دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

حاصل‌ضرب ثابت عناصر در حلقه چندجمله‌ای‌های اریب

مینا صادقلو

استاد راهنما

دکتر ابراهیم هاشمی

استاد مشاور

دکتر عبدالله آل‌هوز

شهریور ۱۳۹۵

تقدیم به پدر و مادرم،

دو فرشته‌ی زمینی زندگی من!

سپاس گزاری...

سپاس خداوندی را که تنی سالم و روانی ریاضت طلب به من عطا نمود تا در تاریکی جهل و نادانی، کورسویی از علم و دانش بیابم.

سپاس پدر و مادرم را، که هم چون کوه تکیه گاه و حامی ام بوده اند و چون دریا، همواره در مهرشان غوطه ور بوده ام.

سپاس آموزگاران و اساتیدم را، که چون انبیا چراغ هدایت به دست گرفته و مسیر آزاده زیستن و نه آزادی بدون اندیشه را یادم دادند.

سپاس دوستان بهتر از جان را، که بودن کنارشان انسان را از عشق و امیدواری لبریز می کند.

خدای مهربان! تمامی داشته هایم از توست، هزاران بار تو را سپاس...

مینا صادقلو
شهریور ۱۳۹۵

تعهدنامه

اینجانب **مینا صادقلو** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **حاصل‌ضرب ثابت عناصر در حلقه چندجمله‌ای‌های اریب** ، تحت راهنمایی **دکتر ابراهیم هاشمی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه شاهرود " یا " Shahrood University of Technology " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مینا صادقلو

شهریور ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

محور اصلی این پایان‌نامه پیرامون حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب و حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های مشتق است. در واقع نشان داده می‌شود که قضیه‌ی حاصل‌ضرب ثابت عناصر که در مورد تمامی حلقه‌های برگشت‌پذیر برقرار است، برای حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب و مشتق نیز صدق می‌کند. به طور دقیق‌تر، اگر R یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر و درون‌ریختی α از R، سازگار باشد هم‌چنین $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ یک چندجمله‌ای غیرصفر در $R[x;\alpha]$ باشد به طوری که یک چندجمله‌ای ناصفر مانند $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m \in R[x;\alpha]$ وجود داشته باشد که $g(x)f(x) = c$، آن‌گاه $b_0 a_0 = c$ و عناصر ناصفر a و r در R وجود دارند به طوری که: $rf(x) = ac$. هم‌چنین با حلقه‌های ۲-اولیه و ۲-اولیه ضعیف آشنا می‌شویم. به این ترتیب عناصر یکه‌ی موجود در حلقه‌ی $R[x;\alpha,\delta]$ رده بندی می‌شوند و ثابت می‌شود که اگر R یک حلقه‌ی ۲-اولیه ضعیف و α-سازگار باشد، آن‌گاه چندجمله‌ای اریب $f(x)$ یکه است اگرو تنها اگر جمله ثابت آن در R یکه باشد و بقیه‌ی ضرایب آن پوچ‌توان باشند. نتایج موجود در این پایان نامه نه تنها مفاهیم قبل در این راستا را تعمیم می‌دهد بلکه شرایط لازم و کافی جدید را نیز فراهم می‌کند.

کلمات کلیدی: حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب، حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های مشتق، حلقه‌های برگشت‌پذیر ، حلقه‌های ۲-اولیه ، حلقه‌های (α,δ)-سازگار.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

1. Sadeghloo, M., and Hashemi, E., On unit elements of differential polynomial rings, *25th Iranian Algebra Seminar*, Hakim Sabzevari University, July 20-21, 2016.

فهرست مطالب

پیشگفتار

فرض کنیم R یک درون‌ریختی از حلقه R باشد. بنا به [۱۶]، درون‌ریختی α را صلب می‌نامیم هرگاه $a\alpha(a)=0 \iff a=0$. کرمپا [1] ثابت کرد که اگر R حلقه‌ای تقلیل یافته و α یک درون‌ریختی از R باشد، آن‌گاه درون‌ریختی α صلب است اگروتنها اگر α یک به یک بوده و هر ایده‌آل اول مینیمال را به خودش تصویر کند اگروتنها اگر برای هر ایده‌آل اول مینیمال P از حلقه R، $\alpha^{-1}(P)\subseteq P$.
آنین [2] در مقاله [۲] حلقه‌های α-سازگار را معرفی نموده است. حلقه‌ی R را α-سازگار می‌نامیم هرگاه برای هر $a,b\in R$، $ab=0 \iff a\alpha(b)=0$. هم‌چنین اگر δ یک تابع α-مشتق روی حلقه‌ی R باشد، حلقه‌ی R را δ-سازگار می‌نامیم هرگاه برای هر $a,b\in R$، $ab=0$ نتیجه دهد $a\delta(b)=0$. حلقه‌ای که هم α-سازگار و هم δ-سازگار باشد را (α,δ)-سازگار می‌نامیم.
چن [3] در مقاله [۵]، نصر اصفهانی در مقاله [۲۳] و هاشمی در مقاله [۱۰] رفتار حلقه چندجمله‌ای‌های اریب روی حلقه‌های (α,δ)-سازگار را بررسی نموده‌اند.

در فصل دوم این پایان نامه، ابتدا قضیه‌ی حاصل‌ضرب ثابت در چندجمله‌ای‌ها را به حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب روی حلقه‌های α-سازگار توسیع می‌دهیم. در واقع نشان می‌دهیم که اگر R یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر و درون‌ریختی α از R، سازگار باشد و
$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ یک چندجمله‌ای اریب ناصفر در $R[x;\alpha]$ باشد. اگر چندجمله‌ای اریب ناصفر $g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$ در $R[x;\alpha]$ وجود داشته باشد به طوری که $g(x)f(x)=c$ ثابت باشد، آن‌گاه $c=b_0a_0$ و اعضای ناصفر a و r در R به‌گونه‌ای وجود دارند که $rf(x)=ac$.
به ویژه $r=ab_p$، برای برخی p به طوری که $0\leq p\leq m$ و a یا برابر یک است یا با حاصل‌ضرب حداکثر m ضریب از $f(x)$ برابر است.
به‌علاوه اگر b_0 در R یکه باشد، آن‌گاه $a_1,a_2,\ldots,a_n$ پوچ‌توان هستند.
به عنوان نتایجی از قضیه حاصل‌ضرب ثابت، نشان می‌دهیم که اگر R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و درون‌ریختی α از R، سازگار باشد، چندجمله‌ای اریب $f(x)$ در $R[x;\alpha]$ یکه است اگروتنها اگر جمله ثابت آن یکه باشد و بقیه‌ی ضرایب آن پوچ‌توان باشند.

در فصل سوم از این پایان نامه نشان خواهیم داد که اگر R، (α,δ)-سازگار باشد، آن‌گاه R، ۲-اولیه است اگروتنها اگر $R[x;\alpha,\delta]$ ۲-اولیه باشد اگروتنها اگر $N(R)=N_*(R;\alpha,\delta)$ اگروتنها اگر

---

[1] Krempa

[2] Annin

[3] Chen

$N(R)[x;\alpha,\delta] = N_*(R[x;\alpha,\delta])$ اگروتنها اگر هر ایده‌آل (α,δ)-اول از R کاملاً اول باشد.

در فصل چهارم حلقه‌های $u.p$-تکواره را مورد بررسی قرار می‌دهیم و مفاهیم اول بودن، نیم‌اول بودن و تقلیل‌یافتگی را برای حلقه‌های $u.p$-تکواره تعمیم دهیم. هم‌چنین قضیه اصلی که در این فصل مورد بررسی قرار می‌گیرد عبارت است از این که اگر R یک حلقه و G یک $u.p$-تکواره باشد و $S = RG$. در این صورت R اول (نیم‌اول) است اگروتنها اگر S اول (نیم‌اول) باشد. هم‌چنین تقلیل‌یافتگی R با S و دامنه بودن R و S نیز با یکدیگر معادل خواهد بود. در فصل پایانی نیز نتایج به دست آمده در فصل دوم را به حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های مشتق تعمیم می‌دهیم.

مقالات اصلی مورد مطالعه در این پایان نامه، منابع [۵]، [۸] و [۲۳] می‌باشند.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ تعاریف و مفاهیم پیش‌نیاز

تعریف ۱.۱.۱. مجموعه‌ی ناتهی G همراه با عمل دوتایی * یک گروه نامیده می‌شود (با علامت $(G,*)$ نشان می‌دهند) هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱. برای هر $x,y,z\in G$، $x*(y*z)=(x*y)*z$. (شرکت‌پذیری)

۲. عنصر $e\in G$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x\in G$، $x*e=e*x=x$. (وجود عضو خنثی)

۳. برای هر $x\in G$، $y\in G$ وجود داشته باشد به طوری که $x*y=y*x=e$. (وجود عضو وارون)

تعریف ۲.۱.۱. زیرمجموعه‌ی ناتهی H از گروه G را یک زیرگروه G می‌نامیم هرگاه با عمل دوتایی القا شده از G یک گروه باشد و با علامت $H\leq G$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و N یک زیرگروه آن باشد. اگر برای هر $x\in G$، $xN=Nx$، گوییم N یک زیرگروه نرمال G است. اگر N زیرگروه نرمال G باشد آن‌گاه می‌نویسیم $N\trianglelefteq G$. واضح است که $\{1\}$ و G زیرگروه‌های نرمال بدیهی G هستند.

گزاره ۴.۱.۱. *فرض کنیم N زیرگروهی از گروه G باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. $N\trianglelefteq G$.

۲. *برای هر* $x\in G$، $xNx^{-1}=\{xnx^{-1}|n\in N\}\subseteq N$.

۳. *برای هر* $x\in G$، $xNx^{-1}=N$.

تعریف ۵.۱.۱. گروه G، یک $u.p$–گروه نامیده می‌شود، هرگاه برای زیرمجموعه‌های متناهی و ناتهی A و B از G، حداقل یک عنصر $x \in G$ وجود داشته باشد به طوری که نمایه‌ی منحصربه‌فردی به صورت $x = ab$ داشته باشد که $a \in A$ و $b \in B$.

تعریف ۶.۱.۱. مجموعه‌ی ناتهی R همراه با دو عمل دوتایی جمع "+" و ضرب "•" تعریف شده روی آن را یک حلقه نامیده و با علامت $(R, +, \bullet)$ نمایش می‌دهیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱. $(R, +)$ یک گروه آبلی باشد.

۲. برای هر $a, b, c \in R$، $a + (b + c) = (a + b) + c$ (عمل جمع شرکت‌پذیر باشد).

۳. برای هر $a, b, c \in R$، $a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$ (توزیع‌پذیری از چپ برقرار باشد).

۴. برای هر $a, b, c \in R$، $(a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c$ (توزیع‌پذیری از راست برقرار باشد).

تعریف ۷.۱.۱. حلقه‌ی R یکدار نامیده می‌شود هرگاه $R \neq \{0\}$ و نسبت به عمل ضرب عضو خنثی داشته باشد، یعنی $1 \in R$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $a \in R$، $a1 = a = 1a$.
فرض کنیم R یک حلقه و ۱ عضو خنثی ضربی آن باشد. عنصر $a \in R$ وارون‌پذیر چپ است هرگاه $b \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $ba = 1$. وارون راست نیز به طور مشابه تعریف می‌شود. عنصر a را یکه نامیم هرگاه هم وارون چپ و هم وارون راست داشته باشد. مجموعه‌ی عناصر یکه‌ی حلقه‌ی R با عمل ضرب تشکیل یک گروه می‌دهد که آن را گروه یکه‌های R نامیده و با نماد $U(R)$ نشان می‌دهیم.

ملاحظه ۸.۱.۱. *به یاد داشته باشیم که تمامی حلقه‌های در نظر گرفته شده در این پایان نامه را یکدار فرض می‌کنیم.*

تعریف ۹.۱.۱. زیرمجموعه‌ی ناتهی S از حلقه‌ی R را یک زیرحلقه R می‌نامیم هرگاه S همراه با دو عمل تعریف شده روی R یک حلقه باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱. زیرمجموعه‌ی ناتهی S از حلقه‌ی R را یک ایده‌آل گوییم هرگاه:
۱) $a, b \in S$ ایجاب کند $a - b \in S$.
۲) $a \in S$ و $r \in R$ ایجاب کند $ar \in S$ و $ra \in S$.

تعریف ۱۱.۱.۱. $(M, *)$ را یک تکواره (مونوئید) می‌نامیم هرگاه عنصر $e \in M$ چنان موجود باشد که:

$$\forall a \in M \quad : \quad a * e = e * a = a.$$

تعریف ۱۲.۱.۱. تکوار M را یک $u.p$–تکواره می‌نامیم هرگاه برای هر دو زیرمجموعه‌ی متناهی و ناتهی $A, B \subseteq M$، عنصر $g \in AB$ وجود داشته باشد به طوری که نمایه‌ی منحصربه‌فردی به صورت $g = ab$ داشته باشد که $a \in A$ و $b \in B$.

تعریف ۱۳.۱.۱. تکوار M را فارغ از تاب می‌نامیم هرگاه، $g, h \in M$ و k عددی صحیح و مثبت باشد و $g^k = h^k$، آن‌گاه $g = h$.

تعریف ۱.۱.۱۴. حلقه R را یک دامنه صحیح می‌نامیم، هرگاه برای هر $a,b \in R$، $ab = 0$ نتیجه دهد $a = 0$ یا $b = 0$.

تعریف ۱.۱.۱۵. عنصر $a \in R$ را پوچ‌توان می‌نامیم هرگاه عدد صحیح مثبتی مانند t وجود داشته باشد به‌طوری‌که: $a^t = 0$. مجموعه‌ی تمام عناصر پوچ‌توان حلقه‌ی R را به $N(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۶. ایده‌آلی از R که تمامی عناصر آن پوچ‌توان باشد را ایده‌آل پوچ می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۱۷. یک حلقه یا یک ایده‌آل پوچ موضعی نامیده می‌شود هرگاه هر زیرحلقه با تولید متناهی آن پوچ باشد.

تعریف ۱.۱.۱۸. مجموع همه‌ی ایده‌آل‌های پوچ موضعی حلقه‌ی R را رادیکال لویتزکی [1] نامیده و با نماد $L-rad(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱.۱۹. عنصر x را در حلقه‌ی R قویاً پوچ‌توان می‌نامیم هرگاه هر دنباله $x_1, x_2, ..., x_{n+1} \in Rx_n$ به صفر ختم شود.

تعریف ۱.۱.۲۰. حلقه‌ی R را کاهشی می‌نامیم هرگاه هیچ عنصر پوچ‌توان ناصفری نداشته باشد.

تعریف ۱.۱.۲۱. حلقه‌ی R را برگشت‌پذیر می‌نامیم هرگاه برای هر $a,b \in R$ که $ab = 0$، بتوان نتیجه گرفت $ba = 0$.

تعریف ۱.۱.۲۲. حلقه‌ی R را نیمه جابه‌جایی می‌نامیم هرگاه برای هر $a,b \in R$، $ab = 0$ نتیجه دهد $aRb = 0$. ایده‌آل I از حلقه‌ی R خاصیت نیمه جابه‌جایی (IFP) دارد هرگاه $ab \in I$، نتیجه دهد $aRb \subseteq I$.

تعریف ۱.۱.۲۳. ایده‌آل سره $\underline{m}$ از حلقه‌ی R را ماکسیمال می‌نامیم هرگاه هیچ ایده‌آل سره‌ای از R به طور اکید شامل $\underline{m}$ نباشد.

تعریف ۱.۱.۲۴. ایده‌آل سره P از حلقه R را اول می‌نامیم هرگاه، A و B ایده‌آل‌هایی از R باشند و $AB \subseteq P$ ، آن‌گاه $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$.

ملاحظه ۱.۱.۲۵. *هر ایده‌آل ماکسیمال اول است: فرض کنیم $\underline{m}$ یک ایده‌آل ماکسیمال از حلقه‌ی R باشد و A و B ایده‌آل‌هایی از R باشند که مشمول در $\underline{m}$ نیستند. در نتیجه $\underline{m}+A = R = \underline{m}+B$ و لذا $R = (\underline{m}+A)(\underline{m}+B) = \underline{m}+AB$. بنابراین $AB \nsubseteq \underline{m}$.*

تعریف ۱.۱.۲۶. حلقه‌ی R را UN گوییم هرگاه در شرط زیر صدق کند:
هر چندجمله‌ای $f(x) \in R[x]$ یکه است اگروتنها اگر جمله‌ی ثابت آن در R یکه باشند و بقیه ضرایب آن پوچ‌توان باشند.

[1] Levitzki radical

تعریف ۲۷.۱.۱. حلقه‌ی ماتریس‌های $n\times n$ روی حلقه‌ی R با $M_n(R)$ نمایش می‌دهیم. هم‌چنین E_n، نماد ماتریس واحد $n\times n$ روی حلقه‌ی R است.

تعریف ۲۸.۱.۱. فرض کنیم R حلقه‌ای ناصفر باشد. اشتراک تمام ایده‌آل‌های چپ ماکسیمال آن را رادیکال جیکبسون [۲] نامیده و با نماد $J(R)$ یا $radR$ نمایش می‌دهیم. اگر $R=\{0\}$، آن‌گاه رادیکال جیکبسون آن را صفر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲۹.۱.۱. حلقه‌ی R را مک‌کوی راست [۳] می‌نامیم هرگاه برای هردو چندجمله‌ای ناصفر مانند $f(x)$ و $g(x)$ از $R[x]$ اگر $f(x)g(x)=0$ آن‌گاه $0\neq c\in R$ وجود داشته باشد که $f(x)c=0$. حلقه مک‌کوی چپ متناظراً تعریف می‌شود. هرگاه حلقه‌ای هم مک‌کوی راست و هم مک‌کوی چپ باشد، آن را مک‌کوی می‌نامیم.

تعریف ۳۰.۱.۱. حلقه‌ی R را یکه-مرکزی می‌نامیم هرگاه یکه‌های حلقه R در مرکز آن قرار بگیرد.

ملاحظه ۳۱.۱.۱. *گوییم R رده پایداری یک دارد و می‌نویسیم $S_rR=1$ ، هرگاه برای هر $a,b\in R$ که $aR+bR=R$، $y\in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $a+by$ در R یکه باشد.*

تعریف ۳۲.۱.۱. حلقه‌ی R را آرمنداریز [۴] می‌نامیم هرگاه $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$ و $g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$ دو عضو از حلقه‌ی $R[x]$ باشند و $f(x)g(x)=0$، آن‌گاه برای هر i,j، $a_ib_j=0$.

۲.۱ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم α یک درون‌ریختی از حلقه‌ی K باشد. تابع جمعی $\delta: K\longrightarrow K$ را یک تابع α-مشتق می‌نامیم هرگاه برای هر $a,b\in K$، $\delta(ab)=\delta(a)b+\alpha(a)\delta(b)$.

مثال ۲.۲.۱. فرض کنیم α یک درون‌ریختی و δ یک تابع α -مشتق از حلقه K باشد. حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب روی K را با $K[x;\alpha,\delta]$ نشان می‌دهیم. عناصر آن چندجمله‌ای‌های $\sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ هستند که $a_i\in K$ و $n\geqslant 0$. دو عمل جمع و ضرب روی $K[x;\alpha,\delta]$ به‌طور طبیعی تعریف می‌شوند به طوری که برای هر $a\in K$، $xa=\alpha(a)x+\delta(a)$. اگر α تابع همانی باشد آن‌گاه $K[x;\alpha,\delta]$ را به $K[x;\delta]$ نشان می‌دهیم و آن را حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های مشتق روی K می‌نامیم. هرگاه $\delta=0$، به‌جای $K[x;\alpha,\delta]$ از $K[x;\alpha]$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم α یک درون‌ریختی از حلقه‌ی R باشد. حلقه‌ی R را α-آرمنداریز اریب می‌نامیم هرگاه، $p=\sum\limits_{i=0}^{m} a_ix^i$ و $q=\sum\limits_{j=0}^{n} b_jx^j$ دو عضو از حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب $R[x;\alpha]$ باشند و $pq=0$، آن‌گاه برای هر i,j، $a_i\alpha^i(b_j)=0$.

---

[۲] Jacobson radical

[۳] Right McCoy

[۴] Armendariz

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم α یک درون‌ریختی از حلقه‌ی R باشد. ایده‌آل I از حلقه‌ی R را α-ایده‌آل می‌نامیم هرگاه: $\alpha(I) \subseteq I$.

گزاره ۵.۲.۱. *اگر I یک α-ایده‌آل باشد آن‌گاه نگاشت $\overline{\alpha} : \dfrac{R}{I} \longrightarrow \dfrac{R}{I}$ با ضابطه‌ی $\overline{\alpha}(a+I) = \alpha(a) + I$ یک درون‌ریختی است.*

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنیم δ یک تابع مشتق بر حلقه‌ی R باشد. ایده‌آل I از حلقه‌ی R را δ-ایده‌آل می‌نامیم هرگاه $\delta(I) \subseteq I$.

ایده‌آل I از حلقه‌ی R را (α, δ)-ایده‌آل می‌نامیم هرگاه، هم δ-ایده‌آل و هم α-ایده‌آل باشد و از نماد $I \triangleleft_{(\alpha,\delta)} R$ استفاده می‌کنیم. اگر I یک (α, δ)-ایده‌آل باشد، آن‌گاه $\overline{\alpha} : \dfrac{R}{I} \longrightarrow \dfrac{R}{I}$ با ضابطه‌ی $\overline{\alpha}(a+I) = \alpha(a) + I$ درون‌ریختی است و $\overline{\delta} : \dfrac{R}{I} \longrightarrow \dfrac{R}{I}$ با ضابطه‌ی $\overline{\delta}(a+I) = \delta(a) + I$ یک تابع $\overline{\alpha}$-مشتق است.

تعریف ۷.۲.۱. یک (α, δ)-ایده‌آل سره P را (α, δ)-ایده‌آل اول می‌نامیم هرگاه برای هر (α, δ)-ایده‌آل I و J که $IJ \subseteq P$، داشته باشیم $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$ و از نماد $P \triangleleft'_{(\alpha,\delta)} R$ استفاده می‌کنیم.

مجموعه‌ی تمام (α, δ)-ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی R را با $Spec(R; \alpha, \delta)$ نشان می‌دهیم. هم‌چنین اشتراک تمام (α, δ)-ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی R با $rad(R; \alpha, \delta)$ یا $N_*(R; \alpha, \delta)$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر:

$$N_*(R; \alpha, \delta) = rad(R; \alpha, \delta) = \cap\{P | P \triangleleft'_{(\alpha,\delta)} R\}.$$

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه و α یک درون‌ریختی از R باشد. R را α -سازگار می‌نامیم هرگاه $a\alpha(b) = ۰ \Longleftrightarrow ab = ۰$ $(a, b \in R)$.

حلقه‌ی R را α -سازگار ضعیف می‌نامیم هرگاه $a\alpha(b) \in N(R) \Longleftrightarrow ab \in N(R)$.

واضح است که اگر R یک حلقه‌ی α-سازگار باشد، آن‌گاه α یک به یک است. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $n \geq ۲$. قرار می‌دهیم:

$$T_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots & a_{۱n} \\ ۰ & a & a_{۲۳} & \cdots & a_{۲n} \\ ۰ & ۰ & a & \cdots & a_{۳n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & a \end{pmatrix} | a, a_{ij} \in R \right\}$$

واضح است که $T_n(R)$ زیرحلقه‌ای از ماتریس‌های بالامثلثی $UT_n(R)$ است.

تعریف ۹.۲.۱. حلقه‌ی R را δ-سازگار می‌نامیم هرگاه $a, b \in R$ و $ab = ۰$، آن‌گاه $a\delta(b) = ۰$. هم‌چنین R، δ-سازگار ضعیف نامیده می‌شود هرگاه $ab \in N(R)$، آن‌گاه $a\delta(b) \in N(R)$. اگر R هم α-سازگار و هم δ-سازگار باشد، آن را (α, δ)-سازگار می‌نامیم.

تعریف ۱.۲.۱۰. فرض کنیم δ یک تابع α-مشتق بر حلقه‌ی R باشد. α-ایده‌آل I از حلقه‌ی R را α-سازگار می‌نامیم هرگاه $\frac{R}{I}$ یک حلقه‌ی $\overline{\alpha}$-سازگار باشد. هم‌چنین δ-ایده‌آل I از حلقه‌ی R را δ-سازگار می‌نامیم هرگاه $\frac{R}{I}$ یک حلقه‌ی $\overline{\delta}$-سازگار باشد. اگر I هم δ-سازگار و هم α-سازگار باشد، آن را (α, δ)-سازگار می‌نامیم. توجه داریم که R حلقه‌ای α-سازگار است اگروتنها اگر، $\{0\}$ یک ایده‌آل α-سازگار باشد. هم‌چنین R یک حلقه‌ی δ-سازگار است اگروتنها اگر $\{0\}$ یک ایده‌آل δ-سازگار باشد.

لم ۱.۲.۱۱. *فرض کنیم R حلقه‌ای (α, δ)-سازگار باشد و $a, b \in R$. در این صورت:*

۱. *هرگاه $ab = 0$ و n یک عدد صحیح و مثبت باشد، آن‌گاه $a\alpha^n(b) = \alpha^n(a)b = 0$.*

۲. *هرگاه عدد صحیح مثبت k وجود داشته باشد که $\alpha^k(a)b = 0$، آن‌گاه $ab = 0$.*

۳. *هرگاه $ab = 0$ و m و n دو عدد صحیح مثبت باشند آن‌گاه $\delta^m(a)\alpha^n(b) = 0$ و $\alpha^m(a)\delta^n(b) = 0$.*

برهان. رجوع شود به [۲۹]، صفحه ۴۴، لم ۲.۵.۴. □

نتیجه ۱.۲.۱۲. *فرض کنیم δ یک تابع α-مشتق بر حلقه‌ی R باشد و $I \triangleleft R$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. *I یک ایده‌آل (α, δ)-سازگار است.*

۲. *I در شرایط زیر صدق می‌کند:*

(آ) *برای هر $a, b \in R$، $a\alpha(b) \in I$ اگروتنها اگر $ab \in I$.*

(ب) *برای هر $a, b \in R$، اگر $ab \in I$، آن‌گاه $a\delta(b) \in I$.*

ملاحظه ۱.۲.۱۳. *فرض کنیم δ یک تابع α-مشتق بر حلقه‌ی R باشد و $0 \leqslant i \leqslant j$. مجموع تمام کلماتی که بر اساس i حرف از α و $j - i$ حرف از δ ساخته می‌شوند را به f_i^j نشان می‌دهیم. برای مثال، $f_j^j = \alpha^j$ و $f_0^j = \delta^j$ و $f_{j-1}^j = \alpha^{j-1}\delta + \alpha^{j-2}\delta\alpha + \cdots + \delta\alpha^{j-1}$. هم‌چنین می‌توانیم از فرمول زیر جهت ساده نمودن حاصل‌ضرب دو چندجمله‌ای استفاده کنیم:*

$$x^j a = \sum_{i=0}^{j} f_i^j(a)x^i.$$

تعریف ۱.۲.۱۴. درون‌ریختی $\alpha : R \longrightarrow R$ را صلب می‌نامیم (یا حلقه R را α-صلب می‌نامیم) هرگاه: $a \in R$ و $a\alpha(a) = 0$، آن‌گاه $a = 0$.

قضیه ۱.۲.۱۵. *اگر $a^2 = 0$، آن‌گاه $(a\alpha(a))\alpha(a\alpha(a)) = 0$ و لذا $a = 0$. هم‌چنین اگر $\alpha(a) = 0$، آن‌گاه $a\alpha(a) = 0$ و در نتیجه $a = 0$.*

تعریف ۱.۲.۱۶. یک α-ایده‌آل I را ایده‌آل α-صلب می‌نامیم هرگاه، برای هر $a \in R$، $a\alpha(a) \in I$ نتیجه دهد $a \in I$.

گزاره ۱۷.۲.۱. *فرض کنیم α یک درون‌ریختی از حلقه‌ی R باشد و $I \lhd R$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. *هرگاه $a \in R$ و $a\alpha(a) \in I$، آن‌گاه $a \in I$.*

۲. *I و $\frac{R}{I}$ به ترتیب α–ایده‌آل و $\overline{\alpha}$–صلب هستند.*

برهان. رجوع شود به [۲۹]، صفحه ۲۵. □

تعریف ۱۸.۲.۱. فرض کنیم α یک درون‌ریختی از حلقه‌ی R باشد. ایده‌آل I از R را α–صلب می‌نامیم هرگاه در گزاره‌ی ۱۷.۲.۱ صدق کند.

توجه داریم که R یک حلقه‌ی α–صلب است اگروتنها اگر $\{0\}$ یک ایده‌آل α–صلب باشد.
در ادامه مثالی را بررسی می‌کنیم که نشان می‌دهد α–ایده‌آلی وجود دارد که α–صلب نیست.

مثال ۱۹.۲.۱. فرض کنیم F یک میدان باشد و $R = T_2(F[x])$. نگاشت $\alpha : R \longrightarrow R$ با ضابطه‌ی $\alpha\left(\begin{pmatrix} f & f_1 \\ 0 & f \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f & uf_1 \\ 0 & f \end{pmatrix}$ را در نظر می‌گیریم(u یک عنصر ناصفر از F است). فرض کنیم $p(x)$ یک چندجمله‌ای تحویل ناپذیر از $F[x]$ باشد و $I = \left\{\begin{pmatrix} 0 & f_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | f_1 \in \langle p(x)\rangle\right\}$ نمایانگر ایده‌آل تولیدشده توسط $p(x)$ است. به وضوح I یک α–ایده‌آل است. اگر $g(x) \notin \langle p(x)\rangle$، آن‌گاه:

$$\begin{pmatrix} 0 & g(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha\left(\begin{pmatrix} 0 & g(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I$$

اما $I \notin \begin{pmatrix} 0 & g(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. در نتیجه، I یک ایده‌آل α–صلب نیست.

۳.۱ رادیکال‌های اول

در این بخش رادیکال اول، رادیکال پوچ بالایی، ایده‌آل‌های اول و قویاً اول را معرفی کرده و خواص آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

گزاره ۱.۳.۱. *فرض کنیم P ایده‌آلی سره از حلقه‌ی R باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. *P اول است.*

۲. *هرگاه $a, b \in R$ و $\langle a\rangle\langle b\rangle \subseteq P$، آن‌گاه $a \in P$ یا $b \in P$.*

۳. *هرگاه $a, b \in R$ و $aRb \subseteq P$، آن‌گاه $a \in P$ یا $b \in P$.*

۴. *هرگاه A و B دو ایده‌آل چپ از حلقه‌ی R باشند و $AB \subseteq P$، آن‌گاه $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$.*

۵. هرگاه A و B دو ایده‌آل راست از حلقه‌ی R باشند و $AB \subseteq P$، آن‌گاه $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$.

برهان. رجوع شود به [۲۹]، صفحه ۱۰. $\square$

تعریف ۲.۳.۱. حلقه‌ی R را اول (نیم‌اول) می‌نامیم هرگاه، ایده‌آل $\{0\}$ اول (نیم‌اول) باشد.

تعریف ۳.۳.۱. ایده‌آل Q از حلقه‌ی R را نیم‌اول می‌نامیم هرگاه A ایده‌آلی از R باشد و $A^2 \subseteq Q$، آن‌گاه $A \subseteq Q$.

هر ایده‌آل اول، نیم اول است.

تعریف ۴.۳.۱. ایده‌آل P از حلقه‌ی R را کاملاً اول (نیم‌اول) می‌نامیم هرگاه $a, b \in R$ و $ab \in P$ $(a^2 \in P)$، آن‌گاه $a \in P$ یا $b \in P$ $(a \in P)$. واضح است که هر ایده‌آل کاملاً اول، اول است و هر ایده‌آل کاملاً نیم‌اول، نیم‌اول است.

گزاره ۵.۳.۱. *فرض کنیم Q ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. Q نیم‌اول است.

۲. هرگاه $a \in R$ و $\langle a \rangle^2 \subseteq Q$، آن‌گاه $\langle a \rangle \subseteq Q$.

۳. هرگاه $a \in R$ و $aRa \subseteq Q$، آن‌گاه $a \in Q$.

۴. هرگاه $a \in R$ و $aRa = 0$، آن‌گاه $a = 0$.

برهان. رجوع شود به [۲۹]، صفحه ۱۲. $\square$

تعریف ۶.۳.۱. زیرمجموعه‌ی ناتهی S از حلقه‌ی R را یک m-سیستم می‌نامیم هرگاه برای هر $a, b \in S$ عنصر $r \in R$ وجود داشته باشد که $arb \in S$.

نتیجه ۷.۳.۱. *فرض کنیم P ایده‌آلی سره از حلقه‌ی R باشد. در این صورت P اول است اگروتنها اگر $R \setminus P$ یک m-سیستم باشد.*

تعریف ۸.۳.۱. زیرمجموعه‌ی S از حلقه‌ی R را یک n-سیستم می‌نامیم هرگاه ، برای هر $s \in S$، عنصر $r \in R$ به گونه‌ای وجود داشته باشد که $srs \in S$.

تعریف ۹.۳.۱. فرض کنیم A ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد. رادیکال A را که به $\sqrt{A}$ نشان می‌دهیم چنین تعریف می‌کنیم:

$$\sqrt{A} = \{s \in S | \text{هر } m\text{-سیستمی که شامل } s \text{ باشد اشتراک ناتهی با } A \text{ داشته باشد}\}$$

قضیه ۱۰.۳.۱. *فرض کنیم A ایده‌آلی سره از حلقه‌ی R باشد. در این صورت $\sqrt{A}$ با اشتراک تمام ایده‌آل‌های اول شامل A برابر است. به‌ویژه، $\sqrt{A}$ یک ایده‌آل است.*

برهان. رجوع شود به [۲۹]، صفحه ۱۱، قضیه ۷.۱.۲. $\square$

قضیه ۱۱.۳.۱. *فرض کنیم Q ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. *Q نیم‌اول است.*

۲. *Q با اشتراک خانواده‌ای از ایده‌آل‌های اول برابر است.*

۳. $Q = \sqrt{Q}$.

برهان. رجوع شود به [۲۹]، صفحه ۱۳، قضیه ۱۱.۱.۲. □

تعریف ۱۲.۳.۱. رادیکال پوچ پایینی (یا رادیکال اول) حلقه‌ی R را $P(R)$ یا $N_*(R)$ نشان می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم: $P(R) = \sqrt{\{\circ\}}$. می‌دانیم که $P(R)$ پوچ است و با اشتراک تمام ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی R برابر است.

ملاحظه ۱۳.۳.۱. *رادیکال اول حلقه‌ی R یا همان $N_*(R)$ مجموعه‌ی تمام عناصر قویاً پوچ‌توان در R است.*

تعریف ۱۴.۳.۱. حلقه R را ۲-اولیه می‌نامیم هرگاه: $N(R) = N_*(R)$. هر حلقه‌ی تقلیل‌یافته، ۲-اولیه است.

تعریف ۱۵.۳.۱. حلقه R را ۲-اولیه ضعیف می‌نامیم هرگاه $N(R) = L - rad(R)$.

گزاره ۱۶.۳.۱. *شرایط زیر برای حلقه‌ی R معادلند:*

۱. *R نیم اول است.*

۲. $N_*(R) = \circ$.

۳. *R هیچ ایده‌آل پوچ‌توان ناصفری ندارد.*

۴. *R هیچ ایده‌آل چپ پوچ‌توان ناصفر ندارد.*

برهان. رجوع شود به [۲۹]، صفحه ۱۳، گزاره ۱۳.۱.۲. □

تعریف ۱۷.۳.۱. مجموع تمام ایده‌آل‌های پوچ حلقه‌ی R را رادیکال پوچ بالایی می‌نامیم و با $N^*(R)$ نشان می‌دهیم. واضح است که $N^*(R)$ بزرگترین ایده‌آل پوچ حلقه‌ی R است و

$$N^*(R) = \{a \in R | \text{پوچ است}\ \langle a \rangle\}.$$

تعریف ۱۸.۳.۱. حلقه‌ی R را NI می‌نامیم هرگاه $N(R) = N^*(R)$.

تعریف ۱۹.۳.۱. ایده‌آل اول P از حلقه R را مینیمال گوییم هرگاه، یک عضو مینیمال مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اول R باشد.

تعریف ۲۰.۳.۱. حلقه‌ی اول R را قویاً اول گوییم هرگاه هیچ ایده‌آل ناصفر پوچ نداشته باشد. هر ایده‌آل قویاً اول، اول است. ایده‌آل سره P از حلقه‌ی R را قویاً اول می‌نامیم هرگاه حلقه‌ی $\frac{R}{P}$ قویاً اول باشد. ایده‌آل P از حلقه‌ی R را قویاً اول مینیمال می‌نامیم هرگاه P در بین ایده‌آل‌های قویاً اول، مینیمال باشد. واضح است که هر ایده‌آل کاملاً اول، قویاً اول است و هر ایده‌آل قویاً اول، اول است.

تعریف ۲۱.۳.۱. فرض کنیم α یک تک‌ریختی از حلقه‌ی R باشد. ایده‌آل I از حلقه‌ی R را α-اول می‌نامیم هرگاه B و C، α-ایده‌آل‌هایی از R باشند و $BC \subseteq I$، آن‌گاه $B \subseteq I$ یا $C \subseteq I$. حلقه‌ی R را α-اول می‌نامیم هرگاه، $\{0\}$ یک ایده‌آل α-اول باشد. اگر ایده‌آل α-اول I اکیداً شامل هیچ ایده‌آل α-اولی نباشد، می‌گوییم I یک ایده‌آل α-اول مینیمال است.

در پایان می‌توان نتیجه گرفت:

کاهشی $\Longrightarrow$ برگشت‌پذیر $\Longrightarrow$ نیمه‌جابه‌جایی $\Longrightarrow$ ۲-اولیه $\Longrightarrow$ به‌طور ضعیف ۲-اولیه $\Longrightarrow NI$.

ولی عکس این رابطه برقرار نمی‌باشد. به منابع [۲۴] و [۶] رجوع شود.

فصل ۲

حاصل‌ضرب ثابت عناصر در حلقه چندجمله‌ای‌های اریب

در این فصل ثابت می‌شود که اگر R یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر باشد به طوری که برای درون‌ریختی α از R، α-سازگار باشد و $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ یک چندجمله‌ای غیرصفر در $R[x;\alpha]$ باشد به طوری که یک چندجمله‌ای ناصفر مانند $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in R[x;\alpha]$ وجود داشته باشد که $g(x)f(x) = c$ در R ثابت باشد، آن‌گاه $b_0a_0 = c$ و عناصر ناصفر a و r در R وجود دارند به طوری که: $rf(x) = ac$. هم‌چنین قضیه‌ی حاصل‌ضرب ثابت عناصر برای حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های جابه‌جایی را به حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب $R[x;\alpha]$ تعمیم می‌دهیم که R یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر می‌باشد که برای هر درون‌ریختی α از R، α-سازگار است.
نتیجه می‌گیریم که اگر R یک حلقه ۲-اولیه ضعیف باشد که برای درون‌ریختی α از R، α -سازگار باشد، آن‌گاه یک چندجمله‌ای اریب $f(x)$ در $R[x;\alpha]$ یکه است اگروتنها اگر جمله‌ی ثابت آن یکه باشد و بقیه ضرایب آن پوچ‌توان باشند.
برای یک حلقه‌ی NI، مانند R ثابت می‌شود که اگر R، α-سازگار ضعیف باشد، آن‌گاه $f(x)$ در $R[x;\alpha]$ یکه است اگروتنها اگر جمله‌ی ثابت آن یکه باشد و مابقی ضرایب آن پوچ‌توان باشند.
هم‌چنین حلقه‌ی R را یک حلقه‌ی UN تعریف می‌کنیم با این شرط که، هر $f(x)$ در $R[x]$ یکه است اگروتنها اگر جمله‌ی ثابت آن یکه باشد و بقیه ضرایب آن پوچ‌توان باشند.

۱.۲ حاصل‌ضرب ثابت در حلقه چندجمله‌ای‌های اریب

این بخش را با بیان لم کاربردی زیر آغاز می‌کنیم.

لم ۱.۱.۲. *فرض کنیم R یک حلقه و α یک درون‌ریختی از R باشد. اگر R، α-سازگار باشد، آن‌گاه برای هر ۲ $n \geqslant$ ، $a_1a_2\cdots a_n = 0 \iff \alpha^{k_1}(a_1)\alpha^{k_2}(a_2)\cdots\alpha^{k_n}(a_n) = 0$ که در آن $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ و $k_1, k_2, \ldots, k_n$ اعداد صحیح نامنفی هستند.*

به‌ویژه $a_1a_2 \in N(R) \Longleftrightarrow a_1\alpha^k(a_2) \in N(R)$.

برهان. α یک مونومورفیسم است، پس α^k نیز برای هر عدد صحیح نامنفی k، یک مونومورفیسم است.

$$\begin{aligned}
a_1a_2\cdots a_n = 0 &\Longleftrightarrow \alpha^{k_1}(a_1a_2\cdots a_n) = 0\\
&\Longleftrightarrow \alpha^{k_1}(a_1)\alpha^{k_1}(a_2a_3\cdots a_n) = 0\\
&\Longleftrightarrow \alpha^{k_1}(a_1)a_2\cdots a_n = 0\\
&\Longleftrightarrow \alpha^{k_1}(a_1)\alpha^{k_2}(a_2\cdots a_n) = 0\\
&\Longleftrightarrow \alpha^{k_1}(a_1)\alpha^{k_2}(a_2)\alpha^{k_2}(a_3\cdots a_n) = 0
\end{aligned}$$

با ادامه‌ی همین روند نتیجه مطلوب به دست می‌آید. □

از لم ۱.۱.۲ نتیجه می‌گیریم که اگر حلقه‌ی R، α-سازگار باشد، آن‌گاه α-سازگار ضعیف است، که این نتیجه را در زیر اثبات می‌کنیم.

نتیجه ۲.۱.۲. *اگر حلقه‌ی R، α-سازگار باشد، آن‌گاه α-سازگار ضعیف است.*

برهان. فرض کنیم R، α-سازگار باشد، یعنی: $ab = 0 \Longleftrightarrow a\alpha(b) = 0$.
اگر $ab \in N(R)$، در این صورت وجود دارد $t > 0$ به طوری که: $(ab)^t = 0$. یعنی:

$$\begin{aligned}
(ab)(ab)\cdots(ab) = 0 &\Longrightarrow a\alpha(baba\cdots ab) = 0\\
&\Longrightarrow a\alpha(b)\alpha(abab\cdots ab) = 0\\
&\Longrightarrow (a\alpha(b))^{t_1} = 0\\
&\Longrightarrow a\alpha(b) \in N(R).
\end{aligned}$$

□

لم ۳.۱.۲. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی ۲-اولیه ضعیف و α یک درون‌ریختی از R باشد. اگر R، α-سازگار باشد، آن‌گاه حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب $R[x;\alpha]$ نیز یک حلقه‌ی ۲-اولیه ضعیف است. به‌ویژه:*

$$N(R)[x;\alpha] = N(R[x;\alpha]) = L - rad(R[x;\alpha]).$$

برهان. از آن جایی که R یک حلقه‌ی ۲-اولیه ضعیف است، داریم:

$$L - rad(R) = N(R).$$

پس $\overline{R} = \dfrac{R}{N(R)}$ یک حلقه‌ی کاهشی است. درون‌ریختی α از R درون‌ریختی دیگری چون $\overline{\alpha}$ از $\overline{R}$ را نتیجه می‌دهد به گونه‌ای که:

$$\overline{\alpha}(a + N(R)) = \alpha(a) + N(R).$$

ادعا می‌کنیم که $\frac{R}{N(R)}$ یک $\overline{\alpha}$-آرمنداریز اریب است.
درواقع برای هر $a \in R$، اگر $(\overline{a})\overline{\alpha}(\overline{a}) = \overline{۰}$، آنگاه $a\alpha(a) \in N(R)$. طبق فرض R یک حلقه α-سازگار است، لذا: $ab \in N(R) \Longleftrightarrow a\alpha(b) \in N(R)$ ، می‌توان نتیجه گرفت که $a^۲ \in N(R)$ در نتیجه $(\overline{a})^۲ = ۰$ و چون که $\frac{R}{N(R)}$ یک حلقه‌ی کاهشی است پس $\overline{a} = ۰$. پس نشان دادیم $\overline{\alpha}$ یک درون‌ریختی صلب از $\overline{R}$ است. طبق قضیه هرگاه α یک درون‌ریختی صلب از حلقه‌ی R باشد، آنگاه R یک حلقه‌ی α-آرمنداریز اریب است، لذا با توجه به این قضیه $\overline{R}$ یک حلقه‌ی $\overline{\alpha}$-آرمنداریز اریب است.
حال باید نشان دهیم که:

$$N(R[x;\alpha]) = L - rad(R[x;\alpha]).$$

کافی است نشان دهیم $N(R[x;\alpha]) \subseteq L - rad(R[x;\alpha])$.
همریختی حلقه‌ای پوشایی مانند β وجود دارد به طوری که:

$$\beta : R[x;\alpha] \longrightarrow \frac{R}{N(R)}[x;\overline{\alpha}]$$

$$\beta(a_۰ + a_۱x + \cdots + a_mx^m) = \overline{a_۰} + \overline{a_۱}x + \cdots + \overline{a_m}x^m, \quad \overline{a_i} = a_i + N(R).$$

ابتدا نشان می‌دهیم:

$$N(R[x;\alpha]) \subseteq N(R)[x;\alpha].$$

فرض کنیم که $f(x) = \sum_{i=۰}^{n} a_ix^i$ پوچ‌توان باشد بنابراین $\overline{f(x)} = \sum_{i=۰}^{n} \overline{a}_ix^i$ نیز در $\frac{R}{N(R)}[x;\alpha]$ پوچ‌توان می‌شود یعنی $\overline{f(x)}^t = \overline{۰}$. حال چون $\frac{R}{N(R)}$ یک $\overline{\alpha}$-آرمنداریز اریب است، داریم:

$$(\overline{a_i})\overline{\alpha}^i(\overline{a_i})\cdots\overline{\alpha}^{(t-۱)i}(\overline{a_i}) = \overline{۰} \Longrightarrow a_i\alpha^i(a_i)\cdots\alpha^{(t-۱)i}(a_i) \in N(R)$$
$$\Longrightarrow \exists\, q \geqslant ۰ \ : \ [a_i\alpha(a_i)\cdots\alpha^{(t-۱)i}(a_i)]^q = ۰.$$

با استفاده از لم ۱.۱.۲ می‌توان نتیجه گرفت:

$$a_i^{tq} = ۰ \quad \Longrightarrow \quad a_i \in N(R).$$

در نتیجه داریم:

$$N(R[x;\alpha]) \subseteq N(R)[x;\alpha].$$

حال نشان می‌دهیم $L - rad(R)[x;\alpha]$ پوچ‌توان موضعی است.
فرض کنیم $f_۱(x), \ldots, f_k(x) \in L - rad(R)[x;\alpha]$. نشان می‌دهیم که زیرحلقه‌ی متناهی‌مولد(بدون عنصر واحد) $W = \langle f_۱(x), \ldots, f_k(x)\rangle$ از $L - rad(R)[x;\alpha]$ پوچ‌توان است. قرار می‌دهیم:

$$f_i(x) = a_{i۰} + a_{i۱}x + \cdots + a_{in}x^n.$$

به طوری که برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, k$ و $j = ۱, ۲, \ldots, n$، $a_{ij} \in L - rad(R)$.
M را این‌گونه تعریف می‌کنیم:

$$M = \{a_{i۰}, a_{i۱}, \ldots, a_{in} | i = ۱, ۲, \ldots, k\}.$$

M یک زیرمجموعه‌ی متناهی از $L - rad(R)$ است. بنابراین زیرحلقه‌ی $\langle M \rangle$ (بدون واحد) تولیدشده توسط M پوچ‌توان است. عدد صحیح مثبتی چون p وجود دارد به طوری که $\langle M \rangle^p = ۰$. در نتیجه برای هر $b_۱, b_۲, \dots b_p \in M$ داریم:

$$b_۱ b_۲ \cdots b_p = ۰.$$

حال ثابت می‌کنیم $W^p = ۰$. درواقع برای هر $g_۱(x), g_۲(x), \dots, g_p(x) \in W$ این طور می‌نویسیم:

$$g_j(x) = b_{j۰} + b_{j۱}x + \cdots + b_{jm}x^m, \quad j = ۱, ۲, \cdots, p.$$

به سادگی می‌توان دید که برای هر j و $t = ۰, ۱, \dots, m$ ، $b_{jt} \in \langle M \rangle$. می‌نویسیم:

$$g_۱(x)g_۲(x) \cdots g_p(x) = \sum_{t_۱+\cdots t_p=۰}^{pm} b_{۱t_۱}\alpha^{t_۱}(b_{۲t_۲}) \cdots \alpha^{t_۱+\cdots+t_{p-۱}}(b_{pt_p})x^{t_۱+\cdots+t_p}$$

به طوری که $t_۱, t_۲, \dots, t_p$ اعداد صحیح نامنفی هستند و $b_{۱t_۱}, b_{۲t_۲}, \dots, b_{pt_p}$ به‌ترتیب ضرایب دلخواهی از $f_۱(x), f_۲(x), \dots, f_p(x)$ می‌باشند. از آن جایی که $b_{۱t_۱}, b_{۲t_۲}, \dots, b_{pt_p} \in \langle M \rangle$ ، داریم:

$$b_{۱t_۱} b_{۲t_۲} \dots b_{pt_p} = ۰.$$

حال با استفاده از لم ۱.۱.۲ می‌توان دید که:

$$b_{۱t_۱}\alpha^{t_۱}(b_{۲t_۲}) \cdots \alpha^{t_۱+\cdots+t_{p-۱}}(b_{pt_p}) = ۰.$$

بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که $g_۱(x)g_۲(x) \cdots g_p(x) = ۰$ و $L - rad(R)[x;\alpha]$ نیز پوچ‌توان موضعی است. از آن جایی که $N(R) = L - rad(R)$ یک ایده‌آل از R است و $\alpha(N(R)) \subseteq N(R)$ ، پس $L - rad(R)[x;\alpha]$ یک ایده‌آل از $R[x;\alpha]$ است. با توجه به این که $L - rad(R)[x;\alpha]$ پوچ‌توان موضعی است، پس $L - rad(R)[x;\alpha] \subseteq L - rad(R[x;\alpha])$.
از بحث بالا نتیجه می‌گیریم که:

$$N(R[x;\alpha]) \subseteq N(R)[x;\alpha] = L - rad(R)[x;\alpha] \subseteq L - rad(R[x;\alpha])$$

و اثبات کامل می‌شود.

□

لم ۴.۱.۲. *فرض کنیم α یک درون‌ریختی از حلقه‌ی کاهشی R باشد، در این صورت دو گزاره‌ی زیر معادلند:*

۱- R یک حلقه‌ی α-صلب است.

۲-هرگاه P یک ایده‌آل اول مینیمال از R باشد، آن‌گاه: $\alpha^{-۱}(P) \subseteq P$.

برهان. فرض کنیم P یک ایده‌آل اول مینیمال از R باشد و $\alpha(a) \in P$. عنصر $b \in R \setminus P$ وجود دارد به طوری که، $b\alpha(a) = ۰$. در نتیجه $ab\alpha(ab) = ab\alpha(a)\alpha(b) = ۰$ و چون R یک حلقه α-صلب است، از این رو $ab = ۰ \in P$. بنابراین $a \in P$ و لذا $\alpha^{-۱}(P) \subseteq P$.
طبق [۲۹]، لم ۲.۳.۲، عکس قضیه نیز برقرار است. □

لم ۵.۱.۲. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی ۲-اولیه و هر درون‌ریختی α از R، سازگار باشد. اگر P یک ایده‌آل اول مینیمال از R باشد، آن‌گاه $\alpha(P)$ و $\alpha^{-1}(P)$ هردو مشمول در P هستند.*

برهان. از آن‌جایی که R یک حلقه‌ی ۲-اولیه است، پس $N(R) = N_*(R)$ و هم‌چنین $\overline{R} = \dfrac{R}{N_*(R)}$ یک حلقه‌ی کاهشی است. با استفاده از لم ۱.۱.۲، درون‌ریختی $\overline{\alpha}$ از $\overline{R}$ به‌گونه‌ای وجود دارد که:

$$\overline{\alpha}(\overline{a}) = \overline{\alpha(a)} \quad s.t \quad \overline{a} = a + N_*(R) \quad (\forall a \in R).$$

حال اگر $\overline{a}\overline{\alpha}(\overline{a}) = \overline{0}$، آن‌گاه $a\alpha(a) \in N_*(R)$، که با استفاده از لم ۱.۱.۲ می‌توان نتیجه گرفت $a^2 \in N_*(R)$ و در نتیجه $\overline{a}^2 = 0$ و چون که $\overline{R}$ یک حلقه‌ی کاهشی است پس می‌توان نتیجه گرفت که $\overline{a} = \overline{0}$. پس $\overline{\alpha}$ یک درون‌ریختی صلب از $\overline{R}$ است. می‌دانیم که $\dfrac{P}{N_*(R)}$ یک ایده‌آل اول مینیمال از $\overline{R}$ است. با استفاده از لم ۴.۱.۲ داریم:

$$\overline{\alpha}(\frac{P}{N_*(R)}) \subseteq \frac{P}{N_*(R)}, \quad (\overline{\alpha})^{-1}(\frac{P}{N_*(R)}) \subseteq \frac{P}{N_*(R)}.$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که $\alpha(P)$ و $\alpha^{-1}(P)$ هردو مشمول در P هستند.

$\square$

می‌دانیم که یک ایده‌آل اول از حلقه R کاملاً اول است هرگاه $\dfrac{R}{P}$ یک دامنه باشد.

قضیه ۶.۱.۲. *حلقه‌ی R ۲-اولیه است اگروتنها اگر هر ایده‌آل اول مینیمال آن کاملاً اول باشد.*

برهان. ادعا می‌کنیم گزاره‌های زیر معادلند:

۱-$N_*(R)$ منطبق با مجموعه‌ی تمام اعضای پوچ‌توان R است.

۲- هر ایده‌آل اول مینیمال، کاملاً اول است.

اثبات ادعا: می‌دانیم برای هر حلقه‌ی R، رادیکال اول R یعنی $N_*(R)$ با اشتراک تمام ایده‌آل‌های اول مینیمال R برابر است. فرض می‌کنیم P یک ایده‌آل اول مینیمال از حلقه‌ی R باشد به طوری که $ab \in P$. طبق قضیه اگر $N_*(R)$ با مجموعه‌ی تمام عناصر پوچ‌توان R منطبق باشد، آن‌گاه برای هر $P \in Spec(R)$، گزاره‌های زیر معادلند:

۱. P یک ایده‌آل اول مینیمال است.

۲. $N(P) = P$.

۳. برای هر $a \in P$، ab برای برخی $b \in R \setminus P$ پوچ‌توان است.

حال طبق این قضیه، برای برخی $c \in R \setminus P$ داریم:

$$abc \in N_*(R).$$

اگر $b \notin P$، آن‌گاه برای یک $z \in R$، $bzc \notin P$. در حلقه‌ی $\dfrac{R}{N_*(R)}$ داریم:

$$aRbzc \subseteq N_*(R), \quad a \in N(P) = P.$$

حال برای اثبات قضیه فرض می‌کنیم اگر R ۲-اولیه باشد در این صورت $N(R) = N_*(R)$، یعنی اشتراک همه ایده‌آل‌های اول مینیمال با مجموعه‌ی تمام اعضای پوچ‌توان برابر است آنگاه طبق معادل بودن دو گزاره‌ی بالا هر ایده‌آل اول مینیمال، کاملاً اول است.
برعکس، اگر هر ایده‌آل اول مینیمال از R کاملاً اول باشد، آنگاه $N_*(R)$ با مجموعه‌ی تمام اعضای پوچ‌توان R برابر می‌شود، یعنی $N(R) = N_*(R)$ که نتیجه می‌دهد R ۲-اولیه است. □

قضیه ۷.۱.۲. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر و درون‌ریختی α از R، سازگار باشد و $f(x) = a_\circ + a_1x + \cdots + a_nx^n$ یک چندجمله‌ای اریب ناصفر در $R[x;\alpha]$ باشد. اگر چندجمله‌ای اریب ناصفر $g(x) = b_\circ + b_1x + \cdots + b_mx^m$ در $R[x;\alpha]$ وجود داشته باشد به طوری که $g(x)f(x) = c$ ثابت باشد، آنگاه $c = b_\circ a_\circ$ و اعضای ناصفر a و r در R به‌گونه‌ای وجود دارند که $rf(x) = ac$.*
به ویژه $r = ab_p$، برای برخی p به طوری که $\circ \leq p \leq m$ و a یا برابر یک است یا با حاصل‌ضرب حداکثر m ضریب از $f(x)$ برابر است.
به‌علاوه اگر $b_\circ$ در R یکه باشد، آنگاه $a_1, a_2, \ldots, a_n$ همگی پوچ‌توان هستند.

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم که حکم برای هر چندجمله‌ای اریب $f(x)$ از درجه صفر صحیح است. طبق فرض $f(x) = a_\circ \neq \circ$ و $g(x)a_\circ = c$. این بدین معناست که $b_\circ a_\circ = c$. اگر $b_\circ \neq \circ$، آنگاه $r = b_\circ$ و $a = 1$ و اگر $b_\circ = \circ$، آنگاه $c = b_\circ a_\circ = \circ$.
فرض کنیم b_q کوچکترین ضریب ناصفر $g(x)$ باشد، آنگاه:

$$g(x)a_\circ = (b_qx^q + \cdots + b_mx^m)a_\circ = \circ$$

و این نتیجه می‌دهد که $b_q\alpha^q(a_\circ) = \circ$. همچنین با استفاده از لم ۱.۱.۲، $b_qa_\circ = \circ$. بنابراین $r = b_q$ و $a = 1$ عناصر ناصفر هستند.
سپس فرض می‌کنیم که $f(x)$ از درجه‌ی $n \geqslant 1$ باشد و با استفاده از استقرا روی درجه‌ی $g(x)$ حکم را اثبات می‌کنیم.
اگر $m = \circ$، آنگاه $g(x) = b_\circ \neq \circ$. از اینکه $g(x)f(x) = b_\circ(a_\circ + a_1x + \cdots + a_nx^n) = c$ نتیجه می‌گیریم که $b_\circ a_\circ = c$ و همچنین $r = b_\circ$ و $a = 1$. حال فرض می‌کنیم که حکم برای تمام چندجمله‌ای‌های اریب با درجه کمتر از m صحیح باشد. قرار می‌دهیم $g(x)f(x) = c$ که در آن $g(x)$ از درجه‌ی m می‌باشد. نشان می‌دهیم که $g(x)$ می‌تواند با یک چندجمله‌ای از درجه‌ی کمتر جابه‌جا شود.
اگر $b_\circ = \circ$، آنگاه $c = b_\circ a_\circ = \circ$ و $g(x) = b_qx^q + \cdots + b_mx^m$ که b_q کوچکترین ضریب ناصفر $g(x)$ است. اگر $a_kg(x) = \circ$ برای همه‌ی $1 \leqslant k \leqslant n$، آنگاه $a_kb_q = \circ$ و همچنین $b_qa_k = \circ$. در این حالت، $b_qf(x) = \circ = c$ و $r = b_q$ و $a = 1$.
بنابراین فرض می‌کنیم که k بزرگترین عدد صحیح مثبتی باشد که $a_kg(x) \neq \circ$. در حالت $k = n$ از اینکه $g(x)f(x) = \circ = c$، داریم $b_m\alpha^m(a_n) = \circ$، که نتیجه می‌گیریم $b_ma_n = a_nb_m = \circ$ و همچنین $a_ng(x)$ از درجه‌ی کمتر از m است و در رابطه‌ی $a_ng(x)f(x) = a_nc = \circ$ صدق می‌کند.
در حالت $k < n$ ، داریم $a_sg(x) = \circ = g(x)a_s$ برای $k + 1 \leqslant s \leqslant n$. یعنی:

$$g(x)(a_\circ + a_1x + \cdots + a_kx^k) = g(x)f(x) = c = \circ.$$

این امر نتیجه می‌دهد که $a_kb_m = b_ma_k = 0 = b_m\alpha^m(a_k)$. پس می‌توان نتیجه گرفت که $a_kg(x)$ از درجه‌ی کمتر از m است و $a_kg(x)f(x) = a_kc = 0$. حال فرض استقرا را برای $a_kg(x)$ به کار می‌بریم و نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

حال فرض می‌کنیم که $b_0 \neq 0$ و $a_kg(x) = 0$ برای همه‌ی $1 \leqslant k \leqslant n$، آن‌گاه $a_kb_0 = 0 = b_0a_k$. به دنبال این نتیجه می‌گیریم که $b_0f(x) = c$ و همچنین $b_0a_0 = c$. به‌وضوح $r = b_0$ و $a = 1$ در شرایط مطلوب صدق می‌کند. بنابراین فرض می‌کنیم که k بزرگترین عدد صحیح مثبتی باشد که $a_kg(x) \neq 0$. در حالت $k = n$ ، از $g(x)f(x)$ درایم $b_m\alpha^m(a_n) = 0$ که نتیجه می‌دهد $b_ma_n = a_nb_m = 0$ و هم‌چنین $a_ng(x)$ از درجه‌ی کمتر از m است که در $a_ng(x)f(x) = a_nc$ صدق می‌کند.

در حالت $k < n$، داریم $g(x)a_s = 0 = a_sg(x)$ برای $k + 1 \leq s \leq n$، یعنی:

$$g(x)(a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k) = g(x)f(x) = c$$

که نتیجه می‌دهد $a_kb_m = b_ma_k = 0 = b_m\alpha^m(a_k)$ و بنابراین $a_kg(x)$ از درجه‌ی کمتر از m است و $a_kg(x)f(x) = a_kc$ و بار دیگر فرض استقرا را برای $a_kg(x)$ به کار می‌بریم و نتیجه مطلوب حاصل می‌شود. حال قسمت دوم قضیه یعنی پوچ‌توانی $a_1, \ldots, a_n$ را اثبات می‌کنیم. فرض می‌کنیم که $g(x)f(x) = c$ ثابت باشد و b_0 در R یکه باشد. فرض کنیم P یک ایده‌آل اول مینیمال از R باشد. با استفاده از لم ۵.۱.۲، می‌توان درون‌ریختی $\overline{\alpha}$ از $\overline{R} = \dfrac{R}{P}$ را به‌گونه‌ای تعریف کرد که $\overline{\alpha}(\overline{a}) = \overline{\alpha(a)}$ که در آن $\overline{a} = a + P$ برای هر $a \in R$. بنابراین $\overline{R}[x; \overline{\alpha}]$ یک حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب است. طبق قضیه‌ی ۶.۱.۲، چون که R یک حلقه‌ی ۲-اولیه است، پس P یک ایده‌آل کاملاً اول از R است و هم‌چنین $\overline{R}$ یک دامنه است. نشان می‌دهیم که $\overline{R}$، $\overline{\alpha}$-سازگار است. با استفاده از لم ۵.۱.۲، داریم $\alpha^{-1}(P) \subseteq P$ ، $\alpha(P) \subseteq P$. اگر $\overline{a}\overline{b} = \overline{0}$ برای $a, b \in R$ ، آن‌گاه $ab \in P$. از آن جایی که P یک ایده‌آل کاملاً اول از R است، نتیجه می‌گیریم $a \in P$ یا $b \in P$. مجدداً با استفاده از لم ۵.۱.۲ داریم $a\alpha(b) \in P$ و هم‌چنین $(\overline{a})\overline{\alpha}(\overline{b}) = \overline{0}$.

برعکس، اگر $(\overline{a})\overline{\alpha}(\overline{b}) = \overline{0}$، (برای $a, b \in R$) آن‌گاه $a\alpha(b) \in P$. این یعنی $a \in P$ یا $\alpha(b) \in P$. پس $b \in \alpha^{-1}(P)$ و چون طبق لم ۵.۱.۲، $\alpha^{-1}(P) \subseteq P$، لذا $a \in P$ یا $b \in P$. این نتیجه می‌دهد $ab \in P$ و هم‌چنین $\overline{a}\overline{b} = 0$. به آسانی می‌توان چک کرد که یک همریختی حلقه‌ای پوشا از $R[x; \alpha]$ به $\overline{R}[x; \overline{\alpha}]$ وجود دارد. این نتیجه می‌دهد که $(\overline{g(x)})(\overline{f(x)}) = \overline{c}$ در $\overline{R}[x; \overline{\alpha}]$. اگر $\overline{f(x)} = \overline{0}$ ، آن‌گاه به وضوح $a_i \in P$ برای همه $i \geqslant 1$. اگر $\overline{f(x)} \neq 0$، آن‌گاه $(\overline{g(x)})(\overline{f(x)}) = \overline{c}$ که نتیجه می‌دهد $\overline{r}, \overline{a} \neq 0$ به طوری که $(\overline{r})(\overline{f(x)}) = \overline{ac}$. این یعنی $(\overline{r})(\overline{a_i}) = \overline{0}$ برای $i \geqslant 1$. توجه کنید که $\dfrac{R}{P}$ یک دامنه است. داریم $\overline{a_i} = \overline{0}$ و هم‌چنین $a_i \in P$. بنابراین $a_i \in N_*(R)$ برای هر $i \geqslant 1$. زیرا $N_*(R)$ زیرمجموعه‌ای از تمام ایده‌آل‌های اول مینیمال R است. $\square$

قضیه ۸.۱.۲. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر و درون‌ریختی α از R، سازگار باشد و $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ در $R[x; \alpha]$ یک چندجمله‌ای اریب ناصفر باشد. اگر چندجمله‌ای اریب ناصفری چون $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in R[x; \alpha]$ وجود داشته باشد به طوری که $f(x)g(x) = c$ ثابت باشد، آن‌گاه $a_0b_0 = c$ و عناصر ناصفر $a, r \in R$ وجود دارند به طوری که $f(x)r = ca$. به‌ویژه، برای برخی p که $0 \leqslant p \leqslant m$ ، $r = b_pa$ و a یا یک است یا حاصل‌ضربی از*

حداکثر m ضریب از $\{\alpha^k(a_i)| \circ \leqslant k \leqslant m \ , \circ \leqslant i \leqslant n\}$. به‌علاوه، اگر $b_\circ$ در R یکه باشد، آن‌گاه $a_1, a_2, \ldots, a_n$ همگی پوچ‌توان‌اند.

برهان. مشابه اثبات قضیه ۷.۱.۲، به سادگی می‌توان حکم را برای $f(x)$ از درجه‌ی صفر اثبات کرد. سپس فرض می‌کنیم که $f(x)$ از درجه‌ی $n \geqslant 1$ باشد و با استقرا روی درجه‌ی $g(x)$ ادامه می‌دهیم. اگر $m = \circ$ باشد، آن‌گاه $g(x) = b_\circ \neq \circ$ و $f(x)b_\circ = (a_\circ + a_1 x + \cdots + a_n x^n)b_\circ = c$. به‌وضوح $a_\circ b_\circ = c$ و $r = b_\circ$ و $a = 1$. حال فرض می‌کنیم که حکم برای تمامی چندجمله‌ای‌های اریب با درجه‌ی کمتر از m برقرار باشد. فرض کنید $f(x)g(x) = c$ که $g(x)$ از درجه‌ی m است، نشان می‌دهیم که $g(x)$ می‌تواند با یک چندجمله‌ای از درجه‌ی کمتر جابه‌جا شود. اگر $b_\circ = \circ$، آن‌گاه $c = a_\circ b_\circ = \circ$. از $f(x)g(x) = f(x)g^*(x)x^q = c = \circ$ داریم: $f(x)g^*(x) = \circ = c$ که $g^*(x) = b_q + b_{q+1}x + \cdots + b_m x^{m-q}$ و b_q کوچکترین ضریب ناصفر از $g(x)$ می‌باشد. با استفاده از فرض استقرا، عناصر ناصفر a و r به‌طور مطلوب به‌دست می‌آیند. اگر $b_\circ \neq \circ$ و برای همه‌ی $1 \leqslant k \leqslant n$، $g(x)a_k = \circ$، آن‌گاه $b_\circ a_k = \circ$. از آن‌جایی که R برگشت‌پذیر و α-سازگار است برای همه‌ی $1 \leqslant k \leqslant n$، $a_k b_\circ = a_k \alpha^k(b_\circ) = \circ$. به‌دنبال آن $f(x)b_\circ = c$ و $c = a_\circ b_\circ$، در نتیجه $r = b_\circ$ و $a = 1$ که در شرایط مطلوب صدق می‌کند. بنابراین فرض می‌کنیم که k بزرگترین عدد صحیح مثبتی باشد که $g(x)a_k \neq \circ$. در حالت $k = n$، از $f(x)g(x) = c$ داریم که $a_n\alpha^n(b_m) = \circ$، که نتیجه می‌دهد $b_m a_n = \circ = a_n b_m$ و بنابراین $b_m\alpha^m(a_n) = \circ$. این یعنی $g(x)a_n$ از درجه‌ی کمتر از m است که با توجه به فرض استقرا $f(x)(g(x)a_n) = ca_n$. در حالت $k < n$، برای برخی $k+1 \leqslant s \leqslant n$، $g(x)a_s = \circ$ و این طبق لم ۱.۱.۲، بدین معناست که $a_s g(x) = \circ$ و بنابراین $a_s b_\circ = a_s b_1 = \cdots = a_s b_m = \circ$. این امر طبق لم ۱.۱.۲، نتیجه می‌دهد که $a_s x^s g(x) = \circ$. بنابراین داریم:

$$(a_\circ + a_1 x + \cdots + a_k x^k)g(x) = f(x)g(x) = c.$$

به دنبال آن، $b_m a_k = a_k b_m = \circ = a_k\alpha^k(b_m)$، و بنابراین $b_m\alpha^m(a_k) = \circ$. پس نتیجه می‌گیریم که $g(x)a_k$ از درجه‌ی کمتر از m است و $f(x)(g(x)a_k) = ca_k$. حال فرض استقرا برای $g(x)a_k$ به کار برده می‌شود و ca_k نتیجه‌ی مطلوب را به دست می‌دهد. همچنین اثبات مربوط به قسمت پوچ‌توانی $a_1, a_2, \ldots, a_n$ مشابه اثبات قضیه ۷.۱.۲ می‌باشد. □

نتیجه‌ی بعدی به‌طور مستقیم از قضیه‌ی ۷.۱.۲ یا ۸.۱.۲ به دست می‌آید.

نتیجه ۹.۱.۲. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر باشد که برای درون‌ریختی α از R، α-سازگار باشد. چندجمله‌ای اریب $f(x)$ در $R[x;\alpha]$ یک مقسوم‌علیه صفر است اگروتنها اگر ثابت ناصفری چون $r \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $rf(x) = f(x)r = \circ$.*

۲.۲ حلقه‌های مک‌کوی

قضیه ۱.۲.۲. *اگر R، حلقه‌ای برگشت‌پذیر باشد، آن‌گاه R، یک حلقه‌ی مک‌کوی است.*

برهان. فرض کنیم $f(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i \ , \ g(x)=\sum_{j=0}^{n} b_j x^j \ \in R[x]-\{0\}$ و همچنین فرض کنید $f(x)g(x)=0$. کافی است ثابت کنیم R مک‌کوی چپ است. برای هر چندجمله‌ای $a(x)\in R[x]$، C_a را برابر با ایده‌آل چپ تولیدشده توسط ضرایب $a(x)$ قرار می‌دهیم. با استفاده از استقرا نشان می‌دهیم که $c\in C_f-\{0\}$ وجود دارد به طوری که $c.g(x)=0$ و این نتیجه می‌دهد که R، مک‌کوی چپ است. اگر $n=0$ در این صورت $c=a_0$ و داریم $c.g(x)=a_0b_0=0$. اگر $n\geqslant 1$، از استقرا روی درجه‌ی $g(x)$ استفاده می‌کنیم. اگر برای همه‌ی $k<n$، داشته باشیم:

$$a(x)b(x)=0,\ (a(x),b(x)\in R[x]-\{0\}),\quad deg(b(x))=k$$

آن‌گاه $c\in C_a-\{0\}$ وجود دارد به طوری که $c.b(x)=0$. حال $l\geqslant 0$ را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $f(x)b_0^{l}\neq 0=f(x)b_0^{l+1}$. حال با استفاده از برگشت‌پذیری در R تعریف می‌کنیم:

$$a(x):=b_0^{l}f(x)\neq 0=b_0^{l}f(x)b_0.$$

لذا داریم:

$$a(x)g(x)=0 \quad\Longrightarrow\ a(x)b_0=0.$$

اگر قرار دهیم $b(x)=\dfrac{(g(x)-b_0)}{x}$، آن‌گاه از معادلات بالا نتیجه می‌گیریم که $a(x)b(x)=0$. توجه داریم از آن جایی که $deg(g(x))=n>0$، پس $b(x)\neq 0$ می‌باشد و همچنین $deg(b(x))=n-1<n$. بنابراین طبق فرض استقرا $c\in C_a-\{0\}$ وجود دارد به طوری که $c.b(x)=0$. از آن جایی که $a(x)b_0=0$ و این یعنی $C_ab_0=0$ و در نتیجه $cb_0=0$ و درنهایت داریم $c.g(x)=0$. از طرفی طبق ساختار $a(x)$ داریم $C_a\subseteq C_f$. پس $c\in C_f$ و این گام استقرای ما را کامل می‌کند. بنابراین تعدادی $0\neq c\in C_f$ وجود دارد که $c.g(x)=0$ (که مهم نیس $g(x)$ از چه درجه‌ای باشد). $\square$

مثال ۲.۲.۲. حلقه‌ای نیمه جابه‌جایی چون R وجود دارد که مک‌کوی راست نیست.
فرض کنیم $K=Z_2<a_0,a_1,a_2,a_3,b_0,b_1>$ یک Z_2-جبر آزاد تولیدشده توسط شش متغیر تعویض‌ناپذیر a_0,a_1,a_2,a_3,b_0,b_1 باشد. فرض کنیم I ایده‌آلی از K باشد که به وسیله‌ی عناصر

$$\{a_3b_1, a_2b_1+a_3b_0, a_1b_1+a_2b_0, a_0b_1+a_1b_0, a_0b_0, a_1a_j+a_2a_j\ (0\leqslant j\leqslant 3),$$

$$a_3a_j\ (0\leqslant j\leqslant 3), a_0a_j\ (0\leqslant j\leqslant 3), b_ia_j\ (0\leqslant i\leqslant 1\ , 0\leqslant j\leqslant 3), b_ib_j (0\leqslant i,j\leqslant 3)\}$$

تولید می‌شود و $R=\dfrac{K}{I}$. قرار می‌دهیم: $F(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ و $G(x)=b_0+b_1x$. در نتیجه در حلقه‌ی $R[x]$، $F(x)G(x)=0$. نشان می‌دهیم:

۱. چندجمله‌ای‌های $F(x)$ و $G(x)$ عناصری ناصفر از $R[x]$ هستند.

۲. R خاصیت IFP دارد.

۳. R مک‌کوی چپ است اما مک‌کوی راست نیست.

واضح است که ایده‌آل I همگن است. حال نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان هر عضو R را به‌طور منحصر به فرد به یک فرم تقلیل‌یافته بیان نمود.

ادعای ۱: هر $\gamma \in R$ نمایش منحصر به فردی به شکل

$$\gamma = f_0 + f_1(a_2)a_1 + f_2(a_2)a_2 + g(a_2)a_0 + h(a_2)a_3 +$$

$$+(r_0 + r_1(a_2)a_1 + r_2(a_2)a_2 + r_3(a_2)a_3)b_0 + s_0 b_1$$

دارد که $f_0, r_0, s_0 \in Z_2$ و $f_1(x), f_2(x), g(x), h(x), r_1(x), r_2(x), r_3(x) \in Z_2[x]$.

اثبات ادعای ۱: اگر تک‌جمله‌ای مورد نظر ما یکی از این عبارات a_0b_0، a_3b_1، b_ib_j، b_ia_j، a_0a_j یا a_3a_j را داشته باشد، آن تک‌جمله‌ای صفر است و اگر نداشته باشد به جای a_ib_1 و a_1a_j به ترتیب از $a_{i+1}b_0$ و a_2a_j استفاده می‌کنیم.(درواقع سعی می‌کنیم اندیس عنصر b_j را کاهش دهیم و اندیس عنصر a_i را افزایش دهیم). به این ترتیب تک‌جمله‌ای‌های حاصل تقلیل‌یافته هستند.

با استفاده از ادعای ۱ نتیجه می‌گیریم ضرایب $F(x)$ و $G(x)$ ناصفر هستند و لذا چندجمله‌ای‌های $F(x)$ و $G(x)$ عناصری ناصفر از $R[x]$ هستند.

ادعای ۲: حلقه R خاصیت IFP دارد.

اثبات ادعای ۲: فرض کنیم $\gamma, \gamma' \in R$ و $\gamma\gamma' = 0$. عنصر γ را به فرم ذکر شده در ادعای ۱ می‌نویسیم. $f_1(a_2)$ را به f_1 نمایش می‌دهیم و برای سایر چندجمله‌ای‌هایی که بر اساس a_2 هستند نیز به همین صورت قرارداد می‌کنیم. فرض کنیم $\gamma' = f'_0 + f'_1a_1 + \cdots + s'_0b_1$ نمایش منحصر به فرد γ' باشد که در ادعای ۱ بیان شد. قرار می‌دهیم: $f = f_0 + f_1a_1 + f_2a_2$ و f' را نیز به همین شکل نشان می‌دهیم. چون I یک ایده‌آل همگن است، تمام تک‌جمله‌ای‌های ظاهر شده در $\gamma\gamma'$ باید صفر باشند. برای آن که نشان دهیم $\gamma r\gamma' = 0$، ابتدا نشان می‌دهیم این تساوی برای هر تک‌جمله‌ای از درجه‌ی یک درست است. اگر γ یا γ' صفر باشد آن‌گاه، نتیجه حاصل است. فرض کنیم γ و γ' ناصفر باشند. از این که $\gamma\gamma' = 0$ ، نتیجه می‌گیریم: $f_0f'_0 = 0$. بنابراین $f_0 = 0$ یا $f'_0 = 0$. ابتدا فرض می‌کنیم $f_0 = 0$. فرض کنیم δ مجموع تمام جملات ناصفر γ از کمترین درجه‌ی ممکن باشد. از این که I همگن است نتیجه می‌گیریم $\delta f'_0 = 0$. بنابراین: $f'_0 = 0$. به‌طور مشابه اگر $f'_0 = 0$، می‌توان نشان داد: $f_0 = 0$. بنابراین در هر دو حالت $f_0 = f'_0 = 0$. از $f'_0 = 0$ نتیجه می‌شود که برای هر $i = 0, 1$، $b_i\gamma' = 0$. بنابراین $\gamma b_i\gamma' = 0$. پس کافی است برای هر $0 \leqslant j \leqslant 3$ نشان دهیم $\gamma a_j\gamma' = 0$. با محاسبات ساده‌ای می‌توان نشان داد: $\gamma a_j = (f_1 + f_2)a_2a_j$. از این رو، اگر $f_1 = f_2$، آن‌گاه: $\gamma a_j\gamma' = 0$. حال فرض کنیم $f_1 \neq f_2$ و در پی تناقض می‌گردیم. با محاسبات ساده‌ای روی فرم تقلیل‌یافته $\gamma\gamma'$ نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned}
0 = \gamma\gamma' &= (f_1 + f_2)a_2(f'_1a_1 + f'_2a_2 + g'a_0 + h'a_3) \\
&+ (s'_0f_2 + r'_0h + (f_1 + f_2)a_2r'_3)a_3b_0 \\
&+ (s'_0f_1 + r'_0f_2 + (f_1 + f_2)a_2r'_2)a_2b_0 \\
&+ (s'_0g + r'_0f_1 + (f_1 + f_2)a_2r'_1)a_1b_0
\end{aligned}$$

چون $f_1 + f_2 \neq 0$، پس $f'_1 = f'_2 = g' = h' = 0$. هم‌چنین از سه سطر آخر معادله فوق نتیجه می‌گیریم:

۱. $s'_0 f_2 + r'_0 h + (f_1 + f_2)a_2 r'_3 = 0$.

۲. $s'_0 f_1 + r'_0 f_2 + (f_1 + f_2)a_2 r'_2 = 0$.

۳. $s'_0 g + r'_0 f_1 + (f_1 + f_2)a_2 r'_1 = 0$.

فرض کنیم $s'_0 = 1$. اگر $r'_0 = 1$، آن‌گاه از (۲) نتیجه می‌گیریم:
$deg((f_1 + f_2)a_2) \leqslant deg(f_1 + f_2)$ که یک تناقض است (زیرا $f_1 + f_2 \neq 0$). بنابراین $r'_0 = 0$ و لذا $s'_0 = 0$. اگر $r'_0 = 1$، آن‌گاه با استفاده از ۲ و ۳ به همان تناقض می‌رسیم. بنابراین $r'_0 = 0$. از این که $f_1 + f_2 \neq 0$، نتیجه می‌گیریم $r'_1 = r'_2 = r'_3 = 0$ و لذا $\gamma' = 0$، که با فرض $\gamma' \neq 0$ در تناقض است.
به این ترتیب نشان داده شد که در تمام حالات هرگاه r یک تک‌جمله‌ای از درجه‌ی یک باشد آن‌گاه: $\gamma r \gamma' = 0$. اگر استدلال فوق را با جایگزین نمودن γr به جای γ تکرار کنیم نتیجه می‌گیریم که r هر تک‌جمله‌ای از هر درجه‌ای باشد نتایج فوق برقرار هستند. اما از $\gamma\gamma' = 0$ نتیجه می‌گیریم که اگر $r = 1$، آن‌گاه: $\gamma r \gamma' = 0$. چون هر عضو از حلقه‌ی R دقیقاً مجموعی از تک‌جمله‌ای‌ها است، از این رو برای هر $r \in R$، $\gamma r \gamma' = 0$. بنابراین R خاصیت IFP دارد.
ادعای ۳: حلقه‌ی R مک‌کوی راست نیست.
اثبات ادعای ۳: کافی است نشان دهیم اگر $r \in R$ و $F(x)r = 0$، آن‌گاه: $r = 0$. برای این منظور کافی است نشان دهیم اگر $a_2 r = 0$، آن‌گاه: $r = 0$. اگر به جای $a_2 r$ از فرم تقلیل‌یافته‌ی آن استفاده کنیم، آن‌گاه با استفاده از ادعای ۱ به راحتی می‌توان نشان داد: $r = 0$.
ادعای ۴: حلقه‌ی R مک‌کوی چپ است.
اثبات ادعای ۴: فرض کنیم $P(x)$ و $Q(x)$ دو عنصر ناصفر از حلقه‌ی $R[x]$ باشند و $P(x)Q(x) = 0$. قرار می‌دهیم: $P(x) = \sum_{i=0}^{m} p_i x_i$ و $Q(x) = \sum_{j=0}^{n} q_j x^j$. اگر جمله‌ی ثابت هر q_i صفر باشد، آن‌گاه: $b_0 Q(x) = 0$ و نتیجه حاصل است. بنابراین فرض می‌کنیم جمله‌ی ثابت برخی از q_i ها ناصفر باشد. فرض کنیم k کوچکترین اندیسی باشد که جمله‌ی ثابت q_k ناصفر است. برای هر $p_i \neq 0$ فرض می‌کنیم p'_i مجموع تمام جملات ناصفر p_i با کمترین درجه‌ی ممکن باشد و برای هر $p_i = 0$ فرض می‌کنیم: $p'_i = 0$. فرض کنیم j کوچکترین اندیسی باشد که p'_j کمترین درجه را بین عناصر ناصفر مجموعه‌ی $\{p'_0, \ldots, p-m'\}$ دارد. توجه داریم چنین j ای وجود دارد، زیرا $P(x)$ ناصفر است. چون $\sum_{r+s=j+k} p_r q_s$ ضریب x^{j+k} در عبارت $P(x)Q(x) = 0$ است و I همگن است، از این رو در عبارت فوق مجموع تمام جملاتی که از درجه‌ی یکسان هستند صفر می‌باشد. اما بنا بر انتخاب j, k، $p'_j \cdot 1$ تنها جمله‌ای از عبارت $\sum_{r+s=j+k} p_r q_s$ است که کمترین درجه‌ی ممکن را دارد که از جمله‌ی $p_j q_k$ به دست می‌آید، که یک تناقض است.

۳.۲ عناصر یکه در حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب

قضیه ۱.۳.۲. *فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و α درون‌ریختی از R، سازگار باشد. چندجمله‌ای اریب $f(x)$ در $R[x;\alpha]$ یکه است اگروتنها اگر جمله ثابت آن یکه باشد و بقیه‌ی ضرایب آن پوچ‌توان باشند.*

برهان. اگر $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in R[x;\alpha]$ یکه باشد، آنگاه چندجمله‌ای اریبی چون $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in R[x;\alpha]$ وجود دارد به طوری که $f(x)g(x) = g(x)f(x) = 1$.
حال طبق قضیه‌ی ۷.۱.۲، b_0 یکه است و برای $k \geqslant 1$، ضرایب a_k پوچ‌توان هستند.
برعکس، اگر a_0 یکه باشد و هر a_k برای $k \geqslant 1$، پوچ‌توان باشد، آنگاه:

$$a_1x + \cdots + a_nx^n \in N(R)[x;\alpha] = L-rad(R[x;\alpha]) \subseteq rad(R[x;\alpha]).$$

با استفاده از لم ۳.۱.۲. این امر نتیجه می‌دهد که $f(x)$ در $R[x;\alpha]$ یکه است. □

نتیجه ۲.۳.۲. *فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و α درون‌ریختی از R، سازگار باشد. هم‌چنین فرض می‌کنیم $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ و $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ چندجمله‌ای‌های اریب ناصفری در $R[x;\alpha]$ باشند به طوری که a_1 در R یکه باشد. اگر $f(g(x)) = 0$ و هم‌چنین b_0 پوچ‌توان باشد یا $a_2, \ldots, a_n$ همگی پوچ‌توان باشند، آنگاه $b_1, b_2, \ldots, b_m$ نیز پوچ‌توان‌اند.*

برهان. فرض کنیم $f(g(x)) = 0$ نتیجه می‌دهد که $a_0 + a_1g + \cdots + a_ng^n = 0$. به عبارت دیگر $(a_1 + a_2g + \cdots + a_ng^{n-1})g = -a_0$. در این صورت جمله‌ی ثابت $a_1 + a_2g + \cdots + a_ng^{n-1}$، $a_1 + a_2b_0 + a_3(b_0)^2 + \cdots + a_n(b_0)^{n-1}$ می‌باشد که چون طبق فرض a_1 در R یکه است و $a_2, \ldots, a_n$ پوچ‌توان‌اند، طبق قضیه‌ی ۷.۱.۲، یکه است. حال با استفاده از قضیه‌ی ۸.۱.۲، می‌توان نتیجه گرفت که $b_1, b_2, \ldots, b_m$ همگی پوچ‌توان‌اند. □

نتیجه ۳.۳.۲. *فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و α درون‌ریختی از R، سازگار باشد و $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ و $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ چندجمله‌ای‌های اریب ناصفری در $R[x;\alpha]$ باشند به طوری که b_1 در R یکه باشد. اگر $g(f(x)) = 0$ و a_0 یا $b_2, b_3, \ldots, b_m$ پوچ‌توان باشند، آنگاه $a_1, a_2, \ldots, a_n$ نیز پوچ‌توان‌اند.*

برهان. مشابه اثبات نتیجه‌ی ۲.۳.۲ عمل می‌کنیم. طبق فرض $g(f(x)) = 0$ نتیجه می‌دهد که $b_0 + b_1f + \cdots + b_mf^m = 0$. به عبارت دیگر $(b_1 + b_2f + \cdots + b_mf^{m-1})f = -b_0$. از طرفی جمله‌ی ثابت $(b_1 + b_2f + \cdots + b_mf^{m-1})f$ برابر است با $b_1 + b_2a_0 + b_3a_0^2 + \cdots + b_ma_0^{m-1}$. چون طبق فرض b_1 یکه است و $b_2, \ldots, b_m$ پوچ‌توان هستند، پس این جمله‌ی ثابت، یکه است. لذا طبق قضیه‌ی ۷.۱.۲، $a_1, \ldots, a_n$ پوچ‌توان‌اند. □

نتیجه ۴.۳.۲. *فرض کنیم R حلقه‌ای کاهشی و α یک درون‌ریختی از R باشد. اگر R، α-سازگار باشد، آنگاه $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in R[x;\alpha]$ یکه است اگروتنها اگر a_0 یکه باشد و a_i برای هر $i \geqslant 1$، صفر باشد.*

برهان. می‌دانیم که هر حلقه‌ی کاهشی، برگشت‌پذیر نیز می‌باشد. لذا طبق قضیه‌ی ۱.۳.۲، می‌توان گفت چندجمله‌ای اریب $f(x)$ در $R[x;\alpha]$ یکه است اگروتنها اگر جمله ثابت آن یکه باشد و بقیه‌ی ضرایب پوچ‌توان باشند، اما از آن جایی که R یک حلقه‌ی کاهشی است و هیچ عنصر پوچ‌توان ناصفری ندارد، لذا همه‌ی a_iها برای $i \geqslant ۱$ باید صفر باشند. □

۴.۲ پیرامون حلقه‌های NI

قضیه ۱.۴.۲. *فرض‌کنیم R یک حلقه‌ی NI باشد و α یک درون‌ریختی از R باشد. اگر R، α-سازگار ضعیف باشد، آن‌گاه $f(x) = a_\circ + a_۱x + \cdots + a_nx^n \in R[x;\alpha]$ یکه است اگروتنها اگر $a_\circ$ یکه باشد و a_i برای هر $i \geqslant ۱$، پوچ‌توان باشد.*

برهان. از آن جایی که R یک حلقه‌ی NI است، پس $N(R) = N^*(R)$، لذا $N(R)$ یک ایده‌آل از R است و حلقه‌ی $\overline{R} = \dfrac{R}{N(R)}$ کاهشی است. درون‌ریختی α از R، درون‌ریختی $\overline{\alpha}$ از $\overline{R}$ را ایجاب می‌کند به طوری که: $\overline{\alpha}(\overline{a}) = \alpha(a) + N(R)$، زیرا $\alpha(N(R)) \subseteq N(R)$ که $\overline{a} = a + N(R)$ برای $a \in R$.
با توجه به این که R، α-سازگار ضعیف است، برای $a, b \in R$ داریم:

$$(\overline{a})\overline{\alpha}(\overline{b}) = \overline{\circ} \Longleftrightarrow a\alpha(b) \in N(R) \Longleftrightarrow ab \in N(R) \Longrightarrow \overline{a}\overline{b} = \overline{\circ}.$$

این بدین معناست که $\overline{R}$، $\overline{\alpha}$-سازگار است. از آن جایی که یک برو‌ریختی حلقه‌ای از $R[x;\alpha]$ به $\overline{R}[x;\overline{\alpha}]$ وجود دارد به‌گونه‌ای که $f(x)$ را به $\overline{f}(x) = \overline{a_\circ} + \overline{a_۱}x + \cdots + \overline{a_n}x^n$ می‌برد، می‌توان نتیجه گرفت که $\overline{f(x)}$ در حلقه‌ی $R[x;\alpha]$ یکه است. در نتیجه طبق نتیجه‌ی ۴.۳.۲، $\overline{a_\circ}$ در حلقه‌ی $\dfrac{R}{N(R)}$ یکه است و $\overline{a_i}$ برای هر $i \geqslant ۱$، صفر است. لذا داریم:

$$\overline{a_i} = \overline{\circ} \Longrightarrow a_i + N(R) = N(R) \Longrightarrow a_i \in N(R).$$

پس نتیجه می‌گیریم که $a_\circ$ در R یکه است و a_i برای هر $i \geqslant ۱$ در R پوچ‌توان است. □

نتیجه ۲.۴.۲. *فرض‌کنیم R یک حلقه‌ی ۲-اولیه ضعیف باشد و α یک درون‌ریختی از R باشد. اگر R، α-سازگار باشد، آن‌گاه $f(x) = a_\circ + a_۱x + \cdots + a_nx^n \in R[x;\alpha]$ یکه است اگروتنها اگر $a_\circ$ در R یکه باشد و a_i برای هر $i \geqslant ۱$ پوچ‌توان باشد.*

برهان. از آن جایی که هر حلقه‌ی ۲-اولیه ضعیف، یک حلقه‌ی NI نیز می‌باشد و این‌که اگر R، α-سازگار باشد، آن‌گاه α-سازگار ضعیف نیز می‌باشد، قسمت رفت حکم با استفاده از قضیه‌ی ۱.۴.۲ نتیجه می‌شود.
حال فرض می‌کنیم $f(x) = a_\circ + a_۱x + \cdots + a_nx^n \in R[x;\alpha]$ به گونه‌ای باشد که $a_\circ$ در R یکه باشد و a_i برای هر $i \geqslant ۱$ پوچ‌توان باشد، آن‌گاه با استفاده از لم ۳.۱.۲ داریم:

$$a_۱x + \cdots + a_nx^n \in L - rad(R[x;\alpha]) \subseteq rad(R[x;\alpha]).$$

این امر نتیجه می‌دهد که $f(x)$ در $R[x;\alpha]$ یکه است. □

نتیجه ۳.۴.۲. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی ۲-اولیه باشد، آن‌گاه $f(x) = a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \in R[x]$ یکه است اگروتنها اگر a_0 در R یکه باشد و a_i برای هر $i \geqslant 1$، پوچ‌توان باشد.*

برهان. می‌خواهیم ثابت کنیم

$$f(x) \in U(R[x]) \Longleftrightarrow a_0 \in U(R),\ a_1, \cdots, a_n \in N_*(R).$$

اگر $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in U(R[x])$، آن‌گاه به‌وضوح $a_0 \in U(R)$. فرض کنیم P یک ایده‌آل اول مینیمال از R باشد، آن‌گاه یک همریختی حلقه‌ای پوشا مانند ρ از $R[x]$ به $(\frac{R}{P})[x]$ وجود دارد به طوری که:

$$\rho(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = (a_0 + P) + (a_1 + P)x + \cdots + (a_n + P)x^n$$

و همچنین $ker\rho = P[x]$. بنابراین $P[x]$ یک ایده‌آل از $R[x]$ است و همچنین طبق قضیه‌ی سوم یک‌ریختی داریم:

$$\frac{R[x]}{P[x]} \cong (\frac{R}{P})[x].$$

از آن جایی که R ۲-اولیه است و P یک ایده‌آل اول مینیمال است، لذا $\frac{R}{P}$ یک دامنه است. می‌دانیم که اگر D دامنه باشد، آن‌گاه $U(D[x]) = U(D)$، لذا داریم:

$$U(\frac{R}{P}[x]) = U(\frac{R}{P}).$$

از آن جایی که تصویر $f(x)$ تحت همریختی حلقه‌ای ρ، یکه است، با استفاده از بحث بالا داریم که $a_1, \ldots, a_n \in P$ و در نتیجه $a_1, \ldots, a_n \in N_*(R)$ و نتیجه‌ی مطلوب به دست می‌آید. □

به‌عنوان کاربردی از نتیجه‌ی بالا گزاره‌ی زیر را اثبات می‌کنیم.

گزاره ۴.۴.۲. *حلقه‌ی R یکه-مرکزی است اگروتنها اگر $R[x]$ یکه-مرکزی باشد.*

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که حلقه‌ی یکه-مرکزی R، ۲-اولیه است. از آن جایی که رادیکال اول R، مجموعه‌ی تمام عناصر قویاً پوچ‌توان در R است، کافی است نشان دهیم که هر عنصر پوچ‌توان از R، قویاً پوچ‌توان است. فرض می‌کنیم $a \in N(R)$ که برای برخی اعداد صحیح n داریم $a^n = 0$. m-دنباله‌ای که با a شروع می‌شود را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$a_0 = a\ ,\ a_{i+1} = a_ir_ia_i \quad (r_i \in R\ ,\ i = 0, 1, \cdots).$$

توجه داشته باشیم که چون R، یکه-مرکزی است، لذا a یک عنصر مرکزی است. داریم:

$$a_1 = a^2r_0, \quad a_2 = a^{2^2}r_0r_1r_0.$$

به طور استقرایی داریم:

$$a_n = a^{2^n}s \quad (s \in R).$$

یعنی $a_n = 0$ وهمچنین a قویاً پوچ‌توان است.

حال فرض کنیم $R[x]$ یک حلقه‌ی یکه-مرکزی باشد، در نتیجه R به‌عنوان زیرحلقه‌ای از $R[x]$ یکه-مرکزی

می‌شود.
برعکس، فرض کنیم R یکه-مرکزی باشد، آن‌گاه با استفاده از بحث بالا R، ۲-اولیه است. لذا با استفاده از نتیجه‌ی ۳.۴.۲، برای هر $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in U(R[x])$، نتیجه می‌گیریم a_0 در R یکه است و برای هر $i \geqslant 1$، $a_i \in N(R)$. چون که R، یکه-مرکزی است، لذا a_i برای تمامی $i \geqslant 0$، مرکزی است و این نتیجه می‌دهد که $f(x)$ هم در $R[x]$ مرکزی است. □

گزاره ۵.۴.۲. *اگر R یک حلقه‌ی NI و درون‌ریختی α از R، سازگار باشد، آن‌گاه $S_r(R[x;\alpha]) > 1$.*

برهان. با استفاده از برهان خلف حکم را اثبات می‌کنیم. فرض کنیم $S_r(R[x;\alpha])$ بزرگ‌تر از یک نباشد. طبق تعریف رده‌ی پایداری، $S_r(R) = 1$ هرگاه برای $a, b \in R$ که $aR + bR = R$، $y \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $a + by$ در R یکه باشد. در این صورت $x(-x) + 1 + x^2 = 1$ نتیجه می‌دهد که $f(x) \in R[x;\alpha]$ به‌گونه‌ای وجود دارد که $x + (1 + x^2)f(x)$ در $R[x;\alpha]$ یکه است. فرض کنیم $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. در حالت $n = 0$، $a_0 + x + \alpha^2(a_0)x^2$ در $R[x;\alpha]$ یکه است. با استفاده از قضیه‌ی ۱.۴.۲، نتیجه می‌گیریم که ضریب x یعنی ۱ پوچ‌توان است که این یک تناقض است.
در حالت $n = 1$ داریم:

$$x + (1 + x^2)f(x) = a_0 + (1 + a_1)x + \alpha^2(a_0)x^2 + \alpha^2(a_1)x^3$$

یکه است. در نتیجه $\alpha^2(a_1) \in N(R)$ و همچنین با استفاده از لم ۱.۱.۲، a_1 نیز پوچ‌توان است. این نتیجه می‌دهد که ضریب x یعنی $a_1 + 1$ نیز پوچ‌توان است و این امر غیرممکن است، زیرا $a_1 + 1$ یکه است. بنابراین به تناقض می‌رسیم.
در حالت $n = 2k$ داریم:

$$x + (1 + x^2)f(x) = a_0 + (1 + a_1)x + (a_2 + \alpha^2(a_0))x^2 + \\ + (a_3 + \alpha^2(a_1))x^3 + \cdots + \alpha^2(a_{2k-1})x^{2k+1} + \alpha^2(a_{2k})x^{2k+2}$$

یکه است. این امر نتیجه می‌دهد $\alpha^2(a_{2k-1}), \alpha^2(a_k) \in N(R)$ و همچنین $a_{2k-1}, a_{2k} \in N(R)$.
به‌طور استقرایی می‌توان نتیجه گرفت که $a_{2k}, a_{2k-1}, \cdots, a_4, a_3 \in N(R)$.
در نتیجه $a_3 + \alpha^2(a_1) \in N(R)$ بنابراین $\alpha^2(a_1)$ نیز پوچ‌توان است. به دنبال آن $a_1 \in N(R)$ و همچنین $a_1 + 1 \in N(R)$ که یک تناقض است. در حالت $n = 2k + 1$ که $k \geqslant 1$، مشابه حالت $n = 2k$، مجدداً به تناقض می‌رسیم و اثبات کامل می‌شود. □

نتیجه ۶.۴.۲. *اگر R یک حلقه‌ی ۲-اولیه باشد و درون‌ریختی α از R را همانی در نظر بگیریم، در این صورت با توجه به این‌که هر حلقه‌ی ۲-اولیه، NI می‌باشد و طبق قضیه‌ی ۵.۴.۲ می‌توان نتیجه گرفت که $S_r(R[x]) > 1$.*

در ادامه روش دیگری از نتیجه‌ی ۶.۴.۲ را ثابت می‌کنیم:

برهان. می‌خواهیم ثابت کنیم $S_r(R[x]) \neq 1$.
فرض خلف: فرض کنیم $S_r(R[x]) = 1$، آن‌گاه $x(-x)+(1+x^2) = 1$ نتیجه می‌دهد که $f(x) \in R[x]$

به‌گونه‌ای وجود دارد که $x+(1+x^2)f(x)=u(x)\in U(R[x])$ و هم‌چنین $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$. اگر $n=0$، آن‌گاه $a_0+x+a_0x^2\in U(R[x])$ که نتیجه می‌دهد $1\in N_*(R)=N(R)$ که خود یک تناقض است. حال فرض می‌کنیم که $n\geqslant 1$. ادعا می‌کنیم که $a_n\in N_*(R)$. طبق قضیه می‌دانیم اگر R یک حلقه‌ی ۲-اولیه باشد، آن‌گاه $rad(R[x])=N_*(R[x])$. لذا با به کار بردن این قضیه و طبق این نکته که بیان می‌کند اگر R یک حلقه‌ی ۲-اولیه باشد، در این صورت
$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in U(R[x])$ اگروتنها اگر $a_0\in U(R)$ و $a_1,\dots,a_n\in N_*(R)$، داریم:

$$x+(1+x^2)f(x)=u(x)\in U(R[x]).$$

پس $a_n\in N_*(R)$. حال ثابت می‌کنیم که برای هر $i\geqslant 1$، $a_i\in N_*(R)$. در غیر این صورت باید اندیسی مانند $1\leqslant k\leqslant n$ وجود داشته باشد به طوری که $a_k\notin N_*(R)$، اما $a_{k+1}\in N_*(R)$. حال داریم:

$$\begin{aligned} x+(1+x^2)f(x) &= x+(1+x^2)(a_0+a_1x+\cdots+a_kx^k+a_{k+1}x^{k+1}+\cdots+a_nx^n) \\ &= u(x). \end{aligned}$$

از آن جایی که $u(x)\in U(R[x])$ و $a_{k+1},\dots,a_n\in P(R)$ داریم:

$$a_{k+1}x^{k+1}+\cdots+a_nx^n\in N_*(R)[x]=N_*(R[x])\subseteq rad(R[x]).$$

در نتیجه:

$$x+(1+x^2)(a_0+a_1x+\cdots+a_kx^k)=u(x)-(1+x^2)(a_{k+1}x^{k+1}+\cdots+a_nx^n)\in U(R[x])$$

(زیرا می‌دانیم اگر $u\in U(R)$ و $a\in rad(R)$، آن‌گاه: $u+a\in U(R)$.) به دنبال آن:

$$a_0+(1+a_1)x+\cdots+a_kx^{k+2}\in U(R[x]).$$

که نتیجه می‌دهد $a_k\in N_*(R)$ که یک تناقض است. بنابراین برای تمامی $i\geqslant 1$، $a_i\in N_*(R)$. از طرف دیگر:

$$x+(1+x^2)f(x)=a_0+(1+a_1)x+\cdots+a_nx^{n+2}=u(x)\in U(R[x]).$$

نتیجه می‌گیریم که $1+a_1\in N_*(R)$ که این یعنی $1\in N_*(R)$ که تناقض است.
لذا $S_r(R[x])\neq 1$. □

فرض کنیم R یک حلقه باشد. حلقه‌ای که در شرایط زیر صدق کند را UN می‌نامیم:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in U(R[x])\Longleftrightarrow a_0\in U(R)\ ,\ a_i\in N(R)\ (\forall i\geqslant 1).$$

ملاحظه ۲.۴.۷. *با مراجعه به [۲۸]، حدس کوته [1] با هر یک از عبارات زیر هم‌ارز است:*

[1] Koethe conjecture

۱. *اگر I یک ایده‌آل پوچ در حلقه‌ی R باشد، آن‌گاه $M_n(I)$ برای هر n، پوچ است.*

۲. $N^*(M_n(R)) = M_n(N^*(R))$.

۳. *اگر I یک ایده‌آل پوچ در R باشد، آن‌گاه* $I[t] \subseteq radR[t]$.

۴. $rad(R[t]) = N^*(R)[t]$.

قضیه ۸.۴.۲. *حدس کوته برقرار است اگروتنها اگر هر حلقه‌ی NI، یک حلقه‌ی UN نیز باشد.*

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم حدس کوته برقرار باشد. آن‌گاه طبق نکته‌ی ۷.۴.۲، برای هر حلقه‌ی R داریم:

$$rad(R[x]) = N^*(R)[x].$$

حال باید ثابت کنیم هر حلقه‌ی NI، UN است.
حالت اول: فرض می‌کنیم $f(x) \in U(R[x])$ که $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in R[x]$، آن‌گاه $a_0 \in U(R)$ و برای هر $i \geqslant 1$، $a_i \in N(R)$. حال چون R یک حلقه‌ی NI است پس طبق قضیه‌ی ۱.۴.۲، پس یک حلقه‌ی UN نیز هست.
حالت دوم: فرض می‌کنیم که $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in R[x]$ به‌گونه‌ای باشد که:

$$a_0 \in U(R)\ ,\ a_i \in N(R)\ (\forall i \geqslant 1).$$

حال ثابت می‌کنیم که $f(x) \in U(R[x])$. قرار می‌دهیم:

$$g(x) = a_1x + \cdots + a_nx^n.$$

در این صورت داریم:

$$g(x) \in N(R)[x] = N^*(R)[x] = rad(R[x]).$$

$$\Longrightarrow f(x) = a_0 + g(x) \in U(R[x]).$$

یعنی $f(x)$ در $R[x]$ یکه است، پس مجدداً یک حلقه‌ی UN است.
برعکس، فرض می‌کنیم هر حلقه‌ی NI یک حلقه‌ی UN باشد. بنا به قضیه‌ی ۷.۴.۲ حدس کوته برقرار است اگروتنها اگر برای هر جبر پوچ S روی هر میدان شمارای F، $rad(S[x]) = S[x]$. فرض کنیم $R = F + S$ مجموعی از جبرها (روی F) باشد. چون R یک حلقه‌ی NI است، پس:

$$N(R) = N^*(R) = S \Longrightarrow N(R) = S$$

چون S یک ایده‌آل از R است پس $S[x]$ نیز یک ایده‌آل از $R[x]$ است. می‌دانیم هرگاه $S \subseteq R$، آن‌گاه $rad(S) = rad(R) \cap S$. پس:

$$S[x] \subseteq R[x] \Longrightarrow rad(S[x]) = rad(R[x]) \cap S[x] \subseteq rad(R[x]).$$

از طرف دیگر:

$$rad(R[x]) = I[x] \subseteq S[x], \quad rad(S[x]) = rad(R[x]) \cap S[x].$$

(که طبق قضیه، $rad(R[x]) = I[x]$، که $I[x]$ یک ایده‌آل پوچ است). حال داریم:

$$rad(R[x]) = I[x] \cap rad(R[x]) \subseteq S[x] \cap rad(R[x]) = rad(S[x]).$$

پس می‌توان نتیجه گرفت که:

$$rad(R[x]) = rad(S[x]).$$

پس برای هر $h(x) \in S[x] = N(R)[x]$، $h(x) + ۱$ یکه است. در حلقه‌های با عنصر همانی، x یک عنصر شبه‌منظم است اگروتنها اگر $x + ۱$ وارون‌پذیر (یکه) باشد و اگر هر عضو از یک ایده‌آل از حلقه‌ی R شبه‌منظم باشد، آن‌گاه آن ایده‌آل شبه‌منظم است. حال طبق این تعریف، می‌توان گفت که $S[x]$ یک ایده‌آل شبه‌منظم از $R[x]$ است. از طرفی می‌دانیم که رادیکال جیکبسون یک حلقه، بزرگترین ایده‌آل شبه‌منظم یک حلقه است. پس داریم:

$$S[x] \subseteq rad(R[x]) = rad(S[x]).$$

از آن‌جایی که $rad(S[x]) \subseteq S[x]$، نتیجه می‌گیریم:

$$S[x] = rad(S[x]).$$

□

گزاره ۹.۴.۲. *برای هر حلقه‌ی R و $n \geqslant ۲$، $M_n(R)$ یک حلقه‌ی UN نیست.*

برهان. می‌توانیم حلقه‌ی $M_n(R)[x]$ را با $M_n(R[x])$ یکسان در نظر بگیریم. فرض کنیم $n = ۲$، قرار می‌دهیم:

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

به‌وضوح، A یکه است (زیرا $det(A) = ۱$) و B یک خودتوان ناصفر است (زیرا $B^۲ = B$). داریم:

$$f(x) = A + Bx = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ x & ۱ + x \end{pmatrix}$$

در $M_۲(R)[x]$ یکه است و وارون آن برابر است با $\begin{pmatrix} ۱ + x & -۱ \\ -x & ۱ \end{pmatrix}$. در حالتی که $n > ۲$، داریم:

$$f_۱(x) = \begin{pmatrix} E_{n-۲} & ۰ \\ ۰ & A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۰_{n-۲} & ۰ \\ ۰ & B \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} E_{n-۲} & ۰ \\ ۰ & A + Bx \end{pmatrix}$$

یک عنصر یکه در $M_n(R)[x]$ می‌باشد، اما ضریب x یک خودتوان ناصفر است. به‌علاوه قرار دهید:

$$g(x) = E_۲ + E_{۱۲}x + E_{۲۱}x^۲ = \begin{pmatrix} ۱ & x \\ x^۲ & ۱ \end{pmatrix}$$

که $E_{۱۲}$ و $E_{۲۱}$ ماتریس‌های واحد ۲×۲ هستند. در این صورت، $g(x)$ یکه نیست، زیرا

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ -x^۲ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & x \\ x^۲ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & -x \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ - x^۳ \end{pmatrix}.$$

در حلقه‌ی $M_۲(R)[x]$ یکه نیست. اما جمله‌ی ثابت $g(x)$ یکه است و بقیه‌ی ضرایب آن پوچ‌توان است.
در حالت $n > ۲$:

$$g_۱(x) = \begin{pmatrix} E_۲ & \circ \\ \circ & E_{n-۲} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{۱۲} & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} E_{۲۱} & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix} x^۲ = \begin{pmatrix} g(x) & \circ \\ \circ & E_{n-۲} \end{pmatrix}.$$

در حلقه‌ی $M_n(R)[x]$ یکه نیست، هرچند جمله‌ی ثابت آن یکه است و سایر ضرایب آن پوچ‌توان هستند. $\square$

فصل ۳

تعمیمی از حلقه‌های ۲-اولیه

در این بخش با فرض این که R یک حلقه‌ی شرکت‌پذیر و یکدار باشد و α یک درون‌ریختی از R و δ یک α-مشتق باشد، می‌خواهیم نشان دهیم که اگر R، (α,δ)-سازگار باشد، آن‌گاه R، ۲-اولیه است اگروتنها اگر $R[x;\alpha,\delta]$ ۲-اولیه باشد اگروتنها اگر $N(R)=N_*(R;\alpha,\delta)$ اگروتنها اگر $N(R)[x;\alpha,\delta]=N_*(R[x;\alpha,\delta])$ اگروتنها اگر هر ایده‌آل (α,δ)-اول از R کاملاً اول باشد.
همچنین نشان می‌دهیم که برای حلقه‌ی (α,δ)-سازگار R، $R[x;\alpha,\delta]$، ۲-اولیه است اگروتنها اگر برای هر $f\in R[x;\alpha,\delta]$ داشته باشیم:

$$f\alpha(f)\in N_*(R[x;\alpha,\delta])\Longleftrightarrow f\in N_*(R[x;\alpha,\delta]).$$

۱.۳ پیرامون عناصر پوچ‌توان حلقه‌ی $R[x;\alpha,\delta]$

این بخش را با اثبات لم زیر که در فصل یک آن را بیان کردیم آغاز می‌کنیم.

لم ۱.۱.۳. *فرض کنیم R حلقه‌ای (α,δ)-سازگار باشد و $a,b\in R$. در این صورت:*

۱. *هرگاه $ab=0$ و n یک عدد صحیح و مثبت باشد، آن‌گاه $a\alpha^n(b)=\alpha^n(a)b=0$.*

۲. *هرگاه عدد صحیح مثبت k وجود داشته باشد که $\alpha^k(a)b=0$، آن‌گاه $ab=0$.*

۳. *هرگاه $ab=0$ و m و n دو عدد صحیح مثبت باشند آن‌گاه $\delta^m(a)\alpha^n(b)=0$ و $\alpha^m(a)\delta^n(b)=0$.*

برهان. ۱. اگر $ab=0$، آن‌گاه $\alpha^n(a)\alpha^n(b)=0$. از این که R یک حلقه‌ی α-سازگار است نتیجه می‌گیریم: $\alpha^n(a)b=0$.

۲. فرض کنیم عدد صحیح مثبت k وجود داشته باشد که $\alpha^k(a)b=0$. چون R یک حلقه‌ی α-سازگار است لذا $\alpha^k(ab)=\alpha^k(a)\alpha^k(b)=0$ و چون α یک به یک است از این رو: $ab=0$.

۳. کافی است نشان دهیم: $\delta(a)\alpha(b) = 0$. چون $ab = 0$، با استفاده از (۱) و خاصیت δ-سازگاری R نتیجه می‌گیریم: $\alpha(a)\delta(b) = 0$. بنابراین : $\delta(a)b = \delta(ab) - \alpha(a)\delta(b) = 0$ و لذا $\delta(a)\alpha(b) = 0$.

□

گزاره ۲.۱.۳. *فرض کنیم که R یک حلقه‌ی α-سازگار باشد و $N(R)$ یک δ-ایده‌آل از R باشد. در این صورت داریم:*

$$N(R[x;\alpha,\delta]) \subseteq N(R)[x;\alpha,\delta].$$

برهان. فرض کنیم $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in N(R[x,\alpha,\delta])$. در این صورت عدد صحیح مثبتی چون t به‌گونه‌ای وجود دارد که $f^t = 0$. بنابراین

$$\underbrace{a_nx^na_nx^n\cdots a_nx^n}_{\text{t بار}} = 0 \Longrightarrow a_n\alpha^n(a_nx^n\cdots a_nx^n) = 0$$

$$\Longrightarrow a_n\alpha^n(a_n)\alpha^n(x^na_nx^n\cdots a_nx^n) = 0$$

$$\Longrightarrow a_n\alpha^n(a_n)\alpha^{2n}(a_n)(x^na_nx^n\cdots a_nx^n) = 0$$

$$\vdots$$

$$\Longrightarrow a_n\alpha^n(a_n)\alpha^{2n}(a_n)\cdots\alpha^{(t-1)n}(a_n) = 0$$

$$\Longrightarrow a_na_n\cdots a_n = 0 \Longrightarrow a_n^t = 0$$

$$\Longrightarrow a_n \in N(R).$$

لذا داریم:

$$f = p + a_nx^n \quad , \quad p \in R[x;\alpha,\delta] \quad , \quad deg(p) \leqslant n.$$

در نتیجه برای برخی $q \in R[x;\alpha,\delta]$، داریم:

$$0 = f^t = p^t + q.$$

توجه کنید که ضرایب q را می‌توان به صورت مجموعی از تک‌جمله‌ای‌های بر اساس a_i و $f_v^u(a_j)$ نوشت به طوری که $a_i, a_j \in \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ و $u \geqslant v \geqslant 0$ اعداد صحیح مثبت هستند و هر تک‌جمله‌ای یا شامل a_n است یا $f_v^u(a_n)$. از آن جایی که $a_n \in N(R)$، و $N(R)$ یک (α,δ)-ایده‌آل است، می‌توان نتیجه گرفت برای هر عدد صحیح مثبت $u \geqslant v \geqslant 0$، $f_v^u(a_n) \in N(R)$. بنابراین $q \in N(R)[x;\alpha,\delta]$، زیرا $N(R)$ یک ایده‌آل از R است. آن‌گاه $p^t \in N(R)[x;\alpha,\delta]$ و بنابراین:

$$a_{n-1}\alpha^{n-1}(a_{n-1})\cdots\alpha^{(n-1)(t-1)}(a_{n-1}) \in N(R).$$

و با استفاده از لم ۱.۱.۳، $a_{n-1} \in N(R)$.

با ادامه‌ی همین روند می‌توان دید که برای هر i، $a_i \in N(R)$ و نتیجه حاصل است. □

نتیجه ۳.۱.۳. *اگر $N(R)$ یک ایده‌آل از R باشد آن‌گاه:*

$$N(R[x]) \subseteq N(R)[x].$$

مثالی وجود دارد که نشان می‌دهد جبری پوچ مانند N وجود دارد که $N[x]$ روی N پوچ نیست. طبق [۲۸] حلقه‌ای چون R وجود دارد به گونه‌ای که $N(R)$ یک ایده‌آل از R است اما $N(R)[x] \nsubseteq N(R[x])$.

لم ۴.۱.۳. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی (α,δ)-سازگار باشد. در این صورت:*
$$N_*(R;\alpha,\delta)[x;\alpha,\delta] \subseteq N_*(R[x;\alpha,\delta]).$$

برهان. یک رادیکال پوچ پایینی با استفاده از استقرا تعریف می‌کنیم:

$$L_\circ = L_\circ(R;\alpha,\delta) = (\circ).$$
$$L_\text{۱} = L_\text{۱}(R[x;\alpha,\delta]) = \sum I : N_{(\alpha,\delta)} = \left\{I \lhd_{(\alpha,\delta)} R | \text{پوچ‌توان باشد} I\right\}.$$
$$L_\alpha = L_\alpha(R;\alpha,\delta) = \{r \in R \mid r + L_\beta(R;\alpha,\delta) \in L_\text{۱}(\frac{R}{L_\beta(R;\alpha,\delta)};\alpha,\delta) | \alpha = \beta + \text{۱}\}.$$
$$L_\alpha = L_\alpha(R;\alpha,\delta) = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta(R;\alpha,\delta).$$

اگر $p(t) \in L_\text{۱}[x;\alpha,\delta]$، آن‌گاه برای برخی (α,δ)-ایده‌آل‌های پوچ‌توان داریم: $p(t) \in I[x;\alpha,\delta]$. به سادگی می‌توان دید که $I[x;\alpha,\delta]$ خود یک ایده‌آل پوچ‌توان از $R[x;\alpha,\delta]$ است. بنابراین داریم:
$$I[x;\alpha,\delta] \subseteq N_*(R[x;\alpha,\delta]).$$

به ویژه:

$$p(t) \in N_*(R[x;\alpha,\delta])$$

,

$$L_\text{۱}[x;\alpha,\delta] \subseteq N_*(R[x;\alpha,\delta])$$

یعنی نشان دادیم که برای هر $\alpha < \beta$: $L_\alpha[x;\alpha,\delta] \subseteq N_*(R[x;\alpha,\delta])$. حال فرض می‌کنیم که $\beta = \alpha + \text{۱}$. در این صورت زنجیری از ایزومورفیسم‌ها را داریم:
$$\frac{L_\beta[x;\alpha,\delta]}{L_\alpha[x;\alpha,\delta]} \cong \frac{L_\beta}{L_\alpha}[x;\alpha,\delta] = L_\text{۱}(\frac{R}{L_\alpha})[x;\alpha,\delta] \subseteq N_*(\frac{R}{L_\alpha}[x;\alpha,\delta]) \cong \frac{N_*(R[x;\alpha,\delta])}{L_\alpha[x;\alpha,\delta]}.$$
حال با استفاده از فرض استقرا می‌توان دید:
$$L_\beta[x;\alpha,\delta] \subseteq N_*(R[x;\alpha,\delta]).$$

اگر β یک عدد محدود باشد، $L_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} L_\alpha$ و فرض استقرا نتیجه می‌دهد:
$$L_\beta[x;\alpha,\delta] \subseteq N_*(R[x;\alpha,\delta]).$$

□

گزاره ۵.۱.۳. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی α-سازگار باشد. در این صورت:*

۱. *اگر $N(R) = N_*(R;\alpha,\delta)$، آن‌گاه $R[x;\alpha,\delta]$ ۲-اولیه است.*

۲. *اگر $N(R)[x;\alpha,\delta] = N_*(R[x;\alpha,\delta])$، آن‌گاه $R[x;\alpha,\delta]$ ۲-اولیه است.*

برهان. ۱. فرض کنیم R یک حلقه‌ی α-سازگار باشد و $N(R) = N_*(R;\alpha,\delta)$. از آن جایی که $N_*(R;\alpha,\delta)$ یک (α,δ)-ایده‌آل است، با استفاده از گزاره‌ی ۲.۱.۳، داریم:

$$N(R[x;\alpha,\delta]) \subseteq N(R)[x;\alpha,\delta] = N_*(R;\alpha,\delta)[x;\alpha,\delta].$$

با استفاده از لم ۴.۱.۳ داریم:

$$N_*(R;\alpha,\delta)[x;\alpha,\delta] \subseteq N_*(R[x;\alpha,\delta]).$$

و لذا $R[x;\alpha,\delta]$ ۲-اولیه است.

۲. فرض کنیم $N(R)[x;\alpha,\delta] = N_*(R[x;\alpha,\delta])$. آن‌گاه می‌توان نتیجه گرفت که $N(R)$ یک ایده‌آل از R است. به‌وضوح، $N(R)$ یک α-ایده‌آل است، زیرا:

$$\begin{aligned} a \in N(R) &\Longrightarrow \exists n \geqslant 0 : \ a^n = 0 \\ &\Longrightarrow \underbrace{aa\cdots a}_{\text{n بار}} = 0 \\ &\Longrightarrow \underbrace{\alpha(a)\cdots\alpha(a)}_{\text{n بار}} = 0 \\ &\Longrightarrow (\alpha(a))^n = 0 \\ &\Longrightarrow \alpha(a) \in N(R). \end{aligned}$$

حال قرار می‌دهیم $a \in N(R)$، آن‌گاه:

$$\alpha(a)x + \delta(a) = xa \in N(R)[x;\alpha,\delta].$$

پس $\delta(a) \in N(R)$ و این یعنی $N(R)$ یک δ-ایده‌آل است. حال با استفاده از گزاره‌ی ۲.۱.۳ داریم:

$$N(R[x;\alpha,\delta]) \subseteq N(R)[x;\alpha,\delta] = N_*(R[x;\alpha,\delta]).$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که $R[x;\alpha,\delta]$، ۲-اولیه است. □

تعریف ۶.۱.۳. فرض کنیم R یک حلقه و $End(R,+)$ حلقه‌ی درون‌ریختی‌های جمعی R و Φ زیرمجموعه‌ای از $End(R,+)$ باشد. دنباله‌ی $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ از عناصر R را یک $m-\Phi$-دنباله می‌نامیم، هرگاه برای هر $i \in \mathbb{N}$، $\varphi_i, \varphi'_i \in \Phi$ و $r_i \in R$ به گونه‌ای وجود داشته باشد که $a_{i+1} = \varphi_i(a_i) r_i \varphi'_i(a_i)$.

زیرمجموعه‌ی $M \subseteq R$ یک $m-\Phi$-سیستم نامیده می‌شود هرگاه برای هر $a,b \in M$، $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ و $r \in R$ به گونه‌ای وجود داشته باشند که:

$$\varphi_1(a) r \varphi_2(b) \in M.$$

هم‌چنین، یک عنصر $a \in R$ قویاً (α,δ)-پوچ‌توان نامیده می‌شود، هرگاه هر $m-(\alpha,\delta)$-دنباله‌ی شروع شونده با عنصر a در نهایت به صفر میل کند.

ملاحظه ۷.۱.۳. *اگر $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ یک $m-(\alpha,\delta)$-دنباله باشد که شامل صفر نباشد و P یک (α,δ)-ایده‌آل ماکسیمال بین (α,δ)-ایده‌آل‌هایی از R باشد که هیچ اشتراکی با $\{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ ندارند، آن‌گاه P یک ایده‌آل (α,δ)-اول است.*

گزاره ۸.۱.۳. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی (α,δ)-سازگار باشد. در این صورت:*
$$N_*(R;\alpha,\delta)=\{a\in R|\text{قویاً } (\alpha,\delta) \text{ پوچ‌توان باشد.}a\}.$$

برهان. فرض کنیم $a\in R\setminus N_*(R;\alpha,\delta)$ و همچنین P یک ایده‌آل (α,δ)-اول باشد به طوری که $a\notin P$. می‌دانیم یک (α,δ)-ایده‌آل، مانند P، (α,δ)-اول است اگروتنها اگر $R\setminus P$ یک (α,δ)-سیستم باشد. با استفاده از این موضوع، $R\setminus P$ یک $m-(\alpha,\delta)$-سیستم است. به سادگی می‌توان یک $m-(\alpha,\delta)$-دنباله در $R\setminus P$ مانند $(a=a_\circ a_۱\cdots)$ تشکیل داد. در نتیجه a قویاً (α,δ)-پوچ‌توان نیست.
برعکس، فرض کنیم که $(a=a_\circ a_۱\cdots)$ یک $m-(\alpha,\delta)$-دنباله باشد که شامل صفر نیست. با استفاده از نکته‌ی ۷.۱.۳، نتیجه می‌گیریم که یک ایده‌آل (α,δ)-اول مانند P از R وجود دارد به طوری که $a\notin P$ و لذا $a\notin N_*(R;\alpha,\delta)$. □

قضیه ۹.۱.۳. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی (α,δ)-سازگار باشد. آن‌گاه $R[x;\alpha,\delta]$، ۲-اولیه است اگروتنها اگر $N(R)=N_*(R;\alpha,\delta)$ اگروتنها اگر $N(R)[x;\alpha,\delta]=N_*(R[x;\alpha,\delta])$.*

برهان. اگر $N(R)=N_*(R;\alpha,\delta)$، آن‌گاه طبق گزاره‌ی ۵.۱.۳، $R[x;\alpha,\delta]$ ۲-اولیه است. فرض کنیم که $R[x;\alpha,\delta]$، ۲-اولیه باشد. حال با استفاده از لم ۴.۱.۳ داریم:
$$N_*(R;\alpha,\delta)[x;\alpha,\delta]\subseteq N_*(R[x;\alpha,\delta])=N(R[x;\alpha,\delta]).$$

و بنابراین:
$$N_*(R;\alpha,\delta)\subseteq N(R).$$

از آن جایی که $R[x;\alpha,\delta]$، ۲-اولیه است، لذا R نیز ۲-اولیه است. حال قرار می‌دهیم $a\in N(R)=N_*(R)$، آن‌گاه a قویاً پوچ‌توان است. پس هر m-دنباله شروع شونده با a، سرانجام به صفر میل می‌کند. با استفاده از لم ۱.۱.۳، هر $m-\{\alpha,\delta\}$-دنباله شروع شونده با a در نهایت به صفر ختم می‌شود. پس نتیجه می‌گیریم که a، قویاً (α,δ)-پوچ‌توان است و با استفاده از گزاره‌ی ۸.۱.۳:
$$a\in N_*(R;\alpha,\delta).$$

بنابراین:
$$N(R)\subseteq N_*(R;\alpha,\delta).$$

و تساوی حاصل می‌شود.
حال اگر $N(R)[x;\alpha,\delta]=N_*(R[x;\alpha,\delta])$، طبق گزاره‌ی ۵.۱.۳، $R[x;\alpha,\delta]$ ۲-اولیه است. برعکس، اگر فرض کنیم که $R[x;\alpha,\delta]$ ۲-اولیه باشد، آن‌گاه $N(R)=N_*(R;\alpha,\delta)$ و طبق لم ۴.۱.۳:
$$N(R)[x;\alpha,\delta]=N_*(R;\alpha,\delta)[x;\alpha,\delta]\subseteq N_*(R[x;\alpha,\delta]).$$

لذا طبق گزاره‌ی ۲.۱.۳ تساوی حاصل می‌شود. □

نتیجه ۱۰.۱.۳. *فرض کنیم که R یک حلقه‌ی (α,δ)-سازگار باشد، آن‌گاه $R[x;\alpha,\delta]$ ۲-اولیه است اگروتنها اگر R ۲-اولیه باشد و $N(R)[x;\alpha,\delta]=N(R[x;\alpha,\delta])$.*

برهان. اگر $R[x;\alpha,\delta]$ ۲-اولیه باشد، آن‌گاه طبق قضیه‌ی ۹.۱.۳، داریم:

$$N(R)[x;\alpha,\delta]=N([R;\alpha,\delta]).$$

حال فرض می‌کنیم R ۲-اولیه باشد و $N(R)[x;\alpha,\delta]=N(R[x;\alpha,\delta])$. مشابه اثبات قضیه‌ی ۹.۱.۳، نتیجه می‌گیریم که:

$$N(R)\subseteq N_*(R;\alpha,\delta).$$

لذا طبق لم ۴.۱.۳، داریم:

$$N(R[x;\alpha,\delta])=N(R)[x;\alpha,\delta]\subseteq N_*(R;\alpha,\delta)[x;\alpha,\delta]\subseteq N_*(R[x;\alpha,\delta]).$$

□

۲.۳ بررسی خواص ایده‌آل‌های (α,δ)-اول مینیمال

در فصل اول با تعریف ایده‌آل (α,δ)-اول مینیمال آشنا شدیم. در این بخش قضایایی در رابطه با این گونه ایده‌آل‌ها بیان می‌کنیم. لم کاربردی زیر از [۱۸] ما را در اثبات این قضایا یاری می‌کند.

لم ۱.۲.۳. *فرض کنیم P یک ایده‌آل از حلقه‌ی R باشد. در این صورت گزاره‌های زیر را می‌توان نتیجه گرفت:*

۱. *(α,δ)-ایده‌آل P، (α,δ)-اول است اگر و تنها اگر $R\setminus P$ یک $m-(\alpha,\delta)$ سیستم باشد.*

۲. *فرض کنیم M یک $m-(\alpha,\delta)$ سیستم باشد که شامل صفر نیست و P یک (α,δ)-ایده‌آل ماکسیمال از R باشد که با (α,δ)-ایده‌آل‌های M اشتراکی ندارد، در این صورت P یک (α,δ)-ایده‌آل اول است.*

لم ۲.۲.۳. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی کاهشی (α,δ)-سازگار باشد. اگر P یک (α,δ)-ایده‌آل اول مینیمال باشد، آن‌گاه P کاملاً اول است.*

برهان. فرض کنیم Φ زیرگروهی از $End(R,+)$ باشد که توسط α و δ تولید می‌شود.
قرار می‌دهیم $S=R\setminus P$ و S' تکوار ضربی تولید شده توسط $\Phi(S)$ باشد. ادعا می‌کنیم $0\notin S'$. در غیر این صورت داریم:

$$s_1s_2\cdots s_n=0,\quad (s_i\in S).$$

چون که R یک حلقه‌ی کاهشی است و $(s_nRs_1\cdots s_{n-1})^2=0$. لذا داریم:

$$s_nRs_1s_2\cdots s_{n-1}=0.$$

می‌دانیم اگر P یک Φ-ایده‌آل اول باشد، در این صورت به ازای هر $\varphi_1,\varphi_2\in\Phi$، که در رابطه‌ی $\varphi_1(a)R\varphi_2(b)\subseteq P$ صدق کند، داریم: $a\in P$ یا $b\in P$. چون P یک (α,δ)-ایده‌آل اول است، پس یک عضو مانند $s=\varphi_1(s_n)r\varphi_2(s_1)\in S$ وجود دارد به طوری که $\varphi_1,\varphi_2\in\Phi$ و $r\in R$. لذا داریم:

$$s_nrs_1s_2\cdots s_{n-1}=0.$$

چون که R، (α,δ)-سازگار است، داریم:

$$ss_۲\cdots s_{n-۱}=\varphi_۱(s_n)r\varphi_۲(s_۱)s_۲\cdots s_{n-۱}=۰.$$

که این امر با مینیمال بودن n در تناقض است، پس $۰\notin S'$. حال طبق لم ۱.۲.۳، می‌توانیم (۰) را به یک (α,δ)-ایده‌آل اول مانند P' که از S' مجزا است، بسط دهیم. اما از آن جایی که P، (α,δ)-اول مینیمال می‌باشد، باید داشته باشیم $P=P'$. پس $S=S'$ و چون که S' زیرتکواره ضربی تولیدشده توسط $\varphi(S)$ بود، پس S نیز تحت ضرب بسته است. طبق قضیه می‌دانیم که اگر P یک ایده‌آل سره از حلقه‌ی R باشد، به طوری که $R\setminus P$ یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R باشد، آن‌گاه P یک ایده‌آل اول است. هم‌چنین می‌دانیم P اول است اگروتنها اگر $\frac{R}{P}$ دامنه باشد. پس $\frac{R}{P}$ دامنه است و نتیجه‌ی مطلوب به دست می‌آید. $\square$

قضیه ۳.۲.۳. *فرض کنیم که R یک حلقه‌ی (α,δ)-سازگار باشد، آن‌گاه $R[x;\alpha,\delta]$ ۲-اولیه است اگروتنها اگر هر (α,δ)-ایده‌آل اول مینیمال از R، کاملاً اول باشد.*

برهان. فرض کنیم $R[x;\alpha,\delta]$، ۲-اولیه باشد، آن‌گاه طبق قضیه‌ی ۹.۱.۳، $\overline{R}=\frac{R}{N_*(R;\alpha,\delta)}$ کاهشی است. فرض کنیم P یک (α,δ)-ایده‌آل اول مینیمال از R باشد، آن‌گاه $\overline{P}$ یک $(\overline{\alpha},\overline{\delta})$-ایده‌آل اول مینیمال از $\overline{R}$ است. پس طبق لم ۲.۲.۳، $\overline{P}$ کاملاً اول است. از آن جایی که $\frac{R}{P}\cong\frac{\overline{R}}{\overline{P}}$، پس P کاملاً اول است.

حال فرض کنیم هر (α,δ)-ایده‌آل اول مینیمال P از حلقه‌ی R کاملاً اول باشد. فرض می‌کنیم که $\{P_i\}_{i\in I}$، یک خانواده از همه‌ی (α,δ)-ایده‌آل‌های اول مینیمال از R باشد، آن‌گاه:

$$N_*(R;\alpha,\delta)=\bigcap_{i\in I}P_i.$$

یک همریختی حلقه‌ای مانند φ وجود دارد به طوری که:

$$\varphi:R\longrightarrow\prod_{i\in I}\frac{R}{P_i},\qquad \varphi(r)=\{r+P_i\}_{i\in I}.$$

به سادگی می‌توان دید که $ker\varphi=N_*(R;\alpha,\delta)$ و بنابراین $\frac{R}{N_*(R;\alpha,\delta)}$ در $\prod_{i\in I}\frac{R}{P_i}$ می‌نشینند. پس $\frac{R}{N_*(R;\alpha,\delta)}$ کاهشی است و این یعنی این حلقه هیچ عنصر پوچ‌توان ناصفری نداشته باشد، بنابراین:

$$N(\frac{R}{\bigcap P_i})=N(\frac{R}{N_*(R;\alpha,\delta)})=۰.$$

در نتیجه:

$$N(R)\subseteq N_*(R;\alpha,\delta).$$

حال چون که:

$$N_*(R;\alpha,\delta)[x;\alpha,\delta]\subseteq N_*(R[x;\alpha,\delta])\subseteq N(R[x;\alpha,\delta]).$$

لذا داریم:

$$N_*(R;\alpha,\delta)\subseteq N(R).$$

پس $N(R)=N_*(R;\alpha,\delta)$ و نتیجه‌ی مطلوب با استفاده از قضیه‌ی ۹.۱.۳ به دست می‌آید. $\square$

فرض کنیم R یک حلقه با درون‌ریختی α و δ نیز یک α-مشتق باشد به طوری که $\alpha\delta = \delta\alpha$. در این صورت درون‌ریختی $\overline{\alpha}$ روی $R[x;\alpha,\delta]$ به گونه‌ای وجود دارد که:

$$\overline{\alpha}(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha(a_i) x^i \ , \ (a_i \in R).$$

قضیه ۴.۲.۳. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی (α,δ)-سازگار باشد و $\alpha\delta = \delta\alpha$. در این صورت $R[x;\alpha,\delta]$، ۲-اولیه است اگر و تنها اگر برای هر $f \in R[x;\alpha,\delta]$، از $f\alpha(f) \in N_*(R[x;\alpha,\delta])$ بتوان نتیجه گرفت که $f \in N_*(R[x;\alpha,\delta])$.*

برهان. فرض کنیم که $R[x;\alpha,\delta]$، ۲-اولیه باشد و قرار می‌دهیم:

$$f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in R[x;\alpha,\delta].$$

به طوری که:

$$f\alpha(f) \in N_*(R[x;\alpha,\delta]).$$

از قضیه‌ی ۹.۱.۳ می‌توان نتیجه گرفت که:

$$f\alpha(f) \in N(R)[x;\alpha,\delta].$$

بنابراین $a_n \alpha^{n+1}(a_n) \in N(R)$. چون که R، α-سازگار است داریم: $a_n \in N(R)$.

$$\begin{aligned} f\alpha(f) =& (a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1})(\alpha(a_0) + \alpha(a_1) x + \cdots + \alpha(a_{n-1}) x^{n-1}) \\ &+ (a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1})\alpha(a_n) x^n + a_n x^n (\alpha(a_0) + \alpha(a_1) x + \cdots + \alpha(a_{n-1}) x^{n-1}) \\ &+ a_n x^n \alpha(a_n) x^n. \end{aligned}$$

هم‌چنین:

$$(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1})(\alpha(a_0) + \alpha(a_1) x + \cdots + \alpha(a_{n-1}) x^{n-1}) \in N(R)[x;\alpha,\delta].$$

به طور مشابه می‌توان دید که $a_{n-1} \in N(R)$.

با ادامه‌ی همین روند برای هر i، داریم: $a_i \in N(R)$. در این صورت $f \in N(R)[x;\alpha,\delta]$ و نتیجه‌ی مطلوب طبق قضیه‌ی ۹.۱.۳ به دست می‌آید.

برعکس، فرض کنیم برای هر $f\alpha(f) \in N_*(R[x;\alpha,\delta])$ نتیجه دهد که $f \in N_*(R[x;\alpha,\delta])$ (برای هر $f \in R[x;\alpha,\delta]$). حال قرار می‌دهیم $f \in R[x;\alpha,\delta]$ به طوری که $f^2 = 0$. در این صورت:

$$f\alpha(f)\alpha(f\alpha(f)) = 0 \in N_*(R[x;\alpha,\delta]).$$

هم‌چنین:

$$f\alpha(f) \in N_*(R[x;\alpha,\delta]).$$

در نتیجه داریم:

$$f \in N_*(R[x;\alpha,\delta]).$$

و این یعنی:

$$N(R[x;\alpha,\delta]) \subseteq N_*(R[x;\alpha,\delta]).$$

□

قضیه ۵.۲.۳. *فرض کنیم که R یک حلقه‌ی (α,δ)-سازگار باشد، آن‌گاه $R[x;\alpha,\delta]$ ۲-اولیه است اگروتنها اگر R، ۲-اولیه باشد.*

برهان. فرض کنیم که R، ۲-اولیه باشد و $a \in N(R) = N_*(R)$، آن‌گاه a قویاً پوچ‌توان است و چون R، (α,δ)-سازگار است پس a قویاً (α,δ) پوچ‌توان است و طبق گزاره‌ی ۸.۱.۳، $a \in N_*(R;\alpha,\delta)$.
هم‌چنین داریم:

$$N_*(R;\alpha,\delta) \subseteq N(R).$$

لذا بنا به قضیه‌ی ۹.۱.۳ نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌شود. □

نتیجه ۶.۲.۳. *فرض کنیم که R یک حلقه‌ی (α,δ)-سازگار باشد، آن‌گاه گزاره‌های زیر معادلند:*

۱. *R، ۲-اولیه است.*

۲. *$R[x;\alpha,\delta]$، ۲-اولیه است.*

۳. $N(R) = N_*(R;\alpha,\delta)$.

۴. $N(R)[x;\alpha,\delta] = N_*(R[x;\alpha,\delta])$.

۵. *R، ۲-اولیه است و* $N(R)[x;\alpha,\delta] = N(R[x;\alpha,\delta])$.

۶. *هر (α,δ)-ایده‌آل اول مینیمال از R، قویاً اول است.*

فصل ۴

رادیکال‌های اول در حلقه‌های $u.p$-تکواره

۱.۴ حلقه‌های $u.p$-تکواره

در فصل اول با تعریف حلقه‌های $u.p$-تکواره آشنا شدیم. در این فصل قصد داریم مفاهیم اول بودن، نیم‌اول بودن و تقلیل‌یافتگی را برای حلقه‌های $u.p$-تکواره تعمیم دهیم. به طور کلی می‌دانیم که هر حلقه‌ی تقلیل‌یافته، نیم‌اول است اما نکته‌ی زیر فقط درمورد حلقه‌های جابه‌جایی صحت دارد.

ملاحظه ۱.۱.۴. *در حلقه‌ی جابه‌جایی R، R نیم‌اول است اگروتنها اگر تقلیل‌یافته باشد.*

برهان. فرض کنیم R نیم‌اول باشد در این صورت $N_*(R) = ۰$ و می‌دانیم که اگر R جابه‌جایی باشد داریم: $N_*(R) = N^*(R)$. لذا می‌توان نتیجه گرفت:

$$N(R) = N^*(R) = N_*(R) = ۰.$$

یعنی R هیچ عنصر پوچ‌توان ناصفری ندارد، پس تقلیل‌یافته است. □

لم ۲.۱.۴. *فرض کنیم که R یک حلقه‌ی تقلیل‌یافته باشد و $\{x_۱, x_۲, \ldots, x_n\}$ زیرمجموعه‌ای از حلقه‌ی R باشد و $x_۱x_۲\cdots x_n = ۰$ و $\sigma \in S_n$. در این صورت:*

$$x_{\sigma(۱)}x_{\sigma(۲)}\ldots x_{\sigma(n)} = ۰.$$

برهان. با استفاده از استقرا حکم را اثبات می‌کنیم. برای حالت $n = ۲$ حکم صحیح است. فرض کنیم $n = ۳$. اگر $\sigma = (۱۲)$، از این که $x_۱x_۲x_۳ = ۰$ نتیجه می‌گیریم:

$$(x_۳x_۱x_۲)^۲ = x_۳x_۱x_۲x_۳x_۱x_۲ = ۰.$$

حال چون حلقه‌ی R کاهشی است نتیجه می‌گیریم:

$$x_۳x_۱x_۲ = ۰.$$

از آن‌جایی که هر جایگشت از $S_۳$ ترکیبی از ترانهش‌هاست، پس برای هر $\sigma \in S_۳$ داریم:

$$x_{\sigma(۱)}x_{\sigma(۲)}x_{\sigma(۳)} = ۰.$$

حال فرض کنیم $n > 3$. چون $S_n = \langle (12)(123\ldots n) \rangle$، لذا با استفاده از خاصیت شرکت‌پذیری R نتیجه می‌گیریم که برای هر $\sigma \in S_n$:

$$x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n)} = 0.$$

□

قضیه ۳.۱.۴. *فرض کنیم که R یک حلقه و G یک $u.p$-تکواره باشد و $S = RG$. در این صورت داریم:*

۱. *R نیم‌اول است اگروتنها اگر S نیم‌اول باشد.*

۲. *R اول است اگروتنها اگر S اول باشد.*

۳. *R تقلیل‌یافته است اگروتنها اگر S تقلیل‌یافته باشد.*

۴. *R یک دامنه است اگروتنها اگر S یک دامنه باشد.*

برهان. ۱. فرض کنیم R نیم‌اول باشد. با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم که S نیم‌اول نباشد پس، چندجمله‌ای $0 \neq f = \sum_{i=1}^{n} a_i g_i \in S$ وجود دارد به طوری که $fSf = 0$. می‌توانیم فرض کنیم که هر a_i ناصفر است. از عبارت $fSf = 0$ نتیجه می‌گیریم که $fRf = 0$. از آن جایی که G یک $u.p$-تکواره است، نتیجه می‌گیریم که یک حاصل‌ضرب واحد به صورت g_ig_j وجود دارد و در نتیجه به دست می‌آوریم که $a_iRa_j = 0$. از این که $fRf = 0$ می‌توان نتیجه گرفت که:

$$0 = a_irfRa_irf = (\cdots + a_ira_{j-1} + a_ira_{j+1} + \cdots)R(\cdots + a_ira_{j-1} + a_ira_{j+1} + \cdots).$$

که r به طور دلخواه از R انتخاب شده است. حال قرار می‌دهیم:

$$b_s = a_rra_s, \quad f_1 = \sum_{s=1}^{n_1} b_sg_s.$$

سپس، با فرض این که $f_1 = a_irf$ به دست می‌آوریم که $f_1Rf_1 = 0$. حال اگر برای هر $r \in R$، $f_1 = 0$، در این صورت نتیجه می‌گیریم که $a_iRa_i = 0$. اما از آن جایی که R نیم‌اول است و همه‌ی a_iها ناصفرند، این امر یک تناقض ایجاد می‌کند. لذا داریم $f_1Rf_1 = 0$ و $f_1 = a_irf \neq 0$ ، $(r \in R)$.

هم‌چنین می‌توانیم فرض کنیم که هر b_s ناصفر است و $n_1 < n$. برای تکمیل اثبات محاسبات قبل را اثبات می‌کنیم. از آن جایی که G یک $u.p$-تکواره است، حاصل‌ضرب یکتایی مانند g_vg_w وجود دارد به گونه‌ای که $b_vRb_w = 0$. بنابراین $f_1Rf_1 = 0$ نتیجه می‌دهد که:

$$0 = b_vxf_1Rb_vxf_1 = (\cdots + b_vxb_{w-1} + b_vxb_{w+1} + \cdots)R(\cdots + b_vxb_{w-1} + b_vxb_{w+1} + \cdots).$$

که x به طور دلخواه از R انتخاب شده است. از آن جایی که R نیم‌اول است و $b_v \neq 0$، داریم که $b_vRb_v \neq 0$ و هم‌چنین $f_2 = b_vxf_1 \neq 0$، $(x \in R)$. حال قرار می‌دهیم:

$$f_2 = \sum_{t=1}^{n_2} c_tg_t, \quad c_t \in R, \quad n_2 < n_1 < n.$$

با ادامه‌ی همین روند در نهایت به $f_k = (dg_h)R(dg_h) = ۰$ می‌رسیم که $۰ \neq d \in R$ و $g_h \in \{g_۱, \ldots, g_n\}$ و این امر ایجاب می‌کند که $dRd = ۰$. اما از آن‌جایی که R نیم‌اول است، نتیجه می‌گیریم که $d = ۰$ و این یک تناقض است. بنابراین $fSf = ۰$ و نتیجه می‌شود که $f = ۰$.
گام بعدی فرض می‌کنیم که برای $a \in R$، $aRa = ۰$. سپس $aSa = ۰$ و اگر S نیم‌اول باشد آن‌گاه $a = ۰$.

۲. فرض کنیم که R یک حلقه‌ی اول باشد. هم‌چنین فرض کنیم:

$$f = \sum_{i=۱}^{m} a_i g_i, \quad g = \sum_{j=۱}^{n} b_j h_j \ \in S \setminus \{۰\}.$$

به گونه‌ای وجود داشته باشند که در رابطه‌ی $fSg = ۰$ صدق می‌کند. می‌توان فرض کرد که برای هر i, j، $a_i, b_j \in R \setminus \{۰\}$. از $fSg = ۰$ نتیجه می‌گیریم که $fRg = ۰$. از آن جایی که G یک $u.p$-تکواره است، یک حاصل‌ضرب یکتا به صورت $g_i h_j$ وجود دارد که $a_i R b_j = ۰$. چون R اول است، لذا داریم $a_i = ۰$ یا $b_j = ۰$ و این یک تناقض است. سپس برای $a, b \in R$ قرار می‌دهیم $aRb = ۰$. از این رو $aSb = ۰$ و بنابراین چون S اول است و در نتیجه $a = ۰$ یا $b = ۰$.

۳. کافی است نشان دهیم اگر R تقلیل‌یافته باشد آن‌گاه، S نیز تقلیل‌یافته است. مشابه اثبات قسمت (۱) عمل می‌کنیم. فرض می‌کنیم که R یک حلقه‌ی تقلیل‌یافته باشد. با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم که چندجمله‌ای $۰ \neq f = \sum\limits_{i=۱}^{n} a_i g_i \in S$ وجود داشته باشد به طوری که $f^۲ = ۰$. می‌توانیم فرض کنیم که هر a_i ناصفر است. از آن جایی که G یک $u.p$-تکواره است می‌توان گفت که یک حاصل‌ضرب یکتا مانند $g_i g_j$ وجود دارد که نتیجه می‌دهد $a_i a_j = ۰$. حال چون R تقلیل‌یافته است،برای هر xو y، $xy = ۰$ نتیجه می‌دهد که $yx = ۰$. به طور مشابه از $a_i a_j = ۰$ نتیجه می‌شود که $a_j a_i = ۰$. هم‌چنین داریم:

$$۰ = a_i f f a_i = (\cdots + a_i a_{j-۱} + a_i a_{j+۱} + \cdots)(\cdots + a_{j-۱} a_i + a_{j+۱} a_i + \cdots).$$

اما چون که R تقلیل‌یافته است، $a_i \neq ۰$ نتیجه می‌دهد که $a_i^۲ \neq ۰$. هم‌چنین $a_i f$ و $f a_i$ هر دو ناصفر هستند. حال قرار می‌دهیم $f_{۱۱} = a_i f$ و $f_{۱۲} = f a_i$. این نکته را در نظر می‌گیریم که تعداد عبارات ناصفر در $f_{۱l}$ را $n_{۱l}$ می‌نامیم که برای $l = ۱, ۲$ کمتر از n می‌باشد. مجدداً چون که R تقلیل‌یافته است، $n_{۱۱} = n_{۱۲}$ و هم‌چنین داریم:

$$a_i a_\alpha = ۰ \Longleftrightarrow a_\alpha a_i = ۰ \quad \forall \alpha \in \{۱, \ldots, n\}.$$

چون که G یک $u.p$-تکواره است، لذا حاصل‌ضرب یکتایی چون $g_s g_t$ وجود دارد که موجب می‌شود $a_i a_s a_t a_i = ۰$. (در این جا می‌توان فرض کرد که $a_i a_s$ و $a_t a_i$ هر دو ناصفر هستند). در این صورت چون R تقلیل‌یافته است، لذا $a_i a_s a_t = ۰$ و $a_t a_i a_s = ۰$. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} ۰ &= a_i a_s f f a_i a_s \\ &= (\cdots + a_i a_s a_{t-۱} + a_i a_s a_{t+۱} + \cdots)(\cdots + a_{t-۱} a_i a_s + a_{t+۱} a_i a_s + \cdots). \end{aligned}$$

اما چون R تقلیل‌یافته است، $a_i a_s \neq ۰$ نتیجه می‌دهد که $(a_i a_s)^۲ \neq ۰$ و بنابراین $a_i a_s f$ و $f a_i a_s$ هر

دو ناصفر هستند. حال قرار می‌دهیم:

$$f_{21} = a_i a_s f, \quad f_{22} = f a_i a_s.$$

در این صورت هر f_{2l} ناصفراست. به یاد داشته باشیم که تعداد عبارات ناصفر در f_{2l} را n_{2l} می‌نامیم که برای $l = 1, 2$، کمتر از n_{1l} می‌باشد. چون R تقلیل‌یافته است، $n_{21} = n_{22}$ و همچنین:

$$a_i a_s a_\beta = 0 \Longleftrightarrow a_\beta a_i a_s = 0 \quad , \quad \beta \in \{1, \ldots, n\}.$$

با ادامه‌ی همین روند در نهایت $a_{\alpha 1}, \ldots, a_{\alpha k} \in \{a_1, \ldots, a_n\}$ را به دست می‌آوریم به طوری که:

$$0 = a_{\alpha 1} \cdots a_{\alpha k} f f a_{\alpha 1} \cdots a_{\alpha k} \mid a_{\alpha 1} \cdots a_{\alpha k} f, f a_{\alpha 1} \cdots a_{\alpha k} \in R \setminus \{0\}.$$

برای برخی $d \in R$ داریم:

$$a_{\alpha 1} \cdots a_{\alpha k} f = a_{\alpha 1} \cdots a_{\alpha k} d.$$

در ادامه، به دست می‌آوریم که:

$$a_{\alpha 1} \cdots a_{\alpha h} a_v = 0 \Longleftrightarrow a_v a_{\alpha 1} \cdots a_{\alpha h} = 0 \ , \ \forall h < k.$$

همچنین داریم:

$$a_{\alpha 1} \cdots a_{\alpha k} d = a_{\alpha 1} \cdots a_{\alpha k} f = d a_{\alpha 1} \cdots a_{\alpha k},$$

که نتیجه می‌دهد $(a_{\alpha 1} \cdots a_{\alpha k} d)^2 = 0$ و چون که R تقلیل‌یافته است، $a_{\alpha 1} \cdots a_{\alpha k} d = 0$ و این امر یک تناقض است. بنابراین، $f^2 = 0$ نتیجه می‌دهد که $f = 0$.

۴. اثبات مشابه قسمت (۲) است. کافی است نشان دهیم اگر R یک دامنه باشد، آنگاه S نیز یک دامنه است. فرض می‌کنیم که R یک دامنه باشد. همچنین فرض کنیم:

$$f = \sum_{i=1}^{m} a_i g_i, \quad g = \sum_{j=1}^{n} b_j h_j \ \in S \setminus \{0\}$$

به گونه‌ای وجود داشته باشند که $fg = 0$. می‌توان فرض کرد که برای هر i و j، داشته باشیم $a_i, b_j \in R \setminus \{0\}$. حال چون G یک $u.p$–تکواره است، حاصل‌ضرب یکتایی چون $g_i h_j$ وجود دارد که ایجاب می‌کند $a_i b_j = 0$. چون R یک دامنه است، باید $a_i = 0$ یا $b_j = 0$ که این خود یک تناقض است. $\square$

قضیه ۴.۱.۴. *فرض کنیم که R یک حلقه و G یک $u.p$–تکواره باشد. در این صورت داریم:*

$$N_*(RG) = N_*(R)G.$$

برهان. ابتدا قرار می‌دهیم:

$$N = N_*(R).$$

داریم:

$$\frac{RG}{NG} \cong \frac{R}{N}G.$$

با استفاده از قضیه‌ی ۳.۱.۴، قسمت (۱)، $\frac{R}{N}G$ نیم‌اول است، پس نتیجه می‌گیریم که NG یک ایده‌آل نیم‌اول از RG است که ایجاب می‌کند:

$$N_*(RG) \subseteq NG.$$

حال فرض می‌کنیم که P یک ایده‌آل اول از RG باشد و قرار می‌دهیم $Q = P \cap R$. همچنین فرض کنیم که برای هر $a, b \in R$ داشته باشیم $aRb \subseteq Q$. در این صورت $aRGb \subseteq P$ و بنابراین $a \in P$ یا $b \in P$، (که نتیجه می‌دهد $a \in Q$ یا $b \in Q$). از این رو می‌توان نتیجه گرفت که Q یک ایده‌آل اول از R است. بنابراین با به کار بردن قضیه‌ی ۳.۱.۴، قسمت (۲)، روی $\frac{R}{Q}G \cong \frac{RG}{QG}$ ، می‌توان نتیجه گرفت که QG یک ایده‌آل اول از RG است. در ادامه چون که $Q \subseteq P$، می‌توان دید که:

$$NG \subseteq QG \subseteq P.$$

در نهایت نتیجه می‌گیریم:

$$NG \subseteq N_*(RG).$$

و تساوی حاصل می‌شود. □

قضیه ۵.۱.۴. *فرض کنیم R یک حلقه و G یک $u.p$-تکواره باشد. در این صورت:*

$$N_*(R) = N(R) \iff N_*(RG) = N(RG).$$

برهان. با استفاده از قضیه‌ی ۴.۱.۴، می‌دانیم:

$$N_*(RG) = N_*(R)G.$$

ابتدا فرض می‌کنیم $N_*(RG) = N(RG)$، در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} N(R) = R \cap N(RG) &= R \cap N_*(RG) \\ &= R \cap N_*(R)G \\ &= N_*(R). \end{aligned}$$

برعکس، فرض کنیم $N(R) = N_*(R)$. در این صورت با استفاده از قضیه‌ی ۴.۱.۴، داریم:

$$N_*(RG) = N_*(R)G = N(R)G.$$

حال چون $\frac{R}{N(R)}$ تقلیل‌یافته است، بنا به قضیه‌ی ۳.۱.۴ قسمت (۳)، می‌توانیم نتیجه بگیریم که $\frac{RG}{N(R)G} \cong \frac{R}{N(R)}G$ نیز کاهشی است. حال نتیجه می‌گیریم:

$$N(RG) \subseteq N(R)G = N_*(R)G = N_*(RG).$$

مجدداً با استفاده از قضیه‌ی ۴.۱.۴، داریم:

$$N(R)G = N_*(R)G = N_*(RG) \subseteq N(RG).$$

لذا:

$$N_*(RG) = N(RG).$$

□

۲.۴ بررسی برخی نتایج به دست آمده درمورد حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های $R[X]$

در این بخش فرض می‌کنیم که X یک مجموعه از متغیرهای مستقل تعویض‌پذیر روی حلقه‌ی R باشد. می‌دانیم که مجموعه‌ی تمام حاصل‌ضرب‌های متناهی از عناصر X همراه با عنصر واحد، تشکیل یک $u.p$–تکواره را می‌دهد. حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها را با علامت $R[X]$ نشان می‌دهیم. در این بخش برخی نتایج به دست آمده در بخش یک را در مورد حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های $R[X]$ بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۴. ۱. *حلقه‌ی R اول است اگروتنها اگر $R[X]$ اول باشد.*

۲. *حلقه‌ی R نیم‌اول است اگروتنها اگر $R[X]$ نیم‌اول باشد.*

۳. *حلقه‌ی R تقلیل‌یافته است اگروتنها اگر $R[X]$ نیز تقلیل‌یافته باشد.*

۴. *حلقه‌ی R دامنه است اگروتنها اگر $R[X]$ نیز دامنه باشد.*

برهان. فرض کنیم $A = R[X]$ اول باشد و برای $a, b \in R$، $aRb = \circ$. در این صورت:

$$aAb = aR[X]b = \circ.$$

لذا $a = \circ$ یا $b = \circ$.

برعکس، فرض می‌کنیم R اول باشد و برای $f, g \in R[X]$، داشته باشیم $fAg = \circ$. مجموعه‌ی متناهی $X_\circ \subseteq X$ به گونه‌ای وجود دارد که $f, g \in R[X_\circ]$ و لذا $fR[X_\circ]g = \circ$. بنابراین کافی است حالتی که X متناهی است را بررسی کنیم. با استفاده از استقرا، برای مقدار x، در نهایت به حالت $A = R[x]$ می‌رسیم. در بحث بالا فرض می‌کنیم که a و b ضرایب پیشروی f و g باشند. آن‌گاه $fR[x]g = \circ$ نتیجه می‌دهد $aRb = \circ$. بنابراین $a = \circ$ یا $b = \circ$. یعنی $f = \circ$ یا $g = \circ$.

می‌دانیم هر دامنه یک حلقه‌ی اول است و هم‌چنین هر حلقه‌ی تقلیل‌یافته، نیم‌اول است. لذا اثبات قسمت ۳ و ۴ بدیهی است. □

قضیه ۲.۲.۴. *(قضیه‌ی آ-میستر مک‌کوی)*[۱] *فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت:*

$$N_*(R[X]) = N_*(R)[X].$$

برهان. قرار می‌دهیم $I = N_*(R)$، در نتیجه $\frac{R}{I}$ نیم‌اول است و هم‌چنین طبق قضیه ۱.۲.۴، $\frac{R[X]}{I[X]} \cong (\frac{R}{I})[X]$ نیز نیم‌اول است و این بدین معناست که $I[X]$ یک ایده‌آل نیم‌اول از $R[X]$ است. بنابراین داریم:

$$N_*(R[X]) \subseteq I[X].$$

برای اثبات قسمت عکس، باید نشان دهیم که برای هر ایده‌آل اول P از $R[X]$، $I[X] \subseteq P$. توجه داریم که $P \cap R$ یک ایده‌آل اول از R است. اگر برای $a, b \in R$، $aRb \in P \cap R$ ، آن‌گاه:

$$aR[X]b = (aRb)[X] \subseteq P.$$

[۱] A-misture McCoy

و لذا $a \in P\cap R$ یا $b \in P\cap R$. حال از آن‌جایی که $P\cap R$ اول است، نتیجه می‌گیریم:
$$I \subseteq P\cap R \subseteq P.$$
و لذا:
$$I[X] \subseteq P.$$
و نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌شود. □

برای بیان گزاره‌ی زیر، به تعاریف زیر نیاز داریم:

تعریف ۳.۲.۴. حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران روی R را با $R[x,x^{-1}]$ نشان می‌دهیم. عناصر آن به فرم $\sum\limits_{i=k}^{n} m_i x^i$ هستند که $m_i \in R$ و n و k دو عدد صحیح هستند. دو عمل جمع و ضرب روی $R[x,x^{-1}]$ به طور طبیعی تعریف می‌شوند.

تعریف ۴.۲.۴. گوییم G یک گروه فارغ از تاب است هرگاه تنها عنصر از مرتبه‌ی متناهی آن، عنصر همانی باشد.

گزاره ۵.۲.۴. *فرض کنیم R یک حلقه و G یک گروه باشد. در این صورت هر یک از حلقه‌های RG که در زیر بیان شده است در قضایای ۳.۱.۴ و ۴.۱.۴ و ۵.۱.۴ صدق می‌کند.*

۱. $RG = R[x,x^{-1}]$.

۲. *RG هرگاه G یک گروه ترتیبی راست یا ترتیبی چپ باشد.*

۳. *RG، هرگاه G یک زیرگروه نرمال مانند H داشته باشد به طوری که H و $\frac{G}{H}$ هردو $u.p$-گروه باشند.*

۴. *RG، وقتی که هر زیرگروه غیریکه‌ی متناهی مولد از G با یک $u.p$-گروه غیریکه یکریخت باشد.*

۵. *RG، وقتی که G یک سری نرمال متناهی $\langle ۱\rangle = G_۰ \leqslant G_۱ \leqslant \cdots \leqslant G_n = G$ داشته باشد به طوری که هر $\frac{G_{i+۱}}{G_i}$ یک گروه آبلی فارغ از تاب باشد.*

۶. *RG، وقتی که G یک گروه پوچ‌توان فارغ از تاب باشد.*

برهان. ۱. مجموعه‌ی $G = \{\ldots, x^{-۲}, x^{-۱}, ۱, x, x^۲, \ldots\}$ به وضوح یک $u.p$-گروه است و $RG = R[x,x^{-۱}]$. G در قسمت ۲ یک $u.p$-گروه است با استفاده از [۲۶]، لم (۱۳.۱.۷). G در قسمت ۳ و ۴ $u.p$-گروه است (با استفاده از [۲۶] ، لم (۱۳.۱.۸) و در قسمت ۵ و ۶ نیز G یک $u.p$-گروه است با استفاده از [۲۶] ، لم (۱۳.۱.۶) و (۱۳.۱.۷). □

فصل ۵

عناصر یکه‌ی حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های مشتق

۱.۵ قضیه‌ی حاصل‌ضرب ثابت در حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های مشتق

فرض کنیم که R یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر و برای درون‌ریختی مشتق‌پذیر δ از R، δ-سازگار و $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ یک چندجمله‌ای ناصفر در $R[x;\delta]$ باشد. در این فصل ثابت خواهیم کرد که اگر چندجمله‌ای ناصفر $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in R[x;\delta]$ وجود داشته باشد به طوری که $g(x)f(x) = c$ یک عنصر ثابت باشد، آن‌گاه $b_0a_0 = c$ و عناصر ناصفر a و r از R موجود هستند به طوری که $rf(x) = ac$. به علاوه نشان می‌دهیم که اگر b_0 در R یکه باشد، در این صورت $a_1, \ldots, a_n$ همگی پوچ‌توان‌اند.

طبق تعریف فصل اول می‌دانیم $R[x;\delta]$ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های مشتق است که عناصر آن به صورت چندجمله‌ای‌های $\sum\limits_{i=0}^{n} r_ix^i$ است و جمع روی آن به طور طبیعی تعریف می‌شود و عمل ضرب به صورت $xb = bx + \delta(b)$ می‌باشد. هم‌چنین می‌دانیم که یک چندجمله‌ای در حلقه‌ی جابه‌جایی R یکه است اگروتنها اگر جمله ثابت آن در R یکه باشد و مابقی عناصر آن پوچ‌توان باشند. در این فصل قصد داریم قضیه‌ی حاصل‌ضرب ثابت برای حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های جابه‌جایی را برای حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های مشتق $R[x;\delta]$ نیز اثبات کنیم. نتیجه می‌گیریم که اگر R یک حلقه‌ی به طور ضعیف ۲-اولیه باشد که برای تابع مشتق δ از R، δ-سازگار باشد، در این صورت چندجمله‌ای مشتق‌پذیر $f(x) \in R[x;\delta]$ یکه است اگروتنها اگر جمله ثابت آن یکه باشد و بقیه‌ی ضرایب آن پوچ‌توان باشند.

لم ۱.۱.۵. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی ۲-اولیه باشد که برای درون‌ریختی مشتق‌پذیر δ از R، δ-سازگار است. اگر P یک ایده‌آل اول مینیمال دلخواه از R باشد، در این صورت $\delta(P) \subseteq P$.*

برهان. مفهوم $\delta(P) \subseteq P$، بدین معناست که برای هر $a \in P$، ثابت کنیم $\delta(a) \in P$. می‌دانیم که هرگاه P یک ایده‌آل اول مینیمال از R باشد، آن‌گاه P با اجتماعی از پوچ‌سازها برابر می‌شود، یعنی:

$$P = \bigcup_{x_i \in R} ann(x_i).$$

حال فرض کنیم $a \in P$. در این صورت:
$$\exists x_i \ : \ ax_i = 0 \Longrightarrow \delta(a)(x_i) = 0.$$
یعنی:
$$\delta(a) \in ann(x_i) \Longrightarrow \delta(a) \in \bigcup ann(x_i).$$
در نتیجه:
$$\delta(a) \in P.$$
لذا نتیجه می‌گیریم $\delta(P) \subseteq P$. □

قضیه ۲.۱.۵. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر و δ-سازگار باشد و $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in R[x;\delta]$ یک چندجمله‌ای مشتق‌پذیر ناصفر باشد. اگر چندجمله‌ای مشتق‌پذیر ناصفری مانند $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ وجود داشته باشد به طوری که $g(x)f(x) = c$، آن‌گاه $b_0a_0 = c$ و ضرایب ناصفر a و r در R وجود دارند به طوری که $rf(x) = ac$. به‌علاوه، اگر b_0 در R یکه باشد، آن‌گاه $a_1, \ldots, a_n$ همگی پوچ‌توان‌اند.*

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم که حکم برای هر چندجمله‌ای مشتق‌پذیر $f(x)$ از درجه‌ی صفر صحیح است. اگر $g(x)$ نیز از درجه‌ی صفر باشد، به‌وضوح حکم برقرار است. لذا فرض می‌کنیم $b_0 = 0$ و $g(x) = b_qx^q + \cdots + b_mx^m$ به طوری که b_q کوچکترین ضریب ناصفر $g(x)$ باشد. در این صورت:
$$g(x)a_0 = (b_qx^q + \cdots + b_mx^m)a_0 = c = 0.$$
پس ضریب بزرگترین توان باید صفر باشد، یعنی:
$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow b_mx^ma_0 = 0\\
&\Longrightarrow b_m[\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\delta^{m-i}(a_0)x^i] = 0\\
&\Longrightarrow b_m[\delta^m(a_0) + m\delta^{m-1}(a_0) + \cdots + m\delta(a_0)x^{m-1} + a_0x^m] = 0.
\end{aligned}$$
طبق قضیه می‌دانیم که هرگاه $rf(x) = 0$، آن‌گاه به ازای هر i، $ra_i = 0$. لذا می‌توان نتیجه گرفت:
$$b_m\delta^m(a_0) = 0, \ldots, b_ma_0 = 0.$$
چون R برگشت‌پذیر است پس $a_0b_m = 0$.
حال فرض کنیم $g(x)$ از درجه‌ی صفر باشد، یعنی $g(x) = b_0 \neq 0$ و $f(x)$ از درجه‌ی $n > 1$ باشد. در این صورت داریم:
$$\begin{aligned}
&g(x)f(x) = b_0(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = c\\
&\Longrightarrow b_0a_0 + b_0a_1x + \cdots + b_0a_nx^n = c\\
&\Longrightarrow b_0a_0 = c.
\end{aligned}$$

حال فرض می‌کنیم که حکم برای تمامی جملات با درجه کمتر از m برقرار باشد. اگر $b_\circ = \circ$، آن‌گاه:
$$g(x)f(x) = b_\circ a_\circ = c = \circ.$$
فرض می‌کنیم $g(x) = b_q x^q + \cdots + b_m x^m$ به طوری که b_q کوچکترین ضریب ناصفر $g(x)$ است. اگر برای $n \leq k \leq ۱$، داشته باشیم که $g(x)a_k = \circ$، آن‌گاه:
$$(b_q x^q + \cdots + b_m x^m)a_k = \circ.$$
مشابه قسمت اول $b_m a_k = \circ$ و در نتیجه $b_m f(x) = \circ$.
حال فرض کنیم که k بزرگترین عدد صحیح مثبتی باشد که $g(x)a_k \neq \circ$. اگر $k = n$، داریم:
$$\begin{aligned}
&(b_q x^q + \cdots + b_m x^m)(a_\circ + a_۱ x + \cdots + a_n x^n) = c\\
&\Longrightarrow b_m x^m a_n = \circ\\
&\Longrightarrow b_m[\sum_{i=\circ}^{m} \binom{m}{i} \delta^{m-i}(a_n)x^i] = \circ\\
&\Longrightarrow b_m[\delta^m(a_n) + m\delta^{m-۱}(a_n)x + \cdots + m\delta(a_n)x^{m-۱} + a_n x^m] = \circ\\
&\Longrightarrow b_m\delta^m(a_n) = \circ, \cdots, b_m a_n = \circ.
\end{aligned}$$
و با توجه به برگشت‌پذیری R نتیجه می‌گیریم $a_n b_m = \circ$. یعنی $a_n g(x)$ از درجه‌ی کمتر از m است. پس طبق فرض استقرا $a_n g(x)f(x) = a_n c$.
در حالت $k < n$، فرض می‌کنیم برای $k + ۱ \leqslant s \leqslant n$، داشته باشیم $g(x)a_s = \circ$. در این صورت این‌چنین می‌نویسیم:
$$\begin{aligned}
&(b_q x^q + \cdots + b_m x^m)(a_\circ + a_۱ x + \cdots + a_k x^k) = g(x)f(x) = c\\
&\Longrightarrow b_m[\delta^m(a_k) + m\delta^{m-۱}(a_k)x + \cdots + m\delta(a_k)x^{m-۱} + a_k x^m] = \circ\\
&\Longrightarrow b_m\delta^m(a_k) = \circ, \cdots, b_m a_k = \circ\\
&\Longrightarrow a_k b_m = \circ.
\end{aligned}$$
در نتیجه $a_k g(x)$ از درجه‌ی کمتر از m است، لذا:
$$a_k g(x)f(x) = a_k c = \circ.$$
حال اگر $b_\circ \neq \circ$ و $a_k g(x) = \circ$، آن‌گاه:
$$a_k(b_\circ + b_۱ x + \cdots + b_m x^m) = \circ.$$
در این صورت $a_k b_\circ = \circ$ و هم‌چنین $b_\circ a_k = \circ$ و این امر یعنی $b_\circ f(x) = c$ و لذا $b_\circ a_\circ = \circ$.
مجدداً فرض می‌کنیم $b_\circ \neq \circ$ و k بزرگترین عدد صحیح مثبتی باشد که $a_k g(x) \neq \circ$. در حالت $k = n$ داریم:
$$g(x)f(x) = c \longrightarrow b_m a_n = \circ \longrightarrow a_n b_m = \circ.$$
در این صورت $a_n g(x)$ از درجه‌ی کمتر از m است و لذا طبق فرض استقرا:
$$a_n g(x)f(x) = a_n c.$$

در حالت $k < n$، فرض کنیم برای $k + ۱ < s < n$ داشته باشیم $a_s g(x) = ۰$. لذا داریم:

$$g(x)f(x) = g(x)(a_۰ + a_۱x + \cdots + a_kx^k) = c$$
$$\Longrightarrow b_mx^ma_k = ۰$$
$$\Longrightarrow b_m[\sum_{i=۰}^{m} \binom{m}{i} \delta^{m-i}(a_k)x^i] = ۰$$
$$\Longrightarrow b_m[\delta^m(a_k) + m\delta^{m-۱}(a_k)x + \cdots + m\delta(a_k)x^{m-۱} + a_kx^m] = ۰$$
$$\Longrightarrow b_m\delta^m(a_k) = ۰, \cdots, b_ma_k = ۰$$
$$\Longrightarrow a_kb_m = ۰.$$

پس $a_kg(x)$ از درجه‌ی کمتر از m است و با استفاده از فرض استقرا می‌توان گفت:
$$a_kg(x)f(x) = a_kc.$$

برای اثبات قسمت دوم، فرض کنیم $g(x)f(x) = c$ و $b_۰$ در R یکه باشد و P یک ایده‌آل اول مینیمال از R باشد. می‌توان درون‌ریختی $\overline{\delta}$ از $\overline{R} = \dfrac{R}{P}$ را تعریف کرد به طوری که:
$$\overline{\delta}(\overline{a}) = \overline{\delta(a)} \quad | \quad \overline{a} = a + P, (a \in R).$$

بنابراین $\overline{R}[x; \overline{\delta}]$ یک حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های مشتق‌پذیر است. از آن‌جایی که R ۲-اولیه است لذا P یک ایده‌آل کاملاً اول از R است و بنابراین $\overline{R}$ دامنه است. حال ثابت می‌کنیم $\overline{R}$، $\overline{\delta}$-سازگار است. طبق لم ۱.۱.۵، $\delta(P) \subseteq P$. اگر $\overline{a}\overline{b} = \overline{۰}$، آن‌گاه $ab \in P$ و چون که P کاملاً اول است پس $a \in P$ یا $b \in P$. لذا طبق لم ۱.۱.۵، $a\delta(b) \in P$. پس $\overline{a}\overline{\delta}(\overline{b}) = \overline{۰}$.

$\square$

نتیجه ۳.۱.۵. *فرض کنیم که R یک حلقه‌ی برگشت‌پذیر باشد که برای درون‌ریختی مشتق‌پذیر δ از R، δ-سازگار باشد. چندجمله‌ای مشتق‌پذیر $f(x) \in R[x; \delta]$ یکه است اگروتنها اگر جمله‌ی ثابت آن یکه باشد و مابقی ضرایب آن پوچ‌توان باشد.*

برهان. فرض کنیم $f(x) = a_۰ + a_۱x + \cdots + a_nx^n \in R[x; \delta]$ یکه باشد.
در این صورت $g(x) = b_۰ + b_۱x + \cdots + b_mx^m \in R[x; \delta]$ وجود دارد به طوری که:
$$f(x)g(x) = g(x)f(x) = ۱.$$

طبق قضیه‌ی ۲.۱.۵ نتیجه می‌گیریم $b_۰$ یکه است و برای $k \geq ۱$، a_kها پوچ‌توان‌اند.
برعکس، فرض کنیم که $a_۰$ یکه باشد و برای $k \geq ۱$، a_k پوچ‌توان باشد. آن‌گاه:
$$a_۱x + \cdots + a_nx^n \in N(R)[x; \delta] = L - rad(R[x; \delta]) \subseteq rad(R[x; \delta]).$$

در نتیجه $f(x)$ در $R[x; \delta]$ نیز یکه است. $\square$

نتیجه ۴.۱.۵. *فرض کنیم R حلقه‌ای برگشت‌پذیر و δ-سازگار باشد و $f(x) = a_۰ + a_۱x + \cdots + a_nx^n$ و $g(x) = b_۰ + b_۱x + \cdots + b_mx^m$ چندجمله‌ای‌های مشتق‌پذیر ناصفری باشند که $a_۱$ در R یکه باشد.*

در این صورت اگر $f(g(x)) = 0$ و همچنین b_0 یا $a_2, \dots, a_n$ پوچ‌توان باشند، آن‌گاه $b_1, \dots, b_m$ نیز پوچ‌توان‌اند.

نتیجه ۵.۱.۵. *فرض کنیم R حلقه‌ای کاهشی و δ-سازگار باشد. در این صورت $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ در $R[x;\delta]$ یکه است اگروتنها اگر a_0 یکه باشد و برای هر $i \geq 1$، a_i صفر باشد.*

برهان. با توجه به قضیه ۲.۱.۵ و اینکه حلقه‌ی R کاهشی است و هیچ عنصر پوچ‌توان ناصفری ندارد، اثبات کامل می‌شود. □

نتیجه ۶.۱.۵. *فرض کنیم که R حلقه‌ای NI باشد و برای درون‌ریختی مشتق‌پذیر δ از R، δ-سازگار ضعیف باشد. در این صورت $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in R[x;\delta]$ یکه است اگروتنها اگر a_0 در R یکه باشد و برای هر $i \geq 1$، a_i پوچ‌توان باشد.*

برهان. چون که R یک حلقه‌ی NI است لذا $N(R) = N^*(R)$. پس می‌توان گفت که $N(R)$ ایده‌آلی از R است و در نتیجه $\overline{R} = \dfrac{R}{N(R)}$ یک حلقه‌ی کاهشی است. درون‌ریختی δ از R، درون‌ریختی $\overline{\delta}$ از $\overline{R}$ را ایجاب می‌کند به طوری که $\overline{\delta}(\overline{a}) = \delta(a) + N(R)$ که $\overline{a} = a + N(R)$. از آن‌جایی که $\delta(N(R)) \subseteq N(R)$ و با توجه به این که R، δ-سازگار ضعیف است، داریم:

$$\overline{a}\overline{b} = \overline{0} \Longrightarrow ab \in N(R) \Longrightarrow a\delta(b) \in N(R) \Longrightarrow \overline{a}\overline{\delta}(\overline{b}) = \overline{0}.$$

این امر یعنی که $\overline{R}$، $\overline{\delta}$-سازگار است. لذا یک درون‌ریختی حلقه‌ای پوشا از $R[x;\delta]$ به $\overline{R}[x;\overline{\delta}]$ وجود دارد که $f(x)$ را به $\overline{f}(x) = \overline{a_0} + \overline{a_1}x + \cdots + \overline{a_n}x^n$ می‌نگارد. لذا $\overline{f}(x)$ در $\overline{R}[x;\overline{\delta}]$ یکه است. بنابراین $\overline{a_0} \in \overline{R}$ یکه است و برای هر $i \geq 1$، $\overline{a_i}$، صفر است. در نتیجه a_0 در R یکه است و برای هر $i \geq 1$، a_i پوچ‌توان است. □

مراجع

[1] Amitsur, S.A., Radicals of polynomial rings, *Canad. J. Math*, **8**, 355–361, 1956.

[2] Annin, S., Associated primes over skew polynomial rings, *Comm. Algebra*, **30**, 5, 2511–2528, 2002.

[3] Birkenmeier, G.F., and Heatherly, H.E. and Lee, E.K., Completely prime ideals and associated radicals, in : S. K. Jain and S. T. Rizvi eds, 102–129, 1992.

[4] Camillo, V., Hong, C., Kim, N., Lee, Y., and Nielsen, P., Nilpotent ideals in polynomial and power series rings, *Proc. Amer. Math. Soc*, **138**, 5, 1607–1619, 2010.

[5] Chen, W., On constant products of elements in skew polynomial rings, *Bull. Iran. Math. Soc*, **41**, 2, 453–462, 2015.

[6] Chen, W., and S. Y. Cui, On weakly semicommutative rings, *Commun. Math. Res*, **27**, 2, 179-192, 2011.

[7] Chen, W., Units in Polynomial Rings over 2-Primal Rings, *Southeast Asian Bull. Math*, **30**, 6, 2006.

[8] Cheon, J.S., and Kim, J.A., Prime radicals in up-monoid rings, *Bull Korean Math. Soc*, **49**, 3, 511–515, 2012.

[9] Ferrero, M., and Kishimoto, K., On differential rings and skew pulynomials, *Comm. Algebra*, **13**, 2, 285–304, 1985.

[10] Hashemi, E., Compatible ideals and radicals of Ore extensions *New York J. Math*, **12**, 349–356, 2006.

[11] Hong, C.Y., Kim, N.K., and Lee, Y., Extensions of McCoy's theorem, *Glasg. Math. J*, **52**, 01, 155–159, 2010.

[12] Hong, C.Y., Kwak, T.K., and Rizvi, S.T., Rigid ideals and radicals of Ore extensions, *Algebra Colloq*, **12**, 03, 399–412, 2005.

[13] Jespers, E., and Krempa, J., and Pucsylowski, E.R., On radicals of graded rings, *Comm. Algebra*, **10**, 17, 1849–1854, 1982.

[14] Karamzadeh, O. A. S., *On constant product of polynomials*, *Int. J. Math. Edu. Technol*, **18**, 627-629, 1987.

[15] Khurana, D., Marks, G., and Srivastava, A.K., On unit-central rings, Advances in Ring Theory, 205–212, 2010.

[16] Krempa, J., Some examples of reduced rings, *Algebra Colloq*, 3, **4**, 289–300, 1996.

[17] Lam, T.Y., A first course in noncommutative rings, Graduate Texts in Mathmatics, 131, Spinger-Verlag, New york, 1991.

[18] Lam, T.Y., Leroy, A., and Matczuk, J., Primeness, semiprimeness and prime radical of Ore extensions, *Comm. Algebra*, **25**, 8, 2459–2506, 1997.

[19] Lambek, J., On the representation of modules by sheaves of factor modules, *Canad. Math. Bull*, **14**, 359–368, 1971.

[20] Marks, G., On 2-primal Ore extensions, *Comm. Algebra*, **29**, 5, 2113-2123, 2001.

[21] Marks, G., Skew polynomial rings over 2-primal rings, *Comm. Algebra*, **27**, 9, 4411–4423, 1999.

[22] Moussavi, A., and Hashemi, E., Polynomial extensions of quasi-Baer rings, *Acta Math. Hungar*, **107**, 3, 207–224, 2005.

[23] Nasr-Isfahani, A.R., Ore extension of 2-primal rings, *Journal of Algebra and Its Applications*, **13**, 03, 2014.

[24] Nielsen, P.P., Semi-commutativity and the McCoy condition, *J. Algebra*, **298**, 1, 134–141, 2006.

[25] Okniński, J., Semigroup algebras, Marcel Dekker. New York, 1991.

[26] Passman, D.S., *The algebraic structure of group rings*, 2011.

[27] Shin, G., Prime ideals and sheaf representation of a pseudo symmetric ring, *Trans. Amer. Math. Soc*, **184**, 43–60, 1973.

[28] Smoktunowicz, A., Polynomial rings over nil rings need not be nil, *J. Algebra*, **233**, 2, 427–436, 2000.

[۲۹] آشنایی با پوچ‌سازهای چندجمله‌ای‌ها، تصنیف دکتر ابراهیم هاشمی، سال ۱۳۹۰، دانشگاه صنعتی شاهرود.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

(α,δ)–ایده‌آل .... (α,δ)-ideal
(α,δ)–ایده‌آل اول .... (α,δ)-prime ideal
α–آرمنداریز اریب .... α-skew Armendariz
α–ایده‌آل .... α-ideal
δ–ایده‌آل .... δ-ideal
ایده‌آل .... Ideal
ایده‌آل α–اول .... α-prime ideal
ایده‌آل اول .... Prime ideal
ایده‌آل α–اول مینیمال .... α-minimal prime ideal
ایده‌آل اول مینیمال .... Minimal prime ideal
ایده‌آل پوچ .... Nil ideal
ایده‌آل شبه‌منظم .... Quasi-regular ideal
ایده‌آل α–صلب .... α-rigid ideal
ایده‌آل قویاً اول .... Strongly prime ideal
ایده‌آل قویاً اول مینیمال .... Minimal strongly prime ideal
ایده‌آل کاملاً اول .... Completely prime ideal
ایده‌آل ماکسیمال .... Maximal ideal
ایده‌آل نیم‌اول .... Semiprime ideal
تکوار .... Monoid
$u.p$–تکوار .... Unique product monoid
حلقه .... Ring
حلقه ۲–اولیه .... 2-primal ring
حلقه ۲–اولیه ضعیف .... Weakly 2-primal
حلقه آرمنداریز .... Armendariz ring
حلقه اول .... Prime ring

حلقه برگشت‌پذیر	Reversible ring
حلقه تقلیل‌یافته	Reduced ring
حلقه چندجمله‌ای‌های اریب	Skew polynomial ring
حلقه چندجمله‌ای‌های لوران	Laurent polynomial ring
حلقه چندجمله‌ای‌های مشتق	Differential polynomial ring
حلقه قویاً اول	Strongly prime ring
حلقه مک‌کوی	McCoy ring
حلقه نیمه‌جابه‌جایی	Semicommutative ring
حلقه واحد-مرکزی	Unit-central ring
حلقه یکدار	Unital ring
حلقه **NI**	NI-ring
حلقه **UN**	UN-ring
حلقه (α, δ)-سازگار	(α, δ)-compatible ring
حلقه α-سازگار	α-compatible ring
حلقه α-سازگار ضعیف	Weak α-compatible ring
حلقه δ-سازگار	δ-compatible ring
حلقه δ-سازگار ضعیف	Weak δ-compatible ring
درون‌ریختی	Endomorphism
$\Phi - m$-دنباله	$\Phi - m$-sequence
رادیکال اول	Prime radical
رادیکال پوچ بالایی	Upper nil radical
رادیکال پوچ پایینی	Lower nil rdical
رادیکال جیکبسون	Jacobson radical
زیرگروه	Subgroup
زیرگروه نرمال	Normal subgroup
زیرحلقه	Subring
m-سیستم	m-system
n-سیستم	n-system
$(\Phi - m)$-سیستم	$(\Phi - m)$-system
عنصر پوچ‌توان	Nilpotent element
عنصر قویاً پوچ‌توان	Strongly nilpotent element
عنصر قویاً (α, δ)-پوچ‌توان	Strongly (α, δ)-nilpotent element

فارغ از تاب .... Torsion free

گروه .... Group

$u.p$–گروه .... u.p-group

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

حلقه ۲-اولیه	2-primal ring
حلقه آرمنداریز	Armendariz ring
حلقه (α, δ)-سازگار	(α, δ)-compatible ring
حلقه α-سازگار	α-compatible ring
حلقه δ-سازگار	δ-compatible ring
ایده‌آل کاملاً اول	Completely prime ideal
حلقه چندجمله‌ای‌های مشتق	Differential polynomial ring
درون‌ریختی	Endomorphism
گروه	Group
$u.p$-گروه	$u.p$-Group
ایده‌آل	Ideal
(α, δ)-ایده‌آل	(α, δ)-ideal
α-ایده‌آل	α-ideal
δ-ایده‌آل	δ-ideal
رادیکال جیکبسون	Jacobson radical
حلقه چندجمله‌ای‌های لوران	Laurent polynomial ring
رادیکال لویتزکی	Levitzki radical
رادیکال پوچ پایینی	Lower nilradical
ایده‌آل ماکسیمال	Maximal ideal
حلقه مک‌کوی	McCoy ring
ایده‌آل اول مینیمال	Minimal prime ideal
ایده‌آل α-اول مینیمال	α-minimal prime ideal
ایده‌آل قویاً اول مینیمال	Minimal strongly prime ideal
تکوار	Monoid
$u.p$-تکوار	$u.p$-monoid

Nil ideal .... ایده‌آل پوچ
Nilpotent element .... عنصر پوچ‌توان
Normal subgroup .... زیرگروه نرمال
Prime ideal .... ایده‌آل اول
α-prime ideal .... ایده‌آل α–اول
(α,δ)-prime ideal .... ایده‌آل (α,δ)–اول
prime radical .... رادیکال اول
prime ring .... حلقه اول
Quasi-regular ideal .... ایده‌آل شبه‌منظم
Reduced ring .... حلقه تقلیل‌یافته
Reversible ring .... حلقه برگشت‌پذیر
α-rigid ideal .... ایده‌آل α–صلب
α-rigid ring .... حلقه α–صلب
Ring .... حلقه
NI ring .... حلقه NI
Semicommutative ring .... حلقه نیمه‌جابه‌جایی
Semiprime ideal .... ایده‌آل نیم‌اول
$\Phi - m$-sequence .... $(\Phi - m)$–دنباله
Skew polynomial ring .... حلقه چندجمله‌ای‌های اریب
α-skew Armendariz .... آرمنداریز α–اریب
Strongly nilpotent element .... عنصر قویاً پوچ‌توان
Strongly (α,δ)-nilpotent ideal .... ایده‌آل قویاً (α,δ)–پوچ‌توان
Strongly prime ideal .... ایده‌آل قویاً اول
Strongly prime ring .... حلقه قویاً اول
Subgroup .... زیرگروه
Subring .... زیرحلقه
m-system .... m–سیستم
n-system .... n–سیستم
$(\Phi - m)$-system .... $(\Phi - m)$–سیستم
Torsion free .... فارغ از تاب
Unital ring .... حلقه یکدار
Unit-Central ring .... حلقه واحد–مرکزی

Upper nilradical .... رادیکال پوچ بالایی
Weak α-compatible ring .... حلقه α-سازگار ضعیف
Weak δ-compatible ring .... حلقه δ-سازگار ضعیف
Weakly 2-primal ring .... حلقه ۲اولیه ضعیف

نمایه

گ

M

N

U

Aabstract

Let R be a reversible ring which is α-compatible for an endomorphism α of R and $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ be a nonzero skew polynomial in $R[x;\alpha]$. It is proved that if there exist a nonzero skew polynomial $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ in $R[x;\alpha]$ such that $g(x)f(x) = c$ is a constant in R, then $b_0a_0 = c$ and there exist a nonzero elements a and r in R such that $rf(x) = ac$. In particular, $r = ab_p$ for some p, $0 \leq p \leq m$, and a is either one or a product of at most m coefficients from $f(x)$. Furthermore, if b_0 is a unit in R, then $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are all nilpotent. As an application of the above result, it is proved that if R is weakly 2-primal ring which is α-compatible for an endomorphism α of R, then a skew polynomial $f(x)$ in $R[x;\alpha]$ is a unit if and only if its constant term is unit in R and other coefficients are all nilpotent.

Moreover, for an endomorphism α and α-derivation δ, we show that if R is (α, δ)-compatible then R is 2-primal if and only if the Ore extension $R[x;\alpha,\delta]$ is 2-primal if and only if $N(R) = N_*(R;\alpha,\delta)$ if and only if $N(R)[x;\alpha,\delta] = N_*(R[x;\alpha,\delta])$ if and only if every minimal (α,δ)-prime ideal of R is completely prime.

Also, we show that the semiprimeness, primeness, and reducedness can go up to unique product monoids (simply, u.p-monoids). By these results we can compute the lower nilradical of u.p-monoids rings, from which the well-known fact of Amitsur and McCoy for the polynomial rings can be extended to u.p-monoid rings.

Finally, we show that if R be a reversible ring which is δ-compatible for a derivation endomorphism δ on R and $f(x) = a_0 + a_1 + \cdots + a_nx^n$ be a nonzero polynomial in $R[x;\delta]$ that if there exists a nonzero polynomial $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ in $R[x;\delta]$ such that $g(x)f(x) = c$ be a constant in R, then $b_0a_0 = c$ and there exists a nonzero elements a and r in R such that $rf(x) = ac$. Furthermore, we show that if b_0 is a unit in R, then $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are all nilpotent.

Keywords: skew polynomial rings, differential polynomial rings, reversible rings, 2-primal rings, (α,δ)-compatible rings

دانشگاه صنعتی شاهرود

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

On constant product of elements in skew polynomial rings

Mina Sadeghloo

Supervisor

Dr. E. Hashemi

Advisor

Dr. A. Alehevaz

September 2016