دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

فرآیند G-برآونی و کاربردهای آن

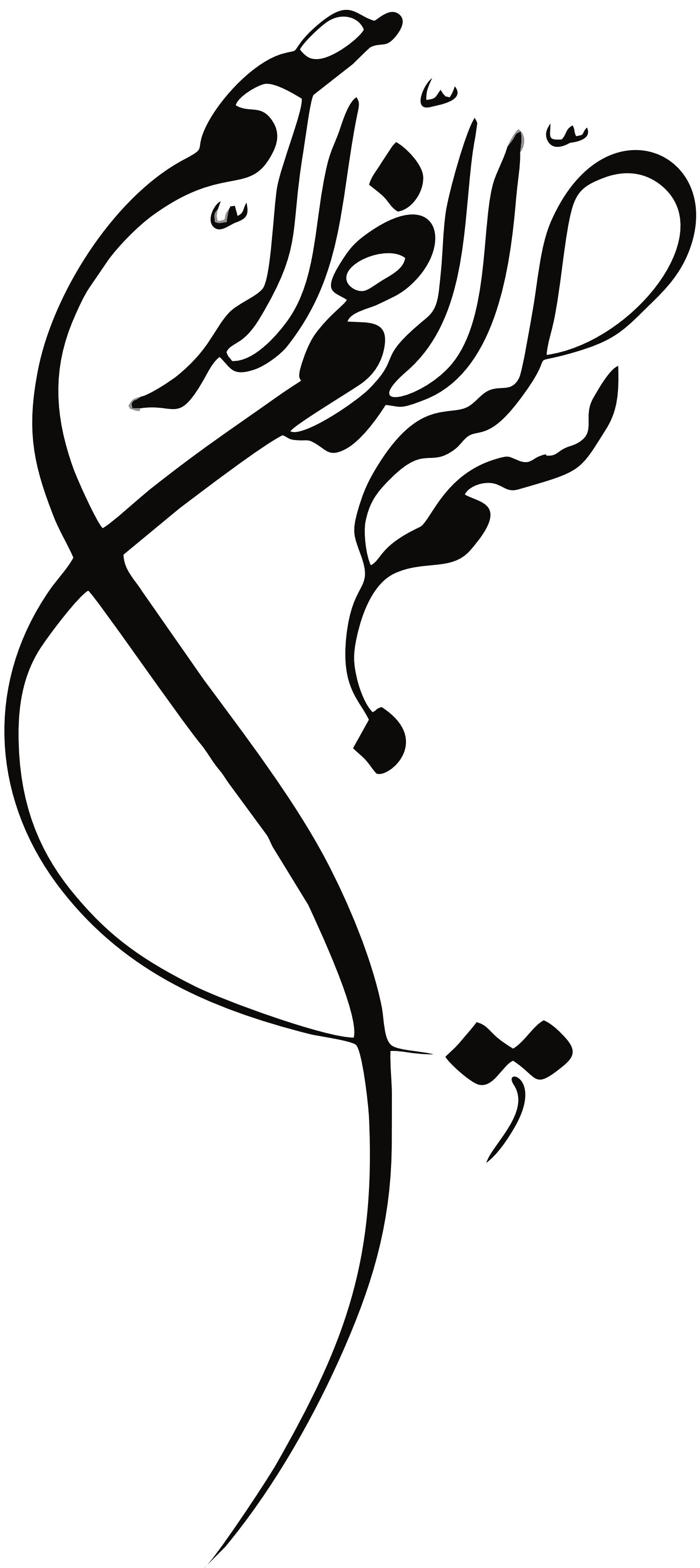
استاد راهنما

خانم دکتر الهام دسترنج

پژوهشگر

آتنا ابراهیم بیگی

۱۳۹۴


بسم الله الرحمن الرحیم

نام خانوادگی دانشجو: ابراهیم بیگی   نام: آتنا

عنوان: فرآیند G-برآونی وکاربردهای آن

استاد راهنما: خانم دکتر الهام دسترنج

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد   رشته: ریاضی محض   گرایش: آنالیز ریاضی

دانشگاه: شاهرود   دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۴   تعداد صفحات: ۷۱

واژگان کلیدی: G-چارچوب،ساختار مارتینگلی، فرآیند G- برآونی، فرایند مارکف، G- مارتینگل.

چکیده

در این پایان نامه ابتدا مفهوم فرایند G-برآونی که توسط پنگ در سال ۲۰۰۶ معرفی شده را بیان و خواص آن را بررسی می کنیم . سپس ساختار مارتینگلی آن را تحقیق کرده و در ادامه روشی برای ساختن فرایند G-برآونی با کمک زنجیر مارکف ارائه می دهیم. سپس قضیه ی نمایش رابرای بعضی از مارتینگل های متقارن خاص در G-چارچوب بدست می آوریم.

سپاس گزاری...

نخستین سپاس و ستایش از آن خداوندی است که بنده کوچکش را در دریای بیکران اندیشه، قطره ای ساخت تا وسعت آن را از دریچه اندیشه های ناب آموزگارانی بزرگ به تماشا نشیند. لذا اکنون که در سایه سار بنده نوازی هایش پایان نامه حاضر به انجام رسیده است، بر خود لازم می دانم تا مراتب سپاس را از بزرگوارانی به جا آورم که اگر دست یاریگرشان نبود، هرگز این پایان نامه به انجام نمی رسید.
ابتدا از استاد گرانقدرم **سرکار خانم دکتر الهام دسترنج** که زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده داشتند، کمال سپاس را دارم.
سپاس آخر را به مهربانترین همراهان زندگیم، به پدر، مادر و همسر عزیزم تقدیم می کنم که حضورشان در فضای زندگیم مصداق بی ریای سخاوت بوده است

آتنا ابراهیم بیگی
۱۳۹۴

تعهدنامه

اینجانب **آتنا ابراهیم بیگی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض دانشکده ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان چگونگی تولید فرآیند G-برآونی از طریق زنجیر مارکف، تحت راهنمایی **خانم دکتر الهام دسترنج** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام دانشگاه شاهرود یا University of shahrood به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

آتنا ابراهیم بیگی
۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

1. Ebrahimbeygi, A. and Dastranj, E. (2015). G-Brawnian motion and Its Applications.Vol. 36.*Cumhuriyet University Faculty of Science Science Journal (CSJ)*, 2242-2246

فهرست مطالب

مقدمه

در سال ۲۰۰۶ پنگ [۱] درمقاله [۱۲]، توزیع G-نرمال را متناسب با معادله‌ی حرارت غیرخطی تعریف کرد. سپس امید غیرخطی (G-امید) و G-امید شرطی ساختار جدیدی تحت عنوان G-چارچوب بنا کرد.
سپس فرآیند G-برآونی را معرفی کرد و انتگرال تصادفی و فرمول ایتو متناسب با آن فرآیند را G-ایتو نامید.
در این رساله به تحقیق و بررسی مفاهیم معرفی شده توسط پنگ پرداخته و مفهوم جدیدی به نام G-استراتونویچ را که قبلا در هیچ منبعی معرفی نشده معرفی و یک ساختار برای آن ارائه می‌دهیم برای این منظور

در این پایان نامه در **فصل اول** تعاریف و مفاهیم اولیه از آنالیز تابعی و نظریه اندازه و احتمال را بیان می‌کنیم. در **فصل دوم** امید غیرخطی به نام G-امید و توزیع G- نرمال و G-چارچوب را معرفی می‌کنیم.
در **فصل سوم** G-مارتینگل متقارن و فرایندG-برآونی را تعریف می‌کنیم واین فرایند را با فرایند برآونی مقایسه می‌کنیم. در **فصل چهارم** خواص فرایندG-برآونی و قضیه اساسی مرتبط با آن را می‌آوریم. و **فصل پنجم** قضیه نمایش انتگرال G-مارتینگل را توصیف می‌کنیم. و در **فصل آخر** تعریفی دیگر از فرایند G-برآونی با زنجیر مارکف بازگو می‌کنیم.

[۱] Peng

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم آنالیز

مقدمه

در این فصل مروری بر تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در فصل‌های بعد می‌کنیم. برای این منظورابتدا به بیان تعاریف و مفاهیمی از آنالیزتابعی، نظریه اندازه و نظریه احتمال می‌پردازیم. مطالب ارائه شده در این بخش به جز مواردی که به روشنی مشخص شده است از مراجع [۱۵]،[۶]و [۱۸] گرفته شده‌اند.

۱.۱ آنالیز تابعی

تعریف ۱.۱. یک **فضای توپولوژیک**، زوج مرتبی مانند (X, τ) است که در آن X مجموعه‌ای ناتهی و $\{\tau\}$ نیز گردایه ای از زیر مجموعه‌های X است به طوری که

۱. اجتماع هر گردایه از مجموعه‌های τ عضو τ باشد،

۲. اشتراک هر تعداد متناهی از اعضای τ عضو τ باشد،

۳. مجموعه‌های تهی و X، عضو τ باشند.

تعریف ۲.۱. فرض کنید H یک فضای برداری حقیقی باشد **ضرب داخلی** (یا ضرب اسکالر) روی H نگاشتی چون $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ از $H \times H$ به R است به طوری که

الف) به ازای هر $x,y,z \in H$ و هر $a,b \in R$
$$\langle ax+by, z\rangle = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle$$

ب) به ازای هر $x,y \in H$، $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

ج) به ازای هر عنصر ناصفر مانند $x \in H$، $\langle x,x\rangle \in (\circ, \infty)$

تعریف ۳.۱. هر فضای برداری مجهز به ضرب داخلی **فضای پیش هیلبرت** نامیده می‌شود. اگر H فضای پیش هیلبرت باشد به ازای $x \in H$ تعریف می‌کنیم

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

تعریف ۴.۱. فضای پیش هیلبرتی که نسبت به نرم $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ کامل باشد یک **فضای هیلبرت** نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۱. فضای برداری V مجهز به ترتیب جزئی "$\leq$" را یک **شبکه برداری** گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in V$، داشته باشیم

۱. V داری کوچکترین عضو باشد که آن را با $x \wedge y$ نشان می‌دهیم،

۲. V داری بزرگترین عضو باشد که آن را با $x \vee y$ نشان می‌دهیم،

۳. اگر $x \leq y$، آن‌گاه برای هر $z \in V$، $x + z \leq y + z$،

۴. اگر $x \leq y$ و $c \in \mathbb{R}^+$، آن‌گاه $cx \leq cy$.

تعریف ۶.۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد، تابع $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ را یک **نرم** روی V گوییم هرگاه

۱. برای هر $x \in V$، $\|x\| \geq ۰$،

۲. برای هر $x \in V$ و $\alpha \in \mathbb{R}$، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$،

۳. برای هر $x, y \in V$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$،

۴. برای هر $x \in V$ ، $\|x\| = ۰$اگر و فقط اگر $x = ۰$.

به $(V, \|\cdot\|)$ **فضای نرمدار** می‌گوییم. هرگاه V با متر $d(x, y) = \|x - y\|$ فضای متریک تام باشد، به آن **فضای باناخ** می‌گوییم.

تعریف ۷.۱. فرض کنید $(E, ||.||)$ فضای نرمدار باشد و $A \subseteq E$. نگاشت $f : A \to E$ را **انقباضی یا لیب شیتس** گوییم هرگاه $۰ \leq \alpha \leq ۱$، $\alpha \in \mathbb{R}$، وجود داشته باشد که

$$\forall x, y \in A, \quad ||f(x) - f(y)|| \leq \alpha||x - y||.$$

قضیه ۸.۱. ***(افراز واحد)*** *فرض کنیم K یک زیرمجموعه‌ی فشرده از R^n و $\{v_\alpha\}_\alpha$ پوشش بازی از آن باشد در این صورت تابع‌هایی چون $\psi_۱, \ldots, \psi_s \in \varphi(R^n)$ هستند به طوری که*

۱. *به ازای هر $۱ \leq i \leq s$، $۰ \leq \psi_i \leq ۱$*

۲. هر $\{\psi_i\}$ *محمل* [1] $\{v_\alpha\}$ *است*

۳. *به ازای هر* $x \in K$ ،

$$\psi_1(x) + \cdots + \psi_s = 1$$

تعریف ۹.۱. تابع $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را محدب می‌نامیم، هرگاه

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, 0 \leq s \leq 1 \ : \ \varphi\left((1-s)a + sb\right) \leq (1-s)\varphi(a) + s\varphi(b).$$

توجه ۱۰.۱. تابع φ را **مقعر** گوییم هرگاه $(-\varphi)$ محدب باشد.

تکمیل فضاهای نرمدار

تعریف ۱۱.۱. فرض کنید $(E, \|\cdot\|)$ فضایی نرمدار باشد. فضای نرمدار $(\widetilde{E}, \|\cdot\|_1)$ را تکمیل [2] فضای $(E, \|\cdot\|)$ گوییم هرگاه نگاشت خطی و یک به یک $\Phi : E \to \widetilde{E}$ وجود داشته باشد که

- برای هر $x \in E$، $\|x\| = \|\Phi(x)\|_1$،
- $\Phi(E)$ در $\widetilde{E}$ چگال باشد،
- $\widetilde{E}$ کامل باشد.

مثال ۱۲.۱. در تعریف بالا اگر رابطه‌ی هم ارزی $\sim$ را روی E به صورت زیر تعریف کنیم

$$\{x_n\}_n \sim \{y_n\}_n \Longleftrightarrow \lim \|x_n - y_n\| = 0.$$

که در آن $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله کشی در E هستند.

قرار می‌دهیم

$$\widetilde{E} = \frac{E}{\sim} = \{[(x_n)] \mid \text{است } E \text{ دنباله‌ای کوشی در } (x_n)\}.$$

جمع و ضرب اسکالر را روی $\widetilde{E}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$[(x_n)] + [(y_n)] = [(x_n + y_n)], \quad \lambda[(x_n)] = [(\lambda x_n)].$$

همچنین نرم $\|\cdot\|_1$ روی $\widetilde{E}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|[(x_n)]\|_1 = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

نگاشت خطی و یک به یک $\Phi : E \to \widetilde{E}$ به کمک این دنباله‌های کوشی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Phi(x) = [(x_n)],$$

که در آن برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $x_n = x$

[1] support

[2] Completion

- برای هر $x \in E$، $\|x\| = \|\Phi(x)\|_1$.

- $\Phi(E)$ در $\widetilde{E}$ چگال است:
زیرا برای هر عضو $[(x_n)]$ از $\widetilde{E}$، دنباله‌ی کوشی (x_n) از E وجود دارد که $\Phi((x_n)) \to [(x_n)]$.

- $\widetilde{E}$ باناخ است:
فرض کنید $(\tilde{x}_n)$ دنباله‌ای کوشی در $\widetilde{E}$ باشد. بنابراین دنباله‌ی (x_n) در E وجود دارد که
$$\|\Phi(x_n) - \tilde{x}_n\|_1 < \frac{1}{n}.$$
ادعا می‌کنیم که (x_n) یک دنباله‌ی کوشی است،

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m\| &= \|\Phi(x_n) - \Phi(x_m)\|_1 \\ &\leq \|\Phi(x_n) - \tilde{x}_n\|_1 + \|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m\|_1 + \|\tilde{x}_m - \Phi(x_m)\|_1 \\ &\leq \|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m\|_1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.\end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $\tilde{x} = [(x_n)]$. در این صورت

$$\begin{aligned}\|\tilde{x}_n - \tilde{x}\|_1 &\leq \|\tilde{x}_n - \Phi(x_n)\|_1 + \|\Phi(x_n) - \tilde{x}\|_1 \\ &< \frac{1}{n} + \|\Phi(x_n) - \tilde{x}\|_1 \to 0.\end{aligned}$$

۲.۱ اندازه و اندازه پذیری

مفاهیمی که در این بخش و بخش بعد آمده از مرجع [۱۷] می‌باشد.

تعریف ۱۳.۱. فرض کنیم X مجموعه ای ناتهی و C دسته ای ناتهی از زیر مجموعه های X باشد.

۱. C را یک **نیم حلقه** از زیر مجموعه های Xگوییم اگر C تحت اشتراک‌های متناهی بسته و تفاضل هر دو عضو C برابر با اجتماعی متناهی از اعضای دوبدو مجزای C باشد.

۲. C را یک **حلقه** از زیر مجموعه‌های X گوییم اگر C تحت اجتماع‌های متناهی و تفاضل بسته باشد.

۳. C را یک **نیم میدان** (نیم جبر) از زیر مجموعه‌های X گوییم اگر C تحت اشتراک‌های متناهی بسته و مکمل هر عضو برابربا اجتماعی متناهی از اعضای دوبدو مجزای C باشد.

۴. C را یک **σ-میدان** از زیر مجموعه های X گوییم اگر C تحت اجتماع‌های شمارش‌پذیر و مکمل بسته باشد

توجه ۱۴.۱. دسته های گوناگون از بازه‌ها در $\mathbb{R}$ و حاصلضرب‌های دکارتی آنها در سایر فضاهای اقلیدسی الگوهای مناسبی برای نیم حلقه هستند.

تعریف ۱۵.۱. فرض کنیم C دسته ای ناتهی و دلخواه از زیر مجموعه ها باشد منظور از یک اندازه روی C تابعی مانند μ با دامنه C است بطوری که در شرایط زیر صدق کند.

۱) برای هر A در C، $0 \leq \mu(A) \leq \infty$،

۲) هرگاه $\{A_n, n \geq 1\}$، دنباله ای (متناهی یا نامتناهی)از اعضای دوبدو مجزای C باشد به طوری که $(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \in C$ آنگاه $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

تعریف ۱۶.۱. فرض کنیمC دسته ای دلخواه از زیر مجموعه‌های X باشد.(برحسب رابطه‌ی شمول) کوچکترین σ-میدان شامل C از زیر مجموعه‌های X را σ-میدان تولید شده توسطC می‌نامیم و به صورت $\sigma(C)$ نشان می‌دهیم. لازم به ذکر است که $\sigma(C)$ اشتراک تمام σ-جبرهای شامل Cاست.

تعریف ۱۷.۱. فرض کنیم $X = \mathbb{R}$ (یا $\mathbb{R}^n$) و C دسته‌ی تمام بازه ها باشد. σ-جبر تولید شده توسط C را σ-جبربورل گوییم وبا $\mathcal{B}$ نشان می‌دهیم . دسته‌ی تمام بازه ها به صورت $[a,b)$ یا $[a,b]$ یا (a,b) که در آن a,b اعداد گویا هستندویا مجموعه‌ی شعاع‌هایی که ابتدا و انتهای آنها اعداد گویا باشند همگی مولد $\mathcal{B}$اند.

تذکر ۱۸.۱. *الف) بطور کلی در یک فضای توپولوژیکی σ-میدان تولید شده توسط مجموعه‌های باز راσ-میدان بورل می‌نامیم وبا $\mathcal{B}$ نشان می‌دهیم.*

ب) دسته‌ی مجموعه‌های بورل، کوچکترین σ-میدانی است که حاوی همه‌ی مجموعه‌های باز است.

تعریف ۱۹.۱. فرض کنیم C سازه‌ای (نیم حلقه، نیم میدان، حلقه یا میدان)از زیر مجموعه‌های Xو μ اندازه ای روی C باشد. **اندازه** μ **را روی** C، **متناهی گوییم** هرگاه برای هر A در C، $\mu(A) < \infty$ و σ-متناهی گوییم هرگاه دنباله‌ای مانند $\{A_n, n \geq 1\}$ از اعضای C وجود داشته باشد به طوری که $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ و برای هر n، $\mu(A_n) < \infty$.

تعریف ۲۰.۱. فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و $\mathcal{H}$ نیم حلقه‌ای از زیر مجموعه های X و μ اندازه ای σ-متناهی روی $\mathcal{H}$ باشد. برای زیر مجموعه‌ی دلخواه A از X **اندازه خارجی** A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{n\geq 1} \mu(I_n) : I_n \in \mathcal{H}, A \subset \cup_{n\geq 1} I_n\}$$

تذکر ۲۱.۱. *الف) برای* $I \in \mathcal{H}$، $\mu^*(I) = \mu(I)$

ب) اگر $\{A_n\}_{n\geq 1}$ *دنباله‌ای دلخواه باشد آنگاه*

$$\mu^*(\cup_{n\geq 1} A_n) \leq \sum_{n\geq 1} \mu^*(A_n).$$

تعریف ۲۲.۱. زیر مجموعه‌ی A از X را نسبت به μ^* (یا μ) اندازه‌پذیر گوییم، اگر برای هر I در $\mathcal{H}$ داشته باشیم $\mu(I) = \mu^*(I \cap A) + \mu^*(I - A)$

تذکر ۲۳.۱. *الف) هر عضو $\mathcal{H}$ و هر عضو حلقه‌ی تولید شده توسط $\mathcal{H}$ اندازه‌پذیراند.*

ب) اگر A نسبت به μ^* اندازه‌پذیر باشد، آنگاه برای هر زیر مجموعه دلخواه B از X داریم

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B - A).$$

تعریف ۲۴.۱. منظور از یک **فضای اندازه پذیر** عبارت است از زوج $(X, \mathcal{A})$، که متشکل از یک مجموعه ناتهی مانند X و σ-میدان $\mathcal{A}$ از زیر مجموعه‌های X می‌باشد. هر عضو $\mathcal{A}$ را یک مجموعه‌ی اندازه پذیر می‌نامیم.

تعریف ۲۵.۱. منظور از یک فضای اندازه، سه‌تایی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ است که $(X, \mathcal{A})$ یک **فضای اندازه‌پذیر** و μ یک **اندازه** روی σ-میدان$\mathcal{A}$ است.

تعریف ۲۶.۱. گوییم خاصیتی که برای تمام اعضای فضای اندازه‌ی $(X, \mathcal{A}, \mu)$ تعریف شده است، **تقریبا همه جا** [۳] a.e. برقرار است اگر وتنها اگر مجموعه‌ی نقاطی که دارای آن خاصیت نیستند، اندازه پذیر و دارای اندازه‌ی μ صفر باشند.

تعریف ۲۷.۱. فرض کنید $(X, \mathscr{A}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد، تابع $f : (X, \mathscr{A}, \mu) \to (\mathbb{R}^n, \mathscr{B})$ را اندازه‌پذیر یا $\mathscr{A}$- اندازه‌پذیر گوییم هرگاه

$$f^{-1}(U) := \{x \in X;\ f(x) \in U\} \in \mathscr{A}, \qquad U \in \mathscr{B}.$$

تابع $Y : (\Omega, \mathscr{F}, P) \to (\mathbb{R}^n, \mathscr{B})$ را در نظر بگیرید. **σ- میدان** $\mathscr{F}_Y$ **تولید شده توسط** Y، کوچکترین σ- میدان روی Ω شامل مجموعه های

$$Y^{-1}(B); \qquad B \in \mathscr{B},$$

می‌باشد، به عبارت دیگر

$$\mathscr{F}_Y = \{Y^{-1}(B);\ B \in \mathscr{B}\}.$$

به وضوح Y نسبت به $\mathscr{F}_Y$، اندازه‌پذیر است.

[۳] Almost everywhere

انتگرال

تعریف ۲۸.۱. اگر A مجموعه ای دلخواه از σ-میدان $\mathcal{A}$ باشد، تابع مشخصه‌ی مجموعه‌ی A را با χ_A نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\chi_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & o.w. \end{cases}$$

تعریف ۲۹.۱. تابع ساده تابعی است با دامنه دلخواه و مقادیر حقیقی، که تعداد مقادیرش متناهی است. فرض کنیم φ تابعی ساده روی فضای اندازه $(X, \mathcal{A}, \mu)$ با مقادیر متمایز $a_۱, a_۲, \ldots, a_n$ باشد.می‌توان نوشت $\varphi = \sum_{i=۱}^{n} a_i \chi_{A_i}$ که در آن $A_i = \{x \in X : \varphi(x) = a_i\}$ روشن است که A_i ها مجزا هستند. اندازه پذیری φ معادل است با اینکه بگوییم A_iها اندازه‌پذیراند. انتگرال φ نسبت به اندازه‌ی μ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{i=۱}^{n} a_i \mu(A_i).$$

قرارداد می‌کنیم $۰ \times \infty = ۰$.

تعریف ۳۰.۱. فرض می‌کنیم $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه و f تابعی اندازه پذیر و نامنفی باشد. انتگرال f روی هر $A \in \mathcal{A}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\int_A f d\mu = \sup\{\int_A \varphi d\mu : \varphi \leq f\},$$

که در آن φ تابعی ساده و نامنفی است.

فضای L_P

تعریف ۳۱.۱. فرض کنید $(X, \mathscr{A}, \mu)$ یک فضای اندازه و $V = \vartheta(X)$ مجموعه تمام توابع حقیقی و اندازه پذیر روی$(X, \mathscr{A})$ باشد. برای $P \geq ۱$ تعریف می‌کنیم:

$$L_P = L_P(X) = \{f \in V : \int |f|^P d\mu < \infty\}$$

توجه ۳۲.۱. رابطه هم‌ارزی $\backsim$ را رود V به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f \backsim g \qquad \int f d\mu = \int g d\mu$$

سپس

$$l_p = l_p(x) = \{[f] : f \in L_P\}$$

تعریف ۳۳.۱. برای هر $f \in l_P$، نرم f به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\|f\|_P = (\int |f|^P d\mu)^{\frac{۱}{P}}$$

۳.۱ نظریه احتمال

تعریف ۳۴.۱. **فضای احتمال** عبارت است از فضای اندازه‌ی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ به طوری که $P(\Omega) = ۱$، Ω را فضای نمونه، اعضای $\mathcal{F}$ را پیشامد و P را اندازه احتمال می‌نامیم.

توجه ۳۵.۱. مجموعه‌ی $A \in \mathcal{F}$ را **P-پوچ** می‌نامیم هرگاه $P(A) = ۰$.

تعریف ۳۶.۱. فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را **کامل یا تام** می‌نامیم هرگاه $\mathcal{F}$ شامل تمام زیرمجموعه‌های هر مجموعه‌ی P-پوچ باشد.

به روشنی، هر فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را می‌توان با اضافه کردن زیر مجموعه‌های هر مجموعه‌ی P-پوچ به $\mathcal{F}$ کامل نمود.

قرارداد ۳۷.۱. اگر $P(A) = ۱$ می‌گوییم پیشامد A با احتمال ۱ رخ می‌دهد یا A قریب به یقین (a.s.)[۴] رخ می‌دهد.

تعریف ۳۸.۱. فرض کنید $(\Omega_۱, \mathcal{F}_۱)$، $(\Omega_۲, \mathcal{F}_۲)$، ... ، $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ فضاهای اندازه پذیر باشند. زیر مجموعه های $F_۱ \times F_۲ \times \cdots \times F_n$ از $\Omega_۱ \times \Omega_۲ \times \ldots \Omega_n$ رابرای $F_۱ \subseteq \Omega_۱$، $F_۲ \subseteq \Omega_۲$، ...و $F_n \subseteq \Omega_n$ راست گوشه و برای $F_۱ \in \mathcal{F}_۱$،$F_۲ \in \mathcal{F}_۲$ ، ...، $F_n \in \mathcal{F}$ راست گوشه‌ی اندازه پذیر می‌نامیم. دسته‌ی راست‌گوشه‌های اندازه پذیر، یک نیم میدان روی$\Omega_۱ \times \Omega_۲ \times \cdots \times \times \Omega_n$ است.

σ-میدان تولیدشده در $\Omega_۱ \times \Omega_۲ \times \cdots \times \Omega_n$ توسط نیم میدان راست‌گوشه‌های اندازه‌پذیر را σ-میدان حاصلضربی نامیده وبا نماد $\mathcal{F}_۱ \otimes \mathcal{F}_۲ \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_n$ نشان می‌دهیم.
اگر برای هر $۱ \leq i \leq n$، P_i یک اندازه روی $\mathcal{F}_i$ باشد، اندازه P روی نیم حلقه راست گوشه‌های اندازه‌پذیر به صورت زیر تعریف می‌شود

$$P(F_۱ \times F_۲ \times \cdots \times F_n) = P_۱(F_۱) \times P_۲(F_۲) \times \cdots \times P_n(F_n).$$

تعریف ۳۹.۱. گیریم $\{\mathscr{U}_\alpha, \alpha \in I\}$ دسته ای از زیرσ-میدان‌های $\mathcal{F}$باشد. σ-میدان الحاقی این دسته از σ-میدان‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\bigvee_{\alpha \in I} \mathscr{U}_\alpha = \sigma(\bigcup_{\alpha \in I} \mathscr{U}_\alpha)$$

توجه ۴۰.۱. از این پس، همه جا منظور از $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ فضای احتمال و توپولوژی مفروض روی فضاهای اقلیدسی توپولوژی استاندارد و σ- میدان مفروض روی آن σ- میدان بورل است و $\mathcal{B}$ نماد نشانگر σ-میدان بورل روی $\mathbb{R}$ است.

تعریف ۴۱.۱. فرض کنید $\mu_۱$ و $\mu_۲$ دو اندازه روی $\mathscr{A}$باشند. اندازه $\mu_۱$ را نسبت به اندازه $\mu_۲$ **مطلقا پیوسته** گوییم و می‌نویسیم $\mu_۱ \ll \mu_۲$، هرگاه

$$\forall A \in \mathscr{A};\ \mu_۲(A) = ۰ \Rightarrow \mu_۱(A) = ۰.$$

[۴] almost surely

قضیه ۴۲.۱ (مشتق رادن نیکودیم). [5] *فرض کنید $\mu_۱$ و $\mu_۲$ دو اندازه σ-متناهی روی $(X, \mathscr{A})$ باشند به طوری‌که $\mu_۲ \ll \mu_۱$. تابع $\mathscr{A}$-اندازه‌پذیر و $\mu_۲$-انتگرال‌پذیر f روی X وجود دارد که $f \geq ۰$ و*

$$\forall a \in \mathscr{A}, \qquad \mu_۱(A) = \int_A f \ \mathrm{d}\mu_۲.$$

۱.۳.۱ متغیر تصادفی-امید ریاضی

در سراسر این رساله توپولوژی مفروض روی فضاهای اقلیدسی توپولوژی استاندارد و σ-میدان مفروض، σ-میدان بورل است.

تعریف ۴۳.۱. اگر$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ فضایی احتمال باشد، هر تابع حقیقی و اندازه پذیر روی $(\Omega, \mathcal{F})$ **متغیر تصادفی** نامیده می‌شود.
معمولا برای نشان دادن متغیرهای تصادفی از حروف بزرگ لاتین مثل $X, Z, U, \ldots$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۴۴.۱. بردار تصادفی n-بعدی $\overline{X} = (X_۱, X_۲, \ldots, X_n)$، تابعی است اندازه‌پذیر که دامنه‌ی آن فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ و مقادیر آن در $\mathbb{R}^n$ است یعنی برای هر $A \in \mathcal{B}_n$ داریم

$$\{\omega : \overline{X}(\omega) \in A\} = \{(X_۱, X_۲, \ldots, X_n) \in A\} \in \mathcal{F},$$

که در آن $\mathcal{B}_n$، σ-میدان بورل روی $\mathbb{R}^n$ است.

تعریف ۴۵.۱. فرض کنیم X یک متغیر تصادفی باشد،σ**-میدان تولید شده توسط** X که بانماد $\sigma(X)$ یا $\mathcal{F}_X$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathcal{F}_X = \sigma(X) = \{X^{-۱}(A) : A \in \mathcal{B}\},$$

تعریف ۴۶.۱. اگر X متغیری تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد. تابع توزیع X که آن را باF_X نشان می‌دهیم، برای هر عدد حقیقی x، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$F_X(x) = P_X(-\infty, x] = P\{X \leq x\}.$$

که در آن P_X اندازه‌ی القاشده توسط X روی $\mathcal{B}$ است که **توزیع متغیر تصادفی** نامیده می‌شود.

تعریف ۴۷.۱. فرض کنیم X یک متغیر تصادفی انتگرال‌پذیر روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد. $\int_\Omega XdP$ را **امید ریاضی** X می‌گوییم و با نماد $E(X)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴۸.۱. امید ریاضی تابعی از یک متغیر تصادفی، مثل $g(X)$ بطور طبیعی تعریف می‌شود

$$E(g(X)) = \int_\Omega g(X)dP.$$

لم ۴۹.۱. *فرض کنید $p, q > ۱$ و $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$، در این صورت*

(نامساوی هولدر) $$\mathbb{E}[|XY|] \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{\frac{۱}{p}} \cdot \mathbb{E}[|X|^q]^{\frac{۱}{q}}.$$

[5] Radon-Nikodym Derivation

واریانس متغیر تصادفی X را با $\sigma^{۲}(X)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\sigma^{۲}(X) = E\left[(X - E(X))^{۲}\right].$$

به طور کلی اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر باشد و $\int_{\Omega} |f(X(\omega))| \, \mathrm{d}P(\omega) < \infty$ آن‌گاه

$$E[f(X)] := \int_{\Omega} f(X(\omega)) \, \mathrm{d}P(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, \mathrm{d}P_X(x).$$

تعریف ۵۰.۱. دو پیشامد A و B را **مستقل** می‌نامیم هرگاه

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

دو متغیر تصادفی $X, Y : (\Omega, \mathscr{F}, P) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B})$ را مستقل گوییم هرگاه σ-میدان‌های تولید شده توسط X و Y یعنی $\mathscr{F}_X$ و $\mathscr{F}_Y$ از هم مستقل باشند به این معنا که برای هر $A \in \mathscr{F}_X$ و $B \in \mathscr{F}_Y$ داشته باشیم

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$
$$(\mathscr{F}_X = \{X^{-۱}(B) : B \in \beta\})$$

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند، در این صورت

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

۲.۳.۱ فرآیند تصادفی

در سراسر این بخش فضای احتمال مفروض $(\Omega, \mathscr{F}, P)$است. همچنین σ- میدان مفروض روی فضاهای اقلیدسی σ- میدان بورل است.

تعریف ۵۱.۱. خانواده‌ی $\{X_t\}_{t\in I}$ از متغیرهای تصادفی روی فضای احتمال مشترک $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ را یک **فرآیند تصادفی** می‌نامیم (مجموعه‌ی اندیس گذار I می‌تواند شمارش پذیر یا شمارش ناپذیر باشد).

تعریف ۵۲.۱. برای فرایند تصادفی $\{X_t\}$ ، و برای هر $\omega \in \Omega$، نگاشت $t \to X_t(\omega)$ را یک مسیر می‌نامیم.

تعریف ۵۳.۱. خانواده‌ی $\mathbb{F} = \{\mathscr{F}_t, t \geq ۰\}$ از زیر σ- میدان‌های $\mathscr{F}$ را **فیلتر** می‌نامیم هرگاه برای هر $s \leq t$ داشته باشیم $\mathscr{F}_s \subseteq \mathscr{F}_t$. گوییم فیلتر $\mathbb{F}$ در شرایط معمول صدق می‌کند هرگاه

- $\mathcal{F}_۰$ شامل تمام مجموعه‌های P- پوچ باشد،
- $\mathbb{F}$ از راست پیوسته باشد، یعنی $\mathcal{F}_t = \cap_{u>t}\mathcal{F}_u$.

تعریف ۱.۵۴. فرض کنید $\mathbb{F}$ یک فیلتر باشد. فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t\geq \circ}$ را نسبت به فیلتر $\mathbb{F}$ **سازگار** می‌گوییم هرگاه برای هر $t \geq \circ$، $X_t \in \mathscr{F}_t$؛ یعنی متغیر تصادفی X_t، $\mathscr{F}_t$- اندازه‌پذیر باشد.

تعریف ۱.۵۵. فرض کنید $\mathbb{F}$ و $\mathbb{G}$ دو فیلتر باشند. می‌گوییم **فیلتر** $\mathbb{G}$ **از فیلتر** $\mathbb{F}$ **بزرگ‌تر است** و می‌نویسیم $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$، هرگاه

$$\forall t, \quad \mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t.$$

تعریف ۱.۵۶. **فیلتر طبیعی** فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t\geq \circ}$، را کوچکترین فیلتر مانند $\mathbb{F} = \{\mathscr{F}_t, t \geq \circ\}$ می‌گیریم که در شرایط معمول صدق می‌کند و $\{X_t\}_{t\geq \circ}$ نسبت به آن سازگار است (و برای هر $t \geq \circ$، $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s;\ \circ \leq s \leq t)$).

۱.۳.۳ امید شرطی

تعریف ۱.۵۷. فرض کنید $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ فضایی احتمال باشد و فرض کنید $\mathscr{D}$ زیر σ- میدانی از $\mathscr{F}$ و Y متغیری تصادفی، نامنفی و انتگرال‌پذیر باشد. **امید** Y **به شرط** $\mathscr{D}$ یک متغیر تصادفی $\mathscr{D}$- اندازه‌پذیر روی $(\Omega, \mathcal{F})$ است که آن را با $E(Y|\mathscr{D})$ نشان می‌دهیم و داریم

$$\forall D \in \mathscr{D}, \quad \int_D E(Y|\mathscr{D})\ \mathrm{d}P = \int_D Y\ \mathrm{d}P.$$

تعریف ۱.۵۸. برای متغیر تصادفی انتگرال‌پذیر دلخواه، امید شرطی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E(Y|\mathscr{D}) = E(Y^+|\mathscr{D}) - E(Y^-|\mathscr{D}),$$

که در آن برای هر ω، $Y^+(\omega) = \max\{Y(\omega), \circ\}$ و $Y^-(\omega) = \max\{-Y(\omega), \circ\}$.

خواص امید شرطی

۱. اگر $X \geq \circ$ آن‌گاه $E(X|\mathscr{D}) \geq \circ$، a.s.

۲. $E(X+Y|\mathscr{D}) = E(X|\mathscr{D}) + E(Y|\mathscr{D}) \qquad \text{a.s.}$

۳. برای هر $a \in \mathbb{R}$

$$E(aX|\mathscr{D}) = aE(X|\mathscr{D}) \qquad \text{a.s.}.$$

۴. اگر $\mathscr{D} = \{\Omega, \emptyset\}$ آنگاه

$$E(X|\mathscr{D}) = E(X) \qquad \text{a.s.}.$$

۵. اگر $D_۱ \subseteq D_۲$

$$E(E(X|\mathscr{D}_۲)|\mathscr{D}_۱) = E(X|\mathscr{D}_۱) \qquad \text{a.s.}$$

۶. $E(E(X|\mathscr{D})) = E(X), \qquad \text{a.s.}$

۴.۱ فرایند براونی استاندارد

فرایند براونی یک فرایند تصادفی است، یعنی خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی است که با مجموعه‌ی اعداد حقیقی نامنفی اندیس گذاری شده است و همگی روی یک فضای احتمال مشترک تعریف شده اند. به خواص این فرایند در ادامه اشاره می‌شود. که از جمله این خواص پیوستگی مسیرهای این فرایند و مشتق‌ناپذیری آن در هر نقطه می‌باشد.

قضیه ۵۹.۱. *تقریبا تمام مسیرهای حرکت براَونی هیچ جا مشتق پذیر نیست، چون*
$$P(\forall t \geq 0 \limsup |\frac{B(t+h)-B(t)}{h}| = +\infty) = 1.$$

برهان. به [۱۸] رجوع کنید □

تعریف ۶۰.۱. فرآیندتصادفی $B = \{B_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ را یک **حرکت براَونی استاندارد** [۶] گوییم هرگاه

الف) $B_\circ = \circ$

ب) $B_t - B_s$ برای $s \leq t$ دارای توزیع نرمال با میانگین $\circ$ و واریانس $t-s$ باشد،

ج) متغیرهای تصادفی $B(t_1) - B(t_2), B(t_2) - B(t_3), \ldots, B(t_{n-1}) - B(t_n)$ برای هر $t \in \mathbb{R}$، $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$ مستقل باشند (در این حالت گوییم $B(t)$ دارای نموهای مستقل است).

حرکت براَونی استاندارد را **فرآیند وینر** [۷] نیز می‌گوییم.

قضیه ۶۱.۱. *نامساوی جنسن* [۸] *فرض کنید* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *تابعی محدب باشد و متغیرهای تصادفی* Y *و* $\varphi(Y)$ *انتگرال‌پذیر باشند. در این صورت*

$$\varphi\left(E(Y|\mathscr{D})\right) \leq E\left(\varphi(Y)|\mathscr{D}\right), \quad a.s..$$

برهان. به [۳] رجوع کنید. □

۵.۱ فرایند مارکف

فرایند های مارکف رده‌ای مهم از فرایند های تصادفی است، یک فرایند تصادفی را مارکف گویند هرگاه آینده فرایند به گذشته آن بستگی نداشته باشد و اصطلاحا آن را فرایند بی‌حافظه می‌گوییم.

شرط مارکف را برای $T = \{\circ, 1, 2, \ldots\}$ می‌توان به صورت زیر بیان کرد.
$$P(X_{n+1} = j | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_\circ = i_\circ) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

---

[۶] Standard Brownian motion

[۷] Wiener process

[۸] Jensen's Inequality

برای هر مقدار n و j و i وi_{n-1} و ... و i_0. این احتمال که به آن احتمال تغیر وضعیت از i به j در یک گام (یا احتمال انتقال یک مرحله ای) گفته می‌شود، در حالت کلی به n بستگی دارد

۶.۱ مارتینگل

تعریف ۶۲.۱. فرایند تصادفی $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ را نسبت به فیلتر $\mathbb{F}=\{\mathscr{F}_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ **مارتینگل**[۹]، می‌نامیم هرگاه

i) برای هر n، X_n انتگرال‌پذیر باشد. یعنی برای هر n، $E(|X_n|)<\infty$،

ii) $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ نسبت به فیلتر $\mathbb{F}$ سازگار باشد،

iii) برای هر n، $E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)=X_n$، a.s..

تعریف ۶۳.۱. فرایند تصادفی $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ را نسبت به فیلتر $\mathbb{F}=\{\mathscr{F}_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ **زیرمارتینگل** [۱۰] می‌نامیم هرگاه

۱. برای هر n، X_n انتگرال‌پذیر باشد. یعنی برای هر n، $E(|X_n|)<\infty$،

۲. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ نسبت به فیلتر $\mathbb{F}$ سازگار باشد،

۳. برای هر n، $X_n\le E(X_{n+1}|\mathscr{F}_n)$.

تعریف ۶۴.۱. فرایند تصادفی $\{X_n\}_n$ را L^1–فرایند گوییم هرگاه برای هر n، $X_n\in L^1$.

تعریف ۶۵.۱. فرآیند تصادفی $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ را نسبت به فیلتر $\{\mathscr{F}_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ **قابل پیش‌بینی** [۱۱] گوییم هرگاه برای هر $n\in\mathbb{N}$، متغیر تصادفی X_n، $\mathscr{F}_{n-1}$– اندازه‌پذیر باشد.

قضیه تجزیه دوب–میر[۱۲]

قضیه ۶۶.۱. *الف) فرض کنید X_n یک فرایند L^1 و سازگار، و M_n یک مارتینگل و A_n یک فرایند قابل پیش‌بینی باشد آنگاه تجزیه X_n به صورت زیر است،*

$$X_n=X_0+M_n+A_n$$

این تجزیه یکتاست یعنی اگر دو فرایند مارتینگل و قابل پیش‌بینی مانند M'_n و A'_n داشته باشیم، به طوری که

$$X_n=X_0+M_n+A_n$$

---

[۹] Martingale

[۱۰] Submartingale

[۱۱] Predictable

[۱۲] Doob-Meyer Decomposition

و

$$X_n = X_\circ + M'_n + A'_n$$

آنگاه

$$M'_n = M_n, A'_n = A_n$$

ب) اگر $\{X_n\}$، یک زیرمارتینگل باشد آنگاه $\{A_n\}$ یک فرایند صعودی است.

برهان. به [۱۸] رجوع کنید. □

تعریف ۶۷.۱. نگاشت $\tau : \Omega \to \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ را **زمان توقف** (یا زمان مارکوف) نسبت به فیلتر $\mathbb{F} = \{\mathscr{F}_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ گوییم هرگاه برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ داشته باشیم

$$\{\tau \leq n\} \in \mathscr{F}_n.$$

گزاره ۶۸.۱. *فرض کنید $\tau : \Omega \to \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$. در این صورت τ یک زمان توقف است اگر و تنها اگر برای هر $n \in \mathbb{Z}^+$ داشته باشیم*

$$\{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n.$$

برهان. به [۱۸] مراجعه کنید. □

تعریف ۶۹.۱. دنباله‌ی $\{T_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ از زمان‌های توقف را یک **دنباله‌ی موضعی** می‌نامیم هرگاه، برای هر $n \geq 1$، $T_n \geq T_{n-1}$ و $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty$، a.s..

تعریف ۷۰.۱. گوییم فرایند تصادفی $\{X_t : \circ \leq t \leq T\}$ **مارتینگل موضعی** است اگر دنباله‌ای از زمان‌های توقف $T_n \uparrow T$ موجود باشد که $\{X_{t\wedge T_n}, t > \circ\}$ یک مارتینگل باشد.

۷.۱ انتگرال ایتو

در سراسر این فصل فضای احتمال مفروض $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ و σ-میدان‌های مفروض روی فضاهای اقلیدسی σ-میدان بورل است.(توپولوژی مفروض روی فضای اقلیدسی، توپولوژی استاندارد است.)

مقدمه:می‌خواهیم معادله حرکت ذره‌ای که در سطح آب جوی حرکت می‌کند را نسبت به زمان بدست آوریم. از آنجا که مکان ذره در لحظه t، $t \in [\circ, T]$ و $(T > \circ)$ به دلیل ضرباتی که وزش باد و مولکول های آب به آن وارد می‌کند مشخص نیست (تصادفی است)، معادله آن به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)(\text{نوفه}) \tag{۱.۱}$$

که در آن b, σ توابع حقیقی داده شده روی $\Omega \times (\circ, \infty)$ هستند و نوفه، فرایند تصادفی مانند Z_t است که در سه شرط زیر صدق می‌کند،

۱. برای هر $t_1, t_2 \in [0, T]$، که $t_1 \neq t_2$ است که Z_{t_1} و Z_{t_2} مستقل از هم باشند،

۲. توزیع توام متغیر های تصادفی $Z_{t_{1+t}}, \cdots, Z_{t_{n+t}}$، $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n \leq T$ به t بستگی نداشته باشد،

۳. برای هر $t \in (0, T]$ ، $E(Z_t) = 0$.

فرض کنید $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = T$ افرازی از فاصله $[0, T]$ است. با گسسته سازی فرمول ۱.۱ داریم

$$X_{t_{k+1}} - X_{t_k} = b(t_k, X_{t_k})\Delta t_k + \sigma(t_k, X_{t_k}\Delta t_k Z_K.$$

تنها فرایندی با این ویژگی‌ها که دارای مسیرهای پیوسته است فرایند برآونی است. لذا می‌توان نوشت

$$X_t = X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} b(t_j, X_j)\Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma(t_j, X_j)\Delta B_j$$

اگر حد طرف راست عبارت بالا وقتی $\Delta t \to 0$ وجود داشته باشدخواهیم داشت

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, \omega)ds + \int_0^t \sigma(s, \omega)dB_s,$$

بنابراین به روشنی برای پیداکردن فرایند $\{X_t\}$ ناگزیر از محاسبه انتگرال‌های به فرم زیر هستیم

$$\int_s^T f(t, \omega)dB_t(\omega)$$

که $B_t(\omega)$ فرایند برآونی یک بعدی استاندارد و f تابعی حقیقی روی $[0, \infty) \times \Omega$ است.برای رسیدن به این هدف گام‌های زیر را برمی‌داریم.

فرض کنیم $\phi : [0, \infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ تابعی ابتدایی[۱۳] روی $[0, \infty) \times \Omega$باشد یعنی

$$\phi(t, \omega) = X(\omega)I_{(a,b]}(t), \quad a, b \in [0, \infty)$$

دراین صورت تعریف می‌کنیم

$$\int_a^t \phi(s, \omega)dB_s = \int_a^t X(\omega)\chi_{[a,b)}(s)dB_s(\omega) = X(\omega)[B_{b\wedge t}(\omega) - B_{a\wedge t}(\omega)]$$

که در آن برای $x, y \in \mathbb{R}$، $x \wedge y = \min\{x, y\}$.

فرض کنیم f تابعی ساده [۱۴] روی $[0, \infty) \times \Omega$ باشد. یعنی

$$f = \sum_{j=0}^{n} \phi_i,$$

که ϕ_iها توابع ابتدایی هستند. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$\int_a^t f dB_s = \sum_{j=0}^{n} \int_a^t \phi_i dB_s. \qquad (۲.۱)$$

[۱۳] Elementary function

[۱۴] simple function

رده‌ی $\mathcal{P}_2$ از توابع را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۷۱.۱. رده‌ی $\mathcal{P}_2$ از توابع $f(t,\omega)$ روی مجموعه‌ی $[0,\infty)\times\Omega$، رده‌ای از توابع با ویژگی‌های زیر است.

- تابع $f(t,\omega)$، $(t,\omega)\to f(t,\omega)$، $\mathcal{B}\times\mathcal{F}$- اندازه‌پذیر باشد،
- به ازای هر t، تابع $f(t,\cdot)$، $\mathcal{F}_t$- اندازه‌پذیر باشد،
- برای هر $T\geq 0$، $E\left[\int_0^T f^2(s,\omega)ds\right]<\infty$.

لم ۷۲.۱ (لم ایزومتری ایتو). *اگر تابع $\phi(t,\omega)$ کراندار و ابتدایی باشد، آن‌گاه*

$$E\left[\left(\int_S^T \phi(t,\omega)dB_t(\omega)\right)^2\right]=E\left[\int_S^T \phi^2(t,\omega)dt\right].$$

برهان. به [۶] مراجعه کنید. □

لم ۷۳.۱. *اگر $f\in\mathcal{P}_2$، آن‌گاه دنباله‌ی $\{\phi_n\}$ از توابع ساده وجود دارد به‌طوری که*

$$E\left[\int_0^T |\phi(s)-f_n(s)|^2ds\right]\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

برهان. به [۶] مراجعه کنید. □

اکنون می‌توانیم $\int_s^T f(t,\omega)dB_t$ را برای هر $f\in\mathcal{P}_2$ تعریف می‌کنیم زیرا برای $f\in\mathcal{P}_2$، باتوجه به لم قبل دنباله‌ای از توابع ابتدایی مانند $\{\phi_n\}$ موجود است که در نرم L^2 به f میل می‌کند.پس می‌توان تعریف کرد

$$\int_0^T fdB_t=\lim_{n\to\infty}\int_0^T \phi_n dB_t.$$

انتگرال اخیر را انتگرال ایتو می‌نامیم.

۸.۱ فرمول ایتو

تعریف ۷۴.۱. فرض کنید $(B_t)_{t\geq 0}$ یک حرکت براونی استاندارد روی $(\Omega,\mathcal{F},P)$ باشد. یک انتگرال تصادفی یک- بعدی، یک فرآیند تصادفی X_t روی $(\Omega,\mathcal{F},P)$ است و به طوری که

$$X_t(\omega)=X_0(\omega)+\int_0^t u(s,\omega)ds+\int_0^t v(s,\omega)dB_s(\omega),$$

که در آن توابع u,v $u,v:[0,\infty)\times\Omega\to\mathbb{R}$ داده شده‌اند.

$$dX_t=udt+vdB_t,$$

بیان می‌شود.

قضیه ۷۵.۱ (فرمول یک- بعدی ایتو[۱۵]). *فرض کنید* $dX_t = udt + vdB_t$ *و* $Y_t = g(t, X_t)$، *در این صورت*

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)(dX_t)^2,$$

توجه ۷۶.۱. داریم

$$(dB)^2 = dt, \quad dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0.$$

مثال ۷۷.۱. فرض کنید $Y_t = g(t, B_t) = \frac{1}{2}B_t^2$، در این صورت $g(t,x) = \frac{1}{2}x^2$. لذا

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial g}{\partial x^2} = 1,$$

با استفاده از فرمول ایتو داریم

$$dY_t = B_t dB_t + \frac{1}{2}t.$$

قضیه ۷۸.۱ (فرمول کلی ایتو). *فرض کنید* $dX_t = udt + vdB_t$ *یک انتگرال تصادفی* n*- بعدی و* $g : [0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *یک نگاشت* C^2 *باشد. در این صورت*

$$Y(t, \omega) = g(t, X_t),$$

یک انتگرال تصادفی است و داریم

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g}{\partial x_i}dX_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 g}{\partial x_i x_j}(t, X_t)dX_i dX_j,$$

توجه ۷۹.۱. داریم

$$dB_i \cdot dB_j = \delta_{ij}dt, \quad dt = dt \cdot dB_i = dB_i \cdot dt = 0.$$

مثال ۸۰.۱. اگر $X_t = B_1^2(t) + B_2^2(t)$، آن‌گاه $g(t,x) = x_1^2 + x_2^2$. لذا

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x_i} = 2x_i, \quad \frac{\partial g}{\partial x_i \partial x_j} = 2\delta_{ij}.$$

بنابراین

$$dX_t = \sum_{i=1}^{2} 2B_i dB_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{2} 2\delta_{ij}dB_i dB_j = 2(B_1 dB_1 + B_2 dB_2 + dt).$$

---

[۱۵] Ito

فصل ۲

امید غیرخطی، توزیع G-نرمال و G-چارچوب

مقدمه

در این فصل، نوعی امید غیرخطی به نام G- امید را که با کمک معادله‌ی گرمای غیرخطی به نام معادله‌ی G- گرما تولید می‌شود معرفی می‌کنیم، ضریب این معادله‌ی گرما دارای یک پارامتر بیشتر نسبت به معادله‌ی گرمایی است که توسط باچلیر[۱] (۱۹۰۰) و انیشتین[۲] (۱۹۰۵) برای توصیف حرکت براونی استفاده شد. اما این تعمیم کوچک، تغییرات بزرگی را در پی دارد. با کمک معادله یادشده، متغیر تصادفی با توزیع G- نرمال را تعریف کرده و سپس G -چارچوب را معرفی می‌کنیم.

۱.۲ امیدغیرخطی ، G-امید و G-امیدشرطی

در سراسر این فصل فرض کنید Ω یک مجموعه ناتهی و $\mathscr{H}$ یک شبکه برداری از توابع حقیقی مقدار روی Ω محتوای تابع ثابت ۱ باشد؛ یعنی $\mathscr{H}$ یک فضای خطی است که $1 \in \mathscr{H}$ و برای هر $X \in \mathscr{H}$، $|X| \in \mathscr{H}$. $\mathscr{H}$ فضایی از متغیرهای تصادفی است. در ادامه فرض می‌کنیم کلیه توابع موجود در $\mathscr{H}$ کراندار هستند. یادآوری می‌کنیم که

$$a \wedge b = \min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|), \qquad a \vee b = -[(-a) \wedge (-b)].$$

بنابراین اگر $X, Y \in \mathscr{H}$ نتیجه می‌گیریم، $X \wedge Y$، $X \vee Y$، X^+ و X^- نیز به $\mathscr{H}$ تعلق دارند.

تعریف ۱.۲. به تابعک $\mathbb{E}: \mathscr{H} \to \mathbb{R}$ امید غیرخطی گوییم هرگاه دارای ویژگی‌های زیر باشد.

---

[۱] Bachelier

[۲] Einstein

a) یکنوایی؛ اگر $X, Y \in \mathscr{H}$ و $X \geq Y$ آن‌گاه $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$؛

b) $\mathbb{E}[c] = c$؛

c) زیر جمع پذیری (یا ویژگی خود-تسلطی)؛

$$\forall X, Y \in \mathscr{H}, \quad \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y] \leq \mathbb{E}[X - Y];$$

یا

$$\forall X, Y \in \mathscr{H}, \quad \mathbb{E}[X + Y] \leq \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y];$$

d) برای هر $\lambda \geq ۰$ و $X \in \mathscr{H}$، $\mathbb{E}[\lambda X] = \lambda \mathbb{E}[X]$ ؛

e) $\mathbb{E}[X + c] = \mathbb{E}[X] + c$.

تذکر ۲.۲. *ویژگی (e) از ویژگی‌های (b) و (c) نتیجه می‌شود زیرا داریم؛*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] + c &= \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[-c] \\ &\leq \mathbb{E}[X + c] \leq \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[c] = \mathbb{E}[X] + c.\end{aligned}$$

تذکر ۳.۲. *قرار می‌دهیم $\|X\|_p := \mathbb{E}[|X|^p]^{\frac{۱}{p}}$ ، برای هر $X \in L_{ip}^{۰}(F)$ آنگاه $(L_{ip}^{۰}(F),\ \|.\|_p)$ فضای نرم‌دار است. بنابراین $L_G^p(F)$ تکمیل شده $L_{ip}(F)$ تحت نرم $\|.\|_p$ است. همچنین یادآور می‌شویم که $(L_{ip}^{۰}(F),\ \|.\|_p)$ یک فضای باناخ است*

تعریف ۴.۲. امید $\mathbb{E}[\cdot] : L_G^{۱}(\mathcal{F}) \to \mathbb{R}$ که به صورت فوق تعریف شد را G**- امید** می‌نامیم.

قضیه ۵.۲. *برای هر $p \geq ۱$، تابع $\|\cdot\|_p : L_G^p(\mathcal{F}) \to \mathbb{R}$ با ضابطه*

$$\forall X \in L_G^p(\mathcal{F});\ \|X\|_p := \mathbb{E}[|X|^p]^{\frac{۱}{p}}, \tag{۱.۲}$$

یک نرم روی $L_G^p(\mathcal{F})$ است.

برهان. حالت $p = ۱$ به روشنی برقرار است. فرض کنید $p > ۱$. $q > ۱$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$. برای هر $X, Y \in L_G^p(\mathcal{F})$ داریم

$$\begin{aligned}\|X+Y\|_p^p = \mathbb{E}[|X+Y|^p] &= \mathbb{E}[|X+Y| \cdot |X+Y|^{p-۱}] \\ &\leq \mathbb{E}[|X| \cdot |X+Y|^{p-۱}] + \mathbb{E}[|Y| \cdot |X+Y|^{p-۱}] \\ &\leq \|X\|_p \left(\mathbb{E}[|X+Y|^{p-۱}]^q\right)^{\frac{۱}{q}} + \|Y\|_p \left(\mathbb{E}[|X+Y|^{p-۱}]^q\right)^{\frac{۱}{q}} \\ &= (\|X\|_p + \|Y\|_p)\mathbb{E}[|X+Y|^p]^{\frac{۱}{q}}, \\ \Longrightarrow \|X+Y\|_p^p &\leq (\|x\|_p + \|Y\|_p)\|X+Y\|_p^{\frac{p}{q}}, \\ \Longrightarrow \|X+Y\|_p &\leq \|X\|_p + \|Y\|_p.\end{aligned}$$

بقیه ویژگی‌های نرم به روشنی برقرار است. □

تحت این نرم فضای $L^p_G(\mathcal{F})$ یک فضای باناخ است. برای هر $X \in L^p_G(\mathcal{F})$ و $Y \in L^q_G(\mathcal{F})$ با $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ داریم

$$\|XY\| = \mathbb{E}[|XY|] \le \|X\|_p \|Y\|_q,$$

(لم ۴۹.۱ را ببینید). به روشنی اگر $p \le p'$، آنگاه $\|X\|_p \le \|X\|_{p'}$.

تعریف ۶.۲. امید شرطی متناظر با متغیر تصادفی $X = \phi(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}})$ تحت $\mathcal{F}_{t_j}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{t_j}] &= \mathbb{E}[\phi(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}})|\mathcal{F}_{t_j}] \\ &= \phi_{m-j}(B_{t_1}, \cdots, B_{t_j} - B_{t_{j-1}}).\end{aligned} \tag{۲.۲}$$

اکنون به مطالعه ویژگی‌های امید شرطی می‌پردازیم. فرض کنید $t = t_j$ ثابت باشد و $t \le T$. امید شرطی $\mathbb{E}[\cdot|\mathcal{F}_t] : L^0_{ip}(\mathcal{F}_T) \to L^0_{ip}(\mathcal{F}_t)$ تحت نرم $\|\cdot\|$ یک نگاشت پیوسته است؛ در حقیقت برای هر $X \in L^0_{ip}(\mathcal{F}_T)$

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t] \le \mathbb{E}[X - Y|\mathcal{F}_t] \le \mathbb{E}[|X - Y|\,|\mathcal{F}_t]. \tag{۳.۲}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t]] &\le \mathbb{E}[\mathbb{E}[X - Y|\mathcal{F}_t]] \\ &= \mathbb{E}[X - Y].\end{aligned}$$

همچنین داریم

$$\mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t] \le \mathbb{E}[Y - X|\mathcal{F}_t] \le \mathbb{E}[|X - Y|\,|\mathcal{F}_t]. \tag{۴.۲}$$

پس با توجه به روابط (۳.۲) و (۴.۲) داریم

$$|\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t]| \le \mathbb{E}[|X - Y|\,|\mathcal{F}_t]. \tag{۵.۲}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}\|\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t]\| &= \mathbb{E}[|\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t]|] \\ &\le \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[|X - Y|\,|\mathcal{F}_t]\right] \\ &= \mathbb{E}[|X - Y|] = \|X - Y\|.\end{aligned}$$

بنابراین $\mathbb{E}[\cdot|\mathcal{F}_t]$ دارای توسیعی پیوسته مانند $L^1_G(\mathcal{F}_T) \to L^1_G(\mathcal{F}_t)$ است. اگر T در روابط بالا ثابت نباشد، می‌توان $\mathbb{E}[\cdot|\mathcal{F}_t] : L^1_G(\mathcal{F}) \to L^1_G(\mathcal{F}_t)$ را نیز به دست آورد.

گزاره ۷.۲. *$\mathbb{E}[\cdot|\mathcal{F}_t] : L^0_{ip}(\mathcal{F}_T) \to L^0_{ip}(\mathcal{F}_t)$ دارای ویژگی‌های زیر است، این ویژگی‌ها برای هر $X, Y \in L^1_G(\mathcal{F})$ نیز برقرار هستند.*

۱. اگر $X \in L_G^1(\mathcal{F}_t)$ و $t \leq T$، آن‌گاه $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t] = X$.

۲. اگر $X \geq Y$ آن‌گاه $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t] \geq \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t]$.

۳. $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t] \leq \mathbb{E}[X-Y|\mathcal{F}_t]$.

۴. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{t\wedge s}]$، $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}[X]$.

۵. برای هر $\eta \in L_G^1(\mathcal{F}_t)$، داریم $\mathbb{E}[X+\eta|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t] + \eta$.

۶. برای هر $\eta \in L_G^1(\mathcal{F}_t)$ کراندار $\mathbb{E}[\eta X|\mathcal{F}_t] = \eta^+\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t] + \eta^-\mathbb{E}[-X|\mathcal{F}_t]$،

۷. برای هر $X \in L_G^1(\mathcal{F}_t$، داریم $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[X]$.

برهان. به [۱۱، ۱۳] رجوع کنید. □

مثال ۸.۲. برای هر $s \leq t$، $M_t - M_s \in L_G^1(\mathcal{F}_T^s)$، لذا با توجه به قسمت (۷) از گزاره ۷.۲ داریم

$$\mathbb{E}[M_t - M_s|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[M_t - M_s] = \mathbb{E}[M_{t-s}] = 0,$$

در حالت کلی

$$\mathbb{E}[\psi(M_t - M_s)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\psi(M_t - M_s)]. \quad (۶.۲)$$

برای $n = 1, 2, \cdots$، با توجه به این‌که $\phi(M_t - M_s) = |M_t - M_s|^n \in L_G^1(\mathcal{F}_T^s)$

$$\mathbb{E}[|M_t - M_s|^n|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[|M_{t-s}|^n] = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_{-\infty}^{\infty}|x|^n \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right)dx.$$

همچنین

$$\mathbb{E}[-|M_t - M_s|^n|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[-|M_{t-s}|^n] = \frac{-1}{\sqrt{2\pi(t-s)}\sigma_0}\int_{-\infty}^{\infty}|x|^n \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)\sigma_0^2}\right)dx.$$

در حالت کلی برای هر تابع محدب و حقیقی ϕ روی $\mathbb{R}$ داریم

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X\phi(M_t - M_s)|\mathcal{F}_s] &= X^+\mathbb{E}[\phi(M_t - M_s)|\mathcal{F}_s] + X^-\mathbb{E}[-\phi(M_t - M_s)|\mathcal{F}_s]\\ &= \frac{X^+}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right)dx\\ &\quad - \frac{X^-}{\sqrt{2\pi(t-s)}\sigma_0}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)\sigma_0^2}\right)dx.\end{aligned}$$

مانند حالت کلاسیک داریم

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2|\mathcal{F}_s] = t-s, \quad \mathbb{E}[(M_t - M_s)^4|\mathcal{F}_s] = 3(t-s)^2,\\ &\mathbb{E}[(M_t - M_s)^6|\mathcal{F}_s] = 15(t-s)^3, \quad \mathbb{E}[(M_t - M_s)^8|\mathcal{F}_s] = 105(t-s)^4,\\ &\mathbb{E}[|M_t - M_s||\mathcal{F}_s] = \frac{\sqrt{2(t-s)}}{\sqrt{\pi}}, \quad \mathbb{E}[|M_t - M_s|^3|\mathcal{F}_s] = \frac{2\sqrt{2}(t-s)^{3/2}}{\sqrt{\pi}},\\ &\mathbb{E}[|M_t - M_s|^5|\mathcal{F}_s] = 8\frac{\sqrt{2}(t-s)^{5/2}}{\sqrt{\pi}}.\end{aligned}$$

گزاره ۹.۲. *فرض کنید* $X,Y\in L_G^1(\mathcal{F})$ *و* $\mathbb{E}[Y]=-\mathbb{E}[-Y]$، $E[Y]=-E[-Y]\geq 0,\ -\mathbb{E}[-Y]=\mathbb{E}[Y]$ *و لذا* $\mathbb{E}[Y]=E[Y]$ ، *بنابراین*

$$\mathbb{E}[X+Y]=\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y].$$

در حالت خاص اگر $\mathbb{E}[Y]=\mathbb{E}[-Y]=0$، *آن‌گاه* $\mathbb{E}[X+Y]=\mathbb{E}[X]$.

برهان. این رابطه به روشنی برقرار است زیرا، $\mathbb{E}[X+Y]\leq\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y]$، به علاوه

$$\mathbb{E}[X+Y]\geq\mathbb{E}[X]-\mathbb{E}[-Y]=\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y].$$

□

۲.۲ توزیع G- نرمال

فضای تمام توابع حقیقی مقدار، لیپشیتس[۳] و کراندار روی فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ را با $lip(\mathbb{R}^n)$ نشان می‌دهیم که در آن n عددی صحیح و مثبت است. در این بخش فرض می‌کنیم که $\Omega=\mathbb{R}$ و $\mathscr{H}=lip(\mathbb{R})$.

متغیر تصادفی $X(x)=x$ با توزیع نرمال استاندارد، یعنی $X\sim N(0,1)$، به صورت زیر توصیف می‌شود

$$E[\phi(X)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}\phi(x)\,\mathrm{d}x,\quad\forall\phi\in lip(\mathbb{R}).$$

در این فصل، قرار می‌دهیم $G(a)=\frac{1}{2}(a^+-\sigma_0^2a^-)$، که $a\in\mathbb{R}$ و $\sigma_0\in[0,1]$ عددی ثابت است.

تعریف ۱۰.۲. متغیر تصادفی X با توزیع G- نرمال استاندارد به وسیله امید غیرخطی آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbb{E}[\phi(X)]=P_1^G(\phi):=u(1,0),\quad\forall\phi\in lip(\mathbb{R}),$$

که $u=u(t,x)$ تابعی پیوسته و کراندار از $[0,\infty)\times\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ است و حل چسبندگی (منحصر به فرد) معادله دیفرانسیل جزئی سهمی‌وار و غیرخطی (PDE) زیر است

$$\partial_t u-G(\partial_{xx}^2u)=\partial_t u-\frac{1}{2}\left((\partial_{xx}^2u)^+-\sigma_0^2(\partial_{xx}^2u)^-\right)=0,\quad u(0,x)=\phi(x).\qquad(۷.۲)$$

تابعک P_1^G را توزیع G- نرمال استاندارد می‌نامیم. اگر $\sigma_0=1$، آن‌گاه PDE فوق همان معادله گرمای استاندارد است و بنابراین در این حالت توزیع G- نرمال همان توزیع نرمال استاندارد $N(0,1)$ است.

$$P_1^G(\phi)=P_1(\phi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}\phi(x)\,\mathrm{d}x.$$

$E[\phi(X)]=u(1,0)$، که در آن $u=u(t,x)$ حل منحصر به فرد معادله گرمای، و همچنین $u=u(t,x)$ تابعی حقیقی، پیوسته و کراندار روی $[0,\infty)\times\mathbb{R}$ است.

[۳] Lipschitz

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0 \\ u(0,x) = \varphi(x). \end{cases} \tag{8.2}$$

$$\varphi(.) \in lip(\mathbb{R}, \qquad G(a) = \frac{1}{2} \sup_{\sigma_0^2 \le \sigma^2 \le 1} a\sigma^2, \quad \sigma_0 \in [0,1].$$

۳.۲ G-چارچوب

فضای تمام مسیرهای پیوسته و حقیقی مقدار $(\omega_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ با $\omega_0 = 0$ را با $C_0(\mathbb{R}^+)$ نشان می‌دهیم. در ادامه فرض می‌کنیم $\Omega = C_0(\mathbb{R}^+)$.

متریک ρ را روی این فضا به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\forall \omega^1, \omega^2 \in \Omega; \quad \rho(\omega^1, \omega^2) := \sum_{i=0}^{\infty} \left[\left(\max_{t\in[0,i]} |\omega_t^1 - \omega_t^2| \right) \wedge 1 \right].$$

تذکر ۱۱.۲. *(Ω, ρ) یک فضای متریک است.*

برای هر $t \in [0,\infty)$ قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} W_t &:= \{\omega_{.\wedge t},\ \omega \in \Omega\}; \\ \mathcal{F}_t &:= \mathcal{B}_t(W) = \mathcal{B}(W_t); \\ \mathcal{F}_{t^+} &:= \mathcal{B}_{t^+}(W) = \cap_{s>t}\mathcal{B}_s(W); \\ \mathcal{F} &:= \bigvee_{s>t} \mathcal{F}_s = \sigma(\cup_{s>t}\mathcal{F}_s). \end{aligned}$$

$(\Omega, \mathcal{F})$ را به عنوان فضای استاندارد، مجهز به فیلتر طبیعی فرآیند تصادفی $\omega = (\omega_t)_{t\ge 0}$ در نظر می‌گیریم. همچنین فرض کنید $s < t$، در این صورت $\bigcap_{u\in(t,\infty)} \mathcal{F}_u \subseteq \bigcap_{u\in(s,\infty)} \mathcal{F}_u$، لذا $\mathcal{F}_{s^+} \subseteq \mathcal{F}_{t^+}$ و این یعنی خانواده $\{\mathcal{F}_{t^+},\ t \ge 0\}$ فیلتر است.

برای هر $T \ge 0$، فضای زیر از متغیرهای تصادفی را روی Ω در نظر بگیرید.

$$L_{ip}^0(\mathcal{F}_T) := \{X(\omega) = \phi(\omega_{t_1}, \cdots, \omega_{t_m}),\ \forall m \ge 1,\ t_1, \cdots, t_m \in [0,T],\ \forall \phi \in lip(\mathbb{R}^m)\}.$$

روشن است که برای هر $t \le T$، $L_{ip}^0(\mathcal{F}_t) \subseteq L_{ip}^0(\mathcal{F}_T)$. قرار می‌دهیم،

$$L_{ip}^0(\mathcal{F}) := \bigcup_{n=1}^{\infty} L_{ip}^0(\mathcal{F}_n).$$

تذکر ۱۲.۲. *می‌دانیم فضای $lip(\mathbb{R}^m)$ یک شبکه برداری است. بنابراین فضای $L^\circ_{ip}(\mathcal{F}_T)$ نیز یک شبکه برداری است؛ از طرفی چون برای هر n، $L^\circ_{ip}(\mathcal{F}_n) \subseteq L^\circ_{ip}(\mathcal{F}_{n+1})$، لذا $L^\circ_{ip}(\mathcal{F})$ نیز یک شبکه برداری است. به علاوه اگر $\phi, \psi \in lip(\mathbb{R}^m)$، آن‌گاه $\phi \cdot \psi \in lip(\mathbb{R}^m)$، بنابراین اگر $X, Y \in L^\circ_{ip}(\mathcal{F}_T)$ آن‌گاه $X \cdot Y \in L^\circ_{ip}(\mathcal{F}_T)$.*

قرار می دهیم $B_t(\omega) = \omega_t$، که $t \in [\circ, \infty)$ و $\omega \in \Omega$.

۴.۲ انتگرال باکنر

تعریف ۱۳.۲. فرض کنید $T \in \mathbb{R}_+$، افراز π_T از بازه $[\circ, T]$، زیرمجموعه‌ای مرتب متناهی مانند $\pi_T = \{t_1, \cdots, t_N\}$ است به طوری که $\circ = t_\circ < t_1 < \cdots < T_N = T.$ قرار می‌دهیم

$$\mu(\pi_T) = \max\{|t_{i+1} - t_i| \mid i = \circ, 1, 2, \cdots, N-1\}.$$

نماد $\pi^N_T = \{\circ = t^N_\circ < t^N_1 < \cdots < t^N_N = T\}$ نمایشگر دنباله‌ای از افرازها روی بازه $[\circ, T]$ است که $\lim_{N\to\infty} \mu(\pi^N_T) = \circ$.

تعریف ۱۴.۲. فرض کنید $p \geq 1$ ثابت باشد. نوعی از فرآیندهای ساده را، به صورت زیر معرفی می‌کنیم. برای افراز $\pi_T = \{t_\circ, \cdots, t_N\}$ از $[\circ, T]$، قرار می‌دهیم.

$$\eta_t(\omega) = \sum_{j=\circ}^{N-1} \xi_j(\omega) I_{[t_{j+1} - t_j)}(t),$$

که برای هر $i = \circ, 1, 2, \cdots, N-1$، $\xi_i \in L^p_G(\mathcal{F}_{t_i})$ داده شده است. گردآیه تمام این فرآیندها را با $M^{p,\circ}_G(\circ, T)$ نشان می‌دهیم.به عبارت دیگر

$$\begin{aligned} M^{p,\circ}_G(\circ, T) \quad = \quad & \{\eta : \eta_t(\omega) = \sum_{j=\circ}^{N-1} \xi_j(\omega) I_{[t_j, t_{j+1}]}(t), \\ & \forall N > \circ, \quad \circ = t_\circ < \cdots < t_N = T, \quad \xi_j(\omega) \in L^p_G(F_{t_i}), \\ & i = \circ, \ldots, N-1\} \end{aligned}$$

تعریف ۱۵.۲. برای $\eta \in M^{1,\circ}_G(\circ, T)$ که $\eta_t(\omega) = \sum_{j=\circ}^{N-1} \xi_j(\omega) I_{[t_{j+1} - t_j)}(t)$ انتگرال باکنر [۴] را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\int_\circ^T \eta_t(\omega) dt = \sum_{j=\circ}^{N-1} \xi_j(\omega)(t_{j+1} - t_j).$$

[۴] Bochner

تذکر ۱۶.۲. *برای هر $\eta \in M_G^{1,0}(0,T)$، قرار می‌دهیم*

$$\widetilde{\mathbb{E}}_T[\eta] := \frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}[\eta_t]dt = \frac{1}{T}\sum_{j=0}^{N-1}\mathbb{E}[\xi_j(\omega)](t_{j+1}-t_j).$$

می‌توان نشان داد که $\widetilde{\mathbb{E}}_T[\cdot] : M_G^{1,0}(0,T) \to \mathbb{R}$ یک امید غیرخطی است. از آنچه در بخش ۱.۲ گذشت تابع

$$\|\eta\|_T^1 = \widetilde{\mathbb{E}}_T[|\eta|] = \frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}[|\eta_t|]dt,$$

یک نرم روی $M_G^{1,0}(0,T)$ است. تحت این نرم فضای $M_G^{1,0}(0,T)$ می‌تواند به طور پیوسته به فضای باناخ $M_G^1(0,T)$ توسیع یابد.

تعریف ۱۷.۲. برای هر $p \geq 1$، تکمیل فضای $M_G^{p,0}(0,T)$، تحت نرم زیر را با $M_G^p(0,T)$ نشان می‌دهیم

$$\|\eta\|_{M_G^p} = \left(\widetilde{\mathbb{E}}_T[|\eta|^p]\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{T}\int_0^T \mathbb{E}[|\eta_t^p|]dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{T}\int_0^T \|\eta_t^p\|dt\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left(\frac{1}{T}\sum_{j=0}^{N-1}\mathbb{E}[|\xi_j(\omega)|^p](t_{j+1}-t_j)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

۵.۲ انتگرال G-استراتونویچ

تعریف ۱۸.۲. برای $T \in \mathbb{R}_+$ افراز ρ از $[0,T]$ یک زیر مجموعه متناهی است $\rho = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ به طوری که $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$.

$$\mu(\rho) = \max\{|t_{j+1} - t_j|, i = 0, 1, \dots, N-1\}$$

دنباله ی افرازهای $[0,T]$، $\mathcal{P}_T^n = \{t_0^n < t_1^n < \dots < t_N^n\}$به طوری که $\lim_{N\to\infty}\mu(\mathcal{P}_T^n) = 0$ را درنظر بگیرید برای هر $f \in M_G^{2,0}(0,T)$ **انتگرال G-استراتونویچ** [5] را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. قرار می‌دهیم $t^* = \dfrac{t_j - t_{j-1}}{2}$.

$$\int_0^T f(t,\omega)d(GB) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(t^*,\omega)((GB)_{t_i} - (GB)_{t_{i-1}}).$$

اکنون با درنظر گرفتن مفهومی که توسط پنگ در مورد انتگرال G-استرانویچ بیان شد ما قضیه ای در همین زمینه بیان می‌کنیم.

قضیه ۱۹.۲. *در تعریف ۱۸.۲ اگر t^* را به طور تصادفی با توزیع یکنواخت از داخل بازه‌ی (t_{j-1}, t_j) انتخاب کنیم، زمانی که $n \to \infty$ آنگاه دنباله مجموع های تصادفی حاصل به انتگرال G-استراتونویچ میل می‌کند.*

[5] G-Strtonovich integral

برهان. به [۲] رجوع کنید. $\square$

تعریف ۲۰.۲. مجموعه S^p را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$S^p = \{M \mid M : R^+ \times \Omega \longrightarrow R, \quad M(t,\omega) \in L_G^p(F_t), \quad \forall T > \circ, \quad \{M_t\}_{t\in[\circ,T]} \in M_G^p(\circ, T)\}.$$

فصل ۳

تعریف فرایند G-بروانی و مقایسه آن با فرایند براونی

مقدمه

در این فصل از مفاهیمی همچون مارتینگل، فرایند مارکف، که پیش‌تر معرفی کردیم بهره می‌گیریم و همچنین برا رسیدن به مقصود مفاهیم جدیدی همچون G-مارتینگل و فرایند G-برآونی ، فرایند تغییرات درجه دوم مربوط به فرایند G-برآونی راتعریف و فرایند برآونی و فرایند G-برآونی را مقایسه می‌کنیم.

تعریف ۱.۳. $M \in S^{2}$ را G**-مارتینگل** می نامیم اگر برای هر $0 \leq s \leq t \leq \infty$ ، $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$ و آن را مارتینگل متقارن می‌گوییم هرگاه داشته باشیم؛

$$\mathbb{E}[-M_t \mid \mathcal{F}_s] = -\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s]$$

تعریف ۲.۳. برای هر $\varphi \in Lip(\mathbb{R}), s > t > 0, x \in \mathbb{R}$ ،فرایند $M \in S^p$ و $p \geq 1$ ، **فرآیند مارکف** تحت امید غیرخطی $\mathbb{E}[.]$ می‌نامیم اگر

$$\mathbb{E}[\varphi(M_s + x) \mid F_t] = \mathbb{E}[\varphi(M_{s-t} + y)]_{y=M_t+x}.$$

۱.۳ فرآیند G-براونی

تعریف ۳.۳. فرایند $M \in S^{2}$ یک فرایند G-برآونی با پارامتر σ_0 تحت امید غیرخطی $\mathbb{E}[.]$ است اگر

.۱

$$\forall 0 < t < T < \infty, \mathbb{E}[\varphi(M_t + x)] = u(t,x)$$

و

$$\mathbb{E}[\varphi(M_T - M_t)] = \mathbb{E}[\varphi(M_{T-t})], \qquad \forall \varphi \in lip(\mathbb{R}).$$

۲. برای هر $m > 0$ و $\varphi \in lip(\mathbb{R}^m)$ و $0 < t_1 < \cdots < t_m < \infty$ آنگاه

$$\mathbb{E}[\varphi(M_{t_1}, M_{t_2} - M_{t_1}, \ldots, M_{t_m} - M_{t_{m-1}})] = \varphi_m,$$

و φ_m ها به صورت زیر نتیجه‌گیری می‌شود

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x_1, \ldots, x_{m-1}) =& \mathbb{E}[\varphi(x_1, \ldots, x_{m-1}, M_{t_m} - M_{t_{m-1}})],\\
\varphi_2(x_1, \ldots, x_{m-2}) =& \mathbb{E}[\varphi_1(x_1, \ldots, x_{m-2}, M_{t_{m-1}} - M_{t_{m-2}})],\\
&\vdots\\
\varphi_{m-1}(x_1) =& \mathbb{E}[\varphi_{m-2}(x_1, M_{t_2} - M_{t_1})],\\
\varphi_m =& \mathbb{E}[\varphi_{m-1}(M_{t_1})].
\end{aligned}$$

مثال ۴.۳. فرض کنید $(M_t)_{t\geq 0}$ فرایند G-برآونی باشد، در این صورت $(M_t)_{t\geq 0}$ یک مارتینگل است.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] &\leq \mathbb{E}[M_s|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[M_t - M_s|\mathcal{F}_s]\\
&= M_s + \mathbb{E}[M_t - M_s]\\
&= M_s + 0 = M_s.
\end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] &\geq \mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[M_t - M_s|\mathcal{F}_s] - \mathbb{E}[-M_s|\mathcal{F}_s]\\
&= M_s + \mathbb{E}[M_t - M_s]\\
&= M_s + 0 = M_s.
\end{aligned}$$

۲.۳ مقایسه فرآیند برآونی با فرآیندG-برآونی

برای مقایسه این دو فرایند ابتدا مفاهیمی که مورد نیاز است راتعریف می‌کنیم.

تعریف ۵.۳. L^2-مارتینگل [1] به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E(|x|) = (\int |x|^2 \, dx)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

۱.۲.۳ براکت دنباله مارتینگل موضعی

اگر M یک دنباله مارتینگل موضعی باشد در این صورت دنباله منحصر به فردی از فرایند صعودی [2] $\langle M\rangle$ چنان موجود است که آن را براکت [3] می‌نامیم و همچنین $(M_t^2 - \langle M\rangle_t, t \geq 0)$ یک دنباله

[2] increasing process

[3] Beraket or predictable quadratic variation

موضعی مارتینگل است. آنگاه فرایند $\langle M\rangle$ برابر است با

$$\langle M\rangle_t = \lim \sum_{i=0}^{p(n)-1} (M_{t_{i+1}^n} - M_{t_i^n})^2$$

زمانی که حد در L^2 گرفته می‌شود و $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p(n)}^n = t$ و که

$$\sup_{0\leq i\leq p(n)-1} (t_{i+1}^n - t_i^n) \to 0.$$

مثال ۶.۳. اگر $\{B_t\}_t$ یک فرایند براونی باشد براکت آن برابر است با

$$\langle B\rangle_t = \lim \sum_{i=0}^{p(n)-1} (B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 = t.$$

که درآن حد در L^2 گرفته می‌شود

۲.۲.۳ فرآیند با تغییرات مرتبه دوم تولید شده به وسیله‌ی حرکت G- برآونی

هم اکنون به مطالعه فرآیند خاصی که از فرایند G- برآونی مشتق می‌شود می‌پردازیم. فرض کنید π_t^N که $N = 1, 2, \cdots$ ، دنباله‌ای از افرازهای بازه‌ی $[0, t]$ باشد قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} M_t^2 &= \sum_{j=0}^{N-1} \left[M_{t_{j+1}^N}^2 - M_{t_j^N}^2\right] \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} 2M_{t_j^N}\left(M_{t_{j+1}^N} - M_{t_j^N}\right) + \sum_{j=0}^{N-1}\left(M_{t_{j+1}^N} - M_{t_j^N}\right)^2. \end{aligned} \tag{1.3}$$

در این صورت

$$\lim_{\mu(\pi_t^N)\to 0} \sum_{j=0}^{N-1} 2M_{t_j^N}\left(M_{t_{j+1}^N} - M_{t_j^N}\right) = 2\int_0^t M_s dM_s.$$

عبارت دوم از سمت راست تساوی بالا نیز همگرا می‌باشد که حد آن را با $\langle M\rangle_t$ نشان می‌دهیم

$$\langle M\rangle_t = \lim_{\mu(\pi_t^N)\to 0} \sum_{j=0}^{N-1}\left(M_{t_{j+1}^N} - M_{t_j^N}\right)^2 = M_t^2 - 2\int_0^t M_s dM_s. \tag{2.3}$$

با توجه به ساختار ذکر شده در بالا، $\langle M\rangle_t$، $t \geq 0$، یک فرآیند صعودی با $\langle M\rangle_0 = 0$ است که به آن فرآیند با تغییرات مرتبه دوم تولید شده به وسیله‌ی حرکت G- برآونی M می‌گوییم. ■

گزاره ۷.۳. *فرض کنید $\{B_t\}$ یک حرکت براونی باشد آنگاه*

الف) $\{B_t, \mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ یک مارتینگل است

ب) $\{B_t^2 - t, \mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ یک مارتینگل است

برهان. الف) برای $\{B_t,\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ درستی ویژگی های $(ii),(i)$ از تعریف مارتینگل روشن است حال برای اثبات(iii) به طریق زیر عمل می‌کنیم :

$$\begin{aligned}E(B_t|\mathcal{F}_s)&=E(B_s|\mathcal{F}_s)+E(B_t-B_s|\mathcal{F}_s)\\&=B_s+E(B_t-B_s)\\&=B_s+0=B_s\end{aligned}$$

ب) مجداد کافی است ویژگی (iii) را تحقیق کنیم،داریم

$$B_t^2=B_s^2+(B_t-B_s)^2+2B_s(B_t-B_s)$$

بنابراین

$$\begin{aligned}E(B_t^2-t|\mathcal{F}_s)=&E(B_s^2-t|\mathcal{F}_s)+E((B_t-B_s)^2|\mathcal{F}_s)\\&+2E(B_s(B_t-B_s)|\mathcal{F}_s)+s-t\\&=B_s^2-s+(t-s)+2B_sE(B_t-B_s)+s-t\\&=B_s^2-s.\end{aligned}$$

□

گزاره ۸.۳. *اگر f یک تابع ساده باشد آنگاه*

الف) $\{X_t=\int_a^t f(s,\omega)dB_s,\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ یک مارتینگل است،

ب) $\{(X_t)^2-\int_a^t f^2(s)dB_s,\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ یک مارتینگل است و در نتیجه

$$E((\int_a^t f(s,\omega)dB_s)^2)=E(\int_a^t f^2(s)ds)$$

برهان. الف)فرض کنیم$f(t,\omega)=X(\omega)\chi_{(a,b)}(\omega)$ ،$\mathcal{F}_a$ اندازه پذیر است.

$$X_t=\int_a^t X(\omega)\chi_{(a,b)}(\omega)dB_s=X(\omega)[B_b(\omega)-B_a(\omega)]$$

$$\begin{aligned}E(X_{t+1}|\mathcal{F}_t)=E(X_\omega[B_b(\omega)-B_a(\omega)]|\mathcal{F}_t)&=X(\omega)E([B_b(\omega)-B_a(\omega)]|\mathcal{F}_t)\\&=X(\omega)[B_b(\omega)-B_a(\omega)]=X_t\end{aligned}$$

ب)قسمت دوم مشابه قسمت اول ثابت می‌شود. □

تعریف ۹.۳.

$$\mathcal{K}_T=\{f(t,\omega):([0,T]\times\Omega)\to(\mathbb{R},B)\}\subset L^2([0,T]\times\Omega)$$

در صورتی که برای هر t، $f(t,\omega)$، $\mathcal{F}_t$ اندازه‌پذیراست و برای آن دنباله‌ی h_n از توابع ابتدایی [۴] مانند $h_n=\chi_{[a,b)}X_n(\omega)$ وجود داردکه در نرم L^2 به f میل می‌کند.

[۴] elementary

مثال ۳.۰۱. فرض کنیم تابع $F(t,x)$ چنان موجود است که $\partial_t F = -\frac{۱}{۲}\partial_{xx}F$، سپس اگر $\partial_x F(t,W_t) \in \mathcal{K}_T$ آنگاه فرمول ایتو را به شکل زیر داریم

$$F(t,W_t) = F(\circ, W_\circ) + \int_\circ^T \underbrace{\left(\partial_t F(t,W_t) + \frac{۱}{۲}\partial_{xx}F(t,W_t)\right)}_{=\circ} dt$$

$$+ \underbrace{\int_\circ^T \partial_x F(t,W_t) dW_t}_{\text{مارتینگل}}$$

قرار دهید $F(t,x) = e^{ax-\frac{۱}{۲}t\alpha^۲}$ آنگاه می‌دانیم $e^{aW_t-\frac{۱}{۲}t\alpha^۲}$ یک مارتینگل است. همچنین فرمول ایتو را به صورت زیر بیان می‌کنیم.

$$X_t = X_\circ + \int_\circ^t u(s,\omega)ds + \int_\circ^t v(s,\omega)dW_s$$

که در آن

$$P(\int_\circ^t |u|^۲ ds < \infty) = ۱.$$

آنگاه

$$\begin{aligned} F(t,X_t) - F(\circ,X_\circ) = \int_\circ^t \{&\partial_s F(s,X_s) + u\partial_x F(s,X_s) \\ &+ \frac{۱}{۲}v^۲\partial_{xx}F(s,X_s)\}ds \\ &+ \int_\circ^t v(s,\omega)\partial_x F(s,X_s)dW_s \end{aligned}$$

داریم

$$F(t,X_t) = \partial_t F dt + u\partial_x F dt + \frac{۱}{۲}v^۲\partial_{xx}F dt + v\partial_x F dW \tag{۳.۳}$$

از سوی دیگر $dXdt$ و $dtdt$ ناچیز هستند و می‌توان از آن چشم‌پوشی کرد. بنابراین

$$dX = udt + vdW$$

در نتیجه

$$dXdX = u^۲ \underbrace{dt^۲}_{=\circ} + ۲uv\underbrace{dtdW}_{=\circ} + v^۲ dWdW.$$

در حالی که می‌دانیم $E((\Delta W)^۲) = \Delta t$ وهمچنین جایگزین مناسبی برای $dWdW$ را می‌توان dt دانست.[۱۸]

گزاره ۱۱.۳. *فرض کنید $\zeta \subset \mathcal{F}$ یک σ-جبر و X ، $\mathcal{F}$-اندازه پذیر باشد اگر برای هر $\theta \in \mathbb{R}$ داشته باشیم*

$$E(e^{i\theta X|\zeta)=e^{-\theta^{۲}\frac{\sigma^{۲}}{۲}}}.$$

آنگاه X نسبت به ζ، σ-جبر مستقل است و X دارای توزیع نرمال با میانگین ۰ و واریانس $\sigma^{۲}$ است.

برهان. برای هر $A \in \zeta$

$$\begin{aligned} E(e^{i\theta X}\mathbf{۱}_{A}) &= E(e^{-\theta^{۲}\frac{\sigma^{۲}}{۲}}\mathbf{۱}_{A}) \\ &= e^{-\theta^{۲}\frac{\sigma^{۲}}{۲}}E(\mathbf{۱}_{A}) \\ &= e^{-\theta^{۲}\frac{\sigma^{۲}}{۲}}P(A). \end{aligned}$$

در حالت خاص برای $A = \Omega$ داریم $E(e^{i\theta X}) = e^{-\theta^{۲}\frac{\sigma^{۲}}{۲}}$ و بنابراین X نرمال با میانگین صفر و واریانس $\sigma^{۲}$ است. حال نشان می‌دهیم X مستقل ازζ است، فرض می‌کنیم $A \in \zeta$ و$P(A) > ۰$. تابع احتمال Q روی $\mathcal{F}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$Q(b) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{E(\mathbf{۱}_{A}\mathbf{۱}_{B})}{P(A)}$$

حال Q یک اندازه احتمال است و

$$\begin{aligned} E_{Q}(e^{i\theta X}) &= \int_{\Omega} e^{i\theta X} dQ \\ &= \int_{\Omega} e^{i\theta X}\frac{dp}{P(A)} \\ &= \frac{E(e^{i\theta X}\mathbf{۱}_{A})}{P(A)} \\ &= e^{-\theta^{۲}\frac{\sigma^{۲}}{۲}}. \end{aligned}$$

بنابراین X توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $\sigma^{۲}$ است. از اینرو اگر ϕ نشان‌دهنده تابع توزیع نرمال استاندارد باشد، برای هر $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} Q(X \leq x) = \phi(\frac{x}{\sigma}) &\Longrightarrow \frac{P(\{X \leq x\} \cap A)}{p(A)} = \phi(\frac{x}{\sigma}) = P(X \leq x) \\ &\Longrightarrow \frac{P(\{X \leq x\} \cap A)}{p(A)} = P(X \leq x)P(A) \end{aligned}$$

برای هر $A \in \zeta$ با $P(A) \neq 0$. و این رابطه برای هر $A \in \zeta$ با $P(A) = 0$ بدیهی است.
بنابراین ما می‌توانیم نتیجه گیری کنیم که برای تمام $A \in \zeta$ برقرار است و این بدین معانست که A از ζ مستقل است. □

(قضیه نمایش L^2 - دوب مارتینگل [5])

قضیه ۱۲.۳. *قرار دهید* $X \in L^2(\Omega, F_T, P)$ *سپس* f *منحصر به فردی وجود دارد که* $f \in \mathcal{K}_T$ *و* $\alpha = E(X)$*به طوری که*

$$X = \alpha + \int_0^T f(s,\omega)dW_s$$

برهان. به [۱۸] رجوع کنید. □

(قضیه مشخصه مارتینگل لوی[6])

قضیه ۱۳.۳. *فرض کنیم* $\{B_t\}$*، مارتینگل-*L^2 *باشد و* $B_0 = 0$ *و* $\{B_t^2 - t\}$*، مارتینگل باشد آنگاه* $\{B_t\}$ *فرایند براونی است.*

برهان. بنابر قضیه۱۲.۳، $B \in \mathcal{K}_T$ وجود دارد به طوری که

$$X_t = \int_0^t B(s,\omega)dW_s$$

حال اگر $dX_t = udt + vdW_t$ انگاه طبق فرمول ایتو

$$df(t,X_t) = \partial_t f(t,X_t)dt + \frac{1}{2}\partial_{xx} f(t,X_t)dX_t dX_t + \partial_x f(t,X_t)dX_t.$$

سپس بنابر مثال ۱۰.۳ $dX_t dX_t = v^2 dt$ قرار می‌دهیم $u = 0$ و $f(t,x) = x^2$.داریم $\partial_t f = 0$ و $\partial_x f = 2x$ و $\partial_{xx} f = 2$ در نتیجه

$$d(X_t^2) = 0 + \underbrace{dX_t dX_t}_{v^2 dt} + 2x dX_t$$

سپس

$$X_t^2 = X_0^2 + \int_0^t 2X_s dX_s + \int_0^t v^2 ds$$

اکنون dX_s را محاسبه می‌کنیم. داریم

$$dX_s = uds + vdW_s = 0 + dW_s$$

و X_s یک مارتینگل است پس

$$X_t^2 = \underbrace{X_0^2 + \int_0^t 2X_s v dW_s}_{Z_t=\text{مارتینگل}} + \underbrace{\int_0^t v^2 ds}_{B_t\text{فرایند افزایشی صعودی}}$$

[5] Doob L^2-martingale representation theorem

[6] Levey martingle chareterization

اکنون از محاسبات بالا نتیجه می‌گیریم $d(X_t^۲) = dZ_t + B^۲dt$ و به همین ترتیب از فرضیه منحصر به فردی تجزیه دوب-میر پیروی می‌کند. قرار می‌دهیم $f(t,x) = e^{i\theta x}$ داریم

$$\partial_t f = ۰, \quad \partial_x f = i\theta e^{i\theta x}, \quad \partial_{xx} f = -\theta^۲ e^{i\theta x}$$

طبق فرمول ایتو $f(t, X_t)$ داریم $dX = BdW$،

$$d(e^{i\theta X_t}) = -\frac{۱}{۲}\theta^۲ e^{i\theta X_t} \underbrace{dX_t dX_t}_{B^۲dt=dt} + i\theta e^{i\theta X_t} \underbrace{dX_t}_{BdW}$$

بنابراین

$$e^{i\theta X_t} - e^{i\theta X_s} = -\frac{۱}{۲}\theta^۲ \int_s^t e^{i\theta X_u} du + i\theta \int_s^t e^{i\theta X_u} BdW_u$$

آنگاه

$$e^{i\theta(X_t - X_s)} - ۱ = -\frac{۱}{۲}\theta^۲ \int_s^t e^{i\theta(X_u - X_s)} du + i\theta \int_s^t e^{i\theta(X_u - X_s)} BdW_s \qquad (۴.۳)$$

قرار می‌دهیم $Y_t = \int_۰^t e^{i\theta X_u} BdW_u$ پس Y_t یک مارتینگل است. حال معادله دوم سمت راست رابطه ۴.۳ برابر است با

$$i\theta e^{-i\theta X_s}(Y_t - Y_s).$$

در نتیجه از رابطه ۴.۳ امید شرطی با شرط $\mathcal{F}_s$ می‌گیریم آنگاه

$$E(e^{i\theta(X_t - X_s)}|\mathcal{F}_s) - ۱ = -\frac{۱}{۲}\theta^۲ \int_s^t E(e^{i\theta(X_u - X_s)}|\mathcal{F}_s) du$$

قرار می‌دهیم $\varphi(t) = E(e^{i\theta(X_t - X_s)}|\mathcal{F}_s)$. برای هر $t \geq s$ داریم

$$\begin{aligned}
\varphi(t) - ۱ &= \frac{۱}{۲}\theta^۲ \int_s^t \varphi(u) du \\
&\Longrightarrow \varphi'(t) = -\frac{۱}{۲}\theta^۲ \varphi(t), \quad \varphi(s) = ۱ \\
\varphi(t) &= Ce^{-(t-s)\dfrac{\theta^۲}{۲}}.
\end{aligned}$$

حال بنابر گزاره ۱۱.۳ اگر رابطه بالا را داشته باشیم می‌توانیم نتیجه بگیریم که X دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $(t-s)$ است که این خواص، فرایند براونی را نتیجه می‌دهد بنابراین به نتیجه مطلوب رسیدیم. □

مقایسه فرایند برآونی با فرایند G-برآونی

بنابر گزاره۱۱.۳ می‌توان گفت $\{B_t\}$ فرایند براونی است اگرو فقط اگر $\{B_t\}$ یک دنباله مارتینگل با فیلتر $\mathcal{F}_t$ باشد، و به همین ترتیب $\{B_t^۲ - t\}$ ، F_t مارتینگل است.
در مقابل، بیان قضیه مشخصه مارتینگل لوی برای فرایند G-براونی بسیار پیچیده است .

و دلیل این موضوع به شرح زیر است؛ در فضای احتمال P،براکت $\langle B\rangle_t$ فرایند براونی،طبق مثال ۶.۳، برابر t است. اما در مقابل بنابر انچه درتغییرات درجه دوم فرایند G- براونی بیان شد نه یک تابع ثابت بلکه بیشتر هم هست.

فصل ۴

بیان قضیه اصلی و اثبات آن

قضیه ۱.۴. *$M \in S^{۲}$ یک فرایند G-براونی با پارامتر$\sigma_{۰}$ تحت $\mathbb{E}[.]$ است اگر دارای مشخصات زیر باشد*

۱. *M یک G-مارتینگل متقارن تحت $\mathbb{E}[.]$ باشد،*

۲. *$M_t^{۲} - t$ یک G-مارتینگل باشد،*

۳. *برای هر $۰ \leq t$، $\mathbb{E}[-M_t^{۲}] = -\sigma_{۰}^{۲}\mathbb{E}[M_t^{۲}]$،*

۴. *M یک فرایند مارکف تحت $\mathbb{E}[.]$ باشد،*

۵. *برای هر $۰ \leq s \leq t$، $\mathbb{E}[| M_t - M_s |^{۳}] = o(t-s)$.*

اثبات قضیه ۱.۴

هدف در این بخش، اثبات گام به گام قضیه‌ی بالا است.برای این منظور ابتدا لم زیر را بیان می‌کنیم.

لم ۲.۴. *برای هر $p \geq ۱$ و $X, Y \in L_G^P(\mathcal{F}_T)$ و$T \geq t$ رابطه زیر برقرار است.*

$$\mathbb{E}[|\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t]|^p] \leq \mathbb{E}[|X-Y|^p].$$

برهان. می‌دانیم برای یک تابع محدب$|x|^p$؛

$$p|x|^{p-۱}(y-x) + |x|^p \leq |y|^p,$$

وسپس با جایگذاری $x \Rightarrow \mathbb{E}[|X-Y||\mathcal{F}_t]$ و $y \Rightarrow |X-Y|$ داریم.

$$p(\mathbb{E}[|X-Y||\mathcal{F}_t])^{p-۱}(|X-Y| - \mathbb{E}[|X-Y||\mathcal{F}_t]) + (\mathbb{E}[|X-Y||\mathcal{F}_t])^p \leq |X-Y|^p$$

حال از دو طرف معادله G-امید شرطی $\mathcal{F}_t$می‌گیریم.

$$(\mathbb{E}[|X-Y||\mathcal{F}_t])^p \leq \mathbb{E}[|X-Y|^p|\mathcal{F}_t].$$

می‌دانیم در L_G^p؛
$$|\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t]| \leq \mathbb{E}[|X-Y||F_t]$$
حال با کمک خواص G-امید در L_G^1 داریم

$$|\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}_t]|^p \leq (\mathbb{E}[|X-Y||\mathcal{F}_t])^p.$$

□

قضیه ۱.۴ را در ۵ گام اثبات می‌کنیم

برهان. **گام ۱** برای هر $\eta \in M_G^2(0,T)$، انتگرال تصادفی ایتو را با نماد $\int_0^T \eta dM_t$ تعریف می‌کنیم وثابت می‌کنیم $\int_0^T \eta dM_s$ یک مارتینگل متقارن تحت امید غیرخطی $\mathbb{E}[.]$ است.

انتگرال G-ایتو

تعریف ۳.۴. برای هر $\eta \in M_G^{2,0}(0,T)$ در بخش ۴.۲ انتگرال باکنر را تعریف کردیم. داریم
$$\eta_t(\omega) = \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j(\omega) I_{[t_j,t_{j+1})}(t),$$
اکنون انتگرال G-ایتو را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.
$$\mathcal{I}(\eta) = \int_0^T \eta_s dM_s(\omega) := \sum_{j=0}^{N-1} \xi_j(\omega)(M_{t_{j+1}} - M_{t_j}).$$
اکنون به بیان برخی ویژگی‌های اصلی انتگرال ایتو می‌پردازیم.

لم ۴.۴. *فرض کنید* $\eta, \theta \in M_G^2(0,T)$ *و* $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$. *در این صورت در فضای* $L_G^1(\mathcal{F}_T)$ *خواهیم داشت*

۱. $\int_s^t \eta_u dB_u = \int_s^r \eta_u dB_u + \int_r^t \eta_u dB_u$.

۲. *اگر* $\alpha \in L_G^1(\mathcal{F}_s)$ *کراندار باشد، آن‌گاه* $\int_s^t (\alpha\eta_u + \theta_u) dB_u = \alpha \int_s^t \eta_u dB_u + \int_s^t \theta_u dB_u$.

۳. *برای هر* $X \in L_G^1(\mathcal{F}_s)$ ،
$$\mathbb{E}\left[X + \int_r^T \eta_u dB_u | \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}[X]$$

برهان. به [۱۲] رجوع کنید. □

حال در ادامه ثابت می‌کنیم $\int_0^t \eta dM_s$ مارتینگل متقارن تحت امید غیرخطی $\mathbb{E}[.]$ است.
بنابر شرط ۱ و ۲ از قضیه ۱.۴ داریم
$$\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2|\mathcal{F}] = \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[M_t^2 - t|\mathcal{F}_s] + t - M_s^2 = t - s.$$

لم ۵.۴. *نگاشت* $\mathcal{I}(\eta):M_G^{۲,\circ}(\circ,T)\to L_G^{۲}(\mathcal{F}_T)$ *نگاشت پیوسته است. آنگاه* $\mathcal{I}(\eta)$ *به طور پیوسته به فضای باناخ* $M_G^{۲}(\circ,T)\to L_G^{۲}(\mathcal{F}_T)$ *گسترش می‌یابد. در حقیقت*

$$\mathbb{E}\left[\int_\circ^T \eta(s)dM_s\right]=\circ$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_\circ^T \eta(s)dM_s\right)^{۲}\right]=\int_\circ^T \mathbb{E}[(\eta(t))^{۲}]dt.$$

برهان. به [۱۲]رجوع کنید □

قرار می‌دهیم $\int_\circ^t \eta dM_s=\int_\circ^T \eta\mathcal{I}_{[\circ,t]}(s)dM_s$. در ادامه نشان می‌دهیم $\int_\circ^t \eta dM_s$ مارتینگل متقارن است. در حقیقت، اگر

$$\eta.(\omega)=\sum_{j=\circ}^{N-۱}\xi_j(\omega)\mathcal{I}_{[t_j,t_{j+۱})}(.)\in M_G^{۲,\circ}(\circ,T),$$

آنگاه

$$\int_\circ^t \eta_\nu dM_\nu=\sum_{j=\circ}^{N-۱}\xi_j(\omega)(M_{t_{j+۱}\wedge t}-M_{t_j\wedge t}).$$

برای هر $s\le t$ فرض می‌کنیم $t_i\le s<t_{i+۱}<t,$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_\circ^T \eta_\nu dM_\nu|\mathcal{F}_s\right]&=\sum_{j=\circ}^{i-۱}\xi_{tj}(M_{t_{j+۱}}-M_{tj})+\xi_{ti}(M_s-M_{ti})\\&=\sum_{j=\circ}^{N-۱}\xi_{tj}(M_{t_{j+۱}\wedge s}-M_{tj\wedge s})=\int_\circ^s \eta_\nu dM_\nu.\end{aligned}$$

بنابراین $\int_\circ^t \eta_s dM_s$ $\mathcal{F}_t$مارتینگل است. و بعلاوه با خاصیت متقارن بودن M می‌توان نتیجه گرفت که عبارت$\int_\circ^t \eta_s dM_s$ مارتینگل متقارن است.
اگر $\eta\in M_G^{۲}(\circ,T)$، ازطرفی می‌دانیم $M_G^{۲}(\circ,T)$ تکمیل شده، $M_G^{۲,\circ}(\circ,T)$ است.
آنگاه اگر $\eta^N\in M_G^{۲,\circ}(\circ,T)$ ، $N=۱,۲,\ldots$، سپس $\eta^N\to\eta$ که $N\to\infty$. و با توجه به پیوستگی $\mathcal{I}(\eta)$ می‌توان گفت $\mathcal{I}(\eta^N)\to\mathcal{I}(\eta)$.

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\int_\circ^t \eta_\nu dM_\nu|\mathcal{F}_s\right]-\int_\circ^s \eta_\nu dM_\nu\\&=\mathbb{E}\left[\int_\circ^t \eta_\nu dM_\nu-\int_\circ^t \eta_\nu^N dM_\nu+\int_\circ^t \eta_\nu^N dM_\nu|\mathcal{F}_s\right]+\int_\circ^s \eta_\nu dM_\nu\\&=\mathbb{E}\left[\int_\circ^t (\eta_\nu-\eta_\nu^N)dM_\nu|\mathcal{F}_s\right]+\int_\circ^s (\eta_\nu-\eta_\nu^N)dM_\nu.\end{aligned}$$

سپس طبق لم۲.۴ زمانیکه $N \to \infty$ داریم

$$\left(\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\int_{0}^{t} \eta dM_\nu | \mathcal{F}_s\right] - \int_{0}^{s} \eta dM_\nu\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \left(\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\int_{0}^{t} (\eta - \eta^N) dM_\nu | \mathcal{F}_s\right]\right]^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\mathbb{E}\left[\int_{0}^{s} (\eta - \eta^N) dM_\nu\right]^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \left(\mathbb{E}\left[\int_{0}^{t} (\eta - \eta^N) dM_\nu\right]^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\mathbb{E}\left[\int_{0}^{s} (\eta - \eta_\nu^N) dM_\nu\right]^2\right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0.$$

از این رو $\mathbb{E}[\int_0^t \eta dM_\nu | \mathcal{F}_s] = \int_0^s \eta dM_\nu$، بنابراین $\int_0^t \eta dM_\nu$ مارتینگل است. به همین ترتیب می‌توان اثبات کرد که $\int_0^t \eta_\nu dM_\nu$ متقارن است.

گام۲؛ آنچه در بخش ۲.۲.۳ ،در مورد فرایند تغییرات درجه دوم G-برآونی تعریف کردیم را می‌توان برای $\langle M\rangle_t \in M_G^1(0,\overline{T)}$ به کار گرفت.

برای هر $t > 0$قرار می‌دهیم

$$0 = t_0^N < t_1^N < \cdots < t_N^N = t, t_{j+1}^N - t_j^N = \frac{T}{N},$$

$$M_t^2 = \sum_{j=0}^{N-1} \left(M^2_{t_{j+1}^N \wedge t} - M^2_{t_j^N \wedge t}\right)$$
$$= \sum_{j=0}^{N-1} 2M_{t_j^N}\left(M_{t_{j+1}^N \wedge t} - M_{t_j^N \wedge t}\right) + \sum_{j=0}^{N-1}\left(M_{t_{j+1}^N \wedge t} - M_{t_j^N \wedge t}\right)^2.$$

از این رو $\sum_{j=0}^{N-1} M_{t_j^N} \mathcal{I}_{[t_j t_{j+1})}(.) \to M.$ زمانیکه $N \to \infty$، داریم

$$2\sum_{j=0}^{N-1} M_{t_j^N}\left(M_{t_{j+1}^N \wedge t} - M_{t_j^N \wedge t}\right) \to 2\int_0^t M_s dM_s.$$

و تغییرات درجه دوم M_t بدین معناست که

$$\langle M\rangle_t = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N-1}\left(M_{t_{j+1}^N \wedge t} - M_{t_j^N \wedge t}\right)^2 = M_t^2 - 2\int_0^t M_s dM_s. \tag{۱.۴}$$

لم ۶.۴. *برای هر $s \geq 0$ ثابت، $(\langle M\rangle_{t+s} - \langle M\rangle_s)_{t\geq 0}$ از $\mathcal{F}_s$ مستقل است. این فرآیند، فرآیند با تغییرات مرتبه دوم تولید شده به وسیله حرکت برآونی $M_t = M_{s+t} - M_s$ است که $t \geq 0$، یعنی $\langle M\rangle_{t+s} - \langle M\rangle_s = \langle M\rangle_t$. داریم*

$$\mathbb{E}[\langle M\rangle_t^2] = t^2, \tag{۲.۴}$$

همچنین

$$\mathbb{E}[\langle M\rangle_t^{۳}] = t^{۳}, \qquad (۳.۴)$$
$$\mathbb{E}[\langle M\rangle_t^{۴}] = t^{۴}.$$

برهان. به [۱۲] رجوع کنید. $\square$

لم ۷.۴. *برای هر* $۰ \leq s \leq t < \infty$ *داریم*

$$\mathbb{E}[\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s|\mathcal{F}_s] = t - s$$

$$\mathbb{E}[-(\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s)|\mathcal{F}_s] = -\sigma_{۰}^{۲}(t - s)$$

برهان. به [۱۲] رجوع کنید. $\square$

حال با استفاده از شرط۲ از قضیه ۱.۴ داریم $\langle M\rangle_t - t = M_t^{۲} - t - ۲\int_{۰}^{t} M_s dM_s$ ، G-مارتینگل است و بنابر لم ۷.۴ داریم

$$\mathbb{E}[-\langle M\rangle_t] = -\sigma_{۰}^{۲} t.$$

ما برای هر $\eta \in M_G^{۱,۰}(۰, T), \eta_t(\omega) = \sum_{j=۰}^{N-۱} \xi_j(\omega)\mathcal{I}_{[t_j t_{j+۱})}(t)$ تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{I}^{۱}(\eta) = \sum_{j=۰}^{N-۱} \xi_j(\omega)(\langle M\rangle_{t_{j+۱}^N} - \langle M\rangle_{t_j^N}).$$

بنابرآنچه در گام اول مطرح کردیم $\mathcal{I}^{۱}(\eta)$ نگاشت خطی و پیوسته از $M_G^{۱,۰}$ به $L_G^{۱}(\mathcal{F}_T)$. است. و همچنین $\mathcal{I}^{۱}(\eta)$ به طور پیوسته به فضای باناخ $M_G^{۱}(۰, T)$ گسترش می‌یابد.

گزاره ۸.۴. *فرض کنید* $۰ \leq s \leq t$ ، $\xi \in L_G^{۱}(\mathcal{F}_s)$ *و* $X \in L_G^{۱}(\mathcal{F})$. *در این صورت*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X + \xi(M_t^{۲} - M_s^{۲})] &= \mathbb{E}[X + \xi(M_t - M_s)^{۲}] \\ &= \mathbb{E}[X + \xi(\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s)].\end{aligned}$$

برهان. با توجه به رابطه۱.۴ و گزاره ۹.۲، داریم

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X + \xi(M_t^{۲} - M_s^{۲})] &= \mathbb{E}\left[X + \xi\left(\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s + ۲\int_s^t M_u dM_u\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X + \xi\left(\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s\right)\right] + ۲\mathbb{E}\left[\xi\left(\int_s^t M_u dM_u\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X + \xi\left(\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s\right)\right].\end{aligned}$$

به طریقی مشابه می‌توان نشان داد که

$$\mathbb{E}[۲\xi(M_t - M_s)M_s] = \mathbb{E}[-۲\xi(M_t - M_s)M_s] = ۰.$$

بنابراین با توجه به گزاره ۹.۲ داریم

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X+\xi(M_t^2-M_s^2)] &= \mathbb{E}\left[X+\xi\left((M_t-M_s+M_s)^2-M_s^2\right)\right]\\ &= \mathbb{E}\left[X+\xi\left((M_t-M_s)^2+2(M_t-M_s)M_s\right)\right]\\ &= \mathbb{E}\left[X+\xi\left(M_t-M_s\right)^2\right]+2\mathbb{E}[\xi(M_t-M_s)M_s]\\ &= \mathbb{E}\left[X+\xi\left(M_t-M_s\right)^2\right].\end{aligned}$$

□

لم ایزومتری

لم ۹.۴. *برای هر* $\eta\in M_G^2(0,T)$ *داریم*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T\eta(s)dM_s\right)^2\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^T\eta^2(s)d\langle M\rangle_s\right]\leq\int_0^T\mathbb{E}[\eta^2(s)]ds. \qquad (4.4)$$

برهان. فرض کنید $\eta\in M_G^{2,0}(0,T)$ به صورت زیر باشد

$$\eta_t(\omega)=\sum_{j=0}^{N-1}\xi_j(\omega)I_{[t_j,t_{j+1})}(t).$$

در این صورت $\int_0^T\eta(s)dM_s:=\sum_{j=0}^{N-1}\xi_j(M_{t_{j+1}}-M_{t_j})$. با توجه به گزاره ۹.۲ برای هر $i\neq j$ و $X\in L_G^1(\mathcal{F})$ داریم

$$\mathbb{E}[X+2\xi_j(M_{t_{j+1}}-M_{t_j})\xi_i(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})]=\mathbb{E}[X].$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T\eta(s)dM_s\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=0}^{N-1}\xi_j(M_{t_{j+1}}-M_{t_j})\right)^2\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{N-1}\xi_j^2(M_{t_{j+1}}-M_{t_j})^2\right].\end{aligned}$$

این رابطه به همراه گزاره ۸.۴ نتیجه می‌دهد.

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T\eta(s)dM_s\right)^2\right]=\mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{N-1}\xi_j^2(\langle M\rangle_{t_{j+1}}-\langle M\rangle_{t_j})\right]=\mathbb{E}[\eta^2(s)]ds.$$

□

فرمول ایتو برای حرکت G- براونی

اکنون به بیان فرمول ایتو[۱] از $\Phi(X_t)$ می‌پردازیم که X یک فرآیند G- ایتو می‌باشد.

لم ۱۰.۴. *فرض کنید $\Phi \in C^{۲}(\mathbb{R}^n)$ تابعی کراندار با مشتقات کراندار باشد و $\{\partial^{۲}_{x^\mu x^\nu}\Phi\}_{\mu,\nu=۱}^n$ توابعی به طور یکنواخت لیپشیتس باشند. فرض کنید $s \in [۰, T]$ ثابت باشد و فرض کنید $X_t = (X_t^{۱}, \cdots, X_t^n)^T$ یک فرآیند n- بعدی روی $[s, T]$ به شکل زیر باشد*

$$X_t^\nu = X_s^\nu + \alpha^\nu(t-s) + \eta^\nu\left(\langle B\rangle_t - \langle B\rangle_s\right) + \beta^\nu(B_t - B_s),$$

که برای $\nu = ۱, \cdots, n$، α^ν، η^ν و β^ν عناصری کراندار از $L_G^{۲}(\mathcal{F}_s)$ هستند و $X_s = (X_s^{۱}, \cdots, X_s^n)^T$ یک $\mathbb{R}^n$- بردار داده شده در فضای $L_G^{۲}(\mathcal{F}_s)$ است. داریم

$$\begin{aligned}\Phi(X_t) - \Phi(X_s) = &\int_s^t \partial_{x^\nu}\Phi(X_u)\beta^\nu dB_u + \int_s^t \partial_{x^\nu}\Phi(X_u)\alpha^\nu du \\ &+ \int_s^t \left[D_{x^\nu}\Phi(X_u)\eta^\nu + \frac{۱}{۲}\partial^{۲}_{x^\mu x^\nu}\Phi(X_u)\beta^\mu\beta^\nu\right] d\langle B\rangle_u.\end{aligned} \tag{۵.۴}$$

گام ۳؛ *برای هر $\varphi \in C_b^{۳}(\mathbb{R})$ ، مجموعه ای از تمام توابع حقیقی کراندار با مشتقات بالا تا مرتبه سوم که در $C_b(\mathbb{R})$ موجود است آنگاه داریم*

$$\varphi(M_t) - \varphi(M_s) = \int_s^t \frac{۱}{۲}\varphi_{xx}(M_v)d\langle M_\nu\rangle + \int_s^t \varphi_x(M_v)dM_v, \quad ۰ < s \leq t < \infty.$$

برهان. برای هر $N > ۰$

$$\pi_{s,t}^N = \{s, s+\delta_N, \ldots, s+N\delta_N = t\}, \quad \delta_N = \frac{t-s}{N},$$

به کمک تعریف فرمول ایتو برای فرایند G-براونی و با استفاده از سری تیلور[۲] برای توابع چند متغیره داریم

$$\begin{aligned}\varphi(M_t) - \varphi(M_s) = \sum_{j=۰}^{N-۱} &\left[\varphi_x(M_{t_j^N})(M_{t_{j+۱}^N} - M_{t_j^N}) + \frac{۱}{۲}\varphi_{xx}(M_{t_j^N})(M_{t_{j+۱}^N} - M_{t_j^N})^{۲}\right. \\ &\left.+\frac{۱}{۲}\left(\varphi_{xx}\left(M_{t_j^N} + \theta_j(\omega)(M_{t_{j+۱}^N} - M_{t_j^N})\right) - \varphi_{xx}(M_{t_j^N})\right)(M_{t_{j+۱}^N} - M_{t_j^N})^{۲}\right],\end{aligned}$$

و$\theta_j(\omega) \in (۰, ۱)$ حال در$L_G^{۱}(F_t)$ داریم

$$Y^N = \sum_{j=۰}^{N-۱}(\varphi_{xx}(M_{t_j^N} + \theta_j(\omega)(M_{t_{j+۱}^N} - M_{t_j^N})) - \varphi_{xx}(M_{t_j^N}))(M_{t_{j+۱}^N} - M_{t_j^N})^{۲} \to ۰$$

[۱] Ito's Formula

[۲] Taylor series

چون با توجه به مثال ۸.۲ و لم ۶.۴ و با بهره بردن از شرط۵ در قضیه ۱.۴ و ثابت C،

$$\mathbb{E}[|\varphi_{xx}(M_{t_j^N}+\theta_j(\omega)(M_{t_{j+1}^N}-M_{t_j^N}))-\varphi_{xx}(M_{t_j^N})|]$$
$$\leq C\mathbb{E}[|(M_{t_{j+1}^N}-M_{t_j^N})|^3]\leq C[\delta^3+\delta^{\frac{3}{2}}]\leq C_0(\delta_N).$$

سپس $Y^N\to 0$ در $L_G^1(F_t)$.

حال برای هر $\varphi\in C_b^3(R)$، دنباله های لیبشیتز φ_x و φ_{xx} موجود هستند.

$$\mathbb{E}\left[\left|\varphi_x(M_v)-\sum_{j=0}^{N-1}\varphi_x(M_{t_j^N})\mathcal{I}_{[t_j^N,t_{j+1}^N)}(v)\right|^2\right]$$
$$=\mathbb{E}[|\varphi_x(M_v)-\varphi_x(M_{t_j^N}|^2]$$
$$\leq C^2\mathbb{E}[|(M_{t_{j+1}^N}-M_{t_j^N})|^2]\leq C[\delta+\delta^2]$$
$$\leq C_0(\delta_N)\leq C\delta^N\to 0.$$

با توجه به اینکه

$$\sum_{j=0}^{N-1}\varphi_x(M_{t_j^N})\mathcal{I}_{[t_j^N,t_{j+1}^N)}(.)\to\varphi_x(M_.).$$

و به طور مشابه

$$\sum_{j=0}^{N-1}\varphi_{xx}(M_{t_j^N})\mathcal{I}_{[t_j^N,t_{j+1}^N)}(.)\to\varphi_{xx}(M_.).$$

حال بنابر لم۹.۴ رابطه زیر را به دست می‌آید.

$$\mathbb{E}\left[\left|\sum_{j=0}^{N-1}\varphi_{xx}(M_{t_j^N})(M_{t_{j+1}^N}-M_{t_j^N})^2-\sum_{j=0}^{N-1}\varphi_{xx}(M_{t_j^N})(\langle M\rangle_{t_{j+1}^N}-\langle M\rangle_{t_j^N})\right|^2\right]$$
$$\leq 2C^2\sum_{j=0}^{N-1}\mathbb{E}\left[|(M_{t_{j+1}^N}-M_{t_j^N})^2-(\langle M\rangle_{t_{j+1}^N}-\langle M\rangle_{t_j^N})|^2\right]$$
$$=2C^2\sum_{j=0}^{N-1}\mathbb{E}\left[\left|\int_{t_j}^{t_{j+1}}(M_s-M_{t_j})dM_s\right|^2\right]$$
$$\leq 2C^2\sum_{j=0}^{N-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\mathbb{E}[(M_s-M_{t_j})^2]ds$$
$$=C^2\sum_{j=0}^{N-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}(s-t_j)ds$$
$$=C^2\delta_N\to 0.$$

به واسطه دنباله ای از $\mathcal{I}(\eta)$ و $\mathcal{I}^{۱}(\eta)$ روابط زیر به ترتیب در $L_G^{۱}(\mathcal{F}_t)$ و $L_G^{۲}(\mathcal{F}_t)$حاصل می‌شود.

$$\sum_{j=۰}^{N-۱} \varphi_{xx}(M_{t_j^N})(M_{t_{j+۱}^N} - M_{t_j^N})^{۲} \to \int_s^t \varphi_{xx}(M_v) d\langle M\rangle_v$$

و

$$\sum_{j=۰}^{N-۱} \varphi_{x}(M_{t_j^N})(M_{t_{j+۱}^N} - M_{t_j^N}) \to \int_s^t \varphi_{x}(M_v) dM_v$$

حال برای هر $\varphi \in C_b^{۳}(R)$ نتیجه مطلوب حاصل شد

$$\varphi(M_t) - \varphi(M_s) = \int_s^t \frac{۱}{۲}\varphi_{xx}(M_v) d\langle M_v\rangle + \int_s^t \varphi_x(M_v) dM_v \quad ۰ < s \leq t < \infty.$$

□

گام۴

برای هر $f \in lip(\mathbb{R})$ تعریف می‌کنیم.

$$u(t,x) = \mathbb{E}[f(M_t^{۰,x})], \quad M_t^{۰,x} = x + M_t$$

آنگاه$u(t,x)$ که حل معادله گرماست (رابطه ۸.۲) بدست می‌آید.

برهان.

$$|u(t,x_۱) - u(t,x_۲)| \leq \mathbb{E}[|f(M_t^{۰,x_۱}) - f(M_t^{۰,x_۲})|] \leq C\mathbb{E}[|M_t^{۰,x_۱} - M_t^{۰,x_۲}|] = C|x_۱ - x_۲|$$

و

$$|u(t_۱,x) - u(t_۲,x)| \leq C\mathbb{E}[|M_{t_۱}^{۰,x} - M_{t_۲}^{۰,x}|] \leq C\sqrt{\mathbb{E}[|M_{t_۱}^{۰,x} - M_{t_۲}^{۰,x}|^{۲}]} = C(t_۱ - t_۲)^{\frac{۱}{۲}}.$$

C ثابت لیبشیتز تابع f است.

تابع $u(t,x)$ پیوسته لیبشیتز نسبت به x و $\frac{۱}{۲}$-پیوسته هولدر نسبت به t است.

در ادامه نشان می‌دهیم که $u(t,x)$ بهترین حل (منحصربه فرد) معادله گرما در رابطه ۸.۲ است.

برای هر $\varphi \in C_b^{۳}([۰,T] \times \mathbb{R})$ قرار می‌دهیم $u(t,x) = \varphi(t,x)$ و

$$(s,y) \neq (t,x), \quad u(s,y) > \varphi(s,y)$$

و با احتمال مارکف M داریم

$$\varphi(t,x) = u(t,x) = \mathbb{E}[u(t-r, M_r)] > \mathbb{E}[\varphi(t-r, M_r)].$$

حال برای گام ۳ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\varphi(t-r, M_r) - \varphi(t, M_r) + \varphi(t, M_r) - \varphi(t, x)] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[-\int_{t-r}^{t} \varphi_s(s, M_r) ds + \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{r} \varphi_{xx}(s, M_s) d\langle M\rangle_s\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[\int_{t-r}^{t} (\varphi_s(t,x) - \varphi_s(s, M_r) ds + \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{r} (\varphi_{xx}(s, M_s)) - \varphi_{xx}(t,x) d\langle M\rangle_s\right. \\
&\quad \left. + \frac{۱}{۲}\varphi_{xx}(t,x)\langle M\rangle_r - \varphi_s(t,x) r\right] \\
&\quad \leq G(\varphi_{xx}(t,x)) r - \varphi_s(t,x) r + \mathbb{E}\left[\int_{t-r}^{t} |\varphi_s(t,x) - \varphi_s(s, M_r)| ds\right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{r} |\varphi_{xx}(s, M_s) - \varphi_{xx}(t,x)| d\langle M\rangle_s\right].
\end{aligned}$$

بدون از دست دادن کلیت فرض کنیم که φ_x وφ_{xx} ثابت های لیبشیتز همانند C هستند.آنگاه

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{r} |\varphi_{xx}(s, M_s) - \varphi_{xx}(t,x)| d < M >_s\right] \leq C\mathbb{E}\left[\int_{۰}^{r} |M_s^{۰,x}| ds\right] = \frac{C}{۳} r^{\frac{۳}{۲}} \\
&\mathbb{E}\left[\int_{t-r}^{s} |\varphi_s(t,s) - \varphi_s(s, M_r)| ds\right] \\
&\quad \leq C\int_{t-r}^{t} (|t-s| + \mathbb{E}[|M_r^{۰,x} - x|]) ds \leq C r^{۲} + C\sqrt{r} r.
\end{aligned}$$

بنابراین ما یافتیم

$$\mathbb{E}[\varphi(t-r, M_r) - \varphi(t,x)] \leq G(\varphi_{xx}(t,x)) r - \varphi_s(t,x) r + \frac{۱}{۳} r^{\frac{۳}{۲}} + (r + \sqrt{r}) C r.$$

در عین حال داریم.

$$\mathbb{E}[\varphi(t-r, M_r) - \varphi(t,x)] \geq G(\varphi_{xx}(t,x)) r - \varphi_s(t,x) r - \frac{۱}{۳} r^{\frac{۳}{۲}} - (r + \sqrt{r}) C r.$$

از این بدست آوردیم

$$\lim_{r \to ۰} \frac{۱}{r}\mathbb{E}[\varphi(t-r, M_r) - \varphi(t,x)] = G(\varphi_{xx}(t,x)) - \varphi_s(t,x) \leq ۰.$$

در نتیجه $u(t,x)$ بهترین حل برای معادله گرما در رابطه ۸.۲ بود.
گام ۵ توزیع متناهیM را می‌توان تحت شرط ۲ از تعریف ۳.۳ (تعریف فرآیند G-براونی) بدست اورد.

چون M فرایند مارکف تحت امید غیرخطی $\mathbb{E}[.]$ است، پس برای هر $t \leq T$ داریم،

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varphi(M_T - M_t)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(M_T^{\circ,x} - M_t^{\circ,x})|\mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(M_T^{\circ,x} - y)|\mathcal{F}_t]_{y=M_t^{\circ,x}}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(M_{T-t}^{\circ,x} - y)|\mathcal{F}_t]_{y=M_t^{\circ,x},x=M_t^{\circ,x}}] = \mathbb{E}[\varphi(M_{T-t})].\end{aligned}$$

اکنون ما می‌توانیم توزیع متناهیM را می‌توان تحت شرط ۲ از تعریف ۳.۳ راچک کرد. بدون از دست دادن کلیت، ما فقط زمانیکه $m = ۲$ ثابت می‌کنیم

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varphi(M_{t_۱}, M_{t_۲} - M_{t_۱})] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(x, M_{t_۲} - M_{t_۱})|\mathcal{F}_{t_۱}]_{x=M_{t_۱}}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(x, M_{t_۲-t_۱})]_{x=M_{t_۱}}].\end{aligned}$$

$\square$

در نتیجه براساس گام ۵ – ۱ قضیه ۱.۴ ثابت شد. $\square$

فصل ۵

نمایش انتگرال G-مارتینگل متقارن

مقدمه

قضیه نمایش مارتینگل یک قضیه اساسی در آنالیز تصادفی است. همچنین نقش مهمی در ریاضی مالی ایفا می‌کند. در این فصل،ما سعی داریم که قضیه نمایش G-مارتینگل متقارن را بسازیم.

قضیه ۱.۵. *فرض کنید $M \in S^{۲}$ یک G-مارتینگل متقارن تحت G -امیدغیرخطی $\mathbb{E}[.]$ باشد و $M_t^{۲} - \mathbb{E}[M_t^{۲}]$ نسبت به فیلتر $\mathcal{F}_t$ مارتینگل است. حال ما تعریف می‌کنیم $\mathbb{E}[M_t^{۲}] = \int_{\circ}^{t} H^{۲}(s)ds$ که $H(s)$ تابعی پیوسته و کراندار از $\mathbb{R}$ است.*
آنگاه G-مارتینگل متقارنی مانند $W_t \in S^{۲}$ چنان موجود است که $W^{۲}(t) - t$ ، G-مارتینگل تحت G -امیدغیرخطی $\mathbb{E}[.]$ است و

$$M_t = \int_{\circ}^{t} H(s)dW_s.$$

برای بیان برهان قضیه، از تذکر زیر بهره می‌بریم

تذکر ۲.۵. *در برهان قضیه ۱.۴ ثابت کردیم که برای هر G-مارتینگل متقارن چون $W \in S^{۲}$ رابطه $W^{۲}(t) - \mathbb{E}[W^{۲}(t)]$، G-مارتینگل است. حال از آنجا که $\mathbb{E}[W^{۲}(t)] = \int_{\circ}^{t} U^{۲}(s)ds$ ، و $U(s)$ تابع پیوسته و کراندار از $\mathbb{R}$ است. حال می‌توان حساب دیفرانسیل و انتگرال تصادفی ایتو رابرای $W \in M_G^{۲}(\circ, T)$ تعریف کرد. بنابراین انتگرال تصادفی در قضیه ۱.۵ معنی‌دار است. همچنین می‌توانیم ثابت کنیم که برای هر $\eta \in M_G^{۲}(\circ, T)$ رابطه $\int_{\circ}^{t} \eta dW_s$ یک G-مارتینگل متقارن است و فرایند درجه دوم M موجود و فرمول ایزومتری برقرار است.*

برهان. قرار دهید μ را اندازه لبگ روی $\mathbb{R}$. برای

$$\mathbb{E}[M_t^{۲}] = \int_{\circ}^{t} H^{۲}(s)ds, \quad H(s) \neq \circ \quad a.e.$$

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N>0, n>N \Rightarrow \mu\left(|H(s)|<\frac{1}{n}, \quad s\in R\right)<\varepsilon.$$

$$H^n(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{H(t)}, & if \left|\dfrac{1}{H(t)}\right|\le n\\ 0, & o.w\end{cases}$$

قرار می‌دهیم $W_t^n=\int_0^t H^n(s)dM_s$ در صورتی که W_t^n، G-مارتینگل متقارن است.
تعریف می‌کنیم. $M_t^n=\int_0^t H(s)dW_t^n=\int_0^t \mathcal{I}_{\{|H(s)|\ge\frac{1}{n}\}}dM_s$.
از این رو عبارت زیر را اثبات می‌کنیم،

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t h(s)dM_s\right)^2\right]=\int_0^t h^2(s)H^2(s)ds, \qquad \forall h(s)\in M_G^2(0,T)$$

اگر $h(s)\in M_G^{2,0}(0,T), h(.)=\sum_{j=0}^{N-1}c_jI_{[t_j,t_{j+1})}(.)$ پس

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t h(s)dM_s\right)^2\right]=&\mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{N-1}c_j^2(\langle M\rangle_{t_{j+1}}-\langle M\rangle_{t_j})\right]\\ =&\sum_{j=0}^{N-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}c_j^2H^2(s,\omega)ds\\ =&\int_0^t h^2(s)H^2(s)ds.\end{aligned}$$

اگر $h(s)\in M_G^2(0,T)$ سپس $h^n(s)\in M_G^{2,0}(0,T)$ وجود دارد با فرض اینکه
$$\int_0^t(h^n(s)-h(s))^2ds\to 0$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t h(s)dM_s\right)^2\right]=&\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t(h(s)-h^n(s))dM_s+\int_0^t h^n(s)dM_s\right)^2\right]\\ \le&C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t(h(s)-h^n(s))dM_s\right)^2\right]+\mathbb{E}\left[\int h^n(s)H^2(s)ds\right]\\ \to&\int_0^t h^2(s)H^2(s)ds.\end{aligned}$$

و به طور مشابه می‌توان اثبات کرد که،

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t h(s)dM_s\right)^2\right]\ge\int_0^t h^2(s)H^2(s)ds$$

سپس داریم $\mathbb{E}[(\int_0^t h(s)dM_s)^2] = \int_0^t h^2(s)H^2(s)ds$ حال مشابه استدلال،این رابطه

$$\left(\int_0^t h(s)dM_s\right)^2 - \int_0^t h^2(s)H^2(s)ds$$

یک G-مارتینگل نسبت به فیلتر $\mathcal{F}_t$ است.

حال ثابت می‌کنیم $M_t^n \to M_t$ در $M_G^2(0,T)$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|M_t^n - M_t|^2] =&\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \mathcal{I}_{\{|H(s)|\leq\frac{1}{n}\}} dM_s\right)^2\right]\\ =&\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \mathcal{I}_{\{|H(s)|\leq\frac{1}{n}\}} d\langle M\rangle_s\right]\\ \leq& C\mu\{|H(s)|\leq\frac{1}{n}, s\in[0,T]\}\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

و به دلیل اینکه

$$\mathbb{E}[|W_t^n - W_t^m|^2] = \int_0^t \mathcal{I}_{\{\frac{1}{m}|H(s)|\leq\frac{1}{n}\}} ds =\leq \mu\left[|H(s)|\leq\frac{1}{n}\right]\to 0.$$

در می‌یابیم کهW_t^n در $M_G^2(0,T)$یک دنباله کوشی است. حال مجموعه $W_t^n \in M_G^2(0,T)$ چنان وجود دارد که $W_t^n \to W_t$.

$W^n(t)$ یک G-مارتینگل متقارن تحت امید غیرخطی $\mathbb{E}[.]$ است، و اثباتش با استفاده از همان روشی که در برهان قضیه ۱.۴ برای $W(t)$ بیان کردیم است.

درادامه G-مارتینگل بودن $W^2(t)-t$ نسبت به فیلتر $\mathcal{F}_t$ محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}[W^2(t)-t|\mathcal{F}_s] - W^2(s) + s\right|^2\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}\left[W^2(t) - t - (W^n(t))^2 + \int_0^t \mathcal{I}_{\{|H(\nu)|\geq\frac{1}{n}\}} d\nu\right.\right.\right.\\ &+ \left.\left.\left.(W^n(t))^2 - \int_0^t \mathcal{I}_{\{|H(\nu)|\geq\frac{1}{n}\}} d\nu|\mathcal{F}_s\right] - W^2(s) + s\right|^2\right]\\ &\leq \mathbb{E}[|W^2(t) - (W^n(t))^2|^2] + \mathbb{E}[|W^2(s) - W^n(s))^2|^2]\\ &+\left|\mu\left[\nu\in[0,t]:|H(\nu)|\geq\frac{1}{n}\right] - t\right|^2 + \left|\mu\left[\nu\in[0,s]:|H(\nu)|\geq\frac{1}{n}\right] - s\right|^2\to 0.\end{aligned}$$

به کمک تذکر ۲.۵انتگرال ایتو در $M_G^2(0,T)$ را می‌توان تعریف کرد.

می‌خواهیم ثابت کنیم $\int_0^T H(s)dW_s^n \to \int_0^T H(s)dW_s$. اگر $H(s)$ تابع ساده به صورت

$$H(s) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j\mathcal{I}_{[t_j,t_{j+1})}(s),\quad c_j(j=0,1,\ldots,N-1)$$

ثابت ها باشند آنگاه

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t H(s)dW_t^n - \int_0^t H(s)dW_t\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{N-1} c_j(W_{t_{j+1}}^n - W_{t_{j+1}} - W_{t_j}^n + W_{t_j})^2\right]$$
$$\leq \sum_{j=0}^{N-1} 2c_j\mathbb{E}[(W_{t_{j+1}}^n - W_{t_{j+1}})^2 + (W_{t_j}^n - W_{t_j})^2]$$
$$\leq \sum_{j=0}^{N-1} 2c_j\left[\frac{\varepsilon}{4Nc_j} + \frac{\varepsilon}{4Nc_j}\right] \leq \varepsilon.$$

اگر $H(s)$ تابع پیوسته باشد آنگاه خانواده ای از توابع $H^N(s)$ چنان موجود است که

$$\int_0^T (H(s) - H^N(s))^2 ds \to 0$$

ازاینرو

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t H^N(s)dW_t^n - \int_0^t H(s)dW_t^n\right|^2\right] \leq \int_0^T (H(s) - H^N(s))^2 ds \to 0$$

بنابراین

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t H(s)dW_s^n - \int_0^t H(s)dW_t\right|^2\right] =\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t H(s)dW_t^n - \int_0^t H^N(s)dW_s^n\right|^2\right]$$
$$+\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t H^N(s)dW_s^n - \int_0^t H^N(s)dW_t\right|^2\right]$$
$$+\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t H^N(s)dW_s - \int_0^t H(s)dW_t\right|^2\right] \to 0.$$

درنتیجه داریم

$$M_t = \int_0^t H(s)dW_s.$$

□

در این قضیه، برای G-مارتینگل متقارن $M \in S^2$ با خاصیت $M^2(t) - \mathbb{E}[M^2(t)]$، توانستیم نمایشی برای $W \in S^2$ به طوری که $W^2(t) - t$ مارتینگل است پیدا کنیم.
اگر $E[.]$ امید خطی کلاسیک باشد می‌دانیم $W(t)$ فرایند براونی است. اما با توجه به چارچوب کلی آیا $W(t)$، G-فرآیند براونی است؟

نتیجه ۳.۵. *فرایند $M \in S^2$ با شرایط قضیه ۱.۵ مفروض است. آنگاه،*

۱. *برای هر $t \geq 0$، $\mathbb{E}[-M^2(t)] = -\sigma_0^2\mathbb{E}[M^2]$،* ۲. M *یک فرایند مارکف است،*

۳. *برای هر* $s, t > \circ$، $\mathbb{E}[|M_t - M_s|^{۳}] = o(t-s)$.

سپس با توجه به اینکه W_s *فرایندِ*G*-براونی با پارامتر*$\sigma_\circ$ *است آنگاه* $M_t = \int_\circ^t H(s)dW_s$

برهان. بنابر قضیه ۱.۵، می‌دانیم که G-مارتینگل متقارن $W \in S^{۲}$ و همچنین $W^{۲}(t) - t$ متقارن چنان موجود است که $M_t = \int_\circ^t H(s)dW_s$. حال ثابت می‌کنیم $W(t)$ یک فرآیند G- براونی با پارامتر$\sigma_\circ$است. طبق قضیه ۱.۴ ما فقط نیاز به چک کردن شرط های ۳ و ۴ و۵ داریم.
شرط ۳،

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[-W^{۲}(t)] &= \mathbb{E}[(W^n(t))^{۲} - W^{۲}(t) - (W^n(t))^{۲}] \\ &\leq \mathbb{E}[(W^n(t))^{۲} - W^{۲}(t)] - \sigma_\circ^{۲}\mu\left[\nu \in [\circ, t] : |H(\nu)| \geq \frac{۱}{n}\right] \to -\sigma_\circ^{۲}t.\end{aligned}$$

از سوی دیگر

$$\mathbb{E}[-W^{۲}(t)] \geq -\mathbb{E}[W^{۲}(t) - (W^n(t))] - \sigma_\circ^{۲}\mu\left\{\nu \in [\circ, t] : |H(\nu)| \geq \frac{۱}{n}\right\} \to -\sigma_\circ^{۲}t.$$

پس $\mathbb{E}[-W^{۲}(t)] = -\sigma_\circ^{۲}(t)$ ثابت شد.
شرط ۴، از آنجا که M یک فرایند مارکف است، حال ما می‌توانیم انتگرال ایتو را که در بخش ۱.۴ بیان کردیم،تعریف کنیم. برای تابع f داریم؛

$$\int_\circ^t f(s)dM_s$$

بنابراین $W(t)$ تحت امیدغیرخطی فرایند مارکف $\mathbb{E}[.]$ است را بدست می‌آوریم.
شرط ۵؛ تحت شرط ۳ از نتیجه ۳.۵ برای هر $t > s > \circ$ می‌توان دریافت

$$\mathbb{E}[|M_t - M_s|^{۳}] = O(t-s).$$

که از روش اثبات بالایی پیروی می‌کند.
بنابراین $W(t)$ یک فرایند G-براونی تحت امید $\mathbb{E}[.]$ با پارامتر $\sigma_\circ$ است. $\square$

فصل ۶

تعریف دیگری برای فرآیند G-براونی

مقدمه

پنگ در مقاله [۱۰] با استفاده از زنجیر مارکف توانست امید غیرخطی بسازد.

پنگ در مقاله [۱۲] امید غیرخطی‌ای که از حل منحصربه فرد معادله حرارت غیرخطی نتیجه می‌شد را معرفی‌کرد. حال هدف، ساختن یک فرایند متعارف به وسیله زنجیر مارکف تحت امید غیرخطی $\varepsilon[.]$ است. زنجیر مارکفی که می‌تواند امیدغیرخطی تحت فرایند متعارف $(w_t)_{t\geq 0}$ که فرآیند G-براونی است را به وجود اورد را معرفی می‌کنیم.

ابتدا تعاریف مرجع [۱۰] را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۶. $\varepsilon : L^p_G(\mathcal{F}) \longrightarrow R$ را پیش-امید غیرخطی می‌نامیم اگر

- برای هر $\omega \in \Omega$ اگر $X_1(\omega) > X_2(\omega)$ آنگاه $\varepsilon[X_1] > \varepsilon[X_2]$,
- برای هر ثابت c داریم $\varepsilon[c] = c$.

تعریف ۲.۶. یک خانواده از پیش-امید غیرخطی را زنجیر مارکف می‌نامیم هرگاه

۱. برای هر ثابت $(t;x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ ، $\tau^x_t[\varphi]$یک پیش امید غیرخطی در $lip(\mathbb{R})$ موجود باشد،

۲. $\tau^x_0[\varphi] = \varphi(x)$,

۳. $\tau^x_t[\varphi]$ از فرمول زیر گروه ها پیروی کند
$\tau^x_t \mathbf{o} \tau^x_s[\varphi] := \tau^x_s[\tau^x_t[\varphi]] = \tau^x_{t+s}[\varphi]$.

قضیه ۳.۶. *فرض‌کنید $\Gamma^y_t[\varphi]$ یک فرایند مارکف تعریف شده بر روی $lip(R)$ باشد،انگاه*

۱. *خاصیت تک بعدی* $\Gamma^y_t[\varphi] - \Gamma^y_t[\varphi'] \leq \Gamma^y_t[\varphi - \varphi']$,

۲. *خاصیت همگونی مثبت* $\Gamma_t^y[\lambda\varphi] = \lambda\Gamma_t^y[\varphi], \quad \lambda \geq ۰,$

۳. $\Gamma_t^y[x] = \Gamma_t^y[-x] = ۰,$

۴. $\Gamma_t^y[x^۲] = t, \Gamma_t^y[-x^۲] = -\sigma_۰^۲ t,$

۵. $\Gamma_t^y[x^۳] = O(t).$

با توجه به اینکه $\varepsilon[.]$ *یک امید غیرخطی تولید شده توسط* $\Gamma_t^y[.]$ *است. بنابراین فرایند استاندارد* $(\omega_t)_{t\geq ۰}$ *یک فرایند* G*-براونی است.*

برای برهان قضیه از تذکر زیر بهره می‌بریم

تذکر ۴.۶. *امیدغیرخطی* $\varepsilon[.]$ *تولید شده توسط* $\Gamma_t^y[\varphi]$ *از خاصیت زیر صدق می‌کند.*

$$\varepsilon[\varphi(\omega_{t_۱}, \omega_{t_۲}, \ldots, \omega_{t_m})] = \Gamma_{t_۱,\ldots,t_m}[\varphi] = \varphi_m,$$

که φ_m *از روابط زیر نتیجه می‌شود*

$$\begin{aligned}
\varphi_۱(x_۱, \ldots, x_{m-۱}) &= \Gamma^y_{t_m - t_{m-۱}}[\varphi(x_۱, \ldots, x_{m-۱}, .)](x_{m-۱}) \\
\varphi_۲(x_۱, \ldots, x_{m-۲}) &= \Gamma^y_{t_{m-۱} - t_{m-۲}}[\varphi_۱(x_۱, \ldots, x_{m-۲}, .)](x_{m-۲}) \\
&\vdots \\
\varphi_{m-۱}(x_۱) &= \Gamma^y_{t_۲ - t_۱}[\varphi_{m-۲}(x_۱, .)](x_۱) \\
\varphi_m &= \Gamma^y_{t_۱}[\varphi_{m-۱}(.)],
\end{aligned}$$

و امید شرطی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\varepsilon[\varphi(\omega_{t_۱}, \omega_{t_۲}, \ldots, \omega_{t_m})|\mathcal{F}_{t_{m-۱}}] = \Gamma_{t_m - t_{m-۱}}[\varphi(x_۱, \ldots, x_{m-۱}, .)]_{x_۱=\omega_{t_۱}, \ldots, x_{m-۱}=\omega_{t_{m-۱}}}.$$

برهان. به کمک تعاریفی از زنجیر مارکف و خاصیت تک بعدی، می‌توان در مورد مفروضات وشرایط قضیه ۳.۶ و ثابت $\Gamma_t^y[\varphi + c] = \Gamma_t^y[\varphi] + c\ C$ بحث کرد.

فرایند استانداردB_t که $B_t(\omega) = \omega_t$ ، زنجیر مارکف تحت امید غیرخطی $\varepsilon[.]$ است. حال باتوجه به شرط ۳ از قضیه ۳.۶ می‌دانیم B_t مارتینگل متقارن تحت امید غیرخطی $\varepsilon[.]$ است. و همچنین طبق شرط۴، $B_t^۲ - t$ مارتینگل است و$\varepsilon[-B_t^۲] = -\sigma_۰^۲ t$.

بنابراین باتوجه به قضیه ۱.۴ مشاهده می‌کنیم که B_t یک فرایند G-براونی تحت امید غیر خطی $\varepsilon[.]$ است. □

مراجع

[1] Chen, S. (2010). L^p solutions of one-dimensional backward stochastic differential equations with continuous coefficients. *Stochastic Analysis and Applications*, 28(5), 820-841.

[2] Ebrahimbeygi, A. and Dastranj, E. (2015). G-Brawnian motion and Its Applications.Vol. 36.*Cumhuriyet University Faculty of Science Science Journal (CSJ)*, 2242-2246

[3] Folland. G. B. (1982). Real analysis. *Springer Verlag.*

[4] Li, X., Peng, S. (2011). Stopping times and related Ito's calculus with G-Brownian motion. *Stochastic Process. Appl*, 121 1492–1508.

[5] Moharana, R. (2014). Review on Young's Inequality (Doctoral dissertation, NATIONAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY ROURKELA).

[6] Øksendal, B. (2003). Stochastic differential equations. *Springer Berlin Heidelberg*, 65-84

[7] Pardoux, E. and Peng, S. (1990). Adapted solution of backward stochastic equation. *Systems Control Lett.* 14:55–61.

[8] Peng, S. (1992) A generalized dynamic programming principle and Hamilton-Jacobi-Bellman equation. *Stochastics and Stochastic Reports*, 38(2): 119–134.

[9] Peng, S. (2004) Filtration Consistent Nonlinear Expectations and Evaluations of Contingent Claims. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, English Series 20(2), 1–24.

[10] Peng, S. (2005) Nonlinear expectations and nonlinear Markov chains, Chin. *Ann. Math.* 26B(2) , 159–184.

[11] Peng, S. (2007). G-Brownian motion and dynamic risk measure under volatility uncertainty. arXiv preprint arXiv:0711.2834.

[12] Peng, S. (2007). G-expectation, G-Brownian motion and related stochastic calculus of Ito type. in: *Stochastic Analysis and Applications, in: Abel Symp., vol. 2, Springer* Berlin, 541–567.

[13] Peng, S. (2008). Multi-dimensional G-Brownian motion and related stochastic calculus under G-expectation. *Stochastic Processes and their applications*,118(12), 2223-2253.

[14] Peng, S. (2010). Nonlinear expectations and stochastic calculus under uncertainty. arXiv:1002.4546v1 [math.PR].

[15] Rudin, W. (1991). Functional Analysis. *McGraw Hill*, New York.

[16] Song, Y. (2011). Some properties on G-evaluation and its applications to G-martingale decomposition. Sci. China Math, 54 (2) 287–300.

[17] Varsei, A. Red Analysis–Notes.*Lecture Notes, Preprint.*

[18] Wilde, I. F. (2009). Stochastic Analysis–Notes. *Lecture Notes, King's College, London.*

[19] Xu, Jing. and Zhang, Bo. (2009). Martingale characterization of G-Brownian motion. *Stochastic and their Applications* 119 (2009) 232-248

[20] Yong, J., Zhou, X. (1999) Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations. Springer–Verlag.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ا

افراز واحد .... Partition of unity

امید .... Expectation

امید شرطی .... Conditional expectation

امید غیرخطی .... Nonlinear expectation

انتگرال G–استراتونویچ .... G-Stratonovich integral

انتگرال ایتو .... Ito's integral

انتگرال تصادفی .... Stochastic integral

اندازه احتمال .... Probability measure

اندازه‌پذیر .... Measurable

ب

به طور پیوسته .... Continuously

پ

پیشامد .... Event

ت

تابع تصادفی .... Random function

تابعک .... Functional

تابعک خطی .... Linear functional

تابع هموار .... Smooth function

توزیع .... Distribution

توزیع G– نرمال استاندارد .... Standard G-normal distribution

ث

ثابت لیپشیتس .... Lipschitz constant

ج

G- امید .... G-expectation
G- چهارچوب .... G-framework
G- مارتینگل .... G-martingale
G- مارتینگل متقارن .... Symmetric G-martingale

ح

حرکت G- براونی .... G-Brownian motion

د

دنباله کوشی .... Cauchy sequence

ز

زمان توقف .... Stopping times

س

σ-میدان .... σ-Field

ش

شبکه برداری .... Vector lattice
شبه نرم .... Seminorm

ف

فرآیند با تغییرات مرتبه دوم .... Quadratic variation process
فرآیند تصادفی .... Stochastic process
فرمول ایتو .... Ito's formula
فضای تکمیل .... Completion space
فضای خارج قسمتی .... Quotient space
فضای نرمدار .... Normed space
فیلتر .... Filtration
فیلتر طبیعی .... Natural filtration

ق

قابل پیش‌بینی .... Predictable
قضیه نمایش G- مارتینگل‌ها .... G-martingale representation theorem

م

مارتینگل موضعی .... Local martingale
متغیر تصادفی .... Random variable
محدب .... Convex

مستقل .... Independent

معادله دیفرانسیل جزئی سهمی‌وار .... Parabolic partial differential equation

مقعر .... Concave

۵مولد .... Generator

ن

نرم .... Norm

نگاشت انقباضی .... Contraction mapping

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

C

Cauchy sequence .... دنباله کوشی
Completion space .... فضای تکمیل
Concave .... مقعر
Conditional expectation .... امید شرطی
Continuously .... به طور پیوسته
Contraction mapping .... نگاشت انقباضی
Convex .... محدب

D

Distribution .... توزیع

E

Event .... پیشامد
Expectation .... امید

F

Filtration .... فیلتر
Finite ordered subset .... زیرمجموعه مرتب متناهی
Functional .... تابعک

G

G-Brownian motion .... حرکت G- براونی
G-expectation .... G- امید
G-framework .... G- چهارچوب
G-martingale .... G- مارتینگل

G-martingale representation theorem .... قضیه نمایش G- مارتینگل‌ها
G-Stratonovich integral .... انتگرال G-استراتونویچ

I

Independent .... مستقل
Ito's formula .... فرمول ایتو
Ito's integral .... انتگرال ایتو

L

Linear functional .... تابعک خطی
Lipschitz constant .... ثابت لیپشیتس
Local martingale .... مارتینگل موضعی

M

Measurable .... اندازه‌پذیر

N

Natural filtration .... فیلتر طبیعی
Nonlinear expectation .... امید غیرخطی
Norm .... نرم
Normed space .... فضای نرمدار

P

Partition of unity .... افراز واحد
Predictable .... قابل پیش‌بینی
Probability measure .... اندازه احتمال

Q

Quadratic variation process .... فرآیند با تغییرات مرتبه دوم

R

Random function .... تابع تصادفی
Random variable .... متغیر تصادفی

S

V

Surname: Ebrahimbeygi Name: Atena

Title: G-Brownian motion and Its Applications

Supervisor: Elham Dastranj

Degree: Master of Science Subject: Pure Mathematics
Field: Mathematical Analysis

University of Shahrood Faculty Of Mathematical Sciences
Date: 2015 Number of pages: 71

Keywords: G-framework, Markov chain, G-Brownian motion, symmetric martingale.

Abstract

In this thesis, the concept of G-Brownian process has been introduced by Peng in 2006.

Then we study the martingale characterization of G-Brownian motion and present a method for constructing a G-Brownian motin using a Markov chain. Furthermore, we obtain the represention theorem for some special symmetric martingales in the G-framework.

University of Shahrood
Faculty Of Mathematical Sciences

Dissertation Submitted in Partial Fulfillment of The Requirements For The Degree of Master of Science in

Pure Mathematics

G-Brownian motion and Its Applications

Supervisor

Elham Dastranj

by

Atena Ebrahimbeygi

2015