دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

احاطه‌گری متقاطع مستقل در گراف‌ها

زهرا غلامی

استاد راهنما

دکتر نادر جعفری راد

استاد مشاور

دکتر مهدی‌رضا خورسندی

تیر ۱۳۹۵

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

که با تمام آنچه که داشتند

موجبات تحصیل مرا فراهم آورده و من هر چه دارم

مرهون زحمات و دعای خیر این بزرگواران است و اقرار می کنم که در جوابشان عاجزم...

سپاس گزاری

سپاس بر خدایی که نگین کوثر مادرم و اسطوره بزرگی پدرم را بر من تقدیم کرد تا همیشه با نگاه کردن بر چشمان پر فروغ آن‌ها باز یاد آور این نکته بر من باشند که زندگی در جریان است.
امروز که به همت پروردگار بی همتا و به مدد دعای پدر و مادر عزیز تر از جانم و لطف و راهنمایی اساتید گرانقدرم برگی دیگر از دفتر بزرگ علم و دانش را ورق زدم خاضعانه دست بوس تمام کسانی ام که باعث دلگرمی من بودند.
در آغاز بر خود لازم می‌دانم که از استاد راهنمای بردبارم، **جناب آقای دکتر نادر جعفری راد**، که تمام روزهایی که تحت نظارت ایشان مشغول به تحقیق بودم سرشار از آموختن توأم با علم و اخلاق بود، نهایت تشکر را دارم. در پرتو روحیه پر از امید ایشان بود که تمام دلسردی‌ها رنگ می‌باخت و در سایه وجود خستگی ناپذیرشان، پرسش‌های گاه و بی گاهم پاسخ می‌یافت. از استاد مشاور ارجمندم، **جناب آقای دکتر مهدی‌رضا خورسندی** که زحمت مشاوره این پایان‌نامه را تقبل فرمودند کمال امتنان را دارم.
همچنین از اساتید فرهیخته و دلسوز **جناب آقای دکتر صادق رحیمی شعرباف مقدس** و **جناب آقای دکتر میثم علیشاهی** که زحمت داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند با تمام وجود تشکر و قدردانی می‌نمایم.
در آخر بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و همچنین از برادران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و محبت‌های بی دریغشان صمیمانه تشکر می‌نمایم.

شکر خدا که هر چه طلب کردم از خدا   بر منتهای همت خود کامران شدم

تعهد نامه

اینجانب **زهرا غلامی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **احاطه‌گری متقاطع مستقل در گراف‌ها** ، تحت راهنمایی **دکتر نادر جعفری راد** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه صنعتی شاهرود " یا " Shahrood University of Technology " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

زهرا غلامی
تیر ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

یک زیر مجموعه S از رئوس در گراف $G = (V, E)$ یک مجموعه احاطه‌گر نامیده می‌شود هرگاه هر رأس در $V - S$ مجاور با حداقل یک رأس در S باشد. کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر در گراف G را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامند و با نماد $\gamma(G)$ نشان می‌دهند. یک مجموعه احاطه‌گر که با هر مجموعه مستقل ماکزیمم در G اشتراک داشته باشد یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل نامیده می‌شود. کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل در G را عدد احاطه‌گری متقاطع مستقل G می‌نامند و با نماد $\gamma_{it}(G)$ نشان می‌دهند.

این پایان‌نامه به بررسی این پارامتر می‌پردازد و مقدار دقیق عدد احاطه‌گری متقاطع مستقل در چندین خانواده از گراف‌ها از قبیل مسیرها، دورها و چرخ‌ها را مشخص می‌کند. همچنین کران‌های مختلفی برای γ_{it} بدست آمده و پیچیدگی این پارامتر نیز بررسی می‌شود. در این پایان‌نامه برای اولین بار به برخی از مسائل مطرح شده در خصوص عدد احاطه‌گری متقاطع مستقل روی گراف‌ها پاسخ داده می‌شود.

کلمات کلیدی: مجموعه احاطه‌گر، مجموعه مستقل، مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

1. H. Abdollahzadeh Ahangar, Z. Gholami, N. Jafari Rad, *On the independent transversal domination in graphs*, submitted for publication.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

فصل ۱

مفاهیم اولیه گراف

۱.۱ مقدمه

در این فصل برخی از تعاریف و مفاهیم اولیه و همچنین قضیه‌هایی از نظریه گراف که در فصل‌های بعد به آن‌ها نیاز داریم را بیان می‌کنیم. قابل توجه است که گراف‌های مورد بحث در سراسر این پایان‌نامه، گراف‌های ساده، متناهی و غیربدیهی هستند که در ادامه به‌طور دقیق تعریف می‌شوند. تمام اصطلاحات و تعاریف نظریه گراف در این پایان‌نامه برگرفته از مراجع [۶] ، [۲۲] و [۱۳] هستند.

۲.۱ مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۲.۱. منظور از یک **گراف** [۱] یک سه‌تایی $(V(G), E(G), \Psi(G))$ است که در آن $V(G)$ یک مجموعه ناتهی از عناصر به نام رئوس و $E(G)$ مجموعه‌ای از یال‌ها و $\Psi(G)$ تابع وقوع است که به هر یال G یک جفت نامرتب (نه لزوماً مجزا) از رأس‌های G را متناظر می‌کند.
اگر e یک یال و v_1 و v_2 رأس‌های آن باشند به قسمی‌که $\Psi_G(e) = v_1v_2$ آن‌گاه گویند e، v_1 را به v_2 وصل می‌کند و این دو رأس را دو انتهای e نامند. از این پس گراف را به‌طور خلاصه به صورت $G = (V, E)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۲.۱. دو رأس u و v را **مجاور** [۲] گوییم هرگاه بین آن‌ها یالی موجود باشد.

تعریف ۳.۲.۱. یک رأس را در گراف G **تنها** [۳] گوییم هرگاه هیچ یالی متصل با آن نباشد. مجموعه رئوس تنها از گراف G را با $isol(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۲.۱. **طوقه** [۴] در یک گراف یالی است که دو رأس انتهایی‌اش برهم منطبق باشند. همچنین، اگر در یک گراف بین دو رأس دلخواه u و v دو یال یا بیش از دویال وجود داشته باشند، آن‌گاه آن‌ها را **یال‌های چندگانه** [۵] نامیم.

تعریف ۵.۲.۱. گرافی که هیچ طوقه‌ای نداشته باشد و بین هر دو رأس آن بیش از یک یال موجود نباشد را **گراف ساده** [۶] می‌نامیم.

در این پایان‌نامه، منظور از گراف G، گراف ساده G است.

تعریف ۶.۲.۱. تعداد رئوس گراف G را **مرتبه** [۷] گراف نامیم و با $n(G)$ یا n نشان می‌دهیم.

[۱] Gragh
[۲] Adjacent
[۳] Single
[۴] Loop
[۵] Multiple edges
[۶] Simple graph
[۷] Order

تعریف ۷.۲.۱. گراف تهی (پوچ) [۸] گرافی است، شامل $n \geq 1$ رأس، که مجموعه یال‌های آن تهی است.

تعریف ۸.۲.۱. گرافی که یک رأس داشته باشد، **بدیهی** [۹] و سایر گراف‌ها را **غیر بدیهی** [۱۰] می‌نامیم.

تعریف ۹.۲.۱. اگر مجموعه رأس‌های یک گراف، **متناهی** [۱۱] باشد گراف مذکور را متناهی می‌نامند در غیر این‌صورت گراف **نامتناهی** [۱۲] است.

تعریف ۱۰.۲.۱. یک **زیرگراف** [۱۳] از گراف G، گرافی است مانند H بطوریکه $E(H) \subseteq E(G)$ و $V(H) \subseteq V(G)$.

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنید G یک گراف با مجموعه رئوس V و $S \subseteq V$ باشد. زیرگرافی از G که مجموعه رئوس آن S باشد و یال‌هایی از G در آن باشند که هر دو نقطه پایانی آنها متعلق به S است را **زیرگراف القایی** [۱۴] توسط S می‌نامیم و با نماد $\langle S \rangle$ نشان می‌دهیم. برای نمونه در شکل ۱.۱، اگر گراف سمت راست G و $S = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ آنگاه گراف سمت چپ $\langle S \rangle$ خواهد بود.

شکل ۱.۱: G و $\langle S \rangle$.

تعریف ۱۲.۲.۱. تعداد یال‌های مرتبط با رأس v در گراف G را **درجه** [۱۵] رأس v گوییم و اگر یال مذکور طوقه باشد در محاسبه درجه رأس دو بار به‌شمار می‌آید. درجه رأس v را با $\deg(v)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۲.۱. ماکزیمم درجه رئوس یک گراف را با $\Delta(G)$ یا Δ و **مینیمم درجه** رئوس را با $\delta(G)$ یا δ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۴.۲.۱. یک **گشت** [۱۶] به طول k در گراف G یک دنباله متناوب $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k$ از رأس‌ها و یال‌ها است به‌طوریکه به ازای $i = 1, 2, \ldots, k$، $e_i = v_{i-1}v_i$ یک یال باشد.

[۸] Empty graph
[۹] Trivial graph
[۱۰] Nontrivial graph
[۱۱] Finite graph
[۱۲] Infinite graph
[۱۳] Subgraph
[۱۴] Induced subgraph
[۱۵] Degree
[۱۶] Walk

تعریف ۱.۲.۱۵. گشتی که در آن هیچ یالی تکرار نشده باشد را **گذر** [۱۷] می‌نامیم.

تعریف ۱.۲.۱۶. یک **مسیر** [۱۸] گشتی است که هیچ رأس تکراری نداشته باشد. یک مسیر را در یک گراف به صورت فهرست مرتبی از رأس‌های متمایز $v_0, v_1, \ldots, v_n$ در نظر می‌گیریم بطوریکه به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $v_{i-1}v_i$ یک یال باشد. یک مسیر n رأسی را با P_n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱۷. یک **دور** [۱۹] گشت بسته‌ای به طول حداقل یک است که در آن رأس ابتدایی و رأس انتهایی بر یکدیگر منطبق هستند و هیچ رأس تکراری نداریم. یک دور n رأسی را با C_n نمایش می‌دهیم.

تعداد یال‌های موجود در یک گشت، گذر، مسیر یا دور را طول آن می‌نامیم.

تعریف ۱.۲.۱۸. اگر همه رئوس C_{n-1} را به یک رأس جدید متصل کنیم آن را **چرخ** [۲۰] نامیده و با W_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱۹. طول کوتاهترین مسیر بین دو رأس u و v را **فاصله** [۲۱] آن دو رأس گوییم و با $d(u,v)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۲۰. بیشترین فاصله بین دو رأس درگراف را **قطر** [۲۲] گراف G می‌نامیم و با نماد $\mathrm{diam}(G)$ نمایش می‌دهیم.

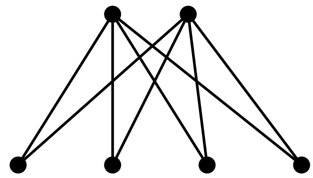
تعریف ۱.۲.۲۱. گرافی که بین هر دو رأس آن یک مسیر وجود داشته باشد را **گراف همبند** [۲۳] نامیم. گرافی که همبند نباشد، را **ناهمبند** [۲۴] می‌نامیم و هر یک از اجزای همبند آن را یک مؤلفه می‌نامیم. بنابراین گراف $G = (V, E)$ ناهمبند است اگر و تنها اگر بتوان مجموعه V را به دو مجموعه ناتهی V_1 و V_2 چنان افراز کرد که هیچ یالی در E به صورت $\{x, y\}$ که $x \in V_1$ و $y \in V_2$، وجود نداشته باشد. گراف همبند است اگر و تنها اگر فقط یک مؤلفه داشته باشد.

تعریف ۱.۲.۲۲. گرافی که در آن هر دو رأس متمایز توسط یک یال به یکدیگر متصل شده باشند **گراف کامل** [۲۵] نامیده می‌شود. یک گراف کامل n رأسی را با K_n نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۲۳. **گراف دوبخشی**[۲۶] گرافی است که مجموعه رأس‌های آن به دو زیر مجموعه X و Y چنان افراز شود، که یک سر تمام یال‌های G در X و سر دیگر آن‌ها در Y باشد.

[۱۷] Trail
[۱۸] Path
[۱۹] Cycle
[۲۰] Wheel
[۲۱] Distance
[۲۲] Diameter
[۲۳] Connected graph
[۲۴] Disconnected graph
[۲۵] Complete graph
[۲۶] Bipartite graph

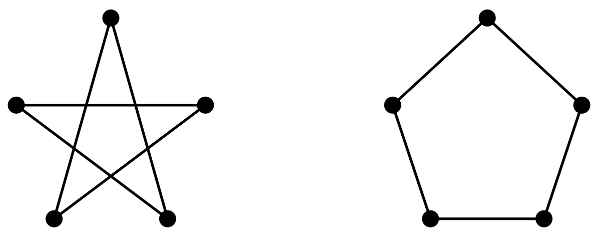
یک گراف دوبخشی با بخش‌های X و Y، که در آن هر رأس X، به هر رأس Y وصل شده باشد، گراف دوبخشی کامل نامیده می‌شود. اگر $|X| = m$ و $|Y| = n$، آن‌گاه گراف دوبخشی کامل را با $K_{m,n}$ نمایش می‌دهیم. شکل ۲.۱ گراف $K_{۲,۴}$ را نشان می‌دهد.



شکل ۲.۱: گراف $K_{۲,۴}$.

تعریف ۲۴.۲.۱. گراف G را **منتظم** [۲۷] گوییم هرگاه درجه تمام رئوس با هم برابر باشند. اگر درجه تمام رئوس r باشد، آن‌گاه گراف را r–منتظم نامیم.

تعریف ۲۵.۲.۱. دو گراف $G = (V, E)$ و $G' = (V', E')$ را **یکریخت** [۲۸] گوییم هرگاه تابع یک به یک و پوشای $f : V(G) \to V(G')$ موجود باشد که اگر $uv \in E(G)$ آن‌گاه $f(u)f(v) \in E(G')$. دو گراف یکریخت G و G' را با نماد $G \cong G'$ نشان می‌دهیم. برای مثال گراف‌های شکل زیر یکریخت هستند.



شکل ۳.۱: گراف‌های یکریخت G و G'.

تعریف ۲۶.۲.۱. مجموعه رأس‌هایی از G که با رأس v از گراف G مجاور باشند را **همسایگی باز** [۲۹] رأس v می‌نامیم و به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$N(v) = \{x \in V | vx \in E\}.$$

تعریف ۲۷.۲.۱. $N(v) \cup \{v\}$ را **همسایگی بسته** [۳۰] رأس v نامیده و با نماد $N[v]$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۸.۲.۱. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف ساده باشد. اگر $X \subseteq V$ و $v \in X$ باشد، آن‌گاه رأس u را **همسایه اختصاصی** [۳۱] v روی X گوییم هرگاه $N(u) \cap X = \{v\}$.

[۲۷] Regular graph

[۲۸] Isomorphic

[۲۹] Open neighbourhood

[۳۰] Closed neighbourhood

[۳۱] Private neighbour

تعریف ۲۹.۲.۱. فرض کنید G گرافی n رأسی باشد. **مکمل** [۳۲] (متمم) گراف G را با $\overline{G}$ نشان می‌دهیم و بدین صورت تعریف می‌کنیم، $V(G) = V(\overline{G})$ و هر دو رأس مانند u و v در $\overline{G}$ مجاور هستند اگر و تنها اگر در G مجاور نباشند (شکل ۴.۱). توجه کنید که مکمل گراف کامل، گراف تهی است و مکمل گراف کامل دوبخشی، اجتماع دو گراف کامل است.

(الف) (ب)

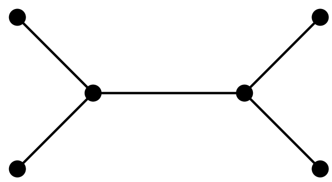
شکل ۴.۱: (الف) گراف G و (ب) گراف $\overline{G}$.

تعریف ۳۰.۲.۱. یک گراف فاقد دور را **جنگل** [۳۳] گوییم.

تعریف ۳۱.۲.۱. یک جنگل همبند را یک **درخت** [۳۴] می‌نامیم. به عبارت دیگر یک گراف همبند فاقد دور را درخت گوییم. هر رأس از درجه یک در یک درخت را **برگ** [۳۵] می‌نامیم.

تعریف ۳۲.۲.۱. برای هر $k \geq ۱$ درخت یکریخت با یک گراف دوبخشی $K_{۱,k}$ را **ستاره** [۳۶] می‌نامیم و با نماد $S_{۱,k}$ یا همان نماد $K_{۱,k}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳۳.۲.۱. برای $r, s \geq ۱$، یک **۲−ستاره** [۳۷] $S(r,s)$، درختی با دو رأس غیر برگ است بطوریکه یک رأس مجاور r برگ و رأس دیگر غیر برگ مجاور با s برگ باشد (شکل ۵.۱).



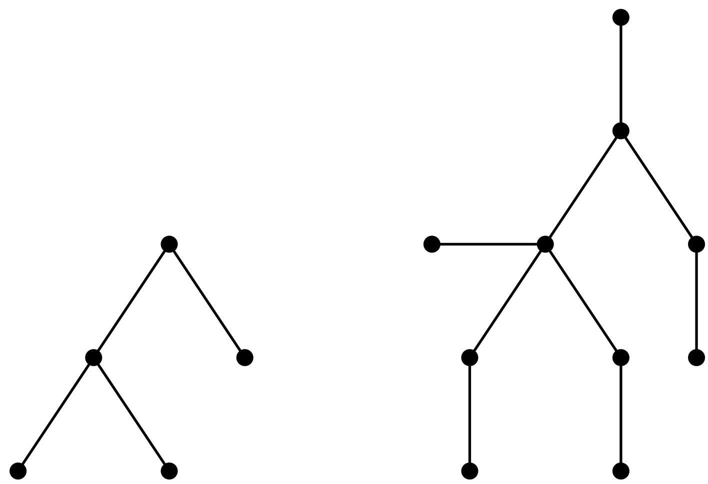
شکل ۵.۱: گراف $S(۲,۲)$.

تعریف ۳۴.۲.۱. یالی که بر یک رأس با درجه یک واقع است را **یال آویزان** [۳۸] می‌نامیم.

[۳۲] Complementary
[۳۳] Forest
[۳۴] Tree
[۳۵] Leaf
[۳۶] Star
[۳۷] Bistar
[۳۸] Pendant edge

تعریف ۳۵.۲.۱. رأسی از درجه یک در گراف G را **رأس پایانی** [۳۹] نامیم و مجموعه رئوس پایانی از گراف G را با نماد $End(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳۶.۲.۱. **تاج** [۴۰] در یک گراف مانند H که با H^+ یا $cor(H)$ نمایش داده می‌شود، گرافی از مرتبه $2|V(H)|$ است که با اضافه کردن یک یال آویزان به هر رأس از گراف H به دست می‌آید (شکل ۶.۱).



شکل ۶.۱: (الف) گراف H و (ب) گراف H^+.

تعریف ۳۷.۲.۱. رأسی که مجاور رأس پایانی باشد، **ساقه** [۴۱] نامیده می‌شود. مجموعه ساقه‌های گراف G را با نماد $Stem(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳۸.۲.۱. **زیرتقسیم** [۴۲] یک یال uv از یک گراف G عبارت است از عمل حذف uv و افزودن یک مسیر u، w و v از میان یک رأس جدید w.

تعریف ۳۹.۲.۱. یک **زیرتقسیم گراف** G گرافی است که می‌توان از گراف G با دنباله‌ای از زیرتقسیم‌های یالی بدست آورد.

تعریف ۴۰.۲.۱. یک **خوشه** [۴۳] از گراف ساده G، یک زیرگراف کامل از G است. مرتبه بزرگترین خوشه در گراف G را عدد خوشه‌ای می‌نامیم و با $\omega(G)$ نمایش می‌دهیم. یک خوشه از مرتبه $\omega(G)$ را خوشه ماکزیمم گوییم.

[۳۹] End–vertex

[۴۰] Corona

[۴۱] Stem

[۴۲] Subdivision

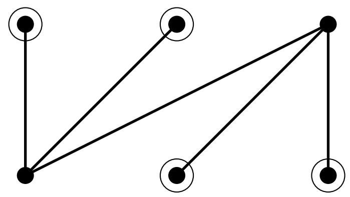
[۴۳] Clique

تعریف ۴۱.۲.۱. زیرمجموعه S از رأس‌های گراف G را یک **پوشش رأسی** [۴۴] می‌نامیم هرگاه حداقل یکی از نقاط پایانی هر یال G در S باشد. کوچکترین اندازه یک پوشش رأسی در G را عدد پوششی رأسی G نامیم و با نماد $\alpha_0(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴۲.۲.۱. زیرمجموعه M از یال‌های گراف G را یک **تطابق** [۴۵] گوییم هرگاه هیچ دو یالی در M رأس مشترک نداشته باشند. اگر M یک تطابق در G باشد و x رأسی روی یکی از یال‌های M باشد، آن‌گاه گوییم M، x را اشباع می‌کند. بزرگترین اندازه یک تطابق در G را عدد تطابقی می‌نامیم و با $\mu(G)$ نمایش می‌دهیم. یک تطابق از اندازه $\mu(G)$ را تطابق ماکزیمم یا $\mu(G)$–مجموعه می‌نامیم.

تعریف ۴۳.۲.۱. اگر هر رأس از گراف G توسط تطابق M اشباع شود آن‌گاه M را یک **تطابق کامل** می‌نامیم. به وضوح هر تطابق کامل، یک تطابق ماکزیمم نیز است.

تعریف ۴۴.۲.۱. یک **مجموعه مستقل** [۴۶] در گراف G، مجموعه‌ای از رئوس می‌باشد که هیچ دو رأس از آن مجاور نباشند. بزرگترین اندازه یک مجموعه مستقل در گراف G را عدد استقلال گراف G نامیده و با $\beta_0(G)$ نمایش می‌دهیم (شکل ۷.۱). یک مجموعه مستقل ماکزیمم را یک $\beta_0(G)$–مجموعه می‌نامیم. مجموعه تمام مجموعه‌های مستقل ماکزیمم در G را با $\Omega(G)$ نمایش می‌دهیم.



شکل ۷.۱: $\beta_0(G) = ۴$.

تعریف ۴۵.۲.۱. مجموعه مستقل S را یک **مجموعه مستقل ماکسیمال** [۴۷] می‌نامیم هرگاه هیچ رأس جدیدی مانند v وجود نداشته باشد بطوریکه $S \cup \{v\}$ نیز مستقل باشد.

تعریف ۴۶.۲.۱. **هسته** [۴۸] گراف G را با $core(G)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$core(G) = \bigcap_{S \in \Omega(G)} S \qquad , \qquad \xi(G) = |core(G)|.$$

تعریف ۴۷.۲.۱. تابع $f : V(G) \to A \neq \emptyset$ را یک **رنگ آمیزی** [۴۹] رأسی برای گراف G می‌نامیم و A را مجموعه رنگ‌ها می‌نامیم. رنگ آمیزی f را معتبر نامیم، هرگاه برای هر دو رأس مجاور x و y

[۴۴] Vertex covering

[۴۵] Matching

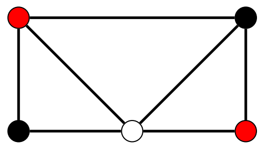
[۴۶] Independent set

[۴۷] Maximal independent set

[۴۸] Core

[۴۹] Coloring

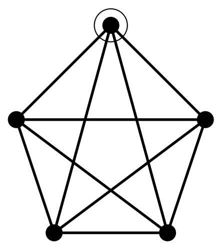
داشته باشیم $f(x) \neq f(y)$.
گراف G را k–رنگ پذیر نامیم هرگاه یک رنگ آمیزی معتبر f موجود باشد که $|f(V(G))| = k$. عدد رنگی گراف G عبارت است از مینیمم مقدار kای که G، k–رنگ پذیر باشد و آن را با $\chi(G)$ نشان می‌دهیم. توجه شود که رأس‌های هم‌رنگ در یک رنگ آمیزی معتبر گراف G، تشکیل یک مجموعه مستقل می‌دهند.
شکل ۸.۱ رنگ آمیزی گراف G را نشان می‌دهد که به راحتی می‌توان دید در این گراف عدد رنگی برابر ۳ است.



شکل ۸.۱: $\chi(G) = ۳$.

۳.۱ احاطه‌گری

تعریف ۱.۳.۱. یک مجموعه $S \subseteq V$ از رئوس در یک گراف $G = (V, E)$ را یک **مجموعه احاطه‌گر** [۵۰] می‌نامیم هرگاه هر رأس در $V - S$ مجاور با حداقل یک رأس در S باشد و یا به عبارتی $N[S] = V(G)$. کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر در گراف G را عدد احاطه‌گری G می‌نامیم و با نماد $\gamma(G)$ نشان می‌دهیم. یک مجموعه احاطه‌گر از اندازه $\gamma(G)$ را یک $\gamma(G)$–مجموعه از G می‌نامیم (شکل ۹.۱).
اگر رأس v از گراف G متعلق به برخی از γ–مجموعه‌ها باشد، آنگاه v یک $\gamma(G)$–رأس خوب نامیده می‌شود.



شکل ۹.۱: $\gamma(G) = ۱$.

تعریف ۲.۳.۱. مجموعه احاطه‌گر S را یک **مجموعه احاطه‌گر مستقل** [۵۱] نامیم، هرگاه هیچ دو رأسی

---
[۵۰] Dominating set
[۵۱] Independent dominating set

از S مجاور نباشند. کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر مستقل در گراف G را عدد احاطه‌گری مستقل G می‌نامیم و با نماد $i(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۳.۱. یک مجموعه احاطه‌گر S را یک **مجموعه احاطه‌گر همبند** [۵۲] نامیم، هرگاه $\langle S\rangle$ همبند باشد. کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر همبند در گراف G را عدد احاطه‌گری همبند G می‌نامیم و با نماد $\gamma_c(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۳.۱. یک مجموعه احاطه‌گر S را یک **مجموعه احاطه‌گر کلی** [۵۳] نامیم هرگاه $\langle S\rangle$ رأس تنها نداشته باشد. کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر کلی در گراف G را عدد احاطه‌گری کلی G می‌نامیم و با نماد $\gamma_t(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۳.۱. یک مجموعه $S \subseteq V$ که هر دو گراف G و $\overline{G}$ را احاطه کند را یک **مجموعه احاطه‌گر سراسری** [۵۴] می‌نامیم و کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر سراسری در گراف G را عدد احاطه‌گری سراسری G می‌نامیم و با نماد $\gamma_g(G)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۶.۳.۱. *[۱۳] اگر یک گراف G از مرتبه n هیچ رأس تنهایی نداشته باشد، آن‌گاه $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$.*

قضیه ۷.۳.۱. *[۱۳] برای هر گراف G با مرتبه زوج n که هیچ رأس تنهایی نداشته باشد، $\gamma(G) = \frac{n}{2}$ اگر و تنها اگر هر مؤلفه G یا C_4 باشد یا H^+ (برای هر گراف همبند H).*

---

[۵۲] Connected dominating set

[۵۳] Total dominating set

[۵۴] Global dominating set

فصل ۲

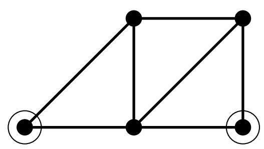
احاطه‌گری متقاطع مستقل در گراف‌ها

۱.۲ مقدمه

در این فصل، ما ابتدا مفهوم احاطه‌گری متقاطع مستقل را بیان می‌کنیم و مقدار دقیق عدد احاطه‌گری متقاطع مستقل را برای خانواده‌های متعارف از گراف‌ها از قبیل مسیرها، دورها و چرخ‌ها و همچنین برای گراف‌های ناهمبند مشخص می‌کنیم و سپس کران‌هایی را برای این عدد برحسب مرتبه گراف، درجه گراف، عدد پوششی رأسی و عدد خوشه‌ای بدست می‌آوریم. در پایان مقدار این عدد را برای گراف‌های دوبخشی تعیین و رابطه این پارامتر را با سایر پارامترها بررسی می‌کنیم. تمام قضایا و تعاریف در این فصل از مرجع [۱۲] هستند.

۲.۲ عدد احاطه‌گری متقاطع مستقل

تعریف ۱.۲.۲. یک مجموعه احاطه‌گر $S \subseteq V(G)$ در گراف G را یک **مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل** [۱] می‌نامیم هرگاه S با هر مجموعه مستقل ماکزیمم اشتراک داشته باشد. کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل را عدد احاطه‌گری متقاطع مستقل می‌نامیم و با نماد $\gamma_{it}(G)$ نمایش می‌دهیم (شکل ۱.۲). یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل S از گراف G که $|S| = \gamma_{it}(G)$ باشد را یک $\gamma_{it}(G)$–مجموعه می‌نامیم.



شکل ۱.۲: $\gamma_{it}(G) = ۲$.

مثال ۲.۲.۲. *اگر G یک گراف $n \geq ۲$ بخشی کامل باشد که r مجموعه مستقل ماکزیمم داشته باشد، آنگاه*

$$\gamma_{it}(G) = \begin{cases} ۲ & r = ۱ \\ r & \text{در غیر این صورت} \end{cases}.$$

برای دیدن این موضوع توجه کنید که، برای هر گراف چندبخشی کامل G یکی از حالت‌های زیر برقرار است.

- *یک بخش وجود دارد که اندازه آن از بقیه بخش‌ها بزرگتر باشد.*
- *$r \geq ۲$ بخش هم اندازه وجود دارند که اندازه آن‌ها از بقیه بخش‌ها بزرگتر باشند.*

[۱] Independent transversal dominating set

حالت اول. فرض کنید G یک گراف $n \geq ۲$ بخشی کامل باشد. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید بخش بزرگتر دارای اندازه l و بقیه بخش‌ها دارای اندازه $k < l$ باشند. فرض کنید v_iها که $i = ۱, ۲, \ldots, l$، رأس‌های بخش بزرگتر باشند و u_{ij} نماینده رأس j–ام در بخش i–ام باشد(برای $i = ۱, ۲, \ldots n$، $j = ۱, ۲, \ldots k$). می‌دانیم در گراف چندبخشی کامل هر بخش به تنهایی تشکیل یک مجموعه مستقل می‌دهد، لذا بخش بزرگتر یک مجموعه مستقل ماکزیمم است. پس گراف G دارای یک مجموعه مستقل ماکزیمم منحصربفرد است. حال، مجموعه $\{v_۱, u_{۱۱}\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G است زیرا بنا به کامل بودن گراف، تمامی رأس‌های u_{ij} به رأس $v_۱$ متصل هستند و همچنین تمامی رأس‌های v_i نیز مجاور $u_{۱۱}$ هستند، پس مجموعه فوق یک مجموعه احاطه‌گر است. از طرفی این مجموعه احاطه‌گر با مجموعه مستقل ماکزیمم گراف اشتراک دارد. در نتیجه مجموعه فوق نیز یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل است. پس $\gamma_{it}(G) \leq ۲$. حال نشان می‌دهیم $\gamma_{it}(G) \geq ۲$.
فرض خلف. فرض کنیم $\gamma_{it}(G) = ۱$. این بدان معنی است که یک رأس به تنهایی گراف را احاطه می‌کند و با هر مجموعه مستقل ماکزیمم اشتراک دارد که این تناقض است زیرا هر رأس، بخش خود را احاطه نمی‌کند، لذا $\gamma_{it}(G) \geq ۲$. بنابراین $\gamma_{it}(G) = ۲$.
حالت دوم. اگر r بخش هم‌اندازه وجود داشته باشند که از بقیه بخش‌ها بزرگتر باشند، آن‌گاه این r بخش هر کدام به تنهایی تشکیل یک مجموعه مستقل ماکزیمم را می‌دهند و لذا گراف G، r مجموعه مستقل ماکزیمم دارد. اگر از هر یک از این بخش‌ها یک رأس انتخاب کنیم و در مجموعه A قرار دهیم، آن‌گاه مجموعه A یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل است، لذا $\gamma_{it}(G) \leq |A| = r$. حال، اگر B یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل باشد، آن‌گاه B باید با هر بخش بزرگتر اشتراک داشته باشد، پس $|B| \geq r$. بنابراین $\gamma_{it}(G) = r$.

همچنین می‌توان نتیجه گرفت که $\gamma_{it}(K_n) = n$ و $\gamma_{it}(k_{m,n}) = ۲$. توجه کنید که در گراف K_n هر رأس به تنهایی تشکیل یک مجموعه مستقل ماکزیمم می‌دهد، پس n مجموعه مستقل ماکزیمم داریم و درنتیجه $\gamma_{it}(K_n) = n$. حال، چون گراف دوبخشی کامل $K_{m,n}$ دارای یک مجموعه مستقل ماکزیمم است پس $\gamma_{it}(k_{m,n}) = ۲$.

مثال ۳.۲.۲. برای هر ستاره $K_{۱,n-۱}$ مقدار γ_{it} برابر ۲ است. همچنین، برای گراف ۲–ستاره (به غیر از $P_۴$) مقدار γ_{it} برابر ۳ است.

مثال ۴.۲.۲. اگر G یک گراف همبند n رأسی باشد، آن‌گاه $\gamma_{it}(G^+) = n$.
برای دیدن این موضوع فرض کنید $V(G) = \{v_۱, v_۲, \ldots, v_n\}$ و $u_i(۱ \leq i \leq n)$ رأس پایانی در G^+ مجاور v_i باشد. در این‌صورت $S = \{u_۱, u_۲, \ldots, u_n\}$ یک γ–مجموعه از G^+ است. لذا $\gamma(G^+) \leq |S| = n$. از طرفی هر γ–مجموعه از G^+ شامل دقیقاً یکی از رأس‌های u_i و v_i، برای $i = ۱, ۲, \ldots n$، است. پس $\gamma(G^+) \geq n$. از این رو $\gamma(G^+) = n$. همچنین، مجموعه S تنها $\beta_۰$–مجموعه از G^+ است. بنابراین مجموعه S یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل از G^+ از کوچکترین مرتبه است. پس $\gamma_{it}(G^+) = n$.

قضیه ۵.۲.۲. *برای هر مسیر P_n از مرتبه n، داریم*

$$\gamma_{it}(P_n) = \begin{cases} ۲ & n = ۲,۳ \\ ۳ & n = ۶ \\ \lceil \frac{n}{۳} \rceil & \text{در غیر این صورت} \end{cases}.$$

برهان. فرض کنید $P_n = (v_۱, v_۲, \dots, v_n)$. چون $P_۲$ گراف کامل و $P_۳$ یک ستاره است، لذا بنا به مثال‌های ۲.۲.۲ و ۳.۲.۲، داریم $\gamma_{it}(P_۲) = \gamma_{it}(P_۳) = ۲$.

فرض کنید $n = ۶$. در این صورت $S = \{v_۱, v_۲, v_۵\}$ یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل از $P_۶$ است زیرا $N[S] = V(P_۶)$، پس S یک مجموعه احاطه‌گر است. همچنین، هر مجموعه مستقل ماکزیمم از $P_۶$ با S اشتراک دارد. بنابراین $\gamma_{it}(P_۶) \leq |S| = ۳$. حال نشان می‌دهیم $\gamma_{it}(P_۶) \geq ۳$. چون $D = \{v_۲, v_۵\}$ تنها γ–مجموعه از $P_۶$ است و $\{v_۱, v_۳, v_۶\}$ یک $\beta_۰$–مجموعه از $V - D$ است، لذا هر مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل شامل D و شامل حداقل یکی از رئوس $\beta_۰$–مجموعه $\{v_۱, v_۳, v_۶\}$ است. پس $\gamma_{it}(P_۶) \geq \gamma(P_۶) + ۱ = ۳$. بنابراین $\gamma_{it}(P_۶) = ۳$.

حال، فرض کنید $n \neq \{۲,۳,۶\}$. سه حالت را در نظر می‌گیریم.

(۱) اگر $n \equiv ۰ (mod\, ۳)$، آنگاه مجموعه $S = \{v_{۳i-۱} : ۱ \leq i \leq \frac{n}{۳}\}$ یک مجموعه احاطه‌گر از P_n است زیرا برای هر رأس v_i از P_n یکی از سه حالت زیر اتفاق می‌افتد:

- اگر $i = ۳k$. آنگاه چون $v_{i-۱} = v_{۳k-۱}$ عضو S است، پس v_i توسط $v_{i-۱}$ احاطه می‌شود.
- اگر $i = ۳k + ۱$. آنگاه چون $v_{i+۱} = v_{۳k+۲} = v_{۳k-۱}$ عضو S است، پس v_i توسط $v_{i+۱}$ احاطه می‌شود.
- اگر $i = ۳k + ۲$. آنگاه $v_i = v_{۳k+۲} = v_{۳k-۱}$ خود، عضو S است.

پس هر رأس $v_i (۱ \leq i \leq n)$ از P_n توسط دقیقاً یکی از رأس‌های S احاطه می‌شود. در نتیجه S یک مجموعه احاطه‌گر است. لذا $\gamma(P_n) \leq |S| = \lceil \frac{n}{۳} \rceil$. از طرفی هر رأس از S حداکثر خودش و دو رأس مجاورش را احاطه می‌کند، لذا هر رأس از S حداکثر ۳ رأس را احاطه می‌کند، پس S یک $\gamma(P_n)$–مجموعه است و $۳|S| \geq n$. لذا $\gamma(P_n) = |S| \geq \frac{n}{۳}$. بنابراین $\gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{۳} \rceil$.

به‌علاوه، $\langle V - S \rangle = (\lfloor \frac{n-۲}{۳} \rfloor) K_۲ \cup ۲K_۱$. از این‌رو هر مجموعه مستقل در $V - S$ شامل حداکثر $\lfloor \frac{n-۲}{۳} \rfloor + ۲$ رأس است. حال، چون $\beta_۰(P_n) = \lceil \frac{n}{۲} \rceil > \lfloor \frac{n-۲}{۳} \rfloor + ۲$ لذا $V - S$ شامل هیچ $\beta_۰$–مجموعه‌ای نیست. در نتیجه هر $\beta_۰(P_n)$–مجموعه‌ای با S اشتراک دارد. پس S یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل است. لذا $\gamma_{it}(P_n) \leq |S| = \lceil \frac{n}{۳} \rceil$. از طرفی، هر مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل یک مجموعه احاطه‌گر است، در نتیجه $\gamma(P_n) \leq \gamma_{it}(P_n)$. از این‌رو $\gamma_{it}(P_n) = \gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{۳} \rceil$.

(۲) اگر $n \equiv ۱ (mod\, ۳)$، آنگاه $S = \{v_{۳i+۱} : ۰ \leq i \leq \frac{n-۱}{۳}\}$ بنابه استدلال حالت قبل، یک γ–مجموعه از P_n است و $\gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{۳} \rceil$. از طرفی چون $\langle V - S \rangle = \lfloor \frac{n}{۳} \rfloor K_۲$، لذا هر

$\beta_\circ$–مجموعه در $V-S$ شامل حداکثر $\lfloor \frac{n}{۳} \rfloor + ۲$ رأس است. حال، چون $\lceil \frac{n}{۳} \rceil \leq \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$، لذا $V-S$ شامل هیچ $\beta_\circ$–مجموعه‌ای نیست. پس هر $\beta_\circ(P_n)$–مجموعه‌ای با S اشتراک دارد. لذا S یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل از P_n است. در نتیجه بنا به استلال حالت قبل، $\gamma_{it}(P_n) = \gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{۳} \rceil$.

(۳) اگر $n \equiv ۲ (mod\, ۳)$، آن‌گاه $S = \{v_{۳i+۱} : ۰ \leq i \leq \frac{n-۲}{۳}\}$ مشابه استلال حالت اول، یک γ–مجموعه از P_n است. حال، چون $\langle V-S \rangle = \frac{n-۲}{۳} K_۲ \cup K_۱$، لذا هر $\beta_\circ$–مجموعه در $V-S$ شامل حداکثر $\frac{n+۱}{۳}$ رأس است و از این‌رو $V-S$ شامل هیچ $\beta_\circ$–مجموعه‌ای نیست. بنابراین $\gamma_{it}(P_n) = \gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{۳} \rceil$.

□

قضیه ۶.۲.۲. *برای هر دور C_n از مرتبه n، داریم*

$$\gamma_{it}(C_n) = \begin{cases} ۳ & n = ۳, ۵, \\ \lceil \frac{n}{۳} \rceil & \text{در غیر این صورت} \end{cases}.$$

برهان. فرض کنید $C_n = (v_۱, v_۲, \ldots, v_n, v_۱)$. چون $C_۳$ گراف کامل است، لذا بنا به مثال ۲.۲.۲، داریم $\gamma_{it}(C_۳) = ۳$. حال، فرض کنید $n = ۵$. در این صورت $S = \{v_۱, v_۲, v_۳\}$ یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل از $C_۵$ است زیرا اولاً $N[S] = V(C_۵)$، پس S یک مجموعه احاطه‌گر است، دوماً به وضوح S با هر مجموعه مستقل ماکزیمم از $C_۵$ اشتراک دارد. بنابراین S یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل است، لذا $\gamma_{it}(C_۵) \leq ۳$. حال، نشان می‌دهیم $\gamma_{it}(C_۵) \geq ۳$. چون برای هر γ–مجموعه مانند D از $C_۵$، $V-D$ شامل یک مجموعه مستقل ماکزیمم است، لذا $\gamma_{it}(C_۵) > \gamma(C_۵) = ۲$، پس $\gamma_{it}(C_۵) \geq ۳$. بنابراین $\gamma_{it}(C_۵) = ۳$.

حال، فرض کنید $n \neq \{۳, ۵\}$. در این صورت حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد:

(۱) اگر $n \equiv ۰ (mod\, ۳)$، آن‌گاه $S = \{v_{۳i+۱} : ۰ \leq i \leq \frac{n-۳}{۳}\}$ یک مجموعه احاطه‌گر از C_n است زیرا برای هر رأس v_i از C_n یکی از سه حالت زیر اتفاق می‌افتد.

- اگر $i = ۳k$. آن‌گاه چون $v_{i+۱} = v_{۳k+۱}$ عضو S است، پس v_i توسط $v_{i+۱}$ احاطه می‌شود.
- اگر $i = ۳k + ۱$. آن‌گاه چون $v_i = v_{۳k+۱}$ خود، عضو S است.
- اگر $i = ۳k + ۲$. آن‌گاه $v_{i-۱} = v_{۳k+۱}$ عضو S است. پس v_i توسط $v_{i-۱}$ احاطه می‌شود.

پس هر رأس $v_i (۱ \leq i \leq n)$ از C_n توسط دقیقاً یکی از رأس‌های S احاطه می‌شود. در نتیجه S یک مجموعه احاطه‌گر است. لذا $\gamma(C_n) \leq |S| = \lceil \frac{n}{۳} \rceil$. از طرفی هر رأس از S حداکثر خودش و دو رأس مجاورش را احاطه می‌کند، لذا هر رأس از S حداکثر ۳ رأس را احاطه می‌کند، پس S یک $\gamma(C_n)$–مجموعه است و $۳|S| \geq n$. در نتیجه $\gamma(C_n) = |S| \geq \frac{n}{۳}$. بنابراین $\gamma(C_n) = \lceil \frac{n}{۳} \rceil$. به‌علاوه، $\langle V-S \rangle = (\frac{n}{۳}) K_۲$. از این‌رو هر مجموعه مستقل در $V-S$ شامل حداکثر $\frac{n}{۳}$ رأس است. حال، چون $\beta_\circ(C_n) = \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor > \frac{n}{۳}$، لذا $V-S$ شامل هیچ $\beta_\circ(C_n)$–مجموعه‌ای نیست.

در نتیجه هر $\beta_{\circ}(C_n)$–مجموعه‌ای با S اشتراک دارد. پس S یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل است. لذا $\gamma_{it}(C_n) \leq |S| = \lceil \frac{n}{۳} \rceil$. از طرفی، هر مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل یک مجموعه احاطه‌گر است، در نتیجه $\gamma(C_n) \leq \gamma_{it}(C_n)$. بنابراین $\gamma_{it}(C_n) = \gamma(C_n) = \frac{n}{۳}$.

(۲) اگر $n \equiv ۱ (mod\, ۳)$، آن‌گاه $S = \{v_{۳i+۱} : ۰ \leq i \leq \frac{n-۱}{۳}\}$ مشابه استدلال فوق، یک γ–مجموعه از C_n است و $\gamma(C_n) = \lceil \frac{n}{۳} \rceil$. از طرفی $\langle V-S \rangle = (\frac{n-۱}{۳})K_۲$، از این‌رو هر مجموعه مستقل در $V-S$ شامل حداکثر $\frac{n-۱}{۳}$ رأس است، لذا $V-S$ شامل هیچ $\beta_{\circ}$–مجموعه‌ای نیست. بنابراین $\gamma_{it}(C_n) = \gamma(C_n) = \frac{n}{۳}$.

(۳) اگر $n \equiv ۲ (mod\, ۳)$، آن‌گاه $S = \{v_{۳i+۱} : ۰ \leq i \leq \frac{n-۲}{۳}\}$ مشابه استلال حالت اول، یک γ–مجموعه از C_n است. به‌علاوه، $\langle V-S \rangle = (\frac{n-۲}{۳})K_۲ \cup K_۱$. از این‌رو هر مجموعه مستقل در $V-S$ شامل حداکثر $\frac{n-۱}{۳} + ۱$ رأس است، لذا $V-S$ شامل هیچ $\beta_{\circ}$–مجموعه‌ای نیست. پس $\gamma_{it}(C_n) = \gamma(C_n) = \frac{n}{۳}$.

□

قضیه ۷.۲.۲. *اگر W_n یک چرخ n رأسی باشد، آن‌گاه*

$$\gamma_{it}(W_n) = \begin{cases} ۲ & n = ۵, \\ ۳ & \text{اگر } n \geq ۷ \text{ و فرد باشد یا } n = ۶ \\ ۴ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}.$$

قضیه زیر مقدار عدد احاطه‌گری متقاطع مستقل را برای گراف‌های ناهمبند تعیین می‌کند.

قضیه ۸.۲.۲. *اگر G یک گراف غیر همبند با مؤلفه‌های $G_۱, G_۲, \ldots, G_r$ باشد، آن‌گاه*

$$\gamma_{it}(G) = \min_{۱ \leq i \leq r} \{\gamma_{it}(G_i) + \sum_{\substack{j=۱ \\ j \neq i}}^{r} \gamma(G_j)\}.$$

برهان. فرض کنید که $\gamma_{it}(G_۱) + \sum_{j=۲}^{r} \gamma(G_j) = \min_{۱\leq i \leq r}\{\gamma_{it}(G_i) + \sum_{\substack{j=۱ \\ j\neq i}}^{r} \gamma(G_j)\}$ و D یک γ_{it}–مجموعه از $G_۱$ و S_j یک γ–مجموعه از G_j برای هر $j \geq ۲$، باشد. در این صورت مجموعه $D \cup (\bigcup_{j=۲}^{r} S_j)$ یک مجموعه احاطه‌گر از G است زیرا به وضوح D یک مجموعه احاطه‌گر است و همچنین، $\gamma(G) = \sum_{j=۱}^{r} \gamma(G_j)$. لذا $D \cup (\bigcup_{j=۲}^{r} S_j)$ یک مجموعه احاطه‌گر از G است.از طرفی چون $\beta_{\circ}(G) = \sum_{j=۱}^{r} \beta_{\circ}(G_j)$، و D نیز با هر مجموعه مستقل ماکزیمم از $G_۱$ اشتراک دارد، پس D و در نتیجه $D \cup (\bigcup_{j=۲}^{r} S_j)$ با هر مجموعه مستقل ماکزیمم از G اشتراک دارند. لذا $D \cup (\bigcup_{j=۲}^{r} S_j)$ یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل از G است. بنابراین

$$\gamma_{it}(G) \leq \gamma_{it}(G_۱) + \sum_{j=۲}^{r} \gamma(G_j) = \min_{۱ \leq i \leq r} \{\gamma_{it}(G_i) + \sum_{\substack{j=۱ \\ j \neq i}}^{r} \gamma(G_j)\}.$$

برعکس، فرض کنید S هر مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل از G باشد. در این صورت S با مجموعه رأس $V(G_j)$ از هر مؤلفه $G_j (۱ \leq j \leq r)$ از G اشتراک دارد و $S \cap V(G_j)$ یک مجموعه

احاطه‌گر از G_j برای هر $r \geq j \geq ۱$ است. بعلاوه، برای حداقل یک $j(۱ \leq j \leq r)$، مجموعه $S \cap V(G_j)$ باید یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل از G_j باشد زیرا در غیر این‌صورت هر مؤلفه G_j یک مجموعه مستقل ماکزیمم خواهد داشت که با مجموعه $S \cap V(G_j)$ اشتراک ندارد و از این‌رو اجتماع این مجموعه‌های مستقل ماکزیمم تشکیل یک مجموعه مستقل ماکزیمم از G را می دهند که با S اشتراک ندارند، که این تناقض است. لذا برای حداقل یک j مجموعه $S \cap V(G_j)$ باید یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل از G_j باشد. بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض کنید $j = ۱$. بنابراین

$$|S| \geq \gamma_{it}(G_۱) + \sum_{j=۲}^{r} \gamma(G_j) = \min_{۱\leq i\leq r}\{\gamma_{it}(G_i) + \sum_{\substack{j=۱\\ j\neq i}}^{r} \gamma(G_j)\}.$$

از این‌رو $\gamma_{it}(G) = \min_{۱\leq i\leq r}\{\gamma_{it}(G_i) + \sum_{\substack{j=۱\\ j\neq i}}^{r} \gamma(G_j)\}$. □

نتیجه ۹.۲.۲. *اگر G رأس تنهایی نداشته باشد، آن‌گاه* $\gamma_{it}(G) = \gamma(G)$

برهان. فرض کنید گراف G دارای یک مؤلفه $G_۱$ و رأس تنهای v باشد. با استفاده از قضیه ۸.۲.۲، داریم $\gamma_{it}(G) = ۱ + \gamma(G_۱)$. از طرفی $\gamma(G) = ۱ + \gamma(G_۱)$. بنابراین $\gamma_{it}(G) = \gamma(G)$ □

در بقیه این پایان‌نامه گراف‌ها همبند هستند اگر توضیح خاصی وجود نداشته باشد.

۳.۲ کران‌هایی برای γ_{it}

در این بخش، ما کران‌هایی را برای $\gamma_{it}(G)$ برحسب مرتبه گراف، عدد خوشه‌ای، عدد پوششی رأسی و برخی از پارامترهای اساسی معروف احاطه‌گری بدست می‌آوریم.

۱.۳.۲ کران‌هایی برحسب مرتبه و درجه

قضیه ۱.۳.۲. *برای هر گراف G، داریم $۱ \leq \gamma_{it}(G) \leq n$. به‌علاوه، $\gamma_{it}(G) = n$ اگر وتنها اگر* $G = K_n$.

برهان. نامساوی‌ها بدیهی هستند.

فرض کنید $\gamma_{it}(G) = ۱$ و $S = \{u\}$ یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل از G باشد. در این صورت چون S احاطه‌گر است، لذا u به تمام $n - ۱$ رأس دیگر وصل است، پس $\deg u = n - ۱$. همچنین، چون S یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل است، لذا u متعلق به هر $\beta_۰$–مجموعه از G است. از این‌رو $\{u\}$ تنها $\beta_۰$–مجموعه از G است بنابراین $G = K_۱$.

حال، فرض کنید $n \geq ۲$ و $\gamma_{it}(G) = n$. اگر $\beta_۰(G) \geq ۲$، آن‌گاه $V - \{v\}$، که $v \in V$، به وضوح یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل از G است و از این‌رو $\gamma_{it}(G) \leq n - ۱$، که تناقض است. بنابراین $\beta_۰(G) = ۱$، و این بدان معنی است که، هر رأس به تنهایی یک مجموعه مستقل ماکزیمم است و هر رأس به تمامی $n - ۱$ رأس دیگر متصل است. بنابراین $G = K_n$.

برای اثبات عکس توجه کنید که، $\gamma_{it}(K_n) = n$ □

قضیه ۲.۳.۲. *فرض کنید G یک گراف n رأسی باشد. در این صورت $\gamma_{it}(G) = n - ۱$ اگر وتنها اگر $G = P_۳$.*

برهان. فرض کنید $\gamma_{it}(G) = n - ۱$. در این صورت بنا به قضیه فوق، داریم $\beta_۰(G) \geq ۲$. اگر دو رأس مجاور u و v از درجه حداقل دو وجود داشته باشند، آنگاه $S = V - \{u, v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل از G است زیرا دو رأس مجاور u و v هر کدام حداقل به یک رأس دیگر متصل هستند. پس اگر این دو رأس را حذف کنیم، مجموعه رئوس باقیمانده یک مجموعه احاطه‌گر است. همچنین، چون u و v مجاورند و $\beta_۰(G) \geq ۲$، لذا هر مجموعه مستقل ماکزیمم شامل حداقل یکی از رأس‌های S است. بنابراین S یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل است. از این‌رو $\gamma_{it}(G) \leq |S| = n - ۲$، که این تناقض است. در نتیجه برای هر دو رأس مجاور u و v در G تنها یکی از این دو رأس، یک رأس پایانی است. بنابراین $G = K_{۱,n-۱}$. از طرفی چون $\gamma_{it}(K_{۱,n-۱}) = ۲$، لذا نتیجه می‌شود که $n = ۳$. بنابراین $G = P_۳$.

عکس نیز آشکار است. □

قضیه ۳.۳.۲. *فرض کنید گراف G یک گراف همبند غیرکامل با $\beta_۰(G) \geq \frac{n}{۲}$ باشد. در این صورت $\gamma_{it}(G) \leq \frac{n}{۲}$.*

برهان. فرض کنید S یک $\beta_۰$–مجموعه از G باشد و $\beta_۰(G) > \frac{n}{۲}$. در این صورت $D = (V-S)\cup\{u\}$ که $u \in S$، یک مجموعه احاطه‌گر از G است که با هر $\beta_۰$–مجموعه از G اشتراک دارد زیرا S یک مجموعه مستقل ماکزیمم است، پس از هر دو رأس مجاور فقط یکی از آن‌ها را شامل می‌شود. لذا مجموعه رأس‌های باقیمانده یعنی $V - S$، و در نتیجه D یک مجموعه احاطه‌گر است. از طرفی چون $u \in S$، پس D با S اشتراک دارد. همچنین بنا به همبند بودن گراف و $\beta_۰(G) > \frac{n}{۲}$، هر $\beta_۰$–مجموعه‌ای شامل برخی از رأس‌های $V - S$ و S است. در نتیجه هر $\beta_۰$–مجموعه‌ای غیر از S با D اشتراک دارد. بنابراین $\gamma_{it}(G) \leq \lceil \frac{n}{۲} \rceil$.

فرض کنید $\beta_۰(G) = \frac{n}{۲}$. دوحالت زیر را در نظر می‌گیریم.

- اگر $V - S$ مستقل نباشد. آنگاه S یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل از G است زیرا بنا به تعریف مجموعه مستقل، S از هر دو رأس مجاور تنها یکی از آن‌ها را شامل می‌شود، پس S یک مجموعه احاطه‌گر است. همچنین، چون S یک مجموعه مستقل ماکزیمم است و $\beta_۰(G) = \frac{n}{۲}$، پس نیمی از رأس‌ها در S و نیمی دیگر در $V - S$ است. بنابه فرض $V - S$ مستقل نیست، لذا هر مجموعه مستقل ماکزیمم غیر از S شامل برخی از رئوس S و برخی از رئوس $V - S$ است که در این صورت نیز با S اشتراک دارد. در نتیجه S یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل است. از این‌رو $\gamma_{it}(G) \leq |S| = \frac{n}{۲}$.

- اگر $V - S$ مستقل باشد. آنگاه G یک گراف دو بخشی با بخش‌های $(S, V - S)$ است. حال، فرض کنید $\delta(G) \geq ۲$. آنگاه $D = (S - \{u\}) \cup \{v\}$، که $u \in S$ و $v \in N(u)$، به وضوح یک مجموعه احاطه‌گر از G است. همچنین، D با هر $\beta_۰$–مجموعه از G اشتراک دارد

زیرا D با مجموعه‌های مستقل S و $V-S$ اشتراک دارد. همچنین، هر $\beta_0(G)$–مجموعه‌ای غیر از S و $V-S$، به وضوح شامل حداقل دو رأس از S است که در این‌صورت نیز با D اشتراک دارد. بنابراین D یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل از G است. از این‌رو $\gamma_{it}(G) \leq |D| = |S| = \frac{n}{2}$. فرض کنید $\delta(G) = 1$ و u یک رأس پایانی باشد. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید که $u \in S$. همچنین، فرض کنید $v \in N(u)$. چون G همبند است، لذا $\deg v \geq 2$. حال، اگر یک رأس پایانی $u \neq w$ در S مجاور با v وجود داشته باشد، آن‌گاه $[V-(S\cup\{v\})] \cup \{u,w\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مستقل از اندازه بزرگتر از $\frac{n}{2}$ است زیرا بنابه فرض $V-S$ مستقل است و لذا یک مجموعه احاطه‌گر نیز است. حال، اگر رأس $v \in V-S$ را حذف کنیم و به جای آن دو رأس مجاورش یعنی u و w را قرار دهیم آن‌گاه مجموعه بدست آمده یک مجموعه مستقل است. پس یک مجموعه احاطه‌گر مستقل از اندازه بزرگتر از $\frac{n}{2}$ داریم، که این با $\beta_0(G) = \frac{n}{2}$ در تناقض است. در نتیجه هر همسایه v غیر از u دارای درجه حداقل ۲ است. از این رو $D = [V-(S\cup\{v\})] \cup \{u\}$ یک مجموعه احاطه‌گر از G است. حال، چون $\deg v \geq 2$، در نتیجه $V-D$ شامل هیچ β_0–مجموعه‌ای از G نیست و از این‌رو D یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل از G است. بنابراین $\gamma_{it}(G) \leq \frac{n}{2}$.

□

نتیجه ۴.۳.۲. *اگر G گراف دو بخشی از مرتبه n باشد، آن‌گاه $\gamma_{it}(G) \leq \frac{n}{2}$.*

برهان. چون برای گراف دوبخشی G داریم $\beta_0(G) \geq \frac{n}{2}$، لذا بنا به قضیه ۳.۳.۲، $\gamma_{it}(G) \leq \frac{n}{2}$. □

تذکر ۵.۳.۲. *کران بدست آمده در قضیه ۳.۳.۲ دقیق است. برای گراف $G = H^+$، که H یک گراف همبند n رأسی است، داریم $\gamma_{it}(G) = n$. به‌علاوه، اگر H یک گراف دوبخشی باشد، آن‌گاه G نیز دوبخشی است و بنابراین خانواده نامتناهی از گراف‌های دوبخشی با مقدار γ_{it} که نصف مرتبه‌شان است، وجود دارد.*

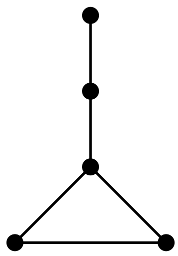
قضیه ۶.۳.۲. *فرض کنید a و b دو عدد صحیح مثبت با $b \geq 2a-1$ باشند. در این صورت یک گراف G با b رأس وجود دارد بطوریکه $\gamma_{it}(G) = a$.*

برهان. فرض کنید $b = 2a + r$ که $r \geq -1$. فرض کنید H هر گراف همبند a رأسی باشد که $V(H) = \{v_1, v_2, \ldots, v_a\}$ و G گراف بدست آمده از H به وسیله پیوستن $r+1$ یال آویزان در v_1 و یک یال آویزان در هر یک از رأس‌های v_i برای $i \geq 2$، باشد و $u_i (i \geq 2)$ رأس پایانی در G مجاور $v_i (2 \leq i \leq a)$ باشد. به وضوح $\gamma(G) = a$ و $S = \{v_1, u_2, u_3, \ldots, u_a\}$ یک γ–مجموعه از G است. به‌علاوه، هر مجموعه مستقل ماکزیمم از G شامل رأس‌های $\{u_2, u_3, \ldots, u_a\}$ است. لذا هر مجموعه مستقل ماکزیمم از G با S اشتراک دارد. بنابراین S یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل از G است. از این‌رو $\gamma_{it}(G) \leq |S| = a$. حال، چون هر مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل یک مجموعه احاطه‌گر است و $\gamma(G) = a$، پس $\gamma_{it}(G) = a$. همچنین،

$$|V(G)| = a + (r+1) + (a-1) = 2a + r = b.$$

□

در قضیه ۳.۳.۲ نشان دادیم که برای همه گراف‌های همبند غیرکامل G از مرتبه n که عدد استقلال آنها حداقل $\frac{n}{2}$ است، داریم $\gamma_{it}(G) \leq \frac{n}{2}$. به هر حال، این کران بالا برای γ_{it} برای همه گراف‌هایی که در سرتاسر این پایان‌نامه آمده است، یا حفظ می‌شود یا تنها یک واحد افزایش می‌یابد، حتی اگر شرط $\beta_0(G) \geq \frac{n}{2}$ را در قضیه حذف کنیم. برای مثال، برای گراف G داده شده در شکل ۲.۲، داریم $\gamma_{it}(G) = 3 = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ و $\beta_0(G) = 2 < \frac{n}{2}$.



شکل ۲.۲: گراف G

با استفاده ازاین مشاهده و قضیه ۶.۳.۲، حدس زیر را مطرح می‌کنیم.

حدس ۷.۳.۲. *[۱۲] اگر G یک گراف همبند غیرکامل n رأسی باشد، آن‌گاه $\gamma_{it}(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.*

قضیه ۸.۳.۲. *برای هر گراف G، داریم $\gamma(G) \leq \gamma_{it}(G) \leq \gamma(G) + \delta(G)$.*

برهان. چون هر مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل یک مجموعه احاطه‌گر است، لذا $\gamma(G) \leq \gamma_{it}(G)$. حال، فرض کنید u یک رأس در G با $\deg u = \delta(G)$ باشد و فرض کنید که S یک γ–مجموعه در G باشد. در این صورت هر مجموعه مستقل ماکزیمم از G به وضوح شامل یک رأس از $N[u]$ است، پس $S \cup N[u]$ یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل از G است. همچنین، چون S با $N[u]$ اشتراک دارد، لذا $|S \cup N[u]| \leq \gamma(G) + \delta(G)$ و از این‌رو $\gamma_{it}(G) \leq \gamma(G) + \delta(G)$. □

نتیجه ۹.۳.۲. حدس *۷.۳.۲ برای همه گراف‌های همبند G با $\delta(G) = 1$ درست است.*

برهان. اگر G یک گراف همبند با $\delta(G) = 1$ باشد، آن‌گاه بنا به قضیه ۸.۳.۲، $\gamma_{it}(G) \leq \gamma(G) + 1$. همچنین، از قضیه ۶.۳.۱، داریم $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$. بنابراین اگر $\gamma(G) < \frac{n}{2}$، آن‌گاه $\gamma_{it}(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. حال، اگر $\gamma(G) = \frac{n}{2}$، آن‌گاه از قضیه ۷.۳.۱ نتیجه می‌شود که G یا C_4 است یا H^+ (برای هر گراف همبند H)؛ بنابراین در هر یک از حالت‌ها داریم $\gamma_{it}(G) = \frac{n}{2}$. □

نتیجه ۱۰.۳.۲. *اگر T یک درخت باشد، آن‌گاه $\gamma_{it}(T)$ یا $\gamma(T)$ است یا $\gamma(T) + 1$.*

با توجه به نتیجه ۹.۳.۲ ما می‌توانیم خانواده‌ای از همه درخت‌ها را به دو کلاس افراز کنیم. بنابراین یک درخت T از کلاس ۱ و یا کلاس ۲ است و مطابق با آن $\gamma_{it}(T)$ یا $\gamma(T)$ و یا $\gamma(T) + 1$ است. برای مثال، ستاره‌ها از کلاس ۲ هستند و زیرتقسیمی از ستاره‌ها از کلاس ۱ هستند پس هر دو کلاس از درخت‌ها غیر تهی هستند و بنابراین مسئله زیر را داریم.

مسئله ۱۱.۳.۲. *درخت‌های کلاس ۱ را مشخص کنید.*

قضیه ۱۲.۳.۲. *اگر G یک گراف با $\operatorname{diam} G = ۲$ باشد، آن‌گاه $\gamma_{it}(G) \leq \delta(G) + ۱$.*

برهان. فرض کنید u یک رأس از G با $\deg u = \delta(G)$ باشد. در این صورت $N[u]$ یک مجموعه احاطه‌گر از G است، زیرا $\operatorname{diam} G = ۲$. حال، از اینکه هر مجموعه مستقل ماکزیمم شامل یک رأس از $N[u]$ است، نتیجه می‌شود که این همسایگی بسته خود یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل است، پس $\gamma_{it}(G) \leq \delta(G) + ۱$. □

۲.۳.۲ کران‌هایی برحسب عدد پوششی رأسی و عدد خوشه‌ای

در اینجا ما کران بالایی برای $\gamma_{it}(G)$ بر حسب عدد پوششی رأسی $\alpha_\circ(G)$ و عدد خوشه‌ای $\omega(G)$ می‌سازیم.

قضیه ۱۳.۳.۲. *اگر G رأس تنها نداشته باشد، آن‌گاه $\gamma_{it}(G) \leq \alpha_\circ(G) + ۱$ و کران دقیق است.*

برهان. فرض کنید S یک پوشش رأسی مینیمم از G باشد. در این صورت به وضوح $V - S$ یک مجموعه مستقل ماکزیمم است. از طرفی، چون S از هر دو رأس مجاور تنها یکی از آن‌ها را شامل می‌شود، لذا هر رأس از گراف یا خودش یا حداقل یکی از همسایه‌هایش در S قرار دارد. پس S یک مجموعه احاطه‌گر است. از این رو $S \cup \{u\}$ که $u \in V - S$، یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل از G است زیرا اولاً احاطه‌گر است، دوماً هر مجموعه مستقل ماکزیمم غیر از S شامل بخشی از رئوس $V - S$ و بخشی از رئوس S است که در این صورت با مجموعه فوق اشتراک دارد. پس $\gamma_{it}(G) \leq |S| + ۱ = \alpha_\circ(G) + ۱$. این کران برای گراف‌های کامل و ستاره‌ها دقیق است. □

نتیجه ۱۴.۳.۲. *اگر G یک گراف n رأسی بدون رأس تنها باشد، آن‌گاه $\gamma(G) + \gamma_{it}(G) \leq n + ۱$ و $i(G) + \gamma_{it}(G) \leq n + ۱$.*

برهان. می‌دانیم که $\alpha_\circ(G) + \beta_\circ(G) = n$. به وضوح هر مجموعه مستقل یک مجموعه احاطه‌گر مستقل و هر مجموعه احاطه‌گر مستقل یک مجموعه احاطه‌گر است. لذا $\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_\circ(G)$. همچنین، بنا به قضیه ۱۳.۳.۲، $\gamma_{it}(G) \leq \alpha_\circ(G) + ۱$. لذا $\gamma(G) + \gamma_{it}(G) \leq \beta_\circ(G) + \alpha_\circ(G) + ۱ = n + ۱$. همچنین، $i(G) + \gamma_{it}(G) \leq \beta_\circ(G) + \alpha_\circ(G) + ۱ = n + ۱$. □

قضیه ۱۵.۳.۲. *برای هر گراف غیرکامل G با $\delta(G) \geq ۲$، داریم $\gamma_{it}(G) \leq \alpha_\circ(G)$.*

برهان. فرض کنید S یک $\beta_\circ$-مجموعه از G باشد. در این صورت $V - S$ یک پوشش رأسی مینیمم و در نتیجه یک مجموعه احاطه‌گر از G است. چون $G \neq K_۲$ و $\delta(G) \geq ۲$، لذا یک رأس v در $V - S$ وجود دارد بطوریکه $|N(v) \cap S| \geq ۲$. فرض کنید u و w دو همسایه از v در S باشند. چون $\delta(G) \geq ۲$، لذا هر همسایه از v در S مجاور حداقل یک رأس دیگر غیر از v در $V - S$ است و از این‌رو $D = (V - S) - \{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر از $G - \{v\}$ است. همچنین، $D \cup \{w\}$ یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل از G است زیرا $(S - \{w\}) \cup \{v\}$ تنها مجموعه در متمم $D \cup \{w\}$ است، که مجموعه مستقل نیست. در نتیجه $\gamma_{it}(G) \leq |D| + ۱ = n - \beta_\circ(G) - ۱ + ۱ = \alpha_\circ(G)$. □

نتیجه ۱۶.۳.۲. *اگر G یک‌گراف غیرکامل با $\gamma_{it}(G) = \alpha_{\circ}(G) + 1$ باشد، آن‌گاه $\gamma(G) = \alpha_{\circ}(G)$.*

برهان. فرض کنید $\gamma_{it}(G) = \alpha_{\circ}(G) + 1$. ادعا می‌کنیم $\delta(G) = 1$. فرض کنید $\delta(G) \geq 2$. در این صورت چون G غیر کامل است، لذا بنا به قضیه ۱۵.۳.۲، داریم $\gamma_{it}(G) \leq \alpha_{\circ}(G)$، که این تناقض است. لذا $\delta(G) = 1$. بنابراین از قضیه ۸.۳.۲ نتیجه می‌شود که $\gamma_{it}(G) \leq \gamma(G) + 1$. چون $\gamma_{it}(G) = \alpha_{\circ}(G) + 1$، لذا $\alpha_{\circ}(G) \leq \gamma(G)$. همچنین، چون نامساوی $\gamma(G) \leq \alpha_{\circ}(G)$، همیشه درست است، در نتیجه $\gamma(G) = \alpha_{\circ}(G)$. □

در قضیه زیر ما کران بالایی برای γ_{it} با وارد کردن عدد خوشه‌ای $\omega(G)$ ارائه می‌دهیم و گراف‌هایی که در تساوی این کران صدق می‌کنند را مشخص می‌کنیم.

قضیه ۱۷.۳.۲. *برای هرگراف غیرکامل G با عدد خوشه‌ای ω، داریم $\gamma_{it}(G) \leq n - \omega + 1$. به‌علاوه تساوی برقرار است اگر و تنها اگر احکام زیر برقرار باشند.*

(۱) $\beta_{\circ}(G) = 2$

(۲) اگر S یک مجموعه احاطه‌گر باشد بطوریکه $\langle V - S\rangle$ کامل باشد، آن‌گاه $|V - S| \leq \omega - 1$.

برهان. ابتدا فرض کنید H یک خوشه ماکزیمم در G باشد و $u \in V(H)$. در این صورت مجموعه $S = V(G) - V(H - u)$ یک مجموعه احاطه‌گر از G است زیرا u، H را احاطه می‌کند، پس اگر در گراف G کل رئوس H به غیر از u را حذف کنیم، رئوس باقیمانده، G را احاطه می‌کنند. بنابراین، S یک مجموعه احاطه‌گر از G است. ازآنجایی که $\beta_{\circ}(G) \geq 2$ و H یک خوشه ماکزیمم است، نتیجه می‌شود که هر مجموعه مستقل ماکزیمم از G با S اشتراک دارد. از این‌رو S یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل است، پس $\gamma_{it}(G) \leq |S| = n - w + 1$.

فرض کنید $\gamma_{it}(G) = n - w + 1$. فرض کنید H یک خوشه ماکزیمم در G باشد و u و v دو رأس مجاور باشند بطوریکه $u \in V(H)$ و $v \in V(G) - V(H)$ باشد. در این صورت مجموعه $D = [V(G) - V(H \cup \{v\})] \cup \{u\}$ یک مجموعه احاطه‌گر از G با $|D| = n - w$ است. چون $\gamma_{it}(G) = n - w + 1 = |D| + 1$، لذا یک $\beta_{\circ}$–مجموعه S در $V - D$ وجود دارد بطوریکه $D \cap S = \emptyset$، و این بدان معنی است که $V - D$ شامل یک $\beta_{\circ}$–مجموعه است. از این‌رو S شامل رأس v و یک رأس $u \neq w$ در H است. پس $\beta_{\circ}(G) = 2$.

فرض کنید (۲) درست نباشد. در این صورت یک مجموعه احاطه‌گر S وجود دارد بطوریکه $\langle V - S\rangle$ یک خوشه از اندازه ω است. چون $\beta_{\circ}(G) = 2$، لذا هر $\beta_{\circ}$–مجموعه‌ای با S اشتراک دارد، پس $\gamma_{it}(G) \leq |S| = n - w$، که این تناقض است. ازاین‌رو (۲) درست است.

برعکس، فرض کنید (۱) و (۲) برقرار باشند. فرض کنید S یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل از G باشد. چون $\beta_{\circ}(G) = 2$، لذا $\langle V - S\rangle$ یک خوشه در G است چون در غیر این‌صورت دو رأس در $V - S$ وجود دارند که مجاور نیستند، پس یک $\beta_{\circ}$–مجموعه در $V - S$ وجود دارد که با S اشتراک ندارد، که این تناقض است. از این‌رو از (۲) نتیجه می‌شود که $|V - S| < \omega$. پس $|S| \geq n - \omega + 1$. بنابراین $\gamma_{it}(G) = n - w + 1$. □

۳.۳.۲ γ_{it} برای گراف‌های دوبخشی

در این بخش، برخی از مباحث جالب در مورد پارامتر γ_{it} برای گراف‌های دوبخشی ارائه می‌دهیم؛ ملاحظه زیر را در نظر بگیرید.

ملاحظه ۱۸.۳.۲. *فرض کنید G یک گراف دوبخشی باشد. اگر S یک γ–مجموعه از G باشد، آن‌گاه هر دو(سه) β_0–مجموعه از G در $V-S$ باهم اشتراک دارند.*

برهان. فرض کنید G یک گراف دوبخشی با دوبخش (X,Y) باشد بطوریکه $|X| \leq |Y|$ و S یک γ–مجموعه از G باشد. چون $|X| \leq |Y|$، در نتیجه X یک مجموعه احاطه‌گر است، بنابراین، داریم $\gamma(G)=|S|\leq |X|$. حال، اگر دو β_0–مجموعه مجزا از G در $V-S$ وجود داشته باشند، آن‌گاه $\gamma(G)+2\beta_0(G)\leq |X|+|Y|$ پس $\gamma(G)\leq |X|+|Y|-2\beta_0(G)$. از طرفی می‌دانیم که Y یک مجموعه مستقل است، لذا $\beta_0(G)\geq |Y|$، در نتیجه داریم $\gamma(G)\leq |X|-|Y|\leq 0$، که این بی‌معنی است. بنابراین هر دو β_0–مجموعه از G در $V-S$ باهم اشتراک دارند.

حال، فرض کنید که سه β_0–مجموعه از G، به نام‌های D_1، D_2 و D_3 در $V-S$ وجود داشته باشند بطوریکه $D_1\cap D_2\cap D_3=\emptyset$. مطابق بحث فوق، هر دو تا از این مجموعه‌ها باهم اشتراک دارند، و فرض کنید $D_1\cap D_2=S_1$، $D_1\cap D_3=S_2$ و $D_2\cap D_3=S_3$. در این صورت

$$\begin{aligned}|X|+|Y| &\geq \gamma(G)+|D_1|+|D_2|+|D_3|-(|S_1|+|S_2|+|S_3|)\\ &= \gamma(G)+3\beta_0(G)-(|S_1|+|S_2|+|S_3|).\end{aligned}$$

آشکار است که $S_1\cup S_2\cup S_3$ یک مجموعه مستقل است و از این‌رو $|S_1|+|S_1|+|S_1|\leq \beta_0(G)$. پس $|X|+|Y|\geq \gamma(G)+2\beta_0(G)$. حال، چون $\beta_0(G)\geq |Y|$، پس $\gamma(G)\leq |X|-|Y|\leq 0$، که این بی معنی است. بنابراین هر سه β_0–مجموعه از G در $V-S$ باهم اشتراک دارند. □

از ملاحظه ۱۸.۳.۲ نتیجه می‌شود که، اگر G یک گراف دوبخشی با یک $\gamma(G)$–مجموعه S باشد بطوریکه حداکثر سه $\beta_0(G)$–مجموعه وجود داشته باشند که با S اشتراک نداشته باشند، آن‌گاه ما بوسیله افزودن یک رأس در اشتراک این $\beta_0(G)$–مجموعه‌ها به S می‌توانیم یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل از G داشته باشیم و بنابراین $\gamma_{it}(G)$ حداکثر $\gamma(G)+1$ است. اما نمی‌دانیم که آیا این می تواند برای هر گراف دوبخشی تعمیم داشته باشد حتی وقتی که بیش از سه $\beta_0(G)$–مجموعه بیرون S داریم. هرچند، ما احساس می‌کنیم که به هر حال همه β_0–مجموعه‌ها از یک گراف دوبخشی G بیرون S باهم اشتراک دارند، در نتیجه $\gamma_{it}(G)$ حداکثر $\gamma(G)+1$ است. همچنین، دیدیم که نتیجه ۱۰.۳.۲ این را تأیید می‌کند و بنابراین ما مجبوریم که با حدس زیر مواجه شویم.

حدس ۱۹.۳.۲. *اگر G یک گراف همبند دوبخشی باشد، آن‌گاه $\gamma_{it}(G)$ یا $\gamma(G)$ است یا $\gamma(G)+1$.*

به وضوح، حدس ۱۹.۳.۲ برای گراف دوبخشی با دوبخش (X,Y) بطوریکه $|X|\leq |Y|$ و $\gamma(G)=|X|$ باشد، درست است. حال، ما چنین گراف‌های دوبخشی را که $\gamma_{it}(G)=\gamma(G)+1$ باشد را مشخص می‌کنیم.

قضیه ۲۰.۳.۲. *فرض کنید G یک گراف دوبخشی با دوبخش (X,Y) باشد بطوریکه $|X| \leq |Y|$ و $|X| = \gamma(G)$. در این صورت $\gamma_{it}(G) = \gamma(G) + 1$ اگر و تنها اگر هر رأس در X مجاور حداقل دو رأس پایانی باشد.*

برهان. اول ادعا می‌کنیم که $\delta(G) = 1$. فرض کنید $\delta(G) \geq 2$. چون $|X| = \gamma(G)$، لذا X یک $\gamma(G)$–مجموعه است. همچنین، چون $\gamma_{it}(G) = \gamma(G) + 1$، پس یک $\beta_\circ$–مجموعه‌ای در $V(G) - X$ وجود دارد. لذا $|Y| \leq \beta_\circ(G)$. از طرفی، می‌دانیم که Y یک مجموعه مستقل است، بنابراین، $\beta_\circ(G) \geq |Y|$. در نتیجه $\beta_\circ(G) = |Y|$. حال، فرض کنید $u \in X$ و $v \in N(u)$. چون $\delta(G) \geq 2$، نتیجه می‌شود که $S = (X - \{u\}) \cup \{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر از G است. حال، چون $\beta_\circ(G) = |Y|$ و $\delta(G) \geq 2$، لذا هر $\beta_\circ(G)$–مجموعه شامل رأس v یا یک رأس $w \in N(v) - \{u\}$ در X است. از این‌رو S با هر $\beta_\circ(G)$–مجموعه اشتراک دارد، پس $\gamma_{it}(G) = |X| = \gamma(G)$، که این تناقض است. بنابراین $\delta(G) = 1$.

به‌علاوه، فرض کنید که یک رأس u در X وجود داشته باشد بطوریکه $N(u)$ شامل حداکثر یک رأس پایانی باشد. در این صورت $S = (X - \{u\}) \cup \{v\}$، که $v \in N(u)$، و v در صورت وجود نماینده یک رأس پایانی است، یک مجموعه احاطه‌گر از G است. همچنین چون $\beta_\circ(G) = |Y|$، نتیجه می شود که S با هر $\beta_\circ$ از G اشتراک دارد و از این‌رو $\gamma_{it}(G) = |X| = \gamma(G)$، که این تناقض است. بنابراین هر رأس در X مجاور حداقل دو رأس پایانی است.

برعکس، اگر هر رأس در X مجاور حداقل دو رأس پایانی باشد، آنگاه به وضوح X تنها γ–مجموعه از G است پس $\gamma_{it}(G) = \gamma(G) + 1$. □

۴.۳.۲ روابط با پارامترهای دیگر

در اینجا ما به روابط بین پارامتر γ_{it} و برخی پارامترهای احاطه‌گری می‌پردازیم.

تذکر ۲۱.۳.۲. *در قضیه ۸.۳.۲ ملاحظه کردیم که برای هر گراف G، $\gamma(G) \leq \gamma_{it}(G)$. به‌علاوه، تفاوت بین پارامترهای γ_{it} و γ می تواند بطور دلخواه بزرگ باشد، مانند $\gamma_{it}(K_n) = n$ و $\gamma(K_n) = 1$. علاوه براین، این پارامترها می‌توانند مقادیر دلخواهی بگیرند. اگر دو عدد صحیح مثبت a و b با $1 \leq a \leq b$ مفروض باشند، آنگاه یک گراف G وجود دارد بطوریکه $\gamma(G) = a$ و $\gamma_{it}(G) = b$. زیرا، اگر $a = b$، آنگاه فرض کنید برای هر گراف همبند H از مرتبه a، $G = H^+$. در این‌صورت $\gamma(G) = a$ و $\gamma_{it}(G) = a = b$. حال، اگر $b \geq a + 1$، آنگاه فرض کنید G گراف بدست آمده از مسیر $P = (v_1, v_2, \ldots, v_a)$ و گراف‌های K_b و K_{b-a+1} با استفاده از روند زیر باشد.*

- *یکی‌کردن رأس v_1 از مسیر P و یک رأس u از K_{b-a+1}.*
- *یکی‌کردن رأس $v_i(2 \leq i \leq a)$ با یک رأس از یک کپی از K_b.*

در این صورت مجموعه $\{v_1, v_2, \ldots, v_a\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای G است. لذا $\gamma(G) \leq a$. از طرفی هر $\gamma(G)$–مجموعه شامل دقیقاً یک رأس از K_{b-a+1} و یک رأس از هر کپی K_b متصل به

$v_i(۲ \leq i \leq a)$ و یا شامل رأس $v_i(۱ \leq i \leq a)$ است و لذا $\gamma(G) \geq a$. از این رو $\gamma(G) = a$. فرض کنید مجموعه رأس گراف $K_{b-a+۱}$ به صورت $A_۱ = \{u_۱, u_۲, \ldots, u_{b-a+۱}\}$ باشد. در این صورت مجموعه $S = \{v_۲, \ldots, v_a, u_۱, u_۲, \ldots, u_{b-a+۱}\}$ به وضوح یک مجموعه احاطه‌گر است و چون هر $\beta_\circ(G)$–مجموعه‌ای شامل دقیقاً یک رأس از هر کپی K_b متصل به $v_i(۲ \leq i \leq a)$ و $K_{b-a+۱}$ و یا شامل دقیقاً یک رأس از مسیر P است، لذا S با هر $\beta_\circ(G)$–مجموعه اشتراک دارد. بنابراین S یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل است و لذا $\gamma_{it}(G) \leq a - ۱ + b - a + ۱ = b$. حال، فرض کنید S' یک $\gamma_{it}(G)$–مجموعه باشد. نشان می‌دهیم $|S'| \geq b$. فرض کنید A_i مجموعه رئوس گراف K_b متصل به v_i برای $i = ۲, \ldots, a$ باشد. فرض کنید برای $۱ \leq i \leq a$، $A_i \nsubseteq S'$. فرض کنید $x_i \in A_i - S'$، برای $i = ۱, ۲, \ldots, a$. در این صورت مجموعه $\{x_۱, x_۲, \ldots, x_a\}$ یک مجموعه مستقل ماکزیمم است که با S' اشتراک ندارد، که این تناقض است. بنابراین یک عدد صحیح $i \in \{۱, ۲, \ldots, a\}$ وجود دارد بطوریکه $A_i \subseteq S'$. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید $i = ۱$. چون S' یک مجموعه احاطه‌گر است، لذا برای هر $j(۲ \leq j \leq a)$ یا $S' \cap A_j \neq \emptyset$ یا $v_j \in S'$. در این صورت $|S'| \geq b - a + ۱ + a - ۱ = b$. از این رو $\gamma_{it}(G) = b$.

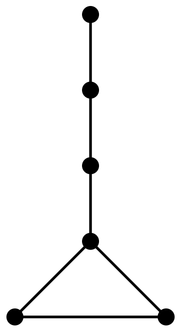
قضیه ۲۲.۳.۲. *اگر G یک گراف با $\chi(G) = k = \frac{n}{\beta_\circ(G)}$ باشد، آن‌گاه $\gamma_g(G) \leq \gamma_{it}(G)$.*

برهان. فرض کنید $\{V_۱, V_۲, \ldots, V_k\}$ یک k–رنگ آمیزی از G باشد. در این صورت به وضوح V_i، که $۱ \leq i \leq k$، یک مجموعه مستقل از G است. فرض کنید S یک γ_{it}–مجموعه از G باشد. در این صورت $S \cap V_i \neq \emptyset$، برای هر $i = ۱, ۲, \ldots, k$. چون $۱ \leq i \leq k, \langle V_i \rangle$، یک خوشه در $\overline{G}$ است، لذا S یک مجموعه احاطه‌گر از $\overline{G}$ است. از این‌رو S یک مجموعه احاطه‌گر سراسری از G است. بنابراین $\gamma_g(G) \leq \gamma_{it}(G)$. $\square$

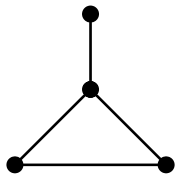
تذکر ۲۳.۳.۲. *فرض کنید S یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل از G باشد. در این صورت $\langle S \rangle$ در G یا $\overline{G}$ همبند است. از این‌رو S یک مجموعه احاطه‌گر همبند از G یا $\overline{G}$ است. بنابراین برای هر گراف G، یا $\gamma_c(G) \leq \gamma_{it}(G)$ یا $\gamma_c(\overline{G}) \leq \gamma_{it}(G)$.*

تذکر ۲۴.۳.۲. *برای گراف کامل K_n، داریم $\gamma_{it}(K_n) = n$ و $\beta_\circ(K_n) = ۱$. برای گراف کامل دوبخشی $K_{m,n}$ با $m \leq n$ و $n \geq ۲$ داریم $\gamma_{it}(K_{m,n}) = ۲$ و $\beta_\circ(K_{m,n}) = n$. برای G^+ از گراف n رأسی G، داریم $\gamma_{it}(G^+) = \beta_\circ(G^+) = n$. از این رو هیچ رابطه‌ای بین γ_{it} و $\beta_\circ$ وجود ندارد.*

تذکر ۲۵.۳.۲. *اگر گراف G دارای یک مجموعه مستقل ماکزیمم منحصر به‌فرد باشد، آن‌گاه داریم $\gamma_{it}(G) \leq \gamma(G) + ۱$. زیرا، اگر S یک γ–مجموعه باشد و D یک مجموعه مستقل ماکزیمم باشد، آن‌گاه $S \cup \{u\}$، که $u \in D$، یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل است. هرچند، یک گراف G با $\gamma_{it}(G) \leq \gamma(G) + ۱$ می‌تواند بیش از یک مجوعه مستقل ماکزیمم داشته باشد. برای مثال، برای گراف $G_۱$ داده شده در شکل ۳.۲، داریم $\gamma_{it}(G_۱) = \gamma(G_۱)$.*
همچنین برای گراف $G_۲$ داده شده در شکل ۴.۲، داریم $\gamma_{it}(G_۲) = \gamma(G_۲) + ۱$. هر چند، هر یک از گراف‌های $G_۱$ و $G_۲$ دو مجموعه مستقل ماکزیمم دارند.



شکل ۳.۲: گراف G_1



شکل ۴.۲: گراف G_2

۴.۲ برخی از مسائل باز در زمینه عدد احاطه‌گری متقاطع مستقل

نظریه احاطه‌گری، مهم و بعلاوه سریع‌ترین زمینه در حال رشد در نظریه گراف است. در این فصل ما یک تغییر جدید در احاطه‌گری به نام، احاطه‌گری متقاطع مستقل را معرفی کردیم. همچنین، ما فقط مطالعه‌ای از این پارامتر را آغاز کردیم. اگرچه، حوزه وسیعی برای پژوهش بیشتر روی این پارامتر وجود دارد و ما اینجا برخی از آنها را فهرست می‌کنیم.

(A) برخی از مسائل باز به صورت زیر هستند.

۱. گراف‌های همبند غیر کامل n رأسی G با $\beta_0(G) \geq \frac{n}{2}$ را برای وقتی که $\gamma_{it}(G) = \frac{n}{2}$ باشد را مشخص کنید.

۲. گراف‌هایی را مشخص کنید که

(i) $\gamma_{it}(G) = \gamma(G)$،

(ii) $\gamma_{it}(G) = \gamma(G) + \delta(G)$،

(iii) $\gamma_{it}(G) = \alpha_0(G) + 1$.

۳. گراف‌های از قطر دو را مشخص کنید که $\gamma_{it}(G) = \delta(G) + 1$.

۴. گراف‌های n رأسی G را مشخص کنید که

(i) $\gamma(G) + \gamma_{it}(G) = n + 1$،

(ii) $i(G) + \gamma_{it}(G) = n + 1$،

(iii) $\gamma_{it}(G) = \gamma_c(G)$.

۵. فرض کنید سه عدد صحیح مثبت a، b و c با $a \leq b \leq a+c$ مضروض‌اند. آیا یک گراف G وجود دارد بطوریکه $\gamma(G) = a$ ، $\gamma_{it}(G) = b$ و $\delta(G) = c$؟

(B) برای هر پارامتر نظری گراف نتیجه برداشت یک رأس یا یک یال روی پارامترها از اهمیت کاربردی برخوردار است. همچنین، برداشت یک رأس یا یک یال ممکن است باعث افزایش یا کاهش مقدار γ_{it} شود و یا ممکن است بدون تغییر باقی بماند. برای مثال، برای ستاره $K_{1,n-1}(n \geq 4)$، داریم $\gamma_{it}(K_{1,n-1}) = 2$ در حالیکه $\gamma_{it}(K_{1,n-1} - u) = 2$ که u هر رأس پایانی از ستاره است. همچنین $\gamma_{it}(W_7) = 3$، $\gamma_{it}(W_7 - v) = 2$ در حالیکه، که v رأس مرکزی چرخ است. از این‌رو این ممکن است که V به مجموعه‌های $V_\circ$، V_+ و V_- افراز شود، که

$$V_\circ = \{v \in V : \gamma_{it}(G - v) = \gamma_{it}(G)\},$$

$$V_+ = \{v \in V : \gamma_{it}(G - v) > \gamma_{it}(G)\},$$

$$V_- = \{v \in V : \gamma_{it}(G - v) < \gamma_{it}(G)\}.$$

به طور مشابه، می‌توان مجموعه یال E را به مجموعه‌های $E_\circ$، E_+ و E_- افراز کرد. حال، ما به بررسی خصوصیات این مجموعه‌ها بپردازیم.

(C) از آنجایی که مقدار γ_{it} برای گراف کامل K_n و گراف کاملاً ناهمبند $\overline{K_n}$ با n رأس، برابر n است، لذا برای یک گراف G همیشه ممکن است که مقدار $\gamma_{it}(G)$ با اضافه کردن یال‌هایی از متمم و یا با حذف یال‌ها از G، افزایش یابد. از این‌رو به طور طبیعی می‌توان کمترین تعداد یال‌هایی که به منظور افزایش مقدار $\gamma_{it}(G)$ حذف شدند (اضافه شدند) را درخواست کنیم؛ فرض کنید ما در ابتدا عدد اسارت احاطه‌گری متقاطع مستقل [۲] و عدد تقویت احاطه‌گری متقاطع مستقل [۳] که به ترتیب توسط $b_{it}(G)$ و $r_{it}(G)$ معرفی شده‌اند را فراخوانی می‌کنیم. حال ما می توانیم به بررسی این پارامترها بپردازیم.

[۲] Independent transversal domination bondage number

[۳] Independent transversal domination reinforcement number

فصل ۳

مجموعه‌های متقاطع مستقل در گراف‌ها: پیچیدگی و ویژگی‌های ساختاری

۱.۳ مقدمه

در این فصل، ابتدا زمینه‌ای از برخی نتایج بدست آمده در مرجع [۱۲]، که برای نتایج‌مان لازم است، را ارائه می‌دهیم و سپس برخی از مباحث راجع‌به پیچیدگی [۱] از مسائل مربوط به احاطه‌گری متقاطع مستقل درگراف را بررسی می‌کنیم. همچنین نتایج راجع‌به تحقق پذیری عدد احاطه‌گری متقاطع مستقل در رابطه با عدد احاطه‌گری و کوچکترین درجه ازگراف را ارائه می‌دهیم. در پایان نیز برخی ویژگی‌ها و خواص مجموعه‌های احاطه‌گر متقاطع مستقل ازگراف را بیان می‌کنیم.

۲.۳ برخی نتایج شناخته شده

در این بخش، برخی نتایج بدست آمده در مرجع [۱۲]، را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱.۲.۳. *[۱۲] برای هرگراف G، داریم* $\gamma(G) \leq \gamma_{it}(G) \leq \gamma(G) + \delta(G)$.

توجه کنید که، اگر یک گراف G دارای یک رأس از درجه ۱ باشد، آن‌گاه نتیجه بالا منجر به این می‌شود که $\gamma_{it}(G)$ یا $\gamma(G)$ است یا $\gamma(G)+1$، که برخی مسائل جالب راجع‌به دانستن اینکه $\gamma_{it}(G)$، $\gamma(G)$ است یا $\gamma(G)+1$، را بوجود می‌آورد. به عنوان مثال، اگر G یک درخت باشد. با این حال، نه تنها $\gamma_{it}(G)$ با $\gamma(G)$ مرتبط است بلکه درادامه می‌بینیم، که در جایی تقریباً با عدد پوششی رأسی نیز مرتبط است. به یاد می‌آوریم که یک مجموعه S را یک پوشش رأسی می‌نامیم هرگاه حداقل یکی از نقاط پایانی هر یال G در S باشد و کوچکترین اندازه یک پوشش رأسی را عدد پوششی رأسی G نامیم و با نماد $\alpha_0(G)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۲.۲.۳. *[۱۲] فرض کنید G گرافی بدون رأس تنها باشد، در این صورت* $\gamma_{it}(G) \leq \alpha_0(G)+1$. *اگر تساوی برقرار باشد، آن‌گاه* $\gamma(G) = \alpha_0(G)$.

قضیه ۳.۲.۳. *[۱۲] فرض کنید G یک گراف دوبخشی با دوبخش (X,Y) باشد بطوریکه $|X| \leq |Y|$ و $\gamma(G) = |X|$. در این صورت $\gamma_{it}(G) = \gamma(G)+1$ اگر و تنها اگر هر رأس در X مجاور حداقل دو رأس پایانی باشد.*

قضیه ۴.۲.۳. *[۱۲] اگر T یک درخت باشد، آن‌گاه $\gamma_{it}(T)$ یا $\gamma(T)$ است یا* $\gamma(T)+1$.

۳.۳ پیچیدگی مسائل احاطه‌گری متقاطع مستقل

در این بخش ما به بررسی پیچیدگی محاسباتی مسائل احاطه‌گری متقاطع مستقل درگراف‌ها می‌پردازیم. برای اطلاعات بیشتر روی کلاس‌های پیچیدگی و بحث‌های مرتبط مرجع [۱۱] را پیشنهاد می‌کنیم. مسئله تصمیم زیر را در نظر بگیرید.

---

[۱] Complexity

مسئله احاطه‌گری متقاطع مستقل
نمونه: یک گراف غیر بدیهی G و یک عدد صحیح مثبت r
مسئله: آیا $\gamma_{it}(G)$ کمتر از r است؟

پیچیدگی مسئله احاطه‌گری متقاطع مستقل (برای اختصار ITD–مسئله [۲]) به وضوح با وجود یک الگوریتم تصدیق کننده در زمان چندجمله‌ای مرتبط است که بررسی می‌کند یک مجموعه مفروض از رأس‌های گراف G براستی یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل است یا خیر.

در ادامه اثبات می‌کنیم که مسئله مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل (برای اختصار ITDS–مسئله [۳]) یک مسئله Co-NP–کامل است. همچنین نشان می‌دهیم که یک الگوریتم چندجمله‌ای برای ITDS–مسئله وجود دارد اگر و تنها اگر P=NP. برای این کار، متمم ITDS–مسئله را در نظر می‌گیریم.

مسئله مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل نبودن
نمونه: یک گراف غیر بدیهی G و یک زیر مجوعه S از رأس‌های G
مسئله: آیا می‌توان نشان داد که S یک مجموعه احاطه‌گر در G نیست؟

برای اینکه نشان دهیم ITDS–مسئله یک مسئله Co-NP–کامل است، نیاز داریم که اثبات کنیم مسئله مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل نبودن (برای اختصار NOT-ITDS–مسئله [۴]) یک مسئله NP–کامل است، که در ادامه این کار را انجام می‌دهیم.

ادعا ۱.۳.۳. *فرض کنید G یک گراف غیر بدیهی باشد. مجموعه $S \subset V(G)$ یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل در G نیست اگر و تنها اگر حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.*

- *S یک مجموعه احاطه‌گر نباشد، یا*
- *S با یک $\beta_0(G)$–مجموعه اشتراک نداشته باشد.*

توجه کنید که بررسی اینکه یک مجموعه مفروض از یک گراف G که یک مجموعه احاطه‌گر نیست، یا اینکه با یک $\beta_0(G)$–مجموعه اشتراک ندارد می‌تواند در زمان چندجمله‌ای انجام شود. بنابراین مسئله ITDS به وضوح در کلاس NP است. لذا مسئله تصمیم زیر مطرح می‌شود.

مسئله استقلال
نمونه: یک گراف غیر بدیهی G و یک عدد صحیح مثبت r
مسئله:آیا عدد استقلال G بزرگتر از r است؟

قضیه ۲.۳.۳. *[۱۶] مسئله استقلال NP–کامل است.*

تعریف ۳.۳.۳. [۱] یک مجموعه از رأس‌های X از یک گراف G مفروض است، گراف بدست آمده از G توسط حذف رأس‌های X همراه با یال‌هایی که بر حداقل یک رأس از X واقع‌اند را با نماد $G - X$ نمایش می‌دهیم.

[۲] Independent Transversal Domination Problem

[۳] Independent Transversal Dominating Set Problem

[۴] Not Independent Transversal Dominating Set Problem

لم ۴.۳.۳. *[۱] فرض کنید G یک گراف غیر بدیهی باشد و $S \subset V(G)$ یک مجموعه احاطه‌گر باشد. در این صورت S یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل در G نیست اگر و تنها اگر $\beta_\circ(G-S) = \beta_\circ(G)$.*

برهان. ابتدا توجه کنید که، برای هر مجموعه X از رأس‌های G، داریم $\beta_\circ(G-X) \leq \beta_\circ(G)$. حال، اگر $S \subset V(G)$ یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل در G نباشد، آن‌گاه چون S یک مجموعه احاطه‌گر است، پس بنا به ادعا ۱.۳.۳، یک $\beta_\circ(G)$–مجموعه وجود دارد که با S اشتراک ندارد. بنابراین یک مجموعه مستقل $Y \subset V(G) - S$ وجود دارد بطوریکه $|Y| = \beta_\circ(G)$. بنابراین Y یک مجموعه مستقل در $G-S$ است و لذا $\beta_\circ(G-S) \geq |Y| = \beta_\circ(G)$. از این رو $\beta_\circ(G-S) = \beta_\circ(G)$.

برای اثبات عکس، فرض کنید $\beta_\circ(G-S) = \beta_\circ(G)$. بنابراین یک $\beta_\circ(G-S)$–مجموعه Y' وجود دارد بطوریکه $|Y'| = \beta_\circ(G)$، و Y' یک مجموعه مستقل در G است. بنابراین واضح است که S با $\beta_\circ(G)$–مجموعه Y' اشتراک ندارد. پس بنا به ادعا ۱.۳.۳، S یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل نیست. □

از لم فوق در می‌یابیم که مسئله تصمیم‌گیری اینکه آیا یک مجموعه احاطه‌گر $S \subset V(G)$ یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل نیست می‌تواند به مسئله استقلال برای گراف $G-S$ ساده شود. مطابق این منظور، واقعیتی که ITDS–مسئله در NP است، از نتیجه زیر بدست می‌آید.

قضیه ۵.۳.۳. *[۱] مسئله NOT-ITDS، NP–کامل است.*

به عنوان یک برآمدی از نتیجه فوق، در میابیم که مسئله ITDS (متمم مسئله NOT-ITDS) یک مسئله Co-NP–کامل است.

نتیجه ۶.۳.۳. *[۱] مسئله ITDS، Co-NP–کامل است.*

قضیه ۷.۳.۳. *[۱] مسئله ITDS در کلاس P است اگر و تنها اگر P=NP.*

برهان. ابتدا توجه کنید که، اگر P=NP، آن‌گاه مسئله NOT-ITDS، که یک مسئله NP است، نیز در کلاس P است. پس متمم آن، مسئله ITDS، نیز در کلاس P خواهد بود.

برای اثبات عکس، اگر مسئله ITDS در کلاس P باشد، آن‌گاه متمم آن، مسئله NOT-ITDS، نیز در P است. چون مسئله NOT-ITDS یک مسئله NP–کامل است (بنا به قضیه ۵.۳.۳)، لذا داریم P=NP. □

ما مبحث دیگری راجع به پیچیدگی مسائل احاطه‌گری متقاطع مستقل را دنبال می‌کنیم و آن این است که، ما اثبات می‌کنیم که مسئله ITD (آیا عدد احاطه‌گری متقاطع مستقل از G کمتر از یک عدد صحیح مثبت r است) NP–کامل است اگر و تنها اگر P=NP. برای نشان دادن این، ما یک ساده‌سازی به مسئله احاطه‌گری زیر که قبلاً در NP–کامل شناخته شده بود [۱۱]، را انجام می‌دهیم.

۱.۳.۳ پیچیدگی مسئله احاطه‌گری متقاطع مستقل

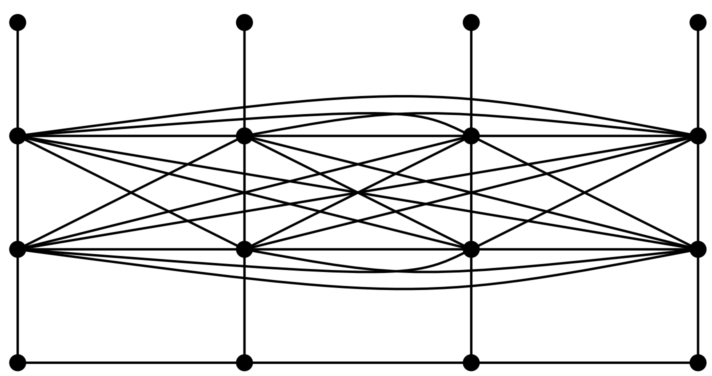
ابتدا ملاحظه می‌کنیم که، به عنوان یک نیاز برای اثبات اینکه مسئله ITD در کلاس NP خواهد بود، باید یک چندجمله‌ای تصدیق کننده موجود باشد که بتواند وجود یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل از اندازه کمتر یا مساوی یک عدد صحیح مثبت r را بررسی کند. در این زمینه یک حالتی که ملاکی از این وجود است، داده شده است و آن یک مجموعه S از اندازه کمتر یا مساوی r است. در این مفهوم، یک الگوریتم چندجمله‌ای باید تصدیق کند که S براستی یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل در G است یا خیر. به هر حال، بنا به قضیه ۷.۳.۳، این الگوریتم تنها در حالت P=NP وجود دارد. بنابراین اگر P≠NP باشد، آن‌گاه ITD−مسئله در NP نیست.

در ادامه مسئله زیر را که راجع‌به عدد احاطه‌گری از یک گراف است را ارائه می‌دهیم.

مسئله عدد احاطه‌گری
نمونه: یک گراف غیر بدیهی G و یک عدد صحیح مثبت r
مسئله: تصمیم گیری اینکه آیا عدد احاطه‌گری G کمتر از r است

قضیه ۸.۳.۳. *[۱۱] مسئله احاطه‌گری NP−کامل است.*

فرض کنید G یک گراف غیرتهی از مرتبه $n \geq ۲$ با مجموعه رأس $V(G) = \{v_۱, v_۲, \ldots, v_n\}$ باشد. به منظور تحلیل پیچیدگی ITD−مسئله، گراف H_G را به صورت زیر می‌سازیم. سه مجموعه رأس‌های $A = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$، $B = \{b_۱, b_۲, \ldots, b_n\}$ و $C = \{c_۱, c_۲, \ldots, c_n\}$ که هر کدام از اندازه n هستند را در نظر می‌گیریم. با مجموعه‌های A و B یک گراف کامل $K_{۲n}$ تشکیل می‌دهیم (تمام یال‌های ممکن بین هر دو رأس از $A \cup B$ را اضافه می‌کنیم). آن‌گاه برای هر $i \in \{۱, ۲, \ldots, n\}$، یالی بین دو رأس v_i و a_i و یالی بین دو رأس b_i و c_i اضافه می‌کنیم، در این صورت گراف H_G بدست می‌آید. برای مثالی از گراف $H_{P_۴}$، شکل ۱.۳ را ببینید.



شکل ۱.۳: گراف $H_{P_۴}$.

حال برخی ویژگی‌ها و ادعاهایی روی گراف H_G را ارائه می‌دهیم.

لم ۹.۳.۳. *[۱] برای هر گراف غیر تهی G از مرتبه n، داریم* $\gamma(H_G) = n + \gamma(G)$.

برهان. فرض کنید $S \subset V(G)$ یک $\gamma(G)$–مجموعه باشد. مطابق با این ساختار گراف H_G، به وضوح $S \cup B$ یک مجموعه احاطه‌گر در H_G است زیرا هر رأس از B مانند b_i، به تمام رأس‌های A و نیز به رأس $c_i (۱ \leq i \leq n)$ متصل است، پس مجموعه B هم رأس‌های A و هم رأس‌های C را احاطه می‌کند. از طرفی چون S یک $\gamma(G)$–مجموعه است، لذا $S \cup B$ یک مجموعه احاطه‌گر از گراف H_G است. بنابراین $\gamma(H_G) \leq |S| + |B| = \gamma(G) + n$.

از طرف دیگر، فرض کنید X یک $\gamma(H_G)$–مجموعه باشد. چون هر رأس از C دارای درجه یک است، پس یا c_i و یا همسایه آن b_i در X است. لذا برای هر $i \in \{۱, ۲, \ldots, n\}$، نتیجه می‌شود که $X \cap \{b_i, c_i\} \neq \emptyset$. بنابراین $|X \cap (B \cup C)| \geq n$، زیرا X حداقل یکی از b_i یا c_i، برای $i = ۱, ۲, \ldots, n$، را شامل می‌شود. همچنین، چون X یک $\gamma(H_G)$–مجموعه است، لذا X با v_i یا a_i، که $(۱ \leq i \leq n)$، اشتراک دارد. از طرفی چون این اشتراک رأس $v_i (۱ \leq i \leq n)$ را احاطه می‌کند، پس یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G است، پس $|X \cap (A \cup V(G))|$ یک مجموعه احاطه‌گر از G است. بنابراین $|X \cap (A \cup V(G))| \geq \gamma(G)$. در نتیجه

$$\gamma(H_G) = |X| = |X \cap (B \cup C)| + |X \cap (A \cup V(G))| \geq n + \gamma(G).$$

از این رو $\gamma(H_G) = n + \gamma(G)$. □

لم ۱۰.۳.۳. *[۱] برای هر گراف غیر تهی G از مرتبه n، داریم* $\beta_۰(H_G) = n + ۱ + \beta_۰(G)$.

برهان. فرض کنید $S \subset V(G)$ یک $\beta_۰(G)$–مجموعه باشد. چون G غیرتهی است، لذا حداقل یک $j \in \{۱, ۲, \ldots, n\}$ وجود دارد بطوریکه $v_j \notin S$. حال، مطابق با ساختار گراف H_G، به وضوح مجموعه $S \cup \{a_j\} \cup C$ یک مجموعه مستقل در H_G است (a_j رأسی از A است که مجاور v_j است). بنابراین $\beta_۰(H_G) \geq |S| + ۱ + |C| = \beta_۰(G) + n + ۱$.

از طرف دیگر، فرض کنید X یک $\beta_۰(H_G)$–مجموعه باشد. چون زیرگراف القایی تولید شده توسط $A \cup B$ با یک گراف کامل $K_{۲n}$ یکریخت است، پس X از $A \cup B$ حداکثر یک رأس را شامل می‌شود، لذا $|X \cap (A \cup B)| \leq ۱$. همچنین، $X \cap V(G)$ یک مجموعه مستقل از G است. بنابراین

$$\beta_۰(H_G) = |X| = |X \cap C| + |X \cap V(G)| + |X \cap (A \cup B)| \leq n + \beta_۰(G) + ۱.$$

از این رو $\beta_۰(H_G) = n + ۱ + \beta_۰(G)$. □

مطابق نتیجه فوق و اثبات آن، واضح است که هر $\beta_۰(H_G)$–مجموعه شامل تمام رأس‌های C است. این موضوع در ادعای زیر بیان شده است.

ادعا ۱۱.۳.۳. *[۱] فرض کنید G یک گراف غیرتهی باشد و H_G گراف ساخته شده با روند فوق باشد. در این صورت هر $\beta_۰(H_G)$–مجموعه شامل تمام رأس‌های مجموعه C است.*

لم ۱۲.۳.۳. *[۱] برای هر گراف غیر تهی G از مرتبه n، داریم* $\gamma_{it}(H_G) = n + \gamma(G)$.

برهان. فرض کنید S یک $\gamma(G)$–مجموعه باشد و $b_i \in B$ و $c_i \in C$ (توجه کنید که b_i و c_i، که $i = ۱, ۲, \ldots, n$، مجاورند). در این صورت مجموعه $X = (C - \{c_i\}) \cup \{b_i\} \cup S$ یک مجموعه

احاطه‌گر در H_G است زیرا S یک $\gamma(G)$–مجموعه است و b_i نیز مجموعه‌های A و B را احاطه می‌کند، لذا X یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف H_G است و $|X| = n+\gamma(G)$. پس بنا به لم ۹.۳.۳، X یک $\gamma(H_G)$–مجموعه است. همچنین، بنا به ادعا ۱۱.۳.۳، چون هر $\beta_\circ(H_G)$–مجموعه شامل تمام رأس‌های C است، پس X با هر $\beta_\circ(H_G)$–مجموعه‌ای اشتراک دارد. بنابراین X یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل است. لذا $\gamma_{it}(H_G) \leq |X| = \gamma(H_G) = n+\gamma(G)$. از طرفی همواره $\gamma_{it}(H_G) \geq \gamma(H_G)$. از این رو $\gamma_{it}(H_G) = \gamma(H_G) = n+\gamma(G)$. □

حال، با استفاده از نتیجه فوق سرانجام نتیجه اصلی‌مان در این بخش را اثبات می‌کنیم. به یاد می‌آوریم که هدف‌مان ساده کردن مسئله احاطه‌گری متقاطع مستقل به مسئله احاطه‌گری است.

قضیه ۱۳.۳.۳. *[۱] مسئله احاطه‌گری متقاطع مستقل یک مسئله NP–سخت است. به‌علاوه NP–کامل است اگر و تنها اگر P=NP*

برهان. یک گراف غیر بدیهی G را در نظر می‌گیریم و یک گراف H_G با استفاده از روند فوق می‌سازیم. واضح است که این چنین ساختار می‌تواند در زمان چندجمله‌ای انجام شود. با استفاده از لم ۱۲.۳.۳، داریم $\gamma_{it}(H_G) = \gamma(H_G)$. پس برای هر j,k با $j = n+k$، نتیجه می‌شود که $\gamma(G) \leq k$ اگر و تنها اگر $\gamma_{it}(H_G) \leq j$. بنابراین، ما داریم مسئله احاطه‌گری را به ITD–مسئله ساده می‌کنیم و در نتیجه ITD–مسئله NP–سخت است.

حال، برای کامل شدن اثبات اینکه ITD–مسئله NP–کامل است نیاز داریم که نشان دهیم ITD–مسئله در کلاس NP است. معادلاً، باید یک چندجمله‌ای تصدیق کننده باشد که بتواند بررسی کند یک مجموعه S از اندازه کمتر یا مساوی r براستی یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل در G است یا خیر. اگر P=NP، آن‌گاه با استفاده از قضیه ۷.۳.۳، این می‌تواند در چندجمله‌ای زمان انجام شود. بنابراین اثبات این طرف کامل است.

حال، فرض کنیم که ITD–مسئله NP–کامل است. بنابراین یک چندجمله‌ای تصدیق کننده وجود دارد که بررسی می‌کند یک مجموعه S از اندازه کمتر یا مساوی r براستی یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل در G است یا خیر، که این بدان معنی است که ITDS–مسئله در کلاس P است. پس بنا به قضیه ۷.۳.۳، بدست می‌آوریم که P=NP. □

۴.۳ نتایج تحقق‌پذیری برای عدد احاطه‌گری متقاطع مستقل

در شروع بخش ۲.۳ اشاره کردیم که، کران $\gamma(G) \leq \gamma_{it}(G) \leq \gamma(G)+\delta(G)$ نقش مهمی در مطالعه و بررسی $\gamma_{it}(G)$ دارد. برای این مفهوم، طبیعی است که سؤال زیر را بپرسیم، که قبلاً به عنوان مسئله باز در فصل ۲ بیان شده بود. سه عدد صحیح مثبت a، b و c با $a \leq b \leq a+c$ مفروض‌اند، آیا یک گراف G وجود دارد بطوریکه $\gamma(G) = a$ ، $\gamma_{it}(G) = b$ و $\delta(G) = c$. یک جواب مثبت به این سؤال برای $\delta(G) = ۱$ معلوم است، و آن در نظر گرفتن G به عنوان یک درخت است. مطابق این موضوع، برای هر درخت T، داریم $\gamma(T) \leq \gamma_{it}(T) \leq \gamma(T)+۱$. بنابراین جالب است که مشخص کنیم چه

وقت $\gamma_{it}(T)$ برابر $\gamma(T)$ و چه وقت برابر $\gamma(T)+۱$ است. این مسئله نیز در فصل ۲ بیان شده بود، که یک درخت T طبقه بندی شده یا از کلاس ۱ است یا از کلاس ۲، و مطابق با آن $\gamma_{it}(T)$ به ترتیب برابر $\gamma(T)$ یا برابر $\gamma(T)+۱$ است. از طرف دیگر، اگر G یک درخت نباشد و $\delta(G)=c>۱$، آن‌گاه خواستار این هستیم که گراف‌هایی را توصیف کنیم که $\gamma(G)=a$ و $\gamma_{it}(G)=b$. در ادامه ما به چنین مسئله‌ای پاسخ می‌دهیم. برای این منظور، ما نیاز به معرفی عملکرد گراف زیر که اولین بار در مرجع [۱۰] تعریف شده است، داریم.

فرض کنید G و H دو گراف به ترتیب از مرتبه $n_۱$ و $n_۲$ باشند. **گراف تاج** [۵] $G\odot H$ به عنوان گراف بدست آمده از G و H با استفاده از گرفتن یک کپی از G و $n_۱$ کپی از H و متصل کردن هر رأس از i–امین کپی از H با یالی به i–امین رأس از G، تعریف می‌شود. از این پس، ما مجموعه رئوس G را با $V=\{u_۱,u_۲,\ldots,u_n\}$، و i–امین کپی از H در $G\odot H$ را توسط $H_i=(V_i,E_i)$ تعریف خواهیم کرد. برای برخی خواص مربوط به احاطه‌گری از گراف تاج مرجع [۱۷] را پیشنهاد می‌کنیم.

از طرف دیگر، یک گراف G مفروض است، بزرگترین تعداد مجموعه‌های مستقل ماکزیمم دو به دو مجزا از G را با $d_\beta(G)$ نشان می‌دهیم. از این پس، ما S را یک $d_\beta(G)$–مجموعه از G گوییم هرگاه هر دو رأس متمایز از S متعلق به دو مجموعه مستقل ماکزیمم مجزا از G باشند. چون هر گراف حداقل یک مجموعه مستقل ماکزیمم دارد، لذا برای هر گراف G، $d_\beta(G)\geq ۱$. به عنوان مثال، به راحتی می‌توان مشاهده کرد که برای هر دور C_n، $d_\beta(C_n)=۲$. همچنین برای هر گراف چند بخشی کامل منتظم $K_{n,n,\ldots,n}$ که k مجموعه جداشده دارد، نتیجه می‌شود که $d_\beta(G)=k$. این پارامتر برای هدف‌مان روی تحقق‌پذیری احاطه‌گری متقاطع مستقل که در ادامه نشان می‌دهیم، مفید است. اما ما قبل از آن به نتایج پایه‌ای زیر نیاز داریم. تمام نتایج و قضایا زیر از مرجع [۱] هستند.

لم ۱.۴.۳. *برای هر گراف G و H، داریم $\gamma(G\odot H)=n$.*

لم ۲.۴.۳. *برای هر گراف G و H، داریم $\beta_۰(G\odot H)=n\beta_۰(H)$. بعلاوه، اگر $\beta_۰(H)\geq ۲$، آن‌گاه هر $\beta_۰(G\odot H)$–مجموعه شامل فقط رأس‌های متعلق به کپی‌های H_i از گراف H در $G\odot H$ است و این توسط اجتماعی از n $\beta_۰(H_i)$–مجموعه بدست می‌آید.*

در ادامه ما عدد احاطه‌گری متقاطع مستقل از گراف های تاج را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۳.۴.۳. *فرض کنید G یک گراف از مرتبه $n\geq ۲$ باشد. در این صورت برای هر گراف H بطوریکه $\beta_۰(H)\geq ۲$، داریم*

$$n-۱+d_\beta(H)\leq\gamma_{it}(G\odot H)\leq n+d_\beta(H).$$

بعلاوه، اگر یک $d_\beta(H)$–مجموعه وجود داشته باشد که یک مجموعه احاطه‌گر در H باشد، آن‌گاه داریم $\gamma_{it}(G\odot H)=n-۱+d_\beta(H)$.

برهان. فرض کنید X یک $\gamma_{it}(G\odot H)$–مجموعه باشد. چون $\beta_۰(H)\geq ۲$، لذا بنا به لم ۲.۴.۳، هر $\beta_۰(G\odot H)$–مجموعه شامل فقط رأس‌های متعلق به کپی‌های H_i از گراف H در $G\odot H$ است و این

[۵] Corona graph

توسط اجتماعی از n $\beta_۰(H_i)$–مجموعه بدست می‌آید. بنابراین، چون X با هر $\beta_۰(G\odot H)$–مجموعه‌ای اشتراک دارد، لذا $j \in \{۱,۲,\dots,n\}$ وجود دارد بطوریکه $X\cap V(H_j) \neq \emptyset$. بعلاوه، اگر k مجموعه مستقل ماکزیمم دو به دو مجزا در H_j وجود داشته باشند، آنگاه $|X\cap V(H_j)| \geq k$.

از طرف دیگر، برای احاطه کردن هر مجموعه $V(H_i)$ با $i \in \{۱,۲,\dots,n\}$ و $i \neq j$، حداقل به یک رأس نیاز داریم. بنابراین برای هر $i \in \{۱,۲,\dots,n\}$ و $i \neq j$ داریم $|X\cap(V(H_i)\cup\{u_i\})| \geq ۱$ (توجه کنید که $\{u_۱,u_۲,\dots,u_n\}$ مجموعه رأس‌های گراف G هستند). بنابراین، داریم که

$$\begin{aligned}|X| &= \sum_{i=۱}^{n} |X\cap(V(H_i)\cup\{u_i\})| \\ &= \sum_{i=۱,i\neq j}^{n} |X\cap(V(H_i)\cup\{u_i\})| + |X\cap V(H_j)| \\ &\geq (n-۱)+k = (n-۱)+d_\beta(H),\end{aligned}$$

و اثبات کران پایین کامل است.

از طرف دیگر، یک مجموعه Y در $G\odot H$ که در سبک زیر ارائه شده است را در نظر می‌گیریم. برای کپی $H_۱$ از H در $G\odot H$، یک $d_\beta(H_۱)$–مجموعه A در نظر می‌گیریم (توجه کنید که A می‌تواند یک مجموعه احاطه‌گر در H نباشد). حال، $Y = V(G)\cup A$ را می‌سازیم. به درستی می‌توان مشاهده کرد که Y یک مجوعه احاطه‌گر در $G\odot H$ است و با هر مجموعه مستقل ماکزیمم در $G\odot H$ اشتراک دارد زیرا $V(G)$ یک $\gamma(G\odot H)$–مجموعه است، پس Y نیز یک مجموعه احاطه‌گر است و چون بنا به فرض $\beta_۰(H) \geq ۲$، لذا بنا به لم ۲.۴.۳، هر $\beta_۰(G\odot H)$–مجموعه شامل فقط رأس‌های متعلق به کپی‌های H_i از گراف H در $G\odot H$ است که این از اجتماع n $\beta_۰(H_i)$–مجموعه بدست می‌آید و همچنین، چون هر $\beta_۰(H_۱)$–مجموعه شامل یکی از رئوس A است، لذا هر $\beta_۰(G\odot H)$–مجموعه شامل یکی از رئوس A است. پس هر $\beta_۰(G\odot H)$–مجموعه با Y اشتراک دارد، پس Y یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل در $G\odot H$ است. بنابراین $\gamma_{it}(G\odot H) \leq |Y| = n+d_\beta(H)$ و کران بالا اثبات می‌شود.

در نهایت، اگر A یک مجموعه احاطه‌گر در H باشد، آنگاه $Y=(V(G)-\{u_۱\})\cup A$ یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل است زیرا A بنا به فرض یک مجموعه احاطه‌گر در H است، پس A، گراف $H_۱$ و رأس $u_۱$ را احاطه می‌کند و $V(G)$ نیز بقیه رئوس گراف را احاطه می‌کند. لذا Y یک مجموعه احاطه‌گر از $G\odot H$ است و همچنین، بنا به استدلال فوق، Y با هر $\beta_۰(G\odot H)$–مجموعه‌ای اشتراک دارد. بنابراین Y یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل است. در نتیجه $\gamma_{it}(G\odot H) \leq |Y| = n-۱+d_\beta(H)$. از طرفی ثابت کردیم که $\gamma_{it}(G\odot H) \geq n-۱+d_\beta(H)$، در نتیجه تساوی برقرار است. □

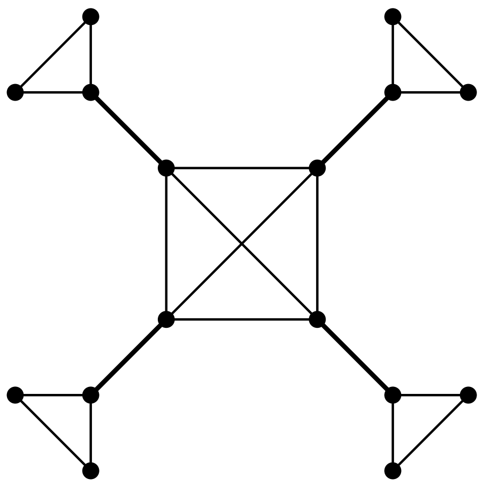
حال ما با مسئله وجود گراف‌های G، بطوریکه $\gamma(G)=a$ ، $\gamma_{it}(G)=b$ و $\delta(G)=c$ برای هر عدد صحیح a، b و c با $a\leq b\leq a+c$، سر و کار داریم. چون حالت $\delta(G)=۱$ قبلاً بررسی شد، لذا ما در حالت $\delta(G)=c>۱$ متمرکز می‌شویم.

قضیه ۴.۴.۳. *فرض کنید a، b و c سه عدد صحیح مثبت باشند، بطوریکه $c\geq ۲$ و $a\leq b\leq a+c$. در این صورت یک گراف G از کوچکترین مرتبه $\delta(G)=c$ وجود دارد بطوریکه $\gamma(G)=a$ و $\gamma_{it}(G)=b$.*

برهان. برای اثبات دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

۱. ابتدا حالت $a \leq b = a + c$ را بررسی می‌کنیم. اگر $a = ۱$، آنگاه گراف کامل K_b گراف مورد نظر است، زیرا $\delta(K_b) = b - ۱ = b - a = c$، $\gamma(K_b) = ۱ = a$ و $\gamma_{it}(K_b) = b$. از این رو، فرض می‌کنیم که $a \geq ۲$، و حالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم.

(A) $c \leq a$. فرض کنید $H_۱ \cong K_a$ ، $H_۲ \cong K_{c+۱}$. و G گراف بدست آمده از $H_۱$ و $H_۲$ توسط برداشتن یک کپی از $H_۱$ و a کپی از $H_۲$ و متصل کردن i–امین رأس از $H_۱$ با یالی به دقیقاً یک رأس از i–امین کپی $H_۲$ باشد، برای $i = ۱, ۲, \ldots, a$ (شکل ۲.۳ مثالی از این قبیل گراف G با $a = ۴$ و $c = ۲$ را نشان می‌دهد). فرض کنید $V(H_۱) = \{v_۱, v_۲, \ldots, v_a\}$ و مجموعه رئوس i–امین کپی از $H_۲$، که $i = ۱, ۲, \ldots, a$، به صورت $V(H_{i۲}) = \{v_{i۱}, v_{i۲}, \ldots, v_{i(c+۱)}\}$ باشد. به وضوح $\delta(G) = c$ و همه رأس‌هایی که از درجه $c + ۱$ هستند، تنها $\gamma(G)$–مجموعه گراف را تشکیل می‌دهند زیرا این رئوس تنها رئوسی هستند که هم با رأس‌های $K_{c+۱}$ و هم با یکی از رأس‌های K_a مجاورند، لذا این a تا رأس تشکیل یک $\gamma(G)$–مجموعه را می‌دهند که این $\gamma(G)$–مجموعه منحصر بفرد است. فرض کنید این a رأس به صورت $A = \{v_{۱۱}, v_{۲۱}, \ldots, v_{a۱}\}$ باشند. پس $\gamma(G) = a$. همچنین $\beta_۰(G) = a + ۱$ و هر $\beta_۰(G)$–مجموعه‌ای شامل دقیقاً یک رأس از $H_۱$ و شامل دقیقاً یک رأس از هر کپی $H_۲$ است. همچنین، به ازای هر $i = ۱, ۲, \ldots, n$ مجموعه‌های $S = V(H_{i۲}) \cup A$ و $S' = V(K_a) \cup A$ تشکیل یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل را می‌دهند. اما، چون $c \leq a$، لذا S یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل مینیمم است. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید $i = ۱$. پس مجموعه $S = \{v_{۱۱}, v_{۲۱}, \ldots, v_{a۱}, v_{۱۲}, v_{۱۳}, \ldots, v_{۱(c+۱)}\}$ یک $\gamma_{it}(G)$–مجموعه است. بنابراین $\gamma_{it}(G) = |S| = a + c = b$.

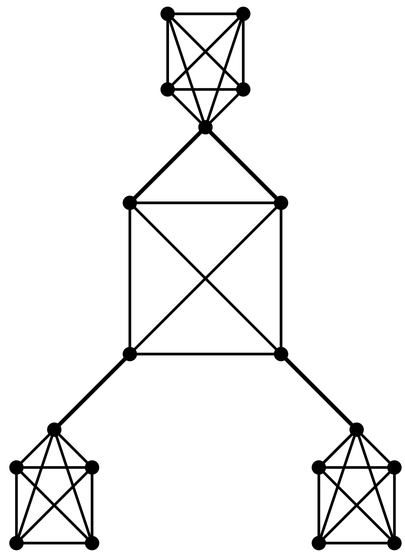


شکل ۲.۳: گراف G با $a = ۴$، $b = ۶$ و $c = ۲$. توجه کنید که $\delta(G) = c = ۲$، $\gamma(G) = a = ۴$ و $\gamma_{it}(G) = b = a + c = ۶$.

(B) $c > a$. فرض کنید $H_۱ \cong K_c$ و $H_۲ \cong K_d$، که $d > c$. فرض کنید G گراف بدست آمده از $H_۱$ و $H_۲$ توسط برداشتن یک کپی از $H_۱$ و a کپی از $H_۲$ با استفاده از روند زیر باشد.

- متصل کردن i–امین رأس از $H_۱$ با یالی به دقیقاً یک رأس از i–امین کپی از $H_۲$، $i \in \{۱, ۲, \ldots, a - ۱\}$.
- متصل کردن دقیقاً یک رأس از آخرین کپی از $H_۲$ با یالی به هر یک از رئوس باقیمانده $H_۱$.

با توجه به این ساختار، می‌توان مشاهده کرد که کوچکترین درجه گراف از یک رأس از گراف $H_۱$ بدست می‌آید، لذا $\delta(G) = \delta(H_۱) + ۱ = c$ و همه رأس‌هایی از کپی‌های $H_۲$ که همسایه‌ای در $H_۱$ دارند تنها $\gamma(G)$–مجموعه گراف را تشکیل می‌دهند زیرا این رئوس تنها رئوسی هستند که هم با رأس‌های $H_۲$ و هم با یکی از رأس‌های $H_۱$ مجاورند. حال، این $\gamma(G)$–مجموعه را A بنامید. پس $\gamma(G) = a$. همچنین $\beta_۰(G) = a + ۱$ و هر $\beta_۰(G)$–مجموعه شامل دقیقاً یک رأس از $H_۱$ و دقیقاً یک رأس از هر کپی $H_۲$ است. لذا مجموعه‌های $S = V(K_c) \cup A$ و $S' = V(K_d) \cup A$ تشکیل یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل را می‌دهند. اما، چون $c < d$، پس S یک $\gamma_{it}(G)$–مجموعه است. بنابراین $\gamma_{it}(G) = |S| = a + c = b$ شکل ۳.۳ نمونه‌ای از این قبیل گراف G برای $a = ۳$، $c = ۴$ و $b = ۷$ را نشان می‌دهد.



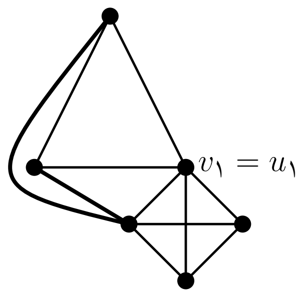
شکل ۳.۳: گراف G با $a = ۳$، $c = ۴$، $d = ۵$ و $b = ۷$. توجه کنید که $\delta(G) = c = ۴$، $\gamma(G) = a = ۳$ و $\gamma_{it}(G) = b = a + c = ۷$.

۲. حال، حالت $a \le b < a + c$ را بررسی می‌کنیم.

اگر $a = ۱$، آن‌گاه فرض کنید G گراف بدست آمده از دو گراف K_b و $K_{b(c-b+۱)+۱}$ با استفاده از روند زیر باشد.

- یکی کردن یک رأس $v_۱$ از K_b با یک رأس $u_۱$ از $K_{b(c-b+۱)+۱}$.
- متصل کردن هر رأس متمایز از $v_۱$ از K_b با یالی به $c-b+۱$ رأس یکنواخت و متمایز از $u_۱$ از $K_{b(c-b+۱)+۱}$.

بنابراین، کوچکترین درجه از G از یک رأس واقع در K_b غیر از $v_۱$ بدست می‌آید. در نتیجه $\delta(G) = b-۱+c-b+۱ = c$. همچنین، رأس $v_۱$ از گراف K_b کل گراف را احاطه می‌کند، لذا $\gamma(G) = ۱$ و هر $\beta_۰(G)$–مجموعه از یک رأس از K_b غیر از $v_۱$ و یک رأس دیگر از $K_{b(c-b+۱)+۱}$ غیر از $c-b+۱$ رأس و $u_۱$ تشکیل می‌شود. چون $b(c-b+۱)+۱ > b$، لذا مجموعه رئوس K_b یک $\gamma_{it}(G)$–مجموعه از G است. پس $\gamma_{it}(G) = b$. شکل ۴.۳ مثالی از این چنین گراف G برای $a = ۱$، $c = ۳$ و $b = ۳$ را نشان می‌دهد.



شکل ۴.۳: گراف G با $a = ۱$، $c = ۳$ و $b = ۳$. توجه کنید که $\delta(G) = c = ۳$، $\gamma(G) = a = ۱$ و $\gamma_{it}(G) = b = ۳$.

در نهایت، حالت $a \leq b < a+c$ را با $a \geq ۲$ بررسی می‌کنیم. برای این منظور، ما با یک گراف G' از مرتبه a بدون رأس تنها، شروع می‌کنیم. در این صورت ما به یک گراف H نیاز داریم بطوریکه $\delta(H) = c-۱$ و $d_\beta(H) = b-a+۱$ و دارای یک $d_\beta(H)$–مجموعه باشد که یک مجموعه احاطه‌گر است. حال، گراف G را به عنوان گراف تاج $H \odot G'$، در نظر می‌گیریم. گراف G دارای کوچکترین درجه $\delta(G) = \delta(H)+۱ = c$ است زیرا هر رأس دیگر مانند u در G' دارای درجه‌ای در G است که برابر است با

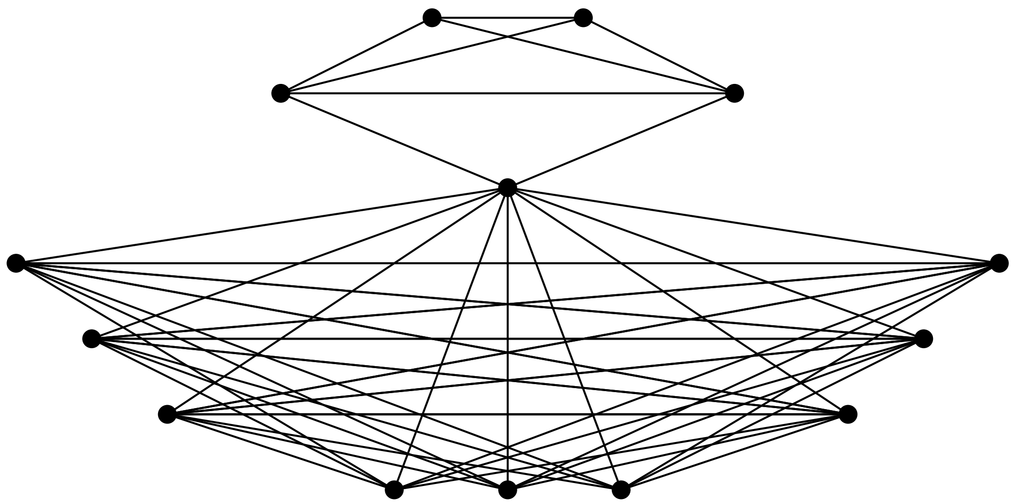
$$\delta_{G'}(u) + |V(H)| \geq \delta_{G'}(u) + \delta(H) + ۱ = \delta_{G'}(u) + c > c.$$

همچنین، از لم ۱.۴.۳، داریم $\gamma(G) = a$، و بنا به قضیه ۳.۴.۳، داریم

$$\gamma_{it}(G) = a-۱+d_\beta(H) = a-۱+b-a+۱ = b.$$

حال، یک گراف H که $\delta(H) = c-۱$، $d_\beta(H) = b-a+۱$ و دارای یک $d_\beta(H)$–مجموعه باشد که یک مجموعه احاطه‌گر در H است را توصیف خواهیم کرد. یک گراف چند بخشی کامل $K_{t_۱,t_۲,\ldots,t_r}$ با مجموعه‌های جداشده $U_۱, U_۲, \ldots, U_r$ ($|U_i| = t_i, r > b-a+۱$) را در نظر

می‌گیریم بطوریکه دقیقاً $b-a+۱$ مجموعه U_j وجود داشته باشند که دارای اندازه یکسان R باشند و $R=|U_j|=t_j=\max\{t_i, ۱\leq i\leq r\}$. همچنین، یک مجموعه U_l وجود دارد بطوریکه $|U_l|=t_l=۱$. از طرف دیگر، یک گراف کامل K_c را در نظر می‌گیریم. آنگاه، رأس U_l را با یالی به حداکثر $c-۱$ رأس از گراف کامل K_c متصل می‌کنیم، و گراف H بدست می‌آید (شکل ۵.۳ مثالی از این قبیل گراف H برای $a=۳$، $b=۵$ و $c=۴$ را نشان می‌دهد).
توجه کنید که، گراف H دارای مینیمم درجه $c-۱$ است که از یک رأس از گراف کامل K_c که مجاور



شکل ۵.۳: گراف H با $a=۳$، $b=۵$ و $c=۴$. توجه کنید که $\delta(H)=c-۱=۳$، $\beta_0(H)=۴$ و $d_\beta(H)=b-a+۱=۳$.

با رأس مجموعه U_l نیست، بدست می‌آید. همچنین، به راحتی می‌توان دید که $\beta_0(H)=R+۱$ و هر مجموعه مستقل ماکزیمم از مجموعه جداشده $U_j(۱\leq j\leq r)$ از اندازه R همراه با یک رأس از گراف کامل K_c تشکیل می‌شود. چون دقیقاً $b-a+۱$ تا از این قبیل مجموعه‌های جداشده U_j داریم و نیز $c>b-a$ (با استفاده از فرض حالت دوم)، لذا این معادل است با $c\geq b-a+۱$، در نتیجه $b-a+۱$ مجموعه مستقل ماکزیمم دو به دو مجزا در H وجود دارند. بنابراین $d_\beta(H)=b-a+۱$ و هر $d_\beta(H)$-مجموعه یک مجموعه احاطه‌گر در H است. در نتیجه اثبات کامل است.

□

۵.۳ خواص و ویژگی‌های مجموعه‌های احاطه‌گر متقاطع مستقل

حال، طبق پیچیدگی ITD-مسئله، مطلوب است که عدد احاطه‌گری متقاطع مستقل از چندین خانواده از گراف‌ها یا چندین خواص از مجموعه‌های احاطه‌گر متقاطع مستقل در گراف‌ها را بررسی کنیم. برای این منظور، ما به برخی اصطلاحات و نمادسازی‌هایی که در فصل ۱ ارائه شد، نیاز داریم. در فصل ۱

بیان کردیم که، مجموعه تمام مجموعه‌های مستقل ماکزیمم در G را با $\Omega(G)$ نمایش می‌دهیم و مطابق با این، نیز بیان کردیم که $core(G) = \bigcap_{S\in\Omega(G)} S$ و $\xi(G) = |core(G)|$. به وضوح، هر رأس تنها از یک گراف G مشمول در $core(G)$ است. تمام قضایا این بخش از مرجع [۱] هستند.

ملاحظه ۱.۵.۳. *فرض کنید G یک گراف باشد و فرض کنید $v \in core(G)$.*

۱. *برای هر $\gamma(G)$–مجموعه D، $D \cup \{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل از G است. به ویژه، $\gamma_{it}(G) \leq \gamma(G) + ۱$.*

۲. *اگر v یک $\gamma(G)$–رأس خوب باشد، آن‌گاه $\gamma(G) = \gamma_{it}(G)$.*

برهان. ۱. چون $v \in core(G)$، پس v در هر $\beta_\circ(G)$–مجموعه‌ای وجود دارد، لذا $D \cup \{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل است. بنابراین $\gamma_{it}(G) \leq |D| + ۱ = \gamma(G) + ۱$.

۲. چون v هم در هر $\beta_\circ(G)$–مجموعه‌ای و هم در برخی $\gamma(G)$–مجموعه‌ها وجود دارد، لذا این $\gamma(G)$–مجموعه‌ها هر یک به تنهایی تشکیل یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل را می‌دهند. بنابراین $\gamma(G) = \gamma_{it}(G)$.

□

نتیجه ۲.۵.۳. *فرض کنید G یک گراف با یک $\beta_\circ(G)$–مجموعه منحصر به فرد باشد. در این صورت $\gamma_{it}(G) \leq \gamma(G) + ۱$. بعلاوه، تساوی برقرار است اگر و تنها اگر هیچ $\gamma(G)$–رأس خوب متعلق به $\beta_\circ(G)$–مجموعه نباشد.*

برهان. فرض کنید S یک $\gamma(G)$–مجموعه باشد و u رأسی در $\beta_\circ(G)$–مجموعه باشد. در این صورت $S \cup \{u\}$ یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل است، لذا $\gamma_{it}(G) \leq |S| + ۱ = \gamma(G) + ۱$.

حال، فرض کنید $\gamma_{it}(G) = \gamma(G) + ۱$. فرض کنید v یک $\gamma(G)$–رأس خوب باشد که متعلق به $\beta_\circ(G)$–مجموعه است (فرض خلف). لذا بنا به قسمت دوم ملاحظه ۱.۵.۳، داریم $\gamma(G) = \gamma_{it}(G)$، که این تناقض است. بنابراین هیچ $\gamma(G)$–رأس خوب متعلق به $\beta_\circ(G)$–مجموعه نیست.

برعکس، فرض کنید هیچ $\gamma(G)$–رأس خوب متعلق به $\beta_\circ(G)$–مجموعه نباشد. در این صورت هر مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل شامل یک مجموعه احاطه‌گر و نیز شامل حداقل یکی از اعضای $\beta_\circ(G)$–مجموعه است. بنابراین $\gamma_{it}(G) \geq \gamma(G) + ۱$، پس تساوی برقرار است. □

لم ۳.۵.۳ *[۵]. اگر G یک گراف همبند با $\beta_\circ(G) > \mu(G)$ باشد، آن‌گاه $\xi(G) \geq ۱ + \beta_\circ(G) - \mu(G)$.*

قضیه ۴.۵.۳. *برای هر گراف G بدون رأس تنها، شرایط زیر معادلند.*

(۱) $\gamma_{it}(G) = \alpha_\circ(G) + ۱$.

(۲) *هر $\gamma(G)$–مجموعه یک پوشش رأسی از G است.*

برهان. (۱) $\Longleftarrow$ (۲): با استفاده از قضیه ۲.۲.۳، داریم $\gamma(G) = \alpha_\circ(G)$. فرض کنید یک $\gamma(G)$–مجموعه U وجود داشته باشد که یک پوشش رأسی از G نباشد. در این صورت مجموعه $V(G) - U$ مستقل نیست. پس هر مجموعه مستقل ماکزیمم شامل بخشی از رئوس U است و به عبارتی هر مجموعه مستقل ماکزیمم با U اشتراک دارد. لذا U یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل است. بنابراین $\gamma_{it}(G) \leq |U| = \gamma(G) = \alpha_\circ(G)$ که تناقض است. پس هر $\gamma(G)$–مجموعه یک پوشش رأسی از G است.

(۲) $\Longleftarrow$ (۱): هر $\gamma_{it}(G)$–مجموعه D را در نظر بگیرید. چون D یک مجموعه احاطه‌گر است، لذا $|D| \geq \gamma(G) = \alpha_\circ(G)$. از طرفی می‌دانیم که $\gamma_{it}(G) \leq \alpha_\circ(G) + ۱$. پس $\alpha_\circ(G) \leq \gamma_{it}(G) \leq \alpha_\circ(G) + ۱$. حال، اگر $\gamma_{it}(G) = \alpha_\circ(G) = \gamma(G)$، آن‌گاه D یک $\gamma(G)$–مجموعه است، که این ایجاب می‌کند که D یک پوشش رأسی مینیمم از G است. پس $V(G) - D$ یک $\beta_\circ(G)$–مجموعه است، که این با $\gamma_{it}(G)$–مجموعه بودن D در تناقض است. بنابراین $\gamma_{it}(G) = \alpha_\circ(G) + ۱$. □

ملاحظه ۵.۵.۳. *فرض کنید G هر گرافی باشد. اگر هر $\gamma(G)$–مجموعه‌ای مشمول در تعدادی پوشش رأسی مینیمم باشد، آن‌گاه $\gamma_{it}(G) \geq \gamma(G) + ۱$.*

گزاره ۶.۵.۳. *فرض کنید G یک گراف همبند از مرتبه n باشد و فرض کنید D یک $\gamma(G)$–مجموعه باشد. اگر $\beta_\circ(G) \geq (n - \gamma(G) + ۱)/۲$ و $V(G) - D$ شامل دقیقاً k $\beta_\circ(G)$–مجموعه باشد، آن‌گاه $\gamma_{it}(G) \leq \gamma(G) + k$. به‌علاوه، اگر $k \in \{۲, ۳\}$ آن‌گاه $\gamma_{it}(G) \leq \gamma(G) + ۱$.*

برهان. نامساوی $\gamma_{it}(G) \leq \gamma(G) + k$ بدیهی است. حال، فرض کنید همه $\beta_\circ(G)$–مجموعه‌ها به صورت $I_۱, I_۲, \ldots, I_k$ باشند که هر یک مشمول در $V(G) - D$ هستند. اگر $I_۱$ و $I_۲$ با هم اشتراک نداشته باشند، آن‌گاه $n \geq |D| + |I_۱| + |I_۲| = \gamma(G) + ۲\beta_\circ(G) \geq \gamma(G) + n - \gamma(G) + ۱ = n + ۱$، که این تناقض است. بنابراین $I_۱ \cap I_۲$ غیر تهی است. حال، اگر $k = ۲$ و $v \in I_۱ \cap I_۲$، آن‌گاه $D \cup \{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل است زیرا به وضوح احاطه‌گر است و چون v در هر $\beta_\circ(G)$–مجموعه وجود دارد، پس $D \cup \{v\}$ با هر $\beta_\circ(G)$–مجموعه‌ای اشتراک دارد. بنابراین $\gamma_{it}(G) \leq |D| + ۱ = \gamma(G) + ۱$.

حال، حالت $k = ۳$ را در نظر می‌گیریم. بنا به حالت قبل، مجموعه‌های $S_۱ = I_۱ \cap I_۲$، $S_۲ = I_۱ \cap I_۳$ و $S_۳ = I_۲ \cap I_۳$ همگی غیر تهی هستند. به‌علاوه، به وضوح $S_۱ \cup S_۲ \cup S_۳$ یک مجموعه مستقل از G است. فرض کنید $I_۱ \cap I_۲ \cap I_۳$ تهی باشد. بنابراین

$$n \geq |D| + |I_۱| + |I_۲| + |I_۳| - (|S_۱| + |S_۲| + |S_۳|) \geq \gamma(G) + ۳\beta_\circ(G) - \beta_\circ(G) \geq n + ۱,$$

که این تناقض است. از این رو $I_۱ \cap I_۲ \cap I_۳$ غیر تهی است. حال، اگر $u \in I_۱ \cap I_۲ \cap I_۳$، آن‌گاه $D \cup \{u\}$ یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل است. پس $\gamma_{it}(G) \leq \gamma(G) + ۱$. □

قضیه بعدی نیاز به استفاده از نتیجه شناخته شده زیر از مرجع [۱۸] دارد.

لم ۷.۵.۳. *[۱۸] فرض کنید G یک گراف با $\beta_\circ(G) > \frac{|V(G)|}{۲}$ باشد. اگر $|isol(G)| \neq ۱$، آن‌گاه $\xi(G) \geq ۲$.*

قضیه ۸.۵.۳. *فرض کنید G یک گراف با $\beta_\circ(G) > \frac{|V(G)|}{۲}$ باشد. در این صورت $\gamma_{it}(G) \leq \gamma(G)+۱$.*

برهان. اگر v یک رأس تنها در G باشد، آنگاه $v \in core(G)$ و لذا بنا به ملاحظه ۱.۵.۳، داریم $\gamma_{it}(G) \leq \gamma(G) + ۱$. اگر G رأس تنها نداشته باشد، آنگاه بنا به لم ۷.۵.۳، چون $|isol(G)| \neq ۱$، پس $\xi(G) \geq ۲$ و این یعنی $core(G)$ غیر تهی است. پس یک رأس $u \in core(G)$ وجود دارد و لذا بنا به ملاحظه ۱.۵.۳، داریم $\gamma_{it}(G) \leq \gamma(G) + ۱$. □

حدس ۹.۵.۳. *اگر G یک گراف دوبخشی همبند باشد، آنگاه $\gamma_{it}(G)$ یا $\gamma(G)$ است یا $\gamma(G) + ۱$.*

نتیجه زیر نشان می‌دهد که حدس فوق که در فصل ۲ نیز بیان شد، برای حداقل همه گراف‌های دوبخشی از مرتبه فرد درست است.

گزاره ۱۰.۵.۳. *فرض کنید G یک گراف دوبخشی با دو بخش (X, Y) باشد بطوریکه $|X| \neq |Y|$. در این صورت $\gamma_{it}(G) \leq \gamma(G) + ۱$. به ویژه، وقتی G دارای مرتبه فرد باشد درست است.*

برهان. چون $|X| \neq |Y|$، لذا یک بخش حداقل یک رأس بیشتر از بخش دیگر دارد. پس بخش بزرگتر یک مجموعه مستقل ماکزیمم است. بنابراین $\beta_\circ(G) > \frac{|V(G)|}{۲}$، و مستقیماً از قضیه ۸.۵.۳ استنباط می‌شود که $\gamma_{it}(G) \leq \gamma(G) + ۱$. □

۱.۵.۳ درخت‌ها

با استفاده از قضیه ۳.۲.۳، بی‌درنگ نتیجه زیر بدست می‌آید.

نتیجه ۱۱.۵.۳. *فرض کنید T یک درخت با دو بخش (X, Y) باشد بطوریکه $۱ \leq |X| \leq |Y|$ و $\gamma(G) = |X|$. در این صورت T درکلاس ۱ است اگر و تنها اگر یک رأس در X وجود داشته باشد که مجاور حداکثر یک رأس پایانی باشد.*

قضیه ۱۲.۵.۳. *فرض کنید T یک درخت از مرتبه حداقل ۳ باشد. در این صورت درخت T در کلاس ۱ است اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد.*

(۱) $V(T) = End(T) \cup Stem(T)$ و یک مسیر $x_۱y_۱y_۲x_۲$ وجود دارد که $y_۱$ و $y_۲$ ساقه هستند و x_i تنها رأس پایانی است که مجاور $y_i (i = ۱, ۲)$ است.

(۲) $\langle V(T) - (End(T) \cup Stem(T))\rangle \cong \overline{K_r}$ و یک مسیر xyz وجود دارد بطوریکه y یک ساقه است، z یک ساقه نیست و x تنها رأس پایانی است که مجاور y است.

برهان. (۱) ابتدا توجه کنید که $Stem(T)$ یک $\gamma(T)$–مجموعه است و $V(T) - Stem(T)$ یک $\beta_\circ(T)$–مجموعه است. از طرف دیگر $D = (Stem(T) - \{y_۱, y_۲\}) \cup \{x_۱, x_۲\}$ نیز یک $\gamma(T)$–مجموعه است، در حالیکه $V(T) - D$ یک مجموعه مستقل نیست. پس D یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل است و $\gamma_{it}(T) \leq |D| = \gamma(T)$. بنابراین $\gamma_{it}(T) = \gamma(T)$، و این بدان معنی است که درخت T در کلاس ۱ است.

(۲) به وضوح $Stem(T)$ یک $\gamma(T)$–مجموعه است و $V(T) - Stem(T)$ یک $\beta_0(T)$–مجموعه است. حال، $D = (Stem(T) \cup \{x\}) - \{y\}$ نیز یک $\gamma(T)$–مجموعه است، در حالیکه $V(T) - D$ یک مجموعه مستقل نیست. پس D یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل است و $\gamma_{it}(T) \leq |D| = \gamma(T)$. بنابراین $\gamma_{it}(T) = \gamma(T)$، و این یعنی درخت T در کلاس ۱ است. □

۲.۵.۳ مجموعه‌های احاطه‌گر متقاطع مستقل در مقابل خوشه‌ها

به یاد می‌آوریم که یک خوشه k از یک گراف G یک زیر مجموعه از رأس‌های آن است بطوریکه هر دو رأس در این زیر مجموعه با یالی به هم متصل باشند. معادلاً، یک خوشه یک زیر گراف کامل است که دارای حداقل دو رأس باشد.

یک مجموعه از رأس های گراف که همه خوشه‌ها را قطع کند یک مجموعه خوشه–متقاطع نامیده می‌شود. عدد خوشه–متقاطع کوچکترین اندازه یک مجموعه خوشه–متقاطع در G نامیده می‌شود و با نماد $\tau_C(G)$ نمایش داده می‌شود. مفهوم خوشه–متقاطع پیش از این توسط پایان [۶] [۲۰] در سال ۱۹۷۹ نام برده شده است و اولین نتایج NP–سختی برای خوشه–متقاطع در اردوش، [۷] گالای [۸] و توزا [۹] [۶] بیان شده است.

قضیه ۱۳.۵.۳. *(اردوش، گالای و توزا [۶]). فرض کنید k و n دو عدد طبیعی باشند که $n \geq k + 2$. اگر G یک گراف n رأسی باشد که در هر خوشه بیش از k رأس داشته باشد، آنگاه $\tau_C(G) \leq n - \sqrt{kn}$، مگر اینکه $k = 1$، $n = 5$، و G چرخی به طول ۵ باشد.*

حال، با استفاده از قضیه شناخته شده فوق یک نتیجه برای عدد احاطه‌گری متقاطع مستقل ارائه می‌دهیم.

گزاره ۱۴.۵.۳. *فرض کنید k و n دو عدد طبیعی باشند بطوریکه $n \geq k + 2$. اگر G یک گراف غیر کامل n رأسی باشد که در هر مجموعه مستقل ماکسیمال بیش از k رأس داشته باشد، آنگاه $\gamma_{it}(G) \leq n - \sqrt{kn} + \gamma(G)$.*

برهان. ابتدا توجه کنید که، یک مجموعه I یک مجموعه مستقل ماکسیمال از G است اگر و تنها اگر I یک خوشه از $\overline{G}$ باشد. از این رو، هر مجموعه خوشه–متقاطع از $\overline{G}$ با هر مجموعه مستقل ماکسیمال در G اشتراک دارد. حال، اگر F یک مجموعه خوشه–متقاطع از بزرگترین اندازه در $\overline{G}$ باشد و D یک $\gamma(G)$–مجموعه از G باشد، آنگاه به وضوح $D \cup F$ با هر مجموعه مستقل ماکزیمم در G اشتراک دارد. همچنین، اگر $G \ncong C_5$، آنگاه بنا به قضیه ۱۳.۵.۳، داریم $\gamma_{it}(G) \leq |F \cup D| \leq |F| + |D| \leq n - \sqrt{kn} + \gamma(G)$. در نهایت، اگر $G \cong C_5$، آنگاه نتیجه آشکار است. □

---

[۶] Payan

[۷] Erdős

[۸] Gallai

[۹] Tuza

فصل ۴

نتایج جدید در خصوص احاطه‌گری متقاطع مستقل در گراف‌ها

۱.۴ مقدمه

در این فصل ابتدا برخی نتایج شناخته شده از مرجع [۱۲] را بیان می‌کنیم و سپس حدس ۷.۳.۲ که در فصل ۲ مطرح شد، را رد می‌کنیم و صورت صحیحی از آن را اثبات می‌کنیم. همچنین برخی از مسائل باز مطرح شده در فصل ۲ را حل می‌کنیم. در پایان نیز جواب دیگری از مسئله زیر که در فصل ۳ نیز به آن پاسخ داده شد، را ارائه می‌دهیم. سه عدد صحیح مثبت a، b و c با $a \leq b \leq a+c$ داده شده است ، آیا یک گراف G وجود دارد بطوریکه $\gamma(G)=a$ ، $\gamma_{it}(G)=b$ و $\delta(G)=c$؟
حدس ۷.۳.۲ و برخی از مسائل باز که در فصل ۲ مطرح شده‌اند به شرح ذیل است.

حدس ۱.۱.۴. *[۱۲] اگر G یک گراف همبند غیرکامل باشد، آن‌گاه $\gamma_{it}(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.*

مسئله ۲.۱.۴. *[۱۲] همه گراف‌های G از مرتبه n را مشخص کنید بطوریکه*

(۱) $\gamma(G)+\gamma_{it}(G)=n+1$.

(۲) $i(G)+\gamma_{it}(G)=n+1$.

(۳) $\gamma_{it}(G)=\alpha_0(G)+1$.

مسئله ۳.۱.۴. *[۱۲] سه عدد a b و c با $a \leq b \leq a+c$ مفروضند، آیا یک گراف G وجود دارد بطوریکه $\gamma(G)=a$ ، $\gamma_{it}(G)=b$ و $\delta(G)=c$؟*

تمام نتایج جدید در این فصل برای اولین بار در این پایان‌نامه ارائه شده‌اند.

۲.۴ نتایج شناخته شده

در این بخش برخی از نتایج شناخته شده از مرجع [۱۲] را بیان می‌کنیم.

لم ۱.۲.۴. *[۱۲] حدس ۱.۱.۴ برای همه گراف‌هایی با کوچکترین درجه یک، درست است.*

لم ۲.۲.۴. *[۱۲] برای هر گراف غیرکامل G با $\delta(G) \geq 2$، داریم $\gamma_{it}(G) \leq \alpha_0(G)$.*

لم ۳.۲.۴. *[۱۲] برای هر گراف G داریم $\gamma(G) \leq \gamma_{it}(G) \leq \gamma(G)+\delta(G)$.*

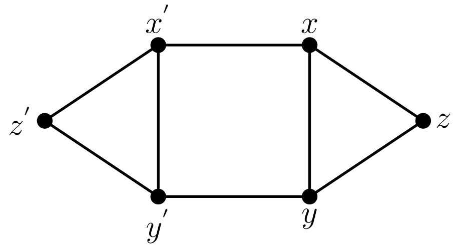
لم ۴.۲.۴. *[۱۲] اگر G یک گراف غیرکامل با $\beta_0(G) \geq \frac{n}{2}$ باشد، آن‌گاه $\gamma_{it}(G) \leq \frac{n}{2}$.*

لم ۵.۲.۴. *[۱۲] اگر G یک گراف غیرکامل با $\gamma_{it}(G)=\alpha_0(G)+1$ باشد، آن‌گاه $\gamma(G)=\alpha_0(G)$.*

قضیه ۶.۲.۴. *[۱۳]. برای یک گراف G از مرتبه n بدون رأس تنها، داریم $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$. اگر n زوج باشد، آن‌گاه تساوی برقرار است اگر و تنها اگر هر مؤلفه G یک C_4 یا H^+ باشد (برای هر گراف همبند H).*

۳.۴ کران‌های جدید برای γ_{it}

در این بخش ابتدا حدس ۱.۱.۴ را رد می‌کنیم وبعد به مسائل باز مطرح شده پاسخ می‌دهیم.
فرض کنید گراف $G_۱$ گرافی از مرتبه ۶ باشد که از دو مثلث xyz و $x'y'z'$ با پیوستن رأس x به x' و y به y' بدست می‌آید (شکل ۱.۴). در این صورت می توان دید که $\gamma_{it}(G) = ۴ > \frac{۶}{۲} = ۳$، که این حدس ۱.۱.۴ را رد می‌کند.



شکل ۱.۴: گراف $G_۱$.

حال صورت صحیحی از حدس ۱.۱.۴ را بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱.۳.۴. *برای هر گراف غیرکامل G از مرتبه n با $\delta(G) \geq ۲$، داریم $\gamma_{it}(G) \leq \lceil \frac{n}{۲} \rceil + \delta(G) - ۱$، و این کران دقیق است.*

برهان. فرض کنید G یک گراف همبند غیر کامل از مرتبه n باشد. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

- اگر n فرد باشد، آن‌گاه بنا به قضیه ۶.۲.۴، داریم $\gamma(G) \leq \lfloor \frac{n}{۲} \rfloor = \lceil \frac{n}{۲} \rceil - ۱$. حال، بنا به لم ۳.۲.۴، داریم $\gamma_{it}(G) \leq \gamma(G) + \delta(G) \leq \lceil \frac{n}{۲} \rceil - ۱ + \delta(G)$.

- اگر n زوج باشد. فرض کنید $\gamma(G) = \frac{n}{۲}$. در این صورت بنا به قضیه ۶.۲.۴، گراف G یا $C_۴$ است یا H^+ (برای هر گراف همبند H). اگر $G = H^+$ یک گراف n رأسی باشد، آن‌گاه $\delta(G) = ۱$ و $\gamma_{it}(G) = \gamma_{it}(H^+) = \frac{n}{۲} \leq \lceil \frac{n}{۲} \rceil + ۱ - ۱$، همانطورکه انتظار داشتیم. بنابراین، فرض کنید $\gamma(G) < \frac{n}{۲}$. در این‌صورت $\gamma(G) \leq \frac{n}{۲} - ۱$، در نتیجه بنا به لم ۳.۲.۴، داریم $\gamma_{it}(G) \leq \gamma(G) + \delta(G) \leq \lceil \frac{n}{۲} \rceil - ۱ + \delta(G)$. بنابراین برای هر گراف همبند غیر کامل از مرتبه n داریم $\gamma_{it}(G) \leq \lceil \frac{n}{۲} \rceil + \delta(G) - ۱$.

برای دیدن دقیق بودن کران، گراف $G_۱$ شکل ۱.۴ را ملاحظه کنید. □

حال به پاسخ مسئله ۲.۱.۴ می‌پردازیم.

قضیه ۲.۳.۴. *فرض کنید G یک گراف همبند از مرتبه n باشد. در این صورت*

(۱) $\gamma(G) + \gamma_{it}(G) = n + ۱$ اگر و تنها اگر $G = K_n$.

(۲) $i(G)+\gamma_{it}(G)=n+1$ *اگر و تنها اگر* $G=K_n$.

برهان. (۱) فرض کنید $\gamma(G)+\gamma_{it}(G)=n+1$. فرض کنید G یک گراف غیر کامل باشد (فرض خلف). دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

- فرض کنید $\delta(G)=1$. در این صورت بنا به لم ۱.۲.۴، داریم $\gamma_{it}(G)\leq\lceil\frac{n}{2}\rceil$. همچنین، بنا به قضیه ۶.۲.۴، داریم $\gamma(G)\leq\frac{n}{2}$. از این رو $\gamma(G)+\gamma_{it}(G)<n+1$، که این تناقض است. بنابراین $G=K_n$.
- فرض کنید $\delta(G)\geq 2$. در این صورت چون گراف G غیر کامل است، لذا بنا به لم ۲.۲.۴، داریم $\gamma_{it}(G)\leq\alpha_\circ(G)$. از طرفی، می‌دانیم که همواره $\gamma(G)\leq\beta_\circ(G)$، پس
$$n+1=\gamma(G)+\gamma_{it}(G)\leq\beta_\circ(G)+\alpha_\circ(G)=n,$$
که این تناقض است. بنابراین $G=K_n$.

برعکس، فرض کنید $G=K_n$. در این صورت $\gamma(K_n)=1$ و $\gamma_{it}(K_n)=n$. در نتیجه $\gamma(K_n)+\gamma_{it}(K_n)=n+1$.

(۲) فرض کنید $i(G)+\gamma_{it}(G)=n+1$. فرض کنید G یک گراف غیر کامل باشد (فرض خلف). دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

- اگر $\delta(G)=1$ باشد، آن‌گاه با استفاده از لم ۳.۲.۴ و نیز رابطه $\gamma(G)\leq i(G)$، داریم
$$\gamma_{it}(G)\leq\gamma(G)+\delta(G)=\gamma(G)+1\leq i(G)+1,$$
و این بدان معنی است که $i(G)\geq\gamma_{it}(G)-1=n-i(G)$. لذا $i(G)\geq\frac{n}{2}$، و با توجه به اینکه $i(G)+\gamma_{it}(G)=n+1$، داریم $\gamma_{it}(G)=n+1-i(G)\leq\frac{n}{2}+1$. اما، چون $i(G)\leq\beta_\circ(G)$، لذا $\beta_\circ(G)\geq\frac{n}{2}$، و چون گراف غیر کامل است، در نتیجه بنا به لم ۴.۲.۴، داریم $\gamma_{it}(G)\leq\frac{n}{2}$، که این تناقض است. بنابراین $G=K_n$.
- اگر $\delta(G)\geq 2$ باشد، آن‌گاه چون گراف غیر کامل است، لذا بنا به لم ۲.۲.۴، داریم $\gamma_{it}(G)\leq\alpha_\circ(G)$. از طرفی می‌دانیم که $i(G)\leq\beta_\circ(G)$، پس
$$n+1=i(G)+\gamma_{it}(G)\leq\beta_\circ(G)+\alpha_\circ(G)=n,$$
که این تناقض است. بنابراین $G=K_n$.

برعکس، فرض کنید $G=K_n$. در این صورت $i(K_n)=1$ و $\gamma_{it}(K_n)=n$. در نتیجه $i(K_n)+\gamma_{it}(K_n)=n+1$.

$\square$

گزاره ۳.۳.۴. *اگر G یک گراف همبند با $\delta(G)\geq 2$ باشد، آن‌گاه $\gamma_{it}(G)=\alpha_\circ(G)+1$ اگر و تنها اگر $G=K_n$*

برهان. فرض کنید G یک گراف همبند با $\delta(G) \geq 2$ باشد و $\gamma_{it}(G) = \alpha_\circ(G) + 1$. فرض کنید G یک گراف غیر کامل باشد (فرض خلف). در این صورت بنا به لم ۲.۲.۴، داریم $\gamma_{it}(G) \leq \alpha_\circ(G)$. لذا $\alpha_\circ(G) + 1 = \gamma_{it}(G) \leq \alpha_\circ(G)$، که این تناقض است. بنابراین $G = K_n$.

برعکس، فرض کنید $G = K_n$. در این صورت $\gamma_{it}(K_n) = n$ و $\alpha_\circ(K_n) = n - 1$. بنابراین $\gamma_{it}(K_n) = \alpha_\circ(K_n) + 1$.

□

قضیه ۴.۳.۴. *فرض کنید G یک گراف همبند غیرکامل از مرتبه n با $\delta(G) = 1$ باشد. در این صورت $\gamma_{it}(G) = \alpha_\circ(G) + 1$ اگر و تنها اگر بتوان $V(G)$ را به دو مجموعه A و B افرازکرد بطوریکه B یک مجموعه مستقل باشد و هر رأس از A دارای حداقل یک همسایه اختصاصی در B باشد.*

برهان. فرض کنید $\gamma_{it}(G) = \alpha_\circ(G) + 1$. در این صورت بنا به لم ۵.۲.۴، داریم $\gamma(G) = \alpha_\circ(G)$. فرض کنید S یک مینیمم پوشش رأسی باشد و $A = S$ و $B = V(G) - S$. در این‌صورت به وضوح B یک مجموعه مستقل است. فرض کنید $u \in S$ باشد و u هیچ همسایه اختصاصی در B نداشته باشد (فرض خلف). دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

(۱) رأسی غیر تنها در S باشد. آنگاه $S - \{u\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است زیرا S یک پوشش رأسی مینیمم است و $\gamma(G) \leq \alpha_\circ(G)$، لذا S یک مجموعه احاطه‌گر نیز است. از طرفی چون u رأسی غیر تنها در S است و نیز دارای همسایه اختصاصی در B نیست، لذا با حذف u، S همچنان یک مجموعه احاطه‌گر در G است. بنابراین $\gamma(G) \leq |S| - 1 = \alpha_\circ(G) - 1$، که این با $\gamma(G) = \alpha_\circ(G)$ در تناقض است. بنابراین هر رأس غیر تنها در S دارای حداقل یک همسایه اختصاصی در B است.

(۲) اگر u رأسی تنها در S باشد. فرض کنید $v \in N(u) \cap B$. در این صورت $(S - \{u\}) \cup \{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است زیرا u رأسی تنها در S است و نیز دارای همسایه اختصاصی در B نیست، پس می‌توان رأس u را حذف کرد و به جای آن رأس v را جایگزین کرد. در این صورت $(S - \{u\}) \cup \{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است. از طرفی چون $v \in B$، لذا $(S - \{u\}) \cup \{v\}$ با هر $\beta_\circ(G)$–مجموعه‌ای اشتراک دارد. بنابراین مجموعه $(S - \{u\}) \cup \{v\}$ یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل است. لذا $\gamma_{it}(G) \leq |S| = \alpha_\circ(G)$، که این با $\gamma_{it}(G) = \alpha_\circ(G) + 1$ در تناقض است. بنابراین هر رأس تنها در S دارای حداقل یک همسایه اختصاصی در B است.

بنابراین هر رأس از A دارای حداقل یک همسایه اختصاصی در B است.

برعکس، فرض کنید $V(G) = A \cup B$، که B یک مجموعه مستقل است و هر رأس از A دارای حداقل یک همسایه اختصاصی در B است. چون B یک مجموعه مستقل است، لذا $\beta_\circ(G) \geq |B|$. همچنین، چون هر رأس از A دارای حداقل یک همسایه اختصاصی در B است، لذا $|A| \leq |B|$. به وضوح هر مجموعه احاطه‌گر شامل حداقل $|A|$ رأس است. پس $\gamma(G) \geq |A|$. از طرفی A یک مجموعه احاطه‌گر برای G است زیرا $N[A] = V(G)$. بنابراین $\gamma(G) \leq |A|$. از این رو $\gamma(G) = |A|$.

از طرفی $|A| - \beta_\circ(G) \geq |B| = n$، پس $\beta_\circ(G) + \gamma(G) \geq n - |A| + |A| = n$. حال، چون $\beta_\circ(G) + \alpha_\circ(G) = n$، لذا $\gamma(G) \geq \alpha_\circ(G)$. از طرفی می‌دانیم که همواره $\gamma(G) \leq \alpha_\circ(G)$. بنابراین $\gamma(G) = \alpha_\circ(G)$. حال، فرض کنید $x \in B$ باشد. در این صورت $A \cup \{x\}$ یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل است زیرا بنا به توضیحات قبل، یک مجموعه احاطه‌گر است و چون $x \in B$ و $\beta_\circ(G) \geq |B| \geq |A|$، لذا هر $\beta_\circ(G)$–مجموعه‌ای حداقل شامل یکی از اعضای B مانند x، و یا شامل حداقل یکی از اعضای A است، پس $A \cup \{x\}$ با هر $\beta_\circ(G)$–مجموعه‌ای اشتراک دارد. بنابراین $\gamma_{it}(G) \leq |A| + ۱ = \gamma(G) + ۱ = \alpha_\circ(G) + ۱$. همچنین، چون $\gamma_{it}(G) \geq \gamma(G) = \alpha_\circ(G)$، لذا $\alpha_\circ(G) \leq \gamma_{it}(G) \leq \alpha_\circ(G) + ۱$. حال، فرض کنید $\gamma_{it}(G) = \alpha_\circ(G)$ و فرض کنید S' یک پوشش رأسی مینیمم از G باشد. در این صورت دو حالت زیر اتفاق می‌افتد.

(۱) اگر $S' \cap B = \emptyset$ باشد. آن‌گاه این بدان معنی است که، S' با مجموعه مستقل B اشتراک ندارد، که این تناقض است.

(۲) اگر $S' \cap B \neq \emptyset$ باشد. آن‌گاه $(A - S') \cup (B - S')$ یک $\beta_\circ(G)$–مجموعه است که با S' اشتراک ندارد، که این تناقض است.

بنابراین $\gamma_{it}(G) \neq \alpha_\circ(G)$، و این بدان معنی است که $\gamma_{it}(G) = \alpha_\circ(G) + ۱$ □

نتیجه ۵.۳.۴. *هیچ دسته‌بندی بر اساس زیرگراف القایی ممنوعه برای گراف G با $\gamma_{it}(G) = \alpha_\circ(G) + ۱$ وجود ندارد.*

برهان. فرض کنید G هر گراف دلخواهی باشد، و G' گراف بدست آمده از G، بوسیله پیوستن دو یال آویزان در هر رأس G باشد. در این صورت $\gamma(G') = |V(G)| = \alpha_\circ(G')$. همچنین، تمام رأس‌های پایانی تشکیل تنها $\beta_\circ(G)$–مجموعه گراف را می‌دهند. پس هر مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل شامل یک مجموعه احاطه‌گر و شامل یک رأس از $\beta_\circ(G)$–مجموعه است. بنابراین $\gamma_{it}(G') \geq \gamma(G') + ۱ = \alpha_\circ(G') + ۱$. در نتیجه $\gamma_{it}(G') = \alpha_\circ(G') + ۱$. □

حال به پاسخ مسئله ۳.۱.۴ که در فصل ۳ نیز مطرح شد، می‌پردازیم.

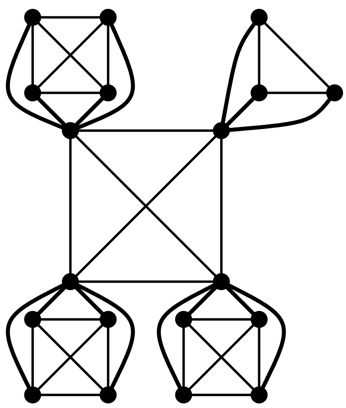
قضیه ۶.۳.۴. *فرض کنید a، b و c سه عدد صحیح مثبت با $a \leq b \leq a + c$ باشند. در این صورت یک گراف G وجود دارد بطوریکه $\gamma(G) = a$ ، $\gamma_{it}(G) = b$ و $\delta(G) = c$.*

برهان. ابتدا فرض کنید $b = a + c$ و H یک گراف کامل a رأسی باشد که مجموعه رئوس آن به صورت $V(H) = \{v_۱, v_۲, \ldots, v_a\}$ باشد. فرض کنید $H_۱ \cong K_c$ و $H_۲ \cong K_{c+۱}$ و G گراف بدست آمده از H و یک کپی از $H_۱$ و $a - ۱$ کپی از $H_۲$ با استفاده از روند زیر باشد.

- متصل کردن هر رأس از کپی $H_۱$ با یالی به رأس $v_۱$ از گراف H.

- متصل کردن هر رأس از i–امین کپی از $H_۲$ با یالی به i–امین رأس از H، برای $i = ۲, ۳, \ldots, a$.

شکل ۲.۴ مثالی از این قبیل گراف G برای حالتی که $a = ۴$، $b = ۷$ و $c = ۳$ را نشان می‌دهد.
فرض کنید مجموعه رئوس $H_۱$ متصل به $v_۱$، به صورت $A_۱ = V(K_c) = \{u_۱, u_۲, \dots, u_c\}$ باشد. به وضوح مجموعه $\{v_۱, v_۲, \dots, v_a\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است. لذا $\gamma(G) \leq a$. فرض کنید D یک $\gamma(G)$–مجموعه باشد. کافی است نشان دهیم $|D| \geq a$. به وضوح D شامل دقیقاً یک رأس از $H_۱$ و یک رأس از هر کپی $H_۲$ و یا شامل رأس $v_i (۱ \leq i \leq a)$ متصل به هر کپی $H_۲$ و $H_۱$ است. بنابراین $|D| \geq a$. از این رو $\gamma(G) = a$. همچنین، کوچکترین درجه گراف G از یک رأس از $A_۱$ متصل به $v_۱$ بدست می‌آید، پس $\delta(G) = \delta(K_c) + ۱ = c - ۱ + ۱ = c$. به راحتی می‌توان دید که $\beta_\circ(G) = a$.
همچنین، مجموعه $S = \{v_۱, v_۲, \dots, v_a, u_۱, u_۲, \dots, u_c\}$ یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل است زیرا رئوس H مشمول در S هستند، لذا S احاطه‌گر است و چون هر $\beta_\circ(G)$–مجموعه‌ای شامل دقیقاً یکی از رئوس H و یا شامل یکی از رئوس $H_۱$ است، پس S با هر $\beta_\circ(G)$–مجموعه‌ای اشتراک دارد. بنابراین $\gamma_{it}(G) \leq |S| = a + c = b$.



شکل ۲.۴: گراف G با $a = ۴$، $b = ۷$ و $c = ۳$. توجه کنید که $\delta(G) = c = ۳$، $\gamma(G) = a = ۴$ و $\gamma_{it}(G) = b = a + c = ۷$.

حال، فرض کنید S' یک $\gamma_{it}(G)$–مجموعه باشد. نشان می‌دهیم $|S'| \geq b$. فرض کنید A_i مجموعه رئوس گراف کامل $K_{c+۱}$ متصل به v_i برای $i = ۲, ۳, \dots, a$، باشد و $A_i \nsubseteq S'$، برای $۱ \leq i \leq a$. فرض کنید $x_i \in A_i - S'$، برای $i = ۱, ۲, \dots, a$. در این صورت مجموعه $\{x_۱, x_۲, \dots, x_a\}$ یک مجموعه مستقل ماکزیمم است که با S' اشتراک ندارد، که این تناقض است. بنابراین یک عدد صحیح $i \in \{۱, ۲, \dots, a\}$ وجود دارد بطوریکه $A_i \subseteq S'$. چون S' یک مجموعه احاطه‌گر است، لذا برای هر $j \neq i (۱ \leq j \leq a)$ یا $S' \cap A_j \neq \emptyset$ یا $v_j \in S'$. اگر $i > ۱$ باشد، آن‌گاه $|S'| \geq c + ۱ + a - ۱ = c + a = b$. بنابراین فرض کنید $i = ۱$. فرض کنید $|S' \cap A_j| \leq ۱$، که $j = ۲, \dots, a$، و همچنین، $y_j \in A_j - S'$، برای $j = ۲, \dots, a$. در این صورت مجموعه $\{y_۲, y_۳, \dots, y_a, v_۱\}$ یک مجموعه مستقل ماکزیمم است که با S' اشتراک ندارد، که این تناقض است. بنابراین یک عدد صحیح $j \in \{۲, ۳, \dots, a\}$ وجود دارد بطوریکه $|S' \cap A_j| \geq ۲$. بنابراین $|S'| \geq c + a - ۲ + ۲ = c + a = b$. از این رو $\gamma_{it}(G) = a + c = b$.
حال، فرض می‌کنیم که $b \leq a + c - ۱$. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

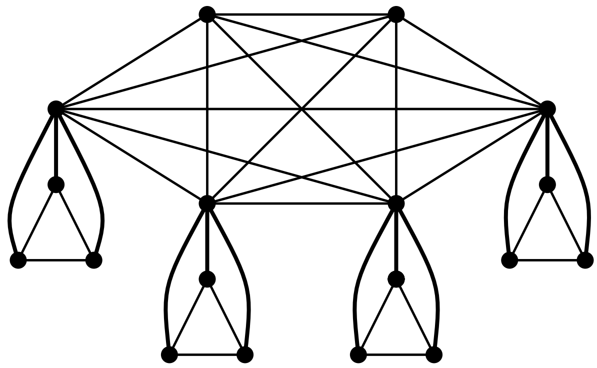
(۱) $b > a, c$. فرض کنید H گراف کامل b رأسی باشد و $V(H) = \{v_۱, v_۲, \ldots, v_b\}$. فرض کنید $H_۱ \cong K_c$ و هر رأس از i–امین کپی از $H_۱$ با یالی به i–امین رأس از H، که $i = ۱, ۲, \ldots, a$، متصل باشد. در این‌صورت گراف بدست آمده را G بنامید. به وضوح مجموعه $\{v_۱, v_۲, \ldots, v_a\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است. لذا $\gamma(G) \leq a$. فرض کنید D یک $\gamma(G)$–مجموعه باشد. نشان دهیم $|D| \geq a$. چون D کوچکترین مجموعه احاطه‌گر است، لذا D شامل دقیقاً یک رأس از هر کپی $H_۱$ و یا شامل رأس $v_i (۱ \leq i \leq a)$ متصل به هر کپی $H_۱$ است. بنابراین $|D| \geq a$. از این رو $\gamma(G) = a$. حال، چون $b > c$، لذا کوچکترین درجه گراف G از یک رأس $H_۱$ متصل به $v_i (۱ \leq i \leq a)$ بدست می‌آید، پس $\delta(G) = \delta(K_c) + ۱ = c - ۱ + ۱ = c$. همچنین، می‌توان دید که $\beta_۰(G) = a + ۱$، و هر $\beta_۰(G)$–مجموعه‌ای شامل دقیقاً یک رأس از مجموعه $\{v_{a+۱}, v_{a+۲}, \ldots, v_b\}$ و دقیقاً یک رأس از هر کپی $H_۱$ است. آشکار است که مجموعه $S = \{v_۱, v_۲, \ldots, v_a, v_{a+۱}, v_{a+۲}, \ldots, v_b\}$ یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل است زیرا مجموعه $\{v_۱, v_۲, \ldots, v_a\}$ که یک $\gamma(G)$–مجموعه از G است، مشمول در S است و چون هر $\beta_۰(G)$–مجموعه‌ای شامل یک رأس از مجموعه $\{v_{a+۱}, v_{a+۲}, \ldots, v_b\}$ است، لذا S با هر $\beta_۰(G)$–مجموعه‌ای اشتراک دارد. بنابراین $\gamma_{it}(G) \leq |S| = b$.

حال، فرض کنید S' یک $\gamma_{it}(G)$–مجموعه باشد. نشان می‌دهیم $|S'| \geq b$. فرض کنید A_i مجموعه رئوس گراف $H_۱$ متصل به v_i برای $i = ۱, ۲, \ldots, a$ باشد. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

- فرض کنید $\{v_{a+۱}, v_{a+۲}, \ldots, v_b\} \subseteq S'$. چون S' یک مجموعه احاطه‌گر است، پس $S' \cap (A_i \cup \{v_i\}) \neq \emptyset$، برای $i = ۱, ۲, \ldots, a$. بنابراین $|S'| \geq b - a + a = b$.
- فرض کنید $\{v_{a+۱}, v_{a+۲}, \ldots, v_b\} \nsubseteq S'$. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید $v_{a+۱} \notin S'$. فرض کنید که $A_i \nsubseteq S'$، برای $i = ۱, ۲, \ldots, a$، و $x_i \in A_i - S'$، برای $i = ۱, ۲, \ldots, a$. در این صورت مجموعه $\{x_۱, x_۲, \ldots, x_a, v_{a+۱}\}$ یک مجموعه مستقل ماکزیمم است که با S' اشتراک ندارد، که این تناقض است. بنابراین یک عدد صحیح $i \in \{۱, ۲, \ldots, a\}$ وجود دارد بطوریکه $A_i \subseteq S'$. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید $i = ۱$. چون S' یک مجموعه احاطه‌گر است، لذا برای هر $j \in \{۲, ۳, \ldots, a\}$، یا $S' \cap A_j \neq \emptyset$ یا $v_j \in S'$. بنابراین $|S'| \geq c + a - ۱ \geq b$.

از این رو در دو حالت فوق داریم $|S'| \geq b$. بنابراین $\gamma_{it}(G) = b$ (شکل ۳.۴ مثالی از این قبیل گراف G برای حالتی که $a = ۴$، $b = ۶$ و $c = ۳$ را نشان می‌دهد).

(۲) $a = b$. فرض کنید H گراف دوبخشی کامل $K_{a+c,a+c}$ باشد و مجموعه رئوس آن به صورت $\{v_۱, v_۲, \ldots, v_{a+c}, v'_۱, v'_۲, \ldots, v'_{a+c}\}$ باشد، که $v_i (۱ \leq i \leq a + c)$ متعلق به بخش اول و $v'_i (۱ \leq i \leq a+c)$ متعلق به بخش دوم باشند. فرض کنید $H_۱ \cong K_c$ و هر رأس از i–امین کپی از $H_۱$ با یالی به i–امین رأس از بخش اول H، برای $i = ۱, ۲, \ldots, a - ۱$، متصل باشد. حال، گراف بدست آمده را G بنامید. در این صورت مجموعه $\{v_۱, v_۲, \ldots, v_{a-۱}, v'_۱\}$ یک مجموعه



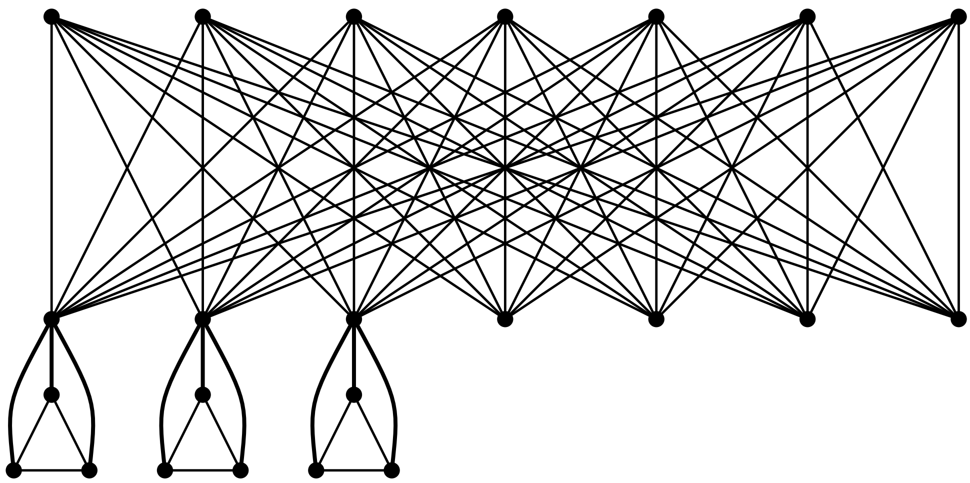
شکل ۳.۴: گراف G با $a = ۴$، $b = ۶$ و $c = ۳$. توجه کنید که $\delta(G) = c = ۳$، $\gamma(G) = a = ۴$ و $\gamma_{it}(G) = b = ۶$.

احاطه‌گر است. لذا $\gamma(G) \leq a$. فرض کنید D یک $\gamma(G)$–مجموعه باشد. چون گراف دوبخشی است، لذا D شامل دقیقاً یک رأس از هر بخش H است. از طرفی هر کدام از $a - ۱$ رأس از بخش اول متصل به یک کپی از $H_۱$ هستند. پس D شامل یک رأس از هر کپی $H_۱$ یا رأس $v_i(۱ \leq i \leq a - ۱)$ و یک رأس از بخش دوم است. بنابراین $|D| \geq a - ۱ + ۱ = a$. از این رو $\gamma(G) = a$. همچنین، کوچکترین درجه گراف G از یک رأس از کپی $H_۱$ متصل به $v_i(۱ \leq i \leq a - ۱)$ بدست می‌آید، لذا $\delta(G) = \delta(K_c) + ۱ = c - ۱ + ۱ = c$. همچنین، $\beta_\circ(G) = ۲a + c - ۱$، و هر $\beta_\circ(G)$–مجموعه‌ای شامل تمام رأس‌های بخش دوم و شامل دقیقاً یک رأس از هر کپی $H_۱$ است. حال، مجموعه $S = \{v_۱, v_۲, \ldots, v_{a-۱}, v'_۱\}$ یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل است زیرا بنا به توضیحات قبل یک مجموعه احاطه‌گر است و چون هر $\beta_\circ(G)$–مجموعه‌ای شامل تمام رأس‌های $v'_i(۱ \leq i \leq a + c)$ است، پس S با هر $\beta_\circ(G)$–مجموعه‌ای اشتراک دارد. بنابراین $\gamma_{it}(G) \leq |S| = a$. از طرفی $\gamma(G) = a$. در نتیجه $\gamma_{it}(G) \geq \gamma(G) = a$. از این رو $\gamma_{it}(G) = a = b$ (شکل ۴.۴ مثالی از این قبیل گراف G برای حالتی که $a = b = ۴$ و $c = ۳$ را نشان می‌دهد).

(۳) $a < b \leq c$. فرض کنید H یک گراف کامل b رأسی باشد و $V(H) = \{v_۱, v_۲, \ldots, v_b\}$. فرض کنید $H_۱ \cong K_c$ و G گراف بدست آمده از H و a کپی از $H_۱$ با استفاده از روند زیر باشد.

- متصل کردن هر رأس از i–امین کپی از $H_۱$ توسط یالی به i–امین رأس از H، برای $i = ۱, ۲, \ldots, a$. فرض کنید مجموعه رئوس گراف $H_۱$ متصل به رأس $v_۱$، به صورت $A_۱ = V(K_c) = \{u_۱, u_۲, \ldots, u_c\}$ باشد.
- متصل کردن $v_i(a + ۱ \leq i \leq b)$ با یالی به برخی از رئوس $\{u_۲, \ldots, u_c\}$ بطوریکه درجه v_i برابر c شود.

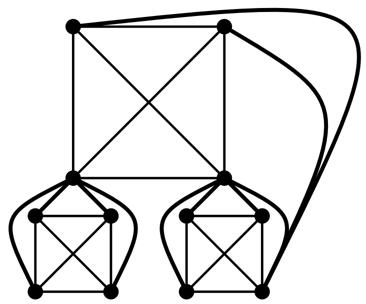
در این صورت، به وضوح مجموعه $\{v_۱, v_۲, \ldots, v_a\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای G است. پس $\gamma(G) \leq a$. فرض کنید D یک $\gamma(G)$–مجموعه باشد. نشان دهیم $|D| \geq a$. چون D شامل



شکل ۴.۴: گراف G با ۴ $= a = b$ و ۳ $= c$. توجه کنید که ۳ $= \delta(G) = c$، ۴ $= \gamma(G) = a$ و ۴ $= \gamma_{it}(G) = b$.

دقیقاً یک رأس از $\{u_۲, \ldots, u_c\}$ متصل به $v_i(a + ۱ \leq i \leq b)$ از کپی $H_۱$ و یک رأس از هر کپی $H_۲$ و یا شامل رأس $v_i(۱ \leq i \leq a)$ متصل به هر کپی $H_۱$ است. لذا $|D| \geq a$. از این رو $\gamma(G) = a$. همچنین، کوچکترین درجه گراف G از یک رأس غیر متصل به $v_i(a + ۱ \leq i \leq b)$ در گراف K_c و یا از یک رأس $v_i(a + ۱ \leq i \leq b)$ بدست می‌آید. بنابراین $\delta(G) = c$. به‌علاوه، اگر A_i مجموعه رئوس گراف کامل K_c متصل به $v_i(۲ \leq i \leq a)$ باشد، آن‌گاه مجموعه $\{u_۱, x_۲, \ldots, x_a, v_{a+۱}\}$ که $x_i \in A_i(i = ۲, ۳, \ldots, a)$، یک مجموعه مستقل ماکزیمم از G است، و لذا $\beta_۰(G) = a + ۱$. حال، مجموعه $S = \{v_۱, v_۲, \ldots, v_a, v_{a+۱}, \ldots, v_b\}$ یک مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل است زیرا مجموعه $\{v_۱, v_۲, \ldots, v_a\}$ که یک مجموعه احاطه‌گر است، مشمول در S است، لذا S یک مجموعه احاطه‌گر است و چون هر $\beta_۰(G)$–مجموعه‌ای شامل یکی از رئوس $\{v_{a+۱}, v_{a+۲}, \ldots, v_b\}$ است، لذا S با هر $\beta_۰(G)$–مجموعه‌ای اشتراک دارد. بنابراین $\gamma_{it}(G) \leq |S| = b$.

حال، فرض کنید S' یک $\gamma_{it}(G)$–مجموعه باشد. نشان می‌دهیم $|S'| \geq b$. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید که برای $i = a + ۱, a + ۲, \ldots, b$، v_i به $\{u_۲, u_۳, \ldots, u_{c-b+۲}\}$ متصل باشد، چون درجه $v_i(a + ۱ \leq i \leq b)$ باید c باشد، لذا v_i باید به $c - b$ رأس از $A_۱$ متصل باشد. برای هر $i \in \{۱, ۲, \ldots, a\}$، چون S' یک مجموعه احاطه‌گر است، لذا یا $S' \cap A_i \neq \emptyset$ یا $v_i \in S'$. فرض کنید یک عدد صحیح $i \in \{a + ۱, a + ۲, \ldots, b\}$ وجود دارد بطوریکه $v_i \notin S'$. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید $i = a + ۱$. فرض کنید $y_i \in A_i - S'$. در این صورت برای $i = ۱, ۲, \ldots, a$، مجموعه $\{y_۱, y_۲, \ldots, y_a, v_{a+۱}\}$ یک مجموعه مستقل ماکزیمم است که با S' اشتراک ندارد، که این تناقض است. بنابراین برای هر $i = a + ۱, a + ۲, \ldots, b$، $v_i \in S'$. در نتیجه $|S'| \geq b - a + a = b$. از این رو $\gamma_{it}(G) = b$ (شکل ۵.۴ مثالی از این قبیل گراف G برای حالتی که ۲ $= a$، ۴ $= b$ و ۴ $= c$ را نشان می‌دهد).



شکل ۵.۴: گراف G با ۲ $= a$، ۴ $= b$ و ۴ $= c$. توجه کنید که ۴ $= c =$ $\delta(G)$، ۲ $= a =$ $\gamma(G)$ و ۴ $= b =$ $\gamma_{it}(G)$.

□

مراجع

[1] H. Abdollahzadeh Ahangar, V. Samodivkin and I. G. Yero, *Independent transversal dominating sets in graphs: complexity and structural properties*, Filomat **30** (2) (2016) 293–303.

[2] N. Alon, *The strong chromatic number of a graph*, Random Structures and Algorithms **3** (1992) 1–7.

[3] N. Alon, M. R. Fellows and D. R. Hare, *Vertex Transversals that Dominate*, Journal of Graph Theory **21** (1) (1996) 21–31.

[4] S. K. Ayyaswamy and C. Natarajan, *On graphs whose chromatic transversal number is two*, Proyecciones **30** (1) (2011) 59–64.

[5] E. Boros, M. C. Golumbic and V. E. Levit,*On the number of vertices belonging to all maximum stable sets of a graph*, Discrete Applied Mathematics **124** (2002) 17–25.

[6] G. Chartrand and L. Lesniak, Graphs and Digraphs (Fourth edition, CRC Press, Boca Raton, 2005).

[7] E. J. Cockayne, R. M. Dawes and S. T. Hedetniemi, *Total domination in graphs*, Network **10** (1980) 211–219

[8] P. Erdős, T. Gallai and Z. Tuza, *Covering the cliques of a graph with vertices*, Discrete Mathematics **108** (1992) 279–289.

[9] M. R. Fellows, *Transversals of vertex partitions in graphs*, SIAM Journal on Discrete Mathematics **3** (2) (1990) 206–215.

[10] R. Frucht and F. Harary, *On the corona of two graphs*, Aequationes Mathematicae **4** (1970) 322–325.

[11] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman & Co., New York, USA, 1979.

[12] I. S. Hamid, *Independent tranversal domination in graphs*, Discussiones Mathematicae Graph Theory 32 (2012) 5-–17.

[13] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and P. J. Slater, Fundamentals of Domination in Graphs (Marcel Dekker, New York, 1998).

[14] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and P. J. Slater, Domination in Graphs: Advanced Topics (Marcel Dekker, New York, 1998).

[15] S. T. Hedetniemi and R. C. Laskar, Topics on Domination, Discrete Math. **86** (1990).

[16] R. M. Karp, Reducibility Among Combinatorial Problems. In: *Complexity of Computer Computations*, R. E. Miller & J. W. Thatcher, editors, 85–104, Plenum Press, New York, 1972.

[17] I. González Yero, D. Kuziak and A. Rondón Aguilar, *Coloring, location and domination of corona graphs*, Aequationes Mathematicae **86** (2013) 1–21.

[18] V. E. Levit and E. Mandrescu, *Combinatorial properties of the family of maximum stable sets of a graph*, Discrete Applied Mathematics **117** (2002) 149–161.

[19] L. B. Michaelraj, S. K. Ayyaswamy and S. Arumugam, *Chromatic transversal domination in graphs*, Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing **75** (2010) 33–40.

[20] C. Payan, *Remarks on cliques and dominating sets in graphs*, Ars Combinatoria **7** (1979) 181–189.

[21] E. Sampathkumar and H. B. Walikar,*The connected domination number of a graph*, J. Math. Phys. Sci. **13** (1979) 607–613.

[22] D. B. West , Introduction to graph theory , prentice Hall, 2001.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

برگ	Leaf
پوشش رأسی	Vertex Covering
پیچیدگی	Complexity
تاج	Corona
تطابق	Matching
درخت	Tree
دقیق	Sharp
دوستاره	Bistar
رأس پایانی	End Vertex
زیرگراف القایی	Induced Subgraph
ساقه	Stem
طوقه	Loop
قطر	Diameter
مجاور	Adjacent
مجموعه احاطه‌گر	Dominating Set
مجموعه احاطه‌گر سراسری	Global Dominating Set
مجموعه احاطه‌گر کلی	Total Dominating Set
مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل	Independent Transversal Dominating Set
مجموعه احاطه‌گر مستقل	Independent Dominating Set
مجموعه احاطه‌گر همبند	Connected Dominating Set
مجموعه خوشه–متقاطع	Clique–Transversal Set
مجموعه مستقل ماکسیمال	Maximal Independent Set
هسته	Core
یال آویزان	Pendant Edge

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adjacent	مجاور
Bistar	دوستاره
Clique–Transversal Set	مجموعه خوشه–متقاطع
Complexity	پیچیدگی
Connected Dominating Set	مجموعه احاطه‌گر همبند
Core	هسته
Corona	تاج
Diameter	قطر
Dominating Set	مجموعه احاطه‌گر
End Vertex	رأس پایانی
Global Dominating Set	مجموعه احاطه‌گر سراسری
Independent Dominating Set	مجموعه احاطه‌گر مستقل
Independent Transversal Dominating Set	مجموعه احاطه‌گر متقاطع مستقل
Induced Subgraph	زیرگراف القایی
Leaf	برگ
Loop	طوقه
Matching	تطابق
Maximal Independent Set	مجموعه مستقل ماکسیمال
Pendant Edge	یال آویزان
Sharp	دقیق
Stem	ساقه
Total Dominating Set	مجموعه احاطه‌گر کلی
Tree	درخت
Vertex Covering	پوشش رأسی

Aabstract

A set $S \subseteq V$ of vertices in a graph $G = (V, E)$ is a dominating set if every vertex in $V - S$ is adjacent to a vertex in S. The minimum cardinality of a dominating set is called the domination number of G and is denoted by $\gamma(G)$. A dominating set which intersects every maximum independent set in G is called an independent transversal dominating set. The minimum cardinality of an independent transversal dominating set is called the independent transversal domination number of G and is denoted by $\gamma_{it}(G)$.
In this thesis, we investigate this parameter. We determine the exact valuse of the independent transversal domination number in several families of graph including paths, cycles and wheels. We also obtain different bounds for this parameter and study the complexity of it. Also, We answer some problems on this parameter. We obtain several new bounds for the independant transversal domination number of a graph, and characterize all graphs achieving equality for new bounds.
Keywords: dominating set, independent set, independent transversal dominating set.

Shahrood University Of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

INDEPENDENT TRANSVERSAL DOMINATION IN GRAPHS

Zahra Gholami

Supervisor

Dr. Nader Jafari Rad

Advisor

Dr. Mehdi Reza Khorsandi

July 2016