بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی ، گرایش ریاضی مالی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ارزش‌گذاری اختیار معامله توان تحت مدل تلاطم تصادفی هستون

نگارنده: رقیه لطیفی

استادان راهنما

دکتر الهام دسترنج
دکتر فرشید مهردوست

استاد مشاور

زینب فاطمی

بهمن ۱۳۹۵

فرم شماره ۷: صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم رقیه لطیفی به شماره دانشجویی ۹۳۳۲۹۳۴ رشته **ریاضی کاربردی** گرایش **مالی** تحت عنوان ارزش‌گذاری اختیار معامله توان تحت مدل تلاطم تصادفی هستون که در تاریخ ۹۵/۱۱/۴ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه : عالی امتیاز ۱۹٫۲۵) ☑ دفاع مجدد ☐ مردود ☐
نوع تحقیق: نظری ☑ عملی ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹) ۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)
۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ۱۶) ۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)
۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	دکتر الهام دسترنج	استادیار	
۲- استادراهنمای دوم	دکتر فرشید مهردوست	دانشیار	
۳- استاد مشاور	سرکار خانم زینب فاطمی		
۴- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر محمدرضا ربیعی	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر محمد آرشی	دانشیار	
۶ـ استاد ممتحن دوم	دکتر سید مجتبی میرلوحی	استادیار	

رئیس دانشکده:

تقدیم به همراهان همیشگی ام

پدر و مادر مهربانم

خدا را سپاس گزارم

که هنوز راه هایی برای پیمودن

و پله هایی برای صعود کردن برایم باقی است.....

شکر شایان ایزد منان که توفیق را رفیق را هم ساخت تا این پایان‌نامه را به پایان برسانم. از زحمات بی‌دریغ، تلاش‌های بی‌وقفه و راهنمایی‌های استاد عالی‌قدر **سرکار خانم دکتر الهام دسترنج** کمال تشکر را دارم.

لازم است مراتب سپاس و قدردانی را از استاد گرامی جناب آقای دکتر فرشید مهردوست بجا آورم. همچنین از سرکار خانم زینب فاطمی که در مراحل تحقیق مرا از مشاوره‌های ارزشمند خود بهره‌مند نمودند نیز سپاس‌گزارم.

رقیه لطیفی

بهمن ۱۳۹۵

تعهد نامه

اینجانب **رقیه لطیفی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **ارزش‌گذاری اختیار معامله توان تحت مدل تلاطم تصادفی هستون** ، تحت راهنمایی **الهام دسترنج** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ’’ یا ‘‘ Shahrood University of Technology ’’ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

رقیه لطیفی
بهمن ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

از آن‌جایی که در بین مدل‌های تلاطم تصادفی، مدل هستون یکی از معروف‌ترین مدل‌های تلاطم تصادفی است. در این پایان نامه به قیمت‌گذاری اختیار معامله توان تحت مدل تلاطم تصادفی هستون پرداخته می‌شود. برای این منظور، ابتدا به قیمت‌گذاری اختیار معامله توان تحت مدل با تلاطم ثابت، مدل بلک شولز و تعمیمی از این مدل پرداخته می‌شود و سپس با محاسبه تابع مولد گشتاور از قیمت دارایی پایه، در صورت وجود شرط گشتاور mــام متناهی قیمت دارایی پایه، فرمول‌های تحلیلی برای قیمت اختیار توان تحت مدل هستون به‌دست می‌آید. در صورت عدم وجود شرط گشتاور متناهی قیمت دارایی پایه، با روش‌های تقریبی ذوزنقه‌ای و سهموی به قیمت‌گذاری اختیار توان تحت مدل هستون پرداخته شده است. در نهایت با افزودن یک فرآیند تلاطم تصادفی به مدل هستون، مدل هستون مضاعف را معرفی کرده و با روش تبدیل فوریه سریع به قیمت‌گذاری این اختیار تحت مدل هستون مضاعف می‌پردازد.

کلمات کلیدی: اختیار معامله توان، تلاطم تصادفی، مدل تلاطم تصادفی هستون، مدل هستون مضاعف، تبدیل فوریه سریع

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

1. Latifi. R, Dastranj.E, (2016), Valuation of power option under the double Heston's stochastic volatility model, 47th Annual Iranian Mathematics conference Khorazmi university.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر ک

فهرست جداول م

۱ پیشگفتار ۱

۲ مفاهیم و مقدمات ۳

۱.۲ مقدمه . . . ۳

۲.۲ مفاهیم فرآیندهای تصادفی . . . ۳

۳.۲ حرکت براونی . . . ۹

۴.۲ حسابان ایتو . . . ۱۱

۱.۴.۲ انتگرال ایتو . . . ۱۱

۲.۴.۲ فرمول ایتو . . . ۱۳

۵.۲ قضیه گیرسانوف . . . ۱۴

۶.۲ مفاهیم ریاضی مالی . . . ۱۷

۱.۶.۲ سبد سهام . . . ۱۷

۲.۶.۲ قردادهای اختیارمعامله . . . ۱۷

۳.۶.۲ انواع معامله‌گران . . . ۲۲

۳ ارزش‌گذاری اختیار معامله توان تحت مدل با تلاطم ثابت ۲۵

۱.۳ مقدمه . . . ۲۵

۲.۳ مدل با تلاطم ثابت . . . ۲۶

۱.۲.۳ مدل بلک شولز . . . ۲۶

۲.۲.۳ مدل بلک شولز تعمیم یافته . . . ۲۶

۳.۳ ارزش‌گذاری اختیار توان تحت مدل بلک شولز . . . ۲۸

۴.۳ ارزش‌گذاری اختیار معامله توان تحت مدل بلک شولز تعمیم یافته . . . ۳۰

۴ ارزش‌گذاری اختیار معامله توان تحت مدل تلاطم تصادفی هستون ۳۵

۱.۴ مقدمه . . . ۳۵

۲.۴ مدل هستون . . . ۳۵

۳.۴ ارزش‌گذاری اختیار معامله توان تحت مدل هستون . . . ۳۸

۱.۳.۴ ارزش‌گذاری اختیار معامله توان وقتی که $E^Q[S_T^m] < \infty$ . . . ۳۹

۲.۳.۴ ارزش‌گذاری اختیار معامله توان وقتی که $E^Q[S_T^m] = \infty$ . . . ۴۶

۳.۳.۴ ارزش‌گذاری اختیار معامله توان با روش شبیه‌سازی مونت کارلو . . . ۵۴

۴.۴ نتایج عددی . . . ۵۵

۵ ارزش‌گذاری اختیار معامله توان تحت مدل تلاطم تصادفی هستون مضاعف ۶۱

۱.۵ مقدمه . . . ۶۱

۲.۵ مدل هستون مضاعف . . . ۶۱

۳.۵ ارزش‌گذاری اختیار توان تحت مدل هستون مضاعف . . . ۶۲

۱.۳.۵ تعیین تابع مشخصه . . . ۶۲

۲.۳.۵ ارزش‌گذاری اختیار توان با روش تبدیل فوریه سریع . . . ۶۵

نتیجه‌گیری ۶۸

مراجع ۶۹

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۷۳

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۷۵

فهرست تصاویر

۱.۲ بازدهی حاصل از خرید یا فروش اختیار معامله اروپایی ۲۰
۲.۲ بازدهی اختیار خرید توان معمولی ۲۱

۱.۴ نمونه‌ای از فرآیند بازگشت به میانگین ۳۷
۲.۴ ده مسیر از فرآیند دارایی تحت مدل هستون ۳۷
۳.۴ تأثیر ρ روی توزیع بازده قیمت سهام تحت مدل هستون ۳۸
۴.۴ تأثیر σ_V روی توزیع بازده قیمت سهام تحت مدل هستون ۳۸
۵.۴ نمودارهای $v(m)$ و $E^Q[S_T^m]$ به ازای مقادیر مختلف m ۴۱
۶.۴ نمودار $y = h^{(۱)}(x)$ در قضیه ۱۰.۳.۴ . . . . ۴۷
۷.۴ نمودار $y = h^{(۲)}(x)$ در قضیه ۱۱.۳.۴ . . . . ۵۱

فهرست جداول

۱.۴ مقایسه قیمت‌های اختیار خرید توان سقف (روش تحلیلی و شبیه‌سازی مونت کارلو) ۵۶
۲.۴ مقایسه قیمت‌های اختیار خرید توان سقف (روش تحلیلی و شبیه‌سازی مونت کارلو) ۵۶
۳.۴ مقایسه قیمت‌های اختیار خرید توان سقف (روش تحلیلی، روش تقریب ذوزنقه‌ای و تقریب سهموی) ۵۷
۴.۴ مقایسه قیمت‌های اختیار فروش توان (روش تحلیلی، روش تقریب ذوزنقه‌ای و تقریب سهموی) ۵۷
۵.۴ مقایسه قیمت‌های اختیار خرید توان سقف (روش تقریب ذوزنقه‌ای، تقریب سهموی و شبیه‌سازی مونت کارلو) ۵۸
۶.۴ مقایسه قیمت‌های اختیار فروش توان (روش تقریب ذوزنقه‌ای، تقریب سهموی و شبیه‌سازی مونت کارلو) ۵۹

فصل ۱

پیشگفتار

با اعطای جایزه‌ی نوبل اقتصاد درسال ۱۹۹۰ میلادی به سه ریاضیدان، چشم‌انداز نوینی در مقابل چشمان پژوهشگران گشوده شد و عملاً شاخه‌ی جدید از علوم متولد شد: نظریه‌ی مالی[1]. این نظریه تلاش می‌کند سازوکار حاکم بر بازار مالی و چگونگی کارآمدتر کردن آن را بررسی و مطالعه کند. این رشته‌ی نوظهور اصولی را که بر بازارهای مالی حکم‌فرماست توضیح می‌دهد و آن‌ها را روزآمد می‌کند و دراین راستا بیش از هرچیز از ریاضیات بهره می‌گیرد. تعامل این دو رشته (ریاضیات و نظریه‌ی مالی) تا بدان‌جا پیش رفته است که مسائل مالی اکنون در زمره‌ی پژوهش‌های راهبردی در ریاضیات است. ریاضیات مالی در مرز مشترک دانش‌هایی نظیر ریاضیات، آمار، اقتصاد، علوم رایانه و حتی فیزیک با سرعتی فزاینده در حال پیش‌روی است. این رشته رابطه‌ی نزدیکی با رشته‌ی اقتصاد مالی دارد .در اقتصاد مالی بیشتر مباحث نظری مطرح است در حالی‌که در این رشته به مدل‌های ریاضی و عددی در تجربه‌های عملی توجه می‌شود. مثلاً در حالی‌که یک اقتصاددان مالی دلایل زیرساختی این موضوع را که چرا قیمت سهام شرکتی مقداری مشخص است بررسی می‌کند، ریاضیدان مالی قیمت سهام مذکور را همان‌طور که هست می‌پذیرد و سپس تلاش می‌کند به کمک محاسبات فرآیندهای تصادفی ارزش متعارفی ازموجودی‌های مشتقه به‌دست آورد.

در حقیقت ریاضیات مالی شاخه‌ای از ریاضیات است که برای جریان‌های پول و سرمایه در بازارهای مالی، مدل‌های ریاضی طراحی و مطالعه می‌نماید. به عبارت دیگر با کمک ابزارهای آنالیز تصادفی به توصیف و مدل‌سازی رفتارهای مختلف بازارهای مالی می‌پردازد. بازارهای مالی محل خرید و فروش دارایی‌ها هستند و علاوه بر خرید و فروش دارایی‌های پایه نظیر سهام و اوراق قرضه، قراردادهایی تحت عنوان

[1] The theory of finance

مشتقات مالی نیز مورد توجه قرار می‌گیرند که یکی از انواع مشتقات مالی، قرارداد اختیار معامله است. استفاده از اختیار معامله در بازارهای سرمایه به عنوان یکی از جدیدترین و مهمترین مشتقات مالی، نقش موثری در کنترل ریسک و افزایش بازده و همچنین پیدایش جذابیت برای سرمایه‌گذاران داشته است. امروزه در بیشترکشورهای دنیا برگ اختیار نوشته شده روی سهم، از خود آن سهم بیشتر دادوستد می‌شود.

اختیار معامله قراردادی است بین خریدار و فروشنده، به نحوی که خریدار از فروشنده اختیار معامله، حق خرید یا فروش یک دارایی را در یک قیمت معین خریداری می‌کند. در قرارداد اختیار معامله هر طرف امتیازی را به طرف مقابل اعطا می‌کند، خریدار به فروشنده مبلغی تحت عنوان حق شرط پرداخت می‌کند که در واقع همان قیمت اختیار معامله می‌باشد و فروشنده نیز حق خرید یا فروش دارایی مذکور را در یک قیمت معین به خریدار اعطا می‌نماید. به عبارت دیگر برای عادلانه بودن این قرارداد باید خریدار در زمان انعقاد قرارداد، مبلغی را به عنوان قیمت اختیار، به فروشنده اختیار پرداخت نماید. از این جهت است که در دادوستد اختیار معاملات، موضوع قیمت‌گذاری اختیارات تحت مدل‌های مختلف حائز اهمیت می‌باشد که در این پایان نامه به قیمت‌گذاری یکی از اختیار معاملات، اختیار معامله غیر استاندارد توان تحت مدل تلاطم تصادفی هستون می‌پردازیم.

برای این منظور در فصل دوم برخی مفاهیم فرآیندهای تصادفی و مفاهیم مقدماتی ریاضیات مالی برای درک بهتر فصل‌های آتی بیان می‌کنیم.

در فصل سوم مدل بلک–شولز با تلاطم ثابت و تعمیمی از این مدل را معرفی می‌کنیم و سپس به قیمت‌گذاری اختیار معامله توان تحت این مدل می‌پردازیم.

در فصل چهارم ابتدا مدل تلاطم تصادفی هستون را معرفی می‌کنیم، سپس با محاسبه تابع مولد گشتاور از قیمت دارایی پایه در صورت وجود شرط گشتاور m–ام متناهی قیمت دارایی پایه، فرمول‌های تحلیلی برای قیمت اختیار توان تحت مدل هستون به‌دست می‌آوریم و در صورت عدم وجود شرط گشتاور متناهی قیمت دارایی پایه با روش‌های تقریبی ذوزنقه‌ای و سهموی به قیمت‌گذاری اختیار توان تحت مدل هستون پرداخته شده است. در نهایت به طور مختصر روش شبیه‌سازی مونت کارلو را معرفی می‌کنیم و با استفاده از نتایج عددی به مقایسه این فرمول‌های قیمت‌گذاری اختیار توان تحت مدل هستون می‌پرداریم.

در فصل پنجم با افزودن یک فرآیند تلاطم تصادفی به مدل هستون، مدل هستون مضاعف را معرفی می‌کنیم و با روش تبدیل فوریه سریع به قیمت‌گذاری این اختیار تحت مدل هستون مضاعف می‌پردازیم.

فصل ۲

مفاهیم و مقدمات

۱.۲ مقدمه

در این فصل به پاره‌ای از تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در این رساله می‌پردازیم. مطالب ارائه شده در این بخش به جز مواردی که به روشنی مشخص شده است برگرفته از مراجع [۱۲]، [۲۶]، [۱]، [۱۰]، [۳۰]، [۲۲] و [۲۰] می‌باشند.

۲.۲ مفاهیم فرآیندهای تصادفی

تعریف ۱.۲.۲. اگر Ω مجموعه‌ای ناتهی و $\mathcal{F}$ دسته‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های Ω باشد، $\mathcal{F}$ را یک **نیم‌حلقه** گوییم هرگاه

۱. $\emptyset \in \mathcal{F}$،

۲. اگر دنباله‌ای متناهی از مجموعه‌ها مانند $A_1, A_2, \ldots, A_n$ متعلق به $\mathcal{F}$ باشند، آن‌گاه

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}.$$

۳. اگر A_1, A_2 دو مجموعه متعلق به $\mathcal{F}$ باشد آن‌گاه دنباله متناهی $B_1, B_2, \ldots, B_n$ از اعضای $\mathcal{F}$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$A_1 - A_2 = \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$

که $B_i \bigcap B_j = \emptyset$، $i \neq j$ و $i = ۱, ۲, \ldots, n$.

تعریف ۲.۲.۲. اگرΩ مجموعه‌ای ناتهی و $\mathcal{F}$ دسته‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های Ω باشد، $\mathcal{F}$ را یک σـ **میدان** گوییم هرگاه

۱. $\emptyset \in \mathcal{F}$،

۲. اگر $A \in \mathcal{F}$ آن‌گاه $A^c \in \mathcal{F}$،

۳. اگر دنباله‌ای نامتناهی از مجموعه‌ها مانند $A_۱, A_۲, \ldots$ متعلق به $\mathcal{F}$ باشند، آن‌گاه

$$\bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

تعریف ۳.۲.۲. فرض کنیم $\Omega = \mathbb{R}$ (یا $\mathbb{R}^n$) و $\mathcal{F}$ دسته‌ی تمام بازه‌ها باشد، σـمیدان تولید شده توسط $\mathcal{F}$ را σـ**میدان بورل** گوییم و با $\mathcal{B}$ نشان می‌دهیم. دسته‌ی تمام بازه‌ها به صورت $[a, b)$ یا $[a, b]$ یا (a, b) که در آن a و b اعداد گویا هستند و یا مجموعه‌ی شعاع‌هایی که ابتدا و انتهای آن‌ها اعداد گویا باشند همگی مولد بورل هستند.

تعریف ۴.۲.۲. هر دسته‌ی صعودی از σـمیدان‌ها را یک **فیلتر** گویند و با نماد $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in I}$ نمایش می‌دهند که در آن I مجموعه‌ی اندیس‌گذار است که می‌تواند شمارش‌پذیر یا شمارش ناپذیر است.

تعریف ۵.۲.۲. فرض کنید $\mathcal{F}$ یک نیم‌حلقه از زیرمجموعه‌های مجموعه ناتهی Ω باشد، تابع μ ($\mu : \mathcal{F} \longrightarrow [۰, +\infty]$) را یک **اندازه** می‌گوییم هرگاه

۱. برای هر مجموعه $A \in \mathcal{F}$ داشته باشیم $۰ \leq \mu(A) \leq \infty$،

۲. اگر $\{A_n\}_{n \geq ۱}$ دنباله‌ای از اعضای دو به دو جدا از هم $\mathcal{F}$ باشند به‌طوری‌که $\bigcup\limits_{n \geq ۱} A_n \in \mathcal{F}$ باشد آن‌گاه داشته باشیم

$$\mu(\bigcup_{n \geq ۱} A_n) = \sum_{n \geq ۱} \mu(A_n).$$

خاصیت دوم را خاصیت σـجمع‌پذیری برای μ گوییم.

تعریف ۶.۲.۲. اندازه $\mu : \mathcal{H} \longrightarrow [۰, +\infty]$ را σـ**متناهی** گوییم هرگاه دنباله‌ی $\{A_n\}_{n \geq ۱}$ ازاعضای دو به دو جدا از هم $\mathcal{H}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$X = \bigcup_{n \geq ۱} A_n$$

و برای هر $n \geq ۱$، داشته باشیم $\mu(A_n) < \infty$.

تعریف ۷.۲.۲. فرض کنید Ω مجموعه‌ای ناتهی و $\mathcal{F}$، σـ میدانی از زیرمجموعه‌های آن باشد، زوج مرتب $(\Omega, \mathcal{F})$ را یک **فضای اندازه‌پذیر** گویند.

اگر P اندازه‌ای روی $\mathcal{F}$ باشد آن‌گاه سه‌تایی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را **فضای اندازه** می‌نامیم.

تعریف ۸.۲.۲. تابع حقیقی مقدار f، $f : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (Y, \mathcal{B})$ را **اندازه‌پذیر** گوییم هرگاه برای هر B از $\mathcal{B}$ (بورل) داشته باشیم

$$f^{-1}(B) = \{w \in \Omega : f(w) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

تعریف ۹.۲.۲. اگر $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر و μ_1 و μ_2 دو اندازه روی این فضا باشند گوییم این دو **اندازه مطلقاً پیوسته** هستند (با نماد $\mu_1 \ll \mu_2$ نمایش داده می‌شود) اگر و تنها اگر برای هر A از $\mathcal{A}$ داشته باشیم

$$\mu_2(A) = 0 \Longrightarrow \mu_1(A) = 0.$$

تعریف ۱۰.۲.۲. فرض کنید $\mathcal{F}$ یک σـ میدان از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی ناتهی Ω باشد، تابع P ($P : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$) را یک **اندازه احتمال** می‌نامیم هرگاه

۱. $P(\Omega) = 1$،

۲. اگر $\{A_n\}_{n\geq 1}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزا در $\mathcal{F}$ باشند آن‌گاه داشته باشیم

$$P(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n\geq 1} P(A_n).$$

سه‌تایی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را **فضای احتمال** می‌نامیم.

قضیه ۱۱.۲.۲. (**قضیه رادون‌ـ نیکودیم**[1]) فرض کنید $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر و μ و ν دو اندازه σـ متناهی روی $\mathcal{A}$ باشند. اگر $\mu \ll \nu$ آن‌گاه تابع اندازه‌پذیر نامنفی f وجود دارد به‌طوری‌که برای هر A از $\mathcal{A}$ داشته باشیم

$$\mu(A) = \int_A f d\nu.$$

ملاحظه ۱۲.۲.۲. از این پس توپولوژی مفروض روی فضاهای اقلیدسی، توپولوژی استاندارد و σـ میدان مفروض روی آن‌ها، σـ میدان بورل است.

تعریف ۱۳.۲.۲. هر تابع اندازه‌پذیر از فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$به فضای اندازه‌پذیر $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ را یک **متغیر تصادفی** گوییم.

معمولا برای نشان دادن متغیرهای تصادفی از حروف بزرگ لاتین مثل $X, Y, Z, \ldots$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱۴.۲.۲. فرض کنیم X یک متغیر تصادفی باشد، σـ میدان تولید شده توسط X که با نماد $\sigma(X)$ یا $\mathcal{F}(X)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{F}(X) = \sigma(X) = \{X^{-1}(A) \ : \ A \in \mathcal{B}\}.$$

تعریف ۱۵.۲.۲. فرض کنیم X متغیری تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد. تابع توزیع X که آن را با F_X نشان می‌دهیم، برای هر عدد حقیقی x به صورت زیر تعریف می‌شود

$$F_X(x) = P_X(-\infty, x] = P\{X \leq x\}$$

که در آن P_X اندازه‌ی القاشده توسط X روی $\mathcal{B}$ است و **توزیع متغیر تصادفی** نامیده می‌شود.

[1] Rodon-Nikodym theorem

تعریف ۱۶.۲.۲. اگر A مجموعه‌ای دلخواه از σـ میدان $\mathcal{A}$ باشد، تابع مشخصه‌ی مجموعه‌ی A را با χ_A نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

تعریف ۱۷.۲.۲. تابع ساده، تابعی است با دامنه دلخواه و مقادیر حقیقی که مجموعه‌ی مقادیرش متناهی است. فرض کنیم ϑ تابعی ساده روی فضای اندازه $(X, \mathcal{A}, \mu)$ با مقادیر متمایز $a_1, a_2, \ldots, a_n$ باشد. می‌توان نوشت $\vartheta = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ که در آن $A_i = \{x \in X : \vartheta(x) = a_i\}$. روشن است که A_i ها مجزا هستند. اندازه‌پذیری ϑ معادل است با این‌که بگوییم A_iها اندازه‌پذیرند. انتگرال ϑ نسبت به اندازه μ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\int_A \vartheta d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i).$$

قرارداد می‌کنیم $0 \times \infty = 0$.

تعریف ۱۸.۲.۲. فرض می‌کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه و f تابعی اندازه‌پذیر و نامنفی باشد، **انتگرال** f روی هر $A \in \mathcal{A}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\int_A f d\mu = \sup\{\int_A \vartheta d\mu : \vartheta \leq f\},$$

که در آن ϑ تابعی ساده و نامنفی است.

تعریف ۱۹.۲.۲. متغیر تصادفی انتگرال‌پذیر X روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را در نظر می‌گیریم. **امید ریاضی** Xبه صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E(X) = \int_{\Omega} X(w)\, dP(w).$$

ملاحظه ۲۰.۲.۲. اگر $E \mid X \mid = \infty$، آن‌گاه امید ریاضی X وجود ندارد.

تعریف ۲۱.۲.۲. واریانس متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

تعریف ۲۲.۲.۲. برای متغیر تصادفی X **تابع مولد گشتاور** [2] به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$M_X(t) = E[e^{tX}], \quad t \in R.$$

ملاحظه ۲۳.۲.۲. تابع مولد گشتاور همواره وجود ندارد چون نمی‌توان گفت که انتگرال مطلقاً همگراست.

[2] Moment generating function

تعریف ۲.۲.۲۴. برای متغیر تصادفی X **تابع مشخصه** [۳] به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\varphi_X(iw) = E[e^{iwX}].$$

تعریف ۲.۲.۲۵. **تبدیل فوریه** تابع f یک تبدیل انتگرالی به صورت زیر است.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{iux}du,$$

و تبدیل معکوس آن

$$F(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}dx,$$

که f یک تابع پیوسته و انتگرال‌پذیر است.

تعریف ۲.۲.۲۶. کوواریانس دو متغیر تصادفی X و Y به صورت زیر است

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

تعریف ۲.۲.۲۷. دو متغیر تصادفی X و Y را مستقل از هم گوییم هرگاه

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

تعریف ۲.۲.۲۸. دنباله متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \ldots, X_n$ را مستقل گوییم هر گاه

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1)\ldots F_{X_n}(x_n)$$

ملاحظه ۲.۲.۲۹. اگر دو متغیر تصادفی مستقل باشند آن‌گاه کوواریانس دو متغیر برابر صفر خواهد شد.

تعریف ۲.۲.۳۰. ضریب همبستگی متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\rho = \rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

تعریف ۲.۲.۳۱. متغیر تصادفی X دارای **توزیع نرمال** با میانگین μ و واریانس σ است اگر و تنها اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right).$$

توزیع نرمال با $\mu = 0$ و $\sigma = 1$ را **توزیع نرمال استاندارد** می‌نامند.

[۳] Characteristic function

تعریف ۳۲.۲.۲. (امید شرطی) فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال و $\mathcal{D}$ یک زیر σـ میدان از $\mathcal{F}$ و Z متغیری تصادفی، نامنفی و انتگرال‌پذیر باشد. امید Z به شرط $\mathcal{D}$ یک متغیر تصادفی $\mathcal{D}$ـ اندازه‌پذیر روی $(\Omega, \mathcal{F})$ است که آن را با $E(Z \mid \mathcal{D})$ نشان می‌دهیم و داریم

$$\forall D \in \mathcal{D}, \quad \int_D E(Z \mid \mathcal{D})\, dP = \int_D Z\, dP.$$

ملاحظه ۳۳.۲.۲. خواص امید شرطی

۱. اگر $X \geq 0$ آن‌گاه $E(X \mid \mathcal{D}) \geq 0$ a.s. [۴]

۲.

$$E(X+Y \mid \mathcal{D}) = E(X \mid \mathcal{D}) + E(Y \mid \mathcal{D}), \quad a.s.\,,$$

۳. برای هر $a \in \mathbb{R}$

$$E(aX \mid \mathcal{D}) = aE(X \mid \mathcal{D}), \quad a.s.\,,$$

۴. اگر $\mathcal{D} = \{\Omega, \emptyset\}$ آن‌گاه

$$E(X \mid \mathcal{D}) = E(X), \quad a.s.\,,$$

۵. اگر $\mathcal{D}_1$ یک زیر σـ میدان از $\mathcal{D}_2$ باشد، آن‌گاه

$$E(E(X \mid \mathcal{D}_2) \mid \mathcal{D}_1) = E(X \mid \mathcal{D}_1), \quad a.s.\,,$$

۶.

$$E(E(X \mid \mathcal{D})) = E(X), \quad a.s.\,.$$

تعریف ۳۴.۲.۲. هر خانواده (شمارا یا ناشمارا) از متغیرهای تصادفی، یک **فرآیند تصادفی** نامیده می‌شود.

ملاحظه ۳۵.۲.۲. اگر $\{X_t\}_{t \geq 0}$ یک فرآیند تصادفی باشد و قرار دهیم

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, \ 0 \leq s \leq t)$$

آن‌گاه $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ یک فیلتر است و آن را فیلتر طبیعی می‌گوییم.

تعریف ۳۶.۲.۲. فرض کنید $\mathbb{F}$ یک فیلتر باشد. فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t \geq 0}$ را نسبت به فیلتر $\mathbb{F}$ **سازگار** می‌گوییم هرگاه برای هر $t \geq 0$، $X_t \in \mathcal{F}_t$. به عبارتی متغیر تصادفی X_t، $\mathcal{F}_t$ـ اندازه‌پذیر باشد.

تعریف ۳۷.۲.۲. فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t \in Z^+}$ را نسبت به فیلتر $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in Z^+}$، **مارتینگل**[۵] گوییم هرگاه

[۴] Almost surely
[۵] Martingale

۱. $\{X_n\}_{n\in Z^+}$ نسبت به فیلتر $\mathbb{F}$ سازگار باشد،

۲. برای هر n، $E(\mid X_n \mid) < \infty$ یعنی برای هر n، X_n انتگرال‌پذیر باشد،

۳. برای هر $n \geq ۱$ داشته باشیم

$$E(X_{n+۱} \mid \mathcal{F}_n) = X_n \quad a.s. .$$

تعریف ۳۸.۲.۲. دو اندازه احتمال Q و P را روی فضای $(\Omega, \mathcal{F})$ **معادل** گوییم هر گاه برای هر $A \in \mathcal{F}$ داشته باشیم

$$P(A) = ۱ \Longleftrightarrow Q(A) = ۱$$

۳.۲ حرکت براونی

حرکت براونی از اساسی‌ترین فرآیندهای تصادفی و سنگ بنای نظریه‌ی احتمال مدرن، آنالیز تصادفی و معادلات دیفرانسیل است. حرکت نامنظم گرده گیاهان که در آب معلق هستند را به افتخار روبرت براون [۶]، گیاه‌شناس اسکاتلندی که برای نخستین بار در تابستان ۱۸۲۷ میلادی حرکت نامنظم گرده گیاهان معلق در آب را مشاهده کرد، حرکت براونی [۷] نامیدند. در سال ۱۹۰۵ میلادی آلبرت انیشتن [۸] علت این حرکت را بمباران دانه‌های گرده از سوی ملکول‌های مایع معرفی کرد. به عبارت دیگر، ذرات و مولکول‌های موجود در گازها و یا مایعات دارای حرکت نامنظمی هستند، یعنی در هر راستایی می‌توانند حرکت کنند و با برخورد با یکدیگر تغییر جهت دهند به این حرکت، حرکت براونی می‌گویند. پس از آن دامنه کاربرد حرکت براونی بسیار فراتر رفته و حتی وارد مباحث ریاضیات مالی مانند مدل‌سازی قیمت سهام نیز شده است. در سال ۱۹۱۸ میلادی نوربرت وینر [۹] (۱۸۹۴ ـ ۱۹۶۴ میلادی) ریاضی‌دان برجسته و نابغه آمریکایی، الگوی حرکت براونی را به‌طور کامل بررسی کرد. وی در سال ۱۹۲۳ میلادی فرآیند مطلوب حرکت براونی را که امروز فرآیند وینر نیز گفته می‌شود را به فرم ریاضی ساخت که به صورت زیر قابل بیان است [۲].

تعریف ۱.۳.۲. فرآیند تصادفی $\{B_t\}_{t\geq ۰}$ را یک **فرآیند براونی استاندارد** [۱۰] گوییم هرگاه

۱. $B_۰(w) = ۰$،

۲. برای $۰ \leq t \leq s$، $B_s - B_t$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $s - t$ باشد،

۳. برای $۰ \leq t_۱ \leq t_۲ \leq \cdots \leq t_n$، متغیرهای تصادفی $B_{t_n} - B_{t_{n-۱}}, \ldots, B_{t_۱} - B_{t_۲}$ مستقل و هم‌توزیع باشند.

حرکت براونی استاندارد رافرآیند وینر[۱۱] نیز می‌گوییم.

[۶] Robert Brown
[۷] Brownian motion
[۸] Albert Einstein
[۹] Norbert Wiener
[۱۰] Standard Brownian motion
[۱۱] Wiener process

ملاحظه ۲.۳.۲. فیلتر استاندارد فرآیند براونی،

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, \ \ s \leq t\}.$$

می‌باشد.

قضیه ۳.۳.۲. اگر $\{B_t\}_{t\geq \circ}$ یک حرکت براونی و $\mathcal{F}_t$ فیلتر استاندارد فرآیند براونی باشد. آن‌گاه داریم

۱. برای هر $s \leq t$، $E(B_t.B_s) = t$.

۲. $\{B_t\}_{t\geq \circ}$ یک مارتینگل است.

۳. $\{B_t^{۲} - t\}$ مارتینگل است.

برهان. الف ــ

$$\begin{aligned} E(B_tB_s) &= E(B_t(B_s - B_t + B_t)) \\ &= E(B_t(B_s - B_t)) + E(B_t^{۲}) \\ &= E(B_t)E(B_s - B_t) + E(B_t^{۲}) \\ &= \circ + t = t. \end{aligned}$$

ب ــ

$$\begin{aligned} E(B_s \mid \mathcal{F}_t) &= E(B_s - B_t + B_t \mid \mathcal{F}_t) \\ &= E(B_s - B_t \mid \mathcal{F}_t) + E(B_t \mid \mathcal{F}_t) \\ &= \circ + B_t = B_t. \end{aligned}$$

ج ــ

$$\begin{aligned} E(B_s^{۲} - s \mid \mathcal{F}_t) &= E(B_s^{۲} \mid \mathcal{F}_t) - s = E((B_s - B_t + B_t)^{۲} \mid \mathcal{F}_t) - s \\ &= E((B_s - B_t)^{۲} + ۲(B_s - B_t)B_t + B_t^{۲} \mid \mathcal{F}_t) - s \\ &= E((B_s - B_t)^{۲} \mid \mathcal{F}_t) + E(۲(B_s - B_t)B_t \mid \mathcal{F}_t) + E(B_t^{۲} \mid \mathcal{F}_t) - s \\ &= E((B_s - B_t)^{۲}) + ۲B_tE(B_s - B_t \mid \mathcal{F}_t) + B_t^{۲} - s \\ &= s - t + ۲B_tE(B_s - B_t) + B_t^{۲} - s = B_t^{۲} - t. \end{aligned}$$

□

قضیه ۴.۳.۲. تقریبا تمام مسیرهای حرکت براونی هیچ جا مشتق‌پذیر است، چون

$$P(\forall t \geq \circ \limsup \mid \frac{B(t+h) - B(t)}{h} \mid = +\infty) = ۱.$$

برهان. به [۳۲] رجوع کنید. □

تعریف ۲.۳.۵. بازگشت به میانگین [۱۲]، خاصیتی است که طبق آن یک فرآیند به بی‌نهایت میل نمی‌کند و حول یک میانگین بلندمدت خوش تعریف نوسان می‌کند. چنین فرآیندی به صورت زیر است.

$$dY_t = \lambda(\gamma - Y_t)dt + \sigma_y f_y(Y_t)dW_t,$$

که σ_y تلاطم، f یک تابع خوش تعریف، W_t فرآیند براونی و γ میانگین بلندمدت Y_t را نشان می‌دهند و λ نرخ بازگشت به میانگین نامیده می‌شود.

۲.۴ حسابان ایتو

۲.۴.۱ انتگرال ایتو

فرض کنید بخواهیم معادله حرکت ذره‌ای که در سطح آب جوی حرکت می‌کند را نسبت به زمان به‌دست آوریم. از آن‌جا که مکان ذره در لحظه t، $t \in [0, T]$ و $(T > 0)$ به دلیل ضرباتی که وزش باد و مولکول‌های آب به آن وارد می‌کند مشخص نیست (تصادفی است)، معادله آن به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)(\text{نوفه}) \tag{۲.۱}$$

که در آن σ و b توابع حقیقی داده شده روی $\Omega \times (0, \infty)$ هستند و نوفه، با توجه به شواهد به‌دست آمده توسط دانشمندان، فرآیند تصادفی‌ای مانند Z_t است که در سه شرط زیر صدق می‌کند.

- برای هر $t_1, t_2 \in [0, T]$ که $t_1 \neq t_2$، Z_{t_1} و Z_{t_2} مستقل از هم باشند.
- توزیع توام متغیرهای تصادفی $Z_{t_1+t}, \dots, Z_{t_n+t}$، $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq T$ به t بستگی نداشته باشد.
- برای هر $t \in (0, T]$، $E(Z_t) = 0$.

فرض کنید $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T$ افرازی از فاصله $[0, T]$ است. با گسسته‌سازی رابطه ۲.۱ داریم

$$X_{t_{k+1}} - X_{t_k} = b(t_k, X_{t_k})\Delta t_k + \sigma(t_k, X_{t_k})\Delta t_k Z_k.$$

تنها فرآیندی با این ویژگی‌ها که دارای مسیرهای پیوسته است فرآیند براونی است. لذا می‌توان نوشت

$$X_t = X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} b(t_j, X_j)\Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma(t_j, X_j)\Delta B_j.$$

اگر حد طرف راست عبارت بالا وقتی $\Delta t \longrightarrow 0$ وجود داشته باشد خواهیم داشت

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, w)ds + \int_0^t \sigma(s, w)dB_s.$$

[۱۲] Mean reversion

بنابراین به روشنی برای پیدا کردن فرآیند $\{X_t\}$ لازم است به محاسبه انتگرال‌هایی به فرم زیر بپردازیم.

$$\int_s^T f(t,w)dB_t(w)$$

که $B_t(w)$ فرآیند براونی یک بعدی استاندارد و f تابعی حقیقی روی $[\circ,\infty)\times\Omega$ است. برای رسیدن به این هدف گام‌های زیر را برمی‌داریم.

فرض کنیم $\phi:[\circ,\infty)\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی ابتدایی[۱۳] باشد یعنی

$$\phi(t,w)=X(w)\chi_{[a,b)}(t),\quad a,b\in[\circ,\infty)$$

در این صورت تعریف می‌کنیم

$$\int_a^t \phi(s,w)dB_s=\int_a^t X(w)\chi_{[a,b)}dB_s(w)=X(w)[B_{b\wedge t}(w)-B_{a\wedge t}(w)]$$

که در آن برای هر $x,y\in\mathbb{R}$، $x\wedge y=\min\{x,y\}$.

فرض کنیم f تابعی ساده[۱۴] روی $[\circ,\infty)\times\Omega$ باشد. یعنی

$$f=\sum_{j=\circ}^{n}\phi_i,$$

که ϕ_iها توابع ابتدایی هستند. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$\int_a^t fdB_s=\sum_{j=\circ}^{n}\int_a^t\phi_i dB_s. \tag{۲.۲}$$

رده‌ی $\mathcal{P}_۲$ از توابع را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۴.۲. رده‌ی $\mathcal{P}_۲$ از توابع $f(t,w)$ روی مجموعه‌ی $[\circ,\infty)\times\Omega$، رده‌ای از توابع با ویژگی‌های زیر است

- تابع $f(t,w)\longrightarrow(t,w)$، $\mathcal{B}\times\mathcal{F}$_اندازه‌پذیر است،
- به ازای هر t،تابع $f(t,.)$، $\mathcal{F}_t$_اندازه‌پذیر باشد،
- برای هر $T\geq\circ$، $E\left[\int_\circ^T f^۲(s,w)ds\right]<\infty$.

لم ۲.۴.۲. (لم ایزومتری ایتو) اگر تابع $\phi(t,w)$ کران‌دار و ابتدایی باشد، آن‌گاه

$$E\left[\left(\int_s^T\phi(t,w)dB_t(w)\right)^۲\right]=E\left[\int_s^T\phi^۲(t,w)dt\right].$$

برهان. به [۲۶] رجوع کنید. □

---
[۱۳] Elemintary function
[۱۴] Simple function

لم ۳.۴.۲. اگر $f \in \mathcal{P}_۲$، آن‌گاه دنباله‌ی $\{\phi_n\}$ از توابع ساده وجود دارد به‌طوری‌که

$$E\left[\int_{\circ}^{T} \mid \phi(s) - f_n(s) \mid^{۲} ds\right] \xrightarrow{n\to\infty} \circ.$$

برهان. به [۲۶] رجوع کنید. □

اکنون می‌توانیم $\int_s^T f(t,w)dB_t$ را برای هر $f \in \mathcal{P}_۲$ تعریف کنیم زیرا برای $f \in \mathcal{P}_۲$، با توجه به لم قبل دنباله‌ای از توابع ابتدایی مانند $\{\phi_n\}$ موجود است که به f میل می‌کند. پس می‌توان تعریف کرد

$$\int_{\circ}^{T} f dB_t = \lim_{n\to\infty} \int_{\circ}^{T} \phi_n dB_t.$$

که انتگرال اخیر را **انتگرال ایتو**[۱۵] نامند.

۲.۴.۲ فرمول ایتو

تعریف ۴.۴.۲. فرض کنید $\{B_t\}_{t\geq\circ}$ یک فرآیند براونی استاندارد روی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد. یک انتگرال تصادفی یک بعدی، یک فرآیند تصادفی X_t روی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ به صورت است

$$X_t(w) = X_{\circ}(w) + \int_{\circ}^{t} u(s,w)\, ds + \int_{\circ}^{t} v(s,w)\, dB_s,$$

که در آن $u, v : [\circ, \infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. با مشتق‌گیری داریم

$$dX_t = u\, dt + v\, dB_t.$$

قضیه ۵.۴.۲. (فرمول ۱ـ بعدی ایتو) اگر

$$dX_t = u\, dt + v\, dB_t, \quad Y_t = g(t, X_t)$$

آن‌گاه

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \frac{۱}{۲}\frac{\partial^{۲} g}{\partial x^{۲}}(t,X_t)(dX_t)^{۲},$$

که در این‌جا $dt.dt = dt.dB_t = dB_t.dt = \circ$ و $(dB)^{۲} = dt$.

مثال ۶.۴.۲. فرض کنید $Y_t = g(t, B_t) = \frac{۱}{۲}B_t^{۲}$، در این صورت $g(t,x) = \frac{۱}{۲}x^{۲}$. لذا

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \circ, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial^{۲} g}{\partial x^{۲}} = ۱,$$

در نتیجه با استفاده از فرمول ایتو داریم

$$dY_t = B_t dB_t + \frac{۱}{۲}t.$$

---

[۱۵] Ito integral

قضیه ۷.۴.۲. (فرم کلی ایتو) فرض کنید $dX_t = u\,dt + v\,dB_t$ یک انتگرال nـ بعدی و $g : [0, \infty) \times R^2 \longrightarrow R^2$ یک نگاشت C^2 باشد. آن‌گاه $Y(t, w) = g(t, X_t)$ یک انتگرال تصادفی است و داریم

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(t, X_t)dX_i + \sum_{i,j} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t)dX_i dX_j,$$

که در اینجا $dt.dt = dt.dB_i = dB_i.dt = 0$ و $dB_i dB_j = \delta_{ij}dt$.

برهان. به [۲۶] رجوع کنید. □

مثال ۸.۴.۲. اگر $X_t = B_1^2(t) + B_2^2(t)$، آن‌گاه $g(t, x) = x_1^2 + x_2^2$. لذا

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial g}{\partial x_i} = 2x_i, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} = 2\delta_{ij},$$

بنابراین

$$dX_t = \sum_{i=1}^{2} 2B_i dB_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{2} 2\delta_{ij} dB_i dB_j = 2(B_1 dB_1 + B_2 dB_2 + dt).$$

تعریف ۹.۴.۲. فرض کنید $\{W_t\}_{t\geq 0}$ یک حرکت براونی استاندارد باشد. در این صورت فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t\geq 0}$ که در معادله دیفرانسیل معمولی زیر صدق می‌کند

$$dX_t = \alpha X_t dt + \sigma X_t dW_t \tag{۳.۲}$$

و در آن α و σ مقادیر ثابت‌اند، را **حرکت براونی هندسی** [۱۶] گویند.

قضیه ۱۰.۴.۲. برای حرکت براونی هندسی $\{X_t\}_{t\geq 0}$ با فرض $X_0 = x_0$داریم:

۱ـ $E(X_t) = x_0 e^{\alpha t}$،

۲ـ $X_t = x_0 \exp\{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\}$.

برهان. به [۳۰] رجوع کنید. □

۵.۲ قضیه گیرسانوف

قضیه ۱.۵.۲. (**قضیه گیرسانوف**[۱۷]) فرض کنید $B(t)$، $0 \leq t \leq T$ روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک حرکت براونی و $\{\mathcal{F}_t\}$ یک فیلتر برای حرکت براونی باشد. همچنین فرض کنید $\theta(t)$ یک فرآیند سازگار باشد. تعریف می‌کنیم

$$W_t = \int_0^t \theta(u)du + B(t),$$

[۱۶] Geometric Brownian motion

[۱۷] Girsanov theorem

$$Z(t) = \exp\left\{ -\int_0^t \theta(u)dB(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(u)du \right\},$$

اگر اندازه احتمال دیگری را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad , Q(A) = \int_A Z(T)dP.$$

در این‌صورت W_t تحت اندازه احتمال Q یک فرآیند براونی است.

ملاحظه ۲.۵.۲. قضیه فوق با شرط زیر برقرار است

$$E\exp\{\frac{1}{2}\int_0^T \theta^2(u)du\} < \infty.$$

ملاحظه ۳.۵.۲. در قضیه فوق داریم

- $Z(t)$ مارتینگل است.
- Q اندازه احتمال است.
- اگر X یک متغیر تصادفی باشد آن‌گاه

$$E^Q[X] = E[Z(T)X]$$

که در آن E^Q امید ریاضی نسبت به اندازه احتمال Q و E امید ریاضی نسبت به اندازه احتمال P است.

برهان. به [۱۰] رجوع کنید. □

تعریف ۴.۵.۲. (فرآیند نرخ تنزیل) پایه و اساس تجزیه و تحلیل‌های مالی درک مفهوم این جمله است که هر رقم پیش‌بینی شده برای ارزش دارایی در سال‌های آتی برابر یک سرمایه‌گذاری با نرخ سود سالانه در زمان حال می‌باشد. در تجزیه و تحلیل‌های مالی برای حذف عامل زمان در محاسبات، ارزش دارایی را که در سال‌های آتی کسب می‌گردد با استفاده از ضریب تنزیل e^{-rt} به ارزش روز تبدیل می‌نمایند. در این حالت نرخ بهره سالانه r که در محاسبات به عنوان نرخ بهره سرمایه گذاری در یک بازار بورس بدون ریسک می‌باشد را به عنوان نرخ تنزیل در نظر می‌گیرند [۲۵]. لذا فرض کنید $R(t)$ یک فرآیند سازگار برای نرخ بهره باشد. فرآیند تنزیل را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$D(t) = e^{-\int_0^t R(s)ds}.$$

اگر $J(s) = \int_0^t R(s)ds$ و $f(x) = e^{-x}$ از فرمول ایتو داریم

$$\begin{aligned} dD(t) &= df(J(t)) \\ &= f'(J(t))dJ(t) + \frac{1}{2}f''(J(t))dJ(t)dJ(t) \\ &= -R(t)D(t)dt \end{aligned}$$

موضوعی که باید به آن توجه کرد، مسئله تعیین یا محاسبه ارزش فعلی (در زمان صفر) یک سری پرداخت‌هایی است که در آینده صورت می‌گیرد. ارزش فعلی این پرداخت‌ها بر مبنای نرخ بهره محاسبه می‌شود.

تعریف ۵.۵.۲. اندازه احتمال Q را **اندازه ریسک خنثی** [۱۸] گوییم هرگاه داشته باشیم
۱. Q و P دو اندازه احتمال معادل باشند.
۲. فرآیند قیمت دارایی تنزیل شده $D(t)S(t)$ تحت Q مارتینگل باشد که $D(t) = e^{-\int_0^t R(s)ds}$، نرخ تنزیل و $R(t)$ نرخ بهره بدون ریسک می‌باشد.
در صورت ثابت بودن نرخ بهره، نرخ تنزیل e^{-rt} می‌باشد.

یکی از نتایج مهم در قیمت‌گذاری اوراق مشتقه صادره بر روی سهام، ارزش‌گذاری نسبت به اندازه ریسک خنثی (یا ارزش‌گذاری بی تفاوت نسبت به ریسک) می‌باشد. مشتقات مالی از جمله اختیار معاملات را با این فرض می‌توان ارزش‌گذاری کرد که سرمایه‌گذاران نسبت به ریسک بی تفاوت‌اند. به بیان دقیق‌تر، ترجیحات مربوط به ریسک سرمایه‌گذاران در ارزش اختیار معامله سهام، که به صورت تابعی از قیمت دارایی پایه است، تأثیری ندارد و به همین دلیل است که در معادله بلک شولز از بازدهی مورد انتظار سهام یعنی μ استفاده نمی‌شود.
فرض ارزش‌گذاری بی تفاوت نسبت به ریسک، یک ابزار قوی برای به‌دست آوردن قیمت مشتقات است. زیرا زمانی که از جهان بی تفاوت نسبت به ریسک به دنیای ریسک گریزی وارد می‌شویم، دو نتیجه مهم به‌دست می‌آید:
۱ـ نرخ بازده مورد انتظار اوراق بهادار مساوی نرخ بهره بدون ریسک می‌شود.
۲ـ نرخ مناسب تنزیل به‌کار برده شده جهت هر گونه پرداختی در آینده معادل نرخ بهره بدون ریسک می‌شود.
می‌توان اختیار معاملات و سایر مشتقات را که نرخ بازده معینی در یک دوره زمانی خاص دارند، با استفاده از فرض ارزش‌گذاری نسبت به اندازه ریسک خنثی به ترتیب زیر قیمت‌گذاری کرد:
۱ـ نرخ بازده مورد انتظار دارایی پایه را نرخ بهره بدون ریسک، r فرض کنید.
۲ـ ارزش اختیار معامله یا عایدی مورد انتظار اختیار معامله در زمان سررسید را محاسبه کنید.
۳ـ بازده مورد انتظار فوق را با نرخ بهره بدون ریسک تنزیل کنید.

قضیه ۶.۵.۲. فرض کنیم $h(t)$ عایدی (بازدهی) یک دارایی در لحظه t باشد. در این صورت ارزش دارایی تحت اندازه ریسک خنثی در لحظه t به صورت زیر است

$$V(t) = E^Q\left[e^{-\int_t^T R(s)ds} h(T) \mid \mathcal{F}\right], \quad 0 \le t \le T,$$

که E^Q امید نسبت به اندازه ریسک خنثی Q است.

برهان. به [۳۰] رجوع کنید. □

---
[۱۸] Risk neutral measure

۶.۲ مفاهیم ریاضی مالی

۱.۶.۲ سبد سهام

تعریف ۱.۶.۲. سبد سهام یا پرتفوی [۱۹] ترکیبی مناسب از سهام یا سایر دارایی‌ها است، که یک سرمایه‌گذار آنها را خریداری کرده است. هدف از تشکیل سبد سهام، تقسیم‌کردن ریسک سرمایه‌گذاری بین چند سهم است؛ بدین ترتیب احتمالا سود یک سهم می‌تواند ضرر سهام دیگر را تا حدی جبران کند.

پرتفوی به منظور کاهش ریسک و به صورتی انتخاب می‌شود تا در شرایط عادی احتمال کاهش بازده همه دارایی‌ها (شامل سهام‌های خریداری شده) نزدیک به صفر باشد.

تعریف ۲.۶.۲. پرتفوی $h = (x, y)$ را در نظر بگیرید. فرآیند ارزش پرتفوی h به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V_t^h = xB_t + yS_t, \quad t = ۰, ۱,$$

که S_t فرآیند قیمت هر سهم (فرآیند تصادفی) در زمان t، B_t فرآیند قیمت یک ورق قرضه (فرآیند قطعی [۲۰]) در زمان t است.

تعریف ۳.۶.۲. استراتژی پرتفوی را خودتأمین [۲۱] گوییم هرگاه برای هر $t = ۰, ۱, \ldots, T - ۱$ داشته باشیم

$$x_t(۱ + R) + y_tS_t = x_{t+۱}(۱ + R) + y_{t+۱}S_t.$$

به عبارتی دیگر، با استفاده از ارزش پرتفوی قدیم $(x_t(۱ + R) + y_tS_t)$ که در زمان $t - ۱$ تشکیل شده است، می‌توان پرتفوی جدید به ارزش $(x_{t+۱}(۱ + R) + y_{t+۱}S_t)$ در لحظه t تشکیل داد.
در حقیقت در پرتفوی خودتأمین هیچ‌گاه پولی وارد نمی‌شود و پولی از آن برداشت نمی‌شود و تنها تغییر در ارزش پرتفوی می‌باشد.

تعریف ۴.۶.۲. متغیر تصادفی X را یک ادعای مشروط [۲۲] با زمان سررسید T نامیم هرگاه $X \in \mathcal{F}_T$. دارنده این ادعا در $t = T$ مقدار تصادفی X را دریافت می‌کند.
فرض کنید S_t فرآیند قیمت دارایی پایه باشد، ادعای مشروط X را یک ادعای مشروط ساده [۲۳] نامیم هر گاه به صورت $X = \phi(S_T)$ باشد که ϕ تابع قرارداد [۲۴] نامیده می‌شود.

۲.۶.۲ قردادهای اختیارمعامله

اولین معاملات اختیار خرید و اختیار فروش، در اروپا و آمریکا در اوایل قرن ۱۸ صورت گرفت. در اوایل دهه ۱۹۹۰ ، گروهی از شرکت‌ها که خود را انجمن کارگزاران و معامله‌گران اختیار خرید و اختیار فروش

[۱۹] Portfolio
[۲۰] Deterministic
[۲۱] Self financing
[۲۲] Contingent claim
[۲۳] Simple contingent claim
[۲۴] Contract function

معرفی می‌کردند، برای ایجاد یک بازار اختیار معامله اقدام نمودند. هدف این انجمن گردهم آوردن خریداران و فروشندگان در کنار یکدیگر بود. اگر سرمایه‌گذاری قصد خرید یک اختیار معامله را داشت، بایستی با یکی از اعضای انجمن تماس می‌گرفت، تا او یک فروشنده را، که قصد فروش اختیار معامله مذکور را دارد، پیدا کند. اگر عضو مذکور نمی‌توانست یک فروشنده پیدا کند، خود شرکت برای فروش اختیار معامله مذکور اقدام می‌کرد. در آوریل ۱۹۷۳ ، بورس شیکاگو یک بورس انحصاری برای اختیار معاملات بر روی سهام تشکیل داد. پس از آن، چندین بورس سهام و تقریباً تمام بورس‌های معاملات آتی، به مبادله اختیار معامله اقدام نمودند.

فعالان بازارهای اقتصادی و سرمایه‌گذاری به دلیل شرایط حاکم بر بازارها، نوسانات و عدم اطمینان از وضعیت آتی بازار؛ همواره با ریسک‌هایی مواجه هستند که ممکن است آن‌ها را در معرض زیان قرار دهد. به این منظور همواره تلاش بر این بوده است که راهکارهای مناسبی برای پوشش این ریسک‌ها اتخاذ شود و به عبارتی ریسک‌های پیش روی فعالان بازار سرمایه مدیریت شوند. یکی از ابزارهایی که در راستای این هدف ایجاد شده، اوراق مشتقه می‌باشد.

یک مشتق مالی استاندارد، قراردادی است بین طرفین که به موجب آن دارایی پایه در زمان معلوم با قیمت توافق شده معلوم مورد معامله قرار گیرد. یکی از انواع مشتقات مالی، قرارداد اختیار معامله است.

اختیارمعامله استاندارد

یک اختیار معامله استاندارد، اختیاری است که به دارنده آن این اختیار و نه اجبار را می‌دهد تا یک دارایی پایه را در زمان مشخص در آینده با قیمت توافق شده بخرد یا بفروشد. اساس اختیارها حق بدون الزام است. در واقع سود بدون ضرر را برای دارنده اختیار به همراه دارد. در چنین قراردادهای بدون تعهد، دارنده اختیار باید مقداری پول را پیشاپیش پرداخت کند که به آن قیمت اختیار گفته می‌شود. می‌توان حق اختیار معامله را به دو دسته تقسیم کرد؛ اختیار خرید [۲۵] و اختیار فروش [۲۶]. یک اختیار خرید در واقع این حق (و نه الزام) را به دارنده آن می‌دهد، که دارایی موضوع قرارداد را با قیمت معین و در تاریخ مشخص یا قبل از آن، بخرد. به همین ترتیب، یک اختیار فروش به دارنده آن این حق را می‌دهد، که دارایی موضوع قرارداد را با قیمت معین و در تاریخ مشخصی و یا قبل از آن بفروشد. قیمتی را که در قرارداد ذکر می‌شود، قیمت توافقی یا قیمت اعمال [۲۷] و تاریخ ذکر شده در قرارداد را، اصطلاحاً تاریخ انقضا یا سررسید اختیار معامله [۲۸] می‌گویند. اختیار خرید یا فروش، هر کدام به دو حالت اروپایی و آمریکایی تقسیم می‌شود. قرارداد اختیار اروپایی [۲۹] فقط در تاریخ سررسید قابلیت اعمال دارد. در حالی که قرارداد اختیار آمریکایی [۳۰]، در هر زمانی قبل از تاریخ سررسید یا در تاریخ سررسید قابل اعمال است. در هر قرارداد اختیار معامله، دو طرف معامله‌گر وجود دارد. یک طرف معامله کننده، سرمایه‌گذاری است که موقعیت خرید اتخاذ کرده است و اختیار معامله را خریده است. در طرف دوم قرارداد، سرمایه‌گذار

[۲۵] Call option
[۲۶] Put option
[۲۷] Strike price or Exercise price
[۲۸] Expiration date or Exercise date
[۲۹] European option
[۳۰] American option

موقعیت فروش اتخاذ کرده است؛ یعنی اختیار معامله را صادر کرده یا فروخته است. خریدار یا دارنده اختیار معامله، هیچ گونه تعهدی در قبال قرارداد ندارد، در حالی‌که فروش یا صدور اختیار معامله برای فروشنده تعهدآور است. بدین معنی که فروشنده، مبلغ قیمت اختیار را دریافت می‌کند و در مقابل متعهد می‌شود که در صورت اعمال اختیار معامله توسط خریدار، به مفاد قرارداد عمل کند. سود یا زیان صادر کننده اختیار، درست عکس خریدار می‌باشد.

به طور کلی چهار موقعیت برای یک اختیار معامله وجود دارد:

۱. موقعیت خرید در قرارداد اختیار خرید

۲. موقعیت خرید در قرارداد اختیار فروش

۳. موقعیت فروش در قرارداد اختیار خرید

۴. موقعیت فروش در قرارداد اختیار فروش

اکنون می‌خواهیم با توجه به تصادفی بودن قیمت دارایی پایه در تاریخ سررسید، بازده یا ارزش نهایی سرمایه گذار در اختیار معامله‌های اروپایی را در حالت کلی بیان کنیم. واضح است که هزینه اولیه سرمایه گذاری در اینجا دخیل نمی‌باشد. اگر K را قیمت اعمال و S_T را قیمت دارایی پایه در زمان سررسید بدانیم، بازده حاصل از موقعیت خرید در یک اختیار خرید اروپایی عبارت است از:

$$\max\{S_T - K, 0\}.$$

رابطه بالا، این واقعیت را نشان می‌دهد که اگر $K < S_T$ باشد، اختیار معامله اعمال خواهد شد و در غیر این صورت یعنی اگر $S_T \leq K$ باشد، اختیار معامله اعمال نخواهد شد. بازده سرمایه‌گذاری که موقعیت فروش در قرارداد اختیار خرید اروپایی اتخاذ کرده است به ترتیب زیر خواهد بود:

$$-\max\{S_T - K, 0\} = \min\{K - S_T, 0\}.$$

و به همین منوال بازده سرمایه گذاری که موقعیت خرید در قرارداد اختیار فروش اروپایی اتخاذ کرده است به صورت زیر می‌باشد.

$$\max\{K - S_T, 0\}.$$

همچنین بازده دارنده موقعیت فروش اختیار فروش اروپایی به صورت زیر است:

$$-\max\{k - S_T, 0\} = \min\{S_T - k, 0\}.$$

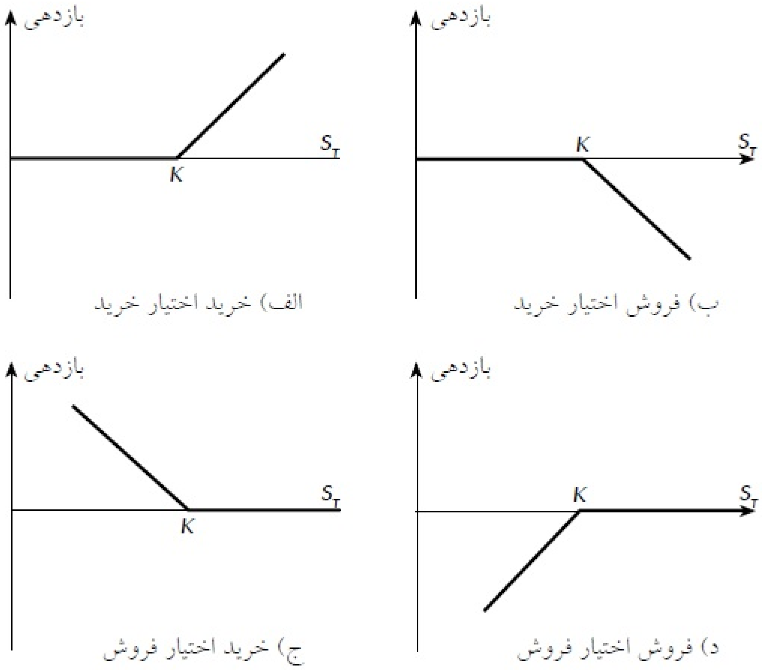
نمودارهای شکل (۱.۲) چهار موقعیت اختیار معامله حالات را نشان می‌دهند.

تعریف ۵.۶.۲. (رابطه برابری اختیار فروش و اختیار خرید [۳۱])

$$C + Ke^{-rT} = P + S_0$$

رابطه فوق را ''رابطه برابری اختیار فروش و اختیار خرید'' برای اختیار معامله استاندارد گوییم. رابطه فوق نشان می‌دهد که می‌توان قیمت یک اختیار خرید اروپایی با قیمت توافقی و سررسید معین را از قیمت یک اختیار فروش اروپایی با همان قیمت توافقی و همان سررسید به‌دست آورد و برعکس.

[۳۱] Put-Call parity



شکل ۱.۲: بازدهی حاصل از خرید یا فروش اختیار معامله اروپایی

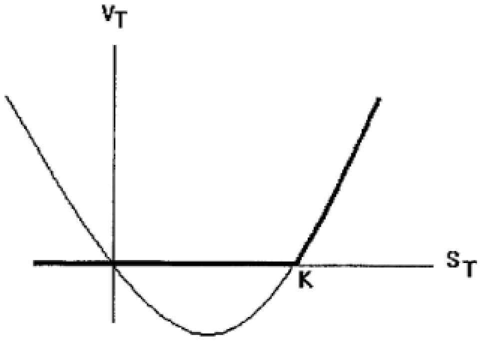
اختیار معامله غیر استاندارد

قراردادهای اختیار معامله غیر استاندارد یا نامتعارف، اختیاراتی هستند که با استفاده از یک سری قواعد، بازده‌هایی را بدست می‌دهند که محاسبه این بازده‌ها همچون حق اختیار معامله استاندارد ساده و آسان نیست. برخی اختیارات غیر معمول مجموعه‌ای از اختیار خرید و اختیار فروش اروپایی و آمریکایی هستند، بقیه قدری پیچیده‌تر هستند. از جمله اختیارات غیر استاندارد می‌توان اختیار آسیایی [۳۲]، اختیار متکی به گذشته [۳۳] و ... نام برد.
دسته‌ای دیگر از اختیار معاملات غیر استاندارد، اختیار معاملات توان [۳۴] می‌باشند. به اختیار معاملاتی که بازدهی آن‌ها تابعی چندجمله‌ای از قیمت دارایی پایه در تاریخ سررسید است، اختیار معاملات توان معمولی [۳۵] گوییم. تابع بازدهی اختیار خرید توان معمولی با توان nام عبارت است از:

$$V_T = \max(\sum_{i=1}^{n} a_i S_T^i - \sum_{i=1}^{n} a_i K^i, 0), \quad a_i \geq 0,$$

که در آن n عدد صحیح مثبت، S_T قیمت دارایی پایه در تاریخ سررسید و K قیمت توافقی می‌باشد. نمودار شکل ۲.۲ این بازدهی را نشان می‌دهد.
در این رساله سه نوع خاص از این اختیار معاملات را مورد بررسی قرار می‌دهیم. اختیار معامله توان

[۳۲] Asain option
[۳۳] Lookback option
[۳۴] Power options
[۳۵] General Power options



شکل ۲.۲: بازدهی اختیار خرید توان معمولی

استاندارد [۳۶] اختیاری است که بازدهی آن، وابسته به قیمت دارایی پایه با توانی از $m > 0$ است. اگر S_T قیمت دارایی پایه در تاریخ سررسید $T > 0$ و K قیمت توافقی بدانیم، بازده حاصل از اختیار خرید توان mـام استاندارد عبارت است از

$$\max\{S_T^m - K^m, 0\}.$$

و به همین ترتیب، بازده حاصل از اختیار فروش توان mـام استاندارد عبارت است از

$$\max\{K^m - S_T^m, 0\}.$$

نوع دیگر بازدهی حاصل از اختیار خرید توان mـام به صورت زیر می‌باشد.

$$\max\{S_T^m - K, 0\}.$$

و دیگری اختیار خرید توان سقف [۳۷] ، اختیاری است که بازدهی آن با قیمت توافقی K، تاریخ سررسید $T > 0$ و سقف L به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\min\{\max\{S_T^m - K^m, 0\}, L\}.$$

در این نوع از اختیار معامله، سقف سود از پیش تعیین می‌شود. به عبارتی دیگر، سقف سود به‌طور خودکار زمانی که قیمت دارایی پایه به حد مشخصی برسد، اعمال می‌شود. اختیار معاملات توان به دلیل قدرت نفوذ قابل توجه‌ای که نسبت به اختیار معاملات معمولی دارند، توجه خریداران اختیار معامله و سرمایه‌گذاران را جلب نموده‌اند. زیرا برای یک سرمایه‌گذار تیزبین در بازار، به دلیل داشتن بازدهی بهتر به خصوص در بازار تبادلات ارز خارجی، شاخص‌ها و ... توانمندتر از اختیار معامله‌های معمولی عمل می‌کنند. به عنوان مثال، بانکداران در آلمان اختیارمعاملات توان سقف FX روی دلار آمریکا، ین ژاپن و فرانک فرانسه با توانی از مرتبه ۲ منتشر می‌کنند. همچنین در توکیو اختیار معاملات چندجمله‌ای روی شاخص Nikkei مبادله می‌شود. علاوه بر این، این اختیار معامله از جمله ابزارهایی که به منظور مدیریت ریسک در بانک‌ها مورد استفاده قرار می گیرد.

[۳۶] Standard Power option
[۳۷] Capped Power Call option

۳.۶.۲ انواع معامله‌گران

عملکرد بازارهای آتی و پیمان‌های آتی و اختیار معاملات، به طور قابل توجهی موفقیت‌آمیز بوده است. مهم‌ترین دلیل آن، توانایی این بازارها برای جذب تعداد کثیری از انواع معامله‌گران و ایجاد قابلیت نقدینگی فراوان برای انجام مبادلات است، به طوری که چنانچه سرمایه‌گذاری بخواهد یک موقعیت معاملاتی را اتخاذ کند، معمولاً مشکلی در یافتن طرف دوم قرارداد ندارد. سه گروه عمده معامله‌گران را می‌توان پوشش‌دهندگان ریسک، سفته‌بازان و آربیتراژگران در نظر گرفت. پوشش‌دهندگان ریسک با استفاده از قراردادهای آتی، پیمان‌های آتی و اختیار معاملات به دنبال کاهش ریسکی هستند، که از حرکت بالقوه آتی در یک متغیر ناشی می‌شود. سفته‌بازان از پیش‌بینی، جهت حرکت آتی قیمت، در یک متغیر بازار استفاده می‌کنند. آربیتراژگران با اتخاذ موقعیت‌های متناسب در دو یا چند بازار مختلف، به دنبال کسب سود بدون ریسک هستند. در این قسمت فعالیت‌ها و اقدامات هر یک از این گروه‌ها را بررسی می‌کنیم.

پوشش ریسک با استفاده از اختیار معاملات

با استفاده از اختیار معاملات، می‌توان به پوشش ریسک پرداخت. به این صورت که پوشش‌دهندگان ریسک در موقعیتی هستند که در معرض ریسک مرتبط با تغییر قیمت دارایی‌اند. آن‌ها از قراردادهای فوق برای کاهش یا حذف این ریسک استفاده می‌کنند. فرض کنید سرمایه‌گذاری در ماه مه ۲۰۰۰، هزار سهام مایکروسافت را در اختیار دارد. قیمت فعلی هر سهم ۷۳ دلار است و انتظار می‌رود که اقامه دعوی علیه شرکت، باعث افت شدید قیمت، در دو ماه آینده شود. این سرمایه‌گذار می‌تواند، اختیار فروش با سررسید ۱۰ ژوئیه را از بورس شیکاگو با قیمت توافقی ۶۵ دلار برای هر سهم بخرد. فرض کنید قیمت هر حق اختیار فروش ۲٫۵ دلار باشد. در این صورت هزینه کل انتخاب این استراتژی، معادل $۲۵۰۰ = ۲٫۵ \times ۱۰۰۰$ دلار خواهد بود. با این‌که انتخاب این استراتژی ۲۵۰۰ دلار هزینه در بردارد، ولی در عوض تضمین می‌کند، که حداقل قیمت فروش سهام برای هر سهم تا زمان سررسید اختیار، ۶۵ دلار باشد. اگر قیمت بازار سهام کاهش یابد، شخص می‌تواند اختیار فروش را اعمال کند و ۶۵۰۰۰ دلار بابت فروش سهام دریافت کند، که با کسر هزینه ۲۵۰۰ دلار برای خرید اختیار معامله درآمد خالص وی، مبلغ ۶۲۵۰۰ دلار می‌شود. اگر قیمت بازار بیش از ۶۵ دلار شود، اختیار فروش اعمال نمی‌شود و منقضی می‌گردد. اما در این حالت، ارزش کل دارایی بیش از ۶۵۰۰۰ دلار می‌شود (یا با در نظر گرفتن هزینه اوراق اختیار فروش ۶۲۵۰۰ دلار می‌شود).

سفته‌بازان

پوشش‌دهندگان ریسک از مواجه شدن با تغییرات نامطلوب قیمت دارایی‌ها اجتناب می‌کنند. درحالی‌که برخلاف آن‌ها سفته‌بازان به استقبال ریسک می‌روند و موقعیت‌هایی را متناسب با نوع پیش‌بینی خود درباره تغییر قیمت‌ها، کسب می‌کنند. فرض کنید الان ماه اکتبر است و یک سفته‌باز پیش‌بینی می‌کند، که ارزش شرکت آمازون در دو ماه آینده افزایش خواهد یافت. قیمت سهام فوق در حال حاضر، ۴۰ دلار است و یک اختیار خرید دو ماهه با قیمت اعمال ۴۵ دلار، به قیمت ۲ دلار فروخته می‌شود. دو راهکار را

برای یک سفته‌باز با سرمایه ۴۰۰۰ دلار تشریح می‌کنیم. گزینه اول این است که ۱۰۰ سهم بخرد. گزینه دوم شامل خرید ۲۰۰۰ اختیار خرید (یا ۲۰ قرارداد اختیار خرید) است. فرض کنید پیش‌بینی سفته‌باز درست باشد و قیمت سهم آمازون در ماه دسامبر به ۷۰ دلار برسد. گزینه اول که خرید سهام بود، سود زیر را ایجاد می‌کند:

$$۱۰۰ \times (۷۰ - ۴۰) = ۳۰۰۰$$

اما گزینه دوم بسیار سودآورتر است. یک اختیار خرید بر روی سهام آمازون با قیمت توافقی ۴۵ دلار، درآمدی معادل ۲۵ دلار نصیب سفته‌باز می‌کند، چرا که ورقه اختیار خرید، او را قادر می‌سازد، که سهام ۷۰ دلاری را با قیمت ۴۵ دلار بخرد. کل سودی که در روش دوم نصیب سفته‌باز می‌شود، عبارت است از:

$$۲۵ \times ۲۰۰۰ = ۵۰۰۰۰$$

که با کم کردن هزینه (قیمت) اختیار خرید، سود خالص عبارت است از:

$$۵۰۰۰۰ - ۴۰۰۰ = ۴۶۰۰۰$$

بنابراین سود حاصل از انتخاب استراتژی اختیار خرید، بیش از ۱۵ برابر سود حاصل از انتخاب استراتژی خرید سهام است. در ضمن، توجه کنید که اوراق اختیار خرید، میزان زیان بالقوه را نیز افزایش می‌دهد. فرض کنید قیمت سهام در ماه دسامبر به ۳۰ دلار کاهش یابد. در این صورت استفاده از روش اول (یعنی خرید سهام) زیانی معادل $۱۰۰۰ = (۴۰ - ۳۰) \times ۱۰۰$ دلار، بر سفته‌باز وارد می‌کند. ولی از آنجا که اوراق اختیار خرید بدون اینکه اعمال شوند، منقضی می‌شوند، لذا روش دوم (یعنی اوراق اختیار) فقط زیانی معادل ۴۰۰۰ دلار ــ مبلغی که در ابتدا بابت اوراق اختیار خرید پرداخته می‌شود ــ بر سفته‌باز تحمیل می‌کند. نتایج این استراتژی نشان می‌دهد اوراق اختیار معامله، همچون قراردادهای آتی، نوعی اهرم ایجاد می‌کنند؛ یعنی میزان پیامدهای مالی حاصل از سرمایه گذاری با استفاده از اوراق اختیار معامله اهرمی، افزایش می‌یابد؛ به عبارت دیگر، اگر پیش‌بینی‌ها درست باشند، سودهای بیشتر و در غیر این صورت، زیان‌های بیشتری را نصیب سرمایه‌گذار می‌کند.

آربیتراژگران

گروه سوم و مهم معامله‌گران در بازارهای اختیار معاملات، پیمان‌های آتی و قراردادهای آتی، آربیتراژگران هستند. آربیتراژ عبارت است از فرصت دستیابی به سود بدون ریسک، از طریق ورود هم‌زمان در دو یا چند بازار.

فر ض کنید سهامی هم‌زمان در بورس سهام نیویورک و در بورس سهام لندن معامله می‌شود. همچنین فرض کنید قیمت این سهام در بورس نیویورک ۱۷۲ دلار و در بورس لندن ۱۰۰ پوند است. اگر نرخ مبادله پوند و دلار، برابر ۱/۷۵ دلار برای هر پوند باشد، آنگاه آربیتراژگر می‌تواند با خرید مثلاً ۱۰۰ سهام از بورس نیویورک و فروش آن سهام در بازار لندن به سود بدون ریسک زیر دست پیدا کند:

$$۱۰۰ \times [(۱/۷۵ \times ۱۰۰) - ۱۷۲] = ۳۰۰$$

یعنی سودی معادل ۳۰۰ دلار بدون در نظر گرفتن هزینه معاملات برای آربیتراژگر تضمین می‌شود. البته احتمال دارد که هزینه‌های معاملات برای سرمایه گذاران کوچک سود آربیتراژی را از بین ببرد. با این حال، هزینه‌های‌مربوط به معاملات در بازار سهام و بازار تبدیلات ارز، برای معاملات بزرگ رقم چندانی نیست و همین موضوع سبب می‌شود که فرصت آربیتراژ بسیار جذاب باشد و همگان بکوشند، تا از این فرصت‌ها بیشترین منفعت را کسب کنند. همچنین باید توجه داشت که فرصت‌های آربیتراژی که یک نمونه از آن در بالا ذکر شد، نمی‌تواند برای مدت طولانی استمرار داشته باشد. با خرید سهام در بازار نیویورک، نیروهای عرضه و تقاضا باعث افزایش قیمت سهام می‌شوند و همچنین فروش آن در بازار لندن، زمینه کاهش قیمت را فراهم می‌آورد و به زودی دو قیمت فوق با نرخ مبادله فعلی در دو بازار یکسان خواهند شد. نکته جالب‌تر این است، که وجود آربیتراژگرانی که به دنبال کسب سود آربیتراژی هستند، امکان تفاوتی قابل ملاحظه بین قیمت دلار و قیمت پوند را، از همان ابتدا غیرممکن می‌سازد. به طور کلی می‌توان گفت، وجود تعداد زیادی آربیتراژگر در بازار، به این معناست که در عمل، فرصت آربیتراژی بسیار کمی در بازارهای مالی مشاهده می‌شود. به همین دلیل، بیشتر مسائلی که در خصوص قیمت‌گذاری دارایی‌ها و مشتقات مالی مطرح می‌شوند، بر این پیش فرض مبتنی هستند، که فرصت آربیتراژ وجود ندارد.

قضیه ۲.۶.۶. (قضیه اساسی اول قیمت‌گذاری) بازار تعریف شده با فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و فرآیند قیمت $\{S_t\}_{t\geq 0}$، بدون آربیتراژ است اگر و تنها اگر اندازه مارتینگلی Q وجود داشته باشد که S تحت Q مارتینگل باشد.

برهان. به [۳۰] رجوع کنید. □

این قضیه بین یک مفهوم اقتصادی (عدم وجود آربیتراژ در بازار) و یک مفهوم ریاضی (وجود اندازه مارتینگلی) ارتباط ایجاد می‌کند.

قضیه ۲.۶.۷. (قضیه اساسی دوم قیمت‌گذاری) بازار کامل است اگر و تنها اگر اندازه مارتینگلی یکتا باشد.

برهان. به [۳۰] رجوع کنید.

□

در حقیقت کلید قیمت‌گذاری هر قراردادی در استفاده از قضیه اساسی قیمت‌گذاری است که در آن اصل عدم آربیتراژ معادل با وجود یک اندازه احتمال ریسک خنثی است.

فصل ۳

ارزش‌گذاری اختیار معامله توان تحت مدل با تلاطم ثابت

۱.۳ مقدمه

در اوایل سال ۱۹۷۰ آقایان فیشر بلک، میرن شولز و رابرت مرتون گام بزرگی در قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله برداشتند. نتیجه‌ی کار آن‌ها ارائه مدلی بود که تحت عنوان ''مدل بلک ـ شولز [۱]'' معروف گشت. این مدل تأثیر زیادی در نحوه قیمت‌گذاری و پوشش خطر اختیار معامله داشته است. همچنین این مدل نقش اساسی و محوری در موفقیت مهندسی مالی در دهه‌های ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰ داشته است.[۱] از آن‌جایی که ارزش‌گذاری اختیار معامله یکی از مهم‌ترین موضوعات در اقتصادهای مالی است بی‌شک مدل بلک ـ شولز انقلابی در شیوه‌ی قیمت‌گذاری اختیار معامله به وجود آورده است. بدین دلیل در این فصل ابتدا مدل بلک ـ شولز و تعمیمی از آن را معرفی می‌کنیم . سپس به ارزش گذاری اختیار معامله توان تحت این دو مدل می‌پردازیم.

---

[۱] Black - Sholes model

۲.۳ مدل با تلاطم ثابت

۱.۲.۳ مدل بلک شولز

مدل بلک شولز مدلی شامل دو دارایی است الف‌ـ دارایی بدون ریسک ب‌ـ دارایی ریسکی که به ترتیب دارای دینامیک‌های زیرهستند.

$$\begin{aligned} dB_t &= rB_t dt, \quad B(0) = 1, \\ dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \end{aligned}$$

که در آن r، σ و μ به ترتیب نرخ بهره، تلاطم قیمت دارایی و نرخ بازده مورد انتظار دارایی (مقادیر ثابت) می‌باشند و W_t یک فرآیند براونی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ است.

۲.۲.۳ مدل بلک شولز تعمیم یافته

در مدل بلک‌ـشولز تعمیم یافته [۲] نرخ بهره r، در فرآیند دارایی بدون ریسک B_t و تلاطم σ در فرآیند دارایی پایه ریسکی S_t وابسته به زمان و قطعی (غیر تصادفی) می‌باشند. در مدل بلک‌ـشولز تعمیم یافته، دینامیک دارایی بدون ریسک از معادله دیفرانسیل معمولی زیر پیروی می‌کند.

$$dB_t = r_t B_t dt, \quad B(0) = 1, \tag{۱.۳}$$

که $r_t = r(t)$ یک تابع حقیقی نامنفی روی $R^+ := [0, \infty)$ (یا روی $[0, T]$ برای $T > 0$) می‌باشد.
از حل معادله ۱.۳ داریم

$$B_t = \exp\left(\int_0^t r(u) du\right).$$

همچنین دینامیک دارایی پایه ریسکی S_t از معادله دیفرانسیل تصادفی زیر که حرکت براونی هندسی تعمیم یافته [۳] نامیده می‌شود، پیروی می‌کند

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t \tag{۲.۳}$$

که در آن μ_t و σ_t توابع قطعی به ازای $t \geq 0$ هستند و به ترتیب بازده مورد انتظار و تلاطم قیمت دارایی (وابسته به زمان) را نشان می‌دهند و W_t حرکت براونی استاندارد روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ است.

گزاره ۱.۲.۳. جواب معادله دیفرانسیل تصادفی ۲.۳ به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$S_t = S_0 \exp\{\int_0^t \sigma(u) dW(u) + \int_0^t (\mu(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u)) du\}.$$

[۲] Generalized Black-Scholes
[۳] Generalized geometric Brownian motion

برهان. فرض کنید

$$X_t = \int_{\circ}^{t} \sigma(u)dW(u) + \int_{\circ}^{t} (\mu(u) - \frac{۱}{۲}\sigma^{۲}(u))du$$

آن‌گاه

$$dX_t = \sigma(t)dW(t) + (\mu(t) - \frac{۱}{۲}\sigma^{۲}(t)dt, \quad dX_t dX_t = \sigma^{۲}(t)dt$$

قرار می‌دهیم $Y_t = S_{\circ}e^{X_t}$ و $f(x) = S_{\circ}e^{x}$ بنابراین با استفاده از فرمول ایتو داریم

$$\begin{aligned} dY_t = df(X_t) &= f^{'}(X_t)dX_t + \frac{۱}{۲}f^{''}(X_t)dX_t dX_t \\ &= S_{\circ}e^{X_t}(dX_t + \frac{۱}{۲}\sigma_t^{۲}dt) \\ &= S_{\circ}e^{X_t}(\sigma_t dW_t + \mu_t dt) \\ &= Y_t(\sigma_t dW_t + \mu_t dt) \end{aligned}$$

بنابراین حکم برقرار است و Y جواب معادله دیفرانسیل ۲.۳ است. □

نتیجه ۲.۲.۳. جواب معادله دیفرانسیل تصادفی

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

که μ و σ مقادیر ثابت‌اند، به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$S_t = S_{\circ} \exp(\sigma W_t + (\mu - \frac{۱}{۲}\sigma^{۲})t).$$

حال فرآیند قیمت دارایی پایه (سهام) تنزیل شده را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\tilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t} = e^{-\int_{\circ}^{t} r(u)du} S_t = D(t)S_t,$$

که $D(t) = \frac{۱}{B_t} = e^{-\int_{\circ}^{t} r(u)du}$ نرخ تنزیل در زمان t است.
با استفاده از قاعده مشتق داریم

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= d(D(t)S_t) = (dD(t))S_t + D(t)dS_t \\ &= D^{'}(t)S_t dt + D(t)dS_t \\ &= -r_t D(t)S_t dt + D(t)S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t) \\ &= D(t)S_t[(\mu_t - r_t)dt + \sigma_t dW_t] \\ &= \sigma_t D(t)S_t[\theta(t)dt + dW_t], \end{aligned}$$

که $\theta_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}$.
اگر تعریف کنیم

$$\tilde{W}(t) = \int_{\circ}^{t} \theta(u)du + W_t$$

آن‌گاه داریم

$$d\tilde{S}_t = \sigma_t D_t S_t d\tilde{W}_t = \sigma_t \tilde{S}_t d\tilde{W}_t \qquad (۳.۳)$$

علاوه بر این، با استفاده از قضیه گیرسانوف می‌دانیم که $\tilde{W}$ فرآیند براونی تحت اندازه معادل Q است، که به صورت زیر می‌باشد

$$Q(A) = \int_A Z(w)dP(w), \quad A \in \mathcal{F},$$

که $Z = Z(T)$ و

$$Z(t) = \exp\left(-\int_0^t \theta(u)dW(u) - \frac{1}{2}\theta^2(u)du\right).$$

رابطه ۳.۳ نشان می‌دهد که فرآیند قیمت تنزیل $\tilde{S}_t$ تحت Q مارتینگل است. به همین دلیل، Q اندازه احتمال ریسک خنثی نامیده می‌شود که نقش اصلی در قضیه قیمت‌گذاری اختیار معامله دارد.
تحت اندازه ریسک خنثی Q، رابطه ۲.۳ به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma_t S_t d\tilde{W}_t \qquad (۴.۳)$$

که جواب آن

$$S_t = S_0 \exp\{\int_0^t \sigma(u)d\tilde{W}(u) + \int_0^t (r(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u))du\}.$$

می‌باشد.

۳.۳ ارزش‌گذاری اختیار توان تحت مدل بلک شولز

در بازار مشتقات مالی مهم‌ترین مسئله، مسئله قیمت‌گذاری اختیار است یعنی قیمت منصفانه‌ای برای اختیار محاسبه شود.
ابتدا قضیه‌ای را مطرح می‌کنیم و با استفاده از آن به ارزش‌گذاری می‌پردازیم.

قضیه ۱.۳.۳. [۳۳] فرض کنید فرآیند قیمت دارایی از مدل بلک شولز پیروی کند (نرخ بهره و تلاطم مقادیر ثابت‌اند). اگر $h_T = h(S_T)$ که $h(x)$ یک تابع برای $x \in R$ باشد آن‌گاه $V(t) = F(t, S_t)$ که $0 \leq t \leq T$، $\tau = T - t$ و

$$F(t,x) = e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} h(x\exp\{\sigma\sqrt{\tau}y + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau\})dy.$$

برهان. به [۳۰] رجوع کنید. $\square$

بازده حاصل از اختیار خرید توان mـام با قیمت توافقی K و تاریخ سررسید T به صورت زیر است

$$h_m(T) = (S_T^m - K)^+ = \max\{S_T^m - K, 0\},$$

که $m > 0$.
بنابراین ارزش اختیار خرید توان در زمان t با استفاده از ۶.۵.۲ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$C_m(t,K) = e^{-r(T-t)} E\left[(S_T^m - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right],$$

که r نرخ بهره، ثابت است.
می‌خواهیم تحت مدل بلک شولز که نرخ بهره و تلاطم ثابت فرض شده، به ارزش‌گذاری اختیار خرید توان به‌پردازیم. با استفاده از ۱.۳.۳ و ۶.۵.۲ داریم $h_m(x) = (x^m - K)^+$ و $C_m(t,K) = F(t,x)$ که

$$F(t,x) = e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} (x^m \exp\{m\sigma\sqrt{\tau}y + m(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau\} - K)^+ dy$$

با توجه به این‌که

$$x^m \exp\{m\sigma\sqrt{\tau}y + m(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau\} \geq K$$

پس

$$y \geq -\frac{\ln(x/K^{\frac{1}{m}}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = -g_2(x,\tau)$$

بنابراین داریم

$$F(t,x) = e^{-r\tau} \int_{-g_2(x,\tau)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} (x^m \exp\{m\sigma\sqrt{\tau}y + m(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau\} - K) dy$$

فرض می‌کنیم $F(t,x) = A - B$ که

$$A = e^{-r\tau} \int_{-g_2(x,\tau)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} x^m \exp\{m\sigma\sqrt{\tau}y + m(r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau\} dy$$

$$B = e^{-r\tau} \int_{-g_2(x,\tau)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$$

با تغییر متغیر $u = -y$ داریم

$$B = e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{g_2(x,\tau)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} K e^{-\frac{1}{2}u^2} du = K e^{-r\tau} N(g_2(x,\tau))$$

که N تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی نرمال استاندارد است.

ملاحظه ۲.۳.۳. تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی نرمال استاندارد $N(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}u^2} du, \quad x \in R.$$

علاوه بر این

$$\begin{aligned} A &= e^{-r\tau}\int_{-g_۲(x,\tau)}^{\infty}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{۱}{۲}y^۲}x^m\exp\{m\sigma\sqrt{\tau}y+mr\tau-\frac{۱}{۲}m\sigma^۲\tau\}dy \\ &= x^m e^{(m-۱)r\tau}\int_{-g_۲(x,\tau)}^{\infty}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\exp\{-\frac{۱}{۲}y^۲+m\sigma\sqrt{\tau}y-\frac{۱}{۲}m\sigma^۲\tau\}dy \\ &= x^m e^{(m-۱)r\tau}\int_{-g_۲(x,\tau)}^{\infty}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\exp\{-\frac{۱}{۲}(y-m\sigma\sqrt{\tau})^۲+\frac{۱}{۲}m\sigma^۲\tau(m-۱)\}dy \\ &= x^m e^{(m-۱)(r+\frac{۱}{۲}m\sigma^۲)\tau}\int_{-g_۲(x,\tau)}^{\infty}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\exp\{-\frac{۱}{۲}(y-m\sigma\sqrt{\tau})^۲\}dy \end{aligned}$$

در رابطه فوق قرار می‌دهیم $v=y-m\sigma\sqrt{\tau}$ پس داریم

$$A=x^m e^{(m-۱)(r+\frac{۱}{۲}m\sigma^۲)\tau}\int_{-g_۲(x,\tau)-m\sigma\sqrt{\tau}}^{\infty}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\exp\{-\frac{۱}{۲}v^۲\}dv.$$

فرض می‌کنیم $u:=-v$ آن‌گاه

$$\begin{aligned} A &= x^m e^{(m-۱)(r+\frac{۱}{۲}m\sigma^۲)\tau}\int_{-\infty}^{g_۲(x,\tau)+m\sigma\sqrt{\tau}}\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\exp\{-\frac{۱}{۲}u^۲\}du \\ &= x^m e^{(m-۱)(r+\frac{۱}{۲}m\sigma^۲)\tau}N(g_۱(x,\tau)), \end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned} g_۱(x,\tau) &= g_۲(x,\tau)+m\sigma\sqrt{\tau} \\ &= \frac{\ln(x/K^{\frac{۱}{m}})+(r+(m-\frac{۱}{۲})\sigma^۲)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}. \end{aligned}$$

بنابراین فرمول قیمت‌گذاری اختیار خرید توان تحت مدل بلک شولز به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$C_m(t,K)=S_t^m e^{(m-۱)(r+\frac{۱}{۲}m\sigma^۲)\tau}N(g_۱(S_t,\tau))-Ke^{-r\tau}N(g_۲(S_t,\tau)),$$

که $\tau=T-t$ و

$$g_۱(x,\tau)=\frac{\ln(x/K^{\frac{۱}{m}})+(r+(m-\frac{۱}{۲})\sigma^۲)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},$$
$$g_۲(x,\tau)=g_۱(x,\tau)-m\sigma\sqrt{\tau}.$$

ملاحظه ۳.۳.۳. در رابطه‌ی فوق به ازای $m=۱$ فرمول ارزش‌گذاری برای اختیار خرید اروپایی حاصل می‌شود.

۴.۳ ارزش‌گذاری اختیار معامله توان تحت مدل بلک شولز تعمیم یافته

در این بخش به ارزش‌گذاری یک اختیار خرید توان تحت مدل بلک شولز تعمیم یافته پرداخته می‌شود. با یادآوری از بخش ۲.۲.۳ دارایی بدون ریسک و دارایی ریسکی در مدل بلک شولز تعمیم یافته از

دینامیک‌های زیر پیروی می‌کنند

$$dB_t = r_t B_t dt, \quad B(\circ) = \text{۱}, \tag{۵.۳}$$

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t. \tag{۶.۳}$$

که μ_t و σ_t توابع قطعی وابسته به زمان برای $t \geq \circ$ هستند و W_t یک حرکت براونی استاندارد است. جواب‌های معادلات فوق به‌ترتیب زیر حاصل می‌شود.

$$B_t = \exp\left(\int_\circ^t r(u)du\right),$$

$$S_t = S_\circ \exp\{\int_\circ^t \sigma(u)dW(u) + \int_\circ^t (\mu(u) - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\sigma^{\text{۲}}(u))du\}.$$

یک اختیار خرید توان mـ‌ام با بازدهی زیر در نظر می‌گیریم.

$$h_m(T) = (S_T^m - K)^+,$$

که K قیمت توافقی، T تاریخ سررسید و $m > \circ$ می‌باشد.
مطابق تعریف ۶.۵.۲ ارزش اختیار خرید توان mـ‌ام در زمان t به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$C_m(T, K) = \frac{D(T)}{D(t)} E^Q[(S_T^m - K)^+ \mid \mathcal{F}_t]. \tag{۷.۳}$$

ملاحظه ۱.۴.۳. در تعریف فوق، $\frac{D(T)}{D(t)} = \exp\left(-\int_t^T r(u)du\right)$ نرخ تنزیل در بازه زمانی $[t, T]$ است.

از طرفی طبق مطالب بخش ۲.۲.۳ فرآیند قیمت S_t تحت اندازه احتمال ریسک خنثی Q در معادله دیفرانسیل تصادفی زیر صدق می‌کند

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma_t S_t d\tilde{W}_t,$$

که جواب این معادله به صورت زیر است

$$S_t = S_\circ \exp\{\int_\circ^t \sigma(u)d\tilde{W}(u) + \int_\circ^t (r(u) - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\sigma^{\text{۲}}(u))du\}. \tag{۸.۳}$$

قبل از این‌که به ارزش‌گذاری بپردازیم، ابتدا لم زیر را مطرح می‌کنیم.

لم ۲.۴.۳. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال، $\mathcal{D}$ یک زیر σـ‌میدان از $\mathcal{F}$ باشد. همچنین فرض کنید متغیرهای تصادفی $X_\text{۱}, \dots, X_m$، $\mathcal{D}$ـ اندازه‌پذیر و متغیرهای تصادفی $X_{m+\text{۱}}, \dots, X_{m+n}$

مستقل از $\mathcal{D}$ باشند. فرض کنید $f(x_1,\dots,x_{m+n})$ یک تابع حقیقی از $m+n$ متغیر باشد. تابع $g(x_1,\dots,x_m)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$g(x_1,\dots,x_m)=E[f(x_1,\dots,x_m,X_{m+1},\dots,X_{m+n})]$$

آن‌گاه

$$E[f(X_1,\dots,X_m,X_{m+1},\dots,X_{m+n})\mid\mathcal{D}]=g(X_1,\dots,X_m)$$

برهان. به [۱۴] رجوع کنید. □

قضیه ۳.۴.۳. [۳۳] ارزش اختیار خرید توان mـام با قیمت توافقی K و تاریخ سررسید T از فرمول زیر به‌دست می‌آید.

$$C_m(T,K)=e^{\left(-\int_t^T r(u)du\right)}\left\{S_t^m e^{mn(t)+\frac{1}{2}m^2\bar{\sigma}_t^2}N\left(d_1(S_t,t,K^{\frac{1}{m}})\right)-KN\left(d_1(S_t,t,K^{\frac{1}{m}})\right)\right\}$$

برهان. تعریف می‌کنیم

$$\mathbb{I}_{\{S_T>K^{\frac{1}{m}}\}}=\begin{cases}1 & S_T>K^{\frac{1}{m}}\\ 0 & \text{o.w}\end{cases}$$

با استفاده از رابطه ۷.۳ ارزش اختیار به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}C_m(T,K)&=\frac{D(T)}{D(t)}E^Q[(S_T^m-K)^+\mid\mathcal{F}_t]\\&=\frac{D(T)}{D(t)}E^Q[(S_T^m-K)\mathbb{I}_{\{S_T>K^{\frac{1}{m}}\}}\mid\mathcal{F}_t]\\&=\frac{D(T)}{D(t)}\left(E^Q[S_T^m\mathbb{I}_{\{S_T>K^{\frac{1}{m}}\}}\mid\mathcal{F}_t]-KQ(\{S_T>K^{\frac{1}{m}}\}\mid\mathcal{F}_t)\right).\end{aligned}\quad(۹.۳)$$

از رابطه ۸.۳ داریم

$$S_T=S_te^{X_t},\quad X_t=\int_t^T\sigma(u)d\tilde{W}(u)+\int_t^T(r(u)-\frac{1}{2}\sigma^2(u))du$$

با توجه به این‌که $X_t\sim N(n(t),\bar{\sigma}^2(t))$ و در آن

$$n(t)=\int_t^T(r(u)-\frac{1}{2}\sigma^2(u))du,\quad \bar{\sigma}^2(t)=\int_t^T\sigma^2(u)du.$$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$X_t=n(t)+\bar{\sigma}(t)Z,\quad Z\sim N(0,1),$$

که متغیر Z مستقل از $\mathcal{F}_t$ است.

از نامساوی $S_T>K^{\frac{1}{m}}$ در ۹.۳ با فرض $x=S_t$ برای هر z داریم

$$xe^{n(t)+\bar{\sigma}(t)z}>K^{\frac{1}{m}}.$$

از رابطه فوق داریم

$$z > -\frac{\ln(x/K^{\frac{1}{m}}) + n(t)}{\bar{\sigma}(t)} := -d_2(x, t, K^{\frac{1}{m}})$$

بنابراین

$$\begin{aligned} Q\{S_T > K^{\frac{1}{m}} \mid \mathcal{F}_t\} &= Q\{Z > -d_2(x, t, K^{\frac{1}{m}})\} \\ &= Q\{-Z < d_2(x, t, K^{\frac{1}{m}})\} \\ &= N(d_2(x, t, K^{\frac{1}{m}})) \end{aligned} \tag{۱۰.۳}$$

از طرفی دیگر، از رابطه ۸.۳ داریم

$$S_t = S_0 \exp\left\{\int_0^t \sigma(u)d\tilde{W}(u) + \int_0^t (r(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u))du\right\},$$

و

$$S_T = S_0 \exp\left\{\int_0^T \sigma(u)d\tilde{W}(u) + \int_0^T (r(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u))du\right\},$$

پس

$$\frac{S_T}{S_t} = \exp\left\{\int_t^T \sigma(u)d\tilde{W}(u) + \int_t^T (r(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u))du\right\}.$$

برای محاسبه امید ریاضی در ۹.۳ با استفاده از لم ۲.۴.۳ داریم

$$\begin{aligned} E^Q[S_T^m \mathbb{I}_{\{S_T > K^{\frac{1}{m}}\}} \mid \mathcal{F}_t] &= E^Q[S_t^m e^{mn(t)+m\bar{\sigma}(t)Z} \mathbb{I}_{\{S_t e^{n(t)+\bar{\sigma}(t)Z} > K^{\frac{1}{m}}\}} \mid \mathcal{F}_t] \\ &= g(S_t, t) \end{aligned}$$

که تابع $g(x,t)$ به صورت زیر حاصل می‌شود

$$\begin{aligned} g(x,t) &= E^Q[x_t^m e^{mn(t)+m\bar{\sigma}(t)Z} \mathbb{I}_{\{xe^{n(t)+\bar{\sigma}(t)Z} > K^{\frac{1}{m}}\}}] \\ &= \int_{-d_2(x,t,K^{\frac{1}{m}})}^{\infty} x^m e^{mn(t)+m\bar{\sigma}(t)z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\ &= x^m e^{mn(t)+\frac{1}{2}m^2\bar{\sigma}^2(t)} \int_{-d_2(x,t,K^{\frac{1}{m}})}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-m\bar{\sigma}(t))^2} dz \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $y = z - m\bar{\sigma}(t)$ و

$$d_1(x,t,K^{\frac{1}{m}}) := d_2(x,t,K^{\frac{1}{m}}) + m\bar{\sigma}(t) = \frac{\ln(x/K^{\frac{1}{m}}) + n(t) + m\bar{\sigma}^2(t)}{\bar{\sigma}(t)}$$

پس

$$\begin{aligned} g(x,t) &= x^m e^{mn(t)+\frac{1}{2}m^2\bar{\sigma}^2(t)} \int_{-d_1(x,t,K^{\frac{1}{m}})}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= x^m e^{mn(t)+\frac{1}{2}m^2\bar{\sigma}^2(t)} \int_{-\infty}^{d_1(x,t,K^{\frac{1}{m}})} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= x^m e^{mn(t)+\frac{1}{2}m^2\bar{\sigma}^2(t)} N(d_1(x,t,K^{\frac{1}{m}})) \end{aligned}$$

بنابراین امید به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$E^Q[S_T^m \mathbb{I}_{\{S_T>K^{\frac{1}{m}}\}} \mid \mathcal{F}_t] = S_t^m e^{mn(t)+\frac{1}{2}m^2\bar{\sigma}^2(t)} N(d_1(S_t, t, K^{\frac{1}{m}})). \qquad (۱۱.۳)$$

با جایگذاری روابط ۱۰.۳ و ۱۱.۳ در ۹.۳ فرمول قیمت‌گذاری اختیار خرید توان به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$C_m(T,K) = \frac{D(T)}{D(t)} \left\{ S_t^m e^{mn(t)+\frac{1}{2}m^2\bar{\sigma}_t^2} N\left(d_1(S_t, t, K^{\frac{1}{m}})\right) - KN\left(d_1(S_t, t, K^{\frac{1}{m}})\right) \right\}.$$

□

فصل ۴

ارزش‌گذاری اختیار معامله توان تحت مدل تلاطم تصادفی هستون

۱.۴ مقدمه

در این فصل ابتدا به معرفی مدل هستون می‌پردازیم و سپس فرمول‌های نیمه‌تحلیلی برای اختیار معاملات توان با شرط وجود گشتاور متناهی توان mـ‌ام قیمت دارایی پایه ($E(S_T^m) < \infty$) به‌دست می‌آوریم، در حالتی که توان mـ‌ام قیمت دارایی پایه گشتاور نامتناهی داشته باشد با استفاده از تقریب‌های عددی به ارزش‌گذاری اختیار معاملات می‌پردازیم و در بخش بعدی به طور مختصر قیمت‌گذاری به روش شبیه‌سازی مونت کارلو را معرفی کرده، در نهایت قیمت‌های اختیار معامله توان تحت مدل هستون را با نتایج عددی معرفی و مقایسه می‌کنیم.

۲.۴ مدل هستون

همان‌طور که در فصل قبل ذکر شد، مدل بلک ـ شولز انقلابی در شیوه‌ی قیمت‌گذاری اختیار معامله به وجود آورده است ولی این مدل دارای نقص‌هایی می‌باشد. فرض اساسی در مدل بلک ـ شولز این است که توزیع احتمال قیمت دارایی پایه (سهام) نرمال است [۷]، در صورتی که شواهد تجربی در بازارهای مالی واقعی نشان می‌دهند که فرآیند قیمت دارایی در مقایسه با توزیع نرمال، دارای دم کلفت‌تر و کشیدگی بیش‌تری نسبت به نرمال است . از طرف دیگر، در مدل بلک ـ شولز تلاطم قیمت سهام

ثابت انگاشته شده و این در حالی است که الگوهای تلاطم مشاهده شده در قیمت‌های اختیار مبادله شده در بازار، گواه از تصادفی بودن تلاطم دارند[۷]. بعد از مدل بلک ـ شولز متخصصان زیادی برای رهایی از این نقص‌ها مدل‌هایی برای دینامیک‌های تلاطم ارائه کردند که از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به هال و وایت [۱][۲۱]، اسکات [۲][۲۸]، ویگینس [۳][۳۱]، استین [۴][۲۹]، ملینو و ترنبول [۵][۲۴] و هستون [۶][۱۹] اشاره کرد. مطالعات تجربی زیادی از جمله باکشی و همکاران [۷][۶]، بایلی و مورانا [۸][۵] و کلارک و دیویگ [۹][۱۳] برتری مدل‌های تلاطم تصادفی را نشان داده‌اند.
در بین این مدل‌های تلاطم تصادفی، مدل هستون یکی از معروف‌ترین مدل‌های تلاطم تصادفی است. زیرا در این مدل، تلاطم قیمت دارایی ثابت نبوده بلکه از یک فرآیند تصادفی تبعیت می‌کند، به گونه‌ای که فرآیند قیمت دارایی، تلاطم (نوسانات) منفی را نمی‌پذیرد. از ویژگی دیگر مدل هستون وجود یک راه‌حل تحلیلی برای قیمت‌گذاری اوراق معامله‌ای است که فرض می‌شود دارایی پایه آن از فرآیند هستون پیروی می‌کند. مدل هستون اولین بار در سال ۱۹۹۳ توسط استون هستون [۱۰] معرفی شد.
فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ فضای احتمال و $\{\mathcal{F}_t\}_t$ فیلتر استاندارد براونی باشد. همچنین فرض کنید فرآیند قیمت دارایی پایه S_t در لحظه‌ی t، تحت اندازه ریسک خنثی Q از مدل زیر تبعیت می‌کند.

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t, \tag{۱.۴}$$

$$dV_t = k(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t} dZ_t, \tag{۲.۴}$$

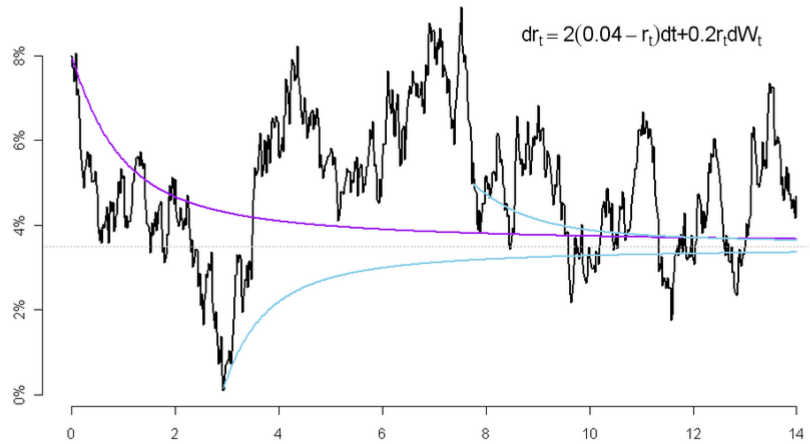
$$dZ_t dW_t = \rho dt, \tag{۳.۴}$$

که در آن r نرخ بهره، $\sqrt{V_t}$ فرآیند تلاطم، θ میانگین بلندمدت فرآیند تلاطم، k نرخ سرعت بازگشت به میانگین (سرعتی را مشخص می‌کند که در آن منحنی‌ها پیرامون میانگین بلندمدت جمع می‌گردند)، σ واریانس فرآیند تلاطم و ، W_t و Z_t دو فرآیند براونی وابسته با ثابت همبستگی $\rho \in (-۱, ۱)$ می‌باشند. همچنین فرض شده است که پارامترهای k، θ و σ ثابت‌های مثبتی هستند. از طرفی داریم

$$W_t = \rho Z_t + \sqrt{۱ - \rho^۲}\hat{W}_t, \tag{۴.۴}$$

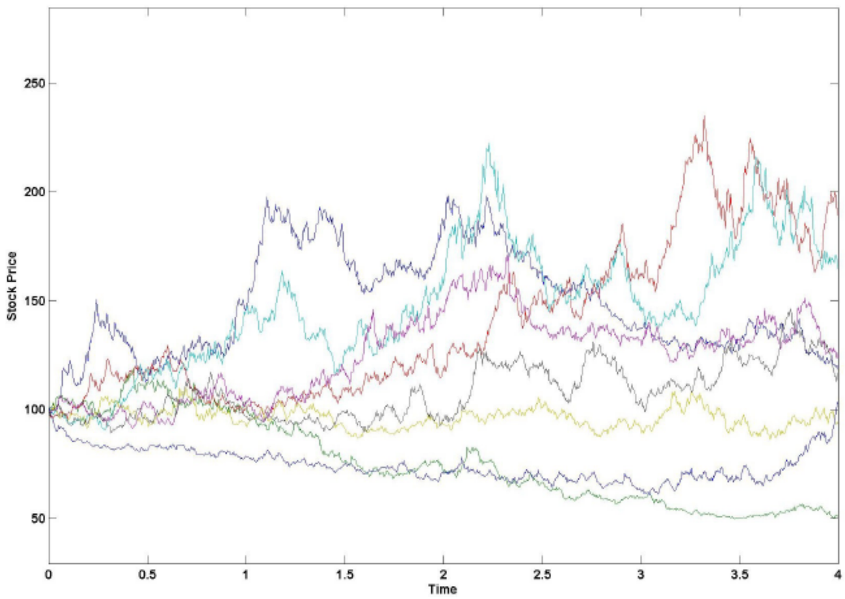
که $\hat{W}_t$ یک فرآیند براونی استاندارد مستقل از Z_t است.
در مدل هستون برخلاف مدل بلک ـ شولز تلاطم ثابت نیست بلکه تصادفی است و از یک فرآیند تصادفی ریشه دوم بازگشت به میانگین پیروی می‌کند. نمونه‌ای از فرآیند بازگشت به میانگین در شکل (۱.۴) ملاحظه می‌شود.

[۱] Hull and White
[۲] Scott
[۳] Wiggins
[۴] Stein
[۵] Melino and Turnbull
[۶] Heston
[۷] Bakshi et al
[۸] Baillie and Morana
[۹] Clark and Davig
[۱۰] Steven Heston



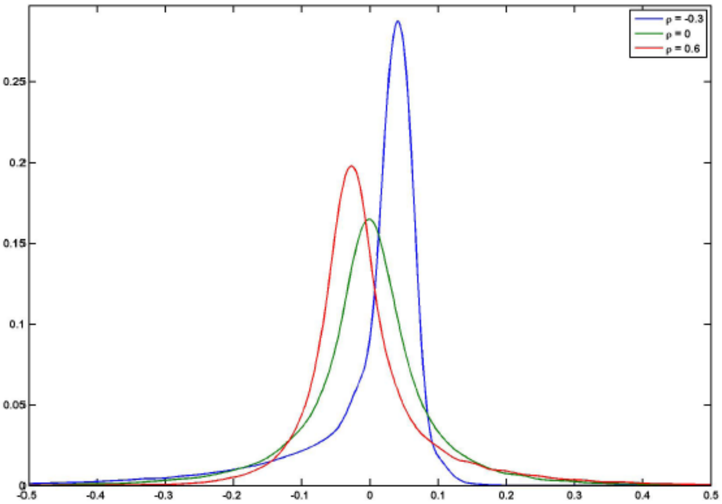
شکل ۱.۴: نمونه‌ای از فرآیند بازگشت به میانگین

شکل (۲.۴) ده نمونه از فرآیند قیمت دارایی تحت مدل هستون با پارامترهای $S_0 = ۱۰۰$، $k = ۱/۵$، $V_0 = \theta = ۰/۰۴$، $\sigma_V = ۰/۲$ و $\rho = ۰/۸$ نشان می‌دهد [۲۷] .

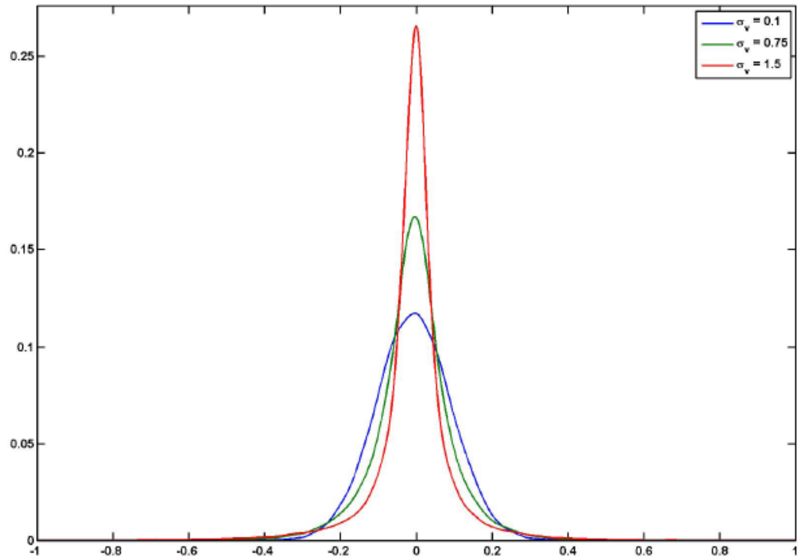


شکل ۲.۴: ده مسیر از فرآیند دارایی تحت مدل هستون

مقدار پارامتر ρ، چولگی روی توزیع بازده قیمت دارایی را به همراه خواهد داشت. همان‌طور که در شکل (۳.۴) ملاحظه می‌نمایید مقدار منفی ρ باعث ایجاد چولگی منفی در توزیع بازده قیمت دارایی و به همین ترتیب مقدار مثبت ρ باعث ایجاد چولگی مثبت در توزیع بازده قیمت می‌شود [۲۷] .
پارامتر σ_v کشیدگی در توزیع بازده‌ها را نشان می‌دهد، با توجه به شکل (۴.۴) هر چقدر ارزش σ_v بیشتر شود، کشیدگی بیشتر و در نتیجه باعث نوسانات بیشتر فرآیند تلاطم می‌شود[۲۷] .



شکل ۳.۴: تأثیر ρ روی توزیع بازده قیمت سهام تحت مدل هستون



شکل ۴.۴: تأثیر σ_V روی توزیع بازده قیمت سهام تحت مدل هستون

۳.۴ ارزش‌گذاری اختیار معامله توان تحت مدل هستون

اسر[۱۱][۱۵] و ماکووسچی و گیوتارد–پینن [۱۲][۲۳] فرمول‌های ارزش‌گذاری برای اختیار معاملات توان و انواع مختلف آن در یک ساختار کلی به‌دست آورده‌اند، اما این فرمول‌های ارزش‌گذاری برای اختیار توان تحت مدل هستون در عمل مورد استفاده قرار نمی‌گیرند. در این بخش فرمول‌هایی از ارزش‌گذاری

[۱۱] Esser

[۱۲] Macovschi and Quittard-Pinion

اختیار معاملات توان تحت مدل هستون می‌یابیم که برای هر مقدار $m \geq ۱$ جواب داشته باشند.
ارزش‌های اختیار معاملات توان تحت اندازه ریسک خنثی Q به صورت تعریف می‌شوند:

- ارزش اختیار خرید توان mـام با قیمت توافقی K و تاریخ سررسید T

$$C_m(T,K) \equiv e^{-rT}E^Q\left[\max\{S_T^m - K^m, ۰\}\right]. \quad (۵.۴)$$

- ارزش اختیار فروش توان mـام با قیمت توافقی K و تاریخ سررسید T

$$P_m(T,K) \equiv e^{-rT}E^Q\left[\max\{K^m - S_T^m, ۰\}\right]. \quad (۶.۴)$$

- ارزش اختیار خرید توان mـام سقف با قیمت توافقی K، تاریخ سررسید T و سقف L

$$C_{m,cap}(T,K) \equiv e^{-rT}E^Q\left[\min\{\max\{S_T^m - K^m, ۰\}, L\}\right]. \quad (۷.۴)$$

با توجه به تعریف ارزش‌گذاری اختیار خرید توان ضروری است که شرط وجود گشتاور mـام متناهی دارایی پایه، تحت اندازه ریسک خنثی Q مورد بررسی قرار گیرد. در صورتی که برای ارزش‌گذاری اختیار فروش توان و اختیار خرید توان سقف نیازی به وجود این شرط نیست چون این دو اختیار بازدهی کراندار دارند.

۱.۳.۴ ارزش‌گذاری اختیار معامله توان وقتی که $E^Q[S_T^m] < \infty$

برخلاف اکثر مدل‌های تصادفی، در مدل هستون بررسی وجود گشتاور متناهی از قیمت‌های دارایی‌ها از مرتبه بالاتر از یک دشوار است. بنابراین ابتدا با استفاده از خاصیت انفجار لحظه‌ای [۱۳] [۴] شرایط وجود گشتاور متناهی برحسب پارامترهای مدل مورد نظر، را بیان می‌کنیم و سپس با کمک این شرایط فرمول‌هایی برای قیمت‌های اختیار توان تحت مدل هستون، با روش‌های تغییر اندازه و فرمول فوریه معکوس[۱۴][۱۷] به‌دست می‌آوریم که فرمول‌های ارزش‌گذاری تحلیلی تحت شرط وجود گشتاور متناهی قیمت دارایی پایه معتبر و کاربردی می‌باشند.
همان‌طور که در ابتدای این بخش گفته شد، فرمول‌های قیمت‌گذاری برای اختیار معاملات توان در یک ساختار کلی به‌دست آمده‌اند که شامل مدل هستون نیز می‌باشند. در این‌جا یکی از این فرمول‌های ارزش‌گذاری را بیان می‌کنیم و با مثال نشان می‌دهیم که این فرمول در عمل کاربردی ندارد. ارزش اختیار فروش توان mـام با قیمت توافقی K و تاریخ سررسید T به صورت زیر است [۲۳، ۱۵].

$$\begin{aligned} P_m(T,K) &= e^{-rT}\left[\frac{K^m - \psi_T(m)}{۲}\right. \\ &+ \left.\frac{۱}{\pi}\int_۰^\infty Re\left((\psi_T(m+i\zeta) - K^m\psi_T(i\zeta))\frac{e^{-i\zeta\ln K}}{i\zeta}\right)d\zeta\right], \end{aligned} \quad (۸.۴)$$

[۱۳] Moment explosion property
[۱۴] Fourier inversion

که در آن $\psi_T(.)$ تابع مولد گشتاور از $\ln S_T$ نسبت به اندازه ریسک خنثی Q است. فرمولی ساده برای تابع مولد گشتاور $\psi_T(.)$ به صورت زیر بیان می‌کنیم [۳، ۱۹].

$$\psi_T(s) = \exp(A_T(s) + B_T(s)v_0 + s\ln S_0), \tag{۹.۴}$$

که

$$\begin{aligned} A_T(s) &= rTs + \frac{k\theta}{\sigma^2}\Big\{(k-\rho\sigma s+\sqrt{v(s)})T \\ &- 2\ln\left(-\frac{k-\rho\sigma s-\sqrt{v(s)}-(k-\rho\sigma s+\sqrt{v(s)})e^{\sqrt{v(s)}T}}{2\sqrt{v(s)}}\right)\Big\}, \end{aligned} \tag{۱۰.۴}$$

$$B_T(s) = \frac{(k-\rho\sigma s)^2 - v(s)}{\sigma^2}\left(\frac{1-e^{\sqrt{v(s)}T}}{k-\rho\sigma s-\sqrt{v(s)}-(k-\rho\sigma s-\sqrt{v(s)})e^{\sqrt{v(s)}T}}\right) \tag{۱۱.۴}$$

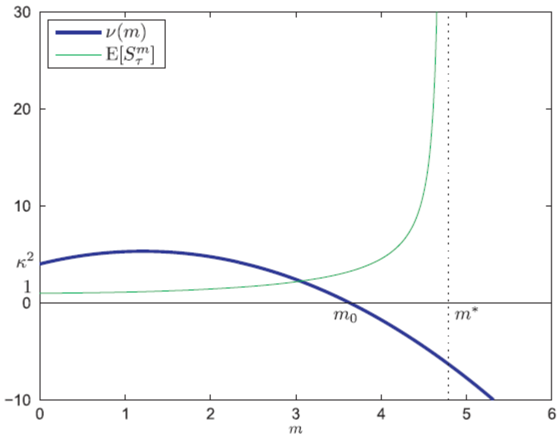
$$v(s) = (\rho\sigma s - k)^2 + \sigma^2(s - s^2). \tag{۱۲.۴}$$

با توجه به روابط فوق برای محاسبه ارزش اختیار فروش توان باید تابع مولد گشتاور، معادله رابطه (۹.۴) را به ازای هر s محاسبه کنیم که لازم است ابتدا مقدار $\sqrt{v(s)}$ را به ازای s دلخواه به‌دست آوریم، به‌گونه‌ای که $v(s)$ مقدار منفی نباشد. در صورتی که با توجه به معادله رابطه (۱۲.۴)، s هر مقداری را نمی‌تواند بپذیرد، s مقادیر حقیقی ۰ یا ۱ و مقادیر مختلط با بخش حقیقی ۰ یا ۱ را با اطمینان کامل می‌پذیرد و به ازای هر عدد دلخواه s معادله (۱۲.۴) مورد استفاده واقع نمی‌شود. به عبارت دیگر، تابع مولد گشتاور به ازای هر s جواب ندارد، به همین دلیل است که معادله رابطه (۸.۴) در عمل کاربرد ندارد.

مثال ۱.۳.۴. [۲۲] مجموعه‌ای از پارامترهای $k = 2$، $\theta = 0/09$، $\sigma = 1$ و $\rho = -0/3$ را در نظر می‌گیریم. همچنین قرار می‌دهیم $r = 0/05$، $v_0 = 0/09$، $T = 2$ و $S_0 = 1$. شکل زیر به ازای mهای متفاوت مقادیر $v(m)$ و $E^Q[S_T^m]$ را نشان می‌دهد. در اینجا $m^* = inf\{m \geq 0 : E^Q[S_T^m] < \infty\}$ تعریف می‌کنیم. برای محاسبه مقادیر $E^Q[S_T^m]$ از فرمولی که در ادامه برای تابع مولد گشتاور داده می‌شود، استفاده شده است.

با توجه به شکل واضح است که اگر $m = 0$ آن‌گاه $v(m)$ مقدار $k^2 > 0$ می‌باشد، به ازای $m = m_0$، $v(m) = 0$ و اگر $m_0 < m < m^*$ باشد آن‌گاه $v(m)$ مقداری منفی می‌باشد. در این مثال $m_0 = 3/6289$ و $m^* = 4/7841$. این مثال نشان می‌دهد که $v(m)$ به ازای هر m جواب ندارد لذا ارزش اختیار فروش معرفی شده در عمل کاربردی ندارد.

با توجه به توضیحات ذکر شده در بالا، در ادامه فرمول‌های قیمت‌گذاری اختیار معاملات توان mــ‌ام را تحت مدل هستون وقتی که $E^Q[S_T^m] < \infty$ به‌دست می‌آوریم.



شکل ۵.۴: نمودارهای $v(m)$ و $E^Q[S_T^m]$ به ازای مقادیر مختلف m .

لم ۲.۳.۴. (شرایط وجود گشتاور mام متناهی قیمت دارایی پایه)
فرض کنید $m > ۱$. همچنین فرض کنید

$$\gamma = \frac{۲(\rho\sigma m - k)}{\sigma^۲},$$

$$\delta = \frac{m(m-۱)}{\sigma^۲},$$

$$D = \gamma^۲ - ۴\delta,$$

$$\beta = \frac{\sqrt{\mid D \mid}}{۲},$$

آن‌گاه داریم $E^Q[S_T^m] < \infty$ اگر و تنها اگر شرایط زیر برقرار باشد:

$$۱.\ D > ۰ \quad \text{و} \quad \gamma < ۰,$$

$$۲.\ D > ۰ \quad \text{،} \quad \gamma > ۰ \quad \text{و} \quad T < \frac{۱}{\sigma^۲\beta}\ln\frac{\frac{\gamma}{۲}+\beta}{\frac{\gamma}{۲}-\beta},$$

$$۳.\ D < ۰ \quad \text{و} \quad T < \frac{۲}{\sigma^۲\beta}cot^{-۱}\frac{\gamma}{۲\beta},$$

$$۴.\ D = ۰ \quad \text{و} \quad \sigma^۲\gamma T < ۴,$$

که $cot^{-۱}$ روی برد $(۰,\pi)$ تعریف شده است.

برهان. به [۴] رجوع کنید. □

ملاحظه ۳.۳.۴. با استفاده از لم ۲.۳.۴ داریم:
۱. برای هر $m > ۱$ وجود دارد $T^* \in (۰,\infty]$ که $E^Q[S_T^m] < \infty$ اگر و تنها اگر $T < T^*$.
۲. برای هر $T > ۰$ وجود دارد $m^* \in (۱,\infty]$ که $E^Q[S_T^m] < \infty$ اگر و تنها اگر $m < m^*$.

تعریف ۴.۳.۴. فرض کنید $\psi_T(s)$ تابع مولد گشتاور از $\ln S_T$ تحت اندازه احتمال Q باشد. یعنی

$$\psi_T(s) = E^Q[e^{s\ln S_T}] \tag{۱۳.۴}$$

برای اعداد مختلط s.

لم ۵.۳.۴. فرض کنید $E^Q[S_T^m] < \infty$، اگر $0 \leq Re(s) \leq m$
آن‌گاه $E^Q \mid e^{s\ln S_T} \mid < \infty$ و

$$\psi_T(s) = e^{z_0(s)} E^Q[e^{z_1(s)\int_0^T v_u du + z_2(s) v_T}], \tag{۱۴.۴}$$

که

$$z_0(s) = \frac{s(\sigma \ln S_0 - \rho v_0 + (r\sigma - k\rho\theta)T}{\sigma}, \tag{۱۵.۴}$$

$$z_1(s) = \frac{s^2\sigma(1-\rho^2) + s(2k\rho - \sigma)}{2\sigma}, \tag{۱۶.۴}$$

$$z_2(s) = \frac{s\rho}{\sigma}. \tag{۱۷.۴}$$

برهان. داریم

$$\begin{aligned} e^{s\ln S_T} &= e^{(Re(s)+iIm(s))\ln S_T} = e^{Re(s)\ln S_T}.e^{iIm(s)\ln S_T} \\ &= e^{Re(s)\ln S_T}(\cos(Im(s)\ln S_T) + i\sin(Im(s)\ln S_T)) \end{aligned}$$

همچنین از رابطه فوق داریم

$$\mid e^{s\ln S_T} \mid = e^{Re(s)\ln S_T}\sqrt{\cos(Im(s)\ln S_T)^2 + \sin(Im(s)\ln S_T)^2} = S_T^{Re(s)}$$

بنابراین با توجه به فرض، این‌که $E^Q[S_T^m] < \infty$ و $0 \leq Re(s) \leq m$ داریم

$$E^Q \mid e^{s\ln S_T} \mid = E^Q[S_T^{Re(s)}] \leq E^Q[S_T^m] < \infty.$$

قرار می‌دهیم $X_t = \ln S_t$ طبق فرمول ایتو داریم

$$dX_t = (r - \frac{1}{2}V_t)dt + \sqrt{V_t}dW_t,$$

با جای‌گذاری رابطه ۴.۴ داریم

$$dX_t = (r - \frac{1}{2}V_t)dt + \rho\sqrt{V_t}dZ_t + \sqrt{1-\rho^2}\sqrt{V_t}d\hat{W}_t,$$

بنابراین داریم

$$\ln S_T = \ln S_0 + \int_0^T r - \frac{1}{2} V_t dt + \rho \int_0^T \sqrt{V_t} dZ_t + \sqrt{1-\rho^2} \int_0^T \sqrt{V_t} d\hat{W}_t \qquad (۱۸.۴)$$

با استفاده از رابطه ۲.۴ خواهیم داشت

$$\sqrt{V_t} dZ_t = \frac{1}{\sigma} dV_t - \frac{k(\theta - V_t)}{\sigma} dt \qquad (۱۹.۴)$$

با جای‌گذاری رابطه ۱۹.۴ در رابطه ۱۸.۴ داریم

$$\begin{aligned} \ln S_T &= \ln S_0 + \frac{\rho}{\sigma}(V_T - V_0) + (r - \frac{\rho k \theta}{\sigma})T + \int_0^T (\frac{\rho k}{\sigma} - \frac{1}{2}) V_t dt \\ &+ \sqrt{1-\rho^2} \int_0^T \sqrt{V_t} d\hat{W}_t \end{aligned} \qquad (۲۰.۴)$$

فرض می‌کنیم $\mathcal{G}$، σـمیدان تولیدشده توسط $\{Z_t; 0 \leq t \leq T\}$ باشد. با استفاده از رابطه ۲۰.۴ و با توجه به فرض اگر $0 \leq Re(s) \leq m$ آن‌گاه

$$\begin{aligned} \psi_T(s) &= E^Q[e^{s \ln S_T}] = E^Q[E^Q[e^{s \ln S_T} \mid \mathcal{G}]] \quad (\text{خواص امید شرطی}) \\ &= e^{s(\sigma \ln S_0 - \rho V_0 + (r\sigma - \rho k \theta)T)/\sigma} E^Q \left[e^{s(2\rho k - \sigma)/2\sigma \int_0^T V_t dt + (s\rho/\sigma) V_T} E^Q[e^{\alpha} \mid \mathcal{G}] \right], \end{aligned} \qquad (۲۱.۴)$$

که در آن

$$E^Q[e^{\alpha} \mid \mathcal{G}] = E^Q[e^{s\sqrt{1-\rho^2} \int_0^T V_t d\hat{W}_t} \mid \mathcal{G}].$$

از طرف دیگر

$$E^Q[e^{s\sqrt{1-\rho^2} \int_0^T V_t d\hat{W}_t} \mid \mathcal{G}] = e^{s^2(1-\rho^2)/2 \int_0^T V_t dt}. \qquad (۲۲.۴)$$

بنابراین با جای‌گذاری رابطه ۲۲.۴ در رابطه ۲۱.۴ حکم برقرار است. □

گزاره ۶.۳.۴. فرض کنید

$$\mathcal{D}_T \equiv \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : E^Q[e^{Re(z_1) \int_0^T v_t dt + Re(z_2) v_T}] < \infty\}, \qquad (۲۳.۴)$$

و توابع $F_T, \tilde{F}_T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$F_T(z_1, z_2) \equiv \begin{cases} (k - z_2\sigma^2) \dfrac{\sinh\left(\frac{T}{2}\sqrt{k^2 - 2z_1\sigma^2}\right)}{\sqrt{k^2 - 2z_1\sigma^2}} & \text{if } z_1 \neq \dfrac{k^2}{2\sigma^2}, \\ + \cosh\left(\frac{T}{2}\sqrt{k^2 - 2z_1\sigma^2}\right) & \\ 1 + \frac{T}{2}(k - z_2\sigma^2) & \text{if } z_1 = \dfrac{k^2}{2\sigma^2}, \end{cases}$$

$$\tilde{F}_T(z_1, z_2) \equiv \frac{\sqrt{k^2 - 2z_1\sigma^2}}{2} \sinh\left(\frac{T}{2}\sqrt{k^2 - 2z_1\sigma^2}\right) + \frac{k - z_2\sigma^2}{2} \cosh\left(\frac{T}{2}\sqrt{k^2 - 2z_1\sigma^2}\right).$$

در این صورت داریم

الف– برای هر $(z_1, z_2) \in \mathcal{D}_T$، داریم $F_T(z_1, z_2) \neq 0$. آرگومان F_T روی $\mathcal{D}_T$ یکتا است و دارای خواص زیر می‌باشد:

(۱) اگر z_1 حقیقی و $(z_1, z_2) \in \mathcal{D}_T$ آن‌گاه $\frac{-\pi}{2} < \arg F_T(z_1, z_2) < \frac{\pi}{2}$.

(۲) $\arg F_T$ روی $\mathcal{D}_T$ پیوسته است.

ب– با توجه به تعریف $\arg F_T$ روی $\mathcal{D}_T$ در بالا، برای $(z_1, z_2) \in \mathcal{D}_T$ داریم

$$E^Q[e^{z_1 \int_0^T v_t \, dt + z_2 v_T}] = \exp\left(\frac{kV_0 + k^2\theta T}{\sigma^2} - \frac{2V_0}{\sigma^2} \frac{\tilde{F}_T(z_1, z_2)}{F_T(z_1, z_2)} - \frac{2k\theta}{\sigma^2} \ln F_T(z_1, z_2) \right).$$

برهان. به [۲۲] رجوع کنید. □

با ترکیب لم ۵.۳.۴ و گزاره ۶.۳.۴ تابع مولد گشتاور از لگاریتم قیمت دارایی را در صورت وجود به صورت زیر بیان می‌کنیم.

قضیه ۷.۳.۴. [۲۲] **(تابع مولد گشتاور)**

فرض کنید $E^Q(S_T^m) < \infty$ و s عددی مختلط با شرط $0 \leq Re(s) \leq m$ باشد. با یادآوری تعاریف $z_1(s)$ و $z_2(s)$ در روابط ۱۶.۴ و ۵.۳.۴ و همچنین تعریف $\mathcal{D}_T$، ۲۳.۴، شرایط زیر برقرارند.

الف– $(z_1(s), z_2(s)) \in \mathcal{D}_T$.

ب– تعریف می‌کنیم $H_T, \tilde{H}_T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ به صورت

$$H_T \equiv F_T(z_1(s), z_2(s)),$$

$$\tilde{H}_T \equiv \tilde{F}_T(z_1(s), z_2(s)).$$

آن‌گاه $\arg H_T$ روی $\{s \in \mathbb{C} : 0 \leq Re(s) \leq m\}$ یکتا تعریف شده به‌طوری که

(۱) اگر s حقیقی باشد آن‌گاه $\arg H_T(s) = 0$.

(۲) $\arg H_T$ روی $\{s \in \mathbb{C} : 0 \leq Re(s) \leq m\}$ پیوسته است.

ج– برای عدد مختلط s با $0 \leq Re(s) \leq m$ داریم

$$\psi_T(s) = E^Q[e^{s \ln S_T}] = \exp\left(-a \frac{\tilde{H}_T(s)}{H_T(s)} - b \ln H_T(s) + cs + d \right),$$

که

$$\begin{aligned} a &= \frac{2V_0}{\sigma^2}, \\ b &= \frac{2k\theta}{\sigma^2}, \\ c &= \ln S_0 + \frac{(r\sigma - k\rho\theta)T - \rho V_0}{\sigma}, \\ d &= \frac{kV_0 + k^2\theta T}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

برهان. به [۲۲] رجوع کنید. □

ملاحظه ۸.۳.۴. توابع H_T و $\tilde{H_T}$ در قضیه ۷.۳.۴ می‌توانند به صورت زیر تعریف شوند

$$H_T \equiv \begin{cases} \cosh\left(\frac{T}{۲}\alpha(s)\right) + (k - s\rho\sigma)\dfrac{\sinh\left(\frac{T}{۲}\alpha(s)\right)}{\alpha(s)} & \text{if } \alpha(s) \neq ۰, \\ ۱ + \frac{T}{۲}(k - s\rho\sigma) & \text{if } \alpha(s) = ۰, \end{cases}$$

$$\tilde{H_T} \equiv \frac{\alpha(s)}{۲}\sinh\left(\frac{T}{۲}\alpha(s)\right) + \frac{k - s\rho\sigma}{۲}\cosh\left(\frac{T}{۲}\alpha(s)\right),$$

که

$$\alpha(s) = \sqrt{k^۲ - ۲z_۱(s)\sigma^۲} = \sqrt{k^۲ - s^۲\sigma^۲(۱ - \rho^۲) - s\sigma(۲k\rho - \sigma)}.$$

قضیه ۹.۳.۴. [۲۲] **(فرمول‌های تحلیلی برای قیمت‌های اختیار معامله توان)**
فرض کنید $E^Q(S_T^m) < \infty$. ارزش‌های اختیار معامله توان تعریف شده در روابط ۵.۴، ۶.۴ و ۷.۴ به صورت زیر به‌دست می‌آیند

الف_ ارزش اختیار خرید توان m_ام با قیمت توافقی K و تاریخ سررسید T

$$\begin{aligned} C_m(T,K) &= e^{-rT}\left[\frac{\psi_T(m) - K^m}{۲}\right. \\ &+ \left.\frac{۱}{\pi}\int_۰^\infty Re\left((\psi_T(m+i\zeta) - K^m\psi_T(i\zeta))\frac{e^{-i\zeta\ln K}}{i\zeta}\right)d\zeta\right], \end{aligned} \quad (۲۴.۴)$$

ب_ ارزش اختیار فروش توان m_ام با قیمت توافقی K و تاریخ سررسید T

$$\begin{aligned} P_m(T,K) &= e^{-rT}\left[\frac{K^m - \psi_T(m)}{۲}\right. \\ &+ \left.\frac{۱}{\pi}\int_۰^\infty Re\left((\psi_T(m+i\zeta) - K^m\psi_T(i\zeta))\frac{e^{-i\zeta\ln K}}{i\zeta}\right)d\zeta\right], \end{aligned} \quad (۲۵.۴)$$

ج_ ارزش اختیار فروش توان m_ام سقف با قیمت توافقی K، تاریخ سررسید T و سقف L

$$C_{m,cap}(T,K,L) = C_m(T,K) - C_m(T,M), \quad (۲۶.۴)$$

که $M = (K^m + L)^{\frac{۱}{m}}$.

برهان. الف_ همان‌طور که گفته شد، ارزش اختیار خرید توان m_ام با قیمت توافقی K و تاریخ سررسید T تحت اندازه ریسک خنثی Q به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} C_m(T,K) &= e^{-rT}E^Q\left[(S_T^m - K^m)^+\right] \quad (۲۷.۴) \\ &= e^{-rT}\left[E^Q\left[S_T^m \mathbb{I}_{S_T^m > K^m}\right] - K^m Q(S_T^m > K^m)\right] \end{aligned}$$

با استفاده از قضیه مشتق رادون_نیکودیم فضای احتمال Q^m را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\frac{dQ^m}{dQ} = \frac{S_T^m}{E^Q[S_T^m]}.$$

بنابراین داریم

$$C_m(T,K) = e^{-rT}\left[Q^m(S_T > K)E^Q[S_T^m] - K^m Q(S_T > K)\right]. \qquad (۲۸.۴)$$

چون $E^Q[e^{i\zeta \ln S_T}] = \psi_T(i\zeta)$ و $E^{Q^m}[e^{i\zeta \ln S_T}] = \psi_T(m+i\zeta)/\psi_T(m)$ ، فرمول معکوس توابع مشخصه به صورت زیر به‌دست می‌آیند

$$\begin{aligned} Q(S_T > K) &= \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\infty} Re\left(\psi_T(i\zeta)\frac{e^{-i\zeta \ln K}}{i\zeta}\right)d\zeta, & (۲۹.۴)\\ Q^m(S_T > K) &= \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{\infty} Re\left(\frac{\psi_T(m+i\zeta)}{\psi_T(m)}\frac{e^{-i\zeta \ln K}}{i\zeta}\right)d\zeta. & (۳۰.۴)\end{aligned}$$

با جای‌گذاری روابط ۲۸.۴ و ۳۰.۴ در رابطه ۲۷.۴، فرمول ۲۴.۴ حاصل می‌شود.

ب‌ـ فرمول رابطه ۲۵.۴ با استفاده از رابطه برابری فروش‌ـخرید برای گشتاور mـ‌ام زیر حاصل می‌شود

$$C_m(T,K) - P_m(T,K) = e^{-rT}E^Q[S_T^m - K^m].$$

ج‌ـ مطابق تعریف ارزش اختیار توان سقف در رابطه ۷.۴ داریم

$$\begin{aligned} C_{m,cap}(T,K) &= e^{-rT}E^Q\left[min\{max\{S_T^m - K^m, ۰\}, L\}\right]\\ &= e^{-rT}E^Q[max\{S_T^m - K^m, ۰\}] - e^{-rT}E^Q[max\{S_T^m - M^m, ۰\}]\\ &= C_m(T,K) - C_m(T,M).\end{aligned}$$

□

۲.۳.۴ ارزش‌گذاری اختیار معامله توان وقتی که $E^Q[S_T^m] = \infty$

با این‌که اختیار فروش توان mـ‌ام و اختیار خرید توان سقف بازدهی کراندار دارند، ولی فرمول‌های تحلیلی در قضیه ۹.۳.۴ زمانی که دارایی پایه گشتاور mـ‌ام نامتناهی داشته باشد، کاربردی ندارند. در این بخش به ارزش‌گذاری این اختیارات با روش‌های تقریبی، تقریب ذوزنقه‌ای [۱۵] و تقریب سهموی [۱۶] با شرط $E^Q[S_T^m] = \infty$ می‌پردازیم.

الف‌ـ تقریب ذوزنقه‌ای

ما با فرمول کلی وقتی که بازدهی یک تابع خطی دوضابطه‌ای از S_T است، شروع می‌کنیم.

قضیه ۱۰.۳.۴. [۲۲] فرض کنید برای یک عدد صحیح نامنفی n اعداد حقیقی $x_۰,\dots,x_n$، $y_۰,\dots,y_n$ و a^* داده شده باشند. فرض می‌کنیم که $۰ = x_۰ < x_۱ < \cdots < x_n$. همچنین فرض می‌کنیم

[۱۵] Trapezoidal approximation
[۱۶] Parabolic approximation

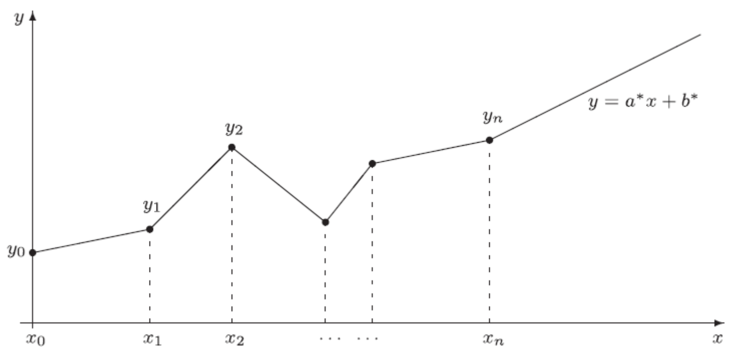
$h^{(1)} : [\circ, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع به صورت زیر تعریف شده است (شکل ۶.۴).

$$h^{(1)}(x) = \begin{cases} a_j x + b_j, & x_{j-1} \leq x \leq x_j, j = 1, \dots, n, \\ a^* x + b^*, & x \geq x_n, \end{cases} \tag{۳۱.۴}$$

که برای $j = 1, \dots, n$،

$$a_j = \frac{y_j - y_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, \quad b_j = \frac{x_j y_{j-1} - x_{j-1} y_j}{x_j - x_{j-1}}, \quad b^* = y_n - a^* x_n.$$

آن‌گاه قیمت یک ادعای مشروط با بازدهی $h^{(1)}(S_T)$ در تاریخ سررسید T به صورت زیر داده می‌شود.



شکل ۶.۴: نمودار $y = h^{(1)}(x)$ در قضیه ۱۰.۳.۴

$$e^{-rT} E^Q[h^{(1)}(S_T)] = a^* S_\circ + e^{-rT} b^* + \sum_{j=1}^{n} (a_{j+1} - a_j) P_1(T, x_j),$$

که $a^* \equiv a_{n+1}$ و $P_1(T, x_j)$ در رابطه ۲۵.۴ تعریف شده است.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که تابع $h^{(1)}(x)$ در رابطه ۳۱.۴ به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$h^{(1)}(x) = a^* x + b^* + \sum_{j=1}^{n} (a_{j+1} - a_j) \max\{x_j - x, \circ\}, \tag{۳۲.۴}$$

به صورت بازگشتی،

ابتدا فرض کنید $x \geqslant x_n$، در این صورت $x_n - x \leqslant \circ$ و $\max\{x_n - x, \circ\} = \circ$. پس جمعوندهای سیگما در رابطه ۳۲.۴ برابر با صفر است و $h^{(1)}(x) = a^* x + b^*$. بنابراین تابع $h^{(1)}(x)$ در روابط ۳۱.۴ و ۳۲.۴ با هم برابرند.

حال فرض کنید $x_{n-1} \leqslant x < x_n$، در این صورت برای هر $j = 1, 2, \dots, n-1$ داریم

$$\max\{x_j - x, \circ\} = \circ$$

و $\max\{x_n - x, \circ\} = x_n - x$. پس جمعوندهای سیگما به جز آخرین آن‌ها در رابطه ۳۲.۴ برابر صفر است و تابع $h^{(1)}(x)$ در فرمول رابطه ۳۲.۴ برابر است با

$$h^{(1)}(x) = a^* x + b^* + (a_{n+1} - a_n)(x_n - x)$$

از طرفی طبق فرض $a^* = a_{n+1}$ و طبق تعریف خط واصل بین دو نقطه (x_n, y_n) و (x_{n-1}, y_{n-1})، $b_n = y_n - a_n x_n$ و چون $b^* = y_n - a^* x_n$، داریم

$$h^{(1)}(x) = b_n + a_n x.$$

بنابراین تابع $h^{(1)}(x)$ در فرمول رابطه ۳۲.۴ به‌وضوح با ضابطه $h^{(1)}(x)$ در رابطه ۳۱.۴ برابر است.
فرض کنید $x_{n-2} \leqslant x < x_{n-1}$، در این حالت همه جمعوندهای سیگما به جز دو تای آخر در فرمول رابطه ۳۲.۴ برابر صفر هستند و داریم

$$h^{(1)}(x) = a^* x + b^* + (a^* - a_n)(x_n - x) + (a_n - a_{n-1})(x_{n-1} - x).$$

با توجه به این‌که $b^* = y_n - a^* x_n$ و با جایگذاری نقطه x_{n-1} در معادله‌ی خط گذرنده از دو نقطه (x_n, y_n) و (x_{n-1}, y_{n-1}) داریم

$$y_{n-1} = a_n x_{n-1} + b_n,$$

و همچنین از معادله‌ی خط گذرنده از دو نقطه (x_{n-1}, y_{n-1}) و (x_{n-2}, y_{n-2}) داریم

$$y_{n-1} - a_{n-1} x_{n-1} = b_{n-1}.$$

بنابراین با جایگذاری این روابط داریم

$$\begin{aligned} h^{(1)}(x) &= a^* x + b^* + (a^* - a_n)(x_n - x) + (a_n - a_{n-1})(x_{n-1} - x) \\ &= b_{n-1} + a_{n-1} x. \end{aligned}$$

که با ضابطه رابطه ۳۱.۴ برابر است.
بنابراین به‌همین ترتیب می‌توان نشان داد که ضابطه $h^{(1)}(x)$ در رابطه ۳۱.۴ با این ضابطه در رابطه ۳۲.۴ برابر هستند.
حال به ازای S_T در ضابطه ۳۲.۴ داریم

$$h^{(1)}(S_T) = a^* S_T + b^* + \sum_{j=1}^{n} (a_{j+1} - a_j) \max\{x_j - S_T, \circ\},$$

و با توجه به رابطه ۶.۴حکم قضیه به‌صورت زیر برقرار است

$$\begin{aligned} e^{-rT} E^Q[h^{(1)}(S_T)] &= a^* e^{-rT} E^Q[S_T] + e^{-rT} b^* \\ &+ \sum_{j=1}^{n} (a_{j+1} - a_j) e^{-rT} E^Q[\max\{x_j - S_T, \circ\}] \\ &= a^* S_\circ + e^{-rT} b^* + \sum_{j=1}^{n} (a_{j+1} - a_j) P_1(T, x_j) \end{aligned}$$

□

ارزش‌گذاری اختیار فروش توان با تقریب ذوزنقه‌ای

یک اختیار فروش توان mــام با بازدهی $h(S_T) = \max\{K^m - S_T^m, \circ\}$ در نظر می‌گیریم که $h(x) = \max\{K^m - x^m, \circ\}$. حال از قضیه ۱۰.۳.۴ تقریب ذوزنقه‌ای از قیمت اختیار فروش توان به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\tilde{P}_m^{(1)}(T, K) \equiv e^{-rT} E^Q[h^{(1)}(S_T)],$$

که در آن $h^{(1)}(S_T)$ تقریبی از بازدهی که به صورت تابع رابطه ۳۱.۴ با فرض $a^* = \circ$ و برای هر $j = \circ, \cdots, n$،

$$x_j = \frac{jK}{n}, \quad y_j = K^m - x_j^m,$$

داده شده است.

از آن‌جایی که مقادیر تقریبی به‌دست آمده با مقادیر دقیق اختلاف دارند، تخمین خطاهای موجود از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، بنابراین کران بالا برای خطای حاصل از تقریب ذوزنقه‌ای برای اختیار فروش توان mــ ام به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \mid \tilde{P}_m^{(1)}(T, K) - P_m(T, K) \mid &= e^{-rT} \mid E^Q[h^{(1)}(S_T) - h(S_T)] \mid \\ &\leq e^{-rT} \sup_{x \geq \circ} \mid h^{(1)}(x) - h(x) \mid \\ &= e^{-rT} \max_{1 \leq j \leq n} \max_{x_{j-1} \leq x \leq x_j} \mid a_j x + b_j - K^m + x^m \mid . \end{aligned}$$

از طرفی چون ماکزیمم تابع $\mid a_j x + b_j - K^m + x^m \mid$ روی بازه $[x_{j-1}, x_j]$ برابر است با $x = (-a_j/m)^{1/(m-1)}$ پس کران بالا از قدرمطلق خطا به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\mid \tilde{P}_m^{(1)}(T, K) - P_m(T, K) \mid \leq e^{-rT} \max_{1 \leq j \leq n} \mid a_j \tilde{x}_j + b_j - K^m + \tilde{x}_j^m \mid,$$

که $\tilde{x}_j = (-a_j/m)^{1/(m-1)}$ برای $j = 1, \cdots, m$.

ارزش‌گذاری اختیار خرید توان سقف با تقریب ذوزنقه‌ای

اختیار خرید توان mــام سقف با بازدهی $h(S_T) = \min\{\max\{S_T^m - K^m, \circ\}, L\}$ را در نظر می‌گیریم و تابع بازدهی $h(S_T)$ را به صورت $h^{(1)}(S_T)$ در رابطه ۳۱.۴ با شرایط $x_\circ = y_\circ = a^* = \circ$ و برای $j = 1, \cdots, n+1$

$$x_j = K + \frac{(j-1)(M-K)}{n}, \quad y_j = x_j^m - K^m,$$

که $M = (K^m + L)^{1/m}$ تقریب می‌زنیم. بنابراین طبق قضیه ۱۰.۳.۴ تقریب ذوزنقه‌ای از قیمت اختیار خرید توان سقف به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\tilde{C}_{m,cap}^{(1)}(T, K, L) \equiv e^{-rT} E^Q[h^{(1)}(S_T)].$$

به طور مشابه، کران بالای خطای تقریب ذوزنقه‌ای برای قیمت اختیار خرید توان سقف به صورت زیر حاصل می‌شود

$$| \tilde{C}^{(1)}_{m,cap}(T,K,L) - C_{m,cap}(T,K,L) | \leq e^{-rT} \max_{1\leq j\leq n} | a_j\tilde{x}_j + b_j - K^m + \tilde{x}_j^m |,$$

که $\tilde{x} = (a_j/m)^{1/(m-1)}$.

ب- تقریب سهموی

قضیه زیر یک فرمول ارزش‌گذاری وقتی که بازدهی اختیار معامله تابع درجه دوم، سه ضابطه‌ای از S_T است را بیان می‌کند، برای این روش لازم است که فرض $E^Q[S_T^2] < \infty$ برقرار باشد.

قضیه ۱۱.۳.۴. [۲۲] فرض کنید برای یک عدد صحیح نامنفی n اعداد حقیقی $x_0,\ldots,x_{2n}$، $y_0,\ldots,y_{2n}$ و a^* و b^* داده شده باشند. فرض می‌کنیم که $0 \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{2n}$ و اگر $x_0 > 0$، اعداد حقیقی a_* و b_* داده شده باشند . همچنین فرض می‌کنیم $h^{(2)} : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع به صورت زیر تعریف شده است (شکل ۷.۴).

$$h^{(2)}(x) = \begin{cases} a_*x^2 + b_*x + c_*, & 0 \leq x < x_0, \\ a_jx^2 + b_jx + c_j, & x_{2j-2} \leq x < x_{2j},\ j = 1,\ldots,n, \\ a^*x^2 + b^*x + c^*, & x \geq x_n, \end{cases} \tag{۳۳.۴}$$

که برای $j = 1,\ldots,n$ داریم

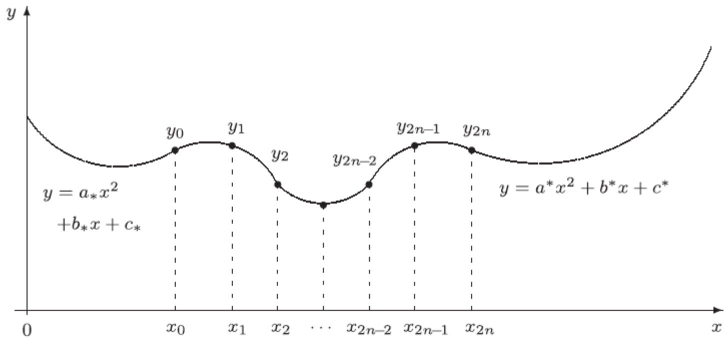
$$\begin{aligned} a_j &= \frac{y_{2j-2}}{(x_{2j-2}-x_{2j-1})(x_{2j-2}-x_{2j})} + \frac{y_{2j-1}}{(x_{2j-1}-x_{2j-2})(x_{2j-1}-x_{2j})} \\ &+ \frac{y_{2j}}{(x_{2j}-x_{2j-2})(x_{2j}-x_{2j-1})}, \\ b_j &= \frac{-(x_{2j-1}+x_{2j})y_{2j-2}}{(x_{2j-2}-x_{2j-1})(x_{2j-2}-x_{2j})} + \frac{-(x_{2j-2}+x_{2j})y_{2j-1}}{(x_{2j-1}-x_{2j-2})(x_{2j-1}-x_{2j})} \\ &+ \frac{-(x_{2j-2}+x_{2j-1})y_{2j}}{(x_{2j}-x_{2j-2})(x_{2j}-x_{2j-1}}, \\ c_j &= \frac{x_{2j-1}x_{2j}y_{2j-2}}{(x_{2j-2}-x_{2j-1})(x_{2j-2}-x_{2j})} + \frac{x_{2j-2}x_{2j}y_{2j-1}}{(x_{2j-1}-x_{2j-2})(x_{2j-1}-x_{2j})} \\ &+ \frac{x_{2j-2}x_{2j-1}y_{2j}}{(x_{2j}-x_{2j-2})(x_{2j}-x_{2j-1}}, \end{aligned}$$

و

$$c_* = y_0 - a_*x_0^2 - b_*x_0, \qquad c^* = y_{2n} - a^*x_{2n}^2 - b_*x_{2n}.$$

اگر $E^Q[S_T^2] < \infty$ آن‌گاه قیمت اختیار معامله با بازدهی $h^{(2)}(S_T)$ به صورت زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} e^{-rT}E^Q[h^{(2)}(S_T)] &= a^*e^{-rT}\psi_T(2) + b^*S_0 + e^{-rT}c^* \\ &+ \sum_{j=0}^{n}((a_{j+1}-a_j)P_2(T,x_{2j}) + (b_{j+1}-b_j)P_1(T,x_{2j})), \end{aligned}$$



شکل ۷.۴: نمودار $y = h^{(2)}(x)$ در قضیه ۱۱.۳.۴

که $a_\circ \equiv a_*$، $b_\circ \equiv b_*$، $a_{n+1} = a^*$، $b_{n+1} \equiv b^*$ و اگر $x_\circ = 0$ در این صورت $(a_1 - a_\circ)P_2(T, x_\circ) + (b_1 - b_\circ)P_1(T, x_\circ)$ صفر خواهد بود.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که تابع $h^{(2)}(x)$ در رابطه ۳۳.۴ با رابطه زیر معادل است

$$\begin{aligned} h^{(2)}(x) &= a^*x^2 + b^*x + c^* + \sum_{j=0}^{n}(a_{j+1} - a_j)\max\{x_{2j}^2 - x^2, 0\} \\ &+ \sum_{j=0}^{n}(b_{j+1} - b_j)\max\{x_{2j} - x, 0\}. \end{aligned} \tag{34.4}$$

به‌طور مشابه از برهان قضیه قبل، به صورت بازگشتی داریم
ابتدا فرض کنید $x \geq x_{2n}$، در این صورت $x_{2n} - x \leq 0$ و $x_{2n}^2 - x^2 \leq 0$ بنابراین $\max\{x_{2n} - x, 0\} = 0$ و $\max\{x_{2n}^2 - x^2, 0\} = 0$. پس جمعوندهای سیگما در رابطه ۳۴.۴ برابر با صفر است و $h^{(2)}(x) = a^*x^2 + b^*x + c^*$. بنابراین تابع $h^{(2)}(x)$ در روابط ۳۳.۴ و ۳۴.۴ برابر می‌باشند.
حال فرض کنید $x_{2n-2} \leq x < x_{2n}$، در این صورت برای هر $j = 1, \ldots, 2n-2$ داریم

$$\max\{x_{2j} - x, 0\} = 0, \quad \max\{x_{2j}^2 - x^2, 0\} = 0$$

پس جمعوندهای سیگما به جز آخرین آن‌ها در رابطه ۳۴.۴ برابر صفر است و تابع $h^{(2)}(x)$ در ۳۴.۴ برابر است با

$$h^{(2)}(x) = a^*x^2 + b^*x + c^* + (a_{n+1} - a_n)(x_{2n}^2 - x^2) + (b_{n+1} - b_n)(x_{2n} - x).$$

از طرفی طبق فرض $a_{n+1} = a^*$، $b_{n+1} = b^*$ و $c^* = y_{2n} - a^*x_{2n}^2 - b_*x_{2n}$ و با استفاده از معادله خط واصل بین دو نقطه (x_{2n}, y_{2n}) و (x_{2n-2}, y_{2n-2}) داریم

$$c_n = y_{2n} - a_n x_{2n}^2 - b_n x_n.$$

در نتیجه داریم

$$h^{(2)}(x) = a_n x^2 + b_n x + c_n$$

پس این تابع با ضابطه $h^{(۲)}$ در ۳۳.۴ برابر است.
فرض کنید $x_{۲n-۴} \leq x < x_{۲n-۲}$، در این حالت همه جمعوندهای سیگما به جز دو تا از آخرین آن‌ها در ۳۴.۴ برابر صفر هستند و داریم

$$\begin{aligned} h^{(۲)}(x) &= a^*x^۲ + b^*x + c^* + (a_n - a_{n-۱})(x_{۲n-۲}^۲ - x^۲) + (a_{n+۱} - a_n)(x_{۲n}^۲ - x^۲) \\ &+ (b_n - b_{n-۱})(x_{۲n-۲} - x) + (b_{n+۱} - b_n)(x_{۲n} - x) \end{aligned}$$

طبق فرض قضیه $a_{n+۱} = a^*$، $b_{n+۱} = b^*$ و $c^* = y_{۲n} - a^*x_{۲n}^۲ - b_*x_{۲n}$ و از طرفی از معادله خط واصل نقاط $(x_{۲n}, y_{۲n})$ و $(x_{۲n-۲}, y_{۲n-۲})$ داریم

$$y_{۲n-۲} = a_n x_{۲n-۲}^۲ + b_n x_{۲n-۲} + c_n$$

همچنین از معادله خط واصل نقاط $(x_{۲n-۲}, y_{۲n-۲})$ و $(x_{۲n-۴}, y_{۲n-۴})$ داریم

$$y_{۲n-۲} = a_{n-۱} x_{۲n-۲}^۲ + b_{n-۱} x_{۲n-۲} + c_{n-۱}$$

حال با جایگذاری این روابط و مفروضات، تابع $h^{(۲)}(x)$ به صورت زیر حاصل می‌شود

$$h^{(۲)}(x) = a_{n-۱}x^۲ + b_{n-۱}x + c_{n-۱}$$

که با ضابطه ۳۳.۴ برابر است.
اگر به همین ترتیب ادامه دهیم برای $x_{۲j-۲} \leq x < x_{۲j}$ که $j = ۱, \dots, n$ ضابطه $h^{(۲)}$ در روابط ۳۳.۴ و ۳۴.۴ برابر هستند.
آخرین حالت فرض کنید $۰ \leq x < x_۰$، در این حالت طبق فرض قضیه $a_۰ = a_*$، $b_۰ = b_*$ و $c_* = y_۰ - a_*x_۰^۲ - b_*x_۰$ و از طرفی دیگر از معادله منحنی گذرنده از دو نقطه $(x_۰, y_۰)$ و $(۰, y)$ داریم

$$c_۰ = y_۰ - a_*x_۰^۲ - b_*x_۰$$

از این روابط داریم

$$h^{(۲)}(x) = a_*x^۲ + b_*c + c_*$$

بنابراین نشان دادیم که تابع $h^{(۲)}(x)$ در روابط ۳۳.۴ و ۳۴.۴ یکی می‌باشند.
حال به ازای $x = S_T$ در ۳۴.۴ داریم

$$\begin{aligned} h^{(۲)}(S_T) &= a^*S_T^۲ + b^*S_T + c^* + \sum_{j=۰}^{n}(a_{j+۱} - a_j)\max\{x_{۲j}^۲ - S_T^۲, ۰\} \\ &+ \sum_{j=۰}^{n}(b_{j+۱} - b_j)\max\{x_{۲j} - S_T, ۰\} \end{aligned} \tag{۳۵.۴}$$

و با توجه به رابطه ۶.۴ و این‌که $e^{-rT}E^Q[S_T] = S_۰$ و $E^Q[S_T^۲] = \psi_T(۲)$ حکم قضیه به صورت زیر برقرار است

$$\begin{aligned} e^{-rT}E^Q[h^{(۲)}(S_T)] &= a^*e^{-rT}\psi_T(۲) + b^*S_۰ + e^{-rT}c^* \\ &+ \sum_{j=۰}^{n}((a_{j+۱} - a_j)P_۲(T, x_{۲j}) + (b_{j+۱} - b_j)P_۱(T, x_{۲j})) \end{aligned}$$

ارزش‌گذاری اختیار فروش توان با تقریب سهموی

یک اختیار فروش توان mــام با بازدهی $h(S_T) = \max\{K^m - S_T^m, ۰\}$ در نظر می‌گیریم . حال از قضیه ۱۱.۳.۴ تقریب سهموی از قیمت اختیار فروش توان به صورت زیر حاصل می‌شود

$$\tilde{P}_m^{(۲)}(T,K) \equiv e^{-rT} E^Q[h^{(۲)}(S_T)],$$

که در آن $h^{(۲)}(S_T)$ تقریبی از بازدهی که به صورت تابع رابطه ۳۳.۴ با فرض $a^* = b^* = ۰$ و برای هر $j = ۰, \cdots, ۲n$

$$x_j = \frac{jK}{۲n}, \quad y_j = K^m - x_j^m.$$

داده شده است.

یک کران بالا برای خطای حاصل از تقریب سهموی برای اختیار فروش توان mــ ام به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$|\ \tilde{P}_m^{(۲)}(T,K) - P_m(T,K)\ | \ \le\ e^{-rT} \max_{۱\le j\le n} \max_{x_{۲j-۲}\le x\le x_{۲j}} |\ a_j x^۲ + b_j x + c_j - K^m + x^m\ |\ .$$

از طرفی چون ماکزیمم تابع $|\ a_j x^۲ + b_j x + c_j - K^m + x^m\ |$ روی بازه $[x_{۲j-۲}, x_{۲j}]$ برابر است با $\breve{x}_j$ یا $x = \tilde{x}_j$ که $\tilde{x}_j$ و $\breve{x}_j$ ریشه‌های معادله $۲a_j x + b_j + m x^{m-۱}$ در بازه $[x_{۲j-۲}, x_{۲j}]$ می‌باشند.

پس کران بالا از قدرمطلق خطا به صورت زیر حاصل می‌شود

$$e^{-rT} \max_{۱\le j\le n} \max\{|\ a_j\tilde{x}_j^۲ + b_j\tilde{x}_j + c_j - K^m + \tilde{x}_j^m\ |, |\ a_j\breve{x}_j^۲ + b_j\breve{x}_j + c_j - K^m + \breve{x}_j^m\ |\}$$

ارزش‌گذاری اختیار خرید توان سقف با تقریب سهموی

اختیار خرید توان mــام سقف با بازدهی $h(S_T) = \min\{\max\{S_T^m - K^m, ۰\}, L\}$ را در نظر می‌گیریم و تابع بازدهی $h(S_T)$ را به صورت $h^{(۲)}(S_T)$ در رابطه ۳۳.۴ با شرایط $a_* = b_* = a^* = b^* = ۰$ و برای $j = ۱, \cdots, ۲n$

$$x_j = K + \frac{j(M-K)}{۲n}, \quad y_j = x_j^m - K^m,$$

که $M = (K^m + L)^{۱/m}$ تقریب می‌زنیم. بنابراین طبق قضیه ۱۱.۳.۴ تقریب سهموی از قیمت اختیار خرید توان سقف به صورت زیر حاصل می‌شود

$$\tilde{C}_{m,cap}^{(۲)}(T,K,L) \equiv e^{-rT} E^Q[h^{(۲)}(S_T)].$$

به طور مشابه، یک کران بالای از خطای تقریب سهموی برای قیمت اختیار خرید توان سقف به صورت زیر حاصل می‌شود

$$e^{-rT} \max_{۱\le j\le n} \max\{|\ a_j\tilde{x}_j^۲ + b_j\tilde{x}_j + c_j + K^m - \tilde{x}_j^m\ |, |\ a_j\breve{x}_j^۲ + b_j\breve{x}_j + c_j + K^m - \breve{x}_j^m\ |\}$$

که $\tilde{x}_j$ و $\breve{x}_j$ ریشه‌های معادله $۲a_j x + b_j - m x^{m-۱}$ در بازه $[x_{۲j-۲}, x_{۲j}]$ هستند.

۳.۳.۴ ارزش‌گذاری اختیار معامله توان با روش شبیه‌سازی مونت کارلو

روش‌های شبیه‌سازی مونت کارلو [۱۷] در مالی اولین بار توسط فلیم بویل [۱۸] در سال ۱۹۷۷ پیشنهاد شد [۸]. این روش‌ها به طور گسترده در ریاضیات مالی استفاده شده‌اند. در حقیقت، شهودی‌ترین روش برای قیمت‌گذاری اختیار معاملات، روش شبیه‌سازی مونت کارلو است. به این صورت که در این روش امید ریاضی $E[f(X)]$ را با استفاده از قانون اعداد بزرگ به صورت زیر تقریب می‌زند

$$E[f(X)] \approx \frac{۱}{N}\sum_{k=۱}^{N} f(x_k),$$

که $\{x_k\}_{k=۱}^{N}$ مقادیر ممکن X می‌باشند.
فرض کنید $f(S_T)$ تابع بازدهی اختیار معامله باشد. در این صورت طبق تعریف قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت اندازه ریسک خنثی داریم

$$V = e^{-rT}E^{Q}[f(S_T)],$$

که امید تحت اندازه ریسک خنثی است.
ایده اصلی روش شبیه‌سازی مونت کارلو برای قیمت‌گذاری اختیار معامله، به این صورت است که ابتدا نمونه‌هایی از قیمت دارایی پایه در تاریخ سررسید T (S_T) تولید شود و سپس با محاسبه میانگین از آن‌ها، تقریبی برای قیمت‌گذاری اختیار معامله حاصل شود. برای تولید نمونه‌ای از S_T باید به گسسته‌سازی [۱۹] مدلی که فرآیند قیمت دارایی پایه S_t (معادله دیفرانسیل تصادفی) از آن تبعیت می‌کند، پرداخته شود.
در این‌جا فرض کنید فرآیند قیمت دارایی پایه از مدل هستون پیروی می‌کند. قرار می‌دهیم $X_t = \ln S_t$، با استفاده از فرمول ایتو از ۲.۴ داریم

$$dX_t = (r - \frac{۱}{۲}V_t)dt + \sqrt{V_t}dW_t, \tag{۳۶.۴}$$

و

$$dV_t = k(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dZ_t \tag{۳۷.۴}$$

حال باید به گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل فوق به‌پردازیم .
گسسته‌سازی اویلر_ مارویاما [۲۰] ساده‌ترین نوع گسسته‌سازی و راحت‌ترین روش برای شبیه‌سازی، تقریبی از معادلات دیفرانسیل تصادفی است. ایده اصلی در این روش بسط تیلور مرتبه اول از معادلات دیفرانسیل تصادفی ۳۶.۴ و ۳۷.۴ است. فرض کنید $t = t_۰ < t_۱ < \cdots < t_n = T$ در این صورت داریم

$$\Delta\hat{X}_i = (r - \frac{۱}{۲}\hat{V}_i^{+}) + \sqrt{\hat{V}_i^{+}\Delta t_i}Z_s, \tag{۳۸.۴}$$

[۱۷] Monte Carlo simulation
[۱۸] P. Phelim Boyle
[۱۹] Discretization
[۲۰] Euler-Maruyama

$$\Delta\hat{V}_i^+ = k(\theta - \hat{V}_i^+)\Delta t_i + \sigma\sqrt{\hat{V}_i^+\Delta t_i}Z_v, \tag{۳۹.۴}$$

که در آن‌ها Δ تفاضل پیشرو، $V^+ = \max\{V, \circ\}$، $Z_v \sim N(\circ, ۱)$،

$$Z_s = \rho Z_v + \sqrt{۱ - \rho^۲}Z,$$

که $Z \sim N(\circ, ۱)$، $\Delta t = \frac{T}{n}$ و $\hat{X}$ تقریبی از X و همچنین $\hat{V}$ تقریبی از V است [۱۸].
به منظور همگرایی سریع‌تر به جواب معادله دیفرانسیل، از روش بسط تیلور با مرتبه بالاتر از یک به نام گسسته‌سازی میلستین [۲۱] برای معادله ۳۹.۴ به صورت زیر استفاده می‌شود [۱۸].

$$\Delta\hat{V}_i^+ = k(\theta - \hat{V}_i^+)\Delta t_i + \sigma\sqrt{\hat{V}_i^+\Delta t_i}Z_v + \frac{۱}{۲}\sigma^۲\Delta t_i(Z_v^۲ - ۱).$$

بنابر آن‌چه گفته شد، به راحتی می‌توان به ارزش‌گذاری اختیار توان mـ‌ام تحت مدل هستون با روش شبیه‌سازی مونت کارلو پرداخت. در بخش بعدی، نتایج حاصل از ارزش‌گذاری اختیار توان با روش شبیه‌سازی مونت کارلو آورده شده است.

۴.۴ نتایج عددی

در این بخش فرمول‌های قیمت‌گذاری اختیار معامله توان تحت مدل هستون، که در بخش قبل حاصل شده‌اند را با نتایج عددی معرفی و مقایسه می‌کنیم.
یک اختیار خرید توان سقف با مجموعه‌ی پارامترهای A ($k = ۲/\circ۳, \theta = \circ/\circ۴, \sigma = \circ/۳۸, \rho = -\circ/۵۷$) در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم نرخ بهره $r = \circ/\circ۶$، تلاطم اولیه $V_\circ = \circ/\circ۸$، ارزش اولیه $S_\circ = ۱\circ$ و سقف $L = ۲\circ$ باشند. در شبیه‌سازی مونت کارلو تعداد مسیرهای نمونه‌ای ۱۰۰۰۰۰ و تعداد نقاط گسسته‌سازی ۲۰۰۰ باشند. برای توان‌های مختلف m، تاریخ‌های سررسید ۰/۵ و ۳ و قیمت‌های توافقی ۹ و ۱۱ ارزش‌های اختیار خرید توان سقف به دو روش تحلیلی و شبیه‌سازی مونت کارلو در جدول (۱.۴) آورده شده‌اند.

[۲۱] Milstein

جدول ۱.۴: مقایسه قیمت‌های اختیار خرید توان سقف (روش تحلیلی و شبیه‌سازی مونت کارلو)

T	K	m	روش تحلیلی	شبیه‌سازی مونت کارلو
۰/۵	۹	۱	۱/۵۱۴۶	۱/۵۱۶۵
		۲	۱۳/۰۵۹۳	۱۳/۰۴۹۱
		۳	۱۴/۸۲۳۱	۱۴/۸۰۹۶
		۶	۱۴/۹۵۱۵	۱۴/۹۷۰۱
		۹	۱۴/۹۴۶۱	۱۴/۹۷۰۱
۳	۱۱	۱	۱/۸۳۱۸	۱/۸۴۰۲
		۲	۸/۷۵۷۹	۸/۷۶۱۵
		۳	۹/۴۱۷۶	۹/۴۲۱۱
		۶	۹/۴۶۱۲	۹/۴۱۱۳
		۹	۹/۱۵۰۳	۹/۴۷۱۰

نتایج عددی به‌دست آمده در جدول (۱.۴) برای قیمت‌های اختیار خرید توان سقف تحت مدل هستون با دو روش تحلیلی و شبیه‌سازی نشان می‌دهند که فرمول تحلیلی قیمت‌گذاری اختیار خرید توان سقف با شرط $E^Q[S_T^m] < \infty$ درست و کاربردی می‌باشد. در حقیقت هدف از این نتایج، مقایسه کارایی بین روش تحلیلی و شبیه‌سازی نیست بلکه تأکید بر صحت روش تحلیلی است.
یک اختیار خرید توان سقف با مجموعه‌ی پارامترهای B $(k = ۲/۰, \theta = ۰/۰۹, \sigma = ۱/۰, \rho = -۰/۳)$ در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $r = ۰/۰۶$، $V_\circ = ۰/۰۸$، $S_\circ = ۱۰$ و $L = ۲۰$ باشند. تعداد مسیرهای نمونه‌ای ۱۰۰۰۰۰ و تعداد نقاط گسسته‌سازی ۲۰۰۰ باشند.
همان‌طور که مشاهده می‌شود، در جدول (۲.۴) فرمول تحلیلی قیمت‌گذاری اختیار خرید توان سقف وقتی که $T = ۳$، $K = ۱۱$ و $m = ۵$ با شرط $E^Q[S_T^m] = \infty$ جواب نمی‌دهد.

جدول ۲.۴: مقایسه قیمت‌های اختیار خرید توان سقف (روش تحلیلی و شبیه‌سازی مونت کارلو)

T	K	m	روش تحلیلی	شبیه‌سازی مونت کارلو
۰/۵	۹	۱	۱/۵۵۷۲	۱/۵۵۳۹
		۲	۱۳/۲۸۶۵	۱۳/۲۴۶۷
		۳	۱۵/۰۱۷۱	۱۵/۰۶۱۴
		۵	۱۵/۱۳۳۴	۱۵/۱۱۵۷
۳	۱۱	۱	۲/۱۵۸۴	۲/۱۴۳۹
		۲	۸/۶۳۸۸	۸/۱۴۱۷
		۳	۸/۷۱۸۸	۸/۶۸۷۹
		۵	–	۸/۷۵۰۶

در حقیقت زمانی که شرط وجود گشتاور mــام متناهی به ازای پارامترهای مورد نظر برقرار نباشد، روش تحلیلی کاربردی ندارد.

در ادامه به مقایسه قیمت‌های دو اختیار خرید توان سقف و اختیار فروش توان به سه روش تحلیلی، تقریب ذوزنقه‌ای و تقریب سهموی (تحت پارامترهای مجموعه‌ی A) می‌پردازیم. فرض می‌کنیم $r =$ ۰٫۰۶، $V_\circ =$ ۰٫۰۸، $S_\circ =$ ۱۰ و $L =$ ۲۰ باشند.

در حقیقت در جداول (۳.۴) و (۴.۴) روش تحلیلی را با دو تقریب ذوزنقه‌ای و سهموی مقایسه می‌کنیم.

جدول ۳.۴: مقایسه قیمت‌های اختیار خرید توان سقف (روش تحلیلی، روش تقریب ذوزنقه‌ای و تقریب سهموی)

تقریب سهموی	n	تقریب ذوزنقه‌ای	n	روش تحلیلی	K
۱۲٫۴۷۳۳	۱	۱۲٫۴۷۳۳	۱۰	۱۲٫۴۷۳۳	۹
۱۲٫۴۷۳۳	۲	۱۲٫۴۷۳۳	۲۰		
۱۲٫۴۷۳۳	۳	۱۲٫۴۷۳۳	۳۰		
۱۲٫۴۷۳۳	۴	۱۲٫۴۷۳۳	۴۰		
۹٫۴۶۱۰	۱	۹٫۴۶۱۰	۱۰	۹٫۴۶۱۰	۱۱
۹٫۴۶۱۰	۲	۹٫۴۶۱۰	۲۰		
۹٫۴۶۱۰	۳	۹٫۴۶۱۰	۳۰		
۹٫۴۶۱۰	۴	۹٫۴۶۱۰	۴۰		

نتایج عددی حاصل شده در جدول (۳.۴) به ازای تاریخ سررسید $T =$ ۳ و توان ۵ $= m$، برای قیمت‌های اختیار خرید توان سقف نشان می‌دهند که هر دو تقریب‌ها کاملاً صحیح و درست می‌باشند.

جدول ۴.۴: مقایسه قیمت‌های اختیار فروش توان (روش تحلیلی، روش تقریب ذوزنقه‌ای و تقریب سهموی)

تقریب سهموی	n	تقریب ذوزنقه‌ای	n	روش تحلیلی	K
۶۸٫۶۹۰۱	۱	۷۲٫۸۰۵۷	۱۰	۷۳٫۴۵۴۳	۹
۷۳٫۱۶۱۱	۲	۷۳٫۲۹۱۰	۲۰		
۷۳٫۴۰۱۵	۳	۷۳٫۳۸۱۲	۳۰		
۷۳٫۴۴۰۶	۴	۷۳٫۴۱۲۴	۴۰		
۲۵۴٫۴۸۴۱	۱	۲۶۸٫۵۰۰۶	۱۰	۲۷۰٫۶۷۰۰	۱۱
۲۶۹٫۸۰۶۵	۲	۲۷۰٫۱۲۴۸	۲۰		
۲۷۰٫۵۱۱۸	۳	۲۷۰٫۴۲۶۱	۳۰		
۲۷۰٫۶۲۳۷	۴	۲۷۰٫۵۳۱۷	۴۰		

به همین ترتیب نتایج عددی در جدول (۴.۴) به ازای تاریخ سررسید $T = ۲$ و $m = ۳$، برای قیمت‌های اختیار فروش توان نشان می‌دهند که هر دو تقریب‌ها صحیح می‌باشند به این صورت که هر چه مقدار n (تعداد نقاط گسسته‌سازی) بیشتر می‌شود قیمت‌های تقریبی اختیار به قیمت‌های دقیق نزدیک‌تر می‌شوند.

دو اختیار خرید توان سقف و اختیار فروش توان با مجموعه‌ی پارامترهای A در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $r = ۰/۰۶$، $V_۰ = ۰/۰۸$، $S_۰ = ۱۰$، $L = ۲۰$ و $T = ۳$ باشند. در شبیه‌سازی مونت کارلو تعداد مسیرهای نمونه‌ای ۱۰۰۰۰۰ و تعداد نقاط گسسته‌سازی ۲۰۰۰ باشند، به ازای قیمت‌های توافقی، توان m و n متفاوت در جداول (۵.۴) و (۶.۴) دو روش تقریب‌های ذوزنقه‌ای و سهموی را با روش شبیه‌سازی مونت کارلو مقایسه می‌کنیم.

جدول ۵.۴: مقایسه قیمت‌های اختیار خرید توان سقف (روش تقریب ذوزنقه‌ای، تقریب سهموی و شبیه‌سازی مونت کارلو)

K	m	n	تقریب ذوزنقه‌ای	n	تقریب سهموی	شبیه‌سازی مونت کارلو
۹	۳	۱۰	۱۲/۴۱۷۴	۱	۱۲/۴۱۷۴	۱۲/۴۳۹۰
		۲۰	۱۲/۴۱۷۴	۲	۱۲/۴۱۷۴	
		۳۰	۱۲/۴۱۷۴	۳	۱۲/۴۱۷۴	
		۴۰	۱۲/۴۱۷۴	۴	۱۲/۴۱۷۴	
	۶	۱۰	۱۲/۴۷۳۶	۳	۱۲/۴۱۷۴	۱۲/۴۵۵۲
		۲۰	۱۲/۴۷۳۶	۴	۱۲/۴۱۷۴	
		۳۰	۱۲/۴۷۳۶	۳	۱۲/۴۱۷۴	
		۴۰	۱۲/۴۷۳۶	۴	۱۲/۴۱۷۴	
۱۱	۳	۱۰	۹/۴۱۷۶	۱	۹/۴۱۷۶	۹/۴۲۸۰
		۲۰	۹/۴۱۷۶	۲	۹/۴۱۷۶	
		۳۰	۹/۴۱۷۶	۳	۹/۴۱۷۶	
		۴۰	۹/۴۱۷۶	۴	۹/۴۱۷۶	
	۶	۱۰	۹/۴۶۱۲	۱	۹/۴۶۱۲	۹/۴۴۳۹
		۲۰	۹/۴۶۱۲	۲	۹/۴۶۱۲	
		۳۰	۹/۴۶۱۲	۳	۹/۴۶۱۲	
		۴۰	۹/۴۶۱۲	۴	۹/۴۶۱۲	

همان‌طور که مشاهده می‌شود در جدول (۵.۴) شبیه‌سازی مونت کارلو به ازای $\Delta t = ۱۵ \times ۱۰^{-۴}$ نتایج مشابهی را برای قیمت‌های اختیار خرید توان سقف با تقریب‌های ذوزنقه‌ای و سهموی خواهد داشت. به همین ترتیب نتایج مشابهی در جدول (۶.۴) برای قیمت‌های اختیار فروش توان به روش‌های شبیه‌سازی مونت کارلو و تقریب‌های ذوزنقه‌ای و سهموی مشاهده می‌شود، به‌گونه‌ای که با افزایش n در تقریب‌ها قیمت‌های حاصل از روش‌های تقریبی با قیمت حاصل از شبیه‌سازی نزدیک‌تر می‌شوند.

جدول ۶.۴: مقایسه قیمت‌های اختیار فروش توان (روش تقریب ذوزنقه‌ای، تقریب سهموی و شبیه‌سازی مونت کارلو)

شبیه‌سازی	تقریب سهموی	n	تقریب ذوزنقه‌ای	n	m	K
۶٫۶۷۸۶	۶٫۶۰۷۷	۱	۶٫۵۷۹۲	۱۰	۲	۹
	۶٫۶۰۷۷	۲	۶٫۶۰۰۷	۲۰		
	۶٫۶۰۷۷	۳	۶٫۶۰۴۵	۳۰		
	۶٫۶۰۷۷	۴	۶٫۶۰۶۰	۴۰		
۷۷۸٫۸۲۸۰	۶۹۰٫۳۵۰۴	۱	۷۷۰٫۱۴۱۵	۱۰	۴	
	۷۷۲٫۳۵۹۵	۲	۷۷۶٫۵۳۵۳	۲۰		
	۷۷۷٫۳۹۲۱	۳	۷۷۷٫۶۸۴۱	۳۰		
	۷۷۸٫۲۳۹۹	۴	۷۷۸٫۱۱۵۵	۴۰		
۱۸٫۱۲۳۷	۱۸٫۱۱۱۴	۱	۱۸٫۰۳۸۳	۱۰	۲	۱۱
	۱۸٫۱۱۱۴	۲	۱۸٫۰۹۳۱	۲۰		
	۱۸٫۱۱۱۴	۳	۱۸٫۱۰۳۲	۳۰		
	۱۸٫۱۱۱۴	۴	۱۸٫۱۰۶۸	۴۰		
۳۱۲۷٫۰	۲۸۱۶٫۲۵۲۸	۱	۳۱۱۱٫۶۳۷۸	۱۰	۴	
	۳۱۲۳٫۲۳۰۴	۲	۳۱۳۴٫۸۸۴۵	۲۰		
	۳۱۳۸٫۹۳۸۸	۳	۳۱۳۴٫۸۸۴۵	۳۰		
	۳۱۴۱٫۴۹۳۱	۴	۳۱۴۰٫۷۱۳۱	۴۰		

فصل ۵

ارزش‌گذاری اختیار معامله توان تحت مدل تلاطم تصادفی هستون مضاعف

۱.۵ مقدمه

در این فصل ابتدا مدل هستون مضاعف را معرفی می‌کنیم سپس با تعیین تابع مشخصه فرآیند قیمت دارایی پایه در مدل هستون مضاعف، فرمولی برای قیمت‌گذاری اختیار خرید توان با استفاده از روش تبدیل فوریه سریع به‌دست می‌آوریم.

۲.۵ مدل هستون مضاعف

کریستفرسن و همکاران [۱] [۱۱] در سال (۲۰۰۹) با اضافه کردن یک فرآیند تلاطم تصادفی به مدل هستون، مدلی با دو فرآیند تلاطم تصادفی تحت عنوان هستون مضاعف [۲] معرفی کردند و با تخمین‌های تجربی نشان دادند که مدل هستون مضاعف در مقایسه با مدل هستون برتری‌هایی دارد. از جمله این‌که این مدل انعطاف بیش‌تری نسبت قیمت‌های پرت دارد و نسبت به تلاطم جزئی قیمت‌ها حساسیت بیشتری از خود نشان می‌دهد
. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ فضای احتمال و $\{\mathcal{F}_t\}_t$ فیلتر استاندارد بروانی باشد. همچنین فرض کنید

[۱] Christoffersen and el

[۲] Double Heston

فرآیند قیمت دارایی پایه S_t در لحظه‌ی t، تحت اندازه ریسک خنثی Q از مدل زیر تبعیت می‌کند.

$$dS_t = rS_tdt + \sqrt{V_t^{(1)}}S_td\tilde{W}_t^{(1)} + \sqrt{V_t^{(2)}}S_td\tilde{W}_t^{(3)}, \tag{1.5}$$

$$dV_t^{(1)} = k_1(\theta_1 - V_t^{(1)})dt + \sigma_{v_1}\sqrt{V_t^{(1)}}d\tilde{W}_t^{(2)}, \tag{2.5}$$

$$dV_t^{(2)} = k_2(\theta_2 - V_t^{(2)})dt + \sigma_{v_2}\sqrt{V_t^{(2)}}d\tilde{W}_t^{(4)}, \tag{3.5}$$

$$d\tilde{W}_t^{(1)}d\tilde{W}_t^{(2)} = \rho_1 dt, \tag{4.5}$$

$$d\tilde{W}_t^{(3)}d\tilde{W}_t^{(4)} = \rho_2 dt, \tag{5.5}$$

که در آن r نرخ بهره، $\sqrt{V_t^{(1)}}$ و $\sqrt{V_t^{(2)}}$ دو فرآیند تلاطم، θ_1 میانگین بلندمدت فرآیند تلاطم $V_t^{(1)}$، θ_2 میانگین بلندمدت فرآیند تلاطم $V_t^{(2)}$، k_1 و k_2 نرخ‌های سرعت بازگشت به میانگین، σ_{v_1} واریانس فرآیند تلاطم $V_t^{(1)}$، σ_{v_1} واریانس فرآیند تلاطم $V_t^{(2)}$، $\tilde{W}_t^{(1)}$ و $\tilde{W}_t^{(2)}$ دو فرآیند براونی با ثابت همبستگی $\rho_1 \in (-1, 1)$ و همچنین $\tilde{W}_t^{(3)}$ و $\tilde{W}_t^{(4)}$ دو فرآیند براونی با ثابت همبستگی $\rho_2 \in (-1, 1)$ می‌باشند. همچنین فرض شده است که پارامترهای k_1 و k_2، θ_1و θ_2 و σ_{v_1} و σ_{v_2} ثابت‌های مثبتی هستند.

۳.۵ ارزش‌گذاری اختیار توان تحت مدل هستون مضاعف

برای قیمت‌گذاری اختیار توان به روش تبدیل فوریه سریع [3] لازم است، تابع مشخصه فرآیند قیمت دارایی پایه تحت مدل هستون مضاعف را بیابیم.

۱.۳.۵ تعیین تابع مشخصه

مطالب این بخش از مراجع [۳۴] و [۱۶] گرفته شده است.
قرار می‌دهیم $X_t = \log S_t$، در این صورت طبق فرمول ایتو و با استفاده از معادله ۱.۵ داریم

$$d\log S_t = rdt - \frac{1}{2}(V_t^{(1)} + V_t^{(2)})dt + \sqrt{V_t^{(1)}}d\tilde{W}_t^{(1)} + \sqrt{V_t^{2)}}d\tilde{W}_t^{(3)},$$

و با توجه به ۴.۵ و ۵.۵ رابطه فوق به صورت زیر حاصل می‌شود

$$\begin{aligned} d\log S_t &= rdt - \frac{1}{2}(V_t^{(1)} + V_t^{(2)})dt + \sqrt{V_t^{(1)}}(\rho_1 d\tilde{W}_t^{(2)} + \sqrt{1-\rho_1^2}d\tilde{W}_t^{(1)}) \\ &+ \sqrt{V_t^{(2)}}(\rho_2 d\tilde{W}_t^{(4)} + \sqrt{1-\rho_2^2}d\tilde{W}_t^{(3)}). \end{aligned} \tag{6.5}$$

[3] Transform Fourier fast

از طرفی از معادلات ۲.۵ و ۳.۵ داریم

$$\int_{\circ}^{T}\sqrt{V_t^{(1)}}d\tilde{W}_t^{(2)}=\frac{1}{\sigma_{v_1}}\left[V_T^{(1)}-V_{\circ}^{(1)}-k_1\theta_1T+k_1\int_{\circ}^{T}V_t^{(1)}dt\right], \qquad (7.5)$$

$$\int_{\circ}^{T}\sqrt{V_t^{(2)}}d\tilde{W}_t^{(4)}=\frac{1}{\sigma_{v_2}}\left[V_T^{(2)}-V_{\circ}^{(2)}-k_2\theta_2T+k_2\int_{\circ}^{T}V_t^{(2)}dt\right]. \qquad (8.5)$$

تابع مشخصه فرآیند دارایی پایه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\varphi_{\log S_t}(u)=E^Q[\exp\{iu\log(S_T)]$$

حال از روابط ۶.۵، ۷.۵ و ۱۰.۵ تابع مشخصه به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned}
\varphi_{\log S_t}(u) &= E^Q[\exp\{iu\log(S_T)\}]\\
&= E^Q[\exp\{iu(\log S_{\circ}+rT-\frac{1}{2}\int_{\circ}^{T}V_t^{(1)}dt-\frac{1}{2}\int_{\circ}^{T}V_t^{(2)}dt\\
&+ \rho_1\int_{\circ}^{T}\sqrt{V_t^{(1)}}d\tilde{W}_t^{(2)}+\sqrt{1-\rho_1^2}\int_{\circ}^{T}\sqrt{V_t^{(1)}}d\tilde{W}_t^{(1)}+\rho_2\int_{\circ}^{T}\sqrt{V_t^{(2)}}\\
&+ \sqrt{1-\rho_2^2}\int_{\circ}^{T}\sqrt{V_t^{(2)}}d\tilde{W}_t^{(3)})\}]\\
&= \exp\{iu(\log(S_{\circ})+rT)\}E^Q[\exp\{-\frac{iu}{2}\int_{\circ}^{T}V_t^{(1)}dt-\frac{iu}{2}\int_{\circ}^{T}V_t^{(2)}dt\\
&+ \frac{iu\rho_1}{\sigma_{v_1}}\left[V_T^{(1)}-V_{\circ}^{(1)}-k_1\theta_1T+k_1\int_{\circ}^{T}V_t^{(1)}dt\right]+\frac{(iu)^2}{2}(1-\rho_1^2)\int_{\circ}^{T}V_t^{(1)}dt\\
&+ \frac{iu\rho_2}{\sigma_{v_2}}\left[V_T^{(2)}-V_{\circ}^{(2)}-k_2\theta_2T+k_2\int_{\circ}^{T}V_t^{(2)}dt\right]+\frac{(iu)^2}{2}(1-\rho_2^2)\int_{\circ}^{T}V_t^{(2)}dt
\end{aligned}$$

سپس داریم

$$\begin{aligned}
\varphi_{\log S_t}(u) &= \exp\{iu(\log(S_{\circ})+rT)\}E^Q[\exp\{\frac{iu\rho_1}{\sigma_{v_1}}(V_T^{(1)}-V_{\circ}^{(1)}-k_1\theta_1T)\\
&+ \frac{iu\rho_2}{\sigma_{v_2}}(V_T^{(2)}-V_{\circ}^{(2)}-k_2\theta_2T)+\left(\frac{iu\rho_1}{\sigma_{v_1}}k_1-\frac{iu}{2}+\frac{(iu)^2}{2}(1-\rho_1^2)\right)\\
&\int_{\circ}^{T}V_t^{(1)}dt+\left(\frac{iu\rho_2}{\sigma_{v_2}}k_2-\frac{iu}{2}+\frac{(iu)^2}{2}(1-\rho_2^2)\right)\int_{\circ}^{T}V_t^{(2)}dt\}]
\end{aligned}$$

قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned}
s_1 &= -(\frac{-iu}{2}+\frac{iu\rho_1k_1}{\sigma_{v_1}}+\frac{(iu)^2(1-\rho_1^2)}{2}),\\
s_3 &= -(\frac{-iu}{2}+\frac{iu\rho_2k_2}{\sigma_{v_2}}+\frac{(iu)^2(1-\rho_2^2)}{2}),
\end{aligned}$$

$$s_2=\frac{iu\rho_1}{\sigma_{v_1}},$$

$$s_4 = \frac{iu\rho_2}{\sigma_{v_2}}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\varphi_{\log S_t}(u) &= \exp\{iu(\log(S_0 + rT) - s_2(V_0^{(1)} + k_1\theta_1 T) - s_4(V_0^{(2)} + k_2\theta_2 T)\} \\ &\quad E^Q[\exp - s_1 \int_0^T V_t^{(1)} dt + s_2 V_T^{(1)} - s_3 \int_0^T V_t^{(2)} dt + s_4 V_T^{(2)}\}]\end{aligned}$$

از طرف دیگر، از [۳۴] داریم

$$\begin{aligned}E^Q[\exp\{s_1 \int_0^T V_t^{(1)} dt + s_2 V_T^{(1)}\}] &= \exp\{H_T^{(1)}(u)V_0^{(1)} + H_T^{(2)}(u)\} \\ E^Q[\exp\{s_3 \int_0^T V_t^{(2)} dt + s_4 V_T^{(2)}\}] &= \exp\{H_T^{(3)}(u)V_0^{(2)} + H_T^{(4)}(u)\}\end{aligned}$$

تابع مشخصه به صورت زیر حاصل می‌شود

$$\begin{aligned}\varphi_{\log S_t}(u) &= \exp\{iu(\log(S_0 + rT) - s_2(V_0^{(1)} + k_1\theta_1 T) - s_4(V_0^{(2)} + k_2\theta_2 T) \\ &+ H_T^{(1)}(u)V_0^{(1)} + H_T^{(2)}(u) + H_T^{(3)}(u)V_0^{(2)} + H_T^{(4)}(u)\}\end{aligned}$$

که در آن

$$G_T^{(1)}(u) = \frac{s_2 d_1(1 + e^{-d_1 T}) - (1 - e^{-d_1 T})(-\frac{iu\rho_1 k_1}{\sigma_{v_1}} + iu - (iu)^2(1 - \rho_1^2))}{(1 - g_1 e^{-d_1 T})(\beta_1 + d_1)},$$

$$G_T^{(2)}(u) = \frac{2k_1\theta_1}{\sigma_{v_1}^2} log(\frac{2d_1}{(1 - g_1 e^{-d_1 T})(\beta_1 + d_1)} e^{\frac{1}{2}(k_1 - d_1)T}),$$

$$G_T^{(3)}(u) = \frac{s_4 d_2(1 + e^{-d_2 T}) - (1 - e^{-d_2 T})(-\frac{iu\rho_2 k_2}{\sigma_{v_2}} + iu - (iu)^2(1 - \rho_2^2))}{(1 - g_2 e^{-d_2 T})(\beta_2 + d_2)},$$

$$G_T^{(4)}(u) = \frac{2k_2\theta_2}{\sigma_{v_2}^2} log(\frac{2d_2}{(1 - g_2 e^{-d_2 T})(\beta_2 + d_2)} e^{\frac{1}{2}(k_2 - d_2)T}),$$

$$g_i = \frac{r^{(i)}neg}{r^{(i)}pos}, i = 1, 2$$

$$r^{(i)}pos/neg = \frac{\beta_i \pm d_i}{2\gamma_i}, i = 1, 2$$

$$d_i = \sqrt{\beta_i^2 - 4\alpha\gamma_i}, i = 1, 2$$

$$\alpha = \frac{(-u^2 - iu)}{2}, i = 1, 2$$

$$\beta_i = k_i - \rho_i \sigma_{v_i} iu, i = 1, 2$$

$$\gamma_i = \frac{\sigma_{v_i}}{2}.i = 1, 2$$

بنابراین تابع مشخصه فرآیند قیمت دارایی تحت مدل هستون مضاعف به صورت زیر حاصل می‌شود

$$\begin{aligned} \varphi_{\log S_t}(u) &= exp\{iu(log(S_0)+rT)+C_1(u,T)\theta_1+D_1(u,T)V_0^{(1)} \\ &+ C_2(u,T)\theta_2+D_2(u,T)V_0^{(2)}\} \end{aligned} \quad (9.5)$$

که

$$C_1(u,T)=k_1\left[r^{(1)}negT-\frac{2}{\sigma_{v_1}}log\left(\frac{1-g_1e^{-d_1T}}{1-g_1}\right)\right],$$

$$C_2(u,T)=k_2\left[r^{(2)}negT-\frac{2}{\sigma_{v_2}}log\left(\frac{1-g_2e^{-d_2T}}{1-g_2}\right)\right],$$

$$D_1(u,T)=r^{(1)}neg\left[\frac{1-e^{-d_1T}}{1-g_1e^{-d_1T}}\right],$$

$$D_2(u,T)=r^{(2)}neg\left[\frac{1-e^{-d_2T}}{1-g_2e^{-d_2T}}\right].$$

۲.۳.۵ ارزش‌گذاری اختیار توان با روش تبدیل فوریه سریع

روش تبدیل فوریه سریع توسط کار و مادان [۴] در سال ۱۹۹۹ معرفی شد. ایده اصلی این روش، استفاده از تبدیل فوریه قیمت‌گذاری اختیار معامله و سپس استفاده از تبدیل فوریه معکوس برای محاسبه قیمت اختیار است. در حقیقت این روش به دلیل سرعت بالا و استفاده از تابع مشخصه فرآیند قیمت دارایی پایه (که همواره موجوداند) به جای تابع چگالی احتمال قیمت دارایی پایه، روشی مناسب برای قیمت‌گذاری اختیار معامله است [۹]. فرض کنیم $C_m(T,K)$ تابع قیمت اختیار خرید توان با قیمت توافقی K و زمان سررسید T باشد. در این صورت طبق تعریف قیمت‌گذاری اختیار خرید توان تحت اندازه ریسک خنثی Q به صورت زیر است

$$C_m(t,K)=e^{-r(T-t)}E^Q\left[(S_T^m-K^m)^+|\mathcal{F}_t\right], \quad (10.5)$$

که در آن r نرخ بهره (مقدار ثابت) است. فرض کنید $t=0$، $X_t=\ln S_t$ و $k=\ln K$ در این صورت از رابطه ۱۰.۵ خواهیم داشت:

$$C_m(T,k)=e^{-rT}\int_k^{\infty}(e^{mX_T}-e^{mk})q_T(X_T)dX_T, \quad (11.5)$$

که در آن $q_T(X_T)$ تابع چگالی فرآیند تصادفی X_T است. توجه کنید که وقتی که k به منفی بی نهایت میل می‌کند آن‌گاه تابع $C_m(T,k)$ به S_0 میل می‌کند. کار و مادان قیمت اصلاح شده اختیار خرید را به صورت زیر معرفی کردند[۹].

$$c_m(T,k)=e^{\alpha k}C_m(T,k), \qquad \forall \ \alpha>0. \quad (12.5)$$

[۴] Carr and Madan

که در آن α ضریب اصلاح‌شده قیمت خرید و وابسته به مدل قیمت دارایی پایه S_t است. این پارامتر باید طوری انتخاب شود که داشته باشیم :

$$E(S_T^{\alpha+1}) < \infty \Longrightarrow \varphi_{C_T}(-(\alpha+1)i) < \infty$$

تبدیل فوریه روی $c_m(T,k)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\psi_T(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuk} c_m(T,k)dk. \qquad (۱۳.۵)$$

با جای‌گذاری معادله ۱۱.۵ در ۱۲.۵ و همچنین معادله ۱۲.۵ در ۱۳.۵ داریم

$$\begin{aligned}\psi_T(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuk}e^{\alpha k}e^{-rT}\int_k^{\infty}(e^{mX_T}-e^{mk})q_T(X_T)dX_Tdk\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rT}q_T(X_T)\int_{-\infty}^{X_T}(e^{mX_T}-e^{mk})e^{iuk}e^{\alpha k}dkdX_T\\ &= \frac{me^{-rT}\varphi_T(u-(\alpha+m)i)}{(\alpha+iu)(m+\alpha+iu)}.\end{aligned}$$

که در آن φ_T تابع مشخصه X_t تحت اندازه ریسک خنثی است. طبق تعریف، معکوس تبدیل فوریه تابع $c_m(T,k)$ به صورت زیر است

$$c_m(T,k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuk}\psi_T(u)du.$$

از طرفی با توجه به فرمول ۱۲.۵ به صورت زیر حاصل می‌شود

$$C_m(T,k) = \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuk}\psi_T(u)du. \qquad (۱۴.۵)$$

با به کار بردن قاعده ذوزنقه‌ای [۵] (روش تقریب انتگرال) برای انتگرال سمت راست رابطه ۱۴.۵ داریم

$$C_m(T,k) \approx \frac{e^{-\alpha k}}{\pi}\sum_{j=1}^{N} e^{-iu_jk}\psi_T(u_j)\triangle, \qquad (۱۵.۵)$$

که $\triangle$ طول گام انتگرال، $a = N\triangle$ حد بالای انتگرال و $u_j = \triangle(j-1)$.

روش تبدیل فوریه سریع، روشی مؤثر برای محاسبه مجموع

$$w(v) = \sum_{j=1}^{N} e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(v-1)}x(j), \qquad (۱۶.۵)$$

برای $v = 1, 2, \ldots, N$ است. حال با استفاده از این روش ابتدا تعریف می‌کنیم

$$k_v = -b + \eta(v-1), \qquad (۱۷.۵)$$

[۵] Trapezoidal rule

که $b = \frac{N\eta}{۲}$. این رابطه N مقدار را، از ارزش‌های لگاریتم قیمت توافقی در بازه $[-b, b]$ با طول گام منظم η می‌دهد. سپس قرار می‌دهیم $\eta\triangle = \frac{۲\pi}{N}$ در این صورت داریم

$$C_m(k_v) \approx \frac{e^{-\alpha k_v}}{\pi} \sum_{j=۱}^{N} e^{-i\eta\triangle(j-۱)(v-۱)} e^{ibu_j} \psi_T(u_j)\triangle.$$

از طرف دیگر، قاعده سیمپسون [۶] به ما کمک می‌کند تا فرمول قیمت‌گذاری دقیق‌تری برای $\triangle$های بزرگ به صورت زیر به دست آید

$$C_m(T,k) = \frac{e^{-\alpha k_v}}{\pi} \sum_{j=۱}^{N} e^{-i\frac{۲\pi}{N}(j-۱)(v-۱)} e^{ibu_j} \psi_T(u_j) \frac{\triangle}{۳}(۳ + (-۱)^j - \mathbb{I}_{j=۱}),$$

که در آن $\mathbb{I}$ تابع دیریکله است.

فرمول فوق، **قیمت اصلاح شده اختیار خرید توان mـ ام** با استفاده از **روش تبدیل فوریه سریع** است.

[۶] Simpson's rule

نتیجه‌گیری

در این پایان نامه روش‌هایی برای قیمت‌گذاری اختیار توان ارائه شد. در ابتدا قیمت‌گذاری را تحت مدل بلک_شولز و بلک_شولز تعمیم‌یافته به کار بردیم. اما با توجه به تصادفی بودن تلاطم در بازار واقعی، قیمت‌گذاری اختیار معامله توان تحت مدل تلاطم تصادفی هستون با روش‌های تحلیلی، تقریب ذوزنقه‌ای و سهموی و شبیه‌سازی مونت کارلو صورت گرفته و با استفاده از نتایج عددی مشاهده کردیم که روش تحلیلی درست و کاربردی می‌باشد و روش‌های تقریبی کاملاً صحیح و به جواب دقیق نزدیک می‌باشند. سپس با توجه به این‌که مدل هستون مضاعف نسبت به مدل هستون برتری‌هایی داشته، قیمت‌گذاری اختیار توان تحت مدل هستون مضاعف انجام گرفت.

مراجع

[۱] سیاح س.، صالح آبادی ع. (۱۳۸۴)، مبانی مهندسی مالی و مدیریت ریسک، (ترجمه)، گروه رایانه تدبیر پرداز.

[۲] ظهوری زنگنه ب. و جهانی پور ر. ا. (۲۰۰۴)، حرکت براونی یا فرآیند وینر: ریاضی مدل ساز پدیده های طبیعی، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۲۰-۱.

[3] Albrecher, H., Mayer, P., and Schoutens, W. T. J. (2007), The Little Heston Trap, Wilmott Magazine, January Issue, 83-92.

[4] Andersen, L. B., and Piterbarg, V. V. (2007), Moment explosions in stochastic volatility models, Finance and Stochastics, 11(1), 29-50.

[5] Baillie, R. T., and Morana, C. (2009), Modelling long memory and structural breaks in conditional variances: An adaptive FIGARCH approach, Journal of Economic Dynamics and Control, 33(8), 1577-1592.

[6] Bakshi, G., Cao, C., and Chen, Z. (1997), Empirical performance of alternative option pricing models, The Journal of Finance, 52(5), 2003-2049.

[7] Black, F., and Scholes, M. (1973), The pricing of options and corporate liabilities, The Journal of Political Economy, 637-654.

[8] Boyle, P. P. (1977), Options: A monte carlo approach, Journal of Financial Economics, 4(3), 323-338.

[9] Carr, P., Madan, D. (1999), Option valuation using the fast Fourier transform, Journal of Computational Finance, 2(4), 61-73.

[10] Chalasani, P., and Jha, S. (1997), Steven Shreve: Stochastic Calculus and Finance Lecture Notes, October.

[11] Christoffersen, P., Heston, S., and Jacobs, K. (2009), The shape and term structure of the index option smirk: Why multifactor stochastic volatility models work so well, Management Science, 55(12), 1914-1932.

[12] Chung, K. L. (2001), A Course in Probability Theory, Academic Press.

[13] Clark, T. E., and Davig, T. (2011), Decomposing the declining volatility of long-term inflation expectations, Journal of Economic Dynamics and Control, 35(7), 981-999.

[14] Doob, J. L., and Doob, J. L. (1953), Stochastic Process (Vol. 7, No. 2). New York: Wiley.

[15] Esser, A. (2003), General valuation principles for arbitrary payoffs and applications to power options under stochastic volatility, Financial Markets and Portfolio Management, 17(3), 351-372.

[16] Gatheral, J. (2011), The Volatility Surface: a Practitioner's Guide (Vol. 357). John Wiley and Sons.

[17] Geman, H., El Karoui, N., and Rochet, J. C. (1995), Changes of numeraire, changes of probability measure and option pricing, Journal of Applied Probability, 443-458.

[18] Glasserman, P. (2003), Monte Carlo Methods in Financial Engineering (Vol. 53). Springer Science and Business Media.

[19] Heston, S. L. (1993), A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, Review of Financial Studies, 6(2), 327-343.

[20] Heynen, R. C., and Kat, H. M. (1996), Pricing and hedging power options, Financial Engineering and the Japanese Markets, 3(3), 253-261.

[21] Hull, J., and White, A. (1987), The pricing of options on assets with stochastic volatilities, The Journal of Finance, 42(2), 281-300.

[22] Kim, J., Kim, B., Moon, K. S., and Wee, I. S. (2012), Valuation of power options under Heston's stochastic volatility model, Journal of Economic Dynamics and Control, 36(11), 1796-1813.

[23] Macovschi, S., and Quittard-Pinon, F. (2006), On the pricing of power and other polynomial options, The Journal of Derivatives, 13(4), 61-71.

[24] Melino, A.,Turnbull, S., (1990), Pricing foreign currency options with stochastic volatility, Journal of Econometrics, 45, 239–265.

[25] Musiela, M., and Rutkowski, M. (2006). Martingale Methods Financial Modelling (Vol. 36). Springer Science and Business Media.

[26] Øksendal, B. (2003), Stochastic Differential Equations, In Stochastic differential equations (pp. 65-84). Springer Berlin Heidelberg.

[27] Poklewski-Koziell, W. (2012), PhD thesis, Stochastic volatility models: Calibration, pricing and hedging.

[28] Scott, L. O. (1987), Option pricing when the variance changes randomly: Theory, estimation, and an application, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 22(04), 419-438.

[29] Stein, E. M., and Stein, J. C. (1991), Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach, Review of Financial Studies, 4(4), 727-752.

[30] Sturm, A., and Björk, T. (2001), Arbitrage Theory in Continuous Time.

[31] Wiggins, J. B. (1987), Option values under stochastic volatility: Theory and empirical estimates, Journal of Financial Economics, 19(2), 351-372.

[32] Wilde, I. F. (2009), Stochastic Analysis-Notes, Lecture Notes, King's College, London.

[33] Wu, Y-Y. (2011), MSC thesis, The Pricing of Power Options under the Generalized Black-Scholes Model.

[34] Zhu, J. (2000), Applications of Fourier Transform to Smile Modeling: Theory and Implementation, Springer Science and Business Media.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

آربیتراژ .... Arbitrage
انتگرال ایتو .... Ito Integral
اندازه .... Measure
اندازه احتمال .... Probability Measure
بازدهی .... Payoff
پرتفوی .... Portfolio
تابع قرارداد .... Contract Function
تابع مشخصه .... Characteristic Function
تاریخ سررسید .... Expiration Date
تبدیل فوریه .... Fourier Transform
تقریب ذوزنقه‌ای .... Trapezoidal Appoximation
تقریب سهوی .... Parabolic Appoximation
چولگی .... Skewness
ریسک .... Risk
فرآیند براونی .... Brownian Motion
فرآیند براونی استاندارد .... Standard Brownian Motion
فرآیند تصادفی .... Stochastic Process
فضای احتمال .... Probability Space
فوریه معکوس .... Fourier Inversion
قضیه گیرسانوف .... Girsanov Theorem
قیمت توافقی .... Strike Price
کشیدگی .... Kurtosis
گسسته‌سازی .... Discretization
میانگین .... Mean
نرخ بهره .... Rate of Interest

نرخ تنزیل .... Discount Factor

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

اختیار آمریکایی .... American Option
حرکت براونی .... Brownian Motion
مدل بلک شولز .... Black Sholes Model
تابع مشخصه .... Characteristic Function
ادعای مشروط .... Contingent Claim
اختیار خرید معامله .... Call Option
مدل هستون مضاعف .... Double Heston Model
تابع ابتدایی .... Elemintary Function
اختیار اروپایی .... European Option
گیرسانوف .... Girsanov
مدل هستون .... Heston Model
انتگرال ایتو .... Ito Integral
تابع مولد گشتاور .... Moment Generating Function
مارتینگل .... Martingle
بازگشت به میانگین .... Mean Reversion
شبیه‌سازی .... Monte Carlo Simulation
اختیار معامله .... Option
اختیار معامله توان .... Power Option
پرتفوی .... Portfolio
اختیار فروش معامله .... Put Option
تقریب سهوی .... Parabolic Appoximation
اندازه ریسک خنثی .... Risk Neutral Measure
خودتأمین .... Self Financing
تابع ساده .... Simple Function
تبدیل فوریه سریع .... Transform Fourier Fast

تقریب ذوزنقه‌ای .... Trapezoidal Appoximation

قیمت‌گذاری .... Valuation

تلاطم .... Volatility

Abstract

We derive semi-analytic solutions for power option prices under the Black-Scholes, generalized Black- Scholes, Heston and double Heston model, respectively; specifically, the pricing formula is shown to be valid whenever the power of the underlying asset price has a finite moment. Unlike the majority of stochastic volatility models, there remains a significant problem to check the existence of moments of assets prices of order higher than one. Fortunately, the moment explosion property under the Heston model is examined. Incorporating with their results, we present explicit formulas for moment generating function of log price and for power option prices under the circumstances when the corresponding moments are finite. In case that the corresponding moment explodes, we provide two numerical methods to derive prices of power put and capped power call options. In spite of a simple idea, numerical examples show that the approximations are extremely accurate and efficient.

keywords: Power Option, Stochastic Volatility, Heston's stochastic volatility model, Double Heston model, Fast Fourier transform

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Financial Mathematics

Valuation of Power Options under Hestons Stochastic Volatility Model

By: Roghaye Latifi

Supervisors

Dr. Elham Dastranj

Dr. Farshid Mehrdoust

Advisor

Zeynab Fatemi

January 2017