ \\ cy+dt = ۰ \end{cases}.$$

بنابراین

$$f(a)x+f(b)s = ۰ \quad (۲۳.۲)$$

$$f(c)x+f(d)s = ۰ \quad (۲۴.۲)$$

$$f(a)y+f(b)t = ۰ \quad (۲۵.۲)$$

$$f(c)y+f(d)t = ۰ \quad (۲۶.۲)$$

با استفاده از روابط (۲۳.۲) و (۲۴.۲) داریم

$$f(ad-bc)x=0, \quad f(ad-bc)s=0.$$

به‌طور مشابه به کمک روابط (۲۵.۲) و (۲۶.۲) می‌توان نتیجه گرفت که

$$f(ad-bc)y=0, \quad f(ad-bc)t=0.$$

بنابراین $f(ad-bc)\begin{bmatrix} x & y \\ s & t \end{bmatrix}=0$ و این نشان می‌دهد که $f(ad-bc)=0$. یعنی $f(\det(A))=0$ و لذا $\det(A)\in\ker f$.

برعکس فرض کنید $\det(A)\in\ker f$ باشد. در این‌صورت $f(ad-bc)=0$ به عبارتی $f(a)f(d)-f(b)f(c)=0$.

فرض کنید $e\in V_f$ عنصری باشد که $f(e)=1$. واضح است که $\begin{bmatrix} e & e \\ e & e \end{bmatrix}\neq 0$.

اکنون دو حالت ممکن را برای درایه‌های ماتریس A در نظر می‌گیریم

اگر $(a,b,c,d)\in\ker f\times\ker f\times\ker f\times\ker f$ آن‌گاه $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & e \\ e & e \end{bmatrix}=0$. این نشان می‌دهد که A یک مقسوم‌علیه صفر چپ است.

اگر $(a,b,c,d)\notin\ker f\times\ker f\times\ker f\times\ker f$ آن‌گاه $\begin{bmatrix} f(d)e & f(b)e \\ -f(c)e & -f(a)e \end{bmatrix}\neq 0$. در نتیجه

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f(d)e & f(b)e \\ -f(c)e & -f(a)e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} af(d)e-bf(c)e & af(b)e-bf(a)e \\ cf(d)e-df(c)e & cf(b)e-df(a)e \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} f(a)f(d)e-f(b)f(c)e & f(a)f(b)e-f(b)f(a)e \\ f(c)f(d)e-f(d)f(c)e & f(c)f(b)e-f(d)f(a)e \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} f(ad-bc)e & 0 \\ 0 & -f(ad-bc)e \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} f(\det(A))e & 0 \\ 0 & -f(\det(A))e \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که A یک مقسوم‌علیه صفر چپ است. □

گزاره ۱.۷.۲. فرض کنید V یک فضای برداری با شرط $\dim V>1$ باشد. همچنین فرض کنید

f یک عنصر ناصفر از V^* در نظر گرفته شود. در این‌صورت هر عنصر مانند $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in$ $M_{۲\times۲}(V_f)$ یک مقسوم‌علیه صفر راست است.

برهان. از آن جایی که $\dim V > ۱$ است، عضوی چون $۰ \neq r \in \ker f$ را انتخاب می‌کنیم. به‌وضوح $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$. بنابراین A یک مقسوم‌علیه صفر راست است. □

تذکر ۱.۷.۲. اگر L مجموعه‌ی تمام مقسوم‌علیه‌های صفر چپ در $M_{۲\times۲}(V_f)$ باشد. آن‌گاه الزاماً L یک ایده‌آل نیست. زیرا اگر $a \in V$ به‌طوری‌که $f(a) \neq ۰$ آن‌گاه طبق قضیه ۳.۷.۲ دو عنصر $A = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} a & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ مقسوم‌علیه صفر چپ هستند ولی $A + B = \begin{bmatrix} ۲a & a \\ a & a \end{bmatrix}$ یک مقسوم‌علیه صفر چپ نیست.

نتیجه ۱.۷.۲. فرض کنید V یک فضای برداری با شرط $\dim V > ۱$ باشد. همچنین f یک عضو ناصفر از V^* در نظر گرفته شود. در این‌صورت عنصر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{۲\times۲}(V_f)$ مقسوم‌علیه صفر است اگر و تنها اگر $\det(A) \in \ker f$.

قضیه ۴.۷.۲. فرض کنید V یک فضای برداری ناصفر باشد و f یک عنصر ناصفر از V^* در نظر گرفته شود. در این‌صورت نگاشت $\begin{bmatrix} f & f \\ f & f \end{bmatrix} : M_{۲\times۲}(V_f) \longrightarrow M_{۲\times۲}(\mathbb{C})$ با ضابطه‌ی

$\begin{bmatrix} f & f \\ f & f \end{bmatrix} (\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{bmatrix}$ یک هم‌ریختی است.

برهان. از آن‌جایی‌که f خطی است لذا نگاشت $\begin{bmatrix} f & f \\ f & f \end{bmatrix}$ نیز خطی است.

فرض کنید $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x & y \\ s & t \end{bmatrix}$ دو عنصر دلخواه از $M_{۲\times۲}(V_f)$ باشند. در این‌صورت

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} f & f \\ f & f \end{bmatrix}(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ s & t \end{bmatrix}) &= \begin{bmatrix} f & f \\ f & f \end{bmatrix}(\begin{bmatrix} ax+bs & ay+bt \\ cx+ds & cy+dt \end{bmatrix}) \\
&= \begin{bmatrix} f & f \\ f & f \end{bmatrix}(\begin{bmatrix} f(a)x+f(b)s & f(a)y+f(b)t \\ f(c)x+f(d)s & f(c)y+f(d)t \end{bmatrix}) \\
&= \begin{bmatrix} f(a)f(x)+f(b)f(s) & f(a)f(y)+f(b)f(t) \\ f(c)f(x)+f(d)f(s) & f(c)f(y)+f(d)f(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f(x) & f(y) \\ f(s) & f(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} f & f \\ f & f \end{bmatrix}(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix})\begin{bmatrix} f & f \\ f & f \end{bmatrix}(\begin{bmatrix} x & y \\ s & t \end{bmatrix}).
\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که $\begin{bmatrix} f & f \\ f & f \end{bmatrix}$ یک هم‌ریختی است. □

قضیه ۵.۷.۲. فرض کنید V یک فضای برداری ناصفر باشد و f یک عضو ناصفر از V^* در نظر گرفته شود. در این‌صورت عنصر $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{۲\times۲}(V_f)$ پوچتوان است اگر و تنها اگر $\begin{bmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{bmatrix} \in M_{۲\times۲}(\mathbb{C})$ پوچتوان باشد.

برهان. فرض کنید $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ پوچتوان باشد. در این‌صورت $n > ۰$ چنان موجود است که $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^n = ۰$. لذا $\begin{bmatrix} f & f \\ f & f \end{bmatrix}(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^n) = ۰$. از طرفی چون نگاشت $\begin{bmatrix} f & f \\ f & f \end{bmatrix}$ با ضابطه تعریف شده در قضیه ۴.۷.۲ هم‌ریختی است پس نتیجه می‌شود که $\begin{bmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{bmatrix}^n = ۰$.

این نشان می‌دهد که $\begin{bmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{bmatrix}$ پوچتوان است.

برعکس فرض کنید $\begin{bmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{bmatrix}$ پوچتوان باشد. در این‌صورت $n > ۰$ چنان موجود است که

$= \circ$ $\begin{bmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{bmatrix}^n$. حال نشان می‌دهیم که ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ پوچ‌توان است. از آن‌جایی‌که

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{۲} = \begin{bmatrix} f(a)a + f(b)c & f(a)b + f(b)d \\ f(c)a + f(d)c & f(c)b + f(d)d \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

به استقراء خواهیم داشت $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{n+۱} = \begin{bmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

طبق فرض نتیجه می‌شود که $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{n+۱} = \begin{bmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \circ$.

بنابراین $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ پوچ‌توان است. □

تذکر ۲.۷.۲. اگر L مجموعه‌ی تمام عناصر پوچ‌توان $M_{۲\times۲}(V_f)$ باشد آن‌گاه الزاماً L یک ایده‌آل نیست. زیرا فرض کنید $e \in V_f$ چنان باشد که $f(e) = ۱$. در این‌صورت به‌وضوح $A = \begin{bmatrix} \circ & e \\ \circ & \circ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ e & \circ \end{bmatrix}$ پوچ‌توان هستند، ولی $A + B = \begin{bmatrix} \circ & e \\ e & \circ \end{bmatrix}$ پوچ‌توان نیست.

مراجع

[1] F. F. Bonsall and J. Duncan, Complete Normed Algebra, Springer- Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1973.

[2] M. A. Chebotar, W.-F. Ke, P.-H. Lee and N.-C. Wong, Mappings preserving zero-products, Studia Math. 155 (2003), (1) 77-94.

[3] John B. Conway, A Course in Functional Analysis, Second Edition, Springer- Verlag New York, Inc, 1990.

[4] G. B. Folland, Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications, Second Edition. 1999

[5] H. Ghahramani, Zero-product determined triangular algebras, Linear Multilinear Algebra, 61 (2013), 741-757.

[6] A. R. Khoddami and H.R. Ebrahimi Vishki, The higher duals of a Banach algebra induced by a bounded linear functional, Bull. Math. Anal. Appl. 3 (2011), 118-122.

[7] A. R. Khoddami, Strongly zero-product preserving maps on normed algebras induced by a bounded linear functional, Khayyam J. Math., 1 (2015), no. 107-114.

[8] A. R. Khoddami, On maps preserving strongly zero-products, Chamchuri. J. Math., 7 (2015), 16-23.

[9] A. R. Khoddami, On strongly Jordan zero-product preserving maps, Sahand Commun. Math. Anal. (2016), 53-61.

[10] A. R. Khoddami, On the algebra $M_{2\times 2}(R_\varphi)$ generated by a non-zero vector space and a non-zero linear functional, Transactions on algebra and its applications 2. (2016), 33-42

[11] A. R. Khoddami, The second dual of strongly zero-product preserving maps, Bull. Iran. Math. Soc., to appear.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

پوچ توان	Nilpotent
تصویر متعارف	Canonical image
توپولوژی ضعیف	Weak Topology
توپولوژی ضعیف ستاره	Weak* Topology
جبر نرم‌دار	Normed algebra
خودتوان	Idempotent
رابطه ترتیب جزیی	Partial ordering relation
ضرب آرنز	Arens product
ضرب تانسور	Tensor product
فضای برداری	Vector space
فضای دوگان	Dual space
مجموعه‌ی جهت‌دار	Directed set
مقسوم‌علیه صفر	Zero divisor
منظم آرنز	Arens regular
نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر	Zero-product preserving map
نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی	Strongly zero-product preserving map

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

ضرب آرنز .... Arens product
منظم آرنز .... Arens regular
تصویر متعارف .... Canonical image
فضای دوگان .... Dual space
خودتوان .... Idempotent
نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر .... Jordan zero-product preserving map
پوچ توان .... Nilpotent
جبر نرم‌دار .... Normed algebra
رابطه ترتیب جزیی .... Partial ordering relation
نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر جردن قوی .... Strongly jordan zero-product preserving map
نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی .... Strongly lie zero-product preserving map
نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر قوی .... Strongly zero-product preserving map
ضرب تانسور .... Tensor product
فضای برداری .... Vector space
توپولوژی ضعیف .... Weak Topology
توپولوژی ضعیف ستاره .... Weak* Topology
مقسوم‌علیه صفر .... Zero divisor
نگاشت حافظ حاصل‌ضرب صفر .... Zero-product preserving map

Aabstract

At first we recall the notions of zero-product preserving maps, Jordan zero-product preserving maps and Lie zero-product preserving maps. Then we generalize the above mentioned notions as strongly zero-product preserving maps, strongly Jordan zero-product preserving maps and strongly Lie zero-product preserving maps on arbitrary normed algebras. We investigate these notions on certain normed algebras induced by a non-zero normed vector space and a non-zero bounded linear functional. Also we present some hereditary properties concerning these notions, such as the direct product, the composition and the tensor product of two maps. Finally we discuss about the second dual and also some miscellaneous properties of these maps.

keywords: Arens regular, Second dual, Strongly zero-product preserving map, Strongly jordan zero-product preserving map, Strongly lie zero-product preserving map, Zero divisor.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Real Analysis

On strongly zero-product preserving maps

By: Ali Zibaei

Supervisor

Ali Reza Khoddami

july 2017