دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی با روش تجزیه آدومیان تعمیم یافته

رمضان اسماعیلی

استاد راهنما

دکتر مهدی قوتمند

استاد مشاور

دکتر جواد وحیدی

بهمن ۱۳۹۴

تقدیم به خانواده عزیزم

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. در آغاز وظیفه خود می,دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر مهدی قوتمند، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعا" بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به سرانجام نمی‌رسید. ازجناب آقای دکتر جواد وحیدی که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را تقبل فرمودند ودر آماده‌سازی این پایان‌نامه، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال تشکر را دارم. در پایان بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگار مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادر عزیزم به پاس کمک‌های سرشار و گرمای امیدبخش وجودش، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بود.

رمضان اسماعیلی
بهمن ۱۳۹۴

تعهد نامه

اینجانب **رمضان اسماعیلی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان**حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی با روش تجزیه آدومیان تعمیم یافته** ، تحت راهنمایی **دکتر مهدی قوتمند** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ‘‘ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

رمضان اسماعیلی
بهمن ۱۳۹۴

چکیده

معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی در بسیاری از مسائل علوم پایه و مهندسی ظاهر می‌شوند. هر چند تعداد زیادی از این مسائل با کمک روش‌های تحلیلی و عددی قابل حل هستند، اما تعدادی دیگر از این مسائل وجود دارند که با روش های تحلیلی و عددی یا قابل حل نیستند و یا حل پیچیده ای دارند، از این‌رو روش‌های نیمه‌تحلیلی می‌توانند جایگزین مناسبی جهت حل این مسائل باشند. ما در این رساله سعی داریم تا معادلات غیرخطی درجه دو را با روش تجزیه آدومیان حل کنیم البته در مورد روش تجزیه آدومیان می‌توان گفت که این روش جواب معادله را به صورت یک سری نامتناهی به دست می‌آورد که به جواب واقعی همگرا است، در پایان سعی می‌کنیم که این روش را در قالب حساب و دیفرانسیل کوانتوم مطرح کنیم.

کلمات کلیدی: روش‌های نیمه‌تحلیلی، روش تجزیه آدومیان، حساب کوانتوم.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

۱. رمضان اسماعیلی و جواد وحیدی، ۱۳۹۴، حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی کوانتوم و مساله مقدار مرزی کوانتومی بوسیله روش تجزیه آدومیان کوانتومی، همایش بین‌المللی علوم مهندسی و نوآوری، تهران، دانشگاه علم‌وصنعت ایران.

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف اولیه

۱.۱ روش تجزیه آدومیان

روش تجزیه آدومیان[۱] در اویل سال ۱۹۸۰ توسط جورج آدومیان [۲] ارائه شد، روش تجزیه آدومیان یک روش مناسب برای حل دسته وسیعی از معادلات دیفرانسیل می‌باشد، در این روش جواب معادله بصورت یک سری نامتناهی به دست می‌آید که معمولا به جواب واقعی یا تقریبی از جواب واقعی همگرا است[۸، ۳، ۶، ۴]. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$Ly(x) + Ry(x) + Ny(x) = g(x) \tag{۱.۱}$$

که L عملگر خطی است و بالاترین مرتبه مشتق موجود در آن برابر n می‌باشد، N عملگر غیرخطی و R عملگر مشتق از مرتبه کمتر از L و $g(x)$ یک تابع شناخته شده می‌باشد. از رابطه (۱.۱) داریم:

$$Ly(x) = g(x) - Ry(x) - Ny(x) \tag{۲.۱}$$

که در آن:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \tag{۳.۱}$$

که مولفه $y_n(x)$ معمولا" بصورت بازگشتی تعیین یا محاسبه می‌شود و عملگر $N(y(x))$ می‌تواند به یک سری نامتناهی از چند جمله‌ای‌ها تجزیه شود:

$$N(y(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \tag{۴.۱}$$

---
[۱] Adomian decomposition method
[۲] George Adomian

که A_n چندجمله‌ای آدومیان[۳] نامیده می‌شود[۱۱، ۱۳، ۱۰، ۶، ۱، ۲] و بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A_n(x) = \left[\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}N\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i y_i(x)\Big)\right]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0 \tag{۵.۱}$$

برای فهم بهتر چندجمله‌ای آدومیان، پنج جمله اول چندجمله‌ای را لیست می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
A_0 &= N(y_0)\\
A_1 &= N'(y_0)y_1\\
A_2 &= N'(y_0)y_2 + N''(y_0)\frac{y_1^2}{2!}\\
A_3 &= N'(y_0)y_3 + N''(y_0)y_1y_2 + N'''(y_0)\frac{y_1^3}{3!}\\
A_4 &= N'(y_0)y_4 + N''(y_0)\Big(\frac{y_2^2}{2!} + y_1y_3\Big) + N'''(y_0)\frac{y_1^2y_2}{2!} + N^{(4)}(y_0)\frac{u_1^4}{4!}
\end{aligned}$$

۱.۱.۱ روش مستقیم برای بدست آوردن چندجمله‌ای آدومیان

در اینجا چند تابع را بررسی می‌کنیم و روش را با آن‌ها شرح می‌دهیم:

$$N(y) = y^3 \tag{۶.۱}$$

با استفاده از (۳.۱) داریم:

$$\begin{aligned}
N(y) &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\Big)^3 = (y_0 + y_1 + y_2 + \cdots)^3\\
&= \overbrace{y_0^3}^{A_0} + \overbrace{3y_0^2y_1}^{A_1} + \overbrace{3y_0y_2 + 3y_0y_1^2}^{A_2} + \overbrace{3y_0^2y_3 + 6y_0y_1y_2 + y_1^3}^{A_3}\\
&+ \overbrace{3y_0^2y_4 + 3y_1^2y_2 + 3y_0y_2^2 + 6y_0y_1y_3}^{A^4} + \cdots
\end{aligned}$$

$$N(y) = \sin y \tag{۷.۱}$$

با استفاده از (۳.۱) داریم:

$$\begin{aligned}
N(y) &= \sin\Big(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\Big) = \sin(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots) = \sin(y_0 + (y_1 + y_2 + \cdots))\\
&= \sin y_0 \cos(y_1 + y_2 + \cdots) + \cos y_0 \sin(y_1 + y_2 + \cdots)
\end{aligned}$$

[۳] Adomian polynomial

با جدا کردن $N(y_0)=\sin y_0$ از دیگر فاکتورها واستفاده از بسط تیلور برای $\sin(y_1+y_2+\cdots)$ و $\cos(y_1+y_2+\cdots)$ داریم:

$$\begin{aligned}N(y)&=\sin y_0(1-\frac{1}{2!}(y_1+y_2+\cdots)^2+\frac{1}{4!}(y_1+y_2+\cdots)^4+\cdots)\\&+\cos y_0((y_1+y_2+\cdots)-\frac{1}{3!}(y_1+y_2+\cdots)^3+\cdots)\end{aligned}$$

بطوریکه

$$\begin{aligned}N(y)&=\sin y_0(1-\frac{1}{2!}(y_1^2+2y_1y_2+\cdots)+\cdots)\\&+\cos y_0((y_1+y_2+\cdots)-\frac{1}{3!}(y_1^3+3y_1^2y_2+\cdots)+\cdots)\end{aligned}$$

با بسط جبری بالا و مرتب کردن آن‌ها:

$$\begin{aligned}N(y)=&\overbrace{\sin y_0}^{A_0}+\overbrace{y_1\cos y_0}^{A_1}+\overbrace{y_2\cos y_0-\frac{1}{2!}y_1^2\sin y_0}^{A_2}+\overbrace{y_3\cos y_0-y_1y_2\sin y_0-\frac{1}{3!}y_1^3\cos y_0}^{A_3}\\&\overbrace{-y_4\cos y_0-\frac{1}{2!}y_2^2\sin y_0-y_1y_3\sin y_0+\frac{1}{2!}y_1^2y_2\cos y_0-\frac{1}{4!}y_1^4\sin y_0}^{A_4}+\cdots\end{aligned}$$

$$N(y)=\ln(1+y),\quad -1\le y\le 1 \tag{1.8}$$

از (۱.۳) داریم:

$$N(y)=\ln(1+y)=\ln(1+\sum_{n=0}^{\infty}y_n)=\ln(1+y_0+y_1+y_2+\cdots)$$

با فاکتورگیری از $(1+y_0)$ داریم:

$$N(y)=\ln\Big((1+y_0)(1+\frac{y_1}{1+y_0}+\frac{y_2}{1+y_0}+\frac{y_3}{1+y_0}+\cdots)\Big)$$

با استفاده از خاصیت لگاریتمی (؟؟) داریم:

$$N(y)=\ln(1+y_0)+\ln(1+\frac{y_1}{1+y_0}+\frac{y_2}{1+y_0}+\frac{y_3}{1+y_0}+\cdots)$$

با استفاده از بسط تیلور داریم:

$$\begin{aligned}N(y)=\ln(1+y_0)+\Big(&(\frac{y_1}{1+y_0}+\frac{y_2}{1+y_0}+\frac{y_3}{1+y_0}+\cdots)\\&-\frac{1}{2}(\frac{y_1}{1+y_0}+\frac{y_2}{1+y_0}+\frac{y_3}{1+y_0}+\cdots)^2\\&+\frac{1}{3}(\frac{y_1}{1+y_0}+\frac{y_2}{1+y_0}+\frac{y_3}{1+y_0}+\cdots)^3+\cdots\Big)\end{aligned}$$

$$N(y)=\overbrace{\ln(1+y_0)}^{A_0}+\overbrace{\frac{y_1}{1+y_0}}^{A_1}+\overbrace{\frac{y_2}{1+y_0}-\frac{1}{2}\frac{y_1^2}{(1+y_0)^2}}^{A_2}$$
$$+\overbrace{\frac{y_3}{1+y_0}-\frac{y_1y_2}{(1+y_0)^2}+\frac{1}{3}\frac{y_1^3}{(1+y_0)^3}}^{A_3}$$
$$+\overbrace{\frac{y_4}{1+y_0}-\frac{1}{2}\frac{y_2^2}{(1+y_0)^2}-\frac{1}{2}\frac{y_1y_3}{(1+y_0)^2}+\frac{y_1^2y_2}{(1+y_0)^3}-\frac{1}{4}\frac{y_1^4}{(1+y_0)^4}}^{A_4}+\cdots$$

در اینجا به همین تعداد تابع در روش مستقیم برای بدست آوردن چندجمله‌ای آدومیان بسنده می‌کنیم[۱۲] و در ادامه داریم:

$$Ly(x)=g(x)-Ry(x)-Ny(x);\quad L=\frac{d^n}{dx^n},R=\frac{d^m}{dx^m},\quad m<n \tag{۹.۱}$$

مشخص است که L معکوس‌پذیر[۴] است در نتیجه برای معکوس L داریم:

$$L^{-1}(.)=\overbrace{\int_0^x\cdots\int_0^x}^{n}(.)\,\overbrace{dX\cdots dX}^{n} \tag{۱۰.۱}$$

حال با ضرب L^{-1} در (۹.۱) داریم:

$$L^{-1}Ly(x)=L^{-1}g(x)-L^{-1}Ry(x)-L^{-1}Ny(x)$$
$$\rightarrow y(x)=L^{-1}g(x)-L^{-1}Ry(x)-L^{-1}Ny(x)$$

حال با کمک (۴.۱) و (۳.۱) داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}y_n(x)=L^{-1}(g(x))-L^{-1}R(\sum_{n=0}^{\infty}y_n(x))-L^{-1}(\sum_{n=0}^{\infty}A_n(x)).$$

و همچنین با توجه به (۱۰.۱) داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}y_n(x)=\overbrace{\int_0^x\cdots\int_0^x}^{n}(g(x))\,\overbrace{dX\cdots dX}^{n}-\overbrace{\int_0^x\cdots\int_0^x}^{n}\Big(\frac{d^m}{dx^m}(\sum_{n=0}^{\infty}y_n(x))\Big)\,\overbrace{dX\cdots dX}^{n}$$
$$-\overbrace{\int_0^x\cdots\int_0^x}^{n}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}A_n(x)\Big)\,\overbrace{dX\cdots dX}^{n},\quad m<n.$$

[۴]invertible

در نتیجه:

$$\begin{cases} y_0(x) = f(x) - L^{-1}(g(x)) := f \\ y_1(x) = -L^{-1}(R(y_0(x))) - L^{-1}(A_0(x)) \\ y_2(x) = -L^{-1}(R(y_1(x))) - L^{-1}(A_1(x)) \\ \vdots \\ y_{n+1}(x) = -L^{-1}(R(y_n(x))) - L^{-1}(A_n(x)) \end{cases} \tag{۱.۱۱}$$

که اگر ما تابع ϕ_m را بصورتی تعریف کنیم که جمع $m+1$ جمله اول y_i قرار دهیم در اینصورت:

$$\varphi_m(x) = \sum_{n=0}^{m-1} y_n(x) \tag{۱.۱۲}$$

بطوریکه:

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_m(x) = y(x) \tag{۱.۱۳}$$

دسته‌ای از معادلات را مطرح می‌کنیم که اگر L و پیرو آن، L^{-1} را بصورت معمول روش تجزیه آدومیان معرفی کنیم در محاسبه $y(x)$ دچار مشکل انتگرال‌گیری از $L^{-1}Ry$ می‌شویم. برای مثال به معادله زیر توجه کنید:

مثال ۱.۱.۱.

$$\begin{cases} y'' + \frac{2}{x}y' + ay^n = 0 \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

حل: اگر $L = \frac{d^2}{dx^2}$ بگیریم باید $L^{-1} = \int_0^x \int_0^x [.]\, dX dX$ در نظر بگیریم که به مشکل برمی‌خوریم زیرا:

$$\int_0^x \int_0^x y''\, dX dX + \int_0^x \int_0^x \frac{2}{x} y'\, dX dX + \int_0^x \int_0^x a y^n\, dX dX = 0$$

مشکل اینجاست که ما نمی‌توانیم از جمله دوم انتگرال بگیریم.
حال ما L را به نحوی دیگر حساب می‌کنیم:

$$Ly = y'' + \frac{2}{x} y'$$

حال با تکنیکی L را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} Ly = y'' + \frac{2}{x}y' &= \frac{1}{x^2}\Big(x^2 \frac{d}{dx} y' + 2x \frac{d}{dx} y\Big) \\ &= \Big(\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} x^2 \frac{d}{dx}\Big) y \end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$L[\cdot] = \left(x^{-۲}\frac{d}{dx}x^{۲}\frac{d}{dx}\right)[\cdot],$$

و پیرو آن داریم:

$$L^{-۱}[\cdot] = \int_{\circ}^{x} x^{-۲}\int_{\circ}^{x} x^{۲}[\cdot]\, dX dX.$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}
L^{-۱}\left(y'' + \frac{۲}{x}y'\right) &= \int_{\circ}^{x} x^{-۲}\int_{\circ}^{x} x^{۲}\left(y'' + \frac{۲}{x}y'\right) dX dX \\
&= \int_{\circ}^{x} x^{-۲}\left[x^{۲}y' - \int_{\circ}^{x} ۲xy'\, dX + \int_{\circ}^{x} ۲xy'\, dX\right] dX \\
&= \int_{\circ}^{x} y'\, dX = y(x) - y(\circ) = -aL^{-۱}\left(y^{n}(x)\right) \\
y(x) &= y_{\circ} - aL^{-۱}\left(\sum_{n=\circ}^{\infty} A_n\right)
\end{aligned}$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned}
&A_{\circ} = y_{\circ}^{n} \\
&A_{۱} = ny_{\circ}^{n-۱}y_{۱} \\
&A_{۲} = ny_{\circ}^{n-۱}y_{۲} + n(n-۱)\frac{y_{۱}^{۲}}{۲!}y_{\circ}^{n-۲} \\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} y_{\circ}(x) = y_{\circ} \\ y_{n+۱}(x) = -aL^{-۱}\left(A_n\right),\ n \geq \circ \end{cases} \tag{۱۴.۱}$$

که اگر ما تابع ϕ_m را بصورتی تعریف کنیم که جمع $m+۱$ جمله اول y_i قرار دهیم در اینصورت:

$$\varphi_m(x) = \sum_{n=\circ}^{m-۱} y_n(x) \tag{۱۵.۱}$$

بطوریکه:

$$\lim_{m\to\infty}\varphi_m(x) = y(x) \tag{۱۶.۱}$$

حال در این قسمت مثالی را مطرح می‌کنیم که بسیار کارگشاست به این صورت که اگر بتوانیم f را تفکیک کنیم آنگاه در بعضی از مواقع می‌توان جوابی با خطای صفر را بدست آورد. مثال زیر را در نظر بگیرید:

مثال ۱.۱.۲.

$$\begin{cases} y'(x) - y(x) = x\cos x - x\sin x + \sin x, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

ابتدا با روند عادی آدومیان معمولی مثال را حل می‌کنیم:

$$Ly(x) - y(x) = x\cos x - x\sin x + \sin x$$
$$L[\cdot] = \frac{d}{dx}[\cdot], \quad L^{-1}[\cdot] = \int_0^x [\cdot]\, dX$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} L^{-1}(Ly(x)) - L^{-1}(y(x)) &= L^{-1}(x\cos x - x\sin x + \sin x) \\ \int_0^x y'(x)\, dX - \int_0^x y(x)\, dX &= \int_0^x (x\cos x - x\sin x + \sin x)\, dX \\ y(x) - y(0) &= \int_0^x y(x)\, dX + \int_0^x (x\cos x - x\sin x + \sin x)\, dX \\ y(x) &= \int_0^x y(x)\, dX + \int_0^x (x\cos x - x\sin x + \sin x)\, dX \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)\, dX + \overbrace{\int_0^x (x\cos x - x\sin x + \sin x)\, dX}^{f}$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} y_0 = x\sin x + x\cos x - \sin x := f \\ y_1 = \int_0^x y_0\, dx = -\cos x + \sin x + x\sin x + 2\cos x - 2 \\ y_2 = \int_0^x y_1\, dx = -x\sin x - 2\cos x - x\cos x + 3\sin x - 2x + 2 \\ \vdots \end{cases}$$

آنگاه طبق الگوریتم[۵] تجزیه آدومیان داریم:

$$\phi_m(x) = \sum_{n=0}^{m-1} y_n = y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{m-1}$$
$$y = \lim_{m\to\infty} \phi_m(x)$$

که اگر تا n متناهی ببریم آنگاه یک جواب تقریبی برای y داریم. حال همین مثال را با لم مطرح شده حل می‌کنیم. تا اینجا داشتیم که:

$$f = x\sin x + x\cos x - \sin x = \overbrace{x\sin x}^{f_1} + \overbrace{x\cos x - \sin x}^{f_2}$$

[۵] algorithm

$$\begin{cases} y_{\circ} = f_{۱} = \overbrace{x\sin x}^{f_{۱}} \\ y_{۱} = f_{۲} + \int_{\circ}^{x} y_{\circ}\, dX = \overbrace{x\cos x - \sin x}^{f_{۲}} + \sin x - x\cos x = \circ \\ y_{۲} = \int_{\circ}^{x} y_{۱}\, dX = \circ \\ \vdots \end{cases}$$

$$\phi_m(x) = \sum_{n=\circ}^{m-۱} y_n = y_{\circ}$$

در نتیجه داریم:

$$y = \phi_{۱}(x)$$

در این مثال دیدیم که جواب دقیق برای y بدست آمد[۱۴].

۲.۱.۱ همگرایی روش تجزیه آدومیان

معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$y - Ny = f, \qquad (۱۷.۱)$$

که N عملگر غیرخطی روی فضای هیلبرت H و f یک تابع در H می‌باشد و ما دنبال یک $y \in H$ هستیم که در (۱۷.۱) صدق کند. جورج آدومیان[۶] یک روش بسیار قوی را برای حل معادله (۱۷.۱) ارائه داد که جواب از سری زیر بدست می‌آید:

$$y = \sum_{i=\circ}^{\infty} y_i, \qquad (۱۸.۱)$$

که:

$$\begin{cases} y_{\circ} = f, \\ y_{n+۱} = A_n(y_{\circ}, y_{۱}, \cdots, y_n), \end{cases} \qquad (۱۹.۱)$$

حال ما برای بیان اثبات همگرایی نیاز داریم تا روش آدومیان را بصورت دیگری بیان کنیم که معادل با (۱۸.۱) و (۱۹.۱) می‌باشد. دنباله زیر را در نظر بگیرید:

$$S_n = y_{۱} + y_{۲} + \cdots + y_n, \qquad (۲۰.۱)$$

که با استفاده از شکل تکراری زیر داریم:

$$\begin{cases} S_{\circ} = \circ, \\ S_{n+۱} = N(y_{\circ} + S_n). \end{cases} \qquad (۲۱.۱)$$

[۶] George Adomian

قضیه ۳.۱.۱. *[۳، ۸] فرض کنید N یک عملگر روی فضای هیلبرت[۷] از H باشد و y جواب دقیق (۱۷.۱) باشد. $\sum_{i=0}^{\infty} y_i$ که به وسیله (۱۹.۱) بدست می‌آید به y همگراست وقتی‌که:*

$$\exists\alpha; 0 \leq \alpha < 1; \|y_{k+1}\| \leq \alpha\|y_k\|, \forall k \in N \cup \{0\}.$$

برهان. داریم:

$$\begin{aligned}
S_0 &= 0,\\
S_1 &= y_1,\\
S_2 &= y_1 + y_2,\\
&\vdots\\
S_n &= y_1 + y_2 + \cdots + y_n,
\end{aligned}$$

حال نشان می‌دهیم دنباله $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ در فضای هیلبرت H دنباله کوشی[۸] است
در نتیجه داریم:

$$\|S_{n+1} - S_n\| = \|y_{n+1}\| \leq \alpha\|y_n\| \leq \alpha^2\|y_{n-1}\| \leq \cdots \leq \alpha^{n+1}\|y_0\|$$

لیکن $\forall n \geq m, m, n \in N$، داریم:

$$\begin{aligned}
\|S_n - S_m\| &= \|(S_n - S_{n-1}) + (S_{n-1} - S_{n-2}) + \cdots + (S_{m+1} - S_m)\|\\
&\leq \|S_n - S_{n-1}\| + \|S_{n-1} - S_{n-2}\| + \cdots + \|S_{m+1} - S_m\|\\
&\leq \alpha^n\|y_0\| + \alpha^{n-1}\|y_0\| + \cdots + \alpha^{m+1}\|y_0\|\\
&\leq (\alpha^{m+1} + \alpha^{m+2} + \cdots)\|y_0\| = \frac{\alpha^{m+1}}{1-\alpha}\|y_0\|,
\end{aligned}$$

بنابراین، $\lim_{n,m\to\infty}\|S_n - S_m\| = 0$ در نتیجه دنباله $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک دنباله کوشی در فضای هیلبرت H است و ایجاب می‌کند که:

$$\exists S \in H, \lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

□

برای هر i متعلق به $N \cup \{0\}$، داریم:

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{\|y_{i+1}\|}{\|y_i\|}, & \|y_i\| \neq 0\,,\\ 0, & \|y_i\| = 0\,. \end{cases} \tag{۲۲.۱}$$

[۷] Hilbert space

[۸] Cauchy sequence

نتیجه ۴.۱.۱. در قضیه (۳.۱.۱)، $\sum_{i=0}^{\infty} y_i$ به جواب دقیق y همگراست، وقتی‌که، $0 \leq \alpha_i < 1, \ \ i = 1, 2, 3, \cdots$.

نتیجه ۵.۱.۱. *اگر y_i و $\bar{y}_i$ به ترتیب بوسیله روش استاندارد و روش تجزیه آدومیان بدست آمده باشند آنگاه دو عنصر α_i و $\bar{\alpha}_i$ کمتر از یک هستند و همچنین سرعت همگرایی $\sum_{i=0}^{\infty} y_i$ و $\sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i$ به جواب دقیق y وابسته به مقدار α_i و $\bar{\alpha}_i$ می‌باشد؛ برای مثال اگر $\bar{\alpha}_i < \alpha_i, \ \forall i$ آنگاه ایجاب می‌کند که سرعت همگرایی $\sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i$ به جواب دقیق بالاتر از $\sum_{i=0}^{\infty} y_i$ باشد.*

فصل ۲

مقدمه‌ای بر حساب و دیفرانسیل کوانتوم

۱.۲ حساب$-q$

تاریخچه حساب کوانتوم به قرن هجدهم باز می‌گردد. برای اولین بار اویلر [۱] (۱۷۰۷-۱۷۸۳) در مقاله‌ای از آن استفاده کرده که در آن مقدمه‌ای بر سری‌های نامتناهی نیوتن نوشته است. در سال‌های اخیر علاقه‌مندان به این موضوع به شدت افزایش یافته است و به سختی می‌توان هفته‌ای را یافت که در آن مقاله‌ای در زمینه حساب کوانتوم نداشته باشیم. دلیل این امر آن است که آنالیز کوانتوم مفید بودن خودش را در زمینه‌های مختلف به اثبات رسانده است کما اینکه امروزه در زمینه‌های اساسی مانند علوم کامپیوتر و فیزیک ذرات کاربرد داشته و همچنین یک ابزار مهم در تئوری تحلیلی اعداد در فیزیک نظری به حساب می آید. محاسبات در قالب حساب کوانتوم سخت و دشوار است از دلایل سختی و پیچیدگی آن می توان به فرمول‌های زیاد و یکسان نبودن نمادهای به کارگرفته شده اشاره کرد که در تاریخ ۳۰۰ ساله آن بوجود آمده‌اند.

به صورت کلی ما دو نوع حساب کوانتوم[۲] داریم حساب$-h$ و حساب$-q$ که در این پایان‌نامه با حساب$-q$ سر کار داریم که حساب معمولی (که من آن‌را حساب مشترک می‌نامم) حاصل اشتراک آن‌ها است، این حساب را با تعریف مشتق شروع می‌کنیم چون بیشتر تعاریف بر مبنای آن می‌باشد. در ضمن بیشتر تعاریف و قضایای این فصل از مرجع [۹] برداشته شده است.

۱.۱.۲ مشتق کوانتوم و خواص آن

تعریف ۱.۱.۲. [۱۵] تعریف مشتق تابع f در مشتق گیری کوانتومی برابر است با:

$$\lim_{q\to 1} D_q f(x) = \lim_{q\to 1} \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \lim_{q\to 1} \frac{f(qx)-f(x)}{qx-x} \tag{۱.۲}$$

[۱] Euler
[۲] quantum calculus

مثال ۲.۱.۲. مشتق کوانتومی تابع $f(x)=x$ را محاسبه کنید:

$$\lim_{q\to ۱} D_q f(x) = \lim_{q\to ۱} \frac{qx-x}{qx-x} = \lim_{q\to ۱} ۱ = ۱$$

یا مثلا" برای تابع $f(x)=x^n$ داریم:

$$\lim_{q\to ۱} D_q f(x) = \lim_{q\to ۱} \frac{q^n x^n - x^n}{qx-x} = \lim_{q\to ۱} \frac{q^n x^n - x^n}{qx-x} = \frac{[q^n-۱]x^n}{[q-۱]x} = [n]x^{n-۱}$$

که داریم : $[n] = \frac{q^n-۱}{q-۱} = q^{n-۱} + q^{n-۲} + \cdots + q^۲ + q + ۱$

قضیه ۳.۱.۲. *[۹]فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ و $a,b\in\Re$ آنگاه خواص زیر برقرار است:*

$$(i) \quad D_q(af(x)+bg(x)) = aD_qf(x) + bD_qg(x) \tag{۲.۲}$$

$$(ii) \quad D_q(f(x)g(x)) = f(qx)D_qg(x) + g(x)D_qf(x) \tag{۳.۲}$$

$$(iii) \quad D_q\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big) = \frac{g(qx)D_qf(x) - f(qx)D_qg(x)}{g(x)g(qx)} \tag{۴.۲}$$

$$(iv) \quad (D_q fog)_{(x)} = (D_{\frac{g(qx)}{g(x)}} f)_{(g(x))}(D_q g)_{(x)} \tag{۵.۲}$$

برهان.

$$(ii) \quad D_q(f(x)g(x)) = f(qx)D_qg(x) + g(x)D_qf(x)$$

$$\begin{aligned} D_q(f(x)g(x)) &= \frac{f(qx)g(qx) - f(x)g(x)}{qx-x} \\ &= \frac{f(qx)g(qx) - f(qx)g(x) + f(qx)g(x) - f(x)g(x)}{qx-x} \\ &= \frac{f(qx)(g(qx)-g(x))}{qx-x} + \frac{(f(qx)-f(x))g(x)}{qx-x} \\ &= f(qx)D_qg(x) + D_qf(x)g(x) \end{aligned}$$

$$(iii) \quad D_q\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big) = \frac{g(x)D_qf(x) - f(x)D_qg(x)}{g(x)g(qx)} = \frac{g(qx)D_qf(x) - f(qx)D_qg(x)}{g(x)g(qx)}$$

$$\begin{aligned} D_q\Big(\frac{f(x)}{g(x)}\Big) &= \Big(\frac{۱}{qx-x}\Big)\Big(\frac{f(qx)}{g(qx)} - \frac{f(x)}{g(qx)} + \frac{f(x)}{g(qx)} - \frac{f(x)}{g(x)}\Big) \\ &= \frac{۱}{g(qx)}\Big(\frac{f(qx)-f(x)}{qx-x}\Big) + \frac{۱}{qx-x}\Big(\frac{f(x)g(x)-f(x)g(qx)}{g(qx)g(x)}\Big) \\ &= \frac{۱}{g(qx)}(D_qf(x)) + \frac{f(x)}{g(qx)g(x)}\Big(\frac{g(x)-g(qx)}{qx-x}\Big) \\ &= \frac{g(x)D_qf(x) - f(x)D_qg(x)}{g(qx)g(x)} \end{aligned}$$

$$(iv)\quad (D_q fog)_{(x)} = (D_{\frac{g(qx)}{g(x)}} f)_{(g(x))}(D_q g)_{(x)}$$

$$\begin{aligned}(D_q fog)_{(x)} &= \frac{(fog)_{(x)} - (fog)_{(qx)}}{x - qx}\\ &= \frac{f(g(x)) - f(g(qx))}{x - qx}\\ &= \frac{f(g(x)) - f(g(qx))}{g(x) - g(qx)} \times \frac{g(x) - g(qx)}{x - qx}\\ &= (D_{\frac{g(qx)}{g(x)}} f)_{(g(x))}(D_q g)_{(x)}\end{aligned}$$

□

مثال ۴.۱.۲. اگر $u(x) = \alpha x^\beta$ می‌خواهیم مشتق کوانتومی $f(u(x))$ را حساب کنیم، داریم:

$$D_q(f(u(x))) = (D_{q^\beta} f)_{(u(x))} D_q(u(x)) \tag{۶.۲}$$

$$\begin{aligned}D_q f(u(x)) &= \frac{f(u(qx)) - f(u(x))}{qx - x}\\ &= \frac{f(\alpha(qx)^\beta) - f(\alpha x^\beta)}{qx - x}\\ &= \frac{f(u(\alpha q^\beta x^\beta) - f(\alpha x^\beta)}{qx - x}\\ &= \frac{f(u(\alpha q^\beta x^\beta) - f(\alpha x^\beta)}{\alpha q^\beta x^\beta - \alpha x^\beta} \times \frac{\alpha q^\beta x^\beta - \alpha x^\beta}{qx - x}\\ &= (D_{q^\beta} f)_{(u(x))} D_q(u(x))\end{aligned}$$

در حساب کوانتوم هرگاه $q \to ۱$ به حساب معمولی تبدیل می‌شود. برای مثال داریم:

$$\begin{aligned}D_q(x^n) &= [n]x^n - ۱ = (q^{n-۱} + q^{n-۲} + \cdots + q^۲ + q + ۱)x^{n-۱}\\ &\overset{q\to۱}{\simeq} \overbrace{(۱ + ۱ + \cdots + ۱)}^{\text{n}} x^{n-۱} = nx^{n-۱}\end{aligned}$$

۲.۲ سری تیلور کوانتوم

سری تیلور کوانتومی یک فرمول پرکاربرد در این پایان‌نامه می‌باشد در نتیجه نیاز است تا آن را تعریف کنیم. همان‌طور که بیان کردیم از تعریف مشتق کوانتوم در موارد بسیاری استفاده می‌شود و می‌توان به جرأت بیان کرد که حساب کوانتوم براساس تعریف مشتق بیان می‌شود، حال برای بیان سری تیلور کوانتوم[۳] نیاز به بیان جزئیاتی می‌باشیم که آنها را بیان می‌کنیم[۹].

[۳] quantum Taylor's series

قضیه ۱.۲.۲. *[۹] فرض کنید a یک اسکالر و D یک عملگر خطی روی فضای چند جمله‌ای‌ها باشد و $\{P_0(x), P_1(x), ...\}$ یک دنباله از چندجمله‌ای‌ها با شرایط زیر باشد:*

$$(a) \quad P_0(a) = 1, P_n(a) = 0 \quad \forall n \geq 1$$
$$(b) \quad deg(P_n) = n$$
$$(c) \quad D_q P_n(x) = P_{n-1}(x) \quad \forall n \geq 1, D(1) = 0$$

در اینصورت برای هر چندجمله‌ای $f(x)$ از درجه n داریم:

$$f(x) = \textstyle\sum_{n=0}^{N} (D^n f)(a) p_n(x); \quad P_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}, D = \frac{d}{dx} \tag{۷.۲}$$

برهان. فرض کنید V فضایی از چند جمله‌ای‌ها از درجه نابیشتر از N باشد بطوریکه $dimV = N + 1$. چندجمله‌ای‌های $\{P_0(x), P_1(x), ...\}$ مستقل خطی هستند زیرا با توجه به شرط (b) درجه آنها اکیدا” صعودی است، از این‌رو پایه‌ای برای V می‌باشد؛ برای مثال هر چندجمله‌ای $f(x) \in V$ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k P_k(x) \tag{۸.۲}$$

که در آن c_k ضرایب ثابت می‌باشد. در معادله (۸.۲) قرار دهید $x = a$ و از شرط (a) استفاده کنید در نتیجه $c_0 = f(a)$. سپس با اعمال عملگرخطی D به تعداد n بار در دو طرف معادله (۸.۲) و با استفاده از شرایط (b) و (c) داریم:

$$\left(D^n f\right)_{(x)} = \sum_{k=n}^{N} c_k D^n P_k(x) = \sum_{k=n}^{N} c_k P_{k-n}(x).$$

دوباره قرار دهید $x = a$ و با استفاده از شرط (a) داریم:

$$c_n = \left(D^n f\right)_{(a)} \quad 0 \leq n \leq N$$

در نتیجه (۸.۲) به (۷.۲) تبدیل می‌شود و حکم اثبات می‌شود. $\square$

البته این قضیه در حساب معمولی (حساب مشترک) مطرح شد که ما سعی می‌کنیم که آن‌را برای حساب کوانتوم مطرح کنیم. (بیان این قضیه برای این است که به کمک آن بتوانیم سری تیلور کوانتومی را بسازیم.) برای این‌که بتوانیم سری تیلور کوانتومی را تعریف کنیم ابتدا $n!$ را در حساب کوانتوم در نظر می‌گیریم:

$$[n]! = \begin{cases} 1 & if \ n = 0, \\ [n] \times [n-1] \times \cdots \times [2] \times [1] & if \ n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{۹.۲}$$

حال مادنباله چندجمله‌ای‌های $\{p_0(x), p_1(x), ...\}$ را با در نظر گرفتن شرایط قضیه ۱.۲.۲ برای حساب کوانتوم می‌نویسیم، اگر $a = 0$ باشد آن‌گاه:

$$p_n(x) = \frac{(x-a)^n}{[n]!} \overset{a=0}{=} \frac{x^n}{[n]!}$$

با استفاده از قسمت (c) قضیه ۱.۲.۲ داریم:

$$D_q p_n(x) = \frac{D_q(x^n)}{[n]!} = \frac{[n]x^{n-1}}{[n]!} = \frac{x^{n-1}}{[n-1]!} = p_{n-1}(x)$$

نکته: به صورت کلی اگر $a \neq 0$ باشد نمی‌توان گفت که $p_n(x) = \frac{(x-a)^n}{[n]!}$ می‌باشد. برای مثال با توجه به قضیه ۱.۲.۲ داریم:

$$D_q(\frac{(x-a)^2}{[2]!}) \neq (x-a)$$

در نتیجه ما می‌خواهیم یک فرمول عمومی برای $p_n(x)$ در حساب کوانتوم بیان کنیم، با توجه به قسمت اول و سوم قضیه ۱.۲.۲ داریم:

$$p_0(x) = 1$$

و همچنین:

$$p_1(a) = 0, \ \ D_q p_1(x) = 1$$

پس ما باید داشته باشیم:

$$p_1(x) = x - a$$

و همچنین برای $p_2(x)$ باز هم با توجه به شرایط قضیه ۱.۲.۲ که $D_q p_2(x) = (x-a)$ و $p_2(a) = 0$ ما باید داشته باشیم:

$$p_2(x) = \frac{x^2}{[2]} - ax - \frac{a^2}{[2]} + a^2 = \frac{(x-a)(x-qa)}{[2]}$$

باز هم در اینجا برای تفهیم بیشتر باید بگویم که چند جمله‌ای‌هایی که ما می‌خواهیم باید با توجه به شرایط قضیه ۱.۲.۲ ساخته شوند یا بهتر بگویم باید در شرایط قضیه ۱.۲.۲ صدق کنند برای مثال فرض کنید اگر ما داشته باشیم $p_2(x) = \frac{(x-a)^2}{[2]}$ آن‌گاه با توجه به شرایط قضیه ۱.۲.۲ داریم:

روش ۱ :

$$D_q p_2(x) = \frac{D_q((x-a)^2)}{[2]} = \frac{(qx-a)^2 - (x-a)^2}{[2](qx-x)} \neq (x-a)$$

روش ۲:

$$\begin{aligned} D_q p_۲(x) &= \frac{D_q((x-a)(x-qa))}{[۲]} = \frac{(qx-a)Dq(x-qa)+(x-qa)D_q(x-a)}{[۲]} \\ &= \frac{(qx-a)+(x-qa)}{q+۱} = \frac{(q+۱)x-(q+۱)a}{q+۱} = (x-a) \end{aligned}$$

که می‌بینیم روش (۲) در شرایط قضیه ۱.۲.۲ صدق می‌کند. به طور مشابه برای $p_۲(x)$ داریم:

$$p_۳(x) = \frac{(x-a)(x-qa)(x-q^۲a)}{[۲][۳]}$$

و همچنین برای $p_n(x)$ داریم:

$$p_n(x) = \frac{(x-a)(x-qa)(x-q^۲a)\cdots(x-q^{n-۱}a)}{[n]!} \qquad (۱۰.۲)$$

که اگر $a = ۰$ باشد آنگاه داریم:

$$p_n(x) = \frac{x^n}{[n]!}$$

که درست است و قبلا" بیان شد.

تعریف ۲.۲.۲. [۹] شبه کوانتوم[۴] $(x-a)^n$ چندجمله‌ای زیر خواهد بود:

$$(x-a)_q^n = \begin{cases} ۱ & if\ n = ۰, \\ (x-a)\times(x-qa)\times\cdots\times(x-q^{n-۱}a) & if\ n \geqslant ۰. \end{cases} \qquad (۱۱.۲)$$

گزاره ۳.۲.۲. *[۹] برای هر $n \geqslant ۱$ داریم:*

$$D_q(x-a)_q^n = [n](x-a)_q^{n-۱} \qquad (۱۲.۲)$$

برهان. با کمک استقراء به اثبات این گزاره می‌پردازیم. برای $n = ۱$ به وضوح مشخص است که حکم برقرار است. فرض می‌کنیم برای $n = k$ صحیح باشد یعنی:

$$D_q(x-a)_q^k = [k](x-a)_q^{k-۱}$$

حال برای $n = k+۱$ ثابت می‌کنیم:

$$\begin{aligned} D_q(x-a)_q^{k+۱} &= D_q((x-a)_q^k(x-q^ka)) \\ &= (x-a)_q^k + (qx-q^ka)D_q(x-a)_q^k \\ &= (x-a)_q^k + q(x-q^{k-۱}a)[k](x-a)_q^{k-۱} \\ &= (۱+q[k])(x-a)_q^k = [k+۱](x-a)_q^k \end{aligned}$$

استقرا به پایان رسید و حکم اثبات شد. □

[۴] quantum analogues

به صورت عمومی در حساب کوانتوم نمی‌توانیم بگوییم که $(x-a)_q^{m+n} \neq (x-a)_q^m (x-a)_q^n$ برقرار است در حالی‌که داریم:

$$(x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n \qquad (۱۳.۲)$$

$$\begin{aligned}(x-a)_q^{m+n} &= (x-a)(x-qa)\cdots(x-q^{m-1}a)(x-q^m a)(x-q^{m+1}a)\cdots(x-q^{m+n-1}a)\\ &= ((x-a)(x-qa)\cdots(x-q^{m-1}a)) \times ((x-q^m a)\\ &\times (x-q(q^m a))\cdots(x-q^{n-1}(q^m a)))\\ &= (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n\end{aligned}$$

همچنین تساوی زیر برقرار می‌باشد:

$$(x-a)_q^{-n} = \frac{1}{(x-q^{-n}a)_q^n} \qquad (۱۴.۲)$$

در فرمول (۱۳.۲)، $m=-n$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}(x-a)_q^{m+n} &= (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n\\ &\Rightarrow (x-a)_q^0 = (x-a)_q^{-n}(x-q^{-n}a)_q^n\\ &\Rightarrow (x-a)_q^{-n} = \frac{1}{(x-q^{-n}a)_q^n}\end{aligned}$$

گزاره ۴.۲.۲. *[۹]فرمول (۱۳.۲) برای هر عدد صحیح m,n برقرار است.*

برهان. برای $m=0$ و $n=0$ بدیهی است. برای $n>0$ و $m=-m'<0$ اثبات می‌کنیم:

$$\begin{aligned}(x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n &= (x-a)_q^{-m'}(x-q^{-m'}a)_q^n\\ &= \frac{(x-q^{-m'}a)_q^n}{(x-q^{-m'}a)_q^{m'}}\\ &= \begin{cases}(x-q^{m'}(q^{-m'}a))_q^{n-m'} & n \geq m'\\ \frac{1}{(x-q^n(q^{-m'}a))_q^{m'-n}} & n < m'\end{cases}\\ &= (x-a)_q^{n-m'} = (x-a)_q^{n+m}.\end{aligned}$$

برای $m \geq ۰$ و $n = -n' < ۰$ داریم:

$$\begin{aligned}(x-a)_q^m(x-q^ma)_q^n &= (x-a)_q^m(x-q^ma)_q^{-n'}\\ &= \frac{(x-a)_q^m}{(x-q^{m-n'}a)_q^{n'}}\\ &= \begin{cases}\frac{(x-a)_q^{m-n'}(x-q^{m-n'}a)_q^{n'}}{(x-q^{m-n'}a)_q^{n'}} & m \geq n'\\ \frac{(x-a)_q^m}{(x-q^{m-n'}a)_q^{n'-m}(x-q^{n'-m}(q^{m-n'}a))_q^m} & m < n'\end{cases}\\ &= \begin{cases}\frac{(x-a)_q^{m-n'}}{۱} & m \geq n'\\ \frac{۱}{(x-q^{m-n'}a)_q^{n'-m}} & m < n'\end{cases}\\ &= (x-a)^{m-n'} = (x-a)_q^{m+n}.\end{aligned}$$

براي $m = -m' < ۰$ و $n = -n' < ۰$ داریم:

$$\begin{aligned}(x-a)_q^m(x-q^ma)_q^n &= (x-a)_q^{-m'}(x-q^{-m'}a)_q^{-n'}\\ &= \frac{۱}{(x-q^{-m'}a)_q^{m'}(x-q^{-n'-m'}a)_q^{n'}}\\ &= \frac{۱}{(x-q^{-n'-m'}a)_q^{n'}(x-q^{n'}(q^{-m'-n'}a))_q^{m'}}\\ &= \frac{۱}{(x-q^{-n'-m'}a)_q^{n'+m'}}\\ &= (x-a)_q^{-m'-n'} = (x-a)_q^{m+n}.\end{aligned}$$

□

تعریف ۲.۲.۵. [۹] برای هر عدد α داریم:

$$[\alpha] = \frac{۱-q^\alpha}{۱-q} \tag{۲.۱۵}$$

گزاره ۲.۲.۶. *[۹] برای هر عدد صحیح n داریم:*

$$D_q(x-a)_q^n = [n](x-a)_q^{n-۱}.$$

برهان. با توجه به (۱۵.۲) $[0] = 0$ در نتیجه برای $n = 0$ درست است. حال اگر $n = -n' < 0$ با استفاده از (۴.۲) و (۱۴.۲) داریم:

$$\begin{aligned}
D_q(x-a)_q^n &= D_q\Big(\frac{1}{(x-q^{-n'}a)_q^{n'}}\Big) \\
&= -\frac{D_q(x-q^{-n'}a)_q^{n'}}{(x-q^{-n'}a)_q^{n'}(qx-q^{-n'}a)_q^{n'}} \\
&= -\frac{[n'](x-q^{-n'}a)_q^{n'-1}}{q^{-n'}(x-q^{-n'}a)_q^{n'}(x-q^{-n'-1}a)_q^{n'}} \\
&= \frac{1-q^{n'}}{q-1}\,\frac{q^{-n'}}{(x-q^{-1}a)(x-q^{-n'-1}a)_q^{n'}} \\
&= \frac{q^{-n'}-1}{q-1}\,\frac{1}{(x-q^{-n'-1}a)_q^{n'+1}} \\
&= \frac{q^n-1}{q-1}(x-a)_q^{n-1}
\end{aligned}$$

□

گزاره ۶.۲.۲ را نمی‌توان برای پیدا کردن مشتق کوانتوم عبارات زیر به‌کار برد:

$$\frac{1}{(x-a)_q^n}, \quad (a-x)_q^n, \quad \frac{1}{(a-x)_q^n}$$

زیرا برای مثال، $(a-x)_q^n \neq (-1)^n(x-a)_q^n$ در عوض، برای $n \geqslant 1$ داریم:

$$\begin{aligned}
(a-x)_q^n &= (a-x)(a-qx)(a-q^2x)\cdots(a-q^{n-1}x) \\
&= (a-x)\times q(q^{-1}a-x)\times q^2(q^{-2}a-x)\cdots q^{n-1}(q^{-n+1}a-x) \\
&= (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}(x-q^{-n+1}a)\cdots(x-q^{-2}a)(x-q^{-1}a)(x-a),
\end{aligned}$$

یا

$$(a-x)_q^n = (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}(x-q^{-n+1}a)_q^n. \tag{۱۶.۲}$$

واضح است که فرمول (۱۶.۲) برای $n = 0$ درست است و به آسانی می‌توان تحقیق کرد که برای $n < 0$ هم برقرار است. حال ما مشتق کوانتوم سه عبارت بالا را بدست می‌آوریم: با توجه به (۱۴.۲) داریم:

$$D_q\Big(\frac{1}{(x-a)_q^n}\Big) = D_q\Big(\frac{1}{(x-q^{-n}(q^na))_q^n}\Big) = D_q(x-q^na)_q^{-n}$$

با استفاده از (۱۶.۲) داریم:

$$\begin{aligned} D_q(a-x)_q^n &= (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}[n](x-q^{-n+1}a)_q^{n-1} \\ &= -[n]q^{n-1}(-1)^{n-1}q^{\frac{n(n-1)}{2}}(x-q^{-n+2}(q^{-1}a))_q^{n-1} \\ &= -[n]q^{n-1}(q^{-1}a-x)_q^{n-1} = -[n](a-qx)_q^{n-1}. \end{aligned}$$

در پایان ما با کمک (۴.۲) داریم:

$$D_q\frac{1}{(a-x)_q^n} = -\frac{-[n](a-qx)_q^{n-1}}{(a-x)_q^n(a-qx)_q^n} = \frac{[n]}{(a-x)_q^n(a-q^nx)}.$$

درنتیجه، برای هر عدد صحیح داریم:

$$D_q\frac{1}{(a-x)_q^n} = [-n](x-q^na)_q^{-n-1} \tag{۱۷.۲}$$

$$D_q(a-x)_q^n = -[n](a-qx)_q^{n-1} \tag{۱۸.۲}$$

$$D_q\frac{1}{(a-x)_q^n} = \frac{[n]}{(a-x)_q^{n+1}} \tag{۱۹.۲}$$

در قسمت قبل چندجمله‌ای کوانتوم $p_n(x) = \frac{(x-a)_q^n}{[n]!}$ را با کمک قضیه ۱.۲.۲ و عملگر D_q بدست آوردیم. حال ما در این قسمت ما با کمک چندجمله‌ای بدست آمده نسخه فرمول تیلور در حساب کوانتوم را ارائه می‌دهیم:

قضیه ۷.۲.۲. *[۹] برای هر چندجمله‌ای $f(x)$ از درجه N و هر عدد c، ما بسط تیلور زیر را در حساب کوانتوم داریم:*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N}(D_q^jf)_{(c)}\frac{(x-c)_q^j}{[j]!} \tag{۲۰.۲}$$

مثال ۸.۲.۲. بسط تیلور کوانتوم $f(x)=x^n$ را حول نقطه c که $n>0$ برای $j \le n$ بدست آورید:
با توجه به قضیه ۷.۲.۲ داریم:

$$\begin{aligned} (D_q^jf)_{(x)} &= D_q^{j-1}([n]x^{n-1}) = D_q^{j-2}([n][n-1]x^{n-2}) \\ &= \cdots = [n][n-1]\cdots[n-j+1]x^{n-j} \end{aligned} \tag{۲۱.۲}$$

و از این‌رو برای $x = c = ۱$ داریم:

$$(D_q^j f)_{(۱)} = [n] \cdots [n - j + ۱]$$

در نتیجه داریم:

$$x^n \simeq \sum_{j=\circ}^{n} \frac{[n] \cdots [n-j+۱]}{[j]} (x - ۱)_q^j = \sum_{j=\circ}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} (x - ۱)_q^j \qquad (۲۲.۲)$$

که:

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{[n][n-۱] \cdots [n-j+۱]}{[j]!} = \frac{[n]!}{[j]![n-j]!} \qquad (۲۳.۲)$$

که (۲۳.۲) را ضریب دوجمله‌ای کوانتوم می‌نامند.

۱.۲.۲ خواص ضریب دوجمله‌ای کوانتوم

رابطه (۲۳.۲) را یادآوری می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[j]![n-j]!} = \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix} \qquad (۲۴.۲)$$

ضریب دوجمله‌ای معمولی را در قانون پاسکال[۵] به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\binom{n}{j} = \binom{n-۱}{j-۱} + \binom{n-۱}{j}, \quad ۱ \leq n - ۱$$

که در حساب کوانتوم برقرار نمی‌باشد برای مثال:

$$\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۱ + q \neq ۲ = \begin{bmatrix} ۱ \\ \circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

در نتیجه ما به دنبال این هستیم که قانون پاسکال کوانتوم را ارائه دهیم، قانون پاسکال کوانتومی را در گزاره بعد بیان و اثبات می‌کنیم.

گزاره ۹.۲.۲. *[۹] دو فرمول برای قانون پاسکال وجود دارد یعنی:*

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-۱ \\ j-۱ \end{bmatrix} + q^j \begin{bmatrix} n-۱ \\ j \end{bmatrix} \qquad (۲۵.۲)$$

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = q^{n-j} \begin{bmatrix} n-۱ \\ j-۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-۱ \\ j \end{bmatrix} \qquad (۲۶.۲)$$

که $۱ \leq j \leq n - ۱$ می‌باشد.

[۵] Pascal rule

برهان. برای هر $1 \le j \le n-1$ داریم:

$$[n] = (1 + q + \cdots + q^{j-1}) + q^j(1 + q + \cdots + q^{n-j-1}) = [j] + q^j[n-j]$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} &= \frac{[n]!}{[j]![n-j]!} = \frac{[n][n-1]!}{[j]![n-j]!} = \frac{[n-1]!([j] + q^j[n-j])}{[j]![n-j]!} \\ &= \frac{[n-1]!}{[j-1]![n-j]!} + q^j \frac{[n-1]!}{[j]![n-j-1]!} = \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}\end{aligned}$$

که فرمول (۲۵.۲) اثبات می‌شود. در فرمول (۲۴.۲) ضرایب متقارنند در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} n-1 \\ n-j-1 \end{bmatrix} + q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ n-j \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} + q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

□

۲.۲.۲ فرمول دو جمله‌ای گاوس

با یک مثال فرمول دوجمله‌ای گاوس[۶] را شرح می‌دهیم:

مثال ۱۰.۲.۲. فرض کنید n یک عدد صحیح نامنفی و a یک عدد دلخواه باشد. حال اجازه دهید که ما تابع $f(x) = (x+a)_q^n$ را با استفاده از بسط تیلور حول نقطه $x = 0$ بسط دهیم:

با استفاده از (۲۱.۲) برای $j \le n$ ما داریم:

$$(D_q^j f)_{(x)} = [n][n-1]\cdots[n-j+1](x+a)_q^{n-j} \tag{۲۷.۲}$$

بخاطر دارید که داشتیم:

$$(x+a)_q^m = (x+a)(x+qa)\cdots(xq^{m-1}a),$$

بنابراین با قرار دادن $x = 0$ در عبارت دست راست بدست می‌آوریم
$(a)(qa)\cdots(q^{m-1}a) = q^{\frac{m(m-1)}{2}}a^m$ با به کار بردن آن در (۲۷.۲) و برای $j \le n$ داریم:

$$(D_q^j f)_{(0)} = [n][n-1]\cdots[n-j+1]q^{\frac{(n-j)(n-j-1)}{2}}a^{n-j} \tag{۲۸.۲}$$

[۶] Gauss's binomial formula

بنابراین براساس فرمول تیلور داریم:

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{\frac{(n-j)(n-j-1)}{2}} a^{n-j} x^j \tag{۲۹.۲}$$

ما می‌توانیم عبارت (۲۹.۲) را با یک جایگذاری j به‌جای $n-j$ بهتر کنیم. از تعریف ضریب دوجمله‌ای (۲۴.۲) ما داریم:

$$q^{\frac{j(j-1)}{2}} a^j = a(aq)\cdots(q^{j-1}a)$$

در نتیجه عبارت (۲۹.۲) معادل است با:

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{\frac{(j)(j-1)}{2}} a^j x^{n-j} \tag{۳۰.۲}$$

فرمول (۳۰.۲) به فرمول دوجمله‌ای گاوس معروف است.

مثال ۱۱.۲.۲. بسط تیلور کوانتومی تابع $f(x) = \frac{1}{(1-x)_q^n}$ را حول نقطه $x=0$ بدست بیاورید:

با استفاده از فرمول (۱۹.۲) داریم:

$$D_q f(x) = D_q \frac{1}{(1-x)_q^n} = \frac{[n]}{(1-x)_q^{n+1}},$$

و با ادامه این روند داریم:

$$D_q^j f(x) = \frac{[n][n+1]\cdots[n+j-1]}{(1-x)_q^{n+j}}$$

بنابراین:

$$(D_q^j)_{(0)} = [n][n+1]\cdots[n+j-1], \quad \forall j \geq 1$$

و برای آن داریم:

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[n][n+1]\cdots[n+j-1]}{[j]!} x^j \tag{۳۱.۲}$$

که فرمول (۳۱.۲) به فرمول دوجمله‌ای هنس[7] معروف است. حال ما یک‌سری از توابع پرکاربرد در حساب کوانتوم را بدست می‌آوریم تا در صورت نیاز از آنها استفاده کنیم.

۳.۲ توابع نمایی و مثلثاتی کوانتومی

ما توابع نمایی و مثلثاتی کوانتومی را بدست می‌آوریم و مابقی توابع یا قابل تبدیل به این دوسری از توابع هستند یا اینکه محاسبات تبدیل کوانتومی آنها ساده می‌باشد.

[7] Heine's binomial formula

۱.۳.۲ توابع نمایی کوانتوم

برای معرفی تابع نمایی کوانتوم از دو اتحاد گاوس و دوجمله‌ای هنس وقتی که n خیلی بزرگ باشد استفاده می‌کنیم که برای $q < ۱$ داریم:

$$(۱+x)_q^{\infty} = \sum_{j=۰}^{\infty} q^{\frac{j(j-۱)}{۲}} \frac{x^j}{(۱-q)(۱-q^۲)\cdots(۱-q^j)} \tag{۳۲.۲}$$

$$\frac{۱}{(۱-x)_q^{\infty}} = \sum_{j=۰}^{\infty} \frac{x^j}{(۱-q)(۱-q^۲)\cdots(۱-q^j)} \tag{۳۳.۲}$$

جالب است بدانید که این دو اتحاد توسط اویلر[۸] که قبل از گاوس و هنس زندگی می‌کرد معرفی شده است که ما اتحاد (۳۲.۲) و (۳۳.۲) را به ترتیب اتحاد اول اویلر و اتحاد دوم اویلر می‌نامیم و با $E_۱$ و $E_۲$ نشان می‌دهیم حال به بررسی $E_۲$ می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} E_۲ &= \sum_{j=۰}^{\infty} \frac{x^j}{(۱-q)(۱-q^۲)\cdots(۱-q^j)} = \sum_{j=۰}^{\infty} \frac{(\frac{x}{۱-q})^j}{(\frac{۱-q}{۱-q})(\frac{۱-q^۲}{۱-q})\cdots(\frac{۱-q^j}{۱-q})} \\ &= \sum_{j=۰}^{\infty} \frac{(\frac{x}{۱-q})^j}{[j]!} \end{aligned} \tag{۳۴.۲}$$

که شباهت به تابع نمایی معمولی دارد:

$$e^x = \sum_{j=۰}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \tag{۳۵.۲}$$

تعریف ۱.۳.۲. شبه کوانتوم[۹] تابع نمایی کلاسیک e^x به صورت زیر می‌باشد:

$$e_q^x = \sum_{j=۰}^{\infty} \frac{x^j}{[j]!} \tag{۳۶.۲}$$

پس از (۳۴.۲) و (۳۵.۲) ما بی‌درنگ داریم:

$$e_q^{\frac{x}{۱-q}} = \frac{۱}{(۱-x)_q^{\infty}} \tag{۳۷.۲}$$

یا

$$e_q^x = \frac{۱}{(۱-(۱-q)x)_q^{\infty}} \tag{۳۸.۲}$$

ما می‌توانیم دیگر تابع نمایی کوانتومی را با استفاده از $E_۱$ تعریف کنیم.

[۸] Euler
[۹] quantum analogues

تعریف ۲.۳.۲. [۹] صورت دیگر شبه کوانتوم از تابع نمایی معمولی برابر است با:

$$E_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{x^j}{[j]!} = (1 + (1-q)x)_q^{\infty} \tag{۳۹.۲}$$

حال ما به بررسی جزئیات دو تابع نمایی کوانتوم می‌پردازیم، این دو تابع شبه کوانتوم رفتارهای مشابهی دارند زیرا:

$$D_q e_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D_q x^j}{[j]!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[j]x^{j-1}}{[j]!},$$

و

$$\begin{aligned} D_q E_q^x &= \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{D_q x^j}{[j]!} = \sum_{j=1}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{[j]x^{j-1}}{[j]!} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} q^{\frac{(j-1)(j-2)}{2}} q^{j-1} \frac{x^{j-1}}{[j-1]!} = \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{q^j x^j}{[j]!} \end{aligned}$$

در نتیجه ما داریم:

$$D_q e_q^x = e_q^x \quad and \quad D_q E_q^x = E_{qx}^x \tag{۴۰.۲}$$

از نتایج بدست آمده مشخص است که مشتق کوانتوم از E_q^x دقیقا" با خودش برابر نیست. همچنین اگر در نتیجه بدست آمده (۴۰.۲)، $n \to \infty$ میل دهیم، بدست می‌آوریم:

$$D_q \frac{1}{(1-(1-q)x)_q^n} = \frac{(1-q)[n]}{(1-(1-q)x)_q^{n+1}}$$

و

$$D_q(1 + (1-q)x)_q^n = (1-q)[n](1 + q(1-q)x)_q^{n-1}$$

قضیه ۳.۳.۲. *[۹] اگر $yx = qxy$، که q یک عدد جابجایی برای x و y، سپس داریم:*

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j} \tag{۴۱.۲}$$

برهان. با استقراء روی nداریم، معادله (۴۱.۲) به‌وضوح برای $n = 1$ درست است و با توجه به اینکه،

$y^kx = qy^{k-1}xy = q^2y^{k-2}xy^2 = \cdots = q^kxy^k$ داریم:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n(x+y) = (\sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}x^jy^{n-j})(x+y)\\
&= \sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}x^jy^{n-j}x + \sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}x^jy^{n-j+1}\\
&= \sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}x^j(q^{n-j}xy^{n-j}) + \sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}x^jy^{n-j+1}\\
&= \sum_{j=1}^{n+1}q^{n-j+1}\begin{bmatrix}n\\j-1\end{bmatrix}x^jy^{n-j+1} + \sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}x^jy^{n-j+1}\\
&= x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\left(q^{n-j+1}\begin{bmatrix}n\\j-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}\right)x^jy^{n-j+1} + y^{n+1}\\
&= y^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\left(q^{n-j+1}\begin{bmatrix}n\\j-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}\right)x^jy^{n-j+1} + x^{n+1}
\end{aligned}$$

با توجه به قانون پاسکال کوانتوم (۲.۲۶) داریم:

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1}\begin{bmatrix}n+1\\j\end{bmatrix}x^jy^{n+1-j}$$

در نتیجه داریم:

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}x^jy^{n-j}$$

□

۲.۳.۲ خاصیت جمع‌پذیری در توابع نمایی

در اینجا توجه خود را به این مساله جلب می‌کنیم که به صورت عمومی نمی‌توان گفت که $e_q^xe_q^y \neq e_q^{x+y}$ برقرار است، در صورتی این عبارت برقرار است که مانند فرض قضیه داشته باشیم $yx = qxy$. در ادامه با توجه به این فرض تساوی $e_q^xe_q^y = e_q^{x+y}$ را اثبات می‌کنیم.

برهان.

$$\begin{aligned}
e_q^xe_q^y = \Big(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{[j]!}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{y^k}{[k]!}\Big) &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^jy^k}{[j]![k]!}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[j+k]!}{[j]![k]!}\frac{x^jy^k}{[j+k]!}.
\end{aligned}$$

اگر ما $n = j + k$ قرار دهیم پس برای یک مقدار خاص از n، $0 \le j \le n$ می‌باشد. با استفاده از قضیه (۳.۳.۲) داریم:

$$e_q^x e_q^y = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j}\Big)\frac{1}{[n]!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{[n]!} = e_q^{x+y}.$$

پس در نتیجه داریم:

$$e_q^x e_q^y = e_q^{x+y} \quad if\ yx = qxy. \tag{۴۲.۲}$$

□

همچنین باید بیان کنیم که رابطه جابجایی برای ضرب دو تابع نمایی[۱۰] کوانتومی برقرار نمی‌باشد، یعنی $e_q^x e_q^y \neq e_q^y e_q^x$. همچنین دو تابع e_q^x و E_q^x رابطه دقیقی دارند. از (۳۸.۲) و (۳۹.۲) داریم:

$$e_q^x E_q^{-x} = 1 \tag{۴۳.۲}$$

همچنین با استفاده از (۱.۳) و (۲.۳) داریم:

$$\begin{aligned} e_{\frac{1}{q}}^x &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(1-\frac{1}{q})^j x^j}{(1-\frac{1}{q})(1-\frac{1}{q^2})\cdots(1-\frac{1}{q^j})} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}}\frac{(1-q^j)x^j}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^j)} \end{aligned}$$

و بنابراین داریم:

$$e_{\frac{1}{q}}^x = E_q^x. \tag{۴۴.۲}$$

۳.۳.۲ توابع مثلثاتی کوانتوم

شبه کوانتوم از توابع $sine$ و $cosine$ را می‌توانیم با عبارت اویلر معروف در مورد توابع نمایی تعریف کنیم.

تعریف ۴.۳.۲. [۹]توابع مثلثاتی کوانتوم عبارت هستند از:

$$\sin_q x = \frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2i}, \quad \sin_q^* x = \frac{E_q^{ix} - E_q^{-ix}}{2i} \tag{۴۵.۲}$$

$$\cos_q x = \frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2}, \quad \cos_q^* x = \frac{E_q^{ix} + E_q^{-ix}}{2} \tag{۴۶.۲}$$

[۱۰] exponential function

از (۴۴.۲) داریم $\sin_q^* x = \sin_{\frac{1}{q}} x$ و $\cos_q^* x = \cos_{\frac{1}{q}} x$ همچنین با استفاده از (۴۳.۲) داریم:

$$\cos_q x \cos_q^* x = \frac{e_q^{ix} E_q^{ix} + e_q^{-ix} E_q^{-ix} + 2}{4}$$

و

$$\sin_q x \sin_q^* x = -\frac{e_q^{ix} E_q^{ix} + e_q^{-ix} E_q^{-ix} - 2}{4}$$

بنابراین داریم:

$$\cos_q x \cos_q^* x + \sin_q x \sin_q^* x = 1 \tag{۴۷.۲}$$

که شبه کوانتوم عبارت $sin^2 x + cos^2 x = 1$ می‌باشد. برای پیدا کردن مشتق توبع مثلثاتی کوانتوم با استفاده از (۴۰.۲) بدست می‌آوریم:

$$D_q \sin_q x = \cos_q x, \quad D_q \sin_q^* x = \cos_q^* qx \tag{۴۸.۲}$$

$$D_q \cos_q x = -\sin_q x, \quad D_q \cos_q^* x = -\sin_q^* qx. \tag{۴۹.۲}$$

۴.۲ پاد مشتق یا انتگرال کوانتوم

تعریف ۱.۴.۲. [۹] تابع $F(x)$ یک پاد مشتق[۱۱] $f(x)$ است هرگاه $D_q F(x) = f(x)$، و به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\int f(x)\, d_q x \tag{۵۰.۲}$$

فرض کنید $f(x)$ یک تابع دلخواه می‌باشد. برای ساختن یک پاد مشتق کوانتوم مانند $F(x)$ از عملگر $\hat{M}_q$ استفاده می‌کنیم که بصورت $\hat{M}_q(F(x)) = F(qx)$ عمل می‌کند. پس ما به وسیله تعریف مشق کوانتوم داریم:

$$\frac{1}{(q-1)x}(\hat{M}_q - 1)F(x) = \frac{F(qx) - F(x)}{(q-1)x} = f(x). \tag{۵۱.۲}$$

می‌توان انتگرال کوانتوم را به‌صورت منظم زیر نوشت:

$$F(x) = \frac{1}{1-\hat{M}_q}(1-q)xf(x) = (1-q)\sum_{j=0}^{\infty} \hat{M}_q^j (xf(x)), \tag{۵۲.۲}$$

با استفاده از بسط سری هندسی داریم:

$$\int f(x)\, d_q x = (1-q)x \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x). \tag{۵۳.۲}$$

[۱۱] antiderivative

این سری به انتگرال جکسون[۱۲] از $f(x)$ معروف می‌باشد[۱۵]. با استفاده از (۵۳.۲) فرمول کلی زیر را داریم:

$$\begin{aligned}\int f(x)D_q g(x)\, d_q x &= (1-q)x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x) D_q g(q^j x)\\ &= (1-q)x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x)\frac{g(q^j x)-g(q^{j+1}x)}{(1-q)q^j x},\end{aligned}$$

یا

$$\int f(x)\, d_q g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f(q^j x)(g(q^j x)-g(q^{j+1}x)) \qquad (۵۴.۲)$$

می‌خواهیم بررسی کنیم که انتگرال (۵۳.۲) تحت چه شرایطی به انتگرال کوانتوم همگراست. قضیه زیر شرایط کافی را برای این امر داراست.

قضیه ۲.۴.۲. *فرض کنید $0 < q < 1$ و $|f(x)x^{\alpha}|$ روی بازه $(0, A]$ برای هر $0 \leqslant \alpha < 1$ کراندار باشد. سپس انتگرال‌گیری جکسون تعریف شده به وسیله (۵۳.۲) به یک تابع $F(x)$ روی $(0, A]$ همگراست که انتگرال کوانتوم $f(x)$ می‌باشد. علاوه بر این $F(x)$ در $x = 0$ با $F(0) = 0$ پیوسته است[۹].*

برهان. بدون اثبات می‌پذیریم. □

مثال زیر شکست فرمول جکسون بخاطر برقرار نبودن شرایط قضیه ۲.۴.۲ رانشان می‌دهد.

مثال ۳.۴.۲. انتگرال کوانتومی $f(x) = \frac{1}{x}$ را حساب کنید:

$$D_q \log x = \frac{\log(qx)-\log(x)}{(q-1)x} = \frac{\log q}{q-1}\frac{1}{x}, \qquad (۵۵.۲)$$

ما داریم:

$$\int \frac{1}{x}\, d_q x = \frac{q-1}{\log q}\log x. \qquad (۵۶.۲)$$

بنابراین با استفاده از فرمول جکسون داریم:

$$\int \frac{1}{x}\, d_q x = (1-q)\sum_{j=0}^{\infty} 1 = \infty \qquad (۵۷.۲)$$

فرمول به دلیل اینکه عبارت $f(x)x^{\alpha}$ برای هر $0 < q < 1$ کراندار نیست با شکست مواجه می‌شود. توجه کنید که $\log x$ در $x = 0$ پیوسته نمی‌باشد.

[۱۲] Jackson integral

تعریف ۴.۴.۲. [۹]فرمول جکسون برای انتگرال‌گیری کوانتوم معین : فرض کنید $\circ < a < b$ انتگرال کوانتوم متناهی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_{\circ}^{b} f(x)\, d_q x = (۱-q)b\sum_{j=\circ}^{\infty} q^j f(q^j b) \tag{۵۸.۲}$$

و

$$\int_{a}^{b} f(x)\, d_q x = \int_{\circ}^{b} f(x)\, d_q x - \int_{\circ}^{a} f(x)\, d_q x \tag{۵۹.۲}$$

همچنین داریم:

$$\int_{\circ}^{b} f(x)\, d_q g(x) = \sum_{j=\circ}^{\infty} f(q^j b)(g(q^j b) - g(q^{j+۱} b)) \tag{۶۰.۲}$$

تعریف ۵.۴.۲. انتگرال کوانتوم ناسره از $f(x)$ در $[\circ, a)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_{\circ}^{\infty} f(x)\, d_q x = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{q^{j+۱}}^{q^j} f(x) d_q x; \quad if\ \circ < q < ۱ \tag{۶۱.۲}$$

یا

$$\int_{\circ}^{\infty} f(x)\, d_q x = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{q^j}^{q^{j+۱}} f(x) d_q x; \quad if\ q > ۱ \tag{۶۲.۲}$$

.

گزاره ۶.۴.۲. *انتگرال کوانتوم ناسره تعریف شده در بالا همگراست اگر $x^\alpha f(x)$ کراندار و در همسایگی $x = \circ$ با $\alpha < ۱$ و برای x-های به اندازه کافی بزرگ $\alpha > ۱$ باشد[۹].*

قضیه ۷.۴.۲. *[۹](قضیه اساسی حساب و دیفرانسیل کوانتوم) اگر $F(x)$ یک پاد مشتق $f(x)$ و $F(x)$ در نقطه $x = \circ$ پیوسته باشد داریم:*

$$\int_{a}^{b} f(x)\, d_q(x) = F(b) - F(a), \tag{۶۳.۲}$$

که $\circ \le a < b \le \infty$.

برهان. با توجه به اینکه $F(x)$در نقطه $x = \circ$ پیوسته است در نتیجه فرمول جکسون را می‌توانیم برای آن بنویسیم با اضافه کردن یک ثابت داریم:

$$F(x) = (۱-q)x\sum_{j=\circ}^{\infty} q^j f(q^j x) + F(\circ)$$

بوسیله تعریف داریم:

$$\int_{\circ}^{a} f(x)\, d_q x = (1-q)a \sum_{j=\circ}^{\infty} q^j f(q^j a)$$

داریم:

$$\int_{\circ}^{a} f(x)\, d_q x = F(a) - F(\circ)$$

به صورت مشابه برای b داریم:

$$\int_{\circ}^{b} f(x)\, d_q x = F(b) - F(\circ)$$

بنابراین داریم:

$$\int_{a}^{b} f(x)\, d_q x = \int_{\circ}^{b} f(x)\, d_q x - \int_{\circ}^{a} f(x)\, d_q x = F(b) - F(a)$$

با قرار دادن $a = q^{j+1}(q^j)$ و $b = q^j(q^{j+1})$، که $(q > 1)\ 1 > q > \circ$، و با توجه به تعریف انتگرال ناسره ۵.۴.۲ میبینیم که برای $b = \infty$ اگر $\lim_{x\to\infty} F(x)$ موجود باشد، درست می‌باشد. □

نتیجه ۸.۴.۲. *[۹] اگر $f'(x)$ در یک همسایگی از $x = \circ$ موجود باشد و در $x = \circ$ پیوسته باشد آنگاه $f'(x)$ نشان دهنده مشتق معمولی $f(x)$ می‌باشد و داریم:*

$$\int_{a}^{b} D_q f(x)\, d_q x = f(b) - f(a) \tag{۶۴.۲}$$

فرض کنید که $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند که مشتق معمولی آن‌ها در یک همسایگی از $x = \circ$ موجود و در $x = \circ$ پیوسته است. با استفاده از فرمول (۳.۲) :

$$D_q(f(x)g(x)) = f(qx)(D_q g(x)) + g(x)(D_q f(x)) \tag{۶۵.۲}$$

از آنجا که مجموع توابع مشتق‌پذیر در حساب معمولی مشتق‌پذیر است مامی‌توانیم (۳.۲) را بکار ببریم و بدست می‌آوریم:

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_{a}^{b} f(x)(D_q g(x))\, d_q x + \int_{a}^{b} g(qx)(D_q f(x))\, d_q x,$$

یا

$$\int_{a}^{b} f(x)\, d_q g(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_{a}^{b} g(qx) d_q f(x), \tag{۶۶.۲}$$

که به فرمول انتگرال‌گیری کوانتوم جزءبه‌جزء معروف است و برای $b = \infty$ جواب می‌دهد.

فصل ۳

روش تجزیه آدومیان تعمیم یافته

۱.۳ روشی برای تجزیه آدومیان

حال با یک مثال به شرح این روش می‌پردازیم. بیشتر تعاریف و قضایای این فصل از مرجع [۵] برداشته شده است.
معادله دیفرانسیل غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{d^{2}}{dx^{2}}y(x) - N(y(x)) = 0, \quad a \leq x \leq b \tag{۱.۳}$$

که با شرایط مرزی رابین[1] داده شده است:

$$py(a) + ry'(a) = \alpha \tag{۲.۳}$$

$$qy(b) + sy'(b) = \beta \tag{۳.۳}$$

که $N(y(x))$ یک تابع غیرخطی و p, q, r, s در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$ps - qr + pq(b-a) \neq 0 \tag{۴.۳}$$

که اگر $p, q, s \geq 0$ و $r \leq 0$
(الف) p, r با هم صفرنشوند.
(ب) q, s با هم صفر نشوند.
(ج) q, p با هم صفر نشوند.
آن‌گاه همواره داریم:

$$ps - qr + pq(b-a) > 0$$

[1] Robin boundary condition

حال براساس (۱.۳) و روش آدومیان کلاسیک داریم:

$$Ly = Ny, \quad a \leq x \leq b \tag{۵.۳}$$

حال $L(\cdot) = \frac{d^2}{dx^2}(\cdot)$ و ما عملگر $L_{a,a}^{-1}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_{a,a}^{-1}(\cdot) = \int_a^x \int_a^x (\cdot)\, dX dX \tag{۶.۳}$$

حال با اعمال (۶.۳) روی (۵.۳) داریم:

$$L_{a,a}^{-1}(Ly) = L_{a,a}^{-1}(Ny)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_a^x \int_a^x \frac{d^2}{dx^2} y(x)\, dX dX &= \int_a^x (y'(x) - y'(a))\, dX \\ &= \int_a^x y'(x)\, dX - \int_a^x y'(a)\, dX \\ &= y(x) - y(a) - (x-a)y'(a) \\ &= L_{a,a}^{-1}(Ny) \end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$y(x) - y(a) - (x-a)y'(a) = L_{a,a}^{-1}(Ny) \tag{۷.۳}$$

حال مقدار $y(x)$ را در (۷.۳) در نقطه $x = b$ محاسبه می‌کنیم:

$$y(b) = y(a) + y'(a)(b-a) + [L_{a,a}^{-1} Ny]_{x=b} \tag{۸.۳}$$

که

$$[L_{a,a}^{-1}(\cdot)]_{x=b} = \int_a^b \int_a^x (\cdot)\, dX dX$$

با مشتق‌گیری از (۷.۳) و محاسبه $y'(x)$ در $x = b$ داریم:

$$y'(b) = y'(a) + \int_a^b Ny(x)\, dX \tag{۹.۳}$$

با قرار دادن (۸.۳) و (۹.۳) در (۳.۳) داریم:

$$q\Big(y(a) + y'(a)(b-a) + [L_{a,a}^{-1} Ny]_{x=b}\Big) + s\Big(y'(a) + \int_a^b Ny\, dX\Big) = \beta$$

با بازکردن فرمول بالا داریم:

$$qy(a) + \Big(q(b-a) + s\Big)y'(a) = \beta - q[L_{a,a}^{-1} Ny]_{x=b} - s\int_a^b Ny\, dX \tag{۱۰.۳}$$

با دستگاه دو معادله و دو مجهولی زیر که از معادله (۱۰.۳) و (۲.۳) پدید می‌آید داریم:

$$\begin{cases} qy(a) + \Big(q(b-a)+s\Big)y'(a) = \beta - q[L_{a,a}^{-1}Ny]_{x=b} - s\int_a^b Ny\,dX \\ py(a) + ry'(a) = \alpha \end{cases} \tag{۱۱.۳}$$

حال برای اینکه این دو معادله از هم مستقل خطی باشند تا از طریق یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی بتوانیم جوابی یکتا بدست آوریم باید:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & r \\ q & q(b-a)+s \end{vmatrix} = ps - qr + pq(b-a), \tag{۱۲.۳}$$

که با توجه به (۴.۳) استقلال خطی وجود دارد. حال با حل دستگاه (۱۱.۳) داریم:

$$y(a) = \frac{1}{\Delta}\Big(q\alpha(b-a) + s\alpha - r\beta + qr[L_{a,a}^{-1}Ny]_{x=b} + rs\int_a^b Ny\,dX\Big), \tag{۱۳.۳}$$

$$y'(a) = \frac{1}{\Delta}\Big(p\beta - q\alpha - pq[L_{a,a}^{-1}Ny]_{x=b} - ps\int_a^b Ny\,dX\Big). \tag{۱۴.۳}$$

با جایگذاری (۱۳.۳) و (۱۴.۳) در (۷.۳) داریم:

$$\begin{aligned} y(x) = {} & \frac{1}{\Delta}\Big(s\alpha - r\beta + p\beta(x-a) + q\alpha(b-x)\Big) + L_{a,a}^{-1}Ny \\ & - \frac{p(x-a)-r}{\Delta}\Big(q[L_{a,a}^{-1}Ny]_{x=b} + s\int_a^b Ny\,dX\Big) \end{aligned} \tag{۱۵.۳}$$

که در آن هر ضریب نامعین یا نامشخص آزاد است و از طریق صورت مسأله مشخص می‌شود و جزء مفروضات مسأله می‌باشد. حال با استفاده از روش تجزیه آدومیان و شرایط آن داریم:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x), \qquad Ny(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{۱۶.۳}$$

با جایگذاری (۱۶.۳) و (۱۵.۳) و شرایط تجزیه آدومیان داریم:

$$y_0(x) = \frac{1}{\Delta}\Big(s\alpha - r\beta + p\beta(x-a) + q\alpha(b-x)\Big), \tag{۱۷.۳}$$

$$y_n(x) = L_{a,a}^{-1}Ny - \frac{p(x-a)-r}{\Delta}\Big(q[L_{a,a}^{-1}Ny]_{x=b} + s\int_a^b Ny\,dX\Big), \quad n \geq 1, \tag{۱۸.۳}$$

در نتیجه:

$$\varphi_m(x) = \sum_{n=0}^{m-1} y_n(x), \qquad n \geq 1 \tag{۱۹.۳}$$

که:

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_m(x) = y(x) \tag{۲۰.۳}$$

شکل چند مرحله‌ای روش تجزیه آدومیان

حال ما می‌خواهیم به کار اصلی خود یعنی تشریح شکل چندمرحله‌ای روش تجزیه آدومیان برای مسأله غیرخطی با شرایط مرزی بپردازیم. در ابتدا بازه $[a,b]$ را به N زیربازه تقسیم می‌کنیم:

$$a = x_۰ < x_۱ < x_۲ < \cdots < x_i < \cdots < x_N = b.$$

فرض کنیم $i = ۱, ۲, \cdots, N-۱$ و $y(x_i) = \eta_i$ مقادیری از نقاط درونی را به همین شکل در نظر بگیرید که نشان دهنده $N-۱$، ضریب نامعین است. در زیربازه چپ $[a, x_۱]$، ما مسأله مقدار مرزی را با ترکیبی از شرایط مرزی دیریکله و رابین حل می‌کنیم.

$$Ly = Ny, \qquad a \leq x \leq x_۱, \tag{۲۱.۳}$$

$$py(a) + ry'(a) = \alpha, \qquad y(x_۱) = \eta_۱ \tag{۲۲.۳}$$

و مرحله m−ام تقریب به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\varphi_m^{(۱)}(x) = \varphi_m^{(۱)}(x;\eta_۱) = \sum_{k=۰}^{m-۱} y_k^{(۱)}(x)$$

و همچنین در زیربازه‌های درونی $[x_{i-۱}, x_i], \ i = ۲, ۳, \cdots, N-۱$ ما مسأله مقدار مرزی را با مجموعه‌ای از شرایط مرزی دیریکله حل می‌کنیم:

$$Ly = Ny, \qquad x_{i-۱} \leq x \leq x_i, \tag{۲۳.۳}$$

$$y(x_{i-۱}) = \eta_{i-۱}, \qquad y(x_i) = \eta_i \tag{۲۴.۳}$$

و مرحله m−ام تقریب به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\varphi_m^{(i)}(x) = \varphi_m^{(i)}(x;\eta_{i-۱},\eta_i) = \sum_{k=۰}^{m-۱} y_k^{(i)}(x), \qquad i = ۲, ۳, \cdots, N-۱.$$

در زیربازه سمت راست هم که به‌صورت $[x_{N-۱}, b]$ مسأله مقدار مرزی را با ترکیبی از شرایط مرزی رابین و دیریکله حل می‌کنیم:

$$Ly = Ny, \qquad x_{N-۱} \leq x \leq b, \tag{۲۵.۳}$$

$$y(x_{N-۱}) = \eta_{N-۱}, \qquad qy(b) + sy'(b) = \beta \tag{۲۶.۳}$$

و مرحله m−ام تقریب به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\varphi_m^{(N)}(x) = \varphi_m^{(N)}(x;\eta_{N-۱}) = \sum_{k=۰}^{m-۱} y_k^{(N)}(x).$$

با توجه به پیوستگی کل بازه داریم:

$$\frac{d\varphi_m^{(i)}}{dx}(x_i) = \frac{d\varphi_m^{(i+۱)}}{dx}(x_i), \qquad i = ۱, ۲, \cdots, N-۱, \tag{۲۷.۳}$$

به‌صورت پی‌درپی تطبیق می‌دهیم و $N-۱$ ضریب $\eta_۱, \eta_۲, \cdots, \eta_{N-۱}$ را بدست می‌آوریم[۱۱]. همچنین باید یادآوری کنیم که اگر m افزایش یابد، جواب‌هایی که برای ضریب $\eta_۱, \eta_۲, \cdots, \eta_{N-۱}$ بدست می‌آید، نزدیکتر به جواب واقعی است. مانشان می‌دهیم که $\eta_k[\varphi_m]$ که تقریبی از مقدار واقعی η_k به وسیله تطبیق $\varphi_m^{(i)}(x),\ i = ۱, ۲, \cdots N$ مطابق معادله (۲۷.۳) بدست می‌آید.
سپس با ترکیب $\varphi_m^{(۱)}(x, \eta_۱[\varphi_m]), \varphi_m^{(۲)}(x, \eta_۱[\varphi_m], \eta_۲[\varphi_m]), \cdots, \varphi_m^{(N)}(x, \eta_{N-۱}[\varphi_m])$ حاصل تقریب $m-$امین مرحله از جواب بدست می‌آید، در نتیجه با استفاده از تابع پله ای[۲] نتیجه به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\varphi_m(x) = \sum_{i=۱}^{N} \varphi_m^{(i)}(x)\Pi(x; x_{i-۱}, x_i), \tag{۲۸.۳}$$

که تابع پله‌ای را با کمک تابع هویساید به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Pi(x; x_{i-۱}, x_i) = H(x; x_{i-۱}) - H(x; x_i) \tag{۲۹.۳}$$

که:

$$H(x; x_{i-۱}) = \begin{cases} ۰ & x < x_{i-۱}, \\ ۱ & x \geq x_{i-۱}. \end{cases} \quad , \qquad H(x; x_i) = \begin{cases} ۰ & x < x_i, \\ ۱ & x \geq x_i. \end{cases} \tag{۳۰.۳}$$

حال حالت‌های مختلف شرایط مرزی را برای مسأله با شرایط مرزی (۱.۳) و(۲.۳) و(۳.۳) بیان می‌کنیم

حالت ۱. [۱۱]شرایط مرزی دیریکله

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \tag{۳۱.۳}$$

مطابق با شرایط مرزی (۲.۳) و (۳.۳) اگر قرار دهیم $p = q = ۱$ و $r = s = ۰$ در نتیجه $\Delta = b - a$ و معادله (۱۵.۳) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$y(x) = \frac{\beta(x-a) + \alpha(b-x)}{b-a} + L_{a,a}^{-۱}Ny(x) - \frac{x-a}{b-a}[L_{a,a}^{-۱}Ny(x)]_{x=b}. \tag{۳۲.۳}$$

حالت ۲. [۱۱]ترکیبی از شرایط مرزی رابین و دیریکله

$$py(a) + ry'(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \tag{۳۳.۳}$$

مطابق با شرایط مرزی (۲.۳) و (۳.۳) اگر قرار دهیم $q = ۱$ و $s = ۰$ در نتیجه $\Delta = p(b-a) - r$ و معادله (۱۵.۳) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$y(x) = \frac{\alpha(b-x) + p\beta(x-a) - r\beta}{p(b-a) - r} + L_{a,a}^{-۱}Ny(x) - \frac{p(x-a) - r}{p(b-a) - r}[L_{a,a}^{-۱}Ny(x)]_{x=b}. \tag{۳۴.۳}$$

---
[۲] boxcar

حالت ۳. [۱۱]ترکیبی از شرایط مرزی رابین و نویمن

$$py(a) + ry'(a) = \alpha, \quad y'(b) = \beta, \tag{۳۵.۳}$$

مطابق با شرایط مرزی (۲.۳) و (۳.۳) اگر قرار دهیم $q = ۰$ و $s = ۱$ در نتیجه $\Delta = p$ و معادله (۱۵.۳) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$y(x) = \beta(x-a) + \frac{\alpha - r\beta}{p} + L_{a,a}^{-۱} Ny(x) - \frac{p(x-a)-r}{p}\int_a^b Ny(x)\,dX. \tag{۳۶.۳}$$

سایر عملگرهای خطی معکوس را در زیر آوردیم:

$$L_{b,b}^{-۱}(\cdot) = \int_b^x \int_b^x (\cdot)\,dX dX, \tag{۳۷.۳}$$

$$L_{a,b}^{-۱}(\cdot) = \int_a^x \int_b^x (\cdot)\,dX dX, \tag{۳۸.۳}$$

$$L_{b,a}^{-۱}(\cdot) = \int_b^x \int_a^x (\cdot)\,dX dX. \tag{۳۹.۳}$$

با استفاده از عملگر $L_{b,b}^{-۱}(.)$ و (۵.۳) داریم:

$$L_{b,b}^{-۱}(Ly(x)) = L_{b,b}^{-۱}(Ny(x))$$

$$\begin{aligned}
\int_b^x \int_b^x \frac{d^۲}{dx^۲} y(x)\,dX dX &= \int_b^x (y'(x) - y'(b))\,dX \\
&= \int_b^x y'(x)\,dx - \int_b^x y'(b)\,dX \\
&= y(x) - y(b) - (x-b)y'(b) \\
&= L_{b,b}^{-۱}(Ny(x))
\end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$y(x) - y(b) - (x-b)y'(b) = L_{b,b}^{-۱}(Ny(x)) \tag{۴۰.۳}$$

با استفاده از الگوریتم پیاده شده از (۱.۳) تا(۲۰.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
y(x) = {} & \frac{۱}{\Delta}\Big(s\alpha - r\beta + p\beta(x-a) + q\alpha(b-x)\Big) + L_{b,b}^{-۱} Ny(x) \\
& + \frac{q(x-b)-s}{\Delta}\Big(p[L_{b,b}^{-۱} Ny(x)]_{x=a} + r\int_b^a Ny(x)\,dX\Big),
\end{aligned} \tag{۴۱.۳}$$

و همچنین:

$$\begin{aligned}
y_۰(x) &= \frac{۱}{\Delta}\Big(s\alpha - r\beta + p\beta(x-a) + q\alpha(b-x)\Big), \\
y_n(x) &= L_{b,b}^{-۱} A_{n-۱} + \frac{q(x-b)-s}{\Delta}\Big(p[L_{b,b}^{-۱} A_{n-۱}]_{x=a} + r\int_b^a A_{n-۱}\,dX\Big), \quad n \geq ۱,
\end{aligned} \tag{۴۲.۳}$$

همچنین در مرحله‌ی بعد با به‌کار بردن عملگر $L_{a,b}^{-1}(.)$ برای معادله (۵.۳) داریم:

$$y(x) - y(a) - (x-a)y'(b) = L_{a,b}^{-1}(Ny(x)) \tag{۴۳.۳}$$

حال مقدار $y(x)$ را در (۷.۳) در نقطه $x = b$ محاسبه می‌کنیم:

$$y(b) = y(a) + y'(b)(b-a) + [L_{a,b}^{-1}Ny(x)]_{x=b} \tag{۴۴.۳}$$

که

$$[L_{a,b}^{-1}(.)]_{x=b} = \int_a^b \int_b^x (.)\, dX dX \tag{۴۵.۳}$$

آنگاه $y'(x)$ را در $x = b$ داریم:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_b^x y''(x)\, dX dX &= \int_a^b \int_b^x Ny(x)\, dX dX \\
\int_b^x y''(x)\, dX &= \int_b^x Ny(x)\, dX \\
y'(X)\Big|_b^x &= \int_b^x Ny(x)\, dX \\
y'(x) &= y'(b) + \int_b^x Ny(x)\, dX
\end{aligned}$$

$$\xrightarrow{x=a} y'(a) = y'(b) + \int_b^a Ny(x)\, dX \tag{۴۶.۳}$$

حال با قرار دادن (۴۳.۳) و (۴۶.۳) در (۲.۳) و (۳.۳) داریم:

$$\begin{cases} qy(a) + \Big(q(b-a)+s\Big)y'(b) = \beta - q[L_{a,b}^{-1}Ny(x)]_{x=b} \\ py(a) + ry'(b) = \alpha - r\int_a^b Ny(x)\, dX \end{cases} \tag{۴۷.۳}$$

دستگاه فوق مستقل خطی می‌باشد. با حل دستگاه معادله بالا وبدست آوردن $y(a)$ و $y'(b)$ و جایگذاری آن در (۴۳.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
y(x) = {}& \frac{1}{\Delta}\Big(s\alpha - r\beta + p\beta(x-a) + q\alpha(b-x)\Big) + L_{a,b}^{-1}Ny(x) \\
& - \frac{pq(x-a) - qr}{\Delta}[L_{a,b}^{-1}Ny(x)]_{x=b} - \frac{rs + qr(b-x)}{\Delta}\int_a^b Ny(x)\, dX.
\end{aligned} \tag{۴۸.۳}$$

از معادله (۴۸.۳) و شکل بازگشتی مطابق (۴۲.۳) داریم:

$$y_0(x) = \frac{1}{\Delta}\Big(s\alpha - r\beta + p\beta(x-a) + q\alpha(b-x)\Big),$$

$$y_n(x) = L_{a,b}^{-1} A_{n-1}(x) - \frac{1}{\Delta}\Big(q(p(x-a)-r)[L_{a,b}^{-1} A_{n-1}(x)]_{x=b} + r(q(b-x)+s)\int_a^b A_{n-1}(x)\, dX\Big),\ n \geq 1. \quad (۳.۴۹)$$

و همچنین با به‌کار بردن عملگر $L_{b,a}^{-1} Ny(x)$ روی معادله (۳.۵) داریم:

$$y(x) - y(b) - (x-b)y'(a) = L_{b,a}^{-1}(Ny(x)) \quad (۳.۵۰)$$

با استفاده از روش عملگر مشابه قبل برای عملگر $L_{a,b}^{-1} Ny(x)$ داریم:

$$y(x) = \frac{1}{\Delta}\Big(s\alpha - r\beta + p\beta(x-a) + q\alpha(b-x)\Big) + L_{b,a}^{-1} Ny(x) + \frac{pq(x-b)-ps}{\Delta}[L_{b,a}^{-1} Ny(x)]_{x=a} + \frac{ps(a-x)+rs}{\Delta}\int_a^b Ny(x)\, dX. \quad (۳.۵۱)$$

از معادله (۳.۵۱) و شکل بازگشتی مطابق (۳.۴۲) داریم:

$$y_0(x) = \frac{1}{\Delta}\Big(s\alpha - r\beta + p\beta(x-a) + q\alpha(b-x)\Big),$$

$$y_n(x) = L_{b,a}^{-1} A_{n-1}(x) + \frac{1}{\Delta}\Big(p(q(x-b)-s)[L_{b,a}^{-1} A_{n-1}(x)]_{x=a} + s(p(a-x)+r)\int_a^b A_{n-1}(x)\, dX\Big),\ n \geq 1. \quad (۳.۵۲)$$

حالت ۴. [۱۱]ترکیبی از شرایط مرزی دیریکله و رابین

$$y(a) = \alpha, \quad qy(b) + sy'(b) = \beta, \quad (۳.۵۳)$$

مطابق با شرایط مرزی (۳.۲) و (۳.۳) اگر قرار دهیم $p = 1$ و $r = 0$ در نتیجه $\Delta = q(b-a)+s$ و معادله (۳.۱۵) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$y(x) = \frac{\beta(a-x) + q\alpha(x-b) - s\alpha}{q(a-b)-s} + L_{b,b}^{-1} Ny(x) - \frac{q(x-b)-s}{q(a-b)-s}[L_{b,b}^{-1} Ny(x)]_{x=a}. \quad (۳.۵۴)$$

حالت ۵. [۱۱]ترکیبی از شرایط مرزی نویمن و رابین

$$y'(a) = \alpha, \quad qy(b) + sy'(b) = \beta, \quad (۳.۵۵)$$

مطابق با شرایط مرزی (۳.۲) و (۳.۳) اگر قرار دهیم $p = 0$ و $r = 1$ در نتیجه $\Delta = -q$ و معادله (۳.۱۵) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$y(x) = \alpha(x-b) + \frac{\beta - s\alpha}{q} + L_{b,b}^{-1} Ny(x) - \frac{q(x-b)-s}{q}\int_b^a Ny(x)\, dX. \quad (۳.۵۶)$$

حالت ۶. [۱۱]ترکیبی از شرایط مرزی دیریکله و نویمن

$$y(a)=\alpha, \quad y'(b)=\beta, \tag{۵۷.۳}$$

مطابق با شرایط مرزی (۲.۳) و (۳.۳) اگر قرار دهیم $q=r=0$ و $p=s=1$ در نتیجه $\Delta=1$ و از معادله (۴۳.۳) داریم:

$$y(x)=\alpha+\beta(x-a)+L_{a,b}^{-1}Ny(x). \tag{۵۸.۳}$$

حالت ۷. [۱۱]ترکیبی از شرایط مرزی نویمن و دیریکله

$$y'(a)=\alpha, \quad y(b)=\beta, \tag{۵۹.۳}$$

مطابق با شرایط مرزی (۲.۳) و (۳.۳) اگر قرار دهیم $q=r=1$ و $p=s=0$ در نتیجه $\Delta=-1$ و از معادله (۵۰.۳) داریم:

$$y(x)=\beta+\alpha(x-b)+L_{b,a}^{-1}Ny(x). \tag{۶۰.۳}$$

مثال ۱.۱.۳. معادله غیرخطی

$$y''(x)=-e^{-2y}, \quad 0\leq x\leq 1, \tag{۶۱.۳}$$

را با شرایط مرزی نیومن زیر حل کنید:

$$\begin{cases} y'(0)=1 \\ y'(1)=\frac{1}{2} \end{cases} \tag{۶۲.۳}$$

جواب دقیق مساله $y^*(x)=\log(1+x)$ می‌باشد و برای این مساله با شرایط مرزی داریم $a=0$ $b=1, p=0, q=0, r=1, s=1, \alpha=1, \beta=\frac{1}{2}$ و $\Delta=0$. به علت صفر شدن عبارت دلتا ما نمی‌توانیم معادله شرایط مرزی را با روش یک مرحله‌ای آدومیان حل کنیم در نتیجه به شکل چند مرحله‌ای آن رجوع می‌کنیم.
حال این مثال را با روش آدومیان چندمرحله‌ای حل می‌کنیم. ابتدا بازه را تظریف می‌کنیم و بازه $[0,1]$ به دو زیربازهٔ $[0,\frac{1}{2}]$ و $[\frac{1}{2},1]$ تقسیم می‌کنیم. فرض کنید $y(\frac{1}{2})=\eta$، سپس دو زیرمساله مقدار مرزی زیر را حل می‌کنیم
مساله

$$y''(x)=-e^{-2y}, \quad 0\leq x\leq \frac{1}{2} \tag{۶۳.۳}$$

با شرایط مرزی نیومن و دیریکله زیر

$$\begin{cases} y'(0)=1 \\ y(\frac{1}{2})=\eta \end{cases} \tag{۶۴.۳}$$

و مساله

$$y''(x) = -e^{-2y}, \quad \frac{1}{2} \le x \le 1 \qquad (۶۵.۳)$$

با شرایط مرزی دیریکله و نیومن زیر

$$\begin{cases} y(\frac{1}{2}) = \eta \\ y'(1) = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (۶۶.۳)$$

برای مساله غیرخطی با شرایط مرزی دیریکله (۶۳.۳) و (۶۴.۳) روی بازه $[0, \frac{1}{2}]$ داریم $a = 0, b = \frac{1}{2},$ $p = 1, q = 0, r = 0, s = 1, \alpha = 1, \beta = \eta$ و $\Delta = 1$ بنابراین براساس معادله (۶۰.۳) داریم:

$$y(x) = \eta + x - 0/5 + L^{-1}_{0/5,0} Ny \qquad (۶۷.۳)$$

با استفاده از الگوریتم روش آدومیان و با پیروی از شکل بازگشتی آن داریم:

$$y_0(x) = \eta - 0/5 + x$$
$$y_n(x) = L^{-1}_{0/5,0} A_{n-1}, \quad n \ge 1$$

و چندجمله‌ای آدومیان برای عامل غیرخطی $Ny = -e^{-2y}$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$A_0 = -e^{-2y_0}$$
$$A_1 = 2e^{-2y_0} y_1$$
$$A_2 = -2e^{-2y_0} y_1^2 + 2e^{-2y_0} y_2,$$
$$\vdots$$

حال بدست می‌آوریم:

$$y_0(x) = \eta - 0/5 + x$$
$$y_1(x) = \frac{1}{4}e^{-2\eta+1} + \frac{1}{4}e^{-2\eta} - \frac{1}{2}e^{-2\eta+1}x - \frac{1}{4}e^{-2\eta+1-2x}$$
$$y_2(x) = \frac{1}{8}e^{-4\eta+1} + \frac{1}{16}e^{-4\eta+2} - \frac{3}{32}e^{-4\eta} - \frac{1}{32}e^{-4\eta+2-4x}$$
$$- \frac{1}{4}e^{-4\eta+2-2x} - \frac{1}{8}e^{-4\eta+2-2x} + \frac{1}{8}e^{-4\eta+1-2x} + \frac{1}{4}e^{-4\eta+1}x - \frac{1}{4}e^{-4\eta+2}x$$
$$\vdots$$

حال ما تقریبی از $\varphi_m(x) = \sum_{n=0}^{m-1} y_n(x)$ تا مرتبه سوم محاسبه می‌کنیم در نتیجه داریم:

$$\varphi_3^{(1)} = \frac{1}{32}(-8x - 4)e^{-4a+2-2x} + \frac{1}{8}e^{-4a+1-2x} - \frac{1}{32}e^{-4a+2-4x} - \frac{1}{4}e^{-2a+1-2x}$$
$$+ \frac{1}{32}(8x + 4)e^{-4a+1} + \frac{1}{32}(2 - 4x)e^{-4a+2} + \frac{1}{32}(-16x + 8)e^{-2a+1} + a$$
$$+ x - \frac{3}{32}e^{-4a} + \frac{1}{4}e^{-2a} - \frac{1}{2}$$

یا

$$y(x) \approx \frac{۱}{۳۲}(-۸x-۴)e^{-۴a+۲-۲x}+\frac{۱}{۸}e^{-۴a+۱-۲x}-\frac{۱}{۳۲}e^{-۴a+۲-۴x}-\frac{۱}{۴}e^{-۲a+۱-۲x}$$
$$+\frac{۱}{۳۲}(۸x+۴)e^{-۴a+۱}+\frac{۱}{۳۲}(۲-۴x)e^{-۴a+۲}+\frac{۱}{۳۲}(-۱۶x+۸)e^{-۲a+۱}+a$$
$$+x-\frac{۳}{۳۲}e^{-۴a}+\frac{۱}{۴}e^{-۲a}-\frac{۱}{۲}$$

حال مساله غیرخطی با شرایط مرزی دیریکله (۶۵.۳) و (۶۶.۳) را روی بازه $[\frac{۱}{۲},۱]$ حل می‌کنیم در نتیجه داریم $a=\frac{۱}{۲}, b=۱, p=۱, q=۰, r=۰, s=\frac{۱}{۲}, \alpha=\eta, \beta=\frac{۱}{۲}$ و $\Delta=\frac{۱}{۲}$ بنابراین براساس معادله (۵۸.۳) داریم:

$$y(x)=\eta+\frac{۱}{۲}(x-\frac{۱}{۲})+L^{-۱}_{۰/۵,۱}Ny \qquad (۶۸.۳)$$

با استفاده از الگوریتم روش آدومیان و با پیروی از شکل بازگشتی آن داریم:

$$y_۰(x)=\eta+\frac{۱}{۲}(x-\frac{۱}{۲})$$
$$y_n(x)=L^{-۱}_{۰/۵,۱}A_{n-۱}, \quad n\geq ۱$$

مانند قسمت قبل چندجمله‌ای آدومیان برای عامل غیرخطی $Ny=-e^{-۲y}$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$A_۰=-e^{-۲y_۰}$$
$$A_۱=۲e^{-۲y_۰}y_۱$$
$$A_۲=-۲e^{-۲y_۰}y_۱^۲+۲e^{-۲y_۰}y_۲,$$
$$\vdots$$

حال بدست می‌آوریم:

$$y_۰(x)=\eta+\frac{۱}{۲}(x-\frac{۱}{۲})$$
$$y_۱(x)=\frac{۱}{۲}e^{-\frac{۱}{۲}-۲\eta}-e^{\frac{۱}{۲}-x-۲\eta}+e^{-۲\eta}-e^{-\frac{۱}{۲}-۲\eta}x$$
$$y_۲(x)=۲e^{-۱-۴\eta}+۳e^{-\frac{۱}{۲}-۴\eta}-\frac{۱}{۲}e^{۱-۲x-۴\eta}-۳e^{-x-۴\eta}$$
$$+۲e^{\frac{۱}{۲}-x-۴\eta}-\frac{۳}{۲}e^{-۴\eta}-۴e^{-۱-۴\eta}x+۲e^{-\frac{۱}{۲}-۴\eta}x-۲e^{-x-۴\eta}x$$
$$\vdots$$

حال ما تقریبی از $\varphi_m(x)=\sum_{n=0}^{m-1} y_n(x)$ تا مرتبه سوم محاسبه می‌کنیم در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}\varphi_3^{(2)} &= y_0(x)+y_1(x)+y_2(x)=\eta+\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}-2\eta}-e^{\frac{1}{2}-x-2\eta}\\ &+e^{-2\eta}-e^{-\frac{1}{2}-2\eta}x+2e^{-1-4\eta}+3e^{-\frac{1}{2}-4\eta}-\frac{1}{2}e^{1-2x-4\eta}-3e^{-x-4\eta}\\ &+2e^{\frac{1}{2}-x-4\eta}-\frac{3}{2}e^{-4\eta}-4e^{-1-4\eta}x+2e^{-\frac{1}{2}-4\eta}x-2e^{-x-4\eta}x\end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned}y(x)&\approx\eta+\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}-2\eta}-e^{\frac{1}{2}-x-2\eta}\\ &+e^{-2\eta}-e^{-\frac{1}{2}-2\eta}x+2e^{-1-4\eta}+3e^{-\frac{1}{2}-4\eta}-\frac{1}{2}e^{1-2x-4\eta}\\ &-3e^{-x-4\eta}+2e^{\frac{1}{2}-x-4\eta}-\frac{3}{2}e^{-4\eta}-4e^{-1-4\eta}x+2e^{-\frac{1}{2}-4\eta}x-2e^{-x-4\eta}x\end{aligned}$$

بوسیله پیوستگی در کل بازه و تطابق مشتق معادلات در نقاط درونی داریم:

$$\left.\frac{d\varphi_3^{(1)}(x;\eta)}{dx}\right|_{x=\frac{1}{2}}=\left.\frac{d\varphi_3^{(2)}(x;\eta)}{dx}\right|_{x=\frac{1}{2}} \tag{۶۹.۳}$$

حال با کمک نرم‌افزار maple جواب را بدست می‌آوریم که $\eta[\varphi_3]=0/389312405$ حال ما تقریبی از مرتبه سوم جواب معادله (۶۱.۳) و (۶۲.۳) رابیان می‌کنیم:

$$\varphi_3(x)=\varphi_3^{(1)}(x)\Pi(x;0,\frac{1}{2})+\varphi_3^{(2)}(x)\Pi(x;\frac{1}{2},1).$$

از این‌رو

$$\Pi(x;0,\frac{1}{2})=H(x;0)-H(x;\frac{1}{2})$$

و

$$\Pi(x;\frac{1}{2},1)=H(x;\frac{1}{2})-H(x;1)$$

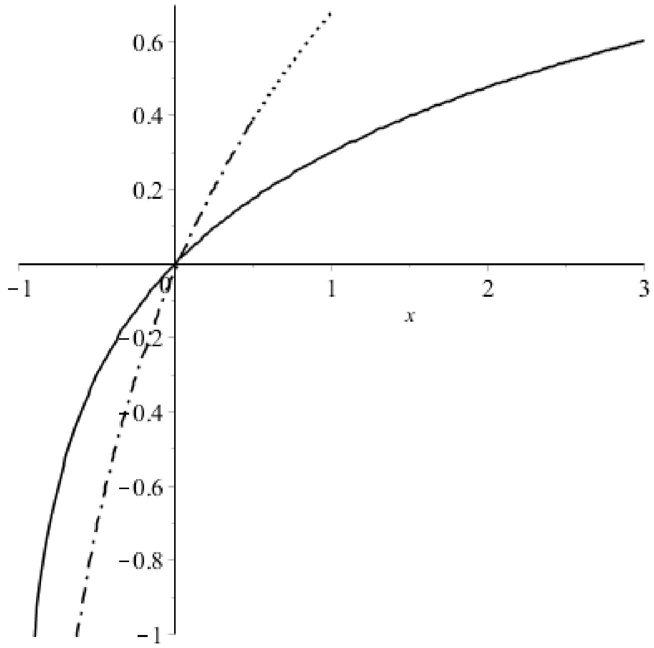
که

$$H(x;0)=\begin{cases}0 & x<0,\\ 1 & x\geq 0.\end{cases}\qquad H(x;\frac{1}{2})=\begin{cases}0 & x<\frac{1}{2},\\ 1 & x\geq \frac{1}{2}.\end{cases}\qquad H(x;1)=\begin{cases}0 & x<1,\\ 1 & x\geq 1.\end{cases}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\varphi_3(x)&=\Big(\frac{1}{32}(-8x-4)e^{(0/4-2x)}+\frac{1}{8}e^{(-0/5-2x)}-\frac{1}{32}e^{(0/4-4x)}-\frac{1}{4}e^{(0/2-2x)}\\ &+0/3x+0/4\Big)\Pi(x;0,\frac{1}{2})+\Big(0/9+0/1x-e^{(-0/27-x)}-\frac{1}{2}e^{(-0/5-2x)}\\ &-3e^{(-x-1/5)}+2e^{(-1/05-x)}-2e^{(-x-1/5)}x\Big)\Pi(x;\frac{1}{2},1).\end{aligned}$$

حال ما نمودار جواب روش تحلیلی و روش آدومیان چندمرحله‌ای را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم تا دقت روش چند مرحله‌ای را نشان دهیم:



شکل ۳.۱: نمودار جواب روش آدومیان چندمرحله‌ای[۱ ,۵/۰] (نقطه) و نمودار جواب روش آدومیان چندمرحله‌ای [۵/۰ ,۰] (نقطه و خط) و نمودار جواب روش تحلیلی(خط)

مثال ۳.۱.۲. معادله غیرخطی

$$\frac{d^{۲}}{dx^{۲}}y(x) = \frac{۱}{۲}e^{-x}\big(y^{۲}(x) + (y'(x))^{۲}\big), \quad ۰ \le x \le ۱ \tag{۳.۷۰}$$

را با شرایط مرزی رابین زیر حل کنید:

$$\begin{cases} y(۰) - y'(۰) = ۰ \\ y(۱) + y'(۱) = ۲e \end{cases} \tag{۳.۷۱}$$

جواب دقیق مساله $y^*(x) = e^x$ می‌باشد و برای این مساله با شرایط مرزی داریم $a = ۰, b = ۱,$ $p = ۱, q = ۱, r = -۱, s = ۱, \alpha = ۰, \beta = ۲e$ و $\Delta = ۳$ بنابراین براساس معادله (۳.۱۵) داریم:

(۳.۷۲)

$$y(x) = \frac{۲e + ۲ex}{۳} - \frac{۱ + x}{۶}[L_{۰,۰}^{-۱}e^{-x}Ny]_{x=۱} - \frac{۱ + x}{۶}\int_{۰}^{۱} e^{-x}Ny\, dX + \frac{۱}{۲}L_{۰,۰}^{-۱}e^{-x}Ny.$$

با استفاده از الگوریتم روش آدومیان و با پیروی از شکل بازگشتی آن داریم:

$$y_{۰}(x) = \frac{۲e + ۲ex}{۳}$$

$$y_{۱}(x) = -\frac{۱ + x}{۶}[L_{۰,۰}^{-۱}e^{-x}A_{۰}]_{x=۱} - \frac{۱ + x}{۶}\int_{۰}^{۱} e^{-x}A_{۰}\, dX + \frac{۱}{۲}L_{۰,۰}^{-۱}e^{-x}A_{۰}$$

$$y_n(x) = -\frac{۱ + x}{۶}[L_{۰,۰}^{-۱}e^{-x}A_{n-۱}]_{x=۱} - \frac{۱ + x}{۶}\int_{۰}^{۱} e^{-x}A_{n-۱}\, dX + \frac{۱}{۲}L_{۰,۰}^{-۱}e^{-x}A_{n-۱}, \quad n \ge ۲$$

و چندجمله‌ای آدومیان برای عامل غیرخطی $Ny = y^2(x) + (y'(x))^2$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= y_0^2 + (y_0')^2 \\
A_1 &= 2y_0y_1 + 2y_0'y_1' \\
A_2 &= 2y_0y_2 + y_1^2 + 2y_0'y_2' + (y_1')^2 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

حال بدست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= \frac{2e+2ex}{3} - 4x - 4 \\
y_1(x) &= 4x + 4 + \frac{1}{243}(24x^2 + 144x + 264)e^{-x+4} + \frac{1}{243}(-64x - 64)e^3 + \frac{128}{243}e^4(x-2) \\
y_2(x) &= -\frac{256}{243}(x-2)e^{-2x}e^{4+2x} + \frac{1}{2187}(1170x - 3420)e^{-2x}e^{5+2x} \\
&\quad + \frac{1}{2187}\Big((-384x^2 - 2304x - 4608)e^{x+4} + (768x^2 + 2304x + 2304)e^{5+x} \\
&\quad + 36(2+x)e^5\big(x^2 + 7x + \frac{31}{2}\big)\Big)e^{-2x} + \frac{1264}{2187}(1+x)\big(e^3 - \frac{80}{79}e^4 + \frac{45}{158}e^5\big) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

حال ما تقریبی از $\varphi_m(x) = \sum_{n=0}^{m-1} y_n(x)$ تا مرتبه سوم محاسبه می‌کنیم در نتیجه داریم:

$$
\begin{aligned}
\varphi_3 = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) &= \frac{1}{2187}(216x^2 + 1296x + 2376)e^{-x+4} \\
&- \frac{256}{243}e^{-2x}(x-2)e^{4+2x} + \frac{1}{2187}(1170x - 3420)e^{-2x}e^{5+2x} + \frac{1}{2187} \\
&\times \Big((-384x^2 - 2304x - 4608)e^{4+x} + (768x^2 + 2304x + 2304)e^{5+x} \\
&+ 36(2+x)e^5(x^2 + 7x + \frac{31}{2})\Big)e^{-2x} + \frac{1}{2187}(360x + 360)e^5 + \frac{1}{2187} \\
&\times (1458x + 1458)e + \frac{1}{2187}(688x + 688)e^3 - \frac{128}{2187}e^5(x+28)
\end{aligned}
$$

یا

$$
\begin{aligned}
y(x) \approx\ & \frac{1}{2187}(216x^2 + 1296x + 2376)e^{-x+4} \\
&- \frac{256}{243}e^{-2x}(x-2)e^{4+2x} + \frac{1}{2187}(1170x - 3420)e^{-2x}e^{5+2x} + \frac{1}{2187} \\
&\times \Big((-384x^2 - 2304x - 4608)e^{4+x} + (768x^2 + 2304x + 2304)e^{5+x} \\
&+ 36(2+x)e^5(x^2 + 7x + \frac{31}{2})\Big)e^{-2x} + \frac{1}{2187}(360x + 360)e^5 + \frac{1}{2187} \\
&\times (1458x + 1458)e + \frac{1}{2187}(688x + 688)e^3 - \frac{128}{2187}e^5(x+28)
\end{aligned}
$$

حال ما تابع خطا $|E_m(x)| = |\varphi_m(x) - y^*(x)|$ را معرفی می‌کنیم و به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:
برای $m = 1$ داریم:

$$|E_1(x)| = \left|\frac{2e + 2ex}{3} - 4x - 4 - e^x\right|$$

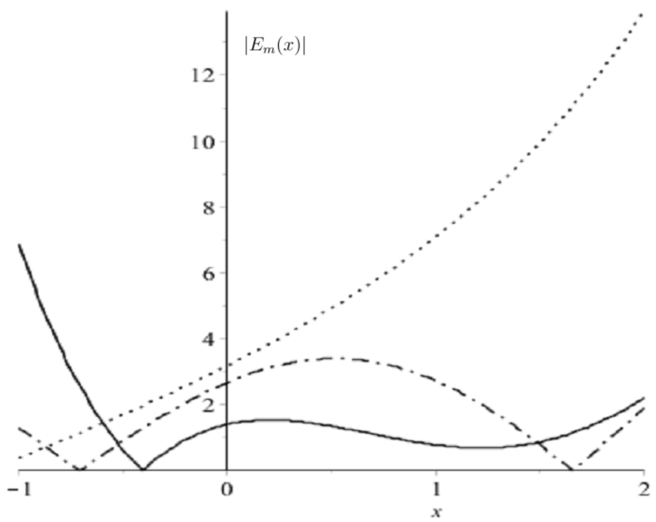
برای $m = 2$ داریم:

$$\begin{aligned}|E_2(x)| = \Big|&\frac{2e + 2ex}{3} + \frac{1}{243}(24x^2 + 144x + 264)e^{-x+4} + \frac{1}{243}(-64x - 64)e^3 \\ &+ \frac{128}{243}e^4(x-2) - e^x\Big|\end{aligned}$$

برای $m = 3$ داریم:

$$\begin{aligned}|E_3(x)| = \Big|&\frac{1}{2187}(216x^2 + 1296x + 2376)e^{-x+4} \\ &- \frac{256}{243}e^{-2x}(x-2)e^{4+2x} + \frac{1}{2187}(1170x - 3420)e^{-2x}e^{5+2x} + \frac{1}{2187} \\ &\times \Big((-384x^2 - 2304x - 4608)e^{4+x} + (768x^2 + 2304x + 2304)e^{5+x} \\ &+ 36(2+x)e^5(x^2 + 7x + \frac{31}{2})\Big)e^{-2x} + \frac{1}{2187}(360x + 360)e^5 + \frac{1}{2187} \\ &\times (1458x + 1458)e + \frac{1}{2187}(688x + 688)e^3 - \frac{128}{2187}e^5(x + 28) - e^x\Big|\end{aligned}$$

حال با رسم نمودار $|E_m(x)|$ بر حسب x به تحلیل خطا[3] می‌پردازیم و باید به یاد داشته باشیم که بازه مورد بررسی ما بازه $0 \le x \le 1$ می‌باشد



شکل ۳.۲: تابع $E_1(x)$ (نقطه) و تابع $E_2(x)$ (نقطه و خط) و تابع $E_3(x)$ (خط)

[3] error analysis

حال این مثال را با روش آدومیان چندمرحله‌ای حل می‌کنیم. ابتدا بازه را تظریف می‌کنیم و بازه $[\circ,\text{۱}]$ به دو زیربازهٔ $[\circ,\frac{\text{۱}}{\text{۲}}]$ و $[\frac{\text{۱}}{\text{۲}},\text{۱}]$ تقسیم می‌کنیم. فرض کنید $y(\frac{\text{۱}}{\text{۲}})=\eta$، سپس دو زیرمساله مقدار مرزی زیر را حل می‌کنیم
مساله

$$\frac{d^{\text{۲}}}{dx^{\text{۲}}}y(x)=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}e^{-x}\big(y^{\text{۲}}(x)+(y'(x))^{\text{۲}}\big),\quad \circ\leq x\leq\frac{\text{۱}}{\text{۲}} \tag{۷۳.۳}$$

با شرایط مرزی دیریکله زیر

$$\begin{cases} y(\circ)-y'(\circ)=\circ \\ y(\frac{\text{۱}}{\text{۲}})=\eta \end{cases} \tag{۷۴.۳}$$

و مساله

$$\frac{d^{\text{۲}}}{dx^{\text{۲}}}y(x)=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}e^{-x}\big(y^{\text{۲}}(x)+(y'(x))^{\text{۲}}\big),\quad \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\leq x\leq \text{۱} \tag{۷۵.۳}$$

با شرایط مرزی دیریکله زیر

$$\begin{cases} y(\frac{\text{۱}}{\text{۲}})=\eta \\ y(\text{۱})+y'(\text{۱})=\text{۲}e \end{cases} \tag{۷۶.۳}$$

برای مساله غیرخطی با شرایط مرزی دیریکله (۷۳.۳) و (۷۴.۳) روی بازه $[\circ,\frac{\text{۱}}{\text{۲}}]$ داریم $a=\circ, b=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$, $p=\text{۱},q=\text{۱},r=-\text{۱},s=\circ,\alpha=\circ,\beta=\eta$ و $\Delta=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ بنابراین براساس معادله (۳۴.۳) داریم:

$$y(x)=\frac{\eta(\text{۱}+x)}{\text{۱/۵}}+\frac{\text{۱}}{\text{۲}}L_{\circ,\circ}^{-\text{۱}}e^{-x}Ny-\frac{\text{۱}+x}{\text{۳}}[L_{\circ,\circ}^{-\text{۱}}Ny]_{x=\circ\text{/۵}} \tag{۷۷.۳}$$

با استفاده از الگوریتم روش آدومیان و با پیروی از شکل بازگشتی آن داریم:

$$\begin{aligned} y_\circ(x)&=\frac{\eta(\text{۱}+x)}{\text{۱/۵}}\\ y_n(x)&=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}L_{\circ,\circ}^{-\text{۱}}e^{-x}A_{n-\text{۱}}-\frac{\text{۱}+x}{\text{۳}}[L_{\circ,\circ}^{-\text{۱}}A_{n-\text{۱}}]_{x=\circ\text{/۵}},\quad n\geq\text{۱} \end{aligned}$$

و چندجمله‌ای آدومیان برای عامل غیرخطی $Ny=y^{\text{۲}}(x)+(y'(x))^{\text{۲}}$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} A_\circ&=y_\circ^{\text{۲}}+(y'_\circ)^{\text{۲}}\\ A_{\text{۱}}&=\text{۲}y_\circ y_{\text{۱}}+\text{۲}y'_\circ y'_{\text{۱}}\\ A_{\text{۲}}&=\text{۲}y_\circ y_{\text{۲}}+y_{\text{۱}}^{\text{۲}}+\text{۲}y'_\circ y'_{\text{۲}}+(y'_{\text{۱}})^{\text{۲}}\\ &\vdots \end{aligned}$$

حال بدست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= \frac{\eta(1+x)}{1/5}\\
y_1(x) &= \Big(-\frac{4}{3}-\frac{61}{27(e)^{\frac{1}{2}}}+\frac{8e^{-x}}{3}+\frac{8x}{3}-\frac{61x}{27(e)^{\frac{1}{2}}}+\frac{4e^{-x}x}{3}+\frac{2e^{-x}x^2}{9}\Big)\eta^2\\
y_2(x) &= \Big(-\frac{1139}{162}+\frac{13693}{972e}-\frac{76}{27(e)^{\frac{1}{2}}}-\frac{488}{27}e^{-\frac{1}{2}-x}+\frac{32e^{-2x}}{27}+\frac{40e^{-x}}{3}+\frac{1139x}{81}\\
&\quad+\frac{13693x}{927e}-\frac{808x}{27(e)^{\frac{1}{2}}}-\frac{244}{27}e^{-\frac{1}{2}-x}x+\frac{61}{54}e^{-2x}x+8e^{-x}x-\frac{122}{81}e^{-\frac{1}{2}-x}x^2+\frac{1}{3}e^{-2x}x^2\\
&\quad+\frac{16}{9}e^{-x}x^2+\frac{1}{27}e^{-2x}x^3\Big)\eta^3\\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

حال ما تقریبی از $\varphi_m(x)=\sum_{n=0}^{m-1}y_n(x)$ تا مرتبه سوم محاسبه می‌کنیم در نتیجه داریم:

$$
\begin{aligned}
\varphi_3^{(1)} &= \frac{1}{27e^{\frac{3}{2}}}\Big(\Big(-\frac{122}{3}(x^2+6x+12)\eta^2e^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{2}-x}+48\eta\big((x^2+\frac{9}{2}x+\frac{15}{2})\eta\\
&\quad+\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}\big)e^{\frac{3}{2}}e^{-x}+\eta^2\big(x^3+9x^2+\frac{61}{2}x+32\big)e^{\frac{3}{2}}e^{-2x}+((\frac{1139}{6}+\frac{1139}{3}x)\eta^2\\
&\quad+(-36+72x)\eta+18x+18)e^{\frac{3}{2}}+((-808x-76)\eta^2+(-61x-61)\eta)e+\frac{41079}{103}\\
&\quad\times\big(x+\frac{103}{108})\eta^2e^{\frac{3}{2}}\Big)\eta\Big)
\end{aligned}
$$

حال مساله غیرخطی با شرایط مرزی دیریکله (۷۵.۳) و (۷۶.۳) را روی بازه $[\frac{1}{2},1]$ حل می‌کنیم در نتیجه داریم $a=\frac{1}{2}, b=1, p=1, q=1, r=0, s=1, \alpha=\eta, \beta=2e$ و $\Delta=\frac{1}{2}$ بنابراین براساس معادله (۵۴.۳) داریم:

$$
y(x)=\frac{\eta(2-x)+e(2x-1)}{1/5}+\frac{1}{2}L_{1,1}^{-1}e^{-x}Ny+\frac{x-2}{3}[L_{1,1}^{-1}e^{-x}Ny]_{x=0/5} \qquad (78.3)
$$

با استفاده از الگوریتم روش آدومیان و با پیروی از شکل بازگشتی آن داریم:

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= \frac{\eta(2-x)+e(2x-1)}{1/5}\\
y_n(x) &= \frac{1}{2}L_{1,1}^{-1}e^{-x}A_{n-1}+\frac{x-2}{3}[L_{1,1}^{-1}e^{-x}A_{n-1}]_{x=0/5}, \quad n\geq 1
\end{aligned}
$$

مانند قسمت قبل چندجمله‌ای آدومیان برای عامل غیرخطی $Ny=y^2(x)+(y'(x))^2$ به‌صورت زیر

می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= y_0^2 + (y_0')^2\\
A_1 &= 2y_0y_1 + 2y_0'y_1'\\
A_2 &= 2y_0y_2 + y_1^2 + 2y_0'y_2' + (y_1')^2\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

حال بدست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= \frac{\eta(2-x)+e(2x-1)}{1/5}\\
y_1(x) &= \frac{40e}{27} - \frac{224e^{\frac{3}{2}}}{27} + \frac{14e^{2-x}}{3} - \frac{80ex}{27} + \frac{112}{27}e^{\frac{3}{2}}x + \frac{8}{3}e^{2-x} + \frac{8}{9}e^{2-x}x^2\\
&\quad + \Big(-\frac{28}{27} + \frac{128e^{\frac{1}{2}}}{27} - \frac{8e^{1-x}}{3} + \frac{56x}{27} - \frac{64e^{\frac{1}{2}}x}{27} - \frac{4}{3}e^{1-x}x - \frac{8}{9}e^{1-x}x^2\Big)\eta\\
&\quad + \Big(\frac{4}{27e} - \frac{26}{27e^{\frac{1}{2}}} + \frac{2e^{-x}}{3} - \frac{8x}{27e} + \frac{13x}{272e^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{9}e^{-x}x^2\Big)\eta^2\\
y_2(x) &= -\frac{1519e}{243} + \frac{10528e^{\frac{3}{2}}}{243} - \frac{8080e^2}{243}\frac{25}{27}e^{3-2x} - \frac{560e^{2-x}}{27} + \frac{448}{27}e^{\frac{5}{2}-x}\\
&\quad + \frac{3038ex}{243} - \frac{7616}{243}e^{\frac{3}{2}}x + \frac{4040e^2x}{243} + \frac{8}{27}e^{3-2x}x - \frac{320}{27}e^{2-x}x + \frac{224}{27}e^{\frac{5}{2}-x}x\\
&\quad + \frac{4}{3}e^{3-2x}x^2 - \frac{320}{81}e^{2-x}x^2 + \frac{448}{81}e^{\frac{5}{2}-x}x^2 + \frac{8}{27}e^{3-2x}x^3 + \Big(\frac{476}{81} - \frac{3392e^{\frac{1}{2}}}{81}\\
&\quad + \frac{2420e}{81} + \frac{8}{9}e^{2-2x} + \frac{184}{9}e^{1-x} - \frac{160}{9}e^{\frac{3}{2}-x} - \frac{952x}{81} + \frac{2368e^{\frac{1}{2}}x}{81} - \frac{1210ex}{81}\\
&\quad - \frac{23}{9}e^{2-2x}x + \frac{304}{27}e^{1-x}x - \frac{128}{27}e^{\frac{3}{2}-x}x - \frac{4}{3}e^{2-2x}x^2 + \frac{128}{27}e^{1-x}x^2\\
&\quad - \frac{160}{27}e^{\frac{3}{2}-x}x^2 - \frac{4}{9}e^{2-2x}x^3\Big)\eta + \Big(-\frac{796}{81} - \frac{281}{162e} + \frac{1042}{81e^{\frac{1}{2}}} - \frac{5}{6}e^{1-2x}\\
&\quad + \frac{20}{3}e^{\frac{1}{2}-x} - \frac{56}{9}e^{-x} + \frac{398x}{81} + \frac{281x}{81e} - \frac{240x}{81e^{\frac{1}{2}}}\frac{7}{9}e^{1-2x}x + \frac{26}{27}e^{\frac{1}{2}-x}x\\
&\quad - \frac{88}{27}e^{-x}x + \frac{1}{3}e^{1-2x}x^2 + \frac{20}{9}e^{\frac{1}{2}-x}x^2 - \frac{16}{9}e^{-x}x^2 + \frac{2}{9}e^{1-2x}x^3\Big)\eta^2\\
&\quad + \Big(\frac{67}{486e^2} - \frac{308}{243e^{\frac{3}{2}}} + \frac{589}{486e} + \frac{16}{27}e^{-1-x} - \frac{26}{27}e^{-\frac{1}{2}-x} + \frac{11e^{-2x}}{54} - \frac{67x}{243e^2}\\
&\quad + \frac{232x}{243e^{\frac{3}{2}}} - \frac{589}{972e} + \frac{8}{27}e^{-1-x}x - \frac{7}{54}e^{-2x}x + \frac{16}{81}e^{-1-x}x^2 - \frac{26}{81}e^{-\frac{1}{2}-x}x^2\\
&\quad - \frac{1}{27}e^{-2x}x^3\Big)\eta^3\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

حال ما تقریبی از $\varphi_m(x) = \sum_{n=0}^{m-1} y_n(x)$ تا مرتبه سوم محاسبه می‌کنیم در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}
\varphi_3^{(2)} &= y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) \\
&= \frac{e(2x-1)}{1.5} + \frac{40e}{27} - \frac{224e^{\frac{3}{2}}}{27} + \frac{14e^{2-x}}{3} - \frac{80ex}{27} + \frac{112}{27}e^{\frac{3}{2}}x + \frac{8}{3}e^{2-x} + \frac{8}{9}e^{2-x}x^2 \\
&- \frac{1519e}{243} + \frac{10528e^{\frac{3}{2}}}{243} - \frac{8080e^2}{243}\frac{25}{27}e^{3-2x} - \frac{560e^{2-x}}{27} + \frac{448}{27}e^{\frac{5}{2}-x} \\
&+ \frac{3038ex}{243} - \frac{7616}{243}e^{\frac{3}{2}}x + \frac{4040e^2x}{243} + \frac{8}{27}e^{3-2x}x - \frac{320}{27}e^{2-x}x + \frac{224}{27}e^{\frac{5}{2}-x}x \\
&+ \frac{4}{3}e^{3-2x}x^2 - \frac{320}{81}e^{2-x}x^2 + \frac{448}{81}e^{\frac{5}{2}-x}x^2 + \frac{8}{27}e^{3-2x}x^3 + \Big(\frac{476}{81} - \frac{3392e^{\frac{1}{2}}}{81} \\
&+ \frac{2420e}{81} + \frac{8}{9}e^{2-2x} + \frac{184}{9}e^{1-x} - \frac{160}{9}e^{\frac{3}{2}-x} - \frac{952x}{81} + \frac{2368e^{\frac{1}{2}}x}{81} - \frac{1210ex}{81} \\
&- \frac{23}{9}e^{2-2x}x + \frac{304}{27}e^{1-x}x - \frac{128}{27}e^{\frac{3}{2}-x}x - \frac{4}{3}e^{2-2x}x^2 + \frac{128}{27}e^{1-x}x^2 \\
&- \frac{160}{27}e^{\frac{3}{2}-x}x^2 - \frac{4}{9}e^{2-2x}x^3 + \frac{\eta(2-x)}{1.5} + -\frac{28}{27} + \frac{128e^{\frac{1}{2}}}{27} - \frac{8e^{1-x}}{3} + \frac{56x}{27} \\
&- \frac{64e^{\frac{1}{2}}x}{27} - \frac{4}{3}e^{1-x}x - \frac{8}{9}e^{1-x}x^2\Big)\eta \\
&+ \Big(-\frac{796}{81} - \frac{281}{162e} + \frac{1042}{81e^{\frac{1}{2}}} - \frac{5}{6}e^{1-2x} + \frac{20}{3}e^{\frac{1}{2}-x} - \frac{56}{9}e^{-x} + \frac{398x}{81} \\
&+ \frac{281x}{81e} - \frac{240x}{81e^{\frac{1}{2}}} + \frac{7}{9}e^{1-2x}x + \frac{26}{27}e^{\frac{1}{2}-x}x - \frac{88}{27}e^{-x}x + \frac{1}{3}e^{1-2x}x^2 + \frac{20}{9}e^{\frac{1}{2}-x}x^2 \\
&- \frac{16}{9}e^{-x}x^2 + \frac{2}{9}e^{1-2x}x^3 + \frac{4}{27e} - \frac{26}{27e^{\frac{1}{2}}} + \frac{2e^{-x}}{3} - \frac{8x}{27e} + \frac{13x}{272e^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{9}e^{-x}x^2\Big)\eta^2 \\
&+ \Big(\frac{67}{486e^2} - \frac{308}{243e^{\frac{3}{2}}} + \frac{589}{486e} + \frac{16}{27}e^{-1-x} - \frac{26}{27}e^{-\frac{1}{2}-x} + \frac{11e^{-2x}}{54} - \frac{67x}{243e^2} \\
&+ \frac{232x}{243e^{\frac{3}{2}}} - \frac{589}{972e} + \frac{8}{27}e^{-1-x}x - \frac{7}{54}e^{-2x}x + \frac{16}{81}e^{-1-x}x^2 - \frac{26}{81}e^{-\frac{1}{2}-x}x^2 \\
&- \frac{1}{27}e^{-2x}x^3\Big)\eta^3
\end{aligned}$$

بوسیله پیوستگی در کل بازه و تطابق مشتق معادلات در نقاط درونی داریم:

$$\frac{d\varphi_3^{(1)}(x;\eta)}{dx}\Big|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{d\varphi_3^{(2)}(x;\eta)}{dx}\Big|_{x=\frac{1}{2}} \qquad (3.79)$$

حال با کمک نرم‌افزار maple جواب را بدست می‌آوریم که $\eta[\varphi_3] = 1.64848$ حال ما تقریبی از مرتبه سوم جواب معادله (۳.۷۰) و (۳.۷۱) رابیان می‌کنیم:

$$\varphi_3(x) = \varphi_3^{(1)}(x)\Pi(x;0,\frac{1}{2}) + \varphi_3^{(2)}(x)\Pi(x;\frac{1}{2},1).$$

از این‌رو

$$\Pi(x;0,\frac{1}{2}) = H(x;0) - H(x;\frac{1}{2})$$

و

$$\Pi(x;\frac{1}{2},1)=H(x;\frac{1}{2})-H(x;1)$$

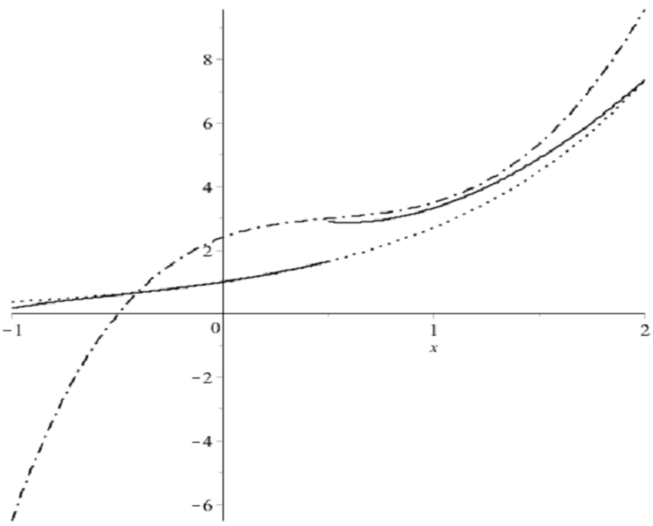
که

$$H(x;0)=\begin{cases}0 & x<0,\\ 1 & x\geq 0.\end{cases}\qquad H(x;\frac{1}{2})=\begin{cases}0 & x<\frac{1}{2},\\ 1 & x\geq \frac{1}{2}.\end{cases}\qquad H(x;1)=\begin{cases}0 & x<1,\\ 1 & x\geq 1.\end{cases}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\varphi_3(x)=\big(&-22.1+9.5x+4.4e^{-x}x^2+14.9e^{-x}x+17.5e^{-x}+0.16e^{-2x}x^3+1.4e^{-2x}x^2\\&+5.06e^{-2x}x+5.3e^{-2x}\big)\Pi(x;0,\frac{1}{2})+\big((-1.4x^2-2.1x-4.3)e^{-x}\\&+(.8x^2+2.6x+4.6)e^{-2x}+(-111.5+1.4x)e^{-2x}e^{-4x}+(43.7-18.6x)e^{-2x}e^{2x-1}\\&+(-8.2+8.2x)e^{-2x}e^{2x+1}+((6.6+10.07x^2+5.2x)e^{x}+(-14.8-7.1x)e^{2x}\\&+(-24.9-8.3x^2+8.1x)e^{x}+2.01x^3+15.8x^2+47.4x+44.7)e^{-2x}\\&+(.6x^2+1.8)e^{-x}+(1.3x-.66)e-19.9+6.2x\big)\Pi(x;\frac{1}{2},1).\end{aligned}$$

حال ما نمودار جواب روش تحلیلی و روش آدومیان معمولی و چندمرحله‌ای را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم تا دقت روش چندمرحله‌ای را نشان دهیم:



شکل ۲.۴: نمودار جواب روش آدومیان چندمرحله‌ای (خط) و نمودار جواب روش آدومیان معمولی (نقطه و خط) و نمودار جواب روش تحلیلی (نقطه)

فصل ۴

روش تجزیه آدومیان در حساب کوانتوم

۱.۴ روش تجزیه آدومیان معمولی در حساب کوانتوم

در قسمت‌های قبل ما به بررسی حساب کوانتوم و روش تجزیه آدومیان در حساب معمولی پرداختیم حال ما می‌خواهیم به هدف اصلی خود که انتقال روش تجزیه آدومیان به حساب کوانتوم است بپردازیم ابتدا این هدف را در روش تجزیه آدومیان معمولی پیگیری می‌کنیم و در بخش بعد آدومیان چندمرحله‌ای را بررسی می‌کنیم.

$$L_q y(x) + R_q y(x) + N_q y(x) = g_q(x) \qquad (۱.۴)$$

که در آن $L_q = \frac{d_q^n}{d_q x^n}$ عملگر بالاترین مرتبه مشتق کوانتوم که وارون پذیر است، N_q عملگر غیرخطی کوانتوم و R_q عملگر مشتق کوانتوم از مرتبه کمتر از L_q و $g_q(x)$ یک تابع شناخته شده می‌باشد. بنابراین داریم:

$$L_q y(x) = g_q(x) - R_q y(x) - N_q y(x) \qquad (۲.۴)$$

بطوریکه

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \qquad (۳.۴)$$

که مولفه $y_n(x)$ معمولا" به‌صورت بازگشتی تعیین یا محاسبه می‌شود و عملگر $N_q(y)$ می‌تواند به یک سری نامتناهی از چند جمله‌ای‌ها تجزیه شود:

$$N_q(y(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{q_n}(x) \qquad (۴.۴)$$

که A_{q_n} چندجمله‌ای آدومیان نامیده می‌شود[۲] و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A_{q_n}=\left[\frac{1}{n!}\frac{d_q^n}{d_q\lambda^n}N_q\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i y_i(x)\Big)\right]_{\lambda=0},\quad n\geq 0, \tag{۵.۴}$$

$$\begin{aligned}
A_{q_0}&=\left[\frac{1}{0!}\frac{d_q^0}{d_q\lambda^0}N_q\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i y_i(x)\Big)\right]_{\lambda=0}=\big[N_q(y_0+\lambda y_1+\lambda^2y_2+\cdots)\big]_{\lambda=0}=N_q(y_0),\\
A_{q_1}&=\left[\frac{1}{1!}\frac{d_q}{d_q\lambda}N_q\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i y_i(x)\Big)\right]_{\lambda=0}=\Bigg[D_{\left(\frac{y_0+\lambda qy_1+\lambda^2q^2y_2+\cdots}{y_0+\lambda y_1+\lambda^2y_2+\cdots}\right)}N_q\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i y_i(x)\Big)\\
&\times D_q\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i y_i(x)\Big)\Bigg]_{\lambda=0}\\
&=\left[\frac{N_q\Big(\big(\frac{y_0+\lambda qy_1+\lambda^2q^2y_2+\cdots}{y_0+\lambda y_1+\lambda^2y_2+\cdots}\big)\big(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i y_i(x)\big)\Big)-N_q\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i y_i(x)\Big)}{\Big(\big(\frac{y_0+\lambda qy_1+\lambda^2q^2y_2+\cdots}{y_0+\lambda y_1+\lambda^2y_2+\cdots}\big)\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i y_i(x)\Big)-\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i y_i(x)\Big)}\right.\\
&\left.\times D_q\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i y_i(x)\Big)\right]_{\lambda=0}\\
&=\left[\frac{N_q(y_0+\lambda qy_1+\cdots)-N_q(y_0+\lambda y_1+\cdots)}{(y_0+\lambda qy_1+\cdots)-(y_0+\lambda y_1++\cdots)}D_q\Big(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i y_i(x)\Big)\right]_{\lambda=0}\\
&=\frac{d_qN_q}{d_q\lambda}(y_0)y_1,\\
A_{q_2}&=?\\
&\vdots
\end{aligned}$$

در ادامه روش تجزیه آدومیان معمولی کوانتومی داریم:

$$L_qy(x)=g_q(x)-R_qy(x)-N_qy(x);\quad L_q=\frac{d_q^n}{d_qx^n},R_q=\frac{d_q^m}{d_qx^m},\quad m<n \tag{۶.۴}$$

مشخص است که L_q معکوس‌پذیر است در نتیجه برای معکوس L_q داریم:

$$L_q^{-1}(\cdot)=\overbrace{\int_0^x\cdots\int_0^x}^{n}(\cdot)\ \overbrace{d_qX\cdots d_qX}^{n} \tag{۷.۴}$$

در نتیجه:

$$L_q^{-1}L_qy(x)=L_q^{-1}g(x)-L_q^{-1}R_qy(x)-L_q^{-1}N_qy(x)$$
$$y(x)=L_q^{-1}g_q(x)-L_q^{-1}R_qy(x)-L_q^{-1}N_qy(x)$$

حال با کمک (۴.۴) و (۳.۴)داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}y_n(x)=L_q^{-1}(g_q(x))-L_q^{-1}R\left(\sum_{n=0}^{\infty}y_n(x)\right)-L_q^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}A_{q_n}(x)\right).$$

و همچنین با توجه به (۷.۴) داریم:

$$\sum_{n=\circ}^{\infty} y_n(x) = \int_\circ^x \cdots \int_\circ^x (g_q(x))\, d_qX \cdots d_qX - \int_\circ^x \cdots \int_\circ^x \Big(\frac{d_q^m}{d_qx^m}(\sum_{n=\circ}^{\infty} y_n(x))\Big)\, d_qX \cdots d_qX$$
$$- \int_\circ^x \cdots \int_\circ^x \Big(\sum_{n=\circ}^{\infty} A_{q_n}(x)\Big)\, d_qX \cdots d_qX, \quad m < n.$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} y_\circ(x) = f(x) - L_q^{-۱}(g_q(x)) \\ y_۱(x) = -L_q^{-۱}(R_q(y_\circ(x))) - L_q^{-۱}(A_{q_\circ}(x)) \\ y_۲(x) = -L_q^{-۱}(R_q(y_۱(x))) - L_q^{-۱}(A_{q_۱}(x)) \\ \vdots \\ y_{n+۱}(x) = -L_q^{-۱}(R_q(y_n(x))) - L_q^{-۱}(A_{q_n}(x)) \end{cases} \tag{۸.۴}$$

که اگر ما تابع ϕ_n را به‌صورت ی تعریف کنیم که جمع $n+۱$ جمله اول y_i قرار دهیم در اینصورت:

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=\circ}^{n} y_i(x) \tag{۹.۴}$$

بطوریکه:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = y(x) \tag{۱۰.۴}$$

۱.۱.۴ شرح روش جدید

حال با یک مثال به شرح روش جدید می‌پردازیم. معادله دیفرانسیل غیرخطی کوانتومی زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{d_q^۲}{d_qx^۲} y(x) - N_q(y(x)) = \circ, \quad a \leq x \leq b \tag{۱۱.۴}$$

که با شرایط مرزی رابین داده شده است:

$$py(a) + r\frac{d_qy}{d_qx}(a) = \alpha \tag{۱۲.۴}$$

$$zy(b) + s\frac{d_qy}{d_qx}(b) = \beta \tag{۱۳.۴}$$

که $N_q(y(x))$ یک تابع غیرخطی و p, z, r, s در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$ps - zr + pz(b-a) \neq \circ \tag{۱۴.۴}$$

که اگر $p, z, s \geq 0$ و $r \leq 0$
(الف) p, r با هم صفرنشوند.
(ب) z, s با هم صفر نشوند.
(ج) z, p با هم صفر نشوند.
آن‌گاه همواره داریم:

$$ps - zr + pz(b-a) > 0$$

حال براساس (۱۷.۱) و روش آدومیان کلاسیک داریم:

$$L_q y = N_q y, \quad a \leq x \leq b \tag{۱۵.۴}$$

حال $L_q(\cdot) = \frac{d_q^2}{d_q x^2}(\cdot)$ پس ما عملگر $L_{q_{a,a}}^{-1}$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_{q_{a,a}}^{-1}(\cdot) = \int_a^x \int_a^x (\cdot)\, d_q X d_q X \tag{۱۶.۴}$$

حال با اعمال (۱۶.۴) روی (۱۵.۴) داریم:

$$L_{q_{a,a}}^{-1}(L_q y) = L_{q_{a,a}}^{-1}(N_q y)$$

$$\begin{aligned}
\int_a^x \int_a^x \frac{d_q^2}{d_q x^2} y(x)\, d_q X d_q X &= \int_a^x \left(\frac{d_q}{d_q x} y(x) - \frac{d_q y}{d_q x}(a)\right) d_q X \\
&= \int_a^x \frac{d_q}{d_q x} y(x)\, d_q X - \int_a^x \frac{d_q y}{d_q x}(a)\, d_q X \\
&= y(x) - y(a) - (x-a)\frac{d_q y}{d_q x}(a) \\
&= L_{q_{a,a}}^{-1}(N_q y)
\end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$y(x) - y(a) - (x-a)\frac{d_q y}{d_q x}(a) = L_{q_{a,a}}^{-1}(N_q y) \tag{۱۷.۴}$$

حال مقدار $y(x)$ را در (۱۷.۴) در نقطه $x = b$ محاسبه می‌کنیم:

$$y(b) = y(a) + \left(\frac{d_q y}{d_q x}(a)\right)(b-a) + [L_{q_{a,a}}^{-1} N_q y]_{x=b} \tag{۱۸.۴}$$

که

$$[L_{q_{a,a}}^{-1}(\cdot)]_{x=b} = \int_a^b \int_a^x (\cdot)\, d_q X d_q X$$

با مشتق گیری از (۱۷.۴) و محاسبه $\frac{d_q}{d_q x} y(x)$ در $x = b$ داریم:

$$\frac{d_q y}{d_q x}(b) = \frac{d_q y}{d_q x}(a) + \int_a^b N_q y(x)\, d_q X \tag{۱۹.۴}$$

با قرار دادن (۱۹.۴) و (۱۸.۴) در (۱۳.۴) داریم:

$$z\Big(y(a)+y\frac{d_qy}{d_qx}(a)(b-a)+[L^{-1}_{q_{a,a}}N_qy]_{x=b}\Big)+s\Big(\frac{d_qy}{d_qx}(a)+\int_a^b N_qy\,d_qX\Big)=\beta$$

با باز کردن فرمول بالا داریم:

$$zy(a)+\Big(z(b-a)+s\Big)\frac{d_qy}{d_qx}(a)=\beta-z[L^{-1}_{q_{a,a}}N_qy]_{x=b}-s\int_a^b N_qy\,d_qX \qquad (۲۰.۴)$$

دستگاه دو معادله و دو مجهولی زیر که از معادله (۲۰.۴) و (۱۲.۴) پدید می‌آید را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} zy(a)+\Big(z(b-a)+s\Big)\frac{d_qy}{d_qx}(a)=\beta-q[L^{-1}_{q_{a,a}}N_qy]_{x=b}-s\int_a^b N_qy\,d_qX \\ py(a)+r\frac{d_qy}{d_qx}(a)=\alpha \end{cases} \qquad (۲۱.۴)$$

حال برای اینکه این دو معادله از هم مستقل خطی باشند تا از طریق یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی بتوانیم جوابی یکتا بدست آوریم باید:

$$\Delta=\begin{vmatrix} p & r \\ z & z(b-a)+s \end{vmatrix}=ps-zr+pz(b-a)\neq 0, \qquad (۲۲.۴)$$

که با توجه به (۱۴.۴) استقلال خطی وجود دارد. حال با حل دستگاه (۲۱.۴) داریم:

$$y(a)=\frac{1}{\Delta}\Big(z\alpha(b-a)+s\alpha-r\beta+zr[L^{-1}_{q_{a,a}}N_qy]_{x=b}+rs\int_a^b N_qy\,d_qX\Big), \qquad (۲۳.۴)$$

$$\frac{d_qy}{d_qx}(a)=\frac{1}{\Delta}\Big(p\beta-z\alpha-pz[L^{-1}_{q_{a,a}}N_qy]_{x=b}-ps\int_a^b N_qy\,d_qX\Big). \qquad (۲۴.۴)$$

با جایگذاری (۲۴.۴) و (۲۳.۴) در (۱۸.۴) داریم:

$$\begin{aligned} y(x)=&\frac{1}{\Delta}\Big(s\alpha-r\beta+p\beta(x-a)+z\alpha(b-x)\Big)+L^{-1}_{q_{a,a}}N_qy \\ &-\frac{p(x-a)-r}{\Delta}\Big(z[L^{-1}_{q_{a,a}}N_qy]_{x=b}+s\int_a^b N_qy\,d_qX\Big) \end{aligned} \qquad (۲۵.۴)$$

که در آن هر ضریب نامعین یا نامشخص آزاد است و از طریق صورت مسأله مشخص می‌شود و جزء مفروضات مسأله می‌باشد. حال با استفاده از روش تجزیه آدومیان و شرایط آن داریم:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}y_n(x), \qquad N_qy(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_{q_n} \qquad (۲۶.۴)$$

با جایگذاری (۲۵.۴) و (۲۶.۴) و شرایط تجزیه آدومیان داریم:

$$y_\circ(x) = \frac{1}{\Delta}\Big(s\alpha - r\beta + p\beta(x-a) + z\alpha(b-x)\Big), \tag{۲۷.۴}$$

$$y_n(x) = L^{-1}_{q_{a,a}} N_q y - \frac{p(x-a)-r}{\Delta}\Big(z[L^{-1}_{q_{a,a}} N_q y]_{x=b} + s\int_a^b N_q y \, d_qX\Big), \ \ n \geq 1, \tag{۲۸.۴}$$

در نتیجه:

$$\varphi_m(x) = \sum_{n=\circ}^{m-1} y_n(x), \quad n \geq 1 \tag{۲۹.۴}$$

که:

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_m(x) = y(x) \tag{۳۰.۴}$$

شکل چند مرحله‌ای روش تجزیه آدومیان کوانتومی

حال ما می‌خواهیم به کار اصلی خود یعنی تشریح شکل چندمرحله‌ای روش تجزیه آدومیان کوانتومی برای مسأله غیرخطی با شرایط مرزی بپردازیم. در ابتدا بازه $[a,b]$ را به $N-1$ زیربازه تقسیم می‌کنیم:

$$a = x_\circ < x_1 < x_2 < \cdots < x_i < \cdots < x_N = b.$$

فرض کنیم $i = 1, 2, \cdots, N-1$ و $y(x_i) = \eta_i$ مقادیری از نقاط درونی را به همین شکل در نظر بگیرید که نشان دهنده $N-1$، ضریب نامعین است. در زیربازه چپ $[a, x_1]$، ما مسأله مقدار مرزی را با ترکیبی از شرایط مرزی دیریکله و رابین حل می‌کنیم.

$$L_q y = N_q y, \qquad a \leq x \leq x_1, \tag{۳۱.۴}$$

$$py(a) + r\frac{d_q y}{d_q x}(a) = \alpha, \qquad y(x_1) = \eta_1 \tag{۳۲.۴}$$

و مرحله m−ام تقریب به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\varphi_m^{(1)}(x) = \varphi_m^{(1)}(x;\eta_1) = \sum_{k=\circ}^{m-1} y_k^{(1)}(x)$$

و همچنین در زیربازه‌های درونی $[x_{i-1}, x_i],\ i = 2, 3, \cdots, N-1$ ما مسأله مقدار مرزی را با مجموعه‌ای از شرایط مرزی دیریکله حل می‌کنیم:

$$L_q y = N_q y, \qquad x_{i-1} \leq x \leq x_i, \tag{۳۳.۴}$$

$$y(x_{i-1}) = \eta_{i-1}, \qquad y(x_i) = \eta_i \tag{۳۴.۴}$$

و مرحله m−ام تقریب به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\varphi_m^{(i)}(x) = \varphi_m^{(i)}(x;\eta_{i-1},\eta_i) = \sum_{k=\circ}^{m-1} y_k^{(i)}(x), \qquad i = 2, 3, \cdots, N-1.$$

در زیربازه سمت راست هم که به‌صورت $[x_{N-1}, b]$ مسأله مقدار مرزی را با ترکیبی از شرایط مرزی رابین و دیریکله حل می‌کنیم:

$$L_q y = N_q y, \qquad x_{N-1} \leq x \leq b, \tag{۳۵.۴}$$

$$y(x_{N-1}) = \eta_{N-1}, \qquad zy(b) + s\frac{d_q y}{d_q x}(b) = \beta \tag{۳۶.۴}$$

و مرحله m–ام تقریب به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\varphi_m^{(N)}(x) = \varphi_m^{(N)}(x; \eta_{N-1}) = \sum_{k=0}^{m-1} y_k^{(N)}(x).$$

با توجه به پیوستگی در کل بازه داریم:

$$\frac{d_q \varphi_m^{(i)}}{d_q x}(x_i) = \frac{d_q \varphi_m^{(i+1)}}{d_q x}(x_i), \qquad i = 1, 2, \cdots, N-1, \tag{۳۷.۴}$$

به‌صورت پی‌درپی تطبیق می‌دهیم تا $N-1$ ضریب $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{N-1}$ را محاسبه کنیم. همچنین باید یادآوری کنیم که اگر m افزایش یابد، جواب‌هایی که برای ضریب $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{N-1}$ وجود دارد، نزدیکتر به جواب واقعی است. مانشان می‌دهیم که $\eta_k[\varphi_m]$ که تقریبی از مقدار واقعی η_k به وسیله تطبیق $\varphi_m^{(i)}(x), i = 1, 2, \cdots N$ مطابق معادله (۳۷.۴) بدست می‌آید.
سپس با ترکیب $\varphi_m^{(1)}(x, \eta_1[\varphi_m]), \varphi_m^{(2)}(x, \eta_1[\varphi_m], \eta_2[\varphi_m]), \cdots, \varphi_m^{(N)}(x, \eta_{N-1}[\varphi_m])$ حاصل تقریب m–امین مرحله از جواب، از تابع پله‌ای[1] استفاده می‌کنیم که به‌صورت زیر می‌باشد

$$\varphi_m(x) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_m^{(i)}(x) \Pi(x; x_{i-1}, x_i), \tag{۳۸.۴}$$

که تابع باکس‌کار را با کمک تابع هویساید به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Pi(x; x_{i-1}, x_i) = H(x; x_{i-1}) - H(x; x_i) \tag{۳۹.۴}$$

که:

$$H(x; x_{i-1}) = \begin{cases} 0 & x < x_{i-1}, \\ 1 & x \geq x_{i-1}. \end{cases}, \qquad H(x; x_i) = \begin{cases} 0 & x < x_i, \\ 1 & x \geq x_i. \end{cases} \tag{۴۰.۴}$$

حال حالت‌های مختلف شرایط مرزی را برای مسأله با شرایط مرزی (۱۱.۴) و(۱۲.۴) و(۱۳.۴) بیان می‌کنیم
حالت ۱. شرایط مرزی دیریکله

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \tag{۴۱.۴}$$

[1] boxcar

مطابق با شرایط مرزی (۱۲.۴) و (۱۳.۴) اگر قرار دهیم $p = z = ۱$ و $r = s = ۰$ در نتیجه $\Delta = b - a$ و معادله (۲۵.۴) بصورت زیر در می‌آید:

$$y(x) = \frac{\beta(x-a) + \alpha(b-x)}{b-a} + L^{-۱}_{q_{a,a}} N_q y(x) - \frac{x-a}{b-a}[L^{-۱}_{q_{a,a}} N_q y(x)]_{x=b}. \qquad (۴۲.۴)$$

حالت ۲. ترکیبی از شرایط مرزی رابین و دیریکله

$$py(a) + r\frac{d_q y}{d_q x}(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \qquad (۴۳.۴)$$

مطابق با شرایط مرزی (۱۲.۴) و (۱۳.۴) اگر قرار دهیم $z = ۱$ و $s = ۰$ در نتیجه $\Delta = p(b-a) - r$ و معادله (۲۵.۴) بصورت زیر در می‌آید:

(۴۴.۴)
$$y(x) = \frac{\alpha(b-x) + p\beta(x-a) - r\beta}{p(b-a) - r} + L^{-۱}_{q_{a,a}} N_q y(x) - \frac{p(x-a) - r}{p(b-a) - r}[L^{-۱}_{q_{a,a}} N_q y(x)]_{x=b}.$$

حالت ۳. ترکیبی از شرایط مرزی رابین و نویمن

$$py(a) + r\frac{d_q y}{d_q}(a) = \alpha, \quad \frac{d_q y}{d_q x}(b) = \beta, \qquad (۴۵.۴)$$

مطابق با شرایط مرزی (۱۲.۴) و (۱۳.۴) اگر قرار دهیم $z = ۰$ و $s = ۱$ در نتیجه $\Delta = p$ و معادله (۲۵.۴) بصورت زیر در می‌آید:

$$y(x) = \beta(x-a) + \frac{\alpha - r\beta}{p} + L^{-۱}_{q_{a,a}} N_q y(x) - \frac{p(x-a) - r}{p} \int_a^b N_q y(x)\, d_q X. \qquad (۴۶.۴)$$

سایر عملگرهای خطی معکوس را در زیر مورد ۳ آوردیم:

$$L^{-۱}_{q_{b,b}}(.) = \int_b^x \int_b^x (\cdot)\, d_q X d_q X, \qquad (۴۷.۴)$$

$$L^{-۱}_{q_{a,b}}(.) = \int_a^x \int_b^x (\cdot)\, d_q X d_q X, \qquad (۴۸.۴)$$

$$L^{-۱}_{q_{b,a}}(.) = \int_b^x \int_a^x (\cdot)\, d_q X d_q X. \qquad (۴۹.۴)$$

با استفاده از عملگر $L^{-۱}_{q_{b,b}}(.)$ و (۱۵.۴) داریم:

$$L^{-۱}_{q_{b,b}}(L_q y(x)) = L^{-۱}_{q_{b,b}}(N_q y(x))$$

$$\begin{aligned}
\int_b^x \int_b^x \frac{d_q^۲}{d_q x^۲} y(x)\, d_q X d_q X &= \int_b^x \left(\frac{d_q}{d_q x} y(x) - \frac{d_q y}{d_q x}(b)\right) d_q X \\
&= \int_b^x \frac{d_q}{d_q x} y(x)\, d_q X - \int_b^x \frac{d_q y}{d_q x}(b)\, d_q X \\
&= y(x) - y(b) - (x-b)\frac{d_q y}{d_q x}(b) \\
&= L^{-۱}_{q_{b,b}}(N_q y(x))
\end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$y(x)-y(b)-(x-b)\frac{d_qy}{d_qx}(b)=L^{-1}_{q_{b,b}}(N_qy(x)) \tag{۴.۵۰}$$

با استفاده از الگوریتم پیاده شده از (۴.۱۱) تا (۴.۳۰) داریم:

$$\begin{aligned} y(x)&=\frac{1}{\Delta}\Big(s\alpha-r\beta+p\beta(x-a)+z\alpha(b-x)\Big)+L^{-1}_{q_{b,b}}N_qy(x)\\ &+\frac{z(x-b)-s}{\Delta}\Big(p[L^{-1}_{q_{b,b}}N_qy(x)]_{x=a}+r\int_b^a N_qy(x)\,d_qX\Big), \end{aligned} \tag{۴.۵۱}$$

و همچنین:

$$\begin{aligned} y_0(x)&=\frac{1}{\Delta}\Big(s\alpha-r\beta+p\beta(x-a)+z\alpha(b-x)\Big),\\ y_n(x)&=L^{-1}_{q_{b,b}}A_{q_{(n-1)}}+\frac{z(x-b)-s}{\Delta}\Big(p[L^{-1}_{q_{b,b}}A_{q_{(n-1)}}]_{x=a}+r\int_b^a A_{q_{(n-1)}}\,d_qX\Big),\ n\geq 1, \end{aligned} \tag{۴.۵۲}$$

همچنین در مرحله‌ی بعد با به‌کار بردن عملگر $L^{-1}_{q_{a,b}}(.)$ برای معادله (۴.۱۵) داریم:

$$y(x)-y(a)-(x-a)\frac{d_qy}{d_qx}(b)=L^{-1}_{q_{a,b}}(N_qy(x)) \tag{۴.۵۳}$$

حال مقدار $y(x)$ را برای معادله (۴.۵۳) در نقطه $x=b$ محاسبه می‌کنیم:

$$y(b)=y(a)+\frac{d_qy}{d_qx}(b)(b-a)+[L^{-1}_{q_{a,b}}N_qy(x)]_{x=b} \tag{۴.۵۴}$$

که

$$[L^{-1}_{q_{a,b}}(\cdot)]_{x=b}=\int_a^b\int_b^x(\cdot)\,d_qXd_qX \tag{۴.۵۵}$$

آن‌گاه $\frac{d_q}{d_qx}y(x)$ را در $x=b$ داریم:

$$\begin{aligned} \int_a^b\int_b^x\frac{d_q^2}{d_qx^2}y(x)\,d_qXd_qX&=\int_a^b\int_b^x N_qy(x)\,d_qXd_qX\\ \int_b^x\frac{d_q^2}{d_qx^2}y(x)\,d_qX&=\int_b^x N_qy(x)\,d_qX\\ \frac{d_q}{d_q}y(X)\Big|_b^x&=\int_b^x N_qy(x)\,d_qX\\ \frac{d_q}{d_qx}y(x)&=\frac{d_qy}{d_qx}(b)+\int_b^x N_qy(x)\,d_qX \end{aligned}$$

$$\xRightarrow{x=a} \frac{d_q y}{d_q x}(a) = \frac{d_q y}{d_q x}(b) + \int_b^a N_q y(x)\, d_q X \tag{۵۶.۴}$$

حال با قرار دادن (۵۳.۴) و (۵۶.۴) در (۱۲.۴) و (۱۳.۴) داریم:

$$\begin{cases} zy(a) + \Big(q(b-a)+s\Big)\frac{d_q y}{d_q x}(b) = \beta - q[L^{-1}_{q_{a,b}} N_q y(x)]_{x=b} \\ py(a) + r\frac{d_q y}{d_q x}(b) = \alpha - r\int_a^b N_q y(x)\, d_q X \end{cases} \tag{۵۷.۴}$$

دستگاه فوق مستقل خطی می‌باشد. با حل دستگاه معادله بالا وبدست آوردن $y(a)$ و $\frac{d_q y}{d_q x}(b)$ و جایگذاری آن در (۵۳.۴) داریم:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{\Delta}\Big(s\alpha - r\beta + p\beta(x-a) + z\alpha(b-x)\Big) + L^{-1}_{q_{a,b}} N_q y(x) \\ &- \frac{pz(x-a) - zr}{\Delta}[L^{-1}_{q_{a,b}} N_q y(x)]_{x=b} - \frac{rs + zr(b-x)}{\Delta}\int_a^b N_q y(x)\, d_q X. \end{aligned} \tag{۵۸.۴}$$

از معادله (۵۸.۴) و شکل بازگشتی مطابق (۵۲.۴) داریم:

$$y_0(x) = \frac{1}{\Delta}\Big(s\alpha - r\beta + p\beta(x-a) + z\alpha(b-x)\Big),$$

$$\begin{aligned} y_n(x) &= L^{-1}_{q_{a,b}} A_{q_{(n-1)}}(x) - \frac{1}{\Delta}\Big(z(p(x-a) - r)[L^{-1}_{q_{a,b}} A_{q_{(n-1)}}(x)]_{x=b} \\ &+ r(z(b-x)+s)\int_a^b A_{q_{(n-1)}}(x)\, d_q X\Big),\ n \geq 1. \end{aligned} \tag{۵۹.۴}$$

و همچنین با به‌کار بردن عملگر $L^{-1}_{q_{b,a}} N_q y(x)$ روی معادله (۱۵.۴) داریم:

$$y(x) - y(b) - (x-b)\frac{d_q y}{d_q x}(a) = L^{-1}_{q_{b,a}}(N_q y(x)) \tag{۶۰.۴}$$

با استفاده از روش عملگر مشابه قبل برای عملگر $L^{-1}_{q_{a,b}} N_q y(x)$ داریم:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{\Delta}\Big(s\alpha - r\beta + p\beta(x-a) + z\alpha(b-x)\Big) + L^{-1}_{q_{b,a}} N_q y(x) \\ &+ \frac{pz(x-b) - ps}{\Delta}[L^{-1}_{q_{b,a}} N_q y(x)]_{x=a} + \frac{ps(a-x) + rs}{\Delta}\int_a^b N_q y(x)\, d_q X. \end{aligned} \tag{۶۱.۴}$$

از معادله (۶۱.۴) و شکل بازگشتی مطابق (۵۲.۴) داریم:

$$y_0(x) = \frac{1}{\Delta}\Big(s\alpha - r\beta + p\beta(x-a) + z\alpha(b-x)\Big),$$

$$\begin{aligned} y_n(x) &= L^{-1}_{q_{b,a}} A_{q_{(n-1)}}(x) + \frac{1}{\Delta}\Big(p(z(x-b) - s)[L^{-1}_{q_{b,a}} A_{q_{(n-1)}}(x)]_{x=a} \\ &+ s(p(a-x)+r)\int_a^b A_{q_{(n-1)}}(x)\, d_q X\Big),\ n \geq 1. \end{aligned} \tag{۶۲.۴}$$

حالت ۴. ترکیبی از شرایط مرزی دیریکله و رابین

$$y(a)=\alpha, \quad zy(b)+s\frac{d_qy}{d_qx}(b)=\beta, \tag{۶۳.۴}$$

مطابق با شرایط مرزی (۱۲.۴) و (۱۳.۴) اگر قرار دهیم $p=1$ و $r=0$ در نتیجه $\Delta=z(b-a)+s$ و معادله (۲۵.۴) بصورت زیر در می‌آید:

$$y(x)=\frac{\beta(a-x)+z\alpha(x-b)-s\alpha}{z(a-b)-s}+L^{-1}_{q_{b,b}}N_qy(x)-\frac{z(x-b)-s}{z(a-b)-s}[L^{-1}_{q_{b,b}}N_qy(x)]_{x=a}. \tag{۶۴.۴}$$

حالت ۵. ترکیبی از شرایط مرزی نویمن و رابین

$$\frac{d_qy}{d_qx}(a)=\alpha, \quad zy(b)+s\frac{d_qy}{d_qx}(b)=\beta, \tag{۶۵.۴}$$

مطابق با شرایط مرزی (۱۲.۴) و (۱۳.۴) اگر قرار دهیم $p=0$ و $r=1$ در نتیجه $\Delta=-z$ و معادله (۲۵.۴) بصورت زیر در می‌آید:

$$y(x)=\alpha(x-b)+\frac{\beta-s\alpha}{q}+L^{-1}_{q_{b,b}}N_qy(x)-\frac{z(x-b)-s}{q}\int_b^a N_qy(x)\,d_qX. \tag{۶۶.۴}$$

حالت ۶. ترکیبی از شرایط مرزی دیریکله و نویمن

$$y(a)=\alpha, \quad \frac{d_qy}{d_qx}(b)=\beta, \tag{۶۷.۴}$$

مطابق با شرایط مرزی (۱۲.۴) و (۱۳.۴) اگر قرار دهیم $z=r=0$ و $p=s=1$ در نتیجه $\Delta=1$ و از معادله (۵۳.۴) داریم:

$$y(x)=\alpha+\beta(x-a)+L^{-1}_{q_{a,b}}N_qy(x). \tag{۶۸.۴}$$

حالت ۷. ترکیبی از شرایط مرزی نویمن و دیریکله

$$\frac{d_qy}{d_qx}(a)=\alpha, \quad y(b)=\beta, \tag{۶۹.۴}$$

مطابق با شرایط مرزی (۱۲.۴) و (۱۳.۴) اگر قرار دهیم $z=r=1$ و $p=s=0$ در نتیجه $\Delta=-1$ و از معادله (۶۰.۴) داریم:

$$y(x)=\beta+\alpha(x-b)+L^{-1}_{q_{b,a}}N_qy(x). \tag{۷۰.۴}$$

مثال ۱.۱.۴. معادله غیرخطی

$$\frac{d^2}{dx^2}y(x)=6(y(x))^2, \quad 0\le x\le 1 \tag{۷۱.۴}$$

را با شرایط مرزی دیریکله زیر حل کنید:

$$\begin{cases} y(\circ) = ۱ \\ y(۱) = \frac{۱}{۴} \end{cases} \qquad (۷۲.۴)$$

جواب دقیق مساله $y^*(x) = (۱+x)^{-۲}$ می‌باشد و برای این مساله با شرایط مرزی داریم $a = \circ, b = ۱,$ $p = ۱, q = ۱, r = \circ, s = \circ, \alpha = ۱, \beta = \frac{۱}{۴}$ و $\Delta = ۱$ بنابراین براساس معادله (۱۵.۳) داریم:

$$y(x) = ۱ - \frac{۳}{۴}x + ۶L^{-۱}_{\circ,\circ}Ny - ۶x[L^{-۱}_{\circ,\circ}Ny]_{x=۱} \qquad (۷۳.۴)$$

با استفاده از الگوریتم روش آدومیان و با پیروی از شکل بازگشتی آن داریم:

$$\begin{aligned} y_\circ(x) &= ۱ - \frac{۳}{۴}x \\ y_۱(x) &= ۶L^{-۱}_{\circ,\circ}A_\circ - ۶x[L^{-۱}_{\circ,\circ}A_\circ]_{x=۱} \\ y_n(x) &= ۶L^{-۱}_{\circ,\circ}A_{n-۱} - ۶x[L^{-۱}_{\circ,\circ}A_{n-۱}]_{x=۱}, \quad n \geq ۲ \end{aligned}$$

و چندجمله‌ای آدومیان برای عامل غیرخطی $Ny = y^۲$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} A_\circ &= y_\circ^۲ \\ A_۱ &= ۲y_\circ y_۱ \\ A_۲ &= ۲y_\circ y_۲ + y_۱^۲ \\ &\vdots \end{aligned}$$

حال بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} y_\circ(x) &= ۱ - \frac{۳}{۴}x \\ y_۱(x) &= -\frac{۵۷x}{۳۲} + ۳x^۲ - \frac{۳x^۳}{۲} + \frac{۹x^۴}{۳۲} \\ y_۲(x) &= \frac{۸۷۳x}{۸۹۶} - \frac{۵۷x^۳}{۱۶} + \frac{۵۵۵x^۴}{۱۲۸} - \frac{۹x^۵}{۴} + \frac{۹x^۶}{۱۶} - \frac{۲۷x^۷}{۴۴۸} \\ &\vdots \end{aligned}$$

حال ما تقریبی از $\varphi_m(x) = \sum_{n=\circ}^{m-۱} y_n(x)$ تا مرتبه سوم محاسبه می‌کنیم در نتیجه داریم:

$$\varphi_۳ = y_\circ(x) + y_۱(x) + y_۲(x) = ۱ - \frac{۱۳۹۵x}{۸۹۶} + ۳x^۲ - \frac{۸۱x^۳}{۱۶} + \frac{۵۹۱x^۴}{۱۲۸} - \frac{۹x^۵}{۴} + \frac{۹x^۶}{۱۶} - \frac{۲۷x^۷}{۴۴۸}$$

یا

$$y(x) \approx ۱ - \frac{۱۳۹۵x}{۸۹۶} + ۳x^۲ - \frac{۸۱x^۳}{۱۶} + \frac{۵۹۱x^۴}{۱۲۸} - \frac{۹x^۵}{۴} + \frac{۹x^۶}{۱۶} - \frac{۲۷x^۷}{۴۴۸}$$

حال ما تابع خطا $|E_m(x)| = |\varphi_m(x) - y^*(x)|$ را معرفی می‌کنیم و بصورت زیر محاسبه می‌کنیم: برای $m = ۱$ داریم:

$$|E_۱(x)| = \frac{۱}{۴}\Big|\frac{۳x^۳ + ۲x^۲ - ۵x}{(۱+x)^۲}\Big|$$

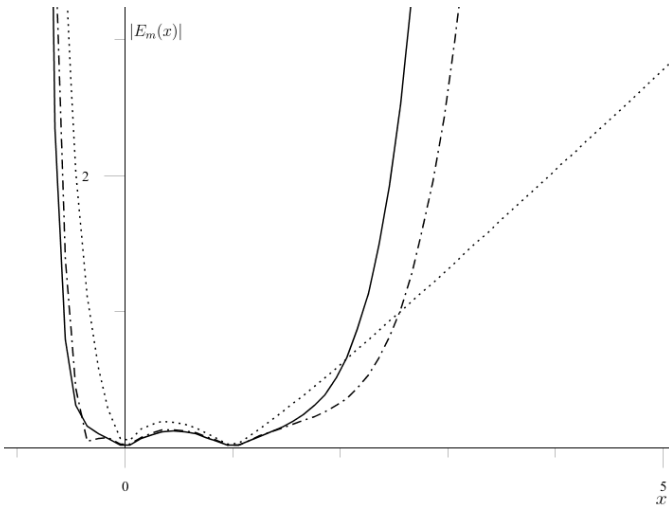
برای $m = ۲$ داریم:

$$|E_۲(x)| = \frac{۱}{۳۲}\Big|\frac{۹x^۶ - ۳۰x^۵ + ۹x^۴ + ۶۳x^۳ - ۳۴x^۲ - ۱۷x}{(۱+x)^۲}\Big|$$

برای $m = ۳$ داریم:

$$\begin{aligned}|E_۳(x)| = {} & \frac{۱}{۸۹۶} \\ & \times \Big|\frac{(۵۴x^۹ - ۳۹۶x^۸ + ۱۰۶۲x^۷ - ۶۰۹x^۶ - ۱۷۲۲x^۵ + ۲۲۴۷x^۴}{(۱+x)^۲} \\ & + \frac{۵۵۵x^۳ - ۷۹۴x^۲ - ۳۹۷x)}{(۱+x)^۲}\Big|\end{aligned}$$

حال با رسم نمودار $|E_m(x)|$ بر حسب x به تحلیل خطا[۲] می‌پردازیم و باید به یاد داشته باشیم که بازه مورد بررسی ما بازه $۰ \le x \le ۱$ می‌باشد



شکل ۱.۴: تابع $E_۱(x)$ (نقطه) و تابع $E_۲(x)$ (نقطه و خط) و تابع $E_۳(x)$ (خط)

حال این مثال را با روش آدومیان چندمرحله‌ای حل می‌کنیم. ابتدا بازه را تظریف می‌کنیم و بازه $[۰,۱]$ به دو زیربازهٔ $[۰,\frac{۱}{۲}]$ و $[\frac{۱}{۲},۱]$ تقسیم می‌کنیم. فرض کنید $y(\frac{۱}{۲}) = \eta$، سپس دو زیرمساله مقدار مرزی زیر را حل می‌کنیم
مساله

$$\frac{d^۲}{dx^۲}y(x) = ۶(y(x))^۲, \quad ۰ \le x \le \frac{۱}{۲} \tag{۷۴.۴}$$

[۲] error analysis

با شرایط مرزی دیریکله زیر

$$\begin{cases} y(۰) = ۱ \\ y(\frac{۱}{۲}) = \eta \end{cases} \tag{۷۵.۴}$$

و مساله

$$\frac{d^۲}{dx^۲}y(x) = ۶(y(x))^۲, \quad \frac{۱}{۲} \le x \le ۱ \tag{۷۶.۴}$$

با شرایط مرزی دیریکله زیر

$$\begin{cases} y(\frac{۱}{۲}) = \eta \\ y(۱) = \frac{۱}{۴} \end{cases} \tag{۷۷.۴}$$

برای مساله غیرخطی با شرایط مرزی دیریکله (۷۴.۴) و (۷۵.۴) روی بازه $[۰, \frac{۱}{۲}]$ داریم $a = ۰, b = \frac{۱}{۲}$، $p = ۱, q = ۱, r = ۰, s = ۰, \alpha = ۱, \beta = \eta$ و $\Delta = \frac{۱}{۲}$ بنابراین براساس معادله (۳۲.۳) داریم:

$$y(x) = ۲\big(\eta x + (\frac{۱}{۲} - x)\big) + ۶L^{-۱}_{۰,۰}Ny - ۱۲x[L^{-۱}_{۰,۰}Ny]_{x=\frac{۱}{۲}} \tag{۷۸.۴}$$

با استفاده از الگوریتم روش آدومیان و با پیروی از شکل بازگشتی آن داریم:

$$\begin{aligned} y_۰(x) &= ۲(\eta - ۱)x + ۱ \\ y_۱(x) &= ۶L^{-۱}_{۰,۰}A_۰ - ۱۲x[L^{-۱}_{۰,۰}A_۰]_{x=\frac{۱}{۲}} \\ y_۲(x) &= ۶L^{-۱}_{۰,۰}A_۱ - ۱۲x[L^{-۱}_{۰,۰}A_۱]_{x=\frac{۱}{۲}} \\ y_n(x) &= ۶L^{-۱}_{۰,۰}A_{n-۱} - ۱۲x[L^{-۱}_{۰,۰}A_{n-۱}]_{x=\frac{۱}{۲}}, \quad n \ge ۲ \end{aligned}$$

و چندجمله‌ای آدومیان برای عامل غیرخطی $Ny = y^۲$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} A_۰ &= y_۰^۲ \\ A_۱ &= ۲y_۰y_۱ \\ A_۲ &= ۲y_۰y_۲ + y_۱^۲ \\ &\vdots \end{aligned}$$

حال بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 2(\eta-1)x+1\\
y_1(x) &= -\frac{1}{10\eta-10}\big((\eta^4+2\eta^3+(20x^3+3)\eta^2+(40x^3-40x^2+4)a\\
&\quad -20x^3+40x^2-30x+5)(\eta-1)x\big)\\
y_2(x) &= -\frac{1}{280\eta-280}\big((\eta-1)x(-320\eta^3x^6+56\eta^5x^3+960\eta^2x^6+56\eta^4x^3\\
&\quad -1120\eta^2x^5-960\eta x^6+56\eta^4x^2+56\eta^3x^3+2240\eta x^5+320x^6-7\eta^5+112\eta^3x^2\\
&\quad +56\eta^2x^3-1680\eta x^4-1120x^5-21\eta^4+168\eta^2x^2+56\eta x^3+1680x^4-30\eta^3\\
&\quad +224\eta x^2-1120x^3-29\eta^2+280x^2-13\eta-5)\big)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

حال ما تقریبی از $\varphi_m(x)=\sum_{n=0}^{m-1}y_n(x)$ تا مرتبه سوم محاسبه می‌کنیم در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}
\varphi_3^{(1)} &= -\frac{1}{280\eta-280}\Big(56\big(-5-\frac{40}{7}(\eta-1)^3x^7-20(\eta-1)^2x^6+(30-30\eta)x^5\\
&\quad +(\eta^5+\eta^4+\eta^3-9\eta^2+21\eta-30)x^4+(\eta^4+2\eta^3+3\eta^2-16\eta+25)x^3-15x^2\\
&\quad +(\frac{-1}{8}\eta^5+\frac{1}{8}\eta^4+\frac{13}{28}\eta^3+\frac{55}{56}\eta^2+\frac{595}{56}-\frac{461}{56}\eta)x\big)(\eta-1)\Big)
\end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned}
y(x) &\approx -\frac{1}{280\eta-280}\Big(56\big(-5-\frac{40}{7}(\eta-1)^3x^7-20(\eta-1)^2x^6+(30-30\eta)x^5\\
&\quad +(\eta^5+\eta^4+\eta^3-9\eta^2+21\eta-30)x^4+(\eta^4+2\eta^3+3\eta^2-16\eta+25)x^3-15x^2\\
&\quad +(\frac{-1}{8}\eta^5+\frac{1}{8}\eta^4+\frac{13}{28}\eta^3+\frac{55}{56}\eta^2+\frac{595}{56}-\frac{461}{56}\eta)x\big)(\eta-1)\Big)
\end{aligned}$$

حال مساله غیرخطی با شرایط مرزی دیریکله (۷۶.۴) و (۷۷.۴) را روی بازه $[\frac{1}{2},1]$ حل می‌کنیم در نتیجه داریم $a=\frac{1}{2}, b=1, p=1, q=1, r=0, s=0, \alpha=\eta, \beta=\frac{1}{4}$ و $\Delta=\frac{1}{2}$ بنابراین براساس معادله (۴۱.۳) داریم:

$$y(x)=(-2\eta+\frac{1}{2})x+(2\eta-\frac{1}{4})+6L_{1,1}^{-1}Ny+12(x-1)[L_{1,1}^{-1}Ny]_{x=\frac{1}{2}} \qquad (۷۹.۴)$$

با استفاده از الگوریتم روش آدومیان و با پیروی از شکل بازگشتی آن داریم:

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= (-2\eta + \frac{1}{2})x + (2\eta - \frac{1}{4}) \\
y_1(x) &= 6L_{1,1}^{-1}A_0 + 12(x-1)[L_{1,1}^{-1}A_0]_{x=\frac{1}{2}} \\
y_2(x) &= 6L_{1,1}^{-1}A_1 + 12(x-1)[L_{1,1}^{-1}A_1]_{x=\frac{1}{2}} \\
y_n(x) &= 6L_{1,1}^{-1}A_{n-1} + 12(x-1)[L_{1,1}^{-1}A_{n-1}]_{x=\frac{1}{2}}, \quad n \geq 2
\end{aligned}
$$

مانند قسمت قبل چندجمله‌ای آدومیان برای عامل غیرخطی $Ny = y^2$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= y_0^2 \\
A_1 &= 2y_0 y_1 \\
A_2 &= 2y_0 y_2 + y_1^2 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

حال بدست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= (-2\eta + \frac{1}{2})x + (2\eta - \frac{1}{4}) \\
y_1(x) &= \frac{512(a - \frac{1}{4})(x-1)\big((a - \frac{1}{4})^2 x^2\big)(x - \frac{1}{2})}{56\eta - 64} \\
&\quad + \frac{\big((-\frac{5}{2}\eta^2 + \frac{3}{4}\eta - \frac{1}{32})x + \frac{7}{4}\eta^2 - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{64}\big)(x - \frac{1}{2})}{56\eta - 64} \\
y_2(x) &= -\frac{1}{28672\eta - 7168}\Big(32768(a - \frac{1}{4}(x-1)(x - \frac{1}{2})\big((\eta - \frac{1}{4})^3 x^5 \\
&\quad - \frac{11}{2}(\eta - \frac{1}{4})^2(\eta - \frac{1}{11})x^4 + (\frac{49}{4}\eta^3 - \frac{21}{4}\eta^2 + \frac{21}{32}\eta \\
&\quad - \frac{7}{256})x^3 + (-\frac{215}{16}\eta^3 + \frac{239}{64}\eta^2 - \frac{85}{256}\eta + \frac{19}{1024})x^2 \\
&\quad + (\frac{223}{32}\eta^3 - \frac{137}{128}\eta^2 + \frac{53}{512}\eta - \frac{13}{2048})x - \frac{77}{64}\eta^3 \\
&\quad + \frac{35}{256}\eta^2 - \frac{7}{1024}\eta + \frac{7}{4096}\big)\Big) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

حال ما تقریبی از $\varphi_m(x)=\sum_{n=0}^{m-1} y_n(x)$ تا مرتبه سوم محاسبه می‌کنیم در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}\varphi_3^{(2)} = y_0(x)+y_1(x)+y_2(x) = -\frac{1}{28672\eta-7168}\Big(&32768(\eta-\frac{1}{4})\big((\eta-\frac{1}{4})^3x^7\\ &-7(\eta-\frac{1}{4})^2(\eta-\frac{1}{8})x^6+21(\eta-\frac{1}{4})(\eta-\frac{1}{8})^2x^5+(-\frac{553}{16}\eta^3+\frac{735}{64}\eta^2\\ &-\frac{189}{256}\eta-\frac{35}{1024})x^4+(\frac{133}{4}\eta^3-\frac{147}{64}\eta^2-\frac{217}{128}\eta+\frac{175}{1024})x^3-\frac{147}{8}\\ &\times(\eta^2+\frac{1}{2}\eta-\frac{1}{16}(a-\frac{1}{8})x^2+(\frac{667}{128}\eta^3+\frac{3093}{512}\eta^2-\frac{3071}{8192}\\ &+\frac{1695}{2048}\eta)x+\frac{1687}{8192}-\frac{3367}{2048}\eta-\frac{749}{512}\eta^2-\frac{77}{128}\eta^3)\big)\end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned}y(x)\approx -\frac{1}{28672\eta-7168}\Big(&32768(\eta-\frac{1}{4})\big((\eta-\frac{1}{4})^3x^7\\ &-7(\eta-\frac{1}{4})^2(\eta-\frac{1}{8})x^6+21(\eta-\frac{1}{4})(\eta-\frac{1}{8})^2x^5+(-\frac{553}{16}\eta^3+\frac{735}{64}\eta^2\\ &-\frac{189}{256}\eta-\frac{35}{1024})x^4+(\frac{133}{4}\eta^3-\frac{147}{64}\eta^2-\frac{217}{128}\eta+\frac{175}{1024})x^3-\frac{147}{8}\\ &\times(\eta^2+\frac{1}{2}\eta-\frac{1}{16}(a-\frac{1}{8})x^2+(\frac{667}{128}\eta^3+\frac{3093}{512}\eta^2-\frac{3071}{8192}\\ &+\frac{1695}{2048}\eta)x+\frac{1687}{8192}-\frac{3367}{2048}\eta-\frac{749}{512}\eta^2-\frac{77}{128}\eta^3)\big)\end{aligned}$$

بوسیله پیوستگی در کل بازه و تطابق مشتق معادلات در نقاط درونی داریم:

$$\frac{d\varphi_3^{(1)}(x;\eta)}{dx}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{d\varphi_3^{(2)}(x;\eta)}{dx}\Big|_{x=\frac{1}{2}} \qquad (80.4)$$

حال با کمک نرم‌افزار maple جواب را بدست می‌آوریم که $\eta[\varphi_3]=0.3298420595$ حال ما تقریبی از مرتبه سوم جواب معادله (۷۱.۴) و (۷۲.۴) رابیان می‌کنیم:

$$\varphi_3(x)=\varphi_3^{(1)}(x)\Pi(x;0,\frac{1}{2})+\varphi_3^{(2)}(x)\Pi(x;\frac{1}{2},1).$$

از این‌رو

$$\Pi(x;0,\frac{1}{2})=H(x;0)-H(x;\frac{1}{2})$$

و

$$\Pi(x;\frac{1}{2},1)=H(x;\frac{1}{2})-H(x;1)$$

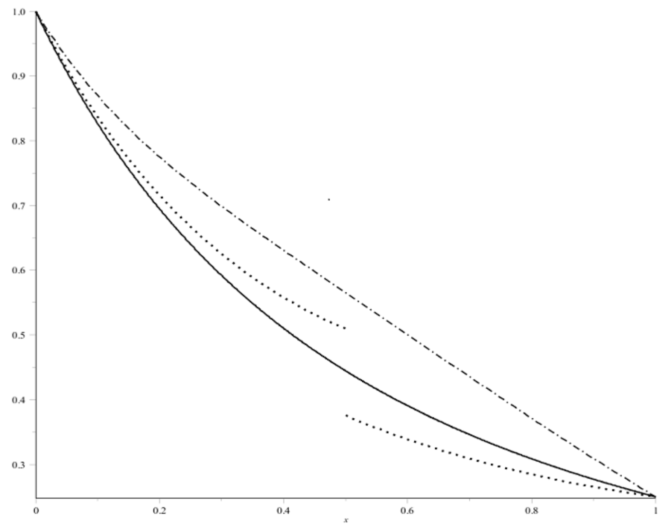
که

$$H(x;0)=\begin{cases}0 & x<0,\\ 1 & x\geq 0.\end{cases}\qquad H(x;\frac{1}{2})=\begin{cases}0 & x<\frac{1}{2},\\ 1 & x\geq \frac{1}{2}.\end{cases}\qquad H(x;1)=\begin{cases}0 & x<1,\\ 1 & x\geq 1.\end{cases}$$

در نتیجه

$$\varphi_۳(x) = \big(۱ - ۰/۲x^۷ + ۱/۵x^۶ - ۳/۷x^۵ + ۴/۶x^۴ - ۳/۹x^۳ + ۳x^۲ - ۱/۸x\big)\Pi(x; ۰, \frac{۱}{۲}) + \big(- ۰/۲x^۷ + ۰/۳x^۶ - ۰/۱x^۵ + ۰/۵x^۴ - ۱/۱x^۳ + ۱/۳x^۲ - ۱/۲x + ۰/۷\big) \times \Pi(x; \frac{۱}{۲}, ۱).$$

حال ما نمودار جواب روش تحلیلی و روش آدومیان معمولی و چندمرحله‌ای را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم تا دقت روش چندمرحله‌ای را نشان دهیم:



شکل ۲.۴: نمودار جواب روش آدومیان چندمرحله‌ای (نقطه) و نمودار جواب روش آدومیان معمولی (نقطه و خط) و نمودار جواب روش تحلیلی (خط)

معادله غیرخطی کوانتومی

$$\frac{d_q^۲}{d_q x^۲} y(x) = ۶(y(x))^۲, \quad ۰ \leq x \leq ۱ \tag{۸۱.۴}$$

را با شرایط مرزی دیریکله زیر حل کنید:

$$\begin{cases} y(۰) = ۱ \\ y(۱) = \frac{۱}{۴} \end{cases} \tag{۸۲.۴}$$

جواب دقیق مساله $y^*(x) = \frac{۱}{(۱+x)_q^۲}$ می‌باشد و برای این مساله با شرایط مرزی داریم $a = ۰, b = ۱,$ $p = ۱, z = ۱, r = ۰, s = ۰, \alpha = ۱, \beta = \frac{۱}{۴}$ و $\Delta = ۱$ بنابراین براساس معادله (۴۲.۴) داریم:

$$y(x) = ۱ - \frac{۳}{۴}x + ۶L_{q_۰,۰}^{-۱} N_q y - ۶x[L_{q_۰,۰}^{-۱} N_q y]_{x=۱} \tag{۸۳.۴}$$

با استفاده از الگوریتم روش آدومیان و با پیروی از شکل بازگشتی آن داریم:

$$\begin{aligned} y_۰(x) &= ۱ - \frac{۳}{۴}x \\ y_۱(x) &= ۶L^{-۱}_{q_۰,۰}A_{q_۰} - ۶x[L^{-۱}_{q_۰,۰}A_{q_۰}]_{x=۱} \\ y_n(x) &= ۶L^{-۱}_{q_۰,۰}A_{q_{n-۱}} - ۶x[L^{-۱}_{q_۰,۰}A_{q_{n-۱}}]_{x=۱}, \quad n \geq ۲ \end{aligned}$$

و چندجمله‌ای آدومیان برای عامل غیرخطی $Ny = y^۲$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} A_{q_۰} &= y_۰^۲ \\ A_{q_۱} &= [۲]y_۰y_۱ \\ A_{q_۲} &= [۲]y_۰y_۲ + y_۱^۲ \\ &\vdots \end{aligned}$$

حال بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} y_۰(x) &= ۱ - \frac{۳}{۴}x \\ y_۱(x) &= \Big(\frac{۲۷q}{۸ \times [۴] \times [۳]}((x - \frac{۴}{۳}q^{-۱})^۴) - \frac{۲۵۶}{۸۱}q^۲) + (\frac{۴q}{۳ \times [۳]})\Big) \\ &\quad - ۶x\Big(\frac{-۴۸q^۴ - ۱۵۶q^۳ - ۱۲q^۲ - ۷۵q + ۳۶}{۱۴۴ \times [۴] \times [۳]} + \frac{۴q}{۳ \times [۳]}\Big) \\ &\vdots \end{aligned}$$

حال ما تقریبی از $\varphi_m(x) = \sum_{n=۰}^{m-۱} y_n(x)$ تا مرتبه دوم محاسبه می‌کنیم در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} \varphi_۲ = y_۰(x) + y_۱(x) &= ۱ - \frac{۳}{۴}x + \Big(\frac{۲۷q}{۸ \times [۴] \times [۳]}((x - \frac{۴}{۳}q^{-۱})^۴) - \frac{۲۵۶}{۸۱}q^۲) + (\frac{۴q}{۳ \times [۳]})\Big) \\ &\quad - ۶x\Big(\frac{-۴۸q^۴ - ۱۵۶q^۳ - ۱۲q^۲ - ۷۵q + ۳۶}{۱۴۴ \times [۴] \times [۳]} + \frac{۴q}{۳ \times [۳]}\Big) \end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned} y(x) &\approx ۱ - \frac{۳}{۴}x + \Big(\frac{۲۷q}{۸ \times [۴] \times [۳]}(x - \frac{۴}{۳}q^{-۱})^۴ - \frac{۲۵۶}{۸۱}q^۲) + (\frac{۴q}{۳ \times [۳]})\Big) \\ &\quad - ۶x\Big(\frac{-۴۸q^۴ - ۱۵۶q^۳ - ۱۲q^۲ - ۷۵q + ۳۶}{۱۴۴ \times [۴] \times [۳]} + \frac{۴q}{۳ \times [۳]}\Big) \end{aligned}$$

حال این مثال را با روش تجزیه آدومیان چندمرحله‌ای در حساب کوانتوم حل می‌کنیم. ابتدا بازه را تظریف می‌کنیم و بازه $[۰, ۱]$ به دو زیربازهٔ $[۰, \frac{۱}{۲}]$ و $[\frac{۱}{۲}, ۱]$ تقسیم می‌کنیم. فرض کنید $y(\frac{۱}{۲}) = \eta$، سپس

دو زیرمساله مقدار مرزی زیر را حل می‌کنیم
مساله

$$\frac{d_q^2}{d_q x^2} y(x) = 6(y(x))^2, \quad 0 \le x \le \frac{1}{2} \tag{۸۴.۴}$$

با شرایط مرزی دیریکله زیر

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(\frac{1}{2}) = \eta \end{cases} \tag{۸۵.۴}$$

و مساله

$$\frac{d_q^2}{d_q x^2} y(x) = 6(y(x))^2, \quad \frac{1}{2} \le x \le 1 \tag{۸۶.۴}$$

با شرایط مرزی دیریکله زیر

$$\begin{cases} y(\frac{1}{2}) = \eta \\ y(1) = \frac{1}{4} \end{cases} \tag{۸۷.۴}$$

برای مساله غیرخطی با شرایط مرزی دیریکله (۸۴.۴) و (۸۵.۴) روی بازه $[0, \frac{1}{2}]$ داریم $a = 0, b = \frac{1}{2},$ $p = 1, z = 1, r = 0, s = 0, \alpha = 1, \beta = \eta$ و $\Delta = \frac{1}{2}$ بنابراین براساس معادله (۴۲.۴) داریم:

$$y(x) = 2\big(\eta x + (\frac{1}{2} - x)\big) + 6L_{q_0,0}^{-1} N_q y - 12x[L_{q_0,0}^{-1} N_q y]_{x=\frac{1}{2}} \tag{۸۸.۴}$$

با استفاده از الگوریتم روش آدومیان و با پیروی از شکل بازگشتی آن داریم:

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 2(\eta - 1)x + 1 \\
y_1(x) &= 6L_{q_0,0}^{-1} A_{q_0} - 12x[L_{q_0,0}^{-1} A_{q_0}]_{x=\frac{1}{2}} \\
y_2(x) &= 6L_{q_0,0}^{-1} A_{q_1} - 12x[L_{q_0,0}^{-1} A_{q_1}]_{x=\frac{1}{2}} \\
y_n(x) &= 6L_{q_0,0}^{-1} A_{q_{n-1}} - 12x[L_{q_0,0}^{-1} A_{q_{n-1}}]_{x=\frac{1}{2}}, \quad n \ge 2
\end{aligned}$$

و چندجمله‌ای آدومیان برای عامل غیرخطی $N_q y = y^2$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
A_{q_0} &= y_0^2 \\
A_{q_1} &= [2] y_0 y_1 \\
A_{q_2} &= [2] y_0 y_2 + y_1^2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

حال بدست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= 2(\eta-1)x+1\\
y_1(x) &= \frac{24(\eta-1)^2x^4}{[3]\times[4]}+\frac{24(\eta-1)x^3}{[2]\times[3]}+\frac{6x^2}{[2]}-\Big[\frac{3(\eta-1)^2}{[3]\times[4]}+\frac{6(\eta-1)}{[2]\times[3]}+\frac{3}{[2]}\Big]x\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

حال ما تقریبی از $\varphi_m(x)=\sum_{n=0}^{m-1}y_n(x)$ تا مرتبه دوم محاسبه می‌کنیم در نتیجه داریم:

$$
\begin{aligned}
\varphi_2^{(1)} &= \frac{24(\eta-1)^2x^4}{[3]\times[4]}+\frac{24(\eta-1)x^3}{[2]\times[3]}+\frac{6x^2}{[2]}\\
&\quad-\Big[\frac{3(\eta-1)^2}{[3]\times[4]}+\frac{6(\eta-1)}{[2]\times[3]}+\frac{3}{[2]}+2(\eta-1)\Big]x+1
\end{aligned}
$$

یا

$$
\begin{aligned}
y(x) &\approx \frac{24(\eta-1)^2x^4}{[3]\times[4]}+\frac{24(\eta-1)x^3}{[2]\times[3]}+\frac{6x^2}{[2]}\\
&\quad-\Big[\frac{3(\eta-1)^2}{[3]\times[4]}+\frac{6(\eta-1)}{[2]\times[3]}+\frac{3}{[2]}+2(\eta-1)\Big]x+1
\end{aligned}
$$

حال مساله غیرخطی با شرایط مرزی دیریکله (۸۶.۴) و (۸۷.۴) را روی بازه $[\frac{1}{2},1]$ حل می‌کنیم در نتیجه داریم $a=\frac{1}{2}, b=1, p=1, q=1, r=0, s=0, \alpha=\eta, \beta=\frac{1}{4}$ و $\Delta=\frac{1}{2}$ بنابراین براساس معادله (۴۲.۴) داریم:

$$
y(x)=(-2\eta+\frac{1}{2})x+(2\eta-\frac{1}{4})+6L_{q_{1,1}}^{-1}N_qy+12(x-1)[L_{q_{1,1}}^{-1}N_qy]_{x=\frac{1}{2}} \tag{۸۹.۴}
$$

با استفاده از الگوریتم روش آدومیان و با پیروی از شکل بازگشتی آن داریم:

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= (-2\eta+\frac{1}{2})x+(2\eta-\frac{1}{4})\\
y_1(x) &= 6L_{q_{1,1}}^{-1}A_{q_0}+12(x-1)[L_{q_{1,1}}^{-1}A_{q_0}]_{x=\frac{1}{2}}\\
y_2(x) &= 6L_{q_{1,1}}^{-1}A_{q_1}+12(x-1)[L_{q_{1,1}}^{-1}A_{q_1}]_{x=\frac{1}{2}}\\
y_n(x) &= 6L_{q_{1,1}}^{-1}A_{q_{n-1}}+12(x-1)[L_{q_{1,1}}^{-1}A_{q_{n-1}}]_{x=\frac{1}{2}}, \quad n\geq 2
\end{aligned}
$$

مانند قسمت قبل چندجمله‌ای آدومیان برای عامل غیرخطی $N_qy=y^2$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
A_{q_0} &= y_0^2\\
A_{q_1} &= [2]y_0y_1\\
A_{q_2} &= [2]y_0y_2+y_1^2\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

حال بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= (-2\eta+\frac{1}{2})x+(2\eta-\frac{1}{4})\\
y_1(x) &= \frac{6(-2\eta+\frac{1}{2})^2}{[4]\times[3]}(x^4-1)+\frac{6(-2\eta+\frac{1}{2})(4\eta-\frac{1}{2})}{[3]\times[2]}(x^3-1)+\frac{6(2\eta-\frac{1}{4})}{[2]}(x^2-1)\\
&+\Big(-\frac{6(-2\eta+\frac{1}{2})}{[3]}-\frac{6(-2\eta+\frac{1}{2})(4\eta-\frac{1}{2})}{[2]}-6(2\eta-\frac{1}{4})-\frac{45(-2\eta+\frac{1}{2})^2}{[4]\times[3]\times 4}\\
&-\frac{21(-2\eta+\frac{1}{2})(4\eta-\frac{1}{2})}{[3]\times[2]\times 2}-\frac{9(2\eta-\frac{1}{4})}{[2]}+\frac{6(-2\eta+\frac{1}{2})}{[3]}+\frac{6(-2\eta+\frac{1}{2})(4\eta-\frac{1}{2})}{[2]}\\
&+6(2\eta-\frac{1}{4})\Big)(x-1)
\end{aligned}$$

حال ما تقریبی از $\varphi_m(x)=\sum_{n=0}^{m-1}y_n(x)$ تا مرتبه دوم محاسبه می‌کنیم در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}
\varphi_2^{(2)} &= \frac{6(-2\eta+\frac{1}{2})^2}{[4]\times[3]}(x^4-1)+\frac{6(-2\eta+\frac{1}{2})(4\eta-\frac{1}{2})}{[3]\times[2]}(x^3-1)+\frac{6(2\eta-\frac{1}{4})}{[2]}(x^2-1)\\
&+\Big(-\frac{6(-2\eta+\frac{1}{2})}{[3]}-\frac{6(-2\eta+\frac{1}{2})(4\eta-\frac{1}{2})}{[2]}-6(2\eta-\frac{1}{4})-\frac{45(-2\eta+\frac{1}{2})^2}{[4]\times[3]\times 4}\\
&-\frac{21(-2\eta+\frac{1}{2})(4\eta-\frac{1}{2})}{[3]\times[2]\times 2}-\frac{9(2\eta-\frac{1}{4})}{[2]}+\frac{6(-2\eta+\frac{1}{2})}{[3]}+\frac{6(-2\eta+\frac{1}{2})(4\eta-\frac{1}{2})}{[2]}\\
&+6(2\eta-\frac{1}{4})\Big)(x-1)+(-2\eta+\frac{1}{2})x+(2\eta-\frac{1}{4})
\end{aligned}$$

یا

$$\begin{aligned}
y(x) &\approx \frac{6(-2\eta+\frac{1}{2})^2}{[4]\times[3]}(x^4-1)+\frac{6(-2\eta+\frac{1}{2})(4\eta-\frac{1}{2})}{[3]\times[2]}(x^3-1)+\frac{6(2\eta-\frac{1}{4})}{[2]}(x^2-1)\\
&+\Big(-\frac{6(-2\eta+\frac{1}{2})}{[3]}-\frac{6(-2\eta+\frac{1}{2})(4\eta-\frac{1}{2})}{[2]}-6(2\eta-\frac{1}{4})-\frac{45(-2\eta+\frac{1}{2})^2}{[4]\times[3]\times 4}\\
&-\frac{21(-2\eta+\frac{1}{2})(4\eta-\frac{1}{2})}{[3]\times[2]\times 2}-\frac{9(2\eta-\frac{1}{4})}{[2]}+\frac{6(-2\eta+\frac{1}{2})}{[3]}+\frac{6(-2\eta+\frac{1}{2})(4\eta-\frac{1}{2})}{[2]}\\
&+6(2\eta-\frac{1}{4})\Big)(x-1)+(-2\eta+\frac{1}{2})x+(2\eta-\frac{1}{4})
\end{aligned}$$

بوسیله پیوستگی در کل بازه و تطابق مشتق معادلات کوانتومی در نقاط درونی داریم:

$$\frac{d_q\varphi_2^{(1)}(x;\eta)}{d_qx}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{d_q\varphi_2^{(2)}(x;\eta)}{d_qx}\Big|_{x=\frac{1}{2}} \qquad (۹۰.۴)$$

حال با کمک نرم‌افزار میپل η را بدست می‌آوریم، داریم:

$$\eta = -\frac{1}{12}\frac{1}{8q^4+9q^3-15q^2+9q-9}\Big(-36q^5-18q^4-75q^3+27q^2 + \big(1296q^{10}-3120q^9-300q^8+144q^7-7578q^6+6972q^5-186q^4 + 4446q^3+4968q^2+738q+1764\big)^{\frac{1}{2}}-39q+21\Big)$$

حال ما تقریبی از مرتبه دوم جواب معادله (۸۱.۴) و (۸۲.۴) را بیان می‌کنیم:

$$\varphi_2(x) = \varphi_2^{(1)}(x)\Pi(x;0,\frac{1}{2}) + \varphi_2^{(2)}(x)\Pi(x;\frac{1}{2},1).$$

از این‌رو

$$\Pi(x;0,\frac{1}{2}) = H(x;0) - H(x;\frac{1}{2})$$

و

$$\Pi(x;\frac{1}{2},1) = H(x;\frac{1}{2}) - H(x;1)$$

که

$$H(x;0)=\begin{cases}0 & x<0,\\ 1 & x\geq 0.\end{cases}\qquad H(x;\frac{1}{2})=\begin{cases}0 & x<\frac{1}{2},\\ 1 & x\geq \frac{1}{2}.\end{cases}\qquad H(x;1)=\begin{cases}0 & x<1,\\ 1 & x\geq 1.\end{cases}$$

که با قرار دادن η در $\varphi_2(x)$ در نهایت این مثال کامل می‌شود.

فصل ۵

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این پایان‌نامه به توضیح روش تجزیه آدومیان معمولی و روش تجزیه آدومیان تعمیم یافته برای معادلات مرتبه دوم با شرایط مرزی در فرم یک مرحله‌ای پرداختیم و نمودارهای خطا را به دقت بررسی کردیم و برای کاهش خطای روش، معادلات مرتبه دوم با شرایط مرزی را در صورت تعمیم یافته چندمرحله‌ای نشان دادیم و در آخر روش تجزیه آدومیان تعمیم یافته چند مرحله‌ای را در قالب حساب و دیفرانسیل کوانتومی مطرح کردیم که امیدواریم این گام نو، کمکی هر چند کوچک به گرایش‌هایی چون فیزیک ذرات و علوم کامپیوتر انجام دهد.
پیشنهادات برای کارهای آتی:
معادلات مرتبه سوم با شرایط مرزی را می‌توانید با روش تجزیه آدومیان تعمیم یافته حل کنید و باید بررسی شود که آیا می‌توان فرمولی کلی برای معادله از مرتبه دلخواه n پیدا کرد و همچنین می‌توان روش تجزیه آدومیان تعمیم یافته را در حساب بازه‌ای و حساب کسری مورد مطالعه قرار داد.

پیوست آ

لیستی از فرمول‌های انتگرال کوانتومی

$$
\begin{aligned}
\int x^{\alpha}\, d_qx &= \frac{x^{\alpha+1}}{[\alpha+1]} \qquad (\alpha \neq -1)\\
\int \frac{d_qx}{x} &= \frac{q-1}{\log q}\log x\\
\int (x-a)_q^{\alpha}\, d_qx &= \frac{(x-a)_q^{\alpha+1}}{[\alpha+1]} \qquad (\alpha \neq -1)\\
\int (a-x)_q^{\alpha}\, d_qx &= -\frac{q(a-q^{-1}x)_q^{\alpha+1}}{[\alpha+1]} \qquad (\alpha \neq -1)\\
\int \frac{d_qx}{(x-a)_q^{\alpha}} &= \frac{1}{q[1-\alpha](x-qa)_q^{\alpha-1}} \qquad (\alpha \neq -1)\\
\int \frac{d_qx}{(a-x)_q^{\alpha}}\, d_qx &= \frac{1}{[\alpha-1](a-x)_q^{\alpha-1}} \qquad (\alpha \neq -1)\\
\int e_q^{\alpha x}\, d_qx &= \frac{1}{\alpha} e_q^{\alpha x}\\
\int E_q^{\alpha x}\, d_qx &= \frac{q}{\alpha} e_q^{q^{-1}\alpha x}\\
\int \cos_q(\alpha x)\, d_qx &= \frac{1}{\alpha}\sin_q(\alpha x)\\
\int \sin_q(\alpha x)\, d_qx &= -\frac{1}{\alpha}\cos_q(\alpha x)\\
\int \cos_q^{*}(\alpha x)\, d_qx &= \frac{q}{\alpha}\sin_q^{*}(q^{-1}\alpha x)\\
\int \sin_q^{*}(\alpha x)\, d_qx &= -\frac{q}{\alpha}\cos_q^{*}(q^{-1}\alpha x)
\end{aligned}
$$

مراجع

[1] Adomian, G. *"Adomian decomposition method for nonlinear Sturm-Liouville problems."* Surv Math Appl 2 (2007): 11-20.

[2] Biazar, Jafar, M. Ilie, and A. Khoshkenar. *An improvement to an alternate algorithm for computing Adomian polynomials in special cases."* Applied mathematics and computation 173, no. 1 (2006): 582-592.

[3] Cherruault, Y., and G. Adomian. *"Decomposition methods: a new proof of convergence."* Mathematical and Computer Modelling 18, no. 12 (1993): 103-106.

[4] Duan, Jun-Sheng. *"Convenient analytic recurrence algorithms for the Adomian polynomials."* Applied Mathematics and Computation 217, no. 13 (2011): 6337-6348.

[5] Duan, Jun-Sheng, Randolph Rach, Abdul-Majid Wazwaz, Temuer Chaolu, and Zhong Wang. *"A new modified Adomian decomposition method and its multistage form for solving nonlinear boundary value problems with Robin boundary conditions."* Applied Mathematical Modelling 37, no. 20 (2013): 8687-8708.

[6] Duan, Jun-Sheng, Randolph Rach, and Abdul-Majid Wazwaz. *"Solution of the model of beam-type micro-and nano-scale electrostatic actuators by a new modified Adomian decomposition method for nonlinear boundary value problems."* International Journal of Non-Linear Mechanics 49 (2013): 159-169.

[7] Hasan, Yahya Qaid, and Liu Ming Zhu. *"Solving singular boundary value problems of higher-order ordinary differential equations by modified Adomian decomposition method."* Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 14, no. 6 (2009): 2592-2596.

[8] Hosseini, Mohammad Mahdi, and H. Nasabzadeh. *"On the convergence of Adomian decomposition method."* Applied mathematics and computation 182, no. 1 (2006): 536-543.

[9] Kac, Victor, and Pokman Cheung. *Quantum calculus.* Springer Science and Business Media, 2002.

[10] Kumar, Manoj, and Neelima Singh. *"Modified Adomian decomposition method and computer implementation for solving singular boundary value problems arising in various physical problems."* Computers Chemical Engineering 34, no. 11 (2010): 1750-1760.

[11] Ruan, Jing, and Zhengyi Lu. *"A modified algorithm for the Adomian decomposition method with applications to Lotka–Volterra systems."* Mathematical and Computer Modelling 46, no. 9 (2007): 1214-1224.

[12] Somali, Sennur, and Guzin Gokmen. *"Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method. 1994."* Klumer, Boston.

[13] Wazwaz, Abdul-Majid. *"Adomian decomposition method for a reliable treatment of the Emden–Fowler equation."* Applied Mathematics and Computation 161, no. 2 (2005): 543-560.

[14] Wazwaz, Abdul-Majid. *"Adomian decomposition method for a reliable treatment of the Emden–Fowler equation."* Applied Mathematics and Computation 161, no. 2 (2005): 543-560.

[15] Zeng, Yu Xiang, Yi Zeng, and Guo-Cheng Wu. *"Application of the Variational Iteration Method to the Initial Value Problems of Q-difference Equations-Some Examples."* Communications in Numerical Analysis 2013 (2013).

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

الگوریتم .... algorithm
انتگرال جکسون .... Jackson integral
اویلر .... Euler
بسط تیلور .... Taylor expansion
پاد مشتق .... antiderivative
پله‌ای .... boxcar
تابع نمایی .... exponential function
تحلیل خطا .... error analysis
جورج آدومیان .... George Adomian
چندجمله‌ای آدومیان .... Adomian polynomial
دنباله کوشی .... Cauchy sequence
روش تجزیه آدومیان .... Adomian decomposition method
سری تیلور کوانتومی .... quantum Taylor series
شبه کوانتوم .... quantum analogues
شرایط مرزی .... boundary condition
فرمول دوجمله‌ای گاوس .... Gauss's binomial formula
جورج آدومیان .... George Adomian
فرمول دوجمله‌ای هنس .... Heine's binomial formula
فضای هیلبرت .... Hilbert space
قانون پاسکال .... Pascal rule
معکوس پذیر .... invertible

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adomian decomposition method	روش تجزیه آدومیان
Adomian polynomial	چندجمله‌ای آدومیان
algorithm	الگوریتم
antiderivative	پاد مشتق
boundary condition	شرایط مرزی
boxcar	پله‌ای
Cauchy sequence	دنباله کوشی
error analysis	تحلیل خطا
Euler	اویلر
exponential function	تابع نمایی
Gauss's binomial formula	فرمول دوجمله‌ای گاوس
George Adomian	جورج آدومیان
Heine's binomial formula	فرمول دوجمله‌ای هنس
Hilbert space	فضای هیلبرت
invertible	معکوس پذیر
Jackson integral	انتگرال جکسون
Pascal rule	قانون پاسکال
quantum analogues	شبه کوانتوم
quantum Taylor series	سری تیلور کوانتومی
Taylor expansion	بسط تیلور

Abstract

Linear and non-linear differential equations appear in many engineering problems. although many of these problems can be solved using analytical and numerical methods, but there is another problems that can be solved using analytical and numerical or not resolved, or to solve complex. hence the semi-analytical methods can be a good alternative to solve this problems, in this dissertation we try to second order non-linear equations to solve adomian decomposition method however, about this adomian decomposition method can be said that this method solution to obtain an infinite series that converges to the real answer, in the end we try the method in the form bring up to format calculus quantum.

keywords: Semi-analytical; Adomian decomposition method; Quantum calculus.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted For The
Degree of master of Science in
Applied Mathematics

Solving Nonlinear Differential Equations By Modified Adomian Decomposition Method

Ramezan Esmaeili

Supervisor
Dr.M. ghovatmand

Advisor
Dr.J. vahidi

January 2016