دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

بررسی عناصر خودتوان نیم‌مرکزی در یک حلقه

لیلا رضائی

استاد راهنما

دکتر ابراهیم هاشمی

استاد مشاور

دکتر سیدرضا حجازی

بهمن ۱۳۹۴

این پایان نامه ناچیز را

با چشمانی سرشار از شرم با احترام به

شهید دکتر مصطفی چمران

که این گفتارش

ای خدا، من باید از نظر علم از همه برتر باشم،
تا مبادا که دشمنان مرا از این راه طعنه زنند.
باید به آن سنگدلانی که علم را بهانه کرده و به دیگران فخر می‌فروشند،
ثابت کنم که خاک پای من هم نخواهند شد.
باید همه آن تیره دلان مغرور و متکبر را به زانو در آورم،
آن گاه خود خاضع ترین و افتاده ترین فرد روی زمین باشم.

سرلوحه ی من در دنیای علم است و

شهدای گمنام دانشگاه

که مایه ی آرامش اند.

پیشکش می‌کنم.

سپاس گزاری...

سپاس پروردگاری که بود و هست و خواهد بود

که مرا که نبودم و هستم و نخواهم بود جان عطا فرمود

در سرزمینی آبیاری شده از خون و عشق و همت مردانش برای اسلام جا داد

رشدم را در خانواده ایی از جنس خاک نهاد

معلمانی از جنس آفتاب نصیبم نمود

اساتیدی از جنس باران سویم نازل کرد

در میان دوستانی به زلالی شبنم غرقم کرد

سپاس ای که بی کران ریاضی دنیای من، در نظرت قطره ایی بیش نیست

لیلا رضائی

بهمن ۱۳۹۴

تعهدنامه

اینجانب **لیلا رضائی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **بررسی عناصر خودتوان نیم‌مرکزی در یک حلقه**، تحت راهنمایی **دکتر ابراهیم هاشمی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارائه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام "دانشگاه صنعتی شاهرود" یا "Shahrood University of Technology" به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده) است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

لیلا رضائی
بهمن ۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان‌نامه ثابت می‌کنیم اگر حلقه‌ی R دارای مجموعه‌ی متناهی کامل از خودتوان‌های متعامد اولیه باشد، آنگاه حلقه‌ی R حاصل‌ضرب مستقیم متناهی از حلقه‌های همبندی است که دقیقا مجموعه‌ی $M(R)$ آنها ضربی بسته باشد. همچنین نشان می‌دهیم که اگر R حلقه‌ای منظم (فون‌نیومن) با مجموعه‌ی $M(R)$ ضربی بسته باشد، آنگاه هر خودتوان اولیه در حلقه‌ی R مرکزی است ولی اگر حلقه‌ی R نیم‌مورثی یا نیم‌منظم باشد، آنگاه همه خودتوان‌های اولیه در حلقه‌ی R مرکزی نیستند. همچنین اگر مجموعه‌ی $M(R)$ ضربی بسته باشد، آنگاه دو خودتوان e و f در حلقه‌ی R مزدوج هستند.

ثابت می‌کنیم مجموعه‌ی خودتوان‌های مرکزی حلقه‌های یکدار، تشکیل یک جبر بولی می‌دهند و این نتیجه را برای حلقه‌هایی که دارای خودتوان‌های جابه‌جاپذیر تعمیم یافته هستند، توسیع می‌دهیم.

نشان می‌دهیم که $I(R)$ یک مجموعه‌ی جمع‌پذیر متناهی است اگر و فقط اگر $M(R) \setminus \{۰\}$ یک مجموعه‌ی کامل از خودتوان‌های مرکزی اولیه باشد و $\mathrm{char}(R) = ۲$ و هر خودتوان ناصفر از حلقه‌ی R را بتوانیم به صورت حاصل‌جمعی از خودتوان‌های اولیه متعامد حلقه‌ی R بنویسیم.

برای هر حلقه‌ی منظم R، به‌طوری‌که $I(R)$ یک مجموعه‌ی جمع‌پذیر متناهی باشد، اگر گروه ضربی یکه‌های R آبلی باشد، آنگاه حلقه‌ی R یک حلقه‌ی جابه‌جایی است.

همچنین ثابت می‌کنیم که $e \in S_l(R)$ اگر و فقط اگر برای هر پوچ‌توان $r \in R$، $re = ere$ اگر و فقط اگر برای هر خودتوان $f \in I(R)$، $fe = efe$ اگر و فقط اگر برای هر خودتوان $f \in I(R)$ که با e یکریخت است، $fe = efe$.

همچنین نشان می‌دهیم حلقه‌ی R یک مجموعه‌ی کامل از خودتوان‌های اولیه مرکزی دارد و هر خودتوان نیم‌مرکزی چپ ناصفر را می‌توانیم به‌صورت حاصل‌جمع متناهی از خودتوان‌های اولیه نیم‌مرکزی چپ متعامد بنویسیم و برای هر خودتوان ناصفر $e \in S_l(R)$، حلقه‌ی eRe دارای مجموعه‌ی کامل از خودتوان‌های اولیه است.

کلمات کلیدی: حلقه‌های بولی، حلقه‌های همبند، خودتوان‌های اولیه، خودتوان‌های نیم‌مرکزی متعامد

پیش‌گفتار

نخستین ویژگی‌های خودتوان‌ها در حلقه‌ها، توسط ریاضیدان و جبردان آمریکایی، چارلز ساندرز پیرس[۱۱][۱]مورد بررسی قرار گرفته است. مطالعه در مورد خودتوان‌های نیم‌مرکزی در حلقه‌ها، به‌طور خاص از سال ۱۹۷۶ میلادی آغاز گردید. این مطالعات در سال ۱۹۸۳ میلادی، با ارائه مقاله‌ای با عنوان "خودتوان‌ها و ایده‌آل‌های کاملا نیم‌اول" توسط بیرکنمیر[۲] دنبال شد. در سال ۲۰۰۰ میلادی با ارائه مقاله‌ای دیگر توسط بیرکنمیر و هزلای[۳] و جین‌یانگ‌کم[۴] و جی‌پارك[۵]، خودتوان‌های نیم‌مرکزی تقلیل‌یافته و حلقه‌های نیم‌مرکزی تقلیل‌یافته[۱] معرفی شدند و تعدادی از ویژگی‌های آنها مورد بررسی قرار گرفت. دولزن[۶][۳]در سال ۲۰۰۶ میلادی ثابت کرد که حلقه‌ی متناهی R با مجموعه‌ی $M(R)$ ضربی بسته، یک حاصل‌ضرب مستقیم از حلقه‌های موضعی است. گروور[۷][۹] و همکارانش در سال ۲۰۰۹ میلادی تعمیم نتیجه‌ی دولزن را به‌دست آوردند به‌طوری‌که اگر حلقه‌ی R دارای یک مجموعه‌ی کامل از خودتواهای اولیه باشد، آنگاه مجموعه‌ی $M(R)$ ضربی بسته است اگر و فقط اگر حلقه‌ی R حاصل‌ضرب مستقیم متناهی از حلقه‌های همبند باشد. در حالی‌که، جی‌هان[۸] [۷] و همکارش ثابت کردند که حلقه‌ی R، حاصل‌ضرب مستقیم (متناهی نیست) چند حلقه‌ی همبند شماراست که مجموعه‌ی $M(R)$ آنها می‌تواند ضربی بسته نباشد. در سال ۲۰۱۲ میلادی کابلّو[۹]، کابررا[۱۰]و نیتّو[۱۱] با ارائه مقاله‌ای به بررسی "خودتوان‌های نیم‌مرکزی در یک حلقه‌ی اول به‌طور مرکزی بسته" پرداختند.

در فصل اول به بیان تعاریف و پیش‌نیازهایی که در فصول بعد مورد نیاز است، می‌پردازیم.

در فصل دوم، ثابت می‌کنیم اگر R حلقه‌ای باشد که بتوانیم ۱ را به صورت حاصل‌جمع متناهی از خودتوان‌های اولیه متعامد بنویسیم و مجموعه‌ی $M(R)$ضربی بسته باشد، آنگاه هر خودتوان از حلقه‌ی R مرکزی است و حلقه‌ی R یک حاصل‌ضرب مستقیم متناهی از حلقه‌های همبند است.

نشان می‌دهیم اگر مجموعه‌ی $I(R)$ ضربی بسته باشد، آنگاه $I(R) \subseteq Z(R)$. حال این سوال پیش می‌آید که اگر مجموعه‌ی $M(R)$ ضربی بسته باشد، آیا $M(R) \subseteq Z(R)$خواهد بود؟ پاسخ این است که اگر R حلقه‌ی منظم (ون‌نیومن) باشد، آنگاه $M(R) \subseteq Z(R)$ اما اگر R حلقه‌ی نیم‌منظم یا حلقه‌ی نیم‌مورثی باشد، آنگاه $M(R) \nsubseteq Z(R)$.

بیان می‌کنیم اگر مجموعه‌ی $M(R)$ ضربی بسته باشد، آنگاه برای هر خودتوان ناصفر $e \in M(R)$

[۱] Charles Sanders Peirce

[۲] Birkenmeier

[۳] Heatherly

[۴] Jim Yong Kim

[۵] J Park

[۶] Dolzan

[۷] Grover

[۸] J Han

[۹] Cabello

[۱۰] Cabrera

[۱۱] Nieto

و $u\in U(R)$، $eue\in U(ere)$ که $(eue)^{-1}=eu^{-1}e$.

در فصل سوم، در شبکه‌های شرکت‌پذیر مربوط به حلقه‌های یکدار اساسا به ایده‌آل‌های اصلی راست (چپ) می‌پردازیم، یعنی $\{aR|a\in R\}$ که با رابطه‌ی شمول مرتب شده است.

$\{aR|a\in R\}=\{eR|e\in I(R)\}$ با روابط $\vee$ و $\wedge$ تشکیل یک شبکه شرکت‌پذیر متمم‌دار (یعنی جبر بولی یا حلقه‌ی بولی) را می‌دهد که این یک زیرشبکه از شبکه‌ی ایده‌آل‌های راست حلقه‌ی R است. پوچ‌سازهای راست در حلقه‌ی R همواره تشکیل یک شبکه (کامل) را می‌دهند که معمولا زیرشبکه‌ای از ایده‌آل‌های راست حلقه‌ی R نیستند.

اگر $(I(R),\leq)$ یک مجموعه‌ی جزئا مرتب باشد، در این صورت $B(R)=Z(R)\cap I(R)$ مجموعه‌ای از همه خودتوان‌های مرکزی است که با روابط $\inf\{e,f\}=ef$ و $\sup\{e,f\}=e+f-ef$ (با ضرب حلقه‌ها و جمع خاص $e\boxplus f=e+f-2ef=(e-f)^2$) تشکیل یک جبر بولی (و همچنین یک حلقه‌ی بولی و یا یک شبکه شرکت‌پذیر متمم‌دار) را می‌دهد.

نشان می‌دهیم در مجموعه‌ی جزئا مرتب $(I(R),\leq)$ دو خودتوان e و f دارای بزرگترین کران پایین و کوچکترین کران بالا هستند که $\inf\{e,f\}\in<e,f>_s$ اگر و فقط اگر e و f خودتوان‌های جابه‌جاپذیر تعمیم یافته باشند.

همچنین خودتوان‌های مجموعه‌ی جزئا مرتب $(I(R),\leq)$ تعمیم یافته جابه‌جاپذیر هستند اگر و فقط اگر هر خودتوان مجموعه‌ی $I(R)$ مرکزی باشد

در فصل چهارم، بررسی می‌کنیم که اگر مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر باشد، آنگاه مجموعه‌ی $M(R)$ در مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر است اما عکس آن درست نیست.

همچنین مجموعه‌ی $I(R)$ جابه‌جایی است اگر و فقط اگر مجموعه‌ی $I(R)$ ضربی بسته باشد اگر وفقط اگر $I(R)\subseteq Z(R)$.

اگر مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر باشد، آنگاه $I(R)\subseteq Z(R)$ اما عکس آن ممکن است درست نباشد (به‌طور مثال $\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_3\oplus\mathbb{Z}_3$). همچنین نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر است اگر و فقط اگر مجموعه‌ی $I(R)$ جابه‌جایی باشد و $\mathrm{char}(R)=2$. همچنین مجموعه‌ی $M(R)$ در مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر است اگر و فقط اگر $M(R)$ مجموعه‌ی همه‌ی خودتوان‌های متعامد دوبه‌دو اولیه باشد.

فرض می‌کنیم R حلقه‌ای باشد که مجموعه‌ی $I(R)\neq\{0\}$. ثابت می‌کنیم که اگر $I(R)$ یک مجموعه‌ی جمع‌پذیر متناهی از حلقه‌ی R باشد، آنگاه کوچکترین خودتوان اولیه وجود دارد. همچنین نشان می‌دهیم $I(R)$ یک مجموعه‌ی جمع‌پذیر متناهی از حلقه‌ی R است اگر و فقط اگر $M(R)\backslash\{0\}$ یک مجموعه‌ی کامل ازخودتوان‌های مرکزی مینیمال باشد که $\mathrm{char}(R)=2$ و حلقه‌ی R کاملا اساسی باشد.

همچنین برای حلقه‌ی منظم R که $I(R)$ مجموعه‌ی جمع‌پذیر متناهی است، اگر G گروه آبلی یکه‌های حلقه‌ی R باشد، آنگاه حلقه‌ی R جابه‌جایی است.

در فصل پنجم، نشان می‌دهیم که خودتوان $e\in R$ نیم‌مرکزی چپ است اگر و فقط اگر برای هر $a\in R$، $ae=eae$. همچنین بیان می‌کنیم که شرایط زیر معادل هستند.

(۱)خودتوان $e \in R$، نیم‌مرکزی چپ (راست) است.
(۲)برای هر $r \in U(R)$، $re = ere$ ($er = ere$).
(۳) برای هر پوچ‌توان $r \in R$، $re = ere$ ($er = ere$).
(۴)برای هر خودتوان $f \in R$، fe (ef) یک خودتوان است.
(۵)برای هر خودتوان $f \in R$، $ef = efe$ ($fe = efe$).
(۶)برای هر خودتوان $f \in R$ که با e یکریخت است، $fe = efe$($ef = efe$).
(۷)برای هر خودتوان $f \in R$ که با e یکریخت است به‌طوری‌که n مقدار صحیح مثبت باشد، $(fe)^n = (efe)^n$ ($(ef)^n = (efe)^n$).

ثابت می‌کنیم:

(۱) مجموعه‌ی $M_l(R)$ ($M_r(R)$) در مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر است اگر و فقط اگر مجموعه‌ی $M_l(R)$ ($M_r(R)$) متعامد باشد.

(۲)فرض می‌کنیم $N \subseteq J(R)$ یک ایده‌آل از حلقه‌ی R باشد که خودتوان‌ها در حلقه‌ی R/N را می‌توانیم به حلقه‌ی R بالا ببریم.

آ. اگر مجموعه‌ی $S_l(R)$ ($S_r(R)$) جابه‌جایی باشد، آنگاه مجموعه‌ی $S_l(R/N)$ ($S_r(R/N)$) در مجموعه‌ی $I(R/N)$ جمع‌پذیر است اگر و فقط اگر مجموعه‌ی $S_l(R)$ ($S_r(R)$) در مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر باشد.

ب.اگر مجموعه‌ی $M_l(R)$ ($M_r(R)$) جابه‌جایی باشد، آنگاه مجموعه‌ی $M_l(R/N)$ ($M_l(R/N)$) در مجموعه‌ی $I(R/N)$ جمع‌پذیر است اگر وفقط اگر مجموعه‌ی $M_l(R)$ ($M_r(R)$) در مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر باشد.

در ادامه، بررسی می‌کنیم:

که هر خودتوان نیم مرکزی چپ ناصفر از حلقه‌ی R، حاصل‌جمع خودتوان‌های اولیه نیم‌مرکزی چپ متعامد از حلقه‌ی R است و برای هر خودتوان ناصفر $e \in R$، حلقه‌ی eRe دارای مجموعه‌ی کامل از خودتوان‌های اولیه مرکزی است.

(۲) حلقه‌ی R دارای مجموعه‌ی کامل T از خودتوان‌های اولیه است و هر مجموعه‌ی کامل از خودتوان‌های اولیه مرکزی در T وجود دارد و مجموعه‌ی T شامل همه‌ی خودتوان‌های اولیه مرکزی حلقه‌ی R است.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ تعاریف و مفاهیم پیش‌نیاز

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $a \in R$. عنصر a را خودتوان می‌نامیم، هرگاه $a^۲ = a$. خودتوان a را نابدیهی می‌نامیم، هرگاه $a \neq ۰$ و $a \neq ۱$. مجموعه‌ی تمام خودتوان‌های غیریکه ناصفر را با علامت $I(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. دو خودتوان $e, f \in R$ را متعامد می‌نامیم، هرگاه $ef = fe = ۰$.

تعریف ۳.۱.۱. مجموعه‌ی S از خودتوان‌های حلقه‌ی R را متعامد می‌نامیم، هرگاه برای هر $e, f \in R$، $ef = fe = ۰$.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. خودتوان $e \in R$ را اولیه می‌نامیم، هرگاه نتوانیم آن را به صورت حاصل‌جمع دو خودتوان متعامد ناصفر بنویسیم. مجموعه‌ای شامل تمام خودتوان‌های اولیه و صفر R را با علامت $M(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱. مجموعه‌ی متناهی و متعامد S از خودتوان‌های اولیه در حلقه‌ی R را یک مجموعه‌ی کامل از خودتوان‌های اولیه می‌نامیم، هرگاه مجموع اعضای آن برابر ۱_R شود.

۲.۱ حلقه‌هایی با مجموعه‌ی ضربی بسته از خودتوان‌های اولیه

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. زیرمجموعه‌ای از حلقه‌ی R را ضربی بسته می‌نامیم، هرگاه نسبت به عمل ضرب حلقه بسته باشد.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. دو خودتوان e و f را یکریخت می‌نامیم، هرگاه eR و fR به عنوان R-مدول راست یکریخت باشند.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این‌صورت رادیکال جیکوبسن چپ حلقه‌ی R را چنین تعریف می‌کنیم

$$J_l(R) = \bigcap_m m$$

که در آن m ایده‌آل ماکسیمال چپ است. به همین ترتیب رادیکال جیکوبسن راست حلقه‌ی R را نیز تعریف می‌کنیم

$$J_r(R) = \bigcap_m m$$

که در آن m ایده‌آل ماکسیمال راست است.

قرارداد: فرض کنیم $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از R-مدول‌ها باشد. حاصل‌جمع این خانواده را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\bigoplus_{i\in I} M_i = \{(x_i) : x_i \in M_i \text{ و } x_i\text{ها ناصفرند تعداد متناهی از }\}$$

قرارداد: فرض کنیم $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای ناتهی از R-مدول‌ها باشد. حاصل‌ضرب این خانواده را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\prod_{i\in I} M_i = \{(x_i) : x_i \in M_i, i \in I \text{ برای هر }\}$$

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $a \in R$. عنصر a را یک مقسوم‌علیه صفر چپ می‌نامیم، هرگاه عنصر ناصفر $x \in R$ وجود داشته باشد که $ax = ۰$. به‌طور مشابه مقسوم‌علیه صفر راست را تعریف می‌کنیم. عنصر $a \in R$ را یک مقسوم‌علیه صفر می‌نامیم، هرگاه a یا یک مقسوم‌علیه صفر چپ یا یک مقسوم‌علیه صفر راست باشد . همچنین عنصر $a \in R$ را یک مقسوم‌علیه صفر دو طرفه می‌نامیم، هرگاه a هم یک مقسوم‌علیه صفر چپ و هم مقسوم‌علیه صفر راست باشد.

قرارداد: در رابطه $\leq$، $e \leq f$ (یا $f \geq e$) را $ef = fe = e$ معنی می‌کنیم، در حالت خاص $e < f$ (یا $f > e$) را $e \leq f$ و $e \neq f$ معنی می‌کنیم.

تعریف ۵.۲.۱. خودتوان ناصفر e را مینیمال می‌نامیم، هرگاه با رابطه $\leq$ هیچ خودتوانی بین صفر و e وجود نداشته باشد.

تعریف ۶.۲.۱. حلقه‌ی R را نیم‌مورثی راست می‌نامیم، هرگاه همه ایده‌آل‌های راست متناهی تولید شده آن تصویری باشند. به‌طور مشابه حلقه‌ی نیم‌مورثی چپ را تعریف می‌کنیم. حلقه‌ی R را نیم‌مورثی می‌نامیم، هرگاه هم نیم‌مورثی راست باشد هم نیم‌مورثی چپ.

تعریف ۷.۲.۱. حلقه‌ی R را منظم (ون‌نیومن) می‌نامیم، هرگاه برای هر $a \in R$، عنصر $b \in R$ وجود داشته باشد که $a = aba$.

تعریف ۸.۲.۱. حلقه‌ی R را نیم‌منظم می‌نامیم، هرگاه حلقه $R/J(R)$ منظم باشد.

تعریف ۹.۲.۱. حلقه‌ی R را همبند می‌نامیم، هرگاه جز صفر و یک خودتوان دیگری نداشته باشد.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $a \in R$. عنصر a از حلقه‌ی R را وارون‌پذیر راست می‌نامیم، هرگاه عضوی مانند b از R وجود داشته باشد که $ab = ۱$. به‌طور مشابه وارون‌پذیر چپ را تعریف می‌کنیم. عنصر a از حلقه‌ی R را وارون‌پذیر می‌نامیم، هرگاه a یک وارون‌پذیر راست یا یک وارون‌پذیر چپ باشد. همچنین عنصر $a \in R$ را یک وارون‌پذیر دوطرفه می‌نامیم، هرگاه a هم وارون‌پذیر چپ باشد و هم وارون‌پذیر راست. مجموعه عناصر وارون‌پذیر R را با $U(R)$ نمایش می‌دهیم.

قرار داد: حلقه‌ی تمام ماتریس‌های ۲ × ۲ روی R را با $M_۲(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $x \in R$. عنصر x از حلقه‌ی R را مرکزی می‌نامیم، هرگاه برای هر $g \in R$، $xg = gx$. مجموعه‌ی تمام عناصر مرکزی R را مرکز حلقه‌ی R می‌نامیم و به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$Z(R) = \{x \in R | xg = gx, g \in R\}$$

به‌عبارت دیگر، مرکز حلقه، مجموعه‌ی تمام اعضایی از حلقه‌ی R است که با هر عضو از حلقه‌ی R جابه‌جا شود.

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه و X زیرمجموعه‌ای از حلقه‌ی R باشد. پوچ‌ساز راست مجموعه‌ی X را با علامت $\mathrm{ann}_r(X)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathrm{ann}_r(X) = \{a \in R | Xa = ۰\}$$

همچنین پوچ‌ساز چپ مجموعه‌ی X را با علامت $\mathrm{ann}_l(X)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\mathrm{ann}_l(X) = \{a \in R | aX = ۰\}$$

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنیم N ایده‌آلی در حلقه‌ی R باشد. گوییم خودتوان x در حلقه‌ی R/N را می‌توانیم به حلقه‌ی R بالا ببریم، هرگاه $e \in I(R)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که تصویر آن تحت نگاشت طبیعی، برابر با x شود.

مثال ۱۴.۲.۱. فرض کنیم R حلقه‌ی اعداد صحیح و $N = <۶>$. $۳ + N \in I(R/N)$ اما تصویر هیچ عضو خودتوانی در حلقه‌ی R تحت نگاشت طبیعی $R \longrightarrow R/N$، برابر با $۳ + N$ نیست.

مثال ۱۵.۲.۱. فرض کنیم R حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی ۲×۲ بر میدان $\mathbb{Z}_۲$ باشد.

$$J(R) = \left\{ \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \right\}$$

خودتوان‌های حلقه‌ی $R/J(R)$ را می‌توانیم به حلقه‌ی R بالا ببریم.

۳.۱ حلقه‌هایی با شبکه‌هایی از خودتوان‌ها

تعریف ۱.۳.۱. مجموعه جزئا مرتب L که در آن هر جفت از عناصر دارای کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین باشد را شبکه (مشبکه) می‌نامیم، اگر $a, b \in L$، آنگاه کوچکترین کران بالای a و b را با $a \vee b$ نمایش می‌دهیم و "وست" (یا پیوند) a و b می‌نامیم. بزرگترین کران پایین a و b را با $a \wedge b$ نمایش می‌دهیم و "رسند" a و b می‌نامیم.

مثال ۲.۳.۱. مجموعه مرتب $(\mathbb{R}, \leq)$ یک شبکه است. زیرا برای هر a و b داریم $a \leq b$ یا $b \leq a$. حال فرض می‌کنیم $a \leq b$ پس $\inf\{a, b\} = a$ و $\sup\{a, b\} = b$.

قرارداد: فرض کنیم L یک شبکه باشد. اگر $a, b \in L$، آنگاه $a \vee b$ عضوی از L است. بنابراین $\vee$ یک عمل دوتایی روی L است. به‌طور مشابه $\wedge$ نیز یک عمل دوتایی روی L است. در این‌صورت شبکه L را به‌صورت $(L, \wedge, \vee)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۳.۳.۱. *اگر L یک شبکه باشد، آنگاه برای هر $a, b, c \in L$ اعمال دوتایی $\vee$ و $\wedge$ در شرایط زیر صدق می‌کنند:*

(الف) $(L, \wedge, \vee)$ *جابه‌جاپذیر است، یعنی* $a \wedge b = b \wedge a$ *و* $a \vee b = b \vee a$.

(ب) $(L, \wedge, \vee)$ *شرکت‌پذیر است، یعنی* $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ *و* $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

(ج) قوانین جذبی در $(L, \wedge, \vee)$ *برقرار است، یعنی* $a \wedge (a \vee b) = a$ *و* $a \vee (a \wedge b) = a$.

(د) قوانین خودتوانی در $(L, \wedge, \vee)$ *برقرار است، یعنی* $a \vee a = a$ *و* $a \wedge a = a$

مثال ۴.۳.۱. $(\mathbb{R}, \sup, \inf)$ یک شبکه است.

تعریف ۵.۳.۱. شبکه $(L, \wedge, \vee)$ و مجموعه‌ی ناتهی $M \subseteq L$ را در نظر می‌گیریم. مجموعه‌ی M را زیرشبکه L می‌نامیم، هرگاه M همراه با تحدید اعمال $\vee$ و $\wedge$ یک شبکه باشد.

مثال ۶.۳.۱. (۱) شبکه $(\mathbb{R},\leq)$ را در نظرمی‌گیریم. اگر $X=\{۱,۲,\cdots,n\}$، در این‌صورت $(\mathbb{Z},\leq)$ و $(\mathbb{N},\leq)$ و $(X,\leq)$ زیرشبکه‌های آن هستند.
(۲) برای هر $n\in\mathbb{N}$ اگر $D_n=\{k\in\mathbb{N}:k|n\}$، آنگاه $(D_n,|)$ زیرشبکه $(\mathbb{N},|)$ است ولی اگر $X=\{۱,۲,\cdots,n\}$، آنگاه $(X,|)$ زیرشبکه $(\mathbb{N},|)$ نیست.
(۳) اگر $X=\{۱,۲,۳\}$ در این‌صورت $M=\{\emptyset,\{۱\},\{۲\}\}$ زیرشبکه $(P(X),\cap,\cup)$ نیست.

تعریف ۷.۳.۱. شبکه L را شرکت‌پذیر می‌نامیم، هرگاه برای هر $a,b,c\in L$ داشته باشیم

$$a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c) \text{و} a\vee(b\wedge c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$$

مثال ۸.۳.۱. شبکه $(P(X),\cap,\cup)$ شرکت‌پذیر است.

تعریف ۹.۳.۱. فرض کنیم L یک شبکه با بزرگترین عضو ۱ و کوچکترین عضو ۰ باشد. اگر $a\in L$، آنگاه $۰\leq a\leq ۱$. بنابراین داریم $a\wedge ۱=a$ و $a\vee ۰=a$.
شبکه L با بزرگترین عضو ۱ و کوچکترین عضو ۰ را شبکه متمم‌دار می‌نامیم، هرگاه برای هر $a\in L$ عضو a' وجود داشته باشد به‌طوری‌که $a\wedge a'=۰$ و $a\vee a'=۱$.

تعریف ۱۰.۳.۱. شبکه‌ای با بزرگترین عضو ۱ و کوچکترین عضو ۰ که متمم‌دار و شرکت‌پذیر باشد را جبر بولی می‌نامیم.

مثال ۱۱.۳.۱. شبکه $(P(X),\cap,\cup)$ جبر بولی است.

تعریف ۱۲.۳.۱. حلقه‌ی R را آبلی می‌نامیم، هرگاه هر خودتوان آن مرکزی باشد.

تعریف ۱۳.۳.۱. ساختمان جبری $(A,*)$ که در آن $*$ شرکت‌پذیر باشد را نیم‌گروه می‌نامیم. نیم‌گروهی که دارای عنصر همانی باشد را تکواره می‌نامیم. تکواره‌ای را که هر عضو آن دارای وارون باشد را گروه می‌نامیم.

قرارداد: برای دو خودتوان e و f زیر نیم‌گروهی از تکواره ضربی از حلقه را به‌صورت $<e,f>_s$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۴.۳.۱. برای خودتوان e، $e'=۱-e$ را متمم e می‌نامیم.

تعریف ۱۵.۳.۱. فرض کنیم e و f دو خودتوان از حلقه‌ی R باشند. در این‌صورت کمترین مقدار صحیح مثبت مانند n که $(ef)^n=(fe)^n$ یا $(ef)^ne=(fe)^nf$ را شاخص جابه‌جایی برای خودتوان‌های e و f می‌نامیم.

تعریف ۱۶.۳.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. حلقه‌ی R را بولی می‌نامیم، هرگاه همه‌ی عناصر آن خودتوان باشند.

تعریف ۱۷.۳.۱. خودتوان‌های e و f را جابه‌جاپذیر تعمیم یافته می‌نامیم، هرگاه مقدار صحیح مثبت مانند n وجود داشته باشد که $(ef)^n = (fe)^n$ یا $(ef)^n e = (fe)^n f$.

تعریف ۱۸.۳.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. حلقه‌ی R را تقلیل‌یافته می‌نامیم، هرگاه حلقه‌ی R هیچ عنصر پوچ‌توان ناصفری نداشته باشد یا به عبارتی دیگر اگر $a^۲ = ۰$، آنگاه $a = ۰$.

۴.۱ مجموعه‌ی جمع‌پذیر متناهی از خودتوان‌ها در حلقه‌ها

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. کوچکترین مقدار صحیح مثبت مانند n را مشخصه حلقه می‌نامیم، هرگاه برای هر $x \in R$، $n.x = ۰$ و آن را با $\mathrm{char}(R)$ نمایش می‌دهیم. اگر $n \in \mathbb{N}$ وجود نداشته باشد که برای هر $x \in R$ ، $n.x = ۰$ آنگاه گوییم که $\mathrm{char}(R) = ۰$.

نتیجه ۲.۴.۱. *فرض کنیم R یک حلقه‌ی یکدار باشد، در این‌صورت*

$$\mathrm{char}(R) = \{n \in \mathbb{N} | n \cdot ۱ = ۰\}$$

تعریف ۳.۴.۱. مجموعه‌ی $I(R)$ را جمع‌پذیر می‌نامیم، هرگاه برای هر $e, f \in R$ که $e \neq f$، $e + f \in I(R)$ یا به عبارت دیگر $ef = -fe$.

مثال ۴.۴.۱. اگر R یک حلقه‌ی بولی باشد، آنگاه $I(R)$ جمع پذیر است.

تعریف ۵.۴.۱. مجموعه‌ی $M(R)$ را در مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر می‌نامیم، هرگاه برای هر $e, f \in M(R)$ $(e \neq f)$، $e + f \in I(R)$.

مثال ۶.۴.۱. اگر حلقه‌ی R یک حلقه‌ی بولی یا حاصل‌ضرب مستقیم از حلقه‌های موضعی باشد، آنگاه مجموعه‌ی $M(R)$ در مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر است.

تعریف ۷.۴.۱. خودتوان ناصفر e را کاملا اساسی می‌نامیم، هرگاه بتوانیم e را به صورت حاصل‌جمعی از خودتوان‌های اولیه‌ی دوبه‌دو متعامد بنویسیم.

تعریف ۸.۴.۱. حلقه‌ی R را کاملا اساسی می‌نامیم، هرگاه همه‌ی خودتوان‌های آن کاملا اساسی باشند.

قرارداد: حلقه‌ی تمام ماتریس‌های ۲×۲ بالا مثلثی روی $\mathbb{Z}_۲$ را با $T_۲(\mathbb{Z}_۲)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۹.۴.۱. حاصل‌ضرب مستقیم تعداد متناهی از حلقه‌های موضعی و همچنین $T_2(\mathbb{Z}_2)$ حلقه‌های کاملا اساسی هستند.

تعریف ۱۰.۴.۱. حلقه‌ی R را یکه-منظم می‌نامیم، هرگاه برای هر $a \in R$، عنصر $u \in U(R)$ وجود داشته باشد که $a = aua$.

تعریف ۱۱.۴.۱. حلقه‌ی R را قویا منظم می‌نامیم، هرگاه برای هر $a \in R$، $r \in R$ وجود داشته باشد به طوری‌که $a = ra^2$.

تعریف ۱۲.۴.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد به‌طوری‌که $I(R)$ یک مجموعه‌ی جمع‌پذیر متناهی باشد. در این‌صورت هر خودتوان ناصفر $e \in I(R)$ را می‌توانیم به صورت حاصل‌جمع یکتای تعداد متناهی از خودتوان‌های اولیه متعامد حلقه‌ی R بنویسیم که این تعداد یکتا را طول e می‌نامیم و آن را با $L(e)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۴.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. $X(R)$ یا X بیانگر مجموعه‌ای از همه‌ی ناصفرها و غیر یکه‌های R باشد. $G(R)$ یا G بیانگر گروه همه‌ی یکه‌های R باشد. عمل گروه G بر روی مجموعه‌ی X با ضابطه $gx \longrightarrow (g, x)$ را عمل منظم می‌نامیم.

تعریف ۱۴.۴.۱. برای هر $x \in X$، مدار x تحت عمل منظم G روی X را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$O(x) = \{gx | \forall g \in G\}$$

۵.۱ خودتوان‌های نیم‌مرکزی در یک حلقه

تعریف ۱.۵.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. خودتوان $e \in R$ را نیم مرکزی چپ در R می‌نامیم، هرگاه $Re = eRe$ و خودتوان $e \in R$ را نیم مرکزی راست در R می‌نامیم، هرگاه $eR = eRe$. مجموعه‌ی همه‌ی خودتوان‌های نیم‌مرکزی چپ در R را با $S_l(R)$ نمایش می‌دهیم و مجموعه‌ی همه‌ی خودتوان‌های نیم‌مرکزی راست در R را با $S_r(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۵.۱. زیرمجموعه‌ی S از حلقه‌ی R را جابه‌جایی می‌نامیم، هرگاه برای هر $e, f \in S$، $ef = fe$.

تعریف ۳.۵.۱. خودتوان مرکزی c از حلقه‌ی R را اولیه مرکزی در R می‌نامیم، هرگاه $c \neq 0$ و نتوانیم c را به صورت حاصل‌جمع دو خودتوان مرکزی متعامد ناصفر در R بنویسیم.

تعریف ۴.۵.۱. ایده‌آل سره M از حلقه‌ی R را ماکسیمال می‌نامیم، هرگاه هیچ ایده‌آل سره‌ای بین M و R وجود نداشته باشد. همچنین هر حلقه‌ی جابه‌جایی R که دقیقا یک ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد را موضعی می‌نامیم.

تعریف ۵.۵.۱. حلقه‌ی R را نیم‌موضعی می‌نامیم، هرگاه $R/J(R)$ یک حلقه‌ی آرتینی چپ باشد. (منظور از $J(R)$، رادیکال جیکوبسن حلقه‌ی R است.)

تعریف ۶.۵.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $a \in R$. عنصر a را پوچ‌توان می‌نامیم، هرگاه $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که $a^n = ۰$. مجموعه عناصر پوچ توان R را با $\mathrm{nil}(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۷.۵.۱. ایده‌آل I از حلقه‌ی R را پوچ می‌نامیم، هرگاه تمام عناصر I پوچ‌توان باشد.

تعریف ۸.۵.۱. مجموعه‌ی همه‌ی خودتوان‌های اولیه راست (چپ)حلقه‌ی R را به‌صورت اشتراک مجموعه‌ی خودتوان‌های نیم‌مرکزی راست (چپ)حلقه‌ی R با مجموعه‌ی خودتوان‌های اولیه حلقه‌ی R بیان می‌کنیم و به‌صورت $M_r(R) = M(R) \cap S_r(R)$ $(M_l(R) = M(R) \cap S_l(R))$نمایش می‌دهیم.

فصل ۲

حلقه‌هایی با مجموعه‌ی ضربی بسته از خودتوان‌های اولیه

در این فصل، ثابت می‌کنیم اگر R حلقه‌ای باشد که بتوانیم ۱ را به صورت حاصل‌جمع متناهی از خودتوان‌های اولیه متعامد بنویسیم و مجموعه‌ی $M(R)$ ضربی بسته باشد، در این‌صورت هر خودتوان از حلقه‌ی R مرکزی است و حلقه‌ی R یک حاصل‌ضرب مستقیم متناهی از حلقه‌های همبند است.

نشان می‌دهیم اگر مجموعه‌ی $I(R)$ ضربی بسته باشد، آنگاه $I(R) \subseteq Z(R)$. حال این سوال پیش می‌آید که اگر مجموعه‌ی $M(R)$ ضربی بسته باشد، آیا $M(R) \subseteq Z(R)$ خواهد بود؟ پاسخ این است که اگر R حلقه‌ی منظم (ون‌نیومن) باشد، آنگاه $M(R) \subseteq Z(R)$ اما اگر R حلقه‌ی نیم‌منظم یا حلقه‌ی نیم‌مورثی باشد، آنگاه $M(R) \nsubseteq Z(R)$.

بیان می‌کنیم اگر مجموعه‌ی $M(R)$ ضربی بسته باشد، آنگاه برای هر خودتوان ناصفر $e \in M(R)$ و $u \in U(R)$، $eue \in U(ere)$ که $(eue)^{-1} = eu^{-1}e$.

۱.۲ حاصل‌ضرب مستقیم متناهی از حلقه‌های همبند

در این بخش مشخصات حلقه‌هایی را که به صورت حاصل‌ضرب مستقیم متناهی از حلقه‌های همبند نوشته می‌شوند را ارائه می‌دهیم.

در ابتدا بعضی از خصوصیات مقدماتی عناصر مجموعه‌ی $M(R)$ ضربی بسته را بررسی می‌کنیم.

لم ۱.۱.۲. *فرض می‌کنیم R یک حلقه با مجموعه‌ی $M(R)$ ضربی بسته باشد. برای هر $e, f \in M(R)$ داریم:*

(۱) اگر $ef = 0$، آنگاه $fe = 0$. بویژه $f \in (1-e)R(1-e)$ و $e \in (1-f)R(1-f)$.

(۲) اگر $ef \neq 0$، آنگاه:

الف. $efe = e$ و $fef = f$.

ب. برای هر $g \in M(R)$، $ge = 0$ اگر و فقط اگر $gf = 0$.

برهان. (۱) اگر $ef = ۰$، آنگاه $fe = fefe = ۰$.

(۲) الف. اگر $ef \neq ۰$، آنگاه $efe \neq ۰$. از آنجایی‌که $efeR \subseteq eR$ و خودتوان e اولیه است و $efe \in M(R)$، بنابراین $efeR = eR$. به طور مشابه، $Refe = Re$. بنابراین $efe = e$. با استدلال مشابه، $fef = f$.

ب. فرض می‌کنیم که $ef \neq ۰$ و $g \in M(R)$ وجود داشته باشد که $ge = ۰$، سپس با استفاده از خاصیت بالا داریم:

$$gef = ۰ \Longrightarrow efg = ۰ \Longrightarrow fefg = ۰ \Longrightarrow fg = ۰ \Longrightarrow gf = ۰$$

که با استدلال مشابه، اثبات برگشت را داریم. □

لم ۲.۱.۲. *اگر e یک عنصر خودتوان باشد، آنگاه گزاره‌های زیر معادل هستند:*

(۱) $e \in Z(R)$،

(۲) $eR = Re$،

(۳) *e با هر خودتوان یکریخت e از حلقه‌ی R جابه‌جا می‌شود.*

برهان. اثبات ۲ $\Longrightarrow$ ۱ و ۳ $\Longrightarrow$ ۱ با فرض $f = ۱ - e$ بدیهی است.

۱ $\Longrightarrow$ ۲ برای هر $r \in R$، فرض می‌کنیم $f = ۱ - e$ و همچنین $e + erf$ و $e + fre$ خودتوان‌های یکریخت با e باشند. برای هر $r \in R$، $erf \in Ref = ۰$ نتیجه می‌دهد که $er = ere$ و به‌طور مشابه، $fre \in feR = ۰$ نتیجه می‌دهد که $re = ere$. بنابراین برای هر $r \in R$، $er = re$.

۱ $\Longrightarrow$ ۳برای هر $r \in R$، فرض می‌کنیم $f = ۱ - e$ و همچنین $e + erf$ و $e + fre$ خودتوان‌های یکریخت با e باشند. بنابر فرض داریم

$$e(e + erf) = (e + erf)e \text{و} e(e + fre) = (e + fre)e$$

که چون $fe = ef = ۰$. به‌طور خلاصه، $erf = ۰$ و $fre = ۰$ که با توجه به اثبات ۱ $\Longrightarrow$ ۲ $er = ere = re$. □

لم ۳.۱.۲. *اگر خودتوان e با هر خودتوان یکریخت با آن جابه‌جا شود، آنگاه خودتوان e مرکزی است. در حالت خاص، اگر خودتوان e با هر خودتوان دیگر در مجموعه‌ی $M(R)$ جابه‌جا شود، آنگاه خودتوان $e \in M(R)$ مرکزی است.*

برهان. با توجه به لم۲.۱.۲، اثبات را خواهیم داشت. □

حالا می‌توانیم اصلی‌ترین نتیجه این بخش را اثبات کنیم.

قضیه ۴.۱.۲. *حلقه‌ی R حاصل‌ضرب مستقیم متناهی از حلقه‌های همبند است اگر و فقط اگر مجموعه $M(R)$ ضربی بسته باشد و حلقه‌ی R دارای یک مجموعه متناهی کامل از خودتوان‌های متعامد اولیه باشد.*

برهان. اگر مجموعه $M(R)$ ضربی بسته باشد و حلقه‌ی R دارای یک مجموعه متناهی کامل از خودتوان‌های اولیه متعامد باشد، آنگاه بدیهی است که حلقه‌ی R حاصل‌ضرب مستقیم متناهی از حلقه‌های همبند است.

برعکس، اگر حلقه‌ی R حاصل‌ضرب مستقیم متناهی از حلقه‌های همبند باشد، آنگاه باید نشان دهیم مجموعه $M(R)$ ضربی بسته است و حلقه‌ی R دارای یک مجموعه متناهی کامل از خودتوان‌های اولیه متعامد است که فقط نشان می‌دهیم که خودتوان‌های اولیه، مرکزی هستند و با مشاهده لم ۲.۱.۲، کافی است نشان دهیم که برای هر $e, f \in M(R)$ که $e, f \neq 0$، $ef = fe$. اگر $ef = 0$، آنگاه $fe = fefe = 0$. بنابراین فرض می‌کنیم $ef \neq 0$ و $e_1 + e_2 + \cdots + e_n = 1$ که $\{e_1, \cdots, e_n\}$ مجموعه‌ای متعامد از خودتوان‌های اولیه است. از این‌رو $e = e(e_1 + \cdots + e_n)$ یعنی $1 \leq i \leq n$ وجود دارد که $ee_i \neq 0$. از آنجایی‌که $e_j e_i = 0$ و همچنین بنابر لم ۱.۱.۲ برای هر $j \neq i$، $1 \leq j \leq n$، $e_j e = 0$، در این‌صورت $e = ee_i$. همچنین از آنجایی‌که $e_i e \neq 0$، به‌طور مشابه، فرض کنیم $e = e_i e$. دوباره بنابر لم ۱.۱.۲، $e_i = e_i e e_i = e e_i = e$ آنگاه $e_i f = ef \neq 0$ و همچنین $f = e_i = e$. □

تذکر ۵.۱.۲. *در قضیه ۴.۱.۲، ثابت کردیم که هر دو خودتوان اولیه متمایز در حلقه‌ی R متعامد هستند که این معادل است با این‌که خودتوان‌های اولیه، مرکزی هستند. در اصل، اگر e و f دو خودتوان جابه‌جایی اولیه باشند به‌طوری‌که $ef \neq 0$، آنگاه $eR = efR = feR = fR$، بنابراین $e = f$.*

به سادگی می‌بینیم که اگر حلقه‌ی R هیچ مجموعه‌ی متعامد نامتناهی از خودتوان‌ها را نداشته باشد، آنگاه حلقه‌ی R دارای مجموعه‌ی متناهی کامل از خودتوان‌های متعامد اولیه است اما عکس آن درست نیست.

فرض کنیم حلقه‌ی R هیچ مقسوم‌علیه صفری نداشته باشد به‌طوری‌که $M_2(R)$ متناهی مستقیم نباشد.(یعنی $a, b \in M_2(R)$ وجود دارد به‌طوری‌که $ab = 1$ اما $ba \neq 1$) از این رو $M_2(R)$ شامل یک مجموعه‌ی نامتناهی از خودتوان‌های متعامد است در حالی‌که حلقه‌ی R هیچ مقسوم‌علیه صفری ندارد. مجموعه‌ی $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ یک مجموعه متعامد کامل از خودتوان‌های اولیه در $M_2(R)$ است. اما با مشاهده قضیه ۴.۱.۲، داریم که اگر مجموعه $M(R)$ ضربی بسته باشد و حلقه‌ی R دارای یک مجموعه‌ی متناهی کامل از خودتوان‌های متعامد اولیه باشد، آنگاه حلقه‌ی R دارای مجموعه متعامد نامتناهی از خودتوان‌ها نیست.

قضیه ۶.۱.۲. *اگر خودتوان $e \in I(R)$، آنگاه مجموعه‌ی $H = \{a \in U(R) | eae \in U(eRe)\}$ یک گروه است.*

برهان. فرض می‌کنیم a و b دلخواهی در مجموعه‌ی H وجود داشته باشد. باید نشان دهیم $ba^{-1} \in H$ است. پس $e \in I(R)$ وجود دارد که $e + (1-e)a \in U(R)$ و $e + (1-e)b \in U(R)$، در این‌صورت $e + (1-e)ba^{-1} \in U(R)$، بنابراین $ba^{-1} \in H$. □

قضیه ۷.۱.۲. *اگر مجموعه‌ی $M(R)$ ضربی بسته باشد، آنگاه هر خودتوان مینیمال، یکه است. (توجه می‌کنیم بنابر تعریف که خودتوان‌های مینیمال دقیقا خودتوان‌های اولیه حلقه‌ی R هستند.)*

برهان. خودتوان‌های $e, f \in I(R)$ را در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که $e + J(R)$ و $f + J(R)$ خودتوان‌های مینیمال حلقه‌ی $R/J(R)$ باشند. می‌توانیم خودتوان‌های e و f را طوری انتخاب کنیم که آنها

خودتوان‌های مینیمال در حلقه‌ی R هم باشند. تجزیه مستقیم حلقه‌ی $R/J(R)$ را بررسی می‌کنیم. اگر ماتریس جمعوند مستقیم مناسب وجود داشته باشد، آنگاه ما می‌توانیم برای $e + J(R)$ و $f+J(R)$، $e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ و $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ در نظر بگیریم. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $(ef)^2 + J(R) = J(R)$. از آنجایی‌که ef یک پوچ‌توان ناصفر است، بنابراین مجموعه‌ی همه‌ی خودتوان‌های مینیمال، ضربی بسته نیست که این تناقض است. بنابراین حلقه‌ی $R/J(R)$ یک جمع مستقیم از میدان‌هاست که دراین‌صورت جابه‌جاپذیر است. فرض می‌کنیم $a \in U(R)$ و خودتوان مینیمال $e \in I(R)$ دلخواه باشند، می‌بینیم که $(e+J(R))(a+J(R))(e+J(R)) = ae+J(R)$، بنابراین $j \in J(R)$ وجود دارد که $ea^{-1}eae = e+j = e+eje$. از آنجایی‌که eje پوچ‌توانی از حلقه‌ی eRe است، بنابراین eae یکه است.

بسیاری از نتایج اثبات شده توسط دولزن[۳] برداشت ساده‌ای از قضیه‌ی ۴.۱.۲ است. برای مثال، نتیجه‌ای که در ادامه داریم از قضیه‌ی ۴.۱.۲ و تعمیم قضایای ۶.۱.۲ و ۷.۱.۲ به‌دست آمده است. $\square$

نتیجه ۸.۱.۲. *اگر R حلقه‌ای باشد که در قضیه ۴.۱.۲ داشته‌ایم، آنگاه برای هرخودتوان ناصفر $e \in M(R)$ و $u \in U(R)$، $eue \in U(eRe)$ که $(eue)^{-1} = eu^{-1}e$.*

ما در قضیه ۶.۲.۲ نشان می‌دهیم که نتیجه ۸.۱.۲ برای هر حلقه‌ی R با مجموعه‌ی $M(R)$ ضربی بسته برقرار است.

۲.۲ حلقه‌هایی مانند R با مجموعه‌ی $M(R)$ ضربی بسته

در این بخش سعی می‌کنیم حلقه‌هایی دلخواه با مجموعه‌ی $M(R)$ ضربی بسته پیدا کنیم. در حالت خاص، نشان می‌دهیم که نتیجه‌ی ۸.۱.۲ برای هر حلقه‌ی دلخواه R با مجموعه‌ی $M(R)$ ضربی بسته درست است. که با بیان چند نتیجه‌ی شناخته شده درباره خودتوان‌ها آغاز می‌کنیم.(علاقه‌مندان می‌توانند به فصل ۷ از مرجع [۱۱] رجوع کنند.)

لم ۱.۲.۲. *فرض می‌کنیم که $1 = e_1 + \cdots + e_r = e'_1 + \cdots + e'_r$ دو تجزیه از ۱ به حاصل‌جمع خودتوان‌های متعامد باشند. اگر برای هر i، $e_i \cong e'_i$. نشان می‌دهیم که $u \in U(R)$ وجود دارد که برای هر i، $e'_i = u^{-1}e_iu$.*

برهان. بنابر فرض داریم

$$R = e_1R \oplus \cdots \oplus e_rR = e'_1R \oplus \cdots \oplus e'_rR$$

و برای هر i، R-یکریختی $\varphi_i : e'_iR \longrightarrow e_iR$ وجود داشته باشد که $\varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_r$ یک خودریختی از R است که با ضرب چپ $u \in U(R)$ به‌دست آمده است. از آنجایی‌که $ue'_iu^{-1} \in e_iRu^{-1} = e_iR$ و

$$\sum ue'_iu^{-1} = u\left(\sum e'_i\right)u^{-1} = 1.$$

تجزیه‌ی جمع مستقیم $R = e_1R \oplus \cdots \oplus e_rR$ نشان می‌دهد که برای هر i، $ue'_iu^{-1} = e_i$. □

لم ۲.۲.۲. *الف) فرض می‌کنیم $1 = e_1 + \cdots + e_r = e'_1 + \cdots + e'_r$ دو تجزیه از ۱ به حاصل‌جمع خودتوان‌های متعامد باشند، بنابراین برای هر i، $e_i \cong e'_i$ اگر و فقط اگر $u \in U(R)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر i، $e'_i = ue_iu^{-1}$.*
ب) اگر e و f دو خودتوان در حلقه‌ی R باشند به‌طوری‌که $eR = fR$، آنگاه $u \in U(R)$ وجود دارد به طوری‌که $e = fu$.

به آسانی می‌توانیم ببینیم که حلقه‌ی eRf برای دو خودتوان اولیه متعامد $e, f \in R$ ممکن است صفر نباشد. برای مثال، خودتوان‌های $e = E_{11}$ و $f = E_{22}$ در $R = M_2(F)$ که F را میدان فرض می‌کنیم. اما در لم زیر داریم:

لم ۳.۲.۲. *فرض می‌کنیم R یک حلقه باشد به طوری‌که مجموعه‌ی $M(R)$ ضربی بسته باشد و $e, f \in M(R)$ که $ef = 0$، در این‌صورت $eRf = 0$ و $fRe = 0$. به عبارت دیگر، $\mathrm{Hom}_R(Re, Rf) = 0$ و $\mathrm{Hom}_R(eR, fR) = 0$.*

برهان. فرض می‌کنیم که دو خودتوان e و f ناصفر باشند. گیریم که $r \in R$ وجود داشته باشد که $g = e + erf$، پس g یک خودتوان است و $gR \subseteq eR$، بنابراین $g = 0$ یا $gR = eR$. اگر $g = 0$، آنگاه $e = -erf$، از این‌رو $e = ee = -erfe = 0$ که تناقض است، بنابراین $eR = gR$ که نتیجه می‌دهد $g \in M(R)$. به وضوح، $fg = 0$ و همچنین $gf = 0$ نتیجه می‌دهد که $erf = 0$، از این رو چون r را دلخواه انتخاب می‌کنیم $eRf = 0$ و به‌طور مشابه، $fRe = 0$. □

نتیجه ۴.۲.۲. *اگر مجموعه‌ی $M(R)$ ضربی بسته باشد، آنگاه برای هر $e, f \in M(R)$ ، $ef = 0$ اگر و فقط اگر $f \in (1-e)R(1-e)$ و $e \in (1-f)R(1-f)$.*

اگر حلقه‌ی R دارای مجموعه متعامد کامل $\{e_1, \cdots, e_n\}$ ازخودتوان‌های اولیه باشد، آنگاه عکس لم ۳.۲.۲ برقرار است (یعنی برای هر $e, f \in M(R)$ اگر $ef = 0$ که $eRf = 0$، آنگاه مجموعه‌ی $M(R)$ ضربی بسته است.) زیرا $(1-e_i)Re_i = 0 = e_iR(1-e_i)$ نتیجه می‌دهد که هر e_i مرکزی است. در بخش سوم، نشان می‌دهیم که عکس لم ۳.۲.۲ برای حلقه‌ی منظم R برقرار است.

قضیه ۵.۲.۲. *فرض می‌کنیم که e و f دو خودتوان اولیه ناصفر از حلقه‌ی R باشند به‌طوری‌که ef یک خودتوان باشد، در این صورت فرض می‌کنیم شرایط زیر برقرار باشند.*
(۱) $ef \neq 0$،
(۲) خودتوان‌های e و f مزدوج باشند.
در این‌صورت گزاره‌ی (۱)، گزاره‌ی (۲) را نتیجه می‌دهد و اگر مجموعه‌ی $M(R)$ ضربی بسته باشد، آنگاه گزاره‌ی (۲)، گزاره‌ی (۱) را نتیجه می‌دهد.

برهان. ۲ $\Longrightarrow$ ۱ کافی است بنابر لم ۲.۲.۲ نشان دهیم که $eR \cong fR$ و $(۱-f)R \cong (۱-e)R$، از آنجایی‌که $eR = efR$، پس بنابر لم ۲.۲.۲، $u \in U(R)$ وجود دارد که $e = efu$. به طور مشابه، $v \in U(R)$ وجود دارد که $f = vef$، بنابراین $f = veu^{-۱}$ نتیجه می‌دهد که $fR = veR \cong eR$. حالا

$$eR \oplus (۱-e)R = R \Longrightarrow veR \oplus v(۱-e)R = R \Longrightarrow R/veR \cong v(۱-e)R \cong (۱-e)R.$$

بنابراین

$$(۱-f)R \cong R/fR = R/veu^{-۱}R = R/veR \cong (۱-e)R.$$

حال فرض می‌کنیم که مجموعه‌ی $M(R)$ ضربی بسته باشد و $u \in U(R)$ وجود داشته باشد که $f = ueu^{-۱}$، پس $۰ \neq eRe = eRue$ نتیجه می‌دهد که $eRueu^{-۱} = eRf \neq ۰$، بنابراین باتوجه به لم ۳.۲.۲، $ef \neq ۰$. □

به آسانی می‌بینیم که اثبات ۱ $\Longrightarrow$ ۲ از قضیه ۵.۲.۲ زمانی‌که مجموعه‌ی $M(R)$ ضربی بسته نباشد، برقرار نیست. برای مثال، در $M_۲(F)$ که F میدان است، $e = E_{۱۱}$ و $f = E_{۲۲}$ مزدوج هستند به‌طوری‌که $f = ueu^{-۱}$ که $u = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$.
در ادامه، تعمیم نتیجه دولزن و نتیجه ۸.۱.۲ برای حلقه‌های دلخواه را دنبال می‌کنیم.

قضیه ۶.۲.۲. *اگر مجموعه $M(R)$ ضربی بسته باشد، آنگاه برای هر خودتوان ناصفر $e \in M(R)$ و $u \in U(R)$، $eue \in U(eRe)$ به‌طوری‌که $(eue)^{-۱} = eu^{-۱}e$*

برهان. بنابر قضیه۵.۲.۲، $eueu^{-۱} \neq ۰$، پس بنابر لم ۱.۱.۲، $e = eueeu^{-۱}e = eueu^{-۱}e$ و $ueu^{-۱}eueu^{-۱} = ueu^{-۱}$ که در این صورت $eu^{-۱}eeue = e$. □

۳.۲ حلقه‌های منظم

در این بخش نشان می‌دهیم که اگر حلقه‌ی R منظم باشد و مجموعه‌ی $M(R)$ ضربی بسته باشد، آنگاه $M(R) \subseteq Z(R)$ اما اگر حلقه‌ی R نیم‌منظم یا نیم‌مورثی باشد، آنگاه $M(R) \nsubseteq Z(R)$.

لم ۱.۳.۲. *اگر مجموعه $I(R)$ ضربی بسته باشد، آنگاه $I(R) \subseteq Z(R)$.*

برهان. فرض می‌کنیم e و f دو خودتوان از مجموعه‌ی $I(R)$ باشند، با توجه به اینکه مجموعه‌ی $I(R)$ ضربی بسته است، در این‌صورت $ef(۱-e)$ و $(۱-e)fe$ خودتوان هستند که توان‌های دوم آنها برابر صفر است، بنابراین داریم که $ef = fe = efe$، پس اثبات تمام است. □

لم ۲.۳.۲. *فرض کنیم حلقه‌ی R منظم باشد و $e, f \in M(R)$ به‌طوری‌که $ef \neq ۰$، در این‌صورت:*
(۱) $\mathrm{ann}_l(ef) = \mathrm{ann}_l(e)$ و $\mathrm{ann}_r(ef) = \mathrm{ann}_r(f)$.
(۲) $eR \cong fR$ و $Re \cong Rf$.

برهان. (۱) فرض می‌کنیم $r \in R$ و $efr = ۰$. اگر $fr \neq ۰$، آنگاه $frR = fR$، پس $s \in R$ وجود دارد که $f = frs$، از این‌رو $۰ \neq ef = efrs = ۰$ که یک تناقض است، بنابراین $\mathrm{ann}_r(ef) = \mathrm{ann}_r(f)$ و به‌طور مشابه، $\mathrm{ann}_l(ef) = \mathrm{ann}_l(e)$.
(۲) با مشاهده اثبات(۱) داریم که $fR \cong R/\mathrm{ann}_r(f) = R/\mathrm{ann}_r(ef) \cong efR = eR$، و به طور مشابه، $Re \cong Rf$. □

قضیه زیر نشان می‌دهد که عکس لم ۳.۲.۲ در حلقه‌های منظم برقرار است.

قضیه ۳.۳.۲. *برای هر حلقه‌ی منظم R شرایط زیر معادل هستند.*
(۱) $M(R) \subseteq Z(R)$ ،
(۲) *برای هر* $e, f \in M(R)$، $ef = ۰$ *نتیجه می‌دهد که* $eRf = ۰$.
(۳) *مجموعه* $M(R)$ *ضربی بسته است.*

برهان. ۲ $\Longrightarrow$ ۳ را با توجه به لم ۳.۲.۲، خواهیم داشت و اثبات ۳ $\Longrightarrow$ ۱ بدیهی است.
۱ $\Longrightarrow$ ۲ فرض کنیم $e, f \in M(R)$ به‌طوری‌که $ef \neq ۰$. کافی است نشان دهیم که $e = f$. اول نشان می‌دهیم که $eR \cap fR \neq ۰$ و $Re \cap Rf \neq ۰$. فرض (خلف) می‌کنیم $eR \cap fR = ۰$، با توجه به اینکه حلقه‌ی R منظم است، خودتوان $g \in R$ وجود دارد که $eR \oplus fR = gR$. حال بنابر لم ۲.۳.۲، $eR \cong fR$ و همچنین $gRg \cong M_۲(eRe)$ که این امکان‌پذیر نیست زیرا اگر $e_۱$ و $e_۲$ خودتوان‌های اولیه در حلقه‌ی gRg باشند، در این‌صورت $e_۱$ و $e_۲$ خودتوان‌های اولیه از حلقه‌ی R هستند و $e_۱e_۲ = ۰$، و بنابر گزاره‌ی (۲)، $e_۱Re_۲ = e_۱gRge_۲ = ۰$ اما $\begin{pmatrix} e & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & e \end{pmatrix}$ دو خودتوان اولیه متعامد در $M_۲(eRe)$ هستند. به‌طوری‌که $۰ \neq \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & e \end{pmatrix} M_۲(eRe) \begin{pmatrix} e & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$، پس فقط داریم $eR \cong fR$ که اثبات تمام است. □

از آنجایی‌که هر حلقه‌ی منظم، نیم‌مورثی است. ممکن است که این سوال پیش بیاید که اگر اثبات ۱ $\Longrightarrow$ ۲ و ۱ $\Longrightarrow$ ۳ در قضیه ۳.۳.۲، برای هر حلقه‌ی نیم‌مورثی درست باشد، آنگاه قضیه قبل برای هر حلقه‌ی نیم‌مورثی برقرار است درحالی‌که قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که برای حلقه‌ی نیم‌مورثی تعریف شده در قضیه‌ی زیر برقرار نیست.
قرارداد: هرگاه N جمعوند مستقیم مدول M باشد، نماد $N \subseteq^{\oplus} M$ را بکار می‌بریم.

قضیه ۴.۳.۲. *حلقه‌ی نیم‌منظم یا نیم‌مورثی R با مجموعه‌ی $M(R) \neq ۰$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر* $e, f \in M(R)$، $ef = f$ *اما* $M(R) \cap Z(R) = ۰$.

برهان. برای هر میدان F قرار می‌دهیم
$$S = \frac{\prod_N F}{\bigoplus_N F}$$
بدیهی است که S خودتوان اولیه ندارد و F به‌طور طبیعی در S نشانده شده است که این را هم توسط F تعریف کردیم.

فرض کنیم که

$$R=\begin{pmatrix} F & S \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

از آنجایی‌که $J(R)=\begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ پوچ‌توان است، خودتوان‌ها به پیمانه‌ی $J(R)$ بالا می‌روند. از آنجایی‌که تنها خودتوان‌های اولیه در حلقه‌ی $R/J(R)$، $E_{11}+J(R)$ است، خودتوان‌های اولیه در حلقه‌ی R به‌صورت زیر هستند.

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : s\in S\right\}$$

حال اگر $e=\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $f=\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$، آنگاه $ef=f$، بنابراین مجموعه‌ی $M(R)$ ضربی بسته است و $ef=0$ نتیجه می‌دهد که برای هر $e,f\in M(R)$، $eRf=0$ اما به وضوح $M(R)\cap Z(R)=0$، پس $R/J(R)\cong F\times S$، بنابراین حلقه‌ی R نیم‌منظم است.

حال نشان می‌دهیم که حلقه‌ی R نیم‌مورثی است. فرض می‌کنیم I یک ایده‌آل راست متناهی تولید شده از حلقه‌ی R باشد. اگر $I\subseteq E_{22}R$، از آنجایی‌که حلقه‌ی S منظم است، آنگاه خودتوان e در S وجود دارد که $I=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & es \end{pmatrix}$ پس $I\subseteq^{\oplus} E_{22}R\subseteq^{\oplus} R_R$، بنابراین ایده‌آل I تصویری است. حال فرض می‌کنیم که $I\subseteq E_{11}R$. اگر $\begin{pmatrix} u & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in I$ که $u\neq 0$، آنگاه $E_{11}=\begin{pmatrix} u & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^{-1} & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in I$ نتیجه می‌دهد که $I=E_{11}R$. حال فرض می‌کنیم $I\subseteq\begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ اما از آنجایی‌که $\begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $E_{22}R$ به عنوان R-مدول راست یکریخت هستند. فرض می‌کنیم که ایده‌آل I با بعضی از ایده‌آل‌های راست متناهی تولید شده از حلقه‌ی R که در حلقه‌ی $E_{22}R$ تصویری هستند، یکریخت باشد. حال فرض می‌کنیم که ایده‌آل I دلخواه باشد. از آنجایی‌که $R=E_{11}R\oplus E_{22}R$. فرض می‌کنیم π تصویری از R روی $E_{11}R$ در طول $E_{22}R$ باشد. از آنجایی‌که $\pi(I)\subseteq E_{11}R$ تصویری است، پس $\pi|I: I\longrightarrow\pi(I)$ شکافته می‌شود و بنابراین

$$I=I_1\oplus(I\cap E_{22}R)$$

به‌طوری‌که $I_1\cong\pi(I)$، همچنین $I\cap E_{22}R$ یک ایده‌آل راست متناهی تولید شده از حلقه‌ی R شامل در $E_{22}R$ است که تصویری است، پس ایده‌آل I تصویری است و همچنین R حلقه‌ی نیم‌مورثی راست است.

حال فرض می‌کنیم که L یک ایده‌آل چپ متناهی تولید شده از حلقه‌ی R باشد. اگر $L\subseteq RE_{11}$، آنگاه به وضوح ایده‌آل L تصویری است. فرض می‌کنیم که $L\subseteq RE_{22}$ و $\left\{\begin{pmatrix} 0 & x_i \\ 0 & y_i \end{pmatrix} : i=1,\cdots,n\right\}$ یک مجموعه از مولدهای ایده‌آل L باشد که زیرفضای W از F -فضای $\sum_{i=1}^{n} Fx_i$ وجود دارد که

$$L=\begin{pmatrix} 0 & \sum_{i=1}^{n} Fx_i+\sum_{i=0}^{n} Sy_i \\ 0 & \sum_{i=1}^{n} Sy_i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & W\oplus\sum_{i=1}^{n} Sy_i \\ 0 & \sum_{i=1}^{n} Sy_i \end{pmatrix}$$

از آنجایی‌که حلقه‌ی S منظم است، خودتوان $e\in S$ وجود دارد که $\sum_{i=1}^{n} Sy_i=Se$، بنابراین

$$L=\begin{pmatrix} 0 & W \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix} 0 & Se \\ 0 & Se \end{pmatrix}$$

حال $\begin{pmatrix} 0 & W \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$، با جمع مستقیم تعداد متناهی از کپی‌های RE_{11} یکریخت است که تصویری است، همچنین از آنجایی‌که $RE_{22} \subseteq^{\oplus} \begin{pmatrix} 0 & Se \\ 0 & Se \end{pmatrix}$، $\begin{pmatrix} 0 & Se \\ 0 & Se \end{pmatrix}$ تصویری است نتیجه می‌دهد ایده‌آل L تصویری است.

برای ایده‌آل L دلخواه، فرض می‌کنیم که $p : R \longrightarrow RE_{22}$ در طول RE_{11} تصویری باشد که بنابر استدلال بالا ایده‌آل L تصویری است، بنابراین R یک حلقه‌ی نیم‌مورثی چپ است. $\square$

فرض می‌کنیم R حلقه‌ای با شرایط گفته شده در قضیه ۴.۳.۲ باشد. با توجه به اینکه مجموعه‌ی $M(R)$ مرکزی نیست و برای هر دو خودتوان ناصفر $e, f \in M(R)$، $ef = f$. سرانجام، یک مثال از حلقه‌ی نیم‌منظم R با مجموعه‌ی $M(R)$ ضربی بسته را که دوخودتوان اولیه e و f وجود دارند که $ef \notin \{0, e, f\}$ را ارائه می‌کنیم.

مثال ۵.۳.۲. فرض می‌کنیم F و S با شرایط گفته شده در قضیه ۴.۳.۲ باشند. فرض کنیم

$$R = \begin{pmatrix} F & S & 0 \\ 0 & S & 0 \\ S & S & S \end{pmatrix}$$

توجه می‌کنیم $I = \begin{pmatrix} 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ S & S & 0 \end{pmatrix}$ یک ایده‌آل از حلقه‌ی R است به‌طوری‌که برای هر $x \in I$، $1 + x$ معکوس‌پذیر است و $J(R/I) = 0$ که در آن $I = J(R)$. به وضوح، $R/J(R)$ با $F \times S \times S$ یکریخت است که حلقه‌ی $R/J(R)$ منظم است. همچنین توجه می‌کنیم اگر $r = \begin{pmatrix} f & s_1 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ s_3 & s_4 & s_5 \end{pmatrix} \in R$ به‌طوری‌که $r^2 - r \in J(R)$، آنگاه $f^2 = f$ و $s_2^2 = s_2$ و $s_5^2 = s_5$، بنابراین $e = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_5 \end{pmatrix}$ یک خودتوان در حلقه‌ی R است و $r - e \in J(R)$ نتیجه می‌دهد که خودتوان‌ها به پیمانه‌ی $J(R)$ در حلقه‌ی R بالا می‌روند، پس خودتوان $f \in R$ اولیه است اگر و فقط اگر $f + J(R)$ در حلقه‌ی $R/J(R)$ اولیه باشد. از آنجایی‌که $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + J(R)$ تنها خودتوان اولیه در حلقه‌ی $R/J(R)$ است. خودتوان‌های اولیه در حلقه‌ی R به شکلی از $\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ y & z & 0 \end{pmatrix}$ هستند. همچنین بررسی اینکه اگر دقیقا $xy = z$، آنگاه $\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ y & z & 0 \end{pmatrix}$ خودتوان است آسان است. خودتوان اولیه $\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ y & yx & 0 \end{pmatrix}$ را توسط $E(x, y)$ تعریف می‌کنیم. توجه می‌کنیم

$$E(x_1, y_1).E(x_2, y_2) = E(x_2, y_1)$$

واضح است که $E(x, y)$ با هیچ خودتوان اولیه‌ای جز خودش جابه‌جا نمی‌شود، پس بدیهی است که $M(R) \cap Z(R) = 0$. همچنین توجه می‌کنیم که اگر $x_1 \neq x_2$ و $y_1 \neq y_2$، آنگاه

$$E(x_1, y_1).E(x_2, y_2) = E(x_2, y_1) \notin \{0, E(x_1, y_1), E(x_2, y_2)\}$$

اما حلقه‌ی R نیم‌مورثی نیست. از آنجایی‌که $fE_{31}R$ تصویری نیست، با مشاهده این توجه می‌کنیم

$$\mathrm{ann}_r(fE_{31}) = \begin{pmatrix} 0 & (1-f)S & 0 \\ 0 & S & 0 \\ S & S & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (1-f)S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ S & S & S \end{pmatrix}$$

جمعوند مستقیمی از R_R نیست زیرا جاهای دیگر $\begin{pmatrix} 0 & (1-f)S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ یک جمعوند مستقیم از مدول تجزیه‌ناپذیر $E_{11}R = \begin{pmatrix} F & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ است.

فصل ۳

حلقه‌هایی با شبکه‌هایی از خودتوان‌ها

در این فصل، در شبکه‌های شرکت‌پذیر مربوط به حلقه‌های یکدار اساسا به ایده‌آل‌های اصلی راست (چپ) می‌پردازیم، یعنی $\{aR|a \in R\}$ که با رابطه‌ی شمول مرتب شده است.

$\{aR|a \in R\} = \{eR|e \in I(R)\}$ با روابط $\vee$ و $\wedge$ تشکیل یک شبکه شرکت‌پذیر متمم‌دار (یعنی جبر بولی یا حلقه بولی) می‌دهد که این یک زیرشبکه از شبکه‌ی ایده‌آل‌های راست حلقه‌ی R است. پوچ‌سازهای راست در حلقه‌ی R همواره تشکیل یک شبکه (کامل) را می‌دهند که معمولا زیرشبکه‌ای از ایده‌آل‌های راست حلقه‌ی R نیستند.

اگر $(I(R), \leq)$ یک مجموعه‌ی جزئا مرتب باشد، در این صورت $B(R) = Z(R) \cap I(R)$ مجموعه‌ای از همه خودتوان‌های مرکزی است که با روابط $\inf\{e, f\} = ef$ و $\sup\{e, f\} = e + f - ef$ (با ضرب حلقه‌ها و جمع خاص $e \boxplus f = e + f - ۲ef = (e - f)^۲$) تشکیل یک جبر بولی (همچنین یک حلقه بولی یا یک شبکه شرکت‌پذیر متمم‌دار) را می‌دهد.

نشان می‌دهیم در مجموعه‌ی جزئا مرتب $(I(R), \leq)$ دو خودتوان e و f دارای بزرگترین کران پایین و کوچکترین کران بالا هستند که $\inf\{e, f\} \in < e, f >_s$ اگر و فقط اگر e و f خودتوان‌های جابه‌جاپذیر تعمیم یافته باشند.

همچنین خودتوان‌های مجموعه‌ی جزئا مرتب $(I(R), \leq)$ تعمیم یافته جابه‌جاپذیر هستند اگر و فقط اگر هر خودتوان مجموعه‌ی $I(R)$ مرکزی باشد.

۱.۳ خودتوان‌های جابه‌جاپذیر تعمیم یافته

دراین بخش، فرض می‌کنیم که R یک نیم‌گروه ضربی باشد.
به آسانی می‌توانیم نشان دهیم که:

$$ef = fe \Longrightarrow efe = fef \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow (ef)^n = (fe)^n \overset{(*)}{\Longrightarrow} (ef)^n e = (fe)^n f \Longrightarrow \cdots$$

به عنوان مثال، $(*)$ را ثابت می‌کنیم. اگر $(ef)^n = (fe)^n$ را ازچپ با e ضرب کنیم، آنگاه $(ef)^n = e(fe)^n$ و اگر $(ef)^n = (fe)^n$ را از چپ با f ضرب کنیم، آنگاه $f(ef)^n = (fe)^n$. از

این رو $(ef)^n e = e(fe)^n = f(ef)^n = (fe)^n f$
باید دقت کنیم که این نتیجه‌گیری‌ها برگشت‌پذیر نیستند. به طور مثال، برای اولین گام:
در حلقه‌ی ماتریسی ۲×۲ روی $\mathbb{Z}$ که $e = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$ و $f = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ \end{pmatrix}$ داریم $efe = fef = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix}$.
(همچنین e و f خودتوان‌های جابه‌جاپذیر تعمیم یافته هستند.)
درحالی‌که $fe = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} = ef$. اگر $f' = I_۲ - f = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}$ خودتوان متمم باشد، آنگاه $\cdots = (ef')^۲ = ef'e = ef' = e$ و $f' = f'e = f'ef' = (f'e)^۲ = \cdots$. از این رو e و f' خودتوان‌های جابه‌جاپذیر تعمیم یافته نیستند.

تذکر ۱.۱.۳. *توجه می‌کنیم که:* **(۱)** *اگر $(ef)^n = (fe)^n$، آنگاه نه تنها $(ef)^n e = (fe)^n f$ بلکه $(ef)^n = (ef)^n e = (fe)^n f = (fe)^n$.*
(۲) *با توجه به گزاره‌ی قبل، کمترین مقدار صحیح مثبت مانند n که $(ef)^n = (fe)^n$ یا $(ef)^n e = (fe)^n f$ را شاخص جابه‌جایی برای هر دو خودتوان می‌نامیم.*
(۳) *به‌وضوح، زیر نیم‌گروهی از R که توسط e و f تولید می‌شود و شامل همه عناصر بالا است را به‌صورت $< e, f >_s$ نمایش می‌دهیم. از این‌رو، برای nهای صحیح مثبت، خودتوان‌ها در $< e, f >_s$ فقط به چهار حالت $(ef)^n$، $(ef)^n e$، $(fe)^n$ و $(fe)^n f$ ممکن است باشند.*

گزاره ۲.۱.۳. *خودتوان‌های e و f جابه‌جاپذیر تعمیم یافته هستند اگر و فقط اگر $< ef >_s \cap < fe >_s \neq \emptyset$*

برهان. اگر $< ef >_s \cap < fe >_s \neq \emptyset$ آنگاه بدیهی است که خودتوان‌های e و f جابه‌جاپذیر تعمیم یافته هستند.

برعکس، اگر خودتوان‌های e و f جابه‌جاپذیر تعمیم یافته باشند، آنگاه ثابت می‌کنیم $< ef >_s \cap < fe >_s \neq \emptyset$. بنابراین فرض می‌کنیم برای m و n صحیح مثبت $(ef)^n = (fe)^m$. اگر $K = \max\{m, n\}$ بگیریم، نشان می‌دهیم که $(ef)^k = (fe)^k$ و همچنین $(ef)^k$ و $(fe)^k$ خودتوان‌های جابه‌جاپذیر تعمیم یافته هستند. در حقیقت، اگر $(ef)^n = (fe)^m$ آنگاه بررسی می‌کنیم $(ef)^n = (ef)^{n+۱} = (ef)^{n+۲} = \cdots$ و $(fe)^m = (fe)^{m+۱} = (fe)^{m+۲} = \cdots$
برای نمونه داریم:
$$(ef)^{n+۱} = (ef)^n ef = (fe)^m ef = (fe)^m f = (ef)^n f = (ef)^n$$
و حال اثبات می‌کنیم که $(fe)^k$ و $(ef)^k$ خودتوان‌های جابه‌جاپذیر تعمیم یافته هستند. با توجه به اثبات بالا $(ef)^n e = (fe)^m e = (fe)^m = (ef)^n$ و $(fe)^m f = (ef)^n f = (ef)^n = (fe)^m$، بنابراین با توجه به تعریف K و اینکه $(fe)^m f = (ef)^n e$ اثبات تمام است. □

لم ۳.۱.۳. *برای هر خودتوان $e, f \in R$ شرایط زیر برقرار هستند.*
(۱) *اگر $s = e + f - ef - fe + efe + fef - \cdots + e(fe)^{n-۱} + f(ef)^{n-۱} - (ef)^n$، آنگاه $es = s$ و $sf = f$.*
(۲) $se = e + (fe)^n - (ef)^n e$ *و* $fs = f + (fe)^n - f(ef)^n$.

(۳) *(قانون دمورگان)* $s = ۱ - [(۱-e)(۱-f)]^n$.

(۴) *با توجه به ۳ شرط بالا داریم:*

$$e + f - ef - fe + efe + fef - \cdots - (ef)^n - (fe)^n + (ef)^n e$$
$$= ۱ - [(۱-e)(۱-f)]^n(۱-e)$$

برهان. فقط به اثبات استقرایی مرحله‌ی $n \longrightarrow n+۱$ از گزاره (۳) می‌پردازیم، فرض کنیم

$$a = [(۱-e)(۱-f)]^n = ۱ - e - f + ef + fe - \cdots + (ef)^n$$

(برای $n = ۱$ یا $n = ۲$ بدیهی است.)

$$\begin{aligned}[(۱-e)(۱-f)]^{n+۱} &= (۱-e)(۱-f)[(۱-e)(۱-f)]^n \\ &= a - (۱-e)fa = a - (۱-e)f(۱-s) \\ &\overset{(۲)}{=} a - (۱-e)(-(fe)^n + f(ef)^n) \\ &= a + (fe)^n - f(ef)^n - e(fe)^n + (ef)^{n+۱}\end{aligned}$$

□

قضیه ۴.۱.۳. *در مجموعه جزئا مرتب $(I(R), \leq)$ هر جفت از خودتوان‌های جابه‌جاپذیر تعمیم یافته دارای بزرگترین کران پایین و کوچکترین کران بالا هستند.*

برهان. اول، نشان می‌دهیم که اگر $(ef)^n = (fe)^n$، آنگاه برای خودتوان‌های e و f بزرگترین کران پایین وجود دارد و

$$\inf\{e, f\} = (ef)^n = (fe)^n$$

به ترتیب کوچکترین کران بالا وجود دارد و

$$\sup\{e, f\} = e + f - ef - fe + efe + fef - \cdots + e(fe)^{n-۱} + f(ef)^{n-۱} - (ef)^n$$

ابتدا توجه می‌کنیم که $(ef)^n \leq e$ برقرار است تا زمانی‌که برای هر خودتوان $e(ef)^n = (ef)^n$ درست باشد و $(ef)^n e = e(fe)^n = e(ef)^n = (ef)^n$. به‌طور مشابه، $(fe)^n \leq f$ برقرار است تا زمانی‌که برای هر خودتوان $f(fe)^n = (fe)^n$ درست باشد و $(fe)^n f = f(ef)^n = f(fe)^n = (fe)^n$. بنابراین $(ef)^n = (fe)^n$ یک کران پایین برای e و f است. اگر $a \in I(R)$ و $a \leq e$ و $a \leq f$ آنگاه هر حاصل‌ضرب از a با هر حاصل‌ضرب از e و f برابر a است. از این‌رو همچنین $a = a(ef)^n = (ef)^n a$ و بنابراین $a \leq (ef)^n$، پس inf را به‌دست آوردیم. توجه می‌کنیم که $(ef)^n = (fe)^n$ یک خودتوان است. در حقیقت،

$$(ef)^n(ef)^n = e(fe)^n f(ef)^{n-۱} = e(ef)^n f(ef)^{n-۱} = (ef)^n(ef)^{n-۱} = \cdots = (ef)^n$$

برای داشتن sup بررسی می‌کنیم $e \leq e + f - ef - fe + \cdots + e(fe)^{n-۱} + f(ef)^{n-۱} - (ef)^n$ (بخشی گزاره (۱) در لم قبل است و بخش دیگر با توجه به گزاره (۲) لم قبل است.) و به ترتیب $f \leq e + f - fe + \cdots + e(fe)^{n-۱} + f(ef)^{n-۱} - (fe)^n$، بنابراین (بنابر فرضیه) عنصر مشترک،

یک کران بالا برای e و f است. سرانجام، اگر $a \in I(R)$، $e \leq a$ و $f \leq a$ ضرب هر حاصل‌جمعی از حاصل‌ضرب e و f با توجه به a تغییر نمی‌کند.

از آنجایی‌که $e+f-ef-fe+\cdots+e(fe)^{n-1}+f(ef)^{n-1}-(ef)^n \leq a$، بنابراین

$$\sup\{e,f\} = e+f-ef-fe+\cdots+e(fe)^{n-1}+f(ef)^{n-1}-(ef)^n.$$

تعریف می‌کنیم $s = \sup\{e,f\}$، از آنجایی‌که برای $e,f \leq s$ فرض کنیم $s = a$ ضرب هر حاصل‌جمع از حاصل‌ضرب e و f با توجه به s تغییر نمی‌کند، بنابراین $s = s^2$ و همچنین s یک خودتوان است.

دوم، نشان می‌دهیم که اگر $(ef)^n e = (fe)^n f$ آنگاه برای هر خودتوان e و f بزرگترین کران پایین وجود دارد و

$$\inf\{e,f\} = (ef)^n e = (fe)^n f$$

و به ترتیب بزرگترین کران بالا وجود دارد و

$$\sup\{e,f\} = e+f-ef-fe+efe+fef-\cdots-(ef)^n-(fe)^n+(ef)^n e$$

که اثبات‌ها مشابه هستند. هرچند، لازم نیست که $e(fe)^n \leq e$ یا $(fe)^n f \leq f$ و به‌ترتیب $e \leq e+f-ef-fe+efe-...-(ef)^n-(fe)^n+(ef)^n e$ یا $f \leq e+f-ef-fe+efe+fef-\cdots-(ef)^n-(fe)^n+(fe)^n f$ با اولویت بررسی شوند. $\square$

عکس قضیه فوق نیز برقرار است.

گزاره ۳.۱.۵. *فرض می‌کنیم که* $e,f \in I(R)$

الف) $\inf\{e,f\} = (ef)^n$ ***اگر و فقط اگر*** $(ef)^n = (ef)^n e = (fe)^n f$.

ب) $\sup\{e,f\} = e+f-\cdots-(ef)^n$ ***اگر و فقط اگر*** $(fe)^n = (ef)^n e = (fe)^n f$.

یک ادعای مشابه برای $\inf\{e,f\} = (ef)^n e$ *و* $\sup\{e,f\} = e+f-\cdots-(ef)^n-(fe)^n+(ef)^n e$ *برقرار است.*

برهان. با توجه به اثبات قضیه[۳.۱.۴](#)، اثبات را خواهیم داشت. $\square$

نتیجه ۳.۱.۶. *فرض می‌کنیم* $e,f \in I(R)$. ***در این‌صورت*** $\inf\{e,f\}$ ***وجود دارد*** *و برابر* $(ef)^n$ *است و* $\sup\{e,f\}$ ***وجود دارد*** *و برابر* $e+f-\cdots-(ef)^n$ ***است اگر و فقط اگر*** $(ef)^n = (fe)^n$.

یک ادعای مشابه برای $\inf\{e,f\} = (ef)^n e$ *و* $\sup\{e,f\} = e+f-\cdots-(ef)^n-(fe)^n+(ef)^n e$ *برقرار است.*

گزاره ۳.۱.۷. *در مجموعه جزئا مرتب* $(I(R), \leq)$ *برای nهای صحیح مثبت،* $\inf\{e,f\} = (ef)^n$ *(یا* $(ef)^n e$*) و* $\sup\{e,f\} = e+f-...-(ef)^n$ *(یا* $e+f-...-(ef)^n-(fe)^n+(ef)^n e$*) به خودتوان‌های e و f وابسته هستند اگر وفقط اگر خودتوان‌های e و f جابه‌جاپذیر تعمیم یافته باشند.*

برهان. با توجه به قضیه[۳.۱.۴](#) و نتیجه [۳.۱.۶](#)، اثبات را خواهیم داشت. $\square$

ما می‌توانیم سرانجام خصوصیات زیر را به دست آوریم.

قضیه ۸.۱.۳. *در مجموعه جزئا مرتب $(I(R), \leq)$ دو خودتوان e و f دارای بزرگترین کران پایین و کوچکترین کران بالا هستند به‌طوری‌که $\inf\{e, f\} \in < e, f >_s$ اگر و فقط اگر خودتوان‌های e و f جابه‌جاپذیر تعمیم یافته باشند.*

برهان. در مجموعه جزئا مرتب $(I(R), \leq)$ اگر دو خودتوان e و f دارای بزرگترین کران پایین و کوچکترین کران بالا باشند به‌طوری‌که $\inf\{e, f\} \in < e, f >_s$ آنگاه بنابر گزاره ۷.۱.۳ خودتوان‌های e و f جابه‌جاپذیر تعمیم یافته هستند.

برعکس، اگر خودتوان‌های e و f جابه‌جاپذیر تعمیم یافته باشند آنگاه باید نشان‌دهیم که در مجموعه جزئا مرتب $(I(R), \leq)$ دو خودتوان e و f دارای بزرگترین کران پایین و کوچکترین کران بالا هستند به‌طوری‌که $\inf\{e, f\} \in < e, f >_s$، بنابراین فرض می‌کنیم (برای اثبات بالا فقط چهار احتمال داریم.) $i = \inf\{e, f\} = (ef)^n$. بنابر تعریف inf (و رابطه‌ی $\leq$) $if = fi = ie = ei = i$. بنابراین $(ef)^n e = ie = i = fi = f(ef)^n$ پس با توجه به تعریف، خودتوان‌های e و f جابه‌جاپذیر تعمیم یافته هستند. و بقیه موارد هم به‌صورت مشابه اثبات می‌شوند. □

نتیجه ۹.۱.۳. *اگر خودتوان‌های حلقه‌ی R جابه‌جایی باشند، آنگاه مجموعه جزئا مرتب $(I(R), \leq)$ با روابط $\inf\{e, f\} = ef$ و $\sup\{e, f\} = e + f - ef$ تشکیل یک شبکه می‌دهد. بعلاوه این یک جبر بولی است.*

نتیجه ۱۰.۱.۳. *اگر e و f خودتوان‌های متعامد یک حلقه‌ی دلخواه باشند، آنگاه $\inf\{e, f\} = ۰$ و همچنین $\sup\{e, f\} = e + f$.*

نتیجه ۱۱.۱.۳. *$B(R) = Z(R) \cap I(R)$ تشکیل یک جبر بولی می‌دهد.*

همچنین باید توجه کنیم که خودتوان‌های جابه‌جاپذیر تعمیم یافته برای رابطه‌ی زیر مناسب نیستند. هم‌ارزی که در جبر بولی برقرار است.

$$\inf\{e, f'\} = ۰ \Longleftrightarrow \inf\{e, f\} = e$$

در نظر می‌گیریم که اگر به جای خودتوان‌های تعمیم یافته از متمم‌های آنها استفاده کنیم، شاخص جابه‌جایی حفظ نمی‌شود.(یعنی $(ef)^n = (fe)^n$ نتیجه نمی‌دهد $((ef)')^n = (f')^n$).

۲.۳ حلقه‌هایی که فقط خودتوان‌های تعمیم یافته دارند، آبلی هستند

در این بخش، این نتیجه غیر منتظره را ثابت می‌کنیم که اگر خودتوان‌ها در حلقه‌ی R جابه‌جایی باشند، آنگاه حلقه‌ی R آبلی است. (یعنی هر خودتوان مرکزی است.) در ادامه خواهیم دید که با

شرایط کمتر تساوی $B(R)=I(R)$ برقرار است. حال، از آنجایی‌که

$$f\text{و}e \text{جابه‌جاپذیر تعمیم یافته هستند} \Longrightarrow f\text{و}e \text{جابه‌جایی هستند} \Longrightarrow e\text{و}f \in Z(R)$$

مثال اول بخش قبلی نشان می‌دهد که هیچ‌یک از نتیجه‌گیری‌ها نمی‌توانند برگشت‌پذیر باشند. برای داشتن شبکه‌ای از خودتوان‌ها که تعمیم اصلی از جبر بولی $B(R)$ باشند، حلقه‌ای دارای خودتوان‌های تعمیم یافته را انتظار داریم، در حالی‌که در ادامه نشان می‌دهیم این‌طور نیست.

لم ۱.۲.۳. (۱) *اگر R یک حلقه‌ی تقلیل‌یافته باشد، آنگاه هر خودتوان $e\in R$ مرکزی است.*
(۲) *اگر خودتوان $e\in R$ مرکزی باشد، آنگاه خودتوان e با هر پوچ‌توان در حلقه‌ی R جابه‌جا می‌شود.*

برهان. (۱) فرض می‌کنیم که $f=1-e$ و $a\in R$، در این‌صورت $(eaf)^2=0$، بنابراین $eaf=0$ که این نتیجه می‌دهد که $ea=eae$ و به‌طور مشابه، $ae=eae$، بنابراین برای هر $a\in R$، $ea=ae$.
(۲)فرض می‌کنیم $a\in R$ و $f=1-e$. از آنجایی‌که $(eaf)^2=0$ بنابر اثبات قبل نتیجه می‌دهد که $eaf=e(eaf)=(eaf)e=0$، بنابراین $ea=eae$، به‌طور مشابه، $ae=eae$، بنابراین برای هر $a\in R$، $ea=ae$. □

گزاره ۲.۲.۳. *برای حلقه‌ی R شرایط زیر معادل هستند.*
(۱) *حلقه‌ی R آبلی است. (یعنی همه‌ی خودتوان‌های آن مرکزی هستند یا $B(R)=I(R)$)*
(۲) *خودتوان‌ها و پوچ‌توان‌ها در حلقه‌ی R جابه‌جاپذیر هستند.*
(۳) *در حلقه‌ی R خودتوان‌ها جابه‌جاپذیر هستند.*
(۴) *هر خودتوان e با همه‌ی خودتوان‌هایی که با e یکریخت هستند، جابه‌جا می‌شود.*
(۵) *حلقه‌ی R فقط خودتوان‌های جابه‌جاپذیر تعمیم یافته دارد.*
(۶) *هر خودتوان تعمیم یافته‌ی e با همه‌ی خودتوان‌های یک‌ریخت e جابه‌جا می‌شود.*

برهان. از آنجایی‌که لم ۱.۲.۳ و لم ۲.۱.۲ را بیان کرده‌ایم، فقط ادعای $1 \Longrightarrow 6$ را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم خودتوان e مرکزی نباشد، در این‌صورت $r\in R$ وجود دارد که $er\neq re$ یا به‌طور معادل $ere'\neq 0$ یا $e're\neq 0$. در مورد اول، خودتوان را $f=e+ere'$ فرض کنیم که f متمایز از e است. بنابر لم ۷.۱.۵، داریم که $ef=f$ و $fe=e$، بنابراین e و f خودتوان‌های یکریخت هستند. از این‌رو $e=fe=efe=(fe)^2=\dots$ و $f=ef=fef=(ef)^2=\dots$ و خودتوان e با خودتوان f جابه‌جاپذیر تعمیم یافته نیست، به تناقض رسیدیم پس حکم ثابت است.
در مورد دوم، اگر $e're\neq 0$، آنگاه خودتوان را $g=e+e're$ فرض می‌کنیم و اثبات را مشابه بالا دنبال می‌کنیم. □

فصل ۴

مجموعه‌ی جمع‌پذیر متناهی از خودتوان‌ها در حلقه‌ها

در این فصل، بررسی می‌کنیم که اگر مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر باشد، آنگاه مجموعه‌ی $M(R)$ در مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر است اما عکس آن درست نیست.

همچنین مجموعه‌ی $I(R)$ جابه‌جایی است اگر و فقط اگر مجموعه‌ی $I(R)$ ضربی بسته باشد اگر وفقط اگر $I(R) \subseteq Z(R)$.

اگر مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر باشد، آنگاه $I(R) \subseteq Z(R)$ اما عکس آن ممکن است درست نباشد (به‌طور مثال $\mathbb{Z}_۳ \oplus \mathbb{Z}_۳ \oplus \mathbb{Z}_۳$). همچنین نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر است اگر و فقط اگر مجموعه‌ی $I(R)$ جابه‌جایی باشد و ۲ $= \mathrm{char}(R)$. همچنین مجموعه‌ی $M(R)$ در مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر است اگر و فقط اگر $M(R)$ مجموعه‌ی همه‌ی خودتوان‌های متعامد دوبه‌دو اولیه باشد.

فرض می‌کنیم R حلقه‌ای باشد که مجموعه‌ی $\{۰\} \neq I(R)$. ثابت می‌کنیم که اگر $I(R)$ یک مجموعه‌ی جمع‌پذیر متناهی از حلقه‌ی R باشد، آنگاه کوچکترین خودتوان اولیه وجود دارد. همچنین نشان می‌دهیم $I(R)$ یک مجموعه‌ی جمع‌پذیر متناهی از حلقه‌ی R است اگر و فقط اگر $M(R)\backslash\{۰\}$ یک مجموعه‌ی کامل ازخودتوان‌های مرکزی مینیمال باشد که ۲ $= \mathrm{char}(R)$ و حلقه‌ی R کاملا اساسی باشد.

همچنین با فرض اینکه برای حلقه‌ی منظم R، $I(R)$ مجموعه‌ی جمع‌پذیر متناهی باشد، اگر G گروه آبلی یکه‌های حلقه‌ی R باشد، آنگاه حلقه‌ی R جابه‌جایی است.

۱.۴ ویژگی‌های حلقه‌ای با مجموعه‌ی جمع‌پذیر متناهی از خودتوان‌ها

دراین بخش فرض می‌کنیم R حلقه‌ای دلخواه باشد که $\{۰\} \neq I(R)$. فرض می‌کنیم $\leq$ رابطه‌ی معمول روی مجموعه‌ی $I(R)$ باشد که $e \leq f$ (یا $f \geq e$) را $ef = fe = e$ معنی می‌کنیم، در

حالت خاص $e < f$ (یا $f > e$) را $e \leq f$ و $e \neq f$ معنی می‌کنیم.
توجه می‌کنیم بنابر تعریف که خودتوان‌های مینیمال دقیقا خودتوان‌های اولیه حلقه‌ی R هستند.

لم ۱.۱.۴. *فرض می‌کنیم R یک حلقه باشد. در این‌صورت داریم:*
(۱) مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر است اگر و فقط اگر مجموعه‌ی $I(R)$ جابه‌جایی باشد و $\operatorname{char}(R) = ۲$.
(۲) مجموعه‌ی $M(R)$ در مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر است اگر و فقط اگر $M(R)$ مجموعه‌ای از خودتوان‌های متعامد دوبه‌دو اولیه باشد.

برهان. (۱) اگر مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر باشد، آنگاه باید نشان دهیم مجموعه‌ی $I(R)$ جابه‌جایی است و همچنین $\operatorname{char}(R) = ۲$. برای اثبات جابه‌جایی فرض کنیم خودتوان‌های $e, f \in I(R)$ دلخواه باشند. فرض می‌کنیم $e \neq f$. از آنجایی‌که مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر است داریم:
$(e+f)^۲ = e^۲ + ef + fe + f^۲ = e + f$، بنابراین $ef = -fe$، از این‌رو داریم که $ef = e(ef) = e(-fe) = (-ef)e = (fe)e = fe$ حال نشان می‌دهیم که $\operatorname{char}(R) = ۲$. خودتوان‌های ناصفر $e, f \in I(R)$ $(e \neq f)$ را در نظر می‌گیریم. توجه می‌کنیم $e + f \in I(R)$ و $e \neq e + f$. از آنجایی‌که مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر است $۲e + f \in I(R)$ و همچنین با توجه به اینکه مجموعه‌ی $I(R)$ جابه‌جایی است و برای هر $e, f \in I(R)$ $(e \neq f)$، که $۲ef = ۰$ داریم $۲e + f = (۲e + f)^۲ = ۴e + ۴ef + f = ۴e + f$، بنابراین $۲e = ۰$. به‌طور مشابه، $۲(۱ - e) = ۰$ و همچنین $۲ = ۲e = ۰$ ، $۲ \cdot ۱$، بنابراین $\operatorname{char}(R) = ۲$. برعکس، اگر مجموعه‌ی $I(R)$ جابه‌جایی باشد و همچنین $\operatorname{char}(R) = ۲$، آنگاه بدیهی است که مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر است.
(۲) اگر مجموعه‌ی $M(R)$ در مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر باشد، آنگاه باید نشان دهیم که $M(R)$ مجموعه‌ای از خودتوان‌های متعامد دوبه‌دو اولیه است. فرض می‌کنیم $e, f \in M(R)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $ef \neq ۰$. از آنجایی‌که $ef = fe$ داریم که $(ef)^۲ = ef$. توجه می‌کنیم $e = ef + e(۱ - f)$، $(e(۱ - f))^۲ = e(۱ - f)$ و $ef(e(۱ - f)) = e(۱ - f)(ef) = ۰$ یعنی e حاصل‌جمع دو خودتوان متعامد ef و $e(۱ - f)$ است. از آنجایی‌که خودتوان e اولیه است $ef = ۰$ یا $e(۱ - f) = ۰$. از آنجایی‌که $ef \neq ۰$ با توجه به فرض $e(۱ - f) = ۰$ و $e = ef$. به‌طور مشابه داریم $f = fe$. از این‌رو $e = ef = fe = f$ یک تناقض است، بنابراین برای هر $e, f \in M(R)$ $(e \neq f)$، $ef = fe = ۰$ پس اثبات تمام است. برعکس، اگر $M(R)$ مجموعه‌ای از خودتوان‌های متعامد دوبه‌دو اولیه باشد، آنگاه بدیهی است که مجموعه‌ی $M(R)$ در مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر است. □

لم ۲.۱.۴. *فرض می‌کنیم R یک حلقه باشد به‌طوری‌که $I(R)$ یک مجموعه‌ی جمع‌پذیر باشد و خودتوان ناصفر $e \in I(R)$. اگر برای هر $c \in I(R)$ $(c \neq e)$، $ce = ۰$، آنگاه خودتوان e اولیه است.*

برهان. فرض کنیم خودتوان e اولیه نباشد، در این‌صورت برای خودتوان‌های متعامد ناصفر $a, b \in R$،
$e = a + b$، از آنجایی که خودتوان e اولیه نیست، پس $a, b \neq e$. بنابر فرض $۰ = ae = a + ab$ و

$b = ba + be = 0$ و همچنین $a = b = 0$ که با توجه به این‌که خودتوان‌های a, b متعامد هستند، یک تناقض است، بنابراین خودتوان e اولیه است. □

لم ۳.۱.۴. *فرض می‌کنیم R یک حلقه باشد. اگر $I(R)$ یک مجموعه‌ی جمع‌پذیر متناهی در حلقه‌ی R باشد، آنگاه $M(R) \neq \{0\}$.*

برهان. توجه می‌کنیم اگر مجموعه‌ی $I(R)$ متعامد باشد، آنگاه هر خودتوان ناصفر $e \in I(R)$ اولیه است. فرض(خلف) می‌کنیم که خودتوان $e \in I(R)$ اولیه نباشد، بنابراین برای خودتوان‌های متعامد ناصفر $a, b \in R$، $e = a + b$. به وضوح، $a \neq b$. اگر $a \neq e$ (و $b \neq e$)، آنگاه $b = eb = 0$ (و $b = eb = 0$) یک تناقض است، بنابراین هر خودتوان $e \in I(R)$ اولیه است. فرض می‌کنیم که مجموعه‌ی $I(R)$ متعامد نباشد، در این‌صورت خودتوان‌های $e, f \in I(R)$ $(e \neq f)$ وجود دارند که $ef \neq 0$، بنابراین $e \geq ef$، اگر خودتوان ef اولیه باشد، اثبات تمام است. اگر خودتوان ef اولیه نباشد، آنگاه خودتوان ناصفر $e_1 \in I(R)$ وجود دارد به‌طوری‌که بنابر لم ۲.۱.۴، $e_1(ef) \neq 0$ که $ef > e_1(ef)$ با ادامه این روند به رابطه‌ی اکیدا نزولی زیر می‌رسیم.

$$ef > e_1(ef) > e_2e_1(ef) > \cdots$$

از آنجایی که مجموعه‌ی $I(R)$ متناهی است، این رابطه با بعضی عناصر ناصفر $e_t \cdots e_1(ef) \in I(R)$ به پایان می‌رسد، پس خودتوان $e_t \cdots e_1(ef)$ باید اولیه باشد، بنابراین $M(R) \neq \{0\}$. □

قضیه ۴.۱.۴. *فرض می‌کنیم R یک حلقه باشد به‌طوری‌که $I(R)$ یک مجموعه‌ی جمع‌پذیر متناهی باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر برقرار هستند:*

(۱) حلقه‌ی R کاملا اساسی است.

(۲) اگر برای هر خودتوان ناصفر $e \in I(R)$، $e = e_1 + \cdots + e_s = f_1 + \cdots + f_t$ که e_iها خودتوان‌های اولیه دوبه‌دو متعامد از حلقه‌ی R هستند، آنگاه $s = t$ و f_jها می‌توانند شماره‌گذاری شوند، بنابراین $e_i = f_i$.

برهان. (۱) فرض کنیم خودتوان ناصفر $e \in I(R)$ دلخواه باشد، بنابر لم ۳.۱.۴ داریم $M(R) \neq \{0\}$. اگر خودتوان e اولیه باشد که اثبات تمام است.

فرض می‌کنیم که خودتوان e اولیه نباشد، در این‌صورت بنابر اثبات لم ۳.۱.۴، عنصر ناصفر $f_1 \in I(R)$ وجود دارد به‌طوری‌که خودتوان $f_1e(= ef_1)$ اولیه است و همچنین $e = ef_1 + (e - ef_1)$ که حاصل‌جمع خودتوان‌های متعامد از حلقه‌ی R است. توجه می‌کنیم $e > (e - ef_1)$. اگر خودتوان $e - ef_1$ اولیه باشد، آنگاه اثبات تمام است. فرض کنیم خودتوان $e - ef_1$ اولیه نباشد، بنابر استدلال مشابه عنصر ناصفر $f_2 \in I(R)$ وجود دارد به‌طوری‌که خودتوان $(e - ef_1)f_2$ اولیه است، بنابراین $e - ef_1 = (e - ef_1)f_2 + ((e - ef_1) - (e - ef_1)f_2)$ که حاصل‌جمع خودتوان‌های متعامد از حلقه‌ی R است. همچنین توجه می‌کنیم که $e - ef_1 > ((e - ef_1) - (e - ef_1)f_2)$. با ادامه این روند، دنباله‌ی اکیدا نزولی زیر را خواهیم داشت.

$$a_0 > a_1 > a_2 > \cdots$$

که $a_\circ = e$ و $a_{n+1} = a_n - a_n f_{n+1}$ به‌طوری‌که خودتوان ناصفر f_{n+1} از حلقه‌ی R وجود دارد که $a_n f_{n+1} \in M(R)$ و برای هر $n = 1, 2, \cdots$، $a_n \neq 0$.

در ادامه، با استقرا روی n ثابت می‌کنیم که f_nها متمایز هستند.

اگر $n = 2$، آنگاه واضح است که $f_1 \neq f_2$. فرض می‌کنیم که برای n برقرار باشد یعنی برای هر i, j متمایز ($1 \leq i, j \leq n$)، $f_i \neq f_j$. برای $n + 1$، کافی است نشان دهیم که برای هر $i = 1, \cdots, n$، $f_i \neq f_{n+1}$. فرض کنیم i ($1 \leq i \leq n$) وجود داشته باشد که $f_{n+1} = f_i$. در این‌صورت

$$\begin{aligned} a_n f_{n+1} &= (a_{n-1} - a_{n-1} f_n) f_{n+1} = (a_{n-1} - a_{n-1} f_n) f_i = a_{n-1} f_i \\ &= (a_{n-2} - a_{n-2} f_{n-1}) f_i = a_{n-2} f_i = \cdots = a_i f_i = 0 \end{aligned}$$

که این با فرض اینکه $a_n f_{n+1} \in M(R)$ تناقض دارد، بنابراین برای هر $i = 1, \cdots, n$، $f_i \neq f_{n+1}$.

از آنجایی که مجموعه‌ی $I(R)$ متناهی است و هر f_n متمایز است، دنباله‌ی بالا محدود می‌شود و همچنین a_n خودتوان اولیه‌ای از حلقه‌ی R است. در این‌صورت

$e = a_\circ f_1 + a_1 f_2 + \cdots + a_{n-1} f_n + a_n$ که حاصل‌جمعی از خودتوان‌های اولیه متعامد در حلقه‌ی R است.

(۲) بدون کاستن از کلیت مسئله، فرض می‌کنیم $s \leq t$. از آنجایی‌که

$e = e_1 + \cdots + e_s = f_1 + \cdots + f_t$ و e_iها (و f_iها) خودتوان‌های اولیه دوبه‌دو متعامد از حلقه‌ی R هستند، $e_1 = e_1 e = e_1 f_1 + \cdots + e_1 f_t$. از آن‌جایی که e_1 خودتوان اولیه‌ای از حلقه‌ی R است. $e_1 = e_1 f_1$ و باتوجه به این‌که f_i ها شماره‌گذاری می‌شوند $e_1 f_2 = \cdots = e_1 f_t$. همچنین داریم که $f_1 = e f_1 = e_1 f_1 + \cdots + e_s f_t$. از آنجایی که f_1 خودتوان اولیه‌ای از حلقه‌ی R است و $e_1 f_1 \neq 0$ و $f_1 = e_1 f_1 = e_1$ در این‌صورت $e_2 + \cdots + e_s = f_2 + \cdots + f_t$. با ادامه این روند، با توجه به اینکه f_i ها شماره‌گذاری می‌شوند، داریم که $e_2 = f_2, \cdots, e_s = f_s$، در این‌صورت $f_{s+1} + \cdots + f_t = 0$ نتیجه می‌دهد که $f_{s+1} = \cdots = f_t = 0$. بنابراین نتیجه را به‌دست آوردیم. □

فرض می‌کنیم که R یک حلقه باشد به‌طوری‌که $I(R)$ یک مجموعه‌ی جمع‌پذیر متناهی باشد، در این‌صورت هر خودتوان ناصفر $e \in I(R)$ را بنابر قضیه ۴.۱.۴، می‌توانیم به صورت حاصل‌جمع یکتای تعداد متناهی از خودتوان‌های اولیه متعامد در حلقه‌ی R بنویسیم که این تعداد یکتا را طول e می‌نامیم و آن را با $L(e)$ نمایش می‌دهیم.

لم ۵.۱.۴. *فرض می‌کنیم R یک حلقه باشد که $I(R)$ یک مجموعه‌ی جمع‌پذیر متناهی باشد. گیریم $f = f_1 + \cdots + f_t, e = e_1 + \cdots + e_s \in I(R)$ که $L(e) = s$ و $L(f) = t$ که e_iها (f_i ها) خودتوان‌های اولیه دوبه‌دو متعامد از حلقه‌ی R باشند. اگر $ef = 0$، آنگاه برای هر i, j، $e_i f_j = 0$.*

برهان. اول بررسی می‌کنیم که اگر $e_i f_j \neq 0$ و $e_k f_l \neq 0$ در حالی‌که $i \neq k$ یا $j \neq l$، آنگاه $e_i f_j \neq e_k f_l$. درحقیقت، بدون اینکه به کلیت مسئله خللی وارد شود فرض می‌کنیم $i \neq k$. اگر $e_i f_j = e_k f_l$، آنگاه $e_i f_j = e_i(e_k f_l) = (e_i e_k) f_l = 0$ که تناقض است.

توجه می‌کنیم که برای هر i,j ($k \neq i$ یا $j \neq l$)، $e_if_j = \sum e_kf_l$، بنابراین

$$e_if_j = e_i(e_if_j)f_j = e_i\left(\sum e_kf_l\right)f_j = \left(\sum_{j\neq l} e_if_l\right)f_j = ۰$$

□

لم ۶.۱.۴. *فرض می‌کنیم R یک حلقه باشد. اگر $I(R)$ یک مجموعه‌ی جمع‌پذیر متناهی باشد، آنگاه $M(R) \setminus \{۰\}$ یک مجموعه‌ی کامل از خودتوان‌های مرکزی اولیه است.*

برهان. بنابر لم ۳.۱.۴، داریم $M(R) \neq \{۰\}$. از آنجایی‌که مجموعه‌ی $I(R)$ متناهی است، می‌توانیم فرض کنیم $M(R) \setminus \{۰\} = \{e_۱, \cdots, e_r\}$. از آنجایی‌که مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر است، پس بنابرلم ۱.۱.۴ ، همه‌ی خودتوان‌ها مرکزی هستند. از آنجایی‌که مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر است پس مجموعه‌ی $M(R)$ به وضوح در مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر است. بنابراین $M(R)\setminus\{۰\}$ مجموعه‌ای است متعامد که در لم ۲.۱.۴، آمده است. پس $\{e_۱, \cdots, e_r\}$ مجموعه‌ای از خودتوان‌های مرکزی اولیه حلقه‌ی R است. برای اینکه ثابت کنیم $\{e_۱, \cdots, e_r\}$ یک مجموعه‌ی کامل از خودتوان‌های مرکزی اولیه است. نشان می‌دهیم $e_۱+\cdots+e_r = ۱$. فرض می‌کنیم $e = e_۱+\cdots+e_{r-۱} \in I(R)$. توجه می‌کنیم $۱ \neq e \neq ۰$ و $۱ = e+(۱-e)$ که حاصل‌جمعی از خودتوان‌های متعامد از حلقه‌ی R است. بنابر قضیه ۴.۱.۴، خودتوان‌های اولیه دوبه‌دو متعامد $f_۱, \cdots, f_s \in R$ وجود دارند به‌طوری‌که $۱-e = f_۱+\cdots+f_s$. فرض کنیم $s \geq ۲$. در این‌صورت گیریم $T = \{e_۱, \cdots, e_{r-۱}, f_۱, \cdots, f_s\}$. بنابراین از آنجایی‌که $e(۱-e) = ۰$، و بنابر لم ۱۰.۱.۵ برای هر i,j، $e_if_j = ۰$. در این‌صورت T متعامد است به‌طوری‌که $|T| = r-۱+s > r = |M(R)\setminus\{۰\}|$. از آنجایی‌که $T \subseteq M(R)\setminus\{۰\}$، به تناقض رسیدیم، از این رو $s = ۱$ در این‌صورت $f_۱ = e_r$. بنابراین داریم که $e_۱+\cdots+e_r = ۱$. □

قضیه ۷.۱.۴. *فرض می‌کنیم R یک حلقه باشد. در این‌صورت $I(R)$ یک مجموعه‌ی جمع‌پذیر متناهی است اگر و فقط اگر $M(R) \setminus \{۰\}$ یک مجموعه‌ی کامل از خودتوان‌های مرکزی اولیه باشد و $\mathrm{char}(R) = ۲$ و حلقه‌ی R کاملا اساسی باشد.*

برهان. اگر $I(R)$ یک مجموعه‌ی جمع‌پذیر متناهی باشد، آنگاه با دنبال کردن لم ۱.۱.۴ و لم ۶.۱.۴ و قضیه ۴.۱.۴ خواهیم داشت $M(R) \setminus \{۰\}$ یک مجموعه‌ی کامل از خودتوان‌های مرکزی اولیه است و $\mathrm{char}(R) = ۲$ و حلقه‌ی R کاملا اساسی است.

برعکس، اگر $M(R)\setminus\{۰\}$ مجموعه‌ی کامل از خودتوان‌های مرکزی اولیه باشد و $\mathrm{char}(R) = ۲$ و حلقه‌ی R کاملا اساسی باشد، آنگاه باید نشان دهیم $I(R)$ یک مجموعه‌ی جمع‌پذیر متناهی است. از آنجایی‌که مجموعه‌ی $M(R)\setminus\{۰\}$ متناهی است و حلقه‌ی R کاملا اساسی است، مجموعه‌ی $I(R)$ به وضوح متناهی است. برای اینکه نشان دهیم که مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر است، فرض کنیم e و f خودتوان‌های متمایز ناصفر دلخواه از حلقه‌ی R باشند. از آنجایی‌که حلقه‌ی R کاملا اساسی است، در این‌صورت داریم $e = e_۱ + \cdots + e_r$ و $f = f_۱ + \cdots + f_s$ که e_iها (f_jها) خودتوان‌های اولیه دوبه‌دو متعامد از حلقه‌ی R هستند. از آنجایی‌که $\mathrm{char}(R) = ۲$، فرض می‌کنیم که همه‌ی e_i و f_j متمایز باشند. ازآنجایی‌که مجموعه‌ی $M(R) \setminus \{۰\}$ متعامد است، $(e+f)^۲ = e+f$ و بنابراین مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر است. □

نتیجه ۸.۱.۴. *فرض می‌کنیم R یک حلقه باشد. اگر $I(R)$ یک مجموعه‌ی جمع‌پذیر متناهی باشد، آنگاه R یک حاصل‌ضرب مستقیم متناهی از حلقه‌های تجزیه ناپذیر است و $|I(R) \cap \{۱\}| = ۲^r$ که $r = |M(R) \setminus \{۰\}|$.*

برهان. فرض کنیم $M(R) \setminus \{۰\} = \{e_۱, \cdots, e_r\}$. بنابر لم ۶.۱.۴، $M(R) \setminus \{۰\}$ یک مجموعه‌ی کامل از خودتوان‌های مرکزی اولیه است. از آنجایی‌که برای هر $a \in R$، $e_۱ + \cdots + e_r = ۱$ و $a = e_۱a + \cdots + e_ra$ که حاصل‌جمعی از خودتوان‌های دوبه‌دو متعامد از حلقه‌ی R است و همچنین $R = e_۱R \oplus e_۲R \oplus \cdots \oplus e_rR$ که ضرب مستقیم متناهی از حلقه‌های تجزیه‌ناپذیر است. از آنجایی‌که هر $e_i \in M(R) \setminus \{۰\}$ خودتوان اولیه است، $|I(e_iR)| = ۲$ و همچنین $|I(R)| = ۲^r$ که $|M(R) \setminus \{۰\}| = r$. $\square$

تذکر ۹.۱.۴. توجه می‌کنیم که *اگر R یک حلقه باشد به‌طوری‌که $I(R)$ مجموعه‌ی جمع‌پذیر باشد، آنگاه $I(R) \cup \{۱\}$ تشکیل یک زیرحلقه‌ی بولی از حلقه‌ی R را می‌دهد. در حالت خاص، اگر $I(R)$ یک مجموعه‌ی جمع‌پذیر متناهی باشد، آنگاه* $I(R) \cup \{۱\} \cong \underbrace{\mathbb{Z}_۲ \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_۲}_{r-\text{جمعوند}}$ ($r = |M(R) \setminus \{۰\}|$).

نتیجه ۱۰.۱.۴. *فرض می‌کنیم R یک حلقه‌ی بولی متناهی باشد در این صورت حلقه‌ی R با* $\underbrace{\mathbb{Z}_۲ \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_۲}_{r-\text{جمعوند}}$ *یکریخت است که* $r = |M(R) \setminus \{۰\}|$.

برهان. بنابر تذکر ۹.۱.۴، اثبات را خواهیم داشت. $\square$

۲.۴ حلقه‌ی ون‌نیومن منظم با مجموعه‌ی جمع‌پذیر متناهی از خودتوان‌ها

فرض کنیم R یک حلقه باشد. $X(R)$ یا X بیانگر مجموعه‌ای از همه‌ی عناصر ناصفر و غیر یکه‌ی حلقه‌ی R باشد. $G(R)$ یا G بیانگر گروه یکه‌های حلقه‌ی R باشد. بنابر تعریف عمل منظم و مدار، لم زیر را خواهیم داشت.

لم ۱.۲.۴. *فرض می‌کنیم R یک حلقه باشد به‌طوری‌که گروه G روی مجموعه‌ی X تحت عمل منظم عمل کند، در این‌صورت حلقه‌ی R یکه-منظم است اگر و فقط اگر $e \in X$ وجود داشته باشد که تحت عمل منظم $O(e)$ مدار باشد.*

برهان. اگر حلقه‌ی R یکه-منظم باشد، آنگاه باید نشان دهیم که $e \in X$ وجود داشته دارد که تحت عمل منظم $O(e)$ مدار باشد. از آنجایی‌که حلقه‌ی R یکه-منظم است، پس برای هر $x \in R$، $u \in G$ وجود دارد که $xux = x$. در حالت خاص، اگر $x \in X$ آنگاه ux خودتوان است و همچنین تحت عمل منظم $O(x) = O(ux)$ مدار است.

برعکس، اگر $e \in X$ وجود داشته باشد که تحت عمل منظم $O(e)$ مدار باشد، آنگاه باید نشان دهیم حلقه‌ی R یکه-منظم است. فرض کنیم $x \in X$ دلخواه باشد. اگر $x \in G$، آنگاه

$xx^{-1}x = x \in G$. اگر $g \in G$ وجود داشته باشد که $x = ge$، آنگاه $g^{-1}x = e$ خودتوان است، بنابراین $xg^{-1}x = x$ پس حلقه‌ی R یکه-منظم است. □

تذکر ۲.۲.۴. *فرض می‌کنیم R یک حلقه باشد به‌طوری‌که $I(R)$ یک مجموعه‌ی جمع‌پذیر متناهی باشد، در این‌صورت ملاحظه می‌کنیم:*
(۱) حلقه‌ی R منظم است اگر و فقط اگر حلقه‌ی R یکه- منظم باشد اگر و فقط اگر حلقه‌ی R قویا منظم باشد اگر و فقط اگر حلقه‌ی R منظم آبلی باشد.
(۲) در حلقه‌ی منظم R تعداد متناهی مدار تحت عمل منظم گروه G روی مجموعه‌ی X وجود دارد.

قضیه ۳.۲.۴. *فرض می‌کنیم R یک حلقه‌ی منظم آبلی باشد. اگر G یک گروه آبلی باشد، آنگاه R یک حلقه‌ی جابه‌جایی است.*

برهان. اول فرض کنیم $x \in X$ و $g \in G$ دلخواه باشند. از آنجایی که حلقه‌ی R منظم آبلی است، حلقه‌ی R نیز یکه-منظم است. بنابراین عنصر $u \in G$ وجود دارد به‌طوری‌که $x = xux$، همچنین $xu, ux \in I(R)$. از آنجایی که حلقه‌ی R آبلی است، xu, ux مرکزی هستند. از آنجایی که گروه G آبلی است. $(gx)u = g(xu) = (xu)g = x(ug) = x(gu) = (xg)u$ و همچنین $gx = xg$. در ادامه، فرض کنیم $x, y \in X$ دلخواه باشند، اگر $x \in I(R)$، آنگاه $xy = yx$. اگر $x \notin I(R)$، آنگاه $v \in G$ وجود دارد که $vx, xv \in I(R)$، در این‌صورت بنابر استدلال بالا خواهیم داشت:
$v(xy) = (vx)y = y(vx) = (yv)x = (vy)x = v(yx)$ و همچنین $xy = yx$ ، بنابراین R یک حلقه‌ی جابه‌جایی است. □

نتیجه ۴.۲.۴. *فرض می‌کنیم R یک حلقه منظم باشد به‌طوری‌که $I(R)$ یک مجموعه‌ی جمع‌پذیر متناهی باشد. اگر گروه G آبلی باشد، آنگاه R یک حلقه‌ی جابه‌جایی است.*

برهان. بنابر تذکر ۲.۲.۴ و قضیه ۳.۲.۴ اثبات را دنبال می‌کنیم. □

قضیه ۵.۲.۴. *فرض می‌کنیم R یک حلقه منظم آبلی باشد که دارای یک مجموعه‌ی کامل از خودتوان‌های اولیه است. اگر گروه G دوری باشد، آنگاه حلقه‌ی R حاصل‌ضرب مستقیم از میدان‌های متناهی است.*

برهان. فرض کنیم $S = \{e_1, e_2, \cdots, e_r\}$ یک مجموعه‌ی کامل از خودتوان‌های اولیه مرکزی حلقه‌ی R باشد که $R = e_1R \times e_2R \times \cdots \times e_rR$ یک حاصل‌ضرب متناهی از حلقه‌های موضعی است. توجه می‌کنیم که رادیکال جیکوبسن حلقه‌ی R صفر است و هر e_iR، حلقه‌ی تقسیم است. از آنجایی که گروه G آبلی است، بنابر قضیه ۳.۲.۴، R یک حلقه‌ی جابه‌جایی است و در این‌صورت هر e_iR یک میدان است. از آنجایی که گروه G دوری است، هر $G(e_iR)$ دوری است و همچنین هر e_iR متناهی است. از این رو حلقه‌ی R حاصل‌ضرب مستقیم متناهی از میدان‌های متناهی است. □

نتیجه ۶.۲.۴. *فرض می‌کنیم R یک حلقه‌ی منظم و $I(R)$ یک مجموعه‌ی جمع‌پذیر متناهی باشد. اگر گروه G دوری باشد، آنگاه حلقه‌ی R حاصل‌ضرب مستقیم متناهی از میدان‌های متناهی از مشخصه‌ی ۲ و با رتبه‌های متمایز است.*

برهان. بنابر تذکر ۲.۲.۴ و قضیه ۵.۲.۴ اثبات را دنبال می‌کنیم. □

قضیه ۷.۲.۴. *فرض می‌کنیم R یک حلقه‌ی منظم آبلی باشد که دارای یک مجموعه‌ی کامل از خودتوان‌های اولیه است. اگر گروه G متناهی باشد، آنگاه حلقه‌ی R متناهی است.*

برهان. فرض می‌کنیم $x \in X$ دلخواه باشد، در این‌صورت $g \in G$، و بنابرلم ۱.۲.۴ خودتوان $e \in I(R)$ وجود دارد که $x = ge$. فرض کنیم $\{e_1, e_2, \cdots .e_r\}$ یک مجموعه‌ی کامل از خودتوان‌های اولیه حلقه‌ی R باشد. از آنجایی‌که $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_r$ و $x = ge = \sum_{ee_i \neq 0} g(ee_i)$ از آنجایی‌که گروه G متناهی است برای هر $ee_i \neq 0$، $O(ee_i)$ متناهی است. از این‌رو مجموعه‌ی X متناهی است، بنابراین حلقه‌ی R متناهی است. □

نتیجه ۸.۲.۴. *فرض می‌کنیم R یک حلقه‌ی منظم باشد به‌طوری‌که $I(R)$ یک مجموعه‌ی جمع‌پذیر متناهی است، در این‌صورت داریم:*

(۱) اگر گروه G متناهی باشد، آنگاه حلقه‌ی R متناهی است.

(۲) گروه $G = \{1\}$ اگر و فقط اگر R یک حلقه‌ی بولی متناهی باشد.

برهان. (۱)بنابر تذکر ۲.۲.۴ و قضیه ۷.۲.۴ اثبات را دنبال می‌کنیم.

(۲)بنابر گزاره‌ی اول، اگر گروه $G = \{1\}$، آنگاه حلقه‌ی R متناهی است. از آنجایی که R یک حلقه‌ی منظم است به‌طوری‌که $I(R)$ یک مجموعه‌ی جمع‌پذیر متناهی است، بنابر تذکر ۲.۲.۴، حلقه‌ی R یکه-منظم است. فرض کنیم $x \in X$ دلخواه باشد، در این‌صورت $g \in G$ و بنابر لم ۱.۲.۴، $e \in I(R)$ وجود دارد که $x = ge$، از آنجایی که $G = \{1\}$، $x = e$ و همچنین $X = I(R) \setminus \{0\}$، بنابراین $R = I(R) \cup \{1\}$ یک حلقه‌ی بولی است. برعکس این نتیجه نیز واضح است. □

فصل ۵

خودتوان‌های نیم‌مرکزی در یک حلقه

در این فصل نشان می‌دهیم که خودتوان $e \in R$ نیم‌مرکزی چپ است اگر و فقط اگر برای هر $a \in R$، $ae = eae$. همچنین ثابت می‌کنیم شرایط زیر معادل هستند.
(۱) خودتوان $e \in R$، نیم‌مرکزی چپ (راست) است،
(۲)برای هر $r \in U(R)$، $re = ere$ ($er = ere$).
(۳) برای هر پوچ توان $r \in R$، $re = ere$ ($er = ere$).
(۴)برای هر خودتوان $f \in R$، fe (ef) یک خودتوان است.
(۵)برای هر خودتوان $f \in R$، $ef = efe$ ($fe = efe$).
(۶)برای هر خودتوان $f \in R$ که با e یکریخت است $fe = efe$($ef = efe$).
(۷)برای هر خودتوان $f \in R$ که با e یکریخت است به‌طوری‌که n مقدار صحیح مثبت باشد، $(fe)^n = (efe)^n$ ($(ef)^n = (efe)^n$) .

همچنین بیان می‌کنیم:
(۱) مجموعه‌ی $M_l(R)$ ($M_r(R)$) در مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر است اگر و فقط اگر مجموعه‌ی $M_l(R)$ ($M_r(R)$) متعامد باشد.
(۲) فرض می‌کنیم $N \subseteq J(R)$، یک ایده‌آل از حلقه‌ی R باشد که خودتوان‌ها درحلقه‌ی R/N را می‌توانیم به حلقه R بالا ببریم.
آ. اگر مجموعه‌ی $S_l(R)$ ($S_r(R)$) جابه‌جایی باشد، آنگاه مجموعه‌ی $S_l(R/N)$ ($S_r(R/N)$) در مجموعه‌ی $I(R/N)$ جمع‌پذیر است اگر و فقط اگر مجموعه‌ی $S_l(R)$ ($S_r(R)$) در مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر باشد.
ب. اگر مجموعه‌ی $M_l(R)$ ($M_r(R)$) جابه‌جایی باشد، آنگاه مجموعه‌ی $M_l(R/N)$ ($M_l(R/N)$) در مجموعه‌ی $I(R/N)$ جمع‌پذیر است اگر وفقط اگر مجموعه‌ی $M_l(R)$ ($M_r(R)$) در مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر باشد.

نشان می‌دهیم که اگر حلقه‌ی R دارای یک مجموعه‌ی کامل از خودتوان‌های اولیه باشد، آنگاه حلقه‌ی R دارای یک مجموعه‌ی کامل از خودتوان‌های اولیه مرکزی است.

همچنین اگرحلقه‌ی R دارای مجموعه‌ی کامل $\{c_۱, c_۲, \cdots, c_n\}$ از خودتوان‌های اولیه مرکزی باشد، آنگاه هر خودتوان مرکزی حاصل‌جمعی از زیرمجموعه‌ی $\{c_۱, c_۲, \cdots, c_n\}$ است.

در ادامه نشان می‌دهیم:

(۱) حلقه‌ی R دارای مجموعه‌ی کامل T از خودتوان‌های اولیه مرکزی است، که هر خودتوان نیم‌مرکزی چپ ناصفر حلقه‌ی R حاصل‌جمع خودتوان‌های اولیه نیم‌مرکزی چپ متعامد حلقه‌ی R است و برای هر خودتوان ناصفر $e \in R$ حلقه‌ی eRe دارای مجموعه‌ی کامل خودتوان‌های اولیه مرکزی است.

(۲) حلقه‌ی R دارای مجموعه‌ی کامل T از خودتوان‌های اولیه است و هر مجموعه‌ی کامل از خودتوان‌های اولیه مرکزی در T وجود دارد و مجموعه‌ی T شامل همه‌ی خودتوان‌های اولیه مرکزی حلقه‌ی R است.

۱.۵ ویژگی‌هایی از خودتوان‌های نیم‌مرکزی یک حلقه

در این بخش می‌خواهیم بعضی ویژگی‌های خودتوان‌های نیم‌مرکزی چپ (راست) در حلقه‌ی R را پیدا کنیم.

در ابتدا با بیان گزاره‌ی زیر تعریف دیگری از خودتوان‌های یکریخت را ارائه می‌کنیم.

گزاره ۱.۱.۵. *فرض می‌کنیم e و f خودتوان‌هایی از حلقه‌ی R باشند، در این‌صورت شرایط زیر معادل هستند:*

(۱) eR و fR به عنوان R-مدول راست یکریخت هستند.

(۲) Re و Rf به عنوان R-مدول چپ یکریخت هستند.

(۳) اگر $a \in eRf$ و $b \in fRe$، آنگاه $e = ab$ و $f = ba$.

(۴) اگر $a, b \in R$، آنگاه $e = ab$ و $f = ba$.

اگر خودتوان‌های e و f در هریک از شرایط فوق صدق کنند، گوییم که خودتوان‌های e و f یکریخت هستند.

برهان. کافی است نشان دهیم که ۱ $\Longrightarrow$ ۳ $\Longrightarrow$ ۲ $\Longrightarrow$ ۱ برقرار است.

۲ $\Longrightarrow$ ۱ ابتدا R-همریختی $\theta : eR \longrightarrow fR$ را در نظر می‌گیریم که $b = \theta(e) \in fRe$ و به‌طور مشابه $\theta^{-۱} : fR \longrightarrow eR$ را در نظر می‌گیریم که $a = \theta^{-۱}(f) \in eRf$ که با ترکیب $\theta^{-۱}\theta$، خودتوان e، عنصر ab را نتیجه می‌دهد، بنابراین $e = ab$ و $f = ba$.

۳ $\Longrightarrow$ ۲ بدیهی است.

۱ $\Longrightarrow$ ۳ فرض کنیم a و b در شرط (۳) صدق کنند، بنابراین $be = b(ab) \in fR$ و $af = a(ba) \in eR$. تعریف می‌کنیم $\theta : eR \longrightarrow fR$ و $\theta' : fR \longrightarrow eR$ که $\theta(x) = bx \in fR$ و $\theta'(y) = ay \in eR$، بنابراین

$$\theta'\theta(e) = abe = e^۲ = e$$

$$\theta\theta'(f) = baf = f^{2} = f$$

از این‌رو $\theta\theta' = 1$ و $\theta'\theta = 1$ پس اثبات تمام است. □

گزاره ۲.۱.۵. *برای هر خودتوان e از حلقه‌ی R شرایط زیر معادل هستند:*

(۱) *خودتوان $e \in R$، نیم‌مرکزی چپ (راست) است.*

(۲) *برای هر $r \in U(R)$، $re = ere$ $(er = ere)$.*

(۳) *برای هر پوچ توان $r \in R$، $re = ere$ $(er = ere)$.*

(۴) *برای هر خودتوان $f \in R$، fe (ef) یک خودتوان است.*

(۵) *برای هر خودتوان $f \in R$، $ef = efe$ $(fe = efe)$.*

(۶) *برای هر خودتوان $f \in R$ که با e یکریخت است $fe = efe$ $(ef = efe)$.*

(۷) *برای هر خودتوان $f \in R$ که با e یکریخت است به‌طوری‌که n مقدار صحیح مثبت باشد، $(fe)^n = (efe)^n$ $((ef)^n = (efe)^n)$.*

برهان. فقط مورد نیم‌مرکزی چپ را اثبات می‌کنیم و مورد نیم مرکزی راست به‌طور مشابه اثبات خواهد شد.

$۲,۳,۴ \Longleftarrow ۱$ و $۷ \Longleftarrow ۶ \Longleftarrow ۵$ بدیهی است.

$۳ \Longleftarrow ۲$ فرض می‌کنیم که شرط (۲) برقرار باشد و r پوچ‌توان دلخواهی از حلقه‌ی R باشد، در این‌صورت $1 + r$ یکه است. بنابر فرض (۲)، $(1+r)e = e(1+r)e$ که داریم $re = ere$، بنابراین شرط (۳) برقرار است.

$۱ \Longleftarrow ۳$ فرض می‌کنیم که شرط(۳) برقرار باشد و $a \in R$ دلخواه باشد که $r = (1 - e)ae \in R$، در این‌صورت $r^{2} = 0$ و همچنین $re = ere$ و این نتیجه می‌دهد که $(1 - e)ae = 0$، بنابراین $ae = eae$ و e خودتوان نیم‌مرکزی چپ است.

$۵ \Longleftarrow ۴$ فرض می‌کنیم که شرط (۴) برقرار باشد. از آنجایی‌که برای هر خودتوان $f \in R$، $1-f \in R$ خودتوان است، بنابرفرض $(1 - f)e = ((1 - f)e)^{2}$، در این‌صورت
$e - fe = (1 - f)e = ((1 - f)e)^{2} = e - fe - efe + (fe)^{2} = e - efe.$ بنابراین برای هر خودتوان $f \in R$، $fe = efe$.

$۱ \Longleftarrow ۷$ فرض می‌کنیم که شرط (۶) برقرار باشد و خودتوان e نیم‌مرکزی چپ نباشد، در این‌صورت $a \in R$ وجود دارد که $ae - eae \neq 0$. فرض می‌کنیم $f = e + ae - eae$، در این‌صورت $f^{2} = f \neq e$ و $fe = f$ و $ef = e$ که این‌ها خودتوان‌های یکریخت هستند، بنابراین برای n صحیح مثبت $e = (efe)^n \neq (fe)^n = f$ که با فرض (۶) در تناقض است، بنابراین خودتوان e نیم‌مرکزی چپ است. □

نتیجه ۳.۱.۵. *برای هر خودتوان e از حلقه‌ی R شرایط زیر معادل هستند:*

(۱) *خودتوان $e \in R$ مرکزی است.*

(۲) *برای هر $r \in U(R)$، $re = er$.*

(۳) *برای هر پوچ‌توان $r \in R$، $re = er$.*

(۴) *برای هر خودتوان $f \in R$، fe و ef خودتوان هستند.*
(۵) *برای هر خودتوان $f \in R$، $fe = ef$،*
(۶) *برای هر خودتوان $f \in R$ که با e یکریخت است $fe = ef$.*
(۷) *برای هر خودتوان $f \in R$ که با e یکریخت است به‌طوری‌که n یک مقدار صحیح مثبت است، $(fe)^n = (ef)^n$.*

برهان. با توجه به گزاره ۲.۱.۵ اثبات را خواهیم داشت. □

نتیجه ۴.۱.۵. *فرض می‌کنیم R یک حلقه باشد. خودتوان e از حلقه‌ی R نیم‌مرکزی چپ است اگر و فقط اگر خودتوان $1-e$ نیم‌مرکزی راست باشد.*

برهان. فرض کنیم e یک خودتوان نیم‌مرکزی چپ از حلقه‌ی R باشد، در این‌صورت بنابر گزاره ۲.۱.۵، برای هر خودتوان $f \in R$، $fe = ef$. بنابراین $(1-e)f(1-e) = f - ef - fe + efe = f - ef = f(1-e)$ که نتیجه می‌دهد بنابر گزاره ۲.۱.۵، $1-e$ خودتوان نیم‌مرکزی راست حلقه‌ی R است که عکس این نتیجه با استدلال مشابه برقرار است. □

مثال ۵.۱.۵. فرض می‌کنیم R یک حلقه‌ی ماتریسی بالا مثلثی ۲ × ۲ روی $\mathbb{Z}_3$ باشد، که $\mathbb{Z}_3$ یک میدان به پیمانه‌ی ۳ است. فرض می‌کنیم $e = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ دو خودتوان ازحلقه‌ی R باشند. از آنجایی‌که ef خودتوانی از حلقه‌ی R نیست. بنابر گزاره‌ی ۲.۱.۵، خودتوان e نیم‌مرکزی راست نیست. اما می‌توانیم بررسی کنیم که خودتوان e نیم‌مرکزی چپ است. باتوجه به نتیجه‌ی ۴.۱.۵، $1-e$ خودتوان نیم‌مرکزی راست است، اما خودتوان نیم‌مرکزی چپ از حلقه‌ی R نیست.

تذکر ۶.۱.۵. *فرض کنیم $S_l(R)$ ($S_r(R)$) مجموعه‌ی همه‌ی خودتوان‌های نیم‌مرکزی چپ حلقه‌ی R باشد. توجه می‌کنیم گزاره‌های زیر برقرار هستند.*
(۱) *مجموعه $S_l(R)$ ($S_r(R)$) تحت ضرب بسته است.*
(۲) *مجموعه $S_l(R)$ ($S_r(R)$) تحت مزدوج‌گیری بسته است یعنی برای هر $e \in S_l(R)$ ($e \in S_r(R)$) و هر $u \in U(R)$، $ueu^{-1} \in S_l(R)$.*
(۳) *خودتوان $e \in S_l(R)$ ($f \in S_r(R)$) اگر و فقط اگر برای هر $a \in R$، $e + ea(1-e) \in S_l(R)$ ($f + fa(1-f) \in S_r(R)$).*

لم ۷.۱.۵. *فرض می‌کنیم خودتوان‌های $e, e' \in R$، در این‌صورت شرایط زیر معادل هستند.*
(۱) $eR = e'R$،
(۲) $ee' = e', e'e = e$،
(۳) *$r \in R$ وجود دارد که $e' = e + er(1-e)$،*
(۴) $R(1-e) = R(1-e')$،
اگر این شرایط برقرار باشند، آنگاه $u \in U(R)$ وجود دارد که $e' = u^{-1}eu$.(توجه می‌کنیم اگر شرط (۲) برقرار باشد، آنگاه $e' = e + ee'(1-e)$.)

برهان. $۱ \Longrightarrow ۲$ فرض کنیم $r, s \in R$ وجود داشته باشند که $e = e'r$ و $e' = es$. با ضرب چپ e' و e به‌ترتیب شرط (۲) را داریم.
$۲ \Longrightarrow ۳$ فرض کنیم شرط (۲) برقرار باشد، $e + ee'(۱ - e) = e + e'(۱ - e) = e + e' - e'e = e'$.
$۳ \Longrightarrow ۴$با توجه به شرط (۳) داریم $e' = eu$ که $u = ۱ + er(۱ - e)$. از این‌رو $u \in U(R)$ چون‌که آن دارای معکوس $۱ - er(۱ - e)$ است.
$۴ \Longrightarrow ۱$ فرض کنیم شرط (۴) برقرار باشد، داریم $e'R = euR = eR$ که $u \in U(R)$.
$۱ \Longrightarrow ۵$ با توجه به شرط (۱)، شرط (۲) را داریم که
$۱ - e = ۱ - e - e' + ee' = (۱ - e)(۱ - e') \in R(۱ - e')$ به‌طور مشابه، $۱ - e' \in R(۱ - e)$،
بنابراین $R(۱ - e) = R(۱ - e')$.
$۵ \Longrightarrow ۱$ با توجه به اثبات بالا، اثبات را داریم.
فرض می‌کنیم شرایط فوق برقرار باشند. برای $u \in U(R)$، در $۳ \Longrightarrow ۴$ داریم
$u^{-۱}e = (۱ - er(۱ - e))e = e$، بنابراین $u^{-۱}eu = eu = e'$ به ترتیب توجه می‌کنیم

$$(۱ - e)R \cong R/eR = R/e'R \cong (۱ - e')R$$

که R-مدول‌های راست هستند که بنابر این نتیجه و شرط (۲) e' مزدوج e است. □

توجه می‌کنیم که اگر e و $e' = e + ea(۱ - e)$ $(a \in R)$ خودتوان‌هایی از حلقه‌ی R باشند، آنگاه بنابر لم ۷.۱.۵، $u \in U(R)$ وجود دارد که $e + ea(۱ - e) = ueu^{-۱}$ اما عکس آن ممکن است درست نباشد که برای اثبات این نادرستی مثال زیر را دنبال می‌کنیم.

مثال ۸.۱.۵. فرض می‌کنیم R یک حلقه‌ی ماتریسی ۲×۲ روی $\mathbb{Z}_۲$ باشد که $\mathbb{Z}_۲$ یک میدان به پیمانه‌ی ۲ است. فرض می‌کنیم $e = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ خودتوانی از حلقه‌ی R باشد، در این‌صورت بررسی می‌کنیم که

$$\{e + ea(۱ - e) | a \in R\} = \left\{ \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} \right\}$$

فرض کنیم $f^۲ = f = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \in R$، در این‌صورت $f \notin \{e + ea(۱ - e) | a \in R\}$. به عبارت دیگر، خودتوان‌های e و f مزدوج هستند چون‌که $u = \begin{pmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} \in U(R)$ وجود دارد که $e = ufu^{-۱}$.

حال سوال زیر پیش می‌آید.
سوال: فرض می‌کنیم e و e' خودتوان‌های یکریختی از حلقه‌ی R باشند، در این‌صورت چه زمانی نیم‌مرکزی چپ (راست) بودن خودتوان e، نیم‌مرکزی چپ (راست) بودن خودتوان e' را نتیجه می‌دهد؟
اگر eRe یک حلقه‌ی نیم موضعی باشد، آنگاه $e \cong e'$ اگر و فقط اگر $u \in U(R)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $e' = ueu^{-۱}$.
بنابراین زمانی‌که eRe یک حلقه‌ی نیم‌موضعی باشد، بنابر قسمت دوم تذکر ۶.۱.۵، نیم‌مرکزی چپ (راست) بودن خودتوان e، نیم‌مرکزی چپ (راست) بودن خودتوان e' را نتیجه می‌دهد.

لم ۹.۱.۵. *فرض کنیم R یک حلقه و S یک زیرمجموعه از حلقه‌ی R باشد، در این‌صورت زیرمجموعه‌ی S در مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر است اگر و فقط اگر زیرمجموعه‌ی S جابه‌جایی باشد و برای هر $e, f \in S$ که $e \neq f$، $2ef = 0$.*

برهان. فرض کنیم که زیرمجموعه‌ی S در مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر باشد و $e, f \in S$ $(e \neq f)$ دلخواه باشند، در این‌صورت $e+f = (e+f)^2 = e+ef+fe+f$ نتیجه می‌دهد که $ef = -fe$، بنابراین $ef = e(ef) = e(-fe) = (-ef)e = (fe)e = fe$. از این‌رو زیرمجموعه‌ی S جابه‌جایی است و همچنین برای هر $e, f \in S$ $(e \neq f)$ ، $2ef = 0$ و عکس این لم نیز واضح است. □

لم ۱۰.۱.۵. *برای هر حلقه‌ی R شرایط زیر معادل هستند.*

(۱) *مجموعه‌ی $S_l(R)$ جابه‌جایی است.*

(۲) *مجموعه‌ی $S_r(R)$ جابه‌جایی است.*

(۳) $S_l(R) = B(R)$.

(۴) $S_r(R) = B(R)$.

برهان. ۲ $\Longleftrightarrow$ ۱ را بنابر نتیجه‌ی ۴.۱.۵، دنبال می‌کنیم و ۱ $\Longrightarrow$ ۳ و ۱ $\Longrightarrow$ ۴ بدیهی است.
۳ $\Longrightarrow$ ۱ فرض می‌کنیم مجموعه‌ی $S_l(R)$ جابه‌جایی باشد و $e \in S_l(R)$ و $a \in R$ دلخواه باشند. در نظر می‌گیریم $f = e + ea(1-e)$، در این‌صورت بنابر تذکر ۶.۱.۵، $f \in S_l(R)$. از آنجایی‌که مجموعه‌ی $S_l(R)$ جابه‌جایی است، $e = fe = ef = f = e+ea(1-e)$ و همچنین $ea = eae = ae$. از این رو خودتوان e مرکزی است و بنابر گزاره‌ی (۱)، گزاره‌ی (۳) را خواهیم داشت. به‌طور مشابه، اثبات ۴ $\Longrightarrow$ ۲ را خواهیم داشت. □

گزاره ۱۱.۱.۵. *در هر حلقه‌ی R گزاره‌های زیر معادل هستند.*

(۱) *مجموعه‌ی $S_l(R)$ $(S_r(R))$ در مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیراست.*

(۲) *مجموعه‌ی $S_l(R)$ $(S_r(R))$ جابه‌جایی است و برای هر $e \in S_l(R)$ $(e \in S_l(R))$، $2e = 0$.*

(۳) *مجموعه‌ی $S_l(R)$ $(S_r(R))$ جابه‌جایی است و* $\mathrm{char}(R) = 2$.

برهان. فقط مورد نیم‌مرکزی چپ را اثبات می‌کنیم و مورد نیم‌مرکزی راست به‌طور مشابه اثبات خواهد شد.
۲ $\Longrightarrow$ ۱ فرض می‌کنیم مجموعه‌ی $S_l(R)$ در مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر باشد، در این‌صورت بنابر لم ۹.۱.۵، داریم که مجموعه‌ی $S_l(R)$ جابه‌جایی است. فرض کنیم $e \in S_l(R)$ $(e \neq 1)$ دلخواه باشد، از آنجایی‌که مجموعه‌ی $S_l(R)$ در مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر است و $1, e \in S_l(R)$، $1 + e \in I(R)$ و بنابراین $2e = 0$.
۳ $\Longrightarrow$ ۲ فرض کنیم مجموعه‌ی $S_l(R)$ جابه‌جایی باشد و برای هر $e \in S_l(R)$، $2e = 0$. از آنجایی‌که بنابر نتیجه ۴.۱.۵، $1 - e \in S_r(R)$، و بنابر لم ۱۰.۱.۵، $S_r(R)$=$S_l(R)$ پس بنابر فرض $2(1-e) = 0$ و هم‌چنین $2e = 0 = 2 \cdot 1$، بنابراین $\mathrm{char}(R) = 2$.

۱ $\Longrightarrow$ ۳ بدیهی است.

□

نتیجه ۱۲.۱.۵. *فرض می‌کنیم R یک حلقه باشد، دراین‌صورت مجموعه‌ی $B(R)$ در مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر است اگر و فقط اگر مجموعه‌ی $B(R)$ تشکیل یک حلقه‌ی بولی دهد.*

برهان. بنابر لم ۱۰.۱.۵ و گزاره ۱۱.۱.۵ اثبات را دنبال می‌کنیم. □

لم ۱۳.۱.۵. *فرض می‌کنیم e و e' خودتوان‌های جابه‌جاپذیر باشند که $e \overset{(I)}{\equiv} e'$ که I یک ایده‌آل پوچ است، در این‌صورت $e = e'$.*

برهان. به گزاره‌ی ۲۱.۱۳ از مرجع [۱۲] مراجعه می‌کنیم. □

با توجه به لم ۱۳.۱.۵ توجه می‌کنیم که اگر e و f خودتوان‌های جابه‌جاپذیر از حلقه‌ی R باشند به‌طوری‌که $\bar{e} = \bar{f} \in R/N$ در حالی‌که N یک ایده‌آل پوچ از حلقه‌ی R است در این‌صورت $e = f$ و این شناخته شده است که اگر N یک ایده‌آل پوچ از حلقه‌ی R باشد، آنگاه $N \subseteq J(R)$.

در حقیقت، در ادامه داریم:

گزاره ۱۴.۱.۵. *فرض کنیم $N \subseteq J(R)$ یک ایده‌آل از حلقه‌ی R باشد. اگر $e, f \in R$ خودتوان‌های جابه‌جاپذیر باشند به طوری که $\bar{e} = \bar{f} \in R/N$، آنگاه $e = f$.*

برهان. از آنجایی‌که $\bar{e}, \bar{f} \in R/N$، $e - f \in N$، همچنین $ef = fe$ پس داریم که $(e-f)^۴ = e - ۲ef + f = (e-f)^۲$ و همچنین $(e-f)^۲ \in I(R)$ که $(e-f)^۲ \in I(R) \cap N \subseteq I(R) \cap J(R)$. از آنجایی که $I(R) \cap J(R) = \{۰\}$، $(e-f)^۲ = e - ۲ef + f = ۰$. از این‌رو $e + f = ۲ef$ $(*)$ که اگر از هر دو طرف e (f) را با $(*)$ ضرب کنیم، داریم $e = ef$ $(f = ef)$، بنابراین $e - f = ef - ef = ۰$. □

گزاره ۱۵.۱.۵. *فرض می‌کنیم R یک حلقه باشد، در این‌صورت مجموعه‌ی $M_l(R)$ $(M_r(R))$ در مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر است اگر و فقط اگر مجموعه‌ی $M_l(R)$ $(M_r(R))$ متعامد باشد.*

برهان. فرض می‌کنیم که مجموعه‌ی $M_l(R)$ $(M_r(R))$ در مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر باشد و $e, f \in M_l(R)$ $(e, f \in M_r(R))$ وجود داشته باشد که $ef \neq ۰$. از آنجایی که مجموعه‌ی $M_l(R)$ $(M_r(R))$ در مجموعه‌ی $I(R)$ جمع‌پذیر است بنابر لم ۹.۱.۵، مجموعه‌ی $M_l(R)$ $(M_r(R))$ جابه‌جایی است و همچنین $ef = fe$.
توجه می‌کنیم که $e = ef + (e - ef)$ و $ef(e-ef) = (e-ef)ef = ۰$. از آنجایی که خودتوان e اولیه است و $ef \neq ۰$، $e = ef$. بنابر استدلال مشابه داریم که $f = fe (= ef)$، بنابراین $e = f$ که این تناقض است پس $ef = ۰$ و همچنین مجموعه‌ی $M_l(R)$ $(M_r(R))$ متعامد است که عکس این گزاره نیز واضح است. □

گزاره ۱۶.۱.۵. *فرض می‌کنیم $e \in R$ یک خودتوان از حلقه‌ی R باشد و $I \subseteq J(R)$ یک ایده‌آل از حلقه‌ی R باشد. اگر خودتوان $\bar{e}$ در $\bar{R} := R/I$، اولیه باشد، آنگاه خودتوان e در حلقه‌ی R اولیه است، اگر خودتوان‌های حلقه‌ی $\bar{R}$ را بتوانیم به حلقه‌ی R بالا ببریم، عکس این گزاره برقرار است.*

برهان. به گزاره‌ی ۲۱.۲۲ از مرجع [۱۱] مراجعه می‌کنیم. □

گزاره ۱۷.۱.۵. *فرض کنیم $N \subseteq J(R)$ یک ایده‌آل از حلقه‌ی R باشد به طوری‌که خودتوان‌ها در حلقه R/N را می‌توانیم به حلقه R بالا ببریم. در این‌صورت گزاره‌های زیر برقرار هستند:*
(۱) اگر مجموعه‌ی $S_l(R)$ ($S_r(R)$) جابه‌جایی باشد، آنگاه مجموعه‌ی $S_l(R/N)$ ($S_r(R)$) متعامد است اگر و فقط اگر مجموعه‌ی $S_l(R)$ ($S_r(R)$) متعامد باشد.
(۲)اگر مجموعه‌ی $M_l(R)$ ($M_r(R)$) جابه‌جایی باشد، آنگاه مجموعه‌ی $M_l(R/N)$ ($M_r(R/N)$) متعامد است اگر و فقط اگر مجموعه‌ی $M_l(R)$ ($M_r(R)$) متعامد باشد.

برهان. فقط مورد نیم‌مرکزی چپ را اثبات می‌کنیم و مورد نیم‌مرکزی راست به‌طور مشابه اثبات خواهد شد.
(۱) فرض می‌کنیم که مجموعه‌ی $S_l(R/N)$ متعامد باشد و $e, f \in S_l(R)$ ($e \neq f$) دلخواه باشند. به‌وضوح، $\bar{e}, \bar{f} \in S_l(R/N)$. فرض کنیم که $e, f \neq ۰$. اگر $\bar{e} = \bar{f}$، آنگاه بنابر گزاره ۱۴.۱.۵، $e = f$ که تناقض است، بنابراین $\bar{e} \neq \bar{f}$. از آنجایی‌که مجموعه‌ی $S_l(R/N)$ متعامد است، $\bar{e}\bar{f} = \bar{f}\bar{e} = ۰$ و بنابراین $ef, fe \in N$. بنابر گزاره ۲.۱.۵، $ef, fe \in I(R)$ و در این‌صورت $ef, fe \in I(R) \cap N \subseteq I(R) \cap J(R) = \{۰\}$. از این‌رو مجموعه‌ی $S_l(R)$ متعامد است که عکس این نیز واضح است.
(۲) توجه می‌کنیم که اگر $e \in R$ یک خودتوان اولیه باشد، آنگاه با توجه به گزاره‌ی ۱۶.۱.۵، $\bar{e} \in R/N$ یک خودتوان اولیه است. از این رو، باتوجه به استدلال مشابه اثبات (۱)، اثبات را خواهیم داشت. □

تذکر ۱۸.۱.۵. *فرض می‌کنیم $N \subseteq J(R)$ یک ایده‌آل از حلقه‌ی R باشد به‌طوری‌که خودتوان‌های حلقه R/N را می‌توانیم به حلقه R بالا ببریم. بنابر گزاره ۱۴.۱.۵، توجه می‌کنیم که اگر مجموعه‌ی $S_l(R)$ ($M_l(R), M_r(R)$) جابه‌جایی باشد، آنگاه $|S_l(R)|$=$|S_l(R/N)|$.*
($|M_l(R)| = |M_l(R/N)|, |M_r(R)| = |M_r(R/N)|$) که $|S|$ همان اندازه مجموعه‌ی S است.

نتیجه ۱۹.۱.۵. *فرض می‌کنیم که $N \subseteq J(R)$ یک ایده‌آل پوچ از حلقه‌ی R باشد که هر خودتوان آن مرکزی است، در این‌صورت مجموعه‌ی $I(R)$ متعامد است اگر و فقط اگر مجموعه‌ی $I(R/N)$ متعامد باشد.*

برهان. با توجه به لم ۱۰.۱.۵ و گزاره ۱۷.۱.۵ اثبات را دنبال می‌کنیم. □

گزاره ۲۰.۱.۵. *برای هر خودتوان e از حلقه‌ی R شرایط زیر معادل هستند.*
(۱) هر خودتوان $e \in M_l(R)$ ($M_r(R)$) مرکزی است.
(۲) برای هر خودتوان $e \in M_l(R)$ ($e \in M_r(R)$) و $r \in U(R)$، $re = er$.

(۳) *برای هر خودتوان* $e \in M_l(R)$ $(e \in M_r(R))$ *و هر پوچ‌توان* $r \in R$، $re = er$.

(۴) *مجموعه‌ی* $M_l(R)$ *جابه‌جایی است.*

(۵) *برای هر خودتوان* $f \in M_l(R)$ $(f \in M_r(R))$ *که با* e *یکریخت است* $ef = fe$.

(۶) *برای هر خودتوان* $f \in M_l(R)$ $(f \in M_r(R))$ *که با* e *یکریخت است به‌طوری‌که* n *مقدار صحیح مثبت باشد،* $(ef)^n = (fe)^n$.

برهان. فقط مورد نیم‌مرکزی چپ را اثبات می‌کنیم و مورد نیم‌مرکزی راست به‌طور مشابه اثبات خواهد شد. کافی است ۱ $\Longrightarrow$ ۶ را اثبات کنیم.
فرض می‌کنیم شرط (۶) برقرار باشد و خودتوان $e \in M_l(R)$ وجود داشته باشد که مرکزی نیست. در این‌صورت $a \in R$ وجود دارد که $ea \neq ae$. فرض کنیم $f = e + ea(1-e)$. واضح است که $f \neq e$ و بنابر تذکر ۶.۱.۵، $f \in S_l(R)$. ازآنجایی‌که $f = ef$ و $e = fe$ پس f با e یکریخت است. توجه می‌کنیم که f یک خودتوان اولیه از حلقه‌ی R است. در حقیقت، از آنجایی‌که $eR = efeR \subseteq efR \subseteq eR$، $eR = efR = fR$ و همچنین f یک خودتوان اولیه از حلقه‌ی R است. بنابراین، برای مقدار صحیح مثبت n، $e = (fe)^n \neq (ef)^n = f$ که با فرض (۶) در تناقض است، بنابراین خودتوان $e \in M_l(R)$ مرکزی است. $\square$

تذکر ۲۱.۱.۵. *واضح است که اگر مجموعه‌ی* $M(R)$ $(M_l(R), M_r(R))$ *جابه‌جایی باشد، آنگاه مجموعه‌ی* $M(R)$ $(M_l(R), M_r(R))$ *ضربی بسته است اما عکس این ممکن است برقرار نباشد.*
در حقیقت فرض کنیم اگر R *یک حلقه‌ی ماتریسی* 2×2 *روی* $\mathbb{Z}_2$ *باشد، بنابراین می‌توانیم بررسی کنیم که*

$$M_l(R) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(M_r(R) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\})$$

ضربی بسته است اما جابه‌جایی نیست.

۲.۵ حلقه‌هایی که دارای مجموعه‌ای کامل از خودتوان‌های اولیه مرکزی هستند

گزاره ۱.۲.۵. *اگر حلقه‌ی* R *دارای یک مجموعه کامل از خودتوان‌های اولیه نیم‌مرکزی چپ (یا راست) باشد، آنگاه برای هر* $i = 1, \cdots, n$، c_i*ها مرکزی هستند.*

برهان. فرض می‌کنیم $\{c_1, \cdots, c_n\}$ یک مجموعه کامل از خودتوان‌های اولیه نیم‌مرکزی چپ باشد، در این‌صورت $1 = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ و همچنین برای هر $r \in R$، داریم که
$r = rc_1 + rc_2 + \cdots + rc_n = c_1rc_1 + c_2rc_2 + \cdots + c_nrc_n$، بنابراین برای هر $i = 1, \cdots, n$، $c_ir = c_irc_i = rc_i$ و همچنین برای هر $i = 1, \cdots, n$، c_i ها مرکزی هستند. اگر $\{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$

یک مجموعه کامل از خودتوان‌های اولیه نیم‌مرکزی راست باشد، پس برای هر $i=1,\cdots,n$، c_iها به‌طور مشابه مرکزی هستند. □

گزاره ۲.۲.۵. *فرض می‌کنیم تجزیه‌ای از $1\in R$ روی حاصل‌جمع خودتوان‌های اولیه مرکزی متعامد وجود داشته باشد که $1=c_1+\cdots+c_r$، در این‌صورت :*

(۱) هرخودتوان مرکزی $c\in R$ یک حاصل‌جمع از زیرمجموعه‌ی $\{c_1,\cdots,c_r\}$ است.

(۲) مجموعه $c_1,\cdots,c_r$ تنها خودتوان‌های اولیه مرکزی در R هستند. در حالت خاص هر دو خودتوان اولیه مرکزی متمایز در حلقه‌ی R متعامد هستند.

(۳) تجزیه $1=c_1+\cdots+c_r$ روی جایگشتی از جمع‌وندها یکتا است.

برهان. به گزاره‌ی ۲۲.۱ از مرجع [۱۱] مراجعه می‌کنیم. □

گزاره ۱.۲.۵، نشان می‌دهد که حلقه‌ی R دارای مجموعه‌ی کامل از خودتوان‌های اولیه نیم‌مرکزی چپ (راست) است اگر و فقط اگر حلقه‌ی R دارای یک مجموعه‌ی کامل از خودتوان‌های اولیه مرکزی باشد. بنابر گزاره‌ی ۲.۲.۵ نشان می‌دهیم که اگر حلقه‌ی R دارای یک مجموعه کامل $\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$ از خودتوان‌های اولیه مرکزی باشد، آنگاه خودتوان‌های مرکزی حاصل‌جمعی از زیرمجموعه‌ی $\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$ هستند. به عبارت دیگر، در ادامه داریم:

گزاره ۳.۲.۵. *اگر حلقه R دارای یک مجموعه‌ی کامل از خودتوان‌های اولیه مرکزی باشد، آنگاه هر خودتوان نیم‌مرکزی چپ (راست) ناصفر از حلقه‌ی R حاصل‌جمع خودتوان‌های نیم‌مرکزی چپ (راست) متعامد حلقه‌ی R است.*

برهان. فقط مورد نیم‌مرکزی چپ را اثبات می‌کنیم و مورد نیم‌مرکزی راست به‌طور مشابه اثبات خواهد شد. فرض کنیم $e\in R$ یک خودتوان نیم‌مرکزی چپ ناصفر باشد و $\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$ یک مجموعه‌ی کامل از خودتوان‌های اولیه مرکزی حلقه‌ی R باشد. از آنجایی‌که $1=c_1+\cdots+c_n$ و $e=ec_1+\cdots+ec_n$. اگر i وجود داشته باشد که $ec_i\neq 0$، آنگاه ec_i خودتوان اولیه حلقه‌ی R است. به عبارت دیگر، برای هر r و برای هر i، $(ec_i)r(ec_i)=e(rc_i)e=r(ec_i)$ و بنابراین هر ec_i خودتوان نیم‌مرکزی چپ از حلقه‌ی R است. بنابراین اگر i وجود داشته باشد که $ec_i\neq 0$، آنگاه ec_i یک خودتوان اولیه نیم‌مرکزی چپ از حلقه‌ی R است، همچنین $e=\sum_{ec_i\neq 0} ec_i$ که حاصل‌جمعی از خودتوان‌های اولیه نیم‌مرکزی چپ از حلقه‌ی R است. به وضوح، مجموعه‌ی $\{ec_i : ec_i\neq 0\}$ متعامد است. □

گزاره ۴.۲.۵. *اگر حلقه‌ی R دارای یک مجموعه کامل $\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$ از خودتوان‌های اولیه مرکزی باشد، آنگاه هر خودتوان مرکزی به صورت حاصل‌جمعی از یک زیرمجموعه‌ی $\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$ است.*

برهان. فرض کنیم خودتوان $e\in R$ مرکزی باشد، در این‌صورت $e=\sum_{ec_i\neq 0} ec_i$ که حاصل‌جمعی از خودتوان‌های نیم‌مرکزی چپ اولیه حلقه‌ی R در اثبات گزاره ۳.۲.۵ است. توجه کنیم اگر i وجود داشته باشد که $ec_i\neq 0$، آنگاه $ec_i=c_i$. به عبارت دیگر، $e=\sum_{ec_i\neq 0} ec_i=\sum_{ec_i\neq 0} c_i$. □

گزاره ۵.۲.۵. *اگر حلقه‌ی R دارای مجموعه‌ی کامل از خودتوان‌های اولیه باشد، آنگاه حلقه‌ی eRe دارای مجموعه‌ی کامل خودتوان‌های اولیه از خودتوان‌های نیم‌مرکزی چپ (راست) ناصفر $e \in R$ است.*

برهان. فقط مورد نیم‌مرکزی چپ را اثبات می‌کنیم و مورد نیم‌مرکزی راست به‌طور مشابه اثبات خواهد شد. فرض کنیم $e \in R$ یک خودتوان نیم‌مرکزی چپ ناصفر دلخواه باشد و $\{e_۱, e_۲, \cdots, e_n\}$ مجموعه‌ی کامل خودتوان‌های اولیه باشد، در این‌صورت $e_۱ + \cdots + e_n = ۱$ و همچنین $e = e_۱e + \cdots + e_ne$. ازآنجایی‌که $e \in R$ یک خودتوان نیم‌مرکزی چپ است و برای هر i، $e_ie = ee_ie$. اگر i وجود داشته باشد که $ee_ie \neq ۰$، آنگاه بنابر [۱، لم ۱.۵] ee_ie خودتوان اولیه از حلقه‌ی eRe است. توجه می‌کنیم که مجموعه‌ی $\{ee_ie : ee_ie \neq ۰\}$ متعامد است و $e = \sum_{ee_ie\neq ۰} ee_ie$. بنابراین $\{ee_ie : ee_ie \neq ۰\}$ یک مجموعه‌ی کامل از خودتوان‌های اولیه حلقه‌ی eRe است. □

گزاره ۶.۲.۵. *اگر حلقه‌ی R دارای مجموعه‌ی کامل T از خودتوان‌های اولیه باشد، آنگاه شرایط زیر برقرار هستند:*

(۱) اگر خودتوان اولیه $e \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $f \in T$، $ef = fe$، آنگاه $e \in T$.

(۲) هر خودتوان اولیه مرکزی از حلقه‌ی R در مجموعه‌ی T قرار می‌گیرد.

(۳) مجموعه‌ای از خودتوان‌های اولیه مرکزی حلقه‌ی R تشکیل یک مجموعه‌ی کامل خودتوان‌های اولیه مرکزی حلقه‌ی R را می‌دهند.

برهان. (۱) فرض کنیم $T = \{e_۱, e_۲, \cdots, e_n\}$، در این‌صورت $e_۱ + \cdots + e_n = ۱$ و همچنین $e = e_۱e + \cdots + e_ne$. توجه می‌کنیم اگر i وجود داشته باشد که $e_ie \neq ۰$، آنگاه $e = e_ie + (e - e_ie)$ به‌طوری‌که $e_ie(e - e_ie) = (e - e_ie)e_ie = ۰$ یعنی خودتوان e حاصل‌جمع دو خودتوان متعامد e_ie و $e - e_ie$ از حلقه‌ی R است. از آنجایی‌که e یک خودتوان اولیه از حلقه‌ی R است، $e = e_ie$. به‌طور مشابه، اگر i وجود داشته باشد که $e_ie \neq ۰$، آنگاه $e_i = e_ie + (e_i - e_ie)$ به‌طوری‌که $e_ie(e_i - e_ie) = (e_i - e_ie)e_ie = ۰$ یعنی e_i حاصل‌جمعی از خودتوان‌های متعامد e_ie و $e_i - e_ie$ از حلقه‌ی R است. ازآنجایی‌که e_i یک خودتوان اولیه از حلقه‌ی R است، $e_i = e_ie$. از این رو $e = e_ie = e_i \in T$.

(۲) بنابر اثبات (۱)، اثبات را دنبال می‌کنیم.

(۳) از آنجایی‌که حلقه‌ی R دارای مجموعه‌ی کامل از خودتوان‌های اولیه است و همچنین دارای مجموعه‌ی کامل $T_۱$ از خودتوان‌های اولیه مرکزی است. فرض می‌کنیم که خودتوان اولیه مرکزی $e \in R$ وجود داشته باشد که $e \notin T_۱$. فرض کنیم $T_۱ = \{c_۱, c_۲, \cdots, c_n\}$. پس $c_۱ + \cdots + c_n = ۱$ و همچنین $e = c_۱e + \cdots + c_ne$. توجه می‌کنیم اگر i وجود داشته باشد که $c_ie \neq ۰$، آنگاه $e = c_ie + (e - c_ie)$ به‌طوری‌که $c_ie(e - c_ie) = (e - c_ie)c_ie = ۰$، یعنی e حاصل‌جمع دو خودتوان مرکزی متعامد $c_ie, e - c_ie$ از حلقه‌ی R است. ازاین‌رو e یک خودتوان اولیه مرکزی از حلقه‌ی R است، $e = c_ie \in R$. به‌طور مشابه، اگر i وجود داشته باشد که $c_ie \neq ۰$، پس $c_i = c_ie + (c_i - c_ie)$ به‌طوری‌که $c_ie(c_i - c_ie) = (c_i - c_ie)c_ie = ۰$، یعنی c_i حاصل‌جمع

خودتوان‌های مرکزی متعامد c_ie و $c_i - c_ie$ از حلقه‌ی R هستند. ازاین‌رو c_i خودتوان اولیه مرکزی حلقه‌ی R است، $c_i = c_ie$. ازاین‌رو $e = c_ie = c_i \in T_۱$ یک تناقض است پس $T_۱$ شامل هر خودتوان اولیه مرکزی از حلقه‌ی R است. $\square$

تذکر ۷.۲.۵. *فرض می‌کنیم حلقه‌ی R دارای یک مجموعه کامل از خودتوان‌های اولیه باشد، بنابر گزاره ۶.۲.۵، ملاحظه می‌کنیم:*

(۱) تعداد متناهی از خودتوان‌های اولیه مرکزی در حلقه‌ی R وجود دارند که تشکیل یک مجموعه‌ی کامل از خودتوان‌های اولیه مرکزی می‌دهند.

(۲) در حالت خاص، اگر R یک حلقه‌ی آبلی باشد (حلقه‌ای که همه‌ی عناصر آن مرکزی باشد)، آنگاه همه خودتوان‌های اولیه از حلقه‌ی R تشکیل یک مجموعه‌ی کامل از خودتوان‌های اولیه را می‌دهند.

مراجع

[1] G. F. Birkenmeier, H. E. Heatherly, J. Y. Kim, and J. K. Park, *Triangular matrix representations*, J. Algebra 230 (2000), no. 2, 558–595.

[2] G. Calaugareanu, *Rings with lattices of idempotents*, Comm. Algebra 38 (2010), no. 3,1050–1056.

[3] D. Dolzan, *Multiplicative sets of idempotents in a finite ring*, J. Algebra 304 (2006), no. 2, 271–277.

[4] M. Ya. Finkelshteın, *Rings in which the annihilators make up a sublattice of alattice of ideals*, Sibirsk. Mat (1938), Zh. 24, 160–167.

[5] J. Han, *Regular action in a ring with a finite number of orbits*, Comm. Algebra 25 (1997), no. 2, 2227–2236.

[6] J. Han, *Group actions in a unit-regular ring*, Comm. Algebra 27 (1999), no. 2, 3353–3361.

[7] J. Han, S. Park, *Additive set of idempotents in rings*, Comm. Algebra 40 (2012), no. 9, 3551–3557.

[8] J. Han, S. Park, *An additive set of idempotents in rings*, Comm. Algebra 40 (2012), no. 2, 35531–3557.

[9] H. K. Grover, D. Khurana, S. Singh, *Rings with lattices of idempotents*, Comm. Algebra 37 (2009), no. 8, 2583–2590.

[10] H. K. Grover, D. Khurana, S. Singh, *Rings with multiplicative sets of primitive idempotents*, Comm. Algebra 37 (2009), no. 2, 2583–2590.

[11] T. Y. Lam, *A First Course in Noncommutative Rings*, Springer-Verlag, New York, Inc.,1991.

[12] T. Y. Lam, *Exercises in Classical Ring Theory. Problem Books in Mathematics*, Springer-Verlag, New York, Inc.,1995.

[13] W. K. Nicholson, *Introduction to Abstract Algebra*, Comm. Algebra 40 (2012), no. 2, 35531–3557.

[14] B. L. Osofsky, *Rings Whose Idempotent Generated Ideals form a Lattice with ACC. Rings, Modules and Radicals*, pp. 118–124. Pitman Res. Notes Math. Ser., 204. Harlow:Longman Sci. Tech

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اجتماع	Addition
اشتراک	Intersection
ایده‌آل	Ideal
ایده‌آل اصلی	Principal Ideals
ایده‌آل پوچ	Nil Ideal
ایده‌آل تصویری	Projective Ideal
ایده‌آل‌های متناهی تولید شده	Finitely Generated Ideal
پوچ‌ساز	Annihilator
تجزیه ناپذیر	Indecomposabie
توان دوم بردن	Square
شرکت‌پذیر	Distributive
تعمیم یافته	Generalized
توسیع	Extended
جابه‌جاپذیر	Commutative
جبربولی	Algebra Boolean
جمع‌پذیر	Additive
حاصل‌جمع مستقیم	Direct Sum
حاصل‌ضرب مستقیم	Direct Product
حلقه	Ring
حلقه‌ی آبلی	Abelian Ring
حلقه‌ی همبند	Connected Ring
حلقه‌ی بولی	Boolean Ring
حلقه شرکت‌پذیر	Associative Ring
حلقه‌ی ضربی	Multiplicative Ring
حلقه‌ی قویا منظم	Strongly Regular Ring

حلقه‌ی موضعی .... Local Ring
حلقه‌ی منظم .... Regular Ring
حلقه‌ی نیم‌مورثی .... Semihereditary Ring
حلقه‌ی نیم‌منظم .... Semiregular Ring
حلقه‌ی ون‌نیومن‌منظم .... Von Neumann regular Ring
خودتوان .... Idempotent
خودتوان اولیه .... Primitive Idempotent
خودتوان متعامد .... Orthognal Idempotent
دوری .... Cyclic
رابطه انعکاسی .... Reflexive Relation
رابطه تعدی .... Transitive Relation
رابطه تقارن .... Antisymmetric Relation
زیرفضا .... Subspace
ساختار .... Form
شبکه .... Lattice
ضربی .... Multiplicative
عمل گروه .... Group Action
عمل منظم .... Regular Action
عنصر پوچ‌توان .... Nilpotent element
کاملا اساسی .... Fully basic
کران بالا .... Upper Bound
کران پایین .... Lower Bound
گروه آبلی .... Abelian Group
گروه دوری .... Cyclic Group
گروه ضربی .... Multiplicative Group
ماتریس .... Matrix
متمم .... Complementary
متناهی .... Finite
مجزا .... Distinct
مجموعه کامل .... Complete Set
مدار .... Orbit
مدول .... Module

مرتبه .... Order
مرکزی .... Central
مزدوج .... Conjugate
مشخصه .... Characteristic
مقسوم‌علیه صفر .... Divisors of zero
مولد .... Generator
میدان .... Field
مینیمال .... Minimal
نامتناهی .... Infinite
نیم‌مرکزی .... Semicentral
وارون‌پذیری .... Invertible
همانی .... Identity
همریختی .... Homomorphism
یکریختی .... Isomorphism

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Abelian Group .... گروه آبلی
Abelian Ring .... حلقه‌ی آبلی
Addition .... اجتماع
Additive .... جمع‌پذیر
Algebra Boolean .... جبربولی
Annihilator .... پوچ‌ساز
Antisymmetric Relation .... رابطه تقارن
Associative Ring .... حلقه شرکت‌پذیر
Boolean Ring .... حلقه‌ی بولی
Central .... مرکزی
Characteristic .... مشخصه
Commutative .... جابه‌جا پذیر
Complementary .... متمم
Complete Set .... مجموعه کامل
Conjugate .... مزدوج
Connected Ring .... حلقه‌ی همبند
Cyclic .... دوری
Cyclic Group .... گروه دوری
Direct Product .... حاصل‌ضرب مستقیم
Direct Sum .... حاصل‌جمع مستقیم
Distinct .... مجزا
Distributive .... شرکت‌پذیر
Divisors of zero .... مقسوم‌علیه صفر
Extended .... توسیع
Field .... میدان

متناهی .... Finite
ایده‌آل‌های متناهی تولید شده .... Finitely Generated Ideal
ساختار .... Form
کاملا اساسی .... Fully basic
تعمیم یافته .... Generalized
مولد .... Generator
عمل گروه .... Group Action
همریختی .... Homomorphism
ایده‌آل .... Ideal
خودتوان .... Idempotent
همانی .... Identity
تجزیه ناپذیر .... Indecomposabie
نامتناهی .... Infinite
اشتراک .... Intersection
وارون‌پذیری .... Invertible
یکریختی .... Isomorphism
شبکه .... Lattice
حلقه‌ی موضعی .... Local Ring
کران پایین .... Lower Bound
ماتریس .... Matrix
مینیمال .... Minimal
مدول .... Module
ضربی .... Multiplicative
گروه ضربی .... Multiplicative Group
حلقه‌ی ضربی .... Multiplicative Ring
ایده‌آل پوچ .... Nil Ideal
عنصر پوچ‌توان .... Nilpotent element
مدار .... Orbit
مرتبه .... Order
خودتوان متعامد .... Orthognal Idempotent
خودتوان اولیه .... Primitive Idempotent
ایده‌آل اصلی .... Principal Ideals

Projective Ideal	ایده‌آل تصویری
Reflexive Relation	رابطه انعکاسی
Regular Action	عمل منظم
Regular Ring	حلقه‌ی منظم
Ring	حلقه
Semicentral	نیم‌مرکزی
Semihereditary Ring	حلقه‌ی نیم‌مورثی
Semiregular Ring	حلقه‌ی نیم‌منظم
Square	توان دوم بردن
Strongly Regular Ring	حلقه‌ی قویا منظم
Subspace	زیرفضا
Transitive Relation	رابطه تعدی
Upper Bound	کران بالا
Von Neumann regular Ring	حلقه‌ی ون‌نیومن‌منظم

نمایه

Aabstract

In this thesis we prove that if R has a complete finite set of primitive orthogonal idempotents, then R is a finite direct product of connected rings precisely when M(R) is multiplicative. We prove that if R is a (von Neumann) regular ring with M(R) multiplicative, then every primitive idempotent in R is central. It is also shown that this does not happen even in semihereditary and semiregular rings. We also prove that if M(R) is multiplicative, then two primitive idempotents e and f in R are conjugates.
The central idempotents of any ring with identity form a Boolean algebra. This result is largely extended for rings with generalized commuting idempotents.
We show that I(R) is a finite additive set if and only if $M(R) \setminus \{0\}$ is a complete set of primitive central idempotents, char(R) = 2 and every nonzero idempotent of R can be expressed as a sum of orthogonal primitive idempotents of R.
Also we show that for a regular ring R such that I(R) is a finite additive set, if the multiplicative group of all units of R is abelian , then R is a commutative ring.
For idempotent e, it is shown that $e \in S_l(R)$ if and only if re = ere for all nilpotent elements $r \in R$ if and only if $fe \in I(R)$ for all $f \in I(R)$ if and only if fe = efe for all $f \in I(R)$ if and only if fe = efe for all $f \in I(R)$ which are isomorphic to e.
For a ring R having a complete set of centrally primitive idempotents, we show that every nonzero left semicentral idempotent is a finite sum of orthogonal left semicentral primitive idempotents, and eRe has also a complete set of primitive idempotents for any $0 \neq e \in S_l(R)$.

Keywords: Boolean rings, Connected rings, Primitive idempotents, Orthogonal semicentral idempotents

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

Semicentral Idempotents In A Rings

Leila Rezaei

Supervisor

Dr. Ebrahim Hashemi

Advisor

Dr. Seyed Reza Hejazi

January 2016