دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

احاطه‌گری {۲} -رومی در گراف‌ها و کاربردهای آن

خدیجه آلبوغبیش

استاد راهنما

دکتر نادر جعفری راد

آبان ۱۳۹۵

تقدیم به بهترین حامیان زندگی ام، پدر و مادرم،

بهترین همراه زندگی ام، همسرم،

تقدیم به آموزگارانی که برایم زندگی، بودن و انسان بودن را معنا کردند،

و تقدیم به همه آنان که دوستشان دارم.

سپاس گزاری

پروردگارا!

مرا مدد کن تا دانش اندکم نه نردبانی باشد برای فزونی غرور و تکبر و نه حلقه‌ای برای اسارت و نه دستمایه‌ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای انسانیت و متفاوت ساختن زندگی خود و دیگران

سپاس از کسانی که از من متنفرند زیرا آنها مرا قویتر می‌کنند.

سپاس از کسانی که مرا دوست دارند زیرا آنها قلب مرا بزرگتر می‌کنند.

سپاس از مادرم که از نبود من اشک‌های فراق ریخته و با دوری من ساخته و سوخته است، سپاس از پدرم که همواره با صبر و شکیبایی همراهم می‌ماند و سپاس از همسرم که همواره یار و پشتیبان زندگی‌ام است و سپاس از خواهران و برادرانم که همیشه مرا دوست داشته‌اند.

برخود لازم می‌دانم که از استاد راهنمای دلسوزم **جناب آقای دکتر نادر جعفری راد** برای کمک‌ها و راهنمایی‌هایشان که در به ثمر رسیدن این پایان‌نامه به من عرضه داشته‌اند وهمچنین از **جناب آقای دکتر میثم علیشاهی** و **جناب آقای دکتر صادق رحیمی شعرباف مقدس** که قبول زحمت فرموده و داوری این تحقیق را برعهده گرفته‌اند، نهایت تشکر و قدردانی داشته باشم و برایشان همواره سرافرازی و سربلندی را از خداوند متعال خواستارم.

خدیجه آلبوغبیش

آبان ۱۳۹۵

تعهدنامه

اینجانب **خدیجه آلبوغبیش** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **احاطه‌گری {۲} –رومی در گراف‌ها و کاربردهای آن** ، تحت راهنمایی **دکتر نادر جعفری راد** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ’’ یا ‘‘ Shahrood University of Technology ’’ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

خدیجه آلبوغبیش
آبان ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

فرض کنید G یک گراف باشد. تابع $f : V \to \{۰, ۱, ۲\}$ را یک تابع احاطه‌گر رومی نامیم هرگاه به ازای هر راس v با شرط $f(v) = ۰$ راسی مانند $u \in N(v)$ داشته باشیم که $f(u) = ۲$. وزن تابع احاطه‌گر رومی f برابر است با $w(f) = \sum_{v\in V} f(v)$. عدد احاطه‌گر رومی گراف G که با $\gamma_R(G)$ نشان داده می‌شود برابر است با کوچکترین وزن درمیان وزن‌های توابع احاطه‌گر رومی روی گراف G. در یک گراف G تابع $f : V \to \{۰, ۱, ۲\}$ را یک تابع احاطه‌گری $\{۲\}$-رومی نامیم هرگاه برای هر راس v با شرط $f(v) = ۰$ داشته باشم $f(N(v)) \geq ۲$ که در آن $f(N(v))$ مجموع مقادیر f روی همسایه‌های راس v است. وزن یک تابع احاطه‌گری $\{۲\}$-رومی f عبارت است از $w(f) = \sum_{v\in V} f(v)$. عدد احاطه‌گری $\{۲\}$-رومی گراف G عبارت است از مینیمم وزن در میان توابع احاطه‌گر $\{۲\}$-رومی روی گراف G و آن را با نماد $\gamma_{\{R۲\}}(G)$ نشان می‌دهیم.
در این پایان‌نامه مقدار دقیقی برای عدد احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی مسیرها، دورها و گراف‌های خورشید را ارائه می‌دهیم، و کران‌هایی برای عدد احاطه‌گری رنگین‌کمانی گراف‌های پترسن تعمیم یافته $GP(n, k)$ ارائه می‌دهیم. سپس به مطالعه احاطه‌گری رومی و مقدار عدد احاطه‌گری رومی روی گراف‌ها می‌پردازیم، و کران‌هایی برای اعداد احاطه‌گری رومی و احاطه‌گری رنگین‌کمانی را ارائه می‌دهیم. همچنین به بررسی خواص بنیادی این پارامترها می‌پردازیم و دسته‌بندی‌هایی برای گراف‌ها بر اساس این پارامترها ارائه می‌دهیم. در پایان رابطه بین عدد احاطه‌گری $\{۲\}$-رومی یک گراف را با سایر پارامترهای آن نظیر عدد احاطه‌گری، عدد احاطه‌گری رومی و عدد احاطه‌گری رنگین کمانی بدست می‌آوریم.

کلمات کلیدی: احاطه‌گری، عدد احاطه‌گری، ۲-احاطه‌گری، احاطه‌گری رومی، احاطه‌گری رنگین کمانی، احاطه‌گری رومی ضعیف، احاطه‌گری $\{۲\}$-رومی

فهرست مطالب

لیست تصاویر

فصل ۱

مقدمات و تعاریف

در این فصل بعضی از تعاریف و مفاهیمی که در فصل‌های بعد به آن‌ها نیاز داریم، را بیان می‌کنیم. تمام تعاریف این فصل برگرفته از مراجع [۲۰] و [۱۲] هستند.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۱.۱. منظور از یک **گراف** [۱] یک سه‌تایی $(V(G), E(G), \Psi(G))$ است که در آن $V(G)$ یک مجموعه ناتهی از عناصر به نام رئوس و $E(G)$ مجموعه‌ای از یال‌ها و $\Psi(G)$ تابع وقوع است که به هر یال G یک جفت نامرتب (نه لزوماً مجزا) از رأس‌های G را متناظر می‌کند.
اگر e یک یال و v_1 و v_2 رأس‌های آن باشند به قسمی‌که $\Psi_G(e) = v_1v_2$ آن‌گاه گویند e، v_1 را به v_2 وصل می‌کند و این دو رأس را دو انتهای e نامند. از این پس گراف را به‌طور خلاصه به صورت $G = (V, E)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. **مرتبه** [۲] گراف G تعداد رئوس گراف G می‌باشد و با $n(G)$ یا n نمایش داده می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱. یک **گشت** [۳] به طول k، یک دنباله متناوب $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$ از رأس‌ها و یال‌هاست، به طوریکه به ازای هر $i = 1, \dots, k$، $e_i = v_{i-1}v_i$ یک یال باشد.

تعریف ۴.۱.۱. یک **مسیر** [۴] گشتی است که هیچ رأس تکراری نداشته باشد. یک مسیر را در یک گراف به صورت فهرست مرتبی از رأس‌های متمایز $v_0, v_1, \dots, v_n$ در نظر می‌گیریم، به طوریکه به ازای هر $i = 1, \dots, n$، $e_i = v_{i-1}v_i$ یک یال باشد. یک مسیر n رأسی را با P_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱. یک **دور** [۵] گشت بسته‌ای به طول حداقل یک است که در آن رأس ابتدایی و رأس انتهایی بر یکدیگر منطبق هستند و هیچ رأس تکراری دیگری نداریم. یک دور n رأسی را با C_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۶.۱.۱. **طوقه** [۶] دوری به طول یک است.

تعریف ۷.۱.۱. یک **گراف ساده** [۷] گرافی است که هیچ طوقه‌ای نداشته باشد و بین هر دو رأس آن بیش از یک یال موجود نباشد.

تعریف ۸.۱.۱. **درجه** [۸] رأس v در گراف G تعداد یال‌های گراف G می‌باشد که v بر آن‌ها واقع است و آن را با $d_G(v)$ نمایش می‌دهیم. بزرگترین درجه در میان درجات رئوس گراف G را با $\Delta(G)$ و کوچکترین درجه را با $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم.

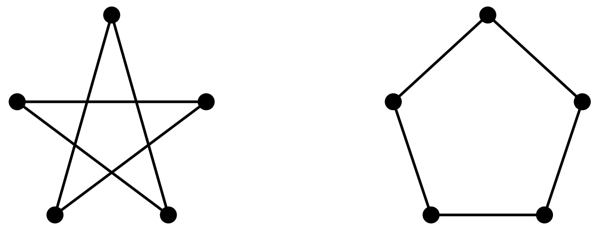
---

[۱] Gragh
[۲] Order
[۳] Walk
[۴] Path
[۵] Cycle
[۶] Loop
[۷] Simple graph
[۸] Degree

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید S یک زیرمجموعه از V باشد. دراین‌صورت یک رأس $w \in V - S$ را **همسایه‌ی خصوصی** [۹] نسبت به مجموعه S می‌نامیم اگر یک رأس $v \in S$ به گونه‌ای وجود داشته باشد که برای هر رأس w، $N(w) \cap S = \{v\}$.

تعریف ۱۰.۱.۱. گراف G را **منتظم** [۱۰] گوییم هرگاه درجه تمام رئوس با هم برابر باشند. اگر درجه تمام رئوس k باشد، آنگاه گراف را k–منتظم نامیم.

تعریف ۱۱.۱.۱. دو گراف $G = (V, E)$ و $G' = (V', E')$ را **یکریخت** [۱۱] گوییم هرگاه تابع یک به یک و پوشای $f : V(G) \to V(G')$ موجود باشد که اگر $uv \in E(G)$ آنگاه $f(u)f(v) \in E(G')$. دو گراف یکریخت G و G' را با نماد $G \cong G'$ نشان می‌دهیم. برای مثال گراف‌های شکل زیر یکریخت هستند.



شکل ۱.۱: گراف‌های یکریخت G و G'.

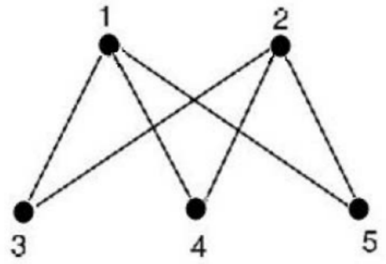
تعریف ۱۲.۱.۱. مجموعه‌ای از رئوس گراف G که با رأس v مجاور باشند را **همسایگی باز** [۱۲] رأس v نامیده و با $N(v)$ نمایش می‌دهیم. همچنین $N(v) \cup \{v\}$ را **همسایگی بسته** [۱۳] رأس v نامیده و با $N[v]$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۱.۱. گرافی که در آن هر دو رأس متمایز توسط یک یال به یکدیگر متصل شده باشند، **گراف کامل** [۱۴] نامیده می‌شود. یک گراف کامل n رأسی را با K_n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۴.۱.۱. **گراف دو بخشی** [۱۵] گرافی است که مجموعه رأس‌های آن به دو زیر مجموعه X و Y چنان افراز شود، که یک سر تمام یال‌های G در X و سر دیگر آن‌ها در Y باشد. یک گراف دو بخشی با بخش‌های X و Y، که در آن هر رأس X، به هر رأس Y وصل شده باشد، گراف دو بخشی کامل نامیده می‌شود. اگر $|X| = m$ و $|Y| = n$، آنگاه گراف دو بخشی کامل با بخش‌های X و Y را با $K_{m,n}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۵.۱.۱. یک **تطابق** [۱۶] در گراف G زیرمجموعه‌ای از یال‌هاست که هیچ دو یالی رأس مشترک

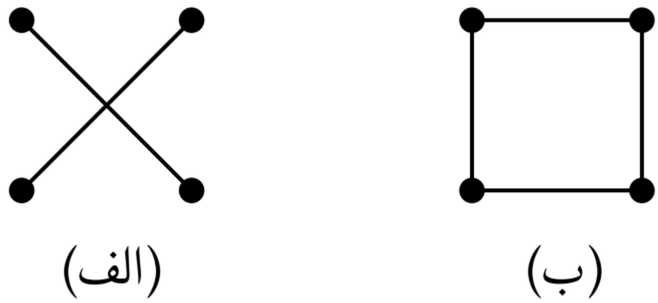
[۹] Private neighbour
[۱۰] Regular graph
[۱۱] Isomorphic
[۱۲] Open neighbourhood
[۱۳] Closed neighbourhood
[۱۴] Complete graph
[۱۵] Bipartite graph
[۱۶] Matching



شکل ۲.۱: گراف دوبخشی

نداشته باشند. اگر M یک تطابق در G باشد و x رأسی روی یکی از یال‌های M باشد آنگاه گوئیم M، x را اشباع می‌کند. اگر هر رأس از گراف G توسط تطابق M اشباع شود آنگاه M را یک تطابق کامل می‌نامیم.

تعریف ۱۶.۱.۱. فرض کنید G گرافی n رأسی باشد، **متمم**[۱۷] (یا مکمل) گراف G را با $\overline{G}$ نشان داده و بدین صورت تعریف می‌کنیم، $V(G) = V(\overline{G})$ و هر دو رأس مانند u و v در $\overline{G}$ مجاور هستند اگر و فقط اگر در G مجاور نباشند.



شکل ۳.۱: گراف G و متمم آن

[۱۷] Complementary

تعریف ۱.۱.۱۷. تابع $f : V(G) \longrightarrow A \neq \emptyset$ را یک **رنگ آمیزی** [۱۸] رأسی برای گراف G نامیم و همچنین A را مجموعه رنگ‌ها می‌نامیم. رنگ آمیزی f را مجاز نامیم، هرگاه برای هر دو رأس مجاور x و y، $f(x) \neq f(y)$.

گراف G را k-رنگ پذیر نامیم، هرگاه یک رنگ آمیزی مجاز f موجود باشد که $|f(V(G))| = k$. عدد رنگی گراف G عبارت است از مینیمم مقدار k که G، k-رنگ پذیر باشد و آن را با $\chi(G)$ نشان می‌دهیم. توجه شود که رأس‌های هم رنگ در یک رنگ آمیزی مجاز گراف G، مجموعه مستقل تشکیل می‌دهند.

تعریف ۱.۱.۱۸. یک **زیرگراف** [۱۹] از گراف G گرافی مانند H است بطوریکه $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$.

تعریف ۱.۱.۱۹. H را [۲۰] **زیرگراف القایی** G نامیده و با $G|V(H)|$ نمایش می‌دهیم، هرگاه H زیرگرافی از G باشد و برای هر دو رأس x و y اگر $xy \in E(G)$، آنگاه $xy \in E(H)$.

تعریف ۱.۱.۲۰. یک گراف فاقد دور را **جنگل** [۲۱] می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۲۱. یک جنگل همبند را یک **درخت** [۲۲] می‌نامیم. به عبارت دیگر گراف همبند فاقد دور را درخت می‌نامیم. از آنجایی که طوقه و یال‌های چندگانه دور تشکیل می‌دهند لذا جنگل‌ها و درخت‌ها گراف‌هایی ساده هستند.

تعریف ۱.۱.۲۲. یک رأس از درجه‌ی یک درخت را رأس آویخته یا **برگ** [۲۳] می‌نامیم. هر درخت با حداقل دو رأس یک برگ دارد.

تعریف ۱.۱.۲۳. رأسی که در همسایگی یک برگ قرار داشته باشد، پشتیبان نام دارد. مجموعه رئوس پشتیبان در درخت T را با $S(T)$ نمایش می‌دهند. همچنین رأسی که در همسایگی حداقل دو برگ قرار داشته باشد، رأس پشتیبان قوی نام دارد.

تعریف ۱.۱.۲۴. **درخت جهت‌دار** [۲۴] درختی است که مجموعه یال‌های آن مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب باشد.

تعریف ۱.۱.۲۵. **درخت ریشه‌دار** [۲۵] درختی جهت‌دار است که درجه ورودی یک رأس به نام ریشه صفر و درجه ورودی سایر رأس‌ها غیر صفر است.

تعریف ۱.۱.۲۶. **گراف ستاره** [۲۶] $K_{1,n-1}$، یک رأس از درجه $n-1$ و $n-1$ رأس از درجه یک دارد. گراف ستاره نوع خاصی از یک درخت است. گراف ستاره را با S_{n-1} نشان می‌دهند.

---

[۱۸] Coloring

[۱۹] Subgraph

[۲۰] Induced subgraph

[۲۱] Forest

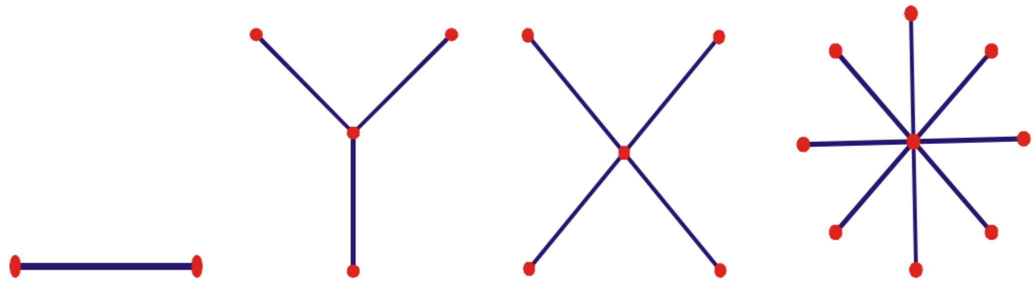
[۲۲] Tree

[۲۳] Leaf

[۲۴] Directed tree

[۲۵] Rooted tree

[۲۶] Star graph



شکل ۱.۴: گراف‌های ستاره

تعریف ۲۷.۱.۱. گراف **زوج ستاره** [۲۷] T^* درختی متشکل از دو ستاره است که دو رأس از بالاترین درجه توسط یک یال به هم وصل شده‌اند.

تعریف ۲۸.۱.۱. **تاج** [۲۸] یک گراف H که با $cor(H)$ نمایش داده می‌شود، گرافی از مرتبه $|V(H)|$ ۲ است که با اضافه کردن یک برگ به هر رأس از گراف H بدست می‌آید. همچنین بخاطر می‌سپاریم که هر رأس از $cor(H)$ یا یک برگ است یا رأس پشتیبان که با دقیقا یک برگ همسایه است.

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض کنیم u و v دو رأس از گراف G هستند که حداقل یک مسیر بین آن‌ها در G موجود است. **فاصله** [۲۹] بین u و v در گراف G، طول کوتاه‌ترین مسیر از u به v است. فاصله بین u و v در گراف G را با $d_G(u,v)$ و یا به طور مختصر با $d(u,v)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۰.۱.۱. فرض کنیم G گرافی همبند و v رأسی دلخواه از آن باشد. **خروج از مرکز** [۳۰] رأس v را با $e(v)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e(v) = \max_{x \in V(G)} d(v,x).$$

تعریف ۳۱.۱.۱. در گراف همبند G کوچکترین خروج از مرکز به ازای همه‌ی رئوس G را **شعاع** [۳۱] G می‌نامیم و با $rad(G)$ نشان می‌دهیم. همچنین بزرگترین خروج از مرکز به ازای همه‌ی رئوس را **قطر** [۳۲] G گوییم و با $diam(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۲.۱.۱. **ماتریس مجاورت** [۳۳] گراف G را که با $A(G)$ یا مختصرا A نشان می‌دهیم ماتریسی به صورت $A = [a_{i,j}]_{n\times n}$ است که در آن $a_{i,j}$ تعداد یال‌هایی است که بین دو رأس v_i و v_j وجود دارند.

---

[۲۷] Double star
[۲۸] Corona
[۲۹] Distance
[۳۰] Eccentricity
[۳۱] Radius
[۳۲] Diameter
[۳۳] Adjacency matrix

تعریف ۳۳.۱.۱. یک **خوشه** [۳۴] از گراف ساده G، زیر مجموعه‌ای مانند S از V است به طوریکه $G[S]$ گراف کامل باشد. مرتبه بزرگترین زیرگراف کامل گراف G را عدد خوشه‌ای آن گراف می‌نامیم و با $w(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۴.۱.۱. فرض کنیم $G=(V,E)$ یک گراف و $e\in E$ و $v\in V$ باشد. گراف حاصل از حذف یال e از G را با نماد $G-e$ نشان می‌دهیم. همچنین گراف حاصل از حذف رأس v را با نماد $G-v$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۵.۱.۱. فرض کنیم $G=(V,E)$ یک گراف و $v\in V$ رأسی باشد که با حذف آن از G تعداد مؤلفه‌های G افزایش یابند دراین‌صورت v را رأس برشی می‌نامیم. **همبندی رأسی** [۳۵] یک گراف، مینیمم تعداد رئوسی است که با حذف آن‌ها یا گراف ناهمبند می‌شود و یا به K_1 تبدیل می‌گردد. یک گراف را k-همبند رأسی گوییم هرگاه همبندی رأسی آن حداقل k باشد.

تعریف ۳۶.۱.۱. یک مجموعه S از رأس‌ها را **۲-بسته‌بندی** [۳۶] نامیم هرگاه برای هر دو رأس $u,v\in S$، $N[u]\cap N[v]=\emptyset$. عدد ۲-بسته‌بندی در گراف G ماکزیمم اندازه یک ۲-بسته‌بندی است و با $\rho_2(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۷.۱.۱. گرافی که شامل هیچ دوری به طول حداقل ۴ نباشد را **گراف وتری** [۳۷] نامیم.

تعریف ۳۸.۱.۱. منظور از زیر تقسیم کردن یال uv عبارت است از حذف یال uv و افزودن رأس جدید w همراه با دو یال جدید uw و wv. هر یال در یک گراف حداکثر یک بار زیر تقسیم می‌شود. درختی که با زیر تقسیم کردن تمام یال‌های ستاره بدست می‌آید، **عنکبوت سالم** [۳۸] نامیده می‌شود.

تعریف ۳۹.۱.۱. **عنکبوت زخمی** [۳۹] یک ستاره $K_{1,t}$ با حداقل $t-1$ یال زیرتقسیم شده است.

۲.۱ احاطه‌گری

درسال‌های اخیر، مفهوم احاطه‌گری در گراف‌ها به دلیل کاربردهای زیاد آن در زمینه‌های مختلف همچون علوم کامپیوتر و شبکه‌های الکترونیکی مورد توجه محققین زیادی قرارگرفته و رشد چشمگیری داشته است.

تعریف ۱.۲.۱. زیر مجموعه S از رأس‌های گراف G را یک **پوشش رأسی** [۴۰] می‌نامیم هرگاه حداقل یکی از نقاط پایانی هر یال G در آن مجموعه باشد. عدد پوششی رأسی گراف G مینیمم اندازه یک پوشش رأسی است و با $\beta(G)$ نشان داده می‌شود.

[۳۴] Clique
[۳۵] Connected vertex
[۳۶] 2-Packing
[۳۷] Chordal graph
[۳۸] healthy spider
[۳۹] wounded spider
[۴۰] Vertex covering

تعریف ۲.۲.۱. مجموعه S از یال‌ها را یک پوشش یالی می‌نامیم هرگاه هر رأس حداقل روی یکی از این یال‌ها باشد. عدد **پوشش یالی** [۴۱] G را با $\beta'(G)$ نشان می‌دهیم و برابر مینیمم اندازه یک پوشش یالی است.

تعریف ۳.۲.۱. مجموعه S از رأس‌های یک گراف G را یک **مجموعه مستقل** [۴۲] رأسی می‌نامیم هرگاه هیچ دو رأسی از S مجاور نباشند، عدد استقلال گراف G را که با $\alpha(G)$ نشان داده می‌شود ماکزیمم اندازه یک مجموعه مستقل رأسی است.

تعریف ۴.۲.۱. مجموعه S از یال‌ها را یک مجموعه **مستقل یالی** [۴۳] می‌نامیم هرگاه هیچ دو یالی از S رأس مشترک نداشته باشد. لذا یک مجموعه مستقل یالی همان تطابق است و عدد استقلال یالی G را با $\alpha'(G)$ نشان می‌دهیم، که همان عدد مربوط به ماکزیمم تطابق است.

تعریف ۵.۲.۱. مجموعه S را یک **مجموعه مستقل ماکسیمال** [۴۴] می‌نامیم هرگاه نتوان هیچ رأس جدیدی مانند v را به S اضافه کرد به طوریکه $S \cup \{v\}$ نیز مستقل باشد.

تعریف ۶.۲.۱. زیرمجموعه S از رئوس گراف G را یک **مجموعه احاطه‌گر** [۴۵] نامیم، هرگاه برای هر رأس $v \in V$، یا آن رأس در S باشد و یا در همسایگی یک رأس از S قرار داشته باشد. کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر در گراف G را عدد احاطه گری G نامیده و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم. یک مجموعه احاطه‌گر از اندازه $\gamma(G)$ را به اختصار با $\gamma(G)$–مجموعه نشان می‌دهیم.

تعریف ۷.۲.۱. مجموعه احاطه‌گر S را **مجموعه احاطه‌گر مستقل** [۴۶] گوییم هرگاه هیچ دو رأسی از S مجاور نباشند. عدد احاطه‌گری مستقل G کوچکترین اندازه چنین مجموعه‌ای است و با $i(G)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۸.۲.۱. مجموعه احاطه‌گر S را **مجموعه احاطه‌گر کلی** [۴۷] (TDS) می‌نامیم هرگاه $G[S]$ رأسی تنها نداشته باشد عدد مربوط به این احاطه‌گری را با $\gamma_t(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۹.۲.۱. زیر مجموعه $S \subseteq V$ یک مجموعه **۲–احاطه‌گری** [۴۸] است اگر هر رأس $V - S$ حداقل دارای دو همسایه در S باشد. مینیمم اندازه چنین مجموعه‌ای را عدد ۲–احاطه‌گری گراف G نامیم و با $\gamma_۲(G)$ نشان می‌دهیم.

---

[۴۱] Edge covering

[۴۲] independent set

[۴۳] independent edge

[۴۴] Maximal independent set

[۴۵] Dominating set

[۴۶] Independent dominating set

[۴۷] Total dominating set

[۴۸] 2-domination

تعریف ۱۰.۲.۱. تابع $f : V \to \{0,1,2\}$ یک **تابع احاطه‌گری رومی** [۴۹] (RDF) در G است اگر هر رأس $u \in V$ که $f(u) = 0$ مجاور با حداقل یک رأس v با $f(v) = 2$ باشد. وزن یک RDF f مقدار $f(V(G)) = \sum_{u\in V(G)} f(u)$ است و مینیمم وزن چنین تابعی را عدد احاطه‌گری رومی روی گراف G نامیم و با $\gamma_R(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۲.۱. یک رأس v با $f(v) = 0$ را **رأس بی‌دفاع** [۵۰] نسبت به f نامیم هرگاه این رأس مجاور با رأس w با $f(w) > 0$ نباشد.

تعریف ۱۲.۲.۱. یک تابع f را **تابع احاطه‌گری رومی ضعیف** [۵۱] $(WRDF)$ نامیم هرگاه هر رأس v با $f(v) = 0$ مجاور یک رأس w با $f(w) > 0$ باشد به طوری که تابع $f' = (V_0', V_1', V_2')$ با ضابطه $f'(v) = 1$ و $f'(w) = f(w) - 1$ و برای $u \in V - \{v, w\}$، $f'(u) = f(u)$، رأس بی‌دفاع نداشته باشد. مینیمم وزن چنین تابعی را عدد احاطه‌گری رومی ضعیف نامیم و با $\gamma_r(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنید $f : V(G) \to P(\{1,2\})$ یک تابع است. اگر برای هر رأس $v \in V$ که $f(v) = \emptyset$، $\bigcup_{u\in N(v)} f(u) = \{1,2\}$، آنگاه f یک **تابع احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی** [۵۲] $(2RDF)$ از G است و وزن آن

$$w(f) = \sum_{v\in V(G)} \mid f(v) \mid$$

است. مینیمم وزن چنین تابعی را عدد احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی گراف G نامیده و با $\gamma_{r2}(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنید $f : V(G) \to P(\{1,2,\ldots,k\})$ یک تابع باشد. اگر برای هر رأس $v \in V$ که $f(v) = \emptyset$، $\bigcup_{u\in N(v)} f(u) = \{1,2,\ldots,k\}$، آنگاه f یک **تابع احاطه‌گری k-رنگین‌کمانی** [۵۳] $(kRDF)$ از G است و وزن آن $w(f) = \sum_{v\in V(G)} |f(v)|$ است. مینیمم وزن چنین تابعی را عدد احاطه‌گری k-رنگین‌کمانی گراف G نامیده و با $\gamma_{rk}(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۵.۲.۱. تابع $f : V \to \{0,1,2\}$ را **تابع احاطه‌گری $\{2\}$-رومی** [۵۴] نامیم هرگاه هر رأس $v \in V$ با $f(v) = 0$، $f(N(v)) \geq 2$. این بدان معناست که یا یک رأس $u \in N(v)$ با $f(u) = 2$ موجود است، یا حداقل دو رأس $x, y \in N(v)$ با $f(x) = f(y) = 1$ موجودند. وزن چنین تابعی مجموع $f(V) = \sum_{v\in V} f(v)$ است و مینیمم وزن را عدد احاطه‌گری $\{2\}$-رومی نامیم و با $\gamma_{\{R2\}}(G)$ نشان می‌دهیم.

---

[۴۹] Roman domination function

[۵۰] undefended vertex

[۵۱] Weak roman domination function

[۵۲] 2-rainbow domination function

[۵۳] k-rainbow domination function

[۵۴] Roman {2}-domination function

تعریف ۱.۲.۱۶. مجموعه احاطه‌گری S را یک **مجموعه جفت احاطه‌گر** [55] (PDS) در صورت وجود نامیم هرگاه هر مولفه در زیرگراف القاء شده توسط S یک مسیر P_2 باشد. عدد جفت احاطه‌گری در گراف G که با $\gamma_{Pr}(G)$ نشان داده می‌شود، مینیمم اندازه یک مجموعه جفت احاطه‌گری در گراف G است.

[55] Paired-domination set

فصل ۲

۲-احاطه‌گری

تمام قضایا و تعاریف در این فصل از مراجع [۱]، [۲]، [۷] اتخاذ شده است.

۱.۲ احاطه‌گری رنگین‌کمانی در گراف‌ها

در این بخش یک کران بالا برای عدد احاطه‌گری-جفت از حاصلضرب دکارتی درگراف‌ها که در احاطه‌گری رنگین‌کمانی استفاده می‌شود، تعیین می‌کنیم. از این کران در تعیین محدوده عدد احاطه‌گری-جفت برای بعضی از حاصلضرب دورها استفاده می‌شود. در این بخش بعضی از نتایج مقدماتی در خصوص عدد احاطه‌گری-جفت را معرفی می‌کنیم. با یک کران بالای بدیهی در $\gamma_{pr}(G\Box H)$ شروع می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که در حالت کلی $\gamma_{pr}(G\Box H) \leq \gamma_{pr}(G)\gamma_{pr}(H)$ برقرار نیست. برای مثال، اگر $n > ۴$، آنگاه داریم

$$\gamma_{pr}(K_n\Box K_n) \geq n \quad , \quad \gamma_{pr}(K_n) = ۲.$$

گزاره ۱.۱.۲. *[۱] برای هر دو گراف بدون رأس تنها G و H، داریم*

$$\gamma_{pr}(G\Box H) \leq \min\{\gamma_{pr}(G) \mid V(H) \mid, \gamma_{pr}(H) \mid V(G) \mid\}.$$

برهان. فرض کنید $\{u_۱, v_۱, \ldots, u_k, v_k\}$ یک $\gamma_{pr}(G)$-مجموعه باشد که در آن برای هر i، u_i و v_i مجاورند، (همچنین $\gamma_{pr}(G) = ۲k$) و $V(H) = \{۱, ۲, \ldots, h\}$ باشد. دراین‌صورت مجموعه همه‌ی رأس‌ها به شکل (u_i, j) و (v_i, j) که در آن $۱ \leq i \leq k$ و $۱ \leq j \leq h$ یک PDS برای $G\Box H$ (با دو رأس (u_i, j) و (v_i, j)) است، همچنین داریم $\gamma_{pr}(G\Box H) \leq ۲kh = \gamma_{pr}(G) \mid V(H) \mid$. □

گزاره ۲.۱.۲. *[۱] برای هر گراف بدون رأس تنها $G = (V, E)$ از مرتبه n و ماکزیمم درجه Δ داریم*

$$\gamma_{pr}(G) \geq ۲\lceil \frac{n}{۲\Delta} \rceil.$$

برهان. فرض کنید S یک $\gamma_{pr}(G)$-مجموعه است، دراین‌صورت

$$n- \mid S \mid=\mid V \setminus S \mid=\mid \cup_{v\in S}(N(v) \cap (V \setminus S)) \mid\leq\mid S \mid (\Delta - ۱)$$

همچنین $\gamma_{pr}(G) =\mid S \mid\geq n/\Delta$. چون $\gamma_{pr}(G)$ زوج است پس کران پایین مطلوب حاصل است. □

از گزاره ۲.۱.۲ یک نتیجه بدست می‌آید که کران پایین دیگری برای عدد احاطه‌گری-جفت در حاصلضرب دکارتی درگراف‌ها داریم.

گزاره ۳.۱.۲. *[۱] برای هر جفت ازگراف‌های Gو H داریم* $\gamma_{pr}(G\Box H) \geq ۲\left\lceil \frac{|V(G)||V(H)|}{۲(\Delta(G)+\Delta(H))} \right\rceil$.

برهان. با توجه به گزاره ۲.۱.۲ اثبات این گزاره بدیهی است. □

قضیه ۴.۱.۲. *[۱] برای هرگراف G و هرگراف H که مجموعه رأس‌های آن به k، $\gamma_{pr}(H)$- مجموعه قابل افراز باشند، داریم* $\gamma_{pr}(G\Box H) \leq \frac{۱}{k} \mid V(H) \mid \gamma_{rk}(G)$.

برهان. فرض کنید تابع f یک $kRDF$ برای G با مینیمم وزن، و $S_1, S_2, \ldots, S_k$ از $V(H)$ در k $\gamma_{pr}(H)$-مجموعه موردنظر در افراز $V(H)$ باشند. توجه کنید که برای هر $i \in \{1,2,\ldots,k\}$،

$$\gamma_{pr}(H) = \mid S_i \mid = \frac{1}{k} \mid V(H) \mid .$$

برای هر $v \in V(G)$، یک زیر مجموعه $D_v \subseteq \{v\} \times V(H)$ تعریف می‌کنیم که

$$D_v = \bigcup_{i \in f(v)} (\{v\} \times S_i).$$

اگر $f(v) = \emptyset$، آنگاه D_v نیز همچنان تهی است، درغیر این صورت D_v شامل مجموعه‌های مشابه S_i که i مسیرهای سرتاسر $f(v)$ است. فرض کنید $D = \bigcup_{v \in V(G)} D_v$. نشان می‌دهیم که D یک PDS برای $G \Box H$ است. فرض کنید $v \in V(G)$. اگر $f(v) \neq \emptyset$، آنگاه D_v شامل حداقل یک مجموعه $\{v\} \times S_i$ پیش از احاطه‌گری $\{v\} \times V(H)$ است. فرض کنید $f(v) = \emptyset$، و (v,x) رأس دلخواه از $\{v\} \times V(H)$ باشد، که برای بعضی از jها، $x \in S_j$ باشد. با استفاده از تعریف احاطه‌گریk-رنگین‌کمانی داریم

$$\bigcup_{u \in N[v]} f(u) = \{1,2,,\ldots,k\}$$

بنابرین یک رأس $u \in N_G(v)$ موجود است به طوریکه $j \in f(u)$، همچنین $(u,x) \in D_u \subset D$. پس (v,x) به وسیله $(u,x) \in D$ یک احاطه‌گری برای گراف G است، لذا نتیجه می‌گیریم که D یک مجموعه احاطه‌گری است. با توجه به تعریف D که $G[D]$ یک تطابق کامل است، پس D یک PDS است. لذا به وضوح $\mid D \mid = \sum_{v \in V(G)} \mid D_v \mid = \sum_{v \in V(G)} \mid f(v) \mid$ را داریم و همچنین

$$\gamma_{pr}(H) = \frac{1}{k} \mid V(H) \mid \sum_{v \in V(G)} \mid f(v) \mid = \frac{1}{k} \mid V(H) \mid \gamma_{rk}(G).$$

و اثبات کامل است. □

از قضیه ۲.۵.۲ وگزاره ۳.۱.۲ نتیجه زیر را بدست می‌آوریم.

نتیجه ۵.۱.۲. *[1] برای هر گراف G، داریم $\gamma_{pr}(G \Box (K_k \Box K_2)) \leq 2\gamma_{rk}(G) = 2\gamma(G \Box K_k)$. به ویژه $\gamma_{pr}(G \Box C_4) \leq 2\gamma_{r2}(G)$.*

حال در عدد احاطه‌گری-جفت در حاصلضرب دورها با دور۴ متمرکز می‌شویم. ابتدا یک کران بالا برای عدد احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی در یک دور را تعیین می‌کنیم.

گزاره ۶.۱.۲. *[1] برای $n \geq 3$، داریم $\gamma_{r2}(C_n) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{4} \rceil - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$.*

برهان. فرض کنید C_n دور $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1\}$ باشد، همچنین $g : V(C_n) \longrightarrow P(\{1,2\})$ به صورت زیر تعریف شود:

- اگر $i \equiv 1(mod 4)$، آنگاه $g(v_i) = \{1\}$.
- اگر $i \equiv 3(mod 4)$، آنگاه $g(v_i) = \{2\}$ و در غیر این صورت $g(v_i) = \emptyset$. درحالی‌که اگر $n \not\equiv 2(mod 4)$، فرض کنید $f = g$ و اگر $n \equiv 2(mod 4)$، فرض کنید برای $1 \leq i \leq n-1$، $f(v_i) = g(v_i)$ و $f(v_n) = \{2\}$، آنگاه f یک $2RDF$ برای C_n است. اگر $n \not\equiv 2(mod 4)$،

آنگاه وزن f برابر است با $w(f)=\lceil \frac{n}{2}\rceil = \lfloor \frac{n}{2}\rfloor + \lceil \frac{n}{4}\rceil - \lfloor \frac{n}{4}\rfloor$. در حالی‌که اگر $n\equiv 2(mod 4)$، $w(f)=\frac{(n+2)}{2}=\lfloor \frac{n}{2}\rfloor + \lceil \frac{n}{4}\rceil - \lfloor \frac{n}{4}\rfloor$. بنابرین با توجه به تعریف $\gamma_{r2}(C_n)$ که دارای مینیمم وزن است $\gamma_{r2}(C_n)\leq w(f)$ را داریم.

لذا نتیجه حاصل است. $\square$

گزاره ۷.۱.۲. *[1] برای $n\geq 3$، داریم $\gamma_{pr}(C_n\Box C_4)=2\gamma_{r2}(C_n)$. همچنین داریم*

$$\gamma_{pr}(C_n\Box C_4)=\begin{cases} 2\left\lceil \frac{n}{2}\right\rceil & \text{اگر } n\not\equiv 2(mod 4) \\ n+2 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}.$$

برهان. با استفاده از مفهوم گزاره۳.۱.۲ درمی‌یابیم که $\gamma_{pr}(C_n\Box C_4)\geq 2\lceil \frac{n}{2}\rceil$. پس به عنوان یک نتیجه از گزاره ۳.۱.۲ و نتیجه ۵.۱.۲، نتیجه می‌گیریم که در حالت $n\not\equiv 2(mod 4)$، $\gamma_{pr}(C_n\Box C_4)=2\lceil \frac{n}{2}\rceil$. حال فرض کنید که $n\equiv 2(mod 4)$. این آرگومان بدین معنی است که $\gamma_{pr}(C_n\Box C_4)$ هم مرتبه با n یا $n+2$ است. فرض کنید $\gamma_{pr}(C_n\Box C_4)=n$ و همچنین فرض کنید D یک مینیمم PDS در $\gamma_{pr}(C_n\Box C_4)$ است. می‌بینیم که دو رأس مجاور در D دقیقا ۸ رأس را پوشش می‌دهد. این را زمانی می‌توان بدست آورد که هر رأس در $\gamma_{pr}(C_n\Box C_4)$ مجاور دقیقا یک رأس در D باشد، که این غیر ممکن است، لذا در این حالت $\gamma_{pr}(C_n\Box C_4)=n+2$. $\square$

۱.۱.۲ احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی در درخت‌ها

در این قسمت می‌خواهیم یک الگوریتم خطی برای تعیین یک γ_{r2}-مجموعه در یک درخت دلخواه را معرفی‌کنیم. اگر T یک مسیر باشد، آنگاه $2RDF$ مینیمم است. با برچسب زنی یک برگ با نشانه ۱، رأس دوم با نشانه ۰ به همین ترتیب به صورت متناوبی برچسب زنی می‌کنیم(همچنین رأس سوم را ۲ می‌گذاریم، سپس دوباره رأس پنجم ۱ و همچنان ادامه می‌دهیم)، و اگر برگ یا همسایه‌ی دیگری داشته باشیم به دلخواه به آن یک نشانه دیگری اضافه می‌کنیم، که در این حالت $\gamma_{r2}(P_n)=\lfloor \frac{n}{2}\rfloor+1$ را داریم. الگوریتمی برای احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی در درخت‌های دلخواه موجود است که از الگوریتم فوق نتیجه می‌شود. (در حقیقت اگر T یک مسیر باشد، برای ریشه‌دارکردن یک برگ انتخابی، این الگوریتم توصیف کار را نمایش می‌دهد.)

هدف کلی در این بخش معرفی الگوریتم خطی برای تعیین $\gamma_{r2(T)}$-مجموعه در یک درخت دلخواه T است. برای این هدف، نوع دیگری از احاطه‌گری را معرفی می‌کنیم، که آن را مدل تک رنگ در احاطه‌گری رنگین‌کمانی می‌نامیم. درکل این مختصری از احاطه‌گری رنگین‌کمانی است.

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف و $f:V\longrightarrow\{0,1,2\}$ تابعی که برای هر رأس یک عدد انتخابی از $\{0,1,2\}$ تعیین می‌کند، وزن آن را برای $v\in V$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f[v]=\sum_{u\in N[v]} f(u)$$

رأس $v\in V$ را یک رأس بد نسبت به f می‌نامیم اگر $f(v)=0$ و $f[v]\leq 1$ در غیر این صورت، v را رأس خوب با نسبت f می‌نامیم. توجه کنید اگر v یک رأس خوب با نسبت به f و $f(v)=0$،

آنگاه $f[v] \geq ۲$. اگر هر رأس از درخت T یک رأس خوب نسبت به f باشد، آنگاه f را یک تابع احاطه‌گری-$\{۲\}$ ضعیف در G می‌نامیم. وزن $w(f)$ در f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$w(f) = \sum_{v\in V} f(v).$$

مینیمم وزن یک $W۲DF$ در T را عدد احاطه‌گری-$\{۲\}$ ضعیف T می‌نامیم که آن را با $\gamma_{w۲}(T)$ نمایش می‌دهیم. یک $W۲DF$ در T با وزن $\gamma_{w۲}(T)$ را $\gamma_{w۲}(T)$-تابع می‌نامیم.

گزاره ۸.۱.۲. *[1] برای هر درخت T، $\gamma_{r۲}(T) = \gamma_{w۲}(T)$ را داریم.*

برهان. فرض کنید $T = (V, E)$ و g یک $\gamma_{r۲}(T)$-تابع باشد.

همچنین فرض کنید $f_g : V \to \{۰, ۱, ۲\}$ تابعی باشد که برای هر $v \in V$، $f_g(v) =\mid g(v) \mid$. لذا f_g یک $W۲DF$ برای T با وزن $w(f_g) = w(g) = \gamma_{r۲}(T)$ است که $\gamma_{w۲}(T) \leq w(f_g) = \gamma_{r۲}(T)$.
حال کافی است نشان دهیم که $\gamma_{w۲}(T) \geq \gamma_{r۲}(T)$. فرض کنید f یک $\gamma_{w۲}(T)$- تابع باشد. حال تابع $g_f : V \to P(\{۱, ۲\})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

- اگر $f(v) = ۰$، آنگاه $g_f(v) = \phi$،
- اگر $f(v) = ۲$، آنگاه $g_f(v) = \{۱, ۲\}$،
- اگر $f(v) = ۱$، آنگاه $g_f(v)$ به صورت انتخابی دو حالت می‌تواند داشته باشد:

  (۱) $g_f(v) = \{۱\}$ یا $g_f(v) = \{۲\}$

  (۲) تعدادی از رأس‌های v برای هر یک یا $g_f(v) \neq \emptyset$ یا $\bigcup_{u\in N[v]} g_f(u) = \{۱, ۲\}$ ماکزیمم است. حالت (۲) نشان می‌دهد که تعداد رأس‌هایی که با g_f احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی را پوشش می‌دهد ماکزیمم است.

می‌بینیم که برای هر رأس $v \in V(G)$ یا $g_f(v) \neq \emptyset$ یا $\bigcup_{u\in N[v]} g_f(u) = \{۱, ۲\}$ (که g_fیک $۲RDF$در T است.)

برعکس فرض کنیم که رأس v این خاصیت نسبت به g_f را ندارد. چون v رأس خوب نسبت به f است، پس نتیجه می‌گیریم که $f(v) = ۰$، همسایه‌ای از v با وزن ۲ کمتر از f نیست، همه همسایه v با وزن حداکثر ۱ کمتر از f، و حداقل دو تا از آن‌ها به عنوان مثال x و y با وزن دقیقا ۱ داریم. بدون از دست دادن کلیت مساله هر همسایه z از v با $f(z) = ۱$ می‌فهمیم که $g_f(z) = \{۱\}$. فرض کنید T_x حاصل از $T - v$ شامل x است. انجام یک بیکرومات تغییر یک زیر درخت T_x(که همه ۱ها به ۲ تغییر می‌کنند و برعکس)، همچنین فرض کنید تابع $g'_f : V \to P(\{۱, ۲\})$ را تعریف می‌کنیم. هر رأس z در T_x خاصیت مطلوب را دارد اگر این دریافت کمتر از g_f باشد، آنگاه $\bigcup_{u\in N[v]} g'_f(u) = \{۱, ۲\}$ ازاین‌رو $g'_f(x) = \{۲\}$ و $g'_f(y) = \{۱\}$. و این خلاف انتخاب g_f ماست. در نتیجه g_f یک $۲RDF$ در T است و همچنین $\gamma_{r۲}(T) \leq w(g_f) = w(f) = \gamma_{w۲}(T)$. □

توجه کنید که در گزاره فوق اگر گراف یک دور باشد لزوما برقرار نیست. برای مثال

$$\gamma_{r۲}(C_۶) = ۴ > ۳ = \gamma_{w۲}(C_۶).$$

۲.۲ احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی در گراف‌ها

۱.۲.۲ پیچیدگی در مسئله احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی

می‌دانیم که مسئله احاطه‌گری محدود به گراف‌های وتری، NP-کامل است. از دو نتیجه برای اثبات مسئله احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۲. *[۲] تابع احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی NP-کامل است.*

برهان. ابتدا توجه کنید که تابع احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی NP است. زیرا اگر تابع $f : V(G) \to P(\{۱,۲\})$ با وزن k را در نظر بگیریم، به سادگی در زمان چندجمله‌ای می‌توان بررسی کرد که تابع احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی هست یا خیر. (قابل ملاحظه است که برای هر رأس u با $f(u) = \emptyset$ بررسی می‌شود که در همسایگی u چه رنگ‌هایی ظاهر می‌شود.)

فرض کنید که گراف G گراف دلخواه باشد، یک گراف G' از G می‌سازیم به طوریکه برای هر عدد صحیح مثبت k G' یک تابع احاطه‌گری ۲ رنگین‌کمانی با وزن $\mid V(G) \mid +k$ باشد، اگر و فقط اگر G یک مجموعه احاطه‌گری از اندازه k باشد. لذا فرض کنید که G' از G با اضافه کردن یک برگ به هر رأس از G بدست آمده باشد. پس G' را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$V(G') = V(G) \cup \{u_۱, u_۲, \dots, u_n\} \quad , \quad E(G') = E(G) \cup \{v_i u_i \mid i = ۱, ۲, \dots, n\}.$$

فرض کنید که D یک مجموعه احاطه‌گری از G با اندازه k باشد. اگر برای هر i، $v_i \in D$ آنگاه $f(v_i) = \{۱\}$ و $f(u_i) = \{۲\}$ ، یک تابع با وزن $n + k$ باشد، آنگاه به وضوح تابع احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی از G' را داریم. لذا ، هر رأس v_j از $V(G) \setminus D$ یک همسایه u_j با $f(u_j) = \{۲\}$، و یک همسایه $v_i \in D$ با $f(v_i) = \{۱\}$ را دارد. فرض کنید که f یک تابع احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی از G' باشد. چون هر برگ باید احاطه‌گر باشد، پس $w(f) > n$ خواهد بود. پس برای عدد صحیح مثبت k، $w(f) = n + k$. فرض کنید f' تابعی باشد که از f بدست آمده باشد بطوریکه هرگاه $f(u_i) = \{۱, ۲\}$، آنگاه $f'(u_i) = \{۲\}$ و $f'(v_i) = f(v_i) \cup \{۱\}$ باشد. بدیهی است که f' نیز تابع احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی از G' است و $w(f') \leq w(f)$ (برای هر i وزن f' کمتر از زمانی است که $\{۱\} \subseteq f(v_i)$ و $f(u_i) = \{۱, ۲\}$).

فرض کنید که D یک مجموعه از رأس‌های $V(G)$ باشد، به طوری که $f'(v_i) \neq \emptyset$. ادعا می‌کنیم که D مجموعه احاطه‌گری از G باشد. فرض کنید D مجموعه احاطه‌گری G نباشد، پس یک رأس $v_j \in V(G)$ وجود دارد به طوریکه $f(v_j) = \emptyset$ و هر رأس $v_i \in V(G)$ مجاور v_j است اگر $f'(v_i) = \emptyset$. چون f' تابع احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی G' است در نتیجه $f'(u_j) = \{۱, ۲\}$، که در تناقض با ترکیب f' است. درنتیجه D یک مجموعه احاطه‌گری G است. فرض کنید D' مجموعه رأس‌های v_i از D باشد به طوریکه $f(v_i) = \{۱, ۲\}$. به وضوح برای هر j که $v_j \notin D'$، $f'(u_j) \neq \emptyset$ را داریم.

بنابراین $w(f') \geq ۲ \mid D' \mid + (\mid D \mid - \mid D' \mid) + (n- \mid D' \mid) = n+ \mid D \mid$. لذا اندازه D حداکثر k است. بنابراین $\gamma(G) \leq k$ اگر و تنها اگر برای هر عدد صحیح مثبت k $\gamma_{r۲}(G') \leq n + k$، و به ویژه $\gamma_{r۲}(G') = \gamma(G) + n$.

می‌توانیم در زمان چندجمله‌ای G' را از G بسازیم ، و با درنظرگرفتن یک تابع احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی G' می‌توانیم یک مجموعه احاطه‌گری G در زمان چندجمله‌ای بسازیم. لذا با ترکیب f' از f و با انتخاب همه رأس‌های $V(G)$ با وزن ناتهی می‌توان تعیین کرد که کدام مجموعه احاطه‌گر است. و این بدین معنی است که تابع احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی NP-کامل است. □

از اثبات بالا نتیجه می‌گیریم که G' زمانی وتری است که G وتری باشد، لذا مسئله احاطه‌گری زمانی NP-کامل است که گراف‌ها وتری باشند.

نتیجه ۲.۲.۲. *[۲] تابع احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی زمانی NP-کامل است که محدود به گراف‌های وتری باشد.*

نتیجه ۳.۲.۲. *[۲] تابع احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی زمانی NP-کامل است که محدود به گراف‌های دو بخشی باشند.*

۳.۲ دسته بندی گراف ها

۱.۳.۲ مسیرها و دورها

گزاره ۱.۳.۲. *[۲]* $\gamma_{r2}(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

برهان. تابع $f : V(P_n) \to P\{1, 2\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
اگر $n \equiv 0$یا$2(mod 4)$ برای هر i به طوریکه $1 \leq i \leq n - 1$ قرار می‌دهیم

$$f(v_i) = \begin{cases} \{1\} & \text{اگر} i \equiv 1(mod 4) \\ \{2\} & \text{اگر} i \equiv 3(mod 4) \\ \emptyset & \text{درغیراینصورت} \end{cases}.$$

و برای v_n قرار می‌دهیم $f(v_n) = \{1\}$. برای هر رأس v_i به‌طوریکه $f(v_i) = \emptyset$ داریم

$$f(v_{i-1}) \neq f(v_{i+1}) \quad , \quad | f(v_{i-1}) |=| f(v_{i+1}) |= 1.$$

لذا f یک $2RDF$ روی رأس‌های P_n است، چون f روی رأس‌ها به صورت یکی در میان، $\emptyset$ است در نتیجه یک مجموعه تک عضوی به استثناء رأس v_n، تعریف می‌شود. بنابراین

$$w(f) = \frac{n}{2} + | f(v_n) | = \frac{n}{2} + 1.$$

و چون n زوج است پس $w(f) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. اگر $n \equiv 1$یا$3(mod 4)$ برای هر i به طوریکه $1 \leq i \leq n$ قرار می‌دهیم

$$f(v_i) = \begin{cases} \{1\} & i \equiv 1(mod 4) \\ \{2\} & i \equiv 3(mod 4) \\ \emptyset & \text{درغیراینصورت} \end{cases}.$$

در اینجا نیز مشابه حالت قبل f یک $۲RDF$ است و روی رأس‌ها به صورت یکی در میان $\emptyset$ و یک مجموعه تک عضوی تعریف می‌شود، از طرف دیگر n عددی فرد و $f(v_۱) \neq \emptyset$ و $f(v_n) \neq \emptyset$. درنتیجه داریم $w(f) = \frac{n-۱}{۲} + ۱ = \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor + ۱$. پس $\gamma_{r۲}(P_n) \leq \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor + ۱$. نشان می‌دهیم هر $\gamma_{r۲}$-تابع مانند h روی P_n، برای هر $v \in V(P_n)$ دارای شرط $۱ \leq| h(v) |$ است. اگر رأسی از $V(P_n)$ مانند v_i وجود داشته باشد بطوریکه $h(v_i) \neq \emptyset$، آنگاه از تعریف مسیر و $\gamma_{r۲}$-تابع بودن h، $h(v_{i-۱}) = h(v_{i+۱}) = \emptyset$ را داریم. (توجه داریم که v_i نمی‌تواند رأس انتهایی مسیر باشد چون در غیر اینصورت h بهینه نخواهد بود.) حال چون رأس v_i فقط رأس‌های $v_{i+۱}$ و $v_{i-۱}$ را احاطه‌ی رنگین‌کمانی می‌کند (یعنی درجه هر رأس ۲ است)، بنابراین می‌توان h را روی رأس‌های مذکور به صورت زیر تعریف کرد

$$h(v_{i-۱}) = \{۱\} \quad , \quad h(v_i) = \emptyset \quad , \quad h(v_{i+۱}) = \{۲\}.$$

پس برای هر $\gamma_{r۲}$-تابع h روی P_n و هر رأس v_i از P_n، $۱ \leq| h(v_i) |$ را داریم. اگر f یک $\gamma_{r۲}$-تابع نباشد پس می‌توان یک $۲RDF$ مانند g روی P_n را طوری تعریف می‌کنیم که $w(g) < w(f)$ و برای این منظور باید یک رأس v_i داشته باشیم که $g(v_i) = g(v_{i+۱}) = \emptyset$. اما دراین‌صورت چون درجه همه رأس‌ها ۲ است، $g(v_{i-۱}) = g(v_{i+۲}) = \{۱, ۲\}$ را داریم. بنابراین $w(f) \leq w(g)$ و این تناقض است، لذا f یک $\gamma_{r۲}$-تابع روی رأس‌های P_n است. □

گزاره ۲.۳.۲. *[۲] برای $n \geq ۳$، داریم* $\gamma_{r۲}(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{۴} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{۴} \right\rfloor$.

برهان. دور C_n را به صورت $v_۱v_۲, \dots, v_nv_۱$ در نظر گرفته و f را به صورت زیر روی آن تعریف می‌کنیم

$$f(v_i) = \begin{cases} \{۱\} & i \equiv ۱(mod۴) \\ \{۲\} & i \equiv ۳(mod۴) \\ \emptyset & \text{درغیراینصورت} \end{cases} \quad .$$

اینک اگر $n \equiv ۲(mod۴)$ تابع $g : V(C_n) \longrightarrow P\{۱, ۲\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
برای هر i به طوریکه $۱ \leq i \leq n - ۱$ قرار می‌دهیم $g(v_i) = f(v_i)$. و برای هر رأس v_n قرار می‌دهیم $g(v_n) = \{۲\}$ اگر $g(v_i) = \emptyset$، آنگاه $| g(v_{i-۱}) |=| g(v_{i+۱}) |= ۱$ و $g(v_{i-۱}) \neq g(v_{i+۱})$ لذا g یک $۲RDF$ روی رأس‌های C_n است و $w(g) = \frac{n}{۲} + ۱$ چون $n \equiv ۲(mod۴)$ داریم $\frac{n}{۲} = \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor$ و $\left\lceil \frac{n}{۴} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{۴} \right\rfloor = ۱$ بنابراین $w(g) = \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{۴} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{۴} \right\rfloor$.
اگر $n \neq ۲(mod۴)$، تابع $g : V(C_n) \longrightarrow P\{۱, ۲\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم برای هر i بطوریکه $۱ \leq i \leq n$ قرار می‌دهیم $g(v_i) = f(v_i)$ و مشابه حالت قبل در اینجا g یک $۲RDF$ است.
با توجه به تعریف تابع g و امکان فرد بودن عدد n،

- اگر $n \equiv ۰(mod۴)$، آنگاه $\left\lceil \frac{n}{۲} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor$ و $\left\lceil \frac{n}{۴} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{۴} \right\rfloor = ۰$.
- اگر $n \equiv ۱$یا$۳(mod۴)$، آنگاه داریم $\left\lceil \frac{n}{۲} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor + ۱$ و $\left\lceil \frac{n}{۴} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{۴} \right\rfloor = ۱$.

بنابراین برای $n \neq 2(mod4)$ داریم $w(g) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$. در نتیجه به ازای هر n داریم $\gamma_{r2}(C_n) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$. حال کافی است نشان دهیم $\gamma_{r2}(C_n) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$.
اگر f یک تابع احاطه‌گر ۲-رنگین‌کمانی بهینه(یک γ_{r2}-تابع) برای C_n باشد، آنگاه حداقل یک رأس $x \in V(C_n)$ وجود دارد بطوریکه $f(x) = \emptyset$. دراین‌صورت $f\mid_{C_n - x}$ یک $2RDF$ برای $C_n - x$ است، از طرف دیگر $C_n - x$ همان P_{n-1} می‌باشد، بنابراین $\gamma_{r2}(P_{n-1}) \leq \gamma_{r2}(C_n)$. و بنا به گزاره ۱.۳.۲، $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 \leq \gamma_{r2}(C_n)$. با توجه به مقدار n به پیمانه ۴ حالات زیر را در نظر گرفته و در هر حالت حکم را ثابت می‌کنیم.

حالت اول $n \equiv 0(mod4)$ پس $k \in Z$ وجود دارد بطوریکه $n = 4k$، دراین‌صورت

$$\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor 2k - \frac{1}{2} \right\rfloor + 1 = 2k$$

$$\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor = 0 \Rightarrow \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor = 2k.$$

از روابط فوق داریم

$$\gamma_{r2}(C_n) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

حالت دوم $n \equiv 1(mod4)$ پس $k \in Z$ وجود دارد بطوریکه $n = 4k + 1$، دراین‌صورت

$$\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 = 2k + 1$$

$$\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor = k + 1 - k = 1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor = 2k + 1.$$

از روابط فوق داریم

$$\gamma_{r2}(C_n) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor.$$

حالت سوم $n \equiv 3(mod4)$ پس $k \in Z$ وجود دارد بطوریکه $n = 4k + 3$، دراین‌صورت

$$\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 = 2k + 2$$

$$\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor = k + 1 - k = 1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor = 2k + 2.$$

از روابط فوق داریم

$$\gamma_{r2}(C_n) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

برای اثبات حکم در حالت $n \equiv 2(mod4)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم فرض کنید f یک γ_{r2}-تابع برای C_n باشد. اگر رأسی چون x از C_n وجود داشته باشد که $f(x) = \{1, 2\}$، آنگاه

$$\begin{aligned} w(f) &= 1 + \gamma_{r2}(P_{n-3}) = 2\left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor + 1 = 2 + \left\lfloor \frac{4k-1}{2} \right\rfloor + 1 \\ &= 2 + (2k-1) + 1 = \frac{n}{2} + 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor. \end{aligned}$$

و اگر به ازای هر $v \in C_n$ داشته باشیم $f(v) \leq ۱$، آنگاه به ازای هر دو رأس مجاور u و v از C_n، حداقل یکی از آن‌ها تحت f به مقدار غیر تهی برده می‌شوند. در نتیجه $w(f) \geq \frac{n}{۲}$ و از طرف دیگر، برای این nها اگر داشته باشیم $w(f) = d\frac{n}{۲}$، آنگاه دو رأس x و y با یک همسایه‌ی مشترک وجود دارند به طوریکه $f(x) = f(y) \neq \emptyset$ و این ۲RDF برای f تناقض است. پس $w(f) \geq \frac{n}{۲} + ۱$. درنتیجه برای $n \equiv ۲ (mod ۴)$ داریم

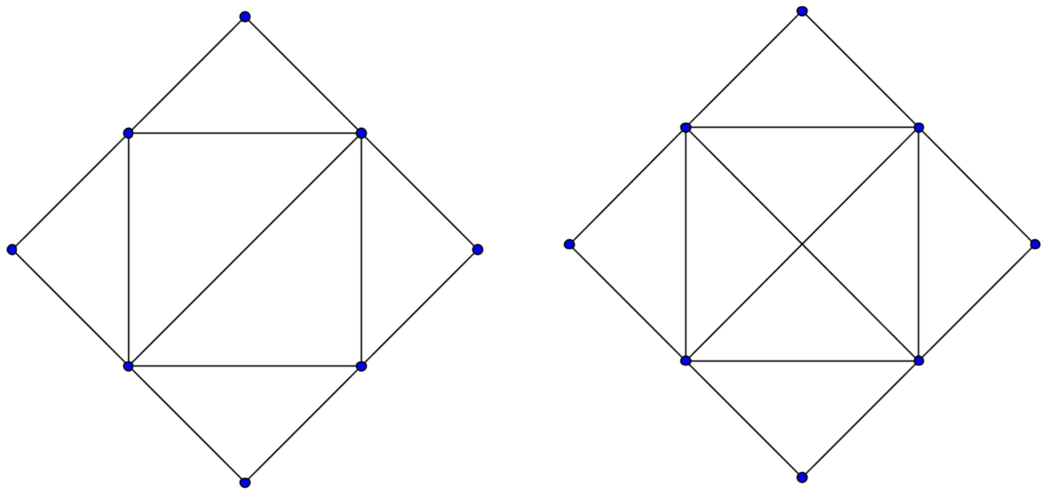
$$w(f) \geq \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{۴} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{۴} \right\rfloor .$$

لذا حکم ثابت است. □

به طور قابل ملاحظه $\gamma_{r۲}(C_n) = \gamma_t(C_n)$ برای $n \geq ۳$ در اینجا γ_t مجموع عدد احاطه‌گری کلی را مشخص می‌کند.

۲.۳.۲ خورشیدها

تعریف ۳.۳.۲. یک گراف وتری روی ۲n رأس ($n \geq ۳$) را **خورشید** [1] نامیم و آن را با نماد S_n نمایش می‌دهیم، هرگاه مجموعه رأس‌های آن قابل افراز به دو مجموعه $W = \{w_۱, w_۲, \ldots, w_n\}$ و $U = \{u_۱, u_۲, \ldots, u_n\}$ باشد، به طوریکه W مجموعه‌ای مستقل و رأس u_i مجاور w_j باشد اگر و تنها اگر $i = j$ یا $i \equiv j + ۱ (mod\ n)$.
اگر U گراف کامل باشد، آنگاه گراف حاصل را خورشید کامل گوییم. در شکل زیر سمت چپ یک خورشید $S_۴$ است و شکل سمت رأست خورشید کامل $S_۴$ است.



گزاره ۴.۳.۲. *[۲] برای $n \geq ۳$، $\gamma_{r۲}(S_n) = n$ را داریم.*

[1] sun

برهان. فرض کنید $f : V(S_n) \to P(\{۱,۲\})$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:
برای nهای زوج اگر $i \equiv ۱ (mod ۲)$ قرار می‌دهیم $f(w_i) = \{۱\}$ و اگر $i \equiv ۰ (mod ۲)$ قرار می‌دهیم $f(w_i) = \{۲\}$ و به بقیه رأس‌های U، $\emptyset$ را اختصاص می‌دهیم. برای nهای فرد، اگر $i \equiv ۰ (mod ۲)$ برای $۳ \leq i \leq n-۱$، قرار می‌دهیم $f(w_i) = \{۲\}$ و اگر $i \equiv ۱ (mod ۲)$ برای $۳ \leq i \leq n-۲$، قرار می‌دهیم $f(w_i) = \{۱\}$، برای رأس‌های u_n قرار می‌دهیم $f(u_n) = \{۱,۲\}$ و به بقیه رأس‌ها $\emptyset$ را اختصاص می‌دهیم. دراین‌صورت f یک $۲RDF$ روی S_n است لذا f تابع احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی در S_n است. این بدین معنی است که $\gamma_{r۲}(S_n) \leq w(f) = n$.
حال کافی است نشان دهیم $\gamma_{r۲}(S_n) \geq n$. برای این منظور f را یک $\gamma_{r۲}$-تابع روی S_n در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم W' زیرمجموعه W، مجموعه‌ای از رأس‌های w_i باشد به طوریکه $f(w_i) \neq \emptyset$ و قرار می‌دهیم $W'' = W \setminus W'$. اگر $W' = W$، آنگاه $\gamma_{r۲}(S_n) \geq \sum_{i=۱}^{n} \mid f(w_i) \mid \geq n$.
در غیراینصورت، برای هر رأس $w \in W''$ ، $f(N(w)) = \{۱,۲\}$ را داریم(چون f یک $۲RDF$ است).
از تعریف گراف خورشید برای i و j متمایز داریم:
$\mid N(w_i) \cap N(w_j) \mid \leq ۱$. چون به ازای هر $۱ \leq i \leq n$، $N(w_i) \subset U$ را داریم(یعنی هر رأس از W'' باید به وسیله رأس‌های U احاطه شود) بنابراین $\mid W'' \mid \leq \mid \sum_{u \in U} \mid f(u) \mid$. از این‌رو

$$\gamma_{r۲}(S_n) \geq \mid W' \mid + \sum_{u \in U} \mid f(u) \mid \geq \mid W' \mid + \mid W'' \mid = \mid W \mid = n.$$

□

۳.۳.۲ گراف پترسن تعمیم یافته

به ازای هر $۱ \leq k \leq n-۱$، گراف پترسن توسعه یافته $P(n,k)$ گرافی است روی $۲n$ رأس $(n \geq ۳)$، به طوریکه

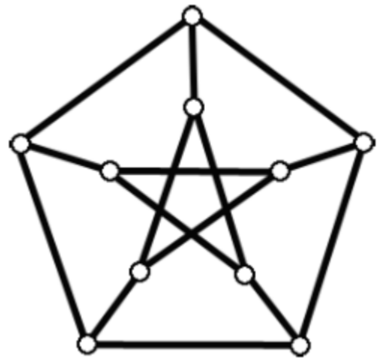
$$V(P(n,k)) = \{u_i, v_i : ۰ \leq i \leq n-۱\}$$

و

$$E(P(n,k)) = \{u_i u_{i+۱}, u_i v_i, v_i v_{i+k} : ۰ \leq i \leq n-۱ \text{ هستند } n \text{ اندیس‌ها به پیمانه}\}.$$

اگر در تعریف گراف توسعه یافته پترسن $P(n,k)$ شرط اول بودن n و k نسبت به هم گنجانده شود، آنگاه دسته‌ای از گراف‌های پترسن توسعه یافته بدست می‌آید که با نماد $GP(n,k)$ نمایش داده می‌شود.
فرض کنید $n \geq ۳$ و k اعداد طبیعی نسبت به هم اولی باشند به طوریکه $k < n$. دراین‌صورت ***گراف پترسن تعمیم یافته*** *$GP(n,k)$* [۲] *به صورت زیر تعریف می‌شود:*
فرض کنید C_n ، C'_n دو دور مجزا به طول n باشند. فرض کنید رأس‌های C_n، $u_۱, u_۲, \ldots, u_n$ و یال‌های آن $u_i u_{i+۱}$ که $i = ۱, \ldots, n-۱$ به همراه $u_n u_۱$. و همچنین فرض کنید رأس‌های C'_n، $v_۱, v_۲, \ldots, v_n$ و یال‌های آن $v_i v_{i+k}$ که $i = ۱, \ldots, n$، و $i+k$ به پیمانه n است. گراف $GP(n,k)$ از اجتماع C_n و C'_n با اضافه کردن یال‌های u_i, v_i که $i = ۱, \ldots, n$ بدست می‌آید. به عنوان مثال گراف پترسن $GP(۵,۲)$ گراف پترسن مشهور است که در شکل زیر دیده می‌شود.

[۲] Generalized Petersen graphs



شکل ۱.۲: گراف پترسن

گزاره ۵.۳.۲. *[۲] برای گراف پترسن تعمیم یافته $GP(n,k)$ داریم:* $\gamma_{r۲}(GP(n,k)) \leq n$.

برهان. برای اثبات کافی است یک $۲RDF$ با وزن n برای $GP(n,k)$ پیدا کنیم. با توجه به مقدار k دو حالت کلی زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت اول k فرد باشد. تابع $f : V(GP(n,k)) \rightarrow P(\{۱,۲\})$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم: برای هر $u_i \in VGP(n,k)$

$$f(u_i) = \begin{cases} \emptyset & \text{اگر } i \text{ فرد باشد} \\ \{۱\} & \text{اگر } i \text{ زوج باشد} \end{cases}.$$

برای هر $v_i \in VGP(n,k)$

$$f(v_i) = \begin{cases} \{۲\} & \text{اگر } i \text{ فرد باشد} \\ \emptyset & \text{اگر } i \text{ زوج باشد} \end{cases}.$$

دراین‌صورت اگر $u_j \in C_n$، $f(u_j) = \emptyset$ (لذا j فرد است)، آنگاه $f(v_j) = \{۲\}$ و $f(u_{j+۱}) = \{۱\}$. بنابراین $\bigcup_{x \in N[u_j]} f(x) = \{۱,۲\}$ و اگر $v_j \in C'_n$ با $f(v_j) = \emptyset$ (بنابراین j زوج است)، آنگاه $f(u_j) = \{۱\}$ و چون k فرد و j زوج است، پس $j+k$ فرد است. از طرف دیگر چون $j+k$ به پیمانه n است پس اگر $j+k < n$، آنگاه $f(v_{j+k}) = \{۲\}$. و اگر $j+k \geq n$، آنگاه برای nهای زوج، $j+k$ به پیمانه n فرد است پس $f(v_{j+k}) = \{۲\}$. در نتیجه f یک $۲RDF$ برای $GP(n,k)$ با $w(f) = n$ داریم.

حالت دوم k زوج باشد. چون n و k نسبت به یکدیگر اول هستند در نتیجه n فرد است. در این حالت f را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که برای هر i، $f(v_i) = \emptyset$ اگر و تنها اگر $f(u_i) \neq \emptyset$. به علاوه فرض می‌کنیم اگر $f(v_i) \neq \emptyset$، آنگاه $f(v_i) = \{۲\}$ باشد. و اگر $f(u_i) \neq \emptyset$، آنگاه $f(u_i) = \{۱\}$. به این ترتیب با توجه به تعریف $GP(n,k)$ و اینکه n فرد است $w(f) = n$ حاصل می‌شود، و در تعریف f کافی است که برای هر i، $f(v_i)$ تعیین کنیم و با توجه به توضیحات فوق مقدار f مشخص می‌شوند. فرض کنید که i یک عدد بین ۱ و n باشد. فرض کنید $d = \lfloor n/k \rfloor$. برای i با $i/k \leq d$، f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: اگر $\lfloor (i-۱)/k \rfloor$ زوج باشد، آنگاه مجموعه $f(v_i) = \{۲\}$ اگر وتنها اگر i فرد باشد (برای مثال $f(v_۱) = \{۲\}$ و $f(v_k) = \emptyset$). اگر $\lfloor (i-۱)/k \rfloor$ فرد باشد، آنگاه مجموعه $f(v_i) = \{۲\}$

اگر و تنها اگر i زوج باشد. (برای مثال $f(v_{k+۱}) = \emptyset$ و $f(v_{۲k}) = \{۲\}$). برای تعریف مقدار f در رأس‌ها با طول اندیس‌ها سه حالت خواهیم داشت:

(۱) $n \equiv ۳ (mod ۴)$.

لذا $n = dk + ۳$ و مجموعه $f(v_{dk+۱}) = f(v_{dk+۳}) = \emptyset$ و $f(v_{dk+۲}) = \{۲\}$. پس f یک $۲RDF$ است.

(۲) $n \equiv ۱ (mod ۴)$. d فرد باشد.

لذا $n = dk + ۱$ و $f(v_n) = \emptyset$. بنابراین f یک $۲RDF$ است.

(۳) $n \equiv ۱ (mod ۴)$. d زوج باشد. آنگاه $n = dk + ۱$. در این حالت با جایگذاری $f(v_n) = \emptyset$، v_n همسایه‌ای با $f(x) = \{۲\}$ ندارد. از طرف دیگر با جایگذاری $f(v_n) = \{۲\}$ سه رأس متوالی را خواهیم داشت $v_{dk}, v_{dk+۱}, v_۱$ آنگاه مقدار f به $\{۲\}$ تغییر می‌کند. با استفاده از تعریف f برای همه‌ی همسایه‌های آن در C_n، $f(u_i) = \emptyset$ را داریم. اما u_n همسایه‌ای با $f(x) = \{۱\}$ ندارد. در نتیجه $f(v_{dk}) = \emptyset$ و ازاین‌رو $f(v_n) = \{۲\}$. توجه کنید که v_{dk} مجاور $v_{k-۱}$ است و $f(v_{k-۱}) = \{۲\}$ ازاین‌رو v_{dk} احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی است. برای همه‌ی رأس‌های دیگر نیز به همین ترتیب می‌توان نشان داد که f $۲RDF$ است.

□

بر این باوریم که این کران برای دسته‌هایی از گراف‌های پترسن تعمیم یافته بسته است. لذا یک استدلال برای این ادعا با کران پایین ذیل برای عدد احاطه‌گری در یک گراف دلخواه G ثابت شده است :

$$\gamma(G) \geq \lceil \frac{|V(G)|}{۱ + \Delta(G)} \rceil t.$$

ازاین‌رو برای گراف‌های پترسن تعمیم یافته نامساوی $\gamma(GP(n,k)) \geq \lceil \frac{n}{۲} \rceil$ را داریم. بنابراین برای هر $۲RDF$ f با $| f(x) | \in \{۰,۲\}$ برای هر $x \in V(GP(n,k))$، $w(f) \geq n$ را خواهیم داشت. به علاوه کران پایین کلی برای $\gamma_{r۲}(GP(n,k))$ معرفی می‌کنیم.

گزاره ۶.۳.۲. *[۲] برای هر عدد n و k نسبت به هم اولی که $k < n$ داریم $\gamma_{r۲}(GP(n,k)) \geq \lceil \frac{۴n}{۵} \rceil$.*

برهان. فرض کنید اعداد n و k نسبت به هم اول و تابع $H = GP(n,k)$ را تعریف می‌کنیم. فرض کنید f یک $۲RDF$ در H با مینیمم وزن باشد و $S = \{x \in V(H) : f(x) \neq \emptyset\}$. پس برای هر $u \in V(H) \setminus S$، $| f(N(u)) | \geq ۲$ را داریم. با استفاده از مقدار فوق برای همه رأس‌ها در S \ $u \in V(H)$ داریم $\sum_{u \in V(H) \setminus S} | f(N(u)) | \geq ۲(| V(H) | - | S |) \geq ۲(| V(H) | - \gamma_{r۲}(H))$. چون هر رأس از S به حداقل سه رأس از $V(H) \setminus S$ وصل است، لذا در سمت چپ نامساوی فوق هر وزن حداقل سه بار شمارش می‌شود، بنابراین $\gamma_{r۲}(H) \geq \frac{۲}{۵} | V(H) | = \frac{۴}{۵}n$. از طرفی می‌دانیم که $\gamma_{r۲}(H)$ عدد صحیح است لذا از روابط فوق داریم $\gamma_{r۲}(H) \geq \lceil \frac{۴n}{۵} \rceil$. □

در ادامه می‌بینیم که با استفاده از قضیه فوق می‌توان کران‌های پایینی برای دسته‌های زیادی از گراف‌های پترسن تعمیم یافته بدست آورد. حال برای اعدا فرد مختلف $2RDF$هایی در $GP(n,k)$ معرفی می‌کنیم. از دو ردیف استفاده می‌کنیم که در ردیف اول مقدار رأس‌های $C_n=\{u_1,\dots,u_n\}$ و در ردیف دوم رأس‌های $C'_n=\{v_1,\dots,v_n\}$ را قرار می‌دهیم بطوریکه برای هر i u_i در موقیت فوقانی v_i قرارگرفته باشد. توجه کنید که مقدار $2RDF$ها از $\emptyset,\{1\},\{2\}$ استفاده می‌شود(که هر یک به ترتیب با ۲ ,۱ ,۰ نمایش داده می‌شود). چون k زوج است و n فرد است، لذا ۵ نمونه را می‌بینیم:

$n\equiv 1(mod 10):$
$1001020020\dots 1001020020221$
$0220001100\dots 0220001100022$
$n\equiv 3(mod 10):$
$1001020020\dots 1001020020100$
$0220001100\dots 0220001100022$
$n\equiv 5(mod 10):$
$1001020020\dots 100102002010011$
$0220001100\dots 022000110002200$
$n\equiv 7(mod 10):$
$1001020020\dots 10010200201001020$
$0220001100\dots 02200011000220011$
$n\equiv 9(mod 10):$
$1001020020\dots 1001020020100102002$
$0220001100\dots 0220001100022000110.$

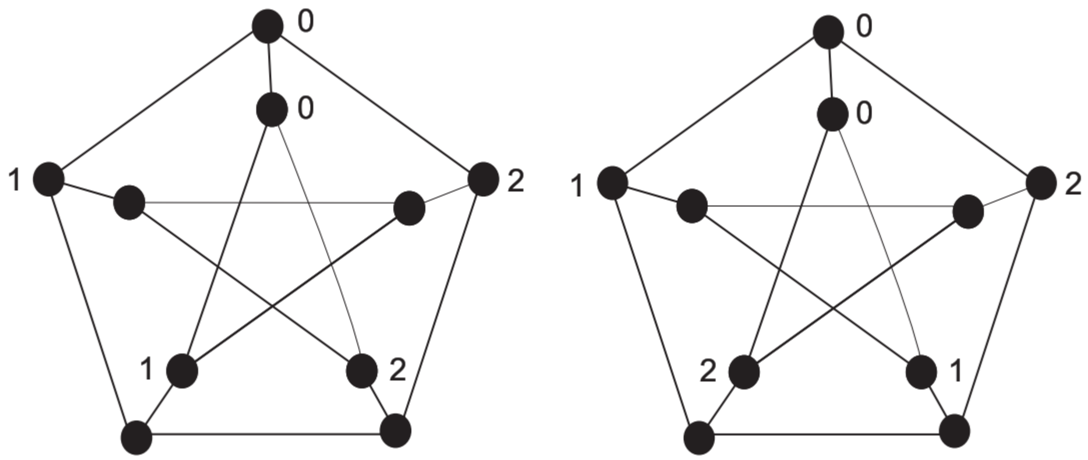
توجه داشته باشید که برای $n\equiv 3(mod 10)$ و $n\equiv 9(mod 10)$، $\gamma_{r2}(GP(n,2))=\lceil\frac{4n}{5}\rceil$ را داریم و برای nهای فرد دیگر $\gamma_{r2}(GP(n,2))=\lceil\frac{4n}{5}\rceil+1$ را داریم.
از طرف دیگر برای گراف‌های پترسن تعمیم یافته کران‌های بالای از قضیه ۵.۳.۲ به ویژه برای گراف پترسن $GP(5,2)$ می‌توان بدست آورد.

گزاره ۷.۳.۲. *[۲]* $\gamma_{r2}(GP(5,2))=5$.

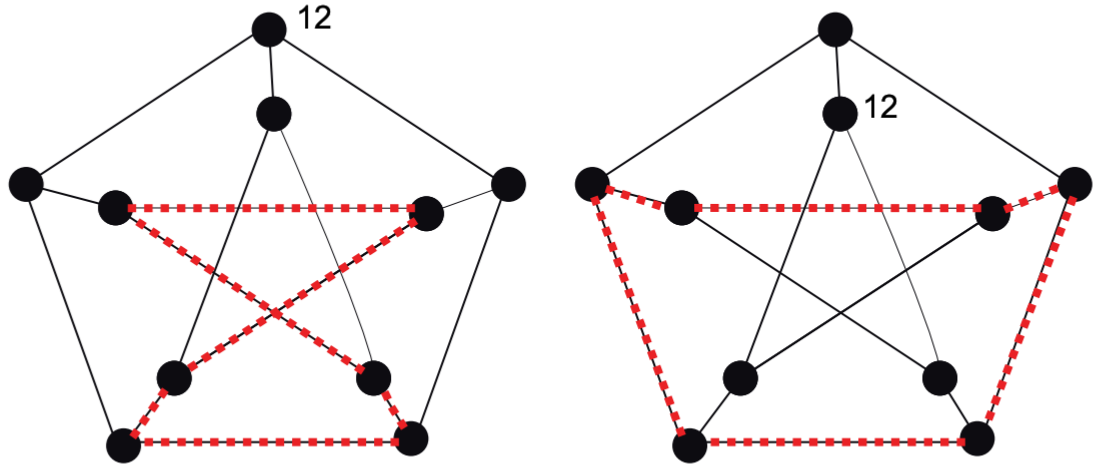
برهان. برای اثبات کافی است نشان دهیم که نمی‌توانیم یک تابع f، $2RDF$ برای $GP(5,2)$ با وزن $w(f)=4$ بسازیم. لذا فرض کنید چنین تابع fای وجود دارد. ابتدا فرض کنید که برای هر رأس $v\in V(GP(5,2))$، $|f(v)|\leq 1$. پس دو رأس مجاور $u\in V(C_5)$ و $v\in V(C'_5)$ وجود دارند به طوریکه $f(u)=\emptyset$ و $f(v)=\emptyset$.
دو راه وجود دارد که نشان می‌دهد چگونه u و v احاطه‌گر هستند. (که در تصویر می‌بینیم که u و v با ۰ مشخص می‌شود) اما در هر دو حالت می‌بینیم که f یک $2RDF$ نیست. حال فرض کنید که برای

بعضی از رأس‌های v در $GP(۵,۲)$ ، $f(v) = \{۱,۲\}$. لذا دور القایی $C_۶$ که با v پوشش داده نمی‌شود، وجود دارد. (با توجه به شکل ۷.۳.۲).

لذا می‌توان دید که نمی‌توان یک $۲RDF$ با وزن حداقل ۴ بدست آورد که دور را پوشش دهد. □



شکل ۲.۲: حالت اول



شکل ۳.۲: حالت دوم

۴.۲ احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی و احاطه‌گری رومی در گراف‌ها

می‌دانیم که برای هر گراف G هر $\gamma_{r2}(G)$-تابع، یک $\gamma_R(G)$-تابع است یعنی می‌توان از آن یک $\gamma_R(G)$-تابع پدید آورد، پس $\gamma_{r2}(G) \leq \gamma_R(G)$ و لذا $\frac{\gamma_{r2}(G)}{\gamma_R(G)} \leq 1$ می‌توانیم بررسی کنیم که آیا برای هر گراف G برای قسمت $\gamma_R(G)/\gamma_{r2}(G)$ یک کران بالا وجود دارد یا خیر. پاسخ این سوال مثبت است و در قضیه زیر نشان داده می‌شود.

قضیه ۱.۴.۲. *[۷] برای هر گراف G، $\gamma_R(G)/\gamma_{r2}(G) \leq \frac{3}{2}$ را داریم.*

برهان. فرض کنید f یک $\gamma_{r2}(G)$-تابع، و برای هر $i = 1, 2$ فرض کنید A_i مجموعه رأس‌های با u شرط $i \in f(u)$ باشد. بوضوح اگر یک رأس از G دارای برچسب $\{1, 2\}$ باشد، آنگاه $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. همچنین $\gamma_{r2} = |A_1| + |A_2|$. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید که $|A_1| \leq |A_2|$. بنابرین $|A_1| \leq \frac{|A_1|+|A_2|}{2} = \frac{\gamma_{r2}(G)}{2}$. تابع $g : V(G) \to \{0, 1, 2\}$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } f(x) = \emptyset \\ 1 & \text{اگر } f(x) = \{2\} \\ 2 & \text{اگر } 1 \in f(x) \end{cases}.$$

چون f یک $2RDF$ برای G است در نتیجه g یک RDF در G است، یعنی

$$\gamma_R(G) \leq w(g) = 2|A_1| + |A_2|.$$

در نتیجه خواهیم داشت $\gamma_R(G) \leq 2|A_1| + |A_2| = |A_1| + |A_1| + |A_2| \leq \frac{3}{2}\gamma_{r2}(G)$. □

لم ۲.۴.۲. *[۷] اگر T یک درخت زیر تقسیم باشد، آنگاه $\gamma_R(T) \leq \frac{2(|V(T)|+1)}{3}$.*

برهان. از استقرا روی مرتبه n در T استفاده می‌کنیم. به وضوح اگر $n \leq 3$ باشد رابطه فوق برای $n = 3$ برقرار است. لذا فرض کنیم $n \geq 5$ و همچنین برای هر درخت زیرتقسم T' با مرتبه n' که $n' < n$ رابطه فوق برقرار باشد یعنی داشته باشیم $\gamma_R(T') \leq \frac{2(n'+1)}{3}$. فرض کنید T درخت زیرتقسیم با مرتبه n باشد. توجه کنید که T قطر زوج به طول حداقل ۴ است. حال یک مسیر قطری $u_0 - u_1 - \cdots - u_{diamT}$ را در نظر می‌گیریم که u_2 ماکزیمم درجه ممکن را داشته باشد. توجه کنید که u_i یک رأس زیر تقسیم برای هر i فرد می‌باشد، و برای چنین رأسی $d_T(u_i) = 2$. ابتدا فرض کنیم که $d_T(u_2) \geq 3$. اگر $diam(T) = 4$ آنگاه T یک درخت زیرتقسیم از ستاره $K_{1,t}(t \geq 3)$است. در این حالت T با مرتبه $2t + 1$ و $\gamma_R(T) = 2t + 1 \leq \frac{2(2t+2)}{3}$. بنابراین نتیجه حاصل قابل قبول است. لذا فرض کنید که $diam(T) \geq 6$ زیر درخت T_{u3} و T_{u4} را در نظر می‌گیریم که از درخت T با حذف یال u_3u_4 بدست می‌آید که $u_3 \in V(T_{u3})$. به وضوح T_{u3} یک تاج از یک ستاره است. که $n(T_{u3}) = 2d_T(u_2)$ و $\gamma_R(T_{u3}) = 1 + d_T(u_2)$. همچنین چون T_{u4} یک درخت زیر تقسیم با مرتبه $n(T_{u4}) \geq 3$ پس بنا به فرض استقرا در T_{u4} داریم $\gamma_R(T_{u4}) \leq \frac{2(|V(T_{u4})|+1)}{3}$. حال بدیهی است که $\gamma_R(T) \leq \gamma_R(T_{u4}) + \gamma_R(T_{u3})$. پس با جایگذاری، $\gamma_R(T) \leq \frac{2(|V(T)|+1)}{3}$ را داریم. حال فرض کنید که $d_T(u_2) = 2$، و T_{u5} و T_{u6} زیر درخت‌هایی که از T با حذف یال u_5u_6 بدست می‌آیند، که

$u_5 \in V(T_{u5})$. چون $d_T(u_2) = 2$، مسیر قطری را انتخاب می‌کنیم که هر رأس T_{u5} بجز شاید u_4 از درجه یک یا دو باشند. همچنین هر برگ در T_{u5} به جز u_5 فاصله دو یا چهار از u_4 را داشته باشد. همچنین فرض کنید k و r عددی از برگ‌ها در T_{u5} که به ترتیب فاصله دو و چهار از u_4 را دارند. آنگاه T_{u5} از مرتبه $4k+2r+2$ که $k \geq 1$ و $r \geq 0$، و همچنین $\gamma_R(T_{u5}) = 2k+2+r$ حال اگر $diam(T) = 6$، آنگاه T_{u6} یک درخت با مرتبه $|\{u_6\}|$ خواهد بود. چون $\gamma_R(T) = 2k+2+r+1 \leq \frac{2(|V(T)|+1)}{3}$. بنابراین نتیجه قابل قبول است.

حال فرض کنید که $diam(T) \geq 8$، دراین‌صورت T_{u6} یک زیر درخت زیر تقسیم با مرتبه $n(T_{u3}) \geq 3$ خواهد بود. با فرض استقرا روی T_{u6}، $\gamma_R(T_{u6}) \leq \frac{2(|V(T_{u6})|+1)}{3}$. به وضوح $\gamma_R(T) \leq \gamma_R(T_{u5}) + \gamma_R(T_{u6})$. لذا $\gamma_R(T) \leq \frac{2(|V(T)|+1)}{3}$. $\square$

قضیه ۳.۴.۲. *[7] برای هر درخت T کران زیر را داریم:* $\frac{\gamma_R(T)}{\gamma_{r2}(T)} \leq \frac{4}{3}$.

برهان. از استقرا روی مرتبه n درخت T استفاده می‌کنیم. به وضوح اگر $n \in \{1,2,3\}$، آنگاه $\gamma_R(T) = \gamma_{r2}(T)$. پس در این حالت رابطه فوق برقرار است. لذا فرض کنیم $n \geq 4$ و رابطه فوق برای هر درخت T' با مرتبه n' که $n' < n$ برقرار باشد. بنابراین رابطه فوق را برای درخت T با مرتبه n ثابت می‌کنیم. در بین همه $\gamma_{r2}(T)$-تابع‌ها، فرض کنید که f یکی از توابعی باشد که برگی با مقدار $\{1,2\}$ نداشته باشد. به وضوح چنین تابعی وجود دارد. لذا فرض کنید V_2 مجموعه‌ای از رأس‌های u باشد به طوریکه $f(u) = \{1,2\}$، V_0 مجموعه رأس‌های uایی که $f(u) = \emptyset$ و $V_1 = V(T) - (V_2 \cup V_0)$. همچنین a و b دو رأس مجاور از T باشند که یا $f(a) = f(b) = \emptyset$ و یا هم $f(a) \neq \emptyset$ و هم $f(b) \neq \emptyset$. فرض کنید T_a و T_b زیر درخت‌هایی باشند که با حذف یال ab از درخت T بدست آمده باشند. پس تحدید f در $V(T_a)$ را که با $f\ |_{V(T_a)}$ نشان می‌دهیم یک $2RDF$ برای T_a است، و همچنین $f\ |_{V(T_b)}$ یک $2RDF$ برای T_b است. لذا $\gamma_{r2}(T_a) + \gamma_{r2}(T_b) \leq w(f\ |_{V(T_a)}) = \gamma_{r2}(T)$. از طرف دیگر بدیهی است که $\gamma_R(T) \leq \gamma_R(T_a) + \gamma_R(T_b)$. چون هر T_a و T_b مرتبه‌ای کمتر از n دارد لذا بنا به فرض استقرا، $3\gamma_R(T_a) \leq 4\gamma_{r2}(T_a)$ و $3\gamma_R(T_b) \leq 4\gamma_{r2}(T_b)$ را داریم. بنابراین از نامساوی‌های فوق نامساوی زیر را خواهیم داشت

$$\begin{aligned} 3\gamma_R(T) &\leq 3\gamma_R(T_a) + 3\gamma_R(T_b) \\ &\leq 4\gamma_{r2}(T_a) + 4\gamma_{r2}(T_b) \leq 4\gamma_{r2}(T). \end{aligned}$$

حال فرض کنید که مجموعه‌ای از رأس‌هایی که مجموعه تهی و ناتهی را تعیین می‌کنند مستقل هستند. لذا فرض کنید a یک رأس در V_0 باشد بطوریکه یا $d_T(a) \geq 3$ یا $d_T(a) = 2$ اما یک همسایه در V_2 داشته باشد. در این حالت فرض کنید که b یک همسایه a بطوریکه $\bigcup_{u \in N(a)} f(u) = \{1,2\}$ در درخت $T - ab$ باشد. واضح است که یک چنین رأس b وجود دارد. بااستفاده از روابطی که در فوق برای درخت $T - ab$ ثابت شد، $3\gamma_R(T) \leq 4\gamma_{r2}(T)$ را بدست می‌آوریم. ازاین‌رو هر رأس $x \in V_0$ درجه حداکثر ۲ دارد. پس x یا یک برگ متصل به یک رأس از V_2 است و یا x درجه ۲ و دو همسایه در V_1 دارد. فرض کنید که $V_2 \neq \emptyset$ و فرض کنید که $x \in V_2$. لذا همه همسایه‌های x برگ‌هایی هستند که چون

هر V_i، برای $i = ۱, ۲, ۰$ یک مجموعه‌ای مستقل است نتیجه می‌گیریم که T یک ستاره به مرکز x است. در این حالت نیز نتیجه برقرار است. ازاین‌رو می‌توانیم فرض کنیم که $V_۲ = \emptyset$و هنچنین همه برگ‌های T به $V_۱$ وابسته باشند. یعنی هر رأس از $V_۰$ درجه دو ، $V_۰$و $V_۱$ مجموعه‌های مستقل باشند. توجه کنید که چون $V_۲ = \emptyset$، $\gamma_{r۲}(T) =| V_۱ |$ را داریم. بنابراین مجموعه $V_۰$ را می‌توان مجموعه رأس‌های زیر تقسیم که از یال‌های درخت T' با مرتبه $n(T') =| V_۱ |$ نتیجه گرفته شده باشد. بنابراین T یک درخت زیر تقسیم و $| V_۰ |= \frac{n-۱}{۲}$ ، $| V_۱ |= \frac{n+۱}{۲} = \gamma_{r۲}(T)$. حال با استفاده از لم قبل $\gamma_R(T) \leq \frac{۲(n+۱)}{۳}$ و ازاین‌رو $\frac{\gamma_R(T)}{\gamma_{r۲}(T)} \leq \frac{۴}{۳}$. □

قضیه ۴.۴.۲. *[۱۸] اگر G یک گراف همبند از مرتبه $n \geq ۳$، آنگاه* $\gamma_{r۲}(G) \leq \frac{۳n}{۴}$.

قضیه ۵.۴.۲. *[۴] اگر G یک گراف از مرتبه $n \geq ۳$، آنگاه* $\gamma_R(G) \leq \frac{۴n}{۵}$.

گزاره ۶.۴.۲. *[۷] فرض کنید v رأس پشتیبان از درجه دو در یک گراف G و u یک برگ باشد، دراین‌صورت یک $\gamma_{r۲}(G)$-تابع f وجود دارد به طوریکه $| f(u) |= ۱$ و $f(v) = \emptyset$.*

برهان. فرض کنید w دومین همسایه رأس v در G باشد و f یک $\gamma_{r۲}(G)$-تابع باشد. به وضوح اگر $f(u) = \emptyset$، آنگاه $f(v) = \{۱, ۲\}$. بنابراین می‌توان $\gamma_{r۲}(G)$-تابع دیگری مانند h را در G تعریف کرد بطوریکه اگر $x \notin \{u, v, w\}$، آنگاه $h(x) = f(x)$ و $h(v) = \emptyset$، $h(w)$ و $h(u)$ طوری باشند که $f(u) \cup f(w) = \{۱, ۲\}$ و $| f(u) |=| f(w) |= ۱$.
حال فرض کنید که $f(u) \neq \emptyset$ دراین‌صورت $f(v)$ و $f(w)$ مجموعه‌های مستقل‌اند. به طور مشابه می‌توان یک $\gamma_{r۲}(G)$ -تابع h را تعریف کرد بطوریکه اگر $x \notin \{u, v, w\}$، آنگاه $h(x) = f(x)$ و $h(v) = \emptyset$، $h(w)$ و $h(u)$ طوری باشند که $f(u) \cup f(w) = \{۱, ۲\}$ و $| f(u) |=| f(w) |= ۱$، و اثبات کامل است. □

قضیه ۷.۴.۲. *[۷] اگر T یک درخت با مرتبه $n \geq ۳$ با l برگ و s پشتیبان باشد آنگاه*
$$\gamma_{r۲}(T) \leq \frac{(۲n + l + s)}{۴}.$$

برهان. از استقرا روی مرتبه n درخت T استفاده می‌کنیم. اگر $n = ۳$، آنگاه
$$\gamma_{r۲}(T) = ۲ < \frac{(۲n + l + s)}{۴} = \frac{۹}{۴}.$$
پس در این حالت رابطه برقرار است. لذا فرض کنید $n \geq ۴$ و فرض کنید که هر درخت T' با مرتبه n' که $۳ \leq n' < n$ با l' برگ و s' پشتیبان در رابطه مطلوب صدق می‌کند یعنی
$$\gamma_{r۲}(T') \leq \frac{(۲n' + l' + s')}{۴}.$$
لذا فرض استقرا برقرار است. حال برای درخت T با مرتبه n ثابت می‌کنیم. چون برای ستاره $K_{۱,p}$، نامساوی $\gamma_{r۲}(T) \leq \frac{(۲n+l+s)}{۴}$ را داریم، پس فرض می‌کنیم که T قطری به طول حداقل ۳ دارد. حال فرض کنید T شامل دو رأس مجاور u و v باشد که هر یک از درجه حداقل ۳ هستند. فرض کنید $T(u)$ و $T(v)$ زیر درختی از T که به ترتیب شامل u و v و از حذف یال uv بدست آمده باشند. فرض کنید $n_۱, l_۱, s_۱$ به ترتیب مرتبه، تعداد برگ‌ها و تعداد پشتیبان $T(u)$ باشد. و به صورت مشابه

و $n_۲, l_۲, s_۲$ برای $T(v)$ باشند. به وضوح $n_۱ + n_۲ = n$ و چون $n_۱, n_۲ \geq ۳$ پس $l_۱ + l_۲ = l$ و $s_۱ + s_۲ = s$. بنابراین $T(u)$ و $T(v)$ در فرض استقرا صدق می‌کنند ازاین‌رو $\gamma_{r۲}(T(u)) \leq \frac{(۲n_۱+l_۱+s_۱)}{۴}$ و $\gamma_{r۲}(T(v)) \leq \frac{(۲n_۲+l_۲+s_۲)}{۴}$ را داریم. فرض کنید $f_۱$ یک $\gamma_{r۲}(T(u))$-تابع و به طور مشابه $f_۲$ یک $\gamma_{r۲}(T(v))$-تابع باشند. یک $۲RDF$ برای $V(T)$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم

اگر $x \in V(T(u))$ قرار می‌دهیم $f(x) = f_۱(x)$ و اگر $x \in V(T(v))$ قرار می‌دهیم $f(x) = f_۲(x)$. به وضوح f یک $۲RDF$ برای T است و همچنین

$$\gamma_{r۲}(T) \leq w(f_۱) + w(f_۲) \leq \frac{(۲n_۱ + l_۱ + s_۱)}{۴} + \frac{(۲n_۲ + l_۲ + s_۲)}{۴} = \frac{(۲n + l + s)}{۴}.$$

از این پس همسایه‌های هر رأس از درجه حداقل ۳ را از درجه حداکثر ۲ در نظر می‌گیریم.

حال یک مسیر قطری $P : u_۰ - u_۱ - \cdots - u_{diam(T)}$ را درنظر می‌گیریم. به وضوح $u_۱$ پشتیبان است. توجه کنید که اگر $diam(T) = ۳$، آنگاه $۴ \leq \gamma_{r۲}(T) \leq ۳$، لذا $\gamma_{r۲}(T) \leq \frac{(۲n_۱+l_۱+s_۱)}{۴}$. ازاین‌رو فرض می‌کنیم $diam(T) \geq ۴$. حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول $d_T(u_۱) \geq ۳$ لذا مانند قبل فرض کنید که $d_T(u_۲) = ۲$. T' یک درخت که از T با حذف $u_۱$ و $u_۲$ و همه برگ‌های $u_۱$ بدست آمده باشد. اگر $n' = ۲$، آنگاه $n \geq ۶$، $l' \geq ۳$ و $s' = ۲$، همچنین $\gamma_{r۲}(T) = ۴ < \frac{(۲n+l+s)}{۴}$ خواهد بود.

ازاین‌رو فرض کنید $n' \geq ۳$ که $n' = n - ۲ - | l_{u_۱} |$، $l' \leq l - ۱$ و $s' \leq s$ اگر f' $\gamma_{r۲}(T')$-تابع دلخواه باشد، آنگاه یک $۲RDF$ f برای $V(T)$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم

اگر $x \in V(T')$، قرار می‌دهیم $f(x) = f'(x)$ و اگر $x \in l_{u_۱} \cup \{u_۲\}$، قرار می‌دهیم $f(u_۱) = \{۱, ۲\}$ و $f(x) = \emptyset$. که این نشان می‌دهد که

$$\gamma_{r۲}(T) = w(f) \leq w(f') + ۲.$$

از استقرا روی T' استفاده می‌کنیم لذا $\gamma_{r۲}(T) \leq \frac{(۲n'+l'+s')}{۴} + ۲ < \frac{(۲n+l+s)}{۴}$.

حالت دوم $d_T(u_۱) = ۲$، ابتدا فرض کنیم که $d_T(u_۲) \geq ۳$.

دو رأس $u'_۱$ و $u'_۰$ از مسیر قطری $u'_۰ - u'_۱ - u'_۲ \cdots - u_{diam(T)}$ را در نظر بگیرید. طبق حالت اول، می‌توان فرض کرد که $d_T(u'_۱) = ۲$. فرض کنید T' در ختی که از T با حذف $u_۰$ و $u_۱$ بدست آمده باشد. لذا $n' = n - ۲ \geq ۳$، $l' = l - ۱$ و $s' = s - ۱$. با کمک گزاره قبل یک $\gamma_{r۲}(T')$-تابع f' بطوریکه $f'(u'_۰) \neq \emptyset$، $f'(u_۲) \neq \emptyset$ و $f'(u'_۱) = \emptyset$ که $f'(u'_۰) \cup f'(u_۲) = \{۱, ۲\}$ و $| f'(u'_۰) | = | f'(u_۲) | = ۱$. یک تابع $۲RDF$ f برای $V(T)$ با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم اگر $x \in V(T')$، قرار می‌دهیم $f(x) = f'(x)$ و $f(u_۱) = \emptyset$، و $f(u_۰)$ وابسته به $f(u_۲)$ یا $\{۱\}$ و یا $\{۲\}$ است بطوریکه $f(u_۰) \cup f(u_۲) = \{۱, ۲\}$. این نشان می‌دهد که $\gamma_{r۲}(T) \leq w(f) = w(f') + ۱$. با کمک استقرا روی T'، نامساوی $\gamma_{r۲}(T) \leq \frac{(۲n'+l'+s')}{۴} + ۲ = \frac{(۲n+l+s)}{۴}$ را بدست می‌آوریم.

حال می‌توان فرض کرد که P یک مسیر قطری منحصر به فرد شامل $u_۲$ است. چون $d_T(u_۲) \geq ۳$، پس $u_۲$ یک پشتیبان و $d_T(u_۳) = ۲$. بنابراین زیر درخت حاصل از $u_۱$ و $u_۲$ و همه همسایه‌هاشان یک ستاره دوسر است که آن را S می‌نامیم و از مرتبه حداکثر ۵ است. توجه کنید که $\gamma_{r۲}(S) = ۳$. فرض کنید T' یک درخت حاصل از T با حذف همه رأس‌های S باشد.

چون $diam(T) \geq ۴$، پس $| l_{u_۲} | \geq ۱$. $n' = n - ۴ - | l_{u_۲} |$. اگر ۲ یا $n' = ۱$، آنگاه به ترتیب

۵ یا ۴ $\gamma_{r2}(T) = 4$ است، و نتیجه قابل قبول است.

همچنین فرض کنید که $n' \geq 3$.

به وضوح $l' \leq l - \mid L_{u_2} \mid$ و $s' \leq s - 1$. همچنین $\gamma_{r2}(T) \leq \gamma_{r2}(T') + \gamma_{r2}(S)$. به علاوه بنا به فرض استقرا T'، نامساوی $\frac{(2n+l+s)}{4} \geq 3 + \frac{(2n'+l'+s')}{4} \geq \gamma_{r2}(T)$ را بدست می‌آوریم. در نهایت فرض کنید که $d_T(u_2) = 2$. اگر $d_T(u_3) \geq 3$، آنگاه فرض کنید T' زیر درختی است که از T با حذف u_0، u_1 و u_2 بدست آمده باشد. پس $n' = n - 3 \geq 3$ ، $l' = l - 1$ و $s' = s - 1$. لذا $\gamma_{r2}(T) \leq \gamma_{r2}(T') + 2$ را داریم. به علاوه بنا به فرض استقرا T' نتیجه برقرار است. اگر $d_T(u_3) = 2$، آنگاه فرض کنید که T' درختی است که از T با حذف u_0 و u_1 بدست آمده باشد. پس $n' = n - 2 \geq 3$. اگر $n' = 3$، آنگاه T یک مسیر P_5 است، و نتیجه قابل قبول است. لذا فرض کنید که $n' \geq 4$. پس $l' = l$ و $s' = s$. حال فرض کنید f' یک $\gamma_{r2}(T')$–تابعی باشد که در گزاره ۶.۴.۲ صدق می‌کند. یک $2RDF$ f برای $V(T)$ با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم اگر $x \in V(T')$، $f(u_1) = \emptyset$ وابسته به $f'(u_2)$ $f(u_0) = \{1\}$یا$\{2\}$ که $f(u_0) \cup f(u_2) = \{1, 2\}$، قرار می‌دهیم $f(x) = f'(x)$. این نشان می‌دهد که $\gamma_{r2}(T) \leq \gamma_{r2}(T') + 1$. لذا بنا به فرض استقرا در T' نتیجه برقرار است. □

نتیجه ۸.۴.۲. *[۷] اگر T یک درخت با مرتبه $n \geq 3$ و l برگ و s پشتیبان باشد، آنگاه*

$$\gamma_R(T) \leq \frac{(2n + l + s)}{3}.$$

برهان. با کمک قضیه ۳.۴.۲، $\frac{3}{4}\gamma_R(T) \leq \gamma_{r2}(T)$ و همچنین با کمک قضیه ۷.۴.۲ رابطه زیر را بدست می‌آوریم

$$\frac{3}{4}\gamma_R(T) \leq \gamma_{r2}(T) \leq \frac{(2n + l + s)}{4}.$$

پس

$$\gamma_R(T) \leq \frac{(2n + l + s)}{3}.$$

□

گزاره ۹.۴.۲. *[۷] برای هرگراف همبند G با مرتبه $n \geq 3$، $\gamma_{r2}(G) + \frac{\gamma(G)}{2} \leq n$ را داریم.*

گزاره ۱۰.۴.۲. *[۷] اگر G یک‌گراف همبند با مرتبه n باشد، آنگاه $\gamma_{r2}(G) + (\delta - 1)\rho(G) \leq n$.*

برهان. بدیهی است که اگر $n \in \{1, 2\}$ نتیجه برقرار است. لذا فرض کنید که $n \geq 3$ و R مجموعه ماکزیمم بسته‌بندی G، $A = N(R)$ و $B = V(G) - (A \cup R)$.

به وضوح $\mid A \mid \geq \delta \mid R \mid$ و $\mid B \mid = n - \mid A \cup R \mid \leq n - (\delta + 1) \mid R \mid$.

حال یک $2RDF$، f در $V(G)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \begin{cases} \{1, 2\} & x \in R \\ \emptyset & x \in A \\ \{1\}\text{یا}\{2\} & x \in B \end{cases}.$$

این بدین معنی است که

$$\gamma_{r2}(G) \leq w(f) = 2 \mid R \mid + \mid B \mid$$
$$\Longrightarrow \gamma_{r2}(G) \leq 2\rho(G) + n - (\delta+1)\rho(G)$$
$$\Longrightarrow \gamma_{r2}(G) + (\delta-1)\rho(G) \leq n.$$

و اثبات کامل است. □

نتیجه ۱۱.۴.۲. *[۷] برای هر گراف همبند مجزا وتری G، داریم*
$$\gamma_{r2}(G) + (\delta-1)\gamma(G) \leq n.$$

گزاره ۱۲.۴.۲. *[۷] تفاضل $n - \gamma_{r2}(G) + \frac{\gamma_R(G)}{2}$ در یک گراف G با مرتبه n می‌توان به اندازه‌ی دلخواه بزرگ باشد.*

برهان. فرض کنید $k \geq 1$ یک عدد صحیح مثبت باشد و $m = 2(k+1)$. همچنین $P_{14}, P_{24}, \ldots, P_{m4}$ که m کپی مسیر P_4 باشد. برای $1 \leq i \leq m$، فرض کنید x_i یک پشتیبان برای P_{i4} باشد. فرض کنید T یک درخت از $P_{14}, P_{24}, \ldots P_{m4}$ با اضافه کردن یک رأس o که برای $i = 1, 2, \ldots, m$، مجاور هر رأس x_i باشد. بدیهی است که $\gamma_R(T) = \gamma_{r2}(T) = 3m$، لذا $\gamma_{r2}(T) + \frac{\gamma_R(T)}{2} - \mid V(T) \mid = k$. □

۵.۲ احاطه‌گری رومی در گراف‌ها

برای گراف $G = (V, E)$ و تابع $f : V \to \{0, 1, 2\}$ فرض کنید (V_0, V_1, V_2) افراز مرتب از V باشد، که به ازای $i = 0, 1, 2$، $V_i = \{v \in V \mid f(v) = i\}$ و $\mid V_i \mid = n_i$. دراین‌صورت بین تابع $f : V \to \{0, 1, 2\}$ و افراز مرتب (V_0, V_1, V_2) از V تناظر یک به یک وجود دارد. لذا می‌نویسیم:
$$f = (V_0, V_1, V_2).$$

تابع $f = (V_0, V_1, V_2)$ یک تابع احاطه‌گری رومی (RDF) روی گراف G است اگر $V_2 \succ V_0$، که $\succ$ بدین معنی است که مجموعه V_2 مجموعه V_0 را پوشش می‌دهد $V_0 \subseteq N[V_2]$، که وزن یک تابع احاطه‌گری رومی f عبارت است از $f(V) = \sum_{v \in V} f(v) = 2n_2 + n_1$. عدد احاطه‌گری رومی را با $\gamma_R(G)$ نشان می‌دهیم و مینیمم وزن یک تابع احاطه‌گری رومی از G است و یک تابع $f = (V_0, V_1, V_2)$ یک γ_R-تابع است اگر $f(V) = \gamma_R(G)$.

گزاره ۱.۵.۲. *[۸] برای هر گراف G، داریم $\gamma(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G)$.*

گزاره ۲.۵.۲. *[۸] برای هر گراف G با مرتبه n، $\gamma(G) = \gamma_R(G)$ اگر و تنها اگر $G = \overline{K_n}$.*

گزاره ۳.۵.۲. *[۸] فرض کنید $f = (V_0, V_1, V_2)$، γ_R-تابع باشد. دراین‌صورت*

(الف) $G[V_1]$، زیرگراف القا شده V_1 دارای ماکزیمم درجه حداکثر یک است.

(ب) هیچ یالی بین V_1 و V_2 وجود ندارد.

(ج) هر رأس از V_0 حداکثر با دو رأس از V_1 مجاور است.

(د) V_2 یک γ-مجموعه در $G[V_0 \cup V_2]$ است.

(ه) فرض کنید $H = G[V_0 \cup V_2]$ باشد. دراین‌صورت به ازای هر رأس $v \in V_2$ حداقل دو $H - pn$(همسایگی خصوصی) موجود است.

(و) اگر v رأس تنها در $G[V_2]$ و دقیقا یک همسایه‌ی خارجی $H - pn$ باشد مانند w که $w \in V_0$ داشته باشد، آنگاه $N(w) \cap V_1 = \emptyset$.

(ی) فرض کنید k_1 برابر تعداد رئوس ناتنها در $G[V_2]$ باشد و $C = \{v \in V_0 : \mid N(v) \cap V_2 \mid \geq 2\}$. فرض کنید $\mid C \mid = c$. دراین‌صورت $n_0 \geq n_2 + k_1 + c$.

گزاره ۴.۵.۲. *[۸] فرض کنید $f = (V_0, V_1, V_2)$ یک γ_R-تابع درگراف فاقد رأس تنهای G باشد که در آن n_1 مینیمم است. دراین‌صورت*

(الف) V_1 مستقل و $V_0 \cup V_2$ یک پوشش رأسی است.

(ب) $V_0 \succ V_1$.

(ج) هر رأس V_0 با حداکثر یک رأس از V_1 مجاور است، به عبارت دیگر V_1 یک ۲-بسته‌بندی است.

(د) فرض کنید $v \in G[V_2]$ دقیقا دو همسایه‌ی خارجی $H - pn$، w_1 و w_2 در V_0 داشته باشد. دراین‌صورت رئوس $y_1, y_2 \in V_1$ وجود ندارند به طوریکه (y_1, w_1, v, w_2, y_2) رئوسی از دنباله‌ی P_5 باشند.

(ه) $n_0 \geq 3\frac{n}{7}$ و این کران برای درخت‌های زوج صادق است.

گزاره ۵.۵.۲. *[۸] برای هرگراف G با مرتبه n و ماکزیمم درجه Δ، $\gamma_R(G) \geq \frac{2n}{\Delta+1}$ را داریم.*

گزاره ۶.۵.۲. *[۸] برای هرگراف G با n رأس، $\gamma_R(G) \leq n\frac{2+\ln((1+\delta(G))/2)}{1+\delta(G)}$ را داریم.*

برهان. یک گراف G را درنظر بگیرید، مجموعه A از رأس‌ها را انتخاب می‌کنیم، که هر رأس انتخابی مستقل با احتمال P است (آخرین رأس را با P نشان می‌دهیم). انتظار داریم که اندازه مجموعه A، برابر nP باشد. فرض کنید $B = V - N[A]$، رأس‌هایی باشند که توسط A احاطه نمی‌شوند. لذا $f = (V - (A \cup B), B, A)$ یک RDF برای G است. حال اندازه B را محاسبه می‌کنیم. احتمال اینکه v در B باشد برابر احتمال این است که v در A نباشد و هیچ رأسی در A همسایه v نباشد. این احتمال برابر $(1-P)^{1+deg(v)}$است. چون برای هر $x \geq 0$، $e^{-x} \geq 1 - x$ و $deg(v) \geq \delta(G)$، پس می‌توان نتیجه گرفت که $Pr(v \in B) \leq e^{-P(1+\delta(G))}$. بنابراین اندازه B حداکثر $ne^{-P(1+\delta(G))}$ است، و وزن f را با $E[f(V)]$ نشان می‌دهیم و اندازه آن حداکثر $2nP + ne^{-P(1+\delta(G))}$ است. کران بالا را برای $E[f(V)]$ زمانی مینیمم می‌کنیم که $P = \ln(1 + \delta(G))/2)/(1 + \delta(G))$ کمترین باشد (که این

به سادگی با کمک حساب دیفرانسیل و انتگرال نشان داده می‌شود). و با جایگزینی این مقدار برای P داریم

$$E[f(V)] \leq n\frac{۲+\ln((۱+\delta(G))/۲)}{۱+\delta(G)}.$$

از این‌رو چون وزن $f[V]$ را حداکثر $n\frac{۲+\ln((۱+\delta(G))/۲)}{۱+\delta(G)}$ در نظر گرفتیم، لذا باید RDF با حداکثر همین وزن باشد. در نتیجه G اجتماع مجزای $\frac{n}{۲}$ کپی از $K_۲$ است. □

۱.۵.۲ گراف‌هایی با $\gamma_R(G) \leq \gamma(G) + ۲$

از گزاره ۱.۵.۲ می‌دانیم که $\gamma(G) \leq \gamma_R(G) \leq ۲\gamma(G)$. اما از گزاره ۲.۵.۲ می‌دانیم که کران پایین زمانی بدست می‌آید که $G = \overline{K_n}$ باشد. لذا اگر G گراف همبند باشد، آنگاه $\gamma_R(G) \geq \gamma(G) + ۱$. گراف همبند G با γ_R-تابع و وزن $\gamma(G)+۱$ و $\gamma(G)+۲$ یک ترکیب ویژه داریم، که در گزاره‌های زیر نشان داده می‌شود.

گزاره ۷.۵.۲. *[۸] اگر G گراف همبند با مرتبه n باشد، آنگاه $\gamma_R(G) = \gamma(G) + ۱$ اگر و تنها اگر یک رأس $v \in V$ با درجه $n - \gamma(G)$ داشته باشیم.*

برهان. فرض کنید که G یک رأس $v \in V$ با درجه $n - \gamma(G)$ داشته باشد. اگر $V_۲ = \{v\}$ ، $V_۱ = V - N[v]$ و $V_۰ = V - V_۱ - V_۲$، آنگاه $V_۱ \cup V_۲$ یک γ-مجموعه از G و $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ یک RDF با وزن $f(V) = \gamma(G) + ۱$ است. چون $\gamma_R(G) \geq \gamma(G) + ۱$ لذا برای گراف همبند G، f یک γ_R-تابع برای G است.

برعکس برای یک تابع احاطه‌گری رومی $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ با وزن $\gamma(G) + ۱$ دو حالت داریم

(۱) $|V_۱| = \gamma(G) + ۱$ و $|V_۲| = ۰$،

(۲) $|V_۱| = \gamma(G) - ۱$ و $|V_۲| = ۱$.

برای هر ترتیب دیگر از وزن $\gamma(G) + ۱$ $\gamma(G)$ $|V_۲| + |V_۱| <$ را خواهیم داشت. در حالت (۱)، چون $|V_۲| = ۰$، آنگاه $V_۱ = V$. با استفاده از قضیه ORE، برای یک گراف همبند G با n رأس، $\gamma(G) \leq \frac{n}{۲}$.

لذا $n = \gamma(G) + ۱ \leq \frac{n}{۲} + ۱$. این بدین معنی است که $n \leq ۲$. پس می‌توان بررسی کرد که $\gamma_R(P_۲) = ۲ = \gamma(P_۲) + ۱$، و $P_۲$ یک رأس با درجه ۱ دارد. در حالت (۲)، فرض کنید $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ یک γ_R-تابع برای G با وزن $\gamma(G) + ۱$، با $|V_۱| = \gamma(G) - ۱$ و $|V_۲| = ۱$ باشد. ازاین‌رو یالی از G مجاور $V_۱$ و $\{v\}$ موجود نیست، و $V_۰ \succ \{v\}$، لذا

$$deg(v) = |V_۰| = n - |V_۱| - |V_۲| = n - \gamma(G).$$

□

گزاره ۸.۵.۲. *[۸] اگر T یک درخت با دو رأس یا بیشتر باشد، آنگاه $\gamma_R(T) = \gamma(T) + ۱$ اگر و تنها اگر T یک عنکبوت زخمی باشد.*

برهان. فرض کنید T یک عنکبوت زخمی است و v رأس ابتدایی آن باشد و همچنین فرض کنید $S=\{w:d(v,w)=2\}$ مجموعه رأس‌های انتهایی آن باشند.

به وضوح $S\cup\{v\}$ یک γ-مجموعه برای T تشکیل می‌دهد. همچنین اگر $V_0=V-S-\{v\}$، $V_1=S$ و $V_2=\{v\}$، آنگاه $f=(V_0,V_1,V_2)$ یک RDF با $f(V)=\gamma(T)+1$ است. بنابراین، f یک تابع-γ_R است.

برعکس فرض کنید $f=(V_0,V_1,V_2)$ یک γ_R-تابع برای T با وزن $\gamma(T)+1$ باشد. در اثبات گزاره قبل یا $T=P_2$ و یا $|V_1|=\gamma(G)-1$ و $|V_2|=1$. فرض کنید $V_2=\{v\}$. لذا $|N(v)|=|v_0|=n-\gamma(T)$. ازاین‌رو $|V_1|$ در f کمترین مقدار را دارد با گزاره ۳.۵.۲ قسمت (ج) هر رأس V_0 به حداقل یک رأس V_1 متصل است.

حال چون T همبند است V_1 مستقل است و یالی بین V_1 و V_2 وجود ندارند پس هر تعداد از رأس‌های V_1 باید مجاور بخشی از رأس‌های V_0 باشد. به‌علاوه هر رأسی در V_0 نمی‌تواند به بخشی از V_1 وصل باشد. لذا T نمی‌تواند یک عنکبوت سالم باشد. اگر این حالت را داشته باشیم، آنگاه V_0 یک γ-مجموعه برای T تشکیل می‌دهد و

$$deg(v)=|V_0|<|V_0|+1=|V_1|+|V_2|=|V_0|+|V_1|+|V_2|-|V_0|=n-\gamma(T).$$

که این تناقض است. پس T یک عنکبوت زخمی است. $\square$

گزاره ۹.۵.۲. *[۸] اگر G یک‌گراف همبند با مرتبه n باشد، آنگاه $\gamma_R(G)=\gamma(G)+2$ اگر و تنها اگر*

(۱) G رأسی با درجه $n-\gamma(G)$ نداشته باشد.

(۲) یا G یک رأس با درجه $n-\gamma(G)-1$ داشته باشد یا G دو رأس v و w را طوری داشته باشد که

$$|N[v]\cup N[w]|=n-\gamma(G)+2.$$

برهان. (۱) می‌دانیم که $\gamma_R(G)>\gamma(G)+1$. اگر G یک رأس v با درجه $n-\gamma(G)-1$ و $V_0=N(v)$، $V_1=V=N[v]$ و $V_2=\{v\}$، آنگاه $f=(V_0,V_1,V_2)$ یک RDF با $f(V)=\gamma(G)+2$ و ازاین‌رو یک γ_R-تابع است.

(۲) اگر دو رأس v و w را طوری داشته باشیم که $|N[v]\cup N[w]|=n-\gamma(G)+2$، و $V_0=N[v]\cup N[w]-\{V,W\}$، $V_1=V-(N[v]\cup N[w])$، و $V_2=\{v,w\}$، آنگاه $f=(V_0,V_1,V_2)$ یک RDF با $f(V)=\gamma(G)+2$ لذا یک γ_R-تابع است.

برعکس فرض کنید یک RDF $f=(V_0,V_1,V_2)$ با وزن $\gamma(G)+2$ داریم دراین‌صورت سه حالت خواهیم داشت

(۱) $|V_1|=\gamma(G)+2$ و $|V_2|=0$

(۲) $|V_1|=\gamma(G)$ و $|V_2|=1$

(۳) $|V_1|=\gamma(G)-2$ و $|V_2|=2$.

در این حالت برای چنین fای یک γ_R-تابع داریم که نمی‌توانیم تابع احاطه‌گر رومی دیگری با وزن $\gamma(G)+1$ داشته باشیم این بدین معنی است که G رأسی از درجه $n-\gamma(G)$ ندارد. در حالت (۱)،

اگر $|V_2| = 0$، آنگاه $V_1 = V$. لذا با کمک قضیه Ore، $n = \gamma(G) + 2 \leq \frac{n}{2} + 2$، این بدین معنی است که $n \leq 4$. با یک آنالیز ساده روی گراف‌های همبند در ۴ رأس یا کمتر می‌توان دید که برای چنین گراف‌هایی $\gamma_R(G) = \gamma(G) + 1$ است.

در حالت (۲)، فرض کنید $f = (V_0, V_1, V_2)$ یک γ_R-تابع برای G با وزن $\gamma(G) + 2$ با $|V_1| = \gamma(G)$ و $|V_2| = 1$ باشد. فرض کنید $V_2 = \{v\}$. چون یالی از G بین V_1 و v وجود ندارد، و $v \succ V_0$، لذا این نشان می‌دهد

$$deg(v) = |V_0| = n - |V_1| - |V_2| = n - \gamma(G) - 1.$$

در حالت (۳)، فرض کنید $f = (V_0, V_1, V_2)$ یک γ_R-تابع برای G با وزن $\gamma(G) + 2$ با $|V_1| = \gamma(G) - 2$ و $|V_2| = 2$ باشد. فرض کنید $V_2 = \{v, w\}$. چون یالی مجاور V_1 و v یا w نیست و $\{v, w\} \succ V_0$، این نشان می‌دهد که

$$|N[v] \cup N[w]| = n - |V_1| = n - (\gamma(G) - 2) = n - \gamma(G) + 2.$$

$\square$

نتیجه ۱۰.۵.۲. *[۸] اگر G یک گراف همبند و $\gamma_R(G) = \gamma(G) + 2$، آنگاه*

$$2 \leq rad(G) \leq 4 \quad \text{و} \quad 3 \leq diam(G) \leq 8.$$

گزاره ۱۱.۵.۲. *[۸] اگر T یک درخت با مرتبه $n \geq 2$، آنگاه $\gamma_R(T) = \gamma(T) + 2$ اگر و تنها اگر تحت شرایط زیر:*

(۱) اگر درخت یک P_2 باشد، آنگاه هیچ یک از دو رأس P_2 به رأس ابتدایی درخت دیگری وصل نیست.

(۲) v و w هر دو رئوس انتهایی نیستند.

یکی از دو حالات زیر برقرار باشد

(۱) T یک عنکبوت سالم باشد

(۲) T یک جفت عنکبوت زخمی T_1 و T_2 با یک یال تنها مجاور $v \in V(T_1)$ و $w \in V(T_2)$.

۶.۲ کران‌هایی در اعداد احاطه‌گری رومی و رنگین‌کمانی

۱.۶.۲ احاطه‌گری رومی ضعیف

قضیه ۱.۶.۲. *[۵] برای هر گراف G*

- *اگر G بدون رأس تنها، آنگاه $\gamma_t(G) \leq \gamma_R(G)$*
- $\gamma(G) \leq \gamma_r(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G)$
- $\gamma(G) \leq \gamma_{r2}(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G)$
- $\gamma_r(G) \leq \gamma_S(G)$

- اگر G پنجه آزاد باشد، آنگاه $\gamma_r(G)=\gamma_S(G)$
- $\gamma_R(G)\leq \frac{3\gamma_{r2}(G)}{2}$.

قضیه ۲.۶.۲. *[۵] برای هر گراف G،*

$$\gamma(G)\leq\gamma_r(G)\leq\gamma_{r2}(G)\leq\gamma_R(G)\leq 2\gamma(G).$$

برهان. با توجه به قضیه ۱.۶.۲ کافی است نشان دهیم که $\gamma_r(G)\leq\gamma_{r2}(G)$.
فرض کنید f یک $2RDF$ در G باشد. یک تابع $g=(V_0,V_1,V_2)$ در G به صورت زیر تعریف می‌کنیم که

$$g(u)=\begin{cases} 2 & \text{اگر } |f(u)|=2\\ 1 & \text{اگر } |f(u)|=1\\ 0 & \text{اگر } f(u)=\emptyset\end{cases}.$$

ادعا می‌کنیم که g یک $WRDF$ برای G است. فرض کنید v رأسی باشد که $g(v)=0$.
اگر v همسایه‌ای مانند u در V_2 داشته باشد، آنگاه تابع $g'=(V_0,V_1,V_2)$ را با $g'(v)=1$، $g'(u)=g(u)-1=1$ و برای هر $w\in V\setminus\{V,U\}$، $g'(w)=g(w)$ که رأس بی‌دفاع نداشته باشد، تعریف می‌کنیم. اگر v همسایه‌ای در V_2 نداشته باشد، آنگاه فرض کنید $A\subseteq V_0$ که مجموعه رأس‌هایی است که همسایه‌ای در V_2 نداشته باشند. بنابراین v دو همسایه مانند v' و v'' دارد بطوریکه $f(v')=\{1\}$ و $f(v'')=\{2\}$.
لذا v' و v'' متعلق به V_1 همچنین هر رأس از مجموعه A دارای دو همسایه از V_1 است.
حال تابع $g'=(V_0',V_1',V_2')$ را با $g'(v)=1$، $g'(v')=g(v')-1=0$ و برای هر $w\in V\setminus\{v,v'\}$ $g'(w)=g(w)$ که رأس بی‌دفاع ندارد، تعریف می‌کنیم.
بنابراین در هر دو حالت g یک $WRDF$ در G دارای وزن $\gamma_{r2}(G)$ است، لذا این بدین معنی است که

$$\gamma_r(G)\leq\gamma_{r2}(G).$$

□

گزاره ۳.۶.۲. *[۵] برای هر گراف بدون رأس تنها و پنجه آزاد G ، $i(G)\leq\frac{n}{2}$.*

قضیه ۴.۶.۲. *[۵] اگر G گراف پنجه آزاد، همبند و غیربدیهی باشد، آنگاه*

$$\gamma_S(G)=\gamma_r(G)\leq\frac{3}{2}\gamma_t(G).$$

برهان. تساوی $\gamma_S(G)=\gamma_r(G)$ برای گراف‌های پنجه آزاد وهمبند در قضیه ۱.۶.۲ نشان داده شده است. نشان می‌دهیم که $\gamma_r(G)\leq\frac{3}{2}\gamma_t(G)$، فرض کنید D یک مجموعه $\gamma_t(G)$ باشد.
اگر $V\setminus D=\emptyset$، آنگاه $G=K_2$ و لذا نتیجه برقرار است. همچنین اگر فرض کنیم که $V\setminus D\neq\emptyset$ و A یک مجموعه احاطه‌گری مستقل مینیم از زیرگراف حاصل از D است.
چون G پنجه آزاد است و $G[D]$ رأس تنها ندارد، گزاره ۳.۶.۲ نشان می‌دهد که $|A|\leq\frac{|D|}{2}$.

یک تابع f در G با جایگزینی ۲ به جای هر رأس در A، ۱ به جای هر رأس در $D\setminus A$ و ۰ به جای هر رأسی که در D نیست، تعریف می‌کنیم. ادعا می‌کنیم که f یک $WRDF$ در G است. فرض کنید $u \in V \setminus D$ اگر u یک همسایه در A، مانند x داشته باشد، آنگاه تابع f'را با $f'(u) = ۱$، $f'(x) = f(x) - ۱ = ۱$ و برای هر $z \in V \setminus \{u, x\}$، $f'(z) = f(z)$ که رأس بی‌دفاع نسبت به f' ندارند، تعریف می‌کنیم. پس فرض می‌کنیم که u همسایه‌ای در A ندارد. ازاین‌رو u همسایه‌ای در $y \in D \setminus A$ دارد. فرض کنید $y' \in A$ یک همسایه y است. توجه کنید که $uy' \notin E$فرض کنید f' تابعی است که با $f'(u) = ۱$، $f'(y) = ۰$ و برای هر $z \in V \setminus \{u, y\}$، $f'(z) = f(z)$ تعریف می‌شود. فرض کنید که G یک رأس بی‌دفاع w نسبت f' دارد. به وضوح، $w \neq y$ و y تنها همسایه w در D است. این بدین معنی است که $wy' \notin E$، همچنین چون w رأس بی‌دفاع نسبت به f' است لذا $wu \notin E$. لذا $\{y', y, w, u\}$ را خواهیم داشت که یک تناقض است.
نتیجه می‌گیریم که G رأس بی‌دفاع با نسبت f' ندارد و این بدین معنی است که f یک $WRDF$ برای G است. بنابراین $\gamma_r(G) \leq ۲ \mid A \mid + \mid D \setminus A \mid \leq \frac{۳}{۲} \mid D \mid$. G را گراف فرمان در نظر می‌گیریم، که برای هر یک $\gamma_t(G) = ۲$ و $\gamma_r(G) = ۳$.
این کران بطور مجانبی برای گراف‌های پنجه آزاد $G_k(k \geq ۲)$ دقیق است که از اجتماع k گراف فرمان مجزا و یک گراف کامل $K_{k+۱}$ بدست می‌آید، به‌علاوه یک یال از رأس درجه دو در هر گراف فرمان یک رأس مجزا $K_{k+۱}$ است، همچنین گراف فرمان همسایه مشترک در $K_{k+۱}$ندارد، و یک مسیر $P_۲$ وابسته به یک یال به رأس باقیمانده $K_{k+۱}$ موجود است. لذا گراف پنجه آزاد G_k همبند است و $\gamma_t(G) = ۲k + ۲$، $\gamma_r(G) = ۳k + ۱$. □

قضیه ۵.۶.۲. *[5] اگر G یک گراف آزاد $\{K_{۱,۳}, K_{۱,۳+e}\}$ همبند باشد، آنگاه*
$$\gamma_S(G) = \gamma_r(G) \leq \gamma_t(G).$$

برهان. فرض کنید D یک مجموعه $\gamma_t(G)$ است. اگر $\mid V \mid = ۲$، آنگاه نتیجه برقرار است.
لذا فرض کنید که $\mid V \mid \geq ۳$. بنابراین $V \setminus D \neq \emptyset$ تابع f در G را با جایگذاری ۱ به هر رأس در D و ۰ به هر رأسی که در D نیست، تعریف می‌کنیم. فرض کنید $u \in V \setminus D$ و v, w به ترتیب همسایه‌های u و v در D است. فرض کنید f' تابع تعریف شده با $f'(u) = ۱$، $f'(v) = f(v) - ۱ = ۰$ و $f'(z) = f(z)$ برای هر $z \in V \setminus \{u, v\}$ باشد. فرض کنید که f' یک رأس بی‌دفاع مانند y دارد. پس $y \in V \setminus D$ ، $y \neq u$ ، $yu \notin E$ و v همسایه منحصر به فرد y در D باشد.
به ویژه $yw \notin E$. پس رئوس w, u, v, y از $K_{۱,۳}$ یا از $K_{۱,۳+e}$ بدست می‌آید که تناقض است. نتیجه می‌گیریم که رأس y نسبت به f' بی‌دفاع نیست. همچنین f یک $WRDF$ برای G است. بنابراین $\gamma_r(G) \leq \mid D \mid = \gamma_t(G)$. می‌بینیم که این کران دقیق است. برای nهای زوج گراف $(n-۲)$-منظم G که از گراف کامل K_n با حذف یال‌های یک تطابق کامل بدست می‌آید را درنظر می‌گیریم، لذا برای این گراف $\gamma_r(G) = \gamma_t(G) = ۲$. □

قضیه ۶.۶.۲. *[5] اگر $G \neq C_۵$ یک گراف همبند با مرتبه n با $\delta(G) \geq ۲$، آنگاه* $\gamma_s(G) \leq \frac{n}{۲}$.

قضیه ۷.۶.۲. *[5] برای هر گراف G،* $\gamma_r(G) \leq \gamma_s(G) \leq \gamma_۲(G)$.

برهان. نامساوی $\gamma_r(G) \leq \gamma_s(G)$ از قضیه ۳.۶.۲ نشان داده می‌شود. لذا کافی است نشان دهیم که $\gamma_s(G) \leq \gamma_۲(G)$. فرض می‌کنیم که D یک مینیمم مجموعه ۲-احاطه‌گری G است. اگر $V \setminus D = \emptyset$، آنگاه D مجموعه احاطه‌گری موردنظر G است و نتیجه برقرار است. بنابراین فرض کنید $V \setminus D \neq \emptyset$ و u رأسی باشد که در D نیست و همچنین $v \in D$ یک همسایه u باشد. چون هر رأس $V \setminus D$ حداکثر دو همسایه در D دارد مجموعه $D - \{v\} \cup \{u\}$ یک مجموعه احاطه‌گری برای G است. بنابراین D مجموعه احاطه‌گری موردنظر G است. و این بدین معنی است که $\gamma_r(G) \leq \gamma_s(G) \leq \mid D \mid = \gamma_۲(G)$.
این کران برای زیر تقسیم ستاره $K^*_{۱,p}$ است که از ستاره $K_{۱,p}$ با زیر تقسیم هر یال دقیقا یکبار بدست می‌آید. برای این گراف، $\gamma_r(K^*_{۱,p}) = \gamma_s(K^*_{۱,p}) = \gamma_۲(K^*_{۱,p}) = p + ۱$. □

قضیه ۸.۶.۲. *[۱۱] فرض کنید G یک گراف با مرتبه n با مینیمم درجه $\delta(G) \geq ۱$ و k یک عدد صحیح باشد. اگر $\frac{\delta(G)+۱}{\ln(\delta(G)+۱)} \geq ۲k$، دراین‌صورت $\gamma_k(G) \leq \frac{n}{\delta(G)+۱}(k\ln(\delta(G)+۱)+۱)$.*

می‌بینیم که برای $k = ۲$ شرط $\frac{\delta(G)+۱}{\ln(\delta(G)+۱)} \geq ۲k$ برای $\delta(G) \geq ۸$ برقرار است. نتیجه زیر با استفاده از قضیه ۷.۶.۲ و ۸.۶.۲ نشان داده می‌شود.

نتیجه ۹.۶.۲. *[۵] فرض کنید G یک گراف n رأسی با مینیمم درجه $\delta(G) \geq ۸$ باشد، دراین‌صورت*
$$\gamma_s(G) \leq \gamma_۲(G) \leq \frac{n}{\delta(G)+۱}(۲\ln(\delta(G)+۱)+۱).$$

۲.۶.۲ احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی

قضیه ۱۰.۶.۲. *[۵] اگر T درخت غیربدیهی باشد، آنگاه $\gamma_{r۲}(T) \geq \gamma_t(T)$.*

برهان. با استفاده از استقرا روی مرتبه n، درخت T اثبات می‌کنیم.
اگر $n \in \{۲,۳\}$، آنگاه $\gamma_{r۲}(T) = \gamma_t(T) = ۲$. فرض کنید $n \geq ۴$، و برای هر درخت T' با مرتبه $n' < n$، $\gamma_{r۲}(T') \geq \gamma_t(T')$. فرض کنید T درختی با مرتبه n و f $\gamma_{r۲}(T)$-تابع باشد. چون برای ستاره‌ها و ستاره‌های جفت $\gamma_{r۲}(T) \geq \gamma_t(T) = ۲$ را داریم، لذا فرض می‌کنیم که T قطری به طول حداکثر ۴ دارد. فرض کنید $V_۰$ مجموعه رأس‌های T یک مجموعه تهی کمتر از f را تعیین می‌کند. اگر $V_۰ = \emptyset$، آنگاه $\gamma_{r۲}(T) \geq n \geq \gamma_t(T)$. ازاین‌رو فرض می‌کنیم که $V_۰ \neq \emptyset$. فرض کنید $V_۰$ شامل دو رأس مجاور مانند u ، v باشد.
فرض کنید T_u و T_v زیر درخت‌های حاصل از حذف یال uv باشند، که u متعلق به T_u و v متعلق به T_v. ازاین‌رو u و v در $V_۰$ هستند و f یک $\gamma_{r۲}(T)$-تابع است. هر u و v یک همسایه در $V \setminus V_۰$ دارند. این بدین معنی است که هر T_u و T_v نابدیهی است. همچنین هر $f\mid_{V(T_u)}$ و $f\mid_{V(T_v)}$ به ترتیب هر یک $۲RDF$ برای T_u و T_v هستند. پس $\gamma_{r۲}(T_u) + \gamma_{r۲}(T_v) \leq \gamma_{r۲}(T)$. علاوه بر این اجتماع هر دو مجموعه احاطه‌گری کامل T_u و T_v یک TDS برای T است، $\gamma_t(T) \leq \gamma_t(T_u) + \gamma_t(T_v)$. در نتیجه T_u و T_v در فرض استقرا صدق می‌کند لذا داریم
$$\gamma_{r۲}(T) \geq \gamma_{r۲}(T_u) + \gamma_{r۲}(T_v) \geq \gamma_t(T_u) + \gamma_t(T_v) \geq \gamma_t(T).$$

لذا رابطه موردنظر برقرار است. بنابراین فرض می‌کنیم $V_۰$ یک مجموعه مستقل است در غیر اینصورت نتیجه برقرار است. حال فرض کنید که یک رأس پشتیبان مانند x از T مجاور دو برگ یا بیشتر است. فرض کنید T' درختی که از T با حذف برگ مجاور x بدست آمده است. به وضوح $\gamma_t(T) = \gamma_t(T')$. همچنین بدون از دست دادن کلیت مسئله می‌توان فرض کرد که $f(x) = \{۱,۲\}$ و همه این برگ‌ها متعلق به $V_۰$ باشند. ازاین‌رو $f\mid_{V(T')}$ یک ۲RDF برای T' است این بدین معنی است که $\gamma_{r۲}(T') \leq \gamma_{r۲}(T)$. به‌علاوه بنابه فرض استقرا T' نامساوی مطلوب بدست می‌آید. از این به بعد فرض می‌کنیم که هر رأس پشتیبان T مجاور دقیقا یک برگ است. فرض کنید $diam(T) = d$ و $P := u_۰, u_۱, \ldots, u_d$ یک مسیر قطری T است. ریشه T، u_d است. بنابراین $u_۰$ یک برگ T و ۲ $= d_T(u_۱)$. حال نشان می‌دهیم که یک $\gamma_{r۲}(T)$-تابع f^* وجود دارد بطوریکه $f^*(u_۱) = \emptyset$. توجه کنید که $V_۰$ یک مجموعه مستقل کمتر از f است، لذا داریم $f^*(u_۰) \neq \emptyset$ و $f^*(u_۲) \neq \emptyset$. اگر $f(u_۱) = \emptyset$، آنگاه $f^* = f$. فرض کنید که ۱ $\geq |f(u_۱)|$. اگر ۱ $= |f(u_۱)|$، آنگاه f یک $\gamma_{r۲}(T)$-تابع است، این نشان می‌دهد که ۱ $= |f(u_۰)|$ یا به حداقل رساندن f، ۱ $\leq |f(u_۲)|$، در غیراینصورت اگر لازم باشد می‌توانیم $f(u_۱) = \emptyset$ درنظر بگیریم $f(u_۰)$ را تغییر دهیم همچنین $f(u_۰) \cup f(u_۲) = \{۱,۲\}$ در اینصورت یک ۲RDF از T با وزنی کمتر از f خواهیم داشت که یک تناقض است. اگر ۱ $= |f(u_۲)|$ آنگاه فرض کنید که

$$f^*(u_۱) = \emptyset \quad , \quad f^*(u_۰) = \{۱,۲\} \setminus f(u_۲).$$

(درمی‌یابیم که $f^*(u_۰) \cup f^*(u_۲) = \{۱,۲\}$)، و $f^*(x) = f(x)$ برای هر $x \in V \setminus \{u_۰, u_۱\}$. لذا فرض می‌کنیم که $f(u_۲) = \emptyset$ پس $f^*(u_۱) = \emptyset$، $f^*(u_۲) = \{۱,۲\} \setminus f^*(u_۰)$ و برای هر $x \in V \setminus \{u_۱, u_۲\}$، $f^*(x) = f(x)$. اگر ۲ $= |f(u_۱)|$ که $f(u_۱) = \{۱,۲\}$، آنگاه $f(u_۰) = \emptyset$. همچنین داریم که $f(u_۲) = \emptyset$. درغیراینصورت می‌توان وزن f را با جایگذاری $\emptyset$ به $u_۱$ و یک مجموعه از اندازه ۱ به $u_۰$ بطوریکه $f(u_۰) \cup f(u_۲) = \{۱,۲\}$ تبدیل کرد. فرض می‌کنیم که $f^*(u_۱) = \emptyset$، $f^*(u_۰) = \{۱\}$، $f^*(u_۲) = \{۲\}$ و برای هر $x \in V \setminus \{u_۰, u_۱, u_۲\}$، $f^*(x) = f(x)$. در همه‌ی حالت‌ها f^* یک $\gamma_{r۲}(T)$-تابع با $f^*(u_۱) = \emptyset$، ۱ $\geq |f^*(u_۱)|$ و۱ $\geq |f^*(u_۲)|$ را داریم. فرض کنید $A = N(u_۳) \setminus \{u_۲\}$. اگر $f^*(u_۳) \neq \emptyset$ یا $\bigcup_{x\in A} f^*(x) = \{۱,۲\}$، آنگاه فرض کنید $T' = T - \{u_۰, u_۱, u_۲\}$. لذا ۴ $diam(T) \geq$، T' یک درخت غیربدیهی است و $A \neq \emptyset$. پس $f^*\mid_{V(T')}$ یک ۲RDF برای T' است. این نشان می‌دهد که ۱ $= |f^*(u_۲)|$ و همچنین ۲ $- \gamma_t(T) \leq \gamma_t(T')$ به‌علاوه هر $\gamma_t(T')$-مجموعه می‌توان به یک TDS از T با اضافه کردن $u_۱$ و $u_۲$ گسترش داد، بنابراین ۲ $+ \gamma - t(T) \leq \gamma_t(T')$. با این نامساوی و اضافه کردن فرض استقرا T' داریم $\gamma_{r۲}(T) \leq \gamma_t(T)$، که این مطلوب است. از این پس فرض می‌کنیم که

$$f^*(u_۳) = \emptyset \quad \text{یا} \quad \bigcup_{x\in A} f^*(x) \neq \{۱,۲\}.$$

پس $V_۰$ مجموعه مستقل کمتر از f و $f^*\mid_{V(T')} = f\mid_{V(T')}$ است، لذا برای هر $x \in A$، $|f^*(x)| \neq \emptyset$ را داریم. به‌علاوه $\bigcup_{x\in A} f^*(x) \neq \{۱,۲\}$. لذا بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم که برای هر $x \in A$، $f^*(x) = \{۱\}$. پس $A \neq \emptyset$، با مینیمم کردن f^* درمی‌یابیم که $f^*(u_۲) = \{۲\}$ و $f^*(u_۰) = \{۱\}$. توجه داشته باشید که $u_۴ \in A$ و همچنین $f^*(u_۴) = \{۱\}$. فرض کنید که $u_۳$ وتری

مانند y است. با انتخاب $u_۰$، y یک برگ است، یک رأس پشتیبان با دقیقا یک همسایه برگ یا ریشه یک زیر درخت ایزومتری در زیر درخت ریشه‌دار $u_۲$ که یک زیر درخت در هر یک از برگ‌هایی است که فاصله ۲ از y دارند. در هر سه حالت می‌توان فهمید که $f^*(y) = \{۱\}$ به $f^*(y) = \{۲\}$ تغییر کرده و با برچسب گذاری مجدد به صورت نزولی برای y لازم است که یک $۲RDF$ برای T بدست آوریم که $\bigcup_{x\in A} f^*(x) = \{۱,۲\}$ باز هم اگر $T' = T - \{u_۰, u_۱, u_۲,\}$ باشد، نتیجه مطلوب است. پس فرض کنید که $u_۳$ وتری نباشد، که $d_T(u_۳) = ۲$. در این حالت فرض کنید که $T' = T - \{u_۰, u_۱, u_۲, u_۳\}$.
اگر T' بدیهی باشد، آنگاه $T = P_۵$ و نتیجه برقرار است. پس فرض می‌کنیم که T' غیربدیهی است و توجه داشته باشید که $f^* |_{V(T')}$ یک $۲RDF$ در T' است. می‌دانیم که $f^*(u_۲) = \{۲\}$، $f^*(u_۱) = \emptyset$ و $f^*(u_۰) = \{۱\}$. بنابراین$f^*(T') \le f^*(T) - ۲$ و همچنین $\gamma_{r۲}(T') \le \gamma_{r۲}(T) - ۲$. پس هر $\gamma_t(T')$–مجموعه می‌توان به یک TDS برای T با اضافه کردن $u_۱$ و $u_۲$ گسترش داد و خواهیم داشت که $\gamma_t(T) \le \gamma_t(T') + ۲$. دوباره با اضافه کردن فرض استقرا T' به این نامساوی خواهیم داشت که $\gamma_{r۲}(T) \ge \gamma_t(T)$ و اثبات تمام است. □

گزاره ۲.۶.۱۱. *[۵] برای $n \ge ۳$*

- $\gamma_{r۲}(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{۴} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{۴} \right\rfloor$.
- $\gamma_t(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{۴} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{۴} \right\rfloor$.

قضیه ۲.۶.۱۲. *[۵] اگر G یک گراف کاکتوس غیربدیهی همبند بدون دور $C_{۴k}$ برای $k \ge ۱$ باشد، آنگاه*

$$\gamma_{r۲}(G) \ge \gamma_t(G).$$

برهان. اگر G یک درخت باشد، آنگاه با گزاره ۲.۶.۱۱ اثبات تمام است. لذا فرض کنید که G حداکثر یک دور باشد. اگر $G = C_n$، آنگاه با گزاره ۲.۶.۱۱ نیز اثبات تمام است. بنابراین فرض کنیم که $G \neq C_n$. فرض خلف در نظر می‌گیریم فرض کنیم که نتیجه برقرار نباشد. بین همه‌ی گراف‌های کاکتوس H به طوریکه $\gamma_{r۲}(H) < \gamma_t(H)$ فرض کنید G مینیمم اندازه یک یال را دارد. فرض کنید f هر $\gamma_{r۲}(G)$–تابع باشد و $V_۰$ یک مجموعه از رئوس جایگزین مجموعه تهی کمتر از f شود. فرض کنید C یک دور از G است. همچنین فرض کنید که دو رأس مجاور مانند x و y در C هستند بطوری‌که یا هر دو مجموعه‌های تهی یا هر دو مجموعه‌های ناتهی باشند. فرض کنید G' گراف گسترانده G باشد که از حذف یال xy بدست آمده است. G' یک درخت کاکتوس با یال‌های کمتر از G و همچنین G' در رابطه $\gamma_{r۲}(G') \ge \gamma_t(G')$ صدق می‌کند. به‌علاوه f یک $۲RDF$ برای G' است و هر TDS برای G' یک TDS برای G است. بنابراین $\gamma_{r۲}(G') \le \gamma_{r۲}(G)$ و $\gamma_t(G) \le \gamma_t(G')$ و همچنین $\gamma_{r۲}(G) \ge \gamma_{r۲}(G') \ge \gamma_t(G') \ge \gamma_t(G)$، که در تناقض با فرض $\gamma_{r۲}(G) < \gamma_t(G)$ است. لذا نتیجه می‌گیریم که همه رأس‌ها در C به طور متبادل در $V_۰$ و $V \setminus V_۰$ هستند. این بدین معنی است که C یک دور زوج، و همچنین C حداقل ۴ رأس دارد. فرض کنید u هر رأس از C باشد بطوریکه $u \in V_۰$، و فرض کنید v و w دو همسایه در C هستند. لذا $v, w \in V \setminus V_۰$. فرض کنید که حداکثر یک رأس مانند

v جایگزین $\{۱,۲\}$ کمتر از f می‌شود. فرض کنید G' گراف گسترانده G که با حذف یال uw بدست می‌آید. بعد از این G' یک گراف کاکتوس که در رابطه $\gamma_{r۲}(G') \geq \gamma_t(G')$، $\gamma_{r۲}(G') \geq \gamma_{r۲}(G)$ و $\gamma_t(G) \geq \gamma_t(G')$ صدق می‌کند. این نشان می‌دهد که $\gamma_{r۲}(G) \geq \gamma_{r۲}(G') \geq \gamma_t(G') \geq \gamma_t(G)$، که این تناقض است.

لذا فرض کنید که ۱ $=| f(w) |=| f(v) |$. فرض کنید که v و w جایگزینی مشابه کمتر از f دارد که $f(v) = f(w) = \{۱\}$ یا $f(v) = f(w) = \{۲\}$. پس u همسایه دیگری مانند z دارد بطوریکه $f(z) \cup f(v) = \{۱,۲\}$ در حالت قبلی G' گراف گسترانده G که با حذف یال uw بدست می‌آید، که این یک تناقض است. پس فرض می‌کنیم هر $u \in V_۰ \cap V(C)$، دو همسایه در C دارد که یکی جایگزین $\{۱\}$ و دیگری جایگزین $\{۲\}$ می‌شود. با به حداقل رساندن f، هر ۴ رأس متوالی در C به ترتیب جایگزین $X \setminus \{۱,۲\}, \emptyset, X, \emptyset$ یا $\emptyset, X \setminus \{۱,۲\}, \emptyset, X$، که $X = \{۱\}$ یا $X = \{۲\}$ می‌شوند. بنابراین C مرتبه‌ای است که به ۴ بخش‌پذیر است، که این تناقض است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $\gamma_{r۲}(G) \geq \gamma_t(G)$. □

فصل ۳

رابطه بین احاطه‌گری {۲}-رومی با سایر پارامترها

۱.۳ مقدمه

عدد احاطه‌گری رومی در گراف‌ها در سال ۲۰۰۴ توسط اساتید دانشگاه ویکتوریا کانادا معرفی شد و تاکنون مقالات متعددی در خصوص خواص و ویژگی‌های عدد احاطه‌گری رومی در گراف‌ها ارائه شده است. در سال ۲۰۱۵ پروفسور شلالی و همکاران در یک کار تیمی و در بررسی توابع احاطه‌گری رومی به معرفی توابع احاطه‌گر $\{۲\}$-رومی و استخراج خواص این گونه توابع پرداختند و نشان دادند که برای بسیاری از گراف‌ها این توابع همان توابع احاطه‌گر رومی می‌باشند. تمام قضایا و تعاریف این فصل برگرفته از مرجع [۶] هستند.

۲.۳ یک دنباله از نامساوی‌های وابسته به پارامترهای احاطه‌گری

در این بخش کران‌های عدد احاطه‌گری $\{۲\}$-رومی و دیگر پارامترهای احاطه‌گری شامل احاطه‌گری، احاطه‌گری رومی، ۲-احاطه‌گری و عدد احاطه‌گری رومی ضعیف را معرفی می‌کنیم. یک زنجیر از نامساوی‌ها شامل پنج پارامتر را مشخص می‌کنیم. فرض کنید $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ یک تابع $f : V(G) \longrightarrow \{۰, ۱, ۲\}$ در گراف $G = (V, E)$ که $V_i = \{v \mid f(v) = i\}$ برای $i \in \{۰, ۱, ۲\}$ باشد.

قضیه ۱.۲.۳. *برای هر گراف G، داریم*

(۱) [۱۴] $\gamma(G) \leq \gamma_r(G) \leq \gamma_R(G) \leq ۲\gamma(G)$.

(۲) [۱۹] $\gamma(G) \leq \gamma_{r۲}(G) \leq \gamma_R(G) \leq ۲\gamma(G)$.

گزاره ۲.۲.۳. *[۶] برای هر گراف G، داریم $\gamma(G) \leq \gamma_{\{R۲\}}(G) \leq \gamma_R(G)$.*

برهان. هر تابع احاطه‌گری رومی یک تابع احاطه‌گری $\{۲\}$-رومی است، لذا کران بالا برقرار است. کران پایین بدیهی است زیرا مجموعه $V_۱ \cup V_۲$ در یک تابع احاطه‌گری $\{۲\}$-رومی یک مجموعه احاطه‌گری است. □

مسیر $P_۵$ را در نظر می‌گیریم. در یک مینیمم وزن تابع احاطه‌گری $\{۲\}$-رومی می‌توانیم رأس‌های با مقدار $۱, ۰, ۱, ۰, ۱$ برای یک تابع با وزن ۳ مشخص می‌کنیم. اما می‌دانیم عدد احاطه‌گری $P_۵$، ۲ است، درحالی‌که عدد احاطه‌گری رومی $P_۵$، ۴ است. لذا گزاره زیر را داریم.

گزاره ۳.۲.۳. *[۶] برای هر گراف G، داریم $\gamma(G) < \gamma_{\{R۲\}} < \gamma_R(G)$، که این نامساوی برای مسیرها امکان‌پذیر است.*

در ادامه نشان می‌دهیم که هر تابع احاطه‌گری $\{۲\}$-رومی یک تابع احاطه‌گری رومی ضعیف است.

گزاره ۴.۲.۳. *[۶] برای هر گراف G، داریم $\gamma_r(G) \leq \gamma_{\{R۲\}}(G)$.*

برهان. فرض کنید f یک تابع احاطه‌گری $\{۲\}$-رومی یک گراف G با وزن $\gamma_{\{R۲\}}(G)$ باشد. با توجه به تعریف احاطه‌گری $\{۲\}$-رومی رأس بی‌دفاع وجود ندارد. باید نشان دهیم که f یک تابع احاطه‌گری رومی ضعیف است. فرض کنید $v \in V_۰$ که $f(v) = ۰$.

حالت اول. v یک همسایه $u \in N(v)$ با $f(u) = ۲$ داشته باشد. پس تابع جدید f' را با $f'(v) = ۱$، $f'(u) = ۱$ و $f'(w) = f(w)$ تعریف می‌کنیم در غیر اینصورت برگ‌ها رأس بی‌دفاع ندارند.

حالت دوم. v همسایه $u \in N(v)$ با $f(u) = ۲$ نداشته باشد، اما دارای دو همسایه x و y با $f(x) = f(y) = ۱$ باشد. لذا تابع جدید f' را با $f'(v) = ۱$، $f'(x) = ۰$ و $f'(w) = f(w)$ تعریف می‌کنیم، در غیر اینصورت برگ‌ها رأس بی‌دفاع ندارند. همانا رأس x بی‌دفاع نیست، پس این همسایه v، $f'(v) = ۱$ است. بعلاوه $f'(v) = f'(y) = ۱$ است.

فرض کنید $x \neq w$ یک رأس با $f'(w) = ۰$ است. چون $f(w) = f'(w)$ لذا w حداقل یک همسایه با مقدار مثبت کمتر از f' دارد لذا w رأس بی‌دفاع نیست. پس f یک تابع احاطه‌گری رومی ضعیف است. $\square$

ستاره $G = K_{۱,n-۱}$ برای $n \geq ۳$ را در نظر بگیرید، برای مثال $\gamma_r(G) = \gamma_{\{R۲\}}(G) = ۲$. از طرف دیگر $\gamma_r(G) < \gamma_{\{R۲\}}(G)$ برقرار است. لذا برای گراف کامل غیربدیهی K_n داریم

$$\gamma_r(K_n) = ۱ < \gamma_{\{R۲\}}(K_n) = ۲.$$

در مرجع [۱۰] می‌بینیم که احاطه‌گری رومی و عدد ۲-احاطه‌گری غیر قابل مقایسه‌اند. بنابراین می‌بینیم که عدد احاطه‌گری $\{۲\}$-رومی کران بالای عدد ۲-احاطه‌گری برای هر گراف G است.

گزاره ۵.۲.۳. *[۶] برای هر گراف G، $\gamma_{\{R۲\}}(G) \leq \gamma_۲(G)$، را داریم.*

برهان. فرض کنید D یک مجموعه مینیمم ۲-احاطه‌گری از G است. یک تابع f در G با جایگزینی مقدار ۱ به هر رأس در D و مقدار ۰ به هر رأس در $V - D$ ، تعریف می‌کنیم. به وضوح D یک مجموعه ۲-احاطه‌گری است. به هر رأس در $V - D$ مقدار ۰ می‌دهیم و به حداقل دو همسایه‌ی آن مقدار ۱ می‌دهیم. از این‌رو f یک تابع احاطه‌گری $\{۲\}$-رومی در G است، این بدین معنی است که

$$\gamma_{\{R۲\}}(G) \leq f(V) =| D |= \gamma_۲(G).$$

$\square$

در ادامه نشان می‌دهیم که عدد احاطه‌گری $\{۲\}$-رومی کران بالایی برای عدد احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی است.

گزاره ۶.۲.۳. *[۶] برای هر گراف G، داریم $\gamma_{\{R۲\}}(G) \leq \gamma_{r۲}(G)$.*

برهان. برای هر تابع احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی f در G، تابع g در G را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$g(u) = \begin{cases} ۲ & f(u) = \{۱, ۲\} \quad \text{اگر} \\ ۱ & f(u) = \{۱\} \text{ یا } \{۲\} \quad \text{اگر} \\ ۰ & f(u) = \emptyset \quad \text{اگر} \end{cases}.$$

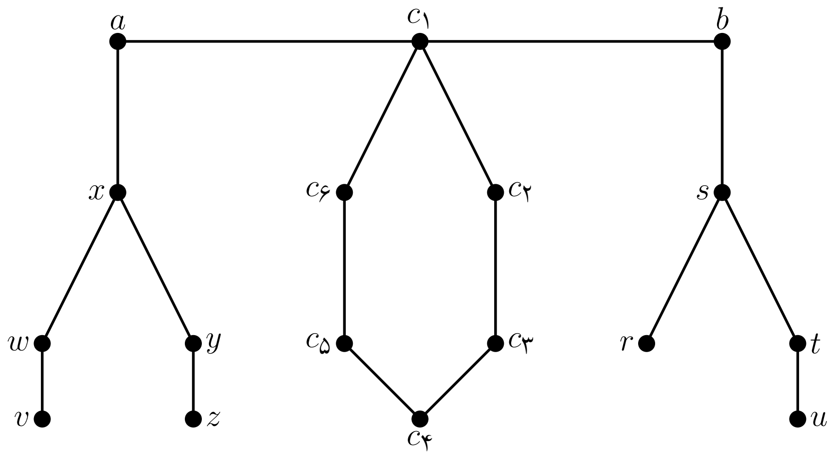
لذا واضح است که g یک تابع احاطه‌گری {۲}-رومی است و همچنین $\gamma_{\{R2\}}(G) \leq \gamma_{r2}(G)$. □

قضیه ۷.۲.۳. *[۶] برای هر گراف G، داریم*

$$\gamma(G) \leq \gamma_r(G) \leq \gamma_{\{R2\}}(G) \leq \gamma_{r2}(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G).$$

۳.۳ مسیرها و کران‌ها

در این بخش مقدار پارامترها را در نامساوی‌های قضیه ۷.۲.۳ نشان می‌دهیم. در حقیقت در هر گراف برای همه پارامترهای ذکر شده مقدار مجزایی دارند. برای مثال گراف G را در شکل ۱.۳ را در نظر بگیرید.



شکل ۱.۳: گراف G

برای این گراف مقدار پارامترها را می‌توان بدست آورد.

- اگر $S = \{w, y, s, t, c_1, c_4\}$، آنگاه $\gamma(G) = 6$.
- اگر $V_1 = \{w, y, a, s, t, c_1, c_3, c_5\}$، $V_2 = \emptyset$، $V_0 = V - V_1$، آنگاه $\gamma_r(G) = 8$.
- اگر $V_1 = \{v, x, z, r, s, u, c_1, c_3, c_5\}$، $V_2 = \emptyset$، $V_0 = V - V_1$، آنگاه $\gamma_{\{R2\}}(G) = 9$.
- اگر $V_{\{1\}} = \{v, z, r\}$، $V_{\{2\}} = \{x\}$، $V_{\{1,2\}} = \{t, c_1, c_4\}$ و به تمام رئوس $V - (V_{\{1\}} \cup V_{\{2\}} \cup V_{\{1,2\}})$ مقدار $\emptyset$ دهیم، آنگاه $\gamma_{r2}(G) = 10$.
- اگر $V_1 = \{r\}$، $V_2 = \{c_1, c_4, w, y, t\}$، $V_0 = V - (V_1 \cup V_2)$، آنگاه $\gamma_R(G) = 11$.
- $2\gamma(G) = 12$.

برای مسیرها نیز می‌توانیم این ۵ پارامتر را با هم مقایسه کنیم. ابتدا عدد احاطه‌گری {۲}-رومی را برای مسیرها تعیین می‌کنیم.

قضیه ۱.۳.۳. *[۶] برای هر گراف G، یک $\gamma_{\{R2\}}(G)$-تابع، $f=(V_0,V_1,V_2)$ وجود دارد به طوریکه یا $V_2=\emptyset$ و یا رأسی از V_2 حداقل ۳ همسایه بسته در V_0 نسبت به مجموعه V_2 داشته باشد.*

برهان. میان همه‌ی $\gamma_{\{R2\}}(G)$-تابع‌ها، فرض کنید $f=(V_0,V_1,V_2)$ یک تابع با اندازه $|V_2|$ باشد. به وضوح اگر $V_2=\emptyset$، آنگاه اثبات تمام است. لذا فرض کنید که $V_2\neq\emptyset$. اگر یک رأس $y\in V_2$ همسایه‌ای در V_0 نسبت به مجموعه V_2 نداشته باشد، آنگاه می‌توان از مقدار f کم کرد و به y به جای مقدار ۲ مقدار ۱ داد، که این یک تناقض است. بنابراین هر رأس از V_2 حداقل یک همسایه خصوصی در V_0 دارد. حال فرض کنید که یک رأس $x\in V_2$ حداکثر دو همسایه خصوصی در V_0 دارد. اگر x فقط یک همسایه خصوصی $a\in V_0$ داشته باشد، آنگاه $f'=(V_0-\{a\}$، $V_1\cup\{x,a\}$ و $V_2-\{x\})$. به وضوح f' یک تابع $\gamma_{\{R2\}}(G)$ با تعداد ۲ رأس کمتر از f، که این با انتخاب f در تناقض است. بنابراین x دو همسایه خصوصی در V_0 مانند u و v دارد. یک تابع f'' در G با $f''=(\{x\}\cup V_0-\{u,v\},V_1\cup\{u,v\},V_2-\{x\})$. از این‌رو f'' یک تابع $\gamma_{\{R2\}}(G)$ با ۲ رأس کمتر از f' و لذا کمتر از f خواهد بود که این باز هم با انتخاب f درتناقض است. □

نتیجه ۲.۳.۳. *[۶] برای هر گراف G با $\Delta(G)\leq 2$، داریم $\gamma_{\{R2\}}(G)=\gamma_2(G)$.*

برهان. فرض کنید $f=(V_0,V_1,V_2)$ یک تابع $\gamma_{\{R2\}}(G)$ باشد بطوریکه $V_2=\emptyset$ یا هر رأس V_2 سه همسایه خصوصی در V_0 دارد. چون $\Delta(G)\leq 2$ لذا نتیجه می‌گیریم که $V_2=\emptyset$ و همچنین V_1 یک مجموعه ۲-احاطه‌گری برای G است. از این‌رو $\gamma_2(G)\leq\gamma_{\{R2\}}(G)$، و تساوی را از گزاره ۵.۲.۳ نتیجه می‌گیریم. □

در مرجع [۹] می‌بینیم که $\gamma_2(P_n)=\left\lceil\frac{(n+1)}{2}\right\rceil$ و $\gamma_2(C_n)=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$.

نتیجه ۳.۳.۳. *[۶] برای دسته‌ای از مسیرهای P_n و دورهای C_n داریم*

$$\gamma_{\{R2\}}(P_n)=\left\lceil\frac{(n+1)}{2}\right\rceil,\ \gamma_{\{R2\}}(C_n)=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil.$$

حال ۵ پارامتر نامساوی زنجیر قضیه ۷.۲.۳ را برای مسیرها نشان می‌دهیم

- $\gamma(P_n)=\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil$
- $\gamma_r(P_n)=\left\lceil\frac{3n}{7}\right\rceil$
- $\gamma_{\{R2\}}(P_n)=\left\lceil\frac{(n+1)}{2}\right\rceil$
- $\gamma_{r2}(P_n)=\left\lceil\frac{(n+1)}{2}\right\rceil$
- $\gamma_R(P_n)=\left\lceil\frac{2n}{3}\right\rceil$

قضیه ۴.۳.۳. *[۶] اگر G یک گراف همبند از مرتبه n و ماکزیمم درجه $\Delta(G) = \Delta$ باشد، آنگاه*

$$\gamma_{\{R۲\}}(G) \geq \frac{۲n}{(\Delta+۲)}.$$

برهان. ابتدا فرض کنید $\Delta \leq ۲$. با استفاده از نتیجه قبل نتیجه می‌گیریم که $\gamma_{\{R۲\}}(G) \geq \frac{۲n}{(\Delta+۲)}$ و لذا نتیجه برقرار است. پس فرض کنیم که $\Delta \geq ۳$ و $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ یک $\gamma_{\{R۲\}}(G)$-تابع باشد که در شرایط نتیجه ۳.۳.۳ صدق می‌کند. فرض کنید $V'_۰ = \{x \in V_۰ : N(x) \cap V_۲ \neq \emptyset\}$ و $V''_۰ = V_۰ - V'_۰$. چون هر رأس از $V_۲$ می‌تواند حداقل Δ همسایه در $V_۰$ داشته باشد، لذا $|V'_۰| \leq \Delta |V_۲|$. از طرف دیگر هر رأس از $V''_۰$ حداقل دو همسایه در $V_۱$ و هر رأس $V_۱$ حداکثر Δ همسایه در $V''_۰$ دارد در نتیجه $۲|V''_۰| \leq \Delta|V_۱|$. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} n = |V'_۰| + |V''_۰| + |V_۱| + |V_۲| &\leq \Delta|V_۲| + \frac{\Delta|V_۱|}{۲} + |V_۱| + |V_۲| \\ &= (\Delta+۱)|V_۲| + \frac{(\Delta+۱)|V_۱|}{۲} \leq (\Delta+۱)|V_۲| + \frac{(\Delta+۱)|V_۱|}{۲} + |V_۲| \\ &= (\Delta+۲)(|V_۲| + \frac{|V_۱|}{۲}) = (\Delta+۲)\frac{\gamma_{\{R۲\}}(G)}{۲} \end{aligned}$$

همچنین $\gamma_{\{R۲\}}(G) \geq \frac{۲n)}{(\Delta+۲)}$. لذا اثبات کامل است. □

۴.۳ درخت‌ها و گراف‌های کاکتوس

از بین دنباله نامساوی قضیه ۷.۲.۳، $\gamma_r(G) \leq \gamma_{\{R۲\}}(G) \leq \gamma_{r۲}(G)$ را در نظر می‌گیریم. توجه کنید که اگر T درختی باشد که برای هر رأس یک برگ یا یک پشتیبان دارای حداقل دو برگ مجاور داشته باشد، آنگاه $\gamma_r(T) = \gamma_{\{R۲\}}(T) = ۲s$، که s در آن تعداد رئوس پشتیبان برگ‌های T است. لذا دو پارامتر نیازی به تساوی برای درخت‌ها ندارند، در بخش بعد برای مسیرها نشان خواهیم داد. نشان خواهیم داد که تساوی بین $\gamma_{\{R۲\}}$ و $\gamma_{r۲}(G)$ برای درخت‌ها برقرار است.

تعریف ۱.۴.۳. یک گراف G یک کاکتوس است اگر همبند باشد و هر دو دور آن یک رأس مشترک داشته باشند.

در ادامه خواهیم دید که تساوی برای یک خانواده فرعی گراف‌های کاکتوس برقرار است. لذا تفاضل $\gamma_{r۲}(G) - \gamma_{\{R۲\}}(G)$ می‌تواند همانطور که در گراف G که از k دور $C_۶$ و یک مسیر P_k که با مشخص کردن یک رأس از هر دو دور با یک رأس از مسیر که هر دو دور آن رأس مشترک نداشته باشند و با دقیقا یک بار تقسیم کردن هر یال مسیر بدست آمده باشد، به اندازه کافی بزرگ باشد. لذا به وضوح $\gamma_{\{R۲\}}(G) = ۳k$ و $\gamma_{r۲}(G) = ۴k$.

قضیه ۲.۴.۳. *[۶] برای هر درخت T ، داریم $\gamma_{\{R۲\}}(T) = \gamma_{r۲}(T)$.*

برهان. بنا به گزاره ۶.۲.۳، داریم $\gamma_{\{R۲\}}(T) \leq \gamma_{r۲}(T)$. کافی است نشان دهیم $\gamma_{\{R۲\}}(T) \geq \gamma_{r۲}(T)$. فرض کنید $f = (V_۰, V_۱, V_۲)$ یک تابع $\gamma_{\{R۲\}}$ باشد. مجموعه‌های $V'_۰$ و $V''_۰$ را طبق تعریف در اثبات

قضیه ۴.۳.۳، درنظربگیرید که $V'_0 = \{x \in V_0 : N(x) \cap V_2 \neq \emptyset$ و $V''_0 = V_0 - V'_0$. توجه کنید که هر رأس V''_0 حداقل دو همسایه در V_1 دارد. ادعا می‌کنیم که V_1 شامل دو مجموعه مجزا A_1 و A_2 می‌باشد به طوریکه هر رأس V''_0 یک همسایه در A_1 و یک همسایه در A_2 داشته باشد. زیر گراف H حاصل از $V''_0 \cup (N(V''_0) \cap V_1)$ را درنظربگیرید. فرض کنید F جنگل گسترانده H که با حذف همه یال‌ها به جز دو یال مجاور هر رأس در V''_0 به رأس‌هایی در V_1 بدست آمده است. فرض کنید R گرافی است که به این صورت تعریف می‌شود. $V(R) = N(V''_0) \cap V_1$ و دو رأس x و y از $V(R)$ همسایه‌ای در R هستند اگر $xy \in E(T)$ یا یک رأس $v \in V''_0$ هم مجاور x و هم مجاور y در F است. چون T یک درخت و F یک جنگل است، لذا این نشان می‌دهد که R یک جنگل است و از این‌رو یک گراف دو بخشی با دو بخش مجموعه A_1 و A_2 می‌باشد. می‌بینیم که چون هر A_i یک مجموعه مستقل است، لذا V''_0 رأسی در R ندارد که این دو همسایه در یک A_i باشد، و این ادعا را ثابت می‌کند. حال یک تابع g در G به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

- اگر $f(u) = 2$، آنگاه قرار می‌دهیم $g(u) = \{1, 2\}$.
- اگر $f(u) = 0$، آنگاه قرار می‌دهیم $g(u) = \emptyset$.
- اگر $u \in V_1 - (A_1 \cup A_2)$، آنگاه قرار می‌دهیم $g(u) = \{1\}$.

پس $w(g) = w(f)$ و g یک تابع احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی در G است. بنابراین
$$\gamma_{r2}(T) \leq w(g) = w(f) = \gamma_{\{R2\}}(T).$$

□

گزاره ۳.۴.۳. *[۶] برای مسیر C_n به ازای $n \geq 3$ داریم* $\gamma_{r2}(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$.

قضیه ۴.۴.۳. *[۶] فرض کنید G یک کاکتوس دارای $k(G)$ دور زوج باشد، دراین‌صورت*
$$\gamma_{\{R2\}}(G) \geq \gamma_{r2}(G) - k(G).$$

برهان. اگر G یک درخت باشد، آنگاه $k(G) = 0$ و با قضیه ۲.۴.۳ نتیجه برقرار است. اگر G یک دور C_n باشد، آنگاه با نتیجه ۳.۳.۳ و گزاره ۳.۴.۳ نتیجه برقرار است. لذا فرض کنید که G هیچ یک از این حالات نباشد. بین همه گراف‌های کاکتوس با $k(G)$ دور زوج که در حکم قضیه صدق نمی‌کند فرض کنید G شامل تعداد رئوس و یال‌های کمتری باشد. فرض کنید $f = (V_0, V_1, V_2)$ یک $\gamma_{\{R2\}}(G)$-تابع باشد و اگر دو رأس مجاور مانند x و y وجود داشته باشند بطوریکه در بعضی دورها یا هر دو مقدار مثبت را می‌گیرند و یا هر دو مقدار ۰ را می‌گیرند، آنگاه $H = G - xy$. به وضوح f یک تابع احاطه‌گری $\{2\}$-رومی در H خواهد بود و همچنین $\gamma_{r2}(G) \leq \gamma_{r2}(H)$. پس هر تابع احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی در H یک تابع احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی در G است. لذا H در شرط قضیه صدق می‌کند. و همچنین $\gamma_{\{R2\}}(H) \geq \gamma_{r2}(H) - k(H)$. لذا $k(G) \geq k(H)$ ، این نشان می‌دهد که $\gamma_{\{R2\}}(G) \geq \gamma_{\{R2\}}(H) \geq \gamma_{r2}(H) - k(H) \geq \gamma_{r2}(G) - k(G)$، که تناقض است. در نتیجه همه رئوس در دورها به طور تناوبی در V_0 و $V_1 \cup V_2$ هستند. این بدین معنی است که G شامل دور فرد

نیست. فرض کنید u و v دو رأس مجاور در یک دور زوج باشند. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید که $f(u)=۰$ و $f(v)>۰$. فرض کنید F زیرگراف گسترانده G که با حذف یال uv بدست آمده باشد. آنگاه تابع $f'=(V_۰-\{u\}, V_۱\cup\{u\}, V_۲)$ یک تابع احاطه‌گری {۲}-رومی در F است و همچنین $\gamma_{\{R۲\}}(F)\le\gamma_{\{R۲\}}(G)+۱$. لذا به وضوح $\gamma_{r۲}(G)\le\gamma_{r۲}(F)k(G)=k(F)+۱$. حال چون F در رابطه $\gamma_{\{R۲\}}(F)\ge\gamma_{r۲}(F)-k(F)$ صدق می‌کند، پس

$$\gamma_{\{R۲\}}(G)+۱\ge\gamma_{\{R۲\}}(F)\ge\gamma_{r۲}(F)-k(F)\ge\gamma_{r۲}(G)-k(G)+۱.$$

بنابراین $\gamma_{\{R۲\}}(G)\ge\gamma_{r۲}(G)-k(G)$ که تناقض است. لذا اثبات کامل است. □

نتیجه ۵.۴.۳. *[۶] اگر G یک گراف کاکتوس بدون دور زوج باشد آنگاه $\gamma_{\{R۲\}}(G)=\gamma_{r۲}(G)$.*

برهان. با استفاده از قضیه ۴.۴.۳ و گزاره ۶.۲.۳ ثابت می‌شود. □

۵.۳ پیچیدگی

از آنجایی که عدد احاطه‌گری ۲-رنگین‌کمانی را می‌توان برای هر درخت با الگوریتم خطی محاسبه کرد، لذا بنا به قضیه ۲.۴.۳ عدد احاطه‌گری {۲}-رومی را می‌توان به سادگی برای دسته‌هایی از درخت‌ها محاسبه کرد. حال مسائل مربوط به تابع احاطه‌گری {۲}-رومی را در نظر می‌گیریم.

۱.۵.۳ تابع احاطه‌گری {۲}-رومی

ورودی: *گراف $G=(V,E)$ و عدد صحیح مثبت $k\le|V|$.*

مسئله ۱.۵.۳. *آیا G یک تابع احاطه‌گری {۲}-رومی با وزن حداکثر k دارد؟*

نشان می‌دهیم که این مسئله NP-کامل است که با محدود کردن مسئله NP-کامل، ۳-پوشش دقیق به $R۲D$ آن را اثبات می‌کنیم.

۲.۵.۳ ۳-پوشش دقیق

ورودی: *مجموعه متناهی X با $|X|=۳q$ و یک خانواده C از زیرمجموعه‌های ۳ عضوی X.*

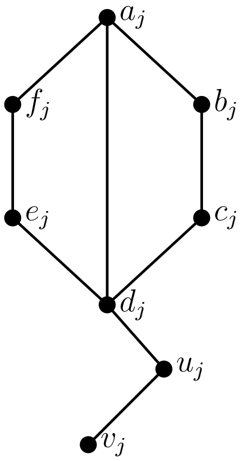
مسئله ۲.۵.۳. *آیا یک زیرخانواده C' از C داریم به‌طوریکه هر عضو از X در دقیقا یک عضو از C' واقع باشد؟*

قضیه ۳.۵.۳. *$R۲D$ یک مسئله NP-کامل برای گراف‌های دو بخشی است.*

برهان. به وضوح $R۲D$ یک عضو از NP است، ازاین‌رو می‌توانیم در زمان چندجمله‌ای بررسی کنیم که یک تابع $f:V\to\{۰,۱,۲\}$ با وزن حداکثر k یک $R۲D$ است. حال نشان می‌دهیم که می‌توانیم هر نمونه از $X۳C$ به یک نمونه G از $R۲D$ تبدیل کنیم چنان که یکی از آن‌ها یک راه‌حل است اگر و

تنها اگر دیگری راه‌حل دیگری باشد. فرض کنید $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{3q}\}$ و $C = \{C_1, C_2, \dots, C_t\}$ یک نمونه دلخواه از $X3C$ باشد.

برای هر $x_i \in X$ یک رأس w_i را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $W = \{w_1, w_2, \dots, x_{3q}\}$. برای هر $C_j \in C$ یک گراف H_j می‌سازیم که از یک دور $C_6 : a_j - b_j - c_j - d_j - e_j - f_j - a_j$ با اضافه کردن دو رأس u_j و v_j و یال‌های a_jd_j، d_ju_j، u_jv_j بدست می‌آید.



شکل ۲.۳: گراف H_j.

فرض کنید $Y = \{a_1, a_2, \dots, a_t\}$. حال یک گراف G به صورت زیر می‌سازیم. اگر $x_i \in C_j$، آنگاه یال a_jw_i را اضافه می‌کنیم. به وضوح G یک گراف دوبخشی است. فرض کنید $k = 4t + q$. فرض کنید H زیرگرافی از G با همه رأس‌های $V(H_j)$ بدست آمده باشد. توجه کنید برای هر تابع احاطه‌گری $\{2\}$-رومی f در G اگر $f(a_j) = 0$، آنگاه $f(V(H_j)) = 4$ و اگر $f(a_j) \neq 0$، آنگاه $f(V(H_j)) = 5$. از این‌رو $f(V(H)) \geq 4t$. فرض کنید X و C از $X3C$ یکی از راه حل‌ها C' باشد. یک تابع احاطه‌گری $\{2\}$-رومی f در G با وزن k می‌سازیم. مقدار ۰ را به هر w_i نسبت می‌دهیم. برای هر $C_j \in C'$ مقدار ۲ را به a_j و d_j و مقدار ۱ را به v_j، و مقدار ۰ را به رئوس باقیمانده H_j نسبت می‌دهیم. همچنین اگر $C_j \in C'$ مقدار ۱ را به b_j، d_j، f_j و v_j، مقدار ۰ را به رئوس بافیمانده H_j نسبت می‌دهیم. توجه کنید که چون C' وجود دارد پس عدد اصلی آن q است و همچنین تعداد a_jها با وزن ۲، q است که در $\{w_1, w_2, \dots, w_{3q}\}$ دارای همسایه هستند. از اینرو C' یک راه‌حل برای $X3C$ است. هر رأس در W مجاور یک رأس با مقدار ۲ است. لذا بدیهی است که f یک تابع احاطه‌گری $\{2\}$-رومی با وزن $f(V) = 5q + 4(t - q) = k$ است.

برعکس، فرض کنید G یک تابع احاطه‌گری $\{2\}$-رومی g با وزن حداقل k دارد. چون $g(V(H)) \geq 4t$، دراین‌صورت $g(W) \leq q$. حال چون $| W | = 3q$، لذا باید $W \cap V_0 \neq \emptyset$ باشد. این بدین معنی است که $Y \cap (V_2 \cup V_1) \neq \emptyset$. فرض کنید $r = | Y \cap V_2 |$ و $s = | y \cap v_1 |$. به‌وضوح، $g(V(H)) = 5(r+s) + 4(t-r-s) = 4t+r+s$. چون $k = 4t+q$، پس $r+s \leq q$ خواهد بود. از آنجایی که W مستقل است هیچ رأسی از W متعلق به V_2 نیست، پس $W \subset V_0 \cup V_1$. در واقع هر a_j دقیقا ۳ همسایه در W، حداقل $3r$ رأس از $W \cap V_0$ می‌تواند در $Y \cap V_2$ همسایه داشته باشد. فرض کنید

$W' \subset W \cap V_0$ همسایه‌ای در $Y \cap V_2$ نداشته باشد. در واقع هر رأس از W' حداکثر ۲ همسایه در $Y \cap V_1$ و هر رأس از Y حداقل همسایه را در W' داشته باشد. لذا نتیجه می‌گیریم که $\mid W' \mid \leq \frac{3(\mid Y \cap V_1 \mid)}{2}$. ازاین‌رو $\mid W' \mid \leq \lfloor \frac{3s}{2} \rfloor$. در نتیجه $g(W) = \mid W \cap V_1 \mid \geq 3q - 3r - \lfloor \frac{3s}{2} \rfloor \geq 3q - 3r - \frac{3s}{2}$، پس $g(V(G)) \leq k = 4t + 2q$. حال داریم که

$$4t + q \geq g(V(G)) = g(V(H)) + g(W) \geq r + s + 4t + 3q - 3r - \frac{3s}{2}$$

همچنین $2q \geq 2r + \frac{s}{2}$ که در آن $4q \geq 4r + s$. چون $q \leq r + s$، پس $4q \geq 4r + s \geq 3r + q$، همچنین $r \geq q$. ازاین‌رو $r = q$، $s = 0$، وهمچنین $W \subset V_0$ و $W' = \emptyset$. درنتیجه $C' = \{C_J : g(a_j) = 2\}$ یک پوشش دقیق برای C است. $\square$

۳.۵.۳ مسائل باز

در پایان چند مسئله باز برای تحقیق ارائه داده شده است.

مسئله ۴.۵.۳. *آیا گراف‌های G (با حداکثر درخت‌ها) را می‌توان طوری داشته باشیم که $\gamma_r(G) = \gamma_{\{R۲\}}(G)$.*

مسئله ۵.۵.۳. *می‌دانیم که برای درخت‌ها و گراف‌های کاکتوس بدون دور زوج $\gamma_{r۲}(G) = \gamma_{\{R۲\}}(G)$. آیا می‌توان دسته‌ای از گراف‌ها برای تساوی بین دو پارامتر یافت؟*

مسئله ۶.۵.۳. *آیا می‌توان نشان داد که گراف G را طوری داریم که $\gamma(G) = \gamma_{\{R۲\}}(G)$؟ (برای نمونه، یک دور $C_۴$، $\gamma(C_۴) = \gamma_{\{R۲\}}(C_۴) = ۲$ را داریم.)*

مراجع

[1] *B. Bre ˇsar, M.A. Henning and D.F. Rall,* Rainbow domination in graphs*, Taiwanese J. Math.* ***12*** *(2008) 213–225.*

[2] *B. Bre ˇsar and T. K. ˇSumenjak,* On the 2-rainbow domination in graphs*, Discrete Appl. Math.* ***155*** *(2007) 2394–2400*

[3] *A. P. Burger, E. J. Cockayne, W. R. Gru ̈ndlich, C. M. Mynhardt, J. H. van Vuuren, and W. Winterbach,* Finite order domination in graphs*, J. Combin. Math. Combin. Comput.* ***49*** *(2004), 159-175.*

[4] *E.W. Chambers, B. Kinnersley, N. Prince and D.B. West,* Extremal problems for Roman domination*, SIAM J. Discrete Math.* ***23*** *(2009), 1575–1586*

[5] *M. Chellali, T.W. Haynes and S.T. Hedetniemi,* Bounds on weak roman and 2-rainbow domination numbers*, Discrete Appl. Math.* ***178*** *(2014) 27–32.*

[6] *M. Chellali, T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and A. McRae, Discrete Applied Mathematices, (2016), In Press.*

[7] *M. Chellali and N. Jafari Rad,* On 2-rainbow domination and Roman domination in graphs*, Australas. J. Combin.* ***56*** *(2013) 85-93.*

[8] *E.J. Cockayne, P.M. Dreyer Jr., S.M. Hedetniemi, and S.T. Hedetniemi,* On Roman domination in graphs*, Discrete Math.* ***278*** *(2004) 11–22.*

[9] *J. Fink and M.S. Jacobson,* n-domination in graphs*, Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science (Kalamazoo, Mich., 1984), 283–300, Wiley-Intersci. Publ., Wiley, New York, 1985.*

[10] *G.S. Domke, S.T. Hedetniemi, R.C. Laskar, and G. Fricke,* Relation- ships between integer and fractional parameters of graphs*, Proc. Sixth Quadrennial Conf. on the Theory and Applications of Graphs, West- ern Michigan Univ., Y. Alavi, G. Chartrand, O. Oellermann and A. Schwenk, Eds., Graph Theory, Combinatorics and Applications 1:371- 387, Wiley Interscience Publ., 1991.*

[11] *A. Hansberg, L. Volkmann, Upper bounds on the k-domination number and the k-Roman domination number, Discrete Appl. Math. 157(2009) 1634-1639.*

[12] *T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, and P.J. Slater, Fundamentals of Dom- ination in Graphs. Marcel Dekker, Inc., New York (1998).*

[13] *S.T. Hedetniemi, R.R. Rubalcaba, P.J. Slater, and M. Walsh,* Few com- pare to the great Roman Empire, *Congr. Numer.,* ***217*** *(2013) 129–136.*

[14] *M.A. Henning and S.T. Hedetniemi,* Defending the Roman Empire - A new strategy, *Discrete Math.* ***266*** *(2003) 239-251.*

[15] *P. Roushini Leely Pushpam and T.N.M. Malini Mai,*Weak Roman domination in graphs. *Discuss. Math. Graph Theory* ***31*** *(2011) 115– 128.*

[16] *I. Stewart,*Defend the Roman Empire! *Sci. Amer.* ***281*** *(6) (1999) 136-139.*

[17] *T.K. Sumenjak, D.F. Rall, and A. Tepeh,*Rainbow domination in the lexicographic product of graphs. *Discrete Appl. Math.* ***161*** *(2013) 2133– 2141.*

[18] *Y. Wu and N.Jafari Rad,* Bounds on the 2-rainbow domination number of graphs. *Graphs Combin.* ***29*** *(2013) 1125–1133.*

[19] *Y. Wu and H. Xing,*Note on 2-rainbow domination and Roman domi- nation in graphs. *Appl. Math. Lett.* ***23*** *(2010) 706–709.*

[20] *West, D. Introduction to Graph theory, second edition. 2001.*

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

بسته بندی .... *Packing*
پوشش رأسی .... *Vertex Covering*
پیچیدگی .... *Complexity*
تاج .... *Corona*
تطابق .... *Matching*
دوستاره .... *Bistar*
رأس پایانی .... *End Vertex*
زنجیر .... *Chain*
زیرگراف القایی .... *Induced Subgraph*
ساقه .... *Stem*
طوقه .... *Loop*
قطر .... *Diameter*
کران .... *Bound*
مجاور .... *Adjacent*
مجموعه احاطه‌گر .... *Dominating Set*
مجموعه احاطه‌گر رومی .... *Roman Dominating Set*
مجموعه احاطه‌گر ضعیف .... *Weak Dominating Set*

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adjacent	مجاور
Bistar	دوستاره
Cartesian Product	حاصلضرب دکارتی
Clique–Transversal Set	مجموعه خوشه–متقاطع
Complexity	پیچیدگی
Connected Dominating Set	مجموعه احاطه‌گر همبند
Corona	تاج
Diameter	قطر
Dominating Set	مجموعه احاطه‌گر
End Vertex	رأس پایانی
Induced Subgraph	زیرگراف القایی
Leaf	برگ
Loop	طوقه
Matching	تطابق
Sharp	دقیق
Stem	ساقه
Sun	خورشید
Total Dominating Set	مجموعه احاطه‌گر کلی
Tree	درخت
Vertex Covering	پوشش رأسی

Aabstract

let G be a graph. A function $f : V(G) \to \{0, 1, 2\}$ *is a Roman dominating function (RDF) on G if every vertex* $u \in V$*, with* $f(u) = \emptyset$*, is adjacent to at least one vertex* v *with* $f(v) = 2$*. The weight of an RDF is the value* $f(V(G)) = \sum_{u \in V(G)} f(u)$*. The Roman domination number* $\gamma_{R(G)}$ *is the minimum weight of an RDF on G. A Roman 2-dominating function* $f : V \to \{0, 1, 2\}$ *has the property that for every vertex* $v \in V$ *with* $f(v) = \emptyset$*,* $f(N(v)) \geq 2$*. The weight of a Roman 2-dominating function is the sum* $f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$*, and the minimum weight of a Roman 2-dominating function f is the Roman 2-domination number, denoted* $\gamma_{\{R2\}}(G)$*.*

In Thesis, we present some results on the 2-rainbow domination number of some graphs. Moreovere, we determine the 2-rainbow domination number in generalized peterson graphs. So, we study Roman domination in graphs and present several bounds. Then, we study Roman 2-domination number of a graph and investigate the relation of this parameter with other parameters of graphs.

keywords*: domination, domination number, 2-domination, Roman domination, rainbow domination, 2-rainbow domination, weak Roman domination, 2-domination, Roman {2}-domination.*

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

Roman $\{2\}$-Domination in graphs and its applications

Khadije Alboghbeish

Supervisor

Dr. Nader Jafari Rad

October 2016