بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی ، گرایش مالی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

روشی سریع ودقیق برای قیمت‌گذاری اختیار معامله در بازاری با مدل پرش نمایی مضاعف با تلاطم و اندازه شدت تصادفی

نگارنده: راضیه عسکری

استادان راهنما

دکتر الهام دسترنج

دکتر مجتبی میر لوحی

استاد مشاور

دکتر سمیه مغاری

تیر ۱۳۹۶

شماره:
تاریخ:

باسمه‌تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود
مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای راضیه عسکری با شماره دانشجویی ۹۴۱۲۳۱۴ رشته ریاضی گرایش ریاضی مالی تحت عنوان روشی سریع ودقیق برای قیمت‌گذاری اختیار معامله در بازاری با مدل پرش نمایی مضاعف با تلاطم واندازه شدت تصادفی که در تاریخ ۹۶/۰۴/۱۲ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه: ..عالی.......) ☑ مردود ☐

نوع تحقیق: نظری ☑ عملی ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	دکتر الهام دسترنج	استادیار	
۲- استادراهنمای دوم	دکتر مجتبی میرلوحی	استادیار	غایب
۳- استاد مشاور	دکتر سمیه مغاری	استادیار	مغاری
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر مهدی رضا خورسندی	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر احمد معتمد نژاد	دانشیار	
۶ـ استاد ممتحن دوم	دکتر مجتبی غیاثی	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

معاونت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشکده ریاضی

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم به کسانی که حقی بر من دارند

حتی ذره ای...

شهدای مدافع حرم

و پدر عزیزم

و مادر مهربانم

سپاس گزاری...

سپاس خدای را که هر توفیقی در گرو عنایت اوست اکنون که که به یاری او توانسته‌ام تلاشی هر چند ناچیز را در راه کسب دانش به انجام رسانم بر خود لازم می‌دانم
از اساتید راهنمای بزرگوارم **سرکار خانم الهام دسترنج** و **جناب آقای مجتبی میرلوحی** که در کمال سعه صدر با حسن خلق و فروتنی از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند وزحمت راهنمایی این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند؛
از استاد صبور **سرکار خانم سمیه مغاری** که زحمت مشاوره این پایان‌نامه را بر عهده داشتند که بدون مساعدت ایشان این پروژه به نتیجه مطلوب نمی‌رسید؛
از اساتید فرزانه و دلسوز **جناب آقای دکتر غیاثی** و **جناب آقای دکتر زیره** که زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شدند؛
کمال تشکر و قدردانی را بنمایم باشد که این کوچکترین بخشی از زحمت آنان را سپاس گوید.
از سایر اساتید محترم عزیزم در دوره کارشناسی ارشد و نیز دوستان خوب ومهربانم قدردانی می‌کنم.
در پایان از خانواده‌ام به ویژه پدر و مادر عزیزم که با حمایت‌های خویش همواره مرا پشتیبانی کرده‌اند نهایت سپاس و قدر شناسی را دارم.

راضیه عسکری
تیر ۱۳۹۶

تعهد نامه

اینجانب **راضیه عسکری** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی** **علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **روشی سریع ودقیق برای قیمت‌گذاری اختیار معامله در بازاری با مدل پرش نمایی مضاعف با تلاطم و اندازه شدت تصادفی** ، تحت راهنمایی **الهام دسترنج** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود‘‘ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

راضیه عسکری
تیر ۱۳۹۶

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

قیمت‌گذاری اختیار معامله یکی از مهم‌ترین مباحث مطرح در ریاضیات مالی است. در این پایان‌نامه به قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت مدل پرش نمایی مضاعف پرداخته می‌شود، برای این منظور ابتدا با تعیین تابع مشخصه فرآیند قیمت دارایی، فرمولی برای قیمت‌گذاری اختیار اروپایی تحت این مدل با استفاده از روش تبدیل فوریه به دست می آوریم؛ این مدل با توجه به انعطاف پذیری بیش‌تری که نسبت به مدل‌های دیگر بازار دارد، به دلیل وجود جمله پرش در فرآیند قیمت می‌تواندتا حد زیادی در بازارهای مالی مورد استفاده قرار گیرد.

کلمات کلیدی: مدل پرش نمایی مضاعف، تلاطم تصادفی، شدت تصادفی، پرش، قیمت‌گذاری

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

1. Askari, R., Dastranj, E.(2016),”The Pricing of Binary Option Using the Fast Fourier Transform”, 22th Seminar on Mathematical Analysis and its Application.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

فصل ۱

تعاریف ومفاهیم

۱.۱ مقدمه

در این فصل به معرفی مفاهیم وتعاریف مورد نیاز در فصل‌های آتی می‌پردازیم، تعاریف و مفاهیم این فصل از مراجع [۱]، [۳]، [۶]، [۹]، [۲۶]و [۳۲] جمع‌آوری شده است.

۲.۱ مفاهیم نظریه اندازه و احتمال

تعریف ۱.۲.۱. اگر Ω مجموعه‌ی ناتهی و $\mathcal{F}$ دسته‌ی ناتهی از زیرمجموعه‌های Ω باشد، $\mathcal{F}$ را یک **نیم‌حلقه** گوییم هرگاه

۱. $\emptyset \in \mathcal{F}$،

۲. اگر دنباله‌ی متناهی از مجموعه‌ها مانند $C_۱, C_۲, \ldots, C_n$ متعلق به $\mathcal{F}$ باشند، آن‌گاه

$$\bigcap_{i=۱}^{n} C_i \in \mathcal{F}.$$

۳. اگر $C_۱, C_۲$ دو مجموعه متعلق به $\mathcal{F}$ باشد، آن‌گاه

$$C_۱ - C_۲ = \bigcup_{i=۱}^{n} B_i, \quad B_i \in \mathcal{F},$$

که $B_i \bigcap B_j = \emptyset$ و $i \neq j$ برای $i = ۱,۲,\dots,n$.
یعنی تفاضل هر دو عضو را بتوان به صورت اجتماع‌های متناهی از اعضای دو به دو جدا از هم نوشت.

تعریف ۲.۲.۱. اگرΩ مجموعه‌ی ناتهی و$\mathcal{F}$ دسته‌ی ناتهی از زیرمجموعه‌های Ω باشد، $\mathcal{F}$ را یک σــ **میدان** گوییم هرگاه

۱. $\emptyset \in \mathcal{F}$،
۲. اگر $C \in \mathcal{F}$ آن‌گاه $C^c \in \mathcal{F}$،
۳. اگر دنباله‌ی نامتناهی از مجموعه‌ها مانند $C_۱, C_۲, \dots$ متعلق به $\mathcal{F}$ باشند، آن‌گاه

$$\bigcup_{i=۱}^{\infty} C_i \in \mathcal{F},$$

تحت اجتماع‌های شمارش پذیر نامتناهی بسته باشد.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم $\Omega = \mathbb{R}$ و $\mathcal{F}$ دسته‌ی تمام بازه‌ها باشد، σــ میدان تولید شده توسط $\mathcal{F}$ را σــ **میدان بورل** گوییم و با $\mathcal{B}$ نشان می‌دهیم، دسته‌ی تمام بازه‌ها به صورت $(a, b]$ یا $[a, b)$ یا (a, b) که در آن a و b اعداد گویا هستند و یا مجموعه‌ی شعاع‌هایی که ابتدا و انتهای آن‌ها اعداد گویا باشند همگی مولد بورل هستند.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید $\mathcal{F}$ یک نیم‌حلقه باشد، تابع ($\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [۰, +\infty]$) را **اندازه** می‌گوییم هرگاه دارای خواص زیر باشد

۱. برای هر مجموعه $A \in \mathcal{F}$ داشته باشیم $۰ \leq \mu(A) \leq \infty$،
۲. اگر $\{A_i\}_{i \geq ۱}$ دنباله‌ی از اعضای دو به دو جدا از هم $\mathcal{F}$ باشند به‌طوری‌که $\bigcup_{i \geq ۱} A_i \in \mathcal{F}$ باشد آن‌گاه داشته باشیم

$$\mu(\bigcup_{i \geq ۱} A_i) = \sum_{i \geq ۱} \mu(A_i),$$

که این خاصیت را خاصیت σــ جمع‌پذیری برای μ گوییم.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید Ω یک مجموعه‌ی ناتهی و $\mathcal{F}$ یک σــ میدان از زیرمجموعه‌های آن باشد، زوج مرتب $(\Omega, \mathcal{F})$ را **فضای اندازه‌پذیر** گویند.
اگر P اندازه‌ای روی $\mathcal{F}$ باشد آن‌گاه سه‌تایی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را **فضای اندازه** می‌نامیم.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید $\mathcal{F}$ یک σــ میدان از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی ناتهی Ω باشد، تابع P ($P : \mathcal{F} \longrightarrow [۰, ۱]$) را **اندازه احتمال** می‌نامیم هرگاه

۱. $P(\Omega) = ۱$،
۲. اگر $\{C_n\}_{n \geq ۱}$ دنباله‌ای ازاعضای دو به دو جدا ازهم $\mathcal{F}$ باشند آن‌گاه داشته باشیم

$$P(\bigcup_{n \geq ۱} C_n) = \sum_{n \geq ۱} P(C_n).$$

سه‌تایی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را **فضای احتمال** می‌نامیم.

تعریف ۷.۲.۱. اندازه $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [\circ, +\infty]$ را روی فضای اندازه پذیر $(X, \mathcal{F})$، σ**ـ متناهی** گوییم هرگاه دنباله‌ی $\{A_i\}_{i\geq ۱}$ ازاعضای دو به دو جدا از هم $\mathcal{F}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$X = \bigcup_{i\geq ۱} A_i,$$

و برای هر $i \geq ۱$، داشته باشیم $\mu(A_i) < \infty$.

تعریف ۸.۲.۱. هر تابع اندازه‌پذیر حقیقی از فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ به فضای اندازه‌پذیر $(R, \mathcal{B})$ که $\mathcal{B}$ مجموعه‌ی بورل، را یک **متغیر تصادفی** گوییم. معمولا برای نشان دادن متغیرهای تصادفی از حروف بزرگ لاتین مثل $X, Y, Z, \ldots$ استفاده می‌کنیم. برای هر متغیر تصادفی X می‌توان تابع $\mathcal{F}_X : \mathbb{R} \to [\circ, ۱]$ به صورت

$$\mathcal{F}_X(x) = P(X \leq x) = P\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\},$$

تعریف کردکه **توزیع متغیر تصادفی** نامیده می‌شود. برای توزیع $\mathcal{F}_X$ خواص زیر برقرار است

۱. برای $\forall a, b \in \mathcal{R}$

$$\mathcal{F}_X(b) - \mathcal{F}_X(a) = P(a < X < b),$$

۲. تابع $\mathcal{F}_X$ غیر نزولی است و در هر نقطه از سمت راست پیوسته است،

۳. $\lim_{x\to -\infty} \mathcal{F}_X(x) = \circ$ و $\lim_{x\to\infty} \mathcal{F}_X(x) = ۱$.

تعریف ۹.۲.۱. اگر $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر و $\mu_۱$ و $\mu_۲$ دو اندازه روی این فضا باشند گوییم این دو اندازه **مطلقاً پیوسته** هستند (با نماد $\mu_۱ \ll \mu_۲$ نمایش داده می‌شود) اگر و تنها اگر برای هر A از $\mathcal{A}$ داشته باشیم

$$\mu_۲(A) = \circ \Longrightarrow \mu_۱(A) = \circ.$$

قضیه ۱.۲.۱. **(قضیه رادون‌ـ نیکودیم[1])** فرض کنید $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر و $\mu_۱$ و $\mu_۲$ دو اندازه σـ متناهی روی $\mathcal{A}$ باشند. اگر $\mu_۱ \ll \mu_۲$ آن‌گاه تابع اندازه‌پذیر نامنفی f وجود دارد به‌طوری‌که برای هر A از $\mathcal{A}$ داشته باشیم

$$\mu_۱(A) = \int_A f d\mu_۲.$$

برهان. به[۶] رجوع کنید. □

تعریف ۱۰.۲.۱. اگر A مجموعه‌ی دلخواه از σـ میدان $\mathcal{A}$ باشد، **تابع مشخصه‌ی** مجموعه‌ی A را با χ_A نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\chi_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ \circ & o.w. \end{cases}$$

[1] Rodon-Nikodym theorem

۳.۱ مفاهیم فرآیندهای تصادفی

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ فضای احتمال و Y متغیر تصادفی نامنفی باشد هم‌چنین فرض کنید $\mathcal{D}$ یک زیر σـ میدان از $\mathcal{F}$ باشد در این صورت **امیدشرطی** تابعی است $\mathcal{D}$ اندازه پذیر و حقیقی روی Ω و با $E(Y|\mathcal{D})$ نشان می‌دهیم

$$E(Y|\mathcal{D}) = (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}),$$

به طوری که داشته باشیم

$$\forall D \in \mathcal{D} \qquad \int_D E(Y|\mathcal{D})dP = \int_D Y dP,$$

خواص امیدشرطی

۱. اگر $X \geq 0$

$$E(X|D) \geq 0, \qquad a.s.$$

۲.

$$E(X+Y|D) = E(X|D) + E(Y|D), \qquad a.s.$$

۳. $\forall a \in \mathcal{R}$

$$E(aX|D) = aE(X|D), \qquad a.s.$$

۴. اگر $D = \{\emptyset, \Omega\}$ آن‌گاه

$$E(X|D) = E(X), \qquad a.s.$$

۵. اگر $D_1 \subset D_2$ آن‌گاه

$$E(E(X|D_2)|D_1) = E(X|D_1), \qquad a.s.$$

۶.

$$E(E(X|D)) = E(X) \qquad a.s.$$

تعریف ۲.۳.۱. معیاری که بتوان به کمک آن درباره تلاطم اطراف میانگین قضاوت نمود **واریانس** نام دارد و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

تعریف ۳.۳.۱. **کوواریانس** دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y),$$

اگر X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند آن‌گاه $cov(X,Y) = 0$.

تعریف ۴.۳.۱. ضریب همبستگی متغیرهای تصادفی X و Y که با نماد $\rho(X,Y)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{Var(x)}\sqrt{Var(Y)}}.$$

تعریف ۵.۳.۱. متغیر تصادفی z دارای **توزیع نرمال**[۲] است اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد

$$\phi(z) = \frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{۱}{۲}(\frac{z-\mu}{\sigma})^۲},$$

توزیع نرمال با $\mu = ۰$ و $\sigma = ۰$ را **توزیع نرمال استاندارد** می‌نامند.

تعریف ۶.۳.۱. متغیر تصادفی X **توزیع لگ_نرمال**[۳] دارد، هرگاه $Y = ln(X)$ توزیع نرمال داشته باشد، بدیهی است که توزیع لگ نرمال فقط مقادیر حقیقی مثبت را می‌گیرند.

تعریف ۷.۳.۱. متغیر تصادفی X دارای **توزیع نمایی**[۴] با $\lambda > ۰$ است، هرگاه تابع توزیع آن به صورت زیر باشد

$$F_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x > ۰.$$

تعریف ۸.۳.۱. برای متغیر تصادفی X **تابع مولد گشتاور**[۵] به صورت زیر تعریف می‌شود

$$M_X(t) = E[e^{tX}], \quad t \in R.$$

تعریف ۹.۳.۱. تبدیل فوریه[۶] تابع f یک تبدیل انتگرالی به صورت زیر است

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{iux} du,$$

و تبدیل معکوس آن

$$F(u) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iux} dx,$$

که f یک تابع پیوسته و انتگرال‌پذیر است.

تعریف ۱۰.۳.۱. هر خانواده (شمارا یا ناشمارا) از متغیرهای تصادفی، یک **فرآیند تصادفی** نامیده می‌شود. خانواده $\{X_i\}_{i\in I}$ از متغیرهای تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$،

$$X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}),$$

رافرآیندهای تصادفی می‌گوییم که مجموعه اندیس گذار (I) شمارا یا ناشماراباشد.

[۲] Normal distribution
[۳] Log-Normal distribution
[۴] Exponential distribution
[۵] Moment generating function
[۶] Fourier transform

تعریف ۱۱.۳.۱. اگر $\{X_t\}_{t\geq \circ}$ فرآیند تصادفی باشد و قراردهیم

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, \ \circ \leq s \leq t),$$

آن‌گاه به صورت $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq \circ\}$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۱۲.۳.۱. فرض کنید $\mathbb{F}$ یک فیلتر باشد، فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t\geq \circ}$ را نسبت به فیلتر $\mathbb{F}$ **سازگار** گوییم هرگاه برای هر $t \geq \circ$، $X_t \in \mathcal{F}_t$ به عبارتی متغیر تصادفی X_t، $\mathcal{F}_t$ـ اندازه‌پذیر باشد.

تعریف ۱۳.۳.۱. فرآیند تصادفی $\{X_n\}_{n\in Z^+}$ را نسبت به فیلتر $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n\in Z^+}$، **مارتینگل**[۷] گوییم که در خواص زیر صدق کند

۱. $\{X_n\}_{n\in Z^+}$ نسبت به فیلتر $\mathbb{F}$ سازگار باشد یا $\mathcal{F}_n$ اندازه پذیر باشد،

۲. برای هر n، $E(\mid X_n \mid) < \infty$ یعنی X_n انتگرال‌پذیر باشد،

۳. برای هر $n \geq ۱$ داشته باشیم

$$E(X_{n+۱} \mid \mathcal{F}_n) = X_n. \quad a.s.$$

تعریف ۱۴.۳.۱. در هر زمان t، اجرای زودرس[۸] تنها براساس اطلاعاتی است که تا زمان t است، یادآوری می کنیم که $\{\mathcal{F}_t\}$ مجموعه اطلاعات تا زمان t را داراست.
تابع $\tau : \Omega \longrightarrow Z^+ \bigcup\{\infty\}$ را نسبت به فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}$ **زمان توقف** گوییم هر گاه برای هر t داشته باشیم

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

۴.۱ فرآیند لوی

در نظریه احتمال، فرآیند لوی[۹] یکی از مهمترین رده خانواده فرآیندهای تصادفی که در سال ۱۹۳۰ توسط ریاضیدان فرانسوی پل لوی مورد مطالعه قرار گرفته است در دهه‌های اخیرنقش پررنگی را در دنیای ریاضیات مالی ایفا نموده است طی دو دهه گذشته فرآیندهای لوی به ویژه در ارزیابی و قیمت‌گذاری اختیار معامله بسیار مورد توجه قرار گرفتند. فرآیند لوی، فرآیند تصادفی بانموهای مستقل ثابت است، این فرآیند حرکت یک نقطه که جابه‌جایی‌های پی‌درپی آن به صورت تصادفی و مستقل هستند و از نظر آماری در زمان‌های مختلف با طول برابر

[۷] Martingale
[۸] Early Exercise Decision
[۹] Levy proccess

یکسان هستند، در نتیجه یک فرآیند لوی ممکن است به عنوان گام تصادفی زمان پیوسته آنالوگ بررسی شود.
شناخته شده‌ترین نمونه فرآیند لوی، فرآیندهای حرکتی براونی و فرآیندهای پواسون هستند.

تعریف ۱.۴.۱. فرآیند تصادفی X_t **فرآیند لوی** گفته می شود هرگاه داشته باشیم

۱. $P(X_0 = 0) = 1$،

۲. نموهای X_t مستقل هستند یعنی اگر $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$ آن گاه

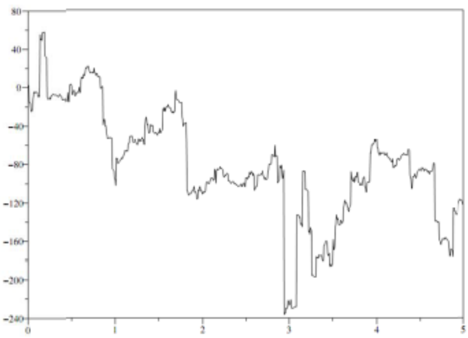
$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}},$$

مستقل هستند،

۳. X_t فرآیندی ایستا است یعنی $X_t - X_s$ با X_{t-s} هم توزیع است،

۴. فرآیند در احتمال پیوسته باشد یعنی

$$\forall \varepsilon > 0 \quad limP(|X_t| > \varepsilon) = 0.$$



شکل ۱.۱: نمودارحاصل از فرآیند لوی

۵.۱ فرآیند پواسون

تعریف ۱.۵.۱. فرآیند تصادفی $\{N(t); \quad t \geq 0\}$ را یک فرآیند شمارشی گوییم، هرگاه $N(t)$ تعداد کل پیشامدهایی باشد که تا زمان t رخ داده‌اند و در شرایط زیر صدق کند

۱. $N(t)$ مقادیر صحیح نامنفی را اختیار می‌کند،

۲. اگر $s \leq t$ آنگاه $N(s) \leq N(t)$،

۳. برای $s < t$ ، $N(t) - N(s)$ برابر تعداد پیشامدهایی است که در فاصله زمانی $(s, t]$ رخ می‌دهند.

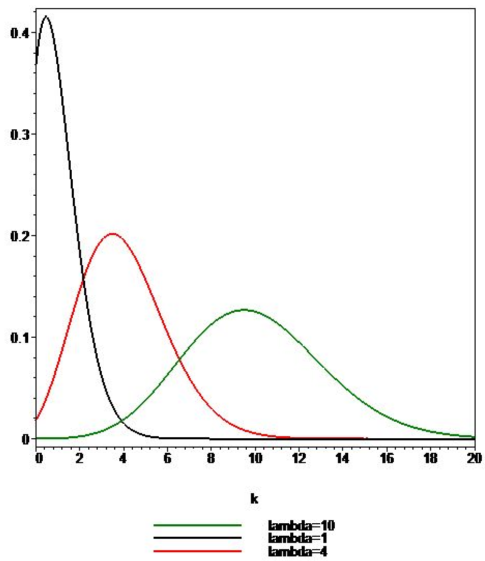
تعریف ۲.۵.۱. به فرآیند شمارشگر $\{N(t); \quad t \geq 0\}$ فرآیند پواسون[10] بانرخ $\lambda > 0$ گفته می‌شود اگر داشته باشیم

۱. $N(0) = 0$،

۲. فرآیند N_t دارای نموهای مستقل باشد یعنی برای هر عدد صحیح $k > 0$ و مقادیر زمانی $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$ متغیرهای تصادفی $N(t_1) - N(t_0), N(t_2) - N(t_1), \ldots, N(t_k) - N(t_{k-1})$ دوبه دواز هم مستقل باشند،

۳. تعداد رویدادهای اتفاق افتاده در بازه زمانی به طول τ به صورت پواسون توزیع شده است ومیانگین $\lambda\tau$دارد و در واقع برای تمام tها

$$Pr\{N(t + \tau) - N(t) = k\} = \frac{e^{-\lambda\tau}(\lambda\tau)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$



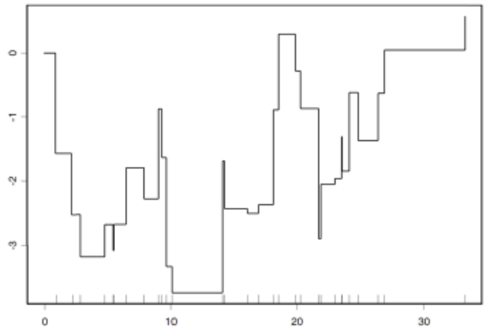
شکل ۲.۱: نمودارحاصل از تابع چگالی احتمال توزیع پواسون

تعریف ۳.۵.۱. **فرآیند پواسون مرکب** با شدت تصادفی $\lambda > 0$ واندازه پرش Y از فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t \geq 0}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$X_t = \sum_{i=1}^{N} Y_i,$$

که اندازه پرش‌های Y_i با توزیع یکسان ومستقل و N_t فرآیند پواسون هستند.

[10] Poisson process



شکل ۳.۱: نمودارحاصل از فرآیند پواسون مرکب با پرش $N(\circ,\text{۱})$

۶.۱ حرکت براونی

حرکت براونی از اساسی‌ترین فرآیندهای تصادفی و سنگ بنای نظریه‌ی احتمال مدرن، آنالیز تصادفی و معادلات دیفرانسیل است.
در سال ۱۸۲۷ رابرت براون (گیاه‌شناس)هنگامی که توسط میکروسکوپ به گرده‌های گیاه معلق در آب نگاه می‌کرد، متوجه حرکت ذرات در آب شد ولی نتوانست توجیهی برای آن پیدا کند، اتم و مولکول بسیار قبل از آن شناخته شده بودند، اما این آلبرت اینشتین بود که چند دهه بعد در مقاله‌ای که در ۱۹۰۵ منتشر کرد توضیح داد که حرکتی که براون مشاهده کرده در نتیجه برخورد مولکول‌های آب با گرده بوده است، جهت نیروی حاصل از برخورد مولکول‌ها مرتباً تغییر می‌کند و ذره در زمان‌های مختلف ممکن است از یک سمت بیشتر مورد اصابت قرار گیرد تا از سمت دیگر که هر دو موجب حرکت اتفاقی ذرات می‌شود، این پدیده به افتخار رابرت براون حرکت براونی نامگذاری شده است. حرکت براونی یک فرآیند تصادفی است که مسیرهای پیوسته دارد و مشتق آن در هیچ نقطه ای وجود ندارد.

تعریف ۱.۶.۱. فرآیند تصادفی $\{W_t\}_{t\geq\circ}$ را **حرکت براونی استاندارد**[۱۱] گوییم هرگاه

۱. $W_\circ=\circ$،

۲. برای $\circ\leq t\leq s$، W_s-W_t دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $s-t$ باشد،

۳. متغیرهای تصادفی $W_{t_n}-W_{t_{n-1}},\dots,W_{t_\text{۲}}-W_{t_\text{۱}}$ برای $\circ\leq t_\text{۱}\leq t_\text{۲}\leq\cdots\leq t_n$، مستقل و هم‌توزیع باشند،

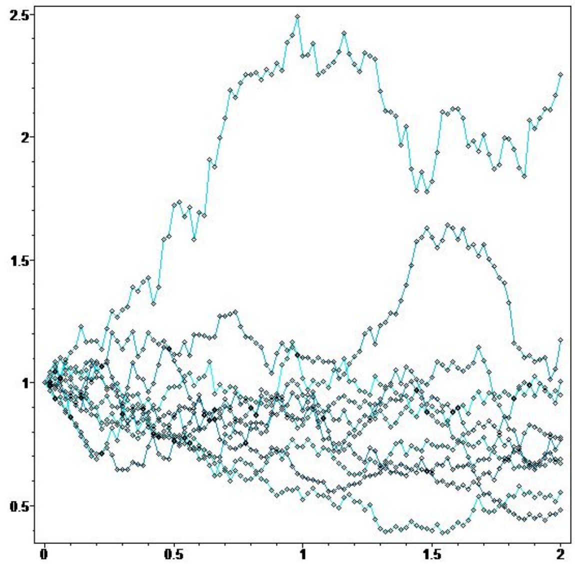
حرکت براونی استاندارد را فرآیند وینر[۱۲] نیز می‌گوییم.

قضیه ۱.۶.۱. اگر $\{W_t\}_{t\geq\circ}$ یک حرکت براونی و $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq\circ}$ فیلتر استاندارد فرآیند براونی باشد آن‌گاه داریم

[۱۱] Standard Brownian motion
[۱۲] Wiener process

۱. برای هر s ، $t \leq s$، $E(W_tW_s) = t$،
۲. $\{W_t\}_{t\geq \circ}$ یک مارتینگل است،
۳. $\{W_t^{۲} - t\}$ مارتینگل است.

برهان. به [۳۲] رجوع شود. □



شکل ۴.۱: نمودار حاصل از حرکت براونی استاندارد

۷.۱ فرآیندهای ایتو

مفهوم انتگرال تصادفی اولین بار درسال ۱۹۳۳ توسط وینر و دیگران برای توابع غیر تصادفی نسبت به حرکت براونی تعریف شد، در سال ۱۹۴۲ ایتو[۱۳]انتگرال تصادفی نسبت به حرکت براونی هندسی را برای فرآیندهای سازگار تعریف کرد[۲۷].
در واقع انتگرال ایتو مشابه با انتگرال ریمان تعریف می‌شود با این تفاوت که انتگرال ایتو نسبت به نموهایی از حرکت براونی متغیرهای تصادفی گرفته می‌شود، در حالی‌که انتگرال ریمان نسبت به تغییرات قابل پیش‌بینی dt محاسبه می‌شود. شایان ذکر است که انتگرال ایتو یک متغیر تصادفی است اما انتگرال ریمان یک مقدار حقیقی را نتیجه می‌دهد، قصد داریم معادله حرکت ذره‌ای که در سطح آب جوی حرکت می‌کند را نسبت به زمان به‌دست آوریم از آن‌جا که مسیر حرکت ذره مورد نظر به دلیل ضرباتی که وزش باد و مولکول‌های آب به آن وارد می‌کنند تصادفی است، معادله آن به صورت زیر خواهد بود،

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)(\text{نوفه}), \qquad (۱.۱)$$

[۱۳] Ito

که در آن σ و b توابع حقیقی داده شده روی $\Omega \times (\circ, \infty)$ هستند و نوفه فرآیند تصادفی مانند W_t است که در سه شرط زیر صدق می‌کند،

- برای هر $t_1, t_2 \in [\circ, T]$ که $t_1 \neq t_2$، W_{t_1} و W_{t_2} مستقل از هم باشند.
- توزیع توام متغیرهای تصادفی $W_{t_1+t}, \ldots, W_{t_n+t}$، $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq T$ به t بستگی نداشته باشد.
- برای هر $t \in (\circ, T]$ ، $E(W_t) = \circ$.

فرآیندی که دارای مسیرهای پیوسته است و به ویژگی‌های بالا نزدیک است فرآیند براونی است

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t,$$

از عبارت بالا داریم

$$X_t = X_\circ + \int_\circ^t b(s, w)ds + \int_\circ^t \sigma(s, w)dW_s.$$

فرآیند تصادفی X_t جواب معادله اخیر است بنابراین برای پیدا کردن فرآیند $\{X_t\}_t$ لازم است به محاسبه انتگرال‌های به فرم زیر بپردازیم

$$\int_s^t f(s, w)dW_s(w),$$

گام اول: فرض کنید که f تابعی ابتدایی[۱۴] $\phi : [\circ, \infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد یعنی

$$\phi(t, w) = X(w)\chi_{(a,b]}(t), \quad a, b \in [\circ, \infty),$$

در این صورت تعریف می‌کنیم

$$\int_a^t \phi(s, w)dW_s = \int_a^t X(w)\chi_{[a,b)}dW_s(w) = X(w)[W_{b\wedge t}(w) - W_{a\wedge t}(w)],$$

که در آن برای هر $x, y \in \mathbb{R}$، $x \wedge y = \min\{x, y\}$.

گام دوم: فرض کنید f تابعی ساده[۱۵] روی $\Omega \times [\circ, \infty)$ باشد. یعنی

$$f = \sum_{j=\circ}^n \phi_i,$$

که ϕ_iها توابع ابتدایی هستند. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$\int_a^t f dW_s = \sum_{j=\circ}^n \int_a^t \phi_i dW_s. \tag{۲.۱}$$

[۱۴] Elementary function
[۱۵] Simple function

تعریف ۱.۷.۱. رده‌ی $\mathcal{P}_2$ از توابع $f(t,w)$ روی مجموعه‌ی $\Omega \times [0,\infty)$، رده‌ای از توابع با ویژگی‌های زیر است

- تابع $(t,w) \longrightarrow f(t,w)$، $\mathcal{B}\times\mathcal{F}$ــ اندازه‌پذیر است،
- به ازای هر t، تابع $f(t,.)$، $\mathcal{F}_t$ــ اندازه‌پذیر باشد،
- برای هر $T \geq 0$، $E\left[\int_0^T f^2(s,w)ds\right] < \infty$.

لم ۱.۷.۱. (لم ایزومتری ایتو) اگر تابع $\phi(t,w)$ کران‌دار و ابتدایی باشد، آن‌گاه

$$E\left[\left(\int_s^T \phi(s,w)dW_s(w)\right)^2\right] = E\left[\int_s^T \phi^2(s,w)ds\right].$$

برهان. به [۲۶] رجوع کنید. □

لم ۲.۷.۱. اگر $f \in \mathcal{P}_2$، آن‌گاه دنباله‌ی $\{\phi_n\}$ از توابع ساده وجود دارد به‌طوری‌که

$$E\left[\int_0^T |\, f(s) - \phi_n(s) \,|^2 \, ds\right] \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

برهان. به [۲۶] رجوع کنید. □

اکنون می‌توان انتگرال ایتو را برای رده توابع $\mathcal{P}_2$ تعریف کرد

$$\int_s^T f(s,w)dW_s(w) = \lim_{n\to\infty}\int_s^T \phi_n dW_s(w),$$

که در آن

$$E\left[\int_s^T |\, f(s) - \phi_n(s) \,|^2 \, ds\right] \to 0.$$

۱.۷.۱ فرمول ایتو

تعریف ۲.۷.۱. فرض کنید $\{W_t\}_{t\geq 0}$ حرکت براونی استاندارد روی $(\Omega,\mathcal{F},P)$ باشد، انتگرال تصادفی یک بعدی، درحقیقت فرآیند تصادفی $\{X_t\}_t$ به فرم زیر است

$$X_t(w) = X_0(w) + \int_0^t u(s,w)\, ds + \int_0^t v(s,w)\, dW_s,$$

که در آن u و v دوتابع حقیقی روی $\Omega \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ هستند.

قضیه ۱.۷.۱. **(فرمول ۱ــ بعدی ایتو)** اگر

$$dX_t = u\, dt + v\, dW_t, \;\; Y_t = g(t,X_t)$$

آن‌گاه

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,X_t)(dX_t)^2,$$

که در این‌جا $dtdt = dtdW_t = dW_tdt = 0$ و $dW_t^2 = dt$.

قضیه ۲.۷.۱. (فرمول چند بعدی ایتو) فرض کنید $dX_t = u\,dt + v\,dW_t$ یک انتگرال nـ بعدی و $g:[0,\infty)\times R^2 \longrightarrow R^2$ یک نگاشت C^2 باشد،آن‌گاه $Y(t,w)=g(t,X_t)$ یک انتگرال تصادفی است و داریم

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X_t)dt + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x_i}(t,X_t)dX_i + \sum_{i,j}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(t,X_t)dX_i dX_j,$$

که در اینجا $dtdt = dtdW_i = dW_i dt = 0$ و $dW_i dW_j = \rho_{ij}dt$.

تعریف ۳.۷.۱. یکی از بلوک های اصلی مدل سازی قیمت سهام، **فرآیند براونی هندسی** [۱۶] است معادله یادشده درحقیقت تعمیم طبیعی معادله دیفرانسیل معمولی است که به فرم زیر می‌باشد

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t, \tag{۳.۱}$$

در واقع می‌توان فرآیند براونی هندسی را معادله دیفرانسیل معمولی با ضرایب تصادفی دانست که جواب آن به فرم زیر است

$$X_t = x_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}. \tag{۴.۱}$$

تعریف ۴.۷.۱. فرآیند وینر kـ بعدی و ناهمبسته $W=(W_1,\dots,W_k)^T$ را در نظر بگیرید فرض کنید برای هر $i=1,2,\dots,n$ داشته باشیم

$$dX_i = \mu_i dt + \sum_{j=1}^{k}\sigma_{ij}dW_j(t),$$

به‌طوری که μ_iـ ها فرآیندهای سازگار و انتگرال‌پذیر و σ_{ij}ـ ها فرآیندهای سازگار و مربع انتگرال‌پذیر می‌باشند و $0 \le t \le T$، قرار دهید $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]^T$ و $\sigma = (\sigma_{ij})_{n\times k}$ در این صورت به جواب معادله دیفرانسیل تصادفی

$$dX_t = \mu(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t.$$

فرآیند انتشار آفین گفته می‌شود هرگاه بردارهای $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$ چنان یافت شود که

$$\mu(t,X_t) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j X_j(t).$$

تعریف ۵.۷.۱. فرآیند انتشار زیر را در نظر بگیرید

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t,$$

که در آن X_t فرآیند تصادفی و W_t حرکت براونی استاندارد است، **تابع مشخصه فرآیندهای آفینی** به صورت زیر است

$$F_X(\phi) = E[e^{i\phi X}].$$

[۱۶] Geometric Brownian motion

قضیه ۳.۷.۱. فرض کنید جواب معادله دیفرانسیل تصادفی (۱.۴) فرآیند انتشارآفین باشد آن‌گاه تابع مشخصه آن نمایی_خطی است یعنی به صورت

$$F(\tau,\phi,X_1,\dots,X_n)=e^{[A(\tau,\phi)+D_1(\tau,\phi)X_1+\cdots+D_n(\tau,\phi)X_n]}, \tag{۵.۱}$$

است که در آن $A(\tau,\phi), D_1(\tau,\phi),\dots,D_n(\tau,\phi)$ توابع معینی بر حسب $\tau=T-t$ و ϕ و می‌باشدو

$$F(0,\phi,X_1,\dots,X_n)=e^{[i\phi X_T]}. \tag{۶.۱}$$

برهان. به [۲۰] رجوع کنید □

قضیه ۴.۷.۱. (**قضیه فاینمن ـ کاک**)[۱۷] فرض کنید فرآیند تصادفی $\{X_s\}_s$ در معادله دیفرانسیلی زیر صدق کند

$$\begin{cases} dX_s=\mu(s,X_s)ds+\sigma(s,X_s)dW_s,\\ X_t=x,\end{cases} \tag{۷.۱}$$

که درآن μ وσتوابعی معلوم هستند. هم چنین معادله دیفرانسیل جزئی زیر

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,X_t)+\mu(t,X_t)\frac{\partial F}{\partial x}(t,X_t)+\frac{1}{2}\sigma^2(t,X_t)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,X_t)=0, \tag{۸.۱}$$

با شرط نهایی زیر را در نظر بگیرید

$$F(t,X)=\phi(X),$$

که ϕ توابعی معلوم و T یک پارامتر و F تابع مجهول است قضیه فاینمن_کاک بیان می‌کند که جواب معادله دیفرانسیلی (۸.۱) به فرم زیر است

$$F(t,X)=E(\phi(X_T)|X(t)=x). \tag{۹.۱}$$

برهان. به [۳۲]رجوع کنید. □

قضیه ۵.۷.۱. (**قضیه گیرسانوف یک بعدی** [۱۸]) فرض کنید $W(t)$ برای هر $(0\le t\le T)$ فرآیند براونی روی فضای احتمال $(\Omega,\mathcal{F}_t,P)$ باشد، همچنین فرض کنید $\theta(t)$ فرآیند سازگار تحت فیلتر $\mathcal{F}_t$ باشد. تعریف می‌کنیم

$$\tilde{W}(t)=\int_0^t\theta(u)du+W(t),$$

$$Z(t)=\exp\{-\int_0^t\theta(u)dW(u)-\frac{1}{2}\int_0^t\theta^2(u)du\},$$

[۱۷] Feynman-Kak theorem
[۱۸] Girsanov theorem

و یک اندازه احتمال جدید به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$P(A) = \int_A Z(T)dP, \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

در این‌صورت $\tilde{W}(t)$ تحت اندازه احتمال P فرآیند براونی است.

برهان. به [۳۲]رجوع کنید □

قضیه ۶.۷.۱. (قضیه گیرسانوف dــ بعدی) فرض کنید $W_{(t)} = (W_1(t), \dots, W_d(t))$ برای $0 \leq t \leq T$ فرآیند براونی dــ بعدی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ باشد و هم‌چنین فرض کنید $\theta(t) = (\theta_1(t), \dots, \theta_d(t))$ فرآیند سازگار dــ بعدی روی فیلتر $\mathcal{F}_t$ باشد حال تعریف کنید

$$\tilde{W}_j(t) = \int_0^t \theta_j(u)du + W_j(t) \qquad j = 1, 2, \dots, d$$

$$Z(t) = exp\{-\int_0^t \theta(u)dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t ||\theta(u)||^2 du\}, \tag{1.10}$$

و یک اندازه احتمال جدید به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\tilde{P}(A) = \int_A Z(T)dP, \qquad \forall A \in \mathcal{F}.$$

در این‌صورت فرآیند $\tilde{W}(t) = \tilde{W}_1(t), \dots, \tilde{W}_d(t)$ تحت اندازه احتمال P فرآیند براونی dــ بعدی اسن.

برهان. به [۳۲] رجوع کنید □

۸.۱ مفاهیم ریاضی مالی

۱.۸.۱ سبد سهام

تعریف ۱.۸.۱. زوج مرتب (α, θ) که درآن α تعداد دارایی بدون ریسک و θ تعداد دارایی ریسکی باشد را یک سبد سهام می‌نامیم. سبد سهام یا پرتفوی[۱۹] ترکیبی مناسب از سهام یا سایر دارایی‌ها است، که یک سرمایه‌گذار آنها را خریداری کرده است. هدف از تشکیل سبد سهام، تقسیم‌کردن ریسک سرمایه‌گذاری بین چند سهم است، بدین ترتیب سود یک سهم می‌تواند ضرر سهام دیگر را جبران کند.

تعریف ۲.۸.۱. یک ادعای مشروط[۲۰] با زمان سر رسید T، یک متغیر تصادفی $X \in \mathcal{F}_T$ است، دارنده این ادعا در $t = T$ مقدار تصادفی X را دریافت می کند.

[۱۹] Portfolio
[۲۰] Contingent claim

فرض کنید S_T فرآیند قیمت دارایی پایه باشد، ادعای مشروط X یک ادعای ساده[۲۱] نامیده می‌شود هرگاه به صورت $X = \phi(S_T)$ باشد ϕ تابع قرار داد[۲۲] نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۸.۳. اندازه احتمال $\mathbb{Q}$ را یک **اندازه مارتینگل** معادل با اندازه P گوییم اگر

۱. P و $\mathbb{Q}$ معادل باشند،

$$P(A) = 1 \Longleftrightarrow \mathbb{Q}(A) = 1,$$

$$P(A) = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{Q}(A) = 0.$$

۲. اگر فرآیند قیمت به صورت $S_t = [S_t^0, \dots, S_t^N]$ باشد فرآیند قیمت نرمال شده زیر تحت $\mathbb{Q}$ مارتینگل است اگر

$$Z_t^i = \frac{S_t^i}{S_t^0}.$$

تعریف ۱.۸.۴. یک سبد پرتفوی را **خود تامین**[۲۳] گوییم اگر تزریق خارجی و برداشت پول نداشته باشد

$$x_t(1+r) + y_t S_{t+1} = x_{t+1}(1+r) + y_{t+1} S_{t+1}.$$

تعریف ۱.۸.۵. پرتفوی $h = (x, y)$ را استراژی سبد می‌گوییم هرگاه ارزش سبد ما در لحظه t برای پرتفوی h به فرم زیر باشد

$$V_t^h = x_t(1+r) + y_t S_t,$$

که S_t فرآیند قیمت هر سهم در زمان t و $(1+r)$ فرآیند دارایی بدون ریسک(فرآیند قیمت ورق قرضه)در زمان t است. منظور از استراتژی سبد خودتامین، سبدی است که در آن سرمایه‌گذاری‌ها منحصر به خرید سهام و اوراق قرضه و درآمدها ناشی از فروش سهام و اوراق قرضه می‌باشد.

تعریف ۱.۸.۶. ادعای مشروط X را قابل بازسازی گوییم اگر سبد مالی خود تامین h وجود داشته باشد به‌طوری‌که $V_t^h = X$، در این صورت سبد h **بازسازی کننده یا سبد پوشش دهنده** نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۸.۷. **بازار کامل**، بازاری است که درآن هر ادعای مشروط، قابل بازسازی به وسیله یک سبد باشد در یک بازار کامل اندازه مارتینگل معادل یکتاست.

تعریف ۱.۸.۸. **اندازه ریسک خنثی**[۲۴]، یک اندازه احتمال معادل اندازه بازار است که فرآیندهای قیمت تنزیل شده $D_t = e^{-\int_0^t r(s)ds} S_t$ تحت آن مارتینگل است.

[۲۱] Simple Contingent claim
[۲۲] Contract function
[۲۳] Self financing
[۲۴] risk neutral measure

تعریف ۹.۸.۱. قیمت گذاری ریسک خنثی ، قیمت هر ادعای مشروط X تحت اندازه مارتینگل $\mathbb{Q}$، در بازار مالی با فضای احتمالی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ به فرم زیر است

$$F(t, X) = e^{-r(T-t)} E^{\mathbb{Q}}[X|\mathcal{F}_t],$$

که در آن r نرخ بهره بدون ریسک می‌باشد.

تعریف ۱۰.۸.۱. نرخ بهره بدون ریسک [۲۵]، نرخی است که بابت جلوگیری از کاهش ارزش پول پرداختی در امروز و دریافتی در آینده به دلیل ارزش زمانی پول و نرخ تورم از وام گیرنده دریافت می شود، نرخ بهره در واقع هزینه‌ای است که برای دریافت اعتبار بپردازید نرخ بهره درصد پاداش پرداختن بر روی پول، بر حسب پول در تاریخ معین که معمولا یک سال بعد از تاریخ معین است می‌باشد.

تعریف ۱۱.۸.۱. نرخ سود نقدی[۲۶]، مقدار کل مورد انتظار از سود سهام پرداخت از صندوق سرمایه‌گذاری بسته به تنظیمات و استراتژی شرکت، نرخ سود سهام می‌تواند ثابت یا قابل تنظیم باشد.

تعریف ۱۲.۸.۱. بازگشت به میانگین [۲۷]، خاصیتی است که طبق آن یک فرآیند به بی‌نهایت میل نمی‌کند و حول یک میانگین بلندمدت خوش تعریف نوسان می‌کند، چنین فرآیندی به شکل زیر است

$$dy_t = \lambda(\gamma - y_t)dt + \sigma_y f_y(y_t)dW_t,$$

که σ_y تلاطم، f یک تابع خوش تعریف، W_t فرآیند براونی نظیر y_t و γ میانگین بلندمدت y_t را نشان می‌دهند و λ نرخ بازگشت به میانگین نامیده می‌شود. درامور مالی بازگشت به میانگین بر این فرض است که قیمت یک سهم تمایل دارد در طول زمان به قیمت متوسط برود.

۲.۸.۱ اختیارمعامله

اختیار معامله[۲۸] قراردادي است بین خریدار و فروشنده، بنحو ی که خریدار از فروشنده اختیار معامله ، حق خرید یا فروش یک دارایی را در یک قیمت معین ودر یک زمان مشخص خریداري می‌کند. در اینجا نیز همانند تمام قراردادها، هر طرف امتیازي را به طرف مقابل اعطاء می کند، خریدار به فروشنده مبلغی تحت عنوان حق شرط پرداخت می‌کند که در واقع همان قیمت اختیار معامله می‌باشد. فروشنده نیز حق خرید یا فروش دارایی مذکور را در یک قیمت معین به خریدار اعطاء می‌نماید. اختیاري که براي خرید یک دارایی داده می‌شود را اختیار خرید[۲۹]

[۲۵] Interest rate
[۲۶] Dividend rate
[۲۷] Mean reversion
[۲۸] Option
[۲۹] Call Option

و اختیاري که براي فروش یک دارایی داده می‌شود را اختیار فروش [۳۰] گویند. قیمت تعیین شده‌اي را که خریدار می‌تواند دارایی را خریداري نموده یا بفروشد، قیمت اعمال یا قیمت توافقی[۳۱] نامیده می‌شود به علاوه اختیار معامله مدت معینی دارد، حق خرید یا فروش دارایی در یک قیمت معین فقط تا تاریخ انقضایی [۳۲] که قبلا مشخص شده است امکان خواهد داشت.

تعریف ۱۳.۸.۱. اختیار معامله اروپایی قرار دادی است که به دارنده‌اش این اختیار و نه اجبار را می‌دهد تا قرار دادی درست در زمان T به قیمت K بخرد یا بفروشد.

تعریف ۱۴.۸.۱. اختیار معامله آمریکایی قراردادی است که به دارنده‌اش این اختیار ونه اجبار را می‌دهد تا قراردادی را در هر زمان تا رسیدن به زمان T به قیمت K بخرد یا بفروشد.

اگر K قیمت توافقی و S_T قیمت دارایی در لحظه T باشد، به طور کلی چهار موقعیت برای یک اختیار معامله اروپایی وجود دارد

۱. موقعیت خرید در قرارداد اختیار خرید

$$max\{S_T - K, \circ\} = [S_T - K]^+$$

۲. موقعیت فروش در قرارداد اختیار خرید

$$-max\{S_T - K, \circ\} = min\{K - S_T, \circ\}$$

۳. موقعیت خرید در قرارداد اختیار فروش

$$max\{K - S_T, \circ\} = [K - S_T]^+$$

۴. موقعیت فروش در قرارداد اختیار فروش

$$-max\{K - S_T, \circ\} = min\{S_T - K, \circ\}$$

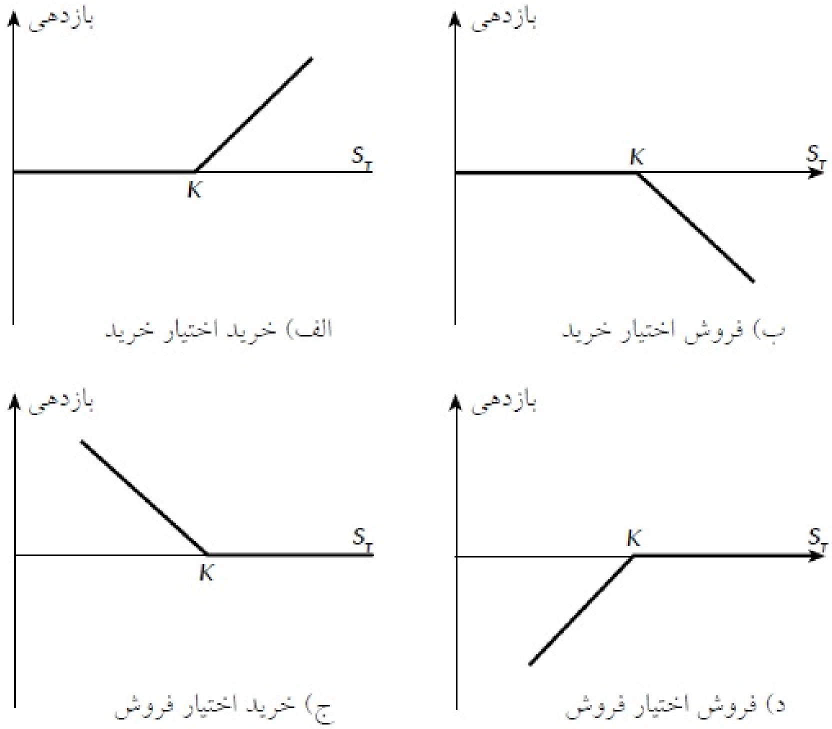
نمودارهای شکل ۵.۱ این حالات را به خوبی نشان می‌دهند.

تعریف ۱۵.۸.۱. (رابطه برابری اختیار فروش و اختیار خرید [۳۳])

$$C + Ke^{-rT} = P + S_\circ$$

[۳۰] Put Option
[۳۱] Strike price
[۳۲] Expiration price
[۳۳] Put-Call parity

رابطه فوق را رابطه برابری اختیار فروش و اختیار خرید برای اختیار معامله استاندارد گوییم، رابطه فوق نشان می‌دهد که می‌توان قیمت یک اختیار خرید اروپایی با قیمت توافقی و سررسید معین را از قیمت یک اختیار فروش اروپایی با همان قیمت توافقی و همان سررسید به‌دست آورد و برعکس.



شکل ۵.۱: نمودار حاصل از خرید یا فروش اختیار معامله اروپایی

آشنایی با شاخص

یکی از مهم‌ترین معیارهای ارزیابی عملکرد سرمایه‌گذاری در بورس و حتی سرمایه‌گذاری غیر مالی، شاخص‌های بورس است. **شاخص سهام** یک شاخص معیار آماری است که تغییر حرکت و جهت اقتصاد یک بازار سهام را نشان می‌دهد هر شاخص دارای روش محاسباتی خاصی است که معمولا بر حسب تغییر از ارزش مبنا بیان می‌شود در هر بازار بورس اوراق بهادار می‌توان بنا بر احتیاج و کارایی شاخص‌های زیادی را تعریف و محاسبه نمود.

شاخص $S\&P$

شاخص قیمت سهام استاندارد اند پور[۳۴] یکی از شناخته‌ترین شاخص‌هاست شاخص $S\&P$ یک شاخص مرتبط باسرمایه گذاری است که از سال ۱۹۵۷ شروع به کار کرده است شاخص $S\&P$

[۳۴] Standard & Poor

از میانگین وزنی ۵۰۰ سهام شرکت‌های بزرگ به دست می‌آید پس از میانگین صنعتی داو جونز، شاخص $S\&P$ بزرگترین شاخص سهام آمریکا است. این شاخص به عنوان یکی ازبزرگ ترین شاخص‌ها در اقتصاد آمریکا محسوب می‌شود در مقوله شاخص‌های تاثیرگذار اقتصاد جای داده می‌شود بسیاری از صندوق‌های مشترک سرمایه‌گذاری صندوق‌های تبادل ارز و دیگر صندوق‌ها هم‌چون صندوق باز نشستگی بسیار تحت تاثیر عملکرد شاخص هستند.

۳.۸.۱ انواع معامله‌گران

عملکرد بازارهای آتی و پیمان‌های آتی و اختیار معاملات، به طور قابل توجهی موفقیت‌آمیز بوده است. مهم‌ترین دلیل آن، توانایی این بازارها برای جذب تعداد کثیری از انواع معامله‌گران و ایجاد قابلیت نقدینگی فراوان برای انجام مبادلات است، به طوری که چنانچه سرمایه‌گذاری بخواهد یک موقعیت معاملاتی را اتخاذ کند، معمولاً مشکلی در یافتن طرف دوم قرارداد ندارد، سه گروه عمده معامله‌گران را می‌توان پوشش‌دهندگان ریسک، سفته‌بازان و آربیتراژگران در نظر گرفت.

پوشش دهندگان ریسک

پوشش دهندگان ریسک[۳۵] با استفاده از قراردادهای آتی، پیمان های آتی و اختیار معاملات به دنبال کاهش ریسکی هستند، که از حرکت بالقوه ی آتی در یک متغیر ناشی می‌شود.(هزینه یا قیمت دریافتی بابت دارایی پایه، تضمین می‌شود ولی این که نتیجه‌ی ناشی از پوشش ریسک بهتر از حالت عدم پوشش ریسک باشد، هیچ اطمینانی وجودندارد).

سفته‌بازان

سفته بازان یا سوداگران[۳۶] از پیش بینی، جهت حرکت آتی قیمت در یک متغیر بازار استفاده می‌کنند.(سفته بازان به استقبال ریسک می‌روند و موقعیت‌هایی را متناسب با نوع پیش‌بینی خود درباره‌ی تغییر قیمت‌ها، کسب می‌کنند)

آربیتراژگران

آربیتراژگران[۳۷] با اتخاذ موقعیت‌های متناسب در دو یا چند بازار مختلف به دنبال کسب سود بدون ریسک هستند. می‌گوییم بازارفرصت آربیتراژدارد اگر

[۳۵] To hedge a risk
[۳۶] Speculation
[۳۷] Arbitrage

۱. $V_\circ^h = \circ$،

۲. $P(V_T^h > \circ) = ۱$،

۳. $P(V_T^h > \circ) > \circ$.

بنابراین در صورت وجود آربیتراژ گوییم سبدی خودتامین که اجازه کسب سود بدون ریسک را بدهد وجود نداشته باشد.

قضیه ۱.۸.۱. (قضیه اساسی اول قیمت‌گذاری) بازار تعریف شده با فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و فرآیند قیمت $\{S_t\}_{t\geq\circ}$ را در نظر می‌گیریم در این صورت بازار کامل است(یعنی بازار فاقد آربیتراژ) است اگر و تنها اگر اندازه مارتینگلی $\mathbb{Q}$ وجود داشته باشد که S تحت $\mathbb{Q}$ مارتینگل باشد.

برهان. به [۳۲] رجوع کنید. □

این قضیه ارتباط بین بازار بدون آربیتراژ و وجود اندازه مارتینگلی را بیان می‌کند.

قضیه ۲.۸.۱. (قضیه اساسی دوم قیمت‌گذاری) بازار کامل است اگر و تنها اگر اندازه مارتینگلی یکتا باشد.

برهان. به [۳۲] رجوع کنید.

□

فصل ۲

قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت مدل بلک شولز با پرش_ انتشار

۱.۲ مقدمه

ارزش‌گذاری اختیار معامله مبحث گسترده‌ای است که در ادبیات مالی مطرح می‌شود این مبحث که به نظریه قیمت‌گذاری اختیار معامله موسوم است توجه متخصصان زیادی را به خود جلب کرده است که از بین آن ها فیشربلک[۱] و میرن شولز[۲] درسال ۱۹۷۰ برای حل مساله قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی راهبرد نوینی را پیشنهاد کردند که مبتنی بر تشکیل سبدی خود تامین در یک فضای بدون آربیتراژ بود آن‌ها نشان دادند که اگر فردی در یک بازار کامل به جای خرید یک اختیار، با پولی یکسان سهام و ورقه قرضه بخرد می‌تواند در سررسید، سودی مشابه با اعمال این اختیار را کسب کند.

برای انجام این کار آن‌ها قیمت سهام را با کمک یک فرآیند وینر هندسی مدل‌سازی کردند و با پوشش کامل سبد و حذف عامل‌های نوسانپذیر توانستند مدل بلک شولز را پیشنهاد بدهند این مدل توانست دنیای قیمت‌گذاری مشتقات مالی را که دارایی پایه آن‌ها سهام بود متحول کند پس از آن این امکان به وجود آمد که مشتقات مالی را با استفاده از فرم بسته قیمت‌گذاری

[۱] Black

[۲] Scholes

کنیم ثابت بودن تلاطم از فرضیات اصلی مدل بلک شولز و در واقع یکی از معایب اصلی آن محسوب می‌شود زیرا تحلیل رفتار قیمت سهام نشان می‌دهد تلاطم با گذشت زمان به طور تصادفی تغییر می‌کند این امر موجب شده که امروزه این مدل تنها به عنوان پایه‌ای برای بیان سایر مدل‌ها مورد استفاده قرار گیرد [۹].
با این وجود قیمت دارایی‌های پایه در بازار مالی دست خوش تغییرات ناگهانی ناشی از عوامل گوناگون هستند که روند استاندارد قیمت‌گذاری‌ها این نوسانات را پوشش نمی‌دهد، برای حل این مساله مدل‌های زیادی مطرح شدند از جمله این مدل‌ها مدل مرتون[۳] درسال ۱۹۷۶ بود در مدل مرتون فرآیند دینامیک قیمت علاوه بر انتشار دارایی، فرآیند پواسون به همراه پرش‌هایی با توزیع لگ_نرمال است در واقع اشاره کرد که شواهد تجربی مدل‌هایی با مسیر پیوسته را تایید نمی‌کند لذا با افزودن مولفه پرش به حرکت براونی هندسی فرآیند پرش_انتشار به ادبیات قیمت گذاری اختیار معرفی نمود به همین دلیل فرآیند پرش_انتشار را به عنوان ترکیبی از فرآیند پرش و فرآیند انتشار تعریف می‌کنند این فرآیندها علاوه بر مولفه براونی دارای ناپیوستگی‌های پرش هستند وبه علاوه در هر بازه زمانی متناهی، تعداد متناهی پرش دارند [۲۳]،[۸]، [۲۵].
تلاش‌های زیادی برای توسعه‌ی مدل بلک شولز و مرتون صورت گرفته است دو روش کلاسیک برای توسعه مدل‌های قیمت‌گذاری اختیارات وجود دارد که قادرند به درستی تلاطم و عدم توازن سرمایه را در بازار معاملات اختیارات منعکس کنند، روش اول اضافه کردن پرش‌ها به فرآیند قیمت برای دارایی پایه است که توسط مرتون پیشنهاد شد و در این فصل توضیح داده شده است، روش دوم تلاطم به صورت تصادفی انتخاب گردد که این مدل اولین بار توسط هستون ارائه شد که در فصل بعد توضیح خواهیم داد. بتا[۴][۸] مدل تلفیقی از ویژگی‌های نوسانات تصادفی و پرش_انتشارارائه داد، اسکات[۵][۳۰] مدلی مشابه به مدل بتا پیشنهاد داد با این تفاوت که در مدل خود نرخ بهره را تصادفی در نظر گرفت.

۲.۲ قیمت گذاری اختیار معامله تحت مدل پرش_ انتشار

در مدل‌های تک عاملی مانند مدل بلک شولز برای به دست آوردن فرمول قیمت‌گذاری اختیار اروپایی از استراتژی دلتا پوشش استفاده می‌کنند و در انتها این راهبرد باعث تشکیل سبدی بدون آربیتراژ به یک معادله دیفرانسیل جزئی می‌انجامد در مدل‌های دوعاملی مانند

[۳] Merton
[۴] Bates
[۵] Scott

مدل هستون ومدل هستون مضاعف ومدل پرش نمایی مضاعف برای به دست آوردن فرمول قیمت‌گذاری، از تابع مشخصه و تبدیل فوریه سریع که در فصل سوم وچهارم به تفصیل توضیح داده خواهد شد استفاده می‌شود.
در مدل‌های پرش_انتشار فرآیند لگ_قیمت دارایی شامل بخش انتشاری و بخش پرشی‌است که در زمان‌های پواسون اتفاق می‌افتد لذا در این فصل در نظر داریم مدل قیمت اختیار بلک شولز را به‌دست آوریم که دارایی پایه آن از دو بخش انتشار و پرش تشکیل شده است نظر به اینکه در حالت کلی فرآیند تغییر قیمت سهام انتشاری نبوده و در بعضی از حالات دارای جهش‌های بزرگ می‌باشد هم‌چنین در اکثر مواقع لگ بازده سهام به صورت نرمال نیست لذا مدل فرآیند براونی هندسی نمی‌تواند تصویر واقعی از مدل دارایی پایه داشته باشد بنابراین از مدل جایگزین برای دارایی پایه استفاده می‌کنیم از مزایای استفاده از روش پرش_انتشار اول اینکه مدل قادر است خصوصیات مشاهده شده مهمی چون چولگی یا لبخند تلاطم را نشان دهد دوم اینکه فرآیند پرش می‌تواند ناکامی بازار مالی را توضیح دهد به این معنا که بازار واقعی در زمان کوتاهی به منظور جلوگیری از زیان واکنش نشان دهد در نهایت اینکه رویدادهای پیش‌بینی در بازار مالی نقش مهمی در تحقیقات مالی بازی می‌کنند و استفاده از یک فرآیند پرش برای مدل‌سازی حوادث مناسب باشد.

تعریف ۲.۲.۱. فرآیند پرش_انتشار مجموع مدل بلک شولز و مولفه پرش است که در حالت کلی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$X_t = \mu t + \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

که دو جمله اول بیانگر پیوستگی و جمله $\sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ بیانگر ناپیوستگی (پرش)، و در آن N_t دارای توزیع پواسون باشدت λ است.

فرض کنید فرآیند قیمت دارایی پایه سهام از مدل بلک شولز پیروی می‌کند

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t \tag{2.1}$$

که در آن r نرخ بهره بدون ریسک، S_t دارایی پایه، V_t واریانس فرآیند و W_t حرکت براونی هندسی است. فرض کنید یک پرش در بازه زمانی $[t, t+dt]$ با احتمال λdt رخ داده شده باشد اندازه پرش‌ها مستقل از بازه زمانی ولی احتمال پرش رخ داده شده وابسه به زمان است به‌طوری‌که ارزش جدید دارایی پایه به میزان J تا تغییر می‌کند.(J میزان پرش)
که در آن Jها دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس γ^2 باشد بنابراین e^J دارای توزیع لگ_نرمال خواهد بود [28]. تغییرات ناشی از پرش برای قیمت دارایی به صورت $dS_J = (J-1)S_{J\_}dN_t$ است لذا اگر یک پرش رخ دهد داریم

$$S_{J_+} = S_{J_-} + dS_J = S_{J_-} + (J-1)S_{J_-} = JS_{J_-},$$

که در آن S_{J_-} قیمت دارایی قبل از پرش، S_{J_+} قیمت دارایی بعد از پرش است.
بنابراین قیمت دارایی ترکیبی از انتشار و پرش به فرم زیر است

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t + (J-1)S_{J_-} dN_t. \tag{۲.۲}$$

حال مدل بلک شولز را برای فرآیند قیمت دارایی پایه به همراه فرآیند پواسون مرکب به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t + (J-1)S_{J_-} dN_t - E\{(J-1)S_t dN_t\} \tag{۳.۲}$$

از طرفی چون Jها هم توزیع و مستقل هستند، dN_t توزیع پواسون با شدت تصادفی λ،

$$E\{(J-1)S_t dN_t\} = E(J-1)E(dN_t)S_t = m\lambda S_t dt, \tag{۴.۲}$$

که در آن

$$m = E(J-1) = e^{\mu + \frac{1}{2}\gamma^2} - 1,$$

$$E(dN_t) = 1 \cdot \lambda dt + 0.(1 - \lambda d\lambda dt) = \lambda dt,$$

بنابراین باجای‌گذاری رابطه (۴.۲) دررابطه (۳.۲) داریم

$$dS_t = \underbrace{(r - \lambda m)S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t}_{dS_W} + \underbrace{(J-1)S_{J_-} dN_t}_{dS_J} = dS_W + dS_J, \tag{۵.۲}$$

که dS_W جمله براونی بلک شولز و dS_J جمله پرش است، فرض کنید $g(J)$ تابع چگالی اندازه پرش باشد لذا احتمال یک پرش در بازه$[t, t+dt]$، برای تابع چگالی $g(J)dJ$ به فرم زیر است

$$E(f) = \int_0^{+\infty} f(J)g(J)dJ. \tag{۶.۲}$$

فرض کنید سبدی داریم که از یک اختیار خرید اروپایی C و Δ دارایی پایه که قیمت آن از مدل ذکر شده تبعیت می‌کند، ارزش این پرتفوی به فرم زیر است

$$\Pi = C - \Delta S_t,$$

و تغییرات ارزش این پرتفوی برابر است با

$$d\Pi = d\Pi_W + d\Pi_J, \tag{۷.۲}$$

که در آن $d\Pi_W$ تغییرات ارزش پرتفوی به ازای دارایی پایه مدل بلک شولز و $d\Pi_J$ به ازای تغییرات ارزش پرتفوی پرش.

در این صورت بنا به لم ایتو [۶] داریم

$$
\begin{aligned}
d\Pi_W &= dC_W - \Delta dS_W \\
&= [\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S_t}(r-\lambda m)S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}V_t S_t^2]dt + \frac{\partial C}{\partial S_t}\sqrt{V_t}S_t dW_t \\
&- \Delta[(r-\lambda m)S_t dt + \sqrt{V_t}S_t dW_t^{(1)}] \\
&= [\frac{\partial C}{dt} + [\frac{\partial C}{\partial S_t} - \Delta](r-\lambda m)S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}V_t S_t^2]dt + [\frac{\partial C}{\partial S_t} - \Delta]\sqrt{V_t}S_t dW_t^{(1)},
\end{aligned} \tag{۸.۲}
$$

برای حذف جمله تصادفی در پرتفوی مورد نظر می‌توان $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$ را فرض کرد که چنین فرضی در بازارهای کامل(فاقد آربیتراژ) امکان پذیر است لذا با این فرض خواهیم داشت

$$
d\Pi_W = [\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}V_t S_t^2]dt, \tag{۹.۲}
$$

با توجه به متناهی بودن اندازه پرش داریم

$$
\begin{aligned}
d\Pi_J &= dC_J - \Delta dS_J \\
&= [C(JS,t) - C(S,t)]dN_t^c - \Delta(J-1)S_t dN_t^c,
\end{aligned} \tag{۱۰.۲}
$$

با جای‌گذاری (۹.۲) و (۱۰.۲) در (۷.۲) داریم

$$
d\Pi = [\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}V_t S_t^2]dt + [C(JS,t) - C(S,t)]dN_t^c - \Delta(J-1)S_t dN_t^c, \tag{۱۱.۲}
$$

dN_t^c جز تصادفی است و پیوسته نیست و به همین دلیل تغییرات ارزش سبد را نمی‌توان پوشش داد لذا با امید گرفتن از (۱۱.۲) جز تصادفی dN_t^c را حذف می‌کنیم

$$
\begin{aligned}
E[d\Pi] = E[\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}V_t S_t^2]E[dt] + E[C(JS,t) - C(S,t)]E[dN_t^c] \\
-E[\frac{\partial C}{\partial S_t}]E[(J-1)]S_t E[dN_t^c],
\end{aligned} \tag{۱۲.۲}
$$

فرض کرده‌ایم که احتمال اندازه‌های پرش مستقل هستند قرار می‌دهیم $E(J-1) = m$ داریم

$$
E[d\Pi] = [\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}V_t S_t^2]dt + E[C(JS,t) - C(S,t)]\lambda dt - \frac{\partial C}{\partial S_t}mS_t\lambda dt, \tag{۱۳.۲}
$$

پرش‌های این‌گونه سبدها ناهمبسته و واریانس آن را کوچک در نظر می‌گیریم بنابراین بازده مورد انتظار

$$
E[d\Pi] = f\Pi dt = f(C - \Delta S_t)dt = fCdt - f\frac{\partial C}{\partial S_t}S_t dt,
$$

لذا رابطه (۱۲.۲) به‌صورت زیر درمی‌آید

$$
fCdt - f\frac{\partial C}{\partial S_t}S_t dt = [\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}V_t S_t^2]dt + E[C(JS,t) - C(S,t)]\lambda dt - \frac{\partial C}{\partial S_t}mS_t\lambda dt, \tag{۱۴.۲}
$$

[۶] Lemma Ito

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}V_tS_t^2+E[C(JS,t)]\lambda+\frac{\partial C}{\partial t}S_t(f-m\lambda)-C(S,t)(\lambda+f)=0, \qquad (۱۵.۲)$$

با توجه به معادله (۶.۲) داریم

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2}V_tS_t^2+\frac{\partial C}{\partial t}S_t(f-m\lambda)-C(S,t)(\lambda+f)+\int_0^{+\infty}C(JS,t)\lambda g(J)d_J=0, \qquad (۱۶.۲)$$

معادله (۱۶.۲) رایک معادله دیفرانسیل_انتگرال جزئی تحت مدل پرش_انتشار گوییم.
کاربرد این مدل در بازارهاي مالی به این صورت است که علاوه بر تخمین نوسانات بازار، پرش‌هاي بزرگ نیز اندازه‌گیري می‌شود. محققین ریاضیات کاربردي می‌توانند روش‌هاي پیشرفته‌ی ریاضی براي حل این مدل ارائه دهند تا برخی از ناکامی‌هاي روش‌هاي پیشین از جمله دقت همگرایی، بدخیمی و غیره رفع شوند [۵]، [۱۵].

فصل ۳

قیمت‌گذاری اختیار معامله دوتایی با استفاده از روش تبدیل فوریه سریع

۱.۳ مقدمه

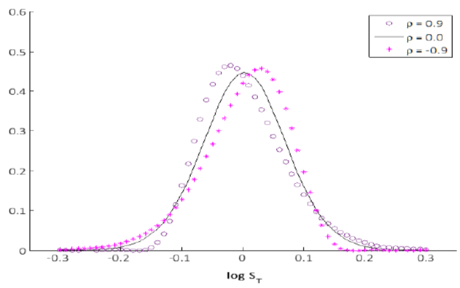
در این فصل ابتدا فرآیند قیمت دارایی پایه در مدل هستون که از معادله دیفرانسیل تصادفی پیروی می‌کند را بررسی می‌کنیم در حقیقت با استفاده از روش تبدیل فوریه سریع فرمولی برای قیمت گذاری اختیار معامله دوتایی[۱] که بازده آن روی قیمت دارایی اولیه است سپس با شبیه سازی مونت کارلو روشی برای قیمت‌گذاری اختیار معامله دوتایی به دست می‌آوریم.

۲.۳ مدل هستون

الگوهای تلاطم مشاهده شده در قیمت‌های اختیار معامله مبادله شده در بازار گواه از تصادفی بودن تلاطم دارند بعد از مدل بلک شولز برای رهایی از این نقص‌ها مدل‌هایی برای دینامیک تلاطم ارائه دادند از جمله هال‌ـ‌وایت[۲][۱۸] در سال ۱۹۸۷، استین[۳][۳۱] در سال ۱۹۹۱و

[۱] binary
[۲] Hull-White
[۳] Stein

هستون[۴][۱۶] درسال ۱۹۹۳ ارائه دادند.
در بین این مدل‌های تلاطم تصادفی، مدل هستون یکی از معروف‌ترین مدل تلاطم تصادفی است در این مدل نوسانپذیری از یک معادله دیفرانسیل تصادفی تبعیت می‌کند در مدل هستون تلاطم قیمت سهام ثابت نبوده و خود از یک فرآیند تصادفی تبعیت می‌کند در این مدل تلاطم و مدل دارایی پایه هر کدام شامل یک فرآیند انتشار هستند که با یک‌دیگر همبسته‌اند از دیگر مزایای مدل هستون فرآیند بازگشت به میانگین تعریف شده در این مدل است که رفتار بازگشت به میانگین تلاطم‌ها را دربازار مالی توجیه می‌کند و هم‌چنین ویژگی چولگی و کشیدگی بازدهی‌های سهام وتلاطم را در بردارد ودارا بودن جواب با فرم بسته، برای اختیار معامله اروپایی از دیگر مزایای مدل هستون است.
برای نمونه هستون نشان داد که پارامتر ρ روی سنگین دم‌های توزیع اثر می‌گذارد به این شیوه که اگر $\rho > ۰$ با افزایش تلاطم، قیمت دارایی پایه افزایش می‌یابد و در نتیجه دم سمت راست توزیع کشیده‌تر می‌شود در این حالت توزیع دارای چولگی به سمت راست می‌شود، و زمانی که $\rho < ۰$ با افزایش تلاطم، قیمت دارایی پایه کاهش می‌یابد بنابراین دم سمت چپ توزیع کشیده‌تر و دم سمت چپ فشرده می‌شود در این حالت توزیع دارای چولگی به سمت چپ می‌شود، در شکل ۱.۳ این موضوع به خوبی نشان داده شده است.
برای رسم این نمودار از پارامترهای مرجع [۱۶] استفاده کرده‌ایم.



شکل ۱.۳: نمودار تابع چگالی احتمال فرآیند lnS_T

فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$ فضای احتمال باشد که در آن $\{\mathcal{F}_t\}_t$ فیلتر تولید شده با فرآیند براونی در زمان t، $۰ \leq t \leq T$ و $\mathbb{Q}$ اندازه احتمال ریسک خنثی باشد و هم‌چنین فرض کنید S_t قیمت دارایی پایه در زمان t از معادله دیفرانسیل تصادفی زیر پیروی می‌کند

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^{(۱)}, \\ dV_t = k(\theta - V_t)dt + \sqrt{V_t}\sigma dW_t^{(۲)}, \end{cases} \qquad (۱.۳)$$

$$dW_t^{(۱)} dW_t^{(۲)} = \rho dt,$$

[۴] Heston

که درآن r نرخ بهره بدون ریسک، V_t تلاطم تصادفی، θ میانگین بلند مدت فرآیند تصادفی V_t، k نرخ بازگشت به میانگین ، σ نوسان فرآیند تصادفی و $W_t^{(1)}$، $W_t^{(2)}$ دو فرآیند براونی با ضریب همبستگی ρ می باشند. قرار می‌دهیم $X_t = lnS_t$، با به کارگیری لم ایتو داریم

$$dX_t = \frac{1}{S_t}dS_t - \frac{1}{2S_t^2}dS_t^2, \tag{۲.۳}$$

که در آن $dS_t = rS_tdt + \sqrt{V_t}S_tdW_t^{(1)}$، $dS_t^2 = V_tS_t^2dt$ و سپس با جای‌گذاری (۲.۳) داریم

$$\begin{cases} dX_t = (r - \frac{1}{2}V_t)dt + \sqrt{V_t}dW_t^{(1)}, \\ dV_t = k(\theta - V_t)dt + \sqrt{V_t}\sigma dW_t^{(2)}, \end{cases} \tag{۳.۳}$$

$$dW_t^{(1)}dW_t^{(2)} = \rho dt.$$

تعریف ۱.۲.۳. قراردادهای **اختیار معاملات غیر استاندارد**[5] یا نامتعارف، اختیاراتی هستند که با استفاده از یک سری قواعد، بازده‌هایی را بدست می‌دهند که محاسبه این بازده‌ها همچون اختیار معامله استاندارد ساده و آسان نیست؛اختیار معاملات دوتایی، اختیار معامله توان، اختیار معامله آسیایی انواع مختلفی از اختیار معامله غیر استاندارد هستند.

تعریف ۲.۲.۳. اختیار معاملات دوتایی

۱. **اختیار خرید نقدی یا صفر** این نوع اختیار معامله در صورتی که قیمت سهام در زمان T پایین‌تر از قیمت توافقی باشد هیچ بازدهی پرداخت نمی‌کند اگر قیمت سهام در زمان T بالاتر از قیمت توافقی باشد مقدار ثابت $\mathbb{Q}$ پرداخت می‌کند.
در يك دنياي بي‌تفاوت نسبت به ريسك، احتمال اينكه قيمت سهام در زمان سررسيد اختيار معامله بالاتر از قيمت توافقي باشد، با توجه به تعاریف ارزش گذاری معادل $N(d_2)$ است. بنابراين ارزش اختيار خريد نقدی يا صفربرابر با $\mathbb{Q}e^{-rT}N(d_2)$ است. يك اختيار فروش نقدی يا صفر نيز مثل اختيار خريد متناظر آن تعريف مي‌شود، يعني اگر قيمت سهام كمتر از قيمت توافقي باشد، اين اختيار داراي بازدهي معادل $\mathbb{Q}$ است و در غير اين صورت چنان‌چه قيمت سهام بيشتر از قيمت توافقي باشد، بازدهي نخواهد داشت ارزش اختيار فروش نقد يا صفر معادل $\mathbb{Q}e^{-rT}N(d_2)$ مي‌باشد.

۲. **اختیار خرید دارایی یا صفر** این نوع اختیار معامله اگرقیمت سهام پایه کمتراز قیمت توافقی باشد هیچ عایدی پرداخت نمی‌کند، و اگرقیمت سهام پایه بیشتر از قیمت توافقی باشد مبلغی معادل قیمت خود سهام می‌پردازد. با توجه به تعاریف ارزش گذاری ارزش اختيار خريد دارايي يا صفر معادل $S_0e^{-rT}N(d_1)$مي‌باشد. همچنين در يك اختيار فروش

[5] Exotic options

دارايي يا صفر چنان‌چه قيمت سهام پايه بيشتر از قيمت توافقي باشد، بازدهي نخواهد داشت و اگر کمتر از قيمت توافقي باشد بازدهي آن مبلغي معادل قيمت سهام خواهد بود. ارزش اختيار فروش دارايي يا صفر نيز معادل $S_\circ e^{-rT}N(d_1)$ خواهد بود [۱].
در این فصل نوع دوم بررسی می‌شود.

۳.۳ قیمت‌گذاری اختیار معامله دوتایی با روش تبدیل فوریه سریع

فرض کنید $C(T,K)$ تابع قیمت اختیارخرید دوتایی با قیمت توافقی K و زمان سر رسید T باشد. در این صورت طبق تعریف، قیمت‌گذاری اختیار خرید تحت اندازه ریسک خنثی $\mathbb{Q}$ به فرم زیر است

$$C(T,K) = e^{-rT}E^{\mathbb{Q}}[\frac{S_\circ}{S_T - K}(S_T - K)^+], \tag{۴.۳}$$

که در آن r نرخ بهره و بازده دارایی[۶] $\{(\frac{S_\circ}{S_T-K})(S_T-K)^+ = max\{\frac{S_\circ}{S_T-K}(S_T-K),\circ\}$ قرار می‌دهیم. فرض کنیم $t=\circ$، $X_\tau = lnS_\tau$، $\tau = T-t$ و $K=e^k$. در این صورت با جای‌گذاری رابطه (۴.۳) داریم

$$C(T,k) = \int_k^{\infty} e^{-rT}\frac{e^{X_\circ}}{e^{X_T}-e^k}(e^{X_T}-e^k)q_T(X_T)dX_T, \tag{۵.۳}$$

که در آن $q_T(X_T)$ تابع چگالی فرآیند تصادفی X_T است. کارو مادان[۷][۱۰](۱۹۹۹) وابراهیمی[۸][۱۹](۲۰۱۳)، برای $\alpha > \circ$، قیمت اصلاح شده اختیار خرید را به صورت زیر تعریف کردند

$$C(T,k) = e^{\alpha k}C(T,k), \tag{۶.۳}$$

تبدیل فوریه روی $C(T,k)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\varpi_T(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuk}C(T,k)dk. \tag{۷.۳}$$

---

[۶] Payoff
[۷] Carr and Madan
[۸] N.I.Ibrahim

باجای‌گذاری (۵.۳) در(۶.۳) و سپس در (۷.۳) داریم

$$\begin{aligned}\varpi_T(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rT} e^{iuk} e^{\alpha k} C(T,k) dk \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rT} e^{iuk} e^{\alpha k} \int_k^{\infty} \frac{e^{X_\circ}}{e^{X_T} - e^k}(e^{X_T} - e^k) q_T(X_T) dX_T dk \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rT} e^{X_\circ} q_T(X_T) \int_{-\infty}^{X_T} e^{(iu+\alpha)k} dk dX_T \\ &= \frac{e^{-rT}}{iu+\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(u-i\alpha)iX_T} q_T(X_T) S_\circ dX_T \\ &= \frac{e^{-rT} S_\circ}{\alpha + iu} \psi_T(u - i\alpha),\end{aligned} \tag{۸.۳}$$

که در آن ψ_T تابع مشخصه X_T تحت اندازه احتمال ریسک خنثی است. برای قیمت‌گذاری اختیار خرید با استفاده از معکوس تبدیل فوریه داریم

$$C(T,k) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuk} \varpi_T(u) du, \tag{۹.۳}$$

که با جای‌گذاری (۶.۳) در (۹.۳) داریم

$$C(T,k) = e^{-\alpha k} \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuk} \varpi_T(u) du. \tag{۱۰.۳}$$

با به کاربردن قاعده ذوزنقه‌ای[۹] برای انتگرال (۱۰.۳) داریم

$$C(T,k) \approx \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \sum_{j=۱}^{N} e^{-iu_j k} \varpi_T(u_j) \nu, \tag{۱۱.۳}$$

بنابراین قیمت اصلاح شده خرید اروپایی با استفاده از قاعده سیمسون[۱۰] و با استفاده از آن‌چه که در فصل چهارم گفته خواهد شد به فرم زیر است

$$C(T,k) = \frac{e^{-\alpha k_v}}{\pi} \sum_{j=۱}^{N} e^{-i\frac{۲\pi}{N}(j-۱)(a-۱)} e^{ibv_j} \varpi_T(u_j) \frac{\nu}{۳}(۳ + (-۱)^j - \delta_{j-۱}), \tag{۱۲.۳}$$

که در آن ν وابسته به N و مقدار N توانی از ۲ است همچنین داریم $u_j = \nu(j-۱)$، $z = \frac{۲\pi}{N}$ و

$$k_v = -b + z(a-۱), \qquad a = ۱, \cdots, N$$

و دلتای δ_n کرونکر است.

استفاده از روش تبدیل فوریه سریع برای قیمت‌گذاری اختیار معامله لزوم یافتن تابع مشخصه را آشکار می‌سازد طبق تعریف تابع مشخصه، داریم

$$\psi(\tau, u, x) = F(\tau, u, x, v) = E(e^{iuX_T} | X_t = x, V = v), \tag{۱۳.۳}$$

[۹] Method Trapezoid

[۱۰] Simpson

طبق لم ایتو چند متغیره روی تابع $F(\tau,u,x,v)$ خواهیم داشت

$$dF(\tau,u,x,v)=f_\tau dt+f_x dX+f_v dV+\frac{1}{2}f_{vv}dVdV+f_{xv}dXdV+\frac{1}{2}f_{xx}dXdX, \quad (۱۴.۳)$$

که در آن $f_i=\frac{\partial F}{\partial i}, i=x,v$، دافی وهمکاران فرمولی تعمیم یافته از فرمول فاینمن_کاک[۱۱] پیشنهاد کردند [۱۳]. بر اساس این قضیه و با جای‌گذاری مقادیر dX، dV، $dXdX=v$، $dVdV=v\sigma^2$، $dXdV=\rho\sigma v$ می‌توان تابع $F(\tau,u,x,v)$ به صورت معادله انتگرال_دیفرانسیل جزئی زیر نوشت

$$[f_\tau+f_x(r-\frac{1}{2}v)+f_v k(\theta-v)+\frac{1}{2}f_{vv}(v\sigma^2)+f_{xv}\sigma\rho v+\frac{1}{2}f_{xx}v]dt=0. \quad (۱۵.۳)$$

طبق تعریف تابع مشخصه فرآیندهای آفینی[۱۲] خواهیم داشت

$$F(\tau,u,x,v)=exp\{G(\tau,u)+H(\tau,u)v+iux\}, \quad (۱۶.۳)$$

با دیفرانسیل گیری از معادله (۱۶.۳) وقراردادن در فرمول (۱۵.۳) به معادلات دیفرانسیل زیر می‌رسیم

$$\begin{cases} H_\tau(\tau,u)-\frac{1}{2}(iu+u^2)-kH(\tau,u)+\frac{1}{2}\sigma^2H^2(\tau,u)+iu\sigma\rho H(\tau,u)=0, \\ G_\tau(\tau,u)+riu+k\theta H(\tau,u)=0, \end{cases} \quad (۱۷.۳)$$

با حل معادلات ریکاتی فوق به جواب‌های زیر دست پیدا می‌کنیم

$$\begin{cases} G(\tau,u)=-ruI-k\theta[-F_1(u)e^{-\frac{(2Iu\rho\sigma+\sigma^2-2k)\tau}{2}}+\frac{u(I+u)}{2Iu\rho\sigma+\sigma^2-2k}], \\ H(\tau,u)=[-F_1(u)e^{-\frac{(2Iu\rho\sigma+\sigma^2-2k)t}{2}}+\frac{u(I+u)}{2Iu\rho\sigma+\sigma^2-2k}]. \end{cases} \quad (۱۸.۳)$$

با قرار دادن رابطه (۱۸.۳) دررابطه (۱۶.۳) تابع مشخصه مدل هستون به دست می‌آید.

۴.۳ قیمت‌گذاری اختیار معامله دوتایی با استفاده از شبیه سازی مونت کارلو

فرض کنید $(\Omega,\mathcal{F}_t,\mathbb{Q})$ فضای احتمال باشد و $\{\mathcal{F}_t\}_t$، فیلتر تولید شده با فرآیند براونی تحت اندازه احتمال ریسک خنثی $\mathbb{Q}$ در زمان $0\le t\le T$ باشد. فرآیند قیمت دارایی از مدل هستون (۳.۳) پیروی می‌کند.

در این بخش قصد داریم مسیرهای فرآیند لگاریتم قیمت دارایی باروش گسسته سازی اویلر را

[۱۱] Fyeman-Kak
[۱۲] Affine

X/Y	Y_1	Y_2	$\ldots$	Y_s	مجموع
X_1	n_{11}	n_{12}	$\ldots$	n_{1s}	n_1
X_2	n_{21}	n_{22}	$\ldots$	n_{2s}	n_2
X_r	n_{r1}	n_{r2}	$\ldots$	n_{rs}	n_r
	n_1	n_2	$\ldots$	n_s	$n_{..} = n$

شبیه‌سازی کنیم، فرض کنید $[t = t_0 < t_1 < \ldots < t_M = T]$ افرازی از بازه $[t, T]$ ، که $t_i = \frac{iT}{M}$ برای هر $i = 0, 1, \ldots, M$ باشد، گسسته سازی اویلر[13][24] فرآیندلگاریتمی دارایی پایه مدل هستون به فرم زیر است

$$\begin{cases} \int_{i-1}^{i} dX_u = \int_{i-1}^{i} (r - \frac{1}{2} V_u) du + \int_{i-1}^{i} \sqrt{V_u} dw_u^{(1)}, \\ X_i = X_{i-1} + (r - \frac{1}{2} V_i^+) \Delta t_i + \sqrt{V_{i-1}^+ \Delta t_i} Z_s, \end{cases} \tag{۱۹.۳}$$

$$\begin{cases} \int_{i-1}^{i} dV_u = \int_{i-1}^{i} k(\theta - V_u) du + \int_{i-1}^{i} \sigma \sqrt{V_u} dW_u^{(2)}, \\ V_i = V_{i-1} + k(\theta - V_i^+) \Delta t_i + \sigma \sqrt{V_{i-1}^+ \Delta t_i} Z_v, \end{cases} \tag{۲۰.۳}$$

که در آن $V_i^+ = max(V_i, 0)$ ، $Z_v \sim N(0,1)$ ، $Z_s = \rho Z_v + \sqrt{1-\rho^2} Z$ و $Z \sim N(0,1)$ بخش انتشار فرآیند لگاریتم قیمت دارایی با یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس یک برای Z_v و Z_s رسم شده است، با تکرار این روش مسیرهای زیادی مرتبط می‌شوند. قیمت اختیار خرید دوتایی با شبیه سازی مونت کارلو از فرمول زیر پیروی می‌کند

$$C(t, X_T) = \frac{e^{-r(T-t)}}{n} \sum_{i=1}^{n} max(e^{X_T^i} - k, 0), \tag{۲۱.۳}$$

که در آن n تعداد مسیرهایی شبیه سازی شده و X_T ارزش شبیه سازی شده درهر گام M.

[13] Euler

فصل ۴

قیمت‌گذاری اختیارمعامله تحت مدل پرش نمایی مضاعف باتلاطم تصادفی وشدت تصادفی

۱.۴ مقدمه

دراین فصل ابتدا به معرفی مدل پرش نمایی مضاعف باتلاطم و شدت تصادفی می‌پردازیم، سپس با تعیین تابع مشخصه فرآیند قیمت دارایی پایه در مدل، فرمولی برای قیمت‌گذاری اختیار اروپایی تحت این مدل با استفاده از روش تبدیل فوریه سریع می‌پردازیم و در بخش بعدی با استفاده از شبیه سازی مونت‌کارلو به قیمت‌گذاری اختیار معاملات می‌پردازیم، در نهایت قیمت‌های اختیار معامله تحت مدل پرش نمایی مضاعف را با نتایج عددی معرفی و مقایسه می‌کنیم، مطالب این فصل از مرجع [۱۷] جمع‌آوری شده است.

۲.۴ مدل پرش نمایی مضاعف با تلاطم وشدت تصادفی

فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ فضای احتمال باشد و $\{\mathcal{F}_t\}_t$ برای $0 \leq t \leq T$ فیلتر تولید شده با فرآیند براونی باشد و $\mathbb{Q}$ اندازه احتمال ریسک خنثی است. ارزش دارایی پایه $S(t)$ در زمان t ازمعادله دیفرانسیل تصادفی زیر پیروی می‌کند

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{S(t)} = (r - d - \lambda(t)m)dt + \sqrt{V(t)}dW_s(t) + (e^J - 1)dN(t), \quad S(0) = S_0 > 0 \\ dV(t) = K_v(\theta_v - V(t))dt + \varepsilon_v\sqrt{V(t)}dW_v(t), \quad V(0) = V_0 > 0 \\ d\lambda(t) = K_\lambda(\theta_\lambda - \lambda(t))dt + \varepsilon_\lambda\sqrt{\lambda(t)}dW_\lambda(t), \quad \lambda(0) = \lambda_0 > 0 \end{cases} \tag{۱.۴}$$

$$\begin{aligned} &dW_s(t)dW_v(t) = \rho dt, \\ &dW_s(t)dW_s(t) = dW_v(t)dW_v(t) = 0, \\ &dW_s(t)dW_\lambda(t) = dW_\lambda(t)dW_v(t) = 0, \end{aligned}$$

که در آن d نرخ سودنقدی، r نرخ بهره بدون ریسک، $N(t)$ فرآیند پواسون باشدت تصادفی $\lambda(t)$، θ_v میانگین بلندمدت فرآیند تلاطم $V_{(t)}$، θ_λ میانگین بلند مدت فرآیند شدت $\lambda_{(t)}$، K_vوK_λ نرخ‌های بازگشت به میانگین $V_{(t)}$و $\lambda_{(t)}$، پارامتر ε_v واریانس فرآیند تلاطم $V_{(t)}$ و ε_λ واریانس فرآیند شدت $\lambda_{(t)}$، $W_s(t)$،$W_v(t)$ دو تا فرآیند براونی با ضریب همبستگی $\rho \in (-1, 1)$ هستند و فرآیند براونی $W_\lambda(t)$ مستقل از $W_s(t)$،$W_v(t)$ است. همچنین فرض شده است که پارامترهای K_v، K_λ، θ_v، θ_λ، ε_v، ε_λوθ_λ ثابت‌های مستقلی هستند.

برای سایز پرش J در مقاله مرتون[1][۲۵]، که در آن فرض شده است سایز پرش توزیع لگاریتم نرمال دارد و در بازار، قیمت دارایی بیش‌تر از قیمت واقعی است و ویژگی کشیدگی از توزیع بازگشتی را تولید نمی‌کند. همچنین در مقاله کو[2][۲۱]، که در آن فرض شده است سایز پرش توزیع نمایی مضاعف متقارن است و ویژگی کشیدگی از توزیع بازگشتی را تولید می‌کند و نوسان لبخند در قیمت‌گذاری مشاهده می‌شود.

به علاوه آزمایش‌های تجربی در کو و وانگ[3][۲۲]، نشان داده شده است که مدل انتشار پرش نمایی مضاعف متقارن مناسب‌تر از مدل انتشار پرش توزیع لگ نرمال می‌باشد در این بخش از سایز پرش توزیع نمایی مضاعف متقارن استفاده می‌کنیم که دارای تابع توزیع زیر است

$$f(J) = p\frac{1}{\mu_u}e^{-\frac{1}{\mu_u}J}\chi_{J\geq 0} + q\frac{1}{\mu_d}e^{-\frac{1}{\mu_d}J}\chi_{J\geq 0}, \qquad 0 < \mu_u < 1, \mu_d > 0,$$

[1] Merton

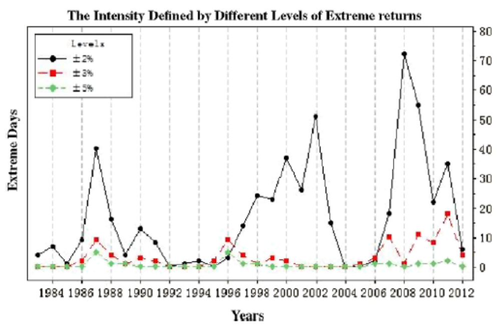
[2] Kou

[3] Kou and Wang

که در آن $p, q \leq ۱$، $p + q = ۱$ به ترتیب احتمال پرش بالا وپرش پایین و $\frac{۱}{\mu_u}$،$\frac{۱}{\mu_d}$ میانگین پرش مثبت و پرش منفی است و

$$m = E^{\mathbb{Q}}[e^J - ۱] = \frac{p}{۱ - \mu_u} + \frac{q}{۱ + \mu_d} - ۱.$$

متوسط پرش هستند.
نمودار (۱.۴) نشان دهنده داده‌های ده سال گذشته طی یک دوره زمانی از سال ۱۹۸۳ تا ۲۰۱۳ که این داده‌ها از شاخص استاندارد اند پور ۵۰۰ [۴] گرفته شده‌اند، تغییراتی در شدت پرش وجود دارد را بررسی می‌کند در واقع این داده‌ها نشان می‌دهند که شدت پرش تصادفی بهتر از شدت پرش ثابت است که شدت پرش ثابت از فرآیند تصادفی میانگین بازگشتی پیروی می‌کند، است به طور نمونه با شدت ۲ درصد میانگین شدت پرش در اطراف ۳۰ است[۱۲].



شکل ۱.۴: نمودار حاصل از سطوح مختلف شدت

۳.۴ مشتق تابع مشخصه

در این بخش می‌خواهیم مشتق تابع مشخصه معادله دیفرانسیل تصادفی (۱.۴) را به دست آوریم در واقع برای فرآیند قیمت دارایی پایه تحت مدل پرش نمایی مضاعف با تلاطم و شدت تصادفی تابع مشخصه را به دست می‌آوریم[۴].
قرار می دهیم $X(t) = lnS(t)$، با استفاده از فرمول ایتو روی فرآیند $X(t)$ خواهیم داشت

$$\int_۰^t dX(u) = \int_۰^t \frac{۱}{S(u)} dS^c(u) - \frac{۱}{۲}\int_۰^t \frac{۱}{S(u)^۲} dS^c(u)dS^c(u) + \sum_{u=۰}^{t}(X(u) - X(u_-)), \quad (۲.۴)$$

که درآن

$$dS^c(u) = (r - d - \lambda(t)m)S(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)dW_s(t), \quad (۳.۴)$$

$$dS^c(u)dS^c(u) = S(t)^۲ V(t)dt. \quad (۴.۴)$$

[۴] S & P 500

منظور از $S^c(u)$ جز پیوسته معادله دیفرانسیل (۱.۴) است و $X(u_-)$ مقدار $X(u)$ دقیقا قبل از وقوع جهش در لحظه u است حال اگر یک جهش در لحظه u رخ دهد بزرگی جهش در فرآیند $S(u)$ برابر e^J است از طرفی داریم $X(u) = lnS(u)$ پس $X(u) = JX(u_-)$ بنابراین می‌توان نوشت

$$X(u) - X(u_-) = (J - ۱)X(u_-),$$

اگر در لحظه u پرشی رخ ندهد آن‌گاه $X(u) - X(u_-) = ۰$، در مواردی که بیش از یک پرش رخ دهد خواهیم داشت

$$X(u) - X(u_-) = (J - ۱)X(u_-)\Delta N(u), \tag{۵.۴}$$

$$\sum_{u=۰}^{t}(X(u) - X(u_-)) = \sum_{u=۰}^{t}(J - ۱)X(u_-)\Delta N(u) = \int_{۰}^{t}(J - ۱)X(u_-)\Delta N(u), \tag{۶.۴}$$

با جای‌گذاری معادله (۶.۴) در (۲.۴) وسپس با مشتق‌گیری از معادله (۲.۴) نتیجه می‌شود

$$dX(t) = \frac{۱}{S(u)}dS^c(u) - \frac{۱}{۲}\frac{۱}{S(u)^۲}dS^c(u)dS^c(u) + (J - ۱)X(t_-)dN(t), \tag{۷.۴}$$

هم‌چنین با جای‌گذاری معادله (۳.۴) و (۴.۴) در معادله (۷.۴) و با اندکی محاسبه مدل پرش نمایی مضاعف با پرش وانتشار به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{cases} dX(t) = (r - d - \lambda(t)m - \frac{۱}{۲}V(t))dt + \sqrt{V(t)}dW_s(t) + (J - ۱)dN(t), \\ dV(t) = K_v(\theta_v - V(t))dt + \varepsilon_v\sqrt{V(t)}dW_v(t), \\ d\lambda(t) = K_\lambda(\theta_\lambda - \lambda(t))dt + \varepsilon_\lambda\sqrt{\lambda(t)}dW_\lambda(t). \end{cases} \tag{۸.۴}$$

$$\begin{aligned} &dW_s(t)dW_v(t) = \rho dt, \\ &dW_s(t)dW_s(t) = dW_v(t)dW_v(t) = ۰, \\ &dW_s(t)dW_\lambda(t) = dW_\lambda(t)dW_v(t) = ۰. \end{aligned}$$

تابع مولد گشتاور تحت اندازه ریسک خنثی $\mathbb{Q}$ را به صورت $M(\Phi, X, V, \lambda, \tau)$ در زمان $X(\tau)$ تعریف می‌کنیم

$$M(\Phi, X, V, \lambda, \tau) = E^{\mathbb{Q}}[e^{\phi X(\tau)}] = e^{-r\tau}E^{\mathbb{Q}}[e^{r\tau}e^{\phi X(\tau)}]. \tag{۹.۴}$$

طبق تعریف تابع مشخصه داریم

$$M(\Phi, X, V, \lambda, \tau) = E^{\mathbb{Q}}[e^{\phi X(\tau)}|X(t) = x, V(t) = v, \lambda(t) = \lambda, \tau = T - t]. \tag{۱۰.۴}$$

با استفاده از فرمول ایتو چند متغیره روی تابع $M(\Phi, X, V, \lambda, \tau)$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} dM(\Phi, X, V, \lambda, \tau) &= -M_\tau dt + M_x dX + M_v dV + M_\lambda d\lambda + \frac{1}{2} M_{xx} dX dX + \\ &\frac{1}{2} M_{vv} dV dV + \frac{1}{2} M_{\lambda\lambda} d\lambda d\lambda + M_{xv} dX dV + M_{x\lambda} dX d\lambda + M_{v\lambda} dV d\lambda, \end{aligned} \tag{۱۱.۴}$$

دافی وهمکاران فرمولی تعمیم یافته از فرمول فاینمن_کاک[۵] را برای فرآیندهای آفینی[۶] با پرش پیشنهاد کردند [۱۳]، بر اساس این قضیه و با جای‌گذاری مقادیر dX، dV، $d\lambda$، $dXdX = V$، $dVdV = \varepsilon_v^2 V$، $d\lambda d\lambda = \varepsilon_\lambda^2 \lambda$، $dXdV = \rho\varepsilon_v V$ به دست آمده از معادله (۸.۴) در رابطه (۱۱.۴) می‌توان تابع $M(\Phi, X, V, \lambda, \tau)$ را بصورت معادله انتگرال_دیفرانسیل جزئی زیر نوشت

$$\begin{cases} -M_\tau + (r - d - \lambda(t)m - \frac{1}{2}V(t))M_x + \frac{1}{2}VM_{xx} + k_v(\theta_v - V)M_v + \frac{1}{2}V\varepsilon_v^2 M_{vv} \\ +\frac{1}{2}\varepsilon_\lambda^2 \lambda M_{\lambda\lambda} + k_\lambda(\theta_\lambda - \lambda)M_\lambda + \rho\varepsilon_v V M_{xv} + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}(M[\Phi, X+J, \lambda, \tau, V] - M[\Phi, X, \lambda, \tau, V])\omega(J)dJ = 0 \\ M(\Phi, X, V, \lambda, \tau) = e^{\Phi X} \end{cases} \tag{۱۲.۴}$$

که در آن $\omega(J)$ تابع توزیع متغیر تصادفی J است انتگرال بالا را بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\begin{aligned} &\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}[M(\Phi, X+J, \lambda, \tau, V) - M(\Phi, X, \lambda, \tau, V)]\omega(J)dJ \\ &= \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}(E^{\mathbb{Q}}[e^{\Phi(X+J)}] - E^{\mathbb{Q}}[e^{\Phi X}])\omega(J)dJ \\ &= \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}[E^{\mathbb{Q}}[e^{\Phi X}(e^{\Phi J} - 1)]]\omega(J)dJ \\ &= \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}E^{\mathbb{Q}}[e^{\Phi X}]E^{\mathbb{Q}}[(e^{\Phi J} - 1)]\omega(J)dJ \\ &= \lambda M(\Phi)U(\Phi), \end{aligned} \tag{۱۳.۴}$$

که درآن

$$U(\Phi) = \int_{-\infty}^{+\infty}(e^{\Phi J} - 1)\omega(J)dJ = \frac{p}{1 - \Phi\mu_u} + \frac{q}{1 + \Phi\mu_d} - 1.$$

طبق تعریف تابع مشخصه فرآیندهای آفینی داریم

$$M(\Phi, X, V, \lambda, \tau) = e^{\{X\Phi + (r-d)\tau\Phi + A(\Phi,\tau) + B(\Phi,\tau)V + C(\Phi,\tau) + D(\Phi,\tau)\lambda\}}, \tag{۱۴.۴}$$

که تابع مشخصه در مقادیر اولیه $A(\Phi, 0) = 0$، $B(\Phi, 0) = 0$، $C(\Phi, 0) = 0$، $D(\Phi, 0) = 0$ صدق می‌کند. با دیفرانسیل گیری از معادله (۱۴.۴) داریم

[۵] Feynman-Kak

[۶] Affine

$$
\begin{aligned}
M_x &= \Phi e^{\{X\Phi+(r-d)\tau\Phi+A(\Phi,\tau)+B(\Phi,\tau)V+C(\Phi,\tau)+D(\Phi,\tau)\lambda\}},\\
M_{xx} &= \Phi^{۲} e^{\{X\Phi+(r-d)\tau\Phi+A(\Phi,\tau)+B(\Phi,\tau)V+C(\Phi,\tau)+D(\Phi,\tau)\lambda\}},\\
M_v &= B(\Phi,\tau) e^{\{X\Phi+(r-d)\tau\Phi+A(\Phi,\tau)+B(\Phi,\tau)V+C(\Phi,\tau)+D(\Phi,\tau)\lambda\}},\\
M_{vv} &= B^{۲}(\Phi,\tau) e^{\{X\Phi+(r-d)\tau\Phi+A(\Phi,\tau)+B(\Phi,\tau)V+C(\Phi,\tau)+D(\Phi,\tau)\lambda\}},\\
M_\lambda &= D(\Phi,\tau) e^{\{X\Phi+(r-d)\tau\Phi+A(\Phi,\tau)+B(\Phi,\tau)V+C(\Phi,\tau)+D(\Phi,\tau)\lambda\}},\\
M_{\lambda\lambda} &= D^{۲}(\Phi,\tau) e^{\{X\Phi+(r-d)\tau\Phi+A(\Phi,\tau)+B(\Phi,\tau)V+C(\Phi,\tau)+D(\Phi,\tau)\lambda\}},\\
M_{xv} &= \Phi B(\Phi,\tau) e^{\{X\Phi+(r-d)\tau\Phi+A(\Phi,\tau)+B(\Phi,\tau)V+C(\Phi,\tau)+D(\Phi,\tau)\lambda\}},\\
M_\tau &= [(r-d)\Phi + A_\tau(\Phi,\tau) + B_\tau(\Phi,\tau)V + C_\tau(\Phi,\tau) + D_\tau(\Phi,\tau)\lambda]\\
&\quad e^{\{X\Phi+(r-d)\tau\Phi+A(\Phi,\tau)+B(\Phi,\tau)V+C(\Phi,\tau)+D(\Phi,\tau)\lambda\}}.
\end{aligned}
\tag{۱۵.۴}
$$

با جای‌گزاری رابطه (۱۵.۴) در (۱۲.۴) داریم

$$
\begin{aligned}
&[-(r-d)\Phi - A_\tau(\Phi,\tau) - B_\tau(\Phi,\tau)V - C_\tau(\Phi,\tau) - D_\tau(\Phi,\tau)\lambda + (r-d)\Phi\\
&- \frac{۱}{۲}V\Phi - \lambda m\Phi + \frac{۱}{۲}V\Phi^{۲} + k_v\theta_v B(\Phi,\tau) - k_v V B(\Phi,\tau) + \frac{۱}{۲}\varepsilon_v^{۲} V B^{۲}(\Phi,\tau)\\
&+ \rho V\varepsilon_v \Phi B_\tau(\Phi,\tau) + k_\lambda\theta_\lambda D(\Phi,\tau) - k_\lambda\lambda D(\Phi,\tau) + \frac{۱}{۲}\varepsilon_\lambda^{۲}\lambda D^{۲}(\Phi,\tau) + \lambda U(\Phi)]M(\Phi) = ۰
\end{aligned}
\tag{۱۶.۴}
$$

و سپس به دستگاه معادلات زیر دست می‌یابیم،

$$A_\tau(\Phi,\tau) + C_\tau(\Phi,\tau) = k_v\theta_v B(\Phi,\tau) + k_\lambda\theta_\lambda D(\Phi,\tau), \tag{۱۷.۴}$$

$$B_\tau(\Phi,\tau) = -\frac{۱}{۲}(\Phi - \Phi^{۲}) - (k_v - \rho\varepsilon_v\Phi)B(\Phi,\tau) + \frac{۱}{۲}\varepsilon_v^{۲} B^{۲}(\Phi,\tau), \tag{۱۸.۴}$$

$$D_\tau(\Phi,\tau) = \Lambda(\Phi) - k_\lambda D(\Phi,\tau) + \frac{۱}{۲}\varepsilon_\lambda^{۲} D^{۲}(\Phi,\tau), \tag{۱۹.۴}$$

که در آن

$$\Lambda(\Phi) = U(\Phi) - m\Phi = \frac{p}{۱-\Phi\mu_u} + \frac{q}{۱+\mu_d} - ۱ - \Phi(\frac{p}{۱-\mu_u} + \frac{q}{۱+\mu_d} - ۱).$$

و $A_\tau(\Phi,\tau) = k_v\theta_v B(\Phi,\tau)$ ،$C_\tau(\Phi,\tau) = k_\lambda\theta_\lambda D(\Phi,\tau)$ است.
معادله دیفرانسیل (۱۸.۴) معادله ریکاتی است برای حل، ابتدا معادله دیفرانسیل ریکاتی و روش حل آن را تعریف می‌کنیم

تعریف ۱.۳.۴. صورت یک **معادله ریکاتی** دیفرانسیل ساده ی مرتبه اول به صورت زیر است

$$y'(x) = q_۰(x) + q_۱(x)y + q_۲(x)y^{۲}$$

از تغییر متغیر $v = q_2 y$ استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned} v' &= y'q_2 + q_2'y \\ &= (q_0 + q_1 y + q_2 y^2)q_2 + v\frac{q_2'}{q_2} \\ &= \underbrace{q_0 q_2}_{S} + \underbrace{(q_1 + \frac{q_2'}{q_2})}_{R} v + v^2, \end{aligned} \tag{۲۰.۴}$$

با جای‌گذاری $v = -\frac{u'}{u}$ داریم

$$v' = -(\frac{u''}{u}) + v^2$$

و با جای‌گذاری v و v' در معادله (۲۰.۴)، به صورت ساده شده معادله زیر خواهد شد

$$u'' - Ru' + Su = 0.$$

طبق تعریف معادله ریکاتی قرار می‌دهیم

$$B(\Phi, \tau) = -\frac{2O'(\tau)}{\varepsilon_v^2 O(\tau)}, \tag{۲۱.۴}$$

داریم

$$O''(\tau) + (k_v - \rho\varepsilon_v\Phi)O'(\tau) - \frac{\varepsilon_v^2}{4}(\Phi - \Phi^2)O(\tau) = 0. \tag{۲۲.۴}$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیلی (۲۲.۴) به صورت زیر است

$$O(\tau) = C_1 e^{-\frac{1}{2}\phi_- \tau} + C_2 e^{\frac{1}{2}\phi_+ \tau}, \tag{۲۳.۴}$$

که در آن

$$\begin{aligned} \phi_\pm &= \mp(k_v - \rho\varepsilon_v\Phi) + \varsigma, \\ \varsigma &= \sqrt{(k_v - \rho\varepsilon_v\Phi)^2 + \varepsilon_v^2(\Phi - \Phi^2)}, \end{aligned} \tag{۲۴.۴}$$

پس

$$\begin{cases} O(\tau) = C_1 e^{-\frac{1}{2}\phi_- \tau} + C_2 e^{\frac{1}{2}\phi_+ \tau}, \\ O'(\tau) = -\frac{1}{2}\phi_- C_1 e^{-\frac{1}{2}\phi_- \tau} + \frac{1}{2}\phi_+ C_2 e^{\frac{1}{2}\phi_+ \tau}, \end{cases} \to \begin{cases} O(0) = C_1 + C_2, \\ O'(0) = -\frac{1}{2}\phi_- C_1 + \frac{1}{2}\phi_+ C_2, \end{cases} \tag{۲۵.۴}$$

با حل دستگاه بالا مقدار C_1 و C_2 را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} O'(0) &= -\frac{1}{2}\phi_-(O(0)-C_2)+\frac{1}{2}\phi_+C_2 \\ &= -\frac{1}{2}\phi_-O(0)+\frac{1}{2}\phi_-C_2+\frac{1}{2}\phi_+C_2 \\ &= -\frac{1}{2}\phi_-O(0)+C_2\frac{1}{2}(\phi_-+\phi_+) \\ &= -\frac{1}{2}\phi_-O(0)+\frac{1}{2}C_2(-(k_v-\rho\varepsilon_v\Phi)+\varsigma+(k_v-\rho\varepsilon_v\Phi+\varsigma)) \\ &= -\frac{1}{2}\phi_-O(0)+C_2\varsigma=0, \end{aligned} \tag{۲۶.۴}$$

داریم $C_1=\frac{\phi_+O(0)}{2\varsigma}$، $C_2=\frac{\phi_-O(0)}{2\varsigma}$. با جای‌گذاری (۲۵.۴) در (۲۱.۴) داریم

$$\begin{aligned} B(\Phi,\tau) &= -\frac{2}{\varepsilon_v^2}\frac{-\frac{1}{2}C_1\phi_-e^{-\frac{1}{2}\phi_-\tau}+\frac{1}{2}C_2\phi_+e^{\frac{1}{2}\phi_+\tau}}{C_1e^{-\frac{1}{2}\phi_-\tau}+C_2e^{\frac{1}{2}\phi_+\tau}} \\ &= -\frac{2}{\varepsilon_v^2}\frac{-\frac{1}{2}\frac{\phi_+O(0)}{2\varsigma}\phi_-e^{-\frac{1}{2}\phi_-\tau}+\frac{1}{2}\frac{\phi_-O(0)}{2\varsigma}\phi_+e^{\frac{1}{2}\phi_+\tau}}{\frac{\phi_+O(0)}{2\varsigma}e^{-\frac{1}{2}\phi_-\tau}+\frac{\phi_-O(0)}{2\varsigma}e^{\frac{1}{2}\phi_+\tau}} \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_v^2}\frac{-\phi_+\phi_-e^{-\frac{1}{2}\phi_-\tau}+\phi_-\phi_+e^{\frac{1}{2}\phi_+\tau}}{\phi_+e^{-\frac{1}{2}\phi_-\tau}+\phi_-e^{\frac{1}{2}\phi_+\tau}} \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_v^2}\frac{\phi_-\phi_+(e^{\frac{1}{2}\phi_+\tau}-e^{-\frac{1}{2}\phi_-\tau})}{\phi_+e^{-\frac{1}{2}\phi_-\tau}+\phi_-e^{-\frac{1}{2}\phi_+\tau}} \\ &= -(\Phi-\Phi^2)\frac{-e^{-\frac{1}{2}\phi_-\tau}+e^{\frac{1}{2}\phi_+\tau}}{\phi_+e^{-\frac{1}{2}\phi_-\tau}+\phi_-e^{\frac{1}{2}\phi_+\tau}} \\ &= -(\Phi-\Phi^2)\frac{-e^{-\frac{1}{2}\phi_-\tau-\frac{1}{2}\phi_+\tau}+1}{\phi_+e^{-\frac{1}{2}\phi_-\tau-\frac{1}{2}\phi_+\tau}} \\ &= -(\Phi-\Phi^2)\frac{1-e^{-\varsigma\tau}}{\phi_+e^{-\varsigma\tau}+\phi_-}. \end{aligned} \tag{۲۷.۴}$$

از طرفی چون $A_\tau(\Phi,\tau)=k_v\theta_vB(\Phi,\tau)$ وسپس جای‌گذاری در (۲۷.۴) داریم

$$\begin{aligned} A(\Phi,\tau) &= k_v\theta_v\int_0^\tau B(\Phi,s)ds \\ &= k_v\theta_v\int_0^\tau -\frac{2}{\varepsilon_v^2}\frac{O'(s)}{O(s)} \\ &= -\frac{2k_v\theta_v}{\varepsilon_v^2}ln[\frac{O(\tau)}{O(0)}] \\ &= -\frac{2k_v\theta_v}{\varepsilon_v^2}ln[\frac{\frac{\phi_+O(0)}{2\varsigma}e^{-\frac{1}{2}\phi_-\tau}+\frac{\phi_-O(0)}{2\varsigma}\phi_+e^{\frac{1}{2}\phi_+\tau}}{\frac{\phi_+O(0)}{2\varsigma}+\frac{\phi_-O(0)}{2\varsigma}}] \\ &= -\frac{2k_v\theta_v}{\varepsilon_v^2}ln[\frac{\phi_+e^{-\frac{1}{2}\phi_-\tau}+\phi_-e^{\frac{1}{2}\phi_+\tau}}{2\varsigma}] \\ &= -\frac{2k_v\theta_v}{\varepsilon_v^2}ln[\frac{\phi_+e^{-\varsigma\tau}+\phi_-}{\frac{2\varsigma}{e^{\frac{1}{2}\phi_+\tau}}}] \end{aligned} \tag{۲۸.۴}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{2k_v\theta_v}{\varepsilon_v^2}ln\big[e^{\frac{1}{2}\phi_+\tau}\big(\frac{\phi_- + \phi_+ e^{-\varsigma\tau}}{2\varsigma}\big)\big]\\
&= -\frac{k_v\theta_v}{\varepsilon_v^2}\big[\phi_+\tau + 2ln\big(\frac{\phi_- + \phi_+ e^{-\varsigma\tau}}{2\varsigma}\big)\big].
\end{aligned}
$$

سپس معادله دیفرانسیل ریکاتی (۱۸.۴) را حل می‌کنیم، قرار می‌دهیم

$$D(\Phi,\tau) = -\frac{2O'(\tau)}{\varepsilon_\lambda^2 O(\tau)}, \tag{۲۹.۴}$$

داریم

$$O''(\tau) + k_\lambda O'(\tau) + (\Lambda(\Phi)\frac{1}{2}\varepsilon_\lambda^2)O(\tau) = 0. \tag{۳۰.۴}$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیلی (۳۰.۴) به صورت زیر است

$$O(\tau) = C_3 e^{-\frac{1}{2}\psi_-\tau} + C_4 e^{\frac{1}{2}\psi_+\tau}, \tag{۳۱.۴}$$

که در آن

$$
\begin{aligned}
\psi_\pm &= \mp k_\lambda + \xi,\\
\xi &= \sqrt{k_\lambda^2 - 2\varepsilon_\lambda^2\Lambda(\Phi)},
\end{aligned} \tag{۳۲.۴}
$$

پس

$$
\begin{cases}
O(\tau) = C_3 e^{-\frac{1}{2}\psi_-\tau} + C_4 e^{\frac{1}{2}\psi_+\tau},\\
O'(\tau) = -\frac{1}{2}\psi_- C_3 e^{-\frac{1}{2}\psi_-\tau} + \frac{1}{2}\psi_+ C_4 e^{\frac{1}{2}\psi_+\tau},
\end{cases}
\rightarrow
\begin{cases}
O(0) = C_3 + C_4,\\
O'(0) = -\frac{1}{2}\psi_- C_3 + \frac{1}{2}\psi_+ C_4,
\end{cases} \tag{۳۳.۴}
$$

با حل دستگاه بالا مقدار C_3،C_4 را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$
\begin{aligned}
O'(0) &= -\frac{1}{2}\psi_-(O(0) - C_4) + \frac{1}{2}\psi_+ C_4\\
&= -\frac{1}{2}\psi_- O(0) + \frac{1}{2}\psi_- C_4 + \frac{1}{2}\psi_+ C_4\\
&= -\frac{1}{2}\psi_- O(0) + C_4\frac{1}{2}(\psi_- + \psi_+)\\
&= -\frac{1}{2}\psi_- O(0) + C_4\frac{1}{2}(-k_\lambda + \xi + k_\lambda + \xi)\\
&= -\frac{1}{2}\psi_- O(0) + C_4\xi = 0,
\end{aligned} \tag{۳۴.۴}
$$

داریم $C_3 = \frac{\psi_+ O(0)}{2\xi}$ ،$C_4 = \frac{\psi_- O(0)}{2\xi}$. با جای‌گذاری (۳۳.۴)در (۲۹.۴) داریم

$$D(\Phi,\tau) = -\frac{2}{\varepsilon_\lambda^2}\frac{-\frac{1}{2}C_3\psi_- e^{-\frac{1}{2}\psi_-\tau} + \frac{1}{2}C_4\psi_+ e^{\frac{1}{2}\psi_+\tau}}{C_3 e^{-\frac{1}{2}\psi_-\tau} + C_4 e^{\frac{1}{2}\psi_+\tau}}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{۲}{\varepsilon_\lambda^۲}\frac{-\frac{۱}{۲}\frac{\psi_+ O(۰)}{۲\xi}\psi_- e^{-\frac{۱}{۲}\psi_-\tau} + \frac{۱}{۲}\frac{\psi_- O(۰)}{۲\xi}\psi_+ e^{\frac{۱}{۲}\psi_+\tau}}{\frac{\psi_+ O(۰)}{۲\xi}e^{-\frac{۱}{۲}\psi_-\tau} + \frac{\psi_- O(۰)}{۲\xi}e^{\frac{۱}{۲}\psi_+\tau}} \\
&= -\frac{۱}{\varepsilon_\lambda^۲}\frac{-\psi_+\psi_- e^{-\frac{۱}{۲}\psi_-\tau} + \psi_-\psi_+ e^{\frac{۱}{۲}\psi_+\tau}}{\psi_+ e^{-\frac{۱}{۲}\psi_-\tau} + \psi_- e^{\frac{۱}{۲}\psi_+\tau}} \\
&= -\frac{۱}{\varepsilon_\lambda^۲}\frac{\psi_-\psi_+(e^{\frac{۱}{۲}\psi_+\tau} - e^{-\frac{۱}{۲}\psi_-\tau})}{\psi_+ e^{-\frac{۱}{۲}\phi_-\tau} + \psi_- e^{-\frac{۱}{۲}\psi_+\tau}} \\
&= ۲\Lambda(\Phi)\frac{۱ - e^{-\frac{۱}{۲}\psi_-\tau - \frac{۱}{۲}\psi_+\tau}}{\psi_+ e^{-\frac{۱}{۲}\psi_-\tau - \frac{۱}{۲}\psi_+\tau} + \psi_-} \\
&= ۲\Lambda(\Phi)\frac{۱ - e^{-\xi\tau}}{\psi_- + \psi_+ e^{-\xi\tau}},
\end{aligned}
\tag{۳۵.۴}
$$

از طرفی چون $C_\tau(\Phi,\tau) = k_\lambda\theta_\lambda D(\Phi,\tau)$ و سپس جای‌گذاری در (۳۵.۴) داریم

$$
\begin{aligned}
C(\Phi,\tau) &= k_\lambda\theta_\lambda\int_۰^\tau B(\Phi,s)ds \\
&= k_\lambda\theta_\lambda\int_۰^\tau -\frac{۲}{\varepsilon_\lambda^۲}\frac{O'(s)}{O(s)}ds \\
&= -\frac{۲k_\lambda\theta_\lambda}{\varepsilon_\lambda^۲}ln[\frac{O(\tau)}{O(۰)}] \\
&= -\frac{۲k_\lambda\theta_\lambda}{\varepsilon_\lambda^۲}ln[\frac{\frac{\psi_+ O(۰)}{۲\xi}e^{-\frac{۱}{۲}\psi_-\tau} + \frac{\psi_- O(۰)}{۲\xi}e^{\frac{۱}{۲}\psi_+\tau}}{\frac{\psi_+ O(۰)}{۲\xi} + \frac{\psi_- O(۰)}{۲\xi}}] \\
&= -\frac{۲k_\lambda\theta_\lambda}{\varepsilon_\lambda^۲}ln[\frac{\psi_+ e^{-\frac{۱}{۲}\psi_-\tau} + \psi_- e^{\frac{۱}{۲}\psi_+\tau}}{۲\xi}] \\
&= -\frac{۲k_\lambda\theta_\lambda}{\varepsilon_\lambda^۲}ln[\frac{\psi_+ e^{-\frac{۱}{۲}\psi_-\tau - \frac{۱}{۲}\psi_+\tau} + \psi_-}{\frac{۲\xi}{e^{\frac{۱}{۲}\psi_+\tau}}}] \\
&= -\frac{k_\lambda\theta_\lambda}{\varepsilon_\lambda^۲}[\psi_+\tau + ۲ln(\frac{\psi_+ e^{-\xi\tau} + \psi_-}{۲\xi})],
\end{aligned}
\tag{۳۶.۴}
$$

باقراردادن رابطه (۳۷.۴) در رابطه (۱۴.۴) تابع مشخصه مدل پرش نمایی مضاعف بانوسان وشدت تصادفی به دست می‌آید، بنابراین فرمولی براي قیمت‌گذاري اختیار تحت مدل پرش نمایی مضاعف به فرم زیر به دست آمده است. در بخش بعد با استفاده از این فرمول برخی نتایج عددي در خصوص قیمت گذاري اختیار اروپایی تحت مدل پرش نمایی مضاعف را به دست آورده و نشان می‌دهیم که این فرمول قابلیت محاسباتی دارد.

$$
\begin{aligned}
A(\Phi,\tau) &= -\frac{k_\upsilon\theta_\upsilon}{\varepsilon_\upsilon^۲}[\phi_+\tau + ۲ln(\frac{\phi_- + \phi_+ e^{-\varsigma\tau}}{۲\varsigma})], \\
B(\Phi,\tau) &= -(\Phi - \Phi^۲)\frac{۱ - e^{\varsigma\tau}}{\phi_+ e^{\varsigma\tau} + \phi_-}, \\
C(\Phi,\tau) &= -\frac{k_\lambda\theta_\lambda}{\varepsilon_\lambda^۲}[\psi_+\tau + ۲ln(\frac{\psi_+ e^{-\xi\tau} + \psi_-}{۲\xi})],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&D(\Phi,\tau)=۲\Lambda(\Phi)\frac{۱-e^{-\xi\tau}}{\psi_-+\psi_+e^{-\xi\tau}},\\
&\phi_\pm=\mp(k_\upsilon-\rho\varepsilon_\upsilon\Phi)+\varsigma,\\
&\varsigma=\sqrt{k_\upsilon-\rho\varepsilon_\upsilon\Phi)^{۲}+\varepsilon_\upsilon^{۲}(\Phi-\Phi^{۲})},\\
&\psi_\pm=\mp k_\lambda+\xi,\\
&\xi=\sqrt{k_\lambda^{۲}-۲\varepsilon_\lambda^{۲}\Lambda(\Phi)}.
\end{aligned}
\tag{۳۷.۴}
$$

تابع مشخصه را برای توابع مختلط $\phi(u)=M(iu)$ تحت اندازه ریسک خنثی $\mathbb{Q}$ در زمان τ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$
M(iu,X,V,\lambda,\tau)=E^{\mathbb{Q}}[e^{iuX(\tau)}|X(t)=x,V(t)=\upsilon,\lambda(t)=\lambda,\tau=T-t]
\tag{۳۸.۴}
$$

با استفاده از لم ایتو چند متغیره روی تابع $M(iu,X,V,\lambda,\tau)$ خواهیم داشت

$$
\begin{aligned}
dM(iu,X,V,\lambda,\tau)&=-M_\tau dt+M_xdX+M_\upsilon dV+M_\lambda d\lambda+\frac{۱}{۲}M_{xx}dXdX\\
&+\frac{۱}{۲}M_{\upsilon\upsilon}dVdV+\frac{۱}{۲}M_{\lambda\lambda}d\lambda d\lambda+M_{x\upsilon}dXdV+M_{x\lambda}dXd\lambda+M_{\upsilon\lambda}dVd\lambda
\end{aligned}
\tag{۳۹.۴}
$$

دافی وهمکاران فرمولی تعمیم‌یافته از فرمول فاینمن‌ـ کاک را برای فرآیندهای آفینی با پرش پیشنهاد کردند [۱۳]، براساس این قضیه و با جای‌گذاری مقادیر dX، dV، $d\lambda$، $dXdX=V$، $d\lambda d\lambda=\lambda\varepsilon_\lambda^{۲}$، $dVdV=V\varepsilon_\upsilon^{۲}$، $dXdV=\rho\varepsilon_\upsilon V$، به دست آمده از (۸.۴) در (۳۹.۴) معادله انتگرال‌ـ دیفرانسیل جزئی به صورت زیر نوشت

$$
\begin{cases}
-M_\tau+(r-d-\lambda(t)m-\frac{۱}{۲}V(t))M_x+\frac{۱}{۲}VM_{xx}+k_\upsilon(\theta_\upsilon-V)M_\upsilon+\frac{۱}{۲}\varepsilon_\upsilon^{۲}VM_{\upsilon\upsilon}\\
+\frac{۱}{۲}\varepsilon_\lambda^{۲}\lambda M_{\lambda\lambda}+k_\lambda(\theta_\lambda-\lambda)M_\lambda+\rho\varepsilon_\upsilon VM_{x\upsilon}+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}(M[iu,X+J,\lambda,\tau,V]-M[iu,X,\lambda,\tau,V])\omega(J)dJ=\circ\\
M(iu,X,V,\lambda,\tau)=e^{iuX}
\end{cases}
\tag{۴۰.۴}
$$

که در آن $\omega(J)$ تابع توزیع متغیر تصادفی J است. انتگرال بالا را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$
\begin{aligned}
\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}[M(X+J)-M(X)]\omega(J)dJ&=\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}(E^{\mathbb{Q}}[e^{iu(X+J)}]-E^{\mathbb{Q}}[e^{iuX}])\omega(J)dJ\\
&=\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}[E^{\mathbb{Q}}[e^{iuX}(e^{iuJ}-۱)]]\omega(J)dJ\\
&=\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}E^{\mathbb{Q}}[e^{iuX}]E^{\mathbb{Q}}[(e^{iuJ}-۱)]\omega(J)dJ\\
&=\lambda M(iu)U(iu),
\end{aligned}
\tag{۴۱.۴}
$$

که درآن

$$
U(iu)=\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{iuJ}-۱)\omega(J)dJ=\frac{p}{۱-iu\mu_u}+\frac{q}{۱+iu\mu_d}-۱.
$$

طبق تعریف تابع مشخصه فرآیندهای آفینی داریم

$$M(iu,X,V,\lambda,\tau)=e^{\{Xiu+(r-d)\tau iu+A(u,\tau)+B(u,\tau)V+C(u,\tau)+D(u,\tau)\lambda\}}, \tag{۴۲.۴}$$

که تابع مشخصه در مقادیر اولیه $A(u,0)=0$، $B(u,0)=0$، $C(u,0)=0$، $D(u,0)=0$ صدق می‌کند. با دیفرانسیل گیری از معادله (۴۲.۴) داریم

$$\begin{aligned}
M_x&=iue^{\{Xiu+(r-d)\tau iu+A(u,\tau)+B(u,\tau)V+C(u,\tau)+D(u,\tau)\lambda\}},\\
M_{xx}&=(iu)^2e^{\{Xiu+(r-d)\tau iu+A(u,\tau)+B(u,\tau)V+C(u,\tau)+D(u,\tau)\lambda\}},\\
M_v&=B(u,\tau)e^{\{Xiu+(r-d)\tau iu+A(u,\tau)+B(u,\tau)V+C(u,\tau)+D(u,\tau)\lambda\}},\\
M_{vv}&=B^2(u,\tau)e^{\{Xiu+(r-d)\tau iu+A(u,\tau)+B(u,\tau)V+C(u,\tau)+D(u,\tau)\lambda\}},\\
M_\lambda&=D(u,\tau)e^{\{Xiu+(r-d)\tau iu+A(u,\tau)+B(u,\tau)V+C(u,\tau)+D(u,\tau)\lambda\}},\\
M_{\lambda\lambda}&=D^2(u,\tau)e^{\{Xu+(r-d)\tau iu+A(u,\tau)+B(u,\tau)V+C(u,\tau)+D(u,\tau)\lambda\}},\\
M_{xv}&=iuB(u,\tau)e^{\{Xiu+(r-d)\tau iu+A(u,\tau)+B(u,\tau)V+C(u,\tau)+D(u,\tau)\lambda\}}\\
M_\tau&=[(r-d)iu+A_\tau(u,\tau)+B_\tau(u,\tau)V+C_\tau(u,\tau)+D_\tau(u,\tau)\lambda]\\
&\quad e^{\{Xiu+(r-d)\tau iu+A(u,\tau)+B(u,\tau)V+C(u,\tau)+D(u,\tau)\lambda\}},
\end{aligned} \tag{۴۳.۴}$$

با جای‌گزاری (۴۳.۴) در (۴۰.۴) داریم

$$\begin{aligned}
&[-(r-d)iu-A_\tau(u,\tau)-B_\tau(u,\tau)V-C_\tau(u,\tau)-D_\tau(u,\tau)\lambda+(r-d)iu\\
&-\frac{1}{2}Viu-\lambda miu-\frac{1}{2}Vu^2+k_v\theta_vB(u,\tau)-k_vVB(u,\tau)+\frac{1}{2}\varepsilon_v^2VB^2(u,\tau)\\
&+\rho Viu\varepsilon_v\Phi B(u,\tau)+k_\lambda\theta_\lambda D(u,\tau)-k_\lambda\lambda D(u,\tau)+\frac{1}{2}\varepsilon_\lambda^2\lambda D^2(u,\tau)+\lambda U(iu)]M(iu)=0,
\end{aligned} \tag{۴۴.۴}$$

سپس به دستگاه معادلات زیر دست می‌یابیم

$$A_\tau(u,\tau)+C_\tau(u,\tau)=k_v\theta_vB(u,\tau)+k_\lambda\theta_\lambda(u,\tau)D(u,\tau), \tag{۴۵.۴}$$

$$B_\tau(u,\tau)=-\frac{1}{2}(ui+u^2)-(k_v-\rho\varepsilon_viu)B(u,\tau)+\frac{1}{2}\varepsilon_v^2B^2(u,\tau), \tag{۴۶.۴}$$

$$D_\tau(u,\tau)=\varLambda(iu)-k_\lambda D(u,\tau)+\frac{1}{2}\varepsilon_\lambda^2D^2(u,\tau), \tag{۴۷.۴}$$

که در آن

$$\varLambda(iu)=U(iu)-miu=\frac{p}{1-iu\mu_u}+\frac{q}{1+\mu_d}-1-iu(\frac{p}{1-\mu_u}+\frac{q}{1+\mu_d}-1).$$

ابتدا معادله دیفرانسیل ریکاتی (۴۶.۴) را حل می کنیم. قرار می‌دهیم

$$B(u,\tau)=-\frac{2O'(\tau)}{\varepsilon_v^2O(\tau)}, \tag{۴۸.۴}$$

داریم

$$O''(\tau) + (k_v - \rho\varepsilon_v iu)O'(\tau) - \frac{\varepsilon_v^2}{4}(iu + u^2)O(\tau) = 0. \tag{۴۹.۴}$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل (۴۹.۴) به صورت زیر است

$$O(\tau) = C_1 e^{-\frac{1}{2}\phi_- \tau} + C_2 e^{\frac{1}{2}\phi_+ \tau}, \tag{۵۰.۴}$$

که در آن

$$\begin{aligned} \phi_\pm &= \mp(k_v - \rho\varepsilon_v iu) + \varsigma, \\ \varsigma &= \sqrt{(k_v - \rho\varepsilon_v iu)^2 + \varepsilon_v^2(iu + u^2)}, \end{aligned} \tag{۵۱.۴}$$

پس

$$\begin{cases} O(\tau) = C_1 e^{-\frac{1}{2}\phi_- \tau} + C_2 e^{\frac{1}{2}\phi_+ \tau}, \\ O'(\tau) = -\frac{1}{2}\phi_- C_1 e^{-\frac{1}{2}\phi_- \tau} + \frac{1}{2}\phi_+ C_2 e^{\frac{1}{2}\phi_+ \tau}, \end{cases} \to \begin{cases} O(0) = C_1 + C_2, \\ O'(0) = -\frac{1}{2}\phi_- C_1 + \frac{1}{2}\phi_+ C_2, \end{cases} \tag{۵۲.۴}$$

با حل دستگاه (۵۲.۴) مقدار C_1 و C_2 را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} O'(0) &= -\frac{1}{2}\phi_-(O(0) - C_2) + \frac{1}{2}\phi_+ C_2 \\ &= -\frac{1}{2}\phi_- O(0) + \frac{1}{2}\phi_- C_2 + \frac{1}{2}\phi_+ C_2 \\ &= -\frac{1}{2}\phi_- O(0) + C_2\frac{1}{2}(\phi_- + \phi_+) \\ &= -\frac{1}{2}\phi_- O(0) + \frac{1}{2}C_2(-(k_v - \rho\varepsilon_v iu) + \varsigma + (k_v - \rho\varepsilon_v iu + \varsigma)) \\ &= -\frac{1}{2}\phi_- O(0) + C_2\varsigma = 0, \end{aligned} \tag{۵۳.۴}$$

داریم $C_1 = \frac{\phi_+ O(0)}{2\varsigma}$، $C_2 = \frac{\phi_- O(0)}{2\varsigma}$. با جای‌گذاری (۵۲.۴) در (۴۸.۴) داریم

$$\begin{aligned} B(u,\tau) &= -\frac{2}{\varepsilon_v^2}\frac{-\frac{1}{2}C_1\phi_- e^{-\frac{1}{2}\phi_- \tau} + \frac{1}{2}C_2\phi_+ e^{\frac{1}{2}\phi_+ \tau}}{C_1 e^{-\frac{1}{2}\phi_- \tau} + C_2 e^{\frac{1}{2}\phi_+ \tau}} \\ &= -\frac{2}{\varepsilon_v^2}\frac{-\frac{1}{2}\frac{\phi_+ O(0)}{2\varsigma}\phi_- e^{-\frac{1}{2}\phi_- \tau} + \frac{1}{2}\frac{\phi_- O(0)}{2\varsigma}\phi_+ e^{\frac{1}{2}\phi_+ \tau}}{\frac{\phi_+ O(0)}{2\varsigma}e^{-\frac{1}{2}\phi_- \tau} + \frac{\phi_- O(0)}{2\varsigma}e^{\frac{1}{2}\phi_+ \tau}} \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_v^2}\frac{-\phi_+\phi_- e^{-\frac{1}{2}\phi_- \tau} + \phi_-\phi_+ e^{\frac{1}{2}\phi_+ \tau}}{\phi_+ e^{-\frac{1}{2}\phi_- \tau} + \phi_- e^{\frac{1}{2}\phi_+ \tau}} \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_v^2}\frac{\phi_-\phi_+(e^{\frac{1}{2}\phi_+ \tau} - e^{-\frac{1}{2}\phi_- \tau})}{\phi_+ e^{-\frac{1}{2}\phi_- \tau} + \phi_- e^{-\frac{1}{2}\phi_+ \tau}} \\ &= -(iu + u^2)\frac{e^{\frac{1}{2}\phi_+ \tau} - e^{-\frac{1}{2}\phi_- \tau}}{\phi_+ e^{-\frac{1}{2}\phi_- \tau} + \phi_- e^{\frac{1}{2}\phi_+ \tau}} \end{aligned} \tag{۵۴.۴}$$

$$= -(iu + u^۲)\frac{۱ - e^{-\frac{۱}{۲}\phi_-\tau - \frac{۱}{۲}\phi_+\tau}}{\phi_+ e^{-\frac{۱}{۲}\phi_-\tau - \frac{۱}{۲}\phi_+\tau} + \phi_-}$$
$$= -(iu + u^۲)\frac{۱ - e^{-\varsigma\tau}}{\phi_+ e^{-\varsigma\tau} + \phi_-},$$

از طرفی چون $A_\tau(u,\tau) = k_v\theta_v B(u,\tau)$ و سپس جای‌گذاری در (۵۴.۴) داریم

$$\begin{aligned}
A(u,\tau) &= k_v\theta_v \int_\circ^\tau B(u,s)ds \\
&= k_v\theta_v \int_\circ^\tau -\frac{۲}{\varepsilon_v^۲}\frac{O'(s)}{O(s)} \\
&= -\frac{۲k_v\theta_v}{\varepsilon_v^۲} ln[\frac{O(\tau)}{O(\circ)}] \\
&= -\frac{۲k_v\theta_v}{\varepsilon_v^۲} ln[\frac{\frac{\phi_+O(\circ)}{۲\varsigma}e^{-\frac{۱}{۲}\phi_-\tau} + \frac{\phi_-O(\circ)}{۲\varsigma}\phi_+ e^{\frac{۱}{۲}\phi_+\tau}}{\frac{\phi_+O(\circ)}{۲\varsigma} + \frac{\phi_-O(\circ)}{۲\varsigma}\phi_+}] \\
&= -\frac{۲k_v\theta_v}{\varepsilon_v^۲} ln[\frac{\phi_+ e^{-\frac{۱}{۲}\phi_-\tau} + \phi_- e^{\frac{۱}{۲}\phi_+\tau}}{۲\varsigma}] \\
&= -\frac{۲k_v\theta_v}{\varepsilon_v^۲} ln[\frac{\frac{\phi_+ e^{-\varsigma\tau} + \phi_-}{۲\varsigma}}{e^{\frac{۱}{۲}\phi_+(\tau)}}] \\
&= -\frac{۲k_v\theta_v}{\varepsilon_v^۲} ln[e^{\frac{۱}{۲}\phi_+(\tau)}(\frac{\phi_- + \phi_+ e^{-\varsigma\tau}}{۲\varsigma})] \\
&= -\frac{k_v\theta_v}{\varepsilon_v^۲}(\phi_+\tau + ۲ln[\frac{\phi_+ e^{-\varsigma\tau}}{۲\varsigma}]),
\end{aligned} \tag{۵۵.۴}$$

سپس معادله دیفرانسیل ریکاتی (۴۷.۴) را حل می کنیم، قرار می‌دهیم

$$D(u,\tau) = -\frac{۲O'(\tau)}{\varepsilon_\lambda^۲ O(\tau)}, \tag{۵۶.۴}$$

داریم

$$O''(\tau) + k_\lambda O'(\tau) + \frac{\varepsilon_\lambda^۲}{۲}\Lambda(iu)O(\tau) = \circ. \tag{۵۷.۴}$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیلی (۵۷.۴) به صورت زیر است

$$O(\tau) = C_۳ e^{-\frac{۱}{۲}\psi_-\tau} + C_۴ e^{\frac{۱}{۲}\psi_+\tau}, \tag{۵۸.۴}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
\psi_\pm &= \mp k_\lambda + \xi, \\
\xi &= \sqrt{k_\lambda^۲ - ۲\varepsilon_\lambda^۲\Lambda(iu)},
\end{aligned} \tag{۵۹.۴}$$

پس

(۶۰.۴)
$$\begin{cases} O(\tau)=C_3e^{-\frac{1}{2}\psi_-\tau}+C_4e^{\frac{1}{2}\psi_+\tau}, \\ O'(\tau)=-\frac{1}{2}\psi_-e^{-\frac{1}{2}\psi_-\tau}C_3+\frac{1}{2}\psi_+e^{\frac{1}{2}\psi_+\tau}C_4, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} O(0)=C_3+C_4, \\ O'(0)=-\frac{1}{2}\psi_-C_3+\frac{1}{2}\psi_+C_4, \end{cases}$$

با حل دستگاه بالا مقدار C_3 و C_4 به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} O'(0)&=-\frac{1}{2}\psi_-(O(0)-C_4)+\frac{1}{2}\psi_+C_4 \\ &=-\frac{1}{2}\psi_-O(0)+\frac{1}{2}\psi_-C_4+\frac{1}{2}\psi_+C_4 \\ &=-\frac{1}{2}\psi_-O(0)+C_4\frac{1}{2}(\psi_-+\psi_+) \\ &=-\frac{1}{2}\psi_-O(0)+C_4\frac{1}{2}(-k_\lambda+\xi+k_\lambda+\xi) \\ &=-\frac{1}{2}\psi_-O(0)+C_4\xi=0, \end{aligned} \qquad (۶۱.۴)$$

داریم $C_3=\frac{\psi_+O(0)}{2\xi}$، $C_4=\frac{\psi_-O(0)}{2\xi}$. باجای‌گذاری (۶۰.۴) در (۵۶.۴) داریم

$$\begin{aligned} D(u,\tau)&=-\frac{2}{\varepsilon_\lambda^2}\frac{-\frac{1}{2}C_3\psi_-e^{-\frac{1}{2}\psi_-\tau}+\frac{1}{2}C_4\psi_+e^{\frac{1}{2}\psi_+\tau}}{C_3e^{-\frac{1}{2}\psi_-\tau}+C_4e^{\frac{1}{2}\psi_+\tau}} \\ &=-\frac{2}{\varepsilon_\lambda^2}\frac{-\frac{1}{2}\frac{\psi_+O(0)}{2\xi}\psi_-e^{-\frac{1}{2}\psi_-\tau}+\frac{1}{2}\frac{\psi_-O(0)}{2\xi}\psi_+e^{\frac{1}{2}\psi_+\tau}}{\frac{\psi_+O(0)}{2\xi}e^{-\frac{1}{2}\psi_-\tau}+\frac{\psi_-O(0)}{2\xi}e^{\frac{1}{2}\psi_+\tau}} \\ &=-\frac{1}{\varepsilon_\lambda^2}\frac{-\psi_+\psi_-e^{-\frac{1}{2}\psi_-\tau}+\psi_-\psi_+e^{\frac{1}{2}\psi_+\tau}}{\psi_+e^{-\frac{1}{2}\psi_-\tau}+\psi_-e^{\frac{1}{2}\psi_+\tau}} \\ &=-\frac{1}{\varepsilon_\lambda^2}\frac{\psi_-\psi_+(e^{\frac{1}{2}\psi_+\tau}-e^{-\frac{1}{2}\psi_-\tau})}{\psi_+e^{-\frac{1}{2}\phi_-\tau}+\psi_-e^{-\frac{1}{2}\psi_+\tau}} \\ &=2\Lambda(iu)\frac{(1-e^{-\frac{1}{2}\psi_-\tau-\frac{1}{2}\psi_+\tau})}{\psi_+e^{-\frac{1}{2}\psi_-\tau-\frac{1}{2}\psi_+\tau}+\psi_-} \\ &=2\Lambda(iu)\frac{e^{-\xi\tau}}{\psi_-+\psi_+e^{-\xi\tau}}, \end{aligned} \qquad (۶۲.۴)$$

از طرفی چون $C_\tau(u,\tau)=k_\lambda\theta_\lambda D(u,\tau)$ وسپس جای‌گذاری در (۶۲.۴) داریم

$$\begin{aligned} C(u,\tau)&=k_\lambda\theta_\lambda\int_0^\tau B(\Phi,s)ds \\ &=k_\lambda\theta_\lambda\int_0^\tau-\frac{2}{\varepsilon_\lambda^2}\frac{O'(s)}{O(s)}ds \\ &=-\frac{2k_\lambda\theta_\lambda}{\varepsilon_\lambda^2}ln[\frac{O(\tau)}{O(0)}] \\ &=-\frac{2k_\lambda\theta_\lambda}{\varepsilon_\lambda^2}ln[\frac{\frac{\psi_+O(0)}{2\xi}e^{-\frac{1}{2}\psi_-\tau}+\frac{\psi_-O(0)}{2\xi}e^{\frac{1}{2}\psi_+(\tau)}}{\frac{\psi_+O(0)}{2\xi}+\frac{\psi_-O(0)}{2\xi}}] \end{aligned} \qquad (۶۳.۴)$$

$$= -\frac{۲k_\lambda\theta_\lambda}{\varepsilon_\lambda^۲} ln[\frac{\psi_+ e^{-\frac{۱}{۲}\psi_-(\tau)} + \psi_- e^{\frac{۱}{۲}\psi_+(\tau)}}{۲\xi}]$$
$$= -\frac{۲k_\lambda\theta_\lambda}{\varepsilon_\lambda^۲} ln[\frac{\psi_+ e^{-\frac{۱}{۲}\psi_-\tau-\frac{۱}{۲}\psi_+\tau} + \psi_-}{\frac{۲\xi}{e^{\frac{۱}{۲}\psi_+\tau}}}]$$
$$= -\frac{k_\lambda\theta_\lambda}{\varepsilon_\lambda^۲}[\psi_+\tau + ln(\frac{\psi_+ e^{-\xi\tau} + \psi_-}{۲\xi})]$$

باقراردادن رابطه (۶۴.۴) در رابطه (۴۲.۴) تابع مشخصه مختلط مدل پرش نمایی مضاعف بانوسان وشدت تصادفی به دست می‌آید. بنابراین فرمولی براي قیمت‌گذاري اختیار تحت مدل پرش نمایی مضاعف به فرم زیر به دست آمده است. در بخش بعد با استفاده از این فرمول برخی نتایج عددي در خصوص قیمت گذاري اختیار اروپایی تحت مدل پرش نمایی مضاعف را به دست آورده و نشان می‌دهیم که این فرمول قابلیت محاسباتی دارد.

$$\begin{aligned}
A(u,\tau) &= -\frac{k_v\theta_v}{\varepsilon_v^۲}(\phi_+\tau + ۲ln[\frac{\phi_+ e^{-\varsigma\tau}}{۲\varsigma}]),\\
B(u,\tau) &= -(iu+u^۲)\frac{۱-e^{\varsigma\tau}}{\phi_+ e^{\varsigma\tau}+\phi_-},\\
C(u,\tau) &= -\frac{k_\lambda\theta_\lambda}{\varepsilon_\lambda^۲}[\psi_+\tau + ln(\frac{\psi_+ e^{-\xi\tau}+\psi_-}{۲\xi})],\\
D(u,\tau) &= ۲\Lambda(iu)\frac{۱-e^{-\xi\tau}}{\psi_- + \psi_+ e^{-\xi\tau}},\\
\psi_\pm &= \mp k_\lambda + \xi,\\
\xi &= \sqrt{k_\lambda^۲ - ۲\varepsilon_\lambda^۲\Lambda(\Phi)},\\
\phi_\pm &= \mp(k_v - \rho\varepsilon_v iu) + \varsigma,\\
\varsigma &= \sqrt{(k_v-\rho\varepsilon_v iu)^۲ + \varepsilon_v^۲(iu+u^۲)}.
\end{aligned} \tag{۶۴.۴}$$

۴.۴ قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی با استفاده از تبدیل فوریه سریع

در این بخش یک روش عددی برای قیمت‌گذاری اختیار معامله که در آن تابع مشخصه فرآیند قیمت دارایی پایه به کار گرفته شده معرفی می‌کنیم این روش توسط کارو مدان[۷] در سال ۱۹۹۹ برپایه تبدیل فوریه سریع معرفی شد [۱۰].

انگیزه استفاده از تبدیل فوریه سریع به دو دلیل است از یک سو، سرعت برتر این الگوریتم

[۷] Carr and Madan

که تاثیر بالایی بر محاسبه قیمت‌ها برای طیف وسیعی از قیمت‌های توافقی دارد، از سوی دیگر در اغلب مدل‌ها تابع مشخصه لگ_قیمت، معلوم بوده و نسبت به تابع چگالی آن‌ها فرم ساده‌تری دارد در صورتی که تابع چگالی لگ_قیمت همیشه معلوم نیست و در برخی موارد فرم بسته‌ای دارد در این رویکرد فرض بر این است که به طور تحلیلی از تابع مشخصه لگ_قیمت استفاده می‌شود ایده اصلی این روش، استفاده از تبدیل فوریه قیمت‌گذاری اختیار معامله و سپس استفاده از تبدیل فوریه معکوس برای محاسبه قیمت اختیار است.
فرض کنید $C(K)$ تابع قیمت اختیار خرید با قیمت توافقی K و زمان سررسید T باشد در این صورت قیمت‌گذاری اختیار خرید تحت اندازه ریسک خنثی $\mathbb{Q}$ به فرم زیر است

$$C(S,r,V,t,K) = E^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}(S_T-K)^+],$$

که ارزش اختیار معامله در زمان اولیه $t=0$ به صورت زیر است

$$c(K) = C(S,r,V,0,K) = E^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}(S_T-K)^+], \qquad (۶۵.۴)$$

که در آن r نرخ بهره بدون ریسک، و بازده اختیار معامله اروپایی به صورت زیر باشد

$$(S_T-K)^+ = max\{(S_T-K),0\}.$$

فرض کنیم $c(k)=c(e^k)=c(K)$، $X_T=lnS_T$، $k=lnK$ دراین صورت خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
c(k) &= e^{-rT}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{X_T}-e^k)q_T(X_T)dX_T\\
c(k) &= e^{-rT}\int_{-\infty}^{k}(e^{X_T}-e^k)q_T(X_T)dX_T + e^{-rT}\int_{k}^{+\infty}(e^{X_T}-e^k)q_T(X_T)dX_T\\
c(k) &= e^{-rT}\int_{k}^{+\infty}(e^{X_T}-e^k)q_T(X_T)dX_T,
\end{aligned} \qquad (۶۶.۴)$$

که در آن $q_T(X_T)$ تابع چگالی فرآیند تصادفی X_T است. توجه کنید وقتی k به سمت بی‌نهایت میل کند آن‌گاه تابع $c(k)$ به سمت S_0 میل می‌کند، کارو مدان قیمت اصلاح شده اختیار خرید را به صورت زیر معرفی کردند[۱۰].

$$c(k) \equiv e^{\alpha k}c(k), \quad \forall\alpha>0 \qquad (۶۷.۴)$$

که در آن α ضریب اصلاح شده قیمت خرید و وابسته به مدل قیمت دارایی پایه S_t است. این پارامتر باید طوری انتخاب شود که داشته باشیم

$$E(S_T^{\alpha+1})<\infty \qquad \varpi_T(u)(-(\alpha+1)i)<\infty$$

تبدیل فوریه روی $c(k)$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\varpi_T(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuk}c(k)dk, \qquad (۶۸.۴)$$

با جای‌گذاری معادله (۶۶.۴) در (۶۷.۴) و سپس در (۶۸.۴) داریم

$$\begin{aligned}
\varpi_T(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuk} e^{-rT} e^{\alpha k} \int_{k}^{+\infty} (e^{X_T} - e^{k}) q_T(X_T) dX_T dk \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rT} q_T(X_T) \int_{-\infty}^{X_T} (e^{X_T} - e^{k}) e^{\alpha k} e^{iuk} dk dX_T \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rT} q_T(X_T) \int_{-\infty}^{X_T} [e^{X_T+\alpha k+iuk} - e^{k+\alpha k+iuk}] dk dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rT} q_T(X_T) [\frac{1}{\alpha+iu} e^{X_T(1+\alpha+iu)} - \frac{1}{1+\alpha+iu} e^{X_T(1+\alpha+iu)}] dX_T \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rT} q_T(X_T) \frac{1}{(\alpha+iu)(1+\alpha+iu)} e^{iX_T(u-(1+\alpha)i)} \\
&= \frac{e^{-rT} \phi_T(u-(\alpha+1)i)}{\alpha^2+\alpha-u^2+(2\alpha+1)u},
\end{aligned} \tag{۶۹.۴}$$

که در آن ϕ_T تابع مشخصه X_T تحت اندازه ریسک خنثی است. طبق تعریف، معکوس تبدیل فوریه تابع $c(k)$ به صورت زیر داریم

$$c(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuk} \varpi_T(u) du \tag{۷۰.۴}$$

با جای‌گذاری (۶۷.۴) در (۷۰.۴)داریم

$$c(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha k} e^{-iuk} \varpi_T(u) du$$

با به کار بردن قاعده ذوزنقه‌ای[۸] وقرار دادن $u_j = \nu(j-1)$ و ν طول گام انتگرال تقریبی برای $c(k)$ به صورت زیر خواهد بود

$$c(k) \approx \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \sum_{j=0}^{N} e^{-iuk} \varpi_T(u_j) \nu \tag{۷۱.۴}$$

که در آن N توانی از ۲ است. روش تبدیل فوریه سریع به دلیل مزایای آن در مقایسه با راه حل بسته استفاده می‌شود، استفاده از تبدیل فوریه سریع با روش ریسک خنثی سهولت در محاسبات را فراهم می‌کند. برای N مقدار k، می توانیم اندازه z را ایجاد کنیم ارزش k به صورت زیر است

$$k_u = -b + z(a-1) \qquad a = 1, \cdots, N. \tag{۷۲.۴}$$

از معادله (۷۲.۴) می‌توان استباط کرد که بازه لگاریتمی قیمت توافقی $[-b, b]$ است که درآن $b = \frac{Nz}{2}$، باجای‌گزینی معادله (۷۲.۴) در معادله (۷۱.۴) و قرار دادن $u_j = \nu(j-1)$ خواهیم داشت

$$c(k_u) \approx \frac{e^{-\alpha k_u}}{\pi} \sum_{j=0}^{N} e^{-iz\nu(j-1)(a-1)} e^{ibu_j} \varpi_T(u_j) \nu \tag{۷۳.۴}$$

[۸] method Trapezoid

به منظور اعمال تبدیل فوریه سریع $vz = \frac{2\pi}{N}$ تعریف می‌کنیم. برای به دست آوردن انتگرال دقیق با مقادیر بزرگتر v، روش سیمسون [۹] را برای محاسبه حاصل جمع به کار می‌بریم با استفاده از قانون سیمسون و فرمول (۷۳.۴) اختیار خرید به صورت زیر به دست می‌آید

$$c(k_u) \approx \frac{e^{-\alpha k_u}}{\pi} \sum_{j=1}^{N} e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(a-1)} e^{ibu_j} \varpi_T(u_j) \frac{\nu}{3}[3 + (-1)^j - \mathbb{I}_{j-1}] \qquad (۷۴.۴)$$

که درآن $\mathbb{I}$ تابع دیریکله است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbb{I} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

فرمول فوق، فرمول قیمت اصلاح شده اختیار خرید با استفاده از روش تبدیل فوریه سریع است.

۵.۴ قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی با استفاده از شبیه سازی مونت کارلو

شبیه‌سازی مونت کارلو روشی برای تقریب زدن انتگرال به کمک اعداد تصادفی می‌باشد ایده اصلی این روش تبدیل انتگرال به یک امید ریاضی بر اساس یک تابع چگالی احتمال مشخص، تولید نمونه تصادفی از این تابع چگالی واستفاده از قانون اعداد بزرگ برای تقریب این امید ریاضی است.

$$C(S_T) = e^{-rT} E^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+ | \mathcal{F}] \qquad (۷۵.۴)$$

فرض کنید فرآیند قیمت دارایی از مدل پرش نمایی مضاعف (۱.۴) پیروی می‌کند، گسسته‌سازی اویلر[۱۰][۲۴] روشی برای شبیه سازی تقریبی معادلات دیفرانسیل است ایده اصلی در این روش بسط تیلور مرتبه اول از معادله دیفرانسیل است فرض کنید $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = T$ در این صورت داریم

(۷۶.۴)

$$\begin{cases} \int_t^{t+\Delta t} \frac{dS_{(u)}}{S(u)} = \int_t^{t+\Delta t} (r - d - \lambda(t)m)du + \int_t^{t+\Delta t} \sqrt{V(u)} dW_s(u) + \int_t^{t+\Delta t} (e^J - 1), \\ lnS(t+\Delta t) - lnS(t) = (r - d - \lambda^+(t)m)\Delta t + \sqrt{V^+(t)\Delta t}\varepsilon_1 + (e^J - 1)[N(t+\Delta t) - N(t)], \end{cases}$$

[۹] Simpson

[۱۰] Euler

$$\begin{cases} \int_t^{t+\Delta t} dV(u) = \int_t^{t+\Delta t} k_v(\theta_v - V(u))du + \int_t^{t+\Delta t} \varepsilon_v \sqrt{V(u)} dW_v(u), \\ V(t+\Delta t) - V(t) = k_v(\theta_v - V^+(t))\Delta t + \varepsilon_v \sqrt{V^+(t)\Delta t}(\rho\varepsilon_۱ + \sqrt{۱-\rho^۲}\varepsilon_۲), \end{cases} \quad (۷۷.۴)$$

$$\begin{cases} \int_t^{t+\Delta t} d\lambda(u) = \int_t^{t+\Delta t} k_\lambda(\theta_\lambda - \lambda(u))du + \int_t^{t+\Delta t} \varepsilon_\lambda \sqrt{\lambda(u)} dW_\lambda(u), \\ \lambda(t+\Delta t) - \lambda(t) = k_\lambda(\theta_\lambda - \lambda^+(t))\Delta t + \varepsilon_\lambda \sqrt{\lambda^+(t)\Delta t}\varepsilon_۳, \end{cases} \quad (۷۸.۴)$$

که در آن $V^+ = max(V, ۰)$، $\lambda^+ = max(\lambda, ۰)$ و $\varepsilon_۱$، $\varepsilon_۲$، $\varepsilon_۳$ توزیع نرمال استاندارد هستند، قیمت‌گذاری اختیار معامله با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو به فرم زیر است

$$C(t, X_T = lnS_T) = \frac{e^{-r(T-t)}}{n} \sum_{i=۱}^{n} max(e^{X_T{}^i} - K, ۰) \quad (۷۹.۴)$$

که در آن n تعداد مسیرهای شبیه سازی شده و X_T ارزش شبیه سازی شده در هرگام.

۶.۴ نتایج عددی

دراین بخش می‌خواهیم فرمول‌های قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت مدل پرش نمایی مضاعف که دربخش‌های قبل حاصل شده‌اند رابانتایج عددی معرفی و مقایسه کنیم.
فرض کنید اختیار خریدی با مجموعه‌ی پارامترهای $N = ۴۰۹۸$، $v = \frac{۶۰۰}{۴۰۹۸}$، $z = \frac{\Pi}{۳۰۰}$، $\alpha = ۱/۱۸$، $k_v = ۰/۳$، $\theta_v = ۰/۶$، $\varepsilon_v = ۰/۱$، $\varepsilon_\lambda = ۰/۳$، $k_\lambda = ۵$، $\theta_\lambda = ۰/۶$، $\rho = -۰/۲۵$، $\eta_u = ۰/۰۳$، $\eta_d = ۰/۱۳$، $p = ۰/۴$، $q = ۰/۶$، ونرخ بهره $r = ۰/۰۵$، ونرخ سود نقدی $d = ۰/۰۵$، وارزش اولیه $S_۰ = ۱۰۰$، وتلاطم اولیه $V_۰ = ۰/۱۵$، وشدت اولیه $\lambda_۰ = ۳$، با سررسید $T = ۰/۵$، داشته باشید در این صورت با جای‌گذاری در فرمول قیمت‌گذاری تبدیل فوریه سریع با قیمت توافقی مختلف مقایسه صورت گرفته است، در شبیه‌سازی مونت‌کارلو تعداد مسیرهای شبیه سازی شده $n = ۵۰۰$، و $\Delta t = ۰/۰۰۱$ و با جای‌گذاری در فرمول قیمت‌گذاری شبیه‌سازی مونت‌کارلو با قیمت توافقی مختلف مقایسه صورت گرفته است.

نتایج عددی در جدول ۱.۴ نشان می‌دهد تبدیل فوریه سریع که ماتریس قیمت‌ها با قیمت توافقی متفاوت را تولید می‌کند روشی کارا برای قیمت گذاری اختیار معامله تحت مدل پرش نمایی مضاعف است.

جدول ۱.۴: مقایسه قیمت‌گذاری اختیار خرید روش شبیه سازی مونت‌کارلو و تبدیل فوریه سریع

قیمت توافقی	روش تبدیل فوریه سریع	شبیه‌سازی مونت کارلو	تفاوت
۹۰/۲۸۳۰	۱۰/۴۴۵۸	۱۰/۴۳۹۷۳	۰/۰۵۸۱۴۳
۹۲/۱۹۳۸	۹/۶۷۳۱	۹/۶۷۵۲۵	−۰/۰۲۲۲۲
۹۴/۱۴۵۱	۸/۹۳۲۶	۸/۹۳۱۱۸	۰/۰۱۵۸۹۹
۹۶/۱۳۷۷	۸/۲۲۵۴	۸/۲۱۹۸۲	۰/۰۵۵۷۱۲
۹۸/۱۷۲۴	۷/۵۵۲۲	۷/۵۴۸۷۷	۰/۰۴۵۴۳۸
۱۰۰/۲۵۰۲	۶/۹۱۳۵	۶/۹۱۰۱۵	۰/۰۴۸۴۷۹
۱۰۲/۳۷۲۰	۶/۳۰۹۶	۶/۳۱۰۷۲	−۰/۰۱۷۷۵
۱۰۴/۵۳۸۷	۵/۷۴۰۷	۵/۷۴۱۳۳	−۰/۰۱۰۹۷
۱۰۶/۷۵۱۲	۵/۲۰۶۵	۵/۲۱۲۴۳	−۰/۱۱۳۷۷
۱۰۷/۸۷۵۰	۴/۹۵۲۵	۴/۹۶۰۰۲	−۰/۱۵۱۶۱
۱۱۰/۱۵۸۱	۴/۴۷۰۰	۴/۴۷۶۸۳	−۰/۱۵۲۵۶

فصل ۵

پیوست

روش سیمسون

در آنالیز عددی روش سیمسون [۱] یکی از روش‌های تقریب مقدار انتگرال $\int_a^b F(x)dx$ وبه صورت زیر تعریف می‌شود

$$\int_a^b F(x)dx \simeq \frac{b-a}{۶}[F(a)+۴F(\frac{b+a}{۲})+F(b)], \tag{۱.۵}$$

مقدار خطا در این روش برابر است با

$$|\int_a^b F(x)dx-(\frac{b-a}{۶}[F(a)+۴F(\frac{b+a}{۲})+F(b)])| \leq |-\frac{h^۳}{۹۰}F^۴(\xi)|, \quad \xi \in [x_i, x_{i+۱}]. \tag{۲.۵}$$

روش سیمسون یک تقریب مناسب از انتگرال $\int_a^b F(x)dx$ را در صورتی که بازه انتگرال‌گیری کوچک باشد به ما می‌دهد در اغلب اوقات بازه انتگرال‌گیری کوچک نیست لذا بازه را به زیر بازه های کوچکتری تقسیم می‌کنیم در این حالت روش سیمسون را در زیر بازه ها به کار برده ونتایج را باهم جمع می‌کنیم به این روش سیمسون مرکب گویند فرض کنید n عددی صحیح، مثبت و دلخواه باشد $h=\frac{b-a}{n}$ و $x_۰=a, x_۱=a+h, \ldots, x_i=b$ آن گاه فرمول تقریب انتگرال

[۱] Simpson

سیمسون مرکب عبارت‌اند از

$$\int_a^b F(x)dx = \frac{h}{۳}[F(x_۰) + ۲\sum_{i=۱}^{\frac{n}{۲}-۱} F(x_{۲i}) + ۴\sum_{i=۱}^{\frac{n}{۲}-۱} F(x_{۲i-۱}) + F(x_n)], \qquad (۳.۵)$$

فرمول (۳.۵) رابه صورت زیر می‌توان نوشت

$$\int_a^b F(x)dx \simeq \frac{h}{۳}[F(x_۰) + ۴F(x_۱) + ۲F(x_۲) + \cdots + F(x_n)], \qquad (۴.۵)$$

مقدار خطا در روش سیمسون مرکب برابر است با

$$\begin{aligned} &|\int_a^b F(x)dx - (\frac{h}{۳}[F(x_۰) + ۲\sum_{i=۱}^{-\frac{n}{۲}-۱} F(x_i) + ۴\sum_{i=۱}^{\frac{n}{۲}-۱} F(x_{۲i-۱}) + F(x_n)])|, \\ &\leq |-\frac{h^k}{۱۸۰}(b-a)F^k(\xi)|, \quad \xi \in [x_i, x_{i+۱}]. \end{aligned} \qquad (۵.۵)$$

مراجع

[۱] سیاح س. و صالح آبادی ع.، (۱۳۸۴)، ’’**مبانی مهندسی مالی و مدیریت ریسک**’’، گروه رایانه تدبیر پرداز.

[۲] ظهوری زنگنه ب. و جهانی پور ر.ا.، (۲۰۰۴)، ’’حرکت براونی یا فرآیند وینر: ریاضی مدل ساز پدیده های طبیعی’’، **مجله فرهنگ و اندیشه ریاضی**، ص ۲۰-۱.

[۳] لطیفی ر.، (۱۳۹۵)، پایان نامه ارشد: ’’قیمت‌گذاری اختیار معامله توان تحت مدل تلاطم تصادفی هستون ’’، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود.

[۴] مهردوست ف. و صابر ن.،(۱۳۹۲)، ’’قیمت گذاری اختیار معامله تحت مدل هستون مضاعف با پرش’’، **مجله مدل سازی پیشرفته ریاضی** ، شماره ۲،دوره ۳،ص ۶۰-۴۵.

[۵] نیسی ع.، ملکی ب. و رضائیان ر.، (۱۳۹۵)، ’’ تخمین پارامترهای مدل قیمت گذاری اختیار معامله اروپایی تحت دارایی پایه با تلاطم تصادفی با کمک رهیافت تابع زیان ’’، **مجله مهندسی مالی ومدیریت اوراق بهادار**، شماره ۲۸.

[6] Aliprantis C.D. and Burkinshaw O. (1998), ”**Principles of real analysis** ”, Gulf Professional Publishing.

[7] Bakshi G., Cao, C. and Chen Z. (1997), ”Empirical performance of alternative option pricing models”, **The Journal of finance,** 52(5), 2003-2049.

[8] Bates D.S. (1996), ”Jumps and stochastic volatility: exchange rate processes implicit in deutsche mark options”, **Review of financial studies**, 9(1), 69–107.

[9] Black F. and Scholes M. (1973) , ”The pricing of options and corporate liabilities”, **Journal of political economy** , 637–654.

[10] Carr P. and Madan D. (1999), ”Option valuation using the fast Fourier transform”, **Journal of computational finance**, 2(4), 61-73.

[11] Chalasani P. and Jha, S. (1997), ”**Steven Shreve: Stochastic Calculus and Finance**”, Lecture notes, October.

[12] Chang C., Fuh C.D. and Lin S.K. (2013),” A tale of two regimes: theory and empirical evidence for a Markov-modulated jump diffusion model of equity returns and derivative pricing implications”, **Journal of Banking Finance** , 37, 3204–3217.

[13] Duffie D., Pan J. and Singleton K.(2000),”ransform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions”, **Journal of Econometrica** , 68(6), 1343–1376.

[14] Glasserman P. (2013), ”**MonteCarlo methods in financial engineering**”, 53, Spring scienses & business media.

[15] Hamilton J.D. (1994), ”**Time Series Analysis**”, Princeton University Press, 2.

[16] Heston S. L. (1993), ”A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options”, **Review of financial studies**, 6(2), 327-343.

[17] Huang J. and Zhu W., and Ruan X. (2014),”Option pricing using the fast Fourier transform under the double exponential jump model with stochastic volatility and stochastic intensity”, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 263, 152-159.

[18] Hull J. and White A. (1987) , ”The pricing of options on assets with stochastic volatilities”, **Journal of Finance** , 42(2), 281–300.

[19] Ibrahim S., O’Hara J. and Constantinou N. (2013),”Pricing Power Options under the Heston Dynamics using the FFT”, **Journal of New Trends in Mathematical Sciences**, 1(1), 1-9.

[20] Khal K. and Jackel P. (2007), ”Modeling and simulating of stochastic volatility”, **Dissertation, Bocaraton,Flonida**

[21] Kou S.G. (1976),”A jump-diffusion model for option pricing”, **Journal of Management Science**, 48(8), 1086–1101.

[22] Kou S.G. and Wang H. (2002),” Option pricing under a double exponential jump diffusion model”, **Journal of Management Science** , 50 (9), 1178–1192.

[23] Lewis A.L. (2001),” A simple option formula for general jump-diffusion and other exponential Lévy processes”, **Envision Financial Systems**.

[24] Lord R., Koekkoek R. and van Dijk D. (2010).” A comparison of biased simulation schemes for stochastic volatility models”, **Quantitative Finance**, 10 (2), 177-194.

[25] Merton R.C. (1976),"Option pricing when underlying stock returns are discontinuous",**Journal of Financial Economics**, 3(1), 125–144.

[26] Øksendal B. (2003), "**Stochastic differential equations**", In Stochastic differential equations Springer Berlin Heidelberg, 65-84.

[27] Peszat S. and Zabczyk J. (2007),"**Stochastic partial differential equations with Lévy noise: An evolution equation approach**", Cambridge University Press, 113.

[28] Pillay E. and O'Hara J. (2011), "FFT based option pricing under a mean reverting process with stochastic volatility and jumps", **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 235 (12), 3378–3384.

[29] Santa-Clara P. and Yan S. (2010), " Crashes, volatility, and the equity premium: lessons from Standard and Poor 500 options", **The Review of Economics and Statistics**, 92(2), 435–451.

[30] Scott L. O. (1997), "Pricing stock options in a jump-diffusion model with stochastic volatility and interest rates: applications of Fourier inversion methods", **Journal of Mathematical Finance**, 7(4), 413–426.

[31] Stein E.M. and Stein J.C. (1991),"Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach", **Review Financial Stududies**, 4(4), 727-752.

[32] Sturm A. and Björk, T. (2001), "**Arbitrage Theory in Continuous Time**".

[33] Tanko P. (2003), "**Financial modeling with jump process**", CRC press, 2.

[34] Wong H.Y. and Lo Y.W. (2009), "Option pricing with mean reversion and stochastic volatility", **European Journal of Operational Research**, 197(1), 179–187.

[35] Zhang S. and Wang L. (2013), "Fast Fourier transform option pricing with stochastic interest rate", **Journal of Applied Mathematics and Computation**, 219(23), 10928–10933.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اختیار معامله	Option
اختیار خرید	Call Option
اختیار فروش	Put Option
قیمت توافقی	Strike price
تاریخ انقضا	Exercise price
قیمت توافقی	Stock price
بازده	Pay off
سبد سهام	Portfolio
نرخ بهره	Interest rate
نرخ سود نقدی	Dividend rate
پوشش دهندگان ریسک	To hedge a risk
سفته بازان	Speculation
آربیتراژ	Arbitrage
ادعای مشروط	Contingent Claim
خودتامین	Self financing
تبدیل فوریه سریع	Fast Fourier transform
شبیه سازی مونت کارلو	Monte Carlo
گسسته	Discounted
دوتایی	Binary

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

احتمال	Probability
اندازه	Measure
گسسته	Discrete
توزیع	Distribution
تصادفی	Stochastic
امید ریاضی	Expectation
تابع مشخصه	Characteristic function
حرکت براونی	Brownian motion
فرآیند پواسون	Poisson process
فرآیند لوی	Levy process
ایتو	Ito
تلاطم	Volatility
شدت	Intensity
پرش	Jump
انتشار	Diffusion

Abstract

This thesis is based on the FFT (Fast Fourier Transform) approach for the valuation of options when the underlying asset follows the double exponential jump process with stochastic volatility and stochastic intensity. Our model captures three terms structure of stock prices, the market implied volatility smile, and jump behavior. Via the FFT method, numerical examples using European call options show effectiveness of the proposed model. Meanwhile, numerical results prove that the FFT approach is considerably correct, fast and competent.

keywords: Double exponential jump model, Stochastic volatility, Stochastic intensity, Jump, pricing

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Financial Mathematics

A fast and exact method for option pricing in a market under the double exponential jump model with stochastic volatility and stochastic intensity

By: Raziyeh Askari

Supervisors

Dr. Elham Dastranj

Dr. Mojtaba Mirlohi

Advisor

Somayeh Moghari

July 2017