بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

احتمال ورشکستگی شرکت بیمه در بازاری با مدل پواسون مرکب

نگارنده: حدیث عیسی پور

استاد راهنما

دکتر الهام دسترنج

بهمن ۱۳۹۵

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود
مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۷: صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای **حدیث عیسی پور بن ریزی** به شماره دانشجویی ۹۳۱۲۵۰۴ رشته ریاضی محض گرایش آنالیز تحت عنوان **احتمال ورشکستگی شرکت بیمه در بازاری با مدل پواسون مرکب** که در تاریخ **۱۳۹۵/۱۱/۴** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه : بسیار خوب امتیاز ۱۸٫۵) ☑	دفاع مجدد ☐	مردود ☐
نوع تحقیق: نظری ☑	عملی ☐	

۱- عالی (۲۰ - ۱۹)
۲- بسیار خوب (۱۸/۹۹ - ۱۸)
۳- خوب (۱۷/۹۹ - ۱۶)
۴- قابل قبول (۱۵/۹۹ - ۱۴)
۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱- استادراهنمای اول	دکتر الهام دسترنج	استادیار	
۲- استادراهنمای دوم	----	----	—
۳- استاد مشاور	-----	----	—
۴- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر محمدرضا ربیعی	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر احمد زیره	دانشیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر مجتبی میرلوحی	استادیار	

رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تقدیم به تمام کسانی که ریاضی را دوست دارند.

نیایش...

خدایا... [1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، سرکار **خانم دکتر الهام دسترنج** ، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از دوستان عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

حدیث عیسی پور

بهمن ۱۳۹۵

تعهدنامه

اینجانب **حدیث عیسی پور** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **احتمال ورشکستگی شرکت بیمه در بازاری با مدل پواسون مرکب** ، تحت راهنمایی **الهام دسترنج** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه شاهرود ‘‘ یا ‘‘ Shahrood University of Technology ‘‘ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

حدیث عیسی پور
بهمن ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این رساله وارد بازارهای بورسی می شویم که از مدل فرآیند پواسون مرکب تبعیت کرده و فرآیند دارایی شرکت بیمه در آن بازار از فرمول تصادفی زیر تبعیت می کند.

$$S_r(t) = xe^{rt} + \int_{۰}^{t} e^{r(t-s)} C(\mathrm{ds}) - \sum_{k=۱}^{N(t)} X_k e^{r(t-\sigma_k)}, \quad t \geq ۰$$

که در آن X_k فرایند ضرر و C حق بیمه ای است که سهام‌دار پرداخت می‌کند. در این نوع بازارها به دنبال یافتن فرمول مناسب و ساده‌ای برای احتمال ورشکستگی شرکت بیمه کننده ای هستیم که سرمایه ریسکی مفروض در بازار را بیمه کرده است.

کلمات کلیدی:
فرآیند پواسون مرکب، احتمال ورشکستگی، سرمایه ریسکی

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

از آنجا که آشنایی با برخی مفاهیم و اصطلاحات اولیه برای درک بهتر این پایان نامه مورد نیاز است، در این بخش سعی بر آن شده است که به طور خلاصه به آنها پرداخته شود. مطالب ارائه شده در این بخش به جز مواردی که به روشنی ذکر شده است، از مراجع [۲۸] و [۲۷] و [۳۲] آورده شده است.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد، تابع $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ را یک **نرم** روی V گوییم هرگاه

۱. برای هر $x \in V$، $\|x\| \geq 0$،

۲. برای هر $x \in V$ و $\alpha \in \mathbb{R}$، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$،

۳. برای هر $x, y \in V$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$،

۴. برای هر $x \in V$ ، $\|x\| = 0$اگر و فقط اگر $x = 0$.

به $(V, \|\cdot\|)$ **فضای نرمدار** می‌گوییم. هرگاه V با متر $d(x, y) = \|x - y\|$ فضای متریک تام باشد، به آن **فضای باناخ** می‌گوییم.

۲.۱ اندازه و اندازه پذیری

مفاهیمی که در این بخش و بخش بعدی آمده، از مرجع [۳۱] می‌باشد.
فرض کنیم X مجموعه ای ناتهی و C دسته ای ناتهی از زیر مجموعه های X باشد.

۱. C را یک **نیم حلقه** از زیر مجموعه های X گوییم اگر C تحت اشتراک‌های متناهی بسته و تفاضل هر دو عضو C برابر با اجتماعی متناهی از اعضای دوبه‌دو مجزای C باشد.

۲. C را یک **حلقه** از زیر مجموعه‌های X گوییم اگر C تحت اجتماع‌های متناهی و تفاضل بسته باشد.

۳. C را یک **نیم میدان** (نیم جبر) از زیر مجموعه‌های X گوییم اگر C تحت اشتراک‌های متناهی بسته و مکمل هر عضو برابر با اجتماعی متناهی از اعضای دوبه‌دو مجزای C باشد.

۴. C را یک σ**ـ میدان** از زیر مجموعه های X گوییم اگر C تحت اجتماع‌های شمارش‌پذیر و مکمل بسته باشد.

دسته های گوناگون از بازه‌ها در $\mathbb{R}$ و حاصلضرب‌های دکارتی آنها در سایر فضاهای اقلیدسی الگوهای مناسبی برای نیم حلقه هستند.
فرض کنیم C دسته ای ناتهی و دلخواه از زیر مجموعه ها باشد، منظور از یک اندازه روی C تابعی مانند μ با دامنه C است به‌طوری که در شرایط زیر صدق کند.

۱) برای هر A در C، $0 \leq \mu(A) \leq \infty$،

۲) هرگاه $\{A_n, n \geq 1\}$، دنباله ای (متناهی یا نامتناهی) از اعضای دوبه‌دو مجزای C باشد به‌طوری که $(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \in C$ آنگاه $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

فرض کنیم C دسته‌ای دلخواه از زیر مجموعه‌های X باشد، (برحسب رابطه شمول) کوچکترین σـ میدان شامل C از زیر مجموعه‌های X را σـ میدان تولید شده توسط C می‌نامیم و به صورت $\sigma(C)$ نشان می‌دهیم. لازم به ذکر است که $\sigma(C)$ اشتراک تمام σـجبرهای شامل C است. فرض کنیم $X = \mathbb{R}$ (یا $\mathbb{R}^n$) و C دسته تمام بازه ها باشد. σـجبر تولید شده توسط C را σـجبربورل گوییم و با $\mathcal{B}$ نشان می‌دهیم. دسته تمام بازه ها به صورت $[a, b)$ یا $[a, b]$ یا (a, b) که در آن a, b اعداد گویا هستند و یا مجموعه شعاع‌هایی که ابتدا و انتهای آنها اعداد گویا باشند همگی مولد $\mathcal{B}$اند.

ملاحظه ۱.۲.۱. الف) به‌طور کلی در یک فضای توپولوژیکی σـ میدان تولید شده توسط مجموعه‌های باز را σـ میدان بورل می‌نامیم و با $\mathcal{B}$ نشان می‌دهیم.

ب) دسته مجموعه‌های بورل، کوچکترین σـ میدانی است که حاوی همه مجموعه‌های باز است.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم C سازه‌ای (نیم حلقه، نیم میدان، حلقه یا میدان) از زیر مجموعه‌های X و μ اندازه‌ای روی C باشد. **اندازه μ را روی C، متناهی گوییم** هرگاه برای هر A در C، $\mu(A) < \infty$ و σـ متناهی گوییم هرگاه دنباله‌ای مانند $\{A_n, n \geq ۱\}$ از اعضای C وجود داشته باشد به طوری‌که $X = \cup_{n=۱}^{\infty} A_n$ و برای هر n، $\mu(A_n) < \infty$.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و $\mathcal{H}$ نیم حلقه‌ای از زیر مجموعه های X و μ اندازه ای σـ متناهی روی $\mathcal{H}$ باشد. برای زیر مجموعه‌ی دلخواه A از X **اندازه خارجی** A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{n\geq ۱} \mu(I_n) : I_n \in \mathcal{H}, A \subset \cup_{n\geq ۱} I_n\}$$

ملاحظه ۴.۲.۱. الف) برای $I \in \mathcal{H}$، $\mu^*(I) = \mu(I)$

ب) اگر $\{A_n\}_{n\geq ۱}$ دنباله‌ای دلخواه باشد آن‌گاه

$$\mu^*(\cup_{n\geq ۱} A_n) \leq \sum_{n\geq ۱} \mu^*(A_n).$$

زیر مجموعه‌ی A از X را نسبت به μ^* (یا μ) اندازه‌پذیر گوییم، اگر برای هر I در $\mathcal{H}$ داشته باشیم

$$\mu(I) = \mu^*(I \cap A) + \mu^*(I - A).$$

ملاحظه ۵.۲.۱. الف) هر عضو $\mathcal{H}$ و هر عضو حلقه‌ی تولید شده توسط $\mathcal{H}$ اندازه‌پذیراند.

ب) اگر A نسبت به μ^* اندازه‌پذیر باشد، آنگاه برای هر زیر مجموعه دلخواه B از X داریم

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B - A).$$

تعریف ۶.۲.۱. منظور از یک **فضای اندازه پذیر** عبارت است از زوج $(X, \mathcal{A})$، که متشکل از یک مجموعه ناتهی مانند X و σـ میدان $\mathcal{A}$ از زیر مجموعه‌های X می‌باشد. هر عضو $\mathcal{A}$ را یک مجموعه‌ی اندازه پذیر می‌نامیم. منظور از یک فضای اندازه، سه‌تایی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ است که $(X, \mathcal{A})$ یک **فضای اندازه‌پذیر** و μ یک **اندازه** روی σـ میدان $\mathcal{A}$ است.

تعریف ۷.۲.۱. گوییم خاصیتی که برای تمام اعضای فضای اندازه $(X, \mathcal{A}, \mu)$ تعریف شده است، **تقریبا همه جا**[۱] یا (a.e.) برقرار است اگر و تنها اگر مجموعه نقاطی که دارای آن خاصیت نیستند، اندازه پذیر و دارای اندازه μ صفر باشند.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد، تابع $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^n, B)$ را اندازه‌پذیر یا $\mathcal{A}$ـ اندازه‌پذیر گوییم هرگاه برای هر $u \in B$، داشته باشیم

$$f^{-۱}(U) := \{x \in X;\ f(x) \in U\} \in \mathcal{A}.$$

[۱] Almost everywhere

تابع $Y:(\Omega,F)\to(\mathbb{R}^n,B)$ را در نظر بگیرید. σـ **میدان** F_Y **تولید شده توسط** Y، کوچکترین σـ میدان روی Ω شامل مجموعه های

$$Y^{-1}(B);\qquad B\in B,$$

می‌باشد، به عبارت دیگر

$$F_Y=\{Y^{-1}(B);\ B\in B\}.$$

به وضوح Y نسبت به F_Y، اندازه‌پذیر است.

انتگرال

تعریف ۹.۲.۱. اگر A مجموعه ای دلخواه از σـمیدان $\mathcal{A}$ باشد، تابع مشخصه‌ی مجموعه‌ی A را با χ_A نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & o.w.\end{cases}$$

تعریف ۱۰.۲.۱. تابع ساده تابعی است با دامنه دلخواه و مقادیر حقیقی، که تعداد مقادیرش متناهی است. فرض کنیم φ تابعی ساده روی فضای اندازه $(X,\mathcal{A},\mu)$ با مقادیر متمایز $a_1,a_2,\dots,a_n$ باشد. می‌توان نوشت $\varphi=\sum_{i=1}^n a_i\chi_{A_i}$ که در آن $A_i=\{x\in X:\varphi(x)=a_i\}$، روشن است که A_i ها مجزا هستند.

اندازه پذیری φ معادل است با اینکه بگوییم A_iها اندازه‌پذیراند. انتگرال φ نسبت به اندازه‌ی μ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\int_X\varphi d\mu=\sum_{i=1}^n a_i\mu(A_i).$$

قرارداد می‌کنیم $0=\infty\times 0$. فرض می‌کنیم $(X,\mathcal{A},\mu)$ یک فضای اندازه وf تابعی اندازه پذیر و نامنفی باشد. انتگرال f روی هر $A\in\mathcal{A}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\int_A fd\mu=\sup\{\int_A\varphi d\mu:\varphi\le f\},$$

که در آن φ تابعی ساده و نامنفی است.

ملاحظه ۱۱.۲.۱. فرض کنیم f تابع اندازه‌پذیر روی X و $A_1,A_2,\dots$ دنباله‌ای از اعضای دوبه‌دو مجزای A باشد و $A=\cup_{i=1}^{\infty}A_i$. در این‌صورت خواهیم داشت

$$\int_A fd\mu=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{A_i}f\mathrm{d}\mu.$$

قرارداد ۱. تابع اندازه‌پذیر و نامنفی f روی مجموعه اندازه‌پذیر A، انتگرال‌پذیر گوییم هرگاه

$$\int_A f \mathrm{d}\mu < \infty.$$

تعریف ۱.۲.۱۲. اگر f تابعی حقیقی با دامنه دلخواه باشد، متناظر با f برای هر x از دامنه f توابع f^- و f^+ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f^-(x) = \max\{-f(x), \circ\} \qquad , \qquad f^+(x) = \max\{f(x), \circ\}.$$

f^- و f^+ را به ترتیب جزء منفی و جزء مثبت f می‌نامیم. در این‌صورت $f = f^+ - f^-$، یعنی هر تابع اندازه‌پذیر را می‌توان به‌صورت تفاضل دو تابع اندازه‌پذیر نامنفی نوشت. همچنین داریم $| f | = f^+ + f^-$. روشن است اگر f اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه f^- و f^+ نیز اندازه‌پذیرند.

تعریف ۱.۲.۱۳. فرض کنید (X, A, μ) یک فضای اندازه باشد. تابع f که روی X تعریف شده است را انتگرال‌پذیر گوییم، هرگاه $\int f^-$ و $\int f^+$ هر دو متناهی باشند. در این‌صورت برای هر $A \in \mathcal{A}$ تعریف می‌کنیم

$$\int_A f \mathrm{d}\mu = \int_A f^+ \mathrm{d}\mu - \int_A f^- \mathrm{d}\mu.$$

۱.۳ نظریه احتمال

نظریه احتمال مطالعه رویدادهای احتمالی از دیدگاه ریاضیات است. به عبارت دیگر، نظریه احتمال به شاخه ای از ریاضیات گویند که با تحلیل وقایع تصادفی سروکار دارد. هسته تئوری احتمال را متغیرهای تصادفی و فرآیندهای تصادفی و پیشامدها تشکیل می‌دهند. نظریه احتمال علاوه بر توضیح پدیده‌های تصادفی به بررسی پدیده‌هایی می‌پردازد که لزوماً تصادفی نیستند ولی با تکرار زیاد دفعات آزمایش نتایج از الگویی مشخص پیروی می‌کنند، مثلاً در آزمایش پرتاب سکه یا تاس با تکرار آزمایش می‌توانیم احتمال وقوع پدیده‌های مختلف را حدس بزنیم و مورد بررسی قرار دهیم.

تعریف ۱.۳.۱. **فضای احتمال** عبارت است از فضای اندازه‌ی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ به طوری که $P(\Omega) = ۱$، Ω را فضای نمونه، اعضای $\mathcal{F}$ را پیشامد و P را اندازه احتمال می‌نامیم.

تعریف ۱.۳.۲. مجموعه‌ی $A \in \mathcal{F}$ را **$\mathbf{P}$ـ پوچ** می‌نامیم هرگاه $P(A) = \circ$.

تعریف ۱.۳.۳. فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را **کامل یا تام** می‌نامیم هرگاه $\mathcal{F}$ شامل تمام زیرمجموعه‌های هر مجموعه Pـ پوچ باشد.

به روشنی، هر فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را می‌توان با اضافه کردن زیر مجموعه‌های هر مجموعه Pـ پوچ به $\mathcal{F}$ کامل نمود.

تعریف ۴.۳.۱. اگر $P(A) = ۱$ می‌گوییم پیشامد A با احتمال ۱ رخ می‌دهد یا A قریب به یقین [۲] رخ می‌دهد.

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنید $(\Omega_۱, \mathcal{F}_۱)$، $(\Omega_۲, \mathcal{F}_۲)$، ... ، $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ فضاهای اندازه پذیر باشند. زیر مجموعه های $F_۱ \times F_۲ \times \cdots \times F_n$ از $\Omega_۱ \times \Omega_۲ \times \cdots \times \Omega_n$ رابرای $F_۱ \subseteq \Omega_۱$، $F_۲ \subseteq \Omega_۲$، ... و $F_n \subseteq \Omega_n$ راست گوشه و برای $F_۱ \in \mathcal{F}_۱$، $F_۲ \in \mathcal{F}_۲$ ، ... ، $F_n \in \mathcal{F}_n$ راست گوشه اندازه پذیر می‌نامیم. دسته راست‌گوشه‌های اندازه پذیر، یک نیم میدان روی $\Omega_۱ \times \Omega_۲ \times \cdots \times \Omega_n$ است. σـ میدان تولیدشده در $\Omega_۱ \times \Omega_۲ \times \cdots \times \Omega_n$ توسط نیم میدان راست‌گوشه‌های اندازه‌پذیر را σـ میدان حاصلضربی نامیده و با نماد $\mathcal{F}_۱ \otimes \mathcal{F}_۲ \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_n$ نشان می‌دهیم.
اگر برای هر $۱ \leq i \leq n$، P_i یک اندازه روی $\mathcal{F}_i$ باشد، اندازه P روی نیم‌حلقه راست گوشه‌های اندازه‌پذیر به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$P(F_۱ \times F_۲ \times \cdots \times F_n) = P_۱(F_۱) \times P_۲(F_۲) \times \cdots \times P_n(F_n).$$

تعریف ۶.۳.۱. گیریم $\{U_\alpha, \alpha \in I\}$ دسته ای از زیر σـ میدان‌های $\mathcal{F}$ باشد. σـ میدان الحاقی این دسته از σـ میدان‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\bigvee_{\alpha\in I} U_\alpha = \sigma(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha)$$

از این پس، همه جا منظور از (Ω, F, P) فضای احتمال و توپولوژی مفروض روی فضاهای اقلیدسی توپولوژی استاندارد و σـ میدان مفروض روی آنها σـ میدان بورل است و $\mathcal{B}$ نشانگر σـ میدان بورل روی $\mathbb{R}$ است.

تعریف ۷.۳.۱. فرض کنید $\mu_۱$ و $\mu_۲$ دو اندازه روی $(X, \mathcal{A})$ باشند. اندازه $\mu_۱$ را نسبت به اندازه $\mu_۲$ **مطلقا پیوسته** گوییم و می‌نویسیم $\mu_۱ \ll \mu_۲$، هرگاه

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad (\mu_۲(A) = ۰ \Rightarrow \mu_۱(A) = ۰).$$

قضیه ۸.۳.۱. (**مشتق رادون‌ـ نیکودیم** [۳]) فرض کنید $\mu_۱$ و $\mu_۲$ دو اندازه σـ متناهی روی $(X, \mathcal{A})$ باشند به‌طوری‌که $\mu_۱ \ll \mu_۲$. تابع اندازه‌پذیر و نامنفی f روی X وجود دارد به‌طوری‌که

$$\forall A \in \mathcal{A}, \qquad \mu_۱(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu_۲.$$

۱.۳.۱ متغیر تصادفی‌ـ امید ریاضی

در سراسر این رساله توپولوژی مفروض روی فضاهای اقلیدسی توپولوژی استاندارد و σـ میدان مفروض روی آنها σـ میدان بورل است.

---
[۲] almost surely
[۳] Radon-Nikodym Derivation

اگر$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ فضایی احتمال باشد، هر تابع حقیقی و اندازه پذیر روی $(\Omega, \mathcal{F})$ **متغیر تصادفی** نامیده می‌شود.
معمولا برای نشان دادن متغیرهای تصادفی از حروف بزرگ لاتین مثل $X, Z, U, \ldots$ استفاده می‌کنیم.

بردار تصادفی nـ بعدی $\overline{X} = (X_۱, X_۲, \ldots, X_n)$، تابعی است اندازه‌پذیر که دامنه آن فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و مقادیر آن در $\mathbb{R}^n$ است یعنی برای هر $A \in \mathcal{B}_n$ داریم

$$\{\omega : \overline{X}(\omega) \in A\} = \{(X_۱, X_۲, \ldots, X_n) \in A\} \in \mathcal{F},$$

که در آن $\mathcal{B}_n$، σـ میدان بورل روی $\mathbb{R}^n$ است.

تعریف ۹.۳.۱. فرض کنیم X یک متغیر تصادفی باشد، σ**ـ میدان تولید شده توسط** X که بانماد $\sigma(X)$ یا $\mathcal{F}_X$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathcal{F}_X = \sigma(X) = \{X^{-۱}(A) : A \in \mathcal{B}\}$$

تعریف ۱۰.۳.۱. اگر X متغیری تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد، تابع توزیع X که آن را با F_X نشان می‌دهیم، برای هر عدد حقیقی x، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F_X(x) = P_X(-\infty, x] = P\{X \leq x\}.$$

که در آن P_X اندازه القاشده توسط X روی $\mathcal{B}$ است که **توزیع متغیر تصادفی** نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۳.۱. فرض کنیم X یک متغیر تصادفی انتگرال‌پذیر روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد. $\int_\Omega XdP$ را **امید ریاضی** X می‌گوییم و با نماد $E(X)$ نشان می‌دهیم.

امید ریاضی تابعی از یک متغیر تصادفی، مثل $g(X)$ به‌طور طبیعی به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E(g(X)) = \int_\Omega g(X)dP.$$

تعریف ۱۲.۳.۱. **واریانس** متغیر تصادفی X را با $\sigma^۲(X)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\sigma^۲(X) = E\left[(X - E(X))^۲\right].$$

به طور کلی اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر باشد و $\int\limits_\Omega |f(X(\omega))| P(\omega) < \infty$ آن‌گاه

$$E[f(X)] := \int\limits_\Omega f(X(\omega))\ P(\omega) = \int\limits_\mathbb{R} f(x)\, P_X(x).$$

تعریف ۱۳.۳.۱. اندازه تغییرات هماهنگ دو متغیر تصادفی را **کواریانس** می‌نامیم. (اگر دو متغیر یکی باشند کواریانس برابر واریانس خواهد شد) برای متغیرهای تصادفی X و Y که امید ریاضی آنها $E[X] = \mu$ و $E[Y] = \nu$ هستند کواریانس برابر است با

$$cov(X, Y) = E[(X - E(X)).(Y - E(Y))] = E[(X - \mu)(Y - \nu)]$$

چنان‌که دو متغیر تصادفی ناهمبسته باشند، کواریانس آنها صفر می‌شود.

خواص کوواریانس

۱. $cov(X,X) = var(X)$

۲. $cov(X,Y) = cov(Y,X)$

۳. برای هر $a,b,c,d \in \mathbb{R}$

(آ) $cov(X,a) = \circ$

(ب) $cov(aX,bY) = abcov(X,Y)$

(ج) $cov(X+a,Y+b) = cov(X,Y)$

تعریف ۱.۳.۱۴. اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، آن‌گاه $E(X^r)$ (که r یک عدد طبیعی است) را **گشتاور مرتبه rــام** پیرامون مبدا می‌گوییم.

تعریف ۱.۳.۱۵. اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال $f_X(x)$ باشد، **تابع مولد گشتاور** X را با علامت $M_X(t)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$M_X(t) = E(\mathbf{e}^{tX})$$

تعریف ۱.۳.۱۶. دو پیشامد A و B از فضای احتمال مفروض $(\Omega,\mathcal{F},P)$ **مستقل** است هرگاه

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B).$$

تعریف ۱.۳.۱۷. دو متغیر تصادفی $X,Y : (\Omega,F,P) \to (\mathbb{R},B)$ را مستقل گوییم هرگاه σــ میدان‌های تولید شده توسط X و Y یعنی F_X و F_Y مستقل باشند، به این معنا که برای هر $A\in F_X$ و $B\in F_Y$ داشته باشیم.

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B),$$
$$(F_X = \{X^{-1}(B) : B\in B\})$$

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند، در این صورت

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

تعریف ۱.۳.۱۸. متغیر تصادفی X را انتگرال‌پذیر گوییم هرگاه

$$EX < \infty$$

باشد، به عبارت دیگر امید ریاضی متغیر تصادفی X متناهی باشد.

نتیجه ۱.۳.۱۹. اگر $E(|X|) < \infty$ باشد، آن‌گاه $EX < \infty$ می‌باشد.

با توجه به تعریف ۱.۳.۱۸ و نتیجه ۱.۳.۱۹ نتیجه می‌گیریم که متغیر تصادفی X انتگرال‌پذیر است، اگر $|X|$ انتگرال‌پذیر باشد.

۲.۳.۱ لم فاتو و قضیه همگرایی تسلطی لبگ

مطالب این بخش از مرجع [۲۰] می‌باشد.

لم ۲۰.۳.۱. (**لم فاتو**[۴]) فرض کنید $\{X_n; n \geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی نامنفی باشد، آن‌گاه

$$E(\liminf_{n\to\infty} X_n) \leq \liminf_{n\to\infty} E(X_n)$$

اکنون قضیه ای مشابه لم فاتو بیان می‌کنیم، با این تفاوت که فرضیه انتگرال‌پذیری را به متغیرهای تصادفی نسبت داده و نتیجه را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲۱.۳.۱. اگر Y و Z دو متغیر تصادفی انتگرال‌پذیر باشند به‌طوری‌که

$$Y \leq X_n \leq Z$$

آن‌گاه

$$E(\liminf_{n\to\infty} X_n) \leq \liminf_{n\to\infty} E(X_n) \leq \limsup_{n\to\infty} E(X_n) \leq E(\limsup_{n\to\infty} X_n)$$

قضیه ۲۲.۳.۱. (**قضیه همگرایی تسلطی لبگ**[۵]) فرض کنید برای هر n، $|X_n| \leq Y$ باشد، که $EY < \infty$ است و زمانی‌که $n \to \infty$، داشته باشیم

$$X_n \to X \quad a.s.$$

در این‌صورت

$$E|X_n - X| \to 0$$

و در حالت خاص

$$EX_n \to EX.$$

برهان. از $|X_n| \leq Y$ و $X_n \to X$ رابطه زیر را داریم.

$$|X_n| - |X| \leq |X_n - X| \leq |X_n| + |X| \leq 2Y \Rightarrow \underbrace{-2Y}_{Y} \leq \underbrace{X_n - X}_{X_n} \leq \underbrace{2Y}_{Z}$$

حال با به کارگیری قضیه ۲۱.۳.۱ رابطه زیر را داریم.

$$\begin{aligned}\underbrace{E\left(\liminf_{n\to\infty}(X_n - X)\right)}_{0} &\leq \liminf_{n\to\infty} E(X_n - X) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} E(X_n - X) \\ &\leq \underbrace{E\left(\limsup_{n\to\infty}(X_n - X)\right)}_{0}\end{aligned} \tag{1.1}$$

[۴] Fatou's Lemma

[۵] The Lebesgue Dominated Convergence Theorem

در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n - X) = 0 \Rightarrow E(X_n) \to E(X) \qquad (۲.۱)$$

به علاوه اگر هم رابطه $-2Y \leq X_n - X \leq 2Y$ را داشته باشیم، باز هم نتایج به دست آمده فوق برابر است، به این صورت که

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n - X) = 0 \qquad (۳.۱)$$

در آخر از روابط (۲.۱) و (۳.۱) داریم که

$$E|X_n - X| \to 0.$$

□

۳.۳.۱ فرآیند تصادفی

در سراسر این بخش فضای احتمال مفروض (Ω, F, P) است. همچنین σــ میدان مفروض روی فضاهای اقلیدسی σــ میدان بورل است. خانواده $\{X_t\}_{t\in I}$ از متغیرهای تصادفی روی فضای احتمال مشترک (Ω, F, P) را **فرآیند تصادفی** [۶] می‌نامیم (مجموعه اندیس‌گذار I می‌تواند شمارش پذیر یا شمارش ناپذیر باشد).

فرآیند تصادفی $\{X(t), t \in T\}$ خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی است. یعنی، به ازاء هر $t \in T$، $X(t)$ یک متغیر تصادفی است. مجموعه اندیس‌گذار T را زمان نامیده و $X(t)$ را حالت فرآیند [۷] در زمان t می‌خوانیم. اگر مجموعه اندیس‌گذار T شمارا باشد، فرآیند را گسسته زمان [۸] نامیده، و اگر T پیوسته باشد فرآیند را پیوسته زمان [۹] می‌نامیم. مقادیری که متغیر تصادفی $X(t)$ اختیار می‌کند را فضای حالات [۱۰] نامیده و این فضا می‌تواند گسسته یا پیوسته باشد. گوییم فرآیند دارای نموهای مستقل [۱۱] است، هرگاه به ازاء هر دنباله از اندیس‌ها مانند $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$، متغیرهای تصادفی $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ مستقل از هم بوده، و گوییم دارای نموهای ایستا [۱۲] است اگر $X(t+s) - X(t)$ برای تمامی t های متعلق به T دارای توزیع ثابت باشد.

۴.۳.۱ امید شرطی

فرض کنید (Ω, F, P) فضایی احتمال باشد و فرض کنید D زیر σــ میدانی از F و Y متغیری تصادفی، نامنفی و انتگرال‌پذیر باشد. **امید** Y **به شرط** D یک متغیر تصادفی Dــ اندازه‌پذیر روی $(\Omega, \mathcal{F})$ است

[۶] Stochastic Process
[۷] Process State
[۸] Discrete-Time
[۹] Continuouse-Time
[۱۰] State Space
[۱۱] Independent Increment
[۱۲] Stationary Increment

که آن را با $E(Y|D)$ نشان می‌دهیم و داریم

$$\forall D \in D, \quad \int_D E(Y|D)dP = \int_D Y dP.$$

برای متغیر تصادفی انتگرال‌پذیر دلخواه Y ، امید شرطی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E(Y|D) = E(Y^+|D) - E(Y^-|D),$$

که در آن برای هر ω، $Y^+(\omega) = \max\{Y(\omega), 0\}$ و $Y^-(\omega) = \max\{-Y(\omega), 0\}$.

خواص امید شرطی

۱. اگر $X \geq 0$ آن‌گاه

$$E(X|D) \geq 0, \qquad \text{a.s.}$$

۲. $E(X + Y|D) = E(X|D) + E(Y|D), \qquad \text{a.s.}$.

۳. برای هر $a \in \mathbb{R}$

$$E(aX|D) = aE(X|D), \qquad \text{a.s.}$$

۴. اگر $D = \{\Omega, \emptyset\}$ آنگاه

$$E(X|D) = E(X), \qquad \text{a.s.}$$

۵. اگر $D_1 \subseteq D_2$

$$E(E(X|D_2)|D_1) = E(X|D_1), \qquad \text{a.s.}$$

۶.

$$E(E(X|D)) = E(X), \qquad \text{a.s.}$$

۴.۱ فرآیند مارکف

فرآیندهای مارکف رده‌ای مهم از فرآیندهای تصادفی هستند، یک فرآیند تصادفی را مارکف گویند هرگاه آینده فرآیند به گذشته آن بستگی نداشته باشد و اصطلاحاً آن را فرآیند بی‌حافظه می‌گوییم.
شرط مارکف را برای $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$ می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

$$P(X_{n+1} = j|X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j|X_n = i_n)$$

برای هر مقدار n و j و i و i_{n-1} و ... و i_0. این احتمال که به آن احتمال تغیر وضعیت از i به j در یک گام (یا احتمال انتقال یک مرحله ای) گفته می‌شود، در حالت کلی به n بستگی دارد.

تعریف ۱.۴.۱. مجموع وزنی تصادفی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n X_n,$$

که در آن $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نامنفی و مستقل و دارای توزیع یکسان با تابع توزیع مشترک B باشد و $\{\theta_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای دیگر از متغیرهای تصادفی نامنفی و مستقل از $\{X_n, n \geq 1\}$ باشد.

۱.۴.۱ یادآوری چند توزیع

تعریف ۲.۴.۱. در آمار و احتمالات تابع چگالی احتمال به تابعی اطلاق می‌شود که توزیعی آماری را به شکل انتگرالی نمایش دهد. مقدار این تابع غیرمنفی است که تعریف ریاضی آن به‌صورت زیر است.
متغیر تصادفی X را در نظر بگیرید که مقدار آن در فضای اندازه $(X, \mathcal{A})$ تعریف شده است و توزیع احتمال آن اندازه $X * P$ در $(X, \mathcal{A})$ است، آن‌گاه چگالی X نسبت به اندازه مرجع μ در $(X, \mathcal{A})$ به واسطه مشتق رادون_ نیکودیم به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$f = \frac{dX * P}{d\mu}.$$

به عبارتی دیگر، به ازای هر مجموعه اندازه‌پذیر $A \in \mathcal{A}$ ، f می‌تواند هر تابع قابل اندازه‌گیری با ویژگی زیر باشد.

$$P[X \in A] = \int_{X^{-1}A} dP = \int_A f d\mu.$$

بر خلاف احتمالی که به یک متغیر تصادفی گسسته نسبت داده می‌شود، تابع چگالی احتمال می‌تواند مقادیر بیشتر از ۱ را نیز اختیار کند.

تعریف ۳.۴.۱. فرض کنیم X و Y دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند. مجموع این دو متغیر تصادفی را با $S = X + Y$ نشان می‌دهیم. فرض کنیم $F_S(s)$ نشان دهنده‌ی تابع توزیع S باشد. طبق تعریف تابع توزیع داریم

$$F_S(s) = P(S \leq s) = P(X + Y \leq s).$$

اگر فرض کنیم X و Y دو متغیر تصادفی گسسته با مقادیر نامنفی باشند، طبق قانون احتمال کل داریم.

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \sum_{Y \leq s} P(X + Y \leq s \mid Y = y) P(Y = y) \\ &= \sum_{Y \leq s} P(X \leq s - y \mid Y = y) P(Y = y). \end{aligned} \tag{۴.۱}$$

با توجه به استقلال X و Y می‌توانیم مجموع اخیر را به صورت زیر بنویسیم.

$$F_S(s) = \sum_{Y \leq s} F_X(s - y) f_Y(y). \tag{۵.۱}$$

تابع احتمال نظیر این تابع توزیع را می‌توان به شکل زیر محاسبه کرد.

$$f_S(s) = \sum_{Y \leq s} f_X(s-y) f_Y(y).$$

حال اگر فرض کنیم X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته و نامنفی باشند به‌طور مشابه برای این حالت داریم.

$$\begin{aligned} F_S(s) &= \int_{0}^{s} P(X \leq s-y \mid Y=y) f_Y(y) \mathrm{d}y \\ F_S(s) &= \int_{0}^{s} F_X(s-y) f_Y(y) \mathrm{d}y \\ f_S(s) &= \int_{0}^{s} f_X(s-y) f_Y(y) \mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{۶.۱}$$

در احتمال روابط (۵.۱) و (۶.۱) پیچش [۱۳] دوتایی توابع توزیع $F_X(x)$ و $F_Y(y)$ نامیده می‌شوند و از نماد $F_X * F_Y$ به‌جای $F_S(s)$ استفاده می‌کنیم. پیچش را می‌توان برای یک جفت از توابع احتمال یا توابع چگالی احتمال تعریف کرد. حال اگر مجموع n متغیر تصادفی مستقل را به‌صورت $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ در نظر بگیریم و فرض کنیم F_i تابع توزیع X_i و $F^{(k)}$ تابع توزیع $X_1 + X_2 + \cdots + X_k$ باشد، رابطه زیر را داریم.

$$\begin{aligned} F^{(2)} &= F_2 * F^{(1)} \\ F^{(3)} &= F_3 * F^{(2)} \\ F^{(4)} &= F_4 * F^{(3)} \\ &\vdots \\ F^{(n)} &= F_n * F^{(n-1)} \end{aligned} \tag{۷.۱}$$

حال اگر $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ مجموع n متغیر تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع توزیع F باشد، رابطه زیر را داریم.

$$F^{(n)}(S) = F^{n*}(S).$$

$F^{n*}(S)$ پیچش n ام $F(x)$ با خودش را نمایش می‌دهد.

تعریف ۴.۴.۱. $F^{0*}(S)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$F^{0*}(S) = \begin{cases} 1 & \text{اگر} \quad S \geq 0 \\ 0 & \text{اگر} \quad S < 0. \end{cases} \tag{۸.۱}$$

تعریف ۵.۴.۱. در نظریه آمار و احتمال، توزیع یکنواخت پیوسته [۱۴] یا توزیع راست گوشه [۱۵] از هم‌شاخه‌های توزیع‌های احتمال متقارن است. همچنین طول تمام فواصل هر عضو شاخه تحت این توزیع احتمال

[۱۳] Convolution

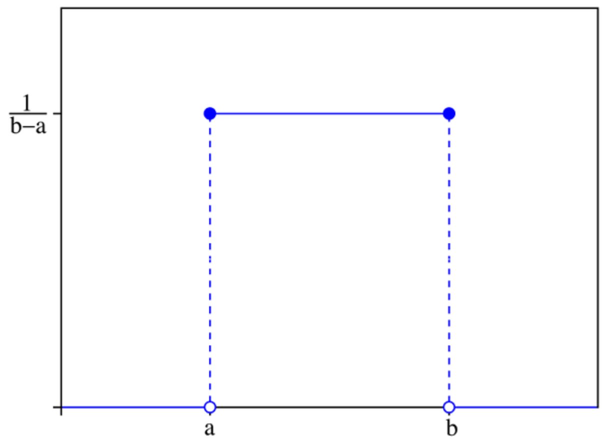
[۱۴] Continuous Uniform Distribution

[۱۵] Rectangular Distribution

یکسان است. کران با دو مقدار a و b که کمینه و بیشینه هستند، تعریف می‌شود. شکل مختصر توزیع اغلب به‌صورت $U(a,b)$ است. تابع چگالی احتمال توزیع یکنواخت پیوسته چنین می‌باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{b-a} & \text{برای} \quad a \leq x \leq b, \\ ۰ & \text{برای} \quad x < a \quad \text{یا} \quad x > b \end{cases}$$

همچنین نمودار آن به شکل زیر است.



شکل ۱.۱: تابع چگالی احتمال توزیع یکنواخت پیوسته

تعریف ۶.۴.۱. توزیع نمایی توزیعی پیوسته است که دارای تابع چگالی احتمال زیر می‌باشد.

$$f(x,\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq ۰, \\ ۰ & , x < ۰. \end{cases} \tag{۹.۱}$$

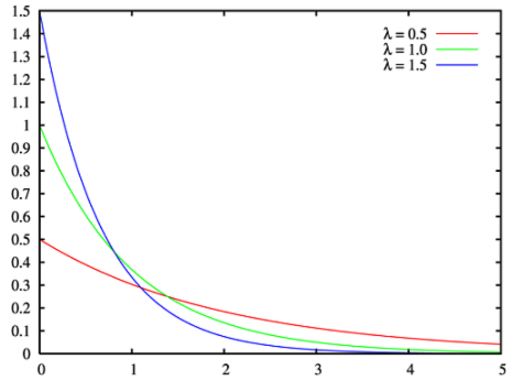
که پارامتر λ در آن وارون میانگین (امید ریاضی) توزیع می‌باشد. توزیع نمایی حالت خاصی از توزیع گاما [۱۶] [۱۷] است که در آن پارامتر شکل برابر $k = ۱$ و پارامتر مقیاس برابر $\theta = \frac{۱}{\lambda}$ می‌باشد.

از توزیع نمایی بیشتر در تخمین زدن مدت زمان لازم برای رخداد یک پیشامد خاص استفاده می‌شود. برای نمونه، مدت زمان لازم (از هم اکنون) تا رخداد یک زمین لرزه، آغاز یک جنگ، دریافت یک تماس تلفنی اشتباه، متغیرهای تصادفی با توزیع نمایی می‌باشند. هرگاه پدیده‌ای از فرآیند پواسون همگن پیروی کند توزیع نمایی به‌عنوان توصیف کننده زمان بین دو رویداد در فرآیند پواسون به‌طور طبیعی ظاهر می‌شود. توزیع نمایی تنها توزیع پیوسته‌ای است که خاصیت بی‌حافظگی دارد و از این رو بیشتر در حل مسائل احتمال به‌کار گرفته می‌شود. همچنین از این توزیع برای مدل‌سازی کردن و آسان ساختن شیوه حل مسائل واقعی استفاده می‌کنند. این ویژگی تابع را می‌توان این‌طور تفسیر کرد که رویدادهایی را که در گذشته اتفاق افتاده، می‌توانیم در نظر نگیریم و از زمان حال به بعد را مبدا زمان قرار بدهیم.

شکل زیر تابع چگالی احتمال توزیع نمایی را نشان می‌دهد.

[۱۶] Gamma Distribution

[۱۷] توزیع گاما یکی از توزیع‌های احتمالی پیوسته است و دارای دو پارامتر مقیاس θ و پارامتر شکل k می‌باشد. اگر k عددی طبیعی باشد آنگاه توزیع گاما معادل است با مجموع k متغیر تصادفی با توزیع نمایی با پارامتر $\frac{۱}{\theta}$.



شکل ۲.۱: تابع چگالی احتمال توزیع نمایی

تعریف ۷.۴.۱. فرآیند تصادفی $\{N(t) : t \geq 0\}$ را یک فرآیند شمارشی گوییم، هرگاه $N(t)$ تعداد کل پیشامدهایی باشد که تا زمان t رخ داده‌اند و در شرایط زیر صدق کند.

۱) $N(t)$ مقادیر صحیح نامنفی را اختیار می‌کند،

۲) اگر $s \leq t$ آنگاه $N(s) \leq N(t)$،

۳) برای $s < t$ ، $N(t) - N(s)$ برابر تعداد پیشامدهایی است که در فاصله زمانی $(s, t]$ رخ می‌دهند.

تعریف ۸.۴.۱. فرض کنیم که N متغیر تصادفی شمارشی با تابع احتمال $q_n = P(N = n)$ برای $n = 0, 1, 2, \ldots$ باشد. همچنین فرض کنیم $\{X_n; n = 1, 2, \ldots\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی نامنفی و مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع F و مستقل از N باشند. توزیع مجموع تصادفی $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$ را توزیع مرکب می‌نامیم که در آن، اگر $N = 0$ آنگاه $S = 0$. تابع توزیع S طبق قانون احتمال کل به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} F_S(x) = P(S \leq x) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(S \leq x \mid N = n) P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leq x) P(N = n) \end{aligned} \tag{۱۰.۱}$$

طبق تعریف (۳.۴.۱) داریم

$$P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leq x) = F * F * \cdots * F(x) = F^{n*}(x).$$

معمولا نام توزیع مرکب را از نام توزیع N می‌گیرند. برای مثال اگر N دارای توزیع پواسون باشد، S دارای توزیع پواسون مرکب خواهد بود.

تعریف ۹.۴.۱. فرآیند شمارشی $\{N(t), t \geq 0\}$ را یک فرآیند پواسون با پارامتر $\lambda \geq 0$ گوییم هرگاه داشته باشیم

۱) $N(0) = 0$،

۲) فرآیند N_t دارای نموهای مانا باشد یعنی برای هر مقدار صحیح k و هر مقدار زمانی $s \leq t$ و $\Delta > 0$ داشته باشیم $P[N(t+\Delta) - N(t) = k] = P[N(s+\Delta) - N(s) = k]$,

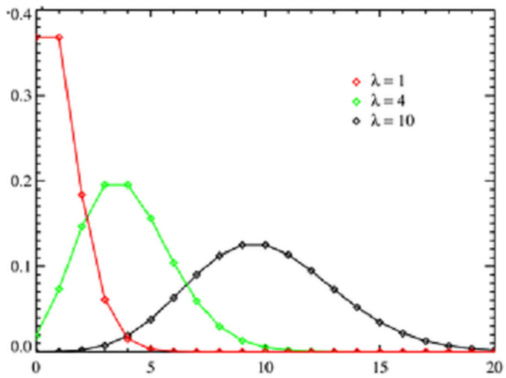
۳) فرآیند N_t دارای نموهای مستقل باشد یعنی برای هر مقدار صحیح $k > 0$ و مقادیر زمانی $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$ متغیرهای تصادفی $N(t_1) - N(t_0)$ و $N(t_2) - N(t_1)$ و ... و $N(t_k) - N(t_{k-1})$ دو به دو از هم مستقل باشند.

نتیجه ۱۰.۴.۱. دو خاصیت مهم فرآیند پواسون به شرح زیر است.

۱) در هر فرآیند پواسون $\{N(t), t \geq 0\}$ تعداد پیشامدها در فاصله‌ی زمانی به طول t دارای توزیع پواسون با پارامتر λt می‌باشد یعنی برای هر $s, t \geq 0$ رابطه زیر را داریم.

$$P[N(t+s) - N(s) = n] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

۲) فرض کنیم $0 < T_1 < T_2 < \ldots$ به ترتیب نشان دهنده‌ی زمان‌های وقوع اولین، دومین و... پیشامد باشند در این صورت ثابت می‌شود که متغیر تصادفی زمان‌های بین دو پیشامد یعنی $W_i = T_i - T_{i-1}$ در هر فرآیند پواسون با پارامتر λ، مستقل و دارای توزیع یکسان نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ هستند.



شکل ۳.۱: تابع چگالی احتمال توزیع پواسون

تعریف ۱۱.۴.۱. فرآیند تصادفی $\{X(t), t \geq 0\}$ را یک **فرآیند پواسون مرکب** [۱۸] گوییم، هرگاه بتوان آن را به ازاء هر $t \geq 0$ به‌صورت $X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ نشان داد، که در آن $\{N(t), t \geq 0\}$ یک فرآیند پواسون و $\{Y_i, i = 1, 2, \ldots\}$ خانواده‌ای از متغیرهای مستقل و هم‌توزیع هستند، و فرآیند $\{N(t), t \geq 0\}$ و دنباله $\{Y_i, i = 1, 2, \ldots\}$ مستقل فرض می‌شوند. میانگین و واریانس $X(t)$ به ترتیب عبارتند از $E[X(t)] = \lambda t E[Y]$ و $Var[X(t)] = \lambda t E[Y^2]$.

نظریه تجدید

[۱۸] Compound Poisson Process

تعریف ۱۲.۴.۱. نظریه تجدید [۱۹] شاخه‌ای از نظریه احتمال است که فرآیندهای پواسون را به زمان‌های نگهداری اختیاری عمومیت می‌دهد.
فرآیند تجدید [۲۰]، تعمیم یافته فرآیند پواسون است. می‌دانیم که زمان‌های بین دو ورود در فرآیند پواسون متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با توزیع نمایی هستند. یک تعمیم طبیعی آن است که فرآیندی شمارشی را در نظر بگیریم که در آن زمان‌های بین دو ورود، مستقل و هم توزیع و با توزیع دلخواه باشند. چنین فرآیند شمارشی را یک فرآیند تجدید می‌نامند.

از نظر صوری، فرض کنید $\{X_n, n = ۱, ۲, \ldots\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نامنفی مستقل و با توزیع مشترک F باشند، برای اجتناب از موارد بدیهی فرض می‌کنیم $F(۰) = P\{X_n = ۰\} < ۱$. X_n را به‌عنوان زمان پیشامد n ـام تعبیر می‌کنیم. فرض کنید

$$\mu = E[X_n] = \int_۰^\infty x dF(x)$$

میانگین زمان بین پیشامدهای پیاپی باشد، از پذیره‌های $X_n \geq ۰$ و $F(۰) < ۱$، نتیجه می‌شود $۰ < \mu \leq \infty$، قرار می‌دهیم

$$S_۰ = ۰, \quad S_n = \sum_{i=۱}^{n} X_i, \quad n \geq ۱.$$

که در این صورت S_n زمان n امین پیشامد است. چون که تعداد پیشامدها تا زمان t برابر بزرگترین مقدار n است که به ازاء آن پیشامد n ام قبل از زمان t روی داده است. $N(t)$، تعداد پیشامدها تا زمان t به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$N(t) = \sup\{n; S_n \leq t\} \tag{۱۱.۱}$$

فرآیند شمارشی $\{N(t), t \geq ۰\}$ را یک فرآیند تجدید می‌نامند. اصطلاحات پیشامدها و تجدیدها را به‌جای یکدیگر به‌کار می‌بریم، و بنابراین می‌گوییم که n امین تجدید در زمان S_n روی داده است. چون زمان‌های بین ورودی مستقل و هم‌توزیع هستند، نتیجه می‌شود که در هر تجدید، فرآیند از لحاظ احتمالاتی از نو شروع می‌شود.

حرکت براونی

حرکت براونی [۲۱] به‌عنوان مثالی از فرآیند تجدید، یک فرآیند تصادفی است. یعنی خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی که با مجموعه اعداد حقیقی نامنفی اندیس‌گذاری شده است و همگی روی یک فضای احتمال مشترک تعریف شده‌اند. این فرآیند دارای خاصیت مارکفی با نموهای ایستا و مستقل است. همچنین دارای مسیرهای پیوسته‌ای است که در هیچ نقطه‌ای مشتق ندارد.

---
[۱۹] Renewal Theory
[۲۰] Renewal Process
[۲۱] Brownian Motion

تعریف ۱.۴.۱۳. فرایند تصادفی $\{W(t), t \geq 0\}$ را یک حرکت براونی استاندارد (فرآیند وینر) گوییم اگر

۱) $W(0) = 0$؛

۲) $W(t) - W(s)$ برای $s \leq t$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $t - s$ باشد؛

۳) متغیرهای تصادفی $W(t_2) - W(t_1), W(t_3) - W(t_2), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ برای $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$ مستقل باشند (گوییم $W(t)$ دارای نموهای مستقل است).

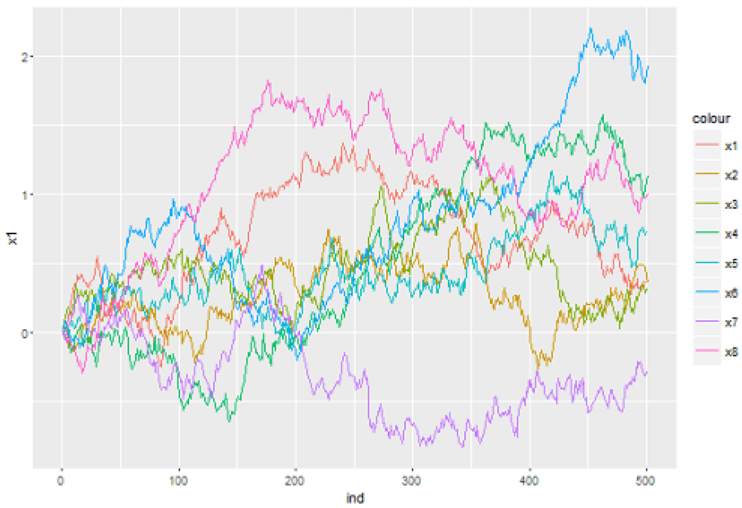
با تعریف فوق برای $s < t$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} E[W(t)W(s)] &= E[(W(t) - W(s) + W(s))W(s)] \\ &= E[(W(t) - W(s)]E[W(s)] + E[W(s)^2] = 0 + s = s \end{aligned}$$

بنابراین $E[W(t)W(s)] = t \wedge s$ که در آن $t \wedge s = $ می‌نیممs, t.

تعریف فوق از مرجع [۱] آورده شده است.

شکل زیر شبیه‌سازی حرکت براونی استاندارد را با تکرار ۸ نشان می‌دهد که هر بار یک فرآیند جدید تولید می‌شود و همه آنها از نقطه صفر شروع به حرکت می‌کنند.



شکل ۱.۴: شبیه‌سازی حرکت براونی استاندارد

فصل ۲

معرفی چند خانواده از توزیع‌های آماری و بررسی قضایا و مفاهیم مرتبط با آن

۱.۲ تابع دم، توزیع‌های دم سنگین و بررسی خواص آن‌ها

توزیع‌های دم سنگین [۱] نقش عمده‌ای را در تجزیه و تحلیل بسیاری از سیستم‌های تصادفی ایفا می‌کنند. برای مثال، این توزیع‌ها اغلب برای دقیق بودن ورودی‌های مدل به شبکه‌های کامپیوتری و ارتباطات، ضروری و مورد نیاز می‌باشند. آنها همچنین در بسیاری از فرآیندهای خطر یک بخش اساسی به شمار می‌آیند.کاربرد این توزیع‌ها در بیشتر مسائل فیزیکی که متغیر تصادفی تنها مقادیر مثبت را می‌گیرد و هیستوگرام [۲] [۳] به‌صورت خاصی به سمت راست مورب می‌شود، مسلم است.مثال خاصی از این کاربردها در مدل سازی اندازه قطرات باران برای مدل سازی موقعیت کلی داده‌هاست. همچنین در مطالعه سرعت باد و تجزیه و تحلیل داده‌ها در زمان ورودی‌ـ میانی و بسامدهای قابل دسترسی در ترافیک شبکه گسترده جهانی کاربرد دارند. شواهد آماری زیادی برای تناسب آنها در فیزیک، داده‌های علوم زمین و اقتصاد وجود دارد. به عنوان مثال‌هایی از این خانواده از توزیع‌ها، می‌توان به توزیع پارتو [۴] ،

[۱] Heavy Tailed Distributions

[۲] Histogram

[۳] بافت نما، نموداری میله‌ای است که بر اساس فراوانی داده‌ها در دسته‌هایی رسم می‌شود و به کمک آن می‌توان داده‌ها را تشریح کرد.

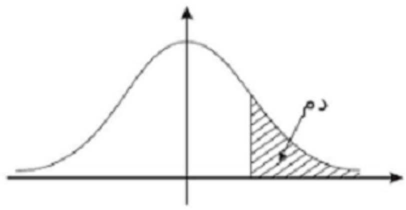
[۴] Pareto Distribution

توزیع لگ نرمال [۵] ، توزیع ویبال [۶] (با پارامتر مکان کوچک‌تر از۱) و توزیع کوشی [۷] اشاره کرد. [۲۲، ۲۳] تعاریف زیر از مرجع [۲۲] می‌باشند.

تعریف ۱.۱.۲. تابع دم [۸] F روی مجموعه اعداد حقیقی که آن را با نماد $\bar{F}$ نشان می‌دهیم، برای هر x حقیقی به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\bar{F}(x) = F(x, \infty) = P(X > x)$$

و نموار آن به‌صورت زیر است.



شکل ۱.۲: تابع دم

همچنین F برای هر x از راست بی‌کران است هرگاه

$$\bar{F}(x) > 0.$$

همان‌طور که از تعریف تابع دم برمی‌آید، این تابع بر خلاف تابع توزیع تجمعی، مقدار انباشتگی احتمال را در سمت راست نقطه x ، از نمودار تابع چگالی احتمال توزیع مربوطه، محاسبه می‌نماید.

تعریف ۲.۱.۲. در آمار و نظریه احتمالات برجستگی یا کشیدگی [۹] توصیف کننده میزان قله‌ای بودن یک توزیع احتمالی است. به عبارت دیگر کشیدگی معیاری از تیزی منحنی در نقطه ماکزیمم است.

تعریف ۳.۱.۲. توزیع F را روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی دم سنگین می‌نامیم، اگر داشته باشیم

$$\forall \quad \lambda > 0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x} d(F(x)) = \infty.$$

خانواده تمام توزیع‌های دم سنگین را با $\mathcal{H}$ نمایش می‌دهیم.

از تعریف فوق درمی‌یابیم که، توزیع F دم سنگین است، اگر تمام گشتاورهای نمایی مثبت آن نامتناهی باشد.

دم سنگین در علم آمار و احتمالات به دسته‌ای از توابع توزیع احتمال اطلاق می‌شود که کشیدگی بزرگی

[۵] Lognormal Distribution
[۶] Weibull Distribution
[۷] Cauchy Distribution
[۸] Tail Function
[۹] Kurtosis

دارند. در چنین تابع توزیعی، مقادیری که از مقدار میانگین فاصله زیاد دارند (و بنابراین اصطلاح دم به آنها اطلاق می‌شود)، نسبتاً محتمل اند. به ویژه دم سنگینی یک تابع توزیع در مقایسه با یک توزیع نرمال تعیین می‌گردد. دم تابع توزیع نرمال به شکل نمایی است در حالی‌که توابع دم سنگین در فواصل دور از میانگین، به صورت توانی کاهش می‌یابند. به‌صورت ریاضی توزیع متغیر تصادفی X دم سنگین خوانده می‌شود اگر

$$P[X > x] \sim x^{-\alpha} x \to \infty, \qquad \alpha > 0,$$

که معادل است با

$$f_X(x) \sim x^{-(1+\alpha)} x \to \infty, \qquad \alpha > 0.$$

که در آن $f_X(x)$ تابع چگالی احتمال است.

تعریف ۴.۱.۲. تابع $f > 0$ دم سنگین است اگر و فقط اگر برای هر $\lambda > 0$ داشته باشیم

$$\limsup_{x\to\infty} f(x)e^{\lambda x} = \infty$$

با نگاه دقیق به تعریف فوق، این مطلب استنتاج می‌شود که برای دم سنگین بودن تابع f نیازی به وجود $\lim$ و حتی متناهی بودن آن نیست، بلکه فقط باید $\limsup$ تابع مورد نظر، نامتناهی باشد.
توزیع‌های لگ نرمال، پارتو، نوع–پارتو [۱۰] ، ویبال با مشخصه مکان کمتر از یک مثال‌هایی از توزیع دم سنگین هستند که به‌طور مختصر آنها را معرفی می‌کنیم.
مفاهیم و قضیه‌هایی که در ادامه می‌آوریم، از مراجع [۲۹] و [۲۳] و [۲۲] گرفته شده‌اند.

توزیع نرمال

تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی نرمال X با میانه μ و انحراف معیار σ به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

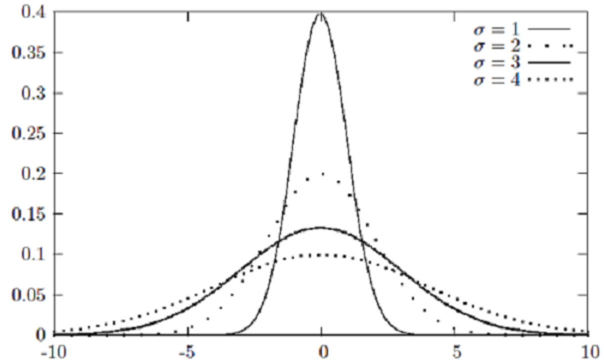
$$f(x \mid \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad \text{و} \quad -\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0.$$

این توزیع معمولا با $N(\mu, \sigma^2)$ نشان داده می‌شود. تابع توزیع تجمعی آن به‌صورت زیر است.

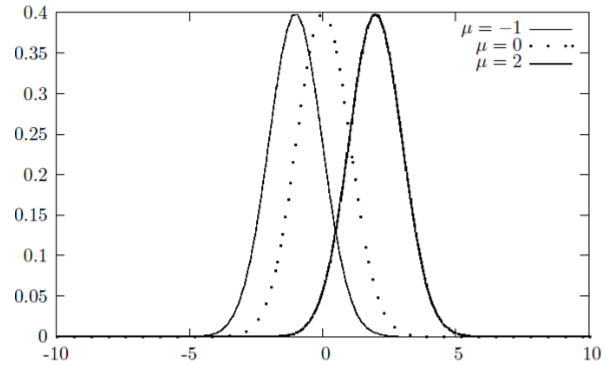
$$F(x \mid \mu, \sigma) = \int_{-\infty}^{x} f(t \mid \mu, \sigma) \mathrm{d}t.$$

تصاویر ۲.۲ و ۳.۲ تابع چگالی احتمال توزیع نرمال [۱۱] با $\mu = 0$ و $\sigma = 1$ را نشان می‌دهند.

[۱۰] Pareto-Type
[۱۱] Normal Distribution



شکل ۲.۲: تابع چگالی احتمال توزیع نرمال با $\mu = ۰$



شکل ۳.۲: تابع چگالی احتمال توزیع نرمال با $\sigma = ۱$

تعریف ۵.۱.۲. متغیر تصادفی نرمال با میانه $\mu = ۰$ و انحراف معیار $\sigma = ۱$ متغیر تصادفی نرمال استاندارد نامیده می‌شود و تابع توزیع تجمعی آن را با $\Phi(z)$ نشان می‌دهیم.

اگر X متغیر تصادفی نرمال با میانه μ و انحراف معیار σ باشد، آن‌گاه رابطه زیر را داریم.

$$P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{(x-\mu)}{\sigma}} \exp\left(-\frac{t^۲}{۲}\right) \mathrm{d}t = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

که در آن میانه μ، پارامتر مکان و انحراف معیار σ، پارامتر قیاس است.

توزیع لگ نرمال

تعریف ۶.۱.۲. متغیر تصادفی مثبت X دارای توزیع لگ نرمال است اگر $\ln(X)$ توزیع نرمال داشته باشد. تابع چگالی احتمال آن به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

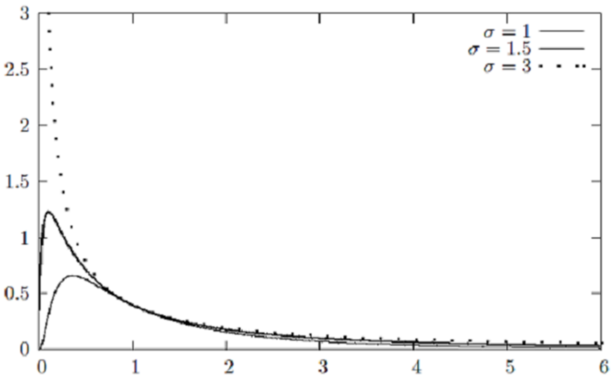
$$f(x \mid \mu, \sigma) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}x\sigma} \exp\left[-\frac{(\ln(x)-\mu)^۲}{۲\sigma^۲}\right] \quad \text{و} \quad x > ۰, \sigma > ۰, -\infty < \mu < \infty.$$

این توزیع را با لگ نرمال $(\mu, \sigma^۲)$ نمایش می‌دهیم. تابع توزیع تجمعی این توزیع به‌صورت زیر

به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned} F(x \mid \mu, \sigma) &= P(X \leq x \mid \mu, \sigma) \\ &= P(\ln X \leq \ln x \mid \mu, \sigma) \\ &= P\left(Z \leq \frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

که در آن Φ تابع توزیع نرمال استاندارد [۱۲] است.



شکل ۴.۲: تابع چگالی احتمال لگ نرمال با $\mu = ۰$

توزیع پارتو

تعریف ۷.۱.۲. تابع چگالی احتمال برای توزیع پارتو با پارامترهای a و b به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

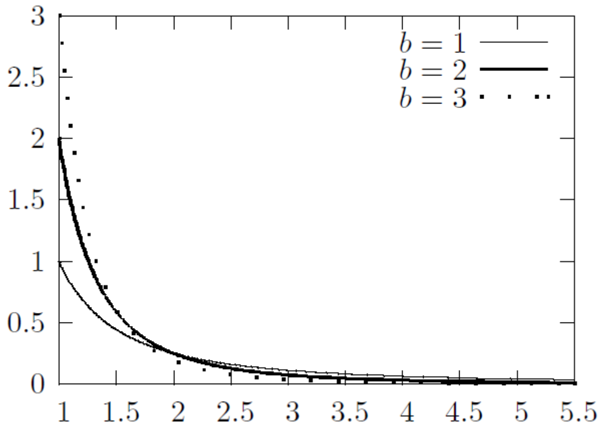
$$F(x \mid a, b) = \frac{ba^b}{x^{b+۱}} \quad \text{و} \quad x \geq a > ۰, b > ۰.$$

و تابع توزیع تجمعی آن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$F(x \mid a, b) = P(X \leq x \mid a, b) = ۱ - (\frac{a}{x})^b \quad \text{و} \quad x \geq a.$$

شکل ۵.۲ حالتی را که $b = ۱, ۲, ۳$ و $a = ۱$ است، را نشان می‌دهد.

[۱۲] Standard Normal Distribution Function



شکل ۵.۲: تابع چگالی احتمال پارتو با $a = ۱$

توزیع ویبال

تعریف ۸.۱.۲. یکی از توزیع‌های احتمالاتی پیوسته و پرکاربرد است و تاکنون تعمیم‌های گوناگونی از این توزیع معرفی و مطالعه شده‌اند.
فرض کنیم Y متغیر تصادفی نمایی استاندارد با تابع چگالی احتمال $f(y) = e^{-y}$، $y > ۰$ باشد. تعریف زیر را در نظر بگیرید.

$$X = bY^{\frac{۱}{c}} + m \quad \text{و} \quad b > ۰, c > ۰$$

توزیع X به‌عنوان توزیع ویبال با پارامتر شکل c، پارامتر قیاس b و پارامتر مکان m شناخته می‌شود و تابع چگالی احتمال آن به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

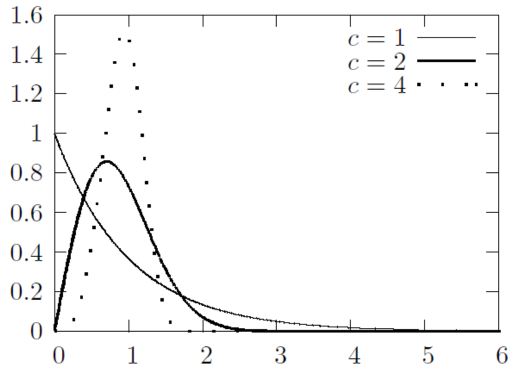
$$f(x \mid b, c, m) = \frac{c}{b}\left(\frac{x-m}{b}\right)^{c-۱} \exp\left\{-\left[\frac{x-m}{b}\right]^{c}\right\} \quad \text{و} \quad x > m, b > ۰, c > ۰.$$

و تابع توزیع تجمعی آن به‌صورت زیر است.

$$F(x \mid b, c, m) = ۱ - \exp\left\{-\left[\frac{x-m}{b}\right]^{c}\right\} \quad \text{و} \quad x > m, b > ۰, c > ۰.$$

برای هر $۰ < p < ۱$، تابع توزیع معکوس آن به‌صورت زیر است.

$$F^{-۱}(p \mid b, c, m) = m + b\left(-\ln(۱-p)\right)^{\frac{۱}{c}}.$$



شکل ۶.۲: تابع چگالی احتمال ویبال با $m = ۰$ و $b = ۱$

توزیع کوشی ـ لورنتز

تعریف ۹.۱.۲. یکی از توزیع‌های احتمالی پیوسته است. در احتمالات این توزیع را بیشتر به نام توزیع کوشی می‌شناسند. تابع چگالی احتمال این توزیع با پارامتر مکان a و پارامتر قیاس b به صورت زیر است.

$$f(x \mid a,b) = \frac{۱}{\pi b[۱ + (\frac{(x-a)}{b})^{۲}]} \quad \text{و} \quad -\infty < a < \infty, b > ۰$$

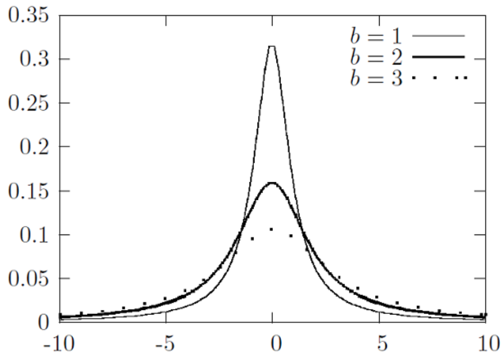
تابع توزیع تجمعی آن به‌صورت زیر معرفی می‌شود.

$$F(x \mid a,b) = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{\pi}\tan^{-۱}(\frac{x-a}{b}) \quad \text{و} \quad b > ۰.$$

توجه داشته باشید که این توزیع به‌عنوان کوشی (a,b) است. شکل استاندارد تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی آن با جایگزین کردن a با ۰ و b با ۱ به‌دست می‌آید. تابع توزیع معکوس این توزیع به شکل زیر نمایش داده می‌شود.

$$F^{-۱}(p \mid a,b) = a + b\tan(\pi(p - ۰/۵)) \quad \text{و} \quad ۰ < p < ۱.$$

همچنین نمودار این تابع به‌صورت زیر است.



شکل ۷.۲: تابع چگالی احتمال کوشی با $a = ۰$

تعریف ۱۰.۱.۲. فرض کنیم X و Y متغیرهای تصادفی روی فضای احتمال (Ω, F, P) با توزیع‌های به ترتیب F_X و F_Y باشند. متغیرهای تصادفی نامنفی را در نظر می‌گیریم.
فرض کنیم $I = \{s \in \mathbb{R} : Ee^{sX} < \infty\}$ باشد که I فاصله‌ای است که روی تمام محور حقیقی $\mathbb{R}$ تعریف شده و می‌تواند یک نیم‌خط یا تک عضوی $\{0\}$ باشد. تابع مولد گشتاور $\widehat{m} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ از X را به وسیله $\widehat{m}(s) = Ee^{sX}$ تعریف می‌کنیم.

دسته‌ای از توزیع‌ها با متغیرهای تصادفی نامنفی را دم سنگین گوییم هرگاه برای هر $s > 0$ تابع مولد گشتاور آن نامتناهی باشد. یعنی رابطه زیر را داشته باشیم.

$$\widehat{m}(s) = \infty.$$

تعریف ۱۱.۱.۲. تابع مثبت $L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow (0, \infty)$ را از X به‌توی ∞ تابع مختلف تدریجی [۱۳] گوییم هرگاه برای هر $y > 0$ رابطه زیر برقرار باشد.

$$\frac{L(xy)}{L(x)} \to 1 \quad \text{هنگامی‌که} \quad x \to \infty.$$

تعریف ۱۲.۱.۲. توزیع F را نوع-پارتو با توان $\alpha > 0$ گوییم هرگاه برای تابع مختلف تدریجی $L(x)$ رابطه زیر برقرار باشد.

$$\bar{F}(x) \sim L(x)x^{-\alpha} \quad \text{هنگامی‌که} \quad x \to \infty.$$

توزیع‌های نوع-پارتو همچنین توزیع‌های با دم‌های مختلف منظم [۱۴] نامیده می‌شوند.

تعریف ۱۳.۱.۲. فرض کنید $\alpha_F = \limsup_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x}$ باشد که $M(x) = -\log \bar{F}(x)$ را تابع مخاطره F [۱۵] گوییم؛ اگر F چگالی پیوسته داشته باشد، آن‌گاه $M(x)$ قابل تعریف است و $\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}(x)} = m(x)$ که $m(x)$ را تابع نرخ مخاطره [۱۶] می‌نامیم.

قضیه ۱۴.۱.۲. اگر $\alpha_F = 0$ باشد، آن‌گاه F دم سنگین است.

برهان. فرض کنیم که $\alpha_F = 0$ باشد، پس $\lim_{x\to\infty} \frac{M(x)}{x} = 0$ است. بنابراین برای هر $\varepsilon > 0$ یک $x' > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $x \geq x'$، $M(x) \leq \varepsilon x$. همچنین برای هر $c > 0$ و $x \geq 0$ رابطه $\bar{F}(x) \geq ce^{-\varepsilon x}$ برقرار است و بنابراین برای هر $s \geq \varepsilon$ رابطه زیر را داریم.

$$\int_0^\infty e^{sx}\bar{F}(x)d(x) = \infty. \tag{۱.۲}$$

از آنجایی‌که $\varepsilon > 0$ اختیاری بود، رابطه (۱.۲) برای هر $s > 0$ برقرار است که نشان می‌دهد F دم سنگین است. □

ملاحظه ۱۵.۱.۲. برای هر توزیع دم سنگین F رابطه زیر برقرار است.

$$\forall \quad s > 0 \qquad \limsup_{x\to\infty} e^{sx}\bar{F}(x) = \infty. \tag{۲.۲}$$

[۱۳] Slowly Varying Function
[۱۴] Regular Varying Tails
[۱۵] Hazard Function
[۱۶] Hazard Rate Function

۲.۲ توزیع های دم دراز، توزیع های زیرنمایی و چند قضیه مهم

تعریف ۱.۲.۲. توزیع F روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی دم دراز است اگر، F از راست بی‌کران باشد و برای هر ثابت $y \neq ۰$ داشته باشیم

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} = ۱$$

خانواده تمام توزیع‌های دم دراز را با $\mathcal{L}$ نمایش می‌دهیم.

با توجه به تعریف توزیع دم دراز، می‌توان نتیجه گرفت که چون دم درازی خاصیتی است که در دم‌های توزیع مورد بررسی قرار می‌گیرد لذا اگر توزیعی دم دراز باشد، به این معنی است که احتمال انباشتگی دمی از نقطه x تا بی‌نهایت، فرق چندانی با احتمال انباشتگی دمی در زمانی که مقدار ناصفر y به x اضافه شود، ندارد.

تعریف ۲.۲.۲. تابع مثبت f دم دراز است اگر و تنها اگر برای هر $y > ۰$ رابطه زیر برقرار باشد

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+y)}{f(x)} = ۱ \tag{۳.۲}$$

به‌وضوح اگر f دم دراز باشد، می‌توان y را با $-y$ جایگزین کرد.

لم ۳.۲.۲. اگر f دم دراز باشد، آن‌گاه f دم سنگین است. بنابراین رابطه زیر برای هر $\lambda > ۰$ برقرار است.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)e^{\lambda x} = \infty.$$

برهان. مقدار ثابت $\lambda > ۰$ را درنظر می‌گیریم. از آنجایی‌که f دم دراز است پس

$$f(x+y) \sim f(x), \quad \text{هنگامی‌که} \quad x \to \infty$$

برای هر $y \in [۰, ۱]$ به‌طور یکنواخت برقرار است. بنابراین $x_۰$ ای وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $x \geq x_۰$ و $y \in [۰, ۱]$ رابطه زیر را داریم.

$$f(x+y) \geq f(x)e^{-\frac{\lambda}{۲}}$$

پس برای هر $n \geq ۱$ و $y \in [۰, ۱]$ داریم

$$f(x_۰ + n + y) \geq f(x_۰)e^{-\frac{\lambda(n+۱)}{۲}}$$

در نتیجه رابطه زیر برقرار است که حکم را نتیجه می‌دهد.

$$\liminf_{x\to\infty} f(x)e^{\lambda x} \geq f(x_۰) \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\lambda(n+۱)}{۲}} e^{\lambda n} = \infty.$$

□

با مثالی می‌توان نشان داد که عکس لم بالا لزوما برقرار نیست.

مثال ۴.۲.۲. تابع $f(x)$ را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \chi_{\{2^{n-1} < x \leq 2^n\}}$$

پس برای $\lambda > 0$ رابطه زیر را داریم.

$$\limsup_{x\to\infty} f(x)e^{\lambda x} \geq \limsup_{x\to\infty} 2^{-n} e^{\lambda 2^n} = \infty$$

بنابراین f دم سنگین است. از طرفی

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{f(2^n+1)}{f(2^n)} = \frac{1}{2}$$

که نشان می‌دهد f دم دراز نیست.

قضیه ۵.۲.۲. فرض کنید $F_1, \dots, F_n$ توزیع‌هایی روی $\mathbb{R}^+$ با تکیه‌گاه [17] [18] بی‌کران باشند. آن‌گاه رابطه زیر برقرار است.

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F_1 * \cdots * F_n(x)}}{\bar{F}_1(x) + \cdots + \bar{F}_n(x)} \geq 1.$$

برهان. فرض کنید $\xi_1, \dots, \xi_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع‌های به‌ترتیب $F_1, \dots, F_n$ باشند. از آنجایی که پیشامدهای $\{\xi_k > x, \xi_j \in [0, x] \quad \text{برای هر} \quad j \neq k\}$ برای k های مختلف جدا از هم هستند، کران پایین پیچش دمی به شکل زیر می‌تواند حاصل گردد.

$$\begin{aligned}
\overline{F_1 * \cdots * F_n(x)} &\geq \sum_{k=1}^{n} P\{\xi_k > x, \xi_j \in [0, x] \quad \text{برای هر} \quad j \neq k\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k(x) \prod_{j\neq k} F_j(x) \\
&\sim \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k(x) \quad \text{هنگامی‌که} \quad x \to \infty
\end{aligned}$$

که حکم مورد انتظار را نتیجه می‌دهد. □

نتیجه ۶.۲.۲. برای هر توزیع F روی $\mathbb{R}^+$ با تکیه‌گاه بی‌کران و برای هر $n \geq 2$ روابط زیر برقرارند.

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\bar{F}(x)} \geq n, \tag{۴.۲}$$

و در حالت خاص داریم

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F * F}(x)}{\bar{F}(x)} \geq 2. \tag{۵.۲}$$

[17] Support

[18] منظور از تکیه‌گاه یک تابع در ریاضی، مجموعه‌ای از نقاط است که تابع به ازای آنها صفر نباشد.

قضیه ۷.۲.۲. فرض کنید F توزیعی دم سنگین روی $\mathbb{R}^+$ باشد، پس رابطه زیر برقرار است.

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F*F}(x)}{\bar{F}(x)} = ۲. \tag{۶.۲}$$

قضیه ۸.۲.۲. فرض کنید $F_۱$ و $F_۲$ دو توزیع روی $\mathbb{R}^+$ باشند و همچنین $F_۱$ دم سنگین باشد. آن‌گاه رابطه زیر برقرار است.

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F_۱*F_۲}(x)}{\bar{F}_۱(x)+\bar{F}_۲(x)} = ۱. \tag{۷.۲}$$

برهان. با استفاده از قضیه ۵.۲.۲ سمت چپ رابطه (۷.۲) حداقل ۱ است. حال فرض کنید اکیداً بزرگتر از ۱ باشد. بنابراین $\varepsilon > ۰$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر x به اندازه کافی بزرگ، رابطه زیر را داریم.

$$\frac{\overline{F_۱*F_۲}(x)}{\bar{F}_۱(x)+\bar{F}_۲(x)} \geq ۱+۲\varepsilon. \tag{۸.۲}$$

توزیع $G=\frac{(F_۱+F_۲)}{۲}$ را در نظر بگیرید. این توزیع دم سنگین است. با استفاده از قضیه ۷.۲.۲ رابطه زیر را داریم.

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{G*G}(x)}{\bar{G}(x)} = ۲. \tag{۹.۲}$$

از طرفی (۸.۲) و ۷.۲.۲ رابطه زیر را برای هر x به اندازه کافی بزرگ، نتیجه می‌دهند.

$$\begin{aligned}\overline{G*G}(x) &= \frac{\overline{F_۱*F_۱}(x)+\overline{F_۲*F_۲}(x)+۲\overline{F_۱*F_۲}(x)}{۴}\\ &\geq \frac{۲(۱-\varepsilon)\bar{F}_۱(x)+۲(۱-\varepsilon)\bar{F}_۲(x)+۲(۱+۲\varepsilon)(\bar{F}_۱(x)+\bar{F}_۲(x))}{۴}\\ &= ۲(۱+\frac{\varepsilon}{۲})\bar{G}(x);\end{aligned}$$

که با (۹.۲) در تناقض است. □

تعریف ۹.۲.۲. توزیع F روی مجموعه اعداد حقیقی مثبت، زیرنمایی است اگر رابطه زیر را داشته باشیم.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F*F}(x)}{\bar{F}(x)} = ۲$$

خانواده تمام توزیع‌های زیرنمایی را با S نمایش می‌دهیم.

مثال ۱۰.۲.۲. توزیع نمایی با تابع چگالی احتمال $\lambda e^{-\lambda x}$ برای هر $x \geq ۰$ زیرنمایی نیست. چون در این حالت

$$\frac{۱-F^{*۲}(x)}{۱-F(x)} = \frac{e^{-\lambda x}(۱+\lambda x)}{e^{-\lambda x}} \to \infty \quad \text{هنگامی‌که} \quad x\to\infty.$$

لم ۱۱.۲.۲. اگر $F \in S$، آن‌گاه برای هر $x' > 0$ روابط زیر برقرارند.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x-x')}{\bar{F}(x)} = 1 \tag{۱۰.۲}$$

و

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{\bar{F}(x-x')}{\bar{F}(x)} dF(y) = 1 \tag{۱۱.۲}$$

با توجه به لم بالا، هر توزیع زیرنمایی شکلی از $\mathcal{L}$ است و بنابراین دم سنگین است.

لم ۱۲.۲.۲. اگر F نوع–پارتو باشد، آن‌گاه $F \in S$.

برهان. فرض کنید X_1 و X_2 مستقل و هم توزیع با توزیع نوع–پارتو F باشند.
با توجه به $\{X_1+X_2 > x\}$ برای هر $\varepsilon \in (0,1)$ روابط $\{X_1 > \varepsilon x, X_2 > \varepsilon x\}$ یا $\{X_1 > (1-\varepsilon)x\}$ یا $\{X_2 > (1-\varepsilon)x\}$ را داریم، که رابطه زیر را نتیجه می‌دهد.

$$P(X_1 + X_2 > x) \leq 2P(X + (1-\varepsilon)x) + (P(X > \varepsilon x))^2$$

بنابراین رابطه زیر برقرار است.

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{P(X_1 + X_2 > x)}{L(x)x^{-\alpha}} \leq 2(1-\varepsilon)^{-\alpha}$$

از آنجایی‌که $\varepsilon > 0$ اختیاری بود پس $\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} \leq 2$. بنابراین با توجه به رابطه (۵.۲) رابطه زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{*2}}(x)}{\overline{F}(x)} = 2.$$

اثبات کامل است. □

تعریف ۱۳.۲.۲. برای توزیع F با متغیرهای تصادفی نامنفی و امید متناهی $\mu > 0$ توزیع دم کلی [۱۹] F^s را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$F^s(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر} \quad x \leq 0 \\ \mu^{-1} \int_0^x \overline{F}(y) d(y) & \text{اگر} \quad x > 0 \end{cases} \tag{۱۲.۲}$$

ملاحظه ۱۴.۲.۲.
- مثال‌هایی از توزیع‌های F روی $\mathbb{R}^+$ وجود دارد به‌طوری‌که $F^s \in \mathcal{S}$ اما $F \notin \mathcal{S}$.
- برای هر زیر مجموعه معین $\mathcal{S}^*$ از $\mathcal{S}$، اگر $F \in \mathcal{S}^*$ باشد آن‌گاه $F^s \in \mathcal{S}$ خواهد بود.

[۱۹] Integrated Tail Distribution

تعریف ۱۵.۲.۲. الف) توزیع F را وابسته به دسته $\mathcal{S}^*$ گوییم هرگاه دارای امید متناهی μ باشد و رابطه زیر را داشته باشیم.

$$\lim_{x\to\infty}\int_{\circ}^{\infty}\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}\overline{F}(y)dy=\text{۲}\mu \qquad (\text{۱۳.۲})$$

ب) توزیع F را وابسته به $\mathcal{L}$ گوییم هرگاه برای هر $y\in\mathbb{R}$ رابطه زیر برقرار باشد.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}=\text{۱}. \qquad (\text{۱۴.۲})$$

نتیجه ۱۶.۲.۲. فرض کنیم تابع نرخ مخاطره $m_F(x)$ از F با $\mu<\infty$ موجود باشد.
اگر $\limsup_{x\to\infty} xm_F(x)<\infty$، آن‌گاه $F\in\mathcal{S}$ و $F^s\in\mathcal{S}$.

قضیه ۱۷.۲.۲. فرض کنید تابع نرخ مخاطره $m_F(x)$ از F وجود داشته باشد و در نهایت به صفر کاهش پیدا کند. اگر $\int_{\circ}^{\infty}\exp(xm_F(x))\overline{F}(x)\mathrm{d}x<\infty$، آن‌گاه $F\in\mathcal{S}^*$.

مثال ۱۸.۲.۲. برای توزیع ویبال $F=W(r,c)$ با شرط $c>\circ$ و $\circ<r<\text{۱}$ روابط زیر را داریم.

$$\overline{F}(x)=\exp(-cx^r)$$

و

$$m_F(x)=crx^{r-\text{۱}}.$$

بنابراین $\lim_{x\to\infty}xm_F(x)=\infty$ و نمی‌توان از نتیجه ۱۶.۲.۲ استفاده کرد. اما تابع $\exp(xm_F(x))\overline{F}(x)=\exp(c(r-\text{۱})x^r)$ انتگرال‌پذیر است و همچنین با استفاده از قضیه ۱۷.۲.۲ $F=W(r,c)\in\mathcal{S}^*$ است.

مثال ۱۹.۲.۲. توزیع لگ نرمال استاندارد $F=LN(\circ,\text{۱})$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $\Phi(x)$ توزیع نرمال استاندارد با چگالی $\phi(x)$ باشد. آن‌گاه F دارای تابع دم و نرخ مخاطره به‌صورت زیر است.

$$\overline{F}(x)=\text{۱}-\Phi(\log x) \qquad , \qquad m_F(x)=\frac{\phi(\log x)}{x(\text{۱}-\Phi(\log x))}$$

همچنین

$$\phi(x)\sim x(\text{۱}-\Phi(x)) \quad \text{هنگامی‌که} \quad x\to\infty.$$

رابطه زیر را نتیجه می‌گیریم.

$$\begin{aligned}\frac{e^{\frac{-x^{\text{۲}}}{\text{۲}}}}{(\text{۲}\pi)^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}}\frac{\text{۱}}{x}&=\frac{\text{۱}}{(\text{۲}\pi)^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}}\int_x^{\infty}e^{\frac{-y^{\text{۲}}}{\text{۲}}}\left(\text{۱}+\frac{\text{۱}}{y^{\text{۲}}}\right)dy\\&>\text{۱}-\Phi(x)>\frac{\text{۱}}{(\text{۲}\pi)^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}}\int_x^{\infty}e^{\frac{-y^{\text{۲}}}{\text{۲}}}\left(\text{۱}-\frac{\text{۳}}{y^{\text{۴}}}\right)dy\\&=\frac{e^{\frac{-x^{\text{۲}}}{\text{۲}}}}{(\text{۲}\pi)^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}}\left(\frac{\text{۱}}{x}-\frac{\text{۱}}{x^{\text{۳}}}\right)\end{aligned}$$

بنابراین رابطه زیر را داریم.

$$e^{xm_F(x)}\overline{F}(x) \sim x(۱ - \Phi(\log x)) \quad \text{هنگامی‌که} \quad x \to \infty.$$

پس برای حالتی که $x \to \infty$ میل می‌کند تابع $x(۱ - \Phi(\log x)) \sim \frac{x\phi(\log x)}{\log x}$ انتگرال‌پذیر است. زیرا

$$\int_۱^\infty x^{۱-\frac{(\log x)}{۲}} \mathrm{d}x < \infty$$

و

$$\phi(\log x) = (۲\pi)^{\frac{-۱}{۲}} x^{\frac{-(\log x)}{۲}}.$$

بنابراین توزیع لگ نرمال استاندارد $LN(۰, ۱)$ وابسته به S^* است و در نتیجه F و F^s زیرنمایی هستند.

۳.۲ مجموع متغیرهای تصادفی پیوسته

۱.۳.۲ پیچش

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنیم X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته با توابع چگالی به ترتیب $f(x)$ و $g(x)$ و همچنین $f(x)$ و $g(x)$ هر دو برای هر عدد حقیقی تعریف شده باشند. پس پیچش $f * g$ از f و g تابعی است که به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}(f * g)(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)g(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(z-x)f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

قضیه ۲.۳.۲. فرض کنیم X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با توابع چگالی $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ برای هر x تعریف شده باشند. آن‌گاه مجموع $Z = X + Y$ متغیری تصادفی با تابع چگالی $f_Z(z)$ است که f_Z همان پیچش f_X و f_Y است.

برای درک بهتر این مبحث، چند مثال را بررسی می‌کنیم.

مجموع دو متغیر تصادفی یکنواخت مستقل

مثال ۳.۳.۲. فرض کنیم دو عدد را به‌صورت مستقل و تصادفی از بازه $[۰, ۱]$ با چگالی احتمال یکنواخت انتخاب کنیم. چگالی این مجموع چه مقدار است؟

فرض کنیم X و Y دو متغیر تصادفی که بیان کردیم و $Z = X + Y$ مجموع آنها باشد. پس رابطه زیر را داریم.

$$f_X(x) = f_Y(y) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر} \quad ۰ \leq x \leq ۱ \\ ۰ & o.w. \end{cases}$$

و تابع چگالی احتمال برای این مجموع به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) \mathrm{d}y.$$

از آنجایی‌که $f_Y(y) = ۱$، اگر $۰ \leq y \leq ۱$ و در سایر نقاط ۰ باشد، رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$f_Z(z) = \int_{۰}^{۱} f_X(z-y) \mathrm{d}y.$$

تابع زیر انتگرال ۰ است، مگر این‌که $۰ \leq z - y \leq ۱$ باشد. (یعنی مگر این‌که $z - ۱ \leq y \leq z$) در این صورت برابر ۱ می‌شود. بنابراین اگر $۰ \leq z \leq ۱$ باشد، رابطه زیر برقرار است.

$$f_Z(z) = \int_{۰}^{z} \mathrm{d}y = z.$$

در صورتی‌که اگر $۱ < z \leq ۲$ رابطه زیر را داریم.

$$f_Z(z) = \int_{z-۱}^{۱} \mathrm{d}y = ۲ - z.$$

و اگر $z < ۰$ یا $z > ۲$، $f_Z(z) = ۰$. بنابراین رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$f_Z(z) = \begin{cases} z, c۰ \leq z \leq ۱ \\ ۲ - z, \quad \text{اگر} \quad ۱ < z \leq ۲ \\ ۰, \quad o.w. \end{cases}$$

مجموع دو متغیر تصادفی نمایی مستقل

مثال ۴.۳.۲. فرض کنیم دو عدد را به‌صورت تصادفی از بازه $[۰, \infty)$ با چگالی نمایی با پارامتر λ انتخاب کنیم. چگالی مجموع آنها چه مقدار است؟

فرض کنیم X و Y و $Z = X + Y$ به متغیرهای تصادفی با تابع چگالی‌های به ترتیب f_X و f_Y و f_Z اشاره داشته باشند. آن‌گاه رابطه زیر را داریم.

$$f_X(x) = f_Y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, \quad \text{اگر} \quad x \geq ۰ \\ ۰, \quad o.w. \end{cases}$$

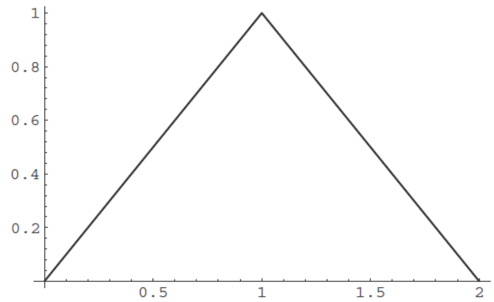
بنابراین اگر $z > ۰$ باشد، رابطه زیر برقرار است.

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y) \mathrm{d}y \\ &= \int_{۰}^{z} \lambda e^{-\lambda(z-y)} \lambda e^{-\lambda y} \mathrm{d}y \\ &= \int_{۰}^{z} \lambda^{۲} e^{-\lambda z} \mathrm{d}y \\ &= \lambda^{۲} z e^{-\lambda z}, \end{aligned}$$

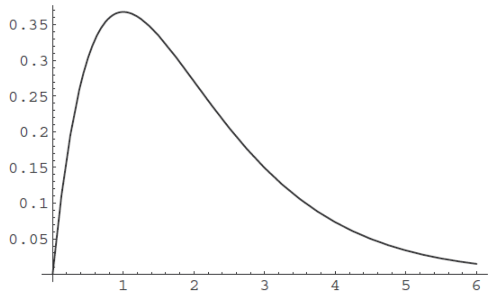
در صورتی‌که اگر $z < ۰$ باشد، $f_Z(z) = ۰$. بنابراین

$$f_Z(z) = \begin{cases} \lambda^۲ z e^{-\lambda z}, & \text{اگر} \quad z \geq ۰ \\ ۰, & o.w. \end{cases}$$

اشکال ۸.۲ و ۹.۲ ، پیچش دو چگالی یکنواخت و دو چگالی نمایی را نشان می‌دهند.



شکل ۸.۲: پیچش دو چگالی یکنواخت



شکل ۹.۲: پیچش دو چگالی نمایی با $\lambda = ۱$

مجموع دو متغیر تصادفی نرمال مستقل

مثال ۵.۳.۲. این مثالی جالب و مهم است که نشان می‌دهد پیچش دو چگالی نرمال با میانه‌های $\mu_۱$ و $\mu_۲$ و واریانس‌های $\sigma_۱$ و $\sigma_۲$ مجددا چگالی نرمالی با میانه $\mu_۱ + \mu_۲$ و واریانس $\sigma_۱^۲ + \sigma_۲^۲$ است. در حالتی خاص می‌توان نشان داد که هر دو متغیر تصادفی، نرمال استاندارد هستند. فرض کنیم X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند که هریک چگالی نرمال استاندارد دارند. رابطه زیر را داریم.

$$f_X(x) = f_Y(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{x^۲}{۲}}.$$

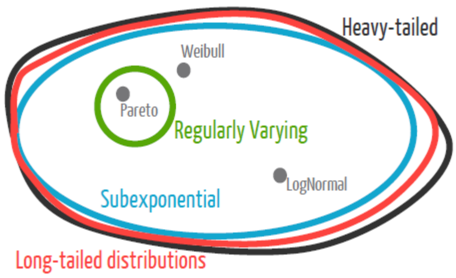
همچنین

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= f_X * f_Y(z) \\ &= \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(z-y)^۲}{e^{\frac{-y^۲}{۲}}}}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{۱}{۲\pi}e^{\frac{-z^۲}{۴}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{y-z}{۲})^۲}\mathrm{d}y \\ &= \frac{۱}{۲\pi}e^{\frac{-z^۲}{۴}}\sqrt{\pi}\left[\frac{۱}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{y-z}{۲})^۲}\mathrm{d}y\right]. \end{aligned}$$

عبارت داخل کروشه بیان‌گر انتگرال تابع چگالی نرمال با $\mu = ۰$ و $\sigma = \sqrt{۲}$ است و در نتیجه مساوی ۱ است. بنابراین رابطه زیر را داریم.

$$f_Z(z) = \frac{۱}{\sqrt{۴\pi}}e^{\frac{-z^۲}{۴}}.$$

در پایان این مبحث، شکل ۱۰.۲ نمایشی از روابط بین توزیع‌های دم سنگین، دم دراز و زیر نمایی است که نشان می‌دهد هر توزیع دم دراز و زیر نمایی توزیع دم سنگین نیز هست.



شکل ۱۰.۲: روابط توزیع‌های دم سنگین، دم دراز و زیر نمایی.

فصل ۳

احتمال ورشکستگی در بازاری با مدل پواسون مرکب

یکی از مسائل مهم در بازارهای بورس دنیا، ایجاد فضایی امن با کمترین ریسک برای سهام‌داران و سرمایه‌گذاران است. زیرا فراهم آوردن اطمینان خاطر سهام‌داران بی‌شک منتج به افزایش سرمایه گذاری در بازارهای بورس و به تبع آن رونق بازارهای بورس دنیا خواهد شد. یکی از راه‌های ایجاد چنین امنیتی ورود شرکت های بیمه [1] به بازار بورس است. سهام‌داران نیز استقبال زیادی از بیمه شدن سهام خود در مقابل ریسک توسط شرکت‌های بیمه می‌کنند. اما مساله مهم در این بین احتمال ورشکستگی شرکت‌های بیمه کننده بوده و از این حیث یافتن پاسخ این مساله مورد استقبال تمامی این شرکت‌ها قرار گرفته تا جایی که آن‌ها را وادار به سرمایه‌گذاری‌های کلان روی چنین تحقیقاتی کرده است. به دلیل اهمیت موضوع در این رساله نیز قصد بررسی و تحقیق روی چنین مساله ای داریم.
سالهاست که ریاضیدانان فرانسوی زیادی از جمله اونزی [2] احتمال ورشکستگی شرکت‌های بیمه کننده را برای بازارهای بورس متفاوت با مدل‌های تصادفی مختلف محاسبه کرده اند. در این‌جا این مساله را برای بازارهای بورسی حل می‌کنیم که فرآیند قیمت دارایی ریسکی آن از مدل فرآیند پواسون مرکب و فرآیند دارایی شرکت بیمه کننده از فرمول زیر تبعیت می‌کند.

$$S_r(t) = xe^{rt} + \int_۰^t e^{r(t-s)} C(\mathrm{ds}) - \sum_{k=۱}^{N(t)} X_k e^{r(t-\sigma_k)}, \quad t \geq ۰ \tag{۱.۳}$$

[1] Insurance
[2] Avanzi

۱.۳ بیمه

بیمه راهکاری است که طی آن یک بیمه‌گر بنا به ملاحظاتی تعهد می‌کند که زیان احتمالی یک بیمه‌گذار را در صورت وقوع یک حادثه در یک دوره زمانی خاص، جبران نماید و یا خدمات مشخصی را به وی ارائه دهد. بنابراین، بیمه یکی از روش‌های مقابله با ریسک است.
از دیدگاه ریاضی ریسک یک مقدار عددی است که برای هر ضرر، خطر و یا زیانی وجود دارد. احتمال زبان گویای ریسک است، کمی کردن مفهوم کیفی ریسک بر عهده احتمال است. در عمل تنها به‌دنبال ریسک‌هایی هستیم که در زندگی ما مهم‌تر هستند، پس به‌دنبال مدیریت ریسک‌های مهم در زندگی هستیم و بیمه این ارزش را دارد که با مدیریت ریسک، ریسک را از بیمه‌گذار به خود منتقل می‌کند و در ازای آن وجهی را دریافت می‌کند که آن را حق بیمه می‌نامند. واژه‌ی ریسک در ادبیات بیمه تعابیر گوناگونی دارد. از دیدگاه مدیریت بیمه، ریسک صرفا عبارت است از عدم اطمینان از وقوع خطر. بیمه در زبان فارسی از کلمه بیم به معنای ترس گرفته شده است. بیمه دانشی است که به موجب آن یک طرف تعهد می‌کند در ازای دریافت وجه یا وجوهی از طرف دیگر، در صورت وقوع یا بروز حادثه معین، خسارت حاصل از آن را جبران نموده و یا مخارج مربوط به جبران خسارت را تقبل نماید. متعهد را بیمه‌گر، طرف تعهد را بیمه‌گذار و وجهی را که بیمه‌گذار به بیمه‌گر می‌پردازد، حق بیمه می‌نامند.
کلمه خطر در بیمه برای توصیف عامل بروز خسارت و زیان مالی یا جانی به کار می‌رود به عنوان مثال، خطر سیل، خطر تصادف، خطر سرقت و غیره به همین معنی هستند.
به بیانی دیگر بیمه یک مکانیسم انتقال ریسک است که از طریق آن بار ریسک زیان‌های ناشی از وقوع خسارت از یک شخص یا بنگاه اقتصادی به دیگران منتقل شده، در سطح گسترده‌تر پیش بینی شده‌ای قرار می‌گیرد. از این رو مسائل مربوط به ورشکستگی برای ادامه حیات یک شرکت بیمه نقش بسیار مهمی ایفا می‌کند. نظریه های ریسک و نظریه های مربوط به آن به‌خصوص ورشکستگی نقش مهمی را در ریاضیات بیمه دارند.

۱.۱.۳ مفاهیمی از بیمه

مفاهیم این قسمت از مرجع [۲۹] آورده شده است.
نظریه ریاضیات بیمه را می‌توان به سه بخش تقسیم کرد.

۱. بیمه زندگی [۳]

۲. بیمه غیر زندگی [۴]

۳. نظریه خطر [۵]

[۳] Life Insurance
[۴] Life non-Insurance
[۵] Risk Theory

مفاهیم اساسی نظریه خطر

در اینجا با نمودهای مختلفی از بیمه سروکار داریم و توجه خود را به سهامی خاص محدود می‌کنیم، مانند سهامی که توسط هر دو عامل تصادفی و غیر تصادفی مشخص می‌شود. در ابتدا موقعیت راه‌اندازی [۶] و دوره زمانی [۷] را یادآوری می‌کنیم. سرمایه اولیه [۸] دارای اهمیت بیشتری است و آن را به‌عنوان مجموعه سرمایه، جدا از تامین مخارج و هزینه‌ها در دوره زمانی ابتدایی یعنی هنگامی‌که شرکت هنوز حق بیمه‌ای را دریافت نکرده است، تفسیر می‌کنیم. در ادامه سرمایه اولیه با u نشان داده می‌شود. از جمله عناصری که معمولاً طبیعت تصادفی دارند، به شرح ذیل هستند.

- دوره‌هایی از ادعاها [۹] به‌وسیله $\sigma_۱, \sigma_۲, \ldots$ نشان داده می‌شوند. در بعضی موارد دوره ورودی ادعای اضافی در زمان صفر را با $\sigma_۰ = ۰$ معرفی می‌کنیم.جدا از این، دوره‌ها از یک دنباله ناکاهشی تشکیل می‌شوند که در فرض کلی چیز خاصی درباره استقلال آنها نمی‌دانیم. متغیرهای تصادفی با $T_n = \sigma_n - \sigma_{n-۱}$ و $n \geq ۱$ مشخص می‌شوند و آنها را زمان‌های وقوع‌ـ‌میانی [۱۰] در بین ادعاهای متوالی می‌نامیم.

- تعداد ادعاها تا زمان t با $N(t)$ نشان داده می‌شود که $N(t) = \sup\{n; \sigma_n \leq t\}$ است. رابطه حقیقی بین دنباله‌ای از ورودی ادعاها $\{\sigma_۰, \sigma_۱, \sigma_۲, \ldots\}$ و فرآیند شمارشی $\{N(t), t \geq ۰\}$ با رابطه $\{N(t) = n\} = \{\sigma_n \leq t < \sigma_{n+۱}\}$ به‌دست می‌آید. فرآیند $N(t)$ اغلب فرآیند شمارشی [۱۱] نامیده می‌شود.

- رخ دادن ادعا در زمان σ_n اندازه U_n را دارد. دنباله متوالی اندازه ادعاها [۱۲]، $\{U_n, n = ۱, ۲, \ldots\}$ اغلب شامل متغیرهای تصادفی دوبه‌دو مستقل و هم توزیع فرض می‌شود.

- مقدار ادعای متراکم [۱۳] در زمان t با $X(t) = \sum_{i=۱}^{N(t)} U_i$ به‌دست می‌آید و $X(t) = ۰$ اگر $N(t) = ۰$. با استفاده از این تعریف، مقدار ادعای متراکم در حالت کلی مجموع تصادفی از متغیرهای تصادفی است.

- عایدی حق بیمه [۱۴] . در بازه زمانی ۰ تا t، فرض کنیم در نهایت $\pi(t)$ از طریق دریافت حق بیمه‌ها دریافت شده است.

- سرمایه ریسکی [۱۵] در زمان t، با رابطه $R(t) = u + \pi(t) - X(t)$ به‌دست می‌آید.

---

[۶] Starting Position
[۷] Time Period
[۸] Initial Reserve
[۹] Epochs Of The Claims
[۱۰] Inter-Occurrence Times
[۱۱] Counting Process
[۱۲] Clime Sizes
[۱۳] Aggregate Claim Amount
[۱۴] Premium Income
[۱۵] Risk Reserve

۲.۳ احتمال ورشکستگی

۱.۲.۳ ورشکستگی

پیش‌بینی موضوعی است که از دیرباز ذهن انسان را به‌خود مشغول نموده است. به‌طور کلی می‌توان گفت که یکی از مهم‌ترین وظایف علم در زمینه‌های مختلف تلاش جهت یافتن ارتباط بین پدیده‌های متفاوت به‌منظور پیش‌بینی آینده است. از آنجا که علی‌رغم وجود شرایط ورشکستگی در مواردی شرکت‌ها به حیات ظاهری خود ادامه می‌دهند و به نوعی غیرمستقیم منجر به هدر رفتن منابع و عدم بهره‌گیری از فرصت‌های سرمایه‌گذاری می‌شود. از این جهت تلاش می‌شود تا با بهره‌گیری از تکنیک‌های پیشرفته بتوان از احتمال ورشکستگی شرکت‌ها در آینده دور نمایی صحیح به‌دست آورد.
ورشکستگی تقریباً مقوله ای باستانی و به همین میزان هم شایع می‌باشد. ورشکستگی ممکن است در یک مغازه خرده فروشی کوچک که قادر به ایفای تعهد اجاره‌اش نیست و بدین دلیل بسته می‌شود یا در شرکت تولیدی بزرگ به دلیل نداشتن نقدینگی مطلوب و زیان‌های مستمر سالانه اتفاق بیفتد. حسابداران باید علل پدیدآورنده ورشکستگی را به خوبی درک کنند زیرا آنها هستند که می‌توانند قبل از وقوع ورشکستگی، مدیریت را آگاه سازند و راه حل پیش‌گیری کننده ارائه نمایند. ورشکستگی زمانی اتفاق می‌افتد که طبق قانون، دارایی‌ها برای پرداخت بدهی شرکت فروخته شود و شرکت منحل شود.

احتمال ورشکستگی

احتمال ورشکستگی، به عنوان یک معیار ایمنی و هموار در مدیریت ریسک شرکت‌های بیمه مطرح است. مثال ملموسی از کاربرد احتمال ورشکستگی، سیاست‌گذاری شرکت‌های بیمه برای انتخاب میزان نگهداری در بیمه‌های اتکایی است. طبق این معیار، حد نگهداری مناسب در یک بیمه اتکایی [۱۶] مفروض، حدی است که احتمال ورشکستگی را حداقل سازد. محاسبات احتمالات ورشکستگی مسئله بسیار مهمی است، زیرا با دانستن آن مدیران شرکت بیمه می‌توانند در مورد خط مشی شرکت از جمله تعیین حق بیمه دریافتی از افراد تحت پوشش خود و حد نگهداری مناسب در یک بیمه اتکایی مفروض تصمیم‌گیری کنند. (دلاور خلفی، علی؛ زهره طباطبایی و سلماز افتخاری، ۱۳۹۳) [۲].

۳.۳ مساله ورشکستگی

نظریه ورشکستگی همیشه بخش اساسی در ریاضیات آماری بوده است. در برخی از نتایج استنتاجی و نظری هدف مورد نظر در حالت کاربردی محدود شده است. با این حال در ریاضیات آماری، محاسبه و تقریب زدن احتمال ورشکستگی با استفاده از منابع خلاقیت و شبیه‌سازی و به کار گرفتن اصول مهارتی است. فرض کنید یک شرکت بیمه حاضر به ریسک مقدار مشخص u در شاخه خاصی از بیمه شده

[۱۶] بیمه اتکایی نوعی بیمه است. در این نوع بیمه، شرکت بیمه که خود بیمه‌گر بیمه‌نامه‌های مختلفی می‌باشد، خود را در مقابل خسارات احتمالی که بیمه‌نامه‌ها دچار آن می‌شوند، نزد شرکت بیمه دیگری بیمه می‌نماید.

است، یعنی اگر مازاد ادعا [۱۷] به سطحی بالاتر از u برسد، برخی اقدام شدید و جدی برای آن شاخه خاص می‌کنند. از آنجایی‌که در بعضی موارد قسمتی از کار با سرمایه u شروع می‌شود، می‌توانیم با خیال راحت u را سرمایه اولیه بنامیم. یعنی اغلب باید حق بیمه مطالبه شود و هر نوع بیمه اتکایی (بیمه مجدد) را دریافت کند. معمولاً حق بیمه با موقعیت و سیاست شرکت و تعرفه رقبا تعیین می‌شود. یک معیار ممکن برای بهینه‌سازی قرارداد بیمه اتکایی، به حداقل رساندن احتمال اینکه مازاد (سرمایه) ادعا به بالاتر از سطح u برسد، خواهد بود. ذخیره ریسکی $R(t) = u + \pi(t) - X(t)$ را در نظر بگیرید. همچنین متغیر تصادفی $\tau = \inf\{t \geq ۰ : R(t) < ۰\}$ را تعریف می‌کنیم که τ به‌طور لحظه‌ای زمان ورشکستگی سبد سهام [۱۸] [۱۹] را به ما می‌دهد و ورشکستگی را از لحاظ فنی تفسیر می‌کند. البته باید احتمال اینکه هیچ ورشکستگی اتفاق نیفتد را نیز در نظر داشته باشیم، یعنی $\tau = \infty$ شود. باید بدانیم که τ وابسته به تمام عناصر تصادفی در فرآیند ذخیره ریسکی $\{R(t)\}$ و همچنین مقدار معین u است. به همین دلیل اغلب تنها نماد $\tau(u)$ را برای زمان ورشکستگی به کار می‌بریم. به‌ویژه، بقا [۲۰] یا احتمال عدم ورشکستگی در زمان متناهی [۲۱] به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\bar{\psi}(u, x) = P(\inf_{۰ \leq t \leq x} R(t) \geq ۰) = P(\tau(u) \geq x).$$

افق محدود [۲۲] $x > ۰$ را در نظر می‌گیریم. احتمال بقا [۲۳] بالاتر از افق زمان متناهی، با کمیت زیر تعریف می‌شود.

$$\bar{\psi}(u) = P(\inf_{t \geq ۰} R(t) \geq ۰) = P(\tau(u)) = \infty.$$

با یک جایگزینی، احتمال ورشکستگی را با کمیت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\psi(u, x) = ۱ - \bar{\psi}(u, x) \quad , \psi(u) = ۱ - \bar{\psi}(u).$$

فرآیند ذخیره ریسکی [۲۴] $\{R(t), t \geq ۰\}$، به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

$$R(t) = u + \beta t - \sum_{i=۱}^{N(t)} U_i,$$

که فرآیند مازاد ادعا [۲۵] $\{S(t); t \geq ۰\}$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

[۱۷] Claim Surplus

[۱۸] Portfolio

[۱۹] سبد سهام یا پرتفوی ترکیبی مناسب از سهام یا سایر دارایی‌ها است، که یک سرمایه‌گذار آن‌ها را خریداری کرده است. هدف از تشکیل سبد سهام، تقسیم کردن ریسک سرمایه‌گذاری بین چند سهم است؛ بدین ترتیب، سود یک سهم می‌تواند ضرر سهام دیگر را جبران کند. یک ضرب‌المثل معروف می‌گوید: همه تخم‌مرغ‌ها را در یک سبد نگذارید. چرا که ریسک شکستن سبد، باعث نابودی همه تخم‌مرغ‌ها خواهد شد.

[۲۰] Survival

[۲۱] Nonruin Probability in Finite time

[۲۲] Finite Horizon

[۲۳] Survival Probability

[۲۴] Risk Reserve Process

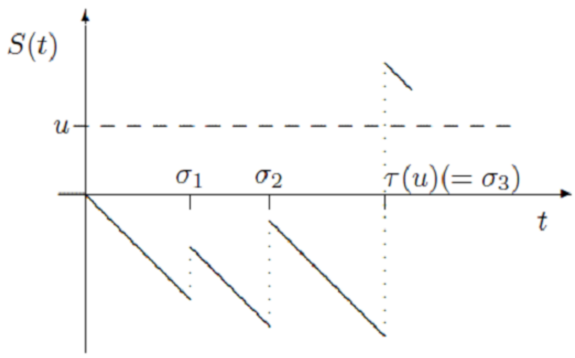
[۲۵] Claim Surplus Process

$$S(t) = \sum_{i=۱}^{N(t)} U_i - \beta t.$$

زمان ورشکستگی [۲۶] $\tau(u) = \min\{t : R(t) \leq ۰\} = \min\{t : S(t) > u\}$، اولین دوره زمانی است که فرآیند ذخیره ریسکی به منفی می‌رسد یا به‌طور معادل زمانی که فرآیند مازاد ادعا به بالاتر از سطح u برسد. هدف ما احتمال ورشکستگی $\psi(u,x) = P(\tau(u) \leq x)$ و $\psi(u) = \lim_{x\to\infty} \psi(u,x) =$ $P(\tau(u) < \infty)$ خواهد بود. در اینجا $\psi(u,x)$ احتمال ورشکستگی افق_متناهی [۲۷] و $\psi(u)$ احتمال ورشکستگی افق_نامتناهی [۲۸] نامیده می‌شود. از طرفی $\psi(u)$ می‌تواند احتمال ورشکستگی نهایی [۲۹] نامیده شود. احتمال بقا [۳۰] را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\bar{\psi}(u) = ۱ - \psi(u).$$

یک رابطه بین احتمال ورشکستگی افق_نامتناهی از مدل ریسکی در زمان گسسته و زمان پیوسته وجود دارد. برای به‌دست آوردن $\tau(u)$ کافی است فرآیند مازاد ادعا $\{S(t)\}$ را در دوره‌های جایگزین σ_k، $(k = ۱, ۲, \dots)$ بررسی کنیم. شکل زیر را ببینید.



شکل ۱.۳: فرآیند مازاد ادعا

[۲۶] Time Of Ruin
[۲۷] Finite-Horizon Ruin Probability
[۲۸] Infinite-Horizon Ruin Probability
[۲۹] Ultimate Ruin Probability
[۳۰] Survival Probability

در واقع، بیشترین مقدار $M = \max_{t\geq \circ} S(t)$ از فرآیند مازاد ادعا را می‌توان با رابطه $M = \max_{n\geq \circ} \sum_{k=۱}^{n}(U_k-\beta T_k)$ به‌دست آورد و به تبع آن احتمال ورشکستگی به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\psi(u) = P(M > u). \tag{۲.۳}$$

فرمول (۲.۳) این امکان را به ما می‌دهد که تابع ورشکستگی $\psi(u)$ را به‌عنوان تابع دم از زمان انتظار ثابت از یک سیستم سرور_ تنها [۳۱] از نظریه صف [۳۲] [۳۳] تفسیر کنیم.

با این حال به مقایسه احتمال ورشکستگی افق_ متناهی در زمان گسسته با آنجایی‌که زمان پیوسته است، دقت کنید. چون در حالت کلی به‌صورت زیر است.

$$P(\max_{\circ\leq t\leq x} S(t) > u) \neq P(\max_{\circ < n\leq x} \sum_{k=۱}^{n}(U_k - \beta T_k) > u).$$

برای ساده‌تر شدن کار خود، از یک نماد مشابه برای تابع ورشکستگی افق_ متناهی در مدل ریسکی زمان_ پیوسته و همچنین مدل ریسکی زمان_ گسسته استفاده می‌کنیم. یعنی

$$\psi(u,x) = P(\tau(u)\leq x) = P(\max_{\circ\leq t\leq x} S(t) > u).$$

در این فصل یک فرمول تقریبی برای احتمال ورشکستگی زمان متناهی از مدل پواسون مرکب با نرخ سود ثابت و ادعاهای زیرنمایی در حالتی که سرمایه ابتدایی بزرگ است، ارائه می‌دهیم. این فرمول با نتایجی که تاکنون برای احتمال ورشکستگی شناخته شده است، سازگار است و به ویژه برای تمام زمان‌های افقی که توزیع اندازه ادعا، دم مختلف منظم [۳۴] است، شکل یکسانی دارد.

۴.۳ مدل پواسون مرکب

مدل پواسون مرکبی را در نظر بگیرید که در آن اندازه‌های ادعا [۳۵] X_k، $k = ۱,۲,\ldots$ شکلی از دنباله‌ای مستقل و دارای توزیع یکسان باشد $(i.i.d.)$، و متغیرهای تصادفی نامنفی همگی دارای توزیع مشترک B باشند، همچنین زمان‌های ورودی σ_k، $k = ۱,۲,\ldots$، به فرآیند پواسون همگرای زیر با شدت $\lambda > \circ$ منصوب می‌شوند.

$$N(t) = card\{k = ۱,۲,\cdots : \sigma_k \leq t\} \quad , \quad t\geq \circ$$

[۳۱] Single-Server System

[۳۲] Queueing Theory

[۳۳] نظریه صف شامل مطالعه ریاضی صف‌های انتظار و فرآیندهای تصادفی مربوط به‌آن می‌شود. یک سیستم صف را می‌توان به‌صورت مشتریانی تعریف کرد که برای سرویس گرفتن وارد سیستم می‌شوند و اگر سرویس در اختیار نباشد، برای آن منتظر می‌مانند و پس از انجام سرویس، سیستم را ترک می‌کنند. در سیستم‌های صف، مشتری و سرویس دهنده (سرور) دو سوی یک صف هستند.

[۳۴] Regulary Varying Tailed

[۳۵] ادعا در اصطلاح اقتصادی اتفاقات نادر و ناگهانی در بازار است که در اینجا می‌تواند میزان ضرر شرکت بیمه در بازار باشد.

فرض کنید $\{C(t)\}_{t\geq ۰}$، با شرط $C(۰) = ۰$ که یک فرآیند تصادفی از راست پیوسته است، معرف تراکم حق بیمه نهایی [۳۶] در زمان t باشد. همچنین فرض کنید $r > ۰$ نرخ بهره ثابت [۳۷] باشد (به‌طوری‌که بعد زمان t، یک دلار به e^{rt} دلار برسد) و $x > ۰$ را سرمایه ابتدایی [۳۸] در نظر می‌گیریم. سرمایه نهایی [۳۹] در زمان t با $S_r(t)$ نشان داده می‌شود که به ازای آن معادله زیر برقرار است.

$$S_r(t) = xe^{rt} + \int_۰^t e^{r(t-s)}C(ds) - \sum_{k=۱}^{N(t)} X_k e^{r(t-\sigma_k)} \quad , \quad t \geq ۰. \tag{۳.۳}$$

زمان ورشکستگی این مدل به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\tau(x) = \inf\{t > ۰ : S_r(t) < ۰ \mid S_r(۰) = x\}, \tag{۴.۳}$$

و $\inf \emptyset = \infty$ را قرارداد می‌کنیم. از این رو احتمال ورشکستگی در مدت زمان متناهی $T > ۰$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\psi_r(x, T) = P(\tau(x) \leq T). \tag{۵.۳}$$

علاوه بر این، احتمال ورشکستگی نهایی [۴۰] به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\psi_r(x) \equiv \psi_r(x, \infty) = \lim_{T\to\infty} \psi_r(x, T) = P(\tau(x) < \infty).$$

۵.۳ مدل تجدید

در این مدل، ادعاهای X_n، $n \geq ۱$، به شکل دنباله‌ای مستقل و دارای توزیع یکسان بوده $(i.i.d.)$، و متغیرهای تصادفی نامنفی همگی دارای توزیع مشترک B هستند، همچنین زمان‌های ورودی [۴۱] Y_n، $n \geq ۱$، دنباله‌ای دیگر از متغیرهای تصادفی نامنفی $i.i.d.$ بوده، که مستقل از متغیرهای تصادفی X_n، $n \geq ۱$ هستند و به ۰ کاهش پیدا نمی‌کنند. موقعیت ادعاهای متوالی [۴۲] را با $\tau_n = \sum_{k=۱}^{n} Y_k$ نشان می‌دهیم که به فرآیند شمارشی تجدید زیر منصوب می‌شوند.

$$N(t) = \#\{n \geq ۱ : \tau_n \in [۰, t]\} \quad t \geq ۰.$$

عدد اصلی مجموعه خالی را ۰ قرارداد می‌کنیم. مقدار نهایی انباشتگی ادعاها [۴۳] در زمان $t \geq ۰$ را با مجموع مرکب زیر نشان می‌دهیم.

$$S(t) = \sum_{n=۱}^{N(t)} X_n \quad , \quad t \geq ۰$$

[۳۶] Total Premium Accumulated
[۳۷] Constant Interest Force
[۳۸] Initial Surplus
[۳۹] Total Surplus
[۴۰] Probability Of Ultimate Ruin
[۴۱] Interarrival Times
[۴۲] Successive Claims
[۴۳] Total Amount of Claims Accumulated

که هرگاه $N(t)=0$ باشد، $S(t)=0$ است. فرض کنیم $C(t)$، $t\geq 0$ فرآیند تصادفی ناکاهشی و نامنفی باشد که مقدار نهایی انباشتگی حق بیمه‌ها [۴۴] در زمان $t\geq 0$ را نشان دهد. همچنین $r>0$ را نرخ بهره ثابت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $x\geq 0$ سرمایه اولیه شرکت بیمه باشد. پس سرمایه نهایی در زمان t را در این مدل با $U(t)$ نشان می‌دهیم که در معادله زیر صدق می‌کند.

$$U(t)=xe^{rt}+\int_{[0,t]}e^{r(t-y)}C(\mathrm{d}y)-\int_{[0,t]}e^{r(t-y)}S(\mathrm{d}y),\quad t\geq 0. \tag{۶.۳}$$

همچنین فرض کنیم مقدار تنزیل یافته نهایی حق بیمه‌ها [۴۵] متناهی باشد که آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\tilde{C}=\int_{[0,\infty]}e^{-ry}C(\mathrm{d}y)<\infty,\quad a.s. \tag{۷.۳}$$

احتمال ورشکستگی در این حالت به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\psi(x)=P(U(t)<0 \quad \text{برای یک} \quad t\geq 0). \tag{۸.۳}$$

در ادامه حالت‌های تقریبی احتمال ورشکستگی در زمان متناهی یعنی $\psi_r(x,T)$ را تحت این فرض که توزیع اندازه ادعا یعنی B یک سنگین دم است، بررسی می‌کنیم.
همچنین بعد از مرور مختصری بر کارهای انجام شده اخیر، نتایج اصلی را بیان می‌کنیم و پس از ارائه چندین لم، آنها را اثبات می‌کنیم.

۶.۳ مرور مختصری بر نتایج مربوطه

به‌طور کلی تمام روابط محدود به حالتی هستند که $x\to\infty$ می‌رود، مگر آن‌که خلاف آن ذکر شود.
برای دو تابع مثبت $a(\cdot)$ و $b(\cdot)$، می‌گوییم $a(x)\sim b(x)$، اگر $\lim\frac{a(x)}{b(x)}=1$.
روابط را به حالتی محدود می‌کنیم که توزیع‌های اندازه ادعا، سنگین دم است. مهم‌ترین نوع از توزیع‌های سنگین دم، دسته زیر نمایی $\mathcal{S}$ است. طبق تعریف، توزیع F روی $[0,\infty)$ زیرنمایی است که با $F\in\mathcal{S}$ نشان داده می‌شود، اگر برای تمام $x\geq 0$، $\bar{F}(x)=1-F(x)>0$ و رابطه

$$\lim\frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\bar{F}(x)}=n \tag{۹.۳}$$

برای یک (و حتی برای هر) $n=2,3,\ldots,$ برقرار باشد که F^{*n}، پیچش $n-$ ام F را نشان می‌دهد. به وضوح می‌دانیم هر توزیع زیرنمایی F دم دراز است، هرگاه رابطه زیر برای هر $y>0$ برقرار باشد.

$$\lim\frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)}=1 \tag{۱۰.۳}$$

[۴۴] Total Amount Of Premiums Accumulated
[۴۵] Total Discounted Amount Of Premiums

و با نماد $F \in \mathcal{L}$ نشان داده می‌شود.
یک زیردسته مفید از توزیع‌های زیرنمایی $\mathcal{R}$ است که آن را دسته‌ای از توزیع‌ها با متغیرهای منظم تعریف می‌کنیم. توزیع F را روی بازه $[۰, \infty)$ وابسته به دسته $\mathcal{R}$ گوییم، اگر برای تمام $x \geq ۰$، $\bar{F}(x) > ۰$ باشد و یک $\alpha > ۰$ موجود باشد به‌طوری‌که رابطه زیر برای هر $y > ۰$ برقرار باشد.

$$\lim \frac{\bar{F}(xy)}{\bar{F}(x)} = y^{-\alpha}. \tag{۱۱.۳}$$

ویژگی منظم بودن در رابطه (۱۱.۳) را با $F \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ نشان می‌دهیم. در این حالت به وضوح برای تمام $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ هایی که $\alpha_۱ < \alpha < \alpha_۲$، رابطه زیر را داریم.

$$\lim x^{\alpha_۱} \bar{F}(x) = \lim \frac{۱}{x^{\alpha_۲} \bar{F}(x)} = ۰;$$

علاوه بر این، از معادله (۱۱.۳) رابطه تقریبی $\bar{F}(xy) \sim y^{-\alpha} \bar{F}(x)$ نتیجه می‌شود که برای $y \in [a, b]$ یکنواخت است، برای ثابت‌های اختیاری a و b که $۰ < a \leq b < \infty$، رابطه زیر برقرار است.

$$\lim \sup_{a \leq y \leq b} \left| \frac{\bar{F}(xy)}{y^{-\alpha} \bar{F}(x)} - ۱ \right| = ۰ \tag{۱۲.۳}$$

برای جزئیات بیشتر در مورد توزیع‌های دم سنگین و کاربرد آنها در بیمه و مالی مراجعه به بینگام و همکاران[۴۶] [۵] و امبرتس و همکاران[۴۷] [۱۹] پیشنهاد می‌شود.
حالت‌های تقریبی احتمال ورشکستگی نهایی $\psi_r(x)$ از مدل ریسک که در بخش ۴.۳ با $C(۰)$ که یک تابع خطی غیراحتمالی است، معرفی شد. همچنین توزیع B یک دم سنگین است و $\{X_k\}_{k=۱}^{\infty}$ و $\{N(t)\}_{t \geq ۰}$ که دو به دو مستقل‌اند، در نوشته‌های اخیر مورد وارسی قرار گرفته بوده است. ساندت[۴۸] و تیوگل[۴۹] [۱۲] و کلوپلبرگ[۵۰] و استادتمولر[۵۱] [۱۰] نشان دادند تحت شرط $B \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ برای $\alpha > ۱$ رابطه زیر برقرار است.

$$\psi_r(x) \sim \frac{\lambda}{\alpha r} \bar{B}(x) \tag{۱۳.۳}$$

ازموسن[۵۲] [۳] و ازموسن و همکاران[۵۳] [۴] نتیجه کلی‌تری را اثبات کردند، به‌طور مثال رابطه زیر تحت شرط $B \in \mathcal{S}^*$ برقرار است.

$$\psi_r(x) \sim \frac{\lambda}{r} \int_x^{\infty} \frac{\bar{B}(y)}{y} \mathrm{d}y, \tag{۱۴.۳}$$

که کلاس $\mathcal{S}^*$ توسط کلوپلبرگ [۹] معرفی شده بود و با رابطه زیر نشان داده می‌شود.

[۴۶] Bingham et. al.
[۴۷] Embrechts et. al.
[۴۸] Sundt
[۴۹] Teugel
[۵۰] Kluppelberg
[۵۱] Stadtmuller
[۵۲] Asmussen
[۵۳] Asmussen et. al.

$$\int_{\circ}^{x} \bar{B}(x-y)\bar{B}(y)\mathrm{d}y \sim ۲\mu\bar{B}(x),$$

که در آن $\mu = \int_{\circ}^{\infty} \bar{B}(y)\mathrm{d}y \in (\circ, \infty)$ است. کلوپلبرگ [۹] نشان داد اگر $B \in \mathcal{S}^*$، آن‌گاه B و توزیع دم کلی B_I که به صورت زیر تعریف می‌شود، هردو زیرنمایی هستند.

$$B_I(x) = \frac{۱}{\mu}\int_{\circ}^{x} \bar{B}(y)\mathrm{d}y, \qquad x \geq \circ.$$

۷.۳ نتایج اصلی

در این فصل با روشی متمایز فرمولی یکسان را برای احتمال ورشکستگی زمان متناهی ارائه می‌دهیم. در این حالت B را بالاتر از کل دسته $\mathcal{S}$ در نظر می‌گیریم. اولین نتیجه اصلی قضیه ذیل است.

قضیه ۱.۷.۳. مدل پواسون معرفی شده در بخش۴.۳ را در نظر بگیرید، که در هر مبداء تصادفی، یعنی $\{X_k\}_{k=۱}^{\infty}$ و $\{N(t)\}_{t\geq\circ}$ و $\{C(t)\}_{t\geq\circ}$ دو به دو مستقل‌اند. اگر $B \in \mathcal{S}$، آنگاه برای هر $T > \circ$ رابطه زیر را داریم.

$$\psi_r(x,T) \sim \frac{\lambda}{r}\int_{\circ}^{xe^{rT}} \frac{\bar{B}(y)}{y}\mathrm{d}y \tag{۱۵.۳}$$

توجه داشته باشید که (۱۵.۳) با (۱۴.۳) سازگار است. به ویژه برای $\alpha > \circ$، اگر $B \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ باشد، آن‌گاه با توجه به ویژگی یکنواختی موضعی (۱۲.۳) رابطه زیر را داریم.

$$\begin{aligned}\int_{\circ}^{xe^{rT}} \frac{\bar{B}(y)}{y}\mathrm{d}y &= \bar{B}(x)\int_{\circ}^{xe^{rT}} \frac{\bar{B}(y)}{\bar{B}(x)}\frac{۱}{y}\mathrm{d}y\\ &\sim \bar{B}(x)\int_{\circ}^{xe^{rT}} \left(\frac{y}{x}\right)^{-\alpha}\frac{۱}{y}\mathrm{d}y\\ &= \frac{۱}{\alpha}\bar{B}(x)(۱-e^{-\alpha rT}).\end{aligned}$$

بنابراین در این حالت با استفاده از (۱۵.۳) برای هر $T > \circ$ رابطه زیر نتیجه می‌شود.

$$\psi_r(x,T) \sim \frac{\lambda}{\alpha r}\bar{B}(x)(۱-e^{-\alpha rT}), \tag{۱۶.۳}$$

که با توجه به (۱۳.۳) منطقی است. برای هر $T > \circ$ تراکم حق بیمه تنزیل [۵۴] شده نهایی [۵۵] در زمان T که آن را با $\tilde{C}(T)$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\tilde{C}(T) = \int_{\circ}^{T} e^{-rt}C(\mathrm{d}t) \quad \text{برای} \quad T \in (\circ, \infty]. \tag{۱۷.۳}$$

[۵۴] تنزیل روشی است برای تخمین ارزش حال یا ارزش فعلی جریان وجوه نقدی که در زمان‌بندی مشخصی در آینده قابل دریافت است.

[۵۵] Total Discounted Premium Accumulated

قضیه ۲.۷.۳. فرآیند تجدید معرفی شده در بخش ۵.۳ را در نظر بگیرید که برای $\alpha > 0$، $B \in \mathcal{R}_{-\alpha}$.
اگر یکی از دو فرض زیر برقرار باشد،

۱. فرآیند حق بیمه $\{C(t), t \geq 0\}$ از $\{X_n, n \geq 1\}$ و $\{Y_n, n \geq 1\}$ مستقل باشد.

۲. مقدار نهایی حق بیمه تنزیل شده که با رابطه (۷.۳) تعریف شد، در رابطه زیر صدق کند.

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{P(\tilde{C} > x)}{\bar{B}(x)} = 0. \tag{۱۸.۳}$$

آن‌گاه رابطه زیر را داریم.

$$\psi(x) \sim \frac{Ee^{-\alpha r Y_1}}{1 - Ee^{-\alpha r Y_1}} \bar{B}(x) \tag{۱۹.۳}$$

قضیه زیر احتمال ضرر شرکت بیمه، برای حداکثر مقدار x را مشخص می‌کند.

قضیه ۳.۷.۳. فرض کنید $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی $i.i.d.$ با توزیع مشترک $B \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ برای یک $\alpha > 0$ باشد. همچنین فرض کنید $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ دنباله‌ای دیگر از متغیرهای تصادفی کراندار و هم‌توزیع (مستقل لازم نیست) باشند. فرآیند پواسون $\{N_t\}_{t\geq 0}$ با شدت $\lambda > 0$ و مبداها به‌صورت تصادفی دوبه‌دو مستقل باشند. بنابراین برای T دلخواه ثابت و به‌طور یکنواخت برای t، که $0 \leq t \leq T$ رابطه زیر برقرار است.

$$P\left(\sum_{k=1}^{N(t)} X_k e^{-tV_k} > x\right) \sim \lambda t P(X_1 e^{-tV_1} > x) \sim \lambda t E e^{-\alpha t V_1} \bar{B}(x). \tag{۲۰.۳}$$

۸.۳ اثبات قضایا

۱.۸.۳ لم‌ها

قبل از ارائه اثبات‌ها چند نتیجه مقدماتی را در قالب لم بیان می‌کنیم.

لم ۱.۸.۳. اگر F زیرنمایی باشد، آن‌گاه برای هر $\varepsilon > 0$ ثابت $C_\varepsilon > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که نامساوی زیر برای هر $n = 1, 2, \ldots$ و $x \geq 0$ برقرار است.

$$\overline{F^{*n}}(x) \leq C_\varepsilon (1+\varepsilon)^n \bar{F}(x)$$

برهان. اثبات این نامساوی در چیستیاکاو[۵۶] [۱۷] و اسریا[۵۷] و نی[۵۸] [۱۶] ارائه شده است. همچنین می‌توانید به امبرتس [۱۸] و همکاران مراجعه کنید. □

[۵۶] Chistyakov
[۵۷] Athreya
[۵۸] Ney

لم ۲.۸.۳. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی و مستقل باشند. اگر X دارای توزیع زیرنمایی باشد و Y کراندار و در ۰ ناتبهگن باشد، آن‌گاه حاصل‌ضرب XY دارای توزیع زیرنمایی است.

برهان. به نتیجه ۲.۵ از کلاین[۵۹] و ساماروناییسکی[۶۰] [۶] مراجعه کنید. □

لم ۳.۸.۳. فرض کنید $\{N_t\}_{t\geq 0}$ فرایندی پواسون با زمان‌های ورودی σ_k، $k = 1, 2, \ldots$ باشد. اگر برای T دلخواه ثابت، $N(t) = n$، $n = 1, 2, \ldots$، آن‌گاه بردار تصادفی $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ هم‌توزیع با بردار تصادفی $(TU_{(1,n)}, \ldots, TU_{(n,n)})$ است وقتی‌که $U_{(1,n)}, \ldots, U_{(n,n)}$ آماره‌های ترتیبی n متغیر تصادفی $U_1, \ldots, U_n$ باشند که در آن U_i ها هم‌توزیع و مستقل از هم با توزیع یکنواخت از $(0, 1)$ انتخاب شده‌اند.

برهان. این نتیجه به‌خوبی روشن است. برای مثال به قضیه ۲.۳.۱ از راس[۶۱] [۳۰] مراجعه کنید. □

لم ۴.۸.۳. اگر دنباله‌ای از توزیع‌های $\{F_t\}_{t\geq 0}$ هنگامی‌که $t \to \infty$ به توزیع پیوسته F همگرا باشند، آن‌گاه همگرایی در این حالت یکنواخت است و رابطه زیر را داریم.

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{-\infty\leq x\leq +\infty} |F_t(x) - F(x)| = 0.$$

برهان. به قضیه ۱.۱۱ از پترو[۶۲] [۲۵] مراجعه شود (که به‌جای دنباله $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ از $\{F_t\}_{t\geq 0}$ استفاده می‌کند). □

لم ۵.۸.۳. مجموع وزنی تصادفی ارائه شده در ۱.۴.۱ را با شرط $B \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ برای $\alpha > 0$ در نظر بگیرید. رابطه زیر برقرار است،

$$P(W > x) \sim \bar{B}(x) \sum_{n=1}^{\infty} E\theta_n^{\alpha}$$

هرگاه یکی از دو فرض زیر برقرار باشد.

۱. برای $0 < \alpha < 1$ و یک $\varepsilon > 0$، رابطه زیر را داشته باشیم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(\theta_n^{\alpha+\varepsilon} + \theta_n^{\alpha-\varepsilon}) < \infty.$$

۲. برای $1 \leq \alpha < \infty$ و یک $\varepsilon > 0$، رابطه زیر را داشته باشیم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(\theta_n^{\alpha+\varepsilon} + \theta_n^{\alpha-\varepsilon})^{\frac{1}{\alpha+\varepsilon}} < \infty.$$

[۵۹] Cline
[۶۰] Samorodnitsky
[۶۱] Ross
[۶۲] Petrov

۲.۸.۳ اثبات قضیه ۱.۷.۳

برهان. از روابط (۴.۳) و (۵.۳) رابطه زیر برای یک $t \in (0, T]$ نتیجه می‌شود.

$$\psi_r(x,T) = P(e^{-rt}S_r(t) < 0 \mid S_r(0) = x). \tag{۲۱.۳}$$

همچنین برای هر $t \in (0, T]$ از (۳.۳) رابطه زیر را داریم.

$$x - \sum_{k=1}^{N(T)} X_k e^{-r\sigma_k} \leq e^{-rt}S_r(t) \leq x + \tilde{C}(T) - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k e^{-r\sigma_k}, \tag{۲۲.۳}$$

که $\tilde{C}(T)$ را در (۱۷.۳) تعریف کردیم. در اینجا $\tilde{X}(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} X_k e^{-r\sigma_k}$ را مقدار تراکم ادعای تنزیل شده نهایی [۶۳] در زمان $t > 0$ در نظر می‌گیریم. به‌وضوح از (۲۱.۳) و نامساوی اول در (۲۲.۳) رابطه زیر نتیجه می‌شود.

$$\psi_r(x,T) \leq P(\tilde{X}(T) > x), \tag{۲۳.۳}$$

همچنین از (۲۱.۳) و نامساوی دوم در (۲۲.۳) برای یک $t \in (0, T]$ رابطه زیر نتیجه می‌شود.

$$\psi_r(x,T) \geq P(\tilde{X}(T) > x + \tilde{C}(T)) = P(\tilde{X}(T) > x + \tilde{C}(T)). \tag{۲۴.۳}$$

باید ثابت کنیم که

$$P(\tilde{X}(T) > x + \tilde{C}(T)) \sim P(\tilde{X}(T) > x) \tag{۲۵.۳}$$

رابطه تقریبی (۲۵.۳) را اثبات می‌کنیم. با استفاده از ۳.۸.۳ رابطه زیر را داریم.

$$\begin{aligned} P(\tilde{X}(T) > x) &= \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k e^{-r\sigma_k} > x \mid N(T) = n\right) P(N(T) = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k e^{-rTU_{(k,n)}} > x\right) P(N(T) = n), \end{aligned}$$

که در آن $U_{(k,n)}$ برای $k = 1, 2, \ldots, n$ و $n = 1, 2, \ldots$ در لم ۳.۸.۳ معرفی شده و مستقل از $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ هستند. بنابراین رابطه زیر برقرار است.

$$P(\tilde{X}(T) > x) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k e^{-rTU_k} > x\right) P(N(T) = n). \tag{۲۶.۳}$$

با توجه به لم ۲.۸.۳ حاصل‌ضرب $X_k e^{-rTU_k}$، $k = 1, 2, \ldots$ دارای توزیع زیرنمایی هستند. همچنین با استفاده از لم ۱.۸.۳ می‌دانیم که برای ثابت اختیاری $\varepsilon > 0$، ثابت $C_\varepsilon > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که نامساوی زیر برای هر $n = 1, 2, \ldots$ و $x \geq 0$ برقرار است.

[۶۳] Total Discounted Claim Amount Accumulated

$$P\left(\sum_{k=۱}^{n} X_k e^{-rTU_k} > x\right) \leq C_\varepsilon(۱+\varepsilon)^n P(X_۱ e^{-rTU_۱} > x)$$

از آنجایی که $E(۱+\varepsilon)^{N(T)} < \infty$، و با به کار بردن تعریف زیرنمایی در (۹.۳) و قضیه همگرایی تسلطی و رابطه (۲۶.۳) رابطه زیر را داریم.

$$P(\tilde{X}(T) > x) \sim P(X_۱ e^{-rTU_۱} > x) \tag{۲۷.۳}$$

با استفاده از (۲۷.۳) اثبات (۲۵.۳) کار دشواری نیست. در حقیقت از آنجایی که حاصل‌ضرب $X_k e^{-rTU_۱}$، دارای توزیع زیرنمایی است و با توجه به (۲۷.۳) مجموع $\tilde{X}(T)$ دم دراز است. با استفاده از قضیه همگرایی تسلطی و ویژگی (۱۰.۳) از تعریف دم دراز، رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\lim \frac{P(\tilde{X}(T) > x + \tilde{C}(T))}{P(\tilde{X}(T) > x)} = \int_{[۰,\infty)} \lim \frac{P(\tilde{X}(T) > x + y)}{P(\tilde{X}(T) > x)} P(\tilde{C}(T) \in \mathrm{d}y) = ۱.$$

اثبات قضیه کامل است. □

۳.۸.۳ اثبات قضیه ۲.۷.۳

برهان. مقدار نزول یافته فرآیند سرمایه [۶۴] که با (۶.۳) معرفی شد را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\tilde{U}(t) = e^{-rt}U(t) = x + \int_{[۰,t]} e^{-ry} C(\mathrm{d}y) - \sum_{n=۱}^{\infty} X_n e^{-r\tau_n} ۱_{(\tau_n \leq t)} \quad t \geq ۰$$

که در آن ۱_{A} تابع مشخصه پیشامد A است. به‌وضوح رابطه زیر برای یک $t \geq ۰$ برقرار است.

$$\psi(x) = P(\tilde{U}(t) < ۰)$$

و همچنین رابطه زیر را داریم.

$$x - \sum_{n=۱}^{\infty} X_n e^{-r\tau_n} \leq \tilde{U}(t) \leq x + \tilde{C} - \sum_{n=۱}^{\infty} X_n e^{-r\tau_n} ۱_{(\tau_n \leq t)} \quad t \geq ۰ \tag{۲۸.۳}$$

با استفاده از اولین نامساوی در (۲۸.۳) و لم ۵.۸.۳ رابطه زیر برقرار است.

$$\psi(x) \leq P\left(\sum_{n=۱}^{\infty} X_n e^{-r\tau_n} > x\right) \sim \bar{B}(x) \sum_{n=۱}^{\infty} E e^{-r\alpha\tau_n} = \frac{E e^{-\alpha r Y_۱}}{۱ - E e^{-\alpha r Y_۱}} \bar{B}(x).$$

بنابراین برای کامل شدن اثبات قضیه کافی است نشان دهیم رابطه زیر برقرار است.

$$\psi(x) \gtrsim \frac{E e^{-\alpha r Y_۱}}{۱ - E e^{-\alpha r Y_۱}} \bar{B}(x). \tag{۲۹.۳}$$

[۶۴] Discounted Values Of The Surplus Process

بدین منظور با استفاده از نامساوی دوم (۲۸.۳) رابطه زیر را برای یک $t \geq ۰$ به‌دست می‌آوریم.

$$\psi(x) \geq P\left(\sum_{n=۱}^{\infty} X_n e^{-r\tau_n} ۱_{(\tau_n \leq t)} > x + \tilde{C}\right) = P\left(\sum_{n=۱}^{\infty} X_n e^{-r\tau_n} > x + \tilde{C}\right). \qquad (۳۰.۳)$$

تحت فرض ۲.۷.۳ از قضیه ۱۹.۳ و شرط روی $\tilde{C}$ و به‌کار بردن لم فاتو و لم ۵.۸.۳ رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
\liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{\bar{B}(x)} &\geq \liminf_{x\to\infty} \frac{۱}{\bar{B}(x)} \int_{[۰,\infty)} P\left(\sum_{n=۱}^{\infty} X_n e^{-r\tau_n} > x + y\right) P(\tilde{C} \in \mathrm{d}y) \\
&\geq \int_{[۰,\infty)} \liminf_{x\to\infty} \frac{P\left(\sum_{n=۱}^{\infty} X_n e^{-r\tau_n} > x + y\right)}{\bar{B}(x+y)} \frac{\bar{B}(x+y)}{\bar{B}(x)} P(\tilde{C} \in \mathrm{d}y) \\
&= \frac{Ee^{-\alpha r Y_۱}}{۱ - Ee^{-\alpha r Y_۱}}.
\end{aligned}$$

بنابراین رابطه (۲۹.۳) برقرار است. تحت فرض ۱۸.۳ از قضیه ۱۹.۳ و از رابطه (۳۰.۳) برای عدد ثابت دلخواه $l > ۰$ رابطه زیر را داریم.

$$\psi(x) \geq P\left(\sum_{n=۱}^{\infty} X_n e^{-r\tau_n} > (۱ + l)x\right) - P(\tilde{C} > lx).$$

مجددا با به‌کار بردن لم ۵.۸.۳ و تعریف دم دراز در ۱۰.۳ رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
\liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{\bar{B}(x)} &\geq \liminf_{x\to\infty} \frac{۱}{\bar{B}(x)} P\left(\sum_{n=۱}^{\infty} X_n e^{-r\tau_n} > (۱ + l)x + \tilde{C}\right) - \limsup_{x\to\infty} \frac{P(\tilde{C} > lx)}{\bar{B}(x)} \\
&= \frac{Ee^{-\alpha r Y_۱}}{۱ - Ee^{-\alpha r Y_۱}} \liminf_{x\to\infty} \frac{\bar{B}((۱+l)x + \tilde{C})}{\bar{B}(x)} - \limsup_{x\to\infty} \frac{P(\tilde{C} > lx)}{\bar{B}(x)} \\
&= \frac{Ee^{-\alpha r Y_۱}}{۱ - Ee^{-\alpha r Y_۱}} \liminf_{x\to\infty} \frac{\bar{B}((۱+l)x + \tilde{C})}{\bar{B}((۱+l)x)} \times \frac{\bar{B}((۱+l)x)}{\bar{B}(x)} - \limsup_{x\to\infty} \frac{P(\tilde{C} > lx)}{\bar{B}(x)} \\
&= \frac{Ee^{-\alpha r Y_۱}}{۱ - Ee^{-\alpha r Y_۱}} (۱ + l)^{-\alpha}
\end{aligned}$$

بنابراین رابطه (۲۹.۳) هنگامی که عدد l را نزدیک به صفر فرض کنیم، برقرار است. □

۴.۸.۳ اثبات قضیه ۳.۷.۳

برهان. فرض کنیم به‌طور موقت برای عدد صحیح مثبت ثابت N رابطه زیر را داشته باشیم.

(۳۱.۳)

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{k=۱}^{N(t)} X_k e^{-tV_k} > x\right) &= \left(\sum_{n=۱}^{N} + \sum_{n=N+۱}^{\infty}\right) P\left(\sum_{k=۱}^{n} X_k e^{-tV_k} > x\right) P(N(t) = n) \\
&= I_۱(x,t,N) + I_۲(x,t,N).
\end{aligned}$$

ابتدا $I_1(x,t,N)$ را در نظر می‌گیریم. با به کار بردن گزاره ۵.۱ از [۱۵] برای متغیرهای تصادفی زیرنمایی $i.i.d.$ $\{X_k\}_{k=1}^{N}$ و برای ثابت‌های اختیاری a و b که $0 < a \le b < \infty$، رابطه زیر به‌طور یکنواخت برای $(c_1,\dots,c_N) \in [a,b]\times\cdots\times[a,b]$ برقرار است.

$$P\left(\sum_{k=1}^{N} c_k X_k > x\right) \sim \sum_{k=1}^{N} P(c_k X_k > x).$$

بنابراین در اینجا با شرط‌گذاری مناسب روی $(V_1,\dots,V_n)$ برای هر t، $0 < t \le T$ به‌طور یکنواخت رابطه زیر برقرار است.

$$I_1(x,t,N) \sim P(X_1 e^{-tv_1} > x)\sum_{n=1}^{N} nP(N(t)=n). \tag{۳۲.۳}$$

همچنین برای هر $v > 0$ رابطه زیر بدیهی است.

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{0<t\le T}\frac{1}{\lambda t}E(N(t))^{v}1_{\{N(t)>N\}} = 0. \tag{۳۳.۳}$$

از روابط (۳۲.۳) و (۳۳.۳) رابطه زیر را نتیجه می‌گیریم.

$$\lim_{N\to\infty}\lim\sup_{0<t\le T}\left|\frac{I_1(x,t,N)}{\lambda t P(X_1 e^{-tv_1} > x)} - 1\right| = \lim_{N\to\infty}\sup_{0<t\le T}\frac{1}{\lambda t}E(N(t))1_{\{N(t)>N\}} = 0. \tag{۳۴.۳}$$

حال $I_2(x,t,N)$ را در نظر می‌گیریم. اولین حالت نامساوی احتمالی به آسانی از قضیه ۱.۱ نگو [۲۴] برقرار است به این صورت که برای متغیرهای تصادفی $i.i.d.$ $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ با توزیع مشترک B و زمان محدود از مرتبه $k \in (0,1)$، نامساوی زیر برای هر $x > 0$، $n = 1,2,\dots$ و $v > 0$ برقرار است.

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k > x\right) \le n\bar{B}\left(\frac{x}{v}\right) + \left(\frac{eEX_1^{k}}{v^{1-k}}\right)^{v} n^{v}x^{-vk}.$$

برای $B \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ با انتخاب یک $k \in (0,\min\{1,\alpha\})$ و $v > \frac{\alpha}{k} > 1$ رابطه زیر برای $C_v > 0$ و هر $n = 1,2,\dots$ و هر $x > 0$ برقرار است.

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k > x\right) \le C_v n^{v}\bar{B}(x).$$

بنابراین هنگامی که $x \to \infty$ میل می‌کند، برای $M > 0$ رابطه زیر را داریم.

$$\begin{aligned}
I_2(x,t,N) &= \sum_{n=N+1}^{\infty} P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k > xe^{-TM}\right)P(N(t)=n) \\
&\le C_v\bar{B}(xe^{-TM})E(N(t))^{v}1_{\{N(t)>N\}} \\
&\sim C_v e^{2\alpha TM}\bar{B}(xe^{-TM})E(N(t))^{v}1_{\{N(t)>N\}} \\
&\le C_v e^{2\alpha TM}P(X_1 e^{-tv_1} > x)E(N(t))^{v}1_{\{N(t)>N\}}.
\end{aligned} \tag{۳۵.۳}$$

از روابط (۳.۳۳) و (۳.۳۵) رابطه زیر نتیجه می‌شود.

$$\lim_{N\to\infty} \lim \sup_{0<t\leq T} \frac{I_2(x,t,N)}{\lambda t P(X_1 e^{-tv_1} > x)} = 0. \qquad (۳.۳۶)$$

از روابط (۳.۳۱)، (۳.۳۴)، و (۳.۳۶)، رابطه (۳.۲۰) برای هر t، $0 < t \leq T$ به‌طور یکنواخت برقرار است. این پایان اثبات قضیه ۳.۷.۳ است. □

مراجع

[۱] جهانی‌پور ر، ظهوری زنگنه ب، (۱۳۸۳)، ‘‘**حرکت براونی یا فرآیند وینر: ریاضی مدل‌ساز پدیده‌های طبیعی**’’ انتشارات فرهنگ و اندیشه ریاضی، صفحه ۲۰-۱ .

[۲] دلاور خلفی ع، طباطبایی ز و افتخاری س، (۱۳۹۳)، کنفرانس اقتصاد، توانمند سازی اصلاح رفتارهای اقتصادی، ‘‘طراحی مدل ورشکستگی شرکت‌های بیمه’’، شیراز.

[3] Asmussen, S. (1998). **”Subexponential asymptotics for stochastic processes: extremal behavior, stationary distributions and first passage probabilities”**, The Annals of Applied Probability, 8(2), 354-374.

[4] Asmussen, S., Kalashnikov, V., Konstantinides, D., Klüppelberg, C., Tsitsiashvili, G. (2002).**”A local limit theorem for random walk maxima with heavy tails”**, Statistics probability letters, 56(4), 399-404.

[5] Bingham, N. H., Goldie, C. M., Teugels, J. L. (1987). **”Regular variation (Encyclopedia of Mathematics and its Applications)”**.

[6] Cline, D. B., Samorodnitsky, G. (1994).**”Subexponentiality of the product of independent random variables. Stochastic Processes and their Applications”**, 49(1), 75-98.

[7] Embrechts, P., Omey, E. (1984). **”A property of longtailed distributions”**. Journal of Applied Probability, 80-87.

[8] Kalashnikov, V., Konstantinides, D. (2000). **”Ruin under interest force and subexponential claims: a simple treatment”**, Insurance: Mathematics and Economics, 27(1), 145-149.

[9] Klüppelberg, C. (1988). **”Subexponential distributions and integrated tails”**. Journal of Applied Probability, 132-141.

[10] Klüppelberg, C., Stadtmüller, U. (1998). **"Ruin probabilities in the presence of heavy-tails and interest rates"**, Scandinavian Actuarial Journal, 1998(1), 49-58.

[11] Tang, Q. (2004).**"The ruin probability of a discrete time risk model under constant interest rate with heavy tails"**, Scandinavian Actuarial Journal, 2004(3), 229-240.

[12] Sundt, B., Teugels, J. L. (1995). **"Ruin estimates under interest force"**, Insurance: Mathematics and Economics, 16(1), 7-22.

[13] Tang, Q. (2004).**"The ruin probability of a discrete time risk model under constant interest rate with heavy tails"**, Scandinavian Actuarial Journal, 2004(3), 229-240.

[14] Tang*, Q. (2005). **"Asymptotic ruin probabilities of the renewal model with constant interest force and regular variation"**, Scandinavian Actuarial Journal, 2005(1), 1-5.

[15] Tang, Q., Tsitsiashvili, G. (2003). **"Randomly weighted sums of subexponential random variables with application to ruin theory"**, Extremes, 6(3), 171-188.

[16] Athreya, K. B., Ney, P. E. (1972). **"Branching processes"**, Berlin: Springer.

[17] Chistyakov, V. P. (1964). **"A theorem on sums of independent positive random variables and its applications to branching random processes"**,Theory of Probability Its Applications, 9(4), 640-648.

[18] Embrechts, P., Goldie, C. M., Veraverbeke, N. (1979). **"Subexponentiality and infinite divisibility"**, Probability Theory and Related Fields, 49(3), 335-347.

[19] Embrechts, P., Kluppelberg, C., Mikosch, T. (1997). **"Modelling extremal events for insurance and finance"**.

[20] De barra, G. (1981). **"Measure theory and integration"**, Department of Mathematics, Royal Holloway College, University of London.

[21] Folland, G. B. (1999). **"Real analysis"**: Modern Techniques and Their Application, John Willey and Sons. lnc., New York.

[22] Foss, S., Korshunov, D., Zachary, S. (2011). **"An introduction to heavy-tailed and subexponential distributions"** (Vol. 6). New York: Springer.

[23] Krishnamoorthy, K. (2006).**Handbook of Statistical Distributions with Applications**.

[24] Nagaev, S. V. (1979). **"Large deviations of sums of independent random variables"**, Ann. Prob. 7, 745–789.

[25] Petrov, V. V. V. V. (1995). **"Limit theorems of probability theory"**; sequences of independent random variables (No. 04; QA273. 67, P4.).

[26] Petrov, V. (2012). **"Sums of independent random variables"** (Vol. 82), Springer Science Business Media.

[27] Øksendal, B. (2003).**" Stochastic differential equations"** (pp. 65-84). Springer Berlin Heidelberg.

[28] Rudin, W. (1991). **"Functional Analysis"**. McGraw Hill, New York.

[29] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., Teugels, J. L. (1998). **"Stochastic Processes for Insurance and Finance"**.

[30] Ross, S. M. (1983).**" Stochastic Processes"**. JohnWiley, NewYork.

[31] Varsei, A. **"Red Analysis–Notes"**.Lecture Notes, Preprint.

[32] Wilde, I. F. (2009).**" Stochastic Analysis–Notes"**. Lecture Notes, King's College, London.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

متراکم	Aggregate
مقدار	Amount
همگرایی	Convergence
شمارشی	Counting
مشتق	Derivation
گسسته	Discrete
متناهی	Finite
افق	Horizon
عایدی	Income
دوره	Period
صف	Queueing
منظم	Regular
سرمایه	Reserve
ایستا	Stationary
تکیه‌گاه	Support
بقا	Survival
دم	Tail
نهایی	Ultimate
یکنواخت	Uniform
مختلف	Varying
ویبال	Weibull

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Accumulated .... انباشتگی
Brownian .... براونی
Claim .... ادعا
Covolution .... پیچش
Discounted .... تنزیل یافته
Distribution .... توزیع
Function .... تابع
Heavy Tailed .... دم سنگین
Hazard .... مخاطره
Independent .... مستقل
Initial .... اولیه
Insuracce .... بیمه
Kurtosis .... کشیدگی
Lebesgue .... لبگ
Motion .... حرکت
Normal .... نرمال
Portfilio .... سبد سهام
Premium .... حق بیمه
Probability .... احتمال
Process .... فرآیند
Rate .... نرخ
Renewal .... تجدید
Risk .... خطر
Ruin .... ورشکستگی
Stochastic .... تصادفی
Surplus .... مازاد

Aabstract

In this thesis, we deal with the markets which follows compound poisson process and the surplus process of insurance company satisfyis at

$$S_r(t) = xe^{rt} + \int_0^t e^{r(t-s)} C(\mathrm{ds}) - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k e^{r(t-\sigma_k)} \quad , \quad t \geq 0$$

Where X_k is claim process and C is premium. In our considered process we investigate a formula for ruin probability of insurance company.

keywords: Compound Poisson Process, Ruin Probability, Risk Reserve

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Mathematics Analysis

The ruin probability of the insurance company in a market with compound poisson model

By: Hadis Eesapour

Supervisor

Elham Dastranj

January 2017