دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

دترمینان هنکل دوم برای دو زیررده از توابع تحلیلی

نازنین علیزاده سیاه‌کش

استاد راهنما

دکتر احمد زیره

شهریور ۹۵

تقدیم به

پدر عزیز

و مادر مهربانم

سپاس گزاری...

سپاس معبودی را که عشق به آموختن را در دل انسان‌ها به ودیعه نهاد. خداوند را سپاس می‌گوییم که به من فرصت داد تا عمر خود رادر راه تحصیل علم و دانش سپری کنم.

از پدر و مادر عزیزم که از کودکی، شور دانستن و لذت کشف و جستجو را در من بیدار کردند و استقامت و تلاش را به من آموختند و در تمام این سالها، با فراهم کردن آرامش روحی، بسیاری از دشواری‌ها را بر من آسان نمودند، با تمام وجود، قدر دانم.

به پاس احترام به مقام والای معلم، در مقابل تمام اساتید بزرگواری که در محضرشان کسب فیض نموده و کویر تشنه وجودم را از چشمه جوشان معرفتشان سیراب ساخته‌ام، سر تعظیم فرود آورده و مراتب سپاس گزاری خود را از ایشان ابراز می‌دارم.

از استاد راهنمای بردبارم، **جناب آقای دکتر احمد زیره،** که تمام روزهایی که تحت نظارت ایشان مشغول به تحقیق بودم سرشار از آموختن توأم با علم و اخلاق بود، نهایت تشکر را دارم. در پرتو پر از امید ایشان بود که تمام دلسردی‌ها رنگ می‌باخت و در سایه وجود خستگی ناپذیرشان، پرسش‌های گاه و بی گاهم پاسخ می‌یافت. از ایشان برای راهنمایی‌ها و یاری بی دریغشان صمیمانه سپاسگزارم.

نازنین علیزاده سیاه‌کش

شهریور ۹۵

تعهدنامه

اینجانب **نازنین علیزاده سیاه‌کش** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **دترمینان هنکل دوم برای دو زیررده از توابع تحلیلی** ، تحت راهنمایی **دکتر احمد زیره** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود ” یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

نازنین علیزاده سیاه‌کش
شهریور ۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

چکیده

پایان نامه حاضر مربوط به برآورد کران بالای دترمینان هنکل دوم برای توابع متعلق به زیررده‌ای از رده‌های ستاره‌گون و توابع محدب در دیسک واحد است. با قرار دادن مقادیر خاصی برای پارامترهای α, β می‌توان نتایج نویسندگان قبلی را به دست آورد.

کلمات کلیدی: توابع تحلیلی، توابع ستاره‌گون، توابع محدب، توابع شوارتز، دترمینان هنکل دوم

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ نمادگذاری و تعاریف

این بخش شامل تعاریف و مفاهیم اولیه موردنیاز در فصل‌های بعد می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱. هر مجموعه همبند و باز، میدان نامیده می‌شود. میدان را معمولاً با D نشان می‌دهند.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید D زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{C}$ و $f : D \to \mathbb{C}$ تابعی دلخواه باشد که $z_\circ \in D$.
گوییم f در $z_\circ$ مشتق پذیر است هرگاه

۱. f در همسایگی‌ای از $z_\circ$ که داخل D قرار دارد، تعریف شده باشد.

۲. $\lim_{z\to z_\circ} \frac{f(z)-f(z_\circ)}{z-z_\circ}$ وجود داشته باشد.

تعریف ۳.۱.۱. تابع f را در $z_\circ$ تحلیلی گویند، هرگاه در یک همسایگی $z_\circ$ مشتق پذیر باشد.

تعریف ۴.۱.۱. رده‌ای از توابع، به شکل $f(z) = z + a_۲z^۲ + \dots$ که در دیسک واحد باز $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < ۱\}$ تحلیلی هستند را با نماد A نشان می‌دهیم.

لم ۵.۱.۱. *(لم شوارتز)* [۱] *فرض کنید $f(z)$ تابعی در دیسک $E_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ باشد و برای مقدار ثابت M، $|f(z)| < M$. اگر $f(z)$ در $z = \circ$، با تعداد دفعات m، صفر شود، در این صورت*

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R^m}|z|^m$$

.

در این رابطه تساوی زمانی برقرار است که:

$$f(z) = \mathbf{e}^{i\theta}\frac{M}{R^m}z^m$$

که در آن θ مقداری حقیقی و ثابت است.

تعریف ۶.۱.۱. هر تابع تحلیلی و یک به یک بر میدان D را تک ارز می‌نامیم.

[۱] Schwarz

۲.۱ رده S

تعریف ۱.۲.۱. رده همه توابع $f(z)=z+a_2z^2+\dots$ که در دیسک واحد $E=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ تحلیلی و تک ارزند و دارای دو شرط $f(0)=0$، $f'(0)=1$، هستند را با نماد S نشان می‌دهیم.

لم ۲.۲.۱. *اگر $f\in S$، آنگاه*

$$g(z)=z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}\in S$$

.

برهان. قرار می‌دهیم $f(z)=z+a_2z^2+\dots$. لذا داریم:

$$g(z)=z\sqrt{1+a_2z^2+a_3z^4+\dots} \tag{۱.۱}$$

(شاخه اصلی $\sqrt{\ }$ را در نظر می‌گیریم.) تابع $g(z)$ بر دیسک واحد تحلیلی است و $g(0)=0$ و $g'(0)=1$.

اثبات یک به یک بودن:

اگر $g(z_1)=g(z_2)$، یعنی $z_1\sqrt{\frac{f(z_1^2)}{z_1^2}}=z_2\sqrt{\frac{f(z_2^2)}{z_2^2}}$، آنگاه با به توان رساندن این عبارت داریم: $f(z_1^2)=f(z_2^2)$. از طرفی چون $f(z)$ یک به یک است پس $z_1^2=z_2^2$، در نتیجه $z_1=z_2$ یا $z_1=-z_2$. با توجه به رابطه (۱.۱)، $g(z)$ تابعی فرد است، لذا $z_1=-z_2$، تساوی $g(z_1)=g(-z_2)=-g(z_2)$ را نتیجه می‌دهد که با فرض $g(z_1)=g(z_2)$، در تناقض است. پس $z_1=z_2$. لذا $g(z)$ یک به یک است.

□

قضیه ۳.۲.۱. *اگر $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\dots$، آنگاه* $|a_2|\le 2$.

مثال ۴.۲.۱. (تابع کوئب) [2] در قضیه (۳.۲.۱)، اگر $a_2=2\mathbf{e}^{i\alpha}$، و α مقداری حقیقی باشد، آنگاه $g(z)=\frac{z}{(1-\mathbf{e}^{i\alpha}z)^2}=z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$ لذا

$$f(z)=\frac{z}{(1-\mathbf{e}^{i\alpha}z)^2}=z+2\mathbf{e}^{i\alpha}z^2+3\mathbf{e}^{i\alpha}z^3.$$

با قرار دادن $\alpha=0$، به تابع زیر می‌رسیم:

$$k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=\frac{1}{4}(\frac{1+z}{1-z})^2-\frac{1}{4}$$

که به تابع کوئب معروف است. این تابع قرص $|z|<1$ را بر صفحه‌ای که در امتداد محور حقیقی منفی از $-\frac{1}{4}$ تا ∞ برده شده است، می‌نگارد.

قضیه ۵.۲.۱. ***(پوشش)*** *اگر $f(z)\in S$ و برای $|z|<1$، $f(z)\neq c$، که $c\in\mathbb{C}$، آنگاه* $|c|\ge\frac{1}{4}$.

[2] Koebe

برهان. می‌دانیم $f(z) = z + a_۲ z^۲ + \dots$، چون $f(z) \neq c$، پس تابع $g(z) = \frac{cf(z)}{c-f(z)}$ نیز متعلق به رده S می‌باشد.

$$\frac{cf(z)}{c-f(z)} = z + (a_۲ + \frac{۱}{c})z^۲ + \dots$$

بنابر قضیه (۳.۲.۱)، داریم $|a_۲ + \frac{۱}{c}| \leq ۲$. از طرفی داریم:

$$|\frac{۱}{c}| - |a_۲| \leq |a_۲ + \frac{۱}{c}| \leq ۲ \Longrightarrow |\frac{۱}{c}| \leq ۲ + |a_۲|$$

و چون $f(z) \in S$ پس $|a_۲| \leq ۲$ لذا داریم:

$$|\frac{۱}{c}| \leq ۴ \Longrightarrow |c| \geq \frac{۱}{۴}.$$

□

لم ۶.۲.۱. *اگر $f(z) \in S$ و $z = r\mathbf{e}^{i\alpha}$، آنگاه*

$$Re\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\} = r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|.$$

برهان. چون برای $|z| < ۱$، $f'(z) \neq ۰$، پس می‌توان شاخه‌ای از $\log f'(z)$، را برای $|z| < ۱$ در نظر گرفت. حال برای $f(z) = f(r\mathbf{e}^{i\alpha})$ داریم $f'(z) = f'(r\mathbf{e}^{i\alpha})$. لذا

$$\frac{\partial}{\partial r}\log f'(r\mathbf{e}^{i\alpha}) = \frac{\mathbf{e}^{i\alpha}f''(r\mathbf{e}^{i\alpha})}{f'(r\mathbf{e}^{i\alpha})}$$

با ضرب طرفین رابطه بالا در r داریم:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\log f'(r\mathbf{e}^{i\alpha}) = \frac{r\mathbf{e}^{i\alpha}f''(r\mathbf{e}^{i\alpha})}{f'(r\mathbf{e}^{i\alpha})} = \frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

با محاسبه قسمت های حقیقی داریم:

$$r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(r\mathbf{e}^{i\alpha})| = Re\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\}.$$

□

قضیه ۷.۲.۱. *اگر $f(z) \in S$، آنگاه*

$$\frac{۱-r}{(۱+r)^۳} \leq |f'(z)| \leq \frac{۱+r}{(۱-r)^۳} \qquad (|z| = r < ۱).$$

برهان. می‌دانیم تابع $w = \frac{z+z_۰}{۱+\bar{z}_۰ z}$ $\quad (|z_۰| < ۱)$ تحلیلی، یک به یک و پوشا است و قرص واحد را بر خودش می‌نگارد. لذا تابع $g(z) = f(\frac{z+z_۰}{۱+\bar{z}_۰ z}) = b_۰ + b_۱ z + b_۲ z^۲$ نیز به‌ازای $(|z| < ۱)$ تحلیلی و تک ارز است. داریم:

$$g(\circ) = b_\circ = f(z_\circ)$$

$$b_۱ = g'(\circ) = f'(z_\circ)(۱ - |z_\circ|^۲)$$

$$b_۲ = \frac{g''(\circ)}{۲} = \frac{۱}{۲}(f''(z_\circ)(۱ - |z_\circ|^۲)^۲ - ۲f'(z_\circ)\bar{z}_\circ(۱ - |z_\circ|^۲))$$

چون $g(z)$ نرمالیزه نیست، پس به رده S تعلق ندارد. با توجه به اینکه تابع $\frac{g(z)-g(\circ)}{g'(z)} = z + \frac{b_۲}{b_۱}z^۲ + \ldots$ در S قرار می‌گیرد، بنابر قضیه (۳.۲.۱)، $|\frac{b_۲}{b_۱}| \leq ۲$ یعنی

$$\frac{۱}{۲}\left|\frac{f''(z_\circ)}{f'(z_\circ)}(۱ - |z_\circ|^۲) - ۲\bar{z}_\circ\right| \leq ۲$$

با قرار دادن $z_\circ = r\mathrm{e}^{i\alpha}$ وضرب طرفین در $\frac{۲|z_\circ|}{۱-|z_\circ|^۲}$ داریم:

$$\left|\frac{z_\circ f''(z_\circ)}{f'(z_\circ)} - \frac{۲|z_\circ|^۲}{۱ - |z_\circ|^۲}\right| \leq \frac{۴|z_\circ|}{۱ - |z_\circ|^۲}$$

حال چون $z_\circ$ دلخواه است، قرار می‌دهیم:

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{۲r^۲}{۱ - r^۲}\right| \leq \frac{۴r}{۱ - r^۲}$$

یعنی $\frac{zf''(z)}{f'(z)}$ در دایره‌ای به شعاع $\frac{۴r}{۱-r^۲}$ و مرکز $\frac{۲r^۲}{۱-r^۲}$ واقع است. لذا

$$\frac{۲r^۲ - ۴r}{۱ - r^۲} \leq Re\frac{zf''(z)}{f'(z)} \leq \frac{۲r^۲ + ۴r}{۱ - r^۲}$$

بنا به لم (۶.۲.۱) می‌دانیم

$$Re\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\} = r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|,$$

یعنی

$$\frac{۲r^۲ - ۴r}{۱ - r^۲} \leq r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| \leq \frac{۲r^۲ + ۴r}{۱ - r^۲}$$

$$\Longrightarrow \frac{۲r - ۴}{۱ - r^۲} \leq \frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| \leq \frac{۲r + ۴}{۱ - r^۲}$$

حال از طرفین نامساوی از $\circ$ تا r انتگرال می‌گیریم:

$$\log(۱ - r) - ۳\log(۱ + r) \leq \log|f'(z)| \leq \log(۱ + r) - ۳\log(۱ - r)$$

و

$$\log\frac{۱ - r}{(۱ + r)^۳} \leq \log|f'(z)| \leq \log\frac{۱ + r}{(۱ - r)^۳}$$

در نتیجه

$$\frac{۱ - r}{(۱ + r)^۳} \leq |f'(z)| \leq \frac{۱ + r}{(۱ - r)^۳} \qquad (|z| = r < ۱).$$

□

مثال ۸.۲.۱. مشتق تابع کوئب $k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=z+2z^2+\dots$ برابر است با $k'(z)=\frac{1+z}{(1-z)^3}$. لذا کران بالای قضیه (۷.۲.۱) در مورد این تابع در $z=r$ و کران پایین در $z=-r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۹.۲.۱. *اگر $f(z)\in S$ آنگاه*

$$\frac{r}{(1+r)^2}\le |f(z)|\le\frac{r}{(1-r)^2}\qquad (|z|=r<1).$$

برهان. بنابر قضیه (۷.۲.۱) برای $|z|=r<1$ داریم $|f'(z)|\le\frac{1+r}{(1-r)^3}$. نقطه 0 را به z با یک خط مستقیم وصل کرده و روی این پاره خط انتگرال می‌گیریم:

$$|f(z)|\le\int_0^r|f'(z)|\mathrm{d}t\le\int_0^r\frac{1+t}{(1-t)^3}\mathrm{d}t=\frac{r}{(1-r)^2}$$

نامساوی $\frac{1}{4}\le\frac{r}{(1-r)^2}$ همواره برقرار است. حال اگر

$$|f(z)|\ge\frac{1}{4}\Longrightarrow\frac{r}{(1-r)^2}\le|f(z)|$$

و اگر $|f(z)|<\frac{1}{4}$ بنا بر قضیه (۵.۲.۱) مسیر c داخل دایره واحد، از 0 تا z موجود است که تصویر آن پاره‌خط مستقیم c_0، از صفر تا $f(z)$ را می‌پوشاند. در این صورت

$$|f(z)|=\int_{c_0}|\mathrm{d}w|=\int_c|f'(s)||\mathrm{d}s|$$

از طرفی بنا به قضیه (۷.۲.۱)

$$|f(z)|=\int_c|f'(s)||\mathrm{d}s|\ge\int_c|f'(s)|\mathrm{d}|s|\ge\frac{1-t}{(1+t)^3}\mathrm{d}t=\frac{r}{(1+r)^2}$$

لذا داریم:

$$\frac{1-r}{(1+r)^2}\le|f(z)|\le\frac{1+r}{(1-r)^2}$$

□

مثال ۱۰.۲.۱. برای تابع کوئب $k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=z+2z^2+\dots$ کران بالای قضیه (۹.۲.۱) در مورد این تابع در $z=r$ و کران پایین در $z=-r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۱۱.۲.۱. ***(لیتلوود)*** [۳] *اگر* $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ *متعلق به رده S باشد، آنگاه برای هر n،*

$$|a_n|\le \mathbf{e}n$$

.

[۳] Littlewood's

قضیه ۱۲.۲.۱. *اگر* $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ *متعلق به رده* S *باشد و ضرایب حقیقی داشته باشد، آنگاه برای هر* n *داریم:*

$$|a_n| \leq n$$

.

برهان. برای $z = r\mathbf{e}^{i\theta}$ که درآن $r < 1$، قرار می‌دهیم:

$$Imf(z) = \nu(r\mathbf{e}^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \sin k\theta$$

با ضرب طرفین رابطه بالا در $\sin n\theta$ و انتگرال یابی از صفر تا π داریم:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \nu(r\mathbf{e}^{i\theta}) \sin n\theta \mathrm{d}\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} a_n r^n \sin^2 n\theta \mathrm{d}\theta = a_n r^n \tag{۲.۱}$$

با توجه به رابطه

$$|\sin(n+1)\theta| = |\sin n\theta \cos = \cos n\theta \sin| \leq |\sin n\theta| + |\sin\theta|$$

و به روش استقرایی می‌توان نشان داد که

$$|\sin n\theta| \leq n|\sin\theta|$$

لذا از رابطه (۲.۱) نتیجه می‌شود که

$$|a_n r^n| \leq \frac{2n}{\pi}\int_0^{\pi} |\nu(r\mathbf{e}^{i\theta})| \sin\theta \mathrm{d}\theta \tag{۳.۱}$$

سپس نشان می‌دهیم: $(0 < r < 1, 0 < \theta < \pi), \nu(r\mathbf{e}^{i\theta}) \neq 0$

$$0 \neq f(r\mathbf{e}^{i\theta}) - f(r\mathbf{e}^{-i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n(\mathbf{e}^{in\theta} - \mathbf{e}^{-in\theta}) = 2i\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin n\theta = 2i\nu(r\mathbf{e}^{i\theta})$$

چون $\nu(r\mathbf{e}^{i\theta})$ نسبت به θ تابعی پیوسته است، باید در فاصله $0 \leq \theta \leq \pi$ علامت جبری ثابت داشته باشد، لذا

$$r = |a_1 r| = \left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \nu(r\mathbf{e}^{i\theta}) \sin\theta \mathrm{d}\theta\right| = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\nu(r\mathbf{e}^{i\theta})| \sin\theta \mathrm{d}\theta \tag{۴.۱}$$

با جایگذاری رابطه (۴.۱) در (۳.۱) رابطه $|a_n r^n| \leq nr$ به‌دست می‌آید و با $r \to 1$ قضیه ثابت می‌شود. □

۱.۳ رده S^*

تعریف ۱.۳.۱. میدان D را نسبت به $z_\circ$ ستاره‌گون [۴] گوییم، هرگاه پاره خط مستقیمی که هر نقطه از D را به $z_\circ$ وصل می‌کند، در D قرار بگیرد.

تابع $f(z) \in S$ را نسبت به مبدأ ستاره‌گون گویند، هرگاه قرص $|z| < ۱$ تحت تابع $f(z)$ بر میدانی نگاشته شود که نسبت به $w = \circ$ ستاره‌گون است. این زیر رده S را با S^* نشان می‌دهیم.

لم ۲.۳.۱. *فرض کنید $f(z) \in S$ در این صورت $f(z) \in S^*$ اگر و فقط اگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < ۱$ را بر میدان ستاره‌گون بنگارد.*

برهان. ابتدا فرض کنید $f(z) \in S^*$ و D تصویر $|z| < ۱$ و D_r تصویر $|z| < r < ۱$ در تابع $f(z)$ باشد. اگر $w \in D$ آنگاه برای $tw \in D, \circ < t < ۱$ (چون D ستاره‌گون می‌باشد.) لذا تابع $g(z) = f^{-۱}(tf(z))$ در $|z| < ۱$ تحلیلی است و در آن‌جا در نامساوی $|g(z)| < ۱$ صدق می‌کند. چون $g(\circ) = f^{-۱}(tf(\circ))$، با توجه به لم شوارتز $|g(z)| \le |z|$.

اکنون نقطه $w_۱ \in D_r$ را انتخاب می‌کنیم، در این صورت برای نقطه $z_۱$ ای با $|z_۱| < ۱$، برای t دلخواه $\circ \le t \le ۱$ داریم:

$$|f^{-۱}(tw_۱)| = |f^{-۱}(tf(z_۱))| = |g(z_۱)| \le |z_۱| < r$$

و این بدان معنا است که $tw_۱$ در D_r قرار دارد. چون این مطلب برای همه $w_۱$ ها در D_r و همه t ها $\circ \le t \le ۱$، درست است، میدان D_r نسبت به $w = \circ$ ستاره‌گون است.

به عکس: اگر $f(z)$ در رده S^* قرار نداشته باشد، آنگاه نقطه $w_\circ \in D$ موجود است به‌طوری که برای $t_\circ$ ای $(\circ < t_\circ < ۱)$, $t_\circ w_\circ$ متعلق به D نمی‌باشد.

اکنون قرص $|z| < r < ۱$ را انتخاب می‌کنیم، به‌طوری که تصویرش D_r شامل نقطه $w_\circ$ باشد. چون $D_r \subset D$، نقطه $t_\circ w_\circ$ متعلق به D_r نیست. پس $f(z)$، $|z| < r < ۱$ را بر میدان ستاره‌گون نمی‌نگارد.

□

قضیه ۳.۳.۱. *فرض کنید $f \in S$، در این صورت $f \in S^*$ اگر و فقط اگر*

$$Re\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\} > \circ.$$

برهان. با توجه به لم (۲.۳.۱)، $f \in S^*$، اگر و فقط اگر تصویر D_r از $|z| < r < ۱$، یک میدان ستاره‌گون باشد.

به بیان معادل، برای هر $\theta, (\circ \le \theta \le ۲\pi)$ بردار شعاعی از $w = \circ$ تا $w = f(r\mathrm{e}^{i\theta})$، باید در D_r باشد. و این بدان معنا است که $argf(r\mathrm{e}^{i\theta})$ تابعی نسبت به θ صعودی اکید است، زیرا در غیر این صورت بردار شعاعی، می‌بایست مرز D_r را، حداقل در دو نقطه قطع کند.

---

[۴] Starlike

پس یک تابع در S^* با شرط $\frac{\partial}{\partial\theta}argf(r\mathbf{e}^{i\theta}) > ۰$ مشخص گردد. ولی $argf(r\mathbf{e}^{i\theta}) = Im\log f(r\mathbf{e}^{i\theta})$، بنابراین

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\{Im\log f(r\mathbf{e}^{i\theta})\} = Im\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(r\mathbf{e}^{i\theta})\} = Im\{i\frac{(r\mathbf{e}^{i\theta})f'(r\mathbf{e}^{i\theta})}{f(r\mathbf{e}^{i\theta})}\} = Re\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\} > ۰$$

□

مثال ۴.۳.۱. تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(۱-z)^۲} = z + ۲z^۲ + \ldots$ در رده S^* قرار دارد، زیرا تصویر $|z| < ۱$ صفحه w است که در امتداد پرتو $\frac{-۱}{۴}$ تا $-\infty$ بریده شده است و همچنین

$$Re\{\frac{zk'(z)}{k(z)}\} = Re\{\frac{۱+z}{۱-z}\} > ۰$$

.

قضیه ۵.۳.۱. *اگر $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$ متعلق به رده S^* باشد، آنگاه برای هر n داریم*

$$|a_n| \leq n$$

.

برهان. چون برای $۰ < |z| < ۱$، $f(z) \neq ۰$، تابع

$$p(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} na_n z^{n-۱}}{۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^{n-۱}} \tag{۵.۱}$$

در $|z| < ۱$ تحلیلی است، می‌توان آن‌را به صورت زیر نوشت:

$$p(z) = ۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} \alpha_n z^n \tag{۶.۱}$$

از طرفی برای $|z| < ۱, f \in s^*$ داریم $Re\{p(z)\} > ۰$ بنا به قضیه (۳.۲.۱) می‌دانیم

$$|\alpha_n| \leq ۲ \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots \tag{۷.۱}$$

از

(۵.۱) و (۶.۱) داریم:

$$۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} na_n z^{n-۱} = (۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^{n-۱})(۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} \alpha_n z^n)$$

با برابرقرار دادن ضرایب، به رابطه زیر می‌رسیم:

$$ka_k = a_k + a_{k-۱}\alpha_۱ + a_{k-۲}\alpha_۲ + \cdots + a_۲\alpha_{k-۲} + \alpha_{k-۱}$$

و یا به‌صورت معادل

$$(k-۱)a_k = a_{k-۱}\alpha_۱ + a_{k-۲}\alpha_۲ + \cdots + a_۲\alpha_{k-۲} + \alpha_{k-۱} \qquad (k=۲,۳,\dots) \qquad (۸.۱)$$

با استفاده از کران (۷.۱) می‌توان نامساوی مثلث را در (۸.۱) به‌کار برد. لذا

$$(k-۱)|a_k| \leq ۲|a_{k-۱}| + |a_{k-۲}| + \cdots + |a_۲| + ۱ \qquad (۹.۱)$$

از رابطه بالا در می‌یابیم $|a_۲| \leq ۲$. سپس فرض کنید برای $|a_k| \leq k, k=۲,۳,\dots,n-۱$. در این صورت

$$(n-۱)|a_n| \leq ۲[(n-۱)+(n-۲)+\cdots+۲+۱] = \frac{۲n(n-۱)}{۲}$$

و این به $|a_n| \leq n$ برمی‌گردد. لذا به استقرا، قضیه برای هر n درست است.

□

تعریف ۶.۳.۱. تابع $f(z) \in S$ ستاره‌گون از مرتبه $\alpha(۰ \leq \alpha < ۱)$ نامیده می‌شود، هرگاه

$$Re\{\frac{zf'}{f} > \alpha\} \qquad (|z| < ۱)$$

این زیر رده S را با $S^*(\alpha)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۷.۳.۱. فرض‌کنید $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$ ، $(۰ \leq \alpha < ۱)$. اگر

$$\sum_{n=۲}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \leq ۱-\alpha$$

آنگاه $f(z) \in S^*(\alpha)$.

برهان. بنا به تعریف (۶.۳.۱) کافی است نشان دهیم $z\frac{f'(z)}{f(z)}$ در یک دایره به شعاع $۱-\alpha$ و مرکز ۱ قرار دارد. داریم:

$$\left|z\frac{f'}{f}-۱\right| = \left|\frac{zf'-f}{f}\right| = \left|\frac{\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)|a_n|z^n}{z+\sum_{n=۲}^{\infty}a_nz^n}\right| \leq \frac{\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)|a_n||z|^{n-۱}}{۱-\sum_{n=۲}^{\infty}|a_n||z|^{n-۱}} \leq \frac{\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)|a_n|}{۱-\sum_{n=۲}^{\infty}|a_n|}$$

بیان قبلی دارای کران بالای $۱-\alpha$ است. اگر

$$\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)|a_n| \leq (۱-\alpha)(۱-\sum_{n=۲}^{\infty}|a_n|)$$

که معادل است با

$$\sum_{n=۲}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \leq ۱-\alpha.$$

بنا به فرض این رابطه برقرار است. بنابراین، $\left|z\frac{f'}{f}-۱\right| \leq ۱-\alpha$.

□

۴.۱ رده C

تعریف ۱.۴.۱. میدان D را محدب [۵] گویند، هرگاه پاره خط مستقیمی که هر دو نقطه از D را به هم وصل می‌کند، در D قرار بگیرد.

تعریف ۲.۴.۱. تابع $f(z) \in S$ را محدب گویند، هرگاه قرص $|z| < ۱$ با $f(z)$ بر یک میدان محدب نگاشته شود. این زیر رده S را با C نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۴.۱. *فرض کنید $f(z) \in S$، در این صورت $f(z) \in C$ اگر و فقط اگر $f(z)$، هر قرص $|z| < r < ۱$ را بر میدان محدب تصویر کند.*

برهان. ابتدا فرض کنید $f(z) \in C$ و D تصویر $|z| < ۱$ و D_r تصویر $|z| < r < ۱$ تحت $f(z)$ باشد. نقاط $w_۱$ و $w_۲$ را در D_r انتخاب می‌کنیم. باید نشان دهیم که پاره خط $tw_۱+(۱-t)w_۲$ $(۰ < t < ۱)$، هم در D_r قرار دارد.

باید نقاط $z_۱$ و $z_۲$ در قرص $|z| < ۱$ موجود باشند که $w_۱ = f(z_۱)$ و $w_۲ = f(z_۲)$. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید $|z_۲| \leq |z_۱|$، آنگاه تصویر $|z| < ۱$ تحت تابع $g(z) = tf((\frac{z_۱}{z_۲})z)+(۱-t)f(z)$ در D واقع است. لذا تابع $h(z) = f^{-۱}(g(z))$ در $|z| < ۱$ تحلیلی است. و چون $f(z) \in S$، در شرایط $h(۰) = ۰$ و $|h(z)| < ۱$ صدق می‌کند و طبق لم شوارتز $|h(z)| \leq |z|$.

به‌ویژه

$$|h(z_۲)| = |f^{-۱}(tw_۱ + (۱ - t)w_۲)| \leq |z_۲| < r. \qquad (۱۰.۱)$$

چون $D_r \subset D$، نقطه $z_۰$ ای در قرص $|z| < ۱$ موجود است که $f(z_۰) = (tw_۱ + (۱ - t)w_۲)$، ولی بنابر (۱۰.۱) نقطه $z_۰ = f^{-۱}(f(z_۰))$ نیز باید در قرص $|z| < ۱$ باشد. پس هر نقطه بر پاره خط $(tw_۱ + (۱ - t)w_۲)$ در D_r قرار دارد.

برعکس: اگر $f(z)$ در رده C نباشد، آنگاه دو نقطه در D وجود دارد که پاره خط مار بر این دو نقطه، در D قرار ندارد. اکنون قرصی مانند $|z| < r < ۱$ انتخاب می‌کنیم که تصویرش D_r شامل این دو نقطه باشد.

چون $D_r \subset D$، پاره خطی که دو نقطه را به هم وصل می‌کند، نمی‌تواند در D_r قرار داشته باشد، لذا $f(z)$ قرص $|z| < r < ۱$ را بر یک میدان محدب، تصویر نمی‌کند.

□

قضیه ۴.۴.۱. *فرض کنید $f(z)$ در $|z| < ۱$ تحلیلی باشد و $f(۰) = ۰, f'(۰) = ۱$، در این صورت $f(z) \in C$ اگر و فقط اگر*

$$Re\{۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\} > ۰ \qquad (|z| < ۱).$$

[۵] Convex

برهان. بنا به قضیه (۳.۴.۱) $f(z) \in C$ اگر و فقط اگر تصویر D_r از $|z| < r < ۱$ یک میدان محدب باشد. از نظر هندسی این بدان معنا است که تابع $w = f(re^{i\theta})$، دایره $|z| = r < ۱$ را بر یک مرز ساده بسته، می‌نگارد و مماس بر این مرز، با افزایش θ، در جهت خلاف عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند. می‌دانیم زاویه‌ای که خط مماس، در صفحه w با محور حقیقی می‌سازد برابر است با:

$$\frac{\pi}{۲} + \theta + arg f'(z)$$

لذا تابع محدب با شرط زیر مشخص می‌شود:

$$۱ + \frac{\partial}{\partial\theta}(Im \log f'(r\mathbf{e}^{i\theta})) = ۱ + Im\{ir\mathbf{e}^{i\theta}\frac{f''(r\mathbf{e}^{i\theta})}{f'(r\mathbf{e}^{i\theta})}\} = Re\{۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\} > ۰.$$

□

قضیه ۵.۴.۱. ***(الکساندر)*** [۶] *فرض کنید f یک تابع تحلیلی در D، با دو شرط $f(۰) = ۰, f'(۰) = ۱$ باشد. در این صورت $f(z) \in C$ اگر و فقط اگر $zf'(z) \in S^*$.*

برهان. اگر $g(z) = zf'(z)$، در این صورت:

$$\{\frac{zg'(z)}{g(z)}\} = \{۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\} > ۰$$

لذا تابع سمت چپ در D، تحلیلی و مثبت است اگر و فقط اگر تابع سمت راست نیز چنین باشد. □

قضیه ۶.۴.۱. *فرض کنید $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$ در C باشد، در این صورت برای هر n،*

$$|a_n| \leq ۱$$

.

برهان. با توجه به قضیه (۵.۴.۱)، تابع $zf'(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} na_n z^n$ در S^* قرار دارد. لذا بنا بر قضیه (۵.۳.۱)، برای هر n،

$$n|a_n| \leq n \Longrightarrow |a_n| \leq ۱.$$

□

قضیه ۷.۴.۱. *اگر $f(z) \in C$ و برای $|z| < ۱$، $f(z) \neq c$، در این صورت $|c| \geq \frac{۱}{۲}$.*

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم تابع کمکی $g(z) = (c - f(z))^۲$ در $|z| < ۱$ تک ارز است. دو نقطه متمایز $z_۰$ و $z_۱$، در قرص واحد انتخاب می‌کنیم.

---
[۶] Alexander

در این صورت

$$g(z_0) - g(z_1) = (c - f(z_0))^2 - (c - f(z_1))^2 = (f(z_0) - f(z_1))(f(z_0) + f(z_1) - 2c)$$

اکنون $f(z_0) \neq f(z_1)$، زیرا $f(z)$ تک ارز می‌باشد. همچنین چون $f(z)$ محدب است، نقطه $\frac{1}{2}(f(z_0) + f(z_1))$ به تصویر $|z| < 1$ تعلق دارد، لذا نمی‌تواند مساوی c باشد. پس $0 \neq (f(z_0)+f(z_1)-2c)$ و تک ارزی $g(z)$ ثابت می‌شود. چون $g(z) = c^2 - 2cz + z^2 + \dots$ تابع نرمال زیر در S است،

$$h(z) = \frac{g(z) - c^2}{-2c} = z + (\frac{-z^2}{2c}) + \dots$$

به‌علاوه در $|z| < 1$، $h(z) \neq \frac{c}{2}$. زیرا $g(z)$ در آنجا صفر نیست. با به‌کار بردن قضیه پوششی در می‌یابیم:

$$|\frac{c}{2}| \geq \frac{1}{4}$$

یا

$$|c| \geq \frac{1}{2}.$$

□

قضیه ۸.۴.۱. *اگر $f(z) \in C$، آنگاه برای $|z| < r = 1$، داریم:*

$$\frac{1}{(1+r)^2} \in |f'(z)| \in \frac{1}{(1-r)^2}.$$

برهان. می‌دانیم تابع $w = \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}$، $(|z_0| < 1)$ تحلیلی، یک به یک و پوشا است و قرص واحد را بر خودش می‌نگارد. لذا تابع $g(z) = f(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2$ نیز به‌ازای $(|z| < 1)$ تحلیلی و تک ارز است. داریم:

$$g(0) = b_0 = f(z_0)$$

$$b_1 = g'(0) = f'(z)(1 - |z_0|^2)$$

$$b_2 = \frac{g''(0)}{2} = \frac{1}{2}(f''(z_0)(1 - |z_0|^2)^2 - 2f'(z_0)\bar{z}_0(1 - |z_0|^2))$$

چون $g(s)$ نرمالیزه نیست، پس $g(z)$، به رده S تعلق ندارد. با توجه به اینکه تابع $\frac{g(z)-g(0)}{g'(z)} = z + \frac{b_2}{b_1}z^2 + \dots$ در S قرار می‌گیرد، لذا در C نیز وجود دارد. پس بنابر قضیه (۶.۴.۱)، $|\frac{b_2}{b_1}| \leq 1$ یعنی

$$\frac{1}{2}\left|\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}(1 - |z_0|^2) - 2\bar{z}_0\right| \leq 1$$

با قرار دادن $z_\circ = r\mathrm{e}^{i\alpha}$ وضرب طرفین در $\frac{۲|z_\circ|}{۱-|z_\circ|^۲}$ داریم:

$$\left|\frac{z_\circ f''(z_\circ)}{f'(z_\circ)} - \frac{۲|z_\circ|^۲}{۱-|z_\circ|^۲}\right| \leq \frac{۲|z_\circ|}{۱-|z_\circ|^۲}$$

حال چون $z_\circ$ دلخواه است، قرار می‌دهیم:

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{۲r^۲}{۱-r^۲}\right| \leq \frac{۲r}{۱-r^۲}$$

$$\Longrightarrow \frac{۲r^۲-۲r}{۱-r^۲} \leq \frac{zf''(z)}{f'(z)} \leq \frac{۲r^۲+۲r}{۱-r^۲}$$

$$\Longrightarrow \frac{-۲r}{۱+r} \leq r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)| \leq \frac{۲r}{۱-r^۲}$$

حال از طرفین نامساوی از $\circ$ تا r انتگرال می‌گیریم:

$$-۲\log(۱+r) \leq \log|f'(z)| \leq -۲\log(۱-r)$$

در نتیجه

$$\frac{۱}{(۱+r)^۲} \leq |f'(z)| \leq \frac{۱}{(۱-r)^۲}.$$

□

قضیه ۹.۴.۱. *اگر $f(z) \in C$، آنگاه برای $|z| = r < ۱$،*

$$\frac{r}{(۱+r)} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(۱-r)}.$$

برهان. بنابر قضیه (۸.۴.۱)، برای $|z| = r < ۱$، داریم $|f'(z)| \leq \frac{۱}{(۱-r)^۲}$. نقطه $\circ$ را به z، با یک خط مستقیم، وصل کرده و روی این پاره خط انتگرال می‌گیریم:

$$|f(z)| = \int_\circ^r |f'(z)|\mathrm{d}z \leq \int_\circ^r \frac{۱}{(۱-t)^۲}\mathrm{d}t = \frac{r}{(۱-r)}$$

نامساوی $\frac{r}{(۱+r)} \leq \frac{۱}{۲}$ همواره برقرار است. حال اگر

$$|f(z)| \geq \frac{۱}{۲} \Longrightarrow \frac{r}{(۱+r)} \leq |f(z)|$$

و اگر $|f(z)| < \frac{۱}{۲}$ بنا بر قضیه (۷.۴.۱)، مسیر c داخل دایره واحد، از $\circ$ تا z موجود است، که تصویر آن پاره‌خط مستقیم $c_\circ$ از صفر تا $f(z)$ را می‌پوشاند. در این صورت

$$|f(z)| = \int_{c_\circ} |\mathrm{d}w| = \int_c |f'(s)||\mathrm{d}s|$$

از طرفی بنا به قضیه قبل

$$|f(z)| = \int_c |f'(s)||\mathrm{d}s| \geq \int_c |f'(s)|\mathrm{d}|s| \geq \frac{۱}{(۱+t)^{۲}}\mathrm{d}t = \frac{r}{(۱+r)}$$

لذا داریم:

$$\frac{r}{(۱+r)} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(۱-r)}$$

□

فصل ۲

دترمینان هنکل دوم برای زیر رده هایی از توابع تحلیلی

۱.۲ رده $S^*(\alpha,\beta)$ و $C(\alpha,\beta)$

تعریف ۱.۱.۲. S، رده همه توابع

$$f(z)=z+\sum_{n=۲}^{\infty}a_nz^n, \tag{۱.۲}$$

است که در دیسک واحد $E=\{z:|z|<۱\}$ تک ارز و تحلیلی اند.

تعریف ۲.۱.۲. دنباله اعداد مختلط $a_n,a_{n+۱},a_{n+۲},\dots$، را در نظر بگیرید. ماتریس نامتناهی‌ای که درایه i,j امش، a_{ij} است و به‌وسیله $(i,j,n\in N)a_{ij}=a_{n+i+j-۲}$ مشخص می‌شود را ماتریس هنکل می‌نامیم. این ماتریس از روی نام هرمان هنکل [۱] نامگذاری شده است. ماتریس هنکل q ام، به‌وسیله زیر ماتریس مربعی زیر تعریف شده است:

$$\begin{bmatrix} a_n & a_{n+۱} & \cdots & a_{n+q-۱}\\ a_{n+۱} & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n+q-۱} & \cdots & \cdots & a_{n+۲q-۲}\end{bmatrix}$$

درایه‌های ماتریس هنکل، در شرط زیر صدق می‌کنند:

$$a_{ij}=a_{i-۱,j+۱}(i\in N-۱,j\in N).$$

[۱] Herman Hankel

دترمینان ماتریس هنکل q ام، به‌وسیله دترمینان زیر، که دترمینان هنکل q ام نامیده می‌شود، مشخص می‌شود.

$$H_q(n) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+q-1} \\ a_{n+1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+q-1} & \cdots & \cdots & a_{n+2q-2} \end{vmatrix}.$$

در حالت‌های خاص ($q = 2$، $n = 1$، $a_1 = 1$)، ($q = 2, n = 2$) دترمینان هنکل به‌طور مثال : $H_2(1) = \left|a_3 - a_2^2\right|$، $H_2(2) = \left|a_2a_4 - a_3^2\right|$ است. $H_2(2)$ را دترمینان هنکل دوم می‌نامیم.

در این بخش ما دترمینان هنکل دوم را برای $q = 2$، $n = 2$ و

$$H_2(2) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

بررسی می‌کنیم و یک کران بالا برای $\left|a_2a_4 - a_3^2\right|$ برای توابع متعلق به رده $S^*(\alpha,\beta)$ و $C(\alpha,\beta)$، به‌دست می‌آوریم که مانند زیر تعریف شده‌اند.

تعریف ۳.۱.۲. تابع $f(z)$ را طبق معادله (۱.۲) در نظر بگیرید. $f(z) \in S^*(\alpha,\beta)$، اگر برای $\beta(0 \leq \beta < 1)$ و $\alpha \geq 0$ و $z \in E$، رابطه زیر برقرار باشد.

$$Re\{\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha\frac{z^2f''(z)}{f(z)}\} > \beta.$$

ملاحظه ۴.۱.۲. *اگر در تعریف بالا $\alpha = 0$، را قرار بدهیم، داریم*

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \beta,$$

یعنی رده $S^*(\beta)$، ، توابع ستاره‌گون از مرتبه β به‌دست می‌آید.

ملاحظه ۵.۱.۲. *زمانی‌که $\alpha = 0$ و $\beta = 0$، رده S^* یعنی توابع ستاره‌گون را به‌دست می‌آوریم.*

تعریف ۶.۱.۲. تابع $f(z)$، را طبق رابطه (۱.۲) در نظر بگیرید. $f(z) \in C(\alpha,\beta)$، اگر برای $\beta(0 \leqslant \beta < 1)$، $\alpha \geqslant 0$ و $z \in E$، رابطه زیر برقرار باشد.

$$Re\left\{\frac{[zf'(z) + \alpha z^2f''(z)]'}{f'(z)}\right\} > \beta.$$

ملاحظه ۷.۱.۲. *اگر در تعریف بالا $\alpha = 0$ را قرار بدهیم، داریم*

$$Re\left\{\frac{1 + zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \beta,$$

یعنی رده $C(0,\beta)$، ، رده توابع محدب مرتبه β، را به‌دست بیاوریم.

ملاحظه ۸.۱.۲. *زمانی‌که $\alpha=0$ و $\beta=0$ رده C، را که رده توابع محدب است، به‌دست می‌آوریم.*

تعریف ۹.۱.۲. رده همه توابع

$$p(z)=1+c_1z+c_2z^2+\dots \tag{۲.۲}$$

که در دیسک واحد E تحلیلی‌اند و برای $z\in E$، $Re\{p(z)\}>0$، را با نماد P نشان می‌دهیم.

برای اثبات قضایا، به لم های زیر نیاز داریم.

لم ۱۰.۱.۲. *[۲] اگر $p(z)\in P$، آنگاه برای هر $k\in N$، $|c_k|\leqslant 2$.*

لم ۱۱.۱.۲. *([۶]،[۷]) فرض کنید $p(z)\in P$، آنگاه*

$$2c_2=c_1^2+x(4-c_1^2) \tag{۳.۲}$$

و

$$4c_3=c_1^3+2(4-c_1^2)c_1x-c_1(4-c_1^2)x^2+2(4-c_1^2)(1-|x|^2)y, \tag{۴.۲}$$

برای مقادیر x و y که $|x|\leq 1$ و $|y|\leq 1$.

قضیه ۱۲.۱.۲. *[۴] فرض کنید $f(z)\in S^*$، آنگاه*

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\leq 1.$$

قضیه ۱۳.۱.۲. *[۴] فرض کنید $f(z)\in C$، آنگاه:*

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\leq \frac{1}{8}.$$

قضیه ۱۴.۱.۲. *فرض کنید $f(z)\in S^*(\alpha,\beta)$، آنگاه:*

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\leq \frac{(1-\beta)^2}{(1+3\alpha)^2}.$$

برهان. فرض کنید $f(z)\in S^*(\alpha,\beta)$، آنگاه برای $z\in E$، $p(z)\in P$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$zf'(z)+\alpha z^2f''(z)=f(z)[(1-\beta)p(z)+\beta] \tag{۵.۲}$$

با برابر قرار دادن ضرایب در (۵.۲)، a_2، a_3، a_4 را به‌دست می‌آوریم.

$$p(z)=1+c_1z+c_2z^2+c_3z^3+c_4z^4+\dots$$
$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+\dots$$
$$f'(z)=1+2a_2z+3a_3z^2+4a_4z^3+\dots$$
$$f''(z)=2a_2+6a_3z+12a_4z^2+\dots$$

$$zf'(z) = z + 2a_2z^2 + 3a_3z^3 + \dots$$
$$\alpha z^2 f''(z) = 2\alpha a_2 z^2 + 6\alpha a_3 z^3 + 12\alpha a_4 z^4 + \dots$$

$$zf'(z) + \alpha z^2 f''(z) = (2a_2\alpha + 2a_2)z^2 + (3a_3 + 6a_3\alpha)z^3 + (4a_4 + 12a_4)z^4$$

$$\begin{aligned} f(z)[(1-\beta)p(z) + \beta] = 1 &+ (a_2 + c_1 - \beta c_1)z^2 \\ &+ (c_2 + a_2c_1 + a_3 + \beta c_2 - a_2c_1\beta)z^3 \\ &(c_3 + a_2c_2 + a_3c_1 + a_4 - \beta c_3 - a_2c_2\beta - \beta a_3c_1)z^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(2a_2\alpha + 2a_2)z^2 + (3a_3 + 6a_3\alpha)z^3 + (4a_4 + 12a_4)z^4 = \\ &1 + (a_2 + c_1 - \beta c_1)z^2 \\ &+ (c_2 + a_2c_1 + a_3 + \beta c_2 - a_2c_1\beta)z^3 \\ &+ (c_3 + a_2c_2 + a_3c_1 + a_4 - \beta c_3 - a_2c_2\beta - \beta a_3c_1)z^4 \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{c_1(1-\beta)}{1+2\alpha}, \\ a_3 &= \frac{c_2(1-\beta)}{2(1+3\alpha)} + \frac{c_1^2(1-\beta)^2}{2(1+2\alpha)(1+3\alpha)}, \\ a_4 &= \frac{c_3(1-\beta)}{3(1+4\alpha)} + \frac{c_1c_2(1-\beta)^2(3+8\alpha)}{6(1+2\alpha)(1+3\alpha)(1+4\alpha)} + \frac{c_1^3(1-\beta)^3}{6(1+2\alpha)(1+3\alpha)(1+4\alpha)} \end{aligned} \tag{۲.۶}$$

به آسانی ثابت می‌شود که:

$$\begin{aligned} |a_2a_4 - a_3^2| = \Bigg| &\frac{c_1c_3(1-\beta)^2}{3(1+2\alpha)(1+4\alpha)} - \frac{c_2^2(1-\beta)^2}{4(1+3\alpha)^2} \\ &- \frac{c_1^4(1-\beta)^4(1+6\alpha)}{12(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)} \\ &- \frac{\alpha c_1^2 c_2(1-\beta)^3}{6(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)} \Bigg|. \end{aligned} \tag{۲.۷}$$

طبق لم (۱۰.۱.۲) چون $|c_1| \leq 2$، c_2 و c_3 را از معادلات (۳.۲) و (۴.۲)، در (۷.۲) جاگذاری می‌کنیم. فرض کنید $c_1 = c$ و بدون کاستن از کلیت، فرض کنید $c \in [0,2]$. در نتیجه عبارت زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}|a_2a_4 - a_3^2| = \Bigg| &\frac{(1-\beta)^2[c^4 + 2(4-c^2)c^2x - (4-c^2)c^2x^2 + 2c(4-c^2)(1-|x|^2)y]}{12(1+2\alpha)(1+4\alpha)}\\ &- \frac{(1-\beta)^2[c^4 + (4-c^2)^2x^2 + 2c^2x(4-c^2)]}{16(1+3\alpha)^2}\\ &- \frac{(1-\beta)^4[c^4(1+6\alpha)]}{12(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)}\\ &- \frac{(1-\beta)^3\alpha[c^4 + (4-c^2)xc^2]}{12(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)}\Bigg|. \end{aligned} \tag{8.2}$$

توسط نامساوی مثلث داریم:

$$\begin{aligned}|a_2a_4 - a_3^2| \leq &\frac{(1-\beta)^2[c^4 + 2(4-c^2)c^2\rho + 2c(4-c^2) + c(c-2)(4-c^2)\rho^2]}{12(1+2\alpha)(1+4\alpha)}\\ &+ \frac{(1-\beta)^2[c^4 + (4-c^2)^2\rho^2 + 2c\rho(4-c^2)]}{16(1+3\alpha)^2}\\ &+ \frac{(1-\beta)^4c^4(6\alpha+1)}{12(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)}\\ &+ \frac{(1-\beta)^3\alpha[c^4 + c^2\rho(4-c^2)]}{12(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)} = F(\rho),\end{aligned}$$

که $\rho = |x| \leq 1$. بنابراین

$$\begin{aligned}F'(\rho) = &\frac{(1-\beta)^2[2c^2(4-c^2) + 2c\rho(c-2)(4-c^2)]}{12(1+2\alpha)(1+4\alpha)}\\ &+ \frac{(1-\beta)^2[2(4-c^2)^2\rho + 2c(4-c^2)]}{16(1+3\alpha)^2}\\ &+ \frac{(1-\beta)^3\alpha c^2(4-c^2)}{12(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)}.\end{aligned}$$

با محاسبات مقدماتی می‌توانیم نشان دهیم که $F'(\rho) > 0$ و $\rho > 0$. این نشان می‌دهد که F یک تابع صعودی است. بنابراین اگر $\rho = 1$، $c = 0$ باشد، کران بالا برای عبارت (۸.۲)، به‌صورت معادله زیر است.

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \frac{(1-\beta)^2}{(1+3\alpha)^2}.$$

اگر در معادله (۴.۲)، $c_1 = c = 0$ و ۱، $|x| = \rho = 1$ قرار دهیم، آنگاه: $c_3 = 0$.

اگر $p(z) \in P$ به‌ازای $c_1 = 0, c_2 = 2, c_3 = 0$ آنگاه داریم:

$$p(z) = \frac{1 + z^2}{1 - z^2} = 1 + 2z^2 + 2z^4 + \dots \in P. \qquad (9.2)$$

اگر در عبارت (۷.۲) مقادیر $c_1 = 0, c_2 = 2, c_3 = 0$ را جاگذاری کنیم، نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود.

□

قضیه ۱۵.۱.۲. *فرض‌کنید $f(z) \in C(\alpha, \beta)$، آنگاه:*

$$|a_2 a_4 - a_3^2| \leq \frac{1}{144} \left| \frac{M}{(1 + 2\alpha)^2 (1 + 3\alpha)^2 (1 + 4\alpha)} \right|, \qquad (10.2)$$

به‌طوری‌که

$$M = (1 - \beta)^2 (280\alpha^3 + 332\alpha^2 + 128\alpha + 16) + (1 - \beta)^4 (1 + 7\alpha)$$
$$+ (1 - \beta)^3 (8\alpha^2 + 3\alpha + 1).$$

برهان. فرض‌کنید $f(z) \in C(\alpha, \beta)$، آنگاه برای $z \in E$، $p(z) \in P$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$f'(z) + zf''(z) + \alpha z^2 f'''(z) + 2\alpha z f''(z) = f'(z)[(1 - \beta)p(z) + \beta]. \qquad (11.2)$$

با برابر قرار دادن ضرایب در (۱۱.۲)، a_2, a_3, a_4 را به‌دست می‌آوریم.

$$zf''(z) = 2a_2 z + 6a_3 z^2 + 12a_4 z^3 + \dots$$
$$\alpha z^2 f'''(z) = 6\alpha a_3 z^2 + 24a_4 \alpha z^3 + \dots$$
$$2\alpha z f''(z) = 4\alpha a_2 z + 12\alpha a_3 z^2 + 24\alpha a_4 z^3 + \dots$$

$$f'(z)[(1 - \beta)p(z) + \beta] = 1 + 2a_2 z + (6a_3 + 2a_2 c_1 (1 - \beta))z^2$$
$$+ (8a_4 + (2a_2 c_2 + 3a_3 c_1)(1 - \beta)z^3$$
$$(2a_2 a_3 + 3a_3 c_2 + 4a_4 c_1)(1 - \beta)z^4$$

اکنون با برابر قرار دادن ضرایب معادله (۱۱.۲) داریم

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{c_1(1-\beta)}{2(1+2\alpha)},\\ a_3 &= \frac{c_1^2(1-\beta)^2}{6(1+2\alpha)(1+3\alpha)}+\frac{c_2(1-\beta)}{6(1+3\alpha)},\\ a_4 &= \frac{c_1^3(1-\beta)^3}{24(1+2\alpha)(1+3\alpha)(1+4\alpha)}\\ &\quad+\frac{c_1c_2(1-\beta)^2(3+8\alpha)}{24(1+2\alpha)(1+3\alpha)(1+4\alpha)}+\frac{c_3(1-\beta)}{12(1+4\alpha)} \end{aligned} \tag{۱۲.۲}$$

از (۱۲.۲)، عبارت زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$|a_2a_4-a_3^2| = \frac{1}{144}\left|\frac{6c_1c_3(1-\beta)^2}{(1+2\alpha)(1+4\alpha)}-\frac{4c_2^2(1-\beta)^2}{(1+3\alpha)^2}\right. \tag{۱۳.۲}$$

$$-\frac{c_1^4(1-\beta)^4(1+7\alpha)}{(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)} \tag{۱۴.۲}$$

$$\left.+\frac{c_1^2c_2(1-\beta)^3(8\alpha^2+3\alpha+1)}{(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)}\right| \tag{۱۵.۲}$$

حال فرض کنید $c_1=c(0\le c\le 2)$ و با استفاده از (۳.۲) و (۴.۲)، c_2 و c_3 را در عبارت زیر جاگذاری می‌کنیم.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{144}\left|\frac{(1-\beta)^2[6c^4+12c(4-c^2)cx-6c^2(4-c^2)x^2+12c(4-c^2)(1-|x|^2)y]}{4(1+2\alpha)(1+4\alpha)}\right.\\ &-\frac{(1-\beta)^2[c^2+x(4-c^2)]^2}{(1+3\alpha)^2}-\frac{(1-\beta)^4c^4(1+7\alpha)}{(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)}\\ &\left.+\frac{(1-\beta)^3c^2[c^2+x(4-c^2)](8\alpha^2+3\alpha+1)}{2(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)}\right|. \end{aligned}$$

با به‌کار بردن نامساوی مثلث داریم:

$$\begin{aligned} &\le \frac{(1-\beta)^2[6c^4+12c^2\rho(4-c^2)+6c(c-2)\rho^2(4-c^2)+12c(4-c^2)]}{4(1+2\alpha)(1+4\alpha)}\\ &+\frac{(1-\beta)^2[c^4+\rho^2(4-c^2)^2+2c^2\rho(4-c^2)]}{(1+3\alpha)^2}\\ &+\frac{(1-\beta)^4c^4(1+7\alpha)}{(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)}\\ &+\frac{(1-\beta)^3[c^4+c^2\rho(4-c^2)](8\alpha^2+3\alpha+1)}{2(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)}=F(\rho), \end{aligned}$$

که $\rho = |x| \leq ۱$. بنابراین

$$F'(\rho) = \frac{(۱-\beta)^۲ ۳[c^۲(۴-c^۲) + c(c-۲)(۴-c^۲)]}{(۱+۲\alpha)(۱+۴\alpha)} + \frac{(۱-\beta)^۳ c^۲(۴-c^۲)(۸\alpha^۲+۳\alpha+۱)}{۲(۱+۲\alpha)^۲(۱+۳\alpha)^۲(۱+۴\alpha)} + \frac{(۱-\beta)^۲[۲\rho(۴-c^۲)^۲ + ۲c^۲(۴-c^۲)]}{(۱+۳\alpha)^۲}.$$

با محاسبات مقدماتی، نشان‌می‌دهیم که برای $\rho > ۰$، $F'(\rho) > ۰$. این نشان می‌دهد که F یک تابع صعودی است و ماکزیمم $F(\rho)$ برابر $F(۱)$ است که $\rho \leq ۱$.

$$G(c) = F(۱) = \frac{۳(۱-\beta)^۲[c^۲(۴-c^۲) + c(c-۲)(۴-c^۲)]}{(۱+۲\alpha)(۱+۴\alpha)} + \frac{(۱-\beta)^۲ c^۲(۴-c^۲)(۸\alpha^۲+۳\alpha+۱)}{۲(۱+۲\alpha)^۲(۱+۳\alpha)^۲(۱+۴\alpha)} + \frac{۲(۱-\beta)^۲[c^۲(۴-c^۲) + (۴-c^۲)^۲]}{(۱+۳\alpha)^۲}.$$

بدیهی است که G در $c = ۱$ ماکزیمم است. با قراردادن $\rho = ۱, c = ۱$ در نامساوی (۱۶.۲)، داریم:

$$\left|\frac{(۱-\beta)^۲ ۶c_۱c_۳}{(۱+۲\alpha)(۱+۴\alpha)} - \frac{(۱-\beta)^۲ ۴c_۲^۲}{(۱+۳\alpha)^۲} - \frac{(۱-\beta)^۴ c_۱^۴(۱+۷\alpha)}{(۱+۲\alpha)^۲(۱+۳\alpha)^۲(۱+۴\alpha)} + \frac{(۱-\beta)^۳(۸\alpha^۲+۳\alpha+۱)}{(۱+۲\alpha)^۲(۱+۳\alpha)^۲(۱+۴\alpha)}\right|$$
$$\leq \frac{۱۵(۱-\beta)^۲}{(۱+۲\alpha)(۱+۴\alpha)} + \frac{(۱-\beta)^۲ ۱۶}{(۱+۳\alpha)^۲} + \frac{(۱-\beta)^۴(۱+۷\alpha)}{(۱+۲\alpha)^۲(۱+۳\alpha)^۲(۱+۴\alpha)} + \frac{۲(۸\alpha^۲+۳\alpha+۱)}{(۱+۲\alpha)^۲(۱+۳\alpha)^۲(۱+۴\alpha)}.$$

اگر $c_۱ = ۱, c_۲ = -۱, c_۳ = -۲$ باشد، در نتیجه

$$p(z) = \frac{۱-z^۲}{۱-z+z^۲} = ۱ + z - z^۲ - ۲z^۳ + z^۴ + \cdots \in P, \tag{۱۶.۲}$$

اگر در عبارت (۱۳.۲) مقادیر $c_۱ = ۱, c_۲ = -۱, c_۳ = -۲$ را قرار بدهیم، حکم قضیه به تساوی تبدیل می‌شود.

□

ملاحظه ۱۶.۱.۲. *[۸] زمانی‌که در حکم قضیه به‌جای β، صفر می‌گذاریم، عبارت زیر را به‌دست می‌آوریم:*

$$|a_۲a_۴ - a_۳^۲| \leq \frac{۱۵}{(۱+۲\alpha)(۱+۴\alpha)} + \frac{۲(۸\alpha^۲+۳\alpha+۱)}{(۱+۲\alpha)^۲(۱+۳\alpha)^۲(۱+۴\alpha)} + \frac{(۱+۷\alpha)}{(۱+۲\alpha)^۲(۱+۳\alpha)^۲(۱+۴\alpha)} + \frac{۱۶}{(۱+۳\alpha)^۲}.$$

ملاحظه ۱۷.۱.۲. *[۴] زمانی‌که در حکم قضیه α و β را صفر می‌گذاریم، عبارت زیر را به‌دست می‌آوریم:*

$$|a_۲a_۴ - a_۳^۲| \leq \frac{۱}{۸}.$$

۲.۲ رده $S^*(\alpha)$ و $C(\alpha)$

تعریف ۱.۲.۲. تابع $f(z)$ را طبق معادله (۱.۲) در نظر بگیرید. $f(z) \in S^*(\alpha)$، اگر برای $\alpha \geq ۰$ و $z \in E$، رابطه زیر برقرار باشد.

$$Re\{\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha\frac{z^۲f''(z)}{f(z)}\} > ۰.$$

تعریف ۲.۲.۲. تابع $f(z)$، را طبق رابطه (۱.۲) در نظر بگیرید. $f(z) \in C(\alpha)$، اگر برای $\alpha \geq ۰$ و $z \in E$، رابطه زیر برقرار باشد.

$$Re\left\{\frac{[zf'(z)+\alpha z^۲f''(z)]'}{f'(z)}\right\} > \beta.$$

قضیه ۳.۲.۲. *فرض کنید $f \in S^*(\alpha)$، آنگاه*

$$|a_۲a_۴ - a_۳^۲| \leq \frac{۱}{(۱+۳\alpha)^۲}.$$

برهان. فرض کنید $f \in S^*(\alpha)$، آنگاه برای $z \in E$، $p \in P$ وجود دارد به‌طوری‌که،

$$zf'(z) + \alpha z^۲f''(z) = f(z)p(z). \qquad (۱۷.۲)$$

با برابر قرار دادن ضرایب در (۱۷.۲)، $a_۲$، $a_۳$، $a_۴$ را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}
zf'(z) &= z + ۲a_۲z^۲ + ۳a_۳z^۳ + ۴a_۴z^۴ + \dots\\
\alpha z^۲f''(z) &= ۶\alpha a_۳z^۲ + ۲۴a_۴\alpha z^۳ + \dots\\
f(z)p(z) &= (z + a_۲z^۲ + a_۳z^۳ + a_۴z^۴ + \dots)\\
&\quad (۱ + c_۱z + c_۲z^۲ + c_۳z^۳ + c_۴z^۴ + \dots)\\
&\quad = z + (c_۱ + a_۲)z^۲ + (c_۲ + a_۲c_۱ + a_۳)z^۳\\
&\quad + (c_۳ + a_۲c_۲ + a_۳c_۱)z^۴ + (a_۲c_۳ + a_۳c_۲)z^۵ + \dots
\end{aligned}$$

اکنون با برابر قرار دادن ضرایب معادله (۱۷.۲) داریم:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{c_1}{1+2\alpha}, \\ a_3 &= \frac{c_2}{2(1+3\alpha)} + \frac{c_1^2}{2(1+2\alpha)(1+3\alpha)}, \\ a_4 &= \frac{c_3}{3(1+4\alpha)} + \frac{c_1c_2(3+8\alpha)}{6(1+2\alpha)(1+3\alpha)(1+4\alpha)} + \frac{c_1^3}{6(1+2\alpha)(1+3\alpha)(1+4\alpha)} \end{aligned} \tag{18.2}$$

از (۱۸.۲) به آسانی ثابت می‌شود که:

$$\begin{aligned} \left|a_2a_4 - a_3^2\right| = \Bigg| &\frac{c_1c_3}{3(1+2\alpha)(1+4\alpha)} - \frac{c_2^2}{4(1+3\alpha)^2} \\ &- \frac{c_1^4(1+6\alpha)}{12(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)} \\ &- \frac{\alpha c_1^2c_2}{6(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)}\Bigg|. \end{aligned} \tag{19.2}$$

طبق لم (۱۰.۱.۲)، چون $|c_1| \leq 2$، c_2 و c_3 را از معادلات (۳.۲) و (۴.۲) جاگذاری می‌کنیم. فرض کنید $c_1 = c$ و بدون کاستن از کلیت، فرض کنید $c \in [0, 2]$. در نتیجه عبارت زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \left|a_2a_4 - a_3^2\right| = \Bigg| &\frac{[c^4 + 2(4-c^2)c^2x - (4-c^2)c^2x^2 + 2c(4-c^2)(1-|x|^2)y]}{12(1+2\alpha)(1+4\alpha)} \\ &- \frac{[c^4 + (4-c^2)^2x^2 + 2c^2x(4-c^2)]}{16(1+3\alpha)^2} \\ &- \frac{[c^4(1+6\alpha)]}{12(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)} \\ &- \frac{\alpha[c^4 + (4-c^2)xc^2]}{12(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)}\Bigg|. \end{aligned} \tag{20.2}$$

توسط نامساوی مثلث داریم:

$$\begin{aligned} \left|a_2a_4 - a_3^2\right| \leq &\frac{[c^4 + 2(4-c^2)c^2\rho + 2c(4-c^2) + c(c-2)(4-c^2)\rho^2]}{12(1+2\alpha)(1+4\alpha)} \\ &+ \frac{[c^4 + (4-c^2)^2\rho^2 + 2c\rho(4-c^2)]}{16(1+3\alpha)^2} \\ &+ \frac{c^4(6\alpha+1)}{12(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)} \\ &+ \frac{\alpha[c^4 + c^2\rho(4-c^2)]}{12(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)} = F(\rho), \end{aligned} \tag{21.2}$$

که $\rho = |x| \le ۱$. بنابراین

$$F'(\rho) = \frac{[c^۲(۴-c^۲) + c\rho(c-۲)(۴-c^۲)]}{۶(۱+۲\alpha)(۱+۴\alpha)} + \frac{[(۴-c^۲)^۲\rho + c^۲(۴-c^۲)]}{۸(۱+۳\alpha)^۲} + \frac{\alpha c^۲(۴-c^۲)}{۱۲(۱+۲\alpha)^۲(۱+۳\alpha)^۲(۱+۴\alpha)}.$$

با محاسبات مقدماتی، می‌توانیم نشان دهیم که برای $\rho > ۰$، $F'(\rho) > ۰$.

این نشان می‌دهد که F یک تابع صعودی است.

اگر در معادله (۲۱.۲)، $\rho = ۱$ و $c = ۰$ را قرار دهیم، کران بالا به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$|a_۲a_۴ - a_۳^۲| \le \frac{۱}{(۱+۳\alpha)^۲}.$$

با فرض $c_۱ = ۰, c_۲ = ۲, c_۳ = ۱$ در عبارت (۱۹.۲)، نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود. □

قضیه ۴.۲.۲. *فرض کنید $f(z) \in C(\alpha)$، آنگاه:*

$$|a_۲a_۴ - a_۳^۲| \le \frac{۱}{۱۴۴}\left|\frac{M}{(۱+۲\alpha)^۲(۱+۳\alpha)^۲(۱+۴\alpha)}\right|,$$

جایی‌که

$$M = (۲۸۰\alpha^۳ + ۳۴۰\alpha^۲ + ۱۳۸\alpha + ۱۸).$$

برهان. ما این قضیه را مشابه با اثبات قضیه (۳.۲.۲) ثابت می‌کنیم.

فرض کنید $f(z) \in C(\alpha)$، آنگاه $p(z) \in P$ وجود دارد به‌طوری‌که برای $z \in E$،

$$f'(z) + zf''(z) + \alpha z^۲ f'''(z) + ۲\alpha z f''(z) = f'(z)p(z), \qquad (۲۲.۲)$$

با برابر قرار دادن ضرایب در (۲۲.۲)، $a_۲$، $a_۳$، $a_۴$ را به‌دست می‌آوریم.

$$
\begin{aligned}
zf''(z) &= 2a_2z + 6a_3z^2 + 12a_4z^3 + \dots\\
\alpha z^2 f'''(z) &= 6\alpha a_3 z^2 + 24a_4\alpha z^3 + \dots\\
2\alpha z f''(z) &= 4\alpha a_2 z + 12\alpha a_3 z^2 + 24\alpha a_4 z^3 + \dots\\
f'(z)p(z) &= (1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + 4a_4z^3 + \dots)\\
&\quad (1 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + c_4z^4 + \dots)\\
&= (1 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + c_4z^4 + \dots)\\
&+ (2a_2z + 2a_2c_1z^2 + 2a_2c_2z^3 + 2a_2c_3z^3 + 2a_2c_3z^4 + \dots)\\
&+ (3a_3z^2 + 3a_3c_1z^3 + 3a_3c_2z^4 + 3a_3c_3z^5 + \dots)\\
&+ (4a_4z^3 + 4a_4c_1z^4 + 4a_4c_2z^5 + \dots)\\
&= 1 + (c_1 + 2a_2)z + (c_2 + 2a_2c_1 + 3a_3)z^2\\
&+ (c_3 + 2a_2c_2 + 3a_3c_1 + 4a_4)z^3\\
&+ (2a_2c_3 + 3a_3c_2 + 4a_4c_1)z^4 + (3a_3c_3 + 4a_4c_2)z^5
\end{aligned}
$$

اکنون با برابر قرار دادن ضرایب در معادله (۲۲.۲) داریم:

$$
\begin{aligned}
a_2 &= \frac{c_1}{1+2\alpha},\\
a_3 &= \frac{c_2}{2(1+3\alpha)} + \frac{c_1^2}{2(1+2\alpha)(1+3\alpha)},\\
a_4 &= \frac{c_3}{3(1+4\alpha)} + \frac{c_1c_2(3+8\alpha)}{6(1+2\alpha)(1+3\alpha)(1+4\alpha)} + \frac{c_1^3}{6(1+2\alpha)(1+3\alpha)(1+4\alpha)}
\end{aligned} \tag{۲۳.۲}
$$

از (۲۳.۲) به آسانی ثابت می‌شود که:

$$
\begin{aligned}
|a_2a_4 - a_3^2| = \Bigg| &\frac{c_1c_3}{3(1+2\alpha)(1+4\alpha)} - \frac{c_2^2}{4(1+3\alpha)^2}\\
&- \frac{c_1^4(1+6\alpha)}{12(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)}\\
&- \frac{\alpha c_1^2c_2}{6(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)}\Bigg|.
\end{aligned} \tag{۲۴.۲}
$$

حال فرض کنید $c_1 = c(0 \le c \le 2)$. با استفاده از (۳.۲) و (۴.۲)، c_2 و c_3 را در معادله زیر جاگذاری می‌کنیم.

$$\left|\frac{6c_1c_3}{(1+2\alpha)(1+4\alpha)}-\frac{4c_2^2}{(1+3\alpha)^2}\right.$$
$$-\frac{c_1^4(1+7\alpha)}{(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)^2}$$
$$\left.+\frac{c_1^2c_2(8\alpha^2+3\alpha+1)}{(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)^2}\right|$$

$$=\left|\frac{[6c^4+12c(4-c^2)cx-6c^2(4-c^2)x^2+12c(4-c^2)(1-|x|^2)y]}{4(1+2\alpha)(1+4\alpha)}\right.$$
$$-\frac{[c^2+x(4-c^2)]^2}{(1+3\alpha)^2}-\frac{c^4(1+7\alpha)}{(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)}$$
$$\left.+\frac{c^2[c^2+x(4-c^2)](8\alpha^2+3\alpha+1)}{2(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)}\right|.$$

با به‌کار بردن نامساوی مثلث داریم:

$$\le\frac{[6c^4+12c^2\rho(4-c^2)+6(c-2)\rho^2(4-c^2)+12c(4-c^2)]}{4(1+2\alpha)(1+4\alpha)}$$
$$+\frac{[c^4+\rho^2(4-c^2)^2+2c^2\rho(4-c^2)]}{(1+3\alpha)^2}$$
$$+\frac{c^4(1+7\alpha)}{(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)}$$
$$+\frac{[c^4+c^2\rho(4-c^2)](8\alpha^2+3\alpha+1)}{2(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)}=F(\rho), \tag{۲۵.۲}$$

که $\rho=|x|\le 1$. بنابراین

$$F'(\rho)=\frac{3[c^2(4-c^2)+\rho(c-2)(4-c^2)]}{(1+2\alpha)(1+4\alpha)}$$
$$+\frac{c^2(4-c^2)(8\alpha^2+3\alpha+1)}{2(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)}$$
$$+\frac{[2\rho(4-c^2)^2+2c^2(4-c^2)]}{(1+3\alpha)^2}.$$

با محاسبات مقدماتی، نشان‌می‌دهیم که برای $\rho>0$، $F'(\rho)>0$. این نشان می‌دهد که F یک تابع صعودی است و ماکزیمم $F(\rho)$ برابر $F(1)$ است که $\rho\le 1$.

$$G(c)=F(1)=\frac{3[c^2(4-c^2)+(c-2)(4-c^2)]}{(1+2\alpha)(1+4\alpha)}$$
$$+\frac{c^2(4-c^2)(8\alpha^2+3\alpha+1)}{2(1+2\alpha)^2(1+3\alpha)^2(1+4\alpha)}$$
$$+\frac{2[c^2(4-c^2)+(4-c^2)^2]}{(1+3\alpha)^2}.$$

بدیهی است که G در ۱ $= c$ ماکزیمم است. با قراردادن ۱ $= \rho = ۱, c$ در نامساوی (۲۵.۲)، داریم:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{۶c_۱c_۳}{(۱+۲\alpha)(۱+۴\alpha)}-\frac{۴c_۲^۲}{(۱+۳\alpha)^۲}-\frac{c_۱^۴(۱+۷\alpha)}{(۱+۲\alpha)^۲(۱+۳\alpha)^۲(۱+۴\alpha)}\right.\\&\left.+\frac{c_۱^۲c_۲(۸\alpha^۲+۳\alpha+۱)}{(۱+۲\alpha)^۲(۱+۳\alpha)^۲(۱+۴\alpha)}\right|\\&\leq\frac{۱۵}{(۱+۲\alpha)(۱+۴\alpha)}+\frac{۱۶}{(۱+۳\alpha)^۲}\\&+\frac{(۱+۷\alpha)}{(۱+۲\alpha)^۲(۱+۳\alpha)^۲(۱+۴\alpha)}+\frac{۲(۸\alpha^۲+۳\alpha+۱)}{(۱+۲\alpha)^۲(۱+۳\alpha)^۲(۱+۴\alpha)}.\end{aligned}$$

با فرض ۲$- = c_۱ = ۱, c_۲ = -۱, c_۳$ در عبارت (۲۴.۲)، نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود.

همچنین با قرار دادن ۲$- = c_۱ = ۱, c_۲ = -۱, c_۳$ در عبارت $p(z)$، داریم

$$p(z)=\frac{۱-z^۲}{۱-z+z^۲}=۱+z-z^۲-۲z^۳+z^۴+\cdots\in P, \qquad (۲۶.۲)$$

□

۳.۲ رده $M(\alpha)$ و $N(\lambda)$

تعریف ۱.۳.۲. تابع f، را طبق رابطه (۱.۲)، در نظر بگیرید. اگر برای $۰ \leq \alpha \leq ۱, z \in E$، رابطه

$$Re\left\{\frac{zf'(z)+\alpha z^۲f''(z)}{(۱-\alpha)f(z)+\alpha zf'(z)}\right\}>۰$$

برقرار باشد، در این صورت $f \in M(\alpha)$.

مشاهده می‌کنیم که $M(۰)=S^*$ و $M(۱)=C$.

تعریف ۲.۳.۲. تابع f، را طبق رابطه (۱.۲)، در نظر بگیرید. اگر برای $۰ \leq \lambda \leq ۱, z \in E$، رابطه

$$Re\{\frac{\lambda z^۳f'''(z)+(۱+۲\lambda)z^۲f''(z)+zf'(z)}{\lambda z^۲f''(z)+zf'(z)}\}>۰$$

برقرار باشد، $f \in N(\lambda)$ است.

مشاهده می‌کنیم که $N(۰)=C$.

قضیه ۳.۳.۲. فرض‌کنید $f \in M(\alpha)$، آنگاه

$$|a_۲a_۴-a_۳^۲|\leq\frac{۱}{(۱+\alpha)(۱+۳\alpha)}.$$

برهان. فرض کنید $f(z)\in M(\alpha)$، آنگاه $p(z)\in P$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$zf'(z)+\alpha z^{2}f''(z)=[(1-\alpha)f(z)+\alpha zf'(z)]p(z)$$

با برابر قرار دادن ضرایب این معادله، a_2، a_3، a_4 را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}f(z)-\alpha f(z)&=(1-\alpha)z+(a_2-a_2\alpha)z^{2}+(a_3-\alpha a_3)z^{3}\\ \alpha zf'(z)&=\alpha z+2\alpha a_2z^{2}+3a_3\alpha z^{3}\end{aligned}$$

$$(1-\alpha)f(z)+\alpha zf'(z)=z+(\alpha a_2+a_2)z^{2}+(2\alpha a_3+a_3)z^{3}+\dots$$

$$\begin{aligned}p(z)((1-\alpha)f(z)+\alpha zf'(z))=z&+(c_1+a_2+\alpha a_2)z^{2}\\&+(2\alpha a_3+a_3+a_2c_1+a_2c_1\alpha+c_2)z^{3}\\&+(2\alpha a_3c_1+a_3c_1+\alpha a_2c_2+a_2c_2)z^{4}\\&+(2\alpha a_3c_2+a_3c_2)z^{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}zf'(z)&=z+2a_2z^{2}+3a_3z^{3}+\dots\\ \alpha z^{2}f''(z)&=2\alpha a_2z^{2}+6\alpha a_3z^{3}+12\alpha a_4z^{4}+\dots\end{aligned}$$

$$zf'(z)+\alpha z^{2}f''(z)=(2a_2\alpha+2a_2)z^{2}+(3a_3+6a_3\alpha)z^{3}+(4a_4+12a_4)z^{4}$$

اکنون با برابر قرار دادن این ضرایب داریم:

$$\begin{aligned}a_2&=\frac{c_1}{1+\alpha},\\ a_3&=\frac{c_1^{2}+c_2}{2(1+2\alpha)},\\ a_4&=\frac{c_3}{3(1+3\alpha)}+\frac{c_1c_2}{2(1+3\alpha)}+\frac{c_1^{3}}{6(1+3\alpha)}\end{aligned}\tag{۲۷.۲}$$

بنابراین داریم:

$$|a_۲a_۴ - a_۳^۲| = \frac{۱}{۱۲}\Bigg|\frac{۴c_۱c_۳}{(۱+\alpha)(۱+۳\alpha)} - \frac{۳c_۲^۲}{(۱+۲\alpha)^۲} + c_۱^۲c_۲\left(\frac{۶}{(۱+\alpha)(۱+۳\alpha)} - \frac{۶}{(۱+۲\alpha)^۲}\right) - c_۱^۴\left(\frac{۳}{(۱+۲\alpha)^۲} - \frac{۲}{(۱+\alpha)(۱+۳\alpha)}\right)\Bigg|. \tag{۲۸.۲}$$

اگر $c_۲$ و $c_۳$، را از لم (۱۱.۱.۲)، در عبارت بالا جاگذاری کنیم، داریم

$$|a_۲a_۴ - a_۳^۲| = \frac{۱}{۱۲}\Bigg|xc_۱^۲(۴-c_۱^۲)\left(\frac{۵}{(۱+\alpha)(۱+۳\alpha)} - \frac{۹}{۲(۱+۲\alpha)^۲}\right) - c_۱^۴\left(\frac{۲۷}{۴(۱+۲\alpha)^۲} - \frac{۶}{(۱+\alpha)(۱+۳\alpha)}\right) + \frac{۲(۴-c_۱^۲)c_۱(۱-|x|^۲)z}{(۱+\alpha)(۱+۳\alpha)} - x^۲(۴-c_۱^۲)\left(\frac{۳(۴-c_۱^۲)}{۴(۱+۲\alpha)^۲} + \frac{c_۱^۲}{(۱+\alpha)(۱+۳\alpha)}\right)\Bigg|. \tag{۲۹.۲}$$

با استفاده از لم (۱۰.۱.۲)، $|c_۱| \leq ۲$. با قرار دادن $c_۱ = c$ و بدون کاستن از کلیت، فرض کنید $c \in [۰, ۲]$.

با استفاده از نامساوی مثلث در عبارت (۲۹.۲)، داریم:

$$|a_۲a_۴ - a_۳^۲| \leq \frac{۱}{۱۲}\Bigg\{\rho c^۲(۴-c^۲)\left(\frac{۵}{(۱+\alpha)(۱+۳\alpha)} - \frac{۹}{۲(۱+۲\alpha)^۲}\right) + c^۴\left(\frac{۲۷}{۴(۱+۲\alpha)^۲} - \frac{۶}{(۱+\alpha)(۱+۳\alpha)}\right) + \frac{۲(۴-c^۲)c}{(۱+\alpha)(۱+۳\alpha)} + \rho^۲(۴-c^۲)\left(\frac{۳(۴-c^۲)}{۴(۱+۲\alpha)^۲} + \frac{c^۲-۲c}{(۱+\alpha)(۱+۳\alpha)}\right)\Bigg\} = F(\rho) \tag{۳۰.۲}$$

که $\rho = |x| \leq ۱$. بنابراین

$$F'(\rho) = \frac{۱}{۱۲}\Bigg\{c^۲(۴-c^۲)\left(\frac{۵}{(۱+\alpha)(۱+۳\alpha)} - \frac{۹}{۲(۱+۲\alpha)^۲}\right) + ۲\rho(۴-c)\left(\frac{۳(۴-c)}{۴(۱+۲\alpha)^۲} + \frac{c^۲-۲c}{(۱+\alpha)(۱+۳\alpha)}\right)\Bigg\}. \tag{۳۱.۲}$$

می‌توانیم نشان دهیم که $F'(\rho) > 0$ و این نشان می‌دهد که F یک تابع صعودی است و

$$\max_{\rho \leqslant 1} F(\rho) = F(1).$$

حال فرض کنید $G(c) = F(1)$. در نتیجه

$$\begin{aligned} G(c) = F(1) = \frac{1}{12}\Big\{ & c^2(4-c^2)\left(\frac{5}{(1+\alpha)(1+3\alpha)} - \frac{9}{2(1+2\alpha)^2}\right) \\ & + c^4\left(\frac{27}{4(1+2\alpha)^2} - \frac{6}{(1+\alpha)(1+3\alpha)}\right) \\ & + \frac{2(4-c^2)c}{(1+\alpha)(1+3\alpha)} + \left(4-c^2\right)\left(\frac{3(4-c^2)}{4(1+2\alpha)^2} + \frac{c^2-2c}{(1+\alpha)(1+3\alpha)}\right)\Big\}. \end{aligned} \tag{۲.۳۲}$$

به‌طور بدیهی می‌توان نشان داد که $G(c)$ در نقطه $c = 1$ ماکزیمم است. کران بالا برای $|a_2a_4 - a_3^2|$ در $\rho = 1$ و $c = 1$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned} |a_2a_4 - a_3^2| \leq & \frac{1}{12}\{(\frac{15}{(1+\alpha)(1+3\alpha)}) - \frac{2\times 27}{2(1+2\alpha)^2} + (\frac{27}{4(1+2\alpha)^2} - \frac{6}{(1+\alpha)(1+3\alpha)}) \\ & + \frac{6}{(1+\alpha)(1+3\alpha)} + (\frac{27}{4(1+2\alpha)^2} + \frac{-3}{(1+\alpha)(1+3\alpha)})\} \\ & \leq \frac{1}{12}\frac{12}{(1+\alpha)(1+3\alpha)} = \frac{1}{(1+\alpha)(1+3\alpha)} \end{aligned}$$

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \frac{1}{(1+\alpha)(1+3\alpha)}.$$

در (۲.۲۸)، اگر $c_1 = 1$ ، $c_2 = -1$ و $c_3 = -2$، نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود.

□

قضیه ۲.۳.۴. *فرض کنید $f \in N(\lambda)$، آنگاه*

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \frac{1}{8(1+\lambda)(1+3\lambda)}.$$

برهان. فرض کنید $f(z) \in N(\lambda)$، آنگاه $p(z) \in P$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$[\lambda z^3 f'''(z) + (1+2\lambda)z^2 f''(z) + zf'(z)] = [\lambda z^2 f''(z) + zf'(z)]p(z)$$

با برابر قرار دادن ضرایب این معادله، a_2، a_3، a_4 را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} zf'(z) &= z + 2a_2z^2 + 3a_3z^3 + \dots \\ z^2f''(z) &= 2a_2z^2 + 6a_3z^3 + \dots \\ \lambda z^3 f'''(z) &= 6\lambda a_3 z^3 \\ (1+2\lambda)z^2f''(z) &= (2a_2 + 4a_2\lambda)z^2 + (6a_3 + 12a_3\lambda)z^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &[\lambda z^2 f''(z) + zf'(z)]p(z) = \\ &\qquad [(2a_2\lambda + 2a_2)z^2 + (3a_3 + 6a_3\lambda)z^3] \\ &\qquad (1 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + c_4z^4 + \dots) \\ &\qquad =(2a_2\lambda + 2a_2)z^2 + (3a_3 + 2a_2c_1\lambda + 6a_3\lambda + 2a_2c_1)z^3 \\ &\qquad +(3a_3c_1 + 6a_3c_1\lambda + 2a_2c_2\lambda + 2a_2c_2)z^4 + \dots \end{aligned}$$

اکنون با برابر قرار دادن این ضرایب داریم:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{c_1}{2(1+\lambda)}, \\ a_3 &= \frac{c_1^2 + c_2}{6(1+2\lambda)}, \\ a_4 &= \frac{c_3}{12(1+3\lambda)} + \frac{c_1c_2}{8(1+3\lambda)} + \frac{c_1^3}{24(1+3\lambda)} \end{aligned} \tag{۳۳.۲}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \left|a_2a_4 - a_3^2\right| = \frac{1}{144}\Bigg| &\frac{6c_1c_3}{(1+\lambda)(1+3\lambda)} - \frac{4c_2^2}{(1+2\lambda)^2} \\ &+ c_1^2c_2\left(\frac{9}{(1+\lambda)(1+3\lambda)} - \frac{8}{(1+2\lambda)^2}\right) \\ &-c_1^4\left(\frac{4}{(1+2\lambda)^2} - \frac{3}{(1+\lambda)(1+3\lambda)}\right)\Bigg|. \end{aligned} \tag{۳۴.۲}$$

اگر از لم (۱۱.۱.۲)، c_2 و c_3، را در عبارت بالا جاگذاری کنیم ، داریم

$$\begin{aligned} \left|a_2a_4 - a_3^2\right| = \frac{1}{144}\Bigg| &xc_1^2(4-c_1^2)\left(\frac{15}{2(1+\lambda)(1+3\lambda)} - \frac{6}{(1+2\lambda)^2}\right) \\ &- c_1^4\left(\frac{9}{(1+2\lambda)^2} - \frac{9}{(1+\lambda)(1+3\lambda)}\right) \\ &+ \frac{6(4-c_1^2)c_1(1-|x|^2)z}{2(1+\lambda)(1+3\lambda)} - x^2(4-c_1^2)\left(\frac{(4-c_1^2)}{(1+2\lambda)^2} + \frac{3c_1^2}{2(1+\lambda)(1+3\lambda)}\right)\Bigg|. \end{aligned} \tag{۳۵.۲}$$

با استفاده از لم (۱۰.۱.۲)، $|c_1| \leq 2$. با قرار دادن $c = c_1$، و بدون کاستن از کلیت، فرض کنید $c \in [0, 2]$.
با استفاده از نامساوی مثلث در عبارت (۳۵.۲) داریم:

$$\begin{aligned} |a_2a_4 - a_3^2| \leq \frac{1}{144}\Big\{&\rho c^2(4-c^2)\left(\frac{15}{2(1+\lambda)(1+3\lambda)} - \frac{6}{(1+2\lambda)^2}\right) \\ &+ c^4\left(\frac{9}{(1+2\lambda)^2} - \frac{9}{(1+\lambda)(1+3\lambda)}\right) \\ &+ \frac{3(4-c^2)c}{(1+\lambda)(1+3\lambda)} + \rho^2(4-c^2)\left(\frac{(4-c^2)}{(1+2\lambda)^2} + \frac{3c^2-6c}{2(1+\lambda)(1+3\lambda)}\right)\Big\} = F(\rho) \end{aligned} \tag{۳۶.۲}$$

که $\rho = |x| \leq 1$. بنابراین

$$\begin{aligned} F'(\rho) = \frac{1}{144}\Big\{&c^2(4-c^2)\left(\frac{15}{2(1+\lambda)(1+3\lambda)} - \frac{6}{(1+2\alpha)^2}\right) \\ &+ 2\rho(4-c^2)\left(\frac{(4-c^2)}{(1+2\lambda)^2} + \frac{3c^2-6c}{2(1+\lambda)(1+3\lambda)}\right)\Big\}. \end{aligned} \tag{۳۷.۲}$$

می‌توانیم نشان دهیم که $F'(\rho) > 0$ و این نشان می‌دهد که F یک تابع صعودی است و

$$\max_{\rho \leqslant 1} F(\rho) = F(1).$$

حال فرض کنید $G(c) = F(1)$. در نتیجه

$$\begin{aligned} G(c) = F(1) = \frac{1}{144}\Big\{&c^2(4-c^2)\left(\frac{15}{2(1+\lambda)(1+3\lambda)} - \frac{6}{(1+2\lambda)^2}\right) \\ &+ c^4\left(\frac{9}{(1+2\lambda)^2} - \frac{9}{(1+\lambda)(1+3\lambda)}\right) \\ &+ \frac{3(4-c^2)c}{(1+\lambda)(1+3\lambda)} + (4-c^2)\left(\frac{(4-c^2)}{(1+2\lambda)^2} + \frac{3c^2-6c}{2(1+\lambda)(1+3\lambda)}\right)\Big\}. \end{aligned} \tag{۳۸.۲}$$

به‌طور بدیهی می‌توان نشان داد که $G(c)$ در نقطه $c = 1$ ماکزیمم است. کران بالا برای $|a_2a_4 - a_3^2|$ در $\rho = 1$ و $c = 1$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \frac{1}{8(1+\lambda)(1+3\lambda)}.$$

در (۳۴.۲)، اگر $c_1 = 1$ ، $c_2 = -1$ و $c_3 = -2$، نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود. □

۴.۲ رده $S^*_\sigma(\beta)$

تعریف ۱.۴.۲. تابع تحلیلی $f(z)$ را طبق معادله (۱.۲) در دیسک واحد E، در نظر بگیرید. تابع f در E، دو ـتک ارز [۲] نامیده می‌شود، اگر توابع f و f^{-1} تک ارز باشند. رده توابع دو ـتک ارز در E را با σ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۴.۲. تابع f متعلق به رده $S^*_\sigma(\beta)$ است، اگر هم f و هم f^{-1} ستاره‌گون از مرتبه β باشند.

قضیه ۳.۴.۲. *فرض کنید $f(z)$ که طبق معادله (۱.۲) داده شده است، در رده $S^*_\sigma(\beta)$ باشد و هم‌چنین $0 \leq \beta < 1$، آنگاه:*

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \begin{cases} \frac{4}{3}(1-\beta^2)[1+4(1-\beta)^2] & ,\beta \in \left[0, 1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right] \\ \frac{3}{2}\frac{(\beta-1)^2}{(1-2(1-\beta)^2)} & ,\beta \in (1-\frac{1}{2\sqrt{2}}, 1). \end{cases}$$

برهان. فرض کنید $f \in S^*_\sigma(\beta)$ و $g = f^{-1}$.

چون $f^{-1}(f(z)) = z$ و چون $f^{-1} = g$ بنابراین $g(f(z)) = z$
در نتیجه

$$g(f(z)) = f(z) + b_2([f(z)]^2) + b_3([f(z)]^3) + \cdots = z$$

$$(z + a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots) + b_2(z^2 + a_2^2z^4 + 2a_2z^3 + \ldots)$$
$$b_3(z^3 + 3a_2z^4 + 3a_2^2z^5 + \ldots)] = z$$

با برابر قرار دادن ضرایب داریم

$$a_2z^2 + b_2z^2 = 0$$

در نتیجه

$$a_2 + b_2 = 0$$

بنابراین $b_2 = -a_2$ هم‌چنین

$$(a_3 + 2a_2b_2 + b_3)z^3 = 0$$

[۲] bi-univalent

در نتیجه

$$a_3 + 2a_2b_2 + b_3 = 0$$

با توجه به اینکه $b_2 = -a_2$ داریم

$$b_3 = -a_3 + 2a_2^2$$

در نتیجه

$$g(w) = w + b_2w^2 + b_3w^3 + \dots$$

اگر مقادیر b_i را در $g(w)$ جاگذاری کنیم داریم

$$g(w) = w - a_2w^2 + (a_3 + 2a_2^2)w^3 + \dots$$

آنگاه:

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \beta + (1-\beta)p(z) \quad , \quad \frac{wg'(w)}{g(w)}\beta + (1-\beta)q(w) \tag{۳۹.۲}$$

که

$$p(z) = 1 + c_1z + c_2z^2 + \dots \in P \quad , \quad q(w) = 1 + d_1w + d_2w^2 + \dots \in P.$$

حال با برابر قرار دادن ضرایب معادله (۳۹.۲) داریم:

$$a_2 = (1-\beta)c_1, \tag{۴۰.۲}$$

$$2a_3 - a_2^2 = (1-\beta)c_2, \tag{۴۱.۲}$$

$$3a_4 - 3a_3a_2 + a_2^3 = (1-\beta)c_3 \tag{۴۲.۲}$$

و

$$-a_2 = (1-\beta)d_1 \tag{۴۳.۲}$$

$$-2a_3 + 3a_2^2 = (1-\beta)d_2, \tag{۴۴.۲}$$

$$-3a_4 + 12a_3a_2 - 10a_2^3 = (1-\beta)d_3. \tag{۴۵.۲}$$

از معادلات (۴۰.۲) و (۴۳.۲)، عبارات زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$c_1 = -d_1 \tag{۴۶.۲}$$

$$a_2 = (1-\beta)c_1 \tag{۴۷.۲}$$

از معادلات (۴۱.۲)، (۴۴.۲) و (۴۷.۲)، نتیجه می‌گیریم:

$$a_3 = (1-\beta)^2 c_1^2 + \frac{(1-\beta)}{4}(c_2 - d_2). \tag{۴۸.۲}$$

همچنین از معادلات (۴۲.۲) و (۴۵.۲) نتیجه می‌گیریم:

$$a_4 = \frac{2}{3}(1-\beta)^3 c_1^3 + \frac{5}{8}(1-\beta)^2 c_1 (c_2 - d_2) + \frac{1}{6}(1-\beta)(c_3 - d_3). \tag{۴۹.۲}$$

بنابراین به راحتی می‌توان ثابت کرد که:

$$\begin{aligned}|a_2 a_4 - a_3^2| = \Big| & -\frac{1}{3}(1-\beta)^4 c_1^4 + \frac{1}{8}(1-\beta)^3 c_1^2 (c_2 - d_2) \\ & + \frac{1}{6}(1-\beta)^2 c_1 (c_3 - d_3) - \frac{1}{16}(1-\beta)^2 (c_2 - d_2)^2 \Big|\end{aligned} \tag{۵۰.۲}$$

طبق لم (۱۱.۱.۲) و معادله (۴۶.۲) داریم:

$$\begin{cases} 2c_2 = c_1^2 + x(4 - c_1^2) \\ 2d_2 = d_1^2 + x(4 - d_1^2) \end{cases}$$

در نتیجه $c_2 - d_2 = 0$ و

$$c_3 - d_3 = \frac{c_1^3}{2} - c_1(4 - c_1^2)x - \frac{c_1}{2}(4 - c_1^2)x^2. \tag{۵۱.۲}$$

با استفاده از معادلات (۴.۲)،(۵۱.۲)، درعبارت (۵۰.۲) داریم:

$$\begin{aligned}|a_2 a_4 - a_3^2| = \Big| & -\frac{1}{3}(1-\beta)^4 c_1^4 + \frac{1}{12}(1-\beta)^2 c_1^4 \\ & - \frac{1}{6}(1-\beta)^2 c_1^2 (4 - c_1^2)x - \frac{1}{12}(1-\beta)^2 c_1^2 (4 - c_1^2)x^2 \Big|.\end{aligned} \tag{۵۲.۲}$$

چون $p\in P$، بنابراین $|c_1|\leq ۲$. با فرض $c_1=c$ و بدون کاستن از کلیت مسأله، فرض کنید $c\in[۰,۲]$. با به‌کار بردن نامساوی مثلث در عبارت (۵۲.۲) و این‌که $\mu=|x|\leq ۱$، عبارت زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}|a_۲a_۴-a_۳^۲|\leq&\frac{۱}{۳}(۱-\beta)^۴c^۴+\frac{۱}{۱۲}(۱-\beta)^۲c^۴\\&+\frac{۱}{۶}(۱-\beta)^۲c^۲(۴-c^۲)\mu+\frac{۱}{۱۲}(۱-\beta)^۲c^۲(۴-c^۲)\mu^۲=F(\mu).\end{aligned}\tag{۵۳.۲}$$

با مشتق گرفتن از $F(\mu)$ داریم:

$$F'(\mu)=\frac{۱}{۶}(۱-\beta)^۲c^۲(۴-c^۲)+\frac{۱}{۶}(۱-\beta)^۲c^۲(۴-c^۲)\mu.$$

با محاسبات مقدماتی می‌توان نشان داد، $F'(\mu)>۰$ که $\mu>۰$.
این نشان می‌دهد که F تابعی صعودی است و بنابراین کران بالا برای $F(\mu)$ وقتی که $\mu=۱$ است، به‌صورت زیر است.

$$F(\mu)\leq\frac{۱}{۳}(۱-\beta)^۴c^۴+\frac{۱}{۱۲}(۱-\beta)^۲c^۴+\frac{۱}{۴}(۱-\beta)^۲c^۲(۴-c^۲)=G(c).\tag{۵۴.۲}$$

فرض کنید $G(c)$ یک مقدار ماکزیمم در $c\in[۰,۲]$ دارد. با محاسبات مقدماتی، عبارت زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}G'(c)&=\frac{۴}{۳}(۱-\beta)^۴c^۳+\frac{۱}{۳}(۱-\beta)^۲c^۳+۲c(۱-\beta)^۲-(۱-\beta)^۲c^۳\\&=\frac{۴}{۳}(۱-\beta)^۴c^۳-\frac{۲}{۳}(۱-\beta)^۲c^۳+۲c(۱-\beta)^۲\\&=\frac{۲}{۳}(۱-\beta)^۲\{[۲(۱-\beta)^۲-۱]c^۳+۳c\}.\end{aligned}$$

آنگاه $G'(c)=۰$، نقطه بحرانی حقیقی $c_{۰۱}=۰$ یا $c_{۰۲}=\sqrt{\frac{۳}{۱-۲(۱-\beta)^۲}}$، را نشان می‌دهد. بعد از انجام محاسبات ، حالت‌های زیر را نتیجه می‌گیریم.

حالت اول:

زمانی‌که $\beta\in\left[۰,۱-\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\right]$، مشاهده می‌کنیم که $c_{۰۲}\geq ۲$ است. پس $c_{۰۲}$ بیرون بازه $(۰,۲)$ است. بنابراین مقدار ماکزیمم $G(c)$ در $c_{۰۱}=۰$ یا $c=c_{۰۲}$ اتفاق می‌افتد، که این مطلب با این فرض که مقدار ماکزیمم در $c\in[۰,۲]$ است، تناقض دارد.

چون G تابعی صعودی در بازه $[0,2]$ است، نقطه ماکزیمم G باید روی نقطه انتهایی $c \in [0,2]$ باشد. پس $c = 2$ است. بنابراین داریم:

$$\max_{0 \leqslant c \leqslant 2} G(c) = G(2) = \frac{4}{3}(1-\beta^2)[1+4(1-\beta)^2].$$

حالت دوم:

زمانی‌که $\beta \in \left(1-\frac{1}{2\sqrt{2}}, 1\right)$، مشاهده می‌کنیم که $c_{02} < 2$، این نشان می‌دهد که c_{02} داخل بازه $[0,2]$ است. چون $G''(c_{02}) < 0$، مقدار ماکزیمم $G(c)$ در $c = c_{02}$ اتفاق می‌افتد. بنابراین داریم:

$$\max_{0 \leqslant c \leqslant 2} G(c) = G(c_{02}) = G\left(\sqrt{\frac{3}{1-2(1-\beta)^2}}\right) = \frac{3}{2}\frac{(\beta-1)^2}{(1-2(1-\beta)^2)}.$$

□

نتیجه ۴.۴.۲. *فرض کنید $f(z)$ که طبق معادله (۱.۲) داده شده است، در رده S_σ^* باشد. آنگاه*

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \frac{20}{3}$$

.

قضیه ۵.۴.۲. *فرض کنید $f(z)$ که طبق معادله (۱.۲) داده شده است، در رده $C_\sigma(\beta)$ باشد و $0 \leq \beta < 1$، آنگاه:*

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \begin{cases} \frac{1}{6}(1-\beta^2)[1+(1-\beta)^2] & ,\beta \in \left[0, 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ \frac{3}{8}\frac{(1-\beta)^2}{(2-(1-\beta)^2)} & ,\beta \in (1-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1). \end{cases}$$

برهان. فرض کنید $f \in C_\sigma(\beta)$ و $g = f^{-1}$. آنگاه:

$$1+\frac{zf''(z)}{f'(z)} = \beta + (1-\beta)p(z) \quad , \quad 1+\frac{wg''(w)}{g'(w)} = \beta+(1-\beta)q(w) \qquad (۵۵.۲)$$

که

$$p(z) = 1 + c_1z + c_2z^2 + \cdots \in P \quad , \quad q(w) = 1 + d_1w + d_2w^2 + \cdots \in P.$$

حال با برابر قرار دادن ضرایب معادله (۵۵.۲) داریم:

$$2a_2 = (1-\beta)c_1, \tag{۵۶.۲}$$
$$6a_3 - 4a_2^2 = (1-\beta)c_2, \tag{۵۷.۲}$$
$$12a_4 - 18a_3a_2 + 8a_2^3 = (1-\beta)c_3 \tag{۵۸.۲}$$

و

$$-2a_2 = (1-\beta)d_1 \tag{۵۹.۲}$$
$$-6a_3 + 8a_2^2 = (1-\beta)d_2, \tag{۶۰.۲}$$
$$-12a_4 + 42a_3a_2 - 32a_2^3 = (1-\beta)d_3. \tag{۶۱.۲}$$

از معادلات (۵۶.۲) و (۵۹.۲) به‌دست می‌آوریم:

$$c_1 = -d_1 \tag{۶۲.۲}$$

و

$$a_2 = \frac{1}{2}(1-\beta)c_1 \tag{۶۳.۲}$$

از معادلات (۵۷.۲)، (۶۰.۲) و (۶۳.۲) نتیجه می‌گیریم:

$$a_3 = \frac{1}{4}(1-\beta)^2c_1^2 + \frac{1}{12}(1-\beta)(c_2-d_2). \tag{۶۴.۲}$$

هم‌چنین از معادلات (۵۸.۲) و (۶۱.۲) نتیجه می‌گیریم:

$$a_4 = \frac{5}{48}(1-\beta)^3c_1^3 + \frac{5}{48}(1-\beta)^2c_1(c_2-d_2) + \frac{1}{24}(1-\beta)(c_3-d_3). \tag{۶۵.۲}$$

بنابراین به راحتی می‌توان ثابت کرد که:

$$\begin{aligned}|a_2a_4 - a_3^2| = \Big| &-\frac{1}{96}(1-\beta)^4c_1^4 + \frac{1}{96}(1-\beta)^3c_1^2(c_2-d_2) \\ &+\frac{1}{48}(1-\beta)^2c_1(c_3-d_3) - \frac{1}{144}(1-\beta)^2(c_2-d_2)^2\Big|.\end{aligned} \tag{۶۶.۲}$$

با استفاده از عبارات (۴.۲)،(۵۱.۲) در معادله (۶۶.۲) داریم:

$$\begin{aligned}|a_۲a_۴ - a_۳^۲| = \Big| &-\frac{۱}{۹۶}(۱-\beta)^۴c_۱^۴ + \frac{۱}{۹۶}(۱-\beta)^۲c_۱^۴ \\ &-\frac{۱}{۴۸}(۱-\beta)^۲c_۱^۲(۴-c_۱^۲)x - \frac{۱}{۹۶}(۱-\beta)^۲c_۱^۲(۴-c_۱^۲)x^۲\Big|. \qquad (۶۷.۲)\end{aligned}$$

چون $p \in P$، بنابراین $|c_۱| \leq ۲$. با فرض $c_۱ = c$ و بدون کاستن از کلیت مسأله فرض کنید $c \in [۰, ۲]$. با به‌کار بردن نامساوی مثلث در عبارت (۵۲.۲) و این‌که $\mu = |x| \leq ۱$، عبارت زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}|a_۲a_۴ - a_۳^۲| \leq &\frac{۱}{۹۶}(۱-\beta)^۲\{۱+(۱-\beta)^۲\}c^۴ \\ &+\frac{۱}{۹۶}(۱-\beta)^۲c^۲(۴-c^۲)+\{۲\mu+\mu^۲\} = F(\mu). \qquad (۶۸.۲)\end{aligned}$$

با مشتق گرفتن از $F(\mu)$ داریم:

$$F'(\mu) = \frac{۱}{۴۸}(۱-\beta)^۲c^۲(۴-c^۲) + \frac{۱}{۴۸}(۱-\beta)^۲c^۲(۴-c^۲)\mu.$$

با محاسبات مقدماتی برای $\mu > ۰$، می‌توان نشان داد، $F'(\mu) > ۰$. این نشان می‌دهد که F تابعی صعودی است و بنابراین کران بالا برای $F(\mu)$ وقتی که $\mu = ۱$ به‌صورت زیر است.

$$F(\mu) \leq \frac{۱}{۹۶}(۱-\beta)^۲\{۱+(۱-\beta)^۲\}c^۴ + \frac{۱}{۳۲}(۱-\beta)^۲c^۲(۴-c^۲) = G(c). \qquad (۶۹.۲)$$

آنگاه:

$$G'(c) = \frac{۱}{۲۴}(۱-\beta)^۲\{[(۱-\beta)^۲-۲]c^۳+۶c\}. \qquad (۷۰.۲)$$

با قرار دادن $G'(c) = ۰$ و چون $۰ \leq c \leq ۲$، نقاط بحرانی حقیقی $c_{۰۱} = ۰$ یا $c_{۰۲} = \sqrt{\frac{۶}{۲-(۱-\beta)^۲}}$ را داریم.

با به‌کار بردن روندی مشابه اثبات قبل حالت‌های زیر را نتیجه می‌گیریم:

حالت اول:

زمانی‌که $\beta \in \left[0, 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$، مقدار ماکزیمم $G(c)$ در $c=2$ است.

$$\max_{0\leqslant c\leqslant 2} G(c) = G(2) = \frac{1}{6}(1-\beta^2)[1+(1-\beta)^2].$$

حالت دوم:

زمانی‌که $\beta \in \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$، مقدار ماکزیمم $G(c)$ در $c = c_{02} = \sqrt{\frac{6}{2-(1-\beta)^2}}$ اتفاق می‌افتد.

$$\max_{0\leqslant c\leqslant 2} G(c) = G(c_{02}) = G\left(\sqrt{\frac{6}{2-(1-\beta)^2}}\right) = \frac{3}{8}\frac{(\beta-1)^2}{(2-(1-\beta)^2)}.$$

□

نتیجه ۶.۴.۲. *فرض کنید $f(z)$ که طبق معادله (۱.۲) داده شده، در رده C_σ باشد، آنگاه:*

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \frac{1}{6}.$$

فصل ۳

دترمینان هنکل دوم برای زیر رده هایی از توابع تک ارز

فرض کنید A رده توابع تحلیلی

$$f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n, \tag{۱.۳}$$

در دیسک واحد

$$E = \{z : |z| < ۱\},$$

باشد. فرض کنید s رده توابع $f(z)$ و تک ارز در E باشد.

تعریف ۷.۰.۳. U رده توابع شوارتز

$$w(z) = \sum_{n=۱}^{\infty} d_n z^n,$$

است که در دیسک واحد

$$E = \{z : |z| < ۱\},$$

تحلیلی‌اند و در شرط زیر صدق می کند:
$|w(z)| < ۱$.

تعریف ۸.۰.۳. فرض کنید f, g دو تابع تحلیلی در E هستند، آنگاه f زیرترتیب g نامیده می‌شود(به‌صورت نمادی $f \prec g$)، اگر تابع شوارتز $w(z) \in U$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$f(z) = g(w(z)).$$

اگر f زیر ترتیب g باشد، آنگاه برد f زیر مجموعه برد g است.

$S^*(\alpha,\beta)$ نشان دهنده زیررده توابع $f(z)\in A$ است و در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+\alpha z}{1+\beta z}, -1\leq \beta<\alpha\leq 1, z\in E. \tag{۲.۳}$$

رده $S^*(\alpha,\beta)$ زیررده توابع ستاره‌گون است و توسط مهروک [1] و گوول [2] بررسی شده است. به‌ویژه رده توابع ستاره‌گون S^* هم‌ارز با $S^*(1,-1)$ است.

تعریف ۹.۰.۳. $C(\alpha,\beta)$ زیررده توابع $f(z)$ است و در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\frac{(zf'(z))'}{f'(z)} \prec \frac{1+\alpha z}{1+\beta z}, -1\leq \beta<\alpha\leq 1, z\in E. \tag{۳.۳}$$

رده $C(\alpha,\beta)$ زیررده توابع محدب است و توسط مهروک و گوول بررسی شده است. به‌ویژه رده توابع محدب C با $C(1,-1)$ هم‌ارز است.

فرض کنید P خانواده همه توابع تحلیلی p در E باشد که برای $z\in E$، $Re(p(z))>0$ و

$$p(z)=1+p_1z+p_2z^2+\dots.$$

لم ۱۰.۰.۳. *اگر $p\in P$، آنگاه $|p_k|\leq 2$، $(k=1,2,3,\dots)$.*

لم ۱۱.۰.۳. *اگر $p\in P$، آنگاه برای $p_1\in[0,2]$ و x,z، که در روابط $|x|\leq 1$، $|z|\leq 1$ صدق می‌کند، عبارات زیر را داریم:*

$$2p_2=p_1^2+(4-p_1^2)x,$$

$$4p_3=p_1^3+2p_1(4-p_1^2)x-p_1(4-p_1^2)x^2+2(4-p_1^2)(1-|x|^2)z.$$

۱.۳ دترمینان هنکل برای زیر رده های توابع محدب وستاره‌گون

قضیه ۱.۱.۳. *اگر $f\in S^*(\alpha,\beta)$، آنگاه*

$$\left|a_2a_4-a_3^2\right|\leq \frac{(\alpha-\beta)^2}{4}. \tag{۴.۳}$$

برهان. اگر $f(z)\in s^*(\alpha,\beta)$، آنگاه یک تابع شوارتز $w(z)\in U$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}=\phi(\omega(z)), \tag{۵.۳}$$

[1] Mehrok
[2] Goel

که

$$\phi(z) = \frac{1+\alpha z}{1+\beta z} = 1 + (\alpha-\beta)z - \beta(\alpha-\beta)z^2 + \beta^2(\alpha-\beta)z^3 + \dots$$
$$= 1 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \beta_3 z^3 + \dots \quad (۶.۳)$$

تابع $p_1(z)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$p_1(z) = \frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)} = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots \quad (۷.۳)$$

چون $\omega(z)$ یک تابع شوارتز است، در نتیجه $Re(p_1(z)) > 0, p_1(0) = 1$.
تابع $h(z)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots \quad (۸.۳)$$

با توجه به معادلات (۵.۳)،(۷.۳)،(۸.۳) داریم:

$$h(z) = \phi\left(\frac{p_1(z)-1}{p_1(z)+1}\right) = \phi\left(\frac{c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots}{2 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots}\right)$$
$$= \phi\left(\frac{1}{2}c_1 z + \frac{1}{2}\left(c_2 - \frac{c_1^2}{2}\right)z^2 + \frac{1}{2}\left(c_3 - c_1 c_2 + \frac{c_1^3}{4}\right)z^3 + \dots\right)$$
$$= 1 + \frac{\beta_1 c_1}{2}z + \left[\frac{\beta_1}{2}\left(c_2 - \frac{c_1^2}{2}\right) + \frac{\beta_2 c_1^2}{4}\right]z^2$$
$$+ \left[\frac{\beta_1}{2}\left(c_3 - c_1 c_2 + \frac{c_1^3}{4}\right) + \frac{\beta_2 c_1}{2}\left(c_2 - \frac{c_1^2}{2}\right) + \frac{\beta_3 c_1^3}{8}\right]z^3 + \dots$$

بنابراین

$$b_1 = \frac{\beta_1 c_1}{2},$$
$$b_2 = \frac{\beta_1}{2}\left(c_2 - \frac{c_1^2}{2}\right) + \frac{\beta_2 c_1^2}{4},$$
$$b_3 = \frac{\beta_1}{2}\left(c_3 - c_1 c_2 + \frac{c_1^3}{4}\right) + \frac{\beta_2 c_1}{2}\left(c_2 - \frac{c_1^2}{2}\right) + \frac{\beta_3 c_1^3}{8}. \quad (۹.۳)$$

با استفاده از معادلات (۶.۳)،(۸.۳) در معادله (۹.۳)، عبارات زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$a_2 = \frac{(\alpha-\beta)c_1}{2},$$
$$a_3 = \frac{(\alpha-\beta)}{8}\left[2c_2 + (\alpha - 2\beta - 1)c_1^2\right],$$
$$a_4 = \frac{(\alpha-\beta)}{48}\left[8c_3 + (6\alpha - 14\beta - 8)c_1 c_2 + (\alpha^2 + 6\beta^2 - 5\alpha\beta - 3\alpha + 7\beta + 2)c_1^3\right]$$
$$(۱۰.۳)$$

از رابطه (۱۰.۳) عبارت زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$a_۲a_۴-a_۳^۲=\frac{(\alpha-\beta)^۲}{۱۹۲}\left[۱۶c_۱c_۳+(-۴\beta-۴)c_۱^۲c_۲+(-\alpha^۲+۲\alpha\beta+۲\beta+۱)c_۱^۴-۱۲c_۲^۲\right].$$

(۱۱.۳)

با استفاده از لم (۱۰.۰.۳)،(۱۱.۰.۳)، با جاگذاری $c_۲$ و $c_۳$، در معادله (۱۱.۳) عبارت زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}|a_۲a_۴-a_۳^۲|=&\frac{(\alpha-\beta)^۲}{۱۹۲}\left|(۲\alpha\beta-\alpha^۲)c_۱^۴-۲\beta c_۱^۴x(۴-c_۱^۲)\right.\\&\left.-x^۲(۴-c_۱^۲)(۱۲+c_۱^۲)+۸c_۱(۴-c_۱^۲)(۱-|x|^۲)z\right|.\end{aligned}$$

فرض کنید $c_۱=c$ و $c\in[۰,۲]$ ، با استفاده از نامساوی مثلث و $|z|\leq ۱$، داریم:

$$\begin{aligned}|a_۲a_۴-a_۳^۲|\leq&\frac{(\alpha-\beta)^۲}{۱۹۲}\left[|۲\alpha\beta-\alpha^۲|c^۴+۸c(۴-c^۲)+۲|\beta|(۴-c^۲)c^۲\delta\right.\\&\left.+\{(۴-c^۲)(۱۲+c^۲)-۸c(۴-c^۲)\}\delta^۲\right]\\=&\frac{(\alpha-\beta)^۲}{۱۹۲}F(\delta),\end{aligned}$$

که $\delta=|x|\leq ۱$ و

$$\begin{aligned}F(\delta)=&|۲\alpha\beta-\alpha^۲|c^۴+۸c(۴-c^۲)+۲|\beta|(۴-c^۲)c^۲\delta\\&+\{(۴-c^۲)(۱۲+c^۲)-۸c(۴-c^۲)\}\delta^۲.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F'(\delta)=&+۲|\beta|(۴-c^۲)c^۲+۲\delta\{(۴-c^۲)(۱۲+c^۲)-۸c(۴-c^۲)\}\\=&(۴-c^۲)(۲|\beta|c^۲+۲۴\delta+۲\delta c^۲-۱۶c\delta)\geq ۰\end{aligned}$$

$F(\delta)$ یک تابع صعودی است. بنابراین $MaxF(\delta)=F(۱)$، در نتیجه

$$|a_۲a_۴-a_۳^۲|\leq\frac{(\alpha-\beta)^۲}{۱۹۲}G(c),\qquad (۱۲.۳)$$

که $G(c)=F(۱)$. بنابراین

$$G(c)=[|۲\alpha\beta-\alpha^۲|-۲|\beta|-۱]c^۴+[۸|\beta|-۸]c^۲+۴۸.$$

در نتیجه

$$G'(c)=۴[|۲\alpha\beta-\alpha^۲|-۲|\beta|-۱]c^۳+۲[۸|\beta|-۸]c,$$

$$G''(c) = ۱۲[|۲\alpha\beta - \alpha^۲| - ۲|\beta| - ۱]c^۲ + ۲[۸|\beta| - ۸].$$

وقتی $G'(c) = ۰$ داریم:

$$c\{۴[|۲\alpha\beta - \alpha^۲| - ۲|\beta| - ۱]c^۲ + ۲[۸|\beta| - ۸]\} = ۰.$$

در $c = ۰$، مقدار $G''(c)$ منفی است، بنابراین $MaxG(c) = G(۰)$.
بنابراین از معادله (۱۲.۳)، معادله (۴.۳) را به‌دست می‌آوریم. □

نامساوی معادله (۴.۳)، برای $c_۱ = ۰, c_۲ = ۲, c_۳ = ۰$، به مساوی تبدیل می‌شود.

نتیجه ۲.۱.۳. *اگر $f(z) \in S^*$، آنگاه* $|a_۲a_۴ - a_۳^۲| \leq ۱$.

قضیه ۳.۱.۳. *اگر $f \in C(\alpha, \beta)$، آنگاه*

$$|a_۲a_۴ - a_۳^۲| \leq \frac{(\alpha-\beta)^۲}{۵۷۶}\left[\frac{۱۶|-\alpha^۲ + ۲\beta^۲ + \alpha\beta| - |\alpha - ۵\beta|^۲ - ۱۲|\alpha - ۵\beta| - ۳۶}{|-\alpha^۲ + ۲\beta^۲ + \alpha\beta| - |\alpha - ۵\beta| - ۲}\right]. \quad (۱۳.۳)$$

برهان. اگر $f(z) \in C(\alpha, \beta)$، آنگاه یک تابع شوارتز $\omega(z) \in U$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\frac{(zf'(z))'}{f'(z)} = \phi(\omega(z)), \quad (۱۴.۳)$$

که

$$\begin{aligned}\phi(z) = \frac{۱+\alpha z}{۱+\beta z} &= ۱ + (\alpha-\beta)z - \beta(\alpha-\beta)z^۲ + \beta^۲(\alpha-\beta)z^۳ + \dots \\ &= ۱ + \beta_۱ z + \beta_۲ z^۲ + \beta_۳ z^۳ + \dots \end{aligned} \quad (۱۵.۳)$$

تابع $p_۱(z)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$p_۱(z) = \frac{۱+\omega(z)}{۱-\omega(z)} = ۱ + c_۱z + c_۲z^۲ + c_۳z^۳ + \dots \quad (۱۶.۳)$$

چون $\omega(z)$ یک تابع شوارتز است در نتیجه $Re(p_۱(z)) > ۰$ و $p_۱(۰) = ۱$.
تابع $h(z)$ را به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$h(z) = \frac{(zf'(z))'}{f'(z)} = ۱ + b_۱z + b_۲z^۲ + b_۳z^۳ + \dots \quad (۱۷.۳)$$

با توجه به معادلات (۱۴.۳)،(۱۵.۳)،(۱۷.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
h(z) &= \phi\left(\frac{p_1(z)-1}{p_1(z)+1}\right) = \phi\left(\frac{c_1z+c_2z^2+c_3z^3+\dots}{2+c_1z+c_2z^2+c_3z^3+\dots}\right)\\
&= \phi\left(\frac{1}{2}c_1z+\frac{1}{2}(c_2-\frac{c_1^2}{2})z^2+\frac{1}{2}(c_3-c_1c_2+\frac{c_1^3}{4})z^3+\dots\right)\\
&= 1+\frac{\beta_1c_1}{2}z+\left[\frac{\beta_1}{2}\left(c_2-\frac{c_1^2}{2}\right)+\frac{\beta_2c_1^2}{4}\right]z^2\\
&+\left[\frac{\beta_1}{2}\left(c_3-c_1c_2+\frac{c_1^3}{4}\right)+\frac{\beta_2c_1}{2}\left(c_2-\frac{c_1^2}{2}\right)+\frac{\beta_3c_1^3}{8}\right]z^3+\dots
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{\beta_1c_1}{2},\\
b_2 &= \frac{\beta_1}{2}\left(c_2-\frac{c_1^2}{2}\right)+\frac{\beta_2c_1^2}{4},\\
b_3 &= \frac{\beta_1}{2}\left(c_3-c_1c_2+\frac{c_1^3}{4}\right)+\frac{\beta_2c_1}{2}\left(c_2-\frac{c_1^2}{2}\right)+\frac{\beta_3c_1^3}{8}.
\end{aligned} \tag{۱۸.۳}$$

با استفاده از معادلات (۱۵.۳)،(۱۷.۳) در معادله (۱۸.۳) روابط زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{(\alpha-\beta)c_1}{4},\\
a_3 &= \frac{(\alpha-\beta)}{24}\left[2c_2+(\alpha-2\beta-1)c_1^2\right],\\
a_4 &= \frac{(\alpha-\beta)}{576}\left[24c_3+(18\alpha-42\beta-24)c_1c_2+(3\alpha^2+18\beta^2-15\alpha\beta-9\alpha+21\beta+6)c_1^3\right].
\end{aligned} \tag{۱۹.۳}$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}
a_2a_4-a_3^2 = \frac{(\alpha-\beta)^2}{2304}&[24c_1c_3+(2\alpha-10\beta-8)c_1^2c_2\\
&+(-\alpha^2+2\beta^2+\alpha\beta-\alpha+5\beta+2)c_1^4-16c_2^2].
\end{aligned} \tag{۲۰.۳}$$

با استفاده از لم (۱۰.۰.۳)،(۱۱.۰.۳)، با جاگذاری c_2 و c_3، در معادله (۲۰.۳)، عبارت زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}
&|a_2a_4-a_3^2|\\
&= \frac{(\alpha-\beta)^2}{2304}\left|(\alpha\beta-\alpha^2+2\beta^2)c_1^4+c_1^2x(4-c_1^2)(\alpha-5\beta)\right.\\
&\qquad \left.-x^2(4-c_1^2)(16+2c_1^2)+12c_1(4-c_1^2)(1-|x|^2)z\right|.
\end{aligned}$$

فرض کنید $c_1 = c$ و $c \in [0, 2]$، با استفاده از نامساوی مثلث و این‌که $|z| \leq 1$، داریم:

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \frac{(\alpha-\beta)^2}{2304}\left[|\alpha\beta - \alpha^2 + 2\beta^2|c^4 + 12c(4-c^2) + c^2\delta(4-c^2)|\alpha - 5\beta|\right.$$
$$\left. + \{(4-c^2)(16+2c^2) - 12c(4-c^2)\}\delta^2\right] = \frac{(\alpha-\beta)^2}{2304}F(\delta),$$

که $\delta \leq 1$ و

$$F(\delta) = |\alpha\beta - \alpha^2 + 2\beta^2|c^4 + 12c(4-c^2) + c^2\delta(4-c^2)|\alpha - 5\beta|$$
$$+ \{(4-c^2)(16+2c^2) - 12c(4-c^2)\}\delta^2.$$

$F(\delta)$ یک تابع صعودی است. بنابراین

$$MaxF(\delta) = F(1).$$

در نتیجه

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \frac{(\alpha-\beta)^2}{2304}G(c), \tag{۲۱.۳}$$

که $G(c) = F(1)$. بنابراین

$$G(c) = [|\alpha\beta - \alpha^2 + 2\beta^2| - |\alpha - 5\beta| - 2]c^4$$
$$+ [4|\alpha - 5\beta| - 8]c^2 + 64.$$

در نتیجه

$$G'(c) = 4[|\alpha\beta - \alpha^2 + 2\beta^2| - |\alpha - 5\beta| - 2]c^3$$
$$+ 2[4|\alpha - 5\beta| - 8]c$$

و

$$G''(c) = 12[|\alpha\beta - \alpha^2 + 2\beta^2| - |\alpha - 5\beta| - 2]c^2$$
$$+ 2[4|\alpha - 5\beta| - 8].$$

با استفاده از عبارت $G'(c) = 0$، معادله زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$c\{4[|\alpha\beta - \alpha^2 + 2\beta^2| - |\alpha - 5\beta| - 2]c^2 + 2[4|\alpha - 5\beta| - 8]\} = 0,$$

در

$$c = \sqrt{\frac{4 - 2|\alpha - 5\beta|}{|-\alpha^2 + 2\beta^2 + \alpha\beta| - |\alpha - 5\beta| - 2}} = c',$$

$G''(c)$ منفی است. بنابراین

$$MaxG(c) = G(c').$$

بنابراین از معادله (۲۱.۳)، معادله (۱۳.۳) را به‌دست می‌آوریم. □

به ازای $c_1 = c'$، $c_2 = c_1^2 - 2$ و $c_3 = c_1(c_1^2 - 3)$، در حکم قضیه تساوی برقرار است.

نتیجه ۴.۱.۳. *اگر $f(z) \in C$، آنگاه*

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \frac{1}{8}.$$

۲.۳ دترمینان هنکل برای p تایی ستاره‌گون و توابع محدب از مرتبه α

تعریف ۱.۲.۳. رده توابع $f(z)$،

$$f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n \quad (p \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}),$$

که در دیسک واحد باز

$$E = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\},$$

تحلیلی است را با نماد A_p نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۲.۳. اگر $f(z) \in A_p$ در شرایط

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha \quad (z \in E),$$

برای α ای که $(0 \leq \alpha < p)$، صدق کند، گوییم $f(z)$، p تایی ستاره‌گون از مرتبه α در E است.

تعریف ۳.۲.۳. رده توابع $p(z)$،

$$p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k,$$

که در E تحلیلی‌اند و در رابطه

$$Rep(z) > 0 \quad (z \in E),$$

صدق می‌کند را با نماد $\mathcal{P}$ نشان می‌دهیم. در این صورت گوییم $p(z) \in \mathcal{P}$ تابع کاراتئودوری است.

ما $S_p^*(\alpha)$ را زیررده‌ای از A_p نمادگذاری می‌کنیم که شامل توابع p مقداری ستاره‌گون مرتبه α است. به‌طور مشابه می‌گوییم $f(z)$ متعلق به $C_p(\alpha)$، یعنی p تایی توابع محدب مرتبه α در E است اگر $f(z) \in A_p$ در نامساوی

$$Re\left(۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha \quad (z \in E),$$

برای α ای که $(۰ \leq \alpha < p)$، صدق کند .

در این بخش نمادگذاری زیر را داریم:
$C_p = C_p(۰)$ ،$S_p^* = S_p^*(۰)$.
$C(\alpha) = C_۱(\alpha)$ و $S^*(\alpha) = S_۱^*(\alpha)$.

لم ۴.۲.۳. *اگر تابع*

$$p(z) = ۱ + \sum_{k=۱}^{\infty} c_k z^k \in \mathcal{P},$$

آن‌گاه $|c_k| \leq ۲ \quad (k = ۱, ۲, ۳, \dots)$.

نامساوی لم بالا به ازای

$$p(z) = \frac{۱+z}{۱-z} = ۱ + \sum_{k=۱}^{\infty} ۲z^k,$$

به مساوی تبدیل می‌شود. با استفاده از نتایج بالا، لم زیر نتیجه می‌شود.

لم ۵.۲.۳. *اگر تابع*

$$p(z) = p + \sum_{k=۱}^{\infty} c_k z^k,$$

در رابطه $Rep(z) > \alpha$ *، برای α ای که* $(۰ \leq \alpha < p)$*، صدق کند، آن‌گاه*

$$|c_k| \leq ۲(p-\alpha) \quad (k = ۱, ۲, ۳, \dots), \tag{۲۲.۳}$$

که در آن، $z \in E$.

نامساوی لم بالا به ازای

$$p(z) = \frac{p + (p - ۲\alpha)z}{۱-z} = p + \sum_{k=۱}^{\infty} ۲(p-\alpha)z^k,$$

به مساوی تبدیل می‌شود.

برهان. فرض کنید

$$q(z)=\frac{p(z)-\alpha}{p-\alpha}=۱+\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{c_k}{p-\alpha}z^k.$$

توجه کنید که $q(z)\in\mathcal{P}$ و با استفاده از لم (۴.۲.۳) داریم:

$$\left|\frac{c_k}{p-\alpha}\right|\leq ۲\quad (k=۱,۲,۳,\dots),\tag{۲۳.۳}$$

در نتیجه:

$$|c_k|\leq ۲(p-\alpha)\quad (k=۱,۲,۳,\dots).\tag{۲۴.۳}$$

□

لم ۶.۲.۳. *اگر تابع $p(z)\in\mathcal{P}$، آن‌گاه عبارت*

$$\begin{cases}۲c_۲=c_۱^۲+(۴-c_۱^۲)\zeta,\\ ۴c_۳=c_۱^۳+۲(۴-c_۱^۲)c_۱\zeta-(۴-c_۱^۲)c_۱\zeta^۲+۲(۴-c_۱^۲)(۱-|\zeta|^۲)\eta.\end{cases}$$

برای اعداد مختلط ζ و η $(|\zeta|\leq ۱,|\eta|\leq ۱)$، به‌دست می‌آید.

با استفاده از لم (۶.۲.۳)، ما لم زیر را داریم.

لم ۷.۲.۳. *اگر تابع*

$$p(z)=p+\sum_{k=۱}^{\infty}c_kz^k,$$

در رابطه $Rep(z)>\alpha$، برای α ای که $(۰\leq\alpha<p)$، صدق کند که $z\in E$، آن‌گاه برای اعداد مختلط ζ,η $(|\zeta|\leq ۱,|\eta|\leq ۱)$، روابط زیر برقرار است:

$$\begin{aligned}۲(p-\alpha)c_۲&=c_۱^۲+\{۴(p-\alpha)^۲-c_۱^۲\}\zeta\\ ۴(p-\alpha)^۲c_۳&=c_۱^۳+۲\{۴(p-\alpha)^۲-c_۱^۲\}c_۱\zeta\\ &\quad-\{۴(p-\alpha)^۲-c_۱^۲\}c_۱\zeta^۲+۲(p-\alpha)\{۴(p-\alpha)^۲-c_۱^۲\}(۱-|\zeta|^۲)\eta.\end{aligned}\tag{۲۵.۳}$$

برهان. چون

$$q(z)=\frac{p(z)-\alpha}{p-\alpha}=۱+\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{c_k}{p-\alpha}z^k\in\mathcal{P},$$

به‌جای $c_۲$، عبارت $\frac{c_۲}{p-\alpha}$ و به‌جای $c_۳$، عبارت $\frac{c_۳}{p-\alpha}$ را در لم (۶.۲.۳) قرار می‌دهیم. بنابراین حکم به‌دست می‌آید.
□

ملاحظه ۸.۲.۳. اگر

$$f(z) \in S_p^*(\alpha),$$

آن‌گاه تابع

$$p(z) = p + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k,$$

وجود دارد به‌طوری‌که $Rep(z) > \alpha$ و

$$zf'(z) = f(z)p(z)$$

که $z \in E$ است.

مراجع

[1] T.O. Babalola and J.O. Opoola, On the ceofficients of certain analysis and univalent functions, Advances in inequalties for series, (Edited by S.S. Dragomir and A. Sofo), Nova Science Publishers (2008), 5–17.

[2] P.L. Duren, Univalent functions, Springer Verlag, New York Inc, 1983,. MR0708494(85j:30034). Zbl 514.30001.

[3] T. Hayami and S. Owa, Generalized Hankel determinant for certain classes, Int. Journal ofMath. Analysis, 4(52) (2010), 2473–2585.MR2770050(2011m:30032). Zbl 1226.30015.

[4] A. Janteng, S.A. Halim and M. Darus, Hankel determinant for starlike and convex functions, Int. Journal of Math. Analysis, I(13) (2007), 619–625. MR2370200. Zbl 1137.30308.

[5] A. Janteng, S.A. Halim and M. Darus, Estimate on the second Hankel func- tional for functions whose derivative has a positive real part, Journal of Quality Measurement and Analysis, 4(1) (2008), 189–195.

[6] R.J. Libera and E.J. Zlotkiewiez, Early coefficients of the inverse of a regular convex function, Proc. Amer. Math. Soc., 85(2) (1982), 225–230.

[7] R.J. Libera and E.J. Zlotkiewiez, Coefficient bounds for the inverse of a function with derivative in P, Proc. Amer. Math. Soc., 87(2) (1983), 251–257. MR0681830(84a:30024). Zbl 0488.30010.

[8] G. Shanmugam, B. Adolf Stephen and K.G. Subramanian, Second Hankel determinant for certain classes of analytic functions, Bonfring International Journal of Data Mining,

[9] R. M. Goel and B. S. Mehrok, On the coefficients of a subclass of starlike functions, Ind. J. Pure and Appl. Math., 12(5)(1981), 634-647.

[10] Aini Janteng, Suzeini Abdul Halim and Maslina Darus, Hankel determinant for starlike and convex functions, Int. J. Math. Anal., 1(13) (2007), 619-625.

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

توابع تحلیلی	Analytic Functions
توابع محدب	Convex Functions
توابع محدب p تایی	p-valently convex Functions
توابع ستاره‌گون p تایی	p-valently Starlike Functions
توابع شوارتز	Schwartz functions
دترمینان هانکل دوم	Second Hankel Determinant
توابع ستاره‌گون	Starlike Functions
زیر ترتیب	Subordination

Aabstract

The present thesis is concerned with the estimate of an upper bound of secend Hankel determinant for the functions belonging to the subclasses of the classes of starlike and convex functions in the unit disc. Results proved by various authors can be obtained as special cases of the results of this paper by giving particular values to the parameters α and β.
Keywords: Analitic Functions,Starlike Function, convex Function, Schwarz Function, Second Hankel Determinant

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

ON SECOND HANKEL DETERMINANT FOR TWO NEW SUBCLASSES OF ANALITIC FUNCTION

Nazanin Alizadeh Siahkesh

Supervisor

Ahmad Zireh

September 2016