

حاشا
الرحمن الرحيم



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

رساله دکتری

تعیین کران‌هایی برای عدد ترنسورسال گراف

نگارنده: الهه شریفی

استاد راهنما

دکتر نادر جعفری راد

اسفند ۱۳۹۵

تقدیم به دو وجود مقدس

به آنان که مهر آسمانشان آرام بخش آلام زمینی ام است

به استوارترین تکیه گاهم، دستان پر مهر پدرم

به سبزترین نگاه زندگیم، چشمان مادرم

که هر چه آموختم در مکتب عشق شما آموختم و هر چه بگو شدم قطره ای از دریای بی کران

مهربانیان را پاس نتوانم گفت

سپاس‌گزاری...

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

خدا را شاکرم که به من این توان را داد که این مرحله از زندگی را با سلامتی و سر بلندی پشت سر بگذارم و سر بر آستان پربرکت او می‌سایم که هرچه عزت و سرافرازی هست، از اوست. پس از خدای بلند مرتبه سر تعظیم در برابر پدر و مادرم فرود می‌آورم، بر پایشان بوسه می‌زنم و ایشان را می‌ستایم که تجلی مهر و لطف خداوندی برای من می‌باشند.

لازم می‌دانم از استاد با کمالات و شایسته، جناب آقای دکتر نادر جعفری راد که در کمال سعه‌ی صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و با راهنمایی‌های ارزنده و گهربارشان نقش مهمی در به ثمر رسیدن این پایان نامه داشتند، صمیمانه تقدیر و تشکر نمایم. همچنین از اساتید فرزانه و دلسوز، آقایان دکتر ابراهیم قربانی، دکتر میثم علیشاهی و دکتر صادق رحیمی شعرباف که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند، کمال تشکر و قدردانی را نمایم. باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

الهه شریفی
اسفند ۱۳۹۵

تعهد نامه

اینجانب الهه شریفی دانشجوی دکتری رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان تعیین کران‌هایی برای عدد ترنسورسال گراف، تحت راهنمایی دکتر نادر جعفری راد متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ” دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا ” Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

الهه شریفی
اسفند ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این رساله عدد ترنسورسال گراف را مطالعه کرده و برخی از ویژگی‌ها، کاربردها و کران‌های موجود برای این پارامتر را بیان می‌کنیم. سپس برخی از این کران‌ها را بهبود بخشیده و کران‌های جدیدی برای گراف‌ها، به ویژه گراف‌های همبندی که رأسی با ماکسیمم درجه غیر برشی دارند، ارائه می‌دهیم. به منظور تأکید بر اهمیت کاربردی مسأله ترنسورسال، کران‌هایی که در این رساله ارائه می‌شوند کران‌هایی قابل محاسبه و کارآمد هستند. همچنین تمامی گراف‌هایی را که در تساوی کران‌های جدید صدق می‌کنند، دسته‌بندی می‌کنیم. در پایان نیز ساختار گراف‌های دوبخشی با عدد ترنسورسال مشخص را بررسی می‌کنیم.

کلمات کلیدی: عدد ترنسورسال، عدد استقلال.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. Jafari Rad N. and Sharifi E., *Bounds on the independence number of a graph in terms of order, size and maximum degree*, Discrete Applied Mathematics, 217 (2017), 210-219.
2. Sharifi E. and Jafari Rad N., *A note on the independence number in bipartite graphs*, AUSTRALASIAN JOURNAL OF COMBINATORICS, 66.2 (2016), 344-349.
3. Sharifi E. and Jafari Rad N., *DISTANCE ROMAN DOMINATION IN RANDOM GRAPHS*, ROMANIAN JOURNAL OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE, 6 (2016), 121-125.
4. Sharifi E. and Jafari Rad N., (2016), *New Bounds on the Independence Number of Hypergraphs*, The 25th Iranian Algebra Seminar, Sabzevari, Iran, 343-346.
5. Sharifi E. and Jafari Rad N., (2016), *New Bounds on the Independence Number of Hypergraphs*, The 4th Seminar on Algebra and its Applications, Ardabil, Iran, 209-210.
6. Sharifi E. and Jafari Rad N., (2016), *New Bounds on the Independence Number of connected Graphs*, The 4th Seminar on Algebra and its Applications, Ardabil, Iran, 211-212.
7. Sharifi E. and Jafari Rad N., (2016), *New Bounds on the Independence Number of connected Graphs*, The 47th Annual Iranian Mathematics Conference, Karaj, Iran.
8. Sharifi E. and Jafari Rad N., (2016), *Bounds on the Distance Roman domination Number in graphs*, The 47th Annual Iranian Mathematics Conference, Karaj, Iran.
9. Sharifi E. and Jafari Rad N., (2017), *A characterization of bipartite graphs with given transversal number*, The 9th Graph Theory and Algebraic Combinatorics Conference of Iran, Tehran, Iran.
10. Jafari Rad N. and Sharifi E., *New Bounds on the Independence Number of connected Graphs*, Submitted.

پیشگفتار

این رساله، به بحث در مورد عدد ترنسورسال در گراف‌ها می‌پردازد. یک رأس در یک گراف، یک یال را می‌پوشاند هرگاه رأس مورد نظر بر آن یال واقع شده باشد. یک ترنسورسال (پوشش رأسی) در گراف عبارت است از مجموعه‌ای از رئوس که تمامی یال‌های گراف را می‌پوشاند. عدد ترنسورسال گراف برابر با اندازه کوچک‌ترین ترنسورسال در گراف است. عدد ترنسورسال یکی از مفاهیم بنیادین و پرکاربرد در نظریه گراف محسوب می‌شود. در این رساله عدد ترنسورسال گراف را مطالعه کرده و برخی از ویژگی‌ها، کاربردها و کران‌های موجود برای این پارامتر را بیان می‌کنیم. سپس برخی از این کران‌ها را بهبود بخشیده و کران‌های جدیدی برای این پارامتر ارائه می‌دهیم. همچنین تمامی گراف‌هایی را که در تساوی کران‌های جدید صدق می‌کنند، دسته‌بندی می‌کنیم.

به‌طور کلی، در فصل اول این رساله به ذکر تعاریف و مفاهیم مورد نیاز، مانند مفهوم ترنسورسال و عدد ترنسورسال در گراف‌ها، می‌پردازیم. همچنین ارتباط عدد ترنسورسال را با دیگر پارامترهای نظریه گراف بررسی می‌کنیم. سپس چند کاربرد از این مفهوم را در زمینه‌های مختلف بیان می‌کنیم. کاربردهای این مسأله از دو دیدگاه تئوری و تجربی بررسی می‌شوند. سپس پیچیدگی الگوریتم‌های تخصیص برای پیدا کردن مجموعه ترنسورسال با مینیمم اندازه را بررسی می‌کنیم. در خاتمه، این فصل را با ذکر تاریخچه‌ای مختصر از مفهوم ترنسورسال به پایان می‌رسانیم.

در فصل دوم، به تلاش‌هایی که در راستای تخمین عدد ترنسورسال گراف‌ها انجام شده است اشاره می‌کنیم و چندین کران ارائه شده برای این پارامتر را مطرح می‌کنیم. به‌منظور تأکید بر اهمیت کاربردی مسأله ترنسورسال، کران‌هایی که در این فصل ارائه می‌شوند، کران‌هایی قابل محاسبه و کارآمد هستند. کران‌های این فصل را به سه دسته کران‌های پایین، کران‌های بالا و کران‌های ویژه (کران‌هایی برای گراف‌های خاص) تقسیم‌بندی می‌کنیم.

در فصل سوم، چند کران بالا و قابل محاسبه برای عدد ترنسورسال گراف‌ها ارائه می‌دهیم. کران‌های این فصل براساس مرتبه، اندازه و تعداد رئوس با ماکسیمم درجه گراف هستند. سپس تمامی گراف‌هایی را که در تساوی این کران‌ها صدق می‌کنند، دسته‌بندی می‌کنیم. این کران‌ها برخی از کران‌های ارائه شده در فصل دوم را برای گراف‌هایی با ماکسیمم درجه بزرگ بهبود می‌دهند.

در فصل چهارم نیز چند کران بالا و قابل محاسبه برای عدد ترنسورسال گراف‌های

همبند که دارای رأسی غیر برشی با ماکسیمم درجه هستند، ارائه می‌دهیم. این کران‌ها نیز براساس مرتبه، اندازه و ماکسیمم درجه گراف هستند. همچنین تمامی گراف‌های همبندی که در تساوی این کران‌ها صدق می‌کنند، دسته‌بندی می‌کنیم. نتایج اصلی در این فصل، بهبودی برای کران ارائه شده برای عدد ترنسورسال در [۵۹] است. آنچه که در فصل پنجم مورد بررسی قرار می‌گیرد، مطالعه عدد ترنسورسال در درخت‌ها و به‌طور کلی گراف‌های دوبخشی است. در این فصل، ساختار درخت‌ها و گراف‌های دوبخشی با عدد ترنسورسال مشخص بررسی می‌شود. در واقع ساختار تمام گراف‌های دوبخشی که عدد ترنسورسال آن‌ها کم‌تر یا مساوی نصف مرتبه گراف است، مشخص می‌شوند. سپس به‌عنوان یک نتیجه، روابطی از نوع نردهاس-گدم را برای مجموع عدد ترنسورسال یک درخت و گراف مکملش، ارائه می‌دهیم و ساختار گراف‌هایی را که در این روابط صدق می‌کنند، مشخص می‌کنیم. نتایج این فصل تعمیمی از [۱۱۱] است.

دقت شود که یک ترنسورسال در حقیقت افراز یال‌های گراف به ستاره‌ها و یک مجموعه احاطه‌گر، افراز رأس‌های گراف به ستاره‌هاست. با توجه به این حقیقت، در فصل ششم، نتایج ارائه شده در [۱۱] و [۹۲] در رابطه با مفهوم ترنسورسال در گراف‌های تصادفی را به مفهوم احاطه‌گری در این گراف‌ها تعمیم می‌دهیم. برای این منظور، ابتدا برای هر $k \geq 1$ ، مفهوم r -احاطه‌گری رومی را به r -احاطه‌گری رومی k -فاصله‌ای تعمیم می‌دهیم و پارامتر جدیدی به نام عدد r -احاطه‌گری رومی k -فاصله‌ای برای گراف‌ها تعریف می‌کنیم. سپس چند کران احتمالاتی برای اندازه این پارامتر جدید ارائه می‌دهیم. در پایان نیز عدد r -احاطه‌گری رومی k -فاصله‌ای را در گراف‌های تصادفی بررسی می‌کنیم.

فهرست مطالب

ث	فهرست تصاویر
۱	۱ مقدمات
۱	۱.۱ مقدمه
۲	۲.۱ تعاریف و نمادها
۷	۳.۱ کاربرد مسأله ترنسورسال
۷	۱.۳.۱ ارتباط دیگر پارامترهای نظریه گراف با عدد ترنسورسال
۱۷	۲.۳.۱ کاربرد ترنسورسال در دنیای حقیقی
۲۴	۴.۱ پیچیدگی مسأله ترنسورسال
۲۷	۵.۱ تاریخچه مفاهیم استقلال و ترنسورسال
۲۹	۲ برخی از کران‌های موجود برای عدد ترنسورسال
۲۹	۱.۲ مقدمه
۳۱	۲.۲ کران‌های پایین قابل محاسبه
۳۴	۳.۲ کران‌های بالای قابل محاسبه
۴۱	۱.۳.۲ خانواده \mathcal{F}
۴۴	۴.۲ کران‌های ویژه قابل محاسبه
	۳ کران بالا برای عدد ترنسورسال گراف‌ها براساس مرتبه، اندازه و ماکسیمم درجه
۴۹	۱.۳ مقدمه
۵۰	۲.۳ چند خانواده از گراف‌ها
۵۶	۳.۳ نتایج اصلی
۵۸	۴.۳ اثبات قضیه ۱.۳.۳
۶۲	۵.۳ اثبات قضیه ۲.۳.۳

۶۵	۳.۳.۳ اثبات قضیه	۶.۳
۷۵		عدد ترنسورسال در گراف‌های همبند	۴
۷۵	مقدمه	۱.۴
۷۶	خانواده‌هایی از گراف‌ها	۲.۴
۷۹	نتایج اصلی	۳.۴
۸۱	۱.۴.۳ اثبات قضیه	۴.۴
۱۰۱		عدد ترنسورسال در گراف‌های دوبخشی	۵
۱۰۱	مقدمه	۱.۵
۱۰۲	عدد ترنسورسال گراف‌های دوبخشی	۲.۵
۱۰۳	گراف‌های دوبخشی با عدد ترنسورسال برابر نصف مرتبه	۳.۵
۱۰۴	گراف‌های دوبخشی با عدد ترنسورسال مشخص	۴.۵
۱۰۸	روابط نرده‌اس-گدم برای عدد ترنسورسال	۵.۵
۱۱۱		احاطه‌گری رومی با فاصله در گراف‌ها	۶
۱۱۱	مقدمه	۱.۶
۱۱۳	r -احاطه‌گری رومی k -فاصله‌ای در گراف‌ها	۲.۶
۱۱۸	r -احاطه‌گری رومی k -فاصله‌ای در گراف‌های تصادفی	۳.۶
۱۲۳		فهرست نمادها	آ
۱۲۳	نمادهای غیرالفبایی	۱.آ
۱۲۴	نمادهای الفبایی	۲.آ
۱۲۷		مراجع	
۱۴۹		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۱۵۵		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	
۱۶۰		نمایه	
۱۶۰		نمایه	

فهرست تصاویر

۲۲	یک آرایه با قابلیت پیکربندی مجدد با دو سطر و سه ستون اضافی.	۱.۱
۴۳	مثال‌هایی از گراف‌های متعلق به خانواده \mathcal{F} .	۱.۲
۴۵	سه گراف که در تساوی کران قضیه ۱.۴.۲ صدق می‌کنند.	۲.۲
۴۶	بلوک‌های سخت.	۳.۲
	دو گراف مثلث-آزاد با ماکسیمم درجه حداکثر ۳ و عدد ترنسورسال	۴.۲
۴۷	۹.	۹
۵۰	پاروی دوگانه.	۱.۳
۵۰	خانواده \mathcal{G}_1 .	۲.۳
۵۱	مثال‌هایی از گراف‌های متعلق به خانواده $\mathcal{G}_1[1]$.	۳.۳
۵۲	دو گراف متعلق به خانواده $\mathcal{G}_{2,1}$.	۴.۳
۵۳	تعدادی گراف متعلق به خانواده $\mathcal{G}_{3,1}$.	۵.۳
۵۳	تعدادی گراف متعلق به خانواده $\mathcal{G}_{4,1}$.	۶.۳
۵۴	تعدادی گراف متعلق به خانواده $\mathcal{G}_{5,1}$.	۷.۳
۵۵	تعدادی گراف متعلق به خانواده $\mathcal{G}_{6,1}$.	۸.۳
۷۸	یک گراف متعلق به خانواده \mathcal{F}_3 .	۱.۴
۷۹	تعدادی گراف متعلق به خانواده \mathcal{H} .	۲.۴
۹۳	برچسبدهی به رئوس یک K_n^* -واحد و یک C_5 -واحد.	۳.۴

فصل ۱

مقدمات

۱.۱ مقدمه

مسأله ترنسورسال یکی از مسائل شناخته شده در نظریه گراف است. در این رساله، قصد داریم به طور جامع مفهوم ترنسورسال در نظریه گراف را بررسی کنیم. در این فصل، در بخش ۲.۱ به بیان تعاریف و مفاهیم مقدماتی در نظریه گراف می پردازیم. همچنین مفهوم ترنسورسال در گراف را بیان می کنیم. در بخش ۳.۱، به منظور ایجاد انگیزه در مخاطب در راستای مطالعه این رساله، به بیان چند کاربرد از مسأله ترنسورسال می پردازیم. کاربردهای این مسأله را از دو دیدگاه کاربرد تئوری و کاربرد تجربی بررسی می کنیم. به طور واضح تر، در زیربخش ۱.۳.۱ ارتباط این مسأله را با برخی دیگر از مسائل نظریه گراف بررسی می کنیم. در زیربخش ۲.۳.۱ نیز به بیان چند کاربرد از این مسأله در علوم مختلف در دنیای حقیقی از جمله صنعت، زیست شناسی و غیره می پردازیم. در ادامه و در بخش ۴.۱، سختی حل مسأله ترنسورسال، یعنی پیدا کردن ترنسورسال با مینیمم اندازه در گرافها را بررسی می کنیم که این موضوع ما

را به بحث راجع به NP-کامل بودن هدایت می‌کند. در خاتمه و در بخش ۵.۱، این فصل را با ذکر تاریخچه‌ای مختصر از مفهوم ترنسورسال به اتمام می‌رسانیم. تعاریف ارائه شده در این فصل و سایر مفاهیم مرتبط با گراف براساس مرجع [۵۷] است.

۲.۱ تعاریف و نمادها

یک **گراف**^۱ $G = (V(G), E(G))$ عبارت است از یک مجموعه ناتهی و متناهی $V(G)$ و همچنین خانواده $E(G)$ که شامل دوتایی‌های نامرتب از اعضای متمایز در $V(G)$ است. اعضای $V(G)$ را **رأس**^۲ و اعضای $E(G)$ را **یال**^۳ می‌نامیم. تعداد رأس‌ها در گراف G ، **مرتبه**^۴ گراف نامیده شده و با $n(G)$ نشان داده می‌شود. تعداد یال‌های گراف G را نیز **اندازه**^۵ گراف نامیده و با $m(G)$ نمایش می‌دهیم. در این رساله، مفهوم $\{u, v\} \in E(G)$ را به صورت $uv \in E(G)$ نشان داده و اگر $e = uv \in E(G)$ می‌گوییم u و v با هم مجاور هستند و رؤس u و v بر e واقع شده‌اند.

در گراف G منظور از **همسایگی باز**^۶ رأس v ، $N_G(v)$ ، مجموعه رؤس مجاور با v در گراف G است. به عبارت دیگر، $N_G(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$. **همسایگی بسته**^۷ رأس v در گراف G نیز عبارت است از $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. به طور مشابه، برای هر مجموعه $S \subset V(G)$ ، داریم $N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v) \setminus S$ و همچنین $N_G[S] = N_G(S) \cup S$. **درجه**^۸ یک رأس v ، $\deg_G(v)$ ، برابر با تعداد همسایه‌های v در گراف G است. **ماکسیمم درجه**^۹ و **مینیمم درجه**^{۱۰} رؤس G را به ترتیب با $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ نشان می‌دهیم. برای یک زیرمجموعه S از رؤس، نماد $\delta_G[S]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\delta_G[S] = \min\{\deg_G(v) \mid v \in S\}.$$

درجه میانی یک گراف نیز براساس دنباله مرتب d_1, d_2, \dots, d_n از درجات یک گراف

^۱ graph

^۲ vertex

^۳ edge

^۴ order

^۵ size

^۶ open neighborhood

^۷ closed neighborhood

^۸ degree

^۹ maximum degree

^{۱۰} minimum degree

تعریف می‌شود. در یک گراف G از مرتبه فرد n ، **درجه میانی**^{۱۱}، $M(G)$ ، برابر با جمله وسط در دنباله درجات مرتب گراف است، یعنی $M(G) = d_{(n+1)/2}$ ، و درحالتی که مرتبه گراف G زوج باشد برابر است با میانگین جملات وسط دنباله درجات G ، یعنی $M(G) = (d_{n/2} + d_{(n/2)+1})/2$. یک دسته‌بندی مشهور از دنباله درجات یک گراف، دسته‌بندی هاول-حکیمی^{۱۲} است [۴۸، ۵۶]. بر اساس این دسته‌بندی شرط لازم و کافی برای اینکه دنباله $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ از اعداد صحیح نامنفی، دنباله درجات یک گراف باشد این است که دنباله به‌دست آمده به طول $n - 1$ پس از حذف اولین جمله، d_1 ، از S و کاهش d_1 جمله بعدی به اندازه یک واحد و سپس مرتب کردن دنباله جدید به صورت غیر صعودی، دنباله درجات یک گراف باشد. فرآیند فوق که به فرآیند هاول-حکیمی معروف است تا زمانی بر روی دنباله درجات یک گراف قابل تکرار است که $d_1 \geq 1$ و در پایان دنباله‌ای تولید می‌کند که در آن همه جملات صفر هستند. تعداد صفرهای باقیمانده در آخرین دنباله به‌دست آمده از دنباله درجات گراف G با تکرار فرآیند هاول-حکیمی، **باقیمانده**^{۱۳} گراف G نامیده می‌شود که آن را به صورت $R(G)$ نمایش می‌دهیم.

بر اساس میزان درجه یک رأس، در نظریه گراف برخی رئوس به‌طور خاص نام‌گذاری می‌شوند. یک **رأس منفرد**^{۱۴} رأسی است که با هیچ رأس دیگری مجاور نباشد. یک **برگ**^{۱۵} در یک گراف، رأسی با درجه یک است و **رأس پشتیبان**^{۱۶} رأسی است که حداقل با یک برگ مجاور باشد. یک رأس پشتیبان را **پشتیبان قوی**^{۱۷} گوئیم هرگاه دارای حداقل دو همسایه برگ باشد. در یک گراف یالی را که حداقل یک رأس واقع بر آن برگ باشد **یال آویخته**^{۱۸} می‌نامیم.

گراف تهی^{۱۹}، گرافی است که هیچ یالی نداشته باشد. **گراف مکمل**^{۲۰} گراف G ، \bar{G} ، گرافی با مجموعه رئوس $V(G)$ است به‌طوری‌که دو رأس در گراف \bar{G} مجاورند اگر و

^{۱۱} median degree

^{۱۲} Havel-Hakimi

^{۱۳} residue

^{۱۴} isolated vertex

^{۱۵} leaf

^{۱۶} support vertex

^{۱۷} strong support

^{۱۸} pendant edge

^{۱۹} null graph

^{۲۰} complement graph

تنها اگر در گراف G مجاور نباشند. برای هر زیرمجموعه S از $V(G)$ ، **زیرگراف القایی**^{۲۱} توسط S ، $G[S]$ ، زیرگراف ماکسیمال از G با مجموعه رئوس S را مشخص می‌کند. برای یک زیرمجموعه S از رأس‌های گراف G ، $G - S$ گراف به‌دست آمده از G با حذف رأس‌های S و همچنین حذف رأس‌های منفرد در $G[V(G) \setminus S]$ است. اگر $S = \{v\}$ آنگاه برای راحتی $G - S$ را به‌صورت $G - v$ نمایش می‌دهیم.

گراف G را **همبند**^{۲۲} گوئیم هرگاه برای هر دو رأس u و v در گراف G مسیری از u به v موجود باشد، در غیر این صورت G را **ناهمبند**^{۲۳} گوئیم. رأس v در گراف همبند G یک **رأس برشی**^{۲۴} است هرگاه گراف $G[V(G) \setminus \{v\}]$ ناهمبند باشد. یک **گراف ۲-**همبند^{۲۵}، گرافی همبند فاقد رأس برشی است. یک زیرگراف القایی ماکسیمال فاقد رأس برشی را **بلوک**^{۲۶} گوئیم. به‌طور مشابه، یک **یال برشی**^{۲۷} در یک گراف همبند یالی است که حذف آن گراف را ناهمبند می‌سازد. **فاصله**^{۲۸} دو رأس u و v در یک گراف G ، $d_G(u, v)$ ، برابر با اندازه کوتاه‌ترین مسیر بین u و v است. اگر هیچ مسیری بین دو رأس u و v موجود نباشد آنگاه می‌گوئیم $d_G(u, v) = \infty$. **گریز از مرکز**^{۲۹} یک رأس v در گراف G ، $ecc(v)$ ، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ecc(v) = \max\{d_G(u, v) \mid u \in V(G)\}.$$

شعاع^{۳۰} گراف G برابر با

$$rad(G) = \min\{ecc(v) \mid v \in V(G)\}$$

است. گراف G را **گراف شعاع-بحرانی**^{۳۱} گوئیم هرگاه هر زیرگراف همبند القایی سره G دارای شعاعی کوچک‌تر از شعاع G باشد. همچنین **قطر**^{۳۲} گراف G را به‌صورت

$$diam(G) = \max\{ecc(v) \mid v \in V(G)\}$$

^{۲۱} induced subgraph

^{۲۲} connected

^{۲۳} disconnected

^{۲۴} cut vertex

^{۲۵} ۲-connected graph

^{۲۶} block

^{۲۷} cut edge

^{۲۸} distance

^{۲۹} eccentricity

^{۳۰} radius

^{۳۱} radius-critical graph

^{۳۲} diameter

تعریف می‌کنیم. **فاصله متوسط**^{۳۳} گراف G ، $\bar{D}(G)$ ، برابر با میانگین فاصله‌ها بین هر دو رأس در G است. به عبارت دیگر،

$$\bar{D}(G) = \sum_{u,v \in V(G)} \frac{d_G(u,v)}{\binom{n}{2}}.$$

در ادامه به منظور یکسان‌سازی، به برخی از نمادگذاری‌های استفاده شده در این رساله اشاره می‌کنیم. در این رساله P_n ، C_n و K_n به ترتیب مسیر، دور و گراف کامل از مرتبه n را مشخص می‌کنند. یک گراف همبند فاقد دور را **درخت**^{۳۴} می‌نامند. یک **درخت ریشه‌دار**^{۳۵} درختی است که یک رأس آن از بقیه رئوس متمایز شده باشد. رأس متمایز شده **ریشه درخت**^{۳۶} نامیده می‌شود. اگر T یک درخت ریشه‌دار باشد، آنگاه زیردرخت ریشه‌دار در رأس v را با نماد T_v نمایش می‌دهیم. منظور از **ستاره**^{۳۷} S_n یا n -**پنجه**^{۳۸} گراف دوبخشی کامل $K_{1,n}$ است. برای راحتی، گراف دوبخشی کامل $K_{1,3}$ ، n -**پنجه** نامیده می‌شود. رأس درجه n در ستاره S_n ، **رأس مرکزی**^{۳۹} نامیده می‌شود. یک **ستاره دوگانه**^{۴۰} درختی با دقیقاً دو رأس غیر برگ است که این دو رأس نیز **رأس‌های مرکزی ستاره دوگانه**^{۴۱} نامیده می‌شوند. یک ستاره دوگانه با رأس‌های مرکزی از درجه m و n را به صورت $S_{m,n}$ نمایش می‌دهیم. یک **گراف شکافته شده کامل**^{۴۲} گرافی است که بتوان مجموعه رئوس آن را به یک مجموعه مستقل I و یک خوشه C افراز کرد به طوری که هر رأس در I با هر رأس در C مجاور باشد. یک گراف شکافته شده کامل را که بتوان مجموعه رئوس آن را به یک مجموعه مستقل I از اندازه m و یک خوشه C از اندازه n افراز کرد، با $CS(m,n)$ نمایش می‌دهیم. منظور از **تاج**^{۴۳} گراف G ، $cor(G)$ ، گرافی است که با اضافه کردن یک برگ به هر رأس G به دست می‌آید. گراف G را **منتظم**^{۴۴} گوییم هرگاه $\delta(G) = \Delta(G)$ ، و آن را r -**منتظم**^{۴۵} گوییم هرگاه درجه مشترک

^{۳۳} average distance
^{۳۴} tree
^{۳۵} rooted tree
^{۳۶} root of the tree
^{۳۷} star
^{۳۸} n -claw
^{۳۹} central vertex

^{۴۰} double-star
^{۴۱} central vertices of double-star
^{۴۲} complete split graph
^{۴۳} corona
^{۴۴} regular
^{۴۵} r -regular

همه رئوس برابر r باشد. گراف ۳-منتظم را نیز **گراف مکعبی**^{۴۶} می‌نامیم. گراف G را H -آزاد^{۴۷} گوییم هرگاه G هیچ زیرگراف القایی یکرخت با H نداشته باشد. منظور از k بار زیرتقسیم کردن^{۴۸} یال uv در یک گراف، جایگزینی یال uv با مسیر u, x_1, \dots, x_k, v است. لازم به ذکر است که در این رساله، به منظور اختصار نویسی برای $k \in \mathbb{N}$ ، نماد $[k]$ مجموعه $\{1, \dots, k\}$ را مشخص می‌کند.

رأس v در گراف G یک یال را می‌پوشاند هرگاه v بر آن یال واقع شده باشد. یک **ترنسورسال**^{۴۹} در گراف G عبارت است از مجموعه‌ای از رئوس که تمامی یال‌های گراف را می‌پوشاند. در اینجا متذکر می‌شویم که ترنسورسال در یک گراف، **پوشش رأسی**^{۵۰} نیز نامیده می‌شود. **عدد ترنسورسال**^{۵۱} گراف G ، $\tau(G)$ ، برابر با اندازه کوچک‌ترین ترنسورسال در گراف G است. یک ترنسورسال از اندازه $\tau(G)$ را به صورت $-\tau(G)$ مجموعه نشان می‌دهیم. مقادیر شناخته شده برای عدد ترنسورسال برخی از گراف‌ها به صورت زیر است.

مشاهده ۱.۲.۱. برای گراف‌های C_n و P_n ، $S_{m,n}$ ، S_n ، K_n داریم:

$$(i) \tau(S_n) = 1,$$

$$(ii) \tau(S_{n,m}) = 2,$$

$$(iii) \tau(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor,$$

$$(iv) \tau(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil,$$

$$(v) \tau(K_n) = n - 1.$$

^{۴۶} cubic graph

^{۴۷} H -free

^{۴۸} subdivision

^{۴۹} transversal

^{۵۰} vertex cover

^{۵۱} transversal number

۳.۱ کاربرد مسأله ترنسورسال

در این بخش به برخی از کاربردهای مسأله ترنسورسال اشاره می‌کنیم. کاربردهای این مسأله را به دو دسته کاربردهای تئوری و کاربردهای تجربی تقسیم می‌کنیم. منظور از کاربرد تئوری در واقع استفاده از مسأله ترنسورسال در حل برخی دیگر از مسائل تئوری نظریه گراف است. برای این منظور، ارتباط عدد ترنسورسال یک گراف را با برخی از پارامترهای دیگر نظریه گراف بررسی می‌کنیم. کاربردهای عملی نیز به آن دسته از کاربردها اطلاق می‌شود که به استفاده از مسأله ترنسورسال در حل برخی از مسائل موجود در دنیای حقیقی اشاره می‌کنند.

۱.۳.۱ ارتباط دیگر پارامترهای نظریه گراف با عدد ترنسورسال

یکی از کاربردهای مسأله ترنسورسال، حل برخی از مسائل وابسته به گراف است. اندازه برخی از پارامترهای موجود در نظریه گراف به‌طور دقیق با اندازه عدد ترنسورسال یک گراف در ارتباط هستند، مانند عدد استقلال و عدد خوشه‌ای یک گراف. پارامترهای دیگری نیز موجود هستند که اندازه آن‌ها توسط عدد ترنسورسال گراف تخمین زده می‌شوند، مانند عدد رنگی، عدد پوشش یالی و عدد احاطه‌گری گراف. در این بخش ارتباط عدد ترنسورسال را با این پارامترها بررسی می‌کنیم.

ارتباط عدد استقلال با عدد ترنسورسال

یکی از مفاهیم دقیقاً وابسته به عدد ترنسورسال، عدد استقلال گراف است که یکی از مفاهیم اساسی و پرکاربرد در نظریه گراف محسوب می‌شود. در گراف G ، مجموعه S از رئوس را **مستقل**^{۵۲} گوئیم هرگاه هیچ دو رأسی در S مجاور نباشند. اندازه بزرگ‌ترین مجموعه مستقل در گراف G را **عدد استقلال**^{۵۳} گراف G ، $\alpha(G)$ ، گوئیم. یک مجموعه مستقل از اندازه $\alpha(G)$ را نیز یک $\alpha(G)$ - مجموعه گوئیم.

^{۵۲} independent

^{۵۳} independence number

اگر S یک ترنسورسال در گراف G باشد آنگاه $V(G) \setminus S$ یک مجموعه مستقل در G است و بالعکس. گالای^{۵۴} اولین کسی بود که به این مشاهده دست یافت. بنابراین می توان ارتباط عدد ترنسورسال و عدد استقلال یک گراف را به صورت زیر بیان نمود.

قضیه ۱.۳.۱. [۳۸] اگر G گرافی از مرتبه n باشد، آنگاه داریم:

$$\tau(G) + \alpha(G) = n.$$

بنابر قضیه فوق، مشاهده می کنیم که دو پارامتر عدد ترنسورسال و عدد استقلال به طور دقیق به هم وابسته هستند و یک روش برای تعیین اندازه یک پارامتر، تعیین اندازه پارامتر دیگر است. به این دلیل است که در متون علمی و همچنین در ادامه این رساله، در صورت لزوم می توان به جای عدد ترنسورسال، عدد استقلال یک گراف را بررسی کرد. پس با وجود اینکه دو مسأله ترنسورسال و مجموعه مستقل، دو مسأله متفاوت به نظر می رسند اما این دو در حقیقت روش های مختلف نگاه کردن به مسائل یکسان هستند و این مسائل دو نسخه متفاوت از یکدیگرند.

ارتباط عدد خوشه ای با عدد ترنسورسال

همان طور که در قسمت قبل ذکر شد، مسأله ترنسورسال متناظر با مسأله بزرگ ترین مجموعه مستقل در گراف است. اما مسأله بزرگ ترین مجموعه مستقل را نیز می توان متناظر با مسأله بزرگ ترین خوشه در گراف در نظر گرفت. یک خوشه^{۵۵} در یک گراف، مجموعه ای از رئوس است که زیرگراف القا شده روی آن مجموعه کامل باشد. عدد خوشه ای^{۵۶} گراف G ، $\omega(G)$ ، برابر با تعداد رئوس بزرگ ترین خوشه در G است.

با توجه به مفهوم استقلال می توان گفت یک مجموعه از رئوس در گراف G مستقل است اگر و تنها اگر این مجموعه در گراف مکمل \bar{G} ، خوشه باشد. بنابراین دو مفهوم عدد استقلال و عدد خوشه ای مکمل یکدیگر هستند. پس به منظور حل مسأله بزرگ ترین خوشه در یک گراف می توان مسأله بزرگ ترین مجموعه مستقل یا به طور

^{۵۴} Gallai
^{۵۵} clique

^{۵۶} clique number

متناظر مسأله کوچک‌ترین ترنسورسال را در گراف مکمل در نظر گرفت. به عبارت دیگر، برای یک گراف G از مرتبه n داریم:

$$\omega(G) = \alpha(\bar{G}) = n - \tau(\bar{G}).$$

البته، هنینگ و همکارانش^{۵۷} در [۶۰] یک کران پایین برای عدد خوشه‌ای یک گراف براساس عدد ترنسورسال همان گراف به دست آوردند.

قضیه ۲.۳.۱. [۶۰] اگر G گرافی از مرتبه n باشد، آنگاه داریم:

$$\omega(G) \geq \frac{n + \tau(G)}{n - \tau(G)} - \Delta(G).$$

فایلوویچ^{۵۸} نیز در [۳۳] یک کران برای عدد ترنسورسال براساس مرتبه، ماکسیمم درجه و عدد خوشه‌ای گراف مطرح کرد و در [۲۸] گراف‌هایی را که در تساوی کران ارائه شده صدق می‌کردند، دسته‌بندی کرد.

قضیه ۳.۳.۱. [۳۳] اگر G گرافی از مرتبه n و عدد خوشه‌ای $q - 1$ باشد، آنگاه داریم:

$$\tau(G) \leq n \left(1 - \frac{2}{q + \Delta(G)} \right).$$

هنینگ و همکارانش در [۶۰] کرانی برای عدد ترنسورسال براساس مرتبه گراف و اندازه یک خوشه داده شده از گراف ارائه کردند. در واقع هنینگ و همکارانش در [۶۰] کران فایلوویچ در [۲۸، ۳۳] را بهبود بخشیدند.

قضیه ۴.۳.۱. [۶۰] اگر G گرافی از مرتبه n و p عددی صحیح باشد با این شرط که برای هر خوشه X در G ، رأس $x \in X$ موجود باشد به طوری که $\deg_G(x) < p - |X|$ ، آنگاه داریم $\tau(G) \leq n(1 - 2/p)$.

ارتباط عدد رنگی با عدد ترنسورسال

یک k -رنگ آمیزی^{۵۹} از گراف G عبارت است از نگاشتی مانند $f : V(G) \rightarrow S$ که $|S| = k$ (معمولاً S را مجموعه $[k]$ در نظر می‌گیریم). هر عضو S را به عنوان یک

^{۵۷}Henning et. al.
^{۵۸}Fajtlowicz

^{۵۹} k -coloring

رنگ تلقی می‌کنیم. نامیده می‌شوند. یک k -رنگ آمیزی از یک گراف را **رنگ آمیزی مجاز**^{۶۰} گوئیم هرگاه رأس‌های مجاور در گراف هم‌رنگ نباشند. یک گراف را k -رنگ پذیر^{۶۱} گوئیم اگر برای آن گراف k -رنگ آمیزی مجازی موجود باشد. کوچک‌ترین عدد k به‌طوری که گراف G k -رنگ پذیر باشد را **عدد رنگی**^{۶۲} گراف G ، $\chi(G)$ ، گوئیم. یک k -رنگ آمیزی از گراف G را می‌توان به‌صورت افراز $V(G)$ به کلاس‌های رنگی V_1, \dots, V_k در نظر گرفت. بنابراین، یک k -رنگ آمیزی مجاز از G یک k -رنگ آمیزی است که در آن برای هر $i \in [k]$ ، کلاس V_i یک مجموعه مستقل در G باشد. در نتیجه، اندازه هر کلاس رنگی حداکثر برابر $\alpha(G)$ است. پس کم‌ترین تعداد رنگ مورد نیاز در یک رنگ‌آمیزی مجاز حداقل برابر با نسبت مرتبه گراف به عدد استقلال گراف است.

قضیه ۵.۳.۱ [۱۱۴] اگر G گرافی از مرتبه n باشد، آنگاه داریم:

$$\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)} = \frac{n}{n - \tau(G)}.$$

کران قضیه فوق برای گراف‌های کامل، دقیق است.

ارتباط عدد احاطه‌گری با عدد ترنسورسال

یک **مجموعه احاطه‌گر**^{۶۳} در گراف G ، مجموعه‌ای از رئوس مانند S است به‌طوری که هر رأس خارج از S دارای همسایه‌ای در S باشد. کوچک‌ترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر در گراف G ، **عدد احاطه‌گری**^{۶۴} گراف G ، $\gamma(G)$ ، نامیده می‌شود.

با توجه به مفهوم مجموعه‌های ماکسیمال، درمی‌یابیم که مجموعه مستقل S در گراف G ماکسیمال است اگر و تنها اگر برای هر رأس $v \in V(G) \setminus S$ ، مجموعه $S \cup \{v\}$ مستقل نباشد. به عبارت دیگر، مجموعه S یک مجموعه مستقل ماکسیمال است اگر و تنها اگر برای هر رأس $v \in V(G) \setminus S$ ، رأس $u \in S$ موجود باشد به‌طوری که v با u مجاور باشد. بنابراین در یک گراف، شرط ماکسیمال بودن یک مجموعه مستقل با

^{۶۰} proper coloring

^{۶۱} k -colorable

^{۶۲} chromatic number

^{۶۳} dominating set

^{۶۴} domination number

شرط احاطه‌گری یک مجموعه هم ارز است. برج^{۶۵} ارتباط بین مجموعه‌های مستقل ماکسیمال و مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال را بررسی کرد و به نتیجه زیر دست یافت. قضیه ۶.۳.۱ [۱۲] هر مجموعه مستقل ماکسیمال در گراف G یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است.

بنابر قضیه فوق، عدد استقلال یک گراف کران بالایی برای عدد احاطه‌گری گراف است:

$$\gamma(G) \leq \alpha(G). \quad (1.1)$$

اگر یک گراف فاقد رأس منفرد باشد آنگاه هر ترنسورسال در گراف، یک مجموعه احاطه‌گر است. بنابراین، در یک گراف فاقد رأس منفرد، عدد ترنسورسال نیز کران بالایی برای عدد احاطه‌گری گراف است:

$$\gamma(G) \leq \tau(G). \quad (2.1)$$

همه گراف‌های G که $\gamma(G) = \tau(G)$ در [۱۱۷] مشخص شدند. با استفاده از روابط (۱.۱)، (۲.۱) و قضیه ۱.۳.۱، کران بالایی برای عدد احاطه‌گری گراف‌های فاقد رأس منفرد به دست می‌آید. البته، این نتیجه اولین بار توسط اُره^{۶۶} با استفاده از مفهوم مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال ثابت شد.

قضیه ۷.۳.۱ [۸۹] اگر G گرافی از مرتبه n و فاقد رأس منفرد باشد، آنگاه داریم:

$$\gamma(G) \leq \frac{n}{3}.$$

ارتباط عدد رنگی احاطه‌گر با عدد ترنسورسال

یک رنگ آمیزی احاطه‌گر^{۶۷} از گراف G ، یک رنگ آمیزی مجاز از G است با این شرط که هر رأس در گراف حداقل یک کلاس رنگی را به طور کامل احاطه کند. عدد رنگی

^{۶۵}Berge
^{۶۶}Ore

^{۶۷}dominator coloring

احاطه‌گر^{۶۸} گراف G ، $\chi_d(G)$ ، برابر با کم‌ترین تعداد کلاس رنگی در بین رنگ آمیزی‌های احاطه‌گر گراف G است. بدیهی است که برای هر گراف G داریم:

$$\chi(G) \leq \chi_d(G). \quad (۳.۱)$$

گرا و همکارانش^{۶۹} در [۴۲] یک کران بالا برای عدد رنگی احاطه‌گر گراف براساس عدد ترنسورسال آن گراف به دست آوردند.

قضیه ۸.۳.۱. [۴۲] برای هر گراف همبند G از مرتبه $n \geq ۳$ داریم:

$$\chi_d(G) \leq \tau(G) + ۱.$$

کران بالا یک کران دقیق است. به عنوان مثال، می‌توان مشاهده کرد $\chi_d(S_{m,n}) = ۳$ و طبق مشاهده ۱.۲.۱، $\tau(S_{m,n}) = ۲$. پس ستاره‌های دوگانه در تساوی کران فوق صدق می‌کنند. طبق رابطه (۳.۱) و قضیه ۸.۳.۱، یک کران بالا برای عدد رنگی گراف‌های همبند براساس عدد ترنسورسال به دست می‌آید:

$$\chi(G) \leq \tau(G) + ۱.$$

ارتباط عدد استقلال یالی با عدد ترنسورسال

زیرمجموعه M از $E(G)$ یک **تطابق**^{۷۰} در گراف G است، اگر اعضای آن هیچ رأس مشترکی نداشته باشند. یک تطابق را در گراف G **تطابق کامل**^{۷۱} گوئیم هرگاه هر رأس G بر یالی از این تطابق واقع شده باشد. منظور از **تطابق ماکسیمم**^{۷۲}، تطابقی با بزرگ‌ترین اندازه در بین همه تطابق‌های موجود در گراف است. تعداد یال‌ها در تطابق ماکسیمم را **عدد استقلال یالی**^{۷۳}، $\alpha'(G)$ ، می‌نامیم. اگر T یک ترنسورسال و M یک تطابق در گراف G باشند، آنگاه T شامل حداقل یک رأس از هر یال M است.

^{۶۸} dominator chromatic number

^{۶۹} Gera et. al.

^{۷۰} matching

^{۷۱} perfect matching

^{۷۲} maximum matching

^{۷۳} edge independence number

بنابراین، به ازای هر تطابق M و هر ترنسورسال T داریم: $|M| \leq |T|$. به ویژه اگر M^* یک تطابق ماکسیمم و T^* یک ترنسورسال مینیمم در G باشند، آنگاه داریم:

$$\alpha'(G) \leq \tau(G).$$

کونینگ^{۷۴} و ایگرواری^{۷۵} به طور مستقل تساوی کران فوق را بررسی کردند و به نتیجه یکسانی رسیدند.

قضیه ۹.۳.۱. [۲۶، ۷۳] در یک گراف دوبخشی، عدد استقلال یالی برابر با عدد ترنسورسال گراف است.

از طرف دیگر، رئوس یک تطابق ماکسیمم در گراف G تشکیل یک ترنسورسال برای G می دهند. براساس این مشاهده، نتیجه می گیریم:

$$\tau(G) \leq 2\alpha'(G).$$

ارتباط پوشانه یالی با عدد ترنسورسال

مشابه یالی یک ترنسورسال، پوشش یالی^{۷۶} نامیده می شود. یک پوشش یالی از گراف G ، زیرمجموعه ای مانند L از $E(G)$ است به طوری که هر رأس G ، بر یالی از L واقع شده باشد. دقت شود که پوشش یالی در همه گراف ها موجود نیست. گراف G دارای پوشش یالی است اگر و تنها اگر $\delta(G) > 0$. پوشش یالی مینیمم^{۷۷}، یک پوشش یالی با کوچک ترین اندازه در بین همه پوشش های یالی موجود در گراف است. تعداد یال ها در کوچک ترین پوشش یالی را پوشانه یالی^{۷۸}، $\tau'(G)$ ، می نامیم. به طور کلی، یک پوشش یالی را می توان با افزودن یال هایی به یک تطابق ماکسیمم در گراف به دست آورد. برای پوشاندن رأس های یک مجموعه مستقل، یال های متمایزی لازم است. بنابراین، عدد استقلال یک گراف همواره کران پایینی برای پوشانه یالی گراف است:

$$\tau'(G) \geq \alpha(G) = n(G) - \tau(G).$$

^{۷۴}König
^{۷۵}Egerváry
^{۷۶}edge covering

^{۷۷}minimum edge covering
^{۷۸}edge covering number

کونینگ قضیه‌ای را اثبات کرد که شباهت صوری فوق‌العاده‌ای با قضیه ۹.۳.۱ دارد و با استفاده از این قضیه ثابت کرد کران فوق دقیق است.

قضیه ۱۰.۳.۱. [۷۲] در یک گراف دوبخشی فاقد رأس منفرد، عدد استقلال گراف با پوشانه یالی آن برابر است.

بنابراین در گراف‌های دوبخشی فاقد رأس منفرد داریم:

$$\tau(G) + \tau'(G) = n(G).$$

ارتباط عدد نابودی با عدد ترنسورسال

فرض کنید دنباله درجات گراف G باشد که به صورت غیرنزولی مرتب شده‌اند، بنابراین $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$. پپر^{۷۹} در [۹۳] عدد نابودی گراف G را به صورت زیر تعریف کرد. **عدد نابودی^{۸۰}** گراف G ، $a(G)$ ، برابر با بزرگ‌ترین عدد صحیح k است به طوری که مجموع k جمله اول از دنباله درجات غیر نزولی G حداکثر برابر نصف مجموع درجات دنباله باشد. به طور متناظر، عدد نابودی گراف G برابر با بزرگ‌ترین عدد صحیح k است به طوری که

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq \sum_{i=k+1}^n d_i.$$

مشاهده می‌کنیم که اگر G گرافی از اندازه m و عدد نابودی k باشد، آنگاه k در واقع بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که $\sum_{i=1}^k d_i \leq m$. همچنین، پپر ثابت کرد که عدد نابودی یک گراف، کرانی بالا و قابل محاسبه در زمان چندجمله‌ای برای عدد استقلال گراف است.

قضیه ۱۱.۳.۱. [۹۳] برای هر گراف G داریم $\alpha(G) \leq a(G)$.

طبق قضایای ۱۱.۳.۱ و ۱.۳.۱، یک کران پایین و قابل محاسبه برای عدد ترنسورسال

گراف به دست می‌آید:

$$\tau(G) \geq n(G) - a(G).$$

^{۷۹}Pepper

^{۸۰}annihilation number

پیر در رساله خود این کران را با چند کران دیگر (از جمله کران سوتکویچ در [۲۴]) مقایسه کرد و برتری کران خود را به نسبت کران‌های ذکر شده نشان داد. تنها پرسشی که در ارتباط با قضیه فوق باقی ماند رده بندی گراف‌هایی بود که در تساوی کران فوق صدق می‌کردند. لارسن^{۸۱} و پیر در [۷۶] به این پرسش نیز پاسخ دادند.

قضیه ۱۲.۳.۱. [۷۶] در یک گراف G ، عدد استقلال G با عدد نابودی گراف برابر است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

• $a(G) \geq \frac{n}{4}$ و $\alpha_c(G) = a(G)$ ،

• $a(G) < \frac{n}{4}$ و رأس $v \in V(G)$ موجود باشد به طوری که $\alpha_c(G - v) = a(G)$.

در قضیه فوق منظور از $\alpha_c(G)$ ، **عدد استقلال بحرانی**^{۸۲} گراف G است، یعنی اندازه بزرگ‌ترین مجموعه مستقل I در گراف G به طوری که $|I| - |N_G(I)|$ ماکسیمم باشد.

ارتباط عدد ترنسورسال کسری با عدد ترنسورسال

یک **ترنسورسال کسری**^{۸۳} در یک گراف عبارت است از تخصیص مقادیر حقیقی نامنفی به رأس‌های گراف به طوری که برای هر یال، مجموع مقادیر نسبت داده شده به رأس‌های آن یال حداقل برابر یک باشد. **عدد ترنسورسال کسری**^{۸۴} گراف G ، $\tau_f(G)$ ، برابر با کم‌ترین مقدار ممکن برای مجموع وزن‌های نسبت داده شده به رأس‌های گراف G در یک ترنسورسال کسری است. به عبارت دیگر، داریم:

$$\tau_f(G) = \min \left\{ \sum_{v \in V(G)} w(v) \mid w : V(G) \rightarrow \mathbb{R}, w(v) \geq 0, \forall e \in E(G) : \sum_{v \in e} w(v) \geq 1 \right\}.$$

این پارامتر را می‌توان به صورت جواب بهینه یک مسأله خطی فرمول بندی کرد. بنابراین، می‌توان آن را به طور مؤثر و کارا محاسبه کرد. بدیهی است که هر ترنسورسال، یک ترنسورسال کسری نیز هست، بنابراین داریم:

^{۸۱} Larson

^{۸۲} critical independence number

^{۸۳} fractional transversal

^{۸۴} fractional transversal number

نتیجه ۱.۳.۱. برای هر گراف G داریم $\tau_f(G) \leq \tau(G)$.

یک گراف کونینگ-ایگرواری^{۸۵}، گرافی است که دارای یک ترنسورسال کسری با مینیمم اندازه است که در آن همه رئوس مقادیر ۰ و ۱ را دریافت می‌کنند. به عبارت دیگر، این گراف‌ها در تساوی نتیجه ۱.۳.۱ صدق می‌کنند. لارسن در [۷۴] تمامی این گراف‌ها را مشخص کرد. بنابراین، می‌توان در زمان چندجمله‌ای تعیین کرد که آیا دو پارامتر فوق برابرند یا خیر.

ارتباط ظرفیت شانون گراف‌ها با عدد ترنسورسال

فرض کنید یک کانال برای انتقال اطلاعات با یک مجموعه V از الفبای ورودی موجود باشد به طوری که برخی از حروف این الفبا در دریافت پیام قابل اشتباه هستند. با توجه به این خطاها می‌توان گراف اشتباهات کانال را تعریف کرد. گراف اشتباهات، یک گراف با مجموعه رئوس V است. دو رأس در این گراف مجاورند اگر و تنها اگر دو حرف متناظر با دو رأس در دریافت پیام قابل اشتباه باشند.

یک کد بدون خطا به طول $k = 1$ یک زیرمجموعه $S \subseteq V$ است که دارای هیچ حرف قابل اشتباهی نیست. به عبارت دیگر $S \subseteq V$ یک کد بدون خطا است اگر و تنها اگر مجموعه رئوس متناظر با S در گراف اشتباهات مستقل باشد. در این صورت بیشترین تعداد کد واژه‌های به طول یک که می‌توانند بدون خطا ارسال شوند برابر با عدد استقلال گراف اشتباهات است. همین استدلال را می‌توان برای کدهای به طول بیشتر نیز تکرار کرد. یک کد به طول k در حقیقت یک مجموعه $S \subseteq V^k$ است و این کد بدون خطاست هرگاه هیچ دو کد واژه‌ای به طول k در S قابل اشتباه نباشند. لازم به ذکر است که دو کد واژه به طول k ممکن است اشتباه شوند هرگاه برای هر $i \in [k]$ ، i -امین حرف کد واژه‌ها یا برابر باشند و یا قابل اشتباه باشند. برای درک ساختار کدهای به طول بیشتر از یک می‌توان از ضرب قوی^{۸۶} گراف‌ها استفاده کرد. ضرب قوی دو گراف G و H ، $G \boxtimes H$ ، گرافی با مجموعه رئوس $V(G) \times V(H)$ است به طوری که

^{۸۵} König-Egerváry graph

^{۸۶} strong product

دو رأس متمایز (u, u') و (v, v') در $G \boxtimes H$ مجاورند اگر و تنها اگر u و v در G مجاور یا برابر و u' و v' در H مجاور یا برابر باشند. برای راحتی، ضرب قوی گراف G با خودش را به صورت G^2 و k بار ضرب قوی گراف G با خودش را به صورت G^k نشان می‌دهیم. حال فرض کنید G گراف اشتباهات کانال مورد مطالعه باشد. در این صورت دو کد واژه به طول k مانند v و v' قابل اشتباهند اگر و تنها اگر v و v' به‌عنوان رئوس G^k مجاور باشند. بنابراین، اندازه بزرگ‌ترین کد بدون خطای به طول k برابر با $\alpha(G^k)$ است. به‌وضوح حداقل به تعداد $\alpha(G)^k$ کد واژه به طول k بدون خطا وجود دارد. بنابراین، $\alpha(G^k) \geq \alpha(G)^k$. اما این کران ممکن است دقیق نباشد. به‌عنوان مثال،

$$\alpha(C_5^2) = 5 > 4 = \alpha(C_5)^2.$$

در حقیقت اگر رأس‌های یک گراف C_5 (v_1, \dots, v_5 با همین ترتیب دوری) باشند، آنگاه کدهای $v_1v_1, v_2v_3, v_3v_5, v_4v_2$ و v_5v_4 غیر قابل اشتباه هستند. ظرفیت بدون خطای یک کانال با گراف اشتباهات G به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Theta(G) = \sup_k \sqrt[k]{\alpha(G^k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\alpha(G^k)}.$$

عبارت فوق را **ظرفیت شانون**^{۸۷} گراف G گویند، زیرا اولین بار توسط شانون [۹۹] معرفی شد. طبق مشاهدات بالا درمی‌یابیم که $\Theta(G) \geq \alpha(G) = n(G) - \tau(G)$. همچنین، شانون ثابت کرد $\Theta(G) = \alpha(G)$ ، هرگاه بتوان رئوس گراف G را به $\alpha(G)$ خوشه افراز کرد، مانند گراف‌های کامل، مسیره‌ها و ستاره‌ها.

۲.۳.۱ کاربرد ترنسورسال در دنیای حقیقی

در این بخش به منظور تأکید بر اهمیت مسأله ترنسورسال و همچنین ایجاد انگیزه در مطالعه این مبحث، به کاربردهایی از این مسأله در دنیای حقیقی اشاره می‌کنیم. از جمله این کاربردها عبارتند از کاربرد مسأله ترنسورسال در زمینه محاسبات زیست‌شناسی [۶۹، ۱۰۶]، جایگذاری سرورها در شبکه [۷۱، ۱۰۲]، نظریه اطلاعات و انتقال

^{۸۷} Shannon capacity

سیگنال [۹۹] و مسأله آرایه‌ها با قابلیت پیکربندی مجدد [۲۰، ۵۴]. در مثال آخر، ما کاربرد مسأله ترنسورسال محدود به گراف‌های دوبخشی را بررسی می‌کنیم.

رفع ناسازگاری در هم‌ترازسازی ژن‌ها

فرض کنید چندین توالی از ژن‌ها موجود باشد. هم‌تراز کردن توالی‌ها یک ابزار محاسباتی بسیار مفید در رشته زیست‌شناسی محاسباتی است. زیرا می‌توان از آن در زمینه‌هایی مانند توالی‌یابی DNA و همچنین پی‌بردن به روابط تکاملی میان ژن‌ها و پروتئین‌ها استفاده کرد. هم‌ترازی بین پروتئین‌ها و DNA اغلب بر پایه همانندی توالی‌ها نتیجه می‌شود. بنابراین، برای یک توالی داده شده از ژن‌ها، هم‌ترازسازی نیازمند تعیین میزان مطابقت بین زیرتوالی‌های یک توالی است. به‌عنوان مثال در بحث تکامل، پروتئین‌هایی که وابستگی نزدیک‌تری دارند نسبت به پروتئین‌ها با وابستگی دورتر، دارای توالی‌های آمینه اسید شبیه‌تری هستند.

فرض کنید $A = (a_1, \dots, a_n)$ یک توالی از ژن‌ها و $A = (A_1, B_1)$ و $A = (A_2, B_2)$ دو زیرتوالی از A باشند. دو زیرتوالی $A = (A_1, B_1)$ و $A = (A_2, B_2)$ را ناسازگار گویند اگر و تنها اگر $A_1 \not\subseteq A_2$ ، $A_1 \not\subseteq B_2$ ، $B_1 \not\subseteq B_2$ و $A_1 \not\subseteq B_2$. یک آزمایش بیولوژیک معمولاً شامل یک نمونه است. این نمونه، شامل یک توالی از ژن‌ها و مجموعه‌ای بزرگ از زیرتوالی‌های این توالی است که به‌عنوان مثال در بحث تکامل، این زیرتوالی‌ها از موجوداتی با نسبت دور که مشکوک به داشتن جد مشترک هستند گرفته شده‌اند. زیرتوالی‌های موجود در یک نمونه را می‌توان با استفاده از یک برنامه هم‌ترازی، هم‌تراز کرد. کیفیت یک هم‌ترازی براساس یک تابع نمره‌دهی تعیین می‌شود که با دقت میزان تطابق دو زیرتوالی را اندازه می‌گیرد. سپس زیرتوالی‌ها براساس نمرات هم‌ترازی مرتب می‌شوند. در برخی از موارد، به‌دلیل ناسازگاری بین دو یا تعداد بیشتری زیرتوالی، نمرات ضعیفی در هم‌ترازی به‌دست می‌آید. یک روش برای رفع این ناسازگاری‌ها، حذف برخی از زیرتوالی‌ها از مجموعه نمونه است. این روش با عنوان رفع ناسازگاری

در هم‌ترازسازی ژن‌ها^{۸۸} به صورت زیر مطرح می‌شود.

توالی $A = (a_1, \dots, a_k)$ از ژن‌ها و $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ شامل زیرتوالی‌هایی از A داده شده است. مسأله عبارت است از تعیین کم‌ترین تعداد زیرتوالی به طوری که حذف آن‌ها از S هیچ دو پیشامد ناسازگاری باقی نگذارد. مجموعه این زیرتوالی‌های حذف شده کوچک‌ترین مجموعه رفع ناسازگاری نامیده می‌شود.

به منظور حل مسأله کوچک‌ترین جواب برای رفع ناسازگاری ژن‌ها، این مسأله را به صورت یک مسأله در نظریه گراف مدل‌سازی می‌کنیم. ابتدا گراف ناسازگاری را تعریف می‌کنیم. گراف ناسازگاری گرافی است که مجموعه رئوس آن برابر با مجموعه نمونه شامل زیرتوالی‌ها است. دو رأس با هم مجاور هستند اگر و تنها اگر زیرتوالی‌های متناظر با دو رأس ناسازگار باشند. به عبارت دیگر، فرض کنید $G_S = (V_S, E_S)$ گراف ناسازگاری وابسته به مجموعه پیشامدهای S باشد به طوری که $V_S = \{v_1, \dots, v_n\}$ و $v_i v_j \in E_S$ اگر و تنها اگر e_i و e_j دو پیشامد ناسازگار در S باشند. مسأله کوچک‌ترین جواب برای رفع ناسازگاری ژن‌ها متناظر است با مسأله یافتن کوچک‌ترین زیرمجموعه از رئوس در گراف ناسازگاری به طوری که حذف این رئوس از گراف هیچ یالی در گراف باقی نگذارد. به عبارت دیگر، هر یال در گراف ناسازگاری با حداقل یک رأس از این مجموعه پوشانده شود. فرض کنید $S' \subseteq S$ و $C = \{v_i \mid e_i \in S'\}$ مجموعه متناظر با S' در گراف G_S باشد. در این صورت مجموعه S' کوچک‌ترین مجموعه رفع ناسازگاری است اگر و تنها اگر C کوچک‌ترین ترنسورسال در G_S باشد.

جایگذاری سرورها در شبکه

در تلاش برای جمع‌آوری اطلاعات در شبکه‌های گوناگون سنجش، در یک شبکه کامپیوتری تعدادی از دستگاه‌های ناظر، موسوم به سرور^{۸۹}، به صورت به هم پیوسته قرار داده شده‌اند به طوری که همه پیام‌ها و داده‌ها می‌توانند تحت نظارت و جمع‌آوری قرار گیرند. به منظور کاهش هزینه‌ها، تعیین کم‌ترین تعداد مکان لازم در یک

^{۸۸} resolving conflicts in gene alignment

^{۸۹} server

شبکه برای جایگذاری دستگاه‌های سرور، هدف مطلوب است. بدین منظور، مسأله را به صورت زیر مدل‌سازی می‌کنیم.

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف متناظر با شبکه باشد که در آن هر رأس متناظر با یک کامپیوتر است و یک یال بین دو رأس توانایی انتقال اطلاعات بین کامپیوترهای متناظر با آن دو رأس را نشان می‌دهد. هدف، تعیین کم‌ترین تعداد رأس در گراف G است به طوری که هر یال توسط حداقل یک رأس پوشانده شود. بنابراین، مسأله جایگذاری سرورها در یک شبکه متناظر با مسأله کوچک‌ترین ترنسورسال در گراف است.

نظریه اطلاعات

همان‌طور که در بخش ۱.۳.۱ اشاره شد، یک کاربرد مسأله استقلال (یا به طور متناظر مسأله ترنسورسال) محاسبه ظرفیت بدون خطای یک کانال انتقال اطلاعات است. یک روش برای رفع خطا در چنین کانال‌هایی استفاده از مسأله ترنسورسال است. به عنوان مثال، فرض کنید مجموعه‌ای از سیگنال‌ها برای انتقال اطلاعات در دسترس است. معمولاً در یک مجموعه، جفت سیگنال‌هایی موجود هستند که می‌توانند توسط یک گیرنده در یک سیستم انتقال سیگنال مغشوش شوند. هدف، حذف تعدادی سیگنال از مجموعه است به طوری که تمامی اطلاعات ارسال شده به طور صحیح دریافت شوند. از طرفی، به دلیل وسعت دامنه ارتباطات و توانایی سیگنال‌های مختلف در امر انتقال انواع مختلف داده، باقی نگه داشتن بیشترین تعداد سیگنال ممکن در مجموعه مورد نظر است. بنابراین، به منظور از بین بردن اغتشاش در یک سیستم انتقال پیام، ما به دنبال حذف کم‌ترین تعداد سیگنالی هستیم که در سیستم استفاده می‌شوند و منجر به تولید اغتشاش در دریافت اطلاعات می‌گردند. برای انجام این امر، مسأله را به صورت زیر مدل‌سازی می‌کنیم.

فرض کنید گراف $G = (V, E)$ یک گراف متناظر با سیستم انتقال سیگنال باشد که در آن هر رأس متناظر با یک سیگنال است. یک یال بین دو رأس برقرار است اگر و تنها

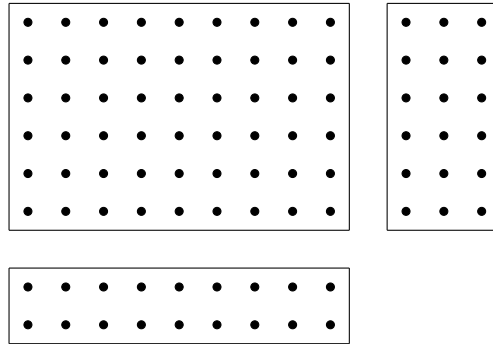
اگر دو سیگنال متناظر با این دو رأس توسط دستگاه گیرنده مغشوش شوند. هدف، تعیین کمترین تعداد رأس در گراف است به طوری که حذف آن‌ها هیچ یالی در گراف باقی نگذارد. به عبارت دیگر، از بین بردن اغتشاش در یک سیستم انتقال اطلاعات متناظر با مسأله کوچک‌ترین ترنسورسال در گراف متناظر با سیستم است.

مسأله آرایه‌ها با قابلیت پیکربندی مجدد

با توجه به سرعت پیشرفت تکنولوژی، در حال حاضر یک سیستم یکپارچه می‌تواند با اتصال تعداد زیادی عناصر یکسان مانند سلول‌های حافظه یا پردازنده بر روی یک تراشه یا ویفر ساخته شود. برای مثال از سال ۱۹۷۰ با توسعه فن آوری نیمه هادی و ارتباطات پیچیده، مجتمع سازی در مقیاس کلان^{۹۰} (VLSI) آغاز شد. VLSI روند ایجاد یک مدار مجتمع^{۹۱} (IC) با ترکیب هزاران ترانزیستور در یک تراشه منفرد است. همزمان با افزایش چگالی یک تراشه، احتمال ایجاد خطا روی تراشه در طول فرآیند ساخت نیز افزایش خواهد یافت. بنابراین تولید تراشه بدون نقص به طور فزاینده‌ای دشوار می‌شود. برای تراشه‌هایی که دارای ساختار یکنواختی هستند، مانند حافظه‌ها و یا آرایه‌های پردازنده، یک روش برای حل این مشکل قرار دادن تعدادی عناصر مازاد بر روی تراشه است. از این عناصر به جای عناصر معیوب استفاده خواهد شد. چون تراشه‌های معیوب شامل درصد کمی از عناصر معیوب هستند، جایگزینی عناصر معیوب با عناصر مازاد بازدهی تولید تراشه را افزایش می‌دهد. دو مرحله در چنین فرآیند جایگزینی وجود دارد. گام اول این است که هر عنصر روی تراشه را برای تعیین معیوب بودن امتحان کنیم. اگر عنصر معیوب باشد موقعیت این عنصر ثبت می‌شود. آزمونگرهای سخت افزار برای انجام این مرحله موجود هستند. گام دوم تخصیص عناصر مازاد به جای عناصر معیوب است. اجرای این مرحله در افزایش بازدهی و تحمل نقص تراشه اهمیت حیاتی دارد. الگوریتم‌های بهینه‌ای که در این زمینه وجود دارند دارای زمان طولانی محاسبات و خطاهای متعددی هستند که این الگوریتم‌ها قادر به رفع آن‌ها

^{۹۰} very larg scale integration

^{۹۱} integrated circuit



شکل ۱.۱: یک آرایه با قابلیت پیکربندی مجدد با دو سطر و سه ستون اضافی.

نیستند. بنابراین، الگوریتم‌های ناکارآمد می‌توانند به‌طور قابل توجهی هزینه تولید این تراشه‌ها را افزایش دهند. اما طراحی پیکربندی مجدد می‌تواند از یک الگوریتم مؤثرتر واقع شود و به افزایش بازدهی این تراشه‌ها کمک کند.

روش‌های مختلفی برای پیکربندی مجدد ارائه شده است. الگوریتم‌هایی برای اصلاح آرایه‌ها با قابلیت پیکربندی مجدد با استفاده از ردیف و ستون اضافی مورد توجه قرار گرفته‌اند [۸۰، ۱۰۱، ۱۰۳]. این رده خاص از آرایه‌ها با قابلیت پیکربندی مجدد که به‌طور گسترده در تولید حافظه‌ها با دسترسی تصادفی^{۹۲} (RAM) و VLSI استفاده می‌شود، متشکل از آرایه‌ای مستطیلی است که در آن عناصر مازاد در قالب سطر و ستون‌های اضافی مرتب شده‌اند. مانند شکل ۱.۱ که در آن آرایه مستطیلی شامل شش سطر و نه ستون با عناصر یکسان به همراه دو سطر و سه ستون اضافی است. در حقیقت، تعداد سطرها و ستون‌های اضافی در مقایسه با تعداد کلی سطرها و ستون‌ها در آرایه با قابلیت پیکربندی مجدد بسیار کم است. هزینه تنظیم مجدد یک آرایه نیز متناسب با تعداد سطرها و ستون‌های جایگزین است. بنابراین، استفاده از کم‌ترین تعداد سطر و ستون اضافی برای اصلاح عناصر معیوب، مطلوب است. به‌طور متناظر مسأله به‌صورت زیر بیان می‌گردد.

فرض کنید A یک آرایه مستطیلی، شامل تعدادی عناصر معیوب باشد. یک پوشش خطا در A شامل یک مجموعه S_r از سطرها و یک مجموعه S_c از ستون‌های موجود

^{۹۲}random access memory

در A است به طوری که هر عنصر معیوب در A یا در سطری از S_r یا در ستونی از S_c و یا در هر دو واقع شده باشد. یک پوشش خطا در A مینیمم است هرگاه شامل کمترین تعداد سطر و ستون باشد. مسأله کوچکترین پوشش خطا در پیکربندی مجدد آرایه‌ها را با استفاده از گراف‌های دوبخشی به صورت زیر مدل‌سازی می‌کنیم.

فرض کنید A آرایه‌ای شامل m سطر و n ستون باشد. گراف دوبخشی $G_A(U \cup L, E)$ را متناظر با آرایه A به صورت زیر می‌سازیم. فرض کنید $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ و $L = \{v_1, \dots, v_n\}$ به طوری که $u_i v_j \in E$ اگر و تنها اگر عنصر واقع در i -امین سطر و j -امین ستون در A معیوب باشد. فرض کنید $C \subseteq U \cup L$. همچنین فرض کنید S_c و S_r به ترتیب مجموعه سطرها و ستون‌های متناظر با رأس‌های C در آرایه A باشند. در این صورت به آسانی می‌توان مشاهده کرد که $S_r \cup S_c$ کوچکترین پوشش خطا برای A است اگر و تنها اگر C یک ترنسورسال مینیمم برای G_A باشد.

علاوه بر کاربردهایی که برای مسأله کوچکترین ترنسورسال در مطالب فوق ذکر شد، باید گفت که برای این مسأله کاربردهای متعدد دیگری نیز در زمینه‌های مختلف وجود دارد. به عنوان مثال، بازیابی اطلاعات و طراحی تجربی [۹]، نظریه کد گذاری و مسأله تشخیص خطا در سیستم [۵۵]، تصاویر کامپیوتری، شبکه‌های کامپیوتری و تعمیر آرایه‌های حافظه مانند RAM [۹۶]، مسأله m -وزیر [۶۳]، مسأله پوشش صفحه شطرنجی با تترامینوها^{۹۳} [۱۳]، مخابرات، کاربرد نظامی، مهندسی برق و بیوانفورماتیک [۸۴]، ساختار درخت‌های فیلوژنتیک، شناسایی فوتوتیپ و تجزیه و تحلیل داده‌های ریزآرایه [۱] و همچنین تخصیص امکانات خدماتی و رفاهی مانند مراکز خرید، اورژانس، ایستگاه‌های آتش‌نشانی و ایستگاه‌های ایست و بازرسی جاده‌ای [۴] از جمله کاربردهای دیگر این مسأله هستند.

۴.۱ پیچیدگی مسأله ترنسورسال

همان‌طور که در بخش قبل ذکر شد، مسأله کوچک‌ترین ترنسورسال دارای کاربردهای فراوانی در زمینه‌های مختلف است. این مطلب از جمله دلایلی است که ما را به حل این مسأله ترغیب می‌کند. در این بخش، پیچیدگی حل مسأله کوچک‌ترین ترنسورسال را بررسی می‌کنیم. در حقیقت قصد داریم به این پرسش پاسخ دهیم که سختی محاسبه عدد ترنسورسال یک گراف دلخواه چقدر است.

نظریه پیچیدگی محاسباتی شاخه‌ای از نظریه محاسبات، ریاضی و علوم کامپیوتر است که به بررسی دشواری حل مسائل به‌صورت الگوریتمی می‌پردازد. بسیاری از مسائل مورد علاقه ما مسائل بهینه‌سازی هستند. بررسی سختی حل یک مسأله به‌طور مستقیم در مسائل بهینه‌سازی به کار نمی‌رود بلکه در مسائل تصمیم‌گیری که پاسخ آن‌ها بله یا خیر (به‌طور رسمی صفر یا یک) است به کار می‌رود. بنابراین، نشان دادن اینکه مسأله‌ای سخت است یا خیر ما را به ناحیه مسائل تصمیم‌گیری محدود می‌کند. ما معمولاً می‌توانیم یک مسأله بهینه‌سازی را با محدود کردن مقدار بهینه به شکل یک مسأله تصمیم‌گیری درآوریم. به‌عنوان مثال در مسأله کوچک‌ترین ترنسورسال، گراف G و مقدار k به‌عنوان ورودی تعیین می‌شود و مسأله تصمیم‌گیری به این شکل بیان می‌شود: ”آیا ترنسورسالی در G از اندازه کم‌تر یا مساوی k وجود دارد؟“.

به‌طور کلی، مسائل تصمیم‌گیری با توجه به مرتبه زمانی حل خود به چهار کلاس تقسیم می‌شوند. دسته‌ای از آن‌ها مسائلی هستند که برای آن‌ها الگوریتمی با مرتبه زمانی چندجمله‌ای موجود می‌باشد. این مسائل به کلاس P مخفف polynomial تعلق دارند. لازم به ذکر است که الگوریتم زمانی چندجمله‌ای الگوریتمی است که در بدترین حالت، پیچیدگی زمانی آن تابع چندجمله‌ای از اندازه ورودی باشد. کلاس NP مخفف non-deterministic polynomial، مجموعه مسائل تصمیم‌گیری است که توسط الگوریتم‌های زمانی چندجمله‌ای غیرقطعی قابل حل هستند. بدیهی است که کلاس

P زیرکلاس NP است. مهم‌ترین سؤالی که برای این کلاس‌ها در این نظریه وجود دارد این است که آیا $P = NP$ ؟ این باور گسترده وجود دارد که این تساوی نمی‌تواند درست باشد. یک مسأله NP-سخت^{۹۴} است اگر یک الگوریتم زمانی چندجمله‌ای برای این مسأله قابل تبدیل به یک الگوریتم زمانی چندجمله‌ای برای هر یک از مسائل کلاس NP شود. همچنین، یک مسأله NP-کامل^{۹۵} است اگر متعلق به خانواده NP باشد و در عین حال NP-سخت نیز باشد. کلاس NP-کامل زیرکلاس کلاس‌های NP و NP-سخت است. در واقع کلاس NP-کامل فصل مشترک کلاس‌های NP و NP-سخت را تشکیل می‌دهد.

مسائل NP-کامل اولین بار توسط کوک^{۹۶} در سال ۱۹۷۱ مطرح شد [۲۳]. در این مقاله کوک ثابت کرد که مسأله تصدیق پذیری^{۹۷} یک مسأله NP-کامل است. در سال ۱۹۷۲ کارپ^{۹۸} در [۷۰]، بیست و یک مسأله از مسائل ترکیبیاتی را به عنوان مسائل NP-کامل رده بندی کرد. او برای اثبات ادعای خود از مسأله تصدیق پذیری استفاده کرد و نمونه‌ای از این مسأله (3-SAT) را در زمان چند جمله‌ای به مسأله کوچک‌ترین ترنسورسال در گراف تبدیل کرد. پس از آن، مسأله کوچک‌ترین ترنسورسال هسته اصلی اثبات بسیاری از مسائل NP-سخت گردید. از جمله این مسائل می‌توان به مسأله کوچک‌ترین مجموعه احاطه‌گر، بزرگ‌ترین خوشه، بزرگ‌ترین مجموعه مستقل، طولانی‌ترین گشت و مسیر همیلتونی اشاره کرد. بنابراین، ما با یکی از مسائل کلاسیک و مشهور NP-کامل در نظریه گراف سروکار داریم که در دهه‌های اخیر توجه ویژه‌ای را به خود اختصاص داده است. سیر تکاملی حل این مسأله در زمان‌های مختلف به شرح زیر است.

در سال ۱۹۷۶ گری و همکارانش^{۹۹} در [۳۹] ثابت کردند که مسأله ترنسورسال حتی برای گراف‌ها با ماکسیمم درجه سه، NP-کامل است. البته این قضیه به‌طور

^{۹۴} NP-hard

^{۹۵} NP-complete

^{۹۶} Cook

^{۹۷} satisfiability

^{۹۸} Karp

^{۹۹} Garey. et. al

مستقل توسط هرمان^{۱۰۰} نیز در [۶۲] ثابت شد. اگر محدودیت روی ماکسیمم درجه تنها یک واحد کم شود، آنگاه با توجه به مشاهده ۱.۲.۱، حل مسأله ترنسورسال برای گراف‌هایی با ماکسیمم درجه حداکثر دو بدیهی است. بنابراین، محدودیت درجه در قضیه فوق بهترین مقدار ممکن است. بنابر این قضیه، مسأله ترنسورسال برای خانواده گراف‌های مکعبی نیز NP-کامل است. با توجه به این مطلب و همچنین این حقیقت که دقیقاً دوبار زیرتقسیم کردن یال‌های گراف G عدد ترنسورسال گراف را دقیقاً به اندازه $m(G)$ افزایش می‌دهد، پدرس و همکارانش^{۱۰۱} به نتایج زیر دست یافتند.

قضیه ۱.۴.۱. [۹۱] مسأله ترنسورسال NP-کامل است، حتی برای گراف‌های G با کمر فرد حداقل هفت به طوری که هر رأس از درجه بیشتر از دو در G دارای حداکثر یک همسایه از درجه بیشتر از دو باشد.

شرط روی رئوس با درجه بیشتر از دو در قضیه فوق، متناظر با این شرط است که زیرگراف القا شده روی مجموعه رئوس با درجه بیشتر از دو در G ، گرافی شامل یال‌های مستقل و رأس‌های منفرد باشد.

قضیه ۲.۴.۱. [۹۱] مسأله ترنسورسال NP-کامل است، حتی برای گراف‌های G با درجه رئوس دو و سه و کمر فرد حداقل هفت به طوری که برای هر دو رأس u و v از درجه سه و با فاصله سه در G ، u یا v دارای حداکثر یک همسایه از درجه سه باشند. همچنین، در [۳۹] ثابت شد که مسأله ترنسورسال حتی برای گراف‌های مسطح نیز NP-کامل باقی می‌ماند.

قضیه ۳.۴.۱. [۳۹] مسأله ترنسورسال یک مسأله NP-کامل است حتی برای گراف‌های مسطح با ماکسیمم درجه شش.

در ادامه تلاش برای بررسی سختی مسأله ترنسورسال، نشان داده شد که علاوه بر خانواده‌های مذکور، مسأله ترنسورسال برای خانواده‌هایی از گراف‌ها با محدودیت‌های

^{۱۰۰}Herrmann

^{۱۰۱}Pedersen et. al.

جدید نیز همچنان NP-کامل باقی می‌ماند. از جمله این محدودیت‌ها می‌توان به گراف‌های مسطح^{۱۰۲} [۴۰]، گراف‌های هندسی^{۱۰۳} [۷]، گراف‌های مثلث-آزاد^{۱۰۴} [۹۵]، گراف‌هایی از مرتبه n فاقد دور به طول کمتر از cn^k که $c > 0$ و k اعداد ثابتی هستند [۸۶]، گراف k -پنجه-آزاد^{۱۰۵} با $k \geq 4$ [۷۸] و گراف‌های دوبخشی^{۱۰۶} [۷۸] اشاره کرد.

مسائل بهینه‌سازی زیادی با کاربردهای وسیع در رده مسائل NP-کامل قرار می‌گیرند. براساس قضیه NP-کامل بودن [۴۰]، این مسائل در زمان چندجمله‌ای قابل حل نیستند، مگر اینکه $P = NP$. اما این امر، نیاز به حل این مسائل را با توجه به اهمیت کاربردی که دارند مرتفع نمی‌سازد. در حقیقت، پی بردن به NP-کامل بودن یک مسأله، آغاز کار بر روی آن مسأله است. بنابراین تلاش‌های زیادی در راستای تخمین جواب این مسائل با استفاده از تعیین کران برای آن‌ها انجام شده است. در ادامه و در فصل ۲ به برخی از کران‌های ارائه شده برای حل مسأله کوچک‌ترین ترنسورسال اشاره می‌کنیم.

۵.۱ تاریخچه مفاهیم استقلال و ترنسورسال

ریشه تاریخی مفاهیم استقلال و ترنسورسال به سال ۱۸۴۸ برمی‌گردد. در این سال، مسأله ۸-وزیر توسط شطرنج باز آلمانی به نام بزل^{۱۰۷} مطرح شد [۱۴]. این مسأله، عبارت است از قرار دادن ۸ مهره وزیر در یک صفحه شطرنج 8×8 به طوری که هیچ یک از مهره‌ها یکدیگر را تهدید نکنند. ریاضی‌دانان بسیاری این مسأله را بررسی کردند. از جمله گاس^{۱۰۸} که در اوایل سال ۱۸۵۰ جواب‌هایی برای مسأله ۸-وزیر ارائه کرد [۴۱]. اولین راه حل توسط ناک^{۱۰۹} در سال ۱۸۵۰ ارائه شد [۸۷]. در حقیقت ناک اولین کسی بود که تمامی ۹۲ جواب ممکن برای این مسأله را ارائه نمود. پس از آن گاس ادعا کرد

^{۱۰۲} planar graphs

^{۱۰۳} geometric graphs

^{۱۰۴} triangle free graphs

^{۱۰۵} k -claw free graph

^{۱۰۶} bipartite graphs

^{۱۰۷} Bezzel

^{۱۰۸} Gauss

^{۱۰۹} Nauck

که این تعداد، تمام جواب‌های ممکن برای مسأله ۸- وزیر است و پاولز^{۱۱۰} در [۹۰] این ادعا را ثابت کرد. لیونت^{۱۱۱} نیز اولین کسی بود که مسأله ۸- وزیر را به مسأله n - وزیر تعمیم داد [۷۹]. در سال ۱۸۷۴ گانتز^{۱۱۲} در [۴۷] راه حلی برای مسأله n - وزیر با استفاده از دترمینان یک ماتریس ارائه داد که گلاشر^{۱۱۳} در [۴۳] این روش را تکمیل کرد. مسأله n - وزیر مثالی از مسأله پیدا کردن یک مجموعه مستقل از اندازه n در یک گراف از مرتبه n^2 است.

همان‌طور که رس بال^{۱۱۴} در سال ۱۸۹۲ در [۱۰] مطرح نموده است، علاقه‌مندان شطرنج در اواخر قرن نوزدهم میلادی، در میان دیگر مسائل، مسأله زیر را نیز بررسی کردند.

● مطلوب است بیشترین تعداد مهره‌های شطرنج، از یک نوع داده شده، که بتوان آن‌ها را روی یک صفحه شطرنج $n \times n$ قرار داد به طوری که هیچ دو مهره‌ای یکدیگر را تهدید نکنند.

این مسأله مثالی از تعیین بزرگ‌ترین اندازه یک مجموعه مستقل در یک گراف است. این مسأله به طور دقیق‌تر توسط یاگلم^{۱۱۵} و یاگلم در [۱۱۸] بررسی شد. در حقیقت این دو برادر مسأله فوق را برای برخی از انواع مهره‌های شطرنج حل کردند.

^{۱۱۰} Pauls
^{۱۱۱} Lionnet
^{۱۱۲} Günther
^{۱۱۳} Glaisher

^{۱۱۴} Rouse Ball
^{۱۱۵} Yaglom

فصل ۲

برخی از کران‌های موجود برای عدد ترنسورسال

۱.۲ مقدمه

مسئله ترنسورسال یکی از مسائل ترکیبیاتی است که در رده مسائل NP-کامل قرار می‌گیرد. بنابراین، یکی از مسائل اساسی در نظریه گراف، به دست آوردن کران‌هایی برای عدد ترنسورسال یک گراف براساس اطلاعات داده شده از گراف است. با توجه به کاربردهای متعددی که برای این مسئله وجود دارد، این مسئله توجه ویژه‌ای را در دهه‌های اخیر به خود اختصاص داده است. همان‌طور که در فصل قبل اشاره شد، طیف وسیعی از کاربردهای این مفهوم در زمینه‌های مختلف تجربی است. بنابراین، از بین کران‌های موجود، آن دسته از کران‌هایی که قابل محاسبه هستند جالب توجهند. تعداد زیادی کران‌های بالا و پایین قابل محاسبه انتشار داده شده‌اند که در این فصل به برخی از آن‌ها اشاره می‌کنیم. هدف این کران‌ها، تخمین اندازه عدد ترنسورسال

یک گراف است. فرض کنید l_1, l_2, \dots, l_k کران‌های پایین قابل محاسبه برای عدد ترنسورسال گراف G باشند. بنابراین، $l(G) = \max\{l_1, l_2, \dots, l_k\}$ نیز یک کران پایین قابل محاسبه برای عدد ترنسورسال گراف است. به‌طور مشابه، اگر u_1, u_2, \dots, u_m کران‌های بالای قابل محاسبه برای عدد ترنسورسال گراف G باشند، آنگاه $u(G) = \min\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ نیز یک کران بالای قابل محاسبه برای عدد ترنسورسال گراف است. برای بعضی از گراف‌های G داریم $l(G) = u(G)$. در چنین مواردی، عدد ترنسورسال گراف G به‌طور مستقیم از این کران‌ها محاسبه می‌شود:

$$\tau(G) = l(G) = u(G).$$

کران‌های قابل محاسبه برای عدد ترنسورسال یک گراف از دیدگاه کاربردی نیز جالب توجه هستند. زیرا می‌توانند ما را به سمت محاسبه سریع‌تر عدد ترنسورسال هدایت کنند. در حقیقت، این کران‌ها می‌توانند عدد ترنسورسال یک گراف را، از طریق کاهش میزان جستجوی کامپیوتری زیرمجموعه‌هایی از رئوس و یا محاسبه عدد ترنسورسال زیرگراف‌هایی از گراف داده شده، تخمین بزنند. اگر مشخص شود که برای یک گراف G ، $\tau(G)$ در بازه $[l, u]$ قرار می‌گیرد، آنگاه تنها زیرمجموعه‌هایی از اندازه درون این بازه باید در نظر گرفته شوند. در برخی موارد نیز کران‌های پایین و بالای قابل محاسبه برای عدد ترنسورسال گراف‌ها، می‌توانند برای تخمین اندازه عدد ترنسورسال بدون هیچ جستجویی به کار گرفته شوند. در این موارد قضایا پیش‌بینی می‌کنند که عدد ترنسورسال گراف در بازه‌ای که $l = u$ قرار می‌گیرد. در [۱۰۷] نشان داده شده است که عدد ترنسورسال یک گراف G با بزرگ‌ترین مقدار از بین اعداد ترنسورسال دو زیرگراف سره G برابر است. بنابراین، محاسبه عدد ترنسورسال یک گراف به محاسبه اعداد ترنسورسال دو زیرگراف سره آن گراف وابسته است. اگر کران‌های تئوری پیش‌بینی کنند که عدد ترنسورسال این زیرگراف‌ها بزرگ‌تر از l نیست، آنگاه بدون نیاز به هیچ محاسبه اضافی نتیجه می‌گیریم که عدد ترنسورسال گراف مورد نظر l است. همچنین، اگر کران‌ها ثابت کنند که یکی از این زیرگراف‌ها دارای عدد

ترنسورسال u است، آنگاه گراف اصلی نیز دارای عدد ترنسورسال u است. در این فصل، به‌طور مختصر به برخی از تلاش‌هایی که در راستای محاسبه عدد ترنسورسال یک گراف انجام شده است اشاره می‌کنیم و به ذکر چند کران قابل محاسبه می‌پردازیم. یک مطالعه جامع در رابطه با کران‌های قابل محاسبه توسط لارسن در [۷۵] انجام شده است. کران‌های این فصل را به سه دسته کران‌های پایین (بخش ۲.۲)، کران‌های بالا (بخش ۲.۳) و کران‌های ویژه (بخش ۴.۲) تقسیم می‌کنیم.

۲.۲ کران‌های پایین قابل محاسبه

توران^۱ در [۱۰۹] ثابت کرد که به ازای n و α معین، گراف‌ها از مرتبه n و عدد استقلال α و مینیمم اندازه، گراف‌های توران هستند. این گراف‌ها شامل $\alpha \lfloor n/\alpha \rfloor + \alpha - n$ خوشه از اندازه $\lfloor n/\alpha \rfloor$ و $n - \alpha \lfloor n/\alpha \rfloor$ خوشه از اندازه $\lfloor n/\alpha \rfloor$ می‌باشند. با توجه به نتایج توران، کران زیر به دست می‌آید.

قضیه ۱.۲.۲ [۵۰]. اگر G گرافی از مرتبه n و اندازه m باشد، آنگاه داریم:

$$\tau(G) \geq n - \left\lfloor \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{4} + n^2 - n - 2m} \right\rfloor.$$

کران‌هایی زیادی برای عدد ترنسورسال گراف موجود است که به مشخصه‌های بدیهی گراف، مانند مرتبه، اندازه و درجات گراف، وابسته هستند. در ادامه به ذکر برخی از این موارد می‌پردازیم.

قضیه ۲.۲.۲ [۱۷]. اگر G گرافی همبند از مرتبه n و ماکسیمم درجه Δ باشد، آنگاه داریم:

$$\tau(G) \geq \left\lfloor \frac{n-1}{\Delta} \right\rfloor.$$

همچنین برج در [۱۷] ثابت کرد که کران فوق دقیق است.

^۱Turán

قضیه ۳.۲.۲. [۶] اگر G گرافی همبند از مرتبه n و ماکسیمم درجه Δ باشد، آنگاه داریم:

$$\tau(G) \geq \lceil 2\sqrt{n-1} \rceil - \Delta.$$

قضیه ۴.۲.۲. [۵] فرض کنید G گرافی از مرتبه $n \geq 3$ و ماکسیمم درجه Δ باشد. در این صورت داریم:

$$\tau(G) \geq n - \frac{\Delta}{2} \lceil \frac{n}{2} \rceil.$$

تساوی کران فوق برقرار است اگر و تنها اگر G یک دور زوج یا مسیر و یا یک پنجه باشد.

از آنجا که برای گراف G داریم $\tau(G) < n(G)$ ، کران بدیهی زیر به دست می‌آید.

قضیه ۵.۲.۲. برای هر گراف G داریم $\tau(G) \geq \delta(G)$.

ترنسورسال در یک گراف در واقع افزایش یال‌های گراف به ستاره‌ها است. بنابراین، به‌طور بدیهی کران زیر به دست می‌آید که در [۱۱۴] به کواک^۲ نسبت داده شده است.

قضیه ۶.۲.۲. [۱۱۴] فرض کنید G گرافی غیر تهی از اندازه m و ماکسیمم درجه Δ باشد. در این صورت داریم:

$$\tau(G) \geq \frac{m}{\Delta}.$$

در [۷۷]، لارسن و پیر کران‌های پایینی برای عدد ترنسورسال براساس درجه میانی گراف ارائه کردند.

قضیه ۷.۲.۲. [۷۷] اگر G گرافی همبند از مرتبه n و درجه میانی M باشد، آنگاه داریم:

$$\tau(G) \geq \frac{M+1}{2}.$$

تساوی کران فوق برقرار است اگر و تنها اگر G گراف ستاره باشد.

کران فوق می‌تواند برخی کران‌ها را، برای مثال کران ۵.۲.۲، به‌طور جدی بهبود دهد. به‌عنوان مثال، یک گراف کامل K_n و یک رأس جدید v در نظر بگیرید. رأس v را به برخی رئوس K_n وصل کنید. تا زمانی که درجه v در گراف حاصل کم‌تر از n باشد، کران ۷.۲.۲ بهتر از کران ۵.۲.۲ خواهد بود. لارسن و پپر در همین مقاله کران فوق را بهبود بخشیدند. همچنین آن‌ها موفق شدند همه گراف‌هایی که در تساوی کران جدید صدق می‌کنند، دسته‌بندی کنند.

قضیه ۸.۲.۲ [۷۷] اگر G گرافی همبند و غیر ستاره از مرتبه n و درجه میانی M باشد، آنگاه $\tau(G) \geq M/2 + 1$. تساوی برقرار است اگر و تنها اگر گراف G با $CS(k, k+1)$ و یا $CS(3, 3)$ یکرخت باشد و یا G گرافی همبند باشد به‌طوری‌که $n \geq 4$ ، $\tau(G) = 2$ و $M = 2$.

همچنین لارسن و پپر یک کران پایین برای عدد ترنسورسال براساس تعداد رأس‌های برشی گراف ارائه کردند.

قضیه ۹.۲.۲ [۷۷] فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه n و دارای C رأس برشی باشد. در این صورت داریم:

$$\tau(G) \geq \frac{C+1}{2}.$$

تساوی کران فوق برقرار است اگر و تنها اگر G مسیری از مرتبه فرد باشد و یا فاصله بین هر برگ و هر رأس از درجه حداقل سه در G فرد باشد.

در [۲۷] ثابت شد که هر گراف به شعاع r دارای یک مسیر القایی از مرتبه حداقل $2r - 1$ است. با توجه به مشاهده ۱.۲.۱، این حقیقت را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۰.۲.۲. برای هر گراف G داریم $\tau(G) \geq \text{rad}(G) - 1$.

کران‌هایی نیز برای عدد ترنسورسال گراف ارائه شده‌اند که وابسته به ماتریس مجاورت گراف مورد نظر می‌باشند.

قضیه ۱۱.۲.۲. [۲۴] اگر G گرافی از مرتبه n باشد و p_-, p_0, p_+ به ترتیب مقادیر ویژه کم‌تر، مساوی و بزرگ‌تر از صفر ماتریس مجاورت G باشند، آنگاه داریم:

$$\tau(G) \geq n - p_0 - \min\{p_-, p_+\}.$$

کران فوق که به **کران سوتکوویچ**^۳ مشهور است، کران خوبی برای برخی از گراف‌ها است. به‌عنوان مثال، گراف پترسن G دارای چهار مقدار ویژه نامثبت است. بنابراین، طبق کران سوتکوویچ داریم $\tau(G) \geq 6$. در حقیقت، برای گراف پترسن داریم $\tau(G) = 6$. گراف‌های کامل نیز در تساوی این کران صدق می‌کنند. اما یک نتیجه مستقیم از قضیه ۱۱.۲.۲ کرانی برحسب مرتبه ماتریس مجاورت گراف است.

قضیه ۱۲.۲.۲. [۱۸] فرض کنید G گرافی از مرتبه n و A ماتریس مجاورت G باشد. در این صورت داریم:

$$\tau(G) \geq \frac{1}{3} \text{rank}(A).$$

قضیه ۱۳.۲.۲. [۸۳] فرض کنید G گرافی غیر تهی از مرتبه n باشد. در این صورت داریم:

$$\tau(G) \geq n - \min \left\{ \sum_{i=k+1}^n \frac{-\lambda_{\min}(A)}{\lambda_i(A) - \lambda_{\min}(A)} \times [(e+y)^T u_i]^2 : y \in Y \right\}.$$

که در آن A ماتریس مجاورت گراف G ، e بردار تماماً یک (برداری با درایه‌های یک)، u_i بردار ویژه نرمال وابسته به مقدار ویژه λ_i و $\lambda_{\min}(A)$ کوچک‌ترین مقدار ویژه A است. همچنین،

$$Y = \{y : y \geq 0, (e+y)^T u_i = 0, \forall i = 1, \dots, k\}.$$

۳.۲ کران‌های بالای قابل محاسبه

شاید قدیمی‌ترین کران پایین برای عدد استقلال یک گراف کران زیر است که در واقع نتیجه قضیه مشهور توران است. بنابراین این کران، **کران توران**^۴ نامیده می‌شود.

^۳ Cvetković bound

^۴ Turán bound

قضیه ۱.۳.۲. [۴۵، ۱۱۰] اگر G گرافی از مرتبه n و میانگین درجات \bar{d} باشد، آنگاه داریم:

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{1 + \bar{d}}.$$

طبق قضایای ۱.۳.۲ و ۱.۳.۱، نتیجه زیر به دست می‌آید.

$$\tau(G) \leq \frac{n\bar{d}}{1 + \bar{d}}. \quad (1.2)$$

کارو^۵ [۱۹] و وی^۶ [۱۱۲] به طور مستقل شکل گسسته کران توران را به دست آوردند. بنابراین، کران زیر به کران کارو-وی^۷ مشهور است.

قضیه ۲.۳.۲. [۱۱۲] برای گراف G داریم:

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} (1 + \deg_G(v))^{-1}.$$

از آنجا که تابع $1/(1+x)$ یک تابع محدب است، بنابراین کران فوق اندکی از کران توران بهتر است. همچنین، وی نشان داد با استفاده از یک الگوریتم چندجمله‌ای می‌توان مجموعه مستقلی از اندازه فوق یا بزرگ‌تر در گراف به دست آورد. در حقیقت وی با استفاده از این الگوریتم نشان داد کران فوق بهترین کران ممکن است. به عبارت دیگر تساوی قضیه ۲.۳.۲ برقرار است اگر و تنها اگر G اجتماع مجزایی از خوشه‌ها باشد. در [۳] نیز یک اثبات احتمالاتی برای کران کارو-وی منتشر شد. در ادامه این فصل، فرض کنید $CW(G)$ مقدار کران کارو-وی برای گراف G باشد. در [۹۸]، سلکو^۸ درصد برآمدت با یک روش احتمالاتی، کران کارو-وی را بهبود دهد. در نتیجه تلاش سلکو کران زیر برای عدد ترنسورسال گراف به دست می‌آید.

قضیه ۳.۳.۲. [۹۸] اگر G گرافی از مرتبه n باشد، آنگاه داریم:

$$\tau(G) \leq n - CW(G)(1 + d(v)),$$

^۵Caro

^۸Selkow

^۶Wei

^۷Caro-Wei bound

که در آن

$$d(v) = \max\left\{0, \frac{\deg(v)}{\deg(v)+1} - \sum_{w \in N_G(v)} \frac{1}{1+\deg(w)}\right\}.$$

کران‌های دیگری نیز وابسته به کران کارو-وی وجود دارند. در ذیل به برخی از آن‌ها اشاره می‌کنیم.

قضیه ۴.۳.۲. [۵۱] فرض کنید G گرافی از مرتبه n و d_i درجه رأس v_i باشد. همچنین فرض کنید $q_i = 1/(1+d_i)$. در این صورت داریم:

$$\tau(G) \leq n - \frac{(CW(G))^2}{CW(G) - \sum_{ij \in E(G)} (d_i - d_j)^2 q_i q_j}.$$

قضیه ۵.۳.۲. [۸۵] اگر G گرافی همبند از مرتبه n و اندازه m باشد، آنگاه داریم:

$$\tau(G) \leq n - CW(G) - \frac{CW(G) - 1}{\Delta(G)(\Delta(G) + 1)}.$$

از آنجا که مرتبه و اندازه و دنباله درجات یک گراف از مشخصه‌های بدیهی گراف هستند، کران‌های زیادی براساس این مشخصه‌ها ارائه شده‌اند.

قضیه ۶.۳.۲. [۵۳] اگر G گرافی از مرتبه n و اندازه m باشد، آنگاه داریم:

$$\tau(G) \leq \frac{1}{4} \left((n - 2m - 1) + \sqrt{(2m + n + 1)^2 - 4n^2} \right).$$

قضیه ۷.۳.۲. [۵۰] اگر G گرافی از مرتبه n و اندازه m باشد، آنگاه داریم:

$$\tau(G) = n - \left\lfloor \frac{2n - \frac{2m}{\lceil m/n \rceil}}{\lceil m/n \rceil + 1} \right\rfloor = n - \left\lfloor \frac{2n - \frac{2m}{\lceil \bar{d} \rceil}}{\lceil \bar{d} \rceil + 1} \right\rfloor,$$

که در آن \bar{d} میانگین درجات گراف G است.

قضیه ۸.۳.۲. [۲۲] اگر G گرافی از مرتبه n و اندازه m باشد، آنگاه داریم:

$$\tau(G) \leq \frac{n+m}{3}.$$

کران فوق به کران خواتال-مک‌دیارمید^۹ مشهور است.

^۹Chvátal-McDiarmid bound

قضیه ۹.۳.۲. [۶] فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه n باشد. در این صورت داریم:

$$\tau(G) \leq n - \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor + \Delta(G).$$

قضیه ۱۰.۳.۲. [۵] برای هر گراف همبند G از مرتبه $n \geq 5$ و ماکسیمم درجه Δ داریم:

$$\tau(G) \leq \left\lfloor \frac{n(\Delta - 1) + 1}{\Delta} \right\rfloor.$$

تساوی کران فوق برقرار است اگر و تنها اگر G گراف کامل یا دور فرد باشد.

البته در [۱۷]، محدودیت روی مرتبه در قضیه ۱۰.۳.۲ برداشته شد.

قضیه ۱۱.۳.۲. [۱۷] برای هر گراف همبند G از مرتبه n و ماکسیمم درجه Δ داریم:

$$\tau(G) \leq \left\lfloor \frac{n(\Delta - 1) + 1}{\Delta} \right\rfloor.$$

اگر $n - 1$ بر Δ قابل قسمت نباشد، آنگاه کران فوق دقیق است. اگر $n - 1$ بر Δ قابل قسمت باشد و G گراف کامل یا دور نباشد، آنگاه داریم:

$$\tau(G) \leq \left\lfloor \frac{(n - 1)(\Delta - 1)}{\Delta} \right\rfloor.$$

کران فوق نیز دقیق است.

قضیه ۱۲.۳.۲. [۵۲] اگر G گرافی همبند از مرتبه n و میانگین درجات \bar{d} باشد، آنگاه داریم:

$$\tau(G) \leq n - \frac{2n}{(\bar{d} + 1 + \frac{2}{n}) + \sqrt{(\bar{d} + 1 + \frac{2}{n})^2 - 8}}.$$

قضیه ۱۳.۳.۲. [۱۱۳] اگر G گرافی با دنباله درجات d_1, \dots, d_n باشد، آنگاه داریم:

$$\tau(G) \leq n - \frac{n}{\max\{\min\{d_i + 1, i\} \mid i = 1, \dots, n\}}.$$

این کران معروف به کران ولش-پاول^{۱۰} است.

^{۱۰}Welsh-Powell bound

قضیه ۱۴.۳.۲. [۱۰۵] اگر G گرافی از مرتبه n باشد، آنگاه داریم:

$$\tau(G) \leq n - \frac{n}{1 + \max\{\delta(G') \mid G' \subset G\}}.$$

که در آن منظور از $G' \subset G$ زیرگراف G' از گراف داده شده G است.

این کران معروف به **کران سِکِرش-ویلف**^{۱۱} است. مشابه بخش ۲.۲، چند کران نیز وابسته به ماتریس مجاورت گراف ذکر می‌کنیم.

قضیه ۱۵.۳.۲. [۱۱۵] فرض کنید λ بزرگ‌ترین مقدار ویژه ماتریس مجاورت گراف G و n مرتبه این گراف باشد، در این صورت داریم:

$$\tau(G) \leq \frac{n\lambda}{1 + \lambda}.$$

قضیه ۱۶.۳.۲. [۱۱۶] فرض کنید λ بزرگ‌ترین مقدار ویژه ماتریس مجاورت گراف G از مرتبه n و S مجموع درایه‌های بردار ویژه نرمال متناظر با λ باشد. در این صورت داریم:

$$\tau(G) \leq \frac{S^2(n-1) + n\lambda}{S^2 + \lambda}.$$

قضیه ۱۷.۳.۲. [۸۲] اگر $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ مقادیر ویژه ماتریس مجاورت گراف G از مرتبه n باشند و برای $j \in [n]$ بردار ویژه نرمال متناظر با λ_j و $(u_j)_i$ درایه i -ام u_j باشد، آنگاه داریم:

$$\tau(G) \leq n - \frac{n^2}{n(\Delta + 1) + (\Delta + 1 - \lambda_1) \max\{(U_1^+)^2, (U_1^-)^2\}},$$

که در آن $U_1^- = \min_{(u_j)_i < 0} \frac{1}{|(u_j)_i|}$ و $U_1^+ = \min_{(u_j)_i > 0} \frac{1}{(u_j)_i}$.

در ادامه کران‌هایی براساس دیگر مشخصه‌های گراف، مانند میانگین فاصله گراف، باقیمانده گراف و غیره ارائه می‌دهیم که این مشخصه‌ها نیز بدیهی یا قابل محاسبه هستند.

^{۱۱}Szekeres-Wilf bound

قضیه ۱۸.۳.۲. [۲۱] فرض کنید G گرافی همبند و از مرتبه n باشد، در این صورت داریم $\tau(G) \leq n - \bar{D}(G)$. تساوی کران فوق برقرار است اگر و تنها اگر G گراف کامل باشد.

قضیه ۱۹.۳.۲. [۳۴] فرض کنید G گرافی از مرتبه n باشد، در این صورت داریم:

$$\tau(G) \leq n - R(G).$$

قضیه ۲۰.۳.۲. [۳۱، ۲۷] اگر G گرافی از مرتبه n باشد، آنگاه داریم:

$$\tau(G) \leq n - rad(G).$$

در [۳۰] همه گراف‌های شعاع-بحرانی که در تساوی کران فوق صدق می‌کنند، دسته‌بندی شدند. در ادامه این کار، دلاوینا و همکارانش^{۱۲} موفق شدند تمامی گراف‌های G را که $\tau(G) = n(G) - rad(G)$ دسته‌بندی کنند [۲۵].

قضیه ۲۱.۳.۲. [۷۷] اگر G گرافی به شعاع r و دارای تعداد p یال آویخته باشد، آنگاه داریم:

$$\tau(G) \leq n - r - \frac{p}{۲} + ۱.$$

این کران، کران ۲۰.۳.۲ را برای گراف‌هایی با حداقل سه یال آویخته بهبود می‌بخشد.

قضیه ۲۲.۳.۲. [۹۴] فرض کنید G گرافی از مرتبه n و دارای k مؤلفه و b یال برشی باشد، در این صورت داریم:

$$\tau(G) \leq n - \frac{b+k}{۲}.$$

همچنین در [۹۴] نشان داده شد که اگر G گرافی همبند باشد، آنگاه تساوی کران فوق برقرار است اگر و تنها اگر G درختی با یک تطابق کامل باشد.

^{۱۲}DeLaViña et. al.

قضیه ۲۳.۳.۲. [۲۹] برای گراف G از مرتبه n داریم:

$$\tau(G) \leq n - \max_{v \in V(G)} \{e(v), eh(v)\},$$

که در آن $e(v)$ برابر با تعداد رئوسی است که در فاصله زوج از رأس v قرار دارند و $eh(v)$ برابر با تعداد یال‌های افقی زوج نسبت به رأس v است، یعنی تعداد یال‌های e که هر دو رأس انتهایی e در فاصله زوج از رأس v قرار دارند.

گریگسبی^{۱۳} نتایج جالبی در رابطه با این کران در [۴۶] مطرح کرد. به عنوان مثال، او یک مشخصه سازی در زمان چند جمله‌ای برای گراف‌های کونینگ-ایگرواری که در تساوی کران فوق صدق می‌کنند ارائه کرد. به نظر می‌رسد که این دسته‌بندی برای گراف‌های کلی نیز برقرار باشد، اما این حدس هنوز اثبات نشده است.

در [۸۱] لاونشتاین و همکارانش^{۱۴} کران پایینی برای عدد استقلال یک گراف براساس مرتبه، اندازه و کمر فرد^{۱۵} گراف، $g_{odd}(G)$ ، ارائه کردند، که در اینجا منظور از کمر فرد یک گراف، اندازه کوتاه‌ترین دور فرد در گراف است.

قضیه ۲۴.۳.۲. [۸۱] فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه n و اندازه m باشد. اگر

$$m \geq \left\lfloor \frac{(g_{odd}(G)+1)n}{g_{odd}(G)} \right\rfloor - 1$$

$$2\alpha(G) \geq \left\lfloor \frac{(g_{odd}(G)-1)n}{g_{odd}(G)} \right\rfloor - \frac{1}{4} \left(m - \left(\left\lfloor \frac{(g_{odd}(G)+1)n}{g_{odd}(G)} \right\rfloor - 1 \right) \right).$$

از آنجایی که کمر فرد یک گراف حداقل ۳ است، به عنوان یک نتیجه از قضیه فوق کران بالایی برای عدد ترنسورسال گراف به دست می‌آید که این کران براساس مرتبه و اندازه گراف است.

قضیه ۲۵.۳.۲. [۸۱] اگر G گرافی همبند از مرتبه n و اندازه m باشد، آنگاه داریم:

$$\tau(G) \leq \frac{1}{3}n + \frac{1}{4}m + \frac{1}{3}.$$

^{۱۳}Grigsby

^{۱۴}Löwenstein et. al.

^{۱۵}odd girth

در ادامه [۸۱]، هنینگ و لاونشتاین در [۵۹] در صدد برآمدند تا کران قضیه ۲۵.۳.۲ را بهبود ببخشند. در این راستا، آن‌ها یک خانواده نامتناهی از گراف‌ها را به صورت زیر تعریف کردند.

۱.۳.۲ خانواده \mathcal{F}

در [۵۹] هنینگ و لاونشتاین تمامی گراف‌های G که $\tau(G) \geq n/3 + m/4$ را دسته‌بندی کردند. در این بخش این گراف‌ها را با عنوان خانواده \mathcal{F} معرفی می‌کنیم. در ساختار خانواده‌ای از گراف‌ها که توسط هنینگ و لاونشتاین معرفی شد، منظور از گراف K_4^* گراف به دست آمده از K_4 با دو بار زیرتقسیم کردن یالی از این گراف است. در این رساله، هر یک از رئوس درجه دو در گراف K_4^* را **رأس مقسم**^{۱۶} می‌نامیم. به ازای $t \in \{2, 3, 4\}$ ، یک K_t -**واحد**^{۱۷} گراف یگریخت با K_t است. همچنین، گراف یگریخت با C_5 و K_4^* را به ترتیب با **واحد**^{۱۸}- C_5 و **واحد**^{۱۹}- K_4^* نشان می‌دهیم. به طور کلی، منظور از یک **واحد**^{۲۰} در حقیقت یک F -واحد است به طوری که برای گراف F داریم:

$$F \in \{K_2, K_3, K_4, C_5, K_4^*\}.$$

ابتدا به معرفی زیرخانواده‌هایی از خانواده \mathcal{F} می‌پردازیم.

فرض کنید \mathcal{F}_k خانواده گراف‌های همبند G باشد به طوری که از $k \geq 1$ تا K_3 -واحد مجزا با افزودن $k-1$ یال به دست آمده‌اند. هر یال اضافه شده را یک **پل**^{۲۱} در گراف G می‌نامیم.

برای $k \geq 1$ ، فرض کنید $\mathcal{F}_{k,1}$ خانواده گراف‌های همبندی باشد که از یک K_4 -واحد و $k-1$ تا K_3 -واحد مجزا و افزودن $k-1$ یال به دست آمده‌اند. فرض کنید $\mathcal{F}_k = \mathcal{F}_{k,1}$. برای $k \geq 2$ ، فرض کنید $\mathcal{F}_{k,1}$ خانواده گراف‌های همبندی باشد که از اجتماع مجزایی از دو K_4 -واحد و $k-2$ تا K_3 -واحد و افزودن $k-1$ یال به دست آمده‌اند.

^{۱۶} divider vertex

^{۱۷} K_t -unit

^{۱۸} C_5 -unit

^{۱۹} K_4^* -unit

^{۲۰} unit

^{۲۱} bridge

برای $k \geq 1$ ، فرض کنید $\mathcal{F}_{1,2}$ خانواده گراف‌های همبندی باشد که از یک K_2 -واحد و $k-1$ تا K_3 -واحد مجزا و افزودن $k-1$ یال به دست می‌آیند. برای $k \geq 1$ ، فرض کنید $\mathcal{F}_{1,3}$ خانواده گراف‌های همبندی باشد که از یک C_5 -واحد و $k-1$ تا K_3 -واحد مجزا و افزودن $k-1$ یال به دست آمده‌اند. قرار دهید:

$$\mathcal{F}_1 = \bigcup_{i=1}^3 \mathcal{F}_{1,i}.$$

برای $k \geq 3$ ، فرض کنید $\mathcal{F}_{0,1}$ خانواده گراف‌های همبندی باشد که از اجتماع مجزایی از سه K_4 -واحد و $k-3$ تا K_3 -واحد و افزودن $k-1$ یال به دست آمده‌اند. برای $k \geq 2$ ، فرض کنید $\mathcal{F}_{0,2}$ خانواده گراف‌های همبندی باشد که از اجتماع مجزایی از یک K_2 -واحد، یک K_4 -واحد و $k-2$ تا K_3 -واحد و افزودن $k-1$ یال به دست آمده‌اند. برای $k \geq 2$ ، فرض کنید $\mathcal{F}_{0,3}$ خانواده گراف‌های همبندی باشد که از اجتماع مجزایی از یک C_5 -واحد، یک K_4 -واحد و $k-2$ تا K_3 -واحد و افزودن $k-1$ یال به دست آمده‌اند. برای $k \geq 1$ ، فرض کنید $\mathcal{F}_{0,4}$ خانواده گراف‌های همبندی باشد که از اجتماع مجزایی از یک K_4^* -واحد و $k-1$ تا K_3 -واحد مجزا و افزودن $k-1$ یال به دست آمده‌اند. برای $k \geq 3$ ، فرض کنید $\mathcal{F}_{0,5}$ خانواده گراف‌های همبندی باشد که از k تا K_3 -واحد مجزا و افزودن k یال به دست آمده‌اند. قرار دهید:

$$\mathcal{F}_0 = \bigcup_{i=1}^5 \mathcal{F}_{0,i}.$$

اکنون خانواده نامتناهی \mathcal{F} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

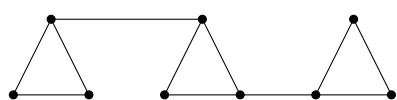
$$\mathcal{F} = \bigcup_{i=0}^3 \mathcal{F}_i.$$

تعدادی گراف متعلق به خانواده \mathcal{F} در شکل ۱.۲ نشان داده شده‌اند.

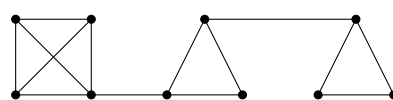
به ازای $i \in [3]$ و برای گراف G ، فرض کنید $f_i(G)$ تعداد مؤلفه‌های G یکرخت با گرافی در خانواده \mathcal{F}_i باشد.

قضیه ۲۶.۳.۲. [۵۹] برای گراف G داریم:

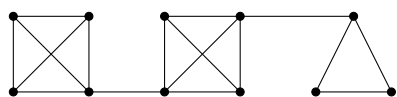
$$12\tau(G) \leq 4n(G) + 3m(G) + 3f_3(G) + 2f_2(G) + f_1(G),$$



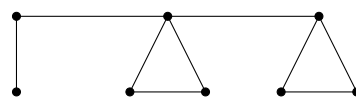
(a) $G \in \mathcal{F}_3$



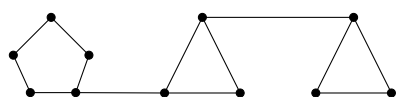
(b) $G \in \mathcal{F}_{2,1}$



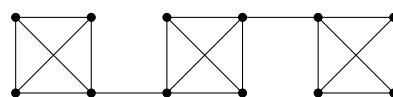
(c) $G \in \mathcal{F}_{1,1}$



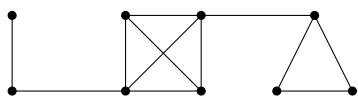
(d) $G \in \mathcal{F}_{1,2}$



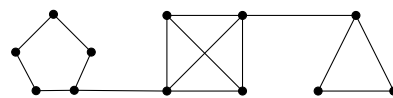
(e) $G \in \mathcal{F}_{1,3}$



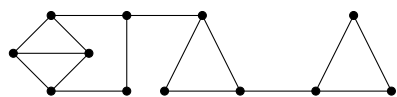
(f) $G \in \mathcal{F}_{0,1}$



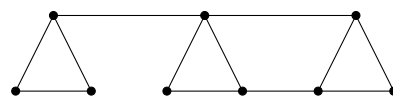
(g) $G \in \mathcal{F}_{0,2}$



(h) $G \in \mathcal{F}_{0,3}$



(i) $G \in \mathcal{F}_{0,4}$



(j) $G \in \mathcal{F}_{0,5}$

شکل ۱.۲: مثال‌هایی از گراف‌های متعلق به خانواده \mathcal{F} .

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $G \in \mathcal{F}$.

هنینگ و لاونشتاین با استفاده از قضیه ۲۶.۳.۲ نتیجه زیر را به دست آوردند که در واقع بهبود قضیه ۲۵.۳.۲ است.

نتیجه ۱.۳.۲. فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه n و اندازه m باشد. در این صورت داریم:

• اگر $G \notin \mathcal{F}$ آنگاه $\tau(G) < \frac{1}{4}n + \frac{1}{4}m$.

• اگر $G \in \mathcal{F}_i$ ، $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ، آنگاه $\tau(G) = \frac{1}{4}n + \frac{1}{4}m + \frac{i}{13}$.

۴.۲ کران‌های ویژه قابل محاسبه

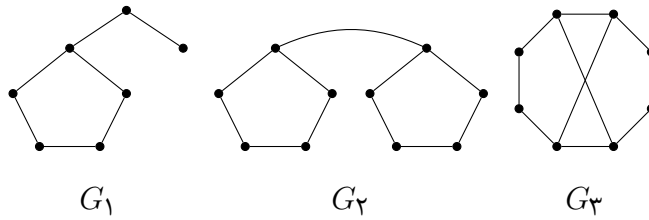
کران‌هایی که در این بخش ارائه می‌شوند، کران‌هایی قابل محاسبه و کارآمد برای عدد ترنسورسال گراف‌ها با محدودیت‌های خاص هستند. در هریک از این موارد، تعیین این که گراف داده شده دارای محدودیت مورد نظر هست یا خیر، خود یک مسأله قابل حل در زمان چندجمله‌ای است.

گریگس^{۲۲} در [۴۴] کران کارو-وی را برای گراف‌های مثلث-آزاد که دور یا مسیر از مرتبه فرد نیستند، بهبود داد.

قضیه ۱.۴.۲. [۴۴] فرض کنید G گرافی همبند و مثلث-آزاد از مرتبه $n \geq 3$ و ماکسیمم درجه Δ باشد. اگر G مسیر و یا دور از مرتبه فرد نباشد، آنگاه داریم:

$$\tau(G) \geq n - CW(G) - \frac{n}{\Delta(\Delta + 1)}.$$

تساوی کران فوق برقرار است اگر و تنها اگر G با C_{2k} ، $k \geq 2$ ، و یا با یکی از گراف‌های شکل ۲.۲ یکرخت باشد.



شکل ۲.۲: سه گراف که در تساوی کران قضیه ۱.۴.۲ صدق می‌کنند.

قضیه ۲.۴.۲. [۸۵] برای گراف مثلث-آزاد G از مرتبه n ، اندازه m و ماکسیمم درجه Δ داریم:

$$\tau(G) \leq n - CW(G) - \frac{CW(G) + m - n}{\Delta(\Delta + 1)},$$

اگر G گرافی k -همبند باشد ولی کامل نباشد، آنگاه داریم:

$$\tau(G) \leq n - CW(G) - \frac{kCW(G)}{2\Delta(\Delta + 1)}.$$

قضیه ۳.۴.۲. [۸۳] برای گراف منتظم G داریم:

$$\tau(G) \geq \frac{n\lambda_{\max}}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}},$$

که در آن λ_{\max} و λ_{\min} به ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین مقدار ویژه ماتریس مجاورت گراف و n مرتبه گراف است.

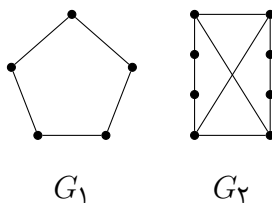
کران فوق معروف به **کران هافمن-لواس**^{۲۳} است.

قضیه ۴.۴.۲. [۶۶] اگر G گرافی مثلث-آزاد از مرتبه n و ماکسیمم درجه حداکثر چهار باشد، آنگاه داریم $\tau(G) \leq 9n/13$.

هکمن^{۲۴} و توماس^{۲۵} در [۵۸] کرانی برای عدد ترنسورسال گراف‌های مثلث-آزاد با ماکسیمم درجه حداکثر سه ارائه کردند. قبل از بیان کران هکمن و توماس مفهوم $\lambda(G)$ را برای گراف‌های مثلث-آزاد با ماکسیمم درجه حداکثر سه بیان می‌کنیم.

^{۲۳}Hoffman-Lovász bound
^{۲۴}Heckman

^{۲۵}Thomas



شکل ۳.۲: بلوک‌های سخت.

تعریف ۱.۴.۲. [۵۸] یک **گراف بلوک سخت**^{۲۶} نامیده می‌شود هرگاه با یکی از دو گراف G_1 و G_2 در شکل ۴.۲ یکرخت باشد. همچنین گراف G یک **گراف سخت**^{۲۷} است هرگاه هر بلوک G یا یک بلوک سخت باشد یا یالی بین دو بلوک سخت باشد. برای گراف G ، $\lambda(G)$ برابر با تعداد مؤلفه‌های سخت G است.

قضیه ۵.۴.۲. [۵۸] اگر G گرافی مثلث-آزاد با ماکسیمم درجه حداکثر سه باشد، آنگاه داریم:

$$\tau(G) \leq \frac{1}{\sqrt{7}}(3n + m + \lambda(G)).$$

از کران هکمن و توماس نتیجه می‌شود برای گراف مثلث-آزاد G با ماکسیمم درجه حداکثر سه داریم:

$$\tau(G) \leq \frac{9}{14}n. \quad (2.2)$$

کرانی که در اصل توسط آلبرستون^{۲۸}، بلوباس^{۲۹} و تاکر^{۳۰} در [۲] حدس زده شد و اولین بار توسط استاتون^{۳۱} در [۱۰۴] اثبات شد. در [۸۱] لاونشتاین و همکارانش نشان دادند قضیه ۵.۴.۲ بدون محدودیت روی ماکسیمم درجه نیز برقرار است. همچنین آن‌ها ثابت کردند که کران فوق دقیق است. فیلویچ در [۳۲] نشان داد که گراف پترسن تعمیم یافته $P(7, 2)$ دارای ۱۴ رأس و فاقد مثلث و ترنسورسال از اندازه ۸ است. بنابراین، مقدار $9/14$ بهترین مقدار ممکن است. پرسشی که باقی ماند این

^{۲۶}difficult block

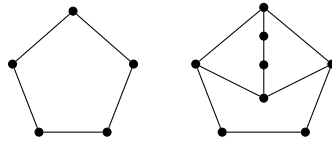
^{۲۷}difficult graph

^{۲۸}Albertson

^{۲۹}Bollobás

^{۳۰}Tucker

^{۳۱}Staton



شکل ۴.۲: دو گراف مثلث-آزاد با ماکسیمم درجه حداکثر ۳ و عدد ترنسورسال ۹.

بود که آیا گراف همبند مثلث-آزاد با ماکسیمم درجه حداکثر ۳ دیگری وجود دارد که نسبت عدد ترنسورسال به مرتبه گراف $9/14$ باشد. در [۶۷]، دو گراف مثلث-آزاد با ماکسیمم درجه حداکثر ۳ از مرتبه ۱۴ و عدد ترنسورسال ۹ ارائه شد. این گراف‌ها در شکل ۴.۲ نشان داده شده‌اند. در [۸] نیز نشان داده شد که این دو گراف تنها گراف‌های مثلث-آزاد با ماکسیمم درجه حداکثر ۳ و مرتبه ۱۴ است که نسبت عدد ترنسورسال آن‌ها به مرتبه گراف برابر $9/14$ است. در [۳۷] اثبات شد که ثابت $9/14$ برای گراف‌های همبند بزرگ‌تر ثابت خوبی نیست.

قضیه ۶.۴.۲. [۳۷] برای هر گراف همبند و مثلث-آزاد با ماکسیمم درجه حداکثر ۳ داریم:

$$\tau(G) \leq \frac{9}{30}n + \frac{2}{15}.$$

این کران از کران (۲.۲) برای گراف‌های از مرتبه بزرگ‌تر از ۱۴ بهتر است. این نتیجه به همراه نتیجه [۸] نشان می‌دهد که هیچ گراف همبند دیگری با نسبت عدد ترنسورسال به مرتبه $9/14$ وجود ندارد.

قضیه ۷.۴.۲. [۶۵] اگر G گرافی مثلث-آزاد و C_5 -آزاد از مرتبه n و ماکسیمم درجه Δ باشد، آنگاه داریم:

$$\tau(G) \leq \frac{n\Delta^2}{\Delta^2 + 2\Delta - 1}.$$

قضیه ۸.۴.۲. [۱۰۰] اگر کم‌ر فرد گراف G حداقل برابر با $2k + 3$ باشد، $k \geq 2$ ، آنگاه داریم:

$$\tau(G) \leq n - 2^{-\binom{k-1}{k}} \left(\sum_{v \in V(G)} \deg(v)^{\frac{1}{k-1}} \right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

نتیجه ۱.۴.۲. [۱۰۰] اگر G گرافی r -منتظم از مرتبه n و کمر فرد حداقل برابر با $2k + 3$ باشد، $k \geq 2$ ، آنگاه داریم:

$$\tau(G) \leq n \left(1 - 2^{\frac{1-k}{k}} (r/n)^{\frac{1}{k}} \right).$$

قضیه ۹.۴.۲. [۹۷] اگر G گرافی از مرتبه n و اندازه m و $K_{1,r+1}$ -آزاد باشد، آنگاه داریم:

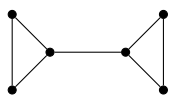
$$\tau(G) \geq \frac{1}{r} \left(1 - r + \sqrt{4m + (2r - 1)^2} \right).$$

فصل ۳

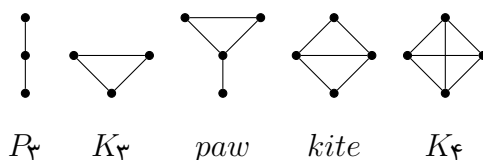
کران بالا برای عدد ترنسورسال گراف‌ها براساس مرتبه، اندازه و ماکسیمم درجه

۱.۳ مقدمه

در این فصل چند کران بالای قابل محاسبه برای عدد ترنسورسال گراف‌ها براساس مرتبه، اندازه و ماکسیمم درجه گراف ارائه می‌دهیم. سپس تمامی گراف‌هایی را که در تساوی این کران‌ها صدق می‌کنند، دسته‌بندی می‌کنیم. این کران‌ها برخی از کران‌های قبلی را، به‌عنوان مثال کران‌های ارائه شده در قضایای ۲۵.۳.۲ و ۱.۳.۲، برای گراف‌هایی با ماکسیمم درجه بزرگ بهبود می‌دهند. برای این منظور، ابتدا در بخش ۲.۳ چند خانواده از گراف‌ها و مفاهیم مورد نیاز در این فصل را معرفی می‌کنیم. در بخش ۳.۳ کران‌های جدید خود را برای اندازه عدد ترنسورسال گراف‌ها ارائه خواهیم



شکل ۱.۳: پاروی دوگانه.



شکل ۲.۳: خانواده \mathcal{G}_1 .

داد. سپس در بخش‌های ۳.۴، ۵.۳ و ۶.۳ به اثبات نتایج خود می‌پردازیم. نتایج این فصل براساس مقاله ۱ مستخرج از رساله است.

۲.۳ چند خانواده از گراف‌ها

در این بخش چند خانواده از گراف‌ها را که در بخش‌های بعد از آن‌ها استفاده می‌کنیم، معرفی می‌کنیم. گراف نشان داده شده در شکل ۱.۳ را پاروی دوگانه^۱ می‌نامیم. فرض کنید \mathcal{G}_1 خانواده گراف‌های نشان داده شده در شکل ۲.۳ باشد.

فرض کنید خانواده \mathcal{F} از گراف‌ها داده شده است. برای عدد صحیح t به‌طوری‌که:

$$1 \leq t \leq \min\{\omega(F) \mid F \in \mathcal{F}\},$$

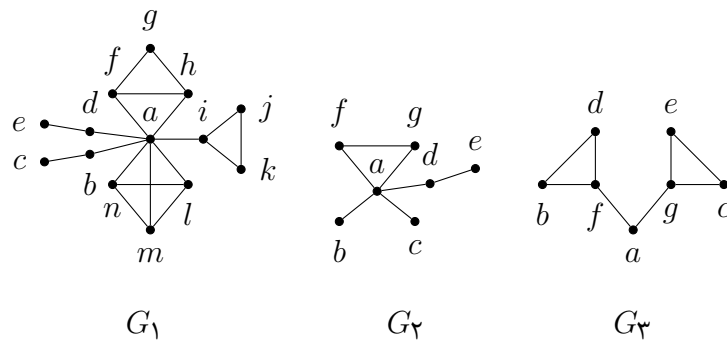
خانواده جدید $\mathcal{F}[t]$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. گراف G متعلق به $\mathcal{F}[t]$ است اگر و تنها اگر G را بتوان به‌صورت زیر به‌دست آورد:

۱- به ازای یک مقدار صحیح k ، دنباله F_1, F_2, \dots, F_k ، از گراف‌هایی (نه لزوماً متمایز) در \mathcal{F} ، موجود باشد؛

۲- خوشه‌ای از اندازه t را در هر یک از F_i ‌ها، $i \in [k]$ ، بر هم منطبق کنید.

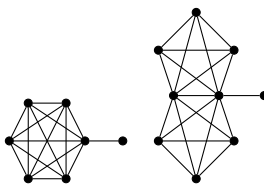
در ساختار فوق، گراف F_i ، $i \in [k]$ ، به‌صورت $F_i(G)^t$ -واحد، یا اگر t مشخص باشد فقط به‌صورت $F_i(G)$ -واحد، نشان داده می‌شود. خوشه منطبق شده از اندازه t در گراف G

^۱double-paw

شکل ۳.۳: مثال‌هایی از گراف‌های متعلق به خانواده $\mathcal{G}_1[1]$.

را با $Q_t(G)$ نمایش می‌دهیم. دقت شود که $Q_t(G)$ با خوشه از اندازه t در هر یک از F_i ها، $i \in [k]$ ، یکرخت است. بنابراین برای راحتی، فرض می‌کنیم که $Q_t(G)$ خوشه‌ای در هر یک از F_i ها، $i \in [k]$ ، باشد. اگر $\mathcal{F} = \{F\}$ ، آنگاه برای راحتی، به جای $\mathcal{F}[t]$ از $F[t]$ استفاده می‌کنیم. شکل ۳.۳ سه گراف در خانواده $\mathcal{G}_1[1]$ را نشان می‌دهد. به عنوان مثال، گراف G_1 در شکل ۳.۳، دارای دو $P_2(G)$ - واحد با مجموعه رئوس $\{a, b, c\}$ و $\{a, d, e\}$ ، یک $kite(G_1)$ - واحد با مجموعه رئوس $\{a, f, g, h\}$ ، یک $paw(G_1)$ - واحد با مجموعه رئوس $\{a, i, j, k\}$ ، و یک $K_4(G_1)$ - واحد با مجموعه رئوس $\{a, l, n, m\}$ ، است. دقت کنید که $Q_1(G_1) = \{a\}$.

اکنون خانواده $\mathcal{G}_{1,1} \subseteq \mathcal{G}_1[1]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنید $\mathcal{G}_{1,1}$ خانواده گراف‌های $G \in \mathcal{G}_1[1]$ باشد به طوری که G دارای حداقل یک $F(G)$ - واحد، $F \in \{K_3, K_4\}$ ، باشد و رأس موجود در $Q_1(G)$ دارای مینیمم درجه در هر $F(G)$ - واحد، $F \in \mathcal{G}_1$ ، باشد. دقت شود که رأس موجود در $Q_1(G)$ دارای ماکسیمم درجه در گراف G است، زیرا G دارای حداقل یک $K_3(G)$ - واحد یا $K_4(G)$ - واحد است. به عنوان مثال، گراف G_1 در شکل ۳.۳ متعلق به خانواده $\mathcal{G}_{1,1}$ نیز هست در حالی که گراف‌های G_2 و G_3 متعلق به این خانواده نیستند. زیرا در گراف G_2 در شکل ۳.۳، $Q_1(G_2) = \{a\}$ ، اما رأس a در $P_2(G_2)$ - واحد با مجموعه رئوس $\{a, b, c\}$ دارای مینیمم درجه نیست. گراف G_3 در شکل ۳.۳ نیز دارای هیچ $K_3(G_3)$ - واحد یا $K_4(G_3)$ - واحدی نیست. برای هر عدد صحیح و مثبت t ، خانواده $\mathcal{G}_{i,t}$ ، $i \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ ، را به صورت زیر



شکل ۴.۳: دو گراف متعلق به خانواده $G_{2,1}$.

تعریف می کنیم.

خانواده $G_{2,t}$

فرض کنید $G_{2,t}$ خانواده گرافهای $G \in \{F, K_{t+1}\}[t]$ باشد به طوری که:

$$F \in \{K_{t+5}\} \cup K_{t+4}[t+1],$$

و G دارای دقیقاً یک $K_{t+1}(G)$ - واحد و یک $F(G)$ - واحد باشد و هرگاه $F \neq K_{t+5}$ ، قرار می دهیم $Q_t(G) \subseteq Q_{t+1}(F)$. دو گراف در خانواده $G_{2,1}$ در شکل ۴.۳ نشان داده شده اند.

خانواده $G_{3,t}$

فرض کنید $G_{3,t}$ خانواده گرافهای $G \in \{F_1, F_2\}[t+1]$ باشد به طوری که G دارای دقیقاً یک $F_i(G)$ ، $i = 1, 2$ ، باشد که در آن $F_1 \in K_{t+4}[t+1]$ و F_2 و $Q_{t+1}(G)$ دارای شرایط زیر هستند.

(آ) به ازای $t \geq 2$ ، F_2 به صورت زیر به دست می آید. گراف کامل K_{t+4} را در نظر

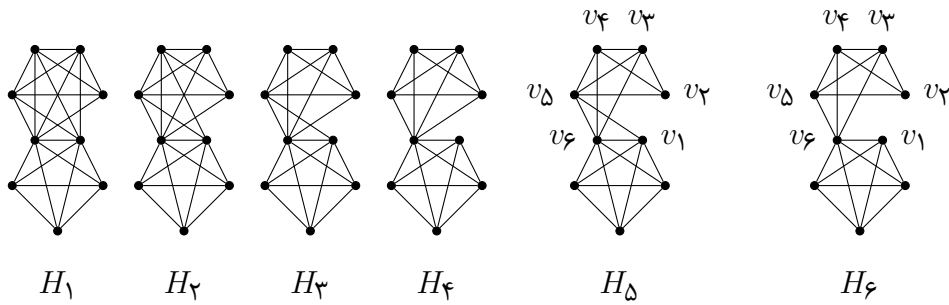
بگیرید. رأس جدید x را به این گراف اضافه کرده و x را به $t+i$ رأس از K_{t+4} ،

$$\{x\} \subseteq Q_{t+1}(G) = Q_{t+1}(F_1) \text{ دهید. همچنین قرار دهید } \circ, \leq i \leq 3.$$

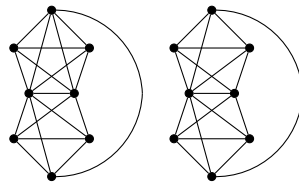
(ب) به ازای $t = 1$ ، F_2 گراف وصف شده در (آ) به ازای $t \geq 2$ است یا یکی از

زیرگرافهای القا شده توسط رئوس $\{v_1, \dots, v_6\}$ در گرافهای H_5 و H_6 در شکل

$$5.3. \text{ همچنین قرار دهید } Q_2(G) = Q_2(F_1) = \{v_1, v_6\}.$$



شکل ۵.۳: تعدادی گراف متعلق به خانواده $\mathcal{G}_{3,1}$.

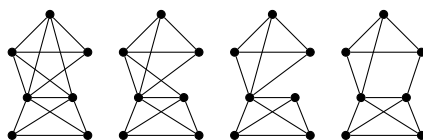


شکل ۶.۳: تعدادی گراف متعلق به خانواده $\mathcal{G}_{4,1}$.

شکل ۵.۳ تعدادی گراف متعلق به خانواده $\mathcal{G}_{3,1}$ را نشان می‌دهد.

خانواده $\mathcal{G}_{4,t}$

فرض کنید $\mathcal{G}_{4,t}$ خانواده گراف‌های $G \in \{F_1, F_2\}[t+1]$ باشد به طوری که G دارای دقیقاً یک $F_2(G)$ -واحد است و در آن $F_1 \in K_{t+4}[t+1]$ و F_2 نیز از یک گراف کامل K_{t+1} با مجموعه رئوس $V(K_{t+1}) = \{x_1, \dots, x_{t+1}\}$ و یک پاروی دوگانه به صورت زیر به دست آمده است. هر رأس درجه دو در پاروی دوگانه را به همه رئوس $\{x_1, \dots, x_{t+1}\}$ ، و هر رأس درجه سه در پاروی دوگانه را به همه رئوس $\{x_1, \dots, x_t\}$ وصل کنید. در پایان نیز حداکثر یک رأس درجه سه در پاروی دوگانه را به x_{t+1} وصل کنید. همچنین قرار دهید $Q_{t+1}(G) = Q_{t+1}(F_1) = \{x_1, \dots, x_{t+1}\}$. شکل ۶.۳ دو گراف یکرخت با $F_2(G)$ -واحد در ساختار گراف G متعلق به خانواده $\mathcal{G}_{4,1}$ را نشان می‌دهد. از آنجا که ساختار گراف‌های این خانواده محدودیتی روی تعداد $F_1(G)$ -واحدها ندارد، بنابراین گراف‌های شکل ۶.۳ به خانواده $\mathcal{G}_{4,1}$ نیز تعلق دارند.



شکل ۷.۳: تعدادی گراف متعلق به خانواده $\mathcal{G}_{\Delta,1}$.

خانواده $\mathcal{G}_{\Delta,t}$

فرض کنید $\mathcal{G}_{\Delta,t}$ خانواده گراف‌های $G \in \{F_1, F_2\}[t+1]$ باشد به طوری که G دارای دقیقاً یک $F_i(G)$ - واحد برای هر $i = 1, 2$ باشد که در آن $F_1 \in K_{t+3}[t+1]$. گراف F_2 نیز از یک گراف کامل K_{t+1} با مجموعه رئوس $V(K_{t+1}) = \{x_1, \dots, x_{t+1}\}$ و تعدادی گراف کامل K_3 به صورت زیر به دست آمده است. هر رأس K_3 را به حداقل t رأس در $\{x_1, \dots, x_{t+1}\}$ وصل کنید، به طوری که $\deg_{F_2}(x_1) = \dots = \deg_{F_2}(x_t) > \deg_{F_2}(x_{t+1})$. همچنین قرار دهید $Q_{t+1}(G) = Q_{t+1}(F_1) = \{x_1, \dots, x_{t+1}\}$. شکل ۷.۳ تعدادی گراف متعلق به خانواده $\mathcal{G}_{\Delta,1}$ را نشان می‌دهد.

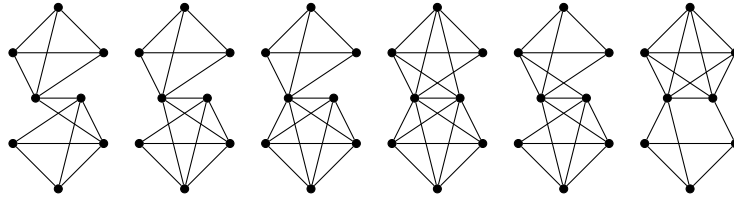
خانواده $\mathcal{G}_{\epsilon,t}$

فرض کنید $\mathcal{G}_{\epsilon,t}$ خانواده گراف‌های G باشد به طوری که G از یک گراف کامل K_{t+1} با مجموعه رئوس $V(K_{t+1}) = \{x_1, \dots, x_{t+1}\}$ و حداقل دو گراف کامل K_3 به صورت زیر به دست آمده است. هر رأس از هر یک از گراف‌های K_3 را به حداقل t رأس از $\{x_1, \dots, x_{t+1}\}$ وصل کنید، به طوری که $\deg_G(x_1) = \dots = \deg_G(x_t) > \deg_G(x_{t+1})$. همچنین هر رأس x_i ، $i \in [t+1]$ ، با همه رئوس حداقل یک K_3 مجاور باشد. شکل ۸.۳ تعدادی گراف متعلق به خانواده $\mathcal{G}_{\epsilon,1}$ را نشان می‌دهد.

در پایان خانواده \mathcal{G}_t را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{G}_t = \bigcup_{i=2}^6 \mathcal{G}_{i,t}.$$

دقت شود هر گراف در خانواده \mathcal{G}_t دارای دقیقاً t رأس با ماکسیمم درجه است. اکنون



شکل ۸.۳: تعدادی گراف متعلق به خانواده $\mathcal{G}_{6,1}$.

می‌توان برای عدد ترنسورسال گراف‌های متعلق به خانواده \mathcal{G}_t کران پایین زیر را ارائه کرد.

لم ۱.۲.۳. برای هر گراف $G \in \mathcal{G}_t$ از مرتبه n و اندازه m ، داریم:

$$\tau(G) \geq \frac{1}{3}(n + m + d + 3t + \binom{t+1}{2}) + 4 - ((t+1)\Delta(G) + \delta^*),$$

که در آن $\delta^* = \delta_G[V(G - \{x_1, \dots, x_{t+1}\})]$ به طوری که $\deg_G(x_i) = \Delta(G)$ ، $i \in [t]$ ، و

$$\deg_G(x_{t+1}) = \max\{\deg_G(v) \mid v \in V(G) \setminus \{x_1, \dots, x_t\}\}.$$

همچنین $d = \Delta(G) - \deg_G(x_{t+1})$.

برهان. بدون کاستن از کلیت، فرض کنید G گرافی متعلق به خانواده $\mathcal{G}_{3,t}$ باشد. فرض کنید در گراف G ، $F_1(G)$ - واحد از طریق l تا $K_{t+4}(F_1)$ - واحد به دست آمده است. همچنین، فرض کنید $F_2(G)$ - واحد نیز توسط حالت (آ) در ساختار خانواده $\mathcal{G}_{3,t}$ به دست آمده است. به سادگی می‌توان مشاهده کرد که مرتبه، اندازه و ماکسیمم درجه گراف G برابر است با:

$$n(G) = 3l + t + 5,$$

$$m(G) = 3l(t+2) + \binom{t+1}{2} + 4t + 6 + i,$$

$$\Delta(G) = 3l + t + 4.$$

همچنین $d = 4 - i$ و $\delta^* = t + 3$. در نتیجه داریم:

$$\frac{1}{3}(n + m + d + 3t + \binom{t+1}{2}) + 4 - ((t+1)\Delta(G) + \delta^*) = 2l + t + 4. \quad (1.3)$$

از طرف دیگر، G دارای حداقل l خوشه $\{t_{j,1}, t_{j,2}, t_{j,3}\}$ ، $j \in [l]$ ، یک خوشه $\{v_1, \dots, v_{t+1}\}$ و یک خوشه $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ است و این خوشه‌ها دوه‌دو مجزا هستند. بنابراین طبق مشاهده ۱.۲.۱، تعداد $2l+t+3$ رأس برای پوشاندن یال‌های القاشده توسط خوشه‌های مذکور مورد نیاز است. بدون کاستن از کلیت، فرض کنید ما این یال‌ها را با رئوس $\{v_1, \dots, v_t\}$ ، $j \in [l]$ ، $\{t_{j,1}, t_{j,2}\}$ و $\{s_1, s_2, s_3\}$ بپوشانیم. اما برای پوشاندن یال $x_{t+1}t_{j,3}$ به حداقل یک رأس دیگر نیاز داریم. بنابراین،

$$\tau(G) \geq 2l + t + 4. \quad (2.3)$$

طبق روابط (۱.۳) و (۲.۳)، حکم نتیجه می‌شود.

اثبات به ازای گراف‌های دیگر متعلق به خانواده \mathcal{G}_t به صورت مشابه است. \square

۳.۳ نتایج اصلی

در بخش‌های بعدی ما قضایای زیر را اثبات خواهیم کرد.

قضیه ۱.۳.۳. برای هر گراف G از مرتبه n و اندازه m ، داریم:

$$\tau(G) \leq \frac{1}{3}(n + m + 2 - \Delta(G)).$$

تساوی کران بالا برقرار است اگر و تنها اگر G دارای مؤلفه‌ای متعلق به خانواده $\mathcal{G}_{1,1}$ باشد و دیگر مؤلفه‌های G ، در صورت وجود، یکریخت با K_2 یا K_3 باشند.

در ادامه، ما قضیه زیر را اثبات خواهیم کرد. در حقیقت قصد داریم با استفاده از تعداد رئوس با ماکسیمم درجه در یک گراف، قضیه ۱.۳.۳ را بهبود دهیم.

قضیه ۲.۳.۳. فرض کنید G گرافی از مرتبه n ، اندازه m و دارای حداقل t رأس با ماکسیمم درجه باشد. در این صورت داریم:

$$\tau(G) \leq \frac{1}{3}(n + m + 3t + \binom{t}{2} + 2 - (t\Delta(G) + \delta^*)),$$

که در آن $\delta^* = \delta_G[V(G - \{x_1, \dots, x_t\})]$ به طوری که $\deg_G(x_i) = \Delta(G)$ ، $i \in [t]$ تساوی فوق برقرار است اگر و تنها اگر $G \in \{K_{t+4}\} \cup K_{t+3}[t]$.

با یک محاسبه ساده می توان نشان داد که قضیه ۲.۳.۳ قضیه ۱.۳.۳ را بهبود می بخشد هرگاه $\delta(G) \geq 4$. به عنوان یک نتیجه از قضیه ۲.۳.۳، درستی گزاره زیر تصدیق می شود.

نتیجه ۱.۳.۳. فرض کنید G گرافی با دقیقاً t رأس x_1, \dots, x_t با ماکسیمم درجه باشد. در این صورت، داریم:

$$\tau(G) \leq \frac{1}{3}(n + m + 3t + \binom{t}{2} + 2 - (t\Delta(G) + \delta^*)),$$

که در آن $\delta^* = \delta_G[V(G - \{x_1, \dots, x_t\})]$. تساوی کران فوق برقرار است اگر و تنها اگر $G \in K_{t+3}[t]$ و دارای حداقل دو $K_{t+3}(G)$ - واحد باشد.

در ادامه، قضیه زیر را نیز اثبات خواهیم کرد که در واقع بهبودی برای نتیجه ۱.۳.۳ است.

قضیه ۳.۳.۳. فرض کنید G گرافی با دقیقاً t رأس با ماکسیمم درجه باشد. در این صورت داریم:

$$\tau(G) \leq \frac{1}{3}(n + m + d + 3t + \binom{t+1}{2} + 4 - ((t+1)\Delta(G) + \delta^*)),$$

که در آن $\delta^* = \delta_G[V(G - \{x_1, \dots, x_{t+1}\})]$ به طوری که $\deg_G(x_i) = \Delta(G)$ ، $i \in [t]$ ، همچنین،

$$\deg_G(x_{t+1}) = \max\{\deg_G(v) \mid v \in V(G) \setminus \{x_1, \dots, x_t\}\},$$

و $d = \Delta(G) - \deg_G(x_{t+1})$. تساوی کران فوق برقرار است اگر و تنها اگر $G \in \mathcal{G}_t$.

دقت شود که با یک محاسبه ساده می توان نشان داد که قضیه ۳.۳.۳ نتیجه ۱.۳.۳

را بهبود می بخشد هرگاه $\Delta(G) > t + d + 2$. همچنین، قضیه ۱.۳.۳، قضیه ۲۵.۳.۲

را به ازای گراف‌های G که $\Delta(G) > m/4 + 1$ بهبود می‌دهد و چون قضایای ۲.۳.۳ و ۳.۳.۳ نیز بهبودی برای قضیه ۱.۳.۳ هستند، پس این قضایا نیز قضیه ۲۵.۳.۲ را بهبود خواهند داد. به‌طور مشابه، قضیه ۱.۳.۳ قضیه ۱.۳.۲ را برای گراف‌های G که $\Delta(G) > m/4 + 2$ بهبود خواهد داد.

۴.۳ اثبات قضیه ۱.۳.۳

در این بخش، ابتدا گراف‌های G را که در تساوی کران خواتال-مک‌دیارمید صدق می‌کنند، دسته‌بندی می‌کنیم.

لم ۱.۴.۳. برای گراف G از مرتبه n و اندازه m ، داریم $\tau(G) = (n+m)/3$ اگر و تنها اگر هر مؤلفه G یکرخت با K_2 یا K_3 باشد.

برهان. فرض کنید G گرافی از مرتبه n و اندازه m باشد و $\tau(G) = (n+m)/3$. فرض کنید G_1, \dots, G_k مؤلفه‌های همبندی G باشند. برای اثبات ادعای خود، از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید عدد صحیح $i \in [k]$ موجود است به‌طوری‌که مؤلفه G_i نه با K_2 و نه با K_3 یکرخت نیست. با استقرا روی $m(G_i)$ ثابت می‌کنیم که $\tau(G_i) < (n(G_i) + m(G_i))/3$.

گام اول استقرا از مشاهده ۱.۲.۱ نتیجه می‌شود. فرض کنید حکم استقرا برای گراف‌های همبند از اندازه کم‌تر از $m(G_i)$ برقرار باشد. بدیهی است که $\Delta(G_i) \geq 2$. فرض کنید x_1 رأسی با ماکسیمم درجه در G_i باشد. اگر x_1 یک رأس پشتیبان باشد، آنگاه طبق کران خواتال-مک‌دیارمید برای گراف $G_i - x_1$ ، داریم:

$$\begin{aligned} \tau(G_i) &\leq 1 + \tau(G_i - x_1) \\ &\leq 1 + \frac{n(G_i) - 2 + m(G_i) - \Delta(G_i)}{3} \\ &< \frac{n(G_i) + m(G_i)}{3}. \end{aligned}$$

زیرا $\Delta(G_i) \geq 2$. پس حکم استقرا ثابت می‌شود. بنابراین، در ادامه فرض کنید x_1 رأس پشتیبان نیست. اگر $\Delta(G_i) > 2$ ، آنگاه با یک محاسبه مشابه نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{aligned} \tau(G_i) &\leq 1 + \tau(G_i - x_1) \\ &\leq 1 + \frac{n(G_i) - 1 + m(G_i) - \Delta(G_i)}{3} \\ &< \frac{n(G_i) + m(G_i)}{3}. \end{aligned}$$

در این حالت نیز حکم استقرا برقرار است. پس فرض می‌کنیم که $\Delta(G_i) = 2$. در نتیجه، $G_i - x_1$ دارای حداکثر دو مؤلفه همبندی است. همچنین، از $\Delta(G_i) = 2$ نتیجه می‌گیریم که هیچ یک از مؤلفه‌های $G_i - x_1$ با K_3 یکرخت نیست. اگر هر مؤلفه $G_i - x_1$ با K_2 یکرخت باشد، آنگاه از آنجایی که $G_i \neq K_3$ ، پس G_i با P_5 یکرخت است. اما طبق مشاهده ۱.۲.۱، داریم:

$$\tau(P_5) = 2 < \frac{5+4}{3} = 3,$$

و در این حالت نیز حکم استقرا اثبات می‌شود.

تنها حالتی که باقی می‌ماند این است که $G_i - x_1$ دارای یک مؤلفه G'_1 و شاید G'_2 باشد به طوری که G'_1 با K_2 و K_3 یکرخت نیست. اما طبق فرض استقرا روی G'_1 و کران خواتال-مک‌دیارمید برای G'_2 ، داریم:

$$\begin{aligned} \tau(G_i) &\leq 1 + \tau(G'_1) + \tau(G'_2) \\ &< 1 + \frac{n(G'_1) + m(G'_1)}{3} + \frac{n(G'_2) + m(G'_2)}{3} \\ &= 1 + \frac{n(G_i) - 1 + m(G_i) - 2}{3} \\ &= \frac{n(G_i) + m(G_i)}{3}. \end{aligned}$$

بنابراین، حکم استقرا همواره برقرار است. اکنون طبق کران خواتال-مک‌دیارمید

برای هر مؤلفه G_j ، $j \neq i$ ، نتیجه می‌گیریم که:

$$\begin{aligned} \tau(G) &= \sum_{j=1}^k \tau(G_j) \\ &< \frac{n(G_i) + m(G_i)}{3} + \sum_{j \neq i} \frac{n(G_j) + m(G_j)}{3} \\ &= \frac{n + m}{3}. \end{aligned}$$

اما این نتیجه با فرض لم تناقض دارد. بنابراین هر مؤلفه گراف G یکرخت با K_2 یا K_3 است و حکم لم اثبات می‌شود. اثبات عکس قضیه، با توجه به مشاهده ۱.۲.۱، بدیهی است. \square

اکنون قضیه ۱.۳.۳ را اثبات می‌کنیم. فرض کنید G گرافی از مرتبه n و اندازه m باشد. فرض کنید x_1 رأسی با ماکسیمم درجه باشد. طبق کران خواتال-مک‌دیارمید، داریم:

$$\begin{aligned} \tau(G) &\leq 1 + \tau(G - x_1) \\ &\leq 1 + \frac{1}{3}(n - 1 + m - \Delta(G)) \\ &= \frac{1}{3}(n + m + 2 - \Delta(G)). \end{aligned} \quad (3.3)$$

در ادامه تمامی گراف‌هایی را که در تساوی کران فوق صدق می‌کنند، دسته‌بندی می‌کنیم. ابتدا فرض کنید G دارای یک مؤلفه G_1 متعلق به خانواده $\mathcal{G}_{1,1}$ باشد و هر مؤلفه دیگر G ، در صورت وجود، با K_2 یا K_3 یکرخت باشد. فرض کنید مؤلفه G_1 دارای n_1 تا $P_3(G)$ - واحد، n_2 تا $K_3(G)$ - واحد، n_3 تا $paw(G)$ - واحد، n_4 تا $kite(G)$ - واحد و n_5 تا $K_4(G)$ - واحد باشد، به طوری که برای هر $i \in [5]$ ، $n_i \geq 0$. دقت شود که با توجه به تعریف خانواده $\mathcal{G}_{1,1}$ ، داریم $n_2 + n_5 \geq 1$.

چون هر مؤلفه G غیر از G_1 ، در صورت وجود، یکرخت با K_2 یا K_3 است، فرض کنید که G به ترتیب دارای تعداد n_6 و n_7 مؤلفه یکرخت با K_3 و K_2 باشد. چون

$n_2 + n_5 \geq 1$ ، بدون کاستن از کلیت، فرض کنید $n_2 \geq 1$. به آسانی می‌توان دید که

$$\frac{1}{3}(n + m + 2 - \Delta(G)) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 2n_5 + 2n_6 + n_7 + 1. \quad (4.3)$$

فرض کنید $Q_1(G_1) = \{x_1\}$. فرض کنید S یک $\tau(G)$ -مجموعه باشد. به‌وضوح S شامل حداقل یک رأس از هر یال آویخته در هر $P_2(G)$ -واحد است. همچنین S شامل حداقل دو رأس از هر مثلثی که شامل x_1 نباشد در هر $paw(G)$ -واحد، $kite(G)$ -واحد و $K_4(G)$ -واحد است. چون همه $K_3(G)$ -واحدها شامل رأس x_1 هستند، پس S شامل حداقل $n_2 + 1$ رأس از رأس‌های $K_3(G)$ -واحدها است تا یال‌های این واحدها را پوشش دهد. در مجموع داریم:

$$\tau(G) = |S| \geq n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 2n_5 + 2n_6 + n_7 + 1. \quad (5.3)$$

طبق (۳.۳)، (۴.۳) و (۵.۳)، نتیجه می‌گیریم که:

$$\tau(G) = \frac{1}{3}(n + m + 2 - \Delta(G)).$$

حال عکس مطلب فوق را در نظر می‌گیریم. گراف G را در نظر بگیرید به‌طوری‌که:

$$\tau(G) = \frac{1}{3}(n + m + 2 - \Delta(G)).$$

فرض کنید x_1 رأسی با ماکسیمم درجه در G باشد. اگر x_1 یک رأس پشتیبان باشد، آنگاه طبق کران خواتال-مک‌دیارمید برای گراف $G - x_1$ ، داریم:

$$\begin{aligned} \tau(G) &\leq 1 + \tau(G - x_1) \\ &\leq 1 + \frac{1}{3}(n - 2 + m - \Delta(G)) \\ &< \frac{1}{3}(n + m + 2 - \Delta(G)), \end{aligned}$$

که با فرض قضیه در تناقض است. بنابراین، x_1 رأس پشتیبان نیست. فرض کنید $G - x_1$ دارای k مؤلفه G_1, \dots, G_k باشد. اگر عدد صحیح $j \in [k]$ موجود باشد به‌طوری‌که G_j

نه با K_2 و نه با K_3 یکرخت نباشد، آنگاه طبق لم ۱.۴.۳، داریم:

$$\begin{aligned} \tau(G) &\leq 1 + \tau(G - x_1) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^k \tau(G_i) \\ &< 1 + \sum_{i=1}^k \frac{1}{3} (n(G_i) + m(G_i)) \\ &= 1 + \frac{1}{3} (n - 1 + m - \Delta(G)) \\ &= \frac{1}{3} (n + m + 2 - \Delta(G)), \end{aligned}$$

و دوباره با فرض قضیه به تناقض می‌رسیم. پس، هر مؤلفه از $G - x_1$ با K_2 یا K_3 یکرخت است. در نتیجه G دارای یک مؤلفه G' متعلق به خانواده $\mathcal{G}_1[1]$ است و بقیه مؤلفه‌های G ، در صورت وجود، با K_2 یا K_3 یکرخت هستند. به‌وضوح $Q_1(G') = \{x_1\}$. همچنین، برای هر $F \in \mathcal{G}_1$ ، x_1 دارای مینیمم درجه در هر $F(G')$ - واحد است. بنابراین، برای این که ثابت کنیم $G' \in \mathcal{G}_{1,1}$ ، کافی است نشان دهیم G' لزوماً دارای $K_2(G')$ - واحد یا $K_3(G')$ - واحد است. فرض کنید G' هیچ $K_3(G')$ - واحد و $K_4(G')$ - واحدی نداشته باشد. چون x_1 پشتیبان نیست و همه مؤلفه‌های $G - x_1$ با K_2 و K_3 یکرخت هستند، پس می‌توان یک S - مجموعه $\tau(G - x_1)$ در نظر گرفت به‌طوری که $N_G(x_1) \subseteq S$ باشد. پس S یک $\tau(G)$ - مجموعه نیز است. بنابراین، طبق لم ۱.۴.۳، داریم:

$$\tau(G) = \tau(G - x_1) = \sum_{i=1}^k \tau(G_i) = \frac{1}{3} (n - 1 + m - \Delta(G)),$$

که یک تناقض است. پس نتیجه می‌گیریم که G' دارای حداقل یک $K_3(G')$ - واحد یا $K_4(G')$ - واحد است. بنابراین، $G' \in \mathcal{G}_{1,1}$.

۵.۳ اثبات قضیه ۲.۳.۳

فرض کنید G گرافی از مرتبه n ، اندازه m و دارای حداقل t رأس با ماکسیمم درجه باشد. رئوس با ماکسیمم درجه در گراف G را x_1, \dots, x_t می‌نامیم. همچنین فرض

کنید $\delta^* = \delta_G[V(G - \{x_1, \dots, x_t\})]$. قرار دهید $G^* = G - \{x_1, \dots, x_t\}$. به وضوح داریم $n(G^*) \leq n - t$ ، $m(G^*) \leq m - (t\Delta(G) - \binom{t}{2})$ و $\Delta(G^*) \geq \delta(G^*) \geq \delta^* - t$. اکنون طبق قضیه ۱.۳.۳، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \tau(G) &\leq t + \tau(G^*) \\ &\leq t + \frac{1}{3}(n(G^*) + m(G^*) + 2 - \Delta(G^*)) \\ &\leq t + \frac{1}{3}(n - t + m - (t\Delta(G) - \binom{t}{2})) + 2 - (\delta^* - t) \\ &= \frac{1}{3}(n + m + 3t + \binom{t}{2} + 2 - (t\Delta(G) + \delta^*)), \end{aligned}$$

که همان کران مورد نظر ما است.

در ادامه گراف‌هایی را که در تساوی کران فوق صدق می‌کنند، دسته‌بندی می‌کنیم. ابتدا فرض کنید که G گرافی از مرتبه n ، اندازه m و دارای حداقل t رأس x_1, \dots, x_t با ماکسیمم درجه باشد. همچنین، فرض کنید:

$$\tau(G) = \frac{1}{3}(n + m + 3t + \binom{t}{2} + 2 - (t\Delta(G) + \delta^*)) = k,$$

که در آن $\delta^* = \delta_G[V(G - \{x_1, \dots, x_t\})]$. فرض کنید $G - \{x_1, \dots, x_t\}$ گرافی از مرتبه n' ، اندازه m' و ماکسیمم درجه Δ' باشد. اگر به ازای تعدادی رأس $v \in V(G) \setminus \{x_1, \dots, x_t\}$ داشته باشیم $N_G(v) \subseteq \{x_1, \dots, x_t\}$ ، آنگاه طبق قضیه ۱.۳.۳، داریم:

$$\begin{aligned} \tau(G) &\leq t + \tau(G - \{x_1, \dots, x_t\}) \\ &\leq t + \frac{1}{3}(n' + m' + 2 - \Delta') \\ &\leq t + \frac{1}{3}(n - (t + 1) + m - (t\Delta(G) - \binom{t}{2})) + 2 - (\delta^* - t) \\ &< k. \end{aligned}$$

این مطلب یک تناقض است. بنابراین، برای هر رأس $v \in V(G) \setminus \{x_1, \dots, x_t\}$ داریم $N_G(v) \not\subseteq \{x_1, \dots, x_t\}$. به عنوان یک نتیجه، برای هر $i \in [t]$ رأس پشتیبان نیست. اگر اعداد صحیح $i, j \in [t]$ موجود باشند به طوری که دو رأس x_i و x_j مجاور نباشند،

۶۴ کران بالا برای عدد ترنسورسال گراف‌ها براساس مرتبه، اندازه و ماکسیمم درجه

آنگاه گراف $G - \{x_1, \dots, x_t\}$ از اندازه حداکثر $1 - \binom{t}{1} + t\Delta(G) - m$ است. بنابراین، با محاسباتی مانند قبل می‌توان نتیجه گرفت که $\tau(G) < k$ ، که این مطلب یک تناقض است. پس، $G[\{x_1, \dots, x_t\}] = K_t$.

اگر رأس $x \in V(G) \setminus \{x_1, \dots, x_t\}$ موجود باشد به طوری که $\deg_G(x) > \delta^*$ یا داشته باشیم $\{x_1, \dots, x_t\} \not\subseteq N_G(x)$ ، آنگاه داریم $1 + \delta^* - t \leq \Delta(G - \{x_1, \dots, x_t\})$. بنابراین با یک محاسبه ساده مانند قبل می‌توان نتیجه گرفت که $\tau(G) < k$ ، و دوباره به تناقض میرسیم. پس نتیجه می‌گیریم که برای هر $x \in V(G) \setminus \{x_1, \dots, x_t\}$ ، داریم $\deg_G(x) = \delta^*$ و $\{x_1, \dots, x_t\} \subset N_G(x)$ پس گراف $G - \{x_1, \dots, x_t\}$ یک گراف $(\delta^* - t)$ -منتظم است.

از طرفی طبق قضیه ۱.۳.۳ و فرض قضیه، داریم:

$$\begin{aligned} \tau(G) &\leq t + \tau(G - \{x_1, \dots, x_t\}) \\ &\leq t + \frac{1}{3}(n' + m' + 2 - \Delta') \\ &\leq t + \frac{1}{3}(n - t + m - (t\Delta - \binom{t}{1})) + 2 - (\delta^* - t) \\ &= \tau(G). \end{aligned}$$

پس داریم:

$$\tau(G - \{x_1, \dots, x_t\}) = \frac{1}{3}(n' + m' + 2 - \Delta').$$

طبق قضیه ۱.۳.۳ و از آنجایی که گراف $G - \{x_1, \dots, x_t\}$ منتظم است، نتیجه می‌گیریم $G - \{x_1, \dots, x_t\}$ یا با گراف کامل K_4 یکرخت است یا دارای تعدادی مؤلفه یکرخت K_3 است. در نتیجه گراف G دارای ساختار ذکر شده است.

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنید $G \in \{K_{t+4}\} \cup K_{t+3}[t]$. اگر $G = K_{t+4}$ ، آنگاه طبق مشاهده ۱.۲.۱، داریم $\tau(G) = t + 3$. همچنین به سادگی می‌توان مشاهده کرد که:

$$\frac{1}{3}(n + m + 3t + \binom{t}{1} + 2 - (t\Delta(G) + \delta^*)) = t + 3.$$

بنابراین، برهان کامل می‌شود. پس در ادامه فرض کنید که $G \in K_{t+3}[t]$. فرض کنید G دارای l تا $K_{t+3}(G)$ - واحد باشد و $Q_t(G) = \{x_1, \dots, x_t\}$. به‌وضوح هر $K_{t+3}(G)$ - واحد شامل مثلثی است با مجموعه رئوسی که با $Q_t(G)$ اشتراک ندارند. فرض کنید S یک $\tau(G)$ - مجموعه باشد. طبق مشاهده ۱.۲.۱، S شامل حداقل دو رأس از هر مثلثی است که مجموعه رئوسش با $Q_t(G)$ اشتراک ندارد. همچنین S شامل حداقل $t-1$ رأس از $Q_t(G)$ است. بدون کاستن از کلیت، فرض کنید $\{x_1, \dots, x_{t-1}\} \subseteq S$. بنابراین، $|S| \geq 2l + t - 1$. اگر $|S| = 2l + t - 1$ ، آنگاه یال $e = x_{t-1}x_t$ موجود است به‌طوری که x رأسی از مثلثی است که مجموعه رئوسش هیچ اشتراکی با $Q_t(G)$ ندارد. این مطلب با ترنسورسال بودن S تناقض دارد. در نتیجه، $\tau(G) \geq 2l + t$. اکنون یک محاسبه ساده نشان می‌دهد که در گراف G رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{1}{3}(n + m + 3t + \binom{t}{2} + 2 - (t\Delta(G) + \delta^*)) = 2l + t.$$

بنابراین، داریم:

$$\tau(G) \geq \frac{1}{3}(n + m + 3t + \binom{t}{2} + 2 - (t\Delta(G) + \delta^*)).$$

از طرف دیگر، طبق بخش اول قضیه، داریم:

$$\tau(G) \leq \frac{1}{3}(n + m + 3t + \binom{t}{2} + 2 - (t\Delta(G) + \delta^*)).$$

در نتیجه،

$$\tau(G) = \frac{1}{3}(n + m + 3t + \binom{t}{2} + 2 - (t\Delta(G) + \delta^*)),$$

و این همان نتیجه مورد نظر است.

۶.۳ اثبات قضیه ۳.۳.۳

فرض کنید G گرافی از مرتبه n ، اندازه m و دارای دقیقاً t رأس با ماکسیمم درجه باشد. رئوس با ماکسیمم درجه در گراف G را با x_1, \dots, x_t مشخص می‌کنیم. قرار

دهید $G^* = G - \{x_1, \dots, x_{t+1}\}$ که در آن x_{t+1} چنان رأسی است که:

$$\deg_G(x_{t+1}) = \max\{\deg_G(v) \mid v \in V(G) \setminus \{x_1, \dots, x_t\}\}.$$

به‌وضوح داریم $m(G^*) \leq m - ((t+1)\Delta(G) - d - \binom{t+1}{2})$ ، $n(G^*) \leq n - t - 1$ و $\Delta(G^*) \geq \delta^* - t - 1$ ابتدا فرض کنید که رأس v در $V(G) \setminus \{x_1, \dots, x_{t+1}\}$ موجود باشد به‌طوری که $\{x_1, \dots, x_{t+1}\} \not\subseteq N_G(v)$. اگر $N_G(v) \subset \{x_1, \dots, x_{t+1}\}$ ، آنگاه طبق قضیه ۱.۳.۳، داریم:

$$\begin{aligned} \tau(G) &\leq (t+1) + \tau(G^*) \\ &\leq (t+1) + \frac{1}{3}(n - (t+2) + m - ((t+1)\Delta(G) - d - \binom{t+1}{2}) + 2 - (\delta^* - t - 1)) \\ &= \frac{1}{3}(n + m + d + 3t + \binom{t+1}{2} + 4 - ((t+1)\Delta(G) + \delta^*)), \end{aligned}$$

که این کران، کران مورد نظر ما است. پس در این حالت اثبات کامل می‌شود. در ادامه فرض کنید که $N_G(v) \not\subseteq \{x_1, \dots, x_{t+1}\}$. در نتیجه، v رأسی در گراف G^* است. بنابراین، $\Delta(G^*) \geq \delta^* - t$. طبق قضیه ۱.۳.۳، داریم:

$$\begin{aligned} \tau(G) &\leq (t+1) + \tau(G^*) \\ &\leq (t+1) + \frac{1}{3}(n - (t+1) + m - ((t+1)\Delta(G) - d - \binom{t+1}{2}) + 2 - (\delta^* - t)) \\ &= \frac{1}{3}(n + m + d + 3t + \binom{t+1}{2} + 4 - ((t+1)\Delta(G) + \delta^*)), \end{aligned}$$

و دوباره کران مورد نظر به‌دست می‌آید. تنها حالتی که باقی می‌ماند این است که هر رأس در $V(G) \setminus \{x_1, \dots, x_{t+1}\}$ با همه رئوس در x_1, \dots, x_{t+1} مجاور است. اگر $t = 1$ ، آنگاه $\deg_G(x_1) = \deg_G(x_2)$. این مطلب یک تناقض است، زیرا گراف G فقط دارای $t = 1$ رأس با ماکسیمم درجه است. پس نتیجه می‌گیریم $t \geq 2$. چون برای $i, j \in [t]$ داریم $\deg_G(x_{t+1}) < \deg_G(x_i)$ ، در نتیجه اعداد صحیح $i, j \in [t]$ موجود هستند به‌طوری که $\{x_i, x_j\} \cap N_G(x_{t+1}) = \emptyset$. پس $\deg_G(x_i) = \deg_G(x_j) \leq n - 2$. چون

مشاهده می‌کنیم که: $\deg_G(x_1) = \dots = \deg_G(x_t)$

$$\begin{aligned} m(G^*) &\leq m - ((t+1)\Delta - d - \binom{t+1}{2}) + \frac{1}{3}(t-2) + 2 \\ &= m - (t+1)\Delta + d + \binom{t+1}{2} - \frac{1}{3}(t+2). \end{aligned}$$

طبق قضیه ۱.۳.۳، داریم:

$$\begin{aligned} \tau(G) &\leq (t+1) + \frac{1}{3}(n-t+m - (t+1)\Delta + d + \binom{t+1}{2}) - \frac{1}{3}(t+2) + 1 - (\delta^* - t - 1) \\ &< \frac{1}{3}(n+m+d + 3t + \binom{t+1}{2}) + 4 - ((t+1)\Delta(G) + \delta^*), \end{aligned}$$

و این نیز کران مطلوب است. بنابراین، برای هر گراف G با دقیقاً t رأس با ماکسیمم درجه داریم:

$$\tau(G) \leq \frac{1}{3}(n+m+d + 3t + \binom{t+1}{2}) + 4 - ((t+1)\Delta(G) + \delta^*).$$

در ادامه، همه گراف‌هایی را که در تساوی کران فوق صدق می‌کنند دسته‌بندی می‌کنیم. فرض کنید G گرافی با دقیقاً t رأس با ماکسیمم درجه باشد. همچنین، فرض کنید:

$$\tau(G) = \frac{1}{3}(n+m+d + 3t + \binom{t+1}{2}) + 4 - ((t+1)\Delta(G) + \delta^*) = k.$$

قرار دهید $G^* = G - \{x_1, \dots, x_{t+1}\}$ که در آن x_1, \dots, x_{t+1} آن چنان رئوسی هستند که برای $i \in [t]$ $\deg_G(x_i) = \Delta(G)$ و

$$\deg_G(x_{t+1}) = \max\{\deg_G(v) \mid v \in V(G) \setminus \{x_1, \dots, x_t\}\}.$$

در نتیجه مشاهده می‌کنیم که $d > 0$. به‌وضوح اجتماع هر $\tau(G^*) -$ مجموعه با مجموعه $\{x_1, \dots, x_{t+1}\}$ یک ترنسورسال برای G است. اگر یک $\tau(G^*) -$ مجموعه موجود باشد به‌طوری که اجتماع آن با $\{x_1, \dots, x_{t+1}\}$ یک $\tau(G) -$ مجموعه نباشد، آنگاه طبق قضیه ۱.۳.۳، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \tau(G) &< (t+1) + \tau(G^*) \\ &\leq \frac{1}{3}(n+m+d + 3t + \binom{t+1}{2}) + 4 - ((t+1)\Delta(G) + \delta^*), \end{aligned}$$

و این یک تناقض است. بنابراین گزاره زیر برقرار است.

گزاره ۱.۶.۳. اجتماع هر $\tau(G^*) -$ مجموعه با $\{x_1, \dots, x_{t+1}\}$ یک $\tau(G) -$ مجموعه است.

اکنون، ما اثبات را براساس وجود یا عدم وجود رأس $v \in V(G) \setminus \{x_1, \dots, x_{t+1}\}$ با این ویژگی که $N_G(v) \subseteq \{x_1, \dots, x_{t+1}\}$ ادامه می‌دهیم تا زیرخانواده‌های مختلف \mathcal{G}_t را براساس این حالات به دست آوریم.

حالت ۱.۶.۳. فرض کنید رأس $x \in V(G) \setminus \{x_1, \dots, x_{t+1}\}$ موجود باشد به طوری که $N_G(x) \subseteq \{x_1, \dots, x_{t+1}\}$.

فرض کنید l تعداد چنین رأس‌هایی باشد. طبق قضیه ۱.۳.۳، داریم:

$$\begin{aligned} \tau(G) &\leq (t+1) + \tau(G^*) \\ &\leq (t+1) + \frac{1}{3}(n - (t+l+1) + m - ((t+1)\Delta(G) - d - \binom{t+1}{1}) + 2 - \Delta(G^*)) \\ &= \frac{1}{3}(n - l + m + d + 2t + \binom{t+1}{1}) + 4 - ((t+1)\Delta(G) + \Delta(G^*)). \end{aligned}$$

دقت شود $\Delta(G^*) \geq \delta^* - t - 1$ اگر $l > 1$ ، آنگاه داریم $\delta^* - t - 1 > \Delta(G^*) + l$ و در نتیجه $\tau(G) < k$ ، که یک تناقض است. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که $l = 1$. فرض کنید x تنها رأسی در $V(G) \setminus \{x_1, \dots, x_{t+1}\}$ باشد که $N_G(x) \subseteq \{x_1, \dots, x_{t+1}\}$. اگر $\Delta(G^*) > \delta^* - t - 1$ ، آنگاه با استفاده از محاسباتی که در قضیه ۱.۳.۳ نیز به کار رفته است، نتیجه می‌گیریم که:

$$\tau(G) \leq \frac{1}{3}(n + m + d + 2t + \binom{t+1}{1}) + 3 - ((t+1)\Delta(G) + \Delta(G^*)) < k. \quad (6.3)$$

این تناقض می‌رساند که G^* گرافی $(\delta^* - t - 1) -$ منتظم است. بنابراین، برای هر رأس $u \in V(G^*)$ داریم $\deg_G(u) = \delta^*$ و $\{x_1, \dots, x_{t+1}\} \subset N_G(u)$. اکنون نشان می‌دهیم که:

$$G[\{x_1, \dots, x_{t+1}\}] = K_{t+1} \quad (7.3)$$

به کمک برهان خلف ادعای فوق را ثابت می‌کنیم. فرض کنید که اعداد صحیح $i, j \in [t+1]$ موجود باشند به طوری که x_j با x_i مجاور نیست. پس داریم:

$$m(G^*) \leq m(G) - ((t+1)\Delta(G) - d - \binom{t+1}{2} + 1).$$

طبق قضیه ۱.۳.۳، داریم:

$$\begin{aligned} \tau(G) &\leq (t+1) + \tau(G^*) \\ &\leq t+1 + \frac{1}{3} \left(n - (t+2) + m - ((t+1)\Delta(G) - d - \binom{t+1}{2} + 1) + 2 - (\delta^* - t - 1) \right) \\ &< k, \end{aligned}$$

که یک تناقض است. در نتیجه، برای هر دو عدد صحیح $i, j \in [t+1]$ داریم x_j با x_i مجاور است و این ادعای (۷.۳) را اثبات می‌کند. چون

$$\deg_G(x_1) = \dots = \deg_G(x_t) > \deg_G(x_{t+1}),$$

درمی‌یابیم که $N_G(x) = \{x_1, \dots, x_t\}$. طبق قضیه ۱.۳.۳، G^* یا با گراف کامل K_4 یکرخت است و یا گرافی است که مؤلفه‌های آن با K_3 یکرخت هستند. بنابراین، G متعلق به خانواده $\mathcal{G}_{\tau, t}$ است.

حالت ۲.۶.۳. در $V(G) \setminus \{x_1, \dots, x_{t+1}\}$ هیچ رأسی مانند x وجود ندارد به طوری که

$$N_G(x) \subseteq \{x_1, \dots, x_{t+1}\}$$

اکنون، ما نشان می‌دهیم که رأس $v \in V(G) \setminus \{x_1, \dots, x_{t+1}\}$ موجود است به طوری که

$$\{x_1, \dots, x_{t+1}\} \not\subseteq N_G(v).$$

فرض کنید چنین نباشد، یعنی برای هر رأس $v \in V(G) \setminus \{x_1, \dots, x_{t+1}\}$ داریم $\{x_1, \dots, x_{t+1}\} \subseteq N_G(v)$. اگر $G[\{x_1, \dots, x_{t+1}\}] = K_{t+1}$ ، آنگاه $d = 0$. این مطلب یک تناقض است. زیرا G دارای دقیقاً t رأس با ماکسیمم درجه است، پس $d > 0$. بنابراین،

از آنجا که برای هر $i \in [t]$ داریم $\deg_G(x_i) > \deg_G(x_{t+1})$ ، می‌توان نتیجه گرفت که:

$$m(G^*) \leq m(G) - ((t+1)\Delta(G) - d - \binom{t+1}{4} + 2).$$

اکنون قضیه ۱.۳.۳ می‌رساند که $\tau(G) < k$. این مطلب یک تناقض است. در نتیجه، رأس $v \in V(G) \setminus \{x_1, \dots, x_{t+1}\}$ موجود است به طوری که $\{x_1, \dots, x_{t+1}\} \not\subseteq N_G(v)$. بنابراین، $\Delta(G^*) \geq \delta^* - t$. طبق قضیه ۱.۳.۳، داریم $G[\{x_1, \dots, x_{t+1}\}] = K_{t+1}$. اگر رأس $v \in V(G) \setminus \{x_1, \dots, x_{t+1}\}$ موجود باشد به طوری که $\deg_G(v) > \delta^* + 1$ یا v با حداقل دو رأس در x_1, \dots, x_{t+1} مجاور نباشد، آنگاه $\Delta(G^*) > \delta^* - t$. که این منجر به تناقض می‌شود. بنابراین، هر رأس در $V(G) \setminus \{x_1, \dots, x_{t+1}\}$ با حداقل t رأس از رئوس x_1, \dots, x_{t+1} مجاور است و از درجه δ^* یا $\delta^* + 1$ در گراف G است. همچنین، هر رأس از درجه $\delta^* + 1$ با همه رئوس در x_1, \dots, x_{t+1} مجاور است. ما نتیجه می‌گیریم که درجه هر رأس G^* در G^* برابر با $\delta^* - t$ و شاید $\delta^* - t - 1$ است. طبق قضیه ۱.۳.۳، G^* دارای یکی از ساختارهای زیر است.

(آ) G^* دارای دقیقاً یک مؤلفه یکرخت با K_4 و شاید تعدادی مؤلفه یکرخت با K_3 است.

(ب) G^* دارای دقیقاً یک مؤلفه یکرخت با پاروی دوگانه و شاید تعدادی مؤلفه یکرخت با K_3 است.

(پ) G^* دارای حداقل یک مؤلفه یکرخت با K_3 و شاید تعدادی مؤلفه یکرخت با K_2 است.

حال اثبات را براساس ساختارهای بالا ادامه می‌دهیم.

ساختار (آ): G^* دارای دقیقاً یک مؤلفه یکرخت با K_4 و شاید تعدادی مؤلفه یکرخت با K_3 است. در اینجا برای راحتی مؤلفه یکرخت با K_4 را $K_4 -$ مؤلفه و مؤلفه یکرخت با K_3 را $K_3 -$ مؤلفه می‌نامیم. ما نشان می‌دهیم که $G^* \neq K_4$. فرض کنید

که $G^* = K_4$. اگر رأسی در G^* با همه رأس‌های x_1, \dots, x_{t+1} مجاور باشد، آنگاه درجه این رأس در G برابر $t + 4$ است. بنابراین، از آنجا که برای هر $i \in [t]$ رأس x_i دارای ماکسیمم درجه است، داریم $\deg_G(x_i) > t + 4$. از طرف دیگر، $\deg_G(x_i) \leq t + 4$ و این یک تناقض است. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که هر رأس v از G^* با دقت t رأس از x_1, \dots, x_{t+1} مجاور است. در نتیجه، $\deg_G(v) = \delta^* = t + 3$. چون به ازای $i \in [t]$ ، x_i دارای ماکسیمم درجه است، پس x_i با همه رأس‌های G^* مجاور است. پس داریم $\deg_G(x_{t+1}) = t$ ، که یک تناقض است. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که $G^* \neq K_4$. در نتیجه، G^* دارای حداقل یک K_3 - مؤلفه است.

فرض کنید K_4 - مؤلفه در G^* دارای رأس u باشد به طوری که $\deg_G(u) = \delta^* + 1$. پس u با همه رأس‌های x_1, \dots, x_{t+1} مجاور است. ما نتیجه می‌گیریم که $\delta^* = t + 3$. بنابراین، رأس‌های هر K_3 - مؤلفه با همه رأس‌های x_1, \dots, x_{t+1} مجاور هستند. اگر هر رأس در $V(K_4) \setminus \{u\}$ با همه رأس‌های x_1, \dots, x_{t+1} مجاور باشد، آنگاه $d = 0$. این مطلب یک تناقض است. زیرا G دارای دقت t رأس با ماکسیمم درجه است، پس $d > 0$. اگر دو رأس در $V(K_4) \setminus \{u\}$ با همه رأس‌های x_1, \dots, x_{t+1} مجاور باشند، آنگاه از آنجا که $\deg_G(x_i) > \deg_G(x_{t+1})$ ، رأس‌های دیگر $V(K_4) \setminus \{u\}$ با x_i ، $i \in [t]$ ، مجاور هستند. اگر یک رأس در $V(K_4) \setminus \{u\}$ با همه رأس‌های x_1, \dots, x_{t+1} مجاور باشد، آنگاه دیگر رأس‌های $V(K_4) \setminus \{u\}$ نیز با x_i ، $i \in [t]$ ، مجاور هستند. تنها حالتی که باقی می‌ماند این است که فرض کنیم همه رأس‌های $V(K_4) \setminus \{u\}$ از درجه δ^* باشند. اگر $t > 1$ ، آنگاه همه رأس‌های $V(K_4) \setminus \{u\}$ با x_i ، $i \in [t]$ ، مجاور هستند. اگر $t = 1$ ، آنگاه یا هیچ رأسی در $V(K_4) \setminus \{u\}$ با x_2 مجاور نیست یا دو رأس در $V(K_4) \setminus \{u\}$ با x_1 مجاور هستند و یکی با x_2 مجاور است. این حالت‌ها، ساختار گراف‌های متعلق به خانواده $\mathcal{G}_{3,t}$ را بیان می‌کنند.

در ادامه فرض می‌کنیم که هر رأس در K_4 - مؤلفه از درجه δ^* باشد. اگر رأسی در K_4 - مؤلفه با هر رأس x_i ، $i \in [t + 1]$ ، مجاور باشد، آنگاه $\delta^* = t + 4$. این در

حالی است که درجه هر رأس در هر K_3 -مؤلفه در G حداکثر برابر با $t + 3$ است. این یک تناقض است. پس هر رأس K_4 -مؤلفه با دقت t رأس از x_1, \dots, x_{t+1} مجاور است. در نتیجه داریم $\delta^* = t + 3$. بنابراین، رأس‌های هر K_3 -مؤلفه با همه رأس‌های x_1, \dots, x_{t+1} مجاور هستند. همچنین $\deg_G(x_{t+1}) \geq t + 3$ ، چون x_{t+1} با x_i و همه رأس‌های K_3 -مؤلفه مجاور است. بنابراین اگر $t > 1$ ، آنگاه هیچ رأسی از K_4 -مؤلفه با x_{t+1} مجاور نیست. اگر $t = 1$ ، آنگاه یا هیچ رأسی از K_4 -مؤلفه با x_2 مجاور نیست، یا دقیقاً یک رأس در K_4 -مؤلفه وجود دارد به طوری که با x_2 مجاور است و همه رأس‌های دیگر K_4 -مؤلفه با x_1 مجاور هستند. این حالت‌ها، ساختار گراف‌های تعریف شده در خانواده $\mathcal{G}_{3,t}$ را بیان می‌کنند.

زیرحالت (ب) G^* دارای دقیقاً یک مؤلفه یکرخت با پاروی دوگانه و شاید تعدادی مؤلفه یکرخت با K_3 است. فرض کنید v_1 رأسی از درجه سه در G^* باشد. فرض کنید که $\deg_G(v_1) = \delta^* + 1$. پس v_1 با همه رأس‌های x_1, \dots, x_{t+1} مجاور است. بنابراین، $\delta^* = t + 3$. همچنین هر رأس از درجه دو در G^* با همه رأس‌های x_1, \dots, x_{t+1} مجاور است. بنابراین، رأس‌های دیگر از درجه سه در G^* با x_i ، $i \in [t]$ ، مجاور هستند. در ادامه فرض کنید که $\deg_G(v_1) = \delta^*$. فرض کنید v_2 رأس دیگر از درجه سه در G^* باشد. پس ما می‌توانیم فرض کنیم که $\deg_G(v_2) = \delta^*$. اگر v_1 با همه رأس‌های x_1, \dots, x_{t+1} مجاور باشد، آنگاه $\delta^* = t + 4$. اما هر رأس از درجه دو در G^* دارای درجه حداکثر $t + 3$ در گراف G است. این یک تناقض است. بنابراین، v_1 با دقت t رأس از x_1, \dots, x_{t+1} مجاور است. بدون کاستن از کلیت، فرض کنید v_1 با x_{t+1} مجاور نیست. پس، $\delta^* = t + 3$. در نتیجه، همه رأس‌های درجه دو در G^* باید با همه رأس‌های x_1, \dots, x_{t+1} مجاور باشند. چون $\deg_G(x_1) = \dots = \deg_G(x_t)$ ، نتیجه می‌گیریم که v_2 با x_i ، $i \in [t]$ ، مجاور است. این حالت‌ها، ساختار گراف‌های تعریف شده در خانواده $\mathcal{G}_{4,t}$ را بیان می‌کنند.

زیرحالت (پ) G^* دارای حداقل یک مؤلفه یکرخت با K_3 و شاید تعدادی مؤلفه

یکریخت با K_2 است. در اینجا نیز برای راحتی مؤلفه یکریخت با K_3 را به صورت $K_3 -$ مؤلفه و مؤلفه یکریخت با K_2 را به صورت $K_2 -$ مؤلفه نمایش می‌دهیم.

اگر رأسی از درجه δ^* در یک $K_3 -$ مؤلفه از G^* با همه رأس‌های x_1, \dots, x_{t+1} مجاور باشد، آنگاه داریم $\delta^* = t + 3$. بنابراین، G^* دارای هیچ $K_2 -$ مؤلفه‌ای نیست. چون هر رأس در هر $K_3 -$ مؤلفه از G^* با همه رأس‌های x_1, \dots, x_{t+1} مجاور است، ما نتیجه می‌گیریم که $d = 0$. که این یک تناقض است. بنابراین، هر رأس از درجه δ^* در هر $K_3 -$ مؤلفه از G^* با دقیقاً t رأس از بین رأس‌های x_1, \dots, x_{t+1} مجاور است، یعنی $\delta^* = t + 2$. در نتیجه، رأس‌های هر $K_2 -$ مؤلفه از G^* ، در صورت وجود چنین مؤلفه‌ای، با همه رأس‌های x_1, \dots, x_{t+1} مجاور هستند. اگر هر رأس در هر $K_3 -$ مؤلفه از G^* با همه رأس‌های x_1, \dots, x_{t+1} مجاور باشد، آنگاه $d = 0$ ، و دوباره به تناقض می‌رسیم. بنابراین، G^* دارای $K_3 -$ مؤلفه‌ای با رأسی از درجه δ^* است.

ما نشان می‌دهیم که $G^* \neq K_3$. فرض کنید $G^* = K_3$. اگر G^* شامل رأسی از درجه $\delta^* + 1$ باشد، آنگاه برای $i \in [t]$ داریم $\deg_G(x_i) \geq t + 4$ ، که یک تناقض است. بنابراین، هر رأس G^* از درجه δ^* است. در نتیجه، به ازای هر $i \in [t]$ ، داریم $\deg_G(x_i) \geq t + 3$. پس هر رأس در G^* با رأس x_i ، $i \in [t]$ ، مجاور است. نتیجه می‌گیریم که $\deg_G(x_{t+1}) = t$ ، که یک تناقض است. در نتیجه داریم $G^* \neq K_3$.

بنابراین، در ادامه ما دو حالت را براساس وجود و یا عدم وجود $K_2 -$ مؤلفه در G^* در نظر می‌گیریم. ابتدا فرض کنید G^* دارای $K_2 -$ مؤلفه باشد. چون $\delta^* = t + 2$ ، هر رأس از هر $K_2 -$ مؤلفه با همه رأس‌های x_1, \dots, x_{t+1} مجاور است. فرض کنید S^* یک $\tau(G^*) -$ مجموعه باشد. طبق گزاره ۱.۶.۳، $S = S^* \cup \{x_1, \dots, x_{t+1}\}$ یک $\tau(G)$ - مجموعه است. بنابراین، هر رأس از هر $K_3 -$ مؤلفه با حداقل t رأس از x_1, \dots, x_{t+1} مجاور است به طوری که $\deg_G(x_1) = \dots = \deg_G(x_t) > \deg_G(x_{t+1})$. این گراف متعلق به خانواده $\mathcal{G}_{\delta, t}$ است.

در ادامه فرض می‌کنیم که G^* دارای هیچ $K_2 -$ مؤلفه‌ای نباشد. بنابراین، G^* دارای

حداقل دو K_3 -مؤلفه است. فرض کنید S^{**} یک $\tau(G^*)$ -مجموعه باشد. به وضوح S^{**} شامل دقیقاً دو رأس از هر K_3 -مؤلفه است. طبق گزاره ۱.۶.۳، $S = S^{**} \cup \{x_1, x_2, \dots, x_{t+1}\}$ یک $\tau(G)$ -مجموعه است. به وضوح برای $i \in [t+1]$ ، $\{x_1, x_2, \dots, x_{t+1}\} \setminus \{x_i\}$ همه یال‌های K_{t+1} را پوشش می‌دهد. چون $x_i \in S$ ، درمی‌یابیم که x_i با یک رأس c در $V(G^*) \setminus S^{**}$ مجاور است. فرض کنید $a, b \in N_{G^*}(c)$ و $S_1 = (S \setminus \{a\}) \cup \{c\}$. چون $S_1 \setminus \{x_i\}$ یک ترنسورسال برای G نیست، x_i با یک رأس $c_1 \in V(G^*) \setminus S_1$ مجاور است. اگر $a \neq c_1$ ، آنگاه این رأس، c_1 ، به یک K_3 -مؤلفه از G با مجموعه رئوس $\{a_1, b_1, c_1\}$ ، متعلق است به طوری که $a_1, b_1 \in S_1$. فرض کنید $S_2 = (S_1 \setminus \{a_1\}) \cup \{c_1\}$. چون $S_2 \setminus \{x_i\}$ یک ترنسورسال برای G نیست، x_i با یک رأس $c_2 \in V(G^*) \setminus S_2$ مجاور است. با ادامه این استدلال، عدد صحیح k وجود دارد به طوری که x_i با یک رأس $c_k \in V(G^*) \setminus S_k$ مجاور است. بنابراین بدون کاستن از کلیت، فرض کنید که $c_1 = a$. قرار دهید $D_1 = (S_1 \setminus \{b\}) \cup \{a\}$. چون $D_1 \setminus \{x_i\}$ یک ترنسورسال برای G نیست، پس x_i با یک رأس $d_1 \in V(G^*) \setminus D_1$ مجاور است. اگر $d_1 \neq b$ ، آنگاه این رأس به یک K_3 -مؤلفه از G با مجموعه رئوس $\{a_1, b_1, d_1\}$ متعلق است به طوری که $a_1, b_1 \in D_1$. قرار دهید $D_2 = (D_1 \setminus \{a_1\}) \cup \{d_1\}$. چون $D_2 \setminus \{x_i\}$ یک ترنسورسال برای G نیست، پس x_i با یک رأس $d_2 \in V(G^*) \setminus D_2$ مجاور است. با ادامه این استدلال، عدد صحیح k وجود دارد به طوری که x_i با یک رأس $d_k \in V(G^*) \setminus D_k$ مجاور است. بنابراین بدون کاستن از کلیت، فرض کنید $d_1 = b$. این گراف‌ها، گراف‌های تعریف شده در خانواده $\mathcal{G}_{\epsilon, t}$ هستند.

بنابراین، زیرحالت‌های مختلف حالت ۲ بررسی شدند.

طرف عکس قضیه به آسانی از لم ۱.۲.۳ و قسمت اول قضیه نتیجه می‌شود.

فصل ۴

عدد ترنسورسال در گراف‌های همبند

۱.۴ مقدمه

هنینگ و لاونشتاین در [۵۹] اثبات کردند که اگر گراف همبند G از مرتبه n و اندازه m متعلق به یک خانواده مشخص از گراف‌ها نباشد، آنگاه $\tau(G) < n/3 + m/4$. در این فصل، کران فوق را برای گراف‌های همبند با ماکسیمم درجه حداقل چهار که دارای رأسی غیربرشی با ماکسیمم درجه هستند، بهبود خواهیم داد. در حقیقت، نشان می‌دهیم اگر گراف همبند G از مرتبه n و اندازه m دارای رأسی غیر برشی با ماکسیمم درجه باشد، آنگاه

$$\tau(G) \leq \frac{1}{3}n + \frac{1}{4}(m - \Delta(G)) + \frac{11}{13}.$$

همچنین، همه گراف‌های همبند G از مرتبه n و اندازه m را که دارای رأسی غیربرشی با ماکسیمم درجه هستند و

$$\tau(G) \geq \frac{1}{3}n + \frac{1}{4}(m - \Delta(G)) + \frac{2}{3}$$

دسته‌بندی می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا در بخش ۲.۴ به ذکر تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در این فصل می‌پردازیم. در بخش ۳.۴ نتایج خود را در راستای بهبود قضیه ۱.۳.۲ ارائه می‌دهیم. سپس در بخش ۴.۴ به اثبات نتایج خود می‌پردازیم. نتایج این فصل براساس مقاله ۱۰ مستخرج از رساله است.

۲.۴ خانواده‌هایی از گراف‌ها

ابتدا تعدادی تعریف و یک خانواده نامتناهی از گراف‌ها بر مبنای خانواده \mathcal{F} ، که در زیربخش ۱.۳.۲ معرفی شد، ارائه می‌دهیم. برای گراف $G \in \mathcal{F}$ ، یک مسیر پل-متناوب^۱ مسیری است که بین یال‌های واحدها و پل‌های G تناوب می‌کند. واحدی که یالی از یک مسیر پل-متناوب P دارد، واحد آلوده شده^۲ توسط P ، یا واحد P -آلوده نامیده می‌شود. یک مسیر پل-متناوب که یال‌های انتهایی آن پل نیستند، مسیر پل-افزوده^۳ نامیده می‌شود. برای یک مسیر پل-متناوب $P = v_0, v_1, \dots, v_l$ ، مجموعه رئوس در واحدهای P -آلوده را با $Unit_s(P)$ مشخص می‌کنیم. همچنین مجموعه $N_s(P)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$N_s(P) = Unit_s(P) \setminus \{v_1, \dots, v_{l-1}\}.$$

اکنون، یک خانواده نامتناهی از گراف‌ها بر مبنای خانواده \mathcal{F} ارائه می‌دهیم.

به ازای $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ و $j \in \{1, 2, 5\}$ به طوری که

$$(i, j) \notin \{(1, 5), (2, 2), (2, 5), (3, 2), (3, 5)\},$$

خانواده $\mathcal{H}_{i,j}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنید خانواده گراف‌های همبند G باشد به طوری که G از یک گراف $G_0 \in \mathcal{F}_{i,j}$ با افزودن رأس جدید x و وصل کردن x به برخی رئوس G_0 به دست آمده است به طوری که x دارای ماکسیمم درجه در G باشد و عدد صحیح $k_G \geq 1$ موجود باشد به طوری که فرآیند زیر برقرار باشد.

^۱bridge-alternating path
^۲saturated unit

^۳bridge-augmenting path

فرآیند A:

گام ۱) مسیر پل-افزوده $x_0 = v_0^1, \dots, v_{l_1+1}^1$ در G_0 موجود باشد به طوری که $I_1(x_0) \neq \emptyset$ ، آنگاه $k_G = 1$ ، اگر $k_G > 1$ ، همچنین اگر $k_G > 1$ ، آنگاه $N_s(P^1(x_0)) \subseteq N_G(x)$ ، که در آن $I_1(x_0) = N_s(P^1(x_0)) \setminus N_G(x)$ و گام ۲ نیز برقرار باشد.

گام ۲) برای هر رأس $x_1 \in I_1(x_0)$ ، مسیر پل-متناوب $x_1 = v_1^2, \dots, v_{l_2+1}^2$ در G_0 موجود باشد به طوری که $v_1^2 v_2^2$ پلی از G_0 باشد. اگر $k_G = 2$ ، آنگاه برای هر $x_1 \in I_1(x_0)$ ، $N_s(P^2(x_1)) \subseteq N_G(x)$ ، همچنین اگر $k_G > 2$ ، آنگاه برای تعدادی $x_1 \in I_1(x_0)$ ، $I_2(x_1) \neq \emptyset$ که در آن $I_2(x_1) = N_s(P^2(x_1)) \setminus N_G(x)$ برای هر $x_1 \in I_1(x_0)$ که $I_2(x_1) \neq \emptyset$ ، گام ۳ نیز برقرار باشد.

گام k) برای $k \geq 3$ و برای هر رأس $x_{k-1} \in I_{k-1}(x_{k-2})$ ، مسیر پل-متناوبی مانند $x_{k-1} = v_1^k, \dots, v_{l_k+1}^k$ در G_0 موجود باشد به طوری که $v_1^k v_2^k$ پلی از G_0 باشد. اگر $k_G = k$ ، آنگاه برای هر $x_{k-1} \in I_{k-1}(x_{k-2})$ ، $N_s(P^k(x_{k-1})) \subseteq N_G(x)$ ، همچنین اگر $k_G > k$ ، آنگاه برای بعضی $x_{k-1} \in I_{k-1}(x_{k-2})$ ، $I_k(x_{k-1}) \neq \emptyset$ که در آن قرار دهید:

$$I_k(x_{k-1}) = N_s(P^k(x_{k-1})) \setminus N_G(x),$$

و برای هر $x_{k-1} \in I_{k-1}(x_{k-2})$ که $I_k(x_{k-1}) \neq \emptyset$ ، گام $k+1$ برقرار باشد.

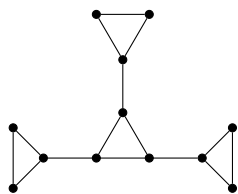
دقت شود که گام پایانی فرآیند A به صورت زیر است:

برای هر رأس $x_{k_G-1} \in I_{k_G-1}(x_{k_G-2})$ ، مسیر پل-متناوبی مانند

$$P^{k_G}(x_{k_G-1}) : x_{k_G-1} = v_1^{k_G}, \dots, v_{l_{k_G}+1}^{k_G}$$

در G_0 موجود باشد به طوری که یال $v_1^{k_G} v_2^{k_G}$ پلی از G_0 باشد. همچنین برای هر رأس $x_{k_G-1} \in I_{k_G-1}(x_{k_G-2})$ ، داریم $N_s(P^{k_G}(x_{k_G-1})) \subseteq N_G(x)$ ،

برای $i \in \{0, 1\}$ و $j \in \{3, 4\}$ به طوری که $(i, j) \neq (1, 4)$ ، خانواده $\mathcal{H}_{i,j}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنید خانواده گراف‌های همبند G باشد که G از گراف



شکل ۱.۴: یک گراف متعلق به خانواده \mathcal{F}_3 .

با افزودن رأس جدید x و وصل کردن x به برخی از رئوس G_0 به دست آمده است به طوری که x دارای ماکسیمم درجه در G باشد و عدد صحیح $k_G \geq 1$ وجود دارد به طوری که حداقل یکی از فرآیندهای زیر برقرار باشد.

فرآیند B: گام‌های $1, \dots, k_G$ از فرآیند A برقرار باشد به شرط آن که به ازای واحد $F \in \{C_\Delta, K_n^*\}$ هیچ F -واحد $P^k(x_{k-1})$ -آلوده‌ای در هر گام $k, k \in [k_G]$ موجود نباشد.

فرآیند C: رأس x_0 از F -واحد، $F \in \{C_\Delta, K_n^*\}$ موجود باشد به طوری که اگر $k_G = 1$ ، آنگاه $N_G[x_0] \cap V(F) \subseteq N_G(x_0)$ و اگر $k_G > 1$ ، آنگاه $I_1(x_0) \neq \emptyset$ ، که در آن

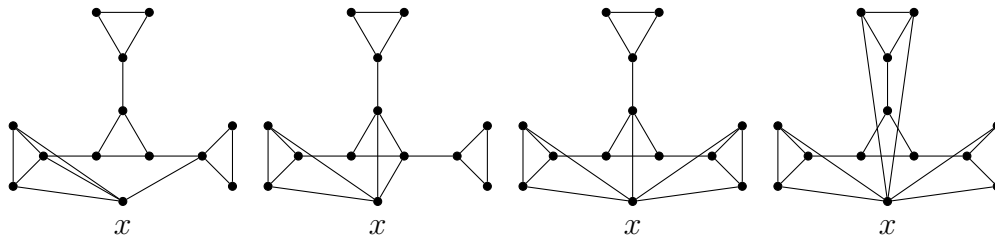
$$I_1(x_0) = (N_G[x_0] \cap V(F)) \setminus N_G(x_0).$$

همچنین گام‌های $2, \dots, k_G$ از فرآیند A برقرار باشد.

اکنون خانواده نامتناهی \mathcal{H} از گراف‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{H} = \bigcup_{i=0}^3 \mathcal{H}_i,$$

که در آن $\mathcal{H}_0 = \bigcup_{j=1}^5 \mathcal{H}_{0,j}$ ، $\mathcal{H}_1 = \bigcup_{j=1}^3 \mathcal{H}_{1,j}$ ، $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_{2,1}$ و $\mathcal{H}_3 = \mathcal{H}_{3,1}$. تعدادی گراف در خانواده \mathcal{H} در شکل ۲.۴ رسم شده است. در حقیقت، این گراف‌ها متعلق به خانواده \mathcal{H}_3 هستند که توسط فرآیند A از گراف $G_0 \in \mathcal{F}_3$ که در شکل ۱.۴ نشان داده شده است، به دست آمده‌اند.



شکل ۲.۴: تعدادی گراف متعلق به خانواده \mathcal{H} .

۳.۴ نتایج اصلی

طبق ساختار گراف‌ها در خانواده \mathcal{F} ، مشاهدات زیر بدیهی است.

مشاهده ۱.۳.۴. اگر $G \in \{C_5, K_3^*\}$ ، آنگاه هیچ $\tau(G)$ - مجموعه‌ای شامل همسایگی بسته یک رأس نیست.

مشاهده ۲.۳.۴. اگر $G \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_{\circ,5}$ ، آنگاه هیچ دوری در G شامل هیچ پلی از G نیست. نتیجه زیر از نتیجه ۱.۳.۲ به دست می‌آید.

نتیجه ۱.۳.۴. اگر $G \in \mathcal{F}$ ، آنگاه هر $\tau(G)$ - مجموعه دارای دقیقاً $\tau(F)$ رأس از هر F - واحد در G است.

برهان. بدون کاستن از کلیت، فرض کنید G گرافی در خانواده \mathcal{F}_3 باشد. بنابراین، از $k \geq 1$ تا K_3 - واحد مجزا با افزودن $k - 1$ یال به دست آمده است. واحدهای G دوبه دو مجزا هستند. پس هر $\tau(G)$ - مجموعه حداقل $\tau(F)$ رأس از هر F - واحد در G دارد تا یال‌های این واحدها را پوشش دهد. بنابراین، هر $\tau(G)$ - مجموعه از اندازه حداقل $2k$ است، چون $\tau(K_3) = 2$. از طرف دیگر، به سادگی می‌توان محاسبه کرد $n(G) = 3k$ و $m(G) = 4k - 1$. پس، طبق قضیه ۱.۳.۲، داریم:

$$\tau(G) = \frac{1}{3}n + \frac{1}{4}m + \frac{1}{4} = 2k.$$

بنابراین، هر $\tau(G)$ - مجموعه دقیقاً $\tau(F)$ رأس از هر F - واحد در G دارد. اثبات برای دیگر گراف‌ها در خانواده \mathcal{F} به طور مشابه برقرار است. \square

گزاره ۱.۳.۴. فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه n و اندازه m باشد که دارای رأسی غیر برشی با ماکسیمم درجه است. در این صورت داریم:

$$\tau(G) \leq \frac{1}{3}n + \frac{1}{4}(m - \Delta(G)) + \frac{11}{12}.$$

برهان. فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه n و اندازه m باشد که دارای رأس غیر برشی x با ماکسیمم درجه است. قرار دهید $G_0 = G - x$. پس G_0 گرافی همبند از مرتبه $n - 1$ و اندازه $m - \Delta(G)$ است. طبق قضیه ۱.۳.۲، داریم:

$$\begin{aligned} \tau(G) &\leq 1 + \tau(G_0) \\ &\leq 1 + \frac{1}{3}(n - 1) + \frac{1}{4}(m - \Delta(G)) + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{3}n + \frac{1}{4}(m - \Delta(G)) + \frac{11}{12}. \end{aligned}$$

□

این همان کران مورد نظر است. در ادامه قضیه زیر اثبات می‌شود.

قضیه ۱.۳.۴. فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه n و اندازه m باشد که دارای رأسی غیر برشی با ماکسیمم درجه است. در این صورت روابط زیر برقرار هستند.

الف) به ازای $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ، داریم:

$$\tau(G) = \frac{1}{3}n + \frac{1}{4}(m - \Delta(G)) + \frac{1}{12}(8 + i),$$

اگر و تنها اگر $G \in \mathcal{H}_i$.

ب) اگر $G \notin \mathcal{H}$ ، آنگاه داریم:

$$\tau(G) < \frac{1}{3}n + \frac{1}{4}(m - \Delta(G)) + \frac{2}{3}.$$

به‌وضوح قضیه ۱.۴.۵ کرانی جدید برای هر گراف ۲-همبند نیز ارائه می‌دهد. دقت شود با یک محاسبه ساده می‌توان نشان داد که قضیه ۱.۴.۵، قضیه ۱.۳.۲ را بهبود می‌بخشد هرگاه $\Delta(G) > 3$.

۴.۴ اثبات قضیه ۱.۴.۳

اکنون قضیه ۱.۴.۳ را اثبات می‌کنیم. برای این منظور، کافی است قسمت (الف) را ثابت کنیم.

فرض کنید $G \in \mathcal{H}_i$ ، $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ، گرافی از مرتبه n و اندازه m باشد. بنابراین، G از گراف $G_0 \in \mathcal{F}_i$ با افزودن رأس جدید x توسط یکی از فرآیندهای A ، B یا C به دست آمده است. ابتدا نشان می‌دهیم که هیچ $\tau(G_0)$ - مجموعه‌ای اعضای $E(G)$ را پوشش نمی‌دهد. به کمک برهان خلف این ادعا را اثبات می‌کنیم. فرض کنید S یک $\tau(G_0)$ - مجموعه باشد که اعضای $E(G)$ را می‌پوشاند. اکنون با در نظر گرفتن دو حالت براساس مقدار j که $G \in \mathcal{H}_{i,j}$ اثبات را پیش می‌بریم.

حالت I. فرض کنید به ازای برخی از مقادیر $j \in \{1, 2, 5\}$ به طوری که

$$(i, j) \notin \{(1, 5), (2, 2), (2, 5), (3, 2), (3, 5)\},$$

$G \in \mathcal{H}_{i,j}$. پس G توسط فرآیند A به دست آمده است و هر واحد در G_0 یک K_t - واحد، $t \in \{2, 3, 4\}$ است.

ادعا ۱.۴.۴. $I_1(x_0) \subseteq S$.

برهان. طبق گام k_G ، به ازای هر $x_{k_G-1} \in I_{k_G-1}(x_{k_G-2})$ یک مسیر پل - متناوب $P^{k_G}(x_{k_G-1}) : x_{k_G-1} = v_1^{k_G}, \dots, v_{l_{k_G}+1}^{k_G}$ وجود دارد به طوری که $l \in [l_{k_G}]$ ، $v_{l+1}^{k_G}$ ، $v_l^{k_G}$ یالی از یک $F_l^{k_G}$ - واحد است و برای هر $x_{k_G-1} \in I_{k_G-1}(x_{k_G-2})$ داریم:

$$N_s(P^{k_G}(x_{k_G-1})) \subseteq N_G(x).$$

چون S اعضای $E(G)$ را پوشش می‌دهد و $x \notin S$ ، نتیجه می‌گیریم که $N_G(x) \subseteq S$. پس

$$N_s(P^{k_G}(x_{k_G-1})) \subseteq S. \quad (1.4)$$

بنابراین، داریم:

$$N_G[v_{l_{k_G}+1}^{k_G}] \cap N_s(P^{k_G}(x_{k_G-1})) \subseteq S.$$

چون $F_{l_{k_G}}^{k_G}$ - واحد یک K_t - واحد، $t \in \{2, 3, 4\}$ ، است داریم:

$$\left| N_G[v_{\check{l}_{k_G}+1}^{k_G}] \cap N_s(P^{k_G}(x_{k_G-1})) \right| = \left| V(F_{l_{k_G}}^{k_G}) \setminus \{v_{\check{l}_{k_G}}^{k_G}\} \right| = n(F_{l_{k_G}}^{k_G}) - 1.$$

بنابراین، طبق نتیجه ۱.۳.۴، $v_{\check{l}_{k_G}}^{k_G} \notin S$ چون S پل $v_{\check{l}_{k_G-1}}^{k_G} v_{\check{l}_{k_G}}^{k_G}$ را می‌پوشاند، نتیجه می‌گیریم که $v_{\check{l}_{k_G-1}}^{k_G} \in S$ طبق (۱.۴)، داریم:

$$N_G(v_{\check{l}_{k_G-1}}^{k_G}) \cap N_s(P^{k_G}(x_{k_G-1})) \subseteq S.$$

پس نتیجه می‌گیریم که:

$$\left(N_G(v_{\check{l}_{k_G-1}}^{k_G}) \cap N_s(P^{k_G}(x_{k_G-1})) \right) \cup \{v_{\check{l}_{k_G-1}}^{k_G}\} \subseteq S.$$

چون $F_{l_{k_G-1}}^{k_G}$ - واحد یک K_t - واحد، $t \in \{2, 3, 4\}$ ، است، پس داریم:

$$\begin{aligned} \left| \left(N_G(v_{\check{l}_{k_G-1}}^{k_G}) \cap N_s(P^{k_G}(x_{k_G-1})) \right) \cup \{v_{\check{l}_{k_G-1}}^{k_G}\} \right| &= \left| V(F_{l_{k_G-1}}^{k_G}) \setminus \{v_{\check{l}_{k_G-2}}^{k_G}\} \right| \\ &= n(F_{l_{k_G-1}}^{k_G}) - 1. \end{aligned}$$

بنابراین، طبق نتیجه ۱.۳.۴، $v_{\check{l}_{k_G-2}}^{k_G} \notin S$ چون S پل $v_{\check{l}_{k_G-3}}^{k_G} v_{\check{l}_{k_G-2}}^{k_G}$ را می‌پوشاند، نتیجه می‌گیریم که $v_{\check{l}_{k_G-3}}^{k_G} \in S$ با ادامه این روند برای $N_G(v_{\check{l}_{l+1}}^{k_G}) \cap N_s(P^{k_G}(x_{k_G-1}))$ ، به طوری که $l \in [l_{k_G} - 2]$ ، نتیجه می‌گیریم که $v_{\check{l}_{l-1}}^{k_G} \in S$ پس $v_{\check{l}_{k_G-1}}^{k_G} = x_{k_G-1} \in S$ بنابراین، داریم:

$$I_{k_G-1}(x_{k_G-2}) \subseteq S. \quad (2.4)$$

برای هر $x_{k_G-2} \in I_{k_G-2}(x_{k_G-3})$ ، مسیر پل - متناوبی مانند:

$$P^{k_G-1}(x_{k_G-2}) : x_{k_G-2} = v_{\check{l}_1}^{k_G-1}, \dots, v_{\check{l}_{(k_G-1)+1}}^{k_G-1}$$

وجود دارد به طوری که $v_{\check{l}_l}^{k_G-1} v_{\check{l}_{l+1}}^{k_G-1}$ ، $l \in [l_{(k_G-1)}]$ ، یالی از $F_l^{k_G-1}$ - واحد است. رابطه (۲.۴) به همراه این حقیقت که $N_G(x) \subseteq S$ ، می‌رساند که:

$$N_s(P^{k_G-1}(x_{k_G-2})) \subseteq S.$$

در نتیجه داریم:

$$N_G[v_{\check{2}l(k_G-1)+1}^{k_G-1}] \cap N_s(P^{k_G-1}(x_{k_G-2})) \subseteq S.$$

$F_{l(k_G-1)}^{k_G-1}$ - واحد یک K_t - واحد، $t \in \{2, 3, 4\}$ ، است. پس داریم:

$$\begin{aligned} |N_G[v_{\check{2}l(k_G-1)+1}^{k_G-1}] \cap N_s(P^{k_G-1}(x_{k_G-2}))| &= |V(F_{l(k_G-1)}^{k_G-1}) \setminus \{v_{\check{2}l(k_G-1)}^{k_G-1}\}| \\ &= n(F_{l(k_G-1)}^{k_G-1}) - 1. \end{aligned}$$

بنابراین طبق نتیجه ۱.۳.۴، $v_{\check{2}l(k_G-1)}^{k_G-1} \notin S$. چون S پل $v_{\check{2}l(k_G-1)-1}^{k_G-1} v_{\check{2}l(k_G-1)}^{k_G-1}$ را می‌پوشاند، داریم $v_{\check{2}l(k_G-1)-1}^{k_G-1} \in S$. با ادامه این استدلال برای $N_G(v_{\check{2}l+1}^{k_G-1}) \cap N_s(P^{k_G-1}(x_{k_G-2}))$ ، $l \in [l(k_G-1) - 1]$ ، نتیجه می‌گیریم که $v_{\check{2}l-1}^{k_G-1} \in S$. بنابراین، $x_{k_G-2} = v_{\check{2}l-1}^{k_G-1} \in S$. در نتیجه داریم:

$$I_{k_G-2}(x_{k_G-3}) \subseteq S. \quad (3.4)$$

یک استدلال، مشابه استدلالی که برای اثبات روابط (۱.۴)، (۲.۴) و (۳.۴) به کار گرفته شد، نتیجه می‌دهد که برای هر $k \in [k_G - 1]$ ، داریم $I_{k_G-k}(x_{k_G-(k+1)}) \subseteq S$. بنابراین $k = k_G - 1$ نتیجه می‌دهد که $I_1(x_0) \subseteq S$. همان‌طور که ادعا شده بود. \square

طبق گام ۱ از فرآیند A ، مسیر پل-افزوده $v_0^1, \dots, v_{\check{2}l_1+1}^1$ ، $x_0 = v_0^1$ ، موجود است به طوری که $v_{\check{2}l}^1 v_{\check{2}l+1}^1$ ، $0 \leq l \leq l_1$ ، یالی از یک F_l^1 - واحد است. ادعای ۱.۴.۴ به همراه این حقیقت که $N_G(x) \subseteq S$ ، نتیجه می‌دهد که $N_s(P^1(x_0)) \subseteq S$. چون F_0^1 - واحد یک K_t - واحد است، $t \in \{2, 3, 4\}$ ، پس $V(F_0^1) = N_G[v_0^1]$. بنابراین طبق تعریف $N_s(P^1(x_0))$ ، داریم:

$$V(F_0^1) \setminus \{v_0^1\} = N_G[v_0^1] \cap N_s(P^1(x_0)) \subseteq S. \quad (4.4)$$

مشابه اثبات ادعای ۱.۴.۴، می‌توان دید که برای $l \in [l_1]$ ، $v_{\check{2}l-1}^1 \in S$ پس $v_{\check{2}l}^1 \in S$. این مطلب به همراه رابطه (۴.۴) نتیجه می‌دهد که $V(F_0^1) \subseteq S$ ، که با نتیجه ۱.۳.۴ در تناقض است. بنابراین، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. به عبارت دیگر،

اگر $G \in \mathcal{H}_{i,j}$ به طوری که $j \in \{1, 2, 5\}$ و $(i, j) \notin \{(1, 5), (2, 2), (2, 5), (3, 2), (3, 5)\}$ ، آنگاه هیچ $\tau(G_0)$ - مجموعه‌ای اعضای $E(G)$ را پوشش نمی‌دهد.

حالت II. فرض کنید به ازای برخی از مقادیر $j \in \{3, 4\}$ که $(i, j) \neq (1, 4)$ ، $G \in \mathcal{H}_{i,j}$. با توجه به تناقضی که در حالت I اتفاق افتاد، می‌توان فرض کرد که G توسط فرآیند C به دست آمده است. گام‌های $2, \dots, k_G$ از فرآیند C همانند گام‌های فرآیند A هستند. بنابراین، ادعای ۱.۴.۴ در این حالت نیز برقرار است. پس داریم $I_1(x_0) \subseteq S$. بنابراین، برای یک رأس x_0 در یک F - واحد، $F \in \{C_5, K_4^*\}$ ، داریم $N_G[x_0] \cap V(F) \subseteq S$. این مطلب با مشاهده ۱.۳.۴ در تناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. به عبارت دیگر، اگر $G \in \mathcal{H}_{i,j}$ به طوری که $j \in \{3, 4\}$ و $(i, j) \neq (1, 4)$ ، هیچ $\tau(G_0)$ - مجموعه‌ای اعضای $E(G)$ را نمی‌پوشاند. نتیجه می‌گیریم که $\tau(G) = 1 + \tau(G_0)$. طبق نتیجه ۱.۳.۲، داریم:

$$\begin{aligned} \tau(G) &= 1 + \tau(G_0) \\ &= 1 + \frac{1}{3}(n-1) + \frac{1}{4}(m - \Delta(G)) + \frac{i}{12} \\ &= \frac{1}{3}n + \frac{1}{4}(m - \Delta(G)) + \frac{1}{12}(\lambda + i), \end{aligned}$$

و این همان کران مورد نظر است. بنابراین، برهان این قسمت از قضیه کامل می‌شود. حال فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه n و اندازه m باشد که دارای رأس غیربرشی x با ماکسیمم درجه است. همچنین، فرض کنید:

$$\tau(G) = \frac{1}{3}n + \frac{1}{4}(m - \Delta(G)) + \frac{1}{12}(\lambda + i), \quad (5.4)$$

که $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. نشان خواهیم داد که $G \in \mathcal{H}_i$. قرار دهید $G_0 = G - x$. پس G_0 گرافی همبند از مرتبه $n-1$ و اندازه $m - \Delta(G)$ است. فرض کنید $G_0 \notin \mathcal{G}$. پس، طبق

نتیجه ۱.۳.۲، داریم:

$$\begin{aligned}\tau(G) &\leq 1 + \tau(G_0) \\ &< 1 + \frac{1}{3}(n-1) + \frac{1}{4}(m - \Delta(G)) \\ &= \frac{1}{3}n + \frac{1}{4}(m - \Delta(G)) + \frac{2}{3},\end{aligned}$$

که یک تناقض است، چون طبق رابطه (۵.۴)، داریم:

$$\tau(G) \geq \frac{1}{3}n + \frac{1}{4}(m - \Delta(G)) + \frac{2}{3}.$$

در نتیجه، $G_0 \in \mathcal{G}$. بنابراین، عدد صحیح $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ موجود است به طوری که $G_0 \in \mathcal{G}_j$.

ادعا ۲.۴.۴. هیچ $-\tau(G_0)$ مجموعه‌ای اعضای $E(G)$ را به طور کامل نمی‌پوشاند.

برهان. اگر یک $-\tau(G_0)$ مجموعه باشد که اعضای $E(G)$ را بی‌پوشاند، آنگاه $\tau(G) = \tau(G_0)$. طبق نتیجه ۱.۳.۲، داریم:

$$\begin{aligned}\tau(G) = \tau(G_0) &= \frac{1}{3}(n-1) + \frac{1}{4}(m - \Delta(G)) + \frac{j}{12} \\ &= \frac{1}{3}n + \frac{1}{4}(m - \Delta(G)) + \frac{1}{12}(j-4).\end{aligned}$$

این نتیجه به همراه رابطه (۵.۴) می‌رساند که $j - i = 12$. این تساوی نیز غیرممکن است، چون $j - i \leq 3$. بنابراین هیچ $-\tau(G_0)$ مجموعه‌ای اعضای $E(G)$ را به طور کامل نمی‌پوشاند. \square

طبق ادعای ۲.۴.۴ و نتیجه ۱.۳.۲، داریم:

$$\tau(G) = 1 + \tau(G_0) = \frac{1}{3}n + \frac{1}{4}(m - \Delta(G)) + \frac{1}{12}(8 + j).$$

بنابراین، $i = j$ ، یعنی $G_0 \in \mathcal{G}_i$.

اکنون نشان می‌دهیم که عدد صحیح k_G وجود دارد به طوری که G از گراف G_0 با گام‌های $1, 2, \dots, k_G$ و توسط یکی از فرآیندهای A ، B و C به دست آمده است. فرض

کنید S یک $\tau(G_0)$ -مجموعه باشد به طوری که دارای بیشترین تعداد رأس از $N_G(x)$ در گراف G است. طبق ادعای ۲.۴.۴، S اعضای $E(G)$ را به طور کامل نمی‌پوشاند. بنابراین، $N_G(x) \setminus S \neq \emptyset$. فرض کنید $v_0 \in N_G(x) \setminus S$. همچنین فرض کنید v_0 رأسی از یک F_0^1 -واحد باشد. چون F_0^1 -واحد گرافی همبند از مرتبه حداقل دو است، پس $N_G(v_0) \cap V(F_0^1) \neq \emptyset$. همچنین، داریم:

$$N_G(v_0) \cap V(F_0^1) \subseteq S, \quad (6.4)$$

چون S اعضای $E(G_0)$ را می‌پوشاند و $v_0 \notin S$. برای هر $v \in N_G(v_0) \cap V(F_0^1)$ ، قرار دهید $S_v^{v_0} = (S \setminus \{v\}) \cup \{v_0\}$.

ادعا ۳.۴.۴. برای هر رأس $v \in N_G(v_0) \cap V(F_0^1)$ ، داریم $N_G(v) \setminus S_v^{v_0} \neq \emptyset$.

برهان. فرض کنید رأس $v \in N_G(v_0) \cap V(F_0^1)$ موجود باشد به طوری که $N_G(v) \setminus S_v^{v_0} = \emptyset$. در نتیجه، $v \notin N_G(x)$ و $S_v^{v_0}$ اعضای $E(G_0)$ را می‌پوشاند. از طرفی برای هر رأس $v \in N_G(v_0) \cap V(F_0^1)$ ، داریم $|S_v^{v_0}| = |S| = \tau(G_0)$. پس $S_v^{v_0}$ یک $\tau(G_0)$ -مجموعه است که دارای تعداد رأس بیشتری از $N_G(x)$ به نسبت مجموعه S است. این مطلب با انتخاب S در تناقض است. بنابراین، فرض خلف باطل و ادعا ثابت می‌شود. \square

بنا بر ادعای ۳.۴.۴، برای هر رأس $v \in N_G(v_0) \cap V(F_0^1)$ ، v با x مجاور است یا $S_v^{v_0}$ همه اعضای $E(G_0)$ را نمی‌پوشاند. به عبارت دیگر، هر رأس $v \in N_G(v_0) \cap V(F_0^1)$ یا با x مجاور است یا با رأسی در $V(G_0) \setminus S_v^{v_0}$.

قرار دهید $I_{v_0} = (N_G(v_0) \cap V(F_0^1)) \setminus N_G(x)$. فرض کنید $I_{v_0} = \emptyset$. در نتیجه، داریم:

$$N_G[v_0] \cap V(F_0^1) \subseteq N_G(x). \quad (7.4)$$

فرض کنید F_0^1 -واحد یک K_t -واحد، $t \in \{2, 3, 4\}$ ، باشد. در این صورت، یال $v_0 v_1$ که $v_1 \in N_G(v_0) \cap V(F_0^1)$ ، یک مسیر پل-افزوده $P^1(v_0)$ به طول ۱ است. همچنین، طبق (۷.۴)، نتیجه می‌گیریم:

$$N_s(P^1(v_0)) = V(F_0^1) = N_G[v_0] \cap V(F_0^1) \subseteq N_G(x).$$

پس G توسط گام ۱ از فرآیند A یا فرآیند B به دست آمده است. اگر $F^1 \in \{C_5, K_4^*\}$ ، آنگاه طبق رابطه (۷.۴)، G توسط گام ۱ از فرآیند C به دست آمده است. بنابراین، $G \in \mathcal{H}_i$ و اثبات قضیه کامل می‌شود.

در ادامه فرض کنید که $I_{v_0} \neq \emptyset$. اکنون براساس مقدار j که $G_0 \in \mathcal{G}_{i,j}$ ، دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت ۱. فرض کنید $G_0 \in \mathcal{G}_{i,j}$ که $j \in \{1, 2, 5\}$ و

$$(i, j) \notin \{(1, 5), (2, 2), (2, 5), (3, 2), (3, 5)\}.$$

پس G_0 تنها دارای K_t - واحد، $t \in \{2, 3, 4\}$ است. طبق ادعای ۳.۴.۴، برای هر رأس $v \in I_{v_0}$ ، رأس w موجود است به طوری که $w \in N_{G_0}(v) \setminus S_v^{v_0}$.

ادعا ۴.۴.۴. برای هر رأس $v \in I_{v_0}$ و $w \in N_{G_0}(v) \setminus S_v^{v_0}$ ، یال vw پلی از G_0 است.

برهان. به کمک برهان خلف این ادعا را اثبات می‌کنیم. فرض کنید رأس $v \in I_{v_0}$ و رأس $w \in N_{G_0}(v) \setminus S_v^{v_0}$ موجود باشند به طوری که یال vw پل نباشد. پس $w \in V(F_0^1)$. چون F_0^1 - واحد یک K_t - واحد است، $t \in \{2, 3, 4\}$ داریم:

$$N_G(v_0^1) \cap V(F_0^1) = V(F_0^1) \setminus \{v_0^1\}.$$

در نتیجه، طبق رابطه (۶.۴)، $V(F_0^1) \setminus \{v_0^1\} \subseteq S$. بنابراین طبق تعریف $S_v^{v_0}$ ، داریم $V(F_0^1) \setminus \{v_0^1\} \subseteq S_v^{v_0}$. پس $w \in S_v^{v_0}$ ، که یک تناقض است. بنابراین، برای هر $v \in I_{v_0}$ و هر $w \in N_{G_0}(v) \setminus S_v^{v_0}$ ، داریم $w \notin V(F_0^1)$. بنابراین، vw پلی از G_0 است. \square

برای هر رأس $v \in I_{v_0}$ داریم $S \setminus \{v\} \subseteq S_v^{v_0}$. همچنین، S اعضای $E(G_0)$ را می‌پوشاند. در نتیجه، $S_v^{v_0}$ اعضای $E(G_0) \setminus \{vw \mid w \in N_{G_0}(v) \setminus S_v^{v_0}\}$ را می‌پوشاند. بنابراین، برای هر رأس $w \in N_{G_0}(v) \setminus S_v^{v_0}$ در یک F - واحد، داریم $N_G(w) \cap V(F) \subseteq S_v^{v_0}$. چون هر واحد گرافی همبند از مرتبه حداقل دو است، داریم $N_G(w) \cap V(F) \neq \emptyset$. برای هر رأس $w \in N_{G_0}(v) \setminus S_v^{v_0}$ یک رأس $v_w \in N_G(w) \cap V(F)$ انتخاب کنید، سپس قرار دهید:

$$A = \{v_w \mid w \in N_{G_0}(v) \setminus S_v^{v_0}\},$$

$$S_{vw}^w = (S_v^{v_0} \setminus \{v_w\}) \cup \{w\},$$

و

$$S_A = \left(\bigcap_w S_{vw}^w \right) \cup \{w \mid w \in N_G(v) \setminus S_v^{v_0}\}.$$

ادعا ۵.۴.۴. برای هر رأس $v \in I_{v_0}$ ، رأس $w \in N_G(v) \setminus S_v^{v_0}$ در یک F –واحد وجود دارد به طوری که به ازای هر رأس $z \in N_G(w) \cap V(F)$ ، $N_G(z) \setminus S_z^w \neq \emptyset$.

برهان. به کمک برهان خلف این ادعا را اثبات می‌کنیم. فرض کنید v رأسی دلخواه در I_{v_0} باشد. همچنین فرض کنید که برای هر $w \in N_G(v) \setminus S_v^{v_0}$ در یک F –واحد، رأس $v_w \in N_G(w) \cap V(F)$ وجود دارد به طوری که $N_G(v_w) \setminus S_{v_w}^w = \emptyset$. بنابراین، برای هر $w \in N_G(v) \setminus S_v^{v_0}$ ، داریم $v_w \notin N_G(x)$ و S_A اعضای $E(G_0)$ را می‌پوشاند. از طرف دیگر، $|S_A| = |S_v^{v_0}| = \tau(G_0)$. بنابراین، S_A یک $\tau(G_0)$ –مجموعه است. از طرفی $v_0 \notin S$ و $v_0 \in S_A$ پس S_A یک $\tau(G_0)$ –مجموعه است که دارای تعداد بیشتری رأس از $N_G(x)$ است. این مطلب با انتخاب S در تناقض است. پس رأس $w \in N_G(v) \setminus S_v^{v_0}$ در یک F –واحد موجود است به طوری که هر رأس $z \in N_G(w) \cap V(F)$ با رأس x یا با رأسی در $V(G_0) \setminus S_z^w$ مجاور است. بنابراین، برای هر $w \in N_G(v) \setminus S_v^{v_0}$ و هر $z \in N_G(w) \cap V(F)$ ، داریم $N_G(z) \setminus S_z^w \neq \emptyset$. \square

فرض کنید v_1 رأسی از I_{v_0} باشد. طبق ادعای ۵.۴.۴، رأس $v_1 \in N_G(v_1) \setminus S_{v_1}^{v_0}$ در یک F_1 –واحد موجود است به طوری که برای هر رأس $v \in N_G(v_1) \cap V(F_1)$ ، داریم $N_G(v) \setminus S_v^{v_1} \neq \emptyset$.

قرار دهید $I_{v_1} = (N_G(v_1) \cap V(F_1)) \setminus N_G(x)$. فرض کنید $I_{v_1} = \emptyset$. چون F_1 –واحد گرافی همبند از مرتبه حداقل دو است، داریم $N_G(v_1) \cap V(F_1) \neq \emptyset$. طبق ادعای ۴.۴.۴، مسیر $P^1(v_0) : v_0, v_1, v_1, v, v$ ، یک مسیر پل افزوده است. قرار دهید $I_1(v_0) = (I_{v_0} \cup I_{v_1}) \setminus \{v_1\}$. به وضوح، داریم $I_1(v_0) = N_s(P^1(v_0)) \setminus N_G(x)$.

اگر $I_1(v_1) = \emptyset$ ، آنگاه $G \in \mathcal{H}_{i,j}$ به طوری که $j \in \{1, 2, 5\}$ و

$$(i, j) \notin \{(1, 5), (2, 2), (2, 5), (3, 2), (3, 5)\},$$

و G توسط گام ۱ از فرآیند A به دست آمده است. بنابراین، $G \in \mathcal{H}_i$ و اثبات قضیه کامل می شود.

فرض کنید $I_1(v_1) \neq \emptyset$. در این صورت چون $I_{v_1} = \emptyset$ ، پس برای هر رأس $v_1^2 \in I_1(v_1)$ داریم $v_1^2 \in I_{v_1} \setminus \{v_1\}$. طبق ادعای ۳.۴.۴، v_1^2 با یک رأس $w \in V(G_0) \setminus S_{v_1}^{v_1^2}$ مجاور است. طبق ادعای ۴.۴.۴، $v_1^2 w$ پلی از G_0 است. طبق ادعای ۵.۴.۴، رأس $v_1^2 \in N_G(v_1^2) \setminus S_{v_1^2}^{v_1^2}$ در یک F_1^2 - واحد وجود دارد به طوری که برای هر رأس $v \in N_G(v_1^2) \cap V(F_1^2)$ داریم $N_G(v) \setminus S_v^{v_1^2} \neq \emptyset$. قرار دهید $I_{v_1^2} = (N_G(v_1^2) \cap V(F_1^2)) \setminus N_G(x)$. این استدلال با بحث روی ادامه خواهد یافت.

اگر $I_{v_1^2} \neq \emptyset$ ، از آنجا که G یک گراف متناهی است، پس عدد صحیح $l_2 \geq 1$ وجود دارد به طوری که $I_{v_1^{l_2}} = \emptyset$. در این صورت، مسیر $P^2(v_1^2) : v_1^2, \dots, v_1^{l_2+1}$ یک مسیر پل - متناوب در G_0 است. قرار دهید:

$$I_2(v_1^2) = \cup_{i=1}^{l_2} I_{v_1^i} \setminus \{v_1^2, v_1^3, \dots, v_1^{l_2-1}\}.$$

به وضوح، $I_2(v_1^2) = N_s(P^2(v_1^2)) \setminus N_G(x)$. اگر برای یک رأس $v_1^2 \in I_1(v_1)$ ، $I_2(v_1^2) \neq \emptyset$ ، آنگاه مانند روند به دست آوردن مسیر $P^2(v_1^2)$ با شروع از هر رأس $v_1^3 \in I_2(v_1^2)$ ادامه دهید. چون G_0 یک گراف متناهی است، پس عدد صحیح k_G وجود دارد به طوری که برای هر $v_1^{k_G} \in I_{k_G-1}(v_1^{k_G-1})$ داریم:

$$N_s(P^{k_G}(v_1^{k_G})) \subseteq N_G(x).$$

در نتیجه، $G \in \mathcal{H}_{i,j}$ به طوری که $j \in \{1, 2, 5\}$ ،

$$(i, j) \notin \{(1, 5), (2, 2), (2, 5), (3, 2), (3, 5)\},$$

و G توسط گام ۱ از فرآیند A به دست آمده است. بنابراین، $G \in \mathcal{H}_i$ و اثبات قضیه کامل می شود.

در ادامه فرض کنید که $I_{v_t} \neq \emptyset$. مشابه ادعای ۳.۴.۴، برای هر رأس $v_t \in I_{v_t}$ ، $N_{G_0}(v_t) \setminus S_{v_t}^{v_t} \neq \emptyset$. چون F_t^1 - واحد یک K_t - واحد است، $t \in \{2, 3, 4\}$ ، مشابه ادعای ۴.۴.۴، برای هر $w \in N_{G_0}(v_t) \setminus S_{v_t}^{v_t}$ ، یال wv_t پلی در G_0 است. مشابه اثبات ادعای ۵.۴.۴، رأس $v_t \in N_G(v_t) \setminus S_{v_t}^{v_t}$ در یک F_t^1 - واحد موجود است به طوری که برای هر رأس $v \in N_G(v_t) \cap V(F_t^1) \setminus S_{v_t}^{v_t} \neq \emptyset$ داریم. قرار دهید:

$$I_{v_t} = (N_G(v_t) \cap V(F_t^1)) \setminus N_G(x).$$

این استدلال با بحث روی I_{v_t} ادامه خواهد یافت. اگر $I_{v_t} \neq \emptyset$ چون G_0 یک گراف متناهی است، عدد صحیح $l_1 \geq 2$ وجود دارد به طوری که برای $2 \leq l \leq l_1$ نتایج زیر را داریم:

$$S_{v_{l+1}}^{v_l} = (S_{v_{l-1}}^{v_{l-2}} \setminus \{v_{l+1}\}) \cup \{v_l\},$$

که $v_l \in N_{G_0}(v_{l-1}) \setminus S_{v_{l-1}}^{v_{l-2}}$ رأسی از یک F_l^1 - واحد است و $v_{l+1} \in N_G(v_l) \cap V(F_l^1)$. مشابه ادعای ۳.۴.۴ و ۴.۴.۴، برای $2 \leq l \leq l_1$ ، داریم:

ادعا ۶.۴.۴. برای هر رأس $v \in N_G(v_l) \cap V(F_l^1) \setminus S_{v_l}^{v_l} \neq \emptyset$ داریم.

ادعا ۷.۴.۴. یال wv_{l+1} پلی از G_0 است به طوری که $w \in N_{G_0}(v_{l+1}) \setminus S_{v_{l+1}}^{v_{l+1}}$.

برای $1 \leq l \leq l_1 - 2$ ، قرار دهید:

$$I_{v_l} = (N_G(v_l) \cap V(F_l^1)) \setminus N_G(x),$$

به طوری که $I_{v_{l_1}} \neq \emptyset$ و $I_{v_{l_1}} = \emptyset$. چون $F_{l_1}^1$ - واحد گرافی همبند از مرتبه حداقل دو است، پس نتیجه می‌گیریم $N_G(v_{l_1}) \cap V(F_{l_1}^1) \neq \emptyset$. طبق ادعای ۴.۴.۴ و ۷.۴.۴، مسیر $P^1(v_0) : v_0, v_1, \dots, v_{l_1+1}$ که $v_{l_1+1} \in N_G(v_{l_1}) \cap V(F_{l_1}^1)$ ، یک مسیر پل - افزوده در G_0 است. قرار دهید:

$$I_1(v_0) = \bigcup_{l=0}^{l_1} I_{v_l} \setminus \{v_1, v_2, \dots, v_{l_1-1}\}.$$

به وضوح، $I_1(v_0^1) = N_s(P^1(v_0^1)) \setminus N_G(x)$ ،

اگر $I_1(v_0^1) = \emptyset$ ، آنگاه $G \in \mathcal{H}_{i,j}$ که $j \in \{1, 2, 5\}$ و

$$(i, j) \notin \{(1, 5), (2, 2), (2, 5), (3, 2), (3, 5)\},$$

G توسط گام ۱ از فرآیند A به دست آمده است. بنابراین، $G \in \mathcal{H}_i$ و اثبات قضیه کامل می شود.

حال فرض کنید برای هر رأس $v_1^2 \in I_1(v_0^1) \neq \emptyset$ داریم. در این صورت، عدد صحیح $l \in \{0, \dots, l_1 - 1\}$ موجود است به طوری که $v_1^2 \in I_{v_{l+1}^2} \setminus \{v_{l+1}^2\}$. طبق ادعای ۶.۴.۴، v_1^2 با یک رأس $v_1^2 \in V(G_0) \setminus S_{v_1^2}^{v_1^2}$ مجاور است. طبق ادعای ۷.۴.۴، $v_1^2 v_1^2$ پلی از G_0 است. پس v_1^2 رأسی از یک F_1^2 -واحد است. مشابه روند به دست آوردن مسیر $P^1(v_0^1)$ با شروع از رأس $v_1^2 \in N_{G_0}(v_1^2) \setminus S_{v_1^2}^{v_1^2}$ ادامه دهید. بنابراین، عدد صحیح $l_2 \geq 1$ وجود دارد به طوری که $I_{v_{l_2}^2} = \emptyset$. پس مسیر $P^2(v_1^2) : v_1^2, \dots, v_{l_2+1}^2$ یک مسیر پل-افزوده در G_0 است. قرار دهید:

$$I_2(v_1^2) = \cup_{i=1}^{l_2} I_{v_i^2} \setminus \{v_1^2, v_2^2, \dots, v_{l_2-1}^2\}.$$

به وضوح، $I_2(v_1^2) = N_s(P^2(v_1^2)) \setminus N_G(x)$. اگر برای هر رأس $v_1^2 \in I_1(v_0^1)$ ، $I_2(v_1^2) = \emptyset$ ، آنگاه $G \in \mathcal{H}_{i,j}$ که $j \in \{1, 2, 5\}$ و $(i, j) \notin \{(1, 5), (2, 2), (2, 5), (3, 2), (3, 5)\}$ و توسط گام‌های ۱ و ۲ از فرآیند A به دست آمده است. بنابراین، $G \in \mathcal{H}_i$ و اثبات قضیه کامل می شود.

اگر برای یک رأس $v_1^2 \in I_1(v_0^1) \neq \emptyset$ ، آنگاه مانند روند به دست آوردن مسیر $P^2(v_1^2)$ با شروع از هر رأس $v_1^3 \in I_2(v_1^2)$ ادامه دهید. چون G_0 یک گراف متناهی است، پس عدد صحیح k_G موجود است به طوری که برای هر رأس $v_1^{k_G} \in I_{k_G-1}(v_1^{k_G})$ داریم $N_s(P^{k_G}(v_1^{k_G})) \subseteq N_G(x)$ پس $G \in \mathcal{H}_{i,j}$ به طوری که $j \in \{1, 2, 5\}$ و

$$(i, j) \notin \{(1, 5), (2, 2), (2, 5), (3, 2), (3, 5)\}$$

و G توسط گام‌های $1, \dots, k_G$ از فرآیند A به دست آمده است. بنابراین، $G \in \mathcal{H}_i$ و اثبات قضیه کامل می‌شود.

حالت ۲. فرض کنید $G \in \mathcal{G}_{i,j}$ به طوری که $j \in \{3, 4\}$ و $(i, j) \neq (1, 4)$. در ادامه، از استدلالی که برای به دست آوردن مسیر P^1, \dots, P^{k_G} در حالت ۱ استفاده شد، پیروی می‌کنیم. فرض کنید هر $F_l^k -$ واحد، $k \in [k_G]$ ، یک $K_t -$ واحد، $t \in \{2, 3, 4\}$ ، باشد. اگر $k = 1$ ، آنگاه $0 \leq l \leq l_1$. همچنین اگر $k \geq 2$ ، آنگاه $1 \leq l \leq l_k$. در این صورت مشابه روند پیش گرفته در حالت ۱ عمل می‌کنیم تا مسیرهای P^1, \dots, P^{k_G} را به دست آوریم. در نتیجه G توسط گام‌های $1, \dots, k_G$ از فرآیند B به دست آمده است. بنابراین، $G \in \mathcal{H}_{i,j}$ که $j \in \{3, 4\}$ و $(i, j) \neq (1, 4)$. به عبارت دیگر، $G \in \mathcal{H}_i$ و اثبات قضیه کامل می‌شود.

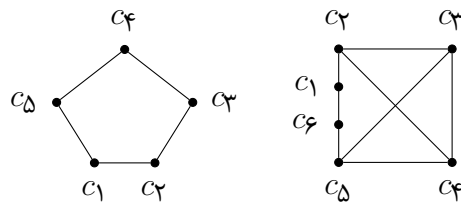
در ادامه فرض کنید اعداد صحیح $k \in [k_G]$ و $l \in \{0, \dots, l_k\}$ موجود هستند به طوری که $v_{\psi_l}^k \in V(F_l^k)$ ، که در آن $F_l^k \in \{C_\Delta, K_\Phi^*\}$. با استدلال استفاده شده در به دست آوردن مسیرهای P^k در حالت ۱، حقیقت زیر را داریم.

حقیقت ۱. اگر $k = 1$ ، آنگاه $v_{\psi_l}^k \in N_G(x)$ یا $v_{\psi_l}^k$ رأسی از یک مسیر پل-متناوب $P : v_{\psi_l}^1, v_{\psi_{l-1}}^1, \dots, v_0^1$ است به طوری که $v_{\psi_l}^1 v_{\psi_{l-1}}^1$ پلی از G_0 است و v_0^1 متعلق به یک $F_0^1 -$ واحد است. اگر $k \geq 2$ ، آنگاه $v_{\psi_l}^k$ رأسی از مسیر پل-متناوب $P : v_{\psi_l}^k, v_{\psi_{l-1}}^k, \dots, v_1^k, v_{\psi_t}^{k-1}$ است به طوری که $v_{\psi_l}^k \in I_{v_{\psi_t}^{k-1}} \setminus \{v_{\psi_{t+1}}^{k-1}\}$ ، پلی از G_0 است و $v_{\psi_t}^{k-1}$ متعلق به یک $F_t^{k-1} -$ واحد است.

مشابه اثبات ادعای ۳.۴.۴، برای هر رأس $z \in N_G(v_{\psi_l}^k) \cap V(F_l^k)$ نتیجه می‌گیریم $N_G(z) \setminus S_z^{v_{\psi_l}^k} \neq \emptyset$. فرض کنید $(N_G[v_{\psi_l}^k] \cap V(F_l^k)) \setminus N_G(x) = \emptyset$. در این صورت قرار دهید:

$$I_1(v_{\psi_l}^k) = (N_G[v_{\psi_l}^k] \cap V(F_l^k)) \setminus N_G(x).$$

در نتیجه، G توسط گام ۱ از فرآیند C به دست آمده است. بنابراین، $G \in \mathcal{H}_{i,j}$ به طوری که $j \in \{3, 4\}$ و $(i, j) \neq (1, 4)$. به عبارت دیگر، $G \in \mathcal{H}_i$ و اثبات قضیه کامل می‌شود.



شکل ۳.۴: برچسب‌دهی به رئوس یک K_4^* - واحد و یک C_5 - واحد.

در ادامه فرض کنید $(N_G[v_{\tau_l}^k] \cap V(F_l^k)) \setminus N_G(x) \neq \emptyset$. فرض کنید برای هر رأس $v \in (N_G(v_{\tau_l}^k) \cap V(F_l^k)) \setminus N_G(x)$ داریم $N_{G_0}(v) \setminus S_v^{v_{\tau_l}^k} \not\subseteq V(F_l^k)$. در این صورت به ازای هر رأس $v \in (N_G(v_{\tau_l}^k) \cap V(F_l^k)) \setminus N_G(x)$ رأس $w \in N_{G_0}(v) \setminus (V(F_l^k) \cup S_v^{v_{\tau_l}^k})$ وجود دارد، بنابراین vw پلی از G_0 است. چون $j \neq 5$ ، برای هر $v \in (N_G(v_{\tau_l}^k) \cap V(F_l^k)) \setminus N_G(x)$ مشابه استدلال به کار گرفته شده در به‌دست آوردن مسیرهای P^2, \dots, P^{k_G} در حالت ۱ عمل می‌کنیم. بنابراین طبق مشاهده ۲.۳.۴، در ادامه هر واحد یک K_t - واحد، $t \in \{2, 3, 4\}$ است. این مطلب به همراه حقیقت ۱ می‌رساند که G توسط گام‌های $1, \dots, k_G$ از فرآیند \mathcal{C} به‌دست آمده است. بنابراین، $G \in \mathcal{H}_{i,j}$ به طوری که $j \in \{3, 4\}$ و $(i, j) \neq (1, 4)$ ، یعنی $G \in \mathcal{H}_i$ و اثبات قضیه کامل می‌شود. بنابراین، اکنون فرض می‌کنیم که شرط زیر برقرار است.

(*) رأس $v \in (N_G(v_{\tau_l}^k) \cap V(F_l^k)) \setminus N_G(x)$ وجود دارد به طوری که

$$N_{G_0}(v) \setminus S_v^{v_{\tau_l}^k} \subseteq V(F_l^k).$$

می‌دانیم که $F_l^k \in \{C_5, K_4^*\}$. فرض کنید رئوس C_5 و K_4^* مانند شکل ۳.۴ برچسب‌دهی شده باشند.

فرض کنید که $F_l^k = C_5$. بدون کاستن از کلیت، فرض کنید که $v_{\tau_l}^k = c_1$ و $v = c_2$. طبق (*)، داریم $N_{G_0}(c_2) \setminus S_{c_2}^{c_1} \subseteq V(F_l^k)$ و $N_{G_0}(c_2) \setminus S_{c_2}^{c_1} \neq \emptyset$. همچنین داریم $N_{G_0}(c_2) \cap V(F_l^k) = \{c_1, c_2\}$. اما $c_1 \in S_{c_2}^{c_1}$ ، در نتیجه $c_2 \notin S_{c_2}^{c_1}$. بنابراین، $c_3 \notin S_{c_2}^{c_1}$. اما $c_3 \in S_{c_2}^{c_1}$ ، پس $c_4 \in S_{c_2}^{c_1}$. چون S یال c_2c_4 را می‌پوشاند، نتیجه می‌گیریم که $c_4 \in S$. پس $c_5 \in S_{c_2}^{c_1}$. از طرف دیگر، برای هر رأس $z \in N_G(c_1) \cap V(F_l^k) = \{c_2, c_5\}$ داریم $N_G(z) \setminus S_z^{c_1} \neq \emptyset$. چون

$\{c_1, c_4\} \subseteq S_{c_5}^{c_1}$ ، نتیجه می‌گیریم:

$$N_G(c_5) \setminus S_{c_5}^{c_1} \not\subseteq V(F_l^k). \quad (۸.۴)$$

فرض کنید $N_G(c_4) \setminus S \subseteq V(F_l^k)$. اکنون S را با مجموعه $S^* = (S \setminus \{c_4\}) \cup \{c_3\}$ جایگزین می‌کنیم. سپس اثبات را با این تبدیل ادامه می‌دهیم. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که $N_{G_0}(c_4) \setminus (S^*)_{c_4}^{c_1} \neq \emptyset$. چون $\{c_1, c_3\} \subseteq (S^*)_{c_4}^{c_1}$ ، داریم $N_{G_0}(c_4) \setminus (S^*)_{c_4}^{c_1} \not\subseteq V(F_l^k)$. این مطلب یک تناقض است، چون از $(S^*)_{c_4}^{c_1} = (S_{c_4}^{c_1} \setminus \{c_4\}) \cup \{c_3\}$ و $(*)$ ، نتیجه می‌گیریم که:

$$N_{G_0}(c_4) \setminus (S^*)_{c_4}^{c_1} \subseteq N_{G_0}(c_4) \setminus S_{c_4}^{c_1} \subseteq V(F_l^k).$$

بنابراین، داریم:

$$N_G(c_4) \setminus S \not\subseteq V(F_l^k). \quad (۹.۴)$$

قرار دهید $I_1(c_5) = N_G[c_5] \setminus N_G(x)$. اگر $I_1(c_5) = \emptyset$ ، آنگاه $G \in \mathcal{H}_i$ و G توسط گام ۱ از فرآیند \mathcal{C} به دست آمده است. بنابراین، اثبات کامل می‌شود. در ادامه، فرض کنید که $I_1(c_5) \neq \emptyset$. چون $j \neq 5$ و بنابراین طبق مشاهده ۲.۳.۴، در ادامه هر واحد یک $K_t -$ واحد است، که $t \in \{2, 3, 4\}$. پس طبق حقیقت ۱ و روابط (۸.۴) و (۹.۴)، می‌توان استدلال به دست آوردن مسیرهای P^2, \dots, P^{k_G} را در حالت ۱ به کار گرفت. پس نتیجه می‌گیریم G توسط گام‌های $1, \dots, k_G$ از فرآیند \mathcal{C} به دست آمده است. بنابراین، $G \in \mathcal{H}_{i,j}$ به طوری که $j \in \{3, 4\}$ و $(i, j) \neq (1, 4)$. به عبارت دیگر، $G \in \mathcal{H}_i$ و اثبات قضیه کامل می‌شود.

در ادامه فرض کنید که $F_l^k = K_{\neq}^*$. اکنون براساس این حالات که رأس $v_{\neq_l}^k$ ، یک رأس مقسم از K_{\neq}^* هست یا خیر، برهان را ادامه خواهیم داد.

زیرحالت ۱.۲. فرض کنید $v_{\neq_l}^k$ یک رأس مقسم در K_{\neq}^* باشد. اکنون فرض کنید رأس v ، رأس شرح داده شده در $(*)$ باشد. فرض کنید که v یک رأس مقسم نباشد. بدون کاستن از کلیت، می‌توان فرض کرد $v_{\neq_l}^k = c_1$ و $v = c_2$. طبق $(*)$ ، $N_{G_0}(c_2) \setminus S_{c_2}^{c_1} \neq \emptyset$.

و $N_{G_0}(c_2) \setminus S_{\alpha_2}^{c_1} \subseteq V(F_l^k)$. همچنین، داریم $N_{G_0}(c_2) \cap V(F_l^k) = \{c_1, \alpha_3, \alpha_4\}$. اما $c_1 \in S_{\alpha_2}^{c_1}$ پس $\{\alpha_3, \alpha_4\} \not\subseteq S_{\alpha_2}^{c_1}$. بدون کاستن از کلیت، فرض کنید که $\alpha_3 \notin S_{\alpha_2}^{c_1}$. در نتیجه $\alpha_3 \notin S$. چون S یال‌های $\alpha_3 c_5$ و $\alpha_3 c_4$ را می‌پوشاند، پس $\{c_4, c_5\} \subseteq S$. در نتیجه، داریم $c_5 \in S_{\alpha_2}^{c_1}$. از طرف دیگر، برای هر رأس $z \in N_G(c_1) \cap V(F_l^k) = \{c_2, c_6\}$ داریم $N_G(z) \setminus S_z^{c_1} \neq \emptyset$ چون $c_5 \in S_{\alpha_2}^{c_1}$ ، نتیجه می‌گیریم:

$$N_G(c_6) \setminus S_{\alpha_2}^{c_1} \not\subseteq V(F_l^k). \quad (10.4)$$

فرض کنید که $N_G(c_5) \setminus S \subseteq V(F_l^k)$. اکنون S را با $S^* = (S \setminus \{c_5\}) \cup \{\alpha_3\}$ جایگزین می‌کنیم و اثبات را با این تبدیل ادامه می‌دهیم. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که:

$$N_{G_0}(c_2) \setminus (S^*)_{\alpha_2}^{c_1} \neq \emptyset.$$

چون $\alpha_3 \in (S^*)_{\alpha_2}^{c_1}$ ، داریم $N_{G_0}(c_2) \setminus (S^*)_{\alpha_2}^{c_1} \not\subseteq V(F_l^k)$. این مطلب یک تناقض است، چون طبق $(S^*)_{\alpha_2}^{c_1} = (S_{\alpha_2}^{c_1} \setminus \{\alpha_4\}) \cup \{\alpha_3\}$ و $(*)$ ، داریم:

$$N_{G_0}(c_2) \setminus (S^*)_{\alpha_2}^{c_1} \subseteq N_{G_0}(c_2) \setminus S_{\alpha_2}^{c_1} \subseteq V(F_l^k).$$

بنابراین،

$$N_G(c_5) \setminus S \not\subseteq V(F_l^k). \quad (11.4)$$

قرار دهید $I_1(c_6) = N_G[c_6] \setminus N_G(x)$. اگر $I_1(c_6) = \emptyset$ ، آنگاه $G \in \mathcal{H}_i$ و G توسط گام ۱ از فرآیند \mathcal{C} به دست آمده است. پس اثبات کامل می‌شود. بنابراین، فرض کنید $I_1(c_6) \neq \emptyset$. چون $j \neq 5$ ، طبق مشاهده ۲.۳.۴، در ادامه هر واحد یک K_i -واحد است، که $t \in \{2, 3, 4\}$. پس طبق حقیقت ۱ و روابط (۱۰.۴) و (۱۱.۴)، می‌توان از استدلال به دست آوردن مسیرهای P^2, \dots, P^{k_G} در حالت ۱ استفاده کرد. در نتیجه $G \in \mathcal{H}_i$ و G توسط گام‌های $1, \dots, k_G$ از فرآیند \mathcal{C} به دست آمده است. بنابراین، اثبات قضیه کامل می‌شود.

در ادامه فرض کنید که v یک رأس مقسم باشد. بدون کاستن از کلیت، می‌توان فرض کرد $v = c_6$ و $v_{\alpha_1}^k = c_1$. از (*) نتیجه می‌گیریم که $N_{G_0}(c_6) \setminus S_{c_6}^{c_1} \neq \emptyset$ و همچنین $N_{G_0}(c_6) \setminus S_{c_6}^{c_1} \subseteq V(F_l^k)$. از طرفی داریم $N_{G_0}(c_6) \cap V(F_l^k) = \{c_1, c_5\}$ اما $c_1 \in S_{c_6}^{c_1}$ پس $c_5 \notin S_{c_6}^{c_1}$. در نتیجه $c_5 \notin S$. بنابراین، $\{\alpha_3, c_4\} \subseteq S$ ، چون S یال‌های $\alpha_3 c_5$ و $\alpha_4 c_5$ را می‌پوشاند. پس $\{\alpha_3, c_4\} \subseteq S_{\alpha_3}^{c_1}$. از طرف دیگر، برای هر رأس z به‌طوری‌که $N_G(z) \setminus S_z^{c_1} \neq \emptyset$ داریم $z \in N_G(c_1) \cap V(F_l^k) = \{c_2, c_6\}$ چون $c_6 \in S_{c_6}^{c_1}$ ، داریم:

$$N_G(c_2) \setminus S_{c_2}^{c_1} \not\subseteq V(F_l^k). \quad (12.4)$$

فرض کنید $t \in \{3, 4\}$ موجود باشد به‌طوری‌که $N_G(c_t) \setminus S \subseteq V(F_l^k)$. اکنون S را با $S^* = (S \setminus \{c_t\}) \cup \{c_5\}$ جایگزین می‌کنیم و اثبات را با این تبدیل ادامه می‌دهیم. بنابراین، نتیجه می‌گیریم $N_{G_0}(c_6) \setminus (S^*)_{c_6}^{c_1} \neq \emptyset$ چون $c_5 \in (S^*)_{c_6}^{c_1}$ ، داریم:

$$N_{G_0}(c_6) \setminus (S^*)_{c_6}^{c_1} \not\subseteq V(F_l^k).$$

این مطلب یک تناقض است، چون طبق $(S^*)_{c_6}^{c_1} = (S_{c_6}^{c_1} \setminus \{c_t\}) \cup \{c_5\}$ و (*) داریم:

$$N_{G_0}(c_6) \setminus (S^*)_{c_6}^{c_1} \subseteq N_{G_0}(c_6) \setminus S_{c_6}^{c_1} \subseteq V(F_l^k).$$

پس به ازای $t \in \{3, 4\}$ ، داریم:

$$N_G(c_t) \setminus S \not\subseteq V(F_l^k). \quad (13.4)$$

قرار دهید $I_1(c_\alpha) = N_G[c_\alpha] \setminus N_G(x)$. اگر $I_1(c_\alpha) = \emptyset$ ، آنگاه $G \in \mathcal{H}_i$ و G توسط گام ۱ از فرآیند \mathcal{C} به‌دست آمده است. پس اثبات کامل می‌شود. بنابراین، فرض کنید که $I_1(c_\alpha) \neq \emptyset$. چون $5 \neq j$ ، طبق مشاهده ۲.۳.۴، در ادامه هر واحد یک K_t - واحد است، که $t \in \{2, 3, 4\}$. پس طبق حقیقت ۱ و روابط (۱۲.۴) و (۱۳.۴)، می‌توان استدلال به‌دست آوردن مسیرهای P^2, \dots, P^{k_G} را مانند حالت ۱ به‌کار گرفت. بنابراین، $G \in \mathcal{H}_i$ و G از گام‌های $1, \dots, k_G$ از فرآیند \mathcal{C} به‌دست آمده است و اثبات قضیه کامل می‌شود.

زیرحالت ۲.۲. فرض کنید $v_{\alpha_l}^k$ یک رأس غیر-مقسم از K_{α}^* باشد. فرض کنید که $v_{\alpha_l}^k$ دارای یک همسایه مقسم باشد. اکنون براساس حالتی که رأس v ، شرح داده شده در (*)، یک رأس مقسم باشد یا خیر به بحث ادامه می‌دهیم. ابتدا فرض کنید که v یک رأس مقسم نباشد. بدون کاستن از کلیت، می‌توان فرض کرد $v_{\alpha_l}^k = \alpha$ و $v = \alpha$. طبق (*)، داریم $N_{G_0}(\alpha) \setminus S_{\alpha}^{\alpha} \neq \emptyset$ و $N_{G_0}(\alpha) \setminus S_{\alpha}^{\alpha} \subseteq V(F_l^k)$. همچنین داریم $N_{G_0}(\alpha) \cap V(F_l^k) = \{\alpha, \alpha_4, \alpha_5\}$ اما $\alpha \in S_{\alpha}^{\alpha}$. اگر $\alpha_4 \notin S_{\alpha}^{\alpha}$ ، آنگاه $\alpha_4 \notin S$. اما $\alpha_4 \notin S$ که یک تناقض است، چون S یال $\alpha_2\alpha_4$ را می‌پوشاند. بنابراین، $\alpha_4 \in S_{\alpha}^{\alpha}$. در این صورت داریم $\alpha_5 \notin S_{\alpha}^{\alpha}$. در نتیجه $\alpha_5 \notin S$. پس $\alpha_6 \in S$ ، چون S یال $\alpha_5\alpha_6$ را می‌پوشاند. در نتیجه $\alpha_6 \in S_{\alpha_1}^{\alpha_1}$. از طرف دیگر، برای هر رأس $z \in N_G(\alpha_2) \cap V(F_l^k) = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$ ، داریم $N_G(z) \setminus S_z^{\alpha} \neq \emptyset$. چون $\alpha_6 \in S_{\alpha_1}^{\alpha_1}$ ، نتیجه می‌گیریم:

$$N_G(\alpha_1) \setminus S_{\alpha_1}^{\alpha_1} \not\subseteq V(F_l^k). \quad (14.4)$$

فرض کنید $N_G(\alpha_6) \setminus S \subseteq V(F_l^k)$. اکنون S را با $S^* = (S \setminus \{\alpha_6\}) \cup \{\alpha_5\}$ جایگزین می‌کنیم و اثبات را با این تبدیل ادامه می‌دهیم. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که:

$$N_{G_0}(\alpha_3) \setminus (S^*)_{\alpha_3}^{\alpha_3} \neq \emptyset.$$

چون $\alpha_5 \in (S^*)_{\alpha_3}^{\alpha_3}$ ، داریم:

$$N_{G_0}(\alpha_3) \setminus (S^*)_{\alpha_3}^{\alpha_3} \not\subseteq V(F_l^k).$$

این مطلب یک تناقض است، چون طبق $(S^*)_{\alpha_3}^{\alpha_3} = (S_{\alpha_3}^{\alpha_3} \setminus \{\alpha_6\}) \cup \{\alpha_5\}$ و (*)، نتیجه می‌گیریم:

$$N_{G_0}(\alpha_3) \setminus (S^*)_{\alpha_3}^{\alpha_3} \subseteq N_{G_0}(\alpha_3) \setminus S_{\alpha_3}^{\alpha_3} \subseteq V(F_l^k).$$

پس داریم:

$$N_G(\alpha_6) \setminus S \not\subseteq V(F_l^k). \quad (15.4)$$

قرار دهید $I_1(c_1) = N_G[c_1] \setminus N_G(x)$. اگر $I_1(c_1) = \emptyset$ ، آنگاه $G \in \mathcal{H}_i$ و G توسط گام ۱ از فرآیند \mathcal{C} به دست آمده است. پس اثبات کامل می‌شود. بنابراین، فرض کنید که $I_1(c_1) \neq \emptyset$. چون $j \neq 5$ ، طبق مشاهده ۲.۳.۴، در ادامه هر واحد یک $K_t -$ واحد است، که $t \in \{2, 3, 4\}$. پس طبق حقیقت ۱ و روابط (۱۴.۴) و (۱۵.۴)، می‌توان استدلال به دست آوردن مسیرهای P^2, \dots, P^{k_G} را مانند حالت ۱ به کار گرفت. بنابراین، $G \in \mathcal{H}_i$ و G توسط گام‌های $1, \dots, k_G$ از فرآیند \mathcal{C} به دست آمده است و اثبات قضیه کامل می‌شود.

در ادامه فرض کنید که v یک رأس مقسم باشد. بدون کاستن از کلیت، می‌توان فرض کرد که $v_1^k = c_2$ و $v = c_1$. از (*) نتیجه می‌گیریم که $N_{G_0}(c_1) \setminus S_{c_1}^{c_2} \neq \emptyset$ و $N_{G_0}(c_1) \setminus S_{c_1}^{c_2} \subseteq V(F_l^k)$. همچنین داریم $N_{G_0}(c_1) \cap V(F_l^k) = \{c_2, c_6\}$. اما $c_2 \in S_{c_1}^{c_2}$ ، پس $c_6 \notin S_{c_1}^{c_2}$. نتیجه می‌گیریم که $c_6 \notin S$. بنابراین $c_5 \in S$ ، چون S یال $c_5 c_6$ را می‌پوشاند. پس به ازای $t \in \{3, 4\}$ ، داریم $c_5 \in S_{c_t}^{c_2}$ ، از طرف دیگر، برای هر رأس $z \in N_G(c_2) \cap V(F_l^k) = \{c_1, c_2, c_6\}$ ، چون $N_G(z) \setminus S_z^{c_2} \neq \emptyset$ ، داریم $\{c_2, c_3, c_5\} \subseteq S_{c_2}^{c_2}$ ، به ازای $t \in \{3, 4\}$ ، نتیجه می‌گیریم:

$$N_G(c_t) \setminus S_{c_t}^{c_2} \not\subseteq V(F_l^k). \quad (16.4)$$

فرض کنید که $N_G(c_5) \setminus S \subseteq V(F_l^k)$. اکنون S را با $S^* = (S \setminus \{c_5\}) \cup \{c_6\}$ جایگزین می‌کنیم و اثبات را با این تبدیل ادامه می‌دهیم. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که:

$$N_{G_0}(c_1) \setminus (S^*)_{c_1}^{c_2} \neq \emptyset.$$

چون $c_6 \in (S^*)_{c_1}^{c_2}$ ، داریم $N_{G_0}(c_1) \setminus (S^*)_{c_1}^{c_2} \not\subseteq V(F_l^k)$. این مطلب نیز تناقض است، چون طبق $(S^*)_{c_1}^{c_2} = (S_{c_1}^{c_2} \setminus \{c_5\}) \cup \{c_6\}$ و (*)، نتیجه می‌گیریم که:

$$N_{G_0}(c_1) \setminus (S^*)_{c_1}^{c_2} \subseteq N_{G_0}(c_1) \setminus S_{c_1}^{c_2} \subseteq V(F_l^k).$$

پس داریم:

$$N_G(c_5) \setminus S \not\subseteq V(F_l^k). \quad (17.4)$$

قرار دهید $I_1(\alpha_3) = N_G[\alpha_3] \setminus N_G(x)$. اگر $I_1(\alpha_3) = \emptyset$ ، آنگاه $G \in \mathcal{H}_i$ و G توسط گام ۱ از فرآیند \mathcal{C} به دست آمده است. پس اثبات کامل می‌شود. بنابراین، در ادامه فرض کنید $I_1(\alpha_3) \neq \emptyset$. چون $j \neq 5$ ، طبق مشاهده ۲.۳.۴، در ادامه هر واحد یک K_t - واحد است، که $t \in \{2, 3, 4\}$. پس طبق حقیقت ۱ و روابط (۱۶.۴) و (۱۷.۴)، می‌توان استدلال به دست آوردن مسیرهای P^2, \dots, P^{k_G} را مانند حالت ۱ به کار برد. بنابراین، $G \in \mathcal{H}_i$ و G توسط گام‌های $1, \dots, k_G$ از فرآیند \mathcal{C} به دست آمده است و اثبات قضیه کامل می‌شود. تنها حالتی که باقی مانده است این است که رأس v_l^k دارای هیچ همسایه مقسمی نباشد. بدون کاستن از کلیت، فرض کنید $v_l^k = \alpha_3$. چون $\{c_2, c_5\} \subseteq S$ ، در نتیجه $\{c_2, c_5\} \subseteq S_{\alpha_3}^{\alpha_3}$. بنابراین،

$$N_G(c_2) \cap V(F_l^k) = \{c_2, \alpha_3, c_5\} \subseteq S_{\alpha_3}^{\alpha_3}.$$

پس نتیجه می‌گیریم که $N_G(c_2) \setminus S_{\alpha_3}^{\alpha_3} \not\subseteq V(F_l^k)$. بنابراین رأس v ، شرح داده شده در (*)، همسایه‌ای از α_3 است که یک رأس غیر-مقسم است اما دارای همسایه مقسم است. بدون کاستن از کلیت، فرض کنید که $v = c_2$. طبق (*)، داریم $N_{G_0}(c_2) \setminus S_{\alpha_3}^{\alpha_3} \neq \emptyset$. همچنین داریم $N_{G_0}(c_2) \cap V(F_l^k) = \{c_1, \alpha_3, c_2\}$ اما $N_{G_0}(c_2) \setminus S_{\alpha_3}^{\alpha_3} \subseteq V(F_l^k)$. پس $\{c_3, c_4\} \subseteq S_{\alpha_3}^{\alpha_3}$ ، در نتیجه $c_1 \notin S$. بدون کاستن از کلیت، فرض کنید که $v = c_2$. چون $\{c_4, c_6\} \subseteq S$ ، طبق (*)، داریم $\{c_4, c_6\} \subseteq S_{c_5}^{\alpha_3}$. از طرف دیگر، برای هر رأس $z \in N_G(\alpha_3) \cap V(F_l^k) = \{c_2, c_4, c_5\}$ ، داریم $N_G(z) \setminus S_z^{\alpha_3} \neq \emptyset$. چون $\{c_4, c_6\} \subseteq S_{c_5}^{\alpha_3}$ ، نتیجه می‌گیریم:

$$N_G(c_5) \setminus S_{c_5}^{\alpha_3} \not\subseteq V(F_l^k). \quad (18.4)$$

فرض کنید که $N_G(c_6) \setminus S \subseteq V(F_l^k)$. اکنون S را با $S^* = (S \setminus \{c_6\}) \cup \{c_1\}$ جایگزین می‌کنیم و اثبات را با این تبدیل ادامه می‌دهیم. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که:

$$N_{G_0}(c_2) \setminus (S^*)_{\alpha_3}^{\alpha_3} \neq \emptyset.$$

چون $c_1 \in (S^*)_{\alpha_1}^{\alpha}$ ، داریم $N_{G_0}(c_2) \setminus (S^*)_{\alpha_1}^{\alpha} \not\subseteq V(F_l^k)$. این مطلب یک تناقض است، چون طبق $(S^*)_{\alpha_1}^{\alpha} = (S_{\alpha_1}^{\alpha} \setminus \{c_6\}) \cup \{c_1\}$ و $(*)$ ، نتیجه می‌گیریم که:

$$N_{G_0}(c_2) \setminus (S^*)_{\alpha_1}^{\alpha} \subseteq N_{G_0}(c_2) \setminus S_{\alpha_1}^{\alpha} \subseteq V(F_l^k).$$

بنابراین، داریم:

$$N_G(c_6) \setminus S \not\subseteq V(F_l^k). \quad (19.4)$$

قرار دهید $I_1(c_5) = N_G[c_5] \setminus N_G(x)$. اگر $I_1(c_5) = \emptyset$ ، آنگاه $G \in \mathcal{H}_i$ و G توسط گام ۱ از فرآیند \mathcal{C} به دست آمده است. پس اثبات کامل می‌شود. بنابراین، در ادامه فرض کنید $I_1(c_5) \neq \emptyset$. چون $j \neq 5$ ، طبق مشاهده ۲.۳.۴، در ادامه هر واحد یک K_t - واحد است، که $t \in \{2, 3, 4\}$. پس طبق حقیقت ۱ و روابط (۱۸.۴) و (۱۹.۴)، می‌توان استدلال به دست آوردن مسیرهای P^2, \dots, P^{k_G} را مانند حالت ۱ به کار گرفت. بنابراین $G \in \mathcal{H}_i$ و G توسط گام‌های $1, \dots, k_G$ از فرآیند \mathcal{C} به دست آمده است و اثبات قضیه کامل می‌شود.

فصل ۵

عدد ترنسورسال در گراف‌های دوبخشی

۱.۵ مقدمه

مسئله ترنسورسال دارای کاربردهای زیادی در دنیای حقیقی است. همان‌طور که در بخش ۲.۳.۱ اشاره شد، یک کاربرد این مسئله، حل مسئله آرایه‌ها با قابلیت پیکربندی مجدد است که به‌طور گسترده در تولید حافظه‌ها و مدارهای مجتمع استفاده می‌شوند. در حقیقت اصلاح عناصر معیوب این آرایه‌ها با مسئله کوچک‌ترین ترنسورسال در گراف‌ها متناظر می‌شود. این کاربرد، مسئله ترنسورسال را به گراف‌های دوبخشی محدود می‌کند. لاولر^۱ در [۷۸] نشان داد که مسئله ترنسورسال حتی برای گراف‌های دوبخشی نیز NP-کامل است.

اگر G یک گراف دوبخشی از مرتبه n باشد، آنگاه به آسانی می‌توان مشاهده کرد

^۱Lawler

که $1 \leq \tau(G) \leq \lfloor n/2 \rfloor$. اگر G گرافی تهی باشد، آنگاه $\tau(G) = 0$. ولکمن^۲ در [۱۱۱] ساختار گراف‌های دوبخشی از مرتبه n با عدد ترنسورسال $\lfloor n/2 \rfloor$ را رده بندی کرد. در این فصل، این رده بندی را تعمیم خواهیم داد. در حقیقت، ساختار همه گراف‌های دوبخشی از مرتبه n با عدد ترنسورسال k ، $1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ ، را مشخص می‌کنیم. در نتیجه این کار، درخت‌هایی که در تساوی روابط نردھاس-گدم برای عدد ترنسورسال صدق می‌کنند، دسته‌بندی می‌کنیم. نتایج این فصل براساس مقاله ۲ مستخرج از رساله است.

۲.۵ عدد ترنسورسال گراف‌های دوبخشی

اگر $G = (V_1 \cup V_2, E)$ یک گراف دوبخشی غیر تهی با مجموعه‌های مجزای V_1 و V_2 باشد، آنگاه V_1 و V_2 هم مجموعه مستقل و هم ترنسورسال هستند. بنابراین برای هر گراف دوبخشی G ، روابط زیر برقرار است.

$$1 \leq \tau(G) \leq \frac{n}{2} \leq \alpha(G) \leq n - 1. \quad (1.5)$$

همان طور که در مقدمه ذکر شد $\tau(G) = 0$ نیز امکان‌پذیر است، به‌عنوان مثال به ازای $n(G) = 1$. همچنین، تمامی مقادیر صحیح در بازه $[1, n/2]$ نیز قابل دستیابی است. این مطلب را در گزاره زیر اثبات می‌کنیم.

گزاره ۱.۲.۵. برای اعداد صحیح n و k به‌طوری که $1 \leq k \leq n/2$ ، گرافی دوبخشی از مرتبه n و عدد ترنسورسال k وجود دارد.

برهان. فرض کنید n و k اعداد صحیح دلخواهی باشند به‌طوری که $1 \leq k \leq n/2$. اکنون گراف دوبخشی $G_{k,n}$ از مرتبه n و دارای عدد ترنسورسال برابر با k را به‌صورت زیر می‌سازیم. فرض کنید G یک گراف دوبخشی دلخواه از مرتبه k باشد. فرض کنید $V(G) = \{v_1, \dots, v_k\}$. گراف $G_{k,n}$ را با استفاده از گراف $cor(G)$ به‌صورت زیر

^۲ Volkman

می‌سازیم. تعداد $n - 2k$ رأس جدید $u_1, u_2, \dots, u_{n-2k}$ را به همراه یال‌های جدید $v_i u_i$ ، $1 \leq i \leq n - 2k$ ، به $cor(G)$ اضافه می‌کنیم که در آن برای حالتی که $n - 2k > k$ ، اندیس رأس‌های V به پیمانه k محاسبه می‌شوند. به آسانی می‌توان بررسی کرد که $G_{k,n}$ گرافی دوبخشی از مرتبه n و عدد ترنسورسال برابر با k است. \square

در ادامه این فصل، از نتیجه زیر استفاده خواهیم کرد.

قضیه ۱.۲.۵. [۱۱۱] اگر G گرافی همبند با تطابق ماکسیمم از اندازه k باشد، آنگاه G شامل درختی فراگیر با تطابق ماکسیمم از اندازه k است.

۳.۵ گراف‌های دوبخشی با عدد ترنسورسال برابر نصف مرتبه

به‌عنوان یک نتیجه از قضایای ۹.۳.۱ و ۱.۳.۱ داریم:

نتیجه ۱.۳.۵. اگر G یک گراف دوبخشی از مرتبه n باشد، آنگاه $\tau(G) = \lfloor n/2 \rfloor$ ، اگر و تنها اگر G دارای یک تطابق از اندازه $\lfloor n/2 \rfloor$ باشد.

چانهازان^۳ نشان داد که درخت T دارای تطابق کامل است اگر و تنها اگر به ازای هر رأس $v \in V(G)$ ، گراف $G[V(G) \setminus \{v\}]$ دارای دقیقاً یک مؤلفه فرد باشد [۱۶]. ولکمن در [۱۱۱] ساختار گراف‌های دوبخشی از مرتبه n با عدد ترنسورسال $\lfloor n/2 \rfloor$ را مشخص کرد. او برای این کار، عملگر زیر را معرفی کرد.

• **عملگر \mathcal{O}' :** فرض کنید w رأسی دلخواه از درخت T_w و v یک رأس دلخواه از گراف کامل K_2 باشد. درخت T از $T_w \cup K_2$ با اضافه کردن یال vw به‌دست می‌آید.

سپس خانواده‌های \mathcal{T}'_1 و \mathcal{T}'_2 را به‌صورت زیر معرفی کرد.

تعریف ۱.۳.۵. درخت $T \in \mathcal{T}'_1$ اگر و تنها اگر $T = K_2$ یا T از گراف کامل K_2 و یک دنباله متناهی از عملگر \mathcal{O}' به‌دست آمده باشد.

تعریف ۲.۳.۵. درخت $T \in \mathcal{T}'$ اگر و تنها اگر $T = K_1$ یا T از گراف کامل K_1 و یک دنباله متناهی از عملگر \mathcal{O}' به دست آمده باشد.

ولکمن با استفاده از خانواده‌های \mathcal{T}'_1 و \mathcal{T}'_2 گراف‌های دوبخشی با عدد ترنسورسال برابر با نصف مرتبه را مشخص کرد.

قضیه ۱.۳.۵. [۱۱۱] فرض کنید G یک گراف دوبخشی از مرتبه زوج باشد. در این صورت، $\tau(G) = n(G)/2$ اگر و تنها اگر G دارای زیردرخت فراگیر $T \in \mathcal{T}'_1$ باشد.

قضیه ۲.۳.۵. [۱۱۱] فرض کنید G یک گراف دوبخشی از مرتبه فرد باشد. در این صورت، $\tau(G) = (n(G) - 1)/2$ اگر و تنها اگر G دارای زیردرخت فراگیر $T \in \mathcal{T}'_2$ باشد.

۴.۵ گراف‌های دوبخشی با عدد ترنسورسال مشخص

در این بخش، ساختار گراف‌های دوبخشی G از مرتبه n را با عدد ترنسورسال $\tau(G) = k$ ، $1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ مشخص می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا ساختار درخت‌ها با عدد ترنسورسال مشخص را بررسی می‌کنیم. به ازای k ، $1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ ، خانواده \mathcal{T}_k از درخت‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۴.۵. فرض کنید \mathcal{T}_k ، خانواده همه درخت‌های T از مرتبه n باشد که از یک دنباله T_1, T_2, \dots, T_k ، از درخت‌ها به صورت زیر به دست می‌آیند. اگر n زوج باشد، آنگاه $T_1 = P_2$ و در غیر این صورت قرار دهید $T_1 = P_3$. فرض کنید v_1 رأس مرکزی T_1 باشد. دقت شود که هر رأس P_k رأس مرکزی این گراف است. اگر $k \geq 2$ ، آنگاه T_{i+1} به طور بازگشتی از T_i با استفاده از عملگر زیر به دست می‌آید.

• **عملگر \mathcal{O} :** فرض کنید v یک رأس دلخواه از درخت T_i باشد. T_{i+1} از T_i با افزودن یک مسیر P_2 با مجموعه رئوس $\{v_{i+1}, w_{i+1}\}$ و وصل کردن v به v_{i+1} به دست می‌آید.

در پایان، $n_i \geq 0$ برگ به رأس v_i ، $i \in [k]$ ، در درخت T_k اضافه کنید به طوری که در حالتی که n زوج باشد، $\sum_{i=1}^k n_i = n - 2k$ و اگر n فرد باشد، $\sum_{i=1}^k n_i = n - 2k - 1$. رأس‌های v_1, v_2, \dots, v_k رأس‌های مخصوص T_k ^۴ نامیده می‌شوند.

اکنون می‌توان قضیه زیر را مطرح کرد.

قضیه ۱.۴.۵. فرض کنید T درختی از مرتبه n باشد. در این صورت $\tau(T) = k$ ، اگر و تنها اگر $1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ ، $T \in \mathcal{T}_k$.

برهان. فرض کنید $T \in \mathcal{T}_k$. طبق تعریف خانواده \mathcal{T}_k ، T از یک دنباله از درخت‌های T_1, T_2, \dots, T_k براساس عملگر \mathcal{O} و با اضافه کردن تعدادی برگ به رأس‌های مخصوص T_k به دست آمده است. اگر $k = 1$ ، آنگاه T یک ستاره است. طبق مشاهده ۱.۲.۱، داریم $\tau(T) = 1$. بنابراین، اثبات کامل می‌شود. پس در ادامه فرض کنید $k \geq 2$. در نتیجه به ازای $i \in [k-1]$ ، T_{i+1} از T_i براساس عملگر \mathcal{O} با اضافه کردن مسیر $P_2 = v_{i+1}w_{i+1}$ و وصل کردن v_{i+1} به یک رأس T_i به دست آمده است. در ادامه اثبات می‌کنیم که $i \in [k-1]$ ، $\tau(T_{i+1}) = \tau(T_i) + 1$.

فرض کنید S یک $\tau(T_i)$ -مجموعه باشد. به وضوح $S \cup \{v_{i+1}\}$ یک ترنسورسال برای درخت T_{i+1} است. بنابراین، $\tau(T_{i+1}) \leq \tau(T_i) + 1$. از طرف دیگر، داریم:

$$V(T_i) \cap \{v_{i+1}, w_{i+1}\} = \emptyset.$$

پس هیچ $\tau(T_i)$ -مجموعه‌ای یال $v_{i+1}w_{i+1}$ را در T_{i+1} نمی‌پوشاند. پس نتیجه می‌گیریم که $\tau(T_{i+1}) \geq \tau(T_i) + 1$. بنابراین، داریم:

$$\tau(T_{i+1}) = \tau(T_i) + 1. \quad (2.5)$$

چون $\tau(T_1) = 1$ و طبق (۲.۵)، نتیجه می‌شود $\tau(T_k) = k$. به آسانی می‌توان مشاهده کرد که مجموعه $\{v_1, \dots, v_k\}$ یک ترنسورسال برای T_k است. از آنجا که T از T_k با

^۴ special vertices

اضافه کردن $n_i \geq 0$ برگ به v_i ، $i \in [k]$ ، به دست آمده است، بنابراین $\{v_1, \dots, v_k\}$ یک ترنسورسال برای T نیز هست. پس $\tau(T) \leq k$. اما T_k یک زیرگراف القایی T است. بنابراین، $\tau(T) \geq \tau(T_k) = k$. نتیجه می‌گیریم که $\tau(T) = k$.

در ادامه عکس قضیه را اثبات خواهیم کرد. با استقرا روی n ثابت می‌کنیم هر درخت T از مرتبه n و عدد ترنسورسال برابر با k ، $1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ ، متعلق به خانواده \mathcal{T}_k است. بدیهی است که $n \geq 2$. اگر $\text{diam}(T) = 1$ ، آنگاه $T = P_2 \in \mathcal{T}_1$. اکنون فرض کنید که $\text{diam}(T) = 2$. بنابراین T یک ستاره است. طبق مشاهده ۱.۲.۱، $\tau(T) = 1$. اگر n زوج باشد آنگاه T از مسیر P_2 با اضافه کردن $n - 2$ برگ به رأسی از P_2 به دست آمده است. بنابراین، $T \in \mathcal{T}_1$. اگر n فرد باشد، آنگاه T از یک مسیر P_3 با اضافه کردن $n - 3$ برگ به رأس مرکزی P_3 به دست آمده است. بنابراین، $T \in \mathcal{T}_1$. فرض کنید $\text{diam}(T) = 3$. پس T یک ستاره دوگانه است. فرض کنید a, b, c, d مسیری به طول سه در درخت T باشد. اگر n زوج باشد، آنگاه T از مسیر a, b با اضافه کردن مسیر c, d براساس عملگر \mathcal{O} و سپس افزودن $\text{deg}_T(b) - 2$ برگ به رأس b و $\text{deg}_T(c) - 2$ برگ به رأس c به دست آمده است. بنابراین، $T \in \mathcal{T}_2$. به وضوح، حداقل یکی از رئوس مرکزی T از درجه حداقل سه است. بدون کاستن از کلیت، فرض کنید $\text{deg}(b) \geq 3$. فرض کنید $b_1 \neq a$ برگ مجاور با رأس b باشد. بنابراین T از مسیر a, b, b_1 با اضافه کردن مسیر c, d براساس عملگر \mathcal{O} و سپس افزودن $\text{deg}_T(b) - 3$ برگ به رأس b و $\text{deg}_T(c) - 2$ برگ به رأس c به دست آمده است. بنابراین $T \in \mathcal{T}_2$ است. این نتایج برای گام پایه استقرا کافی هستند.

اکنون فرض کنید $\text{diam}(T) \geq 4$. فرض کنید حکم برای هر درخت T' از مرتبه $n' < n$ برقرار باشد. به عبارت دیگر، فرض کنید هر درخت T' از مرتبه $n' < n$ و عدد ترنسورسال k ، $1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ ، متعلق به خانواده \mathcal{T}_k باشد. فرض کنید T دارای تعدادی رأس پشتیبان قوی است. در درخت T از هر پشتیبان قوی تمام برگ‌ها به جز یک برگ را حذف کرده تا درخت T' فاقد رأس پشتیبان قوی به دست آید. بدیهی

است که $\tau(T') \leq \tau(T)$. فرض کنید S یک $\tau(T')$ -مجموعه باشد. می‌توان فرض کرد که S شامل هر رأس پشتیبان، برای پوشاندن هر یال آویخته، باشد. بنابراین S یک ترنسورسال برای درخت T نیز هست. پس $\tau(T) \leq \tau(T')$. در نتیجه:

$$\tau(T') = \tau(T) = k.$$

طبق فرض استقرا، $T' \in \mathcal{T}_k$. بنابراین T' از یک دنباله از درخت‌های T_1, T_2, \dots, T_k براساس عملگر \mathcal{O} و افزودن تعدادی رأس برگ به رأس‌های مخصوص T_k به‌دست آمده است. با توجه به عملگر \mathcal{O} ، می‌توان مشاهده کرد که رأس‌های پشتیبان درخت T_k زیرمجموعه‌ای از $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ است. چون T' از T_k با افزودن تعدادی برگ به رأس‌های مخصوص T_k به‌دست آمده است و T از T' با اضافه کردن تعدادی برگ به برخی از رأس‌های پشتیبان T' به‌دست آمده است، نتیجه می‌گیریم که $T \in \mathcal{T}_k$. بنابراین، حکم برای درخت‌هایی که دارای رأس پشتیبان قوی هستند، برقرار است.

در ادامه فرض کنید که T فاقد رأس پشتیبان قوی است. اکنون T را در یک برگ x_0 از مسیر قطری x_0, x_1, \dots, x_d ریشه‌دار می‌کنیم که در آن $d = \text{diam}(T)$. فرض کنید $T' = T - T_{x_{d-1}}$. همچنین فرض کنید S یک $\tau(T')$ -مجموعه باشد. بنابراین، $S \cup \{x_{d-1}\}$ یک ترنسورسال برای T است. پس $\tau(T) \leq \tau(T') + 1$. چون $V(T') \cap \{x_{d-1}\} = \emptyset$ ، هیچ $\tau(T')$ -مجموعه‌ای یال $x_{d-1}x_d$ را در T نمی‌پوشاند. بنابراین، $\tau(T) \geq \tau(T') + 1$. در نتیجه، داریم $\tau(T) = \tau(T') + 1 = k - 1$. طبق فرض استقرا، $T' \in \mathcal{T}_{k-1}$. پس با افزودن مسیر $P_2 : x_{d-1}, x_d$ و وصل کردن x_{d-2} به x_{d-1} براساس عملگر \mathcal{O} به‌دست آمده است. بنابراین، $T \in \mathcal{T}_k$. پس اثبات کامل می‌شود. \square

اکنون، نتیجه اصلی خود را بیان می‌کنیم. به‌عنوان یک نتیجه مستقیم از قضیه

۱.۴.۵، رده بندی زیر از گراف‌های دوبخشی از مرتبه n با عدد ترنسورسال k ، $1 \leq k \leq n/2$ ، به‌دست می‌آید.

قضیه ۲.۴.۵. فرض کنید G یک گراف دوبخشی همبند از مرتبه n باشد. در این

صورت $\tau(G) = k$ ، $1 \leq k \leq n/2$ ، اگر و تنها اگر G دارای درخت فراگیر $T \in \mathcal{T}_k$ باشد و هیچ درخت فراگیری از G متعلق به $\mathcal{T}_{k'}$ برای هر $k' > k$ موجود نباشد.

برهان. فرض کنید $\tau(G) = k$ ، $1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$. چون G یک گراف دوبخشی است، طبق قضیه ۹.۳.۱، G دارای یک تطابق ماکسیمم M از اندازه k است. بنابراین طبق قضیه ۱.۲.۵، G شامل درخت فراگیر T با تطابق ماکسیمم M است. پس $\tau(T) = k$. بنابراین، طبق قضیه ۱.۴.۵، $T \in \mathcal{T}_k$. فرض کنید که G دارای یک درخت فراگیر $T' \in \mathcal{T}_{k'}$ باشد به طوری که $k' > k$. در این صورت طبق قضیه ۱.۴.۵، $\tau(T') = k'$. از طرفی، $\tau(G) \geq \tau(T') = k' > k$ ، که این یک تناقض است. پس G دارای درخت فراگیر $T \in \mathcal{T}_k$ است و هیچ درخت فراگیری از G متعلق به $\mathcal{T}_{k'}$ برای هر $k' > k$ نیست.

برعکس، فرض کنید G دارای یک درخت فراگیر $T \in \mathcal{T}_k$ و هیچ درخت فراگیر G متعلق به $\mathcal{T}_{k'}$ برای هر $k' > k$ نباشد. طبق قضیه ۱.۴.۵، $\tau(T) = k$. بنابراین $\tau(G) \geq \tau(T) = k$. فرض کنید $\tau(G) = k' > k$. طبق بخش اول قضیه، G دارای درخت فراگیر $T' \in \mathcal{T}_{k'}$ است. این مطلب یک تناقض با فرض قضیه است. بنابراین، $\tau(G) = k$. \square

طبق قضایای ۱.۳.۱ و ۹.۳.۱، قضیه ۲.۴.۵ ساختار همه گراف‌های دوبخشی G از مرتبه n با عدد استقلال برابر k ، برای هر $1 \leq k \leq n-1$ ، و همچنین ساختار همه گراف‌های دوبخشی G از مرتبه n با پوشانه یالی برابر k ، برای هر $1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ ، را مشخص می‌کند.

۵.۵ روابط نردهاس-گدم برای عدد ترنسورسال

تا قبل از سال ۱۹۵۶، در همه مطالعات در رابطه با عدد رنگی یک گراف، تنها گراف G در نظر گرفته می‌شد. نردهاس^۵ و گدم^۶ در [۸۸] عدد رنگی گراف G و گراف مکملش، \bar{G} ، را بررسی کردند. آن‌ها کران‌های بالا و پایینی برای حاصل جمع و

^۵Nordhaus

^۶Gaddum

حاصل ضرب $\chi(G)$ و $\chi(\bar{G})$ براساس مرتبه گراف ارائه کردند. پس از آن، هر کران برای حاصل جمع و یا حاصل ضرب یک پارامتر برای گراف G و گراف \bar{G} ، نامساوی و یا رابطه نردهاس-گدم^۷ نامیده شد. در این بخش، این رابطه را برای عدد ترنسورسال درختها بررسی می‌کنیم. همچنین، درخت‌هایی که در تساوی روابط نردهاس-گدم برای عدد ترنسورسال، صدق می‌کنند دسته‌بندی می‌کنیم.

اگر G یک گراف دوبخشی از مرتبه n باشد، آنگاه $\omega(G) = 2$. بنابراین، طبق قضیه ۱.۳.۱، برای گراف مکمل G داریم:

$$\tau(\bar{G}) = n - \alpha(\bar{G}) = n - \omega(G) = n - 2. \quad (3.5)$$

بنابراین، طبق (۱.۵) و (۳.۵)، کران‌های زیر را به دست می‌آوریم که طبق مشاهده ۱.۲.۱ دقیق هستند.

مشاهده ۱.۵.۵. اگر G یک گراف دوبخشی از مرتبه n باشد، آنگاه داریم:

$$n - 1 \leq \tau(G) + \tau(\bar{G}) \leq \frac{3}{4}n - 2.$$

به‌طور مشابه، داریم:

$$n - 2 \leq \tau(G) \cdot \tau(\bar{G}) \leq \frac{1}{4}n^2 - n.$$

این کران‌ها دقیق هستند، به‌عنوان مثال گراف ستاره و مسیر به ترتیب در تساوی کران پایین و کران بالای روابط فوق صدق می‌کنند.

به‌عنوان یک نتیجه از قضیه ۱.۴.۵، درخت‌هایی که در تساوی روابط نردهاس-گدم عدد ترنسورسال صدق می‌کنند، دسته‌بندی می‌کنیم.

نتیجه ۱.۵.۵. فرض کنید T یک درخت از مرتبه n باشد. در این صورت داریم:

$$\tau(T) + \tau(\bar{T}) = k,$$

^۷Nordhaus-Gaddum relation

همچنین، داریم: $T \in \mathcal{T}_{k-n+2}$ اگر و تنها اگر $n-1 \leq k \leq 3n/2 - 2$.

$$\tau(G) \cdot \tau(\bar{G}) = k,$$

$T \in \mathcal{T}_{k/(n-2)}$ اگر و تنها اگر $n-2 \leq k \leq n^2/2 - n$.

فصل ۶

احاطه‌گری رومی با فاصله در گراف‌ها

۱.۶ مقدمه

یادآوری می‌کنیم که یک مجموعه S از رئوس را در گراف G احاطه‌گر گوییم هرگاه $N[S] = V(G)$. عدد احاطه‌گری گراف G ، $\gamma(G)$ ، برابر با کوچک‌ترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر در G است. برای گراف G ، فرض کنید $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ یک تابع و (V_0, V_1, V_2) یک افراز مرتب از $V(G)$ القا شده توسط f باشد به طوری که برای $i = 0, 1, 2$ ، داریم $V_i = \{v \in V(G) \mid f(v) = i\}$. یک تناظر یک به یک بین تابع $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ و افراز مرتب (V_0, V_1, V_2) از مجموعه $V(G)$ وجود دارد. بنابراین، برای سادگی می‌نویسیم $f = (V_0, V_1, V_2)$. تابع $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ تابع احاطه‌گر رومی^۱ نامیده می‌شود هرگاه هر رأس u که $f(u) = 0$ با حداقل یک رأس v که $f(v) = 2$ مجاور باشد. وزن یک تابع احاطه‌گر رومی f برابر با مقدار $f(V(G)) = \sum_{v \in V(G)} f(v)$ است. عدد احاطه‌گری رومی^۲ گراف G ، $\gamma_R(G)$ ، کم‌ترین وزن یک تابع احاطه‌گر رومی

^۱Roman dominating function

^۲Roman domination number

در گراف G است.

زیرمجموعه $D \subseteq V(G)$ یک **مجموعه احاطه‌گر k -فاصله‌ای^۳** برای گراف G نامیده می‌شود هرگاه هر رأس در $V(G) \setminus D$ در فاصله حداکثر k از رأسی درون D قرار داشته باشد. کوچک‌ترین اندازه در بین همه مجموعه‌های احاطه‌گر k -فاصله‌ای در G ، **عدد احاطه‌گری k -فاصله‌ای^۴** نامیده می‌شود. مفهوم احاطه‌گری k -فاصله‌ای در گراف‌ها توسط هنینگ و همکارانش در [۶۱] معرفی شد.

فینک^۵ و **جاکوبسن^۶** در [۳۵، ۳۶] مفهوم r -احاطه‌گری را برای عدد صحیح و مثبت r معرفی کردند. مجموعه $D \subseteq V(G)$ یک **مجموعه r -احاطه‌گر^۷** برای گراف G نامیده می‌شود هرگاه هر رأس در $V(G) \setminus D$ با حداقل r رأس از D مجاور باشد. کوچک‌ترین اندازه در بین همه مجموعه‌های r -احاطه‌گر G **عدد r -احاطه‌گری^۸** نامیده می‌شود و با $\gamma_r(G)$ نمایش داده می‌شود. کامرلینگ^۹ و ولکمن در [۶۸] به ازای هر عدد صحیح مثبت r ، مفهوم احاطه‌گری رومی را به r -احاطه‌گری رومی تعمیم دادند. تابع $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ ، **تابع r -احاطه‌گری رومی^{۱۰}** نامیده می‌شود هرگاه هر رأس u که $f(u) = 0$ با حداقل r رأس v که $f(v) = 2$ مجاور باشد. وزن یک تابع r -احاطه‌گر رومی برابر با مقدار $f(V(G)) = \sum_{v \in V(G)} f(v)$ تعریف می‌شود. **عدد r -احاطه‌گری رومی^{۱۱}** در گراف G ، $\gamma_{rR}(G)$ ، برابر با کم‌ترین وزن یک تابع r -احاطه‌گر رومی در G است.

در این فصل، برای هر $k \geq 1$ ، مفهوم r -احاطه‌گری رومی را به r -احاطه‌گری رومی k -فاصله‌ای تعمیم می‌دهیم. تابع $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ را یک **تابع r -احاطه‌گر رومی k -فاصله‌ای^{۱۲}** می‌نامیم هرگاه هر رأس u که $f(u) = 0$ در فاصله حداکثر k از حداقل r رأس v که $f(v) = 2$ قرار داشته باشد. وزن یک تابع r -احاطه‌گری رومی k -فاصله‌ای برابر است با $f(V(G)) = \sum_{v \in V(G)} f(v)$. **عدد r -احاطه‌گری رومی k -فاصله‌ای^{۱۳}** در

^۳ distance- k dominating set

^۴ distance- k domination number

^۵ Fink

^۶ Jacobson

^۷ r -dominating set

^۸ r -domination number

^۹ Kämmerling

^{۱۰} Roman r -dominating function

^{۱۱} Roman r -domination number

^{۱۲} distance- k Roman r -dominating function

^{۱۳} distance- k Roman r -domination number

گراف G ، $\gamma_R^{(k,r)}(G)$ ، برابر با کم‌ترین وزن یک تابع r -احاطه‌گر رومی k -فاصله‌ای در گراف G است. بدیهی است که $\gamma_R^{(1,r)}(G) = \gamma_{rR}(G)$.

در این فصل، چند کران احتمالاتی برای عدد r -احاطه‌گری رومی k -فاصله‌ای برای گراف‌ها ارائه خواهیم داد. در پایان نیز اندازه عدد r -احاطه‌گری رومی k -فاصله‌ای را در گراف‌های تصادفی بررسی می‌کنیم. نتایج این فصل براساس مقاله ۳ مستخرج از رساله است.

۲.۶ r -احاطه‌گری رومی k -فاصله‌ای در گراف‌ها

با توجه به مفهوم r -احاطه‌گری رومی k -فاصله‌ای، برای هر عدد صحیح و مثبت r به طوری که $r \geq n/2$ ، داریم $\gamma_R^{(k,r)}(G) = n$. بنابراین، در طول این بخش فرض می‌کنیم که $r < n/2$. همچنین اگر $diam(G) \leq k$ ، آنگاه داریم $\gamma_R^{(k,r)}(G) = 2r$. در نتیجه، در طول این بخش تنها گراف‌های G که $diam(G) > k$ را در نظر می‌گیریم. برای یک رأس v ، فرض کنید $N_k(v)$ مجموعه همه رأس‌های u باشد به طوری که $u \neq v$ و هر یک از این رئوس به فاصله حداکثر k از رأس v قرار دارند. همچنین، فرض کنید $\delta_k = \delta_k(G) = \min\{|N_k(v)| \mid v \in V(G)\}$. در اینجا برای گراف G ، k -گراف G_k را نیز به صورت زیر تعریف می‌کنیم. **گراف^{۱۴} G_k** گرافی با مجموعه رئوس $V(G_k) = V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G_k) = \{xy \mid d_G(x, y) \leq k\}$ است. دقت شود که $G_1 = G$.

قضیه ۱.۲.۶ [۴۹] فرض کنید G گرافی از مرتبه n و $\delta(G) \geq r$ باشد که در آن r یک عدد صحیح و مثبت است. اگر $(\delta(G) + 1 + 2 \ln 2) / \ln(\delta(G) + 1) \geq 2r$ ، آنگاه داریم:

$$\gamma_{rR}(G) \leq \left(\frac{2r \ln(\delta(G) + 1) - \ln 4 + 2}{\delta(G) + 1} \right) n.$$

بدیهی است که $\gamma_R^{(k,r)}(G) = \gamma_{rR}(G_k)$. بنابراین، قضیه زیر از قضیه ۱.۲.۶ به دست می‌آید.

قضیه ۲.۲.۶. اگر $\delta_k \geq r$ و $(\delta_k + 1 + 2 \ln 2) / \ln(\delta_k + 1) \geq 2r$ ، آنگاه داریم:

$$\gamma_R^{(k,r)}(G) \leq \left(\frac{2r \ln(\delta_k + 1) - \ln 4 + 2}{\delta_k + 1} \right) n.$$

در ادامه نشان می‌دهیم که کران قضیه ۲.۲.۶ به‌طور مجانبی بهترین کران ممکن است.

قضیه ۳.۲.۶. اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد، $\delta_k \geq r$ و همچنین داشته باشیم

$(\delta_k + 1 + 2 \ln 2) / \ln(\delta_k + 1) \geq 2r$ ، آنگاه گراف G موجود است به‌طوری‌که:

$$\gamma_R^{(k,r)}(G) \geq \left(\frac{2r \ln(\delta_k + 1) - \ln 4 + 2}{\delta_k + 1} \right) n(1 + o(1)).$$

برهان. فرض کنید F گرافی از مرتبه $[\delta_k \ln \delta_k]$ باشد و $diam(F) \leq k$. برای مثال گراف کامل $K_{[\delta_k \ln \delta_k]}$ را می‌توان در نظر گرفت. برای راحتی قرار دهید $F = V(F)$. سپس مجموعه‌ای از رأس‌های جدید $V = \{v_1, \dots, v_{\delta_k}\}$ را اضافه می‌کنیم و هر رأس v_i را به $[\delta_k/r]$ رأس که به‌طور تصادفی از مجموعه F انتخاب شده‌اند، متصل می‌کنیم. گراف به‌دست آمده را G می‌نامیم. به سادگی می‌توان محاسبه کرد که گراف G گرافی از مرتبه $n = [\delta_k \ln \delta_k] + \delta_k$ است. ما اثبات می‌کنیم که با احتمال بالا

$$\begin{aligned} \gamma_R^{(k,r)}(G) &\geq 2r \frac{\ln \delta_k}{\delta_k} n(1 + o_{\delta_k}(1)) \\ &= 2r \ln^2 \delta_k (1 + o_{\delta_k}(1)). \end{aligned}$$

فرض کنید $f = (D_0, D_1, D_2)$ یک $\gamma_R^{(k,r)}$ -تابع برای G باشد، یعنی f یک تابع r -احاطه‌گر رومی k -فاصله‌ای برای G است به‌طوری‌که $f(V(G)) = \gamma_R^{(k,r)}(G)$. همچنین فرض کنید $r \geq [\delta_k/r]$. به‌طور بدیهی می‌توان فرض کرد که $D_1 \subseteq V$ و $D_2 \subseteq F$. اکنون دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم. اگر $|D_2| > r \ln^2 \delta_k - r \ln \delta_k \ln(r \ln^4 \delta_k)$ ، آنگاه $f(V(G)) > 2r \ln^2 \delta_k (1 + o_{\delta_k}(1))$ ، همان‌طور که مطلوب مسأله است. بنابراین، در ادامه فرض کنید که $|D_2| \leq r \ln^2 \delta_k - r \ln \delta_k \ln(r \ln^4 \delta_k)$. فرض کنید A_i این پیشامد

باشد که یک رأس $v_i \in V$ توسط مجموعه D_r -احاطه k -فاصله‌ای نشود. بنابراین، داریم:

$$\begin{aligned} Pr(A_i) &= Pr(|D_r \cap N_k(v_i)| \leq r-1) \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} \frac{\binom{\delta_k/r}{i} \binom{|D_r|-|D_r|-i}{(\delta_k/r)-i}}{\binom{|F|}{\delta_k/r}} \\ &\geq \frac{\binom{|F|-|D_r|}{\delta_k/r}}{\binom{|F|}{\delta_k/r}} \\ &\geq \left(\frac{|F|-|D_r|-\frac{\delta_k}{r}}{|F|-\frac{\delta_k}{r}} \right)^{\frac{\delta_k}{r}} \\ &= \left(1 - \frac{|D_r|}{|F|-\frac{\delta_k}{r}} \right)^{\frac{\delta_k}{r}}. \end{aligned}$$

با استفاده از نامساوی $1-x \geq e^{-x}(1-x^2)$ برای $x < 1$ ، تخمین زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} Pr(A_i) &\geq e^{-\frac{r \ln^3 \delta_k - r \ln \delta_k \ln(r \ln^3 \delta_k) \frac{\delta_k}{r}}{\delta_k \ln \delta_k - \frac{\delta_k}{r}}} \left(1 - \left(\frac{r \ln^3 \delta_k - r \ln \delta_k \ln(r \ln^3 \delta_k)}{\delta_k \ln \delta_k - \frac{\delta_k}{r}} \right)^2 \right)^{\frac{\delta_k}{r}} \\ &= e^{\frac{-\ln \delta_k + \ln(r \ln^3 \delta_k)}{1 - 1/(r \ln \delta_k)}} (1 + o_{\delta_k}(1)) \\ &= e^{\ln \left(\frac{r \ln^3 \delta_k}{\delta_k} \right) (1 + o_{\delta_k}(1))} (1 + o_{\delta_k}(1)) \\ &= \left(\frac{r \ln^3 \delta_k}{\delta_k} \right)^{(1 + o_{\delta_k}(1))} (1 + o_{\delta_k}(1)) \\ &\geq \frac{r \ln^3 \delta_k}{\delta_k}. \end{aligned}$$

بنابراین، اگر A_i^c این پیشامد باشد که یک رأس $v_i \in V$ توسط مجموعه D_r ، r -احاطه رومی k -فاصله‌ای شود، آنگاه نتیجه می‌گیریم که:

$$Pr(A_i^c) \leq 1 - \frac{r \ln^3 \delta_k}{\delta_k}.$$

اکنون متغیر تصادفی $|D_r \cap N_k(V)|$ را در نظر بگیرید. میانگین $|D_r \cap N_k(V)|$ برابر است با:

$$E(|D_r \cap N_k(V)|) = \sum_{i=1}^{\delta_k} Pr(A_i^c) \leq \delta_k - r \ln^3 \delta_k.$$

پس می‌توان نتیجه گرفت که گراف G موجود است به طوری که $|D_r| \geq r \ln^3 \delta_k$. به عبارت دیگر، داریم:

$$f(V(G)) \geq r \ln^3 \delta_k > 2r \ln^2 \delta_k (1 + o_{\delta_k}(1)),$$

که این همان مطلوب مسأله است.

دقت شود که اگر $r < \lceil \delta_k/r \rceil$ ، آنگاه بدیهی است که $Pr(A_i) = 1$. پس نتیجه می‌گیریم که $Pr(A_i^c) = 0$. بنابراین، برای هر $i \in [\delta_k]$ داریم $v_i \in D_r$. در نتیجه، $f(V(G)) \geq |D_r| \geq r \ln^3 \delta_k$ و اثبات قضیه کامل می‌شود. \square

در ادامه، تعدادی کران برای حالت خاص $r = 1$ بیان می‌کنیم. زروچ^{۱۵} و پوقوسیان^{۱۶} در [۱۱۹] اثبات کردند که برای هر گراف G با مینیمم درجه $\delta \geq 1$ داریم:

$$\gamma_R(G) \leq 2 \left(1 - \frac{\delta^{2\frac{1}{\delta}}}{(1+\delta)^{1+\delta}} \right) n.$$

همچنین، داریم:

$$\gamma_R(G) \leq \left(\frac{2 \ln(\delta+1) - \ln 4 + 2}{\delta+1} \right) n. \quad (1.6)$$

همچنین، آن‌ها اثبات کردند که کران (۱.۶) بهترین کران ممکن است. فرض کنید G گرافی از مرتبه n باشد به طوری که برای عدد صحیح و مثبت k ، داریم $\delta_k \geq 2$. چون $\gamma_R^{(k,1)}(G) = \gamma_R(G^k)$ می‌توان استدلال کرد که:

$$\gamma_R^{(k,1)}(G) \leq 2 \left(1 - \frac{\delta_k^{2\frac{1}{\delta_k}}}{(1+\delta_k)^{1+\delta_k}} \right) n.$$

^{۱۵}Zverovich

^{۱۶}Poghosyan

$$\gamma_R^{(k,1)}(G) \leq \left(\frac{2 \ln(\delta_k + 1) - \ln 4 + 2}{\delta_k + 1} \right) n.$$

کران آخر بهترین کران ممکن است.

تیان^{۱۷} و زو^{۱۸} در [۱۰۸] نشان دادند که اگر G یک گراف همبند با مجموعه رئوس $V(G) = [n]$ و k یک عدد صحیح مثبت باشد، آنگاه

$$\gamma_k(G) \leq \min_{(p_1, p_2, \dots, p_n) \in Q^n} f_G(p_1, p_2, \dots, p_n),$$

که در آن

$$f_G(p_1, p_2, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n \left(p_i + (1 - p_i) \prod_{j \in N_k(i)} (1 - p_j) \right).$$

با یک اثبات مشابه، می‌توان مشاهده کرد که برای گراف G داریم:

$$\gamma_R^{(k,1)}(G) \leq \min_{(p_1, p_2, \dots, p_n) \in Q^n} f_G(p_1, p_2, \dots, p_n),$$

که در آن

$$f_G(p_1, p_2, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n \left(2p_i + (1 - p_i) \prod_{j \in N_k(i)} (1 - p_j) \right).$$

۳.۶ r -احاطه‌گری رومی k -فاصله‌ای در گراف‌های تصادفی

فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت و $0 < p < 1$ باشد. گراف تصادفی $G(n, p)$ یک فضای احتمالاتی روی مجموعه گراف‌ها با مجموعه رئوس $[n]$ است که توسط احتمال $Pr[\{i, j\} \in E(G)] = p$ تعیین می‌شوند. یک پیشامد وابسته به n تقریباً همیشه برقرار است هرگاه با افزایش n به‌طور بیکران، احتمال وقوع پیشامد نیز به یک نزدیک شود. دقت شود که طبق تعریف، وزن هر مجموعه r -احاطه‌گر رومی k -فاصله‌ای باید حداقل برابر $2r$ باشد. از طرفی ثابت شده است که به ازای $p < 1$ قطر گراف تصادفی $G(n, p)$ تقریباً همیشه برابر دو است. بنابراین، اگر p ثابت و $k \geq 2$ ، آنگاه

^{۱۷}Tian

^{۱۸}Xu

در حالت p ثابت و $k = 1$ را به‌عنوان یک مسأله باز رها می‌کنیم. در ادامه فرض کنید که p ثابت نباشد.

قضیه ۱.۳.۶ [۱۵] فرض کنید c یک عدد ثابت مثبت و $d = d(n) \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد. پارامتر $p = p(n, c, d)$ ، $0 < p < 1$ ، را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$p^d n^{d-1} = \log(n^2/c).$$

فرض کنید $pn/(\log n)^3 \rightarrow \infty$. در این صورت برای گراف $G(n, p)$ داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pr(\text{diam}(G) = d) = e^{-c/2},$$

و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pr(\text{diam}(G) = d + 1) = 1 - e^{-c/2}.$$

از قضیه ۱.۳.۶، نتیجه زیر به‌طور مستقیم به‌دست می‌آید.

قضیه ۲.۳.۶ برای اعداد صحیح مثبت و دلخواه $k \geq 3$ و r ، در یک گراف تصادفی

$$G(n, p) \text{ با } p = \sqrt[k]{\frac{\log(n^2/c)}{n^{k-1}}}, \text{ تقریباً همیشه } \gamma_R^{(k,r)}(G(n, p)) = 2r$$

در ادامه حالت $k = 2$ را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۳.۳.۶ [۶۴] فرض کنید $p = c\sqrt{\frac{\ln n}{n}}$ برای $c > \sqrt{2}$ ، قطر گراف تصادفی $G(n, p)$

تقریباً همیشه کم‌تر یا مساوی دو است.

از قضیه ۳.۳.۶ نتیجه می‌گیریم که تقریباً همیشه برای $p \geq \sqrt{2}\sqrt{\frac{\ln n}{n}}$ داریم

$$\gamma_R^{(k,r)}(G(n, p)) = 2r \text{ اکنون قصد داریم کم‌ترین مقدار } p \text{ در قضیه ۳.۳.۶ را به ازای}$$

مقدار ثابت $c > 1$ از $\sqrt{2}\sqrt{\frac{\ln n}{n}}$ به $p \geq c\sqrt{\frac{\ln n}{n}}$ کاهش دهیم.

قضیه ۴.۳.۶ فرض کنید $c > 1$ یک مقدار ثابت باشد. در این صورت برای هر

عدد صحیح و مثبت r ، در گراف تصادفی $G(n, p)$ با $p \geq c\sqrt{\frac{\ln n}{n}}$ تقریباً همیشه

$$\gamma_R^{(2,r)}(G(n, p)) = 2r$$

برهان. فرض کنید $D \subseteq V(G(n, p))$ یک زیرمجموعه از اندازه r باشد. رأس‌های مجموعه D را با برچسب‌های v_1, v_2, \dots, v_r نام‌گذاری می‌کنیم. احتمال این که رأس $u \in V(G(n, p)) \setminus D$ در فاصله دو از رأس $v_i \in D$ نباشد، برابر است با:

$$Pr(u \notin N_2(v_i)) \leq (1 - p^2)^{n-2}.$$

فرض کنید X یک متغیر تصادفی باشد به طوری که تعداد رأس‌های $u \in V(G(n, p)) \setminus D$ را که تعداد ۲-همسایه‌های آن در D کمتر از r است، مشخص می‌کند. قصد داریم نشان دهیم با افزایش n به طور بیکران، احتمال اینکه $X > 0$ به صفر نزدیک می‌شود. یک رأس u رأس بد^{۱۹} نامیده می‌شود، اگر u کمتر از r تا ۲-همسایه در D داشته باشد. فرض کنید B_u این پیشامد باشد که u یک رأس بد باشد. طبق خاصیت خطی بودن میانگین، داریم:

$$E(X) = (n - r)Pr(B_u). \quad (2.6)$$

فرض کنید X_u متغیر تصادفی باشد که تعداد رأس‌های D که ۲-همسایه u نیستند را مشخص می‌کند. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} E(X_u) &\leq r(1 - p^2)^{n-2} \\ &\leq re^{-p^2(n-2)}. \end{aligned}$$

طبق نامساوی مارکوف، داریم $Pr(X_u > 0) \leq E(X_u) \leq re^{-p^2(n-2)}$. بنابراین،

$$\begin{aligned} Pr(B_u) &= Pr(X_u > 0) \\ &\leq re^{-p^2(n-2)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

^{۱۹}bad vertex

طبق (۲.۶) و (۳.۶)، داریم $E(X) \leq (n-r)re^{-p^2(n-2)}$. از نامساوی مارکوف نتیجه می‌شود:

$$Pr(X > 0) \leq E(X) \leq (n-r)re^{-p^2(n-2)} < nre^{-p^2(n-2)}. \quad (۴.۶)$$

طبق (۴.۶)، با افزایش n مقدار p به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} e^{p^2(n-2)} > rn &\Rightarrow p^2(n-2) > \ln rn \\ &\Rightarrow p > \sqrt{\frac{\ln rn}{n-2}} \\ &\Rightarrow p > \sqrt{\frac{\ln n}{n}}. \end{aligned}$$

فرض کنید $p > c\sqrt{\frac{\ln n}{n}}$ ، که در آن $c > 1$ یک مقدار ثابت است. اکنون مقدار $e^{p^2(n-2)}$ را تعیین می‌کنیم:

$$e^{p^2(n-2)} \geq (e^{\ln n})^{c^2(\frac{n-2}{n})} \geq n^{c^2(1-\frac{2}{n})}. \quad (۵.۶)$$

طبق (۴.۶) و (۵.۶) داریم:

$$nre^{-p^2(n-2)} \leq \frac{nr}{n^{c^2(1-\frac{2}{n})}} = \frac{r}{n^{c^2(1-\frac{2}{n})-1}}. \quad (۶.۶)$$

چون $c^2 > 1$ ، با افزایش n داریم $n^{c^2(1-\frac{2}{n})} > 1$ ، پس، $c^2(1-\frac{2}{n}) - 1 > 0$. در نتیجه داریم:

$$\frac{r}{n^{c^2(1-\frac{2}{n})-1}} \rightarrow 0.$$

بنابراین، از روابط (۴.۶) و (۶.۶) نتیجه می‌گیریم با افزایش n به طور بیکران، احتمال $Pr(X > 0)$ نیز به سمت صفر میل می‌کند. \square

پیوست آ

فهرست نمادها

۱.آ نمادهای غیرالفبایی

U	اجتماع
\cap	اشتراک
∞	بینهایت
\setminus	تفاضل مجموعه‌ها
$G \subseteq H$	زیرگراف
$G[S]$	زیرگراف القایی توسط S
$A \subseteq B$	زیرمجموعه
$\lceil x \rceil$	سقف عدد
$\lfloor x \rfloor$	کف عدد
$[n]$	$\{1, \dots, n\}$
\bar{G}	مکمل گراف
$G \boxtimes H$	ضرب قوی گراف‌ها
$A \times B$	ضرب دکارتی مجموعه‌ها

۲.آ نمادهای الفبایی

G^k	k بار ضرب قوی گراف
G_k	k - گراف
$m(G)$	اندازه گراف
$R(G)$	باقیمانده گراف
$\tau'(G)$	پوشانه یالی
$cor(G)$	تاج گراف
$\lambda(G)$	تعداد مؤلفه‌های سخت گراف
$o(G)$	تعداد مؤلفه‌های فرد گراف
$\deg_G(v)$	درجه رأس
$M(G)$	درجه میانی گراف
C_n	دور با n رأس
S_n	ستاره با $n + 1$ رأس
$S_{m,n}$	ستاره دوگانه
$rad(G)$	شعاع گراف
$\Theta(G)$	ظرفیت شانون
$\gamma_{rR}(G)$	عدد r - احاطه‌گری رومی
$\gamma_R^{(k,r)}(G)$	عدد r - احاطه‌گری رومی k - فاصله‌ای
$\gamma(G)$	عدد احاطه‌گری
$\gamma_R(G)$	عدد احاطه‌گری رومی
$\alpha(G)$	عدد استقلال
$\alpha_c(G)$	عدد استقلال بحرانی
$\alpha'(G)$	عدد استقلال یالی
$\tau(G)$	عدد ترنسورسال
$\tau_f(G)$	عدد ترنسورسال کسری
$\omega(G)$	عدد خوشه‌ای
$\chi(G)$	عدد رنگی
$\chi_d(G)$	عدد رنگی احاطه‌گر

$a(G)$	عدد نابودی
$d_G(u, v)$	فاصله دو رأس
$\bar{D}(G)$	فاصله متوسط گراف
$diam(G)$	قطر گراف
$g_{odd}(G)$	کمر فرد گراف
K_n	گراف کامل با n رأس
$ecc(v)$	گریز از مرکز
$\Delta(G)$	ماکسیمم درجه گراف
$n(G)$	مرتبه گراف
P_n	مسیر با n رأس
$\delta(G)$	مینیمم درجه گراف
$N_G(v)$	همسایگی باز رأس
$N_G(S)$	همسایگی باز مجموعه
$N_G[v]$	همسایگی بسته رأس
$N_G[S]$	همسایگی بسته مجموعه

مراجع

- [1] Faisal N. Abu-Khzam, Rebecca L. Collins, Michael R. Fellows, Michael A. Langston, W. Henry Suters, and Christopher T. Symons. Kernelization algorithms for the vertex cover problem: Theory and experiments. *ALLENEX/ANALC*, 69, 2004.
- [2] Michael Albertson, Bela Bollobas, and Susan Tucker. The independence ratio and the maximum degree of a graph. *Congressus Numerantium*, 17:43–50, 1976.
- [3] Noga Alon and Joel H. Spencer. *The probabilistic method*. John Wiley International, 2008.
- [4] Eric Angel, Romain Campigotto, and Christian Laforest. Algorithms for the vertex cover problem on large graphs. *Springer*, 12:233–235, 2010.
- [5] Mustapha Aouchiche, Gunnar Brinkmann, and Pierre Hansen. Variable neighborhood search for extremal graphs. 21. conjectures and results about the independence number. *Discrete Applied Mathematics*, 156(13):2530–2542, 2008.
- [6] Mustapha Aouchiche, Pierre Hansen, and Gilles Caporossi. *Variable neighborhood search for extremal graphs, 20: Automated comparison of graph invariants*. Groupe d'études et de recherche en analyse des décisions, 2007.

- [7] Tetsuo Asano. Difficulty of the maximum independent set problem on intersection graphs of geometric objects. *6th International Conference on the Theory and Applications of Graphs*, 1991.
- [8] B. Bajnok and G. Brinkmann. On the independence number of triangle free graphs with maximum degree three. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 26:237–254, 1998.
- [9] Egon Balas and Haakon Samuelsson. A node covering algorithm. *Naval Research Logistics Quarterly*, 24(2):213–233, 1977.
- [10] Walter William Rouse Ball. *Mathematical recreations and problems of past and present times*. Macmillan and Company, 1892.
- [11] Julien Barral and Aihua Fan. Densities of some poisson t-martingales and random covering numbers. *Comptes Rendus Mathematique*, 338(7):571–574, 2004.
- [12] Claude Berge. *Theory of Graphs and its Applications*. Methuen, London, 1962.
- [13] Claude Berge and Edward Minieka. *Graphs and hypergraphs*, volume 7. North-Holland publishing company Amsterdam, 1973.
- [14] Max Bezzel. Proposal of 8-queens problem. *Berliner Schachzeitung*, 3:363, 1848.
- [15] Béla Bollobás. Random graphs. In *Modern Graph Theory*, pages 215–252. Springer, 1998.
- [16] John Adrian Bondy and Uppaluri Siva Ramachandra Murty. *Graph theory with applications*, volume 290. Citeseer, 1976.

- [17] Peter Borg. Sharp bounds for the independence number. *arXiv preprint arXiv:1007.5426*, 2010.
- [18] Marco Budinich. Exact bounds on the order of the maximum clique of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 127(3):535–543, 2003.
- [19] Yair Caro. New results on the independence number. Technical report, Technical Report, Tel-Aviv University, 1979.
- [20] Jianer Chen, Iyad A. Kanj, and Weijia Jia. Vertex cover: further observations and further improvements. *Journal of Algorithms*, 41(2):280–301, 2001.
- [21] Fan Chung. The average distance and the independence number. *Journal of Graph Theory*, 12(2):229–235, 1988.
- [22] Vašek Chvátal and Colin McDiarmid. Small transversals in hypergraphs. *Combinatorica*, 12(1):19–26, 1992.
- [23] Stephen A. Cook. The complexity of theorem-proving procedures. In *Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 151–158. ACM, 1971.
- [24] Dragoš M. Cvetković, Horst Sachs, and Michael Doob. *Spectra of Graphs : Theory and Applications*. Heidelberg : Johann Ambrosius Barth, 1995.
- [25] Ermelinda DeLaViña, Craig E. Larson, Ryan Pepper, and Bill Waller. A characterization of graphs where the independence number equals the radius. *Graphs and Combinatorics*, 28(3):315–332, 2012.
- [26] Jenő Egerváry. Matrixok kombinatorikus tulajdonságairól (hungarian, with german summary). *Matematikai és Fizikai Lapok*, 38:16–28, 1931.

- [27] Paul Erdős, Michael Saks, and Vera T. Sós. Maximum induced trees in graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 41(1):61–79, 1986.
- [28] Siemion Fajtlowicz. Independence, clique size and maximum degree. *Combinatorica*, 4(1):35–38, 1984.
- [29] Siemion Fajtlowicz. Written on the wall: Conjectures of graffiti. 1986-2004.
- [30] Siemion Fajtlowicz. A characterization of radius-critical graphs. *Journal of Graph Theory*, 12(4):529–532, 1988.
- [31] Siemion Fajtlowicz and William Waller. On two conjectures of graffiti. *Congressus Numerantium*, 55:51–56, 1986.
- [32] Simeon Fajtlowicz. The independence ratio for cubic graphs. *Congressus Numerantium*, 19:273–277, 1977.
- [33] Simeon Fajtlowicz. On the size of independent sets in graphs. *Congressus Numerantium*, 21:269–274, 1978.
- [34] Odile Favaron, Maryvonne Mahéo, and J.F. Saclé. On the residue of a graph. *Journal of Graph Theory*, 15(1):39–64, 1991.
- [35] John Frederick Fink and Michael S. Jacobson. n -domination in graphs. In *Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science*, pages 283–300. John Wiley & Sons, Inc., 1985.
- [36] John Frederick Fink and Michael S. Jacobson. On n -domination, n -dependence and forbidden subgraphs. In *Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science*, pages 301–311. John Wiley & Sons, Inc., 1985.

- [37] Kathryn Fraughnaugh and Stephen C. Locke. 11/30 (finding large independent sets in connected triangle-free 3-regular graphs). *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 65(1):51–72, 1995.
- [38] Tibor Gallai. Über extreme punkt-und kantenmengen. *Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math*, 2:133–138, 1959.
- [39] Michael R. Garey, David S. Johnson, and Larry Stockmeyer. Some simplified np-complete graph problems. *Theoretical Computer Science*, 1(3):237–267, 1976.
- [40] Michael R. Gary and David S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness*. WH Freeman and Company, New York, 1979.
- [41] Carl Friedrich Gauss. Werke. band i–xii.(collected works. vol. i–xii), reprint of the 1863–1874 original, 1973.
- [42] Raluccia Gera, Craig Rasmussen, and Steve Horton. Dominator colorings and safe clique partitions. *Congressus numerantium*, 181:19, 2006.
- [43] J.W.L. Glaisher. Lxi. on the problem of the eight queens. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 48(320):457–467, 1874.
- [44] Jerrold R. Griggs. Lower bounds on the independence number in terms of the degrees. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 34(1):22–39, 1983.
- [45] Jerrold R. Griggs and Daniel J. Kleitman. Independence and the havel-hakimi residue. *Discrete Mathematics*, 127(1-3):209–212, 1994.
- [46] Michelle Grigsby. *A Horizontal Edges Bound for the Independence Number of a Graph*. PhD thesis, 2011.

- [47] S. Gunther. Zur mathematischen theorie des schachbretts. *Arch. Math. Physik*, 56:281–292, 1874.
- [48] S. Louis Hakimi. On realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a linear graph. i. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 10(3):496–506, 1962.
- [49] Adriana Hansberg and Lutz Volkmann. Upper bounds on the k -domination number and the k -roman domination number. *Discrete Applied Mathematics*, 157(7):1634–1639, 2009.
- [50] Pierre Hansen and Maolin Zheng. Sharp bounds on the order, size, and stability number of graphs. *Networks*, 23(2):99–102, 1993.
- [51] Jochen Harant. A lower bound on the independence number of a graph. *Discrete Mathematics*, 188(1):239–243, 1998.
- [52] Jochen Harant and Dieter Rautenbach. Independence in connected graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 159(1):79–86, 2011.
- [53] Jochen Harant and Ingo Schiermeyer. On the independence number of a graph in terms of order and size. *Discrete Mathematics*, 232(1):131–138, 2001.
- [54] Nany Hasan and C.L. Liu. Minimum fault coverage in reconfigurable arrays. In *Fault-Tolerant Computing, 1988. FTCS-18, Digest of Papers., Eighteenth International Symposium on*, pages 348–353. IEEE, 1988.
- [55] Jonas Hasselberg, Panos M. Pardalos, and George Vairaktarakis. Test case generators and computational results for the maximum clique problem. *Journal of Global Optimization*, 3(4):463–482, 1993.

- [56] Václav Havel. A remark on the existence of finite graphs. *Casopis Pest. Mat.*, 80(1253):477–480, 1955.
- [57] Teresa W. Haynes, Stephen Hedetniemi, and Peter Slater. *Fundamentals of Domination in Graphs*. CRC Press, 1998.
- [58] Christopher Carl Heckman and Robin Thomas. A new proof of the independence ratio of triangle-free cubic graphs. *Discrete Mathematics*, 233(1):233–237, 2001.
- [59] Michael A Henning and Christian Löwenstein. An improved lower bound on the independence number of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 179:120–128, 2014.
- [60] Michael A. Henning, Christian Löwenstein, Justin Southey, and Anders Yeo. A new lower bound on the independence number of a graph and applications. *Electronic Journal of Combinatorics*, 21(1):1–38, 2014.
- [61] Michael A. Henning, Ortrud R. Oellermann, and Henda C. Swart. Bounds on distance domination parameters. *J. Combin. Inform. System Sci*, 16(1):11–18, 1991.
- [62] P. Herrmann. *Reducibility among combinatorial problems*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1973.
- [63] E.J. Hoffman, J.C. Loessi, and R.C. Moore. Constructions for the solution of the m queens problem. *Mathematics Magazine*, 42(2):66–72, 1969.
- [64] John Hopcroft and Ravi Kannan. Mathematics for modern computing. *Forthcoming book*, 2013.
- [65] Glenn Hopkins and William Staton. Girth and independence ratio. *Can. Math. Bull.*, 25(2):179–186, 1982.

- [66] Kathryn Fraughnaugh Jones. Independence in graphs with maximum degree four. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 37(3):254–269, 1984.
- [67] Kathryn Fraughnaugh Jones. Size and independence in triangle-free graphs with maximum degree three. *Journal of Graph Theory*, 14(5):525–535, 1990.
- [68] Karsten Kämmerling and Lutz Volkmann. Roman k -domination in graphs. *J. Korean Math. Soc.*, 46(6):1309–1318, 2009.
- [69] Iyad Kanj. *Vertex cover: exact and approximation algorithms and applications*. PhD thesis, Texas A&M University, 2001.
- [70] Richard M. Karp. *Reducibility among combinatorial problems*. Springer, 1972.
- [71] Omar Kettani, Faycal Ramdani, and Benaïssa Tadili. A heuristic approach for the vertex cover problem. *International Journal of Computer Applications*, 82(4), 2013.
- [72] Dénes König. Über graphen und ihre anwendung auf determinantentheorie und mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 77(4):453–465, 1916.
- [73] Dénes König. Graphen und matrizen. *Mat. Fiz. Lapok*, 38:116–119, 1931.
- [74] Craig E. Larson. The fractional independence number and könig-egerváry graphs. *SIAM Discrete Mathematics Conference*, 2012.
- [75] Craig E. Larson. The independence number project: α -bounds. 2012.
- [76] Craig E. Larson and Ryan Pepper. Graphs with equal independence and annihilation numbers. *Electronic Journal of Combinatorics*, 18(1):P180, 2011.

- [77] Craig E. Larson and Ryan Pepper. Three bounds on the independence number of a graph. *Bull. Inst. Combin. Appl.*, 70:86–96, 2014.
- [78] Eugene L. Lawler. *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*. Courier Corporation, 1976.
- [79] F.J.E Lionnet. Question 963. In *Nouvelles Annales de Mathématiques*, volume 28, page 560, 1869.
- [80] Chor Ping Low and Hon Wai Leong. A new class of efficient algorithms for reconfiguration of memory arrays. *Computers, IEEE Transactions on*, 45(5):614–618, 1996.
- [81] Christian Löwenstein, Anders Sune Pedersen, Dieter Rautenbach, and Friedrich Regen. Independence, odd girth, and average degree. *Journal of Graph Theory*, 67(2):96–111, 2011.
- [82] Mei Lu, Huiqing Liu, and Feng Tian. Laplacian spectral bounds for clique and independence numbers of graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 97(5):726–732, 2007.
- [83] Carlos J. Luz. An upper bound on the independence number of a graph computable in polynomial-time. *Operations Research Letters*, 18(3):139–145, 1995.
- [84] Marija Milanović. Solving the generalized vertex cover problem by genetic algorithm. *Computing and Informatics*, 29(6+):1251–1265, 2012.
- [85] Owen Murphy. Lower bounds on the stability number of graphs computed in terms of degrees. *Discrete Mathematics*, 90(2):207–211, 1991.

- [86] Owen J. Murphy. Computing independent sets in graphs with large girth. *Discrete Applied Mathematics*, 35(2):167–170, 1992.
- [87] Franz Nauck. Briefwechsel mit allen für alle. *Illustrierte Zeitung*, 15:182, 1850.
- [88] E _ A Nordhaus and Jerry W. Gaddum. On complementary graphs. *American Mathematical Monthly*, 63(3):175–177, 1956.
- [89] Oystein Ore and Yystein Ore. *Theory of graphs*, volume 38. American Mathematical Society Providence, 1962.
- [90] E. Pauls. Das maximalproblem der damen auf dem schachbrette, *ii*, deutsche schachzeitung. *Organ für das Gesammte Schachleben*, 29(9):257–267, 1874.
- [91] Anders Sune Pedersen, Dieter Rautenbach, and Friedrich Regen. Lower bounds on the independence number of certain graphs of odd girth at least seven. *Discrete Applied Mathematics*, 159(2):143–151, 2011.
- [92] Martin Pelikan, Rajiv Kalapala, and Alexander K. Hartmann. Hybrid evolutionary algorithms on minimum vertex cover for random graphs. In *Proceedings of the 9th annual conference on Genetic and evolutionary computation*, pages 547–554. ACM, 2007.
- [93] Ryan Pepper. *Binding Independence*. PhD thesis, University of Houston, 2004.
- [94] Ryan Pepper, Greg Henry, and Dillon Sexton. Cut-edges and the independence number. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem*, 56:403–408, 2006.
- [95] Svatopluk Poljak. A note on stable sets and colorings of graphs. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 15(2):307–309, 1974.

- [96] Ira Pramanick and Jon G. Kuhl. An inherently parallel method for heuristic problem-solving. i. general framework. *Parallel and Distributed Systems, IEEE Transactions on*, 6(10):1006–1015, 1995.
- [97] Zdeněk Ryjáček and Ingo Schiermeyer. On the independence number in $k_{1,r+1}$ -free graphs. *Discrete Mathematics*, 138(1):365–374, 1995.
- [98] Stanley M. Selkow. A probabilistic lower bound on the independence number of graphs. *Discrete Mathematics*, 132(1):363–365, 1994.
- [99] Claude E. Shannon. The zero error capacity of a noisy channel. *Information Theory, IRE Transactions on*, 2(3):8–19, 1956.
- [100] James B. Shearer. The independence number of dense graphs with large odd girth. *Electronic Journal of Combinatorics*, 2(2), 1995.
- [101] Weiping Shi and W. Kent Fuchs. Probabilistic analysis and algorithms for reconfiguration of memory arrays. *IEEE Trans. Computer-Aided Design*, 11(9):1153–1160, 1992.
- [102] Jung-huei Shu. *Using a maximum matching to find a minimum vertex cover in a graph*. PhD thesis, Case Western Reserve University, 1998.
- [103] Michael D. Smith and Pinaki Mazumder. Generation of minimal vertex covers for row/column allocation in self-repairable arrays. *IEEE Transactions on Computers*, (1):109–115, 1996.
- [104] William Staton. Some ramsey-type numbers and the independence ratio. *Transactions of the American Mathematical Society*, 256:353–370, 1979.

- [105] George Szekeres and Herbert S. Wilf. An inequality for the chromatic number of a graph. *Journal of Combinatorial Theory*, 4(1):1–3, 1968.
- [106] Peter J. Taillon. *On Improving FPT if-Vertex Cover, With Applications To Some Combinatorial Problems*. PhD thesis, Carleton University Ottawa, 2007.
- [107] Robert Endre Tarjan and Anthony E. Trojanowski. Finding a maximum independent set. *SIAM Journal on Computing*, 6(3):537–546, 1977.
- [108] Fang Tian and Jun-Ming Xu. A note on distance domination numbers of graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, 43:181–190, 2009.
- [109] Paul Turán. An extremal problem in graph theory. *Mat. Fiz. Lupok*, 48:436–452, 1941.
- [110] Paul Turán. On the theory of graphs. In *Colloquium Mathematicae*, volume 3, pages 19–30. Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, 1954.
- [111] Lutz Volkmann. A characterization of bipartite graphs with independence number half their order. *Australasian Journal of Combinatorics*, 41:219–222, 2008.
- [112] V.K. Wei. A lower bound on the stability number of a simple graph. *Bell Lab. Tech. Memor*, pages 81–11217, 1981.
- [113] Dominic J.A. Welsh and Martin B. Powell. An upper bound for the chromatic number of a graph and its application to timetabling problems. *The Computer Journal*, 10(1):85–86, 1967.
- [114] Douglas Brent West. *Introduction to graph theory*, volume 2. Prentice hall Upper Saddle River, 2001.

- [115] Herbert S. Wilf. The eigenvalues of a graph and its chromatic number. *J. London Math. Soc.*, 42(1967):330, 1967.
- [116] Herbert S. Wilf. Spectral bounds for the clique and independence numbers of graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 40(1):113–117, 1986.
- [117] Yunjian Wu and Qinglin Yu. A characterization of graphs with equal domination number and vertex cover number. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*(2), 35(3):803–806, 2012.
- [118] A.M. Yaglom and I.M. Yaglom. *Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions; Volume 1: Combinatorial Analysis and Probability Theory*. Holden-Day, Inc., 1964.
- [119] Vadim Zverovich and Anush Poghosyan. On roman, global and restrained domination in graphs. *Graphs and Combinatorics*, 27(5):755–768, 2011.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

F -unit	واحد - F
H -free	آزاد - H
k -coloring	رنگ آمیزی - k
k -colorable	رنگ پذیر - k
k -graph	گراف - k
NP-hard	سخت - NP
NP-complete	کامل - NP
r -regular	منتظم - r
saturated	آلوده
size	اندازه
residue	باقیمانده
leaf	برگ
difficult block	بلوک سخت
improvement	بهبود
double-paw	پاروی دوگانه
strong support	پشتیبان قوی
bridge	پل
edge covering number	پوشانه یالی
vertex cover	پوشش رأسی

edge cover	پوشش یالی
minimum edge cover	پوشش یالی مینیمم
Roman dominating function	تابع احاطه‌گر رومی
corona	تاج
transversal	ترنسورسال
fractional transversal	ترنسورسال کسری
matching	تطابق
perfect matching	تطابق کامل
maximum matching	تطابق ماکسیمم
clique	خوشه
degree	درجه
median degree	درجه میانی
tree	درخت
rooted tree	درخت ریشه‌دار
spanning tree	درخت فراگیر
characterization	دسته‌بندی
degree sequence	دنباله درجات
cycle	دور
vertex	رأس
cut vertex	رأس برشی
central vertex	رأس مرکزی
divider vertex	رأس مقسم
isolated vertex	رأس منفرد
support vertex	رأس پشتیبان

color	رنگ
proper coloring	رنگ آمیزی مجاز
root of tree	ریشه درخت
subgraph	زیرگراف
induced subgraph	زیرگراف القایی
spanning subgraph	زیرگراف فراگیر
star	ستاره
double-star	ستاره دوگانه
radius	شعاع
strong product	ضرب قوی
Shannon capacity	ظرفیت شانون
r -domination number	عدد r -احاطه‌گری
domination number	عدد احاطه‌گری
distance- k domination number	عدد احاطه‌گری k -فاصله‌ای
Roman domination number	عدد احاطه‌گری رومی
independence number	عدد استقلال
critical independence number	عدد استقلال بحرانی
edge independence number	عدد استقلال یالی
transversal number	عدد ترنسورسال
fractional transversal number	عدد ترنسورسال کسری
clique number	عدد خوشه‌ای
chromatic number	عدد رنگی
annihilation number	عدد نابودی
distance	فاصله

average distance	فاصله متوسط
diameter	قطر
Cvetković bound	کران چتکوویچ
color class	کلاس رنگی
girth	کمر
graph	گراف
null graph	گراف تهی
bipartite graph	گراف دوبخشی
difficult graph	گراف سخت
complete split graph	گراف شکافته شده کامل
complete graph	گراف کامل
König-Egerváry graph	گراف کونینگ-ایگرواری
cubic graph	گراف مکعبی
complement graph	گراف مکمل
regular graph	گراف منتظم
eccentricity	گریز از مرکز
adjacency matrix	ماتریس مجاورت
maximum degree	ماکسیمم درجه
triangle	مثلث
r -dominating set	مجموعه r -احاطه‌گر
dominating set	مجموعه احاطه‌گر
distance- k dominating set	مجموعه احاطه‌گر k -فاصله‌ای
independent set	مجموعه مستقل
order	مرتبه

path	مسیر
bridge-augmenting path	مسیر پل افزوده
bridge-alternating path	مسیر پل – متناوب
component	مؤلفه
minimum degree	مینیمم درجه
disconnected	ناهمبند
connected	همبند
open neighborhood	همسایگی باز
closed neighborhood	همسایگی بسته
edge	یال
pendant edge	یال آویخته
cut edge	یال برشی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

adjacency matrix	ماتریس مجاورت
annihilation number	عدد نابودی
average distance	فاصله متوسط
bipartite graph	گراف دوبخشی
bridge	پل
bridge-alternating path	مسیر پل – متناوب
bridge-augmenting path	مسیر پل افزوده
central vertex	رأس مرکزی
chromatic number	عدد رنگی
clique	خوشه
clique number	عدد خوشه‌ای
closed neighborhood	همسایگی بسته
color	رنگ
color class	کلاس رنگی
connected	همبند
complement graph	گراف مکمل
complete graph	گراف کامل
complete split graph	گراف شکافته شده کامل
component	مؤلفه

corona	تاج
critical independence number	عدد استقلال بحرانی
cubic graph	گراف مکعبی
cut edge	یال برشی
cut vertex	رأس برشی
Cvetković bound	کران چتکوویچ
cycle	دور
degree	درجه
degree sequence	دنباله درجات
diameter	قطر
difficult block	بلوک سخت
difficult graph	گراف سخت
disconnected	ناهمبند
distance	فاصله
divider vertex	رأس مقسم
dominating set	مجموعه احاطه‌گر
domination number	عدد احاطه‌گری
double-paw	پاروی دوگانه
double-star	ستاره دوگانه
eccentricity	گریز از مرکز
edge	یال
edge cover	پوشش یالی
edge covering number	پوشانه یالی
edge independence number	عدد استقلال یالی

fractional transversal	ترنسورسال کسری
fractional transversal number	عدد ترنسورسال کسری
girth	کمر
graph	گراف
independence number	عدد استقلال
independent set	مجموعه مستقل
induced subgraph	زیرگراف القایی
improvement	بهبود
isolated vertex	رأس منفرد
König-Egerváry graph	گراف کونینگ-ایگرواری
leaf	برگ
matching	تطابق
maximum degree	ماکسیمم درجه
maximum matching	تطابق ماکسیمم
median degree	درجه میانی
minimum degree	مینیمم درجه
minimum edge cover	پوشش یالی مینیمم
null graph	گراف تهی
open neighborhood	همسایگی باز
order	مرتبہ
path	مسیر
pendant edge	یال آویخته
perfect matching	تطابق کامل
proper coloring	رنگ آمیزی مجاز

radius	شعاع
regular graph	گراف منتظم
residue	باقیمانده
rooted tree	درخت ریشه‌دار
root of tree	ریشه درخت
saturated	آلوده
Shannon capacity	ظرفیت شانون
size	اندازه
spanning subgraph	زیرگراف فراگیر
spanning tree	درخت فراگیر
star	ستاره
strong product	ضرب قوی
strong support	پشتیبان قوی
subgraph	زیرگراف
support vertex	رأس پشتیبان
transversal	ترنسورسال
transversal number	عدد ترنسورسال
tree	درخت
triangle	مثلث
unit	واحد
vertex	رأس
vertex cover	پوشش رأسی

نمایه

- C_5 - واحد، ۴۱
 H - آزاد، ۵
 K_4^* - واحد، ۴۱
 K_t - واحد، ۴۱
 k - رنگ آمیزی، ۹
 k - رنگ پذیر، ۹
 k - گراف، ۱۱۳
 n - پنجه، ۵
 r - منتظم، ۵
 NP - سخت، ۲۴
 NP - کامل، ۲۴
 اندازه، ۲
 باقیمانده، ۳
 برگ، ۳
 بلوک، ۴
 بلوک سخت، ۴۵
 تابع r - احاطه‌گر رومی k - فاصله‌ای، ۱۱۲
 تابع r - احاطه‌گری رومی، ۱۱۲
 تابع احاطه‌گر رومی، ۱۱۱
 تاج، ۵
 ترنسورسال، ۶
 ترنسورسال کسری، ۱۵
 تطابق، ۱۲
 تطابق ماکسیمم، ۱۲
 تطابق کامل، ۱۲
 خوشه، ۸
 درجه، ۲
 درجه میانی، ۳
 درخت، ۵
 درخت ریشه‌دار، ۵
 رأس، ۲
 رأس بد، ۱۱۹
 رأس برشی، ۴
 رأس مرکزی، ۵
 رأس مقسم، ۴۱
 رأس منفرد، ۳
 رأس پشتیبان، ۳
 رأس‌های مرکزی ستاره دوگانه، ۵

- رابطه نردهاس-گدم، ۱۰۹
- رنگ آمیزی احاطه‌گر، ۱۱
- رنگ آمیزی مجاز، ۹
- ریشه درخت، ۵
- زیرتقسیم کردن، ۶
- زیرگراف القایی، ۴
- ستاره، ۵
- ستاره دوگانه، ۵
- شعاع، ۴
- ضرب قوی، ۱۶
- ظرفیت شانون، ۱۷
- عدد r -احاطه‌گری، ۱۱۲
- عدد r -احاطه‌گری رومی، ۱۱۲
- عدد r -احاطه‌گری رومی k -فاصله‌ای، ۱۱۲
- عدد احاطه‌گری، ۱۰
- عدد احاطه‌گری رومی، ۱۱۱
- عدد احاطه‌گری k -فاصله‌ای، ۱۱۲
- عدد استقلال، ۷
- عدد استقلال بحرانی، ۱۴
- عدد استقلال یالی، ۱۲
- عدد ترنسورسال، ۶
- عدد ترنسورسال کسری، ۱۵
- عدد خوشه‌ای، ۸
- عدد رنگی، ۹
- عدد رنگی احاطه‌گر، ۱۱
- عدد نابودی، ۱۳
- فاصله، ۴
- فاصله متوسط، ۴
- قطر، ۴
- ماکسیمم درجه، ۲
- مجموعه r -احاطه‌گر، ۱۱۲
- مجموعه احاطه‌گر، ۱۰
- مجموعه احاطه‌گر k -فاصله‌ای، ۱۱۲
- مرتبه، ۲
- مستقل، ۷
- مسیر پل-افزوده، ۷۶
- مسیر پل-متناوب، ۷۶
- منتظم، ۵
- مینیمم درجه، ۲
- ناهمبند، ۴
- همبند، ۴
- همسایگی باز، ۲
- همسایگی بسته، ۲
- واحد، ۴۱
- واحد آلوده شده، ۷۶
- پاروی دوگانه، ۵۰
- پشتیبان قوی، ۳
- پل، ۴۱

یال برشی، ۴

پوشانه یالی، ۱۳

پوشش رأسی، ۶

پوشش یالی، ۱۳

پوشش یالی مینیمم، ۱۳

کران توران، ۳۴

کران خواتال - مک دیارمید، ۳۶

کران زیکرس - ویلف، ۳۸

کران سوتکوویچ، ۳۴

کران هافمن - لواس، ۴۵

کران ولش - پاول، ۳۷

کران کارو - وی، ۳۵

کمر فرد، ۴۰

گراف، ۲

گراف ۲ - همبند، ۴

گراف تهی، ۳

گراف سخت، ۴۵

گراف شعاع - بحرانی، ۴

گراف شکافته شده کامل، ۵

گراف مکعبی، ۵

گراف مکمل، ۳

گراف کونیگ - ایگرواری، ۱۵

گریز از مرکز، ۴

یال، ۲

یال آویخته، ۳

Aabstract

In this thesis, we study the transversal number of graphs, and state some features, applications and bounds available for this parameter. In order to emphasize the practical importance of this problem, we present some efficiently computable bounds in this thesis. Then, we will improve some of these bounds and present new bounds for graphs and connected graphs that have a non-cut-vertex of maximum degree. Also, we characterize the new bounds. Finally, we present a constructive characterization of bipartite graphs with specified transversal number.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in: Graph and Combinatorics

Bounds on the transversal number in a graph

By: Elahe Sharifi

Supervisor

Dr. Nader Jafari Rad

January 2017