بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

رساله دکتری

تئوری تقریب در برخی جبرهای باناخ و فضاهای مدولی

نگارنده: **فاطمه سلیمانی**

استاد راهنما:

دکتر مهدی ایران منش

شهریور ۱۳۹۵

تقدیم به

به پدر و مادر عزیزم
و تمامی کسانی که قلبشان مملو از عشق خداوند است.

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بیکران خود، آدمی را به زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر مهدی ایرانمنش صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که از راهنمایی ایشان در راستای پیشبرد پژوهش، بهره‌های فراوان بردم و همواره شاگرد مکتب علم و منش والای ایشان هستم.

هم چنین درود و سلام بیکرانه‌ی خداوند برتمامی استادانم، از نخستین تا اینک، به ویژه سپاس من تقدیم اساتید بزرگوار گروه محض دانشکده ریاضی، جناب آقایان دکتر ابراهیم هاشمی، دکتر احمد زیره، دکتر کامران شریفی و دکتر سید حیدر جعفری باد، که هم در دوره کارشناسی و هم در دوره تحصیلات تکمیلی راهنمای من بوده اند. از جناب آقای دکتر علی غفاری، عضو هیات علمی دانشگاه سمنان به خاطر پذیرش مسئولیت داوری این رساله و نظرات ارزشمند ایشان کمال تشکر را دارم.

بر خود لازم می‌دانم که از لطف همیشگی خانواده عزیزم که بدون حمایت ها و تشویق های آنها رسیدن به این مرحله از زندگی برایم ناممکن بود کمال تشکر را داشته باشم هم چنین تشکر می‌کنم از تمامی دوستانم که در طول این سال ها یاور و دلگرمی‌ام بودند.

فاطمه سلیمانی
شهریور ۱۳۹۵

تعهدنامه

اینجانب **فاطمه سلیمانی** دانشجوی دکتری **دانشکده علوم ریاضی** رشته آنالیز دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده رساله با عنوان **تئوری تقریب در برخی جبرهای باناخ و فضاهای مدولی** تحت راهنمایی **دکتر مهدی ایران منش** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهشگران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه صنعتی شاهرود " یا " Shahrood University of Technology " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فاطمه سلیمانی
شهریور ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این رساله قصد داریم تئوری تقریب را در برخی جبرهای باناخ و فضاهای مدولی مانند جبر عملگرهای هیلبرتی، C^*-جبرها و فضای هیلبرت مدولی مورد مطالعه قرار دهیم. در این راستا، پس از آن که به مقدماتی از این فضاها اشاره کردیم، تمام مسائلی که معمولاً در نظریه تقریب مورد بحث قرار می گیرد، اعم از بهترین تقریب، دورترین نقطه، یکتایی، تقریب همزمان و هم تقریبی، را در این فضاها مورد بررسی قرار داده‌ایم. در ارائه مشخصه‌ی برای نقاط مذکور، از دو تکنیک مشتق و تابعک های فوق خطی استفاده کرده‌ایم و به کمک مفهوم برد عددی عملگرها و ارتباطی که آن با مقادیر مشتق دارد، به این هدف دست یافتیم و با استفاده از قضیه گلفند-نیمارک بسیاری از این نتایج را در فضای C^*-جبرها گسترش دادیم. در ادامه، نظریه تقریب را در جبر عملگرهای فازی و فضاهای مدولی مطرح نمودیم و سپس به تعمیمی از نتایج بهترین تقریب در فضای ۲-جبر باناخ پرداخته‌ایم. در پایان، به نتایجی در بحث تقریب پذیری برخی مجموعه‌های خاص از فضای شبه تانسوری و جمع مستقیم می‌پردازیم.

کلمات کلیدی : نظریه تقریب، عملگرهای هیلبرتی، C^*-جبر، عملگرهای فازی، ۲- جبر باناخ.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

مقالات پذیرفته شده :

1. Best approximation in quasi tensor product space and some lattice normed spaecs, Journal of Algebraic Systems, Vol. 2, no. 1 (2014) 67-81.
2. Farthest points in Hilbert operator spaces with applications, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 99, no. 2 (2015) 191- 200.
3. Some results on farthest points in 2-normed spaces, Novi Sad J. Math, Vol. 46, no. 1 (2016) 207-215.
4. Fuzzy numerical range Hilbert operators with applications, International Journal of Applied Mathematics, Vol, 29, no. 5 (2016), 523-536

مقالات کنفرانسی :

۱. دور پذیری گوی یکه زیر جبرهای سره عملگرهای هیلبرتی، چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران، ۴-۷ شهریور ، ۱۳۹۳، دانشگاه سمنان.

۲. نقش تعامد و مقادیر مشتق تابع مجذور نرم در تقریب عملگرهای هیلبرتی، ۲۱امین سمینار آنالیز ریاضی و کاربردهای آن، ۶-۵ آذر ۱۳۹۳، دانشگاه آزاد اسلامی همدان، صفحه ۴۶۹-۴۶۷.

۳. Ball proximinal and ball remotal subsapces in Hilbert operator spaces, The 4th Seminar on Functional Analysis and its Applications 2-3 rd March 2016, Ferdowsi University of Mashhad, Iran.

پیشگفتار

از اواسط قرن بیستم نظریه تقریب مورد توجه ریاضیدانان بسیاری قرار گرفت. از جمله افرادی که به این نظریه درفضاهای مختلف نرمدار پرداختند می‌توان به سینگر [۱] [۱۰۰]، چنی [۲] [۲۲] و داش [۳][۲۸] اشاره نمود. مسئله بهترین تقریب در فضای عملگرهای هیلبرتی برای اولین بار توسط هولمز [۴] [۵۰]مطرح و گسترش یافت. ایشان در سال ۱۹۷۲ تقریب مثبتی از یک عملگر دلخواه را بدست آورند. سپس در سال ۱۹۷۳ با وارد [۵] و سکراتون [۶][۵۶] تقریب پذیر بودن جبر عملگرهای فشرده را نشان دادند. البته پیش از این هافمن[۷] و فان [۸] [۳۶] تقریب پذیری مجموعه عملگرهای هرمیتی را نشان داده بودند. بولدین [۹][۱۹، ۲۰] در سال ۱۹۷۳ و ۱۹۸۰ تقریب پذیری مجموعه‌های مثبت و نرمال را در فضاهای رده‌ای [۱۰] نرم و p-نرم مورد بررسی قرار داد. ماهر [۱۱] در سال ۱۹۸۹ و ۲۰۱۰ قضیه حداقل کردن مقدار $\|T-U\|$ با فرض مثبت و نرمال بودن عملگر T را برای عملگرهای یکانی نشان داد[۸۳]. برخی دیگر از اقدامات انجام شده در این رابطه را می‌توان در منابع [۷، ۳۱، ۵۰، ۹۸] یافت. برعکس بهترین تقریب، که به خوبی مورد مطالعه و گسترش واقع شده است، مطالعه دورپذیری کمی دشوار و کمتر توسعه یافته است. اما اهمیت این مسئله در هندسه فضاهای باناخ باعث شده که اخیراً افراد زیادی نیز به این موضوع بپردازند. فرانچتی [۱۲] و سینگر [۴۱] در سال ۱۹۶۵ با استفاده از توابع خطی مشخصه‌هایی برای نقاط دور ارائه دادند. در سال ۱۹۶۶ آسپلاند [۱۳][۵] به این نظریه در فضاهای یکنواخت محدب پرداخت و از سال ۱۹۷۸ به بعد افرادی چون کاپور [۱۴][۶۸] و خلیل [۱۵] [۹۴] به این مبحث در فضاهای کلاسیک پرداختند. نتایج بیشتری را در خصوص دورپذیری و یکتایی می‌توان در منابع [۳، ۹، ۱۳، ۲۷، ۷۵، ۱۱۲] مشاهده کرد.

یکی دیگر از مباحث مطرح شده، هم تقریبی [۱۶] است که ابتدا بوسیله فرانچتی و فوری [۱۷][۴۰] ارائه و توسط پاپینی [۱۸][۹۳] و سینگر نامگذاری شد. متعاقب آن رائو [۱۹][۹۶] و همکارانش این نظریه را توسیع قابل توجهی دادند. قسمت اعظمی از این نظریه به سوالاتی از قبیل وجود، یکتایی و مشخصه‌ی بهترین هم تقریب می‌پردازد([۸۳، ۹۱، ۱۱۱]. از دیگر بحث‌های اخیر تقریب همزمان است که توسط ریاضیدانان تعاریف مختلفی از آن ارائه شده است(نگاه کنید [۴، ۹۱])

محتوای فصل‌های این رساله به صورت زیر است:

فصل اول شامل سه بخش است. بخش اول مرور مختصری بر مفاهیم و قضایای مورد نیاز در عملگرهای هیلبرتی و C^*-جبرها خواهد داشت. در بخش دوم به مباحث مقدماتی از نظریه تقریب

---

[۱] Singer [۲] Cheny [۳] Deutsch [۴] Holmes [۵] Ward [۶] Scraton [۷] Hoffman [۸] Fan
[۹] Bouldin [۱۰] normTrace [۱۱] Maher [۱۲] Franchetti [۱۳] Asplund [۱۴] Kapoor [۱۵] Khalil
[۱۶] Coapproximaition [۱۷] Furi [۱۸] Papini [۱۹] Rao

پرداختیم و در بخش پایانی به مهمترین قضایای آنالیز که در فصل های آتی از آنها استفاده خواهد شد می‌پردازیم.

در فصل دوم این رساله که مرتبط با مقالات [۵۸، ۵۹] است ، تقریب پذیری برخی زیرفضاهای جبر عملگرهای هیلبرتی را اثبات نموده‌ایم و به کمک برد عددی عملگرها، اولین بار به مشخصه‌هایی برای نقاط تقریب مجموعه‌های محدب دست یافتیم. هم چنین بوسیله توابع فوق خطی نتایج دیگری را در این زمینه اثبات کردیم. در ادامه، برخی نتایج جدید دور پذیری گوی یکه برخی زیرمجموعه‌های بسته این فضا را ارائه می‌کنیم. در بخش آخر، به بحث مشخصه برای نقاط هم تقریب دست می‌یابیم و وجود این نقاط را در این فضاها ثابت می‌کنیم.

در مجموعه نتایجی که تاکنون در زمینه نظریه تقریب بدست آمده است، کمتر نتایجی را می‌توان در مقالات یافت که به این نظریه و بخصوص بحث مشخصه نقاط تقریب در C^*-جبرها و فضاهای مدولی پرداخته باشد. البته به افرادی چون پدرسن [۲۰][۹۵] و ریفل [۲۱][۹۸] می‌توان اشاره کرد که نتایجی را در مورد تقریب در این فضاها بیان کرده‌اند. ما به کمک نتایج بدست آمده در فضای عملگرهای هیلبرتی و قضیه گلفند- نیمارک [۲۲][۸۸] مشخصه‌هایی را در این فضاها در فصل سوم ارائه نموده‌ایم. هم چنین با استفاده از احکامی که در [۶۲] اثبات نموده‌ایم، نشان دادیم در جبرهای باناخ با بعد نامتناهی مجموعه‌های وجود دارند که شبه چبیشف (تعریف ۲.۲.۱) نیستند.

در ادامه باتوجه به نتایج فصل دوم، نظریه تقریب را در فضای عملگرهای هیلبرتی فازی (که توسط حسنخانی، نظری و ساحلی [۵۳] تعریف شده است) تعمیم دادیم. این کار پایه ای برای انتقال نتایج به دست آمده از آنالیز تابعی و کاربردی به محیط‌های فازی است. ابتدا مفاهیمی چون عملگرهای خطی، برد عددی عملگرها را مشابه به آنچه در [۶۱] انجام داده‌ایم مطرح کرده سپس با توجه به نرم فازی عملگرها به اثبات صریحی از قضایای مربوط به تقریب خواهیم پرداخت.

در فصل پنجم، نظریه بهترین تقریب را به C^*-مدول ضرب داخلی روی یک C^*-جبر جابجایی، گسترش داده و نشان دادیم هر زیر مجموعه محدب در این فضا نسبت به نرم مخروطی که توسط ضرب داخلی آن تعریف می‌شود، تنها دارای یک عنصر تقریب است. هم چنین برخی ویژگی‌های تابع تصویر [۲۳] مورد بررسی قرار گرفت.

در فصل ششم، قضایا بیشتری از نظریه تقریب در ۲-جبر باناخ را بیان خواهیم کرد. مفهومی که ابتدا توسط محمد [۲۴] و صدیقی[۸۵] معرفی شد و توسط لعل [۲۵][۷۴] و همکاران او [۱۰۱] تاحدودی مورد بررسی قرار گرفته بود.

در فصل آخر رساله، به نتایجی که در بحث تقریب پذیری مجموعه‌های رو به پایین [۲۶] و رو به بالا [۲۷] که لزوماً مجموعه‌های محدبی در فضای جدید شبه تانسوری و جمع مستقیم نیستند، می‌پردازیم. در فضای جمع مستقیم از تعداد متناهی فضاهای مشبکه، مجموعه‌های جدید I_m- شبه رو به پایین و رو به بالا را معرفی نموده‌ایم. هم چنین به ارتباط این مجموعه‌ها با مجموعه‌های رو به پایین و رو به بالا از طریق نگاشت‌های ایزومورفیسم پرداخته‌ایم.

---

[۲۰] Pedersen [۲۱] Rieffel [۲۲] Gelfand-Nimark [۲۳] Projection Metric [۲۴] Mohammad
[۲۵] Lal [۲۶] Downward [۲۷] Upward

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات

۱.۱ جبرهای باناخ و C^*-جبرها

در این بخش اطلاعات مورد نیاز برای فصول آینده (اعم از تعاریف و قضایا) آورده شده است. ابتدا مفاهیم جبر، C^*-جبرها ، طیف و نمایش گلفند-نیمارک را معرفی نموده و در ادامه به برخی توپولوژی‌ها و زیر جبرهای فضای عملگرهای هیلبرتی و فضای هیلبرت مدولی می‌پردازیم. سپس به تعاریفی از نظریه تقریب و برخی قضایای مهم اشاره خواهیم کرد. کتاب‌های [۲۵، ۸۸، ۱۰۰] به عنوان مراجع استاندارد مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

تعریف ۱.۱.۱. یک جبر A روی میدان F، یک فضای برداری است همراه با ضرب اسکالر و ضرب $A\times A\to A,\ (a,b)\to ab$ به طوری که به ازای هر $\alpha\in F$ و $a,b,c\in A$،

۱) $a(bc)=(ab)c$،

۲) $a(b+c)=ab+ac, (a+b)c=ac+bc$،

۳) $\alpha(ab)=(\alpha a)b=a(\alpha b)$.

در حالتی که به ازای هر $a,b\in A$، $ab=ba$، A را یک جبر جابه جایی [۱] می‌گویند.

فرض کنید A یک جبر روی میدان F و $||.||$ یک نرم روی A باشد. در این صورت $(A,||.||)$ را یک جبر نرمدار می‌گویند.

تعریف ۲.۱.۱. برگشت [۲] روی جبر مفروض A عبارت است از نگاشت مزدوج خطی $a^*\longrightarrow a$ روی A به قسمی که برای هر $a,b\in A$، $a^{**}=a$، $(ab)^*=b^*a^*$. زوج $(A,*)$ را یک جبر برگشت یا یک $*$ -جبر [۳] نامیم.

اگر S یک زیر مجموعه از A و $S^*=\{a^*:a\in S\}$ به طوری که $S=S^*$، آنگاه S را خود الحاق [۴] می‌نامند. یک زیر جبر خود الحاق B از A را یک $*$- زیر جبر از A می‌گویند.

[۱] Commutative [۲] Involution [۳] *-algebra [۴] Adjointable

تعریف ۳.۱.۱. یک $*$ - جبر باناخ، عبارت است از یک $*$ - جبر A به همراه نرم $\|.\|$ به طوری که برای هر $a, b \in A$،

$$\|a\| = \|a^*\|, \ \|ab\| \leq \|a\|\|b\|,$$

و A نسبت به این نرم فضای تام باشد. اگر جبر A یکدار باشد، A را یک $*$ - جبر باناخ یکدار می‌نامند.

تعریف ۴.۱.۱. یک C^* - جبر باناخ عبارت است از یک $*$ - جبر باناخ A به طوری که برای هر $a \in A$،

$$\|aa^*\| = \|a\|^{۲}.$$

مثال ۵.۱.۱. فرض کنید X فضای توپولوژیک هاسدروف فشرده باشد. در این صورت $C(X)$ متشکل از توابع پیوسته مختلط، با برگشت $* : f \to \overline{f}$ یک C^* - جبر است.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم A جبر باناخ با همانی ضربی e باشد. طیف عنصر [۵] $a \in A$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$\sigma(a) := \{\lambda \in F : a - \lambda e \notin A^{-۱})\}.$$

که $A^{-۱}$ مجموعه عناصر معکوس پذیر A است.

هم چنین شعاع طیفی [۶] عنصر a را با نماد $r(a)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$r(a) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}.$$

تعریف ۷.۱.۱. یک کاراکتر [۷] روی جبر A ، همریختی غیر صفر $\tau : A \longrightarrow F$ است. مجموعه‌ی تمام کاراکترهای روی جبر باناخ A را با نماد $\Omega(A)$ نشان داده و آن را فضای کاراکترهای روی A می‌نامند.

قضیه ۸.۱.۱. [۸۸] فرض کنید A جبر باناخ یکدار جابه جایی باشد، آنگاه $\Omega(A)$ فضای هاسدورف و فشرده است و برای هر $a \in A$، $\sigma(a) = \{\tau(a) : \tau \in \Omega(A)\}$.

قضیه ۹.۱.۱. (قضیه ۱.۳.۴ [۸۸]) فرض کنید A جبر باناخ یکدار جابه جایی باشد، در این صورت

$$A \to C(\Omega(A)), \quad a \to \widehat{a}.$$

یک همریختی است. که در آن $\widehat{a}$ تبدیل گلفند با ضابطه‌ی $\widehat{a}(\tau) = \tau(a)$.

در این رساله، از نماد $\widehat{A}$ برای مجموعه‌ی متشکل از تمام تبدیلات گلفند استفاده می کنیم. در واقع

$$\widehat{A} = \{\widehat{a} : \ a \in A\}.$$

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید A یک $*$ - جبر باشد، در این صورت:

[۵] Specterum [۶] Spectrum radius [۷] Character

۱. عنصر $a \in A$ را خود الحاقی یا هرمیتی [۸] گویند، اگر $a = a^*$.

برای هر $a \in A$ اعضای هرمیتی $b, c \in A$ چنان موجود که $a = b + ic$. این مطلب با توجه به دو تساوی ذیل بدست می‌آید:

$$b = \frac{a + a^*}{۲}, c = \frac{a - a^*}{۲i}.$$

۲. عنصر $a \in A$ را نرمال [۹] گویند، اگر $aa^* = a^*a$.

۳. عنصر $p \in A$ را یک تصویر [۱۰] می‌نامند، اگر $p^۲ = p = p^*$.

۴. عنصر $a \in A$ را یکانی [۱۱] گویند، اگر $aa^* = a^*a = ۱$.

تعریف ۱.۱.۱۱. فرض کنید A یک C^*-جبر باشد. $a \in A$ را یک عنصر مثبت [۱۲] گوییم، هر گاه a هرمیتی، $\sigma(a) \subseteq [۰, \infty]$ و می‌نویسیم $a \geq ۰$. مجموعه همه عناصر مثبت A را با A^+ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱.۱.۱۲. (قضیه ۲.۲.۵ [۸۸]) فرض کنید A یک C^*-جبر باشد. در این صورت

۱) $A^+ = \{a^*a : a \in A\}$.

۲) اگر $۰ \leq a \leq b$ آنگاه $\|a\| \leq \|b\|$.

تعریف ۱.۱.۱۳. فرض کنید A یک C^*-جبر باشد. تابعک خطی $\tau : A \to \mathbb{C}$ را مثبت می‌نامند، هرگاه برای هر $a \in A^+$، $\tau(a) \geq ۰$.

تعریف ۱.۱.۱۴. فرض کنید A یک C^*-جبر باشد. تابعک خطی مثبت $\tau : A \to \mathbb{C}$ را یک حالت [۱۳] می‌نامند، هرگاه $\|\tau\| = ۱$.

تعریف ۱.۱.۱۵. اگر X فضای نرمدار باشد، مجموعه تمام نگاشت های خطی کراندار از X به خودش را عملگرهای بر X می نامیم و با $B(X)$ نشان می‌دهیم. می‌توان نشان داد که $B(X)$ با اعمال جمع، ضرب اسکالر و ترکیب عملگرها یک جبر نرمدار است که نرم آن، همان نرم عملگری زیر می‌باشد.

$$\|u\| = \sup_{x \neq ۰} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq ۱} \|u(x)\|, (u \in B(X)).$$

و اگر X فضای باناخ آنگاه $B(X)$ یک جبر باناخ خواهد بود. اگر H را فضای هیلبرت در نظر بگیریم $B(H)$ با توجه به قضیه زیر یک C^* -جبر است.

قضیه ۱.۱.۱۶. (قضیه ۲.۳.۱ [۸۸]) فرض کنید H یک فضای هیلبرت و $T \in B(H)$. در این صورت عنصر یکتا مانند T^* در $B(H)$ چنان یافت می شود که

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, (\forall\, x, y \in H).$$

---

[۸] Hermitian [۹] Normal [۱۰] Projection [۱۱] Unitary [۱۲] Positive [۱۳] State

خواهیم دید که هر C^*-جبر را می‌توان به عنوان زیر جبری از $B(H)$ در نظر گرفت. این در حقیقت همان قضیه گلفند- نیمارک است که در ادامه به آن اشاره خواهد شد.

قضیه ۱.۱.۱۷. (قضیه ۱.۴.۳ [۸۸]**گلفند-نیمارک**) [۱۴] : فرض کنید A یک C^* -جبر باشد. در این صورت A با زیر C^*-جبری از عملگرهای هیلبرتی روی H یکریخت است.

به زوج (H,π) که در آن H همان فضای هیلبرت و π نگاشت یکریختی فوق است، یک نمایش گلفند-نیمارک برای A می‌گویند.

تعریف ۱.۱.۱۸. عملگر $T : H \to H$ را یک ایزومتری جزئی [۱۵] گویند، هرگاه به ازای هر x که $T(x) \neq 0$، $\|T(x)\| = \|x\|$. به علاوه اگر $TT^* = I$ یا $T^*T = I$، عملگر T را یک ماکسیمال ایزومتری جزئی می‌گویند.

قضیه ۱.۱.۱۹. (قضیه ۵.۲.۱ [۸۸]**نمایش قطبی**) [۱۶]: فرض کنید T یک عملگر خطی پیوسته روی فضای هیلبرت H باشد. آنگاه یک ایزومتری جزئی مانند u چنان موجود است که $T = u|T|$.

تعریف ۱.۱.۲۰. برد عددی [۱۷] یک عملگر T زیر مجموعه ای از اعداد مختلط بصورت زیر است:

$$W(T) := \{\langle Tx, x\rangle : x \in H, \|x\| = 1\}.$$

مثال ۱.۱.۲۱. اگر T یک عملگر روی یک فضای دو بعدی باشد. آنگاه برد عددی T قرصی بیضوی است، که کانون های آن مقادیر ویژه T می‌باشد.

به طور مشابه برد عددی عملگر F^*T نسبت به عملگر T به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W(F^*T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, F^*T(x_n)\rangle, \quad \{x_n\} \in Z_T\}.$$

که در آن

$$Z_T := \{\{x_n\} : x_n \in H, \|x_n\| = 1, \ \lim_{n\to\infty} \|T(x_n)\| = \|T\|\}.$$

قضیه ۱.۱.۲۲. (لم ۱.۲ [۸۱]) برد عددی عملگر F^*T نسبت به عملگر T، مجموعه‌ای محدب و فشرده در صفحه اعداد مختلط است.

تعریف ۱.۱.۲۳. (توپولوژی قوی عملگرها [۱۸]). برای هر $x \in H$ نیم نرم P_x روی $B(H)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_x(T) = \|Tx\|, \ (T \in B(H)).$$

توپولوژی القا شده توسط خانواده‌ی $\{P_x\}_{x\in H}$ را توپولوژی قوی عملگرها می‌نامند. همگرائی در این توپولوژی به صورت زیر می باشد: $T_n \xrightarrow{s.o.t} T$ اگر و تنها اگر برای هر $x \in H$ ، $\|T_nx - Tx\| \to 0$.

[۱۴] Gelfand-Naimark [۱۵] Partial isometry [۱۶] Gelfand representation [۱۷] Numerical rang [۱۸] Strong topology

تعریف ۲۴.۱.۱. (توپولوژی ضعیف عملگرها [۱۹]). برای هر $x,y \in H$ نیم نرم $P_{x,y}$ روی $B(H)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_{x,y}(T) = |\langle Tx, y\rangle|,\ \ (T \in B(H)).$$

توپولوژی القا شده توسط خانواده‌ی $\{P_{x,y}\}_{x,y}$ را توپولوژی ضعیف عملگرها می‌نامند. همگرائی در این توپولوژی به صورت زیر می باشد: $T_n \xrightarrow{w.o.t} T$ اگر و تنها اگر برای هر $x, y \in H$، داشته باشیم $|\langle T_n x, y\rangle| \to |\langle Tx, y\rangle|$.

تعریف ۲۵.۱.۱. (توپولوژی ضعیف ستاره عملگرها [۲۰]). توپولوژی القا شده توسط خانواده‌ی $\{P_v\}$ که $v \in L_1(H)$ (ر.ج.ک تعریف ۱۶.۱.۲) و P_v روی $B(H)$ به صورت زیر تعریف می‌شود را توپولوژی ضعیف ستاره عملگرها می‌نامند.

$$P_v(T) = |trac(Tv)|,\ \ (T \in B(H)).$$

قضیه ۲۶.۱.۱. (قضیه ۴.۲.۷ [۸۸]) فرض کنید C زیرمجموعه محدبی از $B(H)$ باشد. در این صورت C یک مجموعه بسته قوی است اگر و تنها اگر C یک مجموعه بسته ضعیف باشد.

قضیه ۲۷.۱.۱. (گزاره ۲۰.۱ [۲۶]) توپولوژی ضعیف ستاره و توپولوژی ضعیف عملگرها روی زیر مجموعه های کراندار $B(H)$ سازگارند.

قضیه ۲۸.۱.۱. (قضیه ۴.۲.۴ [۸۸]) گوی یکه فضای $B(H)$ یک مجموعه فشرده ضعیف است.

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض کنید A یک C^*-جبر باشد. یک A -مدولی ضرب داخلی مانند E یک A-مدول چپ همراه با ضرب اسکالر زیر:

$$\lambda(ax) = (\lambda a)x = a(\lambda x),\ \ (x \in E, a \in A, \lambda \in \mathbb{C}).$$

و نگاشت $A \to E \times E$ با ضابطه $(x,y) \to \langle x, y\rangle$، به طوری که به ازای هر $a \in A$ ، $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ و $x, y, z \in E$،

۱) $\langle \alpha x + \beta z, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle z, y\rangle$،

۲) $\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle$،

۳) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle^*$،

۴) $\langle x, x\rangle \geq 0, \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

یک A -مدول ضرب داخلی که نسبت به نرم $\|x\| = \|\langle x, x\rangle\|^{\frac{1}{2}}$ تام باشد، را یک A-مدول هیلبرت یا یک C^*-مدول هیلبرت [۲۱] روی جبر A می نامند.

مثال ۳۰.۱.۱. فرض کنید A یک C^*-جبر باشد. در این صورت A با ضرب داخلی $\langle , \rangle$ که به ازای هر $a, b \in A$، $\langle a, b\rangle = ab^*$، یک A-مدول هیلبرت است.

[۱۹] Weak topology
[۲۱] Hilbert-module

۲.۱ تئوری تقریب

در این بخش مفاهیم و قضایای بهترین(نزدیکترین) تقریب و دورترین تقریب برگرفته از منبع [۱۰۰] را معرفی می‌کنیم.

فرض کنید X یک فضای خطی نرمدار، $x \in X$ و A یک زیر مجموعه غیرتهی از X باشد. در این صورت $y \in A$ را عنصر بهترین تقریب [۲۲] x در A نامیم، در صورتی که :

$$\| x - y \| = d(x, A).$$

همچنین از $\mathbf{P}_A(x)$ برای نمایش مجموعه تمام عناصر بهترین تقریب x در A استفاده می‌کنیم، به عبارت دیگر:

$$\mathbf{P}_A(x) := \{a \in A \mid \| x - a \| = d(x, A)\}.$$

تعریف ۱.۲.۱. یک زیر مجموعه غیر تهی A از X را تقریب پذیر [۲۳] گویند، در صورتی که به ازای $x \in X$، $\mathbf{P}_A(x) \neq \varnothing$.

تعریف ۲.۲.۱. مجموعه تقریب پذیر A را که به ازای هر $x \in X$ ، $\mathbf{P}_A(x)$ تک عضوی باشد، مجموعه چبیشف [۲۴] نامیده می‌شود. هم چنین اگر برای هر $x \in X$، $\mathbf{P}_A(x)$ یک مجموعه غیرتهی و فشرده باشد، مجموعه A را شبه چبیشف [۲۵] می‌گویند.

لم ۳.۲.۱. (قضیه ۲.۷ [۲۸]) فرض کنید X فضای باناخ، $x \in X$ و A یک زیر مجموعه غیرتهی از X باشد. در این صورت به ازای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ احکام زیر برقرارند:

(۱) $\mathbf{P}_{A+y}(x+y) = \mathbf{P}_A(x) + y$.

(۲) $\mathbf{P}_{\alpha A}(\alpha x) = \alpha \mathbf{P}_A(x)$.

قضیه ۴.۲.۱. (لم ۲.۱۱ [۲۸]) فرض کنید X فضای باناخ و A یک زیرمجموعه‌ی فشرده یا زیر فضای متناهی البعد بسته از X باشد. در این صورت A تقریب پذیر است.

قضیه ۵.۲.۱. (گزاره ۳.۱ [۱۰۰]) فرض کنید X فضای باناخ و G یک زیر فضای چبیشف باشد. در این صورت $X = G \oplus \widehat{G}$ که در آن $\widehat{G} = \{x \in X : \circ \in \mathbf{P}_G(x)\}$.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید X فضای باناخ و $x, y \in X$. گوییم x متعامد [۲۶] (بیرخوف) [۲۷] بر عنصر y است و می‌نویسیم $x \perp_B y$ در صورتی که :

$$\| x + \alpha y \| \geq \| x \|, \ (\forall \ \alpha \in \mathbb{R}).$$

لم ۷.۲.۱. (لم ۱.۴ [۱۰۰]) فرض کنید X فضای باناخ، $x \in \overline{X \setminus G}$ و $g_\circ \in G$. دراین صورت $g_\circ \in \mathbf{P}_G(x)$ است اگر و فقط اگر $x - g_\circ \perp_B G$.

---

[۲۲] Best approximation [۲۳] Proximinal [۲۴] Chebichv [۲۵] Quasi-Chebichv [۲۶] Orthogonal
[۲۷] Birkhoff

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید X یک فضای نرمدار، A مجموعه کرانداری از X و $x \in X$. در این صورت انحراف مجموعه A از x را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbb{S}_A(x) = \sup_{g \in A} \|x - g\|.$$

فرض کنید $y \in A$ در این صورت y را نقطه دور [۲۸] x در A نامند، در صورتی که:

$$\| x - y \| = \mathbb{S}_A(x).$$

مجموعه‌ی دورترین نقاط از x در A با $\mathbb{F}_A(x)$ نشان می‌دهیم:

$$\mathbb{F}_A(x) = \{a \in A \mid \| x - a \| = \mathbb{S}_A(x)\}.$$

تعریف ۹.۲.۱. نگاشت $F_A : X \to 2^A$ با ضابطه $x \to \mathbb{F}_A(x)$، نگاشت دورترین نقطه در فضای نرمدار نامیده می‌شود. مجموعه کراندار غیر تهی A را دور پذیر [۲۹] گویند، در صورتی که به ازای هر $x \in X$، $\mathbb{F}_A(x) \neq \emptyset$.

۳.۱ برخی قضایای مهم

در این بخش به مهم ترین قضایای پر کاربرد آنالیزی در این رساله اشاره می‌کنیم.

قضیه ۱.۳.۱. (قضیه ۳.۱[۲۵])**باناخ الاغلو:** [۳۰] فرض کنید X فضای خطی نرمدار باشد. در این صورت گوی یکه بسته در X^* یک مجموعه فشرده ضعیف ستاره است.

قضیه ۲.۳.۱. (قضیه ۶.۲ [۲۵])**قضیه هان-باناخ:** [۳۱] هرگاه M زیر فضایی از فضای نرمدار X، f یک تابع خطی و کراندار بر M باشد، آنگاه f را می توان به یک تابع خطی و کراندار مانند F بر X توسیع داد به قسمی که $\| F \| = \| f \|$.

تعریف ۳.۳.۱. برای یک زیر مجموعه مانند K از X، پوسته محدب K را اشتراک تمام مجموعه‌های محدب شامل K تعریف کرده و با نماد $Co(K)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۴.۳.۱. یک زیر مجموعه غیر تهی B از X را یک زیر مجموعه فرین [۳۲] از مجموعه بسته و محدب K می‌نامند، در صورتی که:

۱) B یک زیر مجموعه بسته و محدب در K باشد.

۲) رابطه $\lambda x + (1 - \lambda)y \in B$ برای $x, y \in K$ و $0 < \lambda < 1$ ایجاب کند $x, y \in B$.

اگر $B = \{a\}$ آنگاه a را نقطه فرین می‌نامند. مجموعه‌ی تمام نقاط فرین را با نماد $ext(K)$ نمایش می‌دهیم.

[۲۸] Farthest point [۲۹] Remotal [۳۰] Banach-Alaoglu [۳۱] Hana-Banach [۳۲] Extremal

قضیه ۱.۳.۵. (قضیه ۷.۴ [۲۵]) **کرین–میلمن** [۳۳]). فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک، $X^\star$ جدا کننده نقاط X و K یک زیر مجموعه ناتهی فشرده و محدبی در X باشد، در این صورت $\overline{Co(ext(K))} = K$.

قضیه ۱.۳.۶. (لم ۲.۳ [۶۸]) فرض کنید B یک زیر مجموعه کراندار و محدب از X و $x \in X$ به قسمی که $\mathbb{F}_B(x)$ یکتا باشد. در این صورت $\mathbb{F}_B(x)$ یک نقطه فرین از B است.

قضیه ۱.۳.۷. (مسئله ۱۳۶ [۵۱]) نقاط فرین گوی یکه $B(H)$، عملگرهای ماکسیمال ایزومتری جزئی هستند.

تعریف ۱.۳.۸. تابع حقیقی مقدار $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را تابع محدب گوییم، در صورتی که

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \ (\forall\, x, y \in X,\ \lambda \in [0,1]).$$

قضیه ۱.۳.۹. (لم $D.7$ $\oint$ [۵۴]) فرض کنید f یک تابع محدب روی فضای X باشد. در این صورت نگاشت :

$$t \mapsto \frac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t},$$

نگاشتی نانزولی بروی $0 < t \in \mathbb{R}$ است.

تعریف ۱.۳.۱۰. تابع حقیقی مقدار $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را تابع نیمه پیوسته‌ی بالایی (پایینی) گویند، در صورتی که به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ مجموعه $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ ($\{x \in X : f(x) > \alpha\}$) باز باشد.

قضیه ۱.۳.۱۱. (لم ۲ [۶۹]) فرض کنید $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ و $x_0 \in X$. در این صورت:

(۱) f در نقطه x_0 دنباله نیمه پیوسته‌ی بالایی است اگر و فقط اگر به ازای هر دنباله $x_i \to x_0$ ، $\limsup f(x_i) \leq f(x_0)$.

(۲) f در نقطه x_0 نیمه پیوسته‌ی پایینی است اگر و فقط اگر به ازای هر دنباله $x_i \to x_0$، $f(x_0) \leq \liminf f(x_i)$.

(۳) تابع $\phi : X \to \mathbb{R}$ با ضابطه $x \mapsto \limsup_{y \mapsto x} f(y)$ یک تابع نیمه پیوسته‌ی بالایی روی X است.

قضیه ۱.۳.۱۲. (مسئله ۲۱ [۵۱]) تابع نرم عملگرهای هیلبرتی یک نگاشت نیمه پیوسته‌ی پایینی ضعیف است.

قضیه ۱.۳.۱۳. [۶۹] **وایرشتراس تعمیم یافته**[۳۴] : هر تابع نیمه پیوسته‌ی پایینی ضعیف، روی مجموعه فشرده ضعیف مقدار مینمم خود را اختیار می‌کند.

تعریف ۱.۳.۱۴. نقطه $x \in X$ را یک نقطه‌ی ثابت نگاشت $f : X \to X$ می‌نامند، در صورتی که $f(x) = x$. مجموعه‌ی تمام نقاط ثابت f را با $F(f)$ نمایش می‌دهیم، به عبارت دیگر:

$$F(f) = \{x \in X : f(x) = x\}.$$

[۳۳] Krein-Milman [۳۴] Weierstrass

تعریف ۱۵.۳.۱. فرض کنید X فضای نرمدار و f نگاشتی از X به روی خودش باشد. نگاشت f انقباضی نامیده می‌شود، در صورتی k ای که $0 \leq k \leq 1$ موجود باشد، به قسمی که برای هر $x, y \in X$، $||fx - fy|| \leq k||x - y||$.

قضیه ۱۶.۳.۱. (قضیه ۳.۱ [۹۹]) فرض کنید X یک فضای باناخ، C یک زیر مجموعه محدب فشرده از X و $T : C \to C$ یک نگاشت پیوسته باشد. در این صورت T دارای حداقل یک نقطه ثابت در C است.

فصل ۲

تئوری تقریب در جبر عملگرهای هیلبرتی

در این فصل نظریه تقریب را در جبر عملگرهای هیلبرتی $B(H)$ که متشکل از تمام توابع خطی کراندار روی فضای هیلبرت H است مورد مطالعه قرار داده‌ایم.

۱.۲ تئوری بهترین تقریب

در این بخش ابتدا وجود تقریب پذیری برخی از زیر مجموعه‌های $B(H)$ را ثابت می‌کنیم. در مواردی هم عناصر بهترین تقریب را دقیقاً مشخص نموده‌ایم. در ادامه نیز به بیان مشخصه‌های این نقاط پرداخته شد.

در طول این فصل، H یک فضای هیلبرت روی میدان $\mathbb{F}$ با بعد دلخواه فرض شده است که $\mathbb{F}$ میدان اعدادحقیقی یا مختلط می‌باشد(در غیره این صورت در مسئله قید می‌شود).

۱.۱.۲ تقریب پذیری برخی زیر مجموعه‌های $B(H)$

قضیه ۱.۱.۲. فرض کنید W یک زیر مجموعه محدب بسته ضعیف از $B(H)$ باشد، در این صورت B_W گوی یکه W مجموعه تقریب پذیر است. به علاوه اگر W یک زیر فضا باشد، آنگاه W یک مجموعه تقریب پذیر است.

برهان. فرض کنید T_n دنباله ای در B_W به قسمی که $T_n \xrightarrow{w.o.t} T$. از اینکه تابع نرم بنا به قضیه ۱۲.۳.۱ نیم پیوسته‌ی پایینی بطور ضعیف است، لذا $\|T\| \leq \liminf \|T_n\| = ۱$. چون W یک مجموعه بسته ضعیف است، نتیجه می‌شود که $T \in B_W$. این نشان می‌دهد که B_W یک مجموعه بسته ضعیف است. با توجه به اینکه گوی یکه $B(H)$ بنا به قضیه ۲۸.۱.۱، یک مجموعه فشرده ضعیف است، پس B_W نیز یک مجموعه فشرده ضعیف می‌باشد. لذا بنا به قضیه وایرشتراس ۱۳.۳.۱، تابع نرم مینمم خود را روی مجموعه فشرده ضعیف $B_W - f$ به ازای هر $f \in B(H)$ اختیار می‌کند. بنابراین B_W یک مجموعه تقریب پذیر است.

اگر W زیر فضایی از $B(H)$ باشد، ثابت می‌کنیم به ازای هر $f \in B(H)$ ، $P_W(f) \subseteq ۲\|f\|B_W$. فرض کنید $w \in P_W(f)$ای موجود باشد به قسمی که $\|w\| > ۲\|f\|$. در این صورت

$$d(f, W) \leq \|f\| < \|w\| - \|f\| \leq \|w - f\| = d(f, W),$$

و این غیر ممکن است. بنابراین $P_W(f) \subseteq ۲\|f\|B_W$ و $d(f, ۲\|f\|B_W) \leq d(f, W)$. از اینکه $۲\|f\|B_W \subseteq W$ پس $d(f, ۲\|f\|B_W) \geq d(f, W)$ در نتیجه

$$d(f, ۲\|f\|B_W) = d(f, W).$$

بنابراین $P_W(f) = P_{۲\|f\|B_W}(f)$. چون $P_{۲\|f\|B_W}(f) = ۲\|f\|P_{B_W}(\frac{f}{۲\|f\|})$ و B_W بنا به قسمت اول تقریب پذیر است، لذا $P_{B_W}(\frac{f}{۲\|f\|}) \neq \phi$. در نتیجه برای هر $f \in B(H)$، $P_W(f) \neq \emptyset$. این نشان می‌دهد که W تقریب پذیر است. □

نتیجه ۲.۱.۲. فرض کنید W یک زیر فضای بسته قوی از $B(H)$ باشد، در این صورت W تقریب پذیر است.

برهان. بنا به قضیه ۲۶.۱.۱، W بسته ضعیف است. بنابراین تقریب پذیری آن از قضیه ۱.۱.۲، نتیجه می‌شود. □

مثال ۳.۱.۲. فرض کنید W یک زیرفضای بسته از $B(H)$ باشد، در این صورت جابه جا گر [1] W' یعنی

$$W' = \{q \in B(H) : \ qw = wq, \ \forall w \in W\},$$

تقریب پذیر است.

نتیجه ۴.۱.۲. فرض کنید W یک زیر مجموعه محدب بسته ضعیف ستاره از $B(H)$ باشد، در این صورت B_W تقریب پذیر است.

برهان. فرض کنید T_n دنباله ای در B_W بقسمی که $T \xrightarrow{w^*} T_n$. از اینکه توپولوژی ضعیف ستاره قویتر از توپولوژی ضعیف است، لذا $T \xrightarrow{w.o.t} T_n$ در نتیجه $\|T\| \leq \liminf \|T_n\| = ۱$. چون W مجموعه بسته ضعیف ستاره است، لذا $T \in B_W$. این نشان می‌دهد که B_W یک مجموعه بسته ضعیف ستاره است. بنا به قضیه ۲۷.۱.۱، توپولوژی ضعیف ستاره و توپولوژی ضعیف روی زیر مجموعه های کراندار موافق هستند، پس B_W یک مجموعه بسته ضعیف است. بنابراین مشابه قضیه ۱.۱.۲، B_W تقریب پذیر است. □

تعریف ۵.۱.۲. فرض کنید l یک گردایه از زیرفضاهای H باشد. در این صورت $Alg(\ell)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Alg(\ell) := \{T \in B(H) : T(H) \subseteq K, \forall\ K \in l\}.$$

[1] Commutant

فرض کنید B یک زیر مجموعه غیر تهی از $B(H)$ باشد. زیر فضای مشبکه پایا [۲] B را به صورت زیر در نظر می‌گیرند:

$$Lat(\mathtt{B}) := \{M \subseteq H : M \text{ } is \text{ } subspace, \ TM \subseteq M, \ \forall \ T \in \mathtt{B}\}.$$

مثال ۶.۱.۲. فرض کنید μ یک اندازه ‎-متناهی روی فضای $\mathbb{C}$ باشد، عملگر $N : L^{۲}(\mu) \to L^{۲}(\mu)$ را با ضابطه $Nf = zf$ تعریف کنید. قرار دهید $B = \{N, N^*\}$. در این صورت

$$Lat(\mathtt{B}) = \{L^{۲}(\mu \mid_{\triangle}) : \triangle \text{ } is \text{ } a \text{ } Borel \text{ } set\}.$$

تعریف ۷.۱.۲. فرض کنید $x, y \in H$، عملگر $x \otimes y : H \to H$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x \otimes y)(z) = \langle z, y \rangle x, \ (\forall \ z \in H).$$

قضیه ۸.۱.۲. فرض کنید ℓ گردایه‌ای از زیرفضاهای H باشد، در این صورت:

۱) $Alg(\ell)$ یک مجموعه تقریب پذیر در $B(H)$ است.

۲) اگر $Y \in LatAlg(\ell)$ در این صورت B_Y یک مجموعه تقریب پذیر در H است.

برهان. ۱) بنا به گزاره ۲۳.۲ [۵۵]، $Alg(\ell)$ یک زیر فضای بسته ضعیف است. بنابراین بنا به قضیه ۱.۱.۲، W یک مجموعه تقریب پذیر است.

۲) فرض کنید $Y \in LatAlg(\ell)$، $x \in H$ و $s \in B_Y$. قرار می‌دهیم $f = x \otimes s$. از اینکه $B_{Alg(\ell)}$ تقریب پذیر است، یک $g_{\circ} \in P_{B_{Alg(\ell)}}(f)$ ای هست که به ازای هر $g \in B_{Alg(\ell)}$، $\|f - g_{\circ}\| \leq \|f - g\|$. قرار می‌دهیم $g = y \otimes s$ که $y \in B_Y$. در نتیجه

$$\begin{aligned}
\|x - g_{\circ}(s)\| &= \|(x \otimes s)(s) - g_{\circ}(s)\| \\
&\leq \|f - g_{\circ}\| \leq \|f - g\| = \sup_{t \in B_H} \|f(t) - g(t)\| \\
&= \sup_{t \in B_H} \|(x \otimes s)(t) - y \otimes s(t)\| = \sup_{t \in B_H} \|\langle t, s \rangle (x - y)\| \\
&= \sup_{t \in B_H} |\langle t, s \rangle| \|x - y\| \\
&\leq \|x - y\| \sup_{t \in B_H} \|t\| \|s\| \\
&= \|x - y\|,
\end{aligned}$$

بنابراین $\|x - g_{\circ}(s)\| \leq \|x - y\|$. بنا به تعریف ۵.۱.۲، $g_{\circ}(s) \in Y$ و $\|g_{\circ}(s)\| \leq ۱$. لذا برای $x \in H$، $g_{\circ}(s) \in P_{B_Y}(x)$. این نشان می‌دهد که B_Y یک مجموعه تقریب پذیر در H است.

□

[۲] Invariant lattic

فرض کنید Y یک زیر مجموعه از $B(H)$ باشد. قرار می‌دهیم

$$K_Y = \{t \in H : \exists\, g \in Y s.t.\ \|g(t)\| = \|g\|\}.$$

قضیه ۹.۱.۲. فرض کنید Y یک زیر فضایی از $B(H)$ به قسمی که K_Y متناهی باشد. در این صورت B_Y یک مجموعه تقریب پذیر است.

برهان. نگاشت $g \longrightarrow g|_{K_Y}$ یک ایزومتری نشاننده از Y بروی $B(K_Y)$ است. بنابراین اگر K_Y یک مجموعه متناهی باشد، در این صورت $B(K_Y)$ یک فضای متناهی البعد می‌باشد و با توجه به ایزومتری Y نیز چنین است. در نتیجه B_Y یک مجموعه فشرده است و لذا تقریب پذیر می‌باشد. □

در این رساله ما از نماد $\Im(H)$ برای تمام عملگرهای هرمیتی استفاده می‌کنیم در واقع

$$\Im(H) = \{u \in B(H) :\ u = u^*\}.$$

همچنین مجموعه‌ی تمام عملگرهای مثبت را با $\varrho(H)$ نشان می‌دهیم به عبارت دیگر

$$\varrho(H) = \{f \in B(H) : \langle f(x), x\rangle \geq ۰,\ \forall x \in H\}.$$

بنا به گزاره ۳.۵ [۵۴]، $\varrho(H)$ یک مخروط محدب بسته از $B(H)$ است. به کمک این مخروط یک رابطه ترتیبی روی $\Im(H)$ به نحو زیر تعریف می شود:

$$u \leq v \Leftrightarrow v - u \in \varrho(H) \Leftrightarrow \langle v(x), x\rangle \geq \langle u(x), x\rangle.$$

اینک نگاشت $\varphi : B(H) \to \mathbb{R}$ با ضابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$\varphi(f) = \inf\{\lambda \geq ۰ :\ ff^* \leq \lambda id_H\},\ (f \in B(H)). \tag{۱.۲}$$

لم ۱۰.۱.۲. فرض کنید $f \in B(H)$ در این صورت $\varphi(f) = \|f\|^۲$.

برهان. با توجه به تعریف (۱.۲) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\varphi(f) &= \inf\{\lambda \geq ۰ :\ ff^* \leq \lambda id_H\}\\
&= \inf\{\lambda \geq ۰ :\ \langle ff^*(x), x\rangle \leq \lambda\langle x, x\rangle = \lambda\|x\|^۲,\ x \in H\}\\
&= \inf\{\lambda \geq ۰ :\ \langle ff^*(\frac{x}{\|x\|}), \frac{x}{\|x\|}\rangle \leq \lambda,\ x \in H\}\\
&= \sup\{\langle ff^*(h), h\rangle : \|h\| = ۱\}\\
&= \|ff^*\| = \|f\|^۲.
\end{aligned}$$

□

تعریف ۱۱.۱.۲. [۸۶] فرض کنید X یک فضای مرتب باشد. زیر مجموعه W از X را یک مجموعه رو به پایین [۳] می‌گویند، در صورتی که هر $x \in X$ و $w \in W$ که $x \leq w$ ایجاب کند که $x \in W$.

قضیه ۱۲.۱.۲. فرض کنید W یک زیر مجموعه رو به پایین بسته از $\Im(H)$ باشد. در این صورت W یک مجموعه تقریب پذیر در $\Im(H)$ است.

برهان. فرض کنید $f \in \Im(H)\backslash W$ و $\inf_{w\in W}\|f-w\| = r$. بنا به تعریف اینفیمم برای هر ε، $w_\varepsilon \in W$ ای وجود دارد به قسمی که $\|f-w_\varepsilon\| \leq r+\varepsilon$. اینک با توجه به لم ۱۰.۱.۲ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\|f-w_\varepsilon\|^{۲} &= \varphi(f-w_\varepsilon) \leq (r+\varepsilon)^{۲} \\ &\Rightarrow (f-w_\varepsilon)^{۲} \leq (r+\varepsilon)^{۲} id_H \\ &\Rightarrow f-w_\varepsilon \leq (r+\varepsilon) id_H \\ &\Rightarrow f-(r+\varepsilon)id_H \leq w_\varepsilon\end{aligned}$$

از اینکه W یک مجموعه رو به پایین است، پس $f-(r+\varepsilon)id_H \in W$. چون W یک مجموعه بسته است، لذا $W \ni f-rid_H = w_۰$. بنابراین $\|f-w_۰\| = r$ و در نتیجه $w_۰ \in P_W(f)$. این نشان می‌دهد که W یک مجموعه تقریب پذیر است. □

قضیه ۱۳.۱.۲. فرض کنید W یک زیر مجموعه رو به پایین بسته از $\Im(H)$ و $f \in \Im(H)\backslash W$. در این صورت

$$d(f,W) = \min\{\lambda > ۰ : f-\lambda id_H \in W\}.$$

برهان. فرض کنید $A := \{\lambda > ۰ : f-\lambda id_H \in W\}$ و $r = d(f,W)$. اگر $\lambda \in A$ در این صورت $\|f-(f-\lambda id_H)\| = \lambda \geq r$. بنابراین $r \leq \min(A)$. از طرفی دیگر در روند اثبات قضیه قبل نشان داده شد که $f-rid_H \in P_W(f) \subseteq W$، بنابراین $r \in A$ و لذا $\min(A) \leq r$. در نتیجه $r = \min(A)$. □

تعریف ۱۴.۱.۲. فرض کنید W یک زیر مجموعه از فضای مرتب X باشد. مجموعه W را یک مجموعه روبه بالا [۴] می‌گوییم، در صورتی که هر $x \in X$ و $w \in W$ که $x \geq w$ ایجاب کند $x \in W$.

نتیجه ۱۵.۱.۲. فرض کنید W یک زیر مجموعه رو به بالای بسته از $\Im(H)$ باشد. در این صورت W یک مجموعه تقریب پذیر در $\Im(H)$ است.

برهان. از اینکه $-W$ مجموعه‌ای رو به پایین است، تقریب پذیری از قضیه ۱۲.۱.۲، نتیجه می‌شود. □

تعریف ۱۶.۱.۲. [۸۸] فرض کنید T یک عملگر خطی کراندار روی H و $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک پایه ی متعامد برای H باشد. در این صورت نرم هیلبرت - اشمیتی [۵] T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\|T\|_{۲} = (\sum_{\alpha\in I}\|Te_\alpha\|^{۲})^{\frac{۱}{۲}}.$$

[۳] Downward [۴] Upward [۵] Hilbert-Schmidt

هرگاه $\|T\|_2 < \infty$ عملگر T را هیلبرت -اشمیت می‌نامیم. مجموعه‌ی تمام عملگرهای هیلبرت -اشمیت روی H را با نماد $(L_2(H), \|.\|_2)$ نشان می‌دهیم.

عملگر T را از رده‌ای اثر [۶] می‌نامیم، هرگاه $|T|^{\frac{1}{2}}$ یک عملگر عملگرهای هیلبرت -اشمیت باشد. اگر T عملگری از رده‌ای اثر، آن گاه $\|T\|_1$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|T\|_1 = \||T|^{\frac{1}{2}}\|_2^2 = \sum_{\alpha\in I}\langle |T|e_\alpha, e_\alpha\rangle.$$

مجموعه‌ی تمام عملگرهای از رده‌ای اثر را با نماد $(L_1(H), \|.\|_1)$ نشان می‌دهیم.

نگاشت اثر را روی عناصر $B(H)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$trac(T) = \sum_{\alpha\in I}\langle Te_\alpha, e_\alpha\rangle, (T \in B(H)).$$

با توجه به تعریف فوق داریم

$$\|T\|_1 = trac(|T|).$$

بنا به قضیه ۲.۴.۱۶ [۸۸] اگر $u \in B(H)$ و $v \in L_1(H)$ آنگاه :

$$\mid trac(vu) \mid = \mid trac(uv) \mid \leq \|u\|\|v\|_1. \tag{۲.۲}$$

تعریف ۱۷.۱.۲. (لم $\oint 6.D$ [۵۴]) فرض کنید $q \in L_1(H)$ در این صورت دیفرانسیل [۷] از q برابراست با

$$\partial\|q\|_1 = \{h \in B(H) : \quad \|q\|_1 + trac((f-q)h) \leq \|f\|_1, \ f \in L_1(H)\}. \tag{۳.۲}$$

قضیه ۱۸.۱.۲. فرض کنید H یک فضای هیلبرت متناهی البعد باشد. اگر $h \in \partial\|q\|_1$ آنگاه گزاره‌های زیر درست اند.

۱) $trac(qh) = \|q\|_1$،

۲) $\|h\| \leq 1$.

برهان. فرض کنید $h \in \partial\|q\|_1$، با قرار دادن مقادیر $f = 0$، $f = 2q$ در رابطه (۳.۲) رابطه (۱) بدست می‌آید. از اینکه H یک فضای متناهی البعد است، لذا $L_1(H)^* = L_1(H)$ و با توجه به تعریف نرم نتیجه می شود $\|h\| = \max_{\|f\|_1\leq 1} trac(fh) \leq 1$. □

لم ۱۹.۱.۲. فرض کنید H یک فضای متناهی البعد و $q \in L_1(H)$. در این صورت $\partial\|q\|_1 \neq \phi$.

---

[۶] Trace-class [۷] Differential

برهان. بنا به قضیه ۱۹.۱.۱ یک عملگر ایزومتر یکانی مانند u وجود دارد به قسمی که $u^*q =\mid q\mid$. بنابراین $trac(u^*q) = trac(\mid q \mid) = \|q\|_۱$. اینک برای هر $f \in L_۱(H)$ با توجه به رابطه (۲.۲) داریم

$$\begin{aligned} \|q\|_۱ + trac((f-q)u^*) &= \|q\|_۱ + trac(fu^*) - trac(qu^*) \\ &= trac(u^*f) \leq \|f\|_۱. \end{aligned}$$

با توجه به تعریف ۱۷.۱.۲، $u^* \in \partial\|q\|_۱$ بنابراین $\partial\|q\|_۱ \neq \phi$. □

فرض کنید $W \subseteq L_۱(H)$. در این صورت پوچ ساز [۸] W به صورت زیر تعریف می‌شود

$$W^{\perp} := \{q \in B(H) :\ trac(qw) = ۰,\ (\forall\ w \in W)\}.$$

قضیه ۲۰.۱.۲. فرض کنید که H یک فضای هیلبرت متناهی البعد و W زیرفضایی از $L_۱(H)$ به قسمی که $L_۱(H) = W\oplus < h >$ و $h \in W^{\perp}$. آنگاه W یک مجموعه تقریب پذیر است و برای هر $f \in L_۱(H) \setminus W$،

$$w_۰ = f - \frac{trac(hf)}{\|h\|_۱}g,\ (g \in \partial\|h\|_۱).$$

عنصر بهترین تقریب f از W است.

برهان. از اینکه W یک زیر فضای متناهی البعد می‌باشد، لذا بنا به قضیه ۴.۲.۱، W یک مجموعه تقریب پذیر است. بنا به لم۱۹.۱.۲، $\partial\|h\|_۱$ مخالف تهی است. فرض کنید $g \in \partial\|h\|_۱$ با توجه به قضیه ۱۸.۱.۲ داریم

$$\begin{aligned} trac(hw_۰) &= trac(h(f - \frac{trac(hf)}{\|h\|_۱}g)) \\ &= trac(hf) - \frac{trac(hf)}{\|h\|_۱}trac(gh) \\ &= trac(hf) - trac(hf) = ۰. \end{aligned}$$

بنابراین $w_۰ \in (W^{\perp})^{\perp} = W$ و

$$\|f - w_۰\| = \|\frac{trac(hf)}{\|h\|_۱}g\| \leq \frac{\mid trac(hf)\mid}{\|h\|_۱}.$$

اینک بنا به (۲.۲) داریم

$$\begin{aligned} \|f - w_۰\| &\leq \frac{\mid trac(hf)\mid}{\|h\|_۱} = \frac{\mid trac(h(f-w)\mid}{\|h\|_۱} \\ &\leq \frac{\|h\|_۱\|f-w\|}{\|h\|_۱} \leq \|f-w\|. \end{aligned}$$

لذا $w_۰$ یک عنصر بهترین تقریب است. □

[۸] Annihilator

نتیجه ۲۱.۱.۲. فرض کنید که H یک فضای متناهی البعد با بعد n باشد. در این صورت

$$A = \{q \in B(H):\ trac(q) = \circ\},$$

زیرفضایی تقریب پذیر است و برای هر $f \in B(H)$، $w_\circ = f - \dfrac{trac(f)}{n} I \in \mathbf{P}_A(f)$.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که $B(H) = L_۱(H) = A\oplus < I >$. بدین منظور فرض کنید w یک عنصر دلخواهی از $B(H)$ باشد. قرار می‌دهیم $h = w - \dfrac{trac(w)}{trac(I)} I$ در این صورت $trac(h) = \circ$ بنابراین $w \in A\oplus < I >$ و لذا $B(H) \subseteq A\oplus < I >$. از طرفی $A\oplus < I > \subseteq B(H)$. بنابراین $B(H) = A\oplus < I >$. از اینکه $\|I\|_۱ = n$ و $I \in \partial\|I\|_۱$. لذا بنا به قضیه ۲۰.۱.۲، A زیرفضایی تقریب پذیر و $w_\circ$ یک عنصر بهترین تقریب است. □

۲.۱.۲ مشخصه‌هایی نقاط تقریب با استفاده از تکنیک مشتق

در این بخش به کمک روش مشتقات نرم، مشخصه‌ای برای نقاط تقریب ارائه می‌دهیم.

فرض کنید $f, g \in B(H)$. تعاریف زیر را در نظر بگیرید.

$$\tau_۱(f,g) = \limsup_{t\to\circ^+} \frac{\|f+tg\| - \|f\|}{۲t}.$$

$$\tau_۲(f,g) = \limsup_{t\to\circ^+} \frac{\|f+tg\|^۲ - \|f\|^۲}{۲t}.$$

لم ۲۲.۱.۲. فرض کنید $f, g \in B(H)$. در این صورت

$$-\tau_۲(f,-g) \le \min ReW(g^*f) \le \max ReW(g^*f) \le \tau_۲(f,g).$$

برهان. فرض کنید $\{x_n\} \in Z_f$. در این صورت بنا به تعریف ۲۰.۱.۱ داریم

$$\begin{aligned}
\|f+tg\|^۲ &\ge \lim_{n\to\infty} \|f(x_n) + tg(x_n)\|^۲ \\
&= \lim_{n\to\infty} (\|f(x_n)\|^۲ + t^۲\|g(x_n)\|^۲ + ۲tRe\langle f(x_n), g(x_n)\rangle) \\
&= \|f\|^۲ + t^۲ \lim_{n\to\infty} \|g(x_n)\|^۲ + ۲t \lim_{n\to\infty} Re\langle f(x_n), g(x_n)\rangle.
\end{aligned}$$

بنابراین برای $t > \circ$ داریم

$$\frac{\|f+tg\|^۲ - \|f\|^۲}{t} \ge t \lim_{n\to\infty} \|g(x_n)\|^۲ + ۲ \lim_{n\to\infty} Re\langle f(x_n), g(x_n)\rangle.$$

اگر $t \to \circ^+$ در این صورت با گرفتن $\limsup$ داریم

$$\tau_۲(f,g) \ge \lim_{n\to\infty} Re\langle f(x_n), g(x_n)\rangle.$$

بنابراین $\tau_۲(f,g) \ge \max ReW(g^*f)$.

با جایگزین کردن g با $-g$ طرف دیگر نامساوی نیز بدست می‌آید. □

لم ۲۳.۱.۲. فرض کنید f, h و $g_{\circ}$ متعلق به $B(H)$ باشند. اگر

$$\max ReW((g_{\circ} - h)^{*}(f - g_{\circ})) \geq \circ, \tag{۴.۲}$$

آنگاه $\|f - g_{\circ}\| \leq \|f - h\|$.

برهان. فرض کنید نامساوی (۴.۲) برقرار باشد. هم چنین $\{x_n^h\}_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله ای از $Z_{f-g_{\circ}}$ به قسمی که $\lim_{n\to\infty} Re\langle (f - g_{\circ})(x_n^h), (g_{\circ} - h)(x_n^h)\rangle \geq \circ$. بنابراین

$$\begin{aligned}
\|f - h\| &\geq \lim_{n\to\infty} \|f(x_n^h) - h(x_n^h)\|^{۲} \\
&= \lim_{n\to\infty} \|f(x_n^h) - g_{\circ}(x_n^h) + g_{\circ}(x_n^h) - h(x_n^h)\|^{۲} \\
&= \lim_{n\to\infty} (\|f(x_n^h) - g_{\circ}(x_n^h)\|^{۲} + \|g_{\circ}(x_n^h) - h(x_n^h)\|^{۲}) \\
&+ ۲Re\langle (f - g_{\circ})(x_n^h), g_{\circ}(x_n^h) - h(x_n^h)\rangle) \\
&\geq \lim_{n\to\infty} \|f(x_n^h) - g_{\circ}(x_n^h)\|^{۲} = \|f - g_{\circ}\|^{۲},
\end{aligned}$$

لذا $\|f - h\| \geq \|f - g_{\circ}\|$. □

قضیه ۲۴.۱.۲. فرض کنید U یک زیر مجموعه محدب بسته از $B(H)$، $f \in B(H) \setminus U$ و $g_{\circ} \in U$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.

۱) $g_{\circ} \in \mathbf{P}_U(f)$.

۲) برای هر $h \in U$،

$$\max ReW((h - g_{\circ})^{*}(f - h)) \leq \circ. \tag{۵.۲}$$

برهان. (۲) $\to$ (۱). فرض کنید $g_{\circ} \in \mathbf{P}_U(f)$. در این صورت برای $t = ۱$ و هر $h \in U$ داریم $\|f - h + t(h - g_{\circ})\|^{۲} - \|f - h\|^{۲} \leq \circ$. از اینکه $\|.\|^{۲}\frac{۱}{۲}$ یک تابع محدب است، لذا بنا به قضیه ۹.۳.۱، تابع φ با ضابطه $\varphi(t) = \frac{\|f-h+t(h-g_{\circ})\|^{۲} - \|f-h\|^{۲}}{۲t}$ یک تابع غیر-نزولی است. بنابراین با تقسیم بر t و گرفتن $\limsup$ زمانی که $t \to \circ^{+}$، خواهیم داشت $\tau_{۲}(f - h, h - g_{\circ}) \leq \circ$. اینک با توجه به لم ۲۲.۱.۲، رابطه (۵.۲) نتیجه خواهد شد.
(۱) $\to$ (۲). بدون وارد شدن خللی به کلّیت مسئله فرض می‌کنیم $g_{\circ} = \circ$. حال فرض کنید رابطه (۵.۲) برقرار باشد ولی $g_{\circ} \notin \mathbf{P}_U(f)$. در این صورت $h_{۱} \in U \setminus \{\circ\}$ وجود دارد به قسمی که $\|f - h_{۱}\| < \|f\|$. با به کار بردن رابطه (۵.۲) برای $h_{\lambda} = \lambda h_{۱}$ که $\circ < \lambda \leq ۱$ خواهیم داشت

$$\max ReW(h_{\lambda}^{*}(f - h_{\lambda})) = \max ReW(\lambda h_{۱}^{*}(f - \lambda h_{۱})) \leq \circ.$$

از اینکه $\lambda > \circ$. بنابراین

$$\max ReW(h_{۱}^{*}(f - \lambda h_{۱})) \leq \circ.$$

لذا

$$\begin{aligned}\max ReW(-h_{\text{۱}}^*(f-\lambda h_{\text{۱}})) &\geq \min ReW(-h_{\text{۱}}^*(f-\lambda h_{\text{۱}}))\\ &= -\max ReW(h_{\text{۱}}^*(f-\lambda h_{\text{۱}})) \geq \text{۰}.\end{aligned}$$

بنا به لم ۲۲.۱.۲

$$\tau_{\text{۲}}((f-\lambda h_{\text{۱}}),-h_{\text{۱}}) \geq \max ReW(h_{\text{۱}}^*(f-\lambda h_{\text{۱}})) \geq \text{۰}.$$

بنا به قضیه ۱۱.۳.۱، تابع $\tau_{\text{۲}}$ یک تابع نیم پیوسته بالایی می‌باشد. لذا

$$\tau_{\text{۲}}(f,-h_{\text{۱}}) \geq \limsup_{\lambda\to o^+} \tau_{\text{۲}}((f-\lambda h_{\text{۱}}),-h_{\text{۱}}) \geq \text{۰}.$$

این ایجاب می‌کند وجود عدد مثبت کوچکی مانند $t_{\text{۰}}$ به قسمی که $\frac{\|f-t_{\text{۰}}h_{\text{۱}}\|^{\text{۲}}-\|f\|^{\text{۲}}}{\text{۲}t_{\text{۰}}} \geq \text{۰}$. اینک با توجه به غیر نزولی بودن φ ، $\|f\| \leq \|f-h_{\text{۱}}\|$ که یک تناقض است. لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. □

لم ۲۵.۱.۲. فرض کنید U زیر مجموعه محدب بسته ای از $B(H)$ ، $f \in B(H)\setminus U$ و $g_{\text{۰}} \in U$. اگر برای هر $h \in U$، $\max ReW((h-g_{\text{۰}})^*(f-h)) \geq \text{۰}$ آنگاه

$$\max ReW((g_{\text{۰}}-h)^*(f-g_{\text{۰}})) \geq \text{۰}.$$

برهان. فرض کنید $h \in U$ ای وجود داشته باشد به قسمی که

$$\max ReW((g_{\text{۰}}-h)^*(f-g_{\text{۰}}) = -\delta < \text{۰}.$$

از اینکه $Re\langle (f-g_{\text{۰}})(x),(g_{\text{۰}}-h)(x)\rangle$ یک تابع پیوسته روی H است، مجموعه بازی مانند G وجود دارد به طوری که $Z_{f-g_{\text{۰}}} \subseteq G$ و

$$\max_{x\in G} Re\langle (f-g_{\text{۰}})(x),(g_{\text{۰}}-h)(x)\rangle < -\delta.$$

بنابراین $\varepsilon_{\text{۰}} > \text{۰}$ وجود دارد به طوری که برای هر $\varepsilon > \text{۰}$ داریم

$$X_{f-g_{\text{۰}}}(\varepsilon_{\text{۰}}) = \{\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \in H : \lim_{n\to\infty} \|(f-g_{\text{۰}})(x_n)\| \geq \|f-g_{\text{۰}}\|-\varepsilon\} \subseteq G.$$

و برای هر $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \in X_{f-g_{\text{۰}}}(\varepsilon_{\text{۰}})$

$$\max Re \lim_{n\to\infty} \langle (f-g_{\text{۰}})(x_n),(g_{\text{۰}}-h)(x_n)\rangle < -\frac{\delta}{\text{۲}}.$$

قرار می‌دهیم $D = X_{f-g_{\text{۰}}}(\varepsilon_{\text{۰}})$ و $\varepsilon_{\text{۱}} \leq \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\varepsilon_{\text{۰}}$.
فرض کنید

$$h_t = th + (\text{۱}-t)g_{\text{۰}},\ s.t.\ \text{۰} < t < \text{۱}.$$

از اینکه $h_t \to g_\circ$ وقتی $t \to \circ$. بنابراین $t_\circ > \circ$ وجود دارد به طوری که برای هر $\circ < t \leq t_\circ$،

$$\|h_t - g_\circ\| \leq \varepsilon_1.$$

اینک

$$\begin{aligned} t\frac{\delta}{2} - t^2\|h-g_\circ\|^2 &< \lim_{n\to\infty} Re\langle (f-g_\circ)(x_n), t(h-g_\circ)(x_n)\rangle - t^2\|(h-g_\circ)(x_n)\|^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} [Re\langle (f-(th+(1-t)g_\circ), (h_t-g_\circ)(x_n)\rangle] \\ &= \lim_{n\to\infty} Re\langle (f-h_t)(x_n), (h_t-g_\circ)(x_n)\rangle. \end{aligned}$$

لذا برای هر $t > \circ$ کوچک و $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \in D$ داریم

$$\lim_{n\to\infty} Re\langle (f-h_t)(x_n), (h_t-g_\circ)(x_n)\rangle > \circ. \qquad (۶.۲)$$

از طرفی برای هر $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}} \in Z_{f-h_t}$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \|(f-g_\circ)(x_n)\| &= \lim_{n\to\infty} \|(f-h_t)(x_n) - (g_\circ - h_t)(x_n)\| \\ &\geq \|f-h_t\| - \|g_\circ - h_t\| \\ &\geq \|f-g_\circ\| - 2\varepsilon_1 \\ &\geq \|f-g_\circ\| - \varepsilon_\circ. \end{aligned}$$

این نتیجه می‌دهد که $Z_{f-h_t} \subseteq D$. اینک با توجه به (۶.۲) داریم

$$\begin{aligned} \circ &< \min_{\{x_n\}\in D} \lim_{n\to\infty} Re\langle (f-h_t)(x), (h_t-g_\circ)(x)\rangle \\ &\leq \min_{\{x_n\}\in Z_{f-h_t}} \lim_{n\to\infty} Re\langle (f-h_t)(x_n), (h_t-g_\circ)(x_n)\rangle \\ &= \max_{\{x_n\}\in Z_{f-h_t}} \lim_{n\to\infty} Re\langle (f-h_t)(x_n), (h_t-g_\circ)(x_n)\rangle \\ &= \max ReW((h_t-g_\circ)^*(f-h_t)). \end{aligned}$$

اما این یک تناقض با فرض مسئله است. لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. □

قضیه ۲۶.۱.۲. فرض کنید U زیر مجموعه محدب بسته ای از $B(H)$، $f \in B(H)\setminus U$ و $g_\circ \in U$. در این صورت گزاره های زیر معادلند.

۱) $g_\circ \in \mathbf{P}_U(f)$.

۲) برای هر $h \in U$،

$$\max ReW((g_\circ - h)^*(f-g_\circ)) \geq \circ. \qquad (۷.۲)$$

برهان. ۲ $\rightarrow$ ۱. فرض کنید $g_\circ \in \mathbf{P}_U(f)$. در این صورت بنا قضیه ۲.۱.۲۴، برای هر $h \in U$،

$$\max ReW((h-g_\circ)^*(f-h)) \leq \circ.$$

اینک بنا به لم ۲.۱.۲۵، رابطه (۲.۷) را خواهیم داشت.

۱ $\rightarrow$ ۲. بنا به لم ۲.۱.۲۳، اثبات بدیهی است. □

نتیجه ۲.۱.۲۷. فرض کنید U یک زیر مجموعه محدب بسته از $B(H)$، $f \in B(H) \setminus U$ و $g_\circ \in U$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.

۱) $g_\circ \in \mathbf{P}_U(f)$.

۲) برای هر $h \in U$،

$$\max ReW((h-g_\circ)^*(f-h)) \leq \max ReW((g_\circ-h)^*(f-g_\circ)). \qquad (۲.۸)$$

برهان. ۲ $\rightarrow$ ۱. اثبات بنا به قضایا ۲.۱.۲۴ و ۲.۱.۲۶ بدیهی است.

۱ $\rightarrow$ ۲. فرض کنید رابطه (۲) برقرار باشد اما $g_\circ \notin \mathbf{P}_U(f)$. بنا به قضیه ۲.۱.۲۴، $h_1 \in U$ ای وجود دارد به قسمی که

$$\max ReW((h_1-g_\circ)^*(f-h_1)) > \circ, \qquad (۲.۹)$$

این ایجاب می‌کند که

$$\|f-h_1\| < \|f-g_\circ\|, \quad (*).$$

با توجه (۲.۸) و (۲.۹) داریم

$$\max ReW((f-g_\circ)^*(g_\circ-h_1)) > \circ.$$

اینک بنا به لم ۲.۱.۲۳ خواهیم داشت

$$\|f-g_\circ\| < \|f-h_1\|.$$

که این یک تناقض با $(*)$ است. لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. □

نتیجه ۲.۱.۲۸. فرض کنید M یک زیر فضای بسته از $B(H)$، $f \in B(H) \setminus M$ و $g_\circ \in M$. در این صورت گزاره های زیر معادل اند:

۱) $g_\circ \in \mathbf{P}_M(f)$.

۲) برای هر $h \in M$،

$$\min ReW(h^*(f-g_\circ)) \leq \circ \leq \max ReW(h^*(f-g_\circ)). \qquad (۲.۱۰)$$

برهان. اثبات بنا به قضیه ۲۶.۱.۲ بدیهی است. □

نتیجه ۲۹.۱.۲. فرض کنید U یک زیر مجموعه محدب بسته از $B(H)$ باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند.

۱) مجموعه U چبیشف است.

۲) اگر برای هر $f \in B(H)$ و برای هر $h \neq g_0 \in U$،

$$\max ReW((h-g_0)^*(f-h)) < 0. \qquad (۱۱.۲)$$

برهان. $(۲) \to (۱)$. فرض کنیم U چبیشف باشد. در این صورت بنا به تعریف برای هر $f \in B(H)$ عنصر تقریب یکتایی مانند g_0 موجود است به قسمی که به ازای هر $h \neq g_0 \in U$،

$$\|f-h+t(h-g_0)\|^2 - \|f-h\|^2 < 0.$$

بنابراین با تقسیم بر t و لم ۲۲.۱.۲ رابطه (۱۱.۲) حاصل خواهد شد.

$(۱) \to (۲)$. فرض کنیم رابطه (۲) برقرار باشد، ولی U یک مجموعه چبیشف نباشد. در این صورت g_1ای وجود دارد به قسمی که $g_0 \neq g_1 \in \mathbf{P}_U(f)$. بنا به قضیه ۲۶.۱.۲ داریم

$$\max ReW((g_1-g_0)^*(f-g_1)) \geq 0.$$

اما این متناقض با فرض رابطه (۲) است. □

مثال ۳۰.۱.۲. فرض کنید $H = \mathbb{C}^2$، نگاشت $f: H \to H$ با ضابطه $(z_1, z_2) \to (-z_2, z_1)$ را در نظر بگیرید. قرار می دهیم $U = Co(I)$. در این صورت $\mathbf{P}_U(f) = \{0\}$.

برای نشان دادن درستی این مطلب از دو روش اقدام می‌کنیم.

روش اول: چون برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ داریم

$$\|f-\lambda I\| \geq r(f-\lambda I) = \sup\{|-\lambda \pm i|\} \geq 1.$$

بنابراین $\inf_\lambda \|f-\lambda I\| \geq 1$، از طرفی $\|f-0\| = 1$. لذا $\mathbf{P}_U(f) = \{0\}$.

روش دوم: با استفاده از قضیه فوق این مطلب را نشان می‌دهیم. چون برای $\lambda \in \mathbb{R}$، $f-\lambda I$ نرمال هستند، لذا

$$\begin{aligned} W((h-g_0)^*(f-h)) &= W(((\lambda-\lambda_0)I)(f-\lambda I)) \\ &= (\lambda-\lambda_0)con(\sigma(f-\lambda I)) \\ &= (\lambda-\lambda_0)con(\{-\lambda \pm i\}). \end{aligned}$$

بنا به قضیه قبل $g_0 = \lambda_0 I \in \mathbf{P}_U(f)$ اگر و فقط اگر برای هر $\lambda \in [0,1]$ داشته باشیم $\max ReW((h-g_0)^*(f-h)) \leq 0$. اما این نامساوی تنها زمانی برقرار است که $\lambda_0 = 0$. لذا $\mathbf{P}_U(f) = \{0\}$.

در ادامه با توجه به مشخصه‌ی متعامد بودن دو عملگر، اثباتی دیگر برای مشخصه‌ی بهترین تقریب زیرفضاها ارائه می‌دهیم.

لم ۳۱.۱.۲. (قضیه ۳.۱[۱۷]) فرض کنید $f, g \in B(H)$. در این صورت f متعامد(بیرخوف) بر g است اگر و فقط اگر وجود داشته باشد $\{x_n^g\} \in Z_f$ به قسمی که $\lim_{n\to\infty}\langle f(x_n^g), g(x_n^g)\rangle = ۰$.

قضیه ۳۲.۱.۲. فرض کنید U یک زیر فضای بسته از $B(H)$، $f \in B(H) \setminus U$ و $g_۰ \in U$. در این صورت گزاره‌های زیر معادل اند:

۱) $g_۰ \in \mathbf{P}_U(f)$.

۲) برای هر $h \in U$،

$$\min ReW(h^*(f-g_۰)) \le ۰ \le \max ReW(h^*(f-g_۰)). \qquad (۱۲.۲)$$

برهان. ۲ $\rightarrow$ ۱. از اینکه $g_۰ \in \mathbf{P}_U(f)$ بنا به لم ۷.۲.۱، U $f - g_۰ \perp_B U$. اینک بنا به لم ۳۱.۱.۲ برای $h \in U$، $\{x_n^h\}_{n\in\mathbb{N}} \in H$ وجود دارد به قسمی که

$$\lim_{n\to\infty} \|f - g_۰(x_n^h)\| = \|f - g_۰\|,$$

و $\lim_{n\to\infty}\langle f(x_n^h) - g_۰(x_n^h), h(x_n^h)\rangle = ۰$ لذا $\lim_{n\to\infty} Re\langle f(x_n^h) - g_۰(x_n^h), h(x_n^h)\rangle = ۰$ و این ایجاب می‌کند که برای هر $h \in U$ ، $\min ReW(h^*(f-g_۰)) \le ۰$.

۱ $\rightarrow$ ۲. اثبات مشابه به نتیجه ۲۸.۱.۲ است. □

در ادامه به حالتی می‌پردازیم که این نامساوی به تساوی تبدیل شده است.

لم ۳۳.۱.۲. فرض کنید $f \in B(H)$ و تابع نرم در نقطه f مشتق پذیر باشد. در این صورت برای هر $g \in X$ ، $ReW(g^*f) = \tau_۲(f,g)$.

برهان. از اینکه تابع نرم پیوسته است، لذا $\lim_{t\to ۰} \frac{\|f+tg\|+\|f\|}{۲} = \|f\|$. بنا به فرض تابع نرم در نقطه f مشتق پذیر است، لذا می‌توان فرض کرد $\lim_{t\to ۰}\frac{\|f+tg\|-\|f\|}{t} = \beta$. بنابراین برای هر $g \in X$،

$$\begin{aligned}\lim_{t\to ۰}\frac{\|f+tg\|^۲ - \|f\|^۲}{۲t} &= \lim_{t\to ۰}\frac{\|f+tg\|-\|f\|}{t}.\frac{\|f+tg\|+\|f\|}{۲}\\ &= \|f\|\tau_۱(f,g) = \|f\|\beta.\end{aligned}$$

لذا $\tau_۲(f,g)$ موجود و $\tau_۲(f,g) = -\tau_۲(f,-g)$. بنا به لم ۲۲.۱.۲، $ReW(g^*f) = \tau_۲(f,g)$. □

نتیجه ۳۴.۱.۲. فرض کنید U یک زیر فضای بسته از $B(H)$، $f \in B(H) \setminus U$، $g_۰ \in U$ و تابع نرم در $f - g_۰$ مشتق پذیر باشد. در این صورت گزاره های زیر معادل اند:

۱) $g_۰ \in \mathbf{P}_U(f)$.

۲) برای هر $h \in U$،

$$ReW(h^*(f-g_۰)) = ۰. \qquad (۱۳.۲)$$

برهان. بنا به قضیه ۲۴.۱.۲ و لم ۳۳.۱.۲ نتیجه بدیهی است. □

تعریف ۳۵.۱.۲. فرض کنید $W \subseteq B(H)$. اینفیمم مقدار مجموعه W را با نماد $\inf(W)$ و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\inf(W) = \inf_{0 \neq g} \inf_{\|x\|=1} \|g(x)\|. \tag{۱۴.۲}$$

قضیه ۳۶.۱.۲. فرض کنید W زیر فضای بسته‌ای از $B(H)$، $f \in B(H) \setminus W$ و $g_0 \in W$. در این صورت عبارات زیر معادل اند:

۱) $g_0 \in \mathbf{P}_W(f)$.

۲) برای هر $\lambda \in \mathbb{C}, 0 \neq h \in W$

$$\|k\|^2 + \lambda^2 \inf(W)^2 \leq \|k + \lambda h\|^2,$$

که $k = f - g_0$.

برهان. ۲ $\rightarrow$ ۱. فرض کنید $g_0 \in \mathbf{P}_W(f)$. بنا به نتیجه ۲۸.۱.۲ برای هر $h \in W$ دنباله‌ی $\{x_n^h\}_{n\in\mathbb{N}} \in Z_f$ موجود است به قسمی که $\lim_{n\to\infty} Re\langle f(x_n^h), h(x_n^h)\rangle \geq 0$. لذا

$$\begin{aligned}\|f + \lambda h\|^2 &\geq \lim_{n\to\infty} \|f(x_n^h) + \lambda h(x_n^h)\|^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} [\|f(x_n^h)\|^2 + | \lambda |^2 \|h(x_n^h)\|^2 + 2Re\lambda\langle f(x_n^h), h(x_n^h)\rangle].\end{aligned}$$

بنابراین

$$\|f + \lambda h\|^2 \geq \|f\|^2 + | \lambda |^2 \lim_{n\to\infty} \|h(x_n^h)\|^2 \geq \|f\|^2 + \lambda^2 \inf(W)^2.$$

۱ $\rightarrow$ ۲. بنا به قسمت دوم برای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ و $h \nrightarrow 0$، $\|k\|^2 \leq \|k + \lambda h\|^2$. اینک اگر $h \to 0$، بدیهی است که $\|k\|^2 = \lim_{h\to 0} \|k + \lambda h\|$. بنابراین برای $h \in W$، $\|k\|^2 \leq \|k + \lambda h\|^2$. قرار می‌دهیم $\lambda = -1$ و $q = h - g_0$. لذا $\|f - g_0\| \leq \|f - q\|$. در نتیجه $g_0 \in \mathbf{P}_W(f)$. □

نتیجه ۳۷.۱.۲. فرض کنید W یک زیر فضای بسته از $B(H)$، $f \in B(H) \setminus W$ و $g_0 \in \mathbf{P}_W(f)$. اگر $\inf(W) \neq 0$ آنگاه g_0 تنها نقطه بهترین تقریب f در W است.

برهان. فرض که $g_1 \neq g_0 \in \mathbf{P}_W(f)$. برای $\lambda = -1$ و $q = g_0 - g_1 \neq 0$، بنا به قضیه ۳۶.۱.۲ داریم

$$\begin{aligned}\|f - g_0\|^2 &= \|f - g_1\|^2 < \|f - g_1\|^2 + \lambda^2 \inf(W)^2 \\ &\leq \|f - q\| = \|f - g_1 - (g_0 - g_1)\|^2 \\ &= \|f - g_0\|^2,\end{aligned}$$

اما این غیر ممکن است. لذا g_0 تنها نقطه بهترین تقریب f در W است. □

تعریف ۳۸.۱.۲. [۵۵] فرض کنید C زیر مجموعه محدبی از X باشد. در این صورت مخروطی محتمل [۹] در نقطه $x \in C$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathfrak{t}_C(x) = \{y \in X : \exists\, t > 0,\ \ x + \lambda y \in C, 0 < \lambda \leq t\}.$$

قضیه ۳۹.۱.۲. فرض کنید C یک زیر فضای از $B(H)$، $f \in B(H)$ و تابع نرم $B(H)$ در f مشتق پذیر و $h_f \in \mathfrak{t}_C(f)$ موجود باشد به طوری که $ReW(h_f^* f) \leq -\delta$. در این صورت

$$d(f, C) \leq \min\{\|f\|, \delta^{-1}\|f\|^2\}.$$

برهان. بنا به لم ۲۲.۱.۲ برای هر $\varepsilon \in (0, \delta)$، $\tau_2(f, h_f) \leq -(\delta - \varepsilon)$. این ایجاب می‌کند وجود $t > 0$ بقدر کافی کوچکی که $\frac{\|f + th_f\|^2 - \|f\|^2}{t} \leq -(\delta - \varepsilon)$. بنابراین

$$\|f - (f + th_f)\| = t \leq \frac{\|f\|^2 - \|f + th_f\|^2}{\delta - \varepsilon}.$$

از اینکه $f + th_f \in C$. لذا $d(f, C) \leq \frac{\|f\|^2}{\delta - \varepsilon}$. حال اگر $\varepsilon \to 0$ در این صورت حکم ثابت می‌شود. □

۳.۱.۲ مشخصه‌ی نقاط تقریب با استفاده از تابعک‌ها

تعریف ۴۰.۱.۲. نگاشت $\psi : X \to \mathbb{R}$ را یک تابع فوق خطی می‌نامیم. در صورتی که به ازای هر $x, y \in X$ و $\alpha \geq 0$، شرایط زیر برقرار باشد.

$$\psi(x + y) \geq \psi(x) + \psi(y), \psi(\alpha x) = \alpha\psi(x).$$

تعریف ۴۱.۱.۲. نگاشت $\phi : X \to \mathbb{R}$ را یک فوق حالت [۱۰] می‌گوییم، در صورتی که شرایط زیر برقرار باشد.

۱) $\|\phi\| = 1$،

۲) ϕ نگاشت فوق خطی باشد،

۳) برای هر $x \geq 0$ ، $\phi(x) \geq 0$.

لم ۴۲.۱.۲. (نتیجه ۳.۳[۱۷]) فرض کنید $f, g \in B(H)$. در این صورت f متعامد(بیرخوف) بر g است اگر و فقط اگر حالت φ ای روی $B(H)$ موجود باشد به قسمی که $\varphi((f - g_0)^*(f - g_0)) = \|f - g_0\|^2$ و $\varphi(g^*(f - g_0)) = 0$.

قضیه ۴۳.۱.۲. فرض کنید U یک زیر فضای بسته از $B(H) \setminus U$ و $f \in B(H)\setminus U$ و $g_0 \in U$. در این صورت احکام زیر معادلند:

[۹] Probable cone

[۱۰] Upper state

۱) $g_\circ \in P_U(f)$.

۲) فوق حالت φ روی $B(H)$ موجود است به قسمی که :

$$\varphi((f-g_\circ)^*(f-g_\circ)) = \|f-g_\circ\|^۲, \qquad (۱۵.۲)$$

و برای هر $g\in U$،

$$\varphi(g^*(f-g_\circ)) \leq \circ. \qquad (۱۶.۲)$$

برهان. ۲ $\rightarrow$ ۱. فرض کنید $g_\circ \in P_U(f)$. در این صورت برای هر $g\in U$، $f-g_\circ \perp_B g$. بنابراین بنا به لم ۴۲.۱.۲ یک حالت φ^g وجود دارد به قسمی که
$\varphi^g((f-g_\circ)^*(f-g_\circ)) = \|f-g_\circ\|^۲$ و $\varphi^g(g^*(f-g_\circ)) = \circ$.
اینک نگاشت $\varphi : B(H) \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $\varphi(h) = \inf_{g\in U} Re\ \varphi^g(h)$ را در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم φ یک فوق حالت است. برای $\alpha\in\mathbb{R}^+$ داریم

$$\varphi(\alpha h) = \inf_{g\in U} Re\ \varphi^g(\alpha h) = \alpha \inf_{g\in U} Re\ \varphi^g(h) = \alpha\varphi(h),$$

هم چنین برای هر $h,k\in B(H)$،

$$\begin{aligned}\varphi(h+k) &= \inf_{g\in U} Re\ \varphi^g(h+k)\\ &\geq \inf_{g\in U} Re\ \varphi^g(h) + \inf_{g\in U} Re\ \varphi^g(k) = \varphi(h)+\varphi(k).\end{aligned}$$

چون φ^g نگاشت مثبت و $\|\varphi^g\| = ۱ = \varphi^g(id_H)$. لذا φ مثبت و $\|\varphi\| = ۱$. هم چنین

$$\varphi((f-g_\circ)^*(f-g_\circ)) = \|f-g_\circ\|^۲.$$

برای هر $g\in U$ داریم

$$\varphi(g^*(f-g_\circ)) \leq Re\varphi^g(g^*(f-g_\circ)) = \circ.$$

لذا قسمت اول اثبات می‌شود.

۱ $\rightarrow$ ۲.

$$\begin{aligned}\|f-g_\circ\|^۲ &= \varphi((f-g_\circ)^*(f-g_\circ))\\ &\leq -\varphi((g-g_\circ)^*(f-g_\circ)) + \varphi((f-g_\circ)^*(f-g_\circ))\\ &\leq -\varphi((g-f)^*(f-g_\circ)) - \varphi((f-g_\circ)^*(f-g_\circ))\\ &+ \varphi(f-g_\circ)^*(f-g_\circ))\\ &= -\varphi((g-f)^*(f-g_\circ))\\ &\leq |-\varphi((g-f)^*(f-g_\circ))| \leq \|\varphi\|\|(g-f)^*\|\|f-g_\circ\|\\ &\leq \|f-g\|\|f-g_\circ\|.\end{aligned}$$

بنابراین $\|f-g_\circ\| \leq \|f-g\|$. به عبارت دیگر $g_\circ \in P_U(f)$. □

۲.۲ تئوری دورترین نقطه

در این بخش مباحث مربوط به دورترین نقطه را ارائه خواهیم کرد. ابتدا دور پذیری برخی مجموعه‌ها را مورد بررسی قرار داده‌ایم و سپس به بیان مشخصه نقاط دور پرداخته‌ایم.

۱.۲.۲ دور پذیری گوی یکه

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنید X یک فضای نرمدار و Y یک زیر فضای بسته از X، در صورتی که گوی یکه Y یک مجموعه دورپذیر باشد، گوییم Y دور پذیرگوی یکه است.

قضیه ۲.۲.۲. فرض کنید Y یک زیر فضای بسته ضعیف ستاره از $B(H)$ باشد. در این صورت Y دور پذیرگوی یکه است.

برهان. فرض کنید $T \in B(H)$ و دنباله T_n در B_Y به قسمی که $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = r$ که $S_{B_Y}(T) = r$. از اینکه B_Y یک مجموعه فشرده ضعیف ستاره است، نتیجه می‌شود زیر دنباله T_{nk} و $A \in B_Y$ وجود دارد به قسمی که $T_{nk} \xrightarrow{w^*} A$. از اینکه توپولوژی ضعیف ستاره قویتر از توپولوژی ضعیف است، لذا $T_{nk} - T \xrightarrow{w.o.t} A - T$. این ایجاب می‌کند که برای هر $x, y \in H$،

$$\begin{aligned}\lim_{nk\to\infty} | < (T_{nk} - T)x, y > | &= | < (T - A)x, y > | \\ &\leq \|(T - A)x\|\|y\|.\end{aligned}$$

این ایجاب می کند وجود $N_{k_\circ}$ به قسمی که برای هر $n_k \geq N_{k_\circ}$،

$$| < (T_{nk} - T)x, y > | \leq \|(T - A)x\|\|y\|.$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\sup_{\|y\|=۱} | < (T_{nk} - T)x, y > | &\leq \|(A - T)x\| \\ \sup_{\|x\|=۱} \|(T_{nk} - T)x\| &= \|T_{nk} - T\| \leq \|A - T\| \\ r = \lim_{nk\to\infty} \|T_{nk} - T\| &\leq \|A - T\|.\end{aligned}$$

بنابراین $A \in \mathbb{F}_{B_Y}(T)$. لذا Y دور پذیرگوی یکه است. □

نتیجه ۳.۲.۲. فرض کنید W یک زیر فضای بسته قوی از $B(H)$ باشد، در این صورت W یک دور پذیرگوی یکه است.

برهان. اثبات مشابه به نتیجه ۲.۱.۲ است. □

قضیه ۴.۲.۲. فرض کنید $T \in B(H)$ و $\mathbb{F}_{B_{B(H)}}(T)$ یک مجموعه غیر تهی و یکتایی باشد. در این صورت $\mathbb{F}_{B_{B(H)}}(T)$ یک عملگر ماکسیمال ایزومتری جزئی است.

برهان. بنا به قضیه ۶.۳.۱، $\mathbb{F}_{B_{B(H)}}(T)$ یک نقطه فرین از $B_{B(H)}$ است. بنا به قضیه ۷.۳.۱، نقاط فرین $B_{B(H)}$ عملگرهای ماکسیمال ایزومتری جزئی هستند. در نتیجه $\mathbb{F}_{B_{B(H)}}(T)$ عملگری ماکسیمال ایزومتری جزیی است. $\square$

فرض کنید Y زیر فضا بستهای از H باشد. $B(H,Y)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$B(H,Y) := \{q \in B(H) :\ q(H) \subseteq Y\}. \tag{۱۷.۲}$$

قضیه ۵.۲.۲. فرض کنید Y یک زیر فضای بسته از فضای متناهی البعد H باشد. در این صورت گزاره های زیر برقرارند:

(آ) برای هر $f \in B(H)$، $\mathbb{S}_{B_{B(H;Y)}}(f) = \sup_{t\in B_H} \mathbb{S}_{B_Y}(f(t))$.

(ب) $\mathbb{F}_{B_{B(H;Y)}}(f) \neq \varnothing$ اگر و تنها اگر $t_\circ \in B_H$ وجود داشته باشد به قسمی که $\mathbb{F}_{B_Y} f(t_\circ) \neq \varnothing$ و $\mathbb{S}_{B_{B(H;Y)}}(f) = \mathbb{S}_{B_Y}(f(t_\circ))$.

برهان. (آ) فرض کنید $g \in B_{B(H,Y)}$. در این صورت برای هر $t \in B_H$ و $f \in B(H)$ داریم $\sup_{g\in B_{B(H,Y)}} \|f(t) - g(t)\| \leq \mathbb{S}_{B_Y}(f(t))$. از طرفی دیگر به ازای هر $z \in B_Y$ ، داریم $z \otimes t \in B_{B(H,Y)}$. بنابراین $\mathbb{S}_{B_Y}(f(t)) \leq \sup_{g\in B_{B(H,Y)}} \|f(t) - g(t)\|$. این نتیجه می دهد که $\mathbb{S}_{B_Y}(f(t)) = \sup_{g\in B_{B(H,Y)}} \|f(t) - g(t)\|$. لذا

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}_{B_{B(H;Y)}}(f) &= \sup_{g\in B_{B(H,Y)}} \sup_{t\in B_H} \|f(t) - g(t)\| \\
&= \sup_{t\in B_H} \sup_{g\in B_{B(H,Y)}} \|f(t) - g(t)\| \\
&= \sup_{t\in B_H} \mathbb{S}_{B_Y}(f(t)).
\end{aligned}$$

(ب). فرض کنید $\mathbb{F}_{B_{B(H,Y)}}(f) \neq \varnothing$. بنابراین عنصری مانند $g_\circ \in B_{B(H,Y)}$ وجود دارد به طوری که $\|f - g_\circ\| = \mathbb{S}_{B_{B(H,Y)}}(f)$. فرض کنید $t_\circ \in B_H$ به قسمی که

$$\begin{aligned}
\|f(t_\circ) - g_\circ(t_\circ)\| = \|f - g_\circ\| &= \sup_{t\in B_H} \mathbb{S}_{B_Y}(f(t)) \\
&\geq \mathbb{S}_{B_Y}(f(t_\circ)) \\
&\geq \|f(t_\circ) - g_\circ(t_\circ)\|.
\end{aligned}$$

بنابراین $g_\circ(t_\circ) \in \mathbb{F}_{B_Y} f(t_\circ)$. لذا $\mathbb{F}_{B_Y} f(t_\circ) \neq \varnothing$. برعکس. اگر $t_\circ \in B_H$ موجود باشد که $\mathbb{S}_{B_{B(H,Y)}}(f) = \mathbb{S}_{B_Y}(f(t_\circ))$ و $\mathbb{F}_{B_Y} f(t_\circ) \neq \varnothing$. در این صورت $y_\circ \in B_Y$ موجود است به طوری که $\|f(t_\circ) - y_\circ\| = \mathbb{S}_{B_Y}(f(t_\circ))$. از اینکه $y_\circ \otimes t_\circ \in B_{B(H,Y)}$ آشکارا است که

$$\|f - y_\circ \otimes t_\circ\| \geq \|f(t_\circ) - y_\circ\| = \mathbb{S}_{B_Y}(f(t_\circ)) = \mathbb{S}_{B_{B(H,Y)}}(f).$$

از اینکه $y_\circ \otimes t_\circ \in \mathbb{F}_{B_{B(H,Y)}}(f)$، لذا $\mathbb{F}_{B_{B(H,Y)}}(f) \neq \varnothing$. $\square$

نتیجه ۶.۲.۲. فرض کنید Y یک زیر فضای بسته از فضای متناهی البعد H باشد. در این صورت $B(H,Y)$ یک مجموعه دور پذیر گوی یکه است.

برهان. چون نگاشت $\mathbb{S}_{B_Y}$ پیوسته و B_H مجموعه‌ای فشرده است، لذا برای هر $f \in B(H)$، $t_\circ \in B_H$ وجود دارد که $\sup_{t\in B_H} \mathbb{S}_{B_Y}(f(t)) = \mathbb{S}_{B_Y}(f(t_\circ))$. از طرفی دیگر B_Y فشرده است، لذا B_Y مجموعه ای دورپذیر است. بنابراین $\mathbb{F}_{B_Y}(f(t_\circ)) \neq \varnothing$. لذا بنا به قضیه ۵.۲.۲، $\mathbb{F}_{B_{B(H,Y)}}(f) \neq \varnothing$. در نتیجه $B(H,Y)$ یک مجموعه دور پذیر گوی یکه است. □

۲.۲.۲ مشخصه‌ی نقطه دورترین

قضیه ۷.۲.۲. فرض کنید B زیر مجموعه کرانداری از $B(H)$، $f \in B(H) \setminus B$ و $g' \in B$. در این صورت گزاره های زیر درست اند:

۱) اگر برای هر $h \in B$، $\min ReW((g_\circ - h)^*(f-h)) \leq \circ$. آنگاه $g_\circ \in \mathbb{F}_B(f)$.

۲) اگر $g_\circ \in \mathbb{F}_B(f)$، در این صورت برای هر $h \in B$، $\max ReW((g_\circ - h)^*(f-g_\circ)) \leq \circ$.

برهان. ۱) فرض کنید برای هر $h \in B$، نامساوی $\min ReW((g_\circ - h)^*(f-h)) \leq \circ$ برقرار باشد. بنابراین $\{x_n^h\}_{n\in\mathbb{N}}$ وجود دارد که $\lim_{n\to\infty} Re\langle (f-h)(x_n^h), (g_\circ - h)(x_n^h)\rangle \leq \circ$. لذا

$$\begin{aligned}
\|f-g_\circ\|^۲ &\geq \lim_{n\to\infty} \|(f-g_\circ)(x_n^h)\|^۲ \\
&= \lim_{n\to\infty} \|(f-h)(x_n^h) - (g_\circ - h)(x_n^h)\|^۲ \\
&= \lim_{n\to\infty} [\|(f-h)(x_n^h)\|^۲ + \|(g_\circ - h)(x_n^h)\|^۲ \\
&- ۲Re\langle (f-h)(x_n^h), (g_\circ - h)(x_n^h)\rangle] \\
&\geq \lim_{n\to\infty} \|(f-h)(x_n^h)\|^۲ = \|f-h\|^۲.
\end{aligned}$$

بنابراین برای هر $h \in B$، $\|f-h\| \leq \|f-g_\circ\|$. به عبارت دیگر $g_\circ \in \mathbb{F}_B(f)$.

۲) فرض کنید $g_\circ \in \mathbb{F}_B(f)$ و $\{x_n^{g_\circ}\}_{n\in\mathbb{N}} \in Z_{f-g_\circ}$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$\lim_{n\to\infty} Re\langle (f-g_\circ)(x_n^{g_\circ}), (g_\circ - h)(x_n^{g_\circ})\rangle > \circ.$$

در این صورت داریم

$$\begin{aligned}
\|f-g_\circ\|^۲ = \|(f-g_\circ)(x_n^{g_\circ})\|^۲ &< \lim_{n\to\infty} Re\langle (f-g_\circ)(x_n^{g_\circ}), (f-h)(x_n^{g_\circ})\rangle \\
&\leq \lim_{n\to\infty} |\langle (f-g_\circ)(x_n^{g_\circ}), (f-h)(x_n^{g_\circ})\rangle| \\
&\leq \|(f-g_\circ)(x_n^{g_\circ})\|\|(f-h)(x_n^{g_\circ})\| \\
&\leq \|f-g_\circ\|\|f-g\|.
\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که $\|f-g_\circ\| < \|f-h\|$. که این یک تناقض است. لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. □

با آوردن مثال های زیر نشان می‌دهیم که عکس قسمت های قضیه قبل ممکن است، برقرار نباشد.

مثال ۸.۲.۲. فرض کنید $H = \mathbb{R}$، $B = \{\circ, I\} \subseteq B(H)$ که I نگاشت همانی و $f = \frac{1}{2}I$. اگر $h = \circ$ و $g_\circ = I$، در این صورت $I \in \mathbb{F}_B(f)$ اما $\min ReW(I^*f) > \circ$.

مثال ۹.۲.۲. فرض کنید $H = \mathbb{R}$ و $B = \{\frac{3}{2}I, -I\} \subseteq B(H)$. قرار می دهیم $g_\circ = \frac{3}{2}I$ و $h = -I$. با وجود اینکه $\max ReW((g_\circ - h)(f - g_\circ)) \leq \circ$ اما $g_\circ \notin \mathbb{F}_B(f)$.

تعریف ۱۰.۲.۲. فرض کنید B یک مجموعه کراندار بسته از $B(H)$ باشد عنصر g' را یک نقطه دورترین نقطه از مرتبه ۲ نامیم، اگر برای هر $h \in B$ وجود داشته باشد $c > \circ$، به قسمی که

$$||f - g'||^2 \geq ||f - g||^2 + c||g - g'||^2.$$

قضیه ۱۱.۲.۲. فرض کنید B یک زیر مجموعه کرانداری از $B(H)$، $f \in B(H) \setminus B$ و $g_\circ \in B$. اگر $K_f > \circ$ وجود داشته باشد که

$$\min ReW((g_\circ - h)^*(f - h)) < -K_f||h - g_\circ||^2, \quad (h \in B). \tag{۱۸.۲}$$

در این صورت $g_\circ$ یک نقطه دورترین نقطه از مرتبه ۲ است.

برهان. اثبات مشابه قسمت اول قضیه ۱۵.۲.۲ است. □

نتیجه ۱۲.۲.۲. فرض کنید B یک زیر مجموعه کرانداری از $B(H)$، $f \in B(H) \setminus B$ و $g_\circ \in B$. اگر $K_f > \circ$ وجود داشته باشد که در شرایط (۱۸.۲) صدق نماید. در این صورت $\mathbb{F}_B(f) = \{g_\circ\}$.

برهان. بنا به قضیه ۱۵.۲.۲، $g_\circ$ یک نقطه دورترین برای f است. اینک فرض کنید g_1 یک عنصر دورترین دیگری برای f باشد. بنابراین $||f - g_1|| = ||f - g_\circ||$. بنا به قضیه ۱۱.۲.۲، $g_\circ$ یک نقطه دورترین از مرتبه ۲ است. لذا

$$\begin{aligned} ||f - g_1||^2 = ||f - g_\circ||^2 &\geq ||f - g_1||^2 + K_f||g_1 - g_\circ||^2 \\ &\Rightarrow K_f||g_1 - g_\circ||^2 = \circ \\ &\Rightarrow g_1 = g_\circ. \end{aligned}$$

بنابراین $\mathbb{F}_B(f) = \{g_\circ\}$. □

۳.۲.۲ نقاط دورترین همزمان

در این بخش ابتدا، ما قضیه‌ای را برای حالت کلی که X یک فضای نرمدار باناخ است، ثابت می‌نماییم. سپس نتایجی را در بحث جبر عملگرها بیان می‌کنیم.

تعریف ۱۳.۲.۲. فرض کنید X یک فضای خطی نرمدار، W زیرمجموعه‌ای از X و S یک مجموعه کراندار از X باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\mathbb{S}(W,S) := \sup_{s\in S} \inf_{\omega\in W} \|s-w\|.$$

عنصر $s_\circ \in S$ یک دورترین تقریب همزمان S از W نامیده می‌شود، هرگاه:

$$\inf_{\omega\in w} \|s_\circ - w\| = \mathbb{S}(W,S).$$

مجموعه تمامی دورترین تقریب های همزمان S از W با $\mathbb{F}_S(W)$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbb{F}_S(W) := \{s\in S : \inf_{\omega\in w} \|s-w\| = \mathbb{S}(W,S)\}.$$

قضیه ۱۴.۲.۲. فرض کنید S یک زیر مجموعه‌ی کراندار و W یک زیر مجموعه‌ی فشرده از X به قسمی که $W\cap S=\varnothing$ و $s_\circ \in S$. در این صورت گزاره‌های زیر درست هستند.

۱) اگر $w_\circ \in \mathbf{P}_W(s_\circ)$ موجود باشد به قسمی که

$$\tau_1(w_\circ - s, s-s_\circ) \geq \circ,\ (s\in S). \tag{۱۹.۲}$$

آنگاه $s_\circ \in \mathbb{F}_S(W)$.

که در آن τ_1 همان نگاشتی است که در ابتدا بخش ۲.۱.۲ معرفی شده اشت.

۲) اگر $s_\circ \in \mathbb{F}_S(f)$، آنگاه $w_\circ \in \mathbf{P}_W(s_\circ)$ وجود دارد به قسمی که

$$\tau_1(w_\circ - s_\circ, s-s_\circ) \geq \circ,\ (s\in S). \tag{۲۰.۲}$$

به علاوه اگر $\tau_1(w_\circ - s_\circ, s-s_\circ) \geq \|s-s_\circ\|^۲$ آنگاه $s_\circ \in \mathbb{F}_S(W)$.

۱) **برهان**. فرض کنید نامساوی (۱۹.۲) برقرار باشد. این ایجاب می کند برای برخی $t\geq\circ$ کوچک، $\|w_\circ - s + t(s-s_\circ)\| \geq \|w_\circ - s\|$. از اینکه τ_1 یک تابع نا نزولی است، لذا برای $t=۱$، $\|w_\circ - s_\circ\| \geq \|w_\circ - s\|$. این بدان معناست که $\sup_{s\in S}\|s-w_\circ\| = \|s_\circ - w_\circ\|$. لذا

$$\begin{aligned}
\sup_{s\in S}\inf_{w\in W}\|s-w\| &\leq \inf_{w\in W}\sup_{s\in S}\|s-w_\circ\| \\
&\leq \sup_{s\in S}\|s-w_\circ\| = \|s_\circ - w_\circ\| \\
&= \inf_{w\in W}\|s_\circ - w\| \\
&\leq \sup_{s\in S}\inf_{w\in W}\|s-w\|.
\end{aligned}$$

بنابراین $\inf_{w\in W}\|s_\circ - w\| = \sup_{s\in S}\inf_{w\in W}\|s-w\|$.

۲) فرض کنید $s_\circ \in \mathbb{F}_S(W)$. لذا $\inf_{w\in W}\|s_\circ - w\| = \mathbb{S}(W,S)$. چون W مجموعه فشرده است، پس $w_\circ \in W$ موجود است به قسمی که

$$\|s_\circ - w_\circ\| = \inf_{w\in W}\|s_\circ - w\|.$$

بنابراین $w_\circ \in \mathbf{P}_W(s_\circ)$. از اینکه $s_\circ \in \mathbb{F}_S(W)$. لذا برای هر $s \in S$ داریم

$$\|w_\circ - s_\circ - (s - s_\circ)\| - \|w_\circ - s_\circ\| \leq \circ.$$

چون τ_1 یک تابع نا نزولی است، لذا برای هر $s \in S$،

$$\tau_1(w_\circ - s_\circ, s_\circ - s) \leq \circ.$$

یا به عبارت دیگر برای هر $s \in S$،

$$\tau_1(w_\circ - s_\circ, s - s_\circ) \geq \circ.$$

این همان رابطه (۲۰.۲) است. اینک اگر $\tau_1(w_\circ - s_\circ, s - s_\circ) \geq \|s - s_\circ\|^2$ آنگاه

$$\circ \leq \tau_1(w_\circ - s_\circ, s - s_\circ) - \|s - s_\circ\|^2 \leq \tau_1(w_\circ - s, s - s_\circ).$$

بنابراین بنا به قسمت اول $s_\circ \in \mathbb{F}_S(W)$. □

قضیه ۱۵.۲.۲. فرض کنید $B \subseteq B(H)$ یک مجموعه کراندار و $W \subseteq B(H)$ یک مجموعه فشرده، $W \cap B = \varnothing$ و $b_\circ \in B$. در این صورت عبارات زیر درست اند.

۱) اگر $g_\circ \in \mathbf{P}_W(b_\circ)$ موجود باشد به قسمی که

$$\max ReW(h - b_\circ)^*(g_\circ - h)) \geq \circ.\ (h \in B). \tag{۲۱.۲}$$

آنگاه $b_\circ \in \mathbb{F}_B(W)$.

۲) اگر $b_\circ \in \mathbb{F}_B(W)$. در این صورت $g_\circ \in \mathbf{P}_W(b_\circ)$ موجود است به قسمی که

$$\max ReW((b_\circ - h)^*(g_\circ - b_\circ)) \leq \circ\ (h \in B). \tag{۲۲.۲}$$

برهان.

۱) فرض کنید $g_\circ \in \mathbf{P}_W(b_\circ)$ موجود باشد به قسمی که رابطه (۲۱.۲) برقرار باشد. بنا به لم ۲۲.۱.۲، داریم $\tau_2(g_\circ - h, h - b_\circ) \geq \circ$. این ایجاب می‌کند که $\tau_1(g_\circ - h, h - b_\circ) \geq \circ$. بنابراین با توجه به قضیه ۱۴.۲.۲، $b_\circ \in \mathbb{F}_B(W)$.

۲) اثبات این قسمت نیز شبیه به قسمت اول است. □

۳.۲ تئوری هم تقریب

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنید X یک فضای نرمدار و G زیر مجموعه غیر تهی از X باشد. نقطه $g_\circ \in G$ یک نقطه هم تقریب x [۱۱] گفته می‌شود در صورتی که :

$$\| g_\circ - g \| \leq \| x - g \|, \ (\forall\, g \in G).$$

مجموعه‌ای را که شامل تمام نقاط هم تقریب از x می‌باشد را با نماد $\mathbf{R}_G(x)$ نمایش می‌دهیم:

$$\mathbf{R}_G(x) := \{g' \in G : \ \|g' - g\| \leq \| x - g \|, \ \forall\, g \in G\}.$$

لم ۲.۳.۲. (نتیجه ۲ [۴۰]) فرض کنید G زیر فضایی از X، $g_\circ \in G$ و $x \in X$. در این صورت $g_\circ \in \mathbf{R}_G(x)$ اگر و فقط اگر $G \perp_B x - g_\circ$.

قضیه ۳.۳.۲. (لم ۱ [۴۰]) فرض کنید H یک فضای هیلبرت و Y زیرفضای غیر تهی از H باشد. در این صورت برای هر $x \in H$، $\mathbf{R}_Y(x) = \mathbf{P}_Y(x)$.

قضیه ۴.۳.۲. فرض کنید Y یک زیر فضای بسته از H باشد. در این صورت $B(H,Y)$ یک مجموعه هم تقریب پذیر است.

برهان. نگاشت $\phi : H \to Y$ را با ضابطه $x \to \mathbf{R}_Y(x)$ در نظر بگیرید. چون $\mathbf{P}_Y(x)$ خطی است، لذا بنا به قضیه ۳.۳.۲، ϕ نیز نگاشتی خطی می‌باشد. اینک نگاشت

$$\Phi : B(H) \longrightarrow B(H,Y),$$

که برای هر $f \in B(H)$، $\Phi(f) = \phi o f$ تعریف می شود را در نظر بگیرید. فرض کنید $h \in B(H,Y)$ یک عملگر دلخواه باشد. در این صورت برای هر $x \in H$ ،

$$\|h(x) - \phi o f(x)\| = \|\mathbf{P}_Y(h(x)) - \mathbf{P}_Y(f(x))\| \leq \|h(x) - f(x)\|.$$

لذا

$$\|h - \phi o f\| \leq \|f - h\|.$$

بنابراین

$$\|h - \Phi(f)\| \leq \|f - h\|.$$

پس $\Phi(f) \in \mathbf{R}_{B(H,Y)}(f)$. در نتیجه $B(H,Y)$ یک مجموعه هم تقریب پذیر است. □

تعریف ۵.۳.۲. فرض کنید S یک زیر فضای ناتهی از $B(H)$ باشد. مجموعه‌ی مکمل متعامد S به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S^{\perp} = \{g \in B(H) : g^* h = \circ, \ \forall\, h \in S\}.$$

در حالتی که $B(H) = S \oplus S^{\perp}$. مجموعه‌ی S را مکمل متعامدپذیر [۱۲] می‌گویند.

---

[۱۱] Co-approximation [۱۲] Complementable

قضیه ۲.۳.۶. فرض کنید S یک زیرفضای چبیشف مکمل متعامد پذیر باشد. در این صورت S یک مجموعه هم تقریب پذیر است.

برهان. فرض کنید $f \in B(H)$. از $B(H) = S \oplus S^{\perp}$ نتیجه می شود $h_۱ \in S$ و $g_۱ \in S^{\perp}$ وجود دارد که $f = h_۱ + g_۱$. چون S چبیشف است. بنا به قضیه ۱.۲.۵، $B(H) = S \oplus \widehat{S}$. لذا $\mathbf{P}_S(g_۱) = \{۰\}$. اینک نگاشت زیر را در نظر بگیرید:

$$P_S : B(H) \to S, \quad f \to \mathbf{P}_S(f).$$

P_S یک نگاشت انقباضی است. لذا برای $h \in S$،

$$\begin{aligned} \|h - h_۱\| &= \|P_S(h - h_۱ - g_۱)\| \\ &= \|P_S(h - f)\| \\ &\leq \|h - f\|. \end{aligned}$$

بنابراین S یک مجموعه هم تقریب پذیر است. □

۲.۳.۱ مشخصه‌ی نقاط هم تقریب

لم ۲.۳.۷. فرض کنید B یک زیر فضای بسته از $B(H)$، $f \in B(H)\backslash B$ و $g_۰ \in B$. اگر $g_۰ \in \mathbf{R}_B(f)$، آنگاه برای هر $h \in B$ دنباله ی $\{x_n^h\}_{n\in\mathbb{N}} \in Z_{h-g_۰}$ وجود دارد به قسمی که

$$\lim_{n\to\infty} \langle h(x_n^h), (f - g_۰)(x_n^h)\rangle = ۰.$$

برهان. فرض کنید $h_۱ \in B$ موجود باشد به قسمی که به ازای هر $\{x_n^{h_۱}\}_{n\in\mathbb{N}} \in Z_{h_۱}$،

$$\lim_{n\to\infty} \langle h_۱(x_n^{h_۱}), (f - g_۰)(x_n^{h_۱})\rangle \neq ۰.$$

قرار می دهیم $A = W((f - g_۰)^* h_۱)$. از اینکه A یک مجموعه محدب و شامل ۰ نیست. بنابراین A مشمول در یک نیم صفحه خواهد بود. با استفاده از دوران، میتوان فرض کرد که در نیم صفحه راست قرار دارد. بنابراین یک خط جدا کننده بین نقطه ۰ و مجموعه A وجود دارد. لذا $c > ۰$ وجود دارد که برای هر $z \in A$ ، $Re\ z \geq c > ۰$. فرض کنید

$$S = \{x \in H : \|x\| = ۱, Re\langle h_۱(x), (f - g_۰)(x)\rangle \leq \frac{۱}{۲}c\}.$$

و $\varrho = \sup_{t\in S} \|h_۱(t)\|$. بنا به تعریف می بایست $\varrho < \|h_۱\|$. در غیر این صورت، فرض کنید دنباله‌ای مانند $\{x_n^{h_۱}\}_{n\in\mathbb{N}} \in Z_{h_۱}$ موجود باشد که متعلق به S نیز باشد.

چون $\{\langle h_۱(x_n^{h_۱}), (f - g_۰)(x_n^{h_۱})\rangle\}$ دنباله‌ای کراندار از $\mathbb{C}$ است. لذا می‌توان فرض کرد که همگرا است. قرار می‌دهیم

$$\lambda_۰ = \lim_{n\to\infty} \langle h_۱(x_n^{h_۱}), (f - g_۰)(x_n^{h_۱})\rangle.$$

در این صورت $Re(\lambda_0) \leq \frac{1}{2}c$ که این یک تناقض است.

اینک قرار می‌هیم $\mu = \min\{\frac{c}{\|f-g_0\|^2}, \frac{\|h_1\|-\varrho}{\|f-g_0\|}\}$. فرض کنید x یک عنصری در گوی یکه H باشد. دو حالت را در نظر می گیریم:

حالت اول: اگر $x \in S$. در این صورت

$$\begin{aligned} \|h_1(x) - \mu(f-g_0)(x)\| &\leq \|h_1(x)\| + \mu\|f-g_0\| \\ &< \varrho + \frac{\|h_1\|-\varrho}{\|f-g_0\|}\|f-g_0\| \\ &= \|h_1\|.(*) \end{aligned}$$

حالت دوم: اگر $x \notin S$. از اینکه $\mu^2\|(f-g_0)(x)\|^2 - c\mu < 0$. لذا خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \|h_1(x) - \mu(f-g_0)(x)\|^2 &= \|h_1(x)\|^2 + \mu^2\|(f-g_0)(x)\|^2 \\ &- 2\mu Re\langle h_1(x), (f-g_0)(x)\rangle \\ &\leq \|h_1(x)\|^2 + \mu^2\|(f-g_0)(x)\|^2 - c\mu \\ &< \|h_1\|^2.(**) \end{aligned}$$

از رابطه $(*), (**)$ نتیجه می شود $\|h_1 + \mu(f-g_0)\| < \|h_1\|$. بنا به لم ۲.۳.۲، این متناقض با فرض $g_0 \in \mathbf{R}_B(f)$. $\square$

قضیه ۸.۳.۲. فرض کنید W یک زیر فضای بسته از $B(H)$، $f \in B(H) \setminus W$ و $g_0 \in W$. در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱) $g_0 \in \mathbf{R}_W(f)$.

۲) برای هر $h \in W$،

$$\min ReW((f-g_0)^*h) \leq 0. \tag{۲۳.۲}$$

برهان. (۱) $\to$ (۲). فرض کنید g یک عنصر دلخواهی از W و $\{x_n^{g-g_0}\} \in Z_{g-g_0}$ دنباله‌ای باشد که در شرط (۲۳.۲) صدق کند. در این صورت

$$\begin{aligned} \|f-g\|^2 &\geq \|(f-g)(x_n^{g-g_0})\|^2 \\ &= \|(f-g_0)(x_n^{g-g_0})\|^2) + \|(g-g_0)(x_n^{g-g_0})\|^2 \\ &- 2Re\langle (g-g_0)(x_n^{g-g_0}), (f-g_0)(x_n^{g-g_0})\rangle \\ &\geq \|(g-g_0)((x_n^{g-g_0}))\|^2 = \|g-g_0\|^2. \end{aligned}$$

بنابراین $\|f-g\| \geq \|g-g_0\|$، به عبارت دیگر $g_0 \in \mathbf{R}_W(f)$.

(۲) $\to$ (۱). فرض کنید $g_0 \in \mathbf{R}_W(f)$. بنا به لم ۷.۳.۲، $\{x_n^h\}_{n\in\mathbb{N}} \in Z_h$ وجود دارد که

$$\lim_{n\to\infty} \langle (f-g_0)(x_n^h), h(x_n^h)\rangle = 0.$$

بنابراین $\min ReW((f-g_0)^*h) \leq 0$. $\square$

در ادامه مشخصه‌ای دیگر برای نقاط هم تقریب ارائه می‌دهیم.

نتیجه ۹.۳.۲. فرض کنید U یک زیر فضای بسته از $B(H)$، $f \in B(H) \setminus U$ و $g_\circ \in U$. در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱) $g_\circ \in \mathbf{R}_U(f)$.

۲) برای هر $h \in U$،

$$\tau_{۲}(h, (g_\circ - f)) \geq \circ. \qquad (۲۴.۲)$$

برهان.

$(۲) \to (۱)$. از اینکه $g_\circ \in \mathbf{R}_U(f)$. بنا به قضیه ۸.۳.۲، نامساوی (۲۳.۲) برقرار است. اینک بنا به لم ۲۲.۱.۲، نامساوی (۲۴.۲) نتیجه می‌شود.

$(۱) \to (۲)$. فرض کنید برای هر $h \in U$ رابطه (۲۴.۲) برقرار باشد. لذا یک $t_\circ > \circ$ وجود دارد به قسمی که $\frac{\|h+t_\circ(g_\circ-f)\|^{۲}-\|h\|^{۲}}{۲t_\circ} \geq \circ$. از اینکه φ با ضابطه

$$\varphi(t) = \frac{\|h + t(g_\circ - f)\|^{۲} - \|h\|^{۲}}{۲t}, \qquad (۲۵.۲)$$

یک نگاشت نانزولی است. لذا به ازای $t = ۱$، $\|h - (f - g_\circ)\|^{۲} - \|h\|^{۲} \geq \circ$. قرار می دهیم $h = g - g_\circ$. بنابراین $\|f - g\| \geq \|g - g_\circ\|$. به عبارت دیگر $g_\circ \in \mathbf{R}_U(f)$.

□

در اینجا یادآور می‌شویم هنگامی که دو نقطه $g_۲$، $g_۱$ جزء بهترین تقریب های نقطه $f \in B(H)$ باشند، لاجرم $\|f - g_۱\| = \|f - g_۲\|$. اما هنگامی که آن ها هم تقریب هستند، ممکن است این اتفاق نیفتد. اما در شرایطی مانند شرایط زیر ممکن است این تساوی نیز رخ دهد.

گزاره ۱۰.۳.۲. فرض کنید G یک زیر مجموعه از $B(H)$، $g_۱$ و $g_۲$ هم تقریب G باشند. اگر برای هر $g \in G \backslash \{g_i\}$،

$$\max ReW((f - g)^*(g_i - f)) \geq \circ. \qquad (۲۶.۲)$$

آنگاه $\|f - g_۱\| = \|f - g_۲\|$.

برهان. فرض کنید برای هر $g \in G \backslash \{g_i\}$ رابطه (۲۶.۲) درست باشد. بنابراین دنباله ای $\{x_n^{g_۱-f}\}_{n\in\mathbb{N}}$ در $Z_{g_۱-f}$ موجود است که $\lim_{n\to\infty}\langle (g_۱ - f)(x_n^{g_۱-f}), (f - g_۲)(x_n^{g_۱-f})\rangle \geq \circ$. در نتیجه

$$\begin{aligned}
\|f - g_۲\|^{۲} &\geq \|g_۱ - g_۲\|^{۲} \geq \lim_{n\to\infty} \|g_۱ - g_۲(x_n^{g_۱-f})\|^{۲} \\
&= \lim_{n\to\infty} \|(f - g_۲)(x_n^{g_۱-f}) + (g_۱ - f)(x_n^{g_۱-f})\|^{۲} \\
&= \lim_{n\to\infty} \|(f - g_۲)(x_n^{g_۱-f})\|^{۲} + \|(g_۱ - f)(x_n^{g_۱-f})\|^{۲} \\
&+ ۲ \quad Re\langle (g_۱ - f)(x_n^{g_۱-f}), (f - g_۲)(x_n^{g_۱-f})\rangle \\
&\geq \lim_{n\to\infty} \|(f - g_۱)(x_n^{g_۱-f})\|^{۲} = \|f - g_۱\|.
\end{aligned}$$

به طور مشابه می‌توان طرف دیگر نامساوی را اثبات نمود. لذا $\|f-g_۲\| = \|f-g_۱\|$. □

گزاره ۱۱.۳.۲. فرض کنید B یک زیر فضای بسته از $B(H)$، $f \in B(H) \setminus B$ و $g_\circ \in B$ یک هم تقریب f. اگر برای هر $g \in B \backslash \{g_\circ\}$،

$$\min ReW((f-g)^*(f-g_\circ)) \leq \circ. \qquad (۲۷.۲)$$

آنگاه $g_\circ$ یک بهترین تقریب f است.

برهان. فرض کنید برای هر $g \in B$ نامساوی (۲۷.۲) برقرار باشد. دراین صورت $\{x_n^{f-g_\circ}\}_{n\in\mathbb{N}}$ در $Z_{f-g_\circ}$ موجود است که

$$\lim_{n\to\infty} \langle (f-g_\circ)(x_n^{f-g_\circ}), (f-g)(x_n^h) \rangle \leq \circ.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\|f-g\|^۲ &\geq \|g-g_\circ\| \\
&\geq \lim_{n\to\infty} \|(g-g_\circ)(x_n^{f-g_\circ})\|^۲ \\
&= \lim_{n\to\infty} \|(f-g_\circ)(x_n^{f-g_\circ})\|^۲ + \|(f-g)(x_n^{f-g_\circ})\|^۲ \\
-۲ \;& Re\langle (f-g_\circ)(x_n^{f-g_\circ}), (f-g)(x_n^{f-g_\circ}) \rangle \\
&\geq \lim_{n\to\infty} \|(f-g_\circ)((x_n^{f-g_\circ}))\|^۲ = \|f-g_\circ\|^۲.
\end{aligned}$$

لذا برای هر $g \in B$، $\|f-g\| \geq \|f-g_\circ\|$، به عبارت دیگر $g_\circ$ بهترین تقریب f است. □

فصل ۳

تئوری تقریب در جبرهای باناخ و فضاهای مدولی

در این فصل نظریه تقریب را در C^*- جبرها و فضاهای مدولی مطرح می‌کنیم. در بخش اول، به بیان مشخصه‌ی نقاط تقریب می‌پردازیم و در بخش دوم وجود و عدم شبه یکتایی نقاط تقریب را در جبرهای باناخ، C^*- جبرها و فضاهای مدولی بیان خواهیم کردیم.

۱.۳ مشخصه‌های نقاط تقریب

در این بخش قصد داریم به کمک قضایایی که در مورد جبر عملگرهای هیلبرتی اثبات شد و قضیه گلفند-نیمارک نتایجی را در مورد تقریب فضای C^*-جبری بیان نماییم.

تعریف ۱.۱.۳. فرض کنید A یک C^*-جبر و (π, H) نمایش گلفند-نیمارک برای A باشد. برای هر $a, b \in A$ برد عددی a^*b نسبت به a را به صورت زیر تعریف می‌کنیم و با نماد $W_A(a^*b)$ نشان می‌دهیم.

$$W_A(a^*b) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \in W(\pi(a^*b)) = W(\pi(a)^*\pi(b))\}. \tag{۱.۳}$$

نتیجه ۲.۱.۳. فرض کنید B یک زیر مجموعه محدب بسته از C^*-جبر A، $a \in A \setminus B$ و $b_\circ \in B$. در این صورت $b_\circ \in \mathbf{P}_B(a)$ اگر و تنها اگر برای هر $b \in B$،

$$\max ReW_A((b - b_\circ)^*(a - b)) \leq \circ \leq \max ReW_A((b_\circ - b)^*(a - b_\circ)). \tag{۲.۳}$$

برهان. فرض کنید که برای هر $b \in B$ نامساوی (۲.۳) برقرار باشد. در این صورت بنا به تعریف ۱.۱.۳، برای هر $\pi(b) \in \pi(B)$ داریم

$$\max ReW(\pi(b - b_\circ)^*\pi(a - b)) \leq \circ \leq \max ReW(\pi(b_\circ - b)^*\pi(a - b_\circ)).$$

بنا به نتیجه ۲۷.۱.۲، $\pi(b_\circ) \in \mathbf{P}_{\pi(B)}(\pi(a))$. از اینکه π یک ایزومتری است نتیجه می شود که $b_\circ \in \mathbf{P}_B(a)$. □

به عنوان کاربردی از این قضیه، به مشخصه‌ی بهترین تقریب در فضای توابع به طور اساسی کراندار می‌پردازیم.

فرض کنید X یک فضای اندازه پذیر و μ یک اندازه مثبت بورل روی X باشد. نگاشت :

$$\pi : L_\infty(X,\mu) \to B(L_۲(\mu))$$
$$f \longrightarrow M_f,$$

که برای هر $h \in L_۲(\mu)$، $M_f(h) = foh$ تعریف می‌شود را در نظر بگیرید. زوج $(\pi, L_۲(\mu))$ یک نمایش گلفند برای $L_\infty(X,\mu)$ است.

نتیجه ۳.۱.۳. فرض کنید B یک زیر مجموعه محدب بسته از $L_\infty(X,\mu)$ و $f \in L_\infty(X,\mu)\backslash B$. در این صورت $g_\circ \in \mathbf{P}_B(f)$ اگر و تنها اگر برای هر $g \in B$،

$$\max_{h_i \in Z_{M_{f-g}}} Re \int ((f-g)oh_i)(x)\overline{((g-g_\circ)oh_i)(x)}d\mu \leq \circ.$$

برهان. اثبات بنا به نتیجه ۲.۱.۳ بدیهی است. □

نتیجه ۴.۱.۳. فرض کنید B یک زیر فضایی بسته از A، $a \in A \setminus B$ و $b_\circ \in B$. در این صورت عبارات زیر معادل اند:

۱) $b_\circ \in \mathbf{R}_B(a)$.

۲) برای هر $b \in B$،

$$\min ReW_A((a-b_\circ)^*b) \leq \circ. \tag{۳.۳}$$

برهان. اثبات مشابه نتیجه ۲.۱.۳ است. □

نتیجه ۵.۱.۳. فرض کنید G یک زیر فضایی از $L_\infty(X,\mu)$، $f \in L_\infty(X,\mu) \setminus G$ و $g_\circ \in G$. در این صورت عبارات زیر معادل اند:

۱) $g_\circ \in \mathbf{R}_G(f)$.

۲) برای هر $g \in G$،

$$\min_{h_i \in Z_{M_g}} Re \int (goh_i(x))\overline{((f-g_\circ)oh_i(x))}d\mu \leq \circ. \tag{۴.۳}$$

برهان. اثبات بنا به نتیجه ۴.۱.۳ بدیهی است. □

قضیه ۶.۱.۳. فرض کنید M یک زیر فضای بسته از C^*-جبر A، $a \in A \setminus M$ و $m_\circ \in M$. در این صورت احکام زیر معادلند:

۱) $m_\circ \in P_M(a)$.

۲) فوق حالت φ روی A موجود است به قسمی که :

$$\varphi((a-m_0)^*(a-m_0)) = \|a-m_0\|^2, \tag{۵.۳}$$

$$\varphi(m^*(a-m_0)) \leq 0, \ (\forall\, m \in M). \tag{۶.۳}$$

برهان. فرض کنید $m_0 \in \mathbf{P}_M(f)$ و (π, H) یک نمایش گلفند-نیمارک برای A باشد. قرار می‌دهیم $f = \pi(b)$، $g_0 = \pi(a_0)$ و $U = \pi(M)$. چون π یک ایزومتری است. لذا $g_0 \in \mathbf{P}_U(f)$. اینک بنا به قضیه ۴۳.۱.۲، فوق حالت φ از $B(H)$ موجود است به قسمی که برای هر $h \in U$ داریم

$$\varphi((f-g_0)^*(f-g_0)) = \|f-g_0\|^2, \ \ \varphi(h(f-g_0)) \leq 0.$$

نگاشت $\psi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\psi(x) = \varphi(\pi(x)), \ \ (\forall\, x \in A).$$

بدیهی است که ψ در شرایط (۵.۳) و (۶.۳) صدق می‌کند. □

در ادامه مشخصه‌ی بهترین تقریب را در فضاهای مدولی هیلبرتی بیان می‌کنیم.

لم ۷.۱.۳. (قضیه ۳.۴ [۱۸]) فرض کنید E یک A-مدول روی C^*-جبر A باشد. در این صورت E قابل نشاندن در $B(H, K)$ است که H, K فضاهای هیلبرت هستند(H فضای مورد نظر در نمایش گلفند برای A می‌باشد) به عبارت دیگر یک ایزومتری مانند l وجود دارد به قسمی که

$$l : E \ \longrightarrow \ B(H, K),$$

که برای $e_1, e_2 \in E$ و $h_1, h_2 \in H$ رابطه زیر برقرار است.

$$\langle l(e_1)h_1, l(e_2)h_2 \rangle = \langle h_1, \pi(\langle (e_1), e_2 \rangle)h_2 \rangle.$$

نتیجه ۸.۱.۳. فرض کنید E یک A-مدول روی C^*-جبر A، M یک زیر مدول از E و $b \in E \setminus M$. اگر $m_0 \in \mathbf{P}_M(b)$، در این صورت فوق حالت $\psi : A \to \mathbb{R}$ موجود است به قسمی که

$$\psi(\langle b-m_0, b-m_0 \rangle) = \|b-m_0\|^2, \tag{۷.۳}$$

و برای هر $m \in M$،

$$\psi(\langle m, b-m_0 \rangle) \leq 0. \tag{۸.۳}$$

و برعکس. اگر فوق حالت ψ موجود باشد به قسمی که در شرط (۷.۳) صدق کند و برای هر $m \in M$ تساوی زیر برقرار باشد

$$\psi(\langle m, b-m_0 \rangle) = 0. \tag{۹.۳}$$

آنگاه $m_0 \in \mathbf{P}_M(b)$.

برهان. فرض کنید $m_\circ \in \mathbf{P}_M(f)$ و $l : E \longrightarrow B(H,K)$ نگاشت تعریف شده در لم ۷.۱.۳ باشد. از اینکه $l(m_\circ) \in \mathbf{P}_{l(M)}(l(b))$، بنا به قضیه ۴۲.۱.۲، برای هر $l(m)$ در $l(M)$ دنباله‌ای $\{x_n^m\}_{n\in\mathbb{N}}$ موجود است به قسمی که $\|l(b-m_\circ)\| = \lim_{n\to\infty} \|l(b-m_\circ)(x_n^m)\|$ و

$$\lim_{n\to\infty} \langle l(b-m_\circ)(x_n^m), l(m)(x_n^m)\rangle = \circ.$$

اینک نگاشت زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \varphi^n &: A \longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi^n(a) &= \langle \pi(a)(x_n^m), x_n^m\rangle. \end{aligned}$$

از اینکه $\varphi^n \in B_{A^*}$. لذا بنا به قضیه آلاغلو دنباله φ^n همگرا به φ^m و

$$\varphi^m(\langle m, b-m_\circ\rangle) = \lim_{n\to\infty} \langle l(b-m_\circ)(x_n^m), l(m)(x_n^m)\rangle = \circ.$$

هم چنین

$$\begin{aligned} \varphi^m(\langle b-m_\circ, b-m_\circ\rangle) &= \lim_{n\to\infty} \langle l(b-m_\circ)(x_n^m), l(b-m_\circ)(x_n^m)\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \|l(b-m_\circ)(x_n^m)\|^{۲} = \|b-m_\circ\|^{۲}. \end{aligned}$$

نگاشت $\psi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $\psi(a) = \inf_{m\in M} \varphi^m(a)$ را در نظر بگیرید، اینک شبیه اثبات قضیه ۴۳.۱.۲، می‌توان نشان داد که ψ یک فوق حالت روی A است، که در شرایط (۷.۳) و (۹.۳) صدق می‌کند.

برعکس . فرض کنید فوق حالت ψ موجود باشد که در شرایط (۷.۳) و (۹.۳) صدق می‌کند. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} \|b-m_\circ\|^{۲} &= \psi(\langle b-m_\circ, b-m_\circ\rangle) \\ &= |\psi(\langle b-m+m-m_\circ, b-m_\circ\rangle| \\ &\leq |\psi(\langle b-m, b-m_\circ\rangle)| + |\psi(\langle m-m_\circ, b-m_\circ\rangle)| \\ &\leq \|(b-m)\|\|(b-m_\circ)\|. \end{aligned}$$

لذا $m_\circ \in \mathbf{P}_M(b)$. □

تعریف ۹.۱.۳. فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد. مجموعه $N \subseteq B_{X^*}$ نرمینگ [۱] نامیده می‌شود، اگر برای هر $x \in X$،

$$\| x \| = \sup\{| \phi(x) | : \phi \in N\}.$$

قضیه ۱۰.۱.۳. [۸۷] فرض کنید X یک فضای باناخ، Y یک زیر فضای از X، E یک مجموعه دلخواه نرمینگ از X^* و $x \in X \setminus Y$. در این صورت $y_\circ \in P_Y(x)$ اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon > \circ$ وجود داشته باشد $\varphi_۱, \varphi_۲ ... \varphi_n \in E$ و $\lambda_۱, \lambda_۲, ... \lambda_n$ به طوری که

$$\sum_{i=۱}^{n} | \lambda_i | \leq ۱,$$

[۱] Norming

$$| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_i(y) |< \varepsilon \parallel y \parallel, \quad (y \in Y).$$

و

$$||| x - y_\circ \parallel - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \lambda_i \phi_i(x - y_\circ) |< \varepsilon.$$

فرض کنید E یک A-مدول روی C^*-جبر A، $y \in E$ و $\phi \in A^*$. نگاشت

$$\begin{aligned} \phi \circledast y \quad &: \quad E \longrightarrow \mathbb{C} \\ (\phi \circledast y)(x) \quad &= \quad \phi(\langle x, y \rangle), (\forall\, x \in E). \end{aligned}$$

متعلق به E^* است.

قضیه ۱۱.۱.۳. فرض کنید E یک A-مدول روی C^*-جبر A، M یک زیر مدول از E و $x \in E \setminus M$. در این صورت $m_\circ \in \mathbf{P}_M(x)$ اگر و تنها اگر برای $\varepsilon > \circ$، $\phi_1, \phi_2, ...\phi_n \in B_{A^*}$، $y_1, y_2, ...y_n \in B_E$ و $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n \in C$ موجود باشند به قسمی که $\sum_{i=1}^{n} | \lambda_i | \leq 1$ و

$$| \sum_{i=1}^{n} (\phi_i \circledast y_i)(m) |< \varepsilon \|m\|, \quad (m \in M).$$

و

$$| \sum_{i=1}^{n} (\phi_i \circledast y_i)(x - m_\circ) - ||(x - m_\circ)|| |< \varepsilon.$$

برهان. بنا به قضیه ۱۰.۱.۳، کافی است نشان دهیم مجموعه

$$N = \{\phi \circledast y : \quad \phi \in B_{A^*}, \ y \in B_E\},$$

نرمینگ در B_{E^*} است. بدین منظور بنا به تعریف نرم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sup\{| \psi(x) |: \ \psi \in N\} \quad &= \quad \sup\{| (\phi \circledast y)(x) |: \quad \phi \in B_{A^*}, \ y \in B_E\} \\ &= \quad \sup\{| \phi(\langle x, y \rangle) |: \quad \phi \in B_{A^*}, \ y \in B_E\} \\ &= \quad \sup\{||\langle x, y \rangle||, \ ||y|| \leq 1\} \\ &= \quad ||x||. \end{aligned}$$

□

۲.۳ شبه یکتایی نقاط تقریب در جبرهای باناخ

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنید A یک فضای باناخ و B یک زیرفضای سره بسته از A باشد. عنصر $z \in A$ مینیمال [۲] نامیده می شود، در صورتی که ∘ بهترین تقریب z از مجموعه B باشد.

[۲] Minimal

فرض کنید A یک C^*-جبر، ما از نماد A_h برای مجموعه $A_h = \{a \in A : a = a^*\}$ استفاده می‌کنیم.

لم ۲.۲.۳. (قضیه ۶.۲[۹۸]) فرض کنید B یک زیر جبر یکدار از A و $a \in A_h$ مینیمال باشد. در این صورت نگاشت حالت ϕ چنان موجود است که $\phi(a^2) = \|a\|^2$ و برای هر $b \in B$، $\phi(ab + b^*a) = 0$.

لم ۳.۲.۳. فرض کنید M یک زیر جبر از A و $a \in A_h$ و $|\mathbf{P}_M(a)| \geq 1$. در این صورت وجود دارد $m_0 \in \mathbf{P}_M(a)$ ای که هرمیتی است.

برهان. فرض کنید $m_0 \in \mathbf{P}_M(a)$. نشان می‌دهیم که قسمت حقیقی در نمایش m_0 یعنی $\frac{m_0+m_0^*}{2}$ عنصر هرمیتی مورد نظر می‌باشد. بدین منظور

$$\begin{aligned}\|a - \frac{m_0 + m_0^*}{2}\| &= \|\frac{a+a^*}{2} - \frac{m_0 + m_0^*}{2}\| \\ &\leq \|\frac{a - m_0}{2}\| + \|\frac{a^* - m_0^*}{2}\| \\ &\leq \|a - m\|.\end{aligned}$$

بنابراین $\frac{m_0 + m_0^*}{2} \in \mathbf{P}_M(a) \cap A_h$. □

قضیه ۴.۲.۳. فرض کنید M یک زیر جبر تقریب پذیر از A باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل اند:

۱) M شبه چبیشف است.

۲) نقطه $x_0 \in A$ و دنباله‌ی $\{x_n\}$ از A به قسمی که $x_0 - x_n \in M$ حاوی زیر دنباله ناهمگرای در A و نگاشت فوق حالت φ روی A موجود نباشند، به قسمی که برای هر $m \in M$،

$$\varphi(x_n^* x_n) = \|x_n\|^2 \tag{۱۰.۳}$$

$$\varphi(m^* x_n) \leq 0. \tag{۱۱.۳}$$

برهان. ۲ $\Rightarrow$ ۱. فرض کنید فوق حالت φ، $x_0 \in A$ و دنباله‌ی $\{x_n\}$ از A که $x_0 - x_n \in M$ حاوی زیر دنباله ناهمگرای در A موجود باشند که در شرط (۱۰.۳)، (۱۱.۳) صدق نمایند. قرار می‌دهیم $g_n = x_0 - x_n$، بنا به قضیه ۶.۱.۳، $g_n \in \mathbf{P}_M(x_0)$. اما این تناقض با فرض شبه چبیشف بودن M است.

۱ $\Rightarrow$ ۲. فرض کنید که M شبه چبیشف نباشد. چون M تقریب پذیر است برای هر $x \in A$، $P_M(x) \neq \varnothing$. فرض کنید $a \in A$ یک عنصر هرمیتی و $g_n \in \mathbf{P}_M(a)$ به قسمی که دارای یک زیر دنباله ناهمگرا باشد. بنا به لم ۳.۲.۳، g_n نیز هرمیتی می‌باشند. (اگر $a \neq a^*$ آنگاه تشکیل می‌دهیم عنصر هرمیتی $X = \begin{bmatrix} 0 & a^* \\ a & 0 \end{bmatrix}$ در جبر $\mathbb{M}_2(A)$. این عنصر دارای عنصر بهترین تقریب درقالب

$M_\circ = \begin{bmatrix} \circ & m^* \\ m & \circ \end{bmatrix}$ که $m \in M$ است.) با به کار بستن لم ۲.۲.۳ برای هر $n \in \mathbb{N}$، تابع حالت ϕ_n موجود است به قسمی که

$$\phi_n((a-g_n)^۲) = \|a-g_n\|^۲,$$

$$\phi_n((a-g_n)(g)^* + g(a-g_n)) = \circ.$$

اینک نگاشت $\varphi(h) = \inf_{n\in N} Re\, \varphi_n(h)$ را در نظر بگیرید، شبیه قضیه ۴۳.۱.۲، می‌توان نشان که φ یک فوق حالت است. اینک برای هر $i, n \in N$، داریم

$$\begin{array}{rcl} \phi_n((a-g_i)^۲) & = & \phi_n((a-g_n+g_n-g_i)(a-g_n+g_n-g_i)^*) \\ & = & \phi_n((a-g_n)(a-g_n)^*) + \phi_n((g_n-g_i)(g_n-g_i)^*) \\ & + & \phi_n((a-g_n)(g_n-g_i)^* + (g_n-g_i)(a-g_n)^*) \\ & \geq & \phi_n((a-g_n)(a-g_n)^*) = \|a-g_n\|^۲ = \|a-g_i\|^۲. \end{array}$$

از طرفی دیگر

$$\phi_n((a-g_i)^۲) \leq \|\phi_n\|\|a-g_i\|^۲ = \|a-g_i\|^۲.$$

بنابراین برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\varphi((a-g_n)(a-g_n)^*) = \varphi((a-g_n)^۲) = \|a-g_n\|^۲.$$

چون

$$\varphi(g^*(a-g_n)) \leq Re\, \varphi_n(g^*(a-g_n)) = \frac{۱}{۲}(\varphi_n((a-g_n)g^* + g(a-g_n)^*) = \circ.$$

بنابراین $\varphi(g^*(a-g_n)) \leq \circ$. لذا φ دارای شرایط (۱۰.۳)، (۱۱.۳) است که این متناقض با فرض قسمت (۲) است. □

وجود مجموعه‌های ناشبه چبیشف

در ادامه قصد داریم نشان دهیم در جبرهای باناخ یکدار با بعد نامتناهی مجموعه‌های وجود دارند که ناشبه چبیشف [۳] و ناچبیشفگون [۴] هستند.

تعریف ۵.۲.۳. فرض کنید X یک جبر باناخ باشد. X دارای خاصیت (N) است اگر $\Omega(X) \neq \varnothing$ و برای هر $x, y \in X, \tau \in \Omega(X)$ رابطه $|\tau(x)| \leq |\tau(y)|$ ایجاب کند که $\|x\| < \|y\|$.

[۳] Non Quasi-Chebyshev
[۴] Non Pseudo-Chebyshev

لم ۶.۲.۳. (لم ۲.۱[۴۴]) فرض کنید X یک جبر باناخ یکدار نامتناهی البعد با خاصیت (N) ، $\widehat{X}$ خود الحاق و در شرط زیر صدق کند:

$$\inf\{r(x) : x \in A, \|x\| = ۱\} > ۰, \tag{۱۲.۳}$$

آنگاه احکام زیر برقرارند:

(۱) یک دنباله‌ای $\{x_n\}$ از X موجود است به قسمی که

$$\{\tau(x_n) : \tau \in \Omega(X)\} \subseteq [۰, ۱].$$

برای هر $n \in N$ مجموعه‌ی $A_n = \{\widehat{(x_n)}^{-۱}\{۱\}$ یک دنباله‌ای از مجموعه‌های دو به دو مجزا از $\Omega(X)$ است.

(۲) نگاشت T_n روی X با ضابطه زیر

$$T_n : X \longrightarrow X, \quad x \longrightarrow x_n x, \tag{۱۳.۳}$$

دارای هیچ نقطه‌ی ثابتی در E_n نیستند که در آن E_n به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$E_n = \{x \in X : ۰ \leq \tau(x) \leq ۱, \tau \in \Omega(X),\ \tau(x) = ۱,\ (\tau \in A_n)\}. \tag{۱۴.۳}$$

قضیه ۷.۲.۳. فرض کنید X یک جبر باناخ یکدار نامتناهی‌البعد با خاصیت (N)، $\widehat{X}$ خود الحاق و در شرط (۱۲.۳) صدق کند. در این صورت X دارای یک مجموعه ناشبه چبیشف می باشد.

برهان. فرض کنید هر زیر مجموعه ناتهی از X شبه چبیشف باشد. هم چنین T_n و E_n نگاشت ها و مجموعه های تعریف شده در (۱۳.۳) و (۱۴.۳) باشند. از اینکه $|\tau(x_n)| \leq ۱ = \tau(e)$ و X دارای خاصیت (N) است، نتیجه می‌شود که برای هر $n \in N$، $\|x_n\| \leq ۱$. چون برای هر $x, y \in X$،

$$\|T_n(x) - T_n(y)\| = \|x_n(x - y)\| \leq \|x_n\|\|x - y\| \leq \|x - y\|.$$

لذا T_n دارای خاصیت انقباضی روی X است. برای هر $n \in N$، E_n مجموعه های محدب پایایی نسبت به T_n هستند. برای هر $x \in X$، $P_{E_n}(x)$ یک مجموعه محدب و بنا به فرض فشرده می باشند. اینک نشان می‌دهیم $P_{E_n}(۰)$ یک مجموعه‌ی پایا برای T_n است. فرض کنید که $y \in P_{E_n}(۰)$. چون $y \in E_n$ لذا $T_n y$ متعلق به E_n است. از اینکه T_n نگاشت انقباضی اند، لذا برای هر $g \in E_n$، نتیجه می‌شود که

$$\|T_n y - ۰\| = \|T_n y - T_n ۰\| \leq \|y - ۰\| \leq \|g - ۰\|.$$

بنابراین $T_n y$ متعلق به $P_{E_n}(۰)$ است. لذا مجموعه‌ی $P_{E_n}(۰)$ نسبت به نگاشت T_n پایاست. از طرفی دیگر چون نگاشت عملگر ضربی در جبرهای باناخ پیوسته اند، لذا T_n نگاشت پیوسته ایست. از اینکه $I - T_n$ نگاشت پیوسته است، بنا به قضیه ۱۶.۳.۱ برای هر $n \in N$ ، $P_{E_n}(۰) \cap F(T_n) \neq \varnothing$. لذا $E_n \cap F(T_n) \neq \varnothing$. اما این با قسمت دوم لم قبل در تناقض است. لذا فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. □

تعریف ۸.۲.۳. زیر مجموعه‌ی ناتهی W از X را یک مجموعه چبیشفگون گویند، اگر برای هر $x \in X$، $P_W(x)$ یک مجموعه‌ی ناتهی و متناهی البعد باشد. در غیر این صورت مجموعه W را یک ناچبیشفگون می‌نامیم.

قضیه ۹.۲.۳. فرض کنید X یک جبر باناخ یکدار نامتناهی البعد جابجایی با خاصیت (N) ، $\widehat{X}$ خود الحاق و در شرط (۱۲.۳) صدق کند. در این صورت X دارای یک مجموعه ناچبیشفگون می‌باشد.

برهان. فرض کنید هر زیر مجموعه ناتهی از X چبیشفگون باشد. هم چنین T_n و E_n نگاشت ها و مجموعه‌های تعریف شده (۱۳.۳) و (۱۴.۳) باشند. ابتدا نشان می‌دهیم که برای هر $n \in N$، مجموعه E_n کرانداری است. برای هر $x \in E_n$،

$$\begin{aligned} \circ < \beta &= \inf\{r(x) : x \in X, \|x\| = ۱\} \\ &\leq r(\frac{x}{||x||}) = \sup|\tau(\frac{x}{||x||})| = \frac{۱}{||x||} \sup_{\tau\in\Omega(X)} | \tau(x) | . \end{aligned}$$

بنابراین E_n کراندار و در نتیجه $P_{E_n}(x)$ مجموعه کرانداری برای هر $x \in X$ است. بنا به قضیه بولزانو–وایرشتراش [۵] مجموعه $P_{E_n}(x)$ فشرده هستند. اینک شبیه قضیه ۷.۲.۳، می‌توان تناقض را نشان داد. □

نتیجه ۱۰.۲.۳. فرض کنید S فضای توپولوژیک هاسدروف فشرده و $C(S)$ نامتناهی البعد باشد. در این صورت $C(S)$ دارای مجموعه‌های ناشبه چبیشف و ناچبیشفگون است.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم $C(S)$ دارای خاصیت (N) است. بدین منظور برای هر $x \in C(S)$، $\sigma(x) = x(S)$ و اگر $y \in C(S)$ به قسمی که برای هر $s \in S$، $|x(s)| \leq |y(s)|$ خواهیم داشت $\|x\| \leq \|y\|$. هم چنین

$$r(x) = \sup_{\lambda\in\sigma(x)} |\lambda| = \sup_{s\in S} |x(s)| = \|x\|, \tag{۱۵.۳}$$

لذا بنا (۱۵.۳)، $\inf\{r(x) : x \in X, \|x\| = ۱\} = ۱ > \circ$. از اینکه $C(S)$ در شرایط قضیه ۷.۲.۳، صدق می‌کند، لذا $C(S)$ دارای مجموعه‌های ناشبه چبیشف و ناچبیشفگون است. □

قضیه ۱۱.۲.۳. [۹۲] قضیه گاساوارا [۶] : هر C^*-جبر نامتناهی البعد، شامل یک زیر جبر جابجایی نامتناهی البعد است.

قضیه ۱۲.۲.۳. فرض کنید A یک C^*-جبر باشد. A نامتناهی‌البعد است اگر و تنها اگر A دارای حداقل یک مجموعه ناشبه چبیشف کراندار باشد.

برهان. اگر $\dim(A) = \infty$، بنا به قضیه ۱۱.۲.۳، A شامل یک زیر جبر جابجایی نامتناهی البعد مانند B است. بنا به قضیه گلفند $B \simeq C(\Omega(A))$. اینک با توجه به نتیجه ۱۰.۲.۳، B دارای یک مجموعه ناشبه چپیشف است. درنتیجه این مطلب برای A نیز صادق است.

---

[۵] Bolzano Weierstrass [۶] Gasawara

برعکس. فرض کنید که $\dim(A) < \infty$ و W یک مجموعه کراندار و بسته از A. بنا به قضیه بولزانو-وایرشتراش W فشرده است. بنابراین برای هر a، $P_W(a)$ غیرتهی و فشرده است. که این تناقضی را با فرض وجود مجموعه‌ای ناشبه چپیشف در A ایجاب می‌کند. لذا $\dim(A) = \infty$. □

قضیه ۱۳.۲.۳. فرض کنید A یک C^*-جبر باشد. A نامتناهی‌البعد است اگر و تنها اگر A دارای حداقل یک مجموعه ناچبیشفگون باشد.

برهان. اثبات شبیه قضیه ۱۲.۲.۳ است. □

نتیجه ۱۴.۲.۳. فرض کنید E یک A-مدول روی C^*-جبر A باشد. E نامتناهی‌البعد است اگر و تنها اگر E دارای حداقل یک مجموعه ناشبه چبیشف کراندار باشد.

برهان. بنا به لم ۷.۱.۳، E قابل نشاندن در $B(H, K)$ است که H, K فضای هیلبرتی هستند. بنا به قضیه ۱۲.۲.۳، اثبات بدیهی است. □

نتیجه ۱۵.۲.۳. فرض کنید E یک A-مدول روی C^*-جبر A باشد. E نامتناهی‌البعد است اگر و تنها اگر E دارای حداقل یک مجموعه ناچبیشفگون باشد.

برهان. اثبات شبیه نتیجه ۱۴.۲.۳ است. □

فصل ۴

تئوری تقریب در جبر عملگرهای هیلبرتی فازی

در این فصل نظریه تقریب را در جبر عملگرهای هیلبرتی با مقادیر فازی بررسی می‌کنیم. ابتدا مقدماتی از مباحث فازی را بیان می‌کنیم، سپس نتایج بدست آمده در نظریه تقریب را منعکس می‌نماییم.

۱.۴ مقدمات

فرض کنید X یک مجموعه مرجع دلخواه باشد، تابع مشخصه زیر مجموعه‌ی A از X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } x \in A \\ ۰ & \text{اگر } x \notin A \end{cases}$$

اگر برد تابع مشخصه را از مجموعه دو عضوی $\{۰, ۱\}$ به بازه $[۰, ۱]$ توسعه دهیم، در این صورت یک تابعی خواهیم داشت که به هر $x \in X$ عددی از بازه $[۰, ۱]$ را نسبت می‌دهد. این تابع را تابع عضویت مجموعه A می‌نامیم، و با $\mu_A(x)$ نشان می‌دهیم. بابد توجه داشت که مجموعه A دیگر یک مجموعه معمولی نیست بلکه مجموعه‌ای که درجه عضویت اعضاء آن می تواند بطور پیوسته از بازه $[۰, ۱]$ اختیار شود. بنابراین اگر X یک مجموعه غیرتهی باشد، یک زیر مجموعه فازی A از X با تابع عضویت اش که با $\mu_A(x)$ نشان داده می شود، مشخص می شود که $\mu_A(x)$ مقادیر بین $[۰, ۱]$ را به ازای تمام $x \in X$ می گیرد. بنابراین اگر $\mu_A(x) = ۱$ در این صورت x متعلق به A است. و اگر $\mu_A(x) = ۰$ آنگاه x متعلق به A نیست. و اگر $\mu_A(x) = ۰/۶$ مقدار عضویت در A برابر با ۰/۶ است.

فرض کنید $\mathbb{R}$ میدان اعداد حقیقی و F مجموعه‌ی شامل تمام زیر مجموعه‌های فازی و $\alpha \in (۰, ۱]$. برای هر $\eta \in F$ مجموعه $\{t \in \mathbb{R} : \eta(t) \geq \alpha\}$ را α -برش η می‌نامیم، و به صورت $[\eta]_\alpha = [\eta_\alpha^-, \eta_\alpha^+]$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۴. یک زیر مجموعه فازی مانند η از $\mathbb{R}$ یک عدد فازی نامیده می‌شود، در صورتی که دارای

شرایط زیر باشد:

(N_1) اگر یک $t_\circ \in \mathbb{R}$ موجود باشد به طوری که $\eta(t_\circ) = ۱$.

(N_2) برای هر $\alpha \in (\circ, ۱]$، $[\eta]_\alpha$ بازه بسته باشد.

(N_3) $\sup \eta = \{t \in \mathbb{R} : \eta(t) > \circ\}$ کراندار باشد.

مجموعه همه اعداد حقیقی فازی را با $F(\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم. هر عدد حقیقی r یک عدد حقیقی فازی به صورت زیر تعریف می‌کند:

$$\tilde{r}(t) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } t = r \\ \circ & \text{اگر } t \neq r \end{cases}$$

لم ۲.۱.۴. (لم ۲.۴ [۵۳]) فرض کنید η یک زیر مجموعه فازی از $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت $\eta \in F(\mathbb{R})$ اگر و فقط اگر η در شرایط زیر صدق کند:

(آ) η نرمال باشد، به عبارت دیگر $x_\circ \in \mathbb{R}$ موجود باشد که $\eta(x_\circ) = ۱$.

(ب) برای $x, y \in \mathbb{R}$ و هر $\alpha \in (\circ, ۱)$، $\eta(\alpha x + (۱-\alpha)y) \geq \min\{\eta(x), \eta(y)\}$. به عبارت دیگر η یک تابع فازی محدب باشد،

(ت) η نیمه پیوسته بالایی باشد، به عبارت دیگر α-برش های آن بسته باشد.

(ث) $\lim_{t\to-\infty} \eta(t) = \circ$، $\lim_{t\to+\infty} \eta(t) = \circ$.

تعریف ۳.۱.۴. عملیات حسابی عملگرهای $\oplus, \ominus, \times$ و $-$ روی $F(\mathbb{R}) \times F(\mathbb{R})$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

آ) $(\eta \oplus \gamma)(t) = \sup_{t=s+h} \min\{\eta(s), \gamma(h)\}$.

ب) $(\eta \times \gamma)(t) = \sup_{t=s\times h} \min\{\eta(s), \gamma(h)\}$.

ت) $(\eta \ominus \gamma)(t) = \sup_{t=s-h} \min\{\eta(s), \gamma(h)\}$.

ث) $(\dfrac{\eta}{\gamma})(t) = \sup_{t=\frac{s}{h}} \min\{\eta(s), \gamma(h)\}$.

تعریف ۴.۱.۴. فرض کنید $\eta \in F(\mathbb{R})$. اگر برای هر $t < \circ$، $\eta(t) = \circ$، در این صورت η یک عدد فازی مثبت نامیده می‌شود. مجموعه تمام اعداد فازی مثبت را با نماد $F^+(\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم. در واقع برای هر $\alpha \in (\circ, ۱]$ ، $\eta^-_\alpha \geq \circ$.

لم ۵.۱.۴. (لم ۲.۱ [۶۶]) فرض کنید $\eta, \gamma \in F(\mathbb{R})$ و $[\eta]_\alpha = [\eta^-_\alpha, \eta^+_\alpha]$، $[\gamma]_\alpha = [\gamma^-_\alpha, \gamma^+_\alpha]$. در این صورت

۱) $[\eta \oplus \gamma]_\alpha = [\eta^-_\alpha + \gamma^-_\alpha, \eta^+_\alpha + \gamma^+_\alpha]$.

۲) $[\eta \ominus \gamma]_\alpha = [\eta^-_\alpha - \gamma^+_\alpha, \eta^+_\alpha - \gamma^-_\alpha]$.

۳) $[\eta \otimes \gamma]_\alpha = [\eta^-_\alpha \gamma^-_\alpha, \eta^+_\alpha \gamma^+_\alpha]$.

۴) برای $\eta^-_\alpha > \circ$، $[\frac{\tilde{۱}}{\eta}]_\alpha = [\frac{۱}{\eta^+_\alpha}, \frac{۱}{\eta^-_\alpha}]$.

لم ۶.۱.۴. (لم ۲.۲ [۶۶]) فرض کنید $\alpha \in (\circ, ۱]$ و $[a^\alpha, b^\alpha]$ یک خانواده از بازه‌های ناتهی $\mathbb{R}$ باشند به قسمی که

آ) برای $\circ < \alpha_۱ \leq \alpha_۲$، $[a^{\alpha_۲}, b^{\alpha_۲}] \subseteq [a^{\alpha_۱}, b^{\alpha_۱}]$؛

(ب) برای هر دنباله $\{\alpha_k\}$ متعلق به $(\circ, ۱]$ همگرا به α، $[\lim_{k\to\infty} a^{\alpha_k}, \lim_{k\to\infty} b^{\alpha_k}] = [a^\alpha, b^\alpha]$.

(ث) برای هر $\alpha \in (\circ, ۱]$، $-\infty < a^\alpha \leq b^\alpha < +\infty$.

آنگاه خانواده‌ی $[a^\alpha, b^\alpha]$ مشخصه کننده‌ی یک α-برش برای η است. و برعکس. اگر $[a^\alpha, b^\alpha]$، یک α-برش برای یک عدد فازی باشد. در این صورت در شرایط (آ) تا (ث) صدق می‌نماید.

تعریف ۷.۱.۴. دنباله‌ی $\{\eta_n\}$در $F(\mathbb{R})$ همگرا به η نامیده می‌شود، در صورتی که برای هر $\alpha \in (\circ, ۱]$، $\lim_{n\to\infty} |\eta_n - \eta|\alpha^+ = \circ$.

تعریف ۸.۱.۴. (لم ۲.۲ [۶۶]) فرض کنید $\eta, \delta \in F(\mathbb{R})$ و $[\eta]_\alpha = [\eta^-_\alpha, \eta^+_\alpha], [\delta]_\alpha = [\delta^-_\alpha, \delta^+_\alpha]$. یک رابطه ترتیبی به صورت زیر بر روی $F(\mathbb{R})$ تعریف می‌شود.

$\eta \leq \delta$ است اگر و تنها اگر به ازای هر $\alpha \in (\circ, ۱]$، $\eta^-_\alpha \leq \delta^-_\alpha$، $\eta^+_\alpha \leq \delta^+_\alpha$.

تعریف ۹.۱.۴. زیر مجموعه A از $F(\mathbb{R})$ را از بالا کراندار می‌گویند، در صورتی که η موجود باشد، به قسمی که برای هر $\nu \in A$، $\nu \leq \eta$. به طور مشابه کران پایین مجموعه A نیز تعریف می‌شود.

در سال ۱۹۸۴، کاتسراس [1] [۶۷] و فلبین [2] [۳۷] ایده نرم فازی را با اختصاص یک عدد حقیقی فازی برای هر عنصر از فضای خطی معرفی کردند به طوری که متریک مربوط به این نرم فازی از نوع فازی متریک کالوا [3] [۶۶] است. در سال ۱۹۹۴، چنگ [4] و موردسن [5] [۲۱] یک تعریف دیگر از نرم فازی را ارائه دادند. طبق این تعریف متریک فازی از آن متناسب با نوع کراموسیل [6] و میچلک [7] [۷۲] است. به نظر می رسد مقالات دیگر مانند [۱۳، ۱۰۰، ۷۳] به مطالعه خواص مختلف توپولوژیکی این نوع از فضاهای نرمدار خطی فازی می‌پردازد.

تعریف ۱۰.۱.۴. فرض کنید X یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$، $L; R : [\circ, ۱]\times[\circ, ۱] \to [\circ, ۱]$ نگاشت‌هایی متقارن و نا-نزولی در هر دو مولفه و $L(\circ; \circ) = \circ$ ، $R(۱; ۱) = ۱$. در این صورت نگاشت $||.|| : X \to F^+(\mathbb{R})$ یک نرم فازی روی X نامیده می‌شود، در صورتی که به ازای هر $x, y \in X$ و $r \in \mathbb{R}$، در شرایط زیر صدق کند:

$(F_۱)$ اگر $x \neq \circ$ آنگاه $\inf_{\circ<\alpha\leq ۱} ||x||^-_\alpha > \circ$،

$(F_۲)$ $||x|| = \tilde{\circ}$ اگر و تنها اگر $x = \circ$،

$(F_۳)$ $||rx|| = \tilde{r}||x||$،

$(F_۴)$ برای هر $s, t \in \mathbb{R}$، به قسمی که $s \leq ||x||^-_۱, t \leq ||x||^-_۱$ و $s + t \leq ||x + y||^-_۱$،

$$||x + y||(s + t) \geq L(||x||(s), ||x||(t)).$$

[1] Katsaras [2] Felbin [3] Kaleva [4] Cheng [5] Mordeson [6] Kramosil [7] Michelek

برای هر $s,t \in \mathbb{R}$، به قسمی که $t \geq \|x\|_1^-, s \geq \|x\|_1^-$ و $s+t \geq \|x+y\|_1^-$،

$$||x+y||(s+t) \leq R(\|x\|(s), \|x\|(t)).$$

چهارتایی $(X; ||.||; L; \mathbb{R})$ یک فضای خطی فازی نرمدار نامیده می‌شود.

در حالتی که برای هر $s,t \in [0,1]$، $L(s,t) = \min(s,t)$، $R(s,t) = \max(s,t)$ در نظر گرفته می‌شود، قضیه زیر برقرار است.

قضیه ۱۱.۱.۴. (لم ۲.۴ [۱۱۰]) شرط F_4 در فضای نرمدار فازی $(X; ||.||)$ معادل است با :

$$||x+y|| \leq \|x\| \oplus \|y\|.$$

تعریف ۱۲.۱.۴. فرض کنید $(X, \|\|)$ یک فضای فازی نرمدار باشد. دنباله $x_n \in X$ همگرا به $x \in X$ اگر برای هر $\alpha \in (0,1]$، $\lim_{n\to\infty} ||x_n - x||_\alpha^+ = 0$.

تعریف ۱۳.۱.۴. نگاشت $f : X \longrightarrow F(\mathbb{R})$ یک نگاشت محدب فازی نامیده می‌شود، اگر برای هر $x,y \in X$ و $\lambda \in (0,1)$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \tilde{\lambda} f(x) + (1 \tilde{-} \lambda) f(y).$$

تعریف ۱۴.۱.۴. فرض کنید X یک فضای نرمدار فازی باشد. نگاشت $T : X \to X$ عملگر کراندار فازی نامیده می‌شود، اگر برای هر $x \in X$، $k > 0$ موجود باشد به قسمی که $\|Tx\| \leq \tilde{k}\|x\|$.

تعریف ۱۵.۱.۴. (تعریف ۵.۳ [۵۳]) فرض کنید نگاشت $T : X \to X$ یک عملگر کراندار فازی باشد. نرم عملگری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[||T||]_\alpha = [\sup_{\beta<\alpha} \sup_{\|x\|_\beta^- \leq 1} \|Tx\|_\beta^-, \inf\{\eta_\alpha^+ : \quad \|Tx\| \leq \eta\|x\|\}],$$

لم ۱۶.۱.۴. (لم ۵.۵ [۵۳]) فرض کنید نگاشت $T : X \to X$ عملگر کراندار فازی باشد. در این صورت برای $x \in X$، $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$.

نتیجه ۱۷.۱.۴. فضای تمام توابع خطی کراندار روی X یک جبر باناخ است.

برهان. اثبات بنا به لم قبل بدیهی است. □

بیسواس [۸][۱۵]، ابید [۹] و هامولی [۱۰][۳۴] اولین کسانی بودند که تعریف معنی دار از فضای ضرب داخلی فازی ارائه دادند. بعد از کوهلی [۱۱] و کامار [۱۲][۷۰] تعاریف متفاوتی از فضای هیلبرت فازی توسط افرادی مختلف معرفی شده است(رج.ک [۳۴، ۴۸، ۸۴، ۱۰۶، ۱۰۷]) . در اینجا ما به تعریف ارائه شده توسط حسنخانی و ساحلی می‌پردازیم.

[۸] Biswas [۹] Abyed [۱۰] Hamouly [۱۱] Kohli [۱۲] Kumar

تعریف ۱۸.۱.۴. (تعریف ۳.۱ [۵۳]) فرض کنید X یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد. یک ضرب داخلی فازی روی X، نگاشتی از $X \times X$ به $F(\mathbb{R})$ است که به ازای هر $x, y, z \in X$ و $r \in \mathbb{R}$ دارای شرایط زیر باشد:

آ) $\langle x, x \rangle = \tilde{0}$ اگر و تنها اگر $x = 0$،

ب) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$،

ت) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle \oplus \langle y, z \rangle$،

ث) $\langle rx, y \rangle = \tilde{r} \langle x, y \rangle$،

ج) برای $x \neq 0$، $\inf_{0<\alpha\leq 1} \langle x, x \rangle_\alpha^- > 0$.

به کمک ضرب داخلی فازی روی X، یک نرم فازی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}. \tag{۱.۴}$$

لم ۱۹.۱.۴. [۵۳] در فضای ضرب داخلی فازی X با نرم $\|.\|$، نامساوی کوشی-شوارتز برقرار است. به عبارت دیگر

$$|\langle x, y \rangle \leq \|x\| \times \|y\|, \quad \forall\, x, y \in X.$$

۲.۴ نتایج اصلی

فرض کنید $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ یک فضای هیلبرت فازی با ضرب داخلی $\langle\ ,\ \rangle$ باشد. مجموعه تمام عملگرهای خطی کراندار فازی روی H را با نماد $FB(H)$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای از H و $f, g \in FB(H)$. مجموعه فازی η^{x_n} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[\eta^{x_n}]_\alpha := [\sup_{\beta<\alpha} \lim_{n\to\infty} \langle f(x_n), g(x_n) \rangle_\beta^-, \lim_{n\to\infty} \frac{\langle f(x_n), g(x_n) \rangle_\alpha^+}{\|x_n\|_\alpha^{-2}}]_\alpha. \tag{۲.۴}$$

لم ۱.۲.۴ فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای در H به قسمی که $\|x_n\|_\alpha^- \leq 1$ و برای هر $\alpha \in (0, 1]$، حدود تعریف شده در (۲.۴)، موجود باشد. در این صورت η^{x_n} یک عدد حقیقی فازی است.

برهان. چون $\|x_n\|_\alpha^- \leq 1$پس $\frac{1}{\|x_n\|_\alpha^-} \geq 1$. از اینکه $\langle\rangle$ یک عدد حقیقی فازی است نتیجه می شود که برای هر $\alpha \in (0, 1]$ و $\beta \in (0, \alpha)$،

$$\langle f(x_n), g(x_n) \rangle_\beta^- \leq \langle f(x_n), g(x_n) \rangle_\beta^+ \leq \langle f(x_n), g(x_n) \rangle_\alpha^+ \leq \frac{\langle f(x_n), g(x_n) \rangle_\alpha^+}{\|x_n\|_\alpha^{-2}}.$$

اینک با گرفتن حد و سوپرمم روی β داریم

$$\sup_{\beta<\alpha} \lim_{n\to\infty} \langle f(x_n), g(x_n) \rangle_\beta^- \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\langle f(x_n), g(x_n) \rangle_\alpha^+}{\|x_n\|_\alpha^{-2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\eta_\alpha^{x_n-} \leq \eta_\alpha^{x_n+}.$$

بنابراین برای هر $\alpha \in (۰,۱]$، $[\eta^{x_n}]_\alpha = [\eta_\alpha^{x_n-}, \eta_\alpha^{x_n+}]$ یک بازه ناتهی است.

(آ) فرض کنید $۰ < \alpha_۱ \leq \alpha_۲$. بنا به قسمت (آ) لم ۶.۱.۴ برای عدد فازی $\langle\rangle$ داریم

$$\sup_{\beta<\alpha_۱} \lim_{n\to\infty} \langle f(x_n), g(x_n)\rangle_\beta^- \leq \sup_{\beta<\alpha_۲} \lim_{n\to\infty} \langle f(x_n), g(x_n)\rangle_\beta^-.$$

چون $\|x_n\|_{\alpha_۱}^{-۲} \leq \|x_n\|_{\alpha_۲}^{-۲}$ و $\lim_{n\to\infty}\langle f(x_n), g(x_n)\rangle_{\alpha_۱}^+ \leq \lim_{n\to\infty}\langle f(x_n), g(x_n)\rangle_{\alpha_۲}^+$. لذا

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\langle f(x_n), g(x_n)\rangle_{\alpha_۲}^+}{\|x_n\|_{\alpha_۲}^{-۲}} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\langle f(x_n), g(x_n)\rangle_{\alpha_۱}^+}{\|x_n\|_{\alpha_۱}^{-۲}}$$

$$\Downarrow$$

$$[\eta_{\alpha_۲}^{x_n-}, \eta_{\alpha_۲}^{x_n+}] \subseteq [\eta_{\alpha_۱}^{x_n-}, \eta_{\alpha_۱}^{x_n+}].$$

(ب) فرض کنید $\{\alpha_k\}$ یک دنباله افزایشی در $(۰,۱]$ و همگرا به α باشد. بنابراین

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \eta_{\alpha_k}^{x_n+} = \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty} \frac{\langle f(x_n), g(x_n)\rangle_\alpha^+}{\|x_n\|_{\alpha_k}^{-۲}} &= \lim_{k\to\infty} \frac{\lim_{n\to\infty}\langle f(x_n), g(x_n)\rangle_{\alpha_k}^+}{\|\lim_{n\to\infty} x_n\|_{\alpha_k}^{-۲}} \\ &= \frac{\langle \lim_{n\to\infty} f(x_n), \lim_{n\to\infty} g(x_n)\rangle_\alpha^+}{\|\lim_{n\to\infty} x_n\|_\alpha^{-۲}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\langle f(x_n), g(x_n)\rangle_\alpha^+}{\|x_n\|_\alpha^{-۲}}.\end{aligned}$$

در نتیجه $\lim_{k\to\infty} \eta_{\alpha_k}^{x_n+} = \eta_\alpha^{x_n+}$. برای اثبات کران پایین، از اینکه $\alpha_k \leq \alpha$. لذا

$$\sup_k \sup_{\beta<\alpha_k} \lim_{n\to\infty} \langle f(x_n), g(x_n)\rangle_\beta^- \leq \sup_{\beta<\alpha} \lim_{n\to\infty} \langle f(x_n), g(x_n)\rangle_\beta^-, \quad (*).$$

فرض کنید $\epsilon > ۰$. در این صورت یک $\beta_۰ < \alpha$ وجود دارد به قسمی که

$$\sup_{\beta<\alpha} \lim_{n\to\infty} \langle f(x_n), g(x_n)\rangle_\beta^- - \epsilon \leq \lim_{n\to\infty} \langle f(x_n), g(x_n)\rangle_{\beta_۰}^-.$$

چون $\{\alpha_k\}$ یک دنباله افزایشی در $(۰,۱]$ و همگرا به α است. لذا یک $\beta_۰ \leq \alpha_{k_۰} \leq \alpha$ وجود دارد به قسمی که

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \langle f(x_n), g(x_n)\rangle_{\beta_۰}^- &\leq \sup_{\beta<\alpha_{k_۰}} \lim_{n\to\infty} \langle f(x_n), g(x_n)\rangle_\beta^- \\ &\leq \sup_k \sup_{\beta<\alpha_k} \lim_{n\to\infty} \langle f(x_n), g(x_n)\rangle_\beta^-,\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\sup_{\beta<\alpha} \lim_{n\to\infty} \langle f(x_n), g(x_n)\rangle_\beta^- - \epsilon \leq \sup_k \sup_{\beta<\alpha_k} \lim_{n\to\infty} \langle f(x_n), g(x_n)\rangle_\beta^-.$$

اینک اگر $\epsilon \to ۰$، خواهیم داشت

$$\sup_{\beta<\alpha} \lim_{n\to\infty} \langle f(x_n), g(x_n)\rangle_\beta^- \leq \sup_k \sup_{\beta<\alpha_k} \lim_{n\to\infty} \langle f(x_n), g(x_n)\rangle_\beta^-, \quad (**).$$

از رابطه $(*)$ و $(**)$ داریم

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \sup_{\beta<\alpha_k} \lim_{n\to\infty} \langle f(x_n), g(x_n)\rangle_\beta^- &= \sup_k \sup_{\beta<\alpha_k} \lim_{n\to\infty} \langle f(x_n), g(x_n)\rangle_\beta^- \\ &= \sup_{\beta<\alpha} \lim_{n\to\infty} \langle f(x_n), g(x_n)\rangle_\beta^-. \end{aligned}$$

به عبارت دیگر $\lim_{k\to\infty} \eta_{\alpha_k}^{x_n -} = \eta_\alpha^{x_n -}$. بنابراین

$$[\lim_{k\to\infty} \eta_{\alpha_k}^{x_n -}, \lim_{k\to\infty} \eta_{\alpha_k}^{x_n +}] = [\eta_\alpha^{x_n -}, \eta_\alpha^{x_n +}].$$

(ت) بنا به فرض برای هر $\alpha \in (۰, ۱]$ حدود بالا و پایین در بازه α- برش η^{x_n} موجود است. لذا

$$-\infty < \eta_\alpha^{x_n -} \leq \eta_\alpha^{x_n +} < +\infty.$$

در نتیجه بنا به همان لم ۶.۱.۴، η^{x_n} عدد فازی است. $\square$

تعریف ۲.۲.۴. فرض کنید $T \in FB(H)$. در این صورت مجموعه FZ_T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$FZ_T := \{\{x_n\} : x_n \in H, \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \widehat{۱}, \quad \sup_{\beta<\alpha} \lim_{n\to\infty} \|Tx_n\|_\beta^- = ||T||_\alpha^-\}.$$

تعریف ۳.۲.۴. برد عددی فازی عملگر f نسبت به عملگر g را که با نماد $FW(fg)$ نمایش می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$FW(fg) := \{\eta^{x_n} : \{x_n\} \in FZ_f\}. \tag{۳.۴}$$

مجموعه‌ی $FW(fg)$ غیر تهی است. زیرا بر اساس نرم عملگرها دنباله‌ی $\{x_n\}$ در H وجود دارد به قسمی که $\{x_n\} \in FZ_f$ است. از طرفی چون دنباله‌های $\beta_\alpha = \lim_{n\to\infty}\langle f(x_n), g(x_n)\rangle_\alpha^-$ و $\kappa_\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{\langle f(x_n), g(x_n)\rangle_\alpha^+}{\|x_n\|_\alpha^{-۲}}$ کراندار هستند، لذا زیر دنباله‌ی n_{k_α} موجود است که به $\beta_\alpha, \kappa_\alpha$ همگرا هستند. قرار می‌دهیم

$$[\eta^{x_{n_{k_\alpha}}}]_\alpha := [\sup_{\beta<\alpha} \lim_{n_{k_\alpha}\to\infty} \langle f(x_{n_{k_\alpha}}), g(x_{n_{k_\alpha}})\rangle_\beta^-, \lim_{n_{k_\alpha}\to\infty} \frac{\langle f(x_{n_{k_\alpha}}), g(x_{n_{k_\alpha}})\rangle_\alpha^+}{\|x_{n_{k_\alpha}}\|_\alpha^{-۲}}].$$

بنا به لم ۱.۲.۴، $\eta^{x_{n_{k_\alpha}}} \in FW(fg)$. لذا $FW(fg)$ غیر تهی است.

نتیجه ۴.۲.۴. فرض کنید $f, g \in FB(H)$. در این صورت $FW(fg)$ از بالا کراندار است.

برهان. فرض کنید$\eta^{x_n} \in FW(fg)$، برای هر $\alpha \in (\circ, 1]$ و $\beta < \alpha$، از رابطه (۲.۴) و لم کوشی-شوارتز نتیجه می‌شود که

$$\langle f(x_n), g(x_n)\rangle_\beta^- \leq |\langle f(x_n), g(x_n)\rangle|_\beta^- \leq ||\langle f(x_n)||_\beta^- ||g(x_n)||_\beta^-.$$

اینک با گرفتن حد و سوپرمم روی $\beta < \alpha$، $\eta_\alpha^{x_n -} \leq (\|f\| \otimes \|g\|)_\alpha^-$. به طور مشابه می‌توان نشان داد که $\eta_\alpha^{x_n +} \leq (\|f\| \otimes \|g\|)_\alpha^+$. لذا برای هر $\eta^{x_n} \in W(fg)$، $\eta^{x_n} \leq \|f\| \otimes \|g\|$. پس $\|f\| \otimes \|g\|$ یک کران بالایی برای $FW(fg)$ است. لذا $FW(fg)$ از بالا کراندار است. □

ورامانی [۱۳] [۱۰۵] مفهوم t-بهترین تقریب در متریک فازی معرفی کرد. در سالهای اخیر واعظ پور و کریمی [۱۰۴] این مفهوم را در فضاهای نرمدار فازی بکار بردند.

فرض کنید $\leq$ رابطه ترتیب جزیی (۸.۱.۴) روی $F(\mathbb{R})$ باشد، به کمک این رابطه نظریه بهترین تقریب را مطرح می‌سازیم.

تعریف ۵.۲.۴. فرض کنید A یک زیر مجموعه ناتهی از $F(\mathbb{R})$. اگر A از پایین کراندار باشد، اینفیمم آن $\inf(A)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$[\inf(A)]_\alpha = [\sup_{\beta<\alpha} \inf_{\eta\in A} \eta_\beta^-, \inf_{\eta\in A} \eta_\alpha^+].$$

همچنین اگر A از بالا کراندار باشد، سوپرمم آن $\sup(A)$ این طور تعریف می‌شود:

$$[\sup(A)]_\alpha = [\sup_{\eta\in A} \eta_\alpha^-, \inf_{\beta<\alpha} \sup_{\eta\in A} \eta_\beta^+].$$

تعریف ۶.۲.۴. فرض کنید $\{u_n\}$ یک دنباله از اعداد فازی، در این صورت $\mu = \limsup_{n\to\infty} u_n$ دارای نمایش به شکل زیر است

$$[\mu]_\alpha = [\limsup_{n\to\infty} u_{n_\beta}^-, \inf_{\beta<\alpha} \limsup_{n\to\infty} u_{n_\beta}^+],$$

فرض کنید $f, g \in FB(H)$ و $t_m \in \mathbb{R}$ به قسمی که $t_m \to \circ^+$. مشتق فازی زیر را در نظر بگیرید

$$\tau_2(f, g) := \limsup_{t_m\to\circ^+} \frac{\|f + t_m g\|^2 - \|f\|^2}{2\tilde{t_m}}.$$

قضیه ۷.۲.۴. فرض کنید U یک زیر مجموعه محدب از $FB(H)$، $f \in FB(H) \setminus U$، $g_\circ \in U$. اگر برای $\alpha \in (\circ, 1]$، $\|f - g_\circ\|_\alpha^- = \inf_{h\in U} \|f - h\|_\alpha^-$. در این صورت برای هر $h \in U$، $\tau_2(f - h, h - g_\circ)_\alpha^- \leq \circ$.

برهان. ۲ $\to$ ۱. فرض کنید $k, l \in FB(H)$. بنا به لم ۵.۱.۴، داریم

$$\|\frac{b+l}{2}\|^2 \leq [\|\frac{b}{2}\| \oplus \|\frac{l}{2}\|]^2 \leq \frac{\|b\|^2 \oplus \|l\|^2}{\tilde{2}}.$$

---

۱۳ Veeramani

به کمک استقرا خواهیم داشت

$$\|\frac{b_1+\dots+b_{2^k}}{2^k}\|^2 \le \frac{\|b_1\|^2\oplus\dots\oplus\|b_{2^k}\|^2}{\tilde{2^k}}.$$

اینک فرض کنید $b_1=\dots=b_n=b$ و $b_{2^k}=\dots=b_{2^k-n}=l$. در این صورت

$$\frac{\|nb+(2^k-n)l}{2^k}\|^2 \le \frac{\tilde{n}\|b\|^2}{\tilde{2^k}} \oplus \frac{(2^k \tilde{-} n)\|l\|^2}{\tilde{2^k}}.$$

از اینکه $A=\{\frac{n}{2^k}: k\in K\}$ یک مجموعه چگال $[0,1]$ است. لذا $\lambda\in(0,1]$ موجود است به قسمی که $\frac{\tilde{n}}{\tilde{2^k}}\to\tilde{\lambda}$. بنابراین

$$\|\lambda b+(1-\lambda)l\|^2 \le \tilde{\lambda}\|b\|^2\oplus(1\tilde{-}\lambda)\|l\|^2. \tag{۴.۴}$$

لذا $\|.\|^2$ یک تابع فازی محدب است. نگاشت ϕ با ضابطه $\phi(t)=\frac{\|tg\|^2}{\tilde{t}}$ یک نگاشت نا-نزولی است. زیرا با فرض $l=0$. برای هر $s,t\in\mathbb{R}$ که $0<s\le t$. از رابطه (۴.۴) داریم

$$(\|sb\|^2 \le \frac{\tilde{s}}{t}\|tb\|^2\oplus\frac{(t\tilde{-}s)}{t}\|0\|^2.$$

از $\tilde{0}=\|0\|$. لذا $\phi(s)\le\phi(t)$. با کاربردن این روش در مورد نگاشت $\varphi(t)=\frac{\|f+tg\|^2-\|f\|^2}{\tilde{t}}$ می‌توان نشان داد φ نیز یک نگاشت نا-نزولی است.

بنا به فرض $\|f-g_0\|_\alpha^-\ge\|f-h\|_\alpha^-$. چون $\|f-h\|_\alpha^+\ge\|f-h\|_\alpha^-$، لذا برای هر $t=1$، داریم

$$\|f-h+t(h-g_0)\|_\alpha^{-2}-\|f-h\|_\alpha^{+2}\le 0.$$

بنابراین با تقسیم t_m و گرفتن $\limsup$ خواهیم داشت $\tau_2(f-h,h-g_0)_\alpha^-\le 0$. □

قضیه ۸.۲.۴. فرض کنید U یک زیر مجموعه محدب از $FB(H)$، $f\in FB(H)\setminus U$ و $g_0\in U$ به قسمی که $Z_{f-g_0}=\{\{x_n\},\{-x_n\}\}$. اگر برای هر $h\in U$،

$$\sup FW((f-g_0)(g_0-h))_\alpha^-\ge 0,\ (\alpha\in(0,1]). \tag{۵.۴}$$

در این صورت $\|f-g_0\|_\alpha^-=\inf_{h\in U}\|f-h\|_\alpha^-$.

برهان. فرض کنید برای هر $h\in U$ نامساوی (۵.۴) برقرار باشد. در این صورت برای $\alpha\in(0,1]$، داریم

$$\sup_{\beta<\alpha}\lim_{n\to\infty}\langle(f-g_0)(x_n),(g_0-h)(x_n)\rangle_\beta^-\ge 0. \tag{۶.۴}$$

رابطه (۶.۴) ایجاب می کند برای هر $\beta\in(0,1]$، $\lim_{n\to\infty}\langle(f-g_0)(x_n),(g_0-h)(x_n)\rangle_\beta^-\ge 0$. زیرا اگر β_0 موجود باشد به قسمی که $\lim_{n\to\infty}\langle(f-g_0)(x_n),(g_0-h)(x_n)\rangle_{\beta_0}^-<0$. در این صورت برای هر $\lambda\in(0,\beta_0]$ داریم

$$\lim_{n\to\infty}\langle(f-g_0)(x_n),(g_0-h)(x_n)\rangle_\lambda^-\le\lim_{n\to\infty}\langle(f-g_0)(x_n),(g_0-h)(x_n)\rangle_{\beta_0}^-<0.$$

لذا

$$\sup_{\lambda<\beta_\circ} \lim_{n\to\infty} \langle (f-g_\circ)(x_n),(g_\circ-h)(x_n)\rangle_\lambda^- < \circ.$$

اما این متناقض با رابطه (۶.۴) است. لذا $\lim_{n\to\infty}\langle (f-g_\circ)(x_n),(g_\circ-h)(x_n)\rangle_\beta^- \geq \circ$. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\|f-h\|_\alpha^{-^{۲}} &\geq \sup_{\beta<\alpha} \lim_{n_k\to\infty} \|f(x_{n_k})-h(x_{n_k})\|_\beta^{-^{۲}} \\
&= \sup_{\beta<\alpha} \lim_{n_k\to\infty} \|f(x_{n_k})-g_\circ(x_{n_k})+g_\circ(x_{n_k})-h(x_{n_k})\|_\beta^{-^{۲}} \\
&= \sup_{\beta<\alpha}[\lim_{n_k\to\infty} \|f(x_{n_k})-g_\circ(x_{n_k})\|_\beta^{-^{۲}} + ||g_\circ(x_{n_k})-h(x_{n_k})\|_\beta^{-^{۲}} \\
&+ ۲\langle (f-g_\circ)(x_{n_k}), g_\circ(x_{n_k})-h(x_{n_k})\rangle_\beta^-] \\
&\geq \sup_{\beta<\alpha} \lim_{n_k\to\infty} \|f(x_{n_k})-g_\circ(x_{n_k})\|_\beta^{-^{۲}} = \|f-g_\circ\|_\alpha^{-^{۲}}.
\end{aligned}$$

از نامساوی فوق نتیجه می‌شود که برای $h\in U$، $\|f-h\|_\alpha^- \geq \|f-g_\circ\|_\alpha^-$. □

فصل ۵

بهترین تقریب در فضای C^*-مدول مخروطی

در این فصل تئوری تقریب را در فضای C^* -مدول ضرب داخلی با در نظر گرفتن نرم مخروطی که توسط ضرب داخلی این فضا تعریف می‌شود، گسترش دادیم و برخی نتایج بدست آمده در فضای ضرب داخلی را در این فضاها تعمیم خواهیم داد.

۱.۵ فضای نرمدار مخروطی

در ابتدای این بخش برخی مفاهیم پایه را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۵. فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیکی باشد، یک زیر مجموعه مانند P یک مخروط نامیده می‌شود، در صورتی که:

(۱) P یک مجموعه بسته و $P \neq \{0\}$،

(۲) برای هر $\alpha \in \mathbb{R}^+$، $\alpha P \subseteq P,\ P + P \subseteq P$،

(۳) $P \cap -P = \{0\}$.

فرض کنید $P \subseteq X$ یک مخروط باشد. یک رابطه ترتیب جزئی روی X نسبت به مخروط P به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P.$$

زوج (X, P) را فضای مخروطی می‌نامند.

تعریف ۲.۱.۵. [۲] فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان F و (A, P) یک فضای مخروطی باشد. نگاشت $||.||_A : X \to A$ یک A-نرم مخروطی روی X نامیده می‌شود، در صورتی که به ازای $x, y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{F}$ خواص زیر را دارا باشد.

(۱) $||x||_A \geq 0_A$ و $||x||_A = 0_A \Leftrightarrow x = 0_X$.

(۲) $||\alpha x||_A = |\alpha| ||x||_A$، (۳) $||x+y||_A \leq ||x||_A + ||y||_A$.

در این صورت $(X, ||.||_A)$ را فضای A-نرمدار مخروطی می‌گویند.

تعریف ۳.۱.۵. فرض کنید $(X, ||.||_A)$ یک فضای A-نرمدار مخروطی، $\{x_n\}$ دنباله‌ای از X و $x \in X$.

(آ) اگر برای هر $c > 0$ متعلق به A، $N_0 \in \mathbb{N}$ موجود باشد، به قسمی که برای $n \geq N_0$، $||x_n - x||_A \leq c$. در این صورت دنباله $\{x_n\}$ همگرا به x است و آن را با $\lim x_n = x$ نمایش می‌دهیم.

(ب) دنباله $\{x_n\}$ کوشی نامیده می‌شود، اگر برای هر $c > 0$، $N_0 \in \mathbb{N}$ موجود باشد، به قسمی که برای $n, m \geq N_0$، $||x_n - x_m||_A \leq c$.

هم چنین زیر مجموعه C از X را یک مجموعه تام گوییم، در صورتی که هر دنباله کوشی در آن همگرا به عنصری از C باشد.

۲.۵ بهترین تقریب در فضای C^*-مدول ضرب داخلی

فرض کنید $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ یک A- مدول ضرب داخلی (ر. ج. ک تعریف ۲۹.۱.۱) روی C^*- جبر A باشد. به ازای هر $x \in X$، قدر مطلق $|x|$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$|x| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

تعریف ۱.۲.۵. فرض کنید A یک گروه باشد، در این صورت مرکز گروه [1] A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{Z}(A) = \{x \in A : xy = yx, \forall\, y \in A\}.$$

قضیه ۲.۲.۵. (قضیه ۲ [۷۱]) فرض کنید X یک C^*- هیلبرت مدول روی C^*- جبر A باشد، در این صورت برای هر $x, y \in X$ که $|x|, |y| \in \mathcal{Z}(A)$. نامساوی مثلثی زیر برقرار است:

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

نتیجه ۳.۲.۵. فرض کنید X یک C^*- هیلبرت مدول روی C^*- جبرجابه جایی A باشد. در این صورت نگاشت

$$|.| : X \to A, \quad x \to |x|, (x \in X).$$

یک نرم مخروطی روی X نسبت به فضای مخروطی (A, A^+) تعریف می‌کند.

برهان. بدیهی است که نگاشت $|.|$ در شرایط یک و دو نرم مخروطی صدق می‌کند. بنا به فرض A یک جبر جابه جایی است، لذا $\mathcal{Z}(A) = A$. بنابراین نگاشت قدر مطلق بنا به قضیه ۲.۲.۵، در نامساوی مثلثی صدق می‌نماید. در نتیجه $|.|$ یک نرم مخروطی روی فضای X تعریف می‌کند. □

[1] Center group

مثال ۴.۲.۵. فرض کنید S یک فضای هاسدروف فشرده، $A = C(S)$، $P = \{f \in A : f(s) \geq ۰\}$ و $X = A$ با ضرب داخلی $A \to X \times X : \langle . \rangle$ با ضابطه $\langle f, g\rangle = f\overline{g}$ را در نظر بگیرید. در این صورت نگاشت $|.|$ یک نرم مخروطی روی X نسبت به مخروط P تعریف می‌کند.

قضیه ۵.۲.۵. قانون متوازی الاضلاع : فرض کنید X یک A- مدول ضرب داخلی روی C^*-جبر A و $x, y \in X$. در این صورت

$$|x+y|^۲ + |x-y|^۲ = ۲|x|^۲ + ۲|y|^۲.$$

برهان. بنا به تعریف قدر مطلق و خواص ضرب داخلی، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |x+y|^۲ &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle x,y\rangle^* + \langle y,y\rangle \\ &= |x|^۲ + ۲Re\langle x,y\rangle + |y|^۲,\ (*). \end{aligned}$$

به طور مشابه می توان نشان داد

$$|x-y|^۲ = |x|^۲ - ۲Re\langle x,y\rangle + |y|^۲,\ (**).$$

از جمع دو تساوی $(*)$ و $(**)$ نتیجه حاصل می‌شود. □

قضیه ۶.۲.۵. (نتیجه ۲.۶ [۶]) فرض کنید X یک A- مدول ضرب داخلی روی C^*-جبر جابه جایی A و $x, y \in X$. اگر $|x+y| = |x| + |y|$ آنگاه $x|y| = y|x|$.

در ادامه مباحث فضای X به عنوان یک C^*- هیلبرت مدول روی C^*-جبر جابه جایی A در نظر گرفته شده است.

تعریف ۷.۲.۵. فرض کنید W یک زیرمجموعه از X باشد. نقطه $w_۰$ را یک A-بهترین تقریب x از مجموعه W نامیم، در صورتی که $|x - w_۰| = d(x, W)$ که $d(x,W) = \inf_{w\in W} |x-w|$. مجموعه‌ی متشکل از تمامی این نقاط را با نماد $\mathbf{P}_W^A(x)$ نشان می‌دهیم. همچنین مجموعه W را $A-$تقریب پذیر می‌نامیم، در صورتی که برای هر $x \in X$، $\mathbf{P}_W^A(x) \neq \varnothing$.

قضیه ۸.۲.۵. فرض کنید K یک زیر مجموعه محدب تام از فضای X باشد، در این صورت K یک مجموعه $A-$تقریب پذیر است.

برهان. فرض کنید $x \in X$ و $\{y_m\}$ دنباله‌ای از K به قسمی که $|x - y_m| \to d(x, K)$. با توجه به قانون متوازی الاضلاع به ازای هر $n, m \in \mathbb{N}$ داریم

$$\begin{aligned} |y_n - y_m|^۲ &= |(x-y_n) - (x-y_m)|^۲ \\ &= ۲(|x-y_m|^۲ + |x-y_n|^۲) - |۲x - (y_m+y_n)|^۲ \\ &= ۲(|x-y_m|^۲ + |x-y_n|^۲) - ۴|x - \frac{۱}{۲}(y_m+y_n)|^۲. \end{aligned}$$

چون K یک مجموعه محدب است، لذا $(y_n + y_m)/۲ \in K$ و در نتیجه داریم

$$|y_n - y_m|^۲ \leq ۲(|x - y_m|^۲ + |x - y_n|^۲) - ۴d(x, K)^۲.$$

از اینکه $|x - y_m| \to d(x, K)$ پس سمت راست رابطه‌ی فوق وقتی $n, m \to \infty$ به صفر همگرا است، در نتیجه دنباله $\{y_n\}$ کوشی است. از اینکه K یک مجموعه تام است، لذا دنباله $\{y_n\}$ به عنصری مانند $y \in K$ همگرا است. بنابراین y، A-بهترین تقریب x در K است. چون x عنصری دلخواه است. لذا K یک مجموعه $A-$تقریب پذیر است. □

قضیه ۹.۲.۵. فرض کنید K یک زیر مجموعه محدب تام از X باشد، در این صورت به ازای هر $x \in X \setminus K$، A-بهترین تقریب منحصر به فرد است.

برهان. فرض کنید $y_۱, y_۲ \in \mathbf{P}_K^A(x)$. لذا $|x - y_۲| = |x - y_۱| = d(x, K)$. چون K یک مجموعه محدب است، لذا $(y_۱ + y_۲)/۲ \in K$. بنا به نامساوی مثلثی خواهیم داشت

$$\begin{aligned} d(x, K) &\leq |x - \frac{۱}{۲}(y_۱ + y_۲)| \\ &= |\frac{۱}{۲}(x - y_۱) + \frac{۱}{۲}(x - y_۲)| \\ &\leq \frac{۱}{۲}|x - y_۱| + \frac{۱}{۲}|x - y_۲| = d(x, K). \end{aligned}$$

در نتیجه

$$|\frac{۱}{۲}(x - y_۱) + \frac{۱}{۲}(x - y_۲)| = \frac{۱}{۲}|x - y_۱| + \frac{۱}{۲}|x - y_۲|.$$

بنا به قضیه ۶.۲.۵، داریم

$$(x - y_۲)|x - y_۱| = (x - y_۱)|x - y_۲|.$$

از تساوی $|x - y_۱| = |x - y_۲|$ نتیجه می‌شود $(y_۱ - y_۲)|x - y_۱| = ۰$. چون X یک فضای برداری است، لذا $x \neq y_۱$ ایجاب می‌کند $y_۱ = y_۲$. □

قضیه ۱۰.۲.۵. فرض کنید K یک زیر مجموعه محدب تام از X و $y_۰ \in K$. در این صورت برای هر $y \in K$، $Re\langle x - y_۰, y - y_۰ \rangle \leq ۰$ اگر و تنها اگر $y_۰ \in \mathbf{P}_K^A(x)$.

برهان. فرض کنید $y_۰ \in \mathbf{P}_K^A(x)$. چون K یک زیر مجموعه محدب است، به ازای هر $y \in K$ و $۰ \leq \lambda \leq ۱$ عنصر $y_\lambda = \lambda y + (۱ - \lambda)y_۰$ متعلق به K است. لذا خواهیم داشت

$$\begin{aligned} ۰ &\geq |x - y_۰|^۲ - |x - y_\lambda|^۲ \\ &= |x - y_۰|^۲ - |x - y_۰ - \lambda(y - y_۰)|^۲ \\ &= -۲Re\lambda\langle x - y_۰, y_۰ - y \rangle - \lambda^۲|y - y_۰|^۲. \end{aligned}$$

بنابراین

$$Re\langle x - y_۰, y_۰ - y \rangle + \lambda|y - y_۰|^۲ \geq ۰.$$

اینک $\lambda \to ۰$، نتیجه می‌دهد که $Re\langle x-y_۰, y-y_۰\rangle \leq ۰$.

برعکس. اگر $Re\langle x-y_۰, y-y_۰\rangle \leq ۰$. در این صورت

$$\begin{aligned} |x-y_۰|^۲ - |x-y|^۲ &= |x-y_۰|^۲ - |x-y_۰+y_۰-y|^۲ \\ &= -|y-y_۰)|^۲ - ۲Re\lambda\langle x-y_۰, y_۰-y\rangle \leq ۰. \end{aligned}$$

لذا $|x-y| \leq |x-y_۰|$. این ایجاب می‌کند $y_۰ \in \mathbf{P}_K^A(x)$. $\square$

تعریف ۱۱.۲.۵. فرض کنید S زیر مجموعه‌ای غیر تهی از X باشد. در این صورت دوگان مخروطی S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S^\circ := \{x \in X : Re\langle x, y\rangle \leq ۰, \ \ \forall\, y \in S\}.$$

هم چنین

$$S^\perp := S^\circ \cap (-S)^\circ = \{x \in X : \langle x, y\rangle = ۰, \ \forall\, y \in S\}.$$

لم ۱۲.۲.۵. فرض کنید S زیر مجموعه‌ای غیر تهی از X باشد. در این صورت احکام زیر برقرارند:

(۱) S° یک زیر مجموعه مخروطی بسته و $S^\perp$ یک زیرفضا از X است.

(۲) $S^\circ = (\overline{S})^\circ, \ \ S^\perp = (\overline{S})^\perp$.

(۳) اگر S یک زیر مجموعه مخروطی از X باشد، آنگاه $(S-y)^\circ = S^\circ \cap y^\perp$.

(۴) اگر M یک زیر فضای از X باشد، آنگاه $M^\perp = M^\circ$.

برهان.

(۱) فرض کنید $x_n \in S^\circ$ و $x_n \to x$. پس برای هر $y \in S$ داریم :

$$Re\langle x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} Re\langle x_n, y\rangle \leq ۰.$$

در نتیجه $x \in S^\circ$ و لذا S° بسته است. حال فرض کنید $\alpha, \beta \geq ۰$. در این صورت

$$Re\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha Re\langle x, z\rangle + \beta Re\langle y, z\rangle \leq ۰,$$

$$\Rightarrow \alpha x + \beta y \in S^\circ.$$

(۲) از اینکه $S \subseteq \overline{S}$ نتیجه می‌شود $(\overline{S})^\circ \subseteq S^\circ$. ثابت می‌کنیم $S^\circ \subseteq (\overline{S})^\circ$. فرض کنید $x \in S^\circ$، $y \in \overline{S}$ و $y_n \in S$ به قسمی که $y_n \to y$. لذا $Re\langle x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} Re\langle x_n, y\rangle \leq ۰$. این ایجاب می‌کند که $x \in (\overline{S})^\circ$. بنابراین $S^\circ \subseteq (\overline{S})^\circ$. در نتیجه $S^\circ = (\overline{S})^\circ$.

(۳) $x \in (S-y)^\circ$ اگر و فقط اگر به ازای هر $s \in S$، $Re\langle x, s-y\rangle \leq ۰$. با اختیار کردن مقادیر $S = ۰, \ S = ۲y$ نتیجه می‌دهد که $\langle x, y\rangle = ۰$. بنابراین برای هر $s \in S$ ، $Re\langle x, s\rangle \leq ۰$. لذا $x \in S^\circ \cap y^\perp$.

(۴) چون M زیرفضا است، لذا $M=-M$. این ایجاب می‌کند $M^{\perp}=M^{\circ}\cap(-M)^{\circ}=M^{\circ}$. □

نتیجه ۱۳.۲.۵. فرض کنید C یک زیر مجموعه مخروطی تقریب پذیر از X باشد، در این صورت $y_{\circ}\in \mathbf{P}_C^A(x)$ اگر و فقط اگر $x-y_{\circ}\in(C-y_{\circ})^{\circ}$.

برهان. اثبات بنا به قضیه ۱۰.۲.۵ و تعریف ۱۱.۲.۵ بدیهی است. □

قضیه ۱۴.۲.۵. فرض کنید K یک زیر مجموعه مخروطی تقریب پذیر از X باشد. در این صورت عبارات زیر معادل اند.

۱) $y_{\circ}\in \mathbf{P}_K^A(x)$.

۲) $x-y_{\circ}\in K^{\circ}\cap y_{\circ}^{\perp}$.

برهان. ۲ $\rightarrow$ ۱. فرض کنید $y_{\circ}\in \mathbf{P}_K^A(x)$. در این صورت بنا به قسمت سوم لم ۱۲.۲.۵ و نتیجه ۱۳.۲.۵، خواهیم داشت $x-y_{\circ}\in K^{\circ}\cap y_{\circ}^{\perp}$.

۱ $\rightarrow$ ۲. اثبات مشابه به قسمت اول است. □

نتیجه ۱۵.۲.۵. فرض کنید M یک زیرفضای تقریب پذیری از X باشد. در این صورت $y_{\circ}\in \mathbf{P}_M^A(x)$ اگر و فقط اگر $x-y_{\circ}\in M^{\perp}$.

برهان. اثبات بنا به قسمت چهارم لم ۱۲.۲.۵ و قضیه قبل بدیهی است. □

گزاره ۱۶.۲.۵. فرض کنید W یک زیر مجموعه مخروطی تقریب پذیر از X باشد، در این صورت

(۱) تابع $\mathbf{P}_W^A$ خود توان است، یعنی برای هر $x\in X$ ، $\mathbf{P}_W^A(\mathbf{P}_W^A(x))=\mathbf{P}_W^A(x)$.

(۲) برای هر $x,y\in X$،

$$Re\langle x-y,\mathbf{P}_W^A(x)-\mathbf{P}_W^A(y)\rangle \geq |\mathbf{P}_W^A(x)-\mathbf{P}_W^A(y)|^{۲}.$$

(۳) $Re\langle x-y,\mathbf{P}_W^A(x)-\mathbf{P}_W^A(y)\rangle\geq \circ$.

(۴) $\| x-y \|\geq\| \mathbf{P}_W^A(x)-\mathbf{P}_W^A(y) \|$.

برهان.

(۱) اثبات بدیهی است.

(۲) برای هر $x,y\in X$ داریم

$$\begin{aligned} Re[\langle x-\mathbf{P}_W^A(x),\mathbf{P}_W^A(x)-\mathbf{P}_W^A(y)\rangle &+ \langle \mathbf{P}_W^A(x)-\mathbf{P}_W^A(y),\mathbf{P}_W^A(x)-\mathbf{P}_W^A(y)\rangle \\ &+ \langle \mathbf{P}_W^A(y)-y,\mathbf{P}_W^A(x)-\mathbf{P}_W^A(y)\rangle] \\ &= Re\langle x-y,\mathbf{P}_W^A(x)-\mathbf{P}_W^A(y)\rangle. \end{aligned}$$

بنا به قضیه ۱۰.۲.۵، جمله اول و سوم عبارت اول نا منفی است. لذا نتیجه حاصل می‌شود.

(۳) بنا به قسمت دوم بدیهی است.

(۴) بنا به قضیه ۱۰.۲.۵، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}|\mathbf{P}_W^A(x)-\mathbf{P}_W^A(y)|^۲ &= Re\langle \mathbf{P}_W^A(x)-\mathbf{P}_W^A(y), \mathbf{P}_W^A(x)-\mathbf{P}_W^A(y)\rangle\\ &\leq Re\langle x-y, \mathbf{P}_W^A(x)-\mathbf{P}_W^A(y)\rangle + ۰\\ &\leq \|x-y\|\ |\mathbf{P}_W^A(x)-\mathbf{P}_W^A(y)|.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\|\mathbf{P}_W^A(x)-\mathbf{P}_W^A(y)\|^۲ \leq \|x-y\|\ \|\mathbf{P}_W^A(x)-\mathbf{P}_W^A(y)\|.$$

این ایجاب می‌کند که

$$\|\mathbf{P}_W^A(x)-\mathbf{P}_W^A(y)\| \leq \|x-y\|.$$

□

گزاره ۱۷.۲.۵. فرض کنید W یک مخروط تقریب پذیری از X باشد، در این صورت :

(۱) برای هر $x \in X$، $x = \mathbf{P}_W^A(x) + \mathbf{P}_{W^\circ}^A(x)$. این تجزیه منحصر به فرد است.

(۲) $|x|^۲ = |\mathbf{P}_W^A(x)|^۲ + |\mathbf{P}_{W^\circ}^A(x)|^۲$.

(۳) $\|x\| \geq \|\mathbf{P}_W^A(x)\|$.

برهان.

(۱) فرض کنید $x \in X$ و $a_۰ = x - \mathbf{P}_W^A(x)$. در این صورت بنا به قضیه ۱۴.۲.۵، $a_۰ \in W^\circ$ و $a_۰ \perp (x - a_۰)$. لذا به ازای هر $y \in W^\circ$ داریم

$$Re\langle x - a_۰, y\rangle = Re\langle \mathbf{P}_W^A(x), y\rangle \leq ۰.$$

بنا به قضیه ۱۴.۲.۵، $x - a_۰ \in \mathbf{P}_{W^\circ}^A(x)$. در نتیجه $x = \mathbf{P}_W^A(x) + \mathbf{P}_{W^\circ}^A(x)$. برای اثبات یگانگی. فرض کنید $x = y + z$ که $y \in W, z \in W^\circ$ و $z \perp y$. برای هر $a \in W$ داریم

$$Re\langle x - y, a\rangle = \langle z, a\rangle \leq ۰,$$

و

$$\langle x - y, y\rangle = \langle z, y\rangle = ۰.$$

از قضیه ۱۴.۲.۵، نتیجه می‌شود که $y = \mathbf{P}_W^A(x)$. به طور مشابه $z = \mathbf{P}_{W^\circ}^A(x)$ نیز ثابت می‌شود.

(۲) بنا به قسمت اول نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}|x|^۲ &= |\mathbf{P}_W^A(x) + \mathbf{P}_{W^\circ}^A(x)|^۲\\ &= |\mathbf{P}_W^A(x)|^۲ + |\mathbf{P}_{W^\circ}^A(x)|^۲ + ۲Re\langle \mathbf{P}_W^A(x), \mathbf{P}_{W^\circ}^A(x)\rangle\\ &= |\mathbf{P}_W^A(x)|^۲ + |\mathbf{P}_{W^\circ}^A(x)|^۲.\end{aligned}$$

(۳) بنا به قسمت دوم $|\mathbf{P}_W^A(x)| \geq |x|$. در نتیجه $\|\mathbf{P}_W^A(x)\| \geq \|x\|$. □

گزاره ۱۸.۲.۵. فرض کنید M یک زیر فضای تقریب پذیر از X باشد. در این صورت احکام زیر برقرارند:

(۱) $\mathbf{P}_M^A$ یک تابع خطی با نرم ۱ است.

(۲) برای هر $x \in X$، $\langle \mathbf{P}_M^A(x), x\rangle \geq \circ$.

برهان.

(۱) فرض کنید $x, y \in X$. بنا به نتیجه ۱۵.۲.۵، $x - \mathbf{P}_M^A(x), y - \mathbf{P}_M^A(y) \in M^\perp$. از اینکه $M^\perp$ زیرفضا است، لذا برای هر α, β اعداد اسکالر داریم

$$\alpha x + \beta y - [\alpha \mathbf{P}_M^A(x) + \beta \mathbf{P}_M^A(y)] = \alpha(x - \mathbf{P}_M^A(x)) + \beta(y - \mathbf{P}_M^A(y)) \in M^\perp.$$

چون $\alpha \mathbf{P}_M^A(x) + \beta \mathbf{P}_M^A(y)$ متعلق به M است، قضیه ۹.۲.۵، ایجاب می‌کند که

$$\mathbf{P}_M^A(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathbf{P}_M^A(x) + \beta \mathbf{P}_M^A(y).$$

بنابراین $\mathbf{P}_M^A$ خطی است.

بنا به قسمت دوم گزاره ۱۷.۲.۵، $\| \mathbf{P}_M^A(x) \| \leq \| x \|$. بنابراین $\mathbf{P}_M^A$ کراندار و $\| \mathbf{P}_M^A \| < ۱$. از طرفی دیگر برای هر $y \in M$، $\mathbf{P}_M^A(y) = y$. بنابراین $\| \mathbf{P}_M^A \| \geq ۱$. در نتیجه $\| \mathbf{P}_M^A \| = ۱$.

(۲) برای هر $x \in X$، نتیجه ۱۵.۲.۵، ایجاب می‌کند که

$$\langle \mathbf{P}_M^A(x), x - \mathbf{P}_M^A(x)\rangle = \circ \Rightarrow \langle \mathbf{P}_M^A(x), x\rangle = \langle \mathbf{P}_M^A(x), \mathbf{P}_M^A(x)\rangle.$$

بنابراین $\langle \mathbf{P}_M^A(x), x\rangle \geq \circ$. □

قضیه ۱۹.۲.۵. فرض کنید M یک زیر فضا، K زیر مجموعه محدبی از X به قسمی که $K \subseteq M$ و $x \in X$. در این صورت احکام زیر برقرارند:

$$\mathbf{P}_M^A(\mathbf{P}_K^A(x)) = \mathbf{P}_K^A(x).$$

$$d(x, K)^۲ = d(x, M)^۲ + d(\mathbf{P}_M^A(x), K)^۲.$$

برهان. عبارت اول با توجه به قسمت اول گزاره ۱۶.۲.۵، بدیهی است. چون $K \subseteq M$. لذا به ازای هر $y \in K$، $y \in M$. بنا به نتیجه ۱۵.۲.۵، $x - \mathbf{P}_M^A(x) \in M^\perp$. بنابراین

$$|x - y|^۲ = |x - \mathbf{P}_M^A(x)|^۲ + |\mathbf{P}_M^A(x) - y|^۲. \quad (۱.۵)$$

مینیم عبارت سمت چپ روی مقادیر y زمانی بدست می‌آید اگر و فقط اگر مینیم عبارت $|\mathbf{P}_M^A(x) - y|^۲$ اتفاق بیفتد. این مطلب ایجاب می‌کند که $\mathbf{P}_M^A(x)$ موجود است اگر و فقط اگر $\mathbf{P}_K^A(\mathbf{P}_M^A(x))$ موجود باشد. بنا به رابطه (۱.۵) قسمت دوم نیز ثابت می‌شود. □

فصل ۶

تئوری تقریب در ۲-جبر باناخ

در این فصل، تعاریف و قضایای مشابه با فضای های نرمدار و جبر باناخ را در فضای ۲-نرمدار که اولین بار توسط گهلر [۱] [۴۵] در سال ۱۹۶۳ معرفی شد را بیان می‌کنیم. از آن زمان تا کنون، بسیاری از نویسندگان نظیر، فرس [۲] [۴۲، ۴۳]، چو [۳] [۳۸]، دیمینی [۴] [۳۰] ، گوناوان [۵] [۴۹] و همکارانش ساختارهای توپولوژیکی و هندسی مختلفی از این فضاها را ارائه داده‌اند و بسیاری از مفاهیم مطرح در فضای نرمدار را در این فضای جدید مطرح کرده‌اند. (ر. ج. ک [۷۷، ۷۸، ۸۲]).

۱.۶ مقدمات

در این بخش به تعاریف مقدماتی و برخی قضایا که در بحث ۲-جبر باناخ اثبات کرده‌ایم، می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۶. [۴۵] فرض کنید X یک فضای برداری با بعد بزرگتر از یک باشد. نگاشت $\|.,.\|$ حقیقی مقدار روی $X\times X$ را با خواص زیر در نظر بگیرید:

آ) برای هر $x,z\in X$ ، $\|x,z\|\ \geq 0$ و $\|x,z\|=0$ اگر و تنها اگر x و z وابسته خطی باشند.

ب) $\|x,z\|=\|z,x\|$،

ث) برای هر $\alpha\in\mathbb{R}$، $\|\alpha x,z\|=|\alpha|\|x,z\|$.

ج) $\|x+x',z\|\leq\|x,z\|+\|x',z\|$.

در این صورت $\|.,.\|$ یک ۲-نرم و $(X,\|.,.\|)$ فضای ۲- نرمدار نامیده می‌شود. در صورتی که $\|.,.\|$ شرط (آ) را دارا نباشد، X یک فضای شبه ۲- نرمدار نامیده می‌شود.

مثال ۲.۱.۶. فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد. در این صورت H با نرم تعریف شده، زیر یک فضای ۲-نرمدار است.

$$\|x,y\|=|det\begin{bmatrix}\langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle\\ \langle y,x\rangle & \langle y,y\rangle\end{bmatrix}|^{\frac{1}{2}}.$$

[۱] Gahler [۲] Freese [۳] Cho [۴] Diminnie [۵] Gunawan

مثال ۳.۱.۶. فرض کنید X یک فضای برداری با دو شبه نرم $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ باشد. در این صورت $(X, \|.,.\|)$ با نرم تعریف شده زیر یک فضای شبه ۲-نرمدار است.

$$\|x, y\| = \|x\|_1 \|y\|_2, \ (x, y \in X).$$

در ادامه برخی مفاهیم توپولوژی در این فضاها را بیان می‌کنیم.

تعریف ۴.۱.۶. فرض کنید $(X, \|.,.\|)$ یک فضای ۲-(شبه)نرمدار و $b \in X$ ثابت باشد. در این صورت

(آ) دنباله $\{x_n\}$، b- کوشی نامیده می‌شود، اگر برای هر $\varepsilon > 0$ یک $N_0 \in \mathbb{N}$ موجود باشد به قسمی که برای $m, n \geq N_0$، $\|x_n - x_m, b\| \leq \varepsilon$.

(ب) دنباله $\{x_n\}$، b-همگرا است، اگر برای هر $\varepsilon > 0$، $N_0 \in \mathbb{N}$ و $x \in X$ موجود باشد به قسمی که برای $n \geq N_0$، $\|x_n - x, b\| \leq \varepsilon$.

(ث) X یک فضای b-باناخ است، در صورتی که هر دنباله b-کوشی آن همگرا باشد.

تعریف ۵.۱.۶. فرض کنید $(X, \|.,.\|)$ یک فضای ۲- (شبه)نرمدار و $b \in X$ ثابت باشد. نگاشت $T : X \times \langle b \rangle \to \mathbb{F}$ یک نگاشت b-خطی روی $X \times \langle b \rangle$ نامیده می‌شود، هرگاه برای $a, c, b \in X$ و $\alpha \in \mathbb{F}$ شرایط زیر برقرار باشد.

۱) $T(a + c, b) = T(a, b) + T(c, b)$.

۲) $T(\alpha a, b) = T(a, \alpha b) = \alpha T(a, b)$.

همچنین نگاشت b-خطی T را یک نگاشت کراندار می‌گویند، اگر عدد حقیقی $M > 0$ موجود باشد به قسمی که $|T(x, b)| < M\|x, b\|$. به ازای هر نگاشت b-خطی T، نرمی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|T\| = \sup\{\|T(x, b)\| : \ \|x, b\| \leq 1\}.$$

ما از نماد X_b^* برای مجموعه تمام نگاشت های b-خطی روی $A \times \langle b \rangle$ استفاده نموده‌ایم. همچنین $Ker_b T = \{a \in A : T(a, b) = 0\}$.

اگر در تعریف ۱.۱.۶، فضای X یک جبر باشد. آنگاه X را یک ۲-جبر نرمدار می‌نامیم.

تعریف ۶.۱.۶. فرض کنید $(A, \|.,.\|)$ یک ۲-جبر (شبه)نرمدار و $b \in A$ ثابت باشد. گوییم A یک ۲-جبر باناخ (شبه باناخ) نسبت به b است، اگر A یک فضای b-باناخ و در شرط زیر صدق کند:

$$\|xy, b\| \leq \|x, b\| \ \|y, b\|, \ (\forall \ x, y \in A).$$

مثال ۷.۱.۶. فرض کنید $A = \mathbb{R}^3$. در این صورت به ازای هر $a = (a_1, a_2, a_3) \in R^3$ و $b = (b_1, b_2, b_3)$، نرم زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\|a, b\| = ((a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_3 b_2 - a_2 b_3)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

با نرم فوق $\mathbb{R}^3$ یک ۲-جبر باناخ نسبت به $b = (1, 0, 0)$ است.

مثال ۸.۱.۶. فرض کنید $I=[\circ,۱]$، $\zeta(I)$ مجموعه ی تمام توابع کراندار روی I که دارای حداکثر شمارا نقاط ناپیوستگی باشند. فضای $\zeta(I)$ یک جبر نسبت به جمع و ضرب نقطه ای است و با نرم زیر

$$\|f,g\|=\sup_{x,y\in I}|f(x)g(y)-f(y)g(x)|,\ \ (f,g\in\zeta(I)).$$

یک فضای ۲-نرمدار است. اگر

$$b(x)=\begin{cases} ۱ & x=۱\\ \circ & x\neq ۱.\end{cases}$$

آنگاه $(\zeta(I),\|.,.\|)$ یک ۲- جبر باناخ نسبت به b است.

در ادامه، قضایا که پیش از این در فضای جبر باناخ ثابت شده است را در فضای ۲-جبر باناخ مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

قضیه ۹.۱.۶. فرض کنید $(A,\|.,.\|)$ یک ۲-جبر باناخ نسبت به b با عنصر یکه e باشد. اگر $a\in A$ آنگاه $r(a)\leq\|a,b\|$ و $r(a)=\lim_n\|a^n,b\|^{\frac{1}{n}}$.

برهان. اثبات مشابه به قضیه ۳.۲ [۱۰۱] است. $\square$

تعریف ۱۰.۱.۶. فرض کنید A یک ۲-جبر باناخ یکدار نسبت به b و T یک نگاشتb -خطی کراندار باشد. نگاشت T را یک b–هومورفیسم روی $A\times<b>$ نامیده می‌شود، اگر برای هر $x,y\in A$ ،

$$T(xy,b)=T(x,b)T(y,b).$$

منظور از یک b-کارکتر روی ۲-جبر باناخ A یک b– هموفورفیسم غیر صفر است. در این بخش از نماد $\Omega^b(A)$ برای تمام b- کارکترهای روی $A\times<b>$ استفاده می کنیم. ممکن است مجموعه $\Omega^b(A)$ تهی باشد.

قضیه ۱۱.۱.۶. [۵۲] فرض کنید X یک فضای ۲-نرمدار و $z\in X$ ثابت باشد. در این صورت گوی یکه بسته X_z^* یک مجموعه فشرده ضعیف ستاره است.

فرض کنید $a\in A$، نگاشت $\widehat{a}_b$ با ضابطه زیر را در نظر بگیرید

$$\widehat{a}_b:\Omega^b(A)\longrightarrow\mathbb{C},\tau\longrightarrow\tau(a,b).$$

چون $\{\tau\in\Omega^b(A):|\tau(a,b)|\geq\varepsilon\}$ بنا به قضیه ۱۱.۱.۶ مجموعه فشرده ضعیف ستاره است، بنابراین $\widehat{a}_b\in C_\circ(\Omega^b(A))$.

تعریف ۱۲.۱.۶. فرض کنید $(a,b^{'})\in A\times<b>$. ما از نماد $a^{'}$، برای عنصر λa که λ اسکالری است که در نمایش $b^{'}=\lambda b$ ظاهر می شود، استفاده می کنیم. به عبارت دیگر $a^{'}=\lambda a$.

قضیه ۱۳.۱.۶. فرض کنید A یک ۲-جبر باناخ یکدار نسبت به b باشد. در این صورت

$$A\times <b>\to C_{\circ}(\Omega^b(A)),\ \ (a,b^{'})\to \widehat{a^{'}}_b.$$

یک نگاشت کاهنده ۲-نرم است. به عبارت دیگر

$$\|\widehat{a^{'}}_b\|\leq \|a,b^{'}\|.$$

برهان. فرض کنید $\tau\in\Omega^b(A)$ و $a\in A$. ابتدا نشان می‌دهیم $\tau(a,b)\in\sigma(a)$. در غیر این صورت اگر $\tau(a,b)\notin\sigma(a)$ آنگاه $a-\tau(a,b)e$ عنصری وارون پذیر است، از طرفی $a-\tau(a,b)e\in Ker_b\tau$ اما $Ker_b\tau$ یک ایده ال ماکسیمال و شامل عنصر وارون پذیری نیست. بنابراین $\tau(a,b)\in\sigma(a)$. لذا $|\tau(a,b)|\leq r(a)\leq \|a,b\|$. اینک خواهیم داشت

$$\|\widehat{a^{'}}_b\|=\sup_{\tau\in\Omega^b(A)}|\tau(\lambda a,b)|\leq|\lambda|r(a)\leq\|a,\lambda b\|=\|a,b^{'}\|.$$

□

تعریف ۱۴.۱.۶. فرض کنید A یک ۲-جبر باناخ نسبت به b و به علاوه A یک C^*-جبر نیز باشد. در صورتی که $\|a^*a,b\|=\|a,b\|^۲$، A را یک ۲-C^*-جبر می‌نامیم.

تعریف ۱۵.۱.۶. فرض کنید A یک ۲-C^*-جبر باناخ نسبت به b و τ یک b-نگاشت خطی باشد. نگاشت τ مثبت نامیده می‌شود، در صورتی که برای هر $a\geq ۰$، $\tau(a,b)\geq ۰$.

قضیه ۱۶.۱.۶. فرض کنید τ یک نگاشت b-خطی کراندار روی ۲-C^*-جبر باناخ باشد. در این صورت نگاشت های b-خطی وجود دارند که $\tau=\tau_+-\tau_-$ و $\|\tau\|=\|\tau_+\|+\|\tau_-\|$.

برهان. با توجه به قضیه ۱۳.۱.۶، روند اثبات مشابه به قضیه ۳.۳.۱۰ [۸۸] است. □

۲.۶ بهترین تقریب در ۲-جبر باناخ

تعریف ۱.۲.۶. فرض کنیم X یک فضای خطی ۲-نرمدار، $x\in X$ و $G\subseteq X$. در این صورت $g_{\circ}\in G$ را b-بهترین تقریب x در G نامیم، در صورتی که

$$\|x-g_{\circ},b\|=d_G(x,b). \tag{۱.۶}$$

که در آن $d_G(x,b):=\inf_{g\in G}\|\ x-g,b\|$.

هم چنین از $\mathbf{P}^b_G(x)$ برای نمایش مجموعه تمام عناصر b-بهترین تقریب x در G به شکل زیر استفاده می‌کنیم:

$$\mathbf{P}^b_G(x):=\{w\in G:\|x-g_{\circ},b\|=d_G(x,b)\}. \tag{۲.۶}$$

قضیه ۲.۲.۶. [۹۷] فرض کنید $(X, \|.,.\|)$ یک فضای ۲-نرمدار، G یک زیرفضای از X، $G \in g_\circ$ و $x \in X \setminus G+ < b >$. در این صورت $g_\circ \in \mathbf{P}_G^b(x)$ اگر و تنها اگر $f \in X_b^*$ موجود باشد به قسمی که $f|_{G\times<b>} = \circ$، $f(x-g_\circ) = \|x-g_\circ, b\|$ و $\|f\| = ۱$.

تعریف ۳.۲.۶. فرض کنید A یک فضای باناخ و B یک زیرفضای سره بسته از A باشد. عنصر $z \in A$، b- مینیمال نامیده می‌شود، اگر ∘ ، b -بهترین تقریب نسبت به نقطه z باشد.

قضیه ۴.۲.۶. فرض کنید A یک ۲-C^* -جبر باناخ یکدار نسبت به b، C یک زیر جبر یکدار از A و $a \in A_h$. اگر a یک عنصر مینیمال باشد، آنگاه تابع خطی b-کراندار مثبت موجود است به قسمی که $\varphi(a^۲, b) = \|a^۲, b\|$ و برای هر $c \in C$، $\varphi(ac + c^*a, b) = \circ$. برعکس. اگر $a \in A_h$ و تابع خطی b-کراندار مثبت φ موجود باشد، به قسمی که $\varphi(a^۲, b) = \|a^۲, b\|$ و برای $c \in C$، $\varphi(ac+c^*a, b) = \circ$. در این صورت a عنصر مینیمال است.

برهان. فرض کنید a یک عنصر مینیمال باشد . با ضرب یک اسکالر می‌توان فرض کرد که $\|a, b\| = ۱$. بنا به قضیه ۲.۲.۶، تابع $\psi \in A_b^*$ موجود است، به قسمی که $\psi|_{C+<b>} = \circ$ و $\psi(a, b) = ۱$. قرار می‌دهیم $\psi = \frac{\psi_+ - \psi_-}{۲}$ (نگاشت های مثبت نمایش ψ در قضیه ۱۶.۱.۶) با فرض $e \in C$ داریم

$$\circ = \psi(e, b) = \frac{\psi_+(e, b) - \psi_-(e, b)}{۲},$$

بنابراین $\psi_+(e, b) = \psi_-(e, b)$. در نتیجه $\|\psi_+\| = \|\psi_-\| = ۱$. از اینکه

$$\frac{\psi_+(a, b) - \psi_-(a, b)}{۲} = ۱.$$

و $\|a, b\| = ۱$، نتیجه می‌دهد که $\psi_+(a, b) = ۱$ و $\psi_-(a, b) = -۱$. اینک خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\psi_-((a+e)^۲, b) &= \psi_-(a^۲ + e + ۲a, b)\\ &= \psi_-(a^۲, b) + \psi_-(e, b) + ۲\psi_-(a, b)\\ &= \psi_-(a^۲, b) - ۱.\end{aligned}$$

از اینکه طرف چپ تساوی مقدار نامنفی و طرف راست مقدار نا-مثبت است داریم

$$\psi_-((a+e)^۲, b) = \circ, \quad \psi_-(a^۲, b) = ۱ = (\psi_-(a, b))^۲,$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد

$$\psi^+((a+e)^۲, b) = \circ, \quad \psi^+(a^۲, b) = ۱ = (\psi^+(a, b))^۲.$$

بنا به لم کوشی-شوارتز داریم

$$\begin{aligned}\psi_+((a-e)c, b) &\le \psi_+^۲((a-e), b)\psi_+^۲(c, b)\\ &= (\psi_+(a, b) - \psi_+(e, b))^۲\psi_+^۲(c, b)\\ &= (\psi_+^۲(a, b) - ۲\psi_+(e, b) + ۱)\psi_+^۲(c, b) = \circ,\end{aligned}$$

بنابراین $\psi_+(ac,b)=\psi_+(c,b)$. این مطلب را به طور مشابه برای ψ_- نیز می‌توان نشان داد. قرار می‌دهیم $\varphi=\frac{\psi_++\psi_-}{2}$، پیدا است که $\varphi(a^2,b)=1$ و

$$\varphi(ac,b)=\frac{\psi_+(ac,b)+\psi_-(ac,b)}{2}=\frac{\psi_+(c,b)-\psi_-(c,b)}{2}=0.$$

لذا برای هر $c\in C$، $\varphi(ac,b)=0$. از اینکه a عنصر هرمیتی است. لذا $\varphi(c^*a,b)=0$. بنابراین برای هر $c\in C$،

$$\varphi(ac+c^*a,b)=0.$$

برعکس. اگر $a\in A_h$ و تابع $b-$ خطی کراندار مثبت φ موجود باشد به قسمی که $\varphi(a^2,b)=\|a^2,b\|$ و برای $c\in C$، $\varphi(ac+c^*a,b)=0$. در این صورت

$$\begin{aligned}\|a-c,b\|^2 &\geq \varphi((a-c)(a-c)^*,b)\\ &= \varphi(a^2,b)+\varphi(c^2,b)-\varphi(ac+c^*a,b)\\ &= \|a,b\|^2+\varphi(c^2,b)\\ &\geq \|a,b\|^2.\end{aligned}$$

بنابراین a یک عنصر مینیمال و اثبات کامل می‌شود. $\square$

۳.۶ مشخصه‌ی دورترین نقطه

در این بخش قصد داریم به بحث دورترین نقطه در فضای ۲- مدول ضرب داخلی بپردازیم. ولی قبل از آن ابتدا به تعاریف و نتایج کلی که در بحث دورترین نقطه در فضای ۲-نرمدار دست یافتیم، می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳.۶. فرض کنید X یک فضای ۲-نرمدار و G یک مجوعه کراندار از X و $x\in X$. نقطه $g_0\in G$ را b-دورترین نقطه از مجموعه G تا x می‌گوییم، در صورتی که

$$\|x-g_0,b\|=f_G(x,b)=\sup_{g\in G}\|x-g,b\|.$$

مجموعه تمامی این نقاط را با نماد $\mathbb{F}_G(x,b)$ نشان می‌دهیم.

نتیجه ۲.۳.۶. فرض کنید X یک فضای ۲-نرمدار و G یک مجوعه کراندار از X باشد. برای هر x,z از X احکام زیر برقرارند:

۱) $|\ f_G(x,b)-f_G(z,b)\ |\leq\|x-z,b\|$.

۲) $\|x-z,b\|\leq f_G(x,b)+f_G(z,b)$.

برهان. ۱) فرض کنید $y\in\mathbb{F}_G(z,b)$. بنا به تعریف b-دورترین خواهیم داشت

$$f_G(x,b)\geq\|x-y,b\|=\|x-z+z-y,b\|\geq\|x-z,b\|-\|z-y,b\|,$$

لذا

$$f_G(x,b) - f_G(z,b) \geq \|x-z,b\|.$$

اینک با تغییر پارامتر x با y داریم

$$f_G(z,b) - f_G(x,b) \geq \|x-z,b\|.$$

بنابراین $\mid f_G(x,b) - f_G(z,b) \mid \leq \|x-z,b\|$.

۲) اثبات شبیه قسمت اول می‌باشد.

□

قضیه ۳.۳.۶. [۷۹] فرض کنید X یک فضای ۲-نرمدار و $x_\circ, y_\circ \in X$. در این صورت نگاشت $y_\circ$- خطی f موجود است به قسمی که ۱ $= \| f \|$ و $f(x_\circ, y_\circ) = \|x_\circ, y_\circ\|$.

قضیه ۴.۳.۶. فرض کنید G یک مجموعه کراندار از X و $x \in X \setminus G + < b >$. در این صورت $g_\circ \in \mathbb{F}_G(x,b)$ اگر و تنها اگر نگاشت b- خطی p موجود باشد به قسمی که

$$p(x-g_\circ,b) = \sup_{g\in G}\|x-g,b\|, \quad \|p\| = ۱. \tag{۳.۶}$$

برهان. فرض کنید تابع b- خطی که در شرایط (۳.۶) صدق کند، موجود باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}\|x-g_\circ,b\| &= \|x-g_\circ,b\|\|p\| \\ &\geq \mid p(x-g_\circ,b) \mid = \sup_{g\in G}\|x-g,b\| \\ &\geq \|x-g,b\|.\end{aligned}$$

برعکس. فرض کنید $g_\circ \in \mathbb{F}_G(x,b)$. بنا به قضیه ۳.۳.۶ یک تابع b-خطی مانند p وجود دارد به قسمی که

$$\|p\| = ۱, \quad p(x-g_\circ,b) = \|x-g_\circ,b\| = \sup_{g\in G}\|x-g,b\|.$$

لذا حکم ثابت شد. □

قضیه ۵.۳.۶. فرض کنید G یک مجموعه کراندار از X و $x \in X \setminus G + < b >$. در این صورت عبارات زیر معادل هستند:

آ) $g_\circ \in \mathbb{F}_G(x,b)$.

ب) تابع b- خطی p موجود است که در شرایط زیر صدق کند

$$\mid p(x-g_\circ,b) \mid = \sup_{g\in G}\|x-g,b\|, \quad \|p\| = ۱, \tag{۴.۶}$$

$$\mid p(x-g_\circ,b) \mid \geq \mid p(x-g,b) \mid. \tag{۵.۶}$$

ث) تابع b- خطی موجود است که در شرط (۴.۶) زیر صدق کند و

$$p(g_\circ - g, b)p(x - g_\circ, b) \leq \circ. \qquad (۶.۶)$$

برهان. فرض کنید $g_\circ \in \mathbb{F}_G(x, b)$. قضیه ۴.۳.۶ رابطه (۴.۶) را ایجاب می‌کند. لذا خواهیم داشت

$$| \, p(x - g_\circ, b) \, |= \sup_{g \in G} \|x - g, b\| \geq \|x - g, b\| \geq | \, p(x - g, b) \, |,$$

که این رابطه (۵.۶) را اثبات می‌کند.

(ب) ⇐ (ث) فرض کنید تابع b- خطی موجود باشد، که در شرایط (۴.۶)، (۵.۶) صدق کند. در این صورت:

$$\begin{aligned}
|p(x - g_\circ, b)|^۲ &\geq |p(x - g, b)|^۲ \\
&= |p(x - g_\circ, b)|^۲ + |p(g_\circ - g, b)|^۲ - ۲p(g_\circ - g, b)p(x - g_\circ, b) \\
&\geq |p(x - g_\circ, b)|^۲ + ۲p(g_\circ - g, b)p(g_\circ - x, b),
\end{aligned}$$

این اتفاق زمانی می‌افتد که $p(g_\circ - g, b)p(x - g_\circ, b) \leq \circ$.

(ث) ⇐ (آ) اثبات بنا به قضیه ۴.۳.۶ بدیهی است. □

در ادامه ما به مشخصه این نقاط در فضای ۲-مدول ضرب داخلی می‌پردازیم.

تعریف ۶.۳.۶. فرض کنید A یک C^*-جبر باشد. یک ۲- C^*-مدول ضرب داخلی X یک A-مدول چپ همراه با ضرب اسکالر و نگاشت A-مقدار $\langle ., .|.\rangle : X \times X \times X \to A$ با خواص زیر است.

آ) برای هر $x, z \in X$، $\langle x, x|z\rangle \ \geq \circ$ و $\langle x, x|z\rangle = \circ \Leftrightarrow x, z$ وابسته خطی باشند.

ب) $\langle x, x|z\rangle = \langle z, z|x\rangle$،

ج) برای هر $\alpha \in A$، $\langle \alpha x, x|z\rangle = \alpha\langle x, x|z\rangle$،

د) $\langle x + x', y|z\rangle = \langle x, y|z\rangle + \langle x', y|z\rangle$.

به کمک ۲-ضرب داخلی فوق یک ۲-نرم روی فضای X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|x, z\| = \|\langle x, x|z\rangle\|^{\frac{۱}{۲}}, \ (\forall \ x, z \in X).$$

از قضایا مهم در این فضا نامساوی کوشی- شوارتز است، که با توجه به خواص ۲-ضرب داخلی قابل اثبات می‌باشد. در واقع

$$|\langle x, y \mid z\rangle| \leq \|\langle x, x|z\rangle\|\langle y, y \mid z\rangle.$$

قضیه ۷.۳.۶. فرض کنید X یک ۲- C^*-مدول ضرب داخلی، G یک زیر مجموعه کراندار از X، $x \in X$ و $g_\circ \in G$. اگر برای هر $y \in G$، $Re\langle x - y, y_\circ - y|b\rangle \leq \circ$. در این صورت $y_\circ \in \mathbb{F}_G(x, b)$.

برهان. فرض کنید $y \in G$ عنصری دلخواه باشد. در این صورت بنا به فرض داریم

$$\begin{aligned}\langle x-y, x-y|b\rangle &= Re\langle x-y, x-y_\circ+y_\circ-y|b\rangle\\ &= Re\langle x-y, x-y_\circ|b\rangle + Re\langle x-y, y_\circ-y|b\rangle\\ &\leq Re\langle x-y, x-y_\circ|b\rangle + \circ\\ &\leq \|\langle x-y, x-y|b\rangle\|\langle x-y_\circ, x-y_\circ|b\rangle.\end{aligned}$$

بنابراین $\|x-y, b\| \leq \|x-y_\circ, b\|$، به عبارت دیگر $y_\circ \in \mathbb{F}_G(x,b)$. □

تعریف ۸.۳.۶. زیر مجموعه G از فضای ۲-نرمدار X را یک مجموعه b-قویاً محدب با شعاع R می‌گوییم، در صورتی که زیر مجموعه‌ای مانند $A_\text{۱}$ از X موجود باشد به قسمی که

$$G = \cap_{a\in A_\text{۱}} B_R^b(a),$$

که در آن $B_r^b(a) = \{y \in X:\ \|x-a, b\| \leq r\|\}$.

در ادامه ما مسئله یکتایی نقاط دورترین را در فضای ۲- ضرب داخلی X روی میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ اثبات می‌کنیم.

قضیه ۹.۳.۶. زیر مجموعه غیر تهی G از X یک مجموعه b-قویاً محدب با شعاع R است اگر و تنها اگر $G = \cap_{\|p,b\|=\text{۱}} B_R^b(a_p - Rp)$ به قسمی که $\|p,b\| = \text{۱}$ و $\langle a_p, p\rangle = \sup_{a\in G}\langle a, p\rangle$.

برهان. اثبات مشابه گزاره ۳.۳ [۱۰۹] است. □

لم ۱۰.۳.۶. فرض کنید G زیر مجموعه b-قویاً محدبی با شعاع R از X باشد. در این صورت نامساوی زیر به ازای هر $a_\text{۱}, a_\text{۲}$ که $\langle a_i, p_i\rangle = \sup_{a\in G}\langle a, p_i\rangle$ و $\|p_\text{۱}, b\|, \|p_\text{۲}, b\| = \text{۱}$ برقرار است :

$$\|a_\text{۱}-a_\text{۲}, b\|^\text{۲} \leq R\langle a_\text{۱}-a_\text{۲}, p_\text{۲}-p_\text{۱}|b\rangle.$$

برهان. چون مجموعه G یک مجموعه b-قویاً محدب است، بنا به قضیه ۹.۳.۶ داریم

$$G \subseteq B_R^b(a_\text{۱} - R\frac{p_\text{۱}}{\|p_\text{۱}, b\|}) \cap B_R^b(a_\text{۲} - R\frac{p_\text{۲}}{\|p_\text{۲}, b\|}).$$

این ایجاب می‌کند که

$$\|a_\text{۲}-a_\text{۱}+R\frac{p_\text{۱}}{\|p_\text{۱}, b\|}, b\|^\text{۲} \leq R^\text{۲},\ \|a_\text{۱}-a_\text{۲}+R\frac{p_\text{۲}}{\|p_\text{۲}, b\|}, b\|^\text{۲} \leq R^\text{۲}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\|a_\text{۲}-a_\text{۱}+R\frac{p_\text{۱}}{\|p_\text{۱}, b\|}, b\|^\text{۲} &= \langle a_\text{۲}-a_\text{۱}+R\frac{p_\text{۱}}{\|p_\text{۱}, b\|}, a_\text{۲}-a_\text{۱}+R\frac{p_\text{۱}}{\|p_\text{۱}, b\|}|b\rangle\\ &= \langle a_\text{۲}-a_\text{۱}, a_\text{۲}-a_\text{۱}|b\rangle + \langle R\frac{p_\text{۱}}{\|p_\text{۱}, b\|}, R\frac{p_\text{۱}}{\|p_\text{۱}, b\|}|b\rangle\\ &+ \text{۲}\langle a_\text{۲}-a_\text{۱}, R\frac{p_\text{۱}}{\|p_\text{۱}, b\|}|b\rangle\\ &\leq R^\text{۲}.\end{aligned}$$

لذا

$$\|a_1 - a_2, b\|^2 \leq 2R\langle a_1 - a_2, -p_1|b\rangle, \ (*).$$

به طور مشابه می توان نشان داد که

$$\|a_1 - a_2, b\|^2 \leq 2R\langle a_1 - a_2, p_2|b\rangle, \ (**).$$

با جمع طرفین دو نامساوی $(*)$و $(**)$ نتیجه حاصل می‌شود. □

برای هر مجموعه G در فضای ۲-نرمدار X مجموعه زیر را در نظر بگیرید.

$$T_r^b(G) = \{x \in X : \ f_G(x, b) > r\}.$$

قضیه ۶.۳.۱۱. فرض کنید G زیر مجموعه قویاً محدب با شعاع R از X باشد. در این صورت برای هر $x_1, x_2 \in T_r^b(G)$ نامساوی زیر برقرار است

$$\|f_b(x_1) - f_b(x_2), b\|^2 \leq \frac{r}{r-R}\|x_1 - x_2, b\|, \tag{۶.۷}$$

که $r > R$ و برای $i = 1, 2$، $f_b(x_i) \in \mathbb{F}_G(x_i, b)$.

برهان. فرض کنید که

$$a_i = f_b(x_i), \ \ p_i = \frac{1}{r}(f_b(x_i) - x_i), \ (i = 1, 2).$$

بنا به لم ۶.۳.۱۰، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\|f_b(x_1) - f_b(x_2), b\|^2 &\leq R\langle f_b(x_1) - f_b(x_2), p_2 - p_1|b\rangle \\ &= R\langle f_b(x_1) - f_b(x_2), \frac{1}{r}(f_b(x_2) - x_2) - \frac{1}{r}(f_b(x_1) - x_1), |b\rangle \\ &= \frac{R}{r}\|f_b(x_1) - f_b(x_2), b\|^2 - \frac{R}{r}\langle f_b(x_1) - f_b(x_2), x_2 - x_1|b\rangle.\end{aligned}$$

بنا به نامساوی کوشی- شوارتز داریم

$$(1 - \frac{R}{r})\|f_b(x_1) - f_b(x_2), b\|^2 \leq \frac{R}{r}\|f_b(x_1) - f_b(x_2), b\|\|x_1 - x_2, b\|.$$

و این رابطه (۶.۷) را ایجاب می‌کند. □

نتیجه ۶.۳.۱۲. فرض کنید G زیر مجموعه قویاً محدب با شعاع R از X، $x \in T_r^b(G)$ و $b \notin < G >$. در این صورت حداکثر یک b-دورترین نقطه از G نسبت به نقطه x وجود دارد.

برهان. اثبات بنا به قضیه ۶.۳.۱۱ بدیهی است. □

فصل ۷

تئوری تقریب در فضاهای شبه تانسوری و جمع مستقیم

محققان به دنبال شرایطی هستند که بتوانند قضایای مطرح شده در بحث تئوری تقریب روی مجموعه‌های محدب را روی مجموعه‌های نامحدب نیز گسترش بدهند. در این راستا، افرادی چون سینگر و ربینو [۱] به معرفی مجموعه‌های نرمال و پس از آن مجموعه‌های رو به پایین و رو به بالا در فضای $\mathbb{R}^I$ پرداختند. در سال‌های بعد دکتر محبی این مجموعه‌ها را در فضای مشبکه ای مطرح ساخت. در این فصل قصد داریم در ادامه این مباحث، به بررسی تئوری تقریب در فضای شبه تانسوری $X \boxtimes Y$ حاصل از X, Y که در آن X، یک جبر باناخ و Y، یک فضای مشبکه است بپردازیم. سپس به این نظریه در فضای جمع مستقیم تعدادی متناهی فضای مشبکه ای می‌پردازیم.

۱.۷ تئوری تقریب در فضای شبه تانسوری

در ابتدای این بخش به برخی تعاریف برگرفته از منابع [۲۲، ۸۶] می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۷. فرض کنید Y, X فضاهای باناخ و X^* فضای دوگان متناظر با X باشد.
عملگر $A : X^* \longrightarrow Y$ را با ضابطه زیر در نظر بگیرید :

$$A(\varphi) = \Sigma_{i=1}^{n} \varphi(x_i) y_i, \ \ (\phi \in X^*). \tag{۱.۷}$$

همان طور که مشاهده خواهد شد، متناظر با n ، $y_i \in Y$ و $x_i \in X$ عملگرهای متفاوتی روی فضای X^* تعریف خواهند شد. ما جهت تمایز این عملگرها عبارت $\Sigma_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ را به کار خواهیم برد. هم چنین با توجه به این عملگرها یک رابطه هم ارزی به صورت زیر تعریف می‌شود:
$\Sigma_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \sim \Sigma_{i=1}^{m} a_i \otimes b_i$ اگر و فقط اگر این دو عبارت عملگر یکسانی را تعریف کنند.
مجموعه تمام کلاس‌های هم ارزی ایجاد شده از این هم ارزی را فضای تانسوری نامیده و آن را با نماد $X \otimes Y$ نمایش می‌دهند.

---

[۱] Rubinov

عمل جمع روی این فضا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Sigma_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i + \Sigma_{i=n+1}^{m} x_i \otimes y_i = \Sigma_{i=1}^{m} x_i \otimes y_i$$

هم چنین به ازای هر $x \in X$، $u, v \in Y$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ روابط زیر برقرار است:

$$x \otimes (u+v) = x \otimes u + x \otimes v,$$

$$\alpha x \otimes y = x \otimes \alpha y,$$

$$0 \otimes x = 0.$$

در فضای تانسوری امکان تعریف کردن نرم های متفاوت وجود دارد اما از مهمترین نرم های که می‌توان به آن اشاره کرد و مستقل از شکل عناصر کلاس هم ارزی است، همان نرم عملگرهاست، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda(\Sigma_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i) = \sup\{\| \Sigma_{i=1}^{n} \phi(x_i) y_i \|: \ \ \phi \in X^*, \ \| \phi \| = 1\}. \tag{۲.۷}$$

باید توجه داشت که در حالت خاص $x \otimes y$، داریم

$$\begin{aligned} \lambda(x \otimes y) &= \sup\{\| \phi(x) y \|: \ \ \phi \in X^*, \ \| \phi \| = 1\} \\ &= \sup\{| \phi(x) | \| y \|: \ \ \phi \in X^*, \ \| \phi \| = 1\} \\ &= \| x \| \| y \| . \end{aligned}$$

تعریف ۲.۱.۷. فرض کنید که X یک جبر باناخ روی میدان اعداد حقیقی و $X^\times$ مجموعه تمام هومومورفیسم‌های جبری روی X باشد. به عبارت دیگر $\phi \in X^\times$ اگر برای هر $x, y \in X$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ شرایط زیر را داشته باشیم

$$\phi(\alpha x + \beta y) = \alpha \phi(x) + \beta \phi(y),$$

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y).$$

اگر قلمرو عملگرهای تعریف شده در (۱.۷)، یعنی فضای X^* را جایگزین $X^\times$ کنیم. در این حالت فضای متشکل از تمام کلاس‌های هم ارزی ایجاد شده توسط هومومورفیسم‌ها را فضای شبه تانسوری می‌نامیم. ما از نماد $X \boxtimes Y$ برای این فضا استفاده می کنیم. درواقع

$$X \boxtimes Y := \{\Sigma_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i : X^\times \to Y \mid \ x_i \in X, y_i \in Y; \ n \in \mathbb{N}\}.$$

هم چنین نرم زیر را روی فضای $X \boxtimes Y$ به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$\|\Sigma_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\|_{\boxtimes} = \sup_{\phi \in X^\times} \| \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i) y_i \|. \tag{۳.۷}$$

نتیجه ۳.۱.۷. فرض کنید X یک جبر جابجایی باناخ، Y یک فضای برداری، $z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ و $z_o = \sum_{i=1}^{n} x_i \boxtimes y_i$. دراین صورت $\|z\| \geq \|z_o\|_{\boxtimes}$.

برهان. از اینکه $X^{\times} \subseteq X^*$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \|z_\circ\|_{\boxtimes} &= \sup_{\phi \in X^{\times}} \|\sum_{i=1}^{n} \phi(x_i) y_i\| \\ &\leq \sup\{\|\sum_{i=1}^{n} \phi(x_i) y_i\|, \|\phi\| = 1, \phi \in X^*\} \\ &= \|z\|. \end{aligned}$$

□

تعریف ۴.۱.۷. فضای برداری X را یک فضای مشبکه [۲] گوییم، در صورتی که X فضای مرتب و به ازای هر دو عنصر $x, y \in X$ مقادیر $\inf\{x, y\}$ و $\sup\{x, y\}$ در X موجود باشند.

مثال ۵.۱.۷. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ با ترتیب قاموسی یک فضای مشبکه است.

مثال ۶.۱.۷. فضای $C(X)$ تمام توابع پیوسته روی فضای توپولوژیک فشرده X، یک فضای مشبکه است.

تعریف ۷.۱.۷. فرض کنید X یک فضای مرتب، عنصر $\mathbf{1}_X \in X$ را یک عنصر یکه قوی می‌نامند، در صورتی که برای هر $x \in X$، یک λ موجود باشد به طوری که $x \leq \lambda.\mathbf{1}_X$.

تعریف ۸.۱.۷. [۸۶] فرض کنید X یک فضای مشبکه باشد. در این صورت به ازای هر $x \in X$، $|x|$ و x^+, x^- را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$| x | = \sup\{x, -x\}.$$

$$x^+ = \sup\{x, \circ\}, \;\; x^- = \inf\{x, \circ\}.$$

فرض کنید X یک فضای مشبکه با عنصر یکه $\mathbf{1}_X$ باشد. روی این فضا می‌توان به کمک عنصر یکه قوی نرم زیر را تعریف کرد:

$$\| x \| = \inf\{\lambda \geq \circ : | x | \leq \lambda \mathbf{1}_X\}, \;\; (x \in X). \tag{۴.۷}$$

بدیهی است که $\|.\|$ در شرایط اول و دوم نرم صدق می‌کند. اینک نشان می‌دهیم که در شرط نامساوی مثلث نیز صدق می‌کند. فرض کنید $x, y \in X$، در این صورت بنا به خواص قدر مطلق و تعریف (۴.۷) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |x+y| \mathbf{1}_X &\leq |x| \mathbf{1}_X + |y| \mathbf{1}_X \\ &\leq (\|x\| + \|y\|) \mathbf{1}_X \\ &\Rightarrow \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

[۲] Lattice

همچنین با توجه به نرم فوق، گوی به مرکز x و شعاع r به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$B(x,r) = \{y \in X : \ -r\mathbf{1}_X \leq y - x \leq r\mathbf{1}_X\}. \tag{۵.۷}$$

مثال ۹.۱.۷. فرض کنید $(S, \sum, \mu)$ فضای اندازه پذیر باشد. در این صورت $L_\infty(S, \sum, \mu)$ فضای تمام توابع به طور اساسی کراندار روی S با عنصر یکه $\mathbf{1}$ که برای هر $s \in S$، $\mathbf{1}(s) = ۱$، با نرم زیر

$$\|x\| = ess\sup_{s\in S} |x(s)|, \ (x \in L_\infty(S, \sum, \mu)).$$

یک فضای نرمدار مشبکه است.

مثال ۱۰.۱.۷. فرض کنید $X = \mathbb{R} \times Y$ که Y یک فضای نرمدار با نرم $\|.\|$ و K گراف نرم یعنی $K := \{(\lambda, x) : \lambda > \|x\|\}$. بدیهی است که K یک مخروط محدب بسته با عنصر یکه قوی $(۱, ۰) = \mathbf{1}$ است، یک رابطه جزیی بنا به تعریف ۵.۱.۱، توسط K روی X تعریف می‌شود. اینک برای هر $(c, y) \in X$ داریم

$$\begin{aligned} p(c,y) &= \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : (c,y) \in \lambda\mathbf{1}\} \\ &= \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : (\lambda, ۰) - (c,y) \in K\} \\ &= \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : (\lambda - c, -y) \in K\} \\ &= \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda - c \geq \|-y\|\} = c + \|y\|. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \|(c,y)\| &= \max\{p(c,y), p(-(c,y))\} \\ &= \max\{c + \|y\|, -c + \|y\|\} = |c| + \|y\|. \end{aligned}$$

لذا X یک فضای نرمدار مشبکه است.

در ادامه قصد داریم یک رابطه جزیی روی فضاهای $X \boxtimes Y$ تعریف نماییم و با توجه به نرم فضاهای مشبکه قضایای تقریب پذیری مرتبط با مجموعه‌های رو به پایین و رو به بالا (ر. ج. ک تعریف ۲.۱.۱۱) را در این فضا بیان کنیم.

تعریف ۱۱.۱.۷. فرض کنید Y یک فضای مشبکه باشد، به کمک ترتیب این فضا می‌توان یک رابطه ترتیب جزیی روی $X \boxtimes Y$ به صورت زیر تعریف کرد:

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i \boxtimes y_i \leq \sum_{i=۱}^{m} a_i \boxtimes b_i \Leftrightarrow \sum_{i=۱}^{n} \phi(x_i) y_i \leq \sum_{i=۱}^{m} \phi(a_i) b_i, \ (\forall \phi \in X^\times).$$

هم چنین نرم تعریف شده (۴.۷) را می‌توان به شکل زیر نیز بیان کرد:

$$\|z\|_\boxtimes = \sup_{\phi \in X^\times} \inf\{\lambda : |\sum_{i=۱}^{n} \phi(x_i) y_i| \leq \lambda \mathbf{1}_Y\}.$$

لم ۱۲.۱.۷. فرض کنید X یک جبر باناخ یکدار با عنصر همانی e_X باشد. در این صورت به ازای هر $0 \neq \phi \in X^{\times}$، $\phi(e_X) = 1$.

برهان. از اینکه $e_X = e_X e_X$ و $\phi \in X^{\times}$ خواهیم داشت:

$$\phi(e_X) = \phi(e_X e_X) = \phi(e_X)\phi(e_X).$$

بنابراین $\phi(e_X) = 1$. □

لم ۱۳.۱.۷. فرض کنید X، یک جبر جابجایی یکدار باناخ با عنصر همانی e_X و Y، یک فضای مشبکه با عنصر 1_Y باشد. در این صورت $\|e_X \boxtimes 1_Y\|_{\boxtimes} = \lambda(e_X \otimes 1_Y) = 1$.

برهان. فرض کنید $\phi \in X^{\times}$. بنا به لم ۱۲.۱.۷، $\phi(e_X) = 1$. بنابراین داریم

$$\|e_X \boxtimes 1_Y\|_{\boxtimes} = \sup_{\phi \in X^{\times}} \|\phi(e_X)1_Y\| = \|1_Y\| = 1.$$

هم چنین

$$\begin{aligned}
\lambda(e_X \otimes 1_Y) &= \sup\{\|\phi(e_X)1_Y\|, \|\phi\| = 1, \phi \in X^*\} \\
&= \|1_Y\| \sup\{\|\phi(e_X)\|, \|\phi\| = 1, \phi \in X^*\} \\
&= \|1_Y\|\|e_X\| = 1.
\end{aligned}$$

□

گزاره ۱۴.۱.۷. فرض کنید U یک زیر مجموعه رو به پایین بسته از $X \boxtimes Y$ باشد. در این صورت گزاره های زیر برقرارند.

(۱) اگر $z = \sum_{i=1}^{m} x_i \boxtimes y_i \in U$. در این صورت برای $\varepsilon > 0$،

$$z - \varepsilon e_X \boxtimes 1_Y \in \mathrm{intU}.$$

(۲) $\mathrm{intU} = \{\mathrm{w} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{a_i} \boxtimes \mathrm{b_i} \in \mathrm{X} \boxtimes \mathrm{Y} : \exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } \mathrm{w} + \varepsilon \mathrm{e_X} \boxtimes 1_{\mathrm{Y}} \in \mathrm{U}\}$.

اثبات: (۱). فرض کنید $z \in U$ و N یک همسایه باز از $z - \varepsilon e_X \boxtimes 1_Y$ باشد. بنابراین

$$N := \{\sum_{i=1}^{n} a_i \boxtimes b_i \in X \boxtimes Y : \|\sum_{i=1}^{n} a_i \boxtimes b_i - (z - \varepsilon e_X \boxtimes 1_Y)\|_{\boxtimes} < \varepsilon\}.$$

بنا به (۵.۷) و (۱.۷) داریم

$$|\sum_{i=1}^{n} \phi(a_i)b_i - \sum_{i=1}^{m} \phi(x_i)y_i - \varepsilon 1_Y| \leq \varepsilon 1_Y, \quad (\forall\, \phi \in X^{\times}).$$

با توجه به تعریف ۱۱.۱.۷ خواهیم داشت:

$$N := \{\sum_{i=1}^{m} a_i \boxtimes b_i \in X \boxtimes Y : \sum_{i=1}^{m} a_i \boxtimes b_i - 2\varepsilon e_X \boxtimes 1_Y \leq z \leq \sum_{i=1}^{m} a_i \boxtimes b_i\}.$$

چون U یک مجموعه رو به پایین و بسته است، لذا $\sum_{i=1}^{m} a_i \boxtimes b_i \in U$. بنابراین $N \subseteq U$. در نتیجه $\sum_{i=1}^{m} x_i \boxtimes y_i - \varepsilon e_X \boxtimes 1_Y \in \mathrm{intU}$.

(۲). فرض کنید $z = \sum_{i=1}^{m} x_i \boxtimes y_i \in \mathrm{intU}$. در این صورت $\varepsilon_0 > 0$ موجود است به طوری که $B(z, \varepsilon_0)$ زیر مجموعه ای از U است. لذا $z + \varepsilon_0 e_X \boxtimes 1_Y \in U$. برعکس. اگر $\varepsilon > 0$ موجود باشد که $z + \varepsilon e_X \boxtimes 1_Y \in U$، آنگاه بنا به قسمت اول داریم $z = z + \varepsilon e_X \boxtimes 1_Y - \varepsilon e_X \boxtimes 1_Y \in \mathrm{intU}$ و این اثبات را کامل می‌کند.

قضیه ۱۵.۱.۷. فرض کنید U یک زیر مجموعه رو به پایین و بسته از $X \boxtimes Y$ باشد. در این صورت U یک مجموعه تقریب پذیر در $X \boxtimes Y$ است.

برهان. فرض کنید $z = \sum_{i=1}^{m} x_i \boxtimes y_i$ عنصر دلخواهی از $X \boxtimes Y \backslash U$ و $r = d(z, U)$. این ایجاب می‌کند که برای هر $\varepsilon > 0$ عنصر $\sum_{i=1}^{n} u_i^{\varepsilon} \boxtimes v_i^{\varepsilon}$ از U موجود است به قسمی که

$$\|z - \sum_{i=1}^{n} u_i^{\varepsilon} \boxtimes v_i^{\varepsilon}\|_{\boxtimes} < r + \varepsilon.$$

بنا به تعریف نرم خواهیم داشت

$$|\sum_{i=1}^{m} \phi(x_i) y_i - \sum_{i=1}^{n} \phi(u_i^{\varepsilon}) v_i^{\varepsilon}| \leq (\varepsilon + r) 1_Y, \ \forall \phi \in X^{\times}.$$

لذا

$$-(r + \varepsilon) 1_Y \leq \sum_{i=1}^{n} \phi(u_i^{\varepsilon}) v_i^{\varepsilon} - \sum_{i=1}^{m} \phi(x_i) y_i \leq (r + \varepsilon) 1_Y. \tag{۶.۷}$$

فرض کنید $\sum_{i=1}^{m+1} u_i^{0} \boxtimes v_i^{0} = z - r e_X \boxtimes 1_Y$. در این صورت داریم

$$\|z - \sum_{i=1}^{m+1} u_i^{0} \boxtimes v_i^{0}\| = r = d(z, U).$$

بنا به (۶.۷) داریم

$$\sum_{i=1}^{m+1} u_i^{0} \boxtimes v_i^{0} - \varepsilon e_X \boxtimes 1_Y = z - (r + \varepsilon) e_X \boxtimes 1_Y \leq \sum_{i=1}^{n} u_i^{\varepsilon} \boxtimes v_i^{\varepsilon}.$$

از اینکه U یک مجموعه رو به پایین است و $\sum_{i=1}^{n} u_i^{\varepsilon} \boxtimes v_i^{\varepsilon} \in U$ می توان نتیجه گرفت که

$$\sum_{i=1}^{m+1} u_i^{0} \boxtimes v_i^{0} - \varepsilon e_X \boxtimes 1_Y \in U.$$

چون U مجموعه بسته ایست لذا $\sum_{i=1}^{m+1} u_i^{0} \boxtimes v_i^{0} \in U$ و

$$\sum_{i=1}^{m+1} u_i^{0} \boxtimes v_i^{0} \in \mathbf{P}_U(\sum_{i=1}^{m} x_i \boxtimes y_i).$$

□

گزاره ۱۶.۱.۷. فرض کنید U یک زیر مجموعه رو به پایین بسته از $X \boxtimes Y$ و $z = \sum_{i=1}^{m} x_i \boxtimes y_i$. در این صورت $z_0 = \min \mathbf{P}_U(z)$ موجود است که $z_0 = z - re_X \boxtimes 1_Y$ که در آن $r = d(z, U)$.

برهان. اگر $z \in U$ نتیجه بدیهی است. فرض کنید $z \notin U$ و $z_0 = z - re_X \boxtimes 1_Y$. بنا به قضیه ۳.۲.۷، $z_0 \in \mathbf{P}_U(z)$. بنا بر لم ۱۳.۱.۷، $\|z - z_0\|_\boxtimes = r$ و برای هر $z \in B(z, r)$، $z \geq z_0$ این ایجاب می کند که z_0 کوچکترین عضو مجموعه $B(z, r)$ است. اینک فرض کنید که $z' \in \mathbf{P}_U(z)$ عنصر دلخواهی باشد. در این صورت $\|z - z'\|_\boxtimes = r$ و $z' \in B(z, r)$. بنابراین $z' \geq z_0$ در نتیجه z_0 کوچکترین عنصر مجموعه $\mathbf{P}_U(z)$ است. □

نتیجه ۱۷.۱.۷. فرض کنید U یک زیر مجموعه رو به پایین بسته و $z = \sum_{i=1}^{m} x_i \boxtimes y_i \in X \boxtimes Y$. در این صورت

$$d(z, U) = \min\{\lambda \geq 0 : z - \lambda e_X \boxtimes 1_Y \in U\}.$$

برهان. قرار می‌دهیم $A = \{\lambda \geq 0 : z - \lambda e_X \boxtimes 1_Y\}$. اگر $z \in U$ در این صورت $z - 0e_X \boxtimes 1_Y$. لذا $d(z, U) = 0 = \min A$. اگر $z \notin U$ و $\lambda > 0$ عنصر دلخواهی باشد که $z - \lambda e_X \boxtimes 1_Y \in U$. بنا بر لم ۱۳.۱.۷، داریم

$$\lambda = \|z - (z - \lambda e_X \boxtimes 1_Y)\|_\boxtimes \geq d(z, U) = r.$$

از طرفی دیگر بنا به گزاره ۱۶.۱.۷، $z - re_X \boxtimes 1_Y \in U$. بنابراین $r \in A$ و در نتیجه خواهیم داشت $\min A = r$. □

۲.۷ تئوری تقریب در فضای جمع مستقیم

۱.۲.۷ مجموعه‌های I_m-شبه رو به پایین در جمع مستقیم فضاهای مشبکه نرمدار

فرض کنید I یک مجموعه متناهی از اندیس ها و $(X_i)_{i \in I}$ یک خانواده از فضاهای مشبکه با عنصر یکه 1_i باشند. ما از نماد $\sum_{i \in I} X_i$ برای فضای جمع مستقیم از فضاهای مشبکه X_i استفاده کرده‌ایم. برای هر $x = (x_i)_{i \in I}, y = (y_i)_{i \in I} \in \sum_{i \in I} X_i$، عمل جمع را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x + y = (x_i + y_i)_{i \in I}.$$

ما نماد $1_\oplus$ را برای عنصر $y = (1_i)_{i \in I} \in \sum\limits_{i \in I} X_i$ به کار برده و نرم زیر را روی این فضا در نظر می‌گیریم:

$$\|x\| := \max_{i \in I} \|x_i\|_i, \ (\forall x \in \sum_{i \in I} X_i). \tag{۷.۷}$$

هم چنین رابطه ترتیب جزئی زیر را به نحو زیر تعریف می‌کنیم:

$$x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \ \ (\forall i \in I). \tag{۸.۷}$$

فرض کنید $I_m = \{i_۱, i_۲, ... i_m\}$ یک زیرمجموعه از I و $x = (x_i)_{i\in I} \in \sum_{i\in I} X_i$. مجموعه‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$(\sum_{i\in I} X_i)_x^{I_m} := \{y = (y_i)_{i\in I} \in \sum_{i\in I} X_i : x_i \geq y_i;\ i \in I_m,\ \ x_i \leq y_i;\ \ i \notin I_m\},$$

$$(co\sum_{i\in I} X_i)_x^{I_m} := \{y = (y_i)_{i\in I} \in \sum_{i\in I} X_i : x_i \leq y_i; i \in I_m,\ x_i \geq y_i;\ i \notin I_m\},$$

ما از نماد $۱_{\oplus}^{I_m}$، برای عنصر $y = (y_i)_{i\in I}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، استفاده می‌کنیم

$$y_i = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } i \in I_m \\ -۱ & \text{اگر } i \in I \setminus I_m. \end{cases} \tag{۹.۷}$$

هم چنین نماد $coPr^{I_m}(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(coPr^{I_m}(x))_i = \begin{cases} x_i & \text{اگر } i \in I_m \\ ۰ & \text{اگر } i \in I \setminus I_m \end{cases} \tag{۱۰.۷}$$

تعریف ۱.۲.۷. مجموعه $U \subseteq \sum_{i\in I} X_i$، یک زیر مجموعه I_m- شبه رو به پایین نامیده می‌شود، در صورتی که برای هر $u \in U$ ، $(\sum_{i\in I} X_i)_u^{I_m} \subseteq U$.

گزاره ۲.۲.۷. فرض کنید U یک زیر مجموعه I_m- شبه رو به پایین بسته و $x \in \sum_{i\in I} X_i$. در این صورت عبارات زیر درست هستند:

(۱) اگر $x \in U$. در این صورت برای هر $\varepsilon > ۰$ ، $x - \varepsilon ۱_{\oplus}^{I_m} \in \mathrm{intU}$.

(۲)

$$\mathrm{intU} = \{\mathrm{x} \in \sum_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}} \mathrm{X_i} : \exists\varepsilon > ۰ \text{ s.t. } \mathrm{x} + \varepsilon ۱_{\oplus}^{\mathrm{I_m}} \in \mathrm{U}\}.$$

برهان. (۱). فرض کنید $x \in U$ و N یک همسایگی از $x - \varepsilon ۱_{\oplus}^{I_m}$ باشد. به عبارت دیگر

$$N := \{y \in \sum_{i} X_i : \|y - (x - \varepsilon ۱_{\oplus}^{I_m})\| \leq \varepsilon\}.$$

فرض کنید

$$N_۱ := \{y \in \sum_{i\in I} X_i : x_i - ۲\varepsilon \leq y_i \leq x_i, (\forall i \in I_m)\},$$

$$N_۲ := \{y \in \sum_{i\in I} X_i : x_i \leq y_i ۲\varepsilon + x_i, (\forall i \in I \backslash I_m)\},$$

بنا به تعریف نرم و رابطه ترتیبی، خواهیم داشت:

$$N = N_۱ \cap N_۲.$$

بنا به تعریف $(\sum_{i\in I} X_i)_u^{I_m}$ و این که U یک زیر مجموعه I_m-شبه رو به پایین است، نتیجه می‌شود $U \subseteq N$. بنابراین $x-\varepsilon \mathbf{1}_{\oplus}^{I_m} \in \text{intU}$.

(۲). فرض کنید $x \in \text{intU}$. در این صورت $\varepsilon_\circ > \circ$ وجود دارد به قسمی که $B_{\oplus}(x,\varepsilon_\circ) \subseteq U$ بنابراین $x+\varepsilon_\circ \mathbf{1}_{\oplus}^{I_m} \in U$. برعکس. فرض کنید $\varepsilon > \circ$ موجود باشد به قسمی که $x+\varepsilon \mathbf{1}_{\oplus}^{I_m} \in U$ بنا به قسمت (۱)، $x=(x+\varepsilon \mathbf{1}_{\oplus}^{I_m})-\varepsilon \mathbf{1}_{\oplus}^{I_m} \in \text{intU}$، که این اثبات را کامل می‌کند. □

قضیه ۳.۲.۷. فرض کنید U یک زیر مجموعه شبه رو به پایین بسته از $\sum_{i\in I} X_i$ باشد. در این صورت U مجموعه تقریب پذیر در $\sum_{i\in I} X_i$ است.

برهان. فرض کنید $x_\circ \in \sum_{i\in I} X_i$ و $r=d(x_\circ,U)=\inf_{u\in U}\|x_\circ-u\|$. این ایجاب می کند که برای هر $\varepsilon > \circ$ عنصری مانند u_ε موجود است به قسمی که $\|x_\circ-u_\varepsilon\| \leq \varepsilon$. بنابراین بنا به تعریف نرم ۷.۷ داریم

$$\|(x_\circ)_i-(u_\varepsilon)_i\|_i \leq r+\varepsilon, (\forall i \in I).$$

با توجه به نرم فضاهای مشبکه X_i داریم

$$-(r+\varepsilon)\mathbf{1}_i \leq (u_\varepsilon)_i-(x_\circ)_i \leq (r+\varepsilon)\mathbf{1}_i, (\forall i \in I). \tag{۱۱.۷}$$

از (۱۱.۷) نتیجه می شود که

$$x_\circ - r\mathbf{1}_{\oplus} - \varepsilon\mathbf{1}_{\oplus} \leq u_\varepsilon.$$

از اینکه U یک مجموعه رو به پایین و بسته است، لذا $u_\circ = x_\circ - r\mathbf{1}_{\oplus} \in U$. چون $\|x_\circ-u_\circ\|=r$، بنابراین $u_\circ \in \mathbf{P}_U(x_\circ)$. لذا U یک مجموعه تقریب پذیر است. □

گزاره ۴.۲.۷. فرض کنید U یک زیر مجموعه رو به پایین بسته از $\sum_{i\in I} X_i$ و $x=\sum_{i=1}^m x_i \boxtimes y_i$. در این صورت $u_\circ = \min \mathbf{P}_U(x)$ موجود است که $u_\circ = x-r\mathbf{1}_{\oplus}$ که در آن $r=d(x,U)$.

برهان. اگر $x \in U$، نتیجه بدیهی است. فرض کنید $x \notin U$ و $u_\circ = x-r\mathbf{1}_{\oplus}$. با توجه به قضیه ۳.۲.۷، $u_\circ \in \mathbf{P}_U(x)$. برای هر $y \in B(x,r)$، $y \geq x-r\mathbf{1}_{\oplus}$. این ایجاب می کند که $u_\circ$ کوچکترین عضو مجموعه $B(x,r)$ است. اینک فرض کنید که $\acute{y} \in \mathbf{P}_U(x)$ عنصر دلخواهی باشد. در این صورت $\|x-\acute{y}\|=r$ و $\acute{y} \in B(x,r)$. بنابراین $\acute{y} \geq u_\circ$، در نتیجه $u_\circ$ کوچکترین عنصر مجموعه $\mathbf{P}_U(x)$ است. □

فرض کنید $T_m : \sum_{i\in I} X_i \to \sum_{i\in I} X_i$ نگاشتی با ضابطه $T_m(x)=y$ که برای هر $i \in I$،

$$y_i = (\mathbf{1}_{\oplus}^{I_m})_i x_i, \tag{۱۲.۷}$$

و $(coT)_m := \sum_{i\in I} X_i \to \sum_{i\in I} X_i$ با ضابطه $(coT)_m(x)=y$ که برای هر $i \in I$،

$$y_i = -(\mathbf{1}_{\oplus}^{I_m})_i x_i. \tag{۱۳.۷}$$

لم ۵.۲.۷. نگاشت‌های T_m و $(coT)_m$ تعریف شده با ضابطه (۱۳.۷) و (۱۲.۷) ایزومورفیسم هستند.

برهان. اثبات بدیهی است. $\square$

قضیه ۶.۲.۷. فرض کنید U یک زیر مجموعه I_m- شبه رو به پایین بسته از $\sum_{i\in I} X_i$ باشد و T_m و $(coT)_m$ نگاشت‌های تعریف شده با ضابطه (۱۳.۷) و (۱۲.۷) باشند. در این صورت $T_m(U)$ یک مجموعه رو به پایین و $(coT)_m(U)$ یک مجموعه رو به بالا است.

برهان. بنا به تعریف، $T_m(U)$ یک مجموعه رو به پایین است اگر و تنها اگر برای $h\in T_m(U)$ نامساوی $x\leq h$ ایجاب کند $x\in T_m(U)$. فرض کنید $h\in T_m(U)$. از این که T_m یک نگاشت ایزومورفیسم است، $w\in U$ وجود دارد به قسمی که $T_m(w)=h$. چون $x\leq h$ لذا برای هر $i\in I$، $x_i\leq h_i$. بنا به ضابطه (۱۲.۷) داریم

$$\begin{cases} x_i\leq w_i & \text{اگر}\ \ i\in I_m\\ -x_i\geq w_i & \text{اگر}\ \ i\in I\setminus I_m. \end{cases}$$

چون U یک مجموعه I_m- شبه رو به پایین است، لذا $u=(u_i)_{i\in I}$ که $u_i=(\mathbf{1}_{\oplus}^{I_m})_i x_i$ متعلق به U است. بنابراین $x=T_m(u)\in T_m(U)$ و $T_m(U)$ یک مجموعه رو به پایین است. به طور مشابه می‌توان نشان داد که $(coT)_m(U)$، یک مجموعه رو به بالا است. $\square$

تعریف ۷.۲.۷. مجموعه $U\subseteq\sum_{i\in I} X_i$ را یک زیر مجموعه I_m- شبه رو به بالا می‌نامیم، اگر برای هر $u\in U$، $(co\sum_{i\in I} X_i)_u^{I_m}\subseteq U$.

گزاره ۸.۲.۷. فرض کنید U یک زیر مجموعه I_m- شبه رو به پایین (یا رو به بالا) بسته از $\sum_{i\in I} X_i$ باشد. به طوری که برای هر $x\in\sum_{i\in I} X_i$، $r=d(U,x)$، $r'=d(T_m(U),T_m(x))$ و نیز $r''=d((coT)_m(U),(coT)_m(x))$. در این صورت $r=r'=r''$.

برهان.

$$\begin{aligned}
\|T_m(x)-T_m(u)\| &= \max_{i\in I}\|\big(T_m(x)\big)_i-\big(T_m(u)\big)_i\|_i\\
&= \max\{\max_{i\in I_m}\|x_i-u_i\|_i,\ \max_{i\in I\setminus I_m}\|u_i-x_i\|_i\}\\
&= \max_{i\in I}\|x_i-u_i\|_i\\
&= \|x-u\|.
\end{aligned}$$

با گرفتن اینفیمم روی u، داریم $r=r'$. به طور مشابه تساوی دیگر را می‌توان نشان داد. $\square$

گزاره ۹.۲.۷. فرض کنید U یک زیر مجموعه I_m- شبه رو به پایین بسته، $x\in\sum_{i\in I} X_i$ و $r=d(U,x)$. در این صورت $u_m=x-r\mathbf{1}_{\oplus}^{I_m}\in\mathbf{P}_U(x)$.

برهان. فرض کنید $x\in\sum_{i\in I} X_i$ بنا به قضیه ۶.۲.۷، $T_m(U)$ یک مجموعه رو به پایین است. لذا بنا به گزاره ۴.۲.۷، $w_\circ=\min\mathbf{P}_{T_m(U)}\big(T_m(x)\big)$ موجود است که $w_\circ=T_m(x)-r\mathbf{1}_{\oplus}$. با توجه به این که T_m بنا به لم ۵.۲.۷، یک نگاشت ایزومورفیسم است، بنابراین $u_m=T_m^{-1}(w_\circ)\in\mathbf{P}_U(x)$. $\square$

گزاره ۱۰.۲.۷. فرض کنید U یک زیر مجموعه I_m- شبه رو به پایین ، $x \in \sum_{i\in I} X_i$ و T_m همان نگاشت (۱۲.۷) باشد. در این صورت عبارات زیر برقرارند:

۱) $\mathbf{P}_U(x) = \{u \in U: \ T_m(u) \in \mathbf{P}_{T_m(U)}\big(T_m(x)\big)\}$.

۲) $d(U,x) = \min\{\lambda \geq 0 : T_m(x) - \lambda 1_{\oplus} \in T_m(U)\}$.

برهان. بنا به گزاره‌های ۸.۲.۷ ، ۹.۲.۷ و با توجه به این که T_m بنا به لم ۵.۲.۷، یک نگاشت ایزومورفیسم است، اثبات بدیهی است.

□

۲.۲.۷ مجموعه‌های I_m-شبه رو به پایین مثبت و ارتباط آن با مجموعه‌های شبه رو به پایین

مجموعه‌های زیر را در نظر بگیرید.

$$(\sum_{i\in I} X_i)_+ := \{y | y = (y_i)_{i\in I} \in \sum_{i\in I} X_i : y_i \geq 0, (\forall\, i \in I)\}.$$

$$((\sum_{i\in I} X_i)_x^{I_m})_+ := (\sum_{i\in I} X_i)_+ \bigcap (\sum_{i\in I} X_i)_x^{I_m}.$$

تعریف ۱۱.۲.۷. مجموعه $V \subseteq (\sum_{i\in I} X_i)_+$ را یک I_m- شبه رو به پایین مثبت می‌نامیم، در صورتی که برای هر $v \in V$، $((\sum_{i\in I} X_i)_v^{I_m})_+ \subseteq V$.

تعریف ۱۲.۲.۷. فرض کنید $V \subseteq (\sum_{i\in I} X_i)_+$. اشتراک تمام مجموعه‌های I_m- شبه رو به پایین شامل V را پوسته I_m- شبه رو به پایین مجموعه V می‌نامیم، و آن را با نماد V_* نمایش می‌دهیم.

گزاره ۱۳.۲.۷. فرض کنید V_* پوسته I_m- شبه رو به پایین مجموعه $V \subseteq (\sum_{i\in I} X_i)_+$. در این صورت عبارات زیر برقراراند.

۱) $V_* = \{x \in \sum_{i\in I} X_i : coP^{I_m}(x), x^+ \in V\}$.

۲) $V = V_* \bigcap (\sum_{i\in I} X_i)_+$.

برهان. فرض کنید $A = \{x \in \sum_{i\in I} X_i : coPr^{I_m}(x), x^+ \in V\}$. ابتدا نشان می‌دهیم که A یک مجموعه I_m- شبه رو به پایین است. فرض کنید $a \in A$ و $x \in \sum_{i\in I} X_i$ به قسمی که

$$\begin{cases} x_i \leq a_i & \text{اگر } i \in I_m \\ x_i \geq a_i & \text{اگر } i \in I \setminus I_m, \quad (*) \end{cases}$$

از اینکه $a \in A$ لذا $a^+ \in V$ ، $coPr^{I_m}(a)$. قرار می دهیم $y = coPr^{I_m}(x)$ و $y' = x^+$. بنا به (۱۰.۷) داریم

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{اگر } i \in I_m \\ x_i & \text{اگر } i \in I \setminus I_m. \end{cases}$$

هم چنین بنا به تعریف ۸.۱.۷ و رابطه $(*)$ خواهیم داشت

$$y_i^{'} = \begin{cases} x_i^+ \leq a_i^+ & \text{اگر } i \in I_m \\ x_i^+ \geq a_i^+ & \text{اگر } i \in I \setminus I_m. \end{cases}$$

چون V یک مجموعه I_m- شبه رو به پایین مثبت است، لذا $x^+, y \in V$. از این نتیجه می‌شود که $x \in A$. لذا A یک مجموعه I_m- شبه رو به پایین است. از اینکه $A \subseteq V$ لذا $A \subset V_*$. اینک فرض کنید $x \in A$. در این صورت $x^+ \in V \subseteq V_*$. از طرفی دیگر برای هر $i \in I$، $x_i^+ \geq x_i$. چون V_* یک مجموعه I_m- شبه رو به پایین است، لذا $x \in V_*$ بنابراین $A \subseteq V_*$. در نتیجه $A = V_*$.

(۲). بنا به قسمت اول بدیهی است . $\square$

لم ۱۴.۲.۷. فرض کنید X یک فضای مشبکه، $y \in X$ و $x \in X_+$. در این صورت

$$\|x - y\| \geq \|x - y^+\|.$$

برهان. با توجه به تعریف ۸.۱.۷، y دارای نمایشی به شکل $y = y^+ + y^-$. از اینکه $x \in X_+$ لذا $x = x^+$ و $x - y = x - (y^+ + y^-)$. بنا به تعریف قدر مطلق خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |x - y| &= (x-y)^+ - (x-y)^- \\ &= x - y^+ - y^- \geq x - y^+ \\ &= |x - y^+| \\ &\Rightarrow \|x - y\| \geq \|x - y^+\|. \quad \square \end{aligned}$$

گزاره ۱۵.۲.۷. فرض کنید V_* پوسته I_m- شبه رو به پایین مجموعه $V \subseteq (\sum_{i\in I} X_i)_+$. در این صورت برای هر $x \in (\sum_{i\in I} X_i)_+$ ، $d(V, x) = d(V_*, x)$.

برهان. آشکار است که $V \subseteq V_*$ لذا برای هر x، $d(V,x) \geq d(V_*,x)$. اینک با توجه به لم ۱۴.۲.۷ برای هر $v \in V_*$ داریم

$$\begin{aligned} \|x - v\| &= \max_{i\in I} \|x_i - v_i\|_i \\ &= \max\{\max_{i\in I_m} \|x_i - v_i\|_i, \max_{i\in I\setminus I_m} \|x_i - v_i\|_i\} \\ &\geq \max\{\max_{i\in I_m} \|x_i - v_i^+\|_i, \max_{i\in I\setminus I_m} \|x_i - v_i^+\|_i\} \\ &= \|x - v^+\| \geq d(V,x). \end{aligned}$$

بنابراین $d(V_*,x) \geq d(V,x)$. در نتیجه $d(V_*,x) = d(V,x)$. $\square$

قضیه ۱۶.۲.۷. فرض کنید U یک زیر مجموعه I_m- شبه رو به بالای بسته باشد. در این صورت $T_m(U)$ یک مجموعه رو به بالا و $coT_m(U)$ یک مجموعه رو به پایین است.

برهان. بنا به تعریف $T_m(U)$، یک مجموعه رو به بالا است اگر و تنها اگر برای $h \in T_m(U)$ نامساوی $x \geq h$ ایجاب کند $x \in T_m(U)$. فرض کنید $h \in T_m(U)$ از این که T_m بنا به لم ۵.۲.۷ یک نگاشت ایزومورفیسم است، $w \in U$ وجود دارد به قسمی که $T_m(w) = h$. چون $x \geq h$ لذا برای هر $i \in I$، $x_i \geq h_i$. بنا به ضابطه (۱۲.۷) داریم

$$\begin{cases} x_i \geq w_i & \text{اگر } i \in I_m \\ -x_i \leq w_i & \text{اگر } i \in I \setminus I_m. \end{cases}$$

چون U یک مجموعه I_m- شبه رو به بالا است. لذا $u = (u_i)_{i \in I}$ که $u_i = (\mathbf{1}_{\oplus}^{I_m})_i x_i$ متعلق به U است. بنابراین $x = T_m(u) \in T_m(U)$ و $T_m(U)$ یک مجموعه رو به بالا است. به طور مشابه می‌توان نشان داد که $(coT)_m(U)$، یک مجموعه رو به به پایین است. $\square$

نتیجه ۱۷.۲.۷. فرض کنید U یک زیر مجموعه I_m- شبه رو به بالای بسته و $x \in \sum_{i \in I} X_i$. در این صورت

$$\mathbf{P}_U(x) = \{u \in U : \; T_m(u) \in \mathbf{P}_{T_m(U)}(T_m(x))\}.$$

برهان. بنا به گزاره ۸.۲.۷ و اینکه بنا به لم ۵.۲.۷، T_m یک نگاشت ایزومورفیسم می‌باشد، اثبات بدیهی است. $\square$

نتیجه ۱۸.۲.۷. فرض کنید U یک زیر مجموعه I_m- شبه رو به بالای بسته، $x \in \sum_{i \in I} X_i$ و $r = d(U, x)$. در این صورت $u_m = x + r\mathbf{1}_{\oplus}^{I_m} \in \mathbf{P}_U(x)$.

برهان. اثبات بنا به قضیه ۱۶.۲.۷، $T_m(U)$ یک مجموعه رو به بالا است. از اینکه $T_m(U)-$ یک مجموعه رو به پایین است. لذا با توجه گزاره ۹.۲.۷، $u_\circ = \max \mathbf{P}_{T_m(U)}(T_m(x))$ موجود است که $u_\circ = T_m(x) + r\mathbf{1}_{\oplus}^{I_m}$. با توجه به نتیجه ۱۷.۲.۷، خواهیم داشت $u_m = T_m^{-1}(u_\circ) \in \mathbf{P}_U(x)$. $\square$

نظرات و پیشنهادات

یکی از مباحث اخیر در ریاضیات بحث تانسورها می‌باشد. با توجه به اهمیت این مسئله در فیزیک کوانتمی و هندسه دیفرانسیل و....می‌طلبد که اقدامات پژوهشی درخوری در این راستا انجام شود. هرچند در فصل هفتم این رساله، تئوری تقریب را در فضای شبه تانسوری از جبرهای باناخ برای مجموعه‌های رو به پایین (مطابق مقاله [۶۰]) مورد بررسی قرار داده‌ایم، لیکن این بحث در فضای تانسورهای جبری دارای مسائل باز بسیاری است که می‌تواند پس از این مورد بررسی قرار گیرد.
همچنین در سالهای اخیر مفاهیم بسیاری از فضای نرمدار به فضای نرمدار فازی تعمیم داده شده است. از جمله این مسائل نظریه تقریب در فضای نرمدار فازی است که در علوم مهندسی و تقریب توابع کاربرد داشته و نیز در بالا بردن کیفیت تصویر و حذف اغتشاش‌های آن تاثیر قابل توجهی دارد. لذا با ارائه این موضوع در فضاهای نرمدار فازی مختلف می‌توان مباحث جدید بیشتری را طرح نمود. از جمله این فضاهای جدید C^*-جبرهای فازی است که نویسنده احتمال می‌دهد در آنها نیز بتوان مشابه با C^*-جبرها و نظیر قضایای تقریب در فضای نرمدار، به نتایج جالبی رسید.

مراجع

[1] T. J. Abatzoglu, *Norm derivatives on spaces of operators*, Math. Ann. 239 (1979) 129–135.

[2] T. Abdeljawad, *Completion of cone metric spaces*, Hacet. J. Math. Stat. 39(1) (2010) 67-74.

[3] G. C. Ahuja, T. D. Narang, T. Swaran, *On farthest points*, J. Ind. Math. Soc. 39 (1975) 293-297.

[4] Sh. Al-Sharif. M. Rawashdeh, *Simultaneously remotal sets in $L_\infty(I;X)$,* Int. J. Math. Scien. Vol. 2011. (2011) pp. 1-10.

[5] E. Asplund, *Cebysev sets in Hilbert space*, Trans. Amer. Math. Soc. 144 (1969) 235-240.

[6] L. Arambasic, R. Rajic, *On the C^*- valued triangle equality and inequality in Hilbert C^*-modules,* Acta. Math. Hung. 119 (4) (2008) 373-380.

[7] S. Axler, I. Berg, N. P. Jewell, A. Shields, *Best approximation by compact operators and the space $H^\infty + C$*, Annal. Math. 109 (1979) 601-612.

[8] T. Bag, S. K. Samanta, *Finite dimentional fuzzy normed linear spaces*, J. Fuzzy Math. 11(3) (2003) 678-705.

[9] P. Bandyopadhyay, B. Lin. T. S. S. R. K. Rao, *Ball remotal subspaces of Banach spaces*, Colloq. Math. 114 (2009) 119-133.

[10] P. Bandyopadhayay, T. Paul, *Ball remotality in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. 369 (2010) 525-536.

[11] P. Bandyopadhayay, T. Pau, A. K. Roy, *Ball remotality of M-ideals in some function spaces and function algebras*, Positivity. 14 (2010) 459–471.

[12] Y. E. Bao, C. X. Wu, *Convexity and semicontinuity of fuzzy mappings,* Comput. Math. Appl. 51 (2006) 1809-1816.

[13] M. Baronti, *A note on remotal sets in Banach space*, Publ. Inst. Math. 67 (1993) 95-98.

[14] H. H. Bauschke, P. L. Combettes, *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces*, Springer, New York, 2011.

[15] R. Biswas, *Fuzzy innerproduct spaces and fuzzy norm function*, Info. Scien. 53 (1991) 185-190.

[16] G. Birkhoff, *Orthogonality in linear metric spaces,* Duke Math. J. 1(2) (1935) 169-172.

[17] T. Bhattacharyya, P. Grover, *Chracactheriztion of birkoff-jams orthogonality*, J. Math. Anal. Appl. 407(2) (2013) 350-358.

[18] D. P. Blecher, *A new approach to Hilbert C*-modules,* Math. Ineq. Appl. (2013) 743–749

[19] R. Bouldin, *Positive approximants,* Trans. Amer. Math. Soc. 177 (1973) 391-403.

[20] R. Bouldin, *Best approximation of a normal operator in the Schatten p-norms,* Proc. Amer. Math. Soc. 80 (1980) 277–282.

[21] S. C. Cheng, J. N. Mordeson, *Fuzzy linear operator and fuzzy normed linear spaces,* Bull. Calcutta Math. Soc. 86 (1994) 429-436.

[22] E. W. Cheney, *Introduction to approximation theory,* McGraw-Hill, New York, 1966.

[23] Y. J. Cho, P. C. S. Lin, S. S. Kim. A. Misiak, *Theory of 2-inner product spaces*, New York, Nova Science Publishes, 2001.

[24] R. Cominetti, R. Correa, *A generalized second-order derivative in nonsmooth optimization*, SIAM J. Control Optim. 28 (1990) 789–809.

[25] J. B. Conway, *A course in function analysis*, Springer -Verlag. New. York, 1985.

[26] J. B. Conway, *A course in operator theory*. Graduate studies in mathematics, American mathematical Soc. Island, 2000.

[27] R. Deville, V. E. Zizler, *Farthest points in w*-compact sets*, Bull. Austral. Math. Soc. 38 (1988) 433-439.

[28] F. Deutsch, *Best approximation in inner product spaces*, Springer, New York, 1998.

[29] F. Deutsch, W. Li, J. D. Ward, *Best approximation from the intersection of a closed convex set and a polyhedron in Hilbert space, weak Slater conditions, and the strong conical hull intersection property,* J. Control Optimiz. 10 (2000) 252-268.

[30] C. Diminnie, S. Gahler, A. White, *2-inner product spaces*, Demonstratio Math. 6 (1973) 525-536.

[31] N. Dunford, J. Schwartz, *Linear operator. part I: General theory*, Interscienece Publ, New York, 1958.

[32] C. B . Dunham, *Characterizability and uniqueness in real Chebyshev approximation*, J. Approx. Theory. 2 (1969) 374-383.

[33] M. Edelstein, *Farthest points of sets in uniformly convex Banach spaces,* Israel J. Math. 4(1966), 171-176.

[34] A. M. El-Abyad, H. M. El-Hamouly, *Fuzzy inner product spaces,* J. Fuzzy Syst. 44 (2) (1991) 309-326.

[35] J. Fang, H. Huang, *On the level convergence of sequence of fuzzy numbers*, J. Fuzzy Syst. 147 (2004) 417-435.

[36] K. Fan, A. Hoffman, *Some metric inequalities in the space of matrices*, Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955) 111-116.

[37] C. Felbin, *Finite dimensional fuzzy normed linear space*, J. Fuzzy Syst. 48 (1992) 239-248.

[38] C. Felbin, *The completion of a fuzzy normed linear space*, JMAA. 174(2) (1993) 428-440.

[39] C. Felbin, *Finite dimensional normed linear space II,* J. Anal. Math. 7 (1999) 117-131.

[40] C. Franchetti, M. Furi, *Some characteristic properties of real Hilbert spaces*, Rev. Roumaine de Math. Pure et App. 17, (1972) 1045-1048 .

[41] C. Franchetti, I. Singer, *Deviation and farthest points in normed linear spaces*, Rom. Pure App. Math. 24 (1979) 373-381.

[42] R. W. Freese, Y. J. Cho, *Characterizations of linear 2-normed spaces,* Math. Japon. 40 (1994) 115122.

[43] R. W. Freese, Y. J . Cho, *Geometry of Linear 2-normed spaces*, Nova Science Publishers, New York, 2001.

[44] W. Fupinwong. S. Dhompongsa, *The fixed point property of unital abelian Banach algebras*, Fixed Point Theory A. Vol. 2010, (2010) pp. 1-13.

[45] Gahler, *Lineare 2-normierte,* Math. Nachr. 28 (1965) 1-43.

[46] G. Godini, *Best approximation in normed linear spaces by elements of convex cones,* Studii si Cercet. Math. 21 (1969) 931-936.

[47] R. Goetschel, W. Voxman, *Elementary fuzzy calculus*, J. Fuzzy Systs. 18 (1986) 31-42.

[48] M. Goudarzi, S. M. Vaezpour, *On the definition of fuzzy Hilbert spaces and its application*, J. Nonlinear Sci. Appl. 2 (1) (2009) 46-59.

[49] N. H. Gunawan, G. S. Mashadi, I. Sihwaningrum, *Orthogonality in 2-normed sapces revisited*, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Math. 17 (2006) 76-83.

[50] P. Halimos, *Positive approximants of operators,* Indiana Math. J. 21 (1972) 951-960.

[51] P. R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[52] P. K. Harikrishnan, B. Guilln, K. T. Ravindran, *Accretive operators and Banach Alaoglu theorem in Linear 2-normed spaces,* J. Math. 30(3) (2011) 319-327.

[53] A. Hasankhani, A. Nazari, M. Saheli, *Some properties of fuzzy Hilbert spaces and norm of operators*, Iranian J. Fuzzy Systs. 7(3) (2010) 129-157.

[54] R. B. Holmes, *Geometric functional analysis and its applications*, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag. 1975.

[55] R. B. Holmes, *A course on optimization and best approximatio*, Lecture Notes 257, Springer-Verlag, New York. 1972.

[56] R. B. Holmes, B. R. Kripke, *Best approximation by compact operators,* Indiana Univ. Math. J. 21 (1971) 255-263.

[57] M. Iranmanesh, H. Mohebi, *Best simultaneous approximation in tensor product Spaces*, J. App. Math. Sci. 1(18) (2007) 883- 894.

[58] M. Iranmanesh, F. Soleimany, *Best approximation problem in Hilbert operators spaces,* submit.

[59] M. Iranmanesh, F. Soleimany, *Farthest points in Hilbert operator spaces with applications*, Int J. Pure Appl. Math. 99(2) (2015) 191 - 200.

[60] M. Iranmanesh, F. Soleimany, *Best approximation in quasi tensor product space and some lattice normed spaecs*, J. Algebra Syst. 2(1) (2014) 67-81.

[61] M. Iranmanesh, F. Soleimany, *Fuzzy numerical range Hilbert operators with applications*, to appear.

[62] M. Iranmanesh, F. Soleimany, *On quasi-Chebyshevity subsets of unital Banach algebras*, submit.

[63] M. Iranmanesh, F. Soleimany, *Some results on farthest points in 2-normed spaces* , Novi Sad J. Math. 46(1) (2016) 207-215.

[64] M. Iranmanesh, F. Soleimany, *2-Banach algebras and best approximation of Subalgebras*, submit.

[65] R. Jiang, *A note on the triangle inequality for the C^*-valued norm on a Hilbert C^*-module*, Math. Inequal. Appl. 16(3) (2013) 743-749.

[66] O. Kaleva, S. Seikala, *On fuzzy metric spaces*, J. Fuzzy Syst. 12 (1984) 215-229.

[67] A. K. Katsaras. *Fuzzy topological vector spaces II*, J. Fuzzy Syst. 12 (1984) 143-154.

[68] R. Khalil, Sh. Al-Sharif, *Remotal sets in vector valued function spaces,* Sci. Math. Japonica. 63(3) (2006) 433-441.

[69] C. K. Kiwiel, *Convergence and efficiency of subgradient methods for quasiconvex minimization,* Mathematical programming, Springer, 2001.

[70] J. K. Kohli, R. Kumar, *On fuzzy inner product spaces and fuzzy co-inner product spaces,* J. Fuzzy Systs. 53 (2) (1993) 227-232.

[71] B. Kolarec, *Inequalities for the C*-valued norm on a Hilbert C*-module,* Math. Ineq. Appl. 12(4) (2009) 745-751.

[72] I. Kramosil, J. Michelek, *Fuzzy metric and statistical metric spaces*, J. Kybernetica. 11 (1975) 326-334.

[73] S. V. Krishna, K. M. Sarma, *Separation of fuzzy normed linear spaces,* J. Fuzzy Syst. 63 (1994) 207-217.

[74] S. N. Lal, S. Bhattacharya, E. Keshava , *2-norm on an algebra I,* Prog. Math. 35 (2001) 27-32.

[75] K. S. Lau, *Farthest points in weakly compact sets,* Israel J. Math. 22 (1975) 168-174.

[76] C. Li, R. Ni, G. A. Watson, *On nonlinear co-approximation in Banach spaces*, J. Approx Theory. Appl. 17(2) (2001) 54-63.

[77] Z. Lewandowska, *Linear operators on generalized 2-normed spaces*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. 42 (1999) 353-368.

[78] Z. Lewandowska, *Bounded 2-linear operators On 2-normed sets*, Glas. Math. 39(59) (2001) 303-314.

[79] Z. Lewandowska, M. S . Moslehian, A. S. Moghaddam, *Hahn-Banach theorem in generaizrd 2-normed spaces,* Comm. Math. Anal. 1(2) (2006) 109-113,

[80] W. A. Light, E. W. Cheney, *Approximation theory in tensor product spaces*, Springer, 1985.

[81] B. Magajna. *On the distance to the finite-dimensional subspaces in operator algebras*, J. London Math. Soc. 47(2), (1993) 516-532.

[82] H. Mazaheri, R. Kazemi, *Some results on 2-inner product spaces*, Novi Sad J. Math. 37(2) (2007) 35-40.

[83] H. Mazaheri, S. M. S. Modarres, *Some results concerning proximinality and coproximinality,* Nonlinear Anal. 62(6) (2005) 1123-1126.

[84] P. Mazumdar, S. K. Samanta, *On fuzzy inner product spaces,* J. Fuzzy Math. 16(2) (2008) 377-392.

[85] N. Mohammad, A. H. Siddiqui, *On 2-Banach algebras*, Aligarh Bull. Math. 12 (1987-89) 51-60.

[86] H. Mohebi. A. M. Rubinov, *Best approximation by downward sets with applications,* Anal. Theory Appl. 22(1) (2006) 20-40.

[87] H. Mohebi, H. Mazheri, *Best approximation reflexive subspace of $L(X,Y)$*, Soochow J. Math. 27(3) (2001) 255-266.

[88] G. I. Murphy, *The C^*-algebra and operator theory*, Academic. Press, London, 1990.

[89] E. Naraghirad, *Characterizations of simultaneous farthest point,* Optimi. Lett. 3 (2009) 89-100.

[90] T. D. Narang, *A study of farthest point,* Arch. Math. 25 (1977) 54-79.

[91] T. D. Narang, *Best co-approximation in metric spaces,* Publ. Inst. Math. 51(65) (1992) 71-76.

[92] T. Ogasawara, *Finite-dimensionality of certain Banach algebras,* J. Sci. Hiroshima Univ, Ser A. 17 (3) (1954) 359-364.

[93] P. L. Papini, I. Singer, *Best co-approximation in normed linear spaces,* J. Math. 88 (1979) 27-44.

[94] B. B. Panda, O. P. Kapoor, *On farthest points of sets*, J. Math. Anal. Appl. 62 (1978), 345-353.

[95] G. K. Pedersen, *Chebychev subspaces of C*-algebras,* Math. Scand. 45(1) (1979) 147–156.

[96] G. S. Rao, K. R. Chandrasekaran, *Characterization of elements of best co-approximation in normed linear spaces*, Pure Appl. Math. Sci. 26 (1987) 139-47.

[97] S. Rezapour, *Quasi-Chebyshew subspaces in generalized 2-normed spaces*, Inter. J. Pure Appl. Math Scien. 2(1) (2005) 53-61.

[98] M. A. Rieffel, *Leibniz seminorms and best approximation from C*-subalgebras,* Sci. China Math. 54(11) (2011) 2259-2274.

[99] J. Schauder, *Der fixpunktsatz in funktionalräumen*, Studia Math. 2 (1930) 171-180 .

[100] I. Singer, *The theory of best approximation and functional analysis,* in " Regional conference series in applied mathematics," Vol. 13, SIAM, Philadelphia, 1971.

[101] N. Srivastava, S. Bhattacharya, S. N. Lal, *2-normed algebras-II,* Publ. Inst. Math, Nouv. Sr. 90(104) (2011) 135-143.

[102] Y. Syaua, L. Sugianto, E. S. Lee, *A class of semicontinuous fuzzy mappings,* App. Math Lett. 21 (2008) 824-827.

[103] O. Talo, *Some properties of limit inferior and limit superior for sequences of fuzzy real numbers,* Infor. Sc. 279 (2014) 560-568.

[104] S. M. Vaezpour, F. Karimi, *t-Best approximation in fuzzy normed spaces,* Iran. J. Fuzzy Syst. 5(2) (2008) 93-99.

[105] P. Veeramani, *Best approximation in fuzzy metric spaces,* J. Fuzzy Math. 9(1) (2001) 75-80.

[106] S. Vijayabalaji, *Fuzzy strong n-inner product space*, Int. J. Appl. Math. 1(2) (2010) 176-185.

[107] S. Vijayabalaji, *Equivalent fuzzy strong n-inner product space,* Int. J. Computer Math. 4(4) (2011) 26-32.

[108] L. P. Vlasov, *Chebyshev sets and some their generalizations,* Math. Z. 3(1) (1968) 59-69.

[109] A. Webe, G. Reissig, *Local characterization of strongly convex sets,* J. Math. Anal. Appl. 400 (2013) 743–750.

[110] J. Z. Xiao, X. H. Zhu, *Fuzzy normed spaces of operators and its completeness,* J. Fuzzy Syst. 133(3) (2003) 389-399.

[111] W. S. Yang, C. Li, G. A. Watson, *Characterization and uniqueness of nonlinear uniform approximation*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 40 (1997) 473-482.

[112] V. Zizler, *On some extremal problems in Banach spaces,* Math. Scand. 32 (1973) 214-224.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ابر صفحه	Hyperplane
الحاق	Adjoint
انتقال	Translate
انقباضی	Contractiv
ایزومتری	Isometri
اینفیمم	Infimum
برد عددی	Numerical rang
برو	Onto
بست	Closure
بهترین تقریب	Best approximation
پایه	Basis
پیوسته	Continuous
پیما	Span
تابعک	Functional
تام	Complete
تبدیل	Transfor
تحدید	Restriction
ترتیبی	Ordinal
توپولوژی ضعیف ستاره	Weak* topology
چگال	Density
حاصل ضرب	Product
حالت	State
حد	Limit
دنباله همگرا	Convergent sequence
سوپرمم	Supremum

شعاع طیفی .... Radius spectrum

طیف .... Spectrum

عدد حقیقی فازی .... Real fuzzy number

عملگر .... Operator

عملگر فشرده .... Compact operator

فرین .... Eexternal

فضای دوگان .... Dual space

فضای ضرب داخلی .... Inner product space

فضای هیلبرت .... Hilbert space

فضای عملگرهای هیلبرتی .... Hilbert space Operator

فضای مدولی .... Modoul space

قضیه .... Theorem

قوی .... Strong

کراندار .... Bounded

گوی .... Ball

مثبت .... Positive

متمم .... Complement

مجموع .... Sum

مجموعه تقریب پذیر .... Proximinal set

مجموعه چیبیشف .... Chebyshev set

مجموعه رو به پایین .... Downward set

مجموعه فازی .... Fuzzy set

محدب .... Convex

مشتق .... Derivative

مشخصه .... Character

نامساوی مثلث .... Triangle inequality

نقطه ثابت .... Fixed Point

نقطه دور .... Farthest Point

نگاشت انقباضی .... Non-expansive map

نگاشت تقریب .... Proximity map

هسته .... Kernel

همریختی .... Homomorphism

همگرایی .... Convergence
یکریختی .... Isomorphism
یکه .... Unit

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adjoint .... الحاق
Approximate unit .... تقریب یکه
Ball .... گوی
Banach algebra .... جبر باناخ
Best Approximation .... بهترین تقریب
Borel mesurable .... اندازه بورل
Bounded .... کراندار
Boundery .... مرزی
C^* -algebra .... جبر
Characteristic .... مشخصه
Chebyshev .... چبیشف
Closed set .... مجموعه بسته
Closure .... بستار
Coapproximation .... هم تقریب
Commutant .... جابه جا
Compact .... فشرده
Complete .... تام
Continuous .... پیوسته
Convergent sequence .... دنباله همگرا
Convex .... محدب
Convex hull .... پوسته محدب
Decreasing .... نزولی
Diffomorphism .... دیفومورفیسم
Directed set .... مجموع مستقیم
Downward .... رو به پایین

Dual space .... فضای دوگان
Embedding .... نشاندن
Existence .... وجود
Extreme point .... نقطه فرین
Faithful representation .... نمایش
Fixed point .... نقطه ثابت
Functional .... تابعک
Fuzzy .... فازی
Gelfand-Naimark .... گلفند-نیمارک
Hahn-Banach .... هان -باناخ
Hausdorff space .... فضای هاسدورف
Hermitian element .... عنصر هرمیتی
Hilbert Space .... فضای هیلبرت
Hilbert-Schmidt .... هیلبرت اشمیت
Homeomorphism .... هومومورفیسم
Hyperplane .... ابر صفحه
Infimum .... اینفیمم
Inner product space .... فضای ضرب داخلی
Interior .... درونی
Involution .... پیچش
Isometry .... ایزومتری
Isomorphism .... ایزومورفیسم
Kernel .... هسته
Linear .... خطی
Maximal element .... عنصر ماکسیمال
Modular .... مدولی
Neighborhood .... همسایگی
Normal .... نرمال
Non-expansive map .... نگاشت انقباضی
Null set .... مجموعه پوچ
Operator .... عملگر
Order space .... فضای مرتب

Orthogonal set .... مجموعه متعامد
Projection .... تصویر
Proximity map .... نگاشت تقریب
Representation .... نمایش
Semicontinuous .... نیمه پیوسته
Separate .... جدا کننده
Spectral .... طیف
Strong topology .... توپولوژی قوی
Subadditvity .... زیرجمعی
Theorem .... قضیه
Uniform .... یکنواخت
Unit .... یکتا
Weak topology .... توپولوژی ضعیف
Weak* topology .... توپولوژی ضعیف ستاره

Aabstract

In this thesis, we shall study approximation theory in some Banach algebras (such as : operator algebras, C^*-algebras and Hilbert module spaces). For this purpose, after that we give some preliminary results and definitions about these spaces, examined all the most important issues approximation theory: best approximation, farthest point, uniqueness, co-approximation and simultaneous approximation. A technique of derivation and a technique of linear operators which used to express the characteristics of these points. In order to, we use numerical range of operators and its relations to derivative values. Also we extend to C^*-algebras some results by using of the Gelfand-Naimark theorem. In the following, we introduce the approximation theory in fuzzy algebra operators and module spaces. Then we present some results as generalization of well-known theorems of approximation theory in the setting of 2-Banach algebras. In the end, we give some results on the proximinality of particular subsets in quasi tensor product and direct sum spaces.

Keywords: Approximation theory, Hilbert operators, C^*-algebra, Fuzzy operators,

2-Banach algebra.

Shahrood University of Technology
Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Dissertation in Pure Mathematics-Analysis

Approximation Theory on some Banach Algebras and Module spaces

by:

Fatemeh Soleimany

Supervisor:

Dr. Mahdi Iranmanesh

September 2016