



دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

# نتایج در خصوص مشخصه استرادا در گرافها

اکبر جهانبانی

استاد راهنما

دکتر نادر جعفری راد

تیر ۱۳۹۴

پایان نامه خود را به

پدر و مادر صبورم  
برادران مهربانم

تقدیم می‌کنم.

# سپاس گزارمی...

با نام آنکه خلق کرد هستی را از رحمت بی انتهای خویش تا انسان در قدوم خلقتش به پهنای گسترده ای به بزرگی جهان خیمه زند و به او عقل داد تا عظمت خلقت را دریابد. اکنون که به یاری خداوند متعال این دوره تحصیلیم را به پایان رسانده ام، هر چند واژه ها را یارای آن نیست که لطف و محبت آنانی را که در تمام دوران زندگی ام جرعه نوش دریای مهر و محبتشان بوده ام به تصویر بکشم، اما به رسم ادب و احترام بوسه بر دستانشان زده و بر خود واجب میدانم زحمات بی شائبه پدر و مادر عزیزم، صبر و فداکاری برادران مهربانم که همواره راه گشای مشکلاتم در تمام مراحل زندگی بوده اند، ارج نهاده و مراتب تقدیر و تشکر قلبی و باطنی را از مهربانی های آنان ابراز دارم با تمام وجود و در اوج فروتنی از مقام والا و شامخ استاد فرزانه جناب آقای دکتر نادر جعفری راد که در نهایت صبر و بزرگواری تمامی سعی و تلاش خود را در جهت اعتلای واقعی ارزش های آموزشی در کالبد هدایت ها و رهنمود ها نسبت به اینجانب مبذول فرمودند، کمال قدردانی را می نمایم و تشکر خالصانه از تمامی کسانی که مرا در به انجام رساندن این مهم یاری نموده اند، در برابر وجود گرامی شان زانوی ادب بر زمین می نهم.

اکبر جهانبانی  
سیر ۱۳۹۴

## تعمدنامه

اینجانب اکبر جهانبانی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان نتایجی در خصوص مشخصه استرادا در گراف‌ها، تحت راهنمایی دکتر نادر جعفری راد متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

اکبر جهانبانی  
شهر ۱۳۹۴

## مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

## چکیده

فرض کنید  $G$  یک گراف ساده، از مرتبه  $n$  و  $A(G)$  ماتریس مجاورت آن باشد. مقادیر ویژه گراف  $G$  مقادیر ویژه ماتریس مجاورت  $A(G)$  می‌باشند و به صورت

$\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_n(G)$  نمایش داده می‌شوند. مشخصه استرادا  $EE(G)$  گراف  $G$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$EE(G) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i}.$$

در این پایان نامه ما بیشترین مشخصه استرادا را در بین درختان، گراف های یک دور، دو دور، سه دور، چهار دور و پنج دور را مشخص می‌کنیم.

**کلیدواژه:** مقادیر ویژه، مشخصه استرادا، گشت، دور.



# فهرست مطالب

خ	لیست تصاویر
۱	لیست جداول
۳	۱ مقدمه ای بر نظریه گراف
۵	۱.۱ ماتریس مجاورت
۶	۲.۱ مقادیر ویژه و چند جمله ای مشخصه گراف‌ها
۷	۳.۱ مشخصه استرادا بعضی گراف‌ها
۸	۱.۳.۱ خواصی از مشخصه استرادا گراف‌ها
۹	۲ بیشترین مشخصه استرادا در بین درختان
۹	۱.۲ مقدمه
۱۵	۳ گراف‌های یک دور و دو دور با بیشترین مشخصه استرادا
۱۵	۱.۳ مقدمه
۱۸	۲.۳ لم‌ها
۲۲	۳.۳ گراف‌های با یک دور با بیشترین مشخصه استرادا
۲۴	۴.۳ گراف‌های دو دور با بیشترین مشخصه استرادا
۲۵	۵.۳ لم‌ها
۲۸	۶.۳ نتیجه این بخش
۳۳	۴ گراف‌های سه دور با بیشترین مشخصه استرادا
۳۳	۱.۴ مقدمه
۳۳	۲.۴ لم‌ها
۳۴	۳.۴ گراف‌های مینیمال سه دور با بیشترین مشخصه استرادا
۴۵	۵ گراف‌های چهاردور با بیشترین مشخصه استرادا
۴۵	۱.۵ مقدمه

۴۵	.....	۲.۵	گراف‌های چهاردور با بیشترین مشخصه استرادا
۵۷		۶	گراف‌های پنج دور با بیشترین مشخصه استرادا
۵۷	.....	۱.۶	مقدمه
۵۷	.....	۲.۶	گراف‌های پنج دور با بیشترین مشخصه استرادا
۶۹		آ	گراف‌های چهاردور با بیشترین مشخصه استرادا
۷۱		ب	گراف‌های پنج دور با بیشترین مشخصه استرادا
۷۳			مراجع
۷۷			واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۷۹			واژه‌نامه انگلیسی به فارسی



# لیست تصاویر

۳	.....	گراف $G$	۱.۱
۵	.....	گراف‌های $G$ و $H$	۲.۱
۵	.....	گراف $G$	۳.۱
۶	.....	گراف $G$	۴.۱
۱۰	.....	گراف ستاره $S_n$ و گراف مسیر $P_n$	۱.۲
۱۱	.....	تبدیل $I$	۲.۲
۱۳	.....	تبدیل $II$	۳.۲
۲۶	.....	گراف $G$ توضیح داده شده در نتیجه ۵.۵.۳	۱.۳
۲۷	.....	گراف $G$ توضیح داده شده در نتیجه ۶.۵.۳	۲.۳
۲۹	.....	گراف توضیح داده شده در اثبات قضیه ۵.۶.۳	۳.۳
۳۰	.....	گراف توضیح داده شده در اثبات لم ۶.۶.۳	۴.۳
۳۱	.....	گراف توضیح داده شده در اثبات لم ۷.۶.۳	۵.۳
۳۵	.....	گراف‌های $G_j^3 (j = 1, \dots, 7)$	۱.۴
۳۵	.....	گراف‌های $G_j^4 (j = 1, \dots, 4)$	۲.۴
۳۵	.....	گراف‌های $G_j^6 (j = 1, 2, 3)$	۳.۴
۳۵	.....	گراف‌های $G_j^7$	۴.۴
۳۸	.....	گراف‌های $A_7, \dots, A_1$	۵.۴
۴۶	.....	گراف‌های $G_j^4 (j = 1, \dots, 9)$	۱.۵
۴۶	.....	گراف‌های $G_j^5 (j = 1, \dots, 21)$	۲.۵
۴۷	.....	گراف‌های $G_j^6 (j = 1, \dots, 14)$	۳.۵
۴۹	.....	گراف‌های $A_{21}, \dots, A_1$	۴.۵
۵۸	.....	گراف‌های $G_j^5 (j = 1, \dots, 12)$	۱.۶
۵۸	.....	گراف‌های $G_j^6 (j = 1, \dots, 29)$	۲.۶
۶۰	.....	گراف‌های $A_{18}, \dots, A_1$	۳.۶



## لیست جداول

- ۱.۴ مشخصه استرادا گراف های  $T_1, T_2, T_3, T_4, T_6, T_7$  برای  $4 \leq n \leq 15$  . . . . ۴۱
- ۱.۵ مشخصه استرادای گراف های  $F_i$  برای  $i = 1, 2, \dots, 25$ ،  $7 \leq n \leq 9$  . . . . ۵۲
- ۱.۶ مشخصه استرادای گراف های  $F_i$  برای  $i = 1, 2, \dots, 18$ ،  $13 \leq n \leq 18$  . . . . ۶۳



# فصل ۱

## مقدمه ای بر نظریه گراف

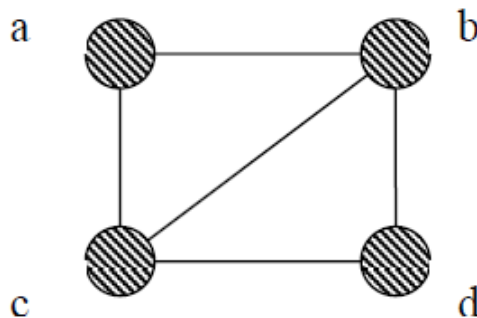
تعریف ۱.۰.۱. یک گراف سه تایی به صورت  $(V, E, \psi)$  است که در آن  $V$  مجموعه ناتهی از رأس‌ها،  $E$  مجموعه از زیرمجموعه‌های دو عضوی از  $V$  موسوم به یال هاست و  $\psi$  تابع وقوع می‌باشد. از این پس تابع وقوع را به صورت ضمنی می‌پذیریم.

تعریف ۲.۰.۱. درجه رأس  $v$  تعداد یال‌های واقع بر رأس  $v$  می‌باشد و با  $deg(v)$  نمایش داده می‌شود.

تعریف ۳.۰.۱. یک گراف منتظم است، اگر درجه همه رأس‌های آن با هم برابر باشد.

تعریف ۴.۰.۱. یک گراف کامل است، اگر هر زوجی رأسی به وسیله یالی به هم متصل باشند. گراف کامل  $n$  رأسی را با  $K_n$  نمایش می‌دهیم.

در گراف مثال زیر مجموعه رأس‌ها  $V(G) = \{a, b, c, d\}$  و مجموعه یال‌ها  $E(G) = \{ab, ac, bc, bd, cd\}$  می‌باشد. گراف کامل نمی‌باشد، زیرا رأس  $a$  و  $d$  با یالی به هم متصل نشده‌اند. همچنین  $deg(a) = 2 = deg(d)$ ،  $deg(b) = 3 = deg(c)$  می‌باشد.



شکل ۱.۱: گراف  $G$ .

تعریف ۵.۰.۱. دو رأس مجاورند اگر به وسیله یالی به هم متصل باشند. در شکل ۱.۱ دو رأس  $a$  و  $c$  مجاورند، ولی رأس‌های  $a$  و  $d$  مجاور نیستند.

**تعریف ۶.۰.۱.** کاردینال مجموعه از رأس های  $V(G)$  را مرتبه  $G$  می نامیم و با  $n(G)$  یا  $n$  نمایش داده می شود. به طور مشابه کاردینال مجموعه یال های  $E(G)$  را اندازه  $G$  می نامیم و با  $m(G)$  یا  $m$  نمایش داده می شود. یک گراف  $G$  را می توان با  $G(n, m)$  مشخص کرد.

**تعریف ۷.۰.۱.** یک گشت از رأس  $u$  به رأس  $v$ ، دنباله ای متناوب از رئوس و یال هاست که از رأس  $u$  شروع و به رأس  $v$  ختم می شود. تعداد یالهای پیموده شده را نیز طول گشت گوئیم. در شکل ۱.۱  $acd$  یک گشت از  $a$  به  $d$  می باشد و  $abcd$  نیز گشت دیگری از  $a$  به  $d$  می باشد. اگر هیچ راسی در گشت تکراری نباشد، آن را مسیر گویند. اگر هیچ یالی در گشت تکراری نباشد، آن را گذر گویند. گذری است که راس شروع و راس پایانی یکسان باشد را مدار می گویند. گرافی که بین هر دو راس آن یک مسیر موجود باشد را گراف همبند می گویند.

**تعریف ۸.۰.۱.** فاصله بین دو رأس برابر با تعداد یال های بین دو رأس می باشد. بیشترین فاصله بین همه زوج های گراف را قطر گراف می گوئیم، با  $diam(G)$  نمایش داده می شود. در شکل ۱.۱  $diam(G) = 2$  می باشد.

**تعریف ۹.۰.۱.** گراف بدون یال را گراف تهی می نامند. گرافی که شامل حداقل دو رأس باشد را گراف بدیهی می گویند.

**تعریف ۱۰.۰.۱.** هرگاه بین دو رأس متمایز از یک گراف بیش از یک یال وجود داشته باشد، آن را یک گراف چندگانه می گوئیم.

**تعریف ۱۱.۰.۱.** یالی است که ابتدا و انتهایش رأس یکسانی است را طوقه می گویند. گراف فاقد یال چندگانه و طوقه را گراف ساده می گویند.

**تعریف ۱۲.۰.۱.** به هر گراف  $G$  با  $n$  رأس به قسمی که یک رأس از درجه  $n - 1$  و  $n - 1$  رأس دیگر از درجه یک باشند، یک گراف ستاره گوئیم. گراف ستاره  $n$  رأسی را با  $S_n$  نمایش می دهند.

**تعریف ۱۳.۰.۱.** یک گراف  $G$  دوبخشی است، اگر بتوانیم مجموعه رأس های آن را به دو زیر مجموعه  $U$  و  $W$  افراز کرد، به طوری که هر یال در گراف  $G$  یک رأس آن در  $U$  و یک رأس در  $W$  باشد. به  $U$  و  $W$  بخش های گراف می گویند. گراف دوبخشی که هر رأس از هر بخش به هر رأس از بخش دیگر وصل باشد را گراف کامل دوبخشی می نامیم. اگر یک بخش دارای  $m$  رأس و بخش دیگر دارای  $n$  باشد. گراف کامل دوبخشی را با  $K_{m,n}$  نمایش می دهیم.

**قضیه ۱۴.۰.۱.** [۲۶] یک گراف دو بخشی است، اگر و فقط اگر شامل دور های فرد نباشد.

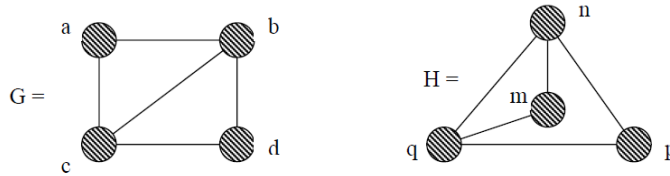
**تعریف ۱۵.۰.۱.** دو گراف ساده  $G = (V_1, E_1)$  و  $H = (V_2, E_2)$  را یکریخت گویند، هرگاه یک تابع یک به یک و پوشا مانند  $f: V_1 \rightarrow V_2$  بتوان یافت به طوری که:

$$\forall v_i, v_j \quad v_i v_j \in E_1 \Leftrightarrow \{f(v_i), f(v_j)\} \in E_2.$$

**مثال ۱۶.۰.۱.** با توجه به شکل زیر دو گراف  $G$  و  $H$  یکریخت هستند، زیرا

$$f(c) = g, f(b) = n, f(a) = m, f(d) = p$$

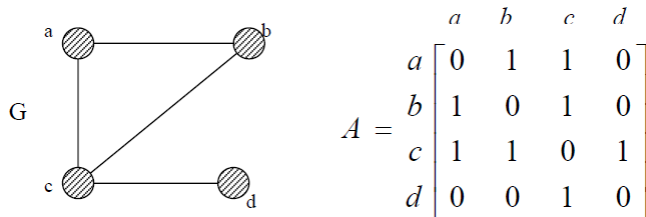
می باشد.



شکل ۲.۱: گراف‌های  $G$  و  $H$ .

## ۱.۱ ماتریس مجاورت

مثال ۱.۱.۱. شکل زیر گراف  $G$  با ماتریس مجاورت  $A$  را نشان می‌دهد.



شکل ۳.۱: گراف  $G$ .

توجه کنید که قطر اصلی ماتریس مجاورت صفر می‌باشد، زیرا گراف مورد نظر شامل طوقه نمی‌باشد.

یادآوری ۱. گراف‌های مورد نظر در تمام این پایان نامه گراف بدون طوقه و یال چندگانه می‌باشد.

می‌دانیم که تریس ماتریس مجاورت گراف برابر با مجموع عناصر روی قطر اصلی می‌باشد و با  $tr(A)$  نمایش داده می‌شود. همچنین می‌دانیم ماتریس مجاورت گراف ساده ماتریس مربعی، متقارن و با درایه های ۰ و ۱ می‌باشد، به عبارتی  $a_{ij} = a_{ji}$  می‌باشد.

قضیه ۲.۱.۱. [۲۶] تعداد گشت‌ها به طول  $l$  از رأس  $v_i$  به رأس  $v_j$  در گراف  $G$  برابر با عناصر  $(i, j)$  از ماتریس  $A^l$  می‌باشد.

مثال ۳.۱.۱. گراف  $G$  و ماتریس مجاورت  $A$  شکل ۳.۱ را در نظر بگیرید. که تعداد گشت‌ها به طول ۲ از  $b$  به  $d$  را می‌توان با استفاده از ماتریس مربعی  $A$  پیدا کرد.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

توجه کنید، که  $1 = \text{عناصر}(d, b) = \text{عناصر}(b, d)$  و این یعنی تعداد گشت‌های به طول ۲ از  $b$  به  $d$  برابر یک می‌باشد، که این گشت همان  $bcd$  می‌باشد.

قضیه ۴.۱.۱. [۲۶] تریس ماتریس  $A^2$  دو برابر تعداد یال های گراف می باشد.

قضیه ۵.۱.۱. [۲۶] تریس ماتریس  $A^3$  شش برابر تعداد مثلثات در گراف می باشد.

مثال ۶.۱.۱. با توجه به شکل ۳.۱ و ماتریس مجاورت آن داریم که:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

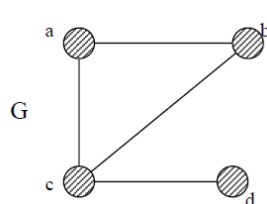
بینیم که تریس ماتریس  $A^2$  برابر با ۶ می باشد و تعداد مثلث های گراف نیز یک می باشد.

## ۲.۱ مقادیر ویژه و چند جمله ای مشخصه گرافها

چند جمله ای مشخصه یک گراف از مرتبه  $n$  با  $\Gamma = \det(\lambda I - A)$  مشخص می شود، که در آن  $I$  ماتریس همانی  $n \times n$  می باشد.

مثال ۱.۲.۱. فرض کنید  $G$  گراف شکل زیر باشد.

$$\Gamma = \det(\lambda I - A) = \det \left( \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \det \left( \begin{bmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda^3 - 3\lambda - 2$$



$$A = \begin{matrix} & a & b & c & d \\ a & 0 & 1 & 1 & 0 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 \\ c & 1 & 1 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

شکل ۴.۱: گراف  $G$

در حالت کلی چند جمله ای مشخصه هر گراف به صورت  $\lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \dots + c_n$  می باشد.

قضیه ۲.۲.۱. [۲۶] ضرایب چند جمله ای مشخصه ماتریس مجاورت  $A$  گراف  $G$  در موارد زیر صدق می کنند:

(۱)  $c_1 = 0$

(۲)  $-c_2$  برابر با تعداد یال ها در گراف  $G$  می باشد.

(۳)  $-c_3$  دو برابر تعداد مثلث ها در گراف  $G$  می باشد.



قضیه ۳.۲.۱. [۲۶] مجموعه مقادیر ویژه ماتریس برابر با تریس ماتریس می‌باشد.

تعریف ۴.۲.۱. به مجموعه از مقادیر ویژه گراف به همراه مکرری، طیف گراف می‌گویند.

قضیه ۵.۲.۱. [۲۶] یک گراف با  $n$  رأس، دارای  $n$  مقدار ویژه می‌باشد.

قضیه ۶.۲.۱. [۲۶] اگر  $G$  یک گراف دو بخشی باشد و  $\lambda$  یک مقدار ویژه آن باشد، آنگاه  $-\lambda$  هم نیز یک مقدار ویژه گراف می‌باشد.

## ۳.۱. مشخصه استرادا بعضی گراف‌ها

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید  $G$  یک گراف ساده، از مرتبه  $n$  و  $A(G)$  ماتریس مجاورت گراف باشد. مقادیر ویژه گراف  $G$  مقادیر ویژه ماتریس مجاورت  $A(G)$  می‌باشد و به صورت  $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_n(G)$  نمایش داده می‌شوند. مشخصه استرادا<sup>۱</sup> گراف  $G$  را با  $EE(G)$  نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$EE(G) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i}.$$

قضیه ۲.۳.۱. [۱۹] برای گراف کامل  $K_n$  داریم:

$$EE(K_n) = e^{n-1} + (n-1)e^{-1}.$$

قضیه ۳.۳.۱. [۱۹] برای گراف کامل دوبخشی  $K_{n,m}$  داریم:

$$EE(K_{n,m}) = m + n - 2 + 2 \cosh(\sqrt{mn}).$$

قضیه ۴.۳.۱. [۱۹] برای گراف مسیر  $P_n$  داریم:

$$EE(P_n) \approx (n+1)I_0 - \cosh(2).$$

قضیه ۵.۳.۱. [۱۹] برای گراف دور  $C_n$  داریم:

$$EE(C_n) \approx nI_0.$$

قضیه ۶.۳.۱. [۱۹] برای گراف ستاره  $S_n$  داریم:

$$EE(S_n) = n - 2 + 2 \cosh(\sqrt{n-1}).$$

که مقدار  $I_0$  به صورت زیر می‌باشد:

$$I_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{\cos(x)} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} \approx 2.27958530 \dots$$

<sup>۱</sup>Estrada index

### ۱.۳.۱ خواصی از مشخصه استرادا گرافها

تعریف ۷.۳.۱ [۲۶] فرض کنید  $G$  و  $H$  دو گراف با مجموعه رأس های مجزا باشند. عملگر  $+$  را به این صورت تعریف می کنیم، گراف  $G + H$  گرافی است که از اتصال همه رأس های  $G$  به همه رأس های  $H$  به دست می آید. اگر  $G_1, G_2, \dots, G_n$  گراف های با مجموعه رأس های مجزا باشند، در این صورت  $G_1 + G_2 + \dots + G_n$  را با  $\sum_{i=1}^n G_i$  نمایش می دهیم. اگر  $G_1 = G_2 = \dots = G_n = G$  در این صورت  $\sum_{i=1}^n G_i$  را با  $nG$  نمایش می دهیم.

قضیه ۸.۳.۱ [۱۷] اگر  $G$  و  $H$  دو گراف به ترتیب  $r$  - منتظم و  $s$  - منتظم با  $p$  و  $q$  رأس باشند. آنگاه

$$EE(G + H) = EE(G) + EE(H) - (e^r + e^s) + 2e^{\frac{(r+s)}{2}} \cosh\left(\frac{1}{2} \left( \sqrt{(r-s)^2 pq} \right)\right).$$

نتیجه ۹.۳.۱ [۱۷] اگر  $G$  گرافی  $r$  - منتظم و  $n$  رأسی باشد. آنگاه

$$EE(2G) = 2EE(G) - 2e^r + 2e^r \cosh(n).$$

$$EE(3G) = 3EE(G) - 3e^r + 2e^r \cosh(n) + 2e^{\frac{(r+n)}{2}} \cosh\left(\frac{3n}{2}\right) - (e^{r+n}).$$

تعریف ۱۰.۳.۱ [۲۶] ضرب دکارتی  $G \times H$  از گراف های  $G$  و  $H$  مجموعه رأس های این گراف به صورت  $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$  و  $(a, x)(b, y)$  یالی در  $G \times H$  می باشد، اگر  $a = b$  و  $xy \in E(H)$  یا  $ab \in E(G)$  و  $x = y$  باشد. اگر  $G_1, G_2, \dots, G_n$  گراف های با مجموعه رأس های مجزا باشند، در این صورت  $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$  را با  $\prod_{i=1}^n G_i$  نمایش می دهیم. اگر  $G_1 = G_2 = \dots = G_n = G$  در این صورت  $\prod_{i=1}^n G_i$  را با  $G^n$  نمایش می دهیم.

قضیه ۱۱.۳.۱ [۱۷] برای دو گراف  $G$  و  $H$  داریم که  $EE(G \times H) = EE(G)EE(H)$ . در حالت کلی

$$EE\left(\prod_{i=1}^r G_i\right) = \prod_{i=1}^r EE(G_i).$$

و در حالت خاص  $EE(G^r) = EE(G)^r$  می باشد.

# فصل ۲

## بیشترین مشخصه استرادا در بین درختان

### ۱.۲ مقدمه

در این فصل بیشترین و کمترین مشخصه استرادا را در بین درختان  $n$ -راسی و همچنین در بین گراف های همبند  $n$ -راسی بررسی می‌کنیم. مجموعه مقادیر ویژه  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  را طیف های گراف  $G$  می‌گوییم. گشتاور طیف  $k$  گراف  $G$  را با  $M_k(G)$  نمایش و به صورت  $M_k(G) = \sum_{k \geq 0} (\lambda_i)^k$  تعریف می‌شود. گشتاور طیف در شرایط زیر صدق می‌کند.

$$M_0(G) = n, M_1(G) = 0, M_2(G) = 2m, M_3(G) = 6t, M_4(G) = 2 \sum_{i=1}^n d_i^2 - 2m + 4q.$$

که در آن  $t$  تعداد مثلثات و  $q$  تعداد چهارگوش‌ها در گراف  $G$  می‌باشد.

برای مطالعه ویژگی مقادیر ویژه یک گراف خواننده را به [۲] ارجاع می‌دهیم. گرچه مشخصه استرادا در سال ۲۰۰۰ کشف شده است، اما کاربردهای مشهور آن را می‌توان در [۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۵] دید. در [۹، ۱۰، ۱۱] نشان داده شده که مشخصه استرادا برای تعیین درجه پیش مولکول‌ها با زنجیر های طولانی، بخصوص در پروتئین مناسب است. برای دیدن کاربرد اخیر این مشخصه در پیوند بین  $EE$  و مفهوم شاخک های اتمی خواننده را به [۱۵] ارجاع می‌دهیم. برخی ویژگی مقدماتی ریاضیات عمومی مشخصه استرادا را می‌توان در [۱۲، ۱۶، ۳، ۱۸، ۲۸] دید. اکنون به کمک بسط تیلور  $e^x$  در [۱۲، ۳] می‌توانیم مشخصه استرادا را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$EE(G) = \sum_{k \geq 0} \frac{M_k(G)}{k!}.$$

که  $M_k = M_k(G)$  گشتاور طیف  $k - m$  گراف  $G$  می‌باشد. از [۲] می‌دانیم که  $M_k(G)$  مساوی با تعداد گشتهای بسته به طول  $k$  در گراف  $G$  می‌باشد. مشخصه استرادا برای گراف دوبخشی به صورت

<sup>۱</sup>Spectral Moment

<sup>۲</sup>Taylor

زیر می باشد:

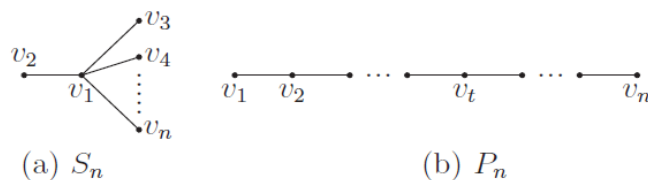
$$EE(G) = \sum_{k \geq 0} \frac{M_{2k}(G)}{2k!}.$$

حدس ۰.۱ [۳] در بین درختان  $n$  - راسی  $S_n$  دارای بیشترین مشخصه استرادا و  $P_n$  دارای کمترین مشخصه استرادا می باشد، به عبارتی:

$$EE(P_n) < EE(T_n) < EE(S_n)$$

که در آن  $P_n$  گراف مسیر  $n$  - راسی و  $S_n$  گراف ستاره و  $T_n$  هر درخت  $n$  - راسی به غیر از  $P_n$  و  $S_n$  می باشد.

برهان. [۴] فرض کنید  $G = (V, E)$  گرافی ساده با مجموعه رئوس  $V$  و مجموعه یال های  $E$  باشد. می دانیم یک گشت در گراف  $G$  دنباله متناوب و نا تهی از مجموعه رئوس و یال ها بصورت  $w = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$  می باشد، در این صورت  $w$  را یک گشت از  $v_0$  به  $v_k$  یا یک  $(v_0, v_k)$  - گشت می گوئیم. راس های  $v_0$  و  $v_k$  به ترتیب راس های آغازی و راس های پایانی و  $v_1 \dots v_k$  راس های داخلی نامیده می شود. عدد صحیح  $k$  را طول گشت می نامیم، هرگاه  $v_0 = v_k$  در این صورت گشت، را گشت بسته به طول  $k$  می نامیم. بدیهی است که هر گراف دوبخشی شامل گشتی بطول فرد نمی باشد. اگر  $w = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$  یک گشت باشد، آنگاه  $w' = v_k e_k v_{k-1} \dots v_2 e_2 v_1 e_1 v_0$  را معکوس گشت  $w$  می نامیم و با  $w^{-1}$  نشان می دهیم. برای یک گراف ساده، یک گشت  $w = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$  به وسیله دنباله ای متناوب از رئوس آن بصورت  $w = v_0 v_1 v_2 \dots v_{k-1} v_k$  مشخص می شود.



شکل ۱.۲: گراف ستاره  $S_n$  و گراف مسیر  $P_n$

لم ۰.۱.۰.۲. فرض کنید  $S_n$  ستاره با رئوس  $\{v_1 v_2 \dots v_{k-1} v_k\}$  به مرکز  $v_1$  نشان داده در شکل (a) ۱.۲ باشد. در این صورت یک تابع  $\xi_1$  به یک از  $W_{2k}(v_1)$  به  $W_{2k}(v_2)$  وجود دارد به طوری که  $\xi_1$  برای  $n \geq 3$  و  $k \geq 1$  پوشا نمی باشد. که  $W_{2k}(v_1)$  و  $W_{2k}(v_2)$  به ترتیب مجموعه گشت های بسته بطول  $2k$  از  $v_1$  و  $v_2$  در  $S_n$  می باشد.

برهان. فرض کنید برای هر  $w \in W_{2k}(v_2)$

$$\xi_1 : W_{2k}(v_2) \rightarrow W_{2k}(v_1)$$

اگر  $w = v_2 v_1 v_{i_1} \dots v_{i_{2k-3}} v_1 v_2$  آنگاه

$$\xi_1(w) = w = v_1 v_2 v_1 v_{i_1} \dots v_{i_{2k-3}} v_1.$$

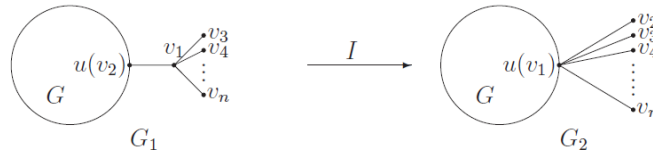
برای مثال در ستاره  $S_5$

$$\xi_1(v_2v_1v_3v_1v_2v_1v_4v_1v_2) = v_1v_2v_1v_3v_1v_2v_1v_4v_1$$

بدیهی است که  $\xi_1$  یک به یک است. در این صورت نمی‌توان یک  $w \in W_{2k}(v_2)$  یافت به طوری که:

$$\xi_1(w) = v_1v_3v_1v_3v_1 \dots v_3v_1 \in W_{2k}(v_1)$$

و  $\xi_1$  برای  $n \geq 3$  و  $k \geq 1$  پوشا نمی‌باشد.  $\square$



شکل ۲.۲: تبدیل  $I$

لم ۲.۱.۰.۲. فرض کنید  $u$  یک رأس غیر تنها از گراف ساده  $G$  باشد. اگر  $G_1$  و  $G_2$  به ترتیب گراف‌های  $G$  با یکی کردن رأس  $v_2$  به  $u$  و مرکز ستاره  $S_n$ ،  $v_1$  به  $u$  حاصل شود، (نشان داده شده در شکل ۲.۲). آنگاه برای  $n \geq 3, k \geq 2$  داریم که

$$M_{2k}(G_1) < M_{2k}(G_2).$$

برهان. فرض کنید  $W_{2k}(G)$  مجموعه گشت‌ها بسته به طول  $2k$  در گراف  $G$  باشد. آنگاه

$$W_{2k}(G_i) = W_{2k}(G) \cup W_{2k}(S_n) \cup A_i$$

یک افزاز باشد. که در آن  $A_i$  مجموعه گشت‌ها بسته به طول  $2k$  در گراف  $G_i$  برای  $i = 1, 2$  باشد، که هر یک از آن‌ها شامل حداقل یک یال در  $E(G)$  و حداقل یک یال در  $E(S_n)$  باشد، بنابراین:

$$M_{2k}(G_i) = |W_{2k}(G)| + |W_{2k}(S_n)| + |A_i| = M_{2k}(G) + M_{2k}(S_n) + |A_i|$$

کافی است نشان دهیم، که  $|A_1| < |A_2|$ . فرض کنید  $\eta_1 : A_1 \rightarrow A_2$  و برای هر  $w \in A_1$ ،  $\eta_1$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\eta_1(w) = (w - w \cap S_n) \cup \xi_1(w \cap S_n).$$

برای مثال

$$\eta_1(u_0 u_1 \dots u_r \underline{v_2 v_1 v_3 v_1 v_2} u'_1 \dots u'_s \underline{v_2 v_1 v_4 v_1 v_2 v_1 v_5 v_1 v_2} u''_1 \dots u''_t u_0)$$

$$= u_0 u_1 \dots u_r \underline{v_1 v_2 v_1 v_3 v_1} u_{-1} \dots u'_s \underline{v_1 v_2 v_1 v_4 v_1 v_2 v_1 v_5 v_1} u''_1 \dots u''_t u_0$$

$$\eta_1(\underline{v_3 v_1 v_2} u_1 \dots u_r \underline{v_2 v_1 v_4 v_1 v_2} u'_1 \dots u'_s \underline{v_2 v_1 v_4 v_1 v_3})$$

$$= \underline{v_3 v_1} u_1 \dots u_r \underline{v_1 v_2 v_1 v_4 v_1} u'_1 \dots u'_s \underline{v_1 v_2 v_1 v_4 v_1 v_3}.$$

که  $u_0, u_1, \dots, u_r, u'_1, \dots, u'_s, u''_1, \dots, u''_t$  رأس‌های در گراف  $G$  می‌باشد. با استفاده از لم ۱.۰.۲ می‌دانیم  $\xi_1$  یک به یک است و به آسانی می‌توان دید  $\eta_1$  نیز یک به یک می‌باشد، ولی نمی‌توان یک  $w \in A_1$

یافت، به طوری که  $\eta_1(w) \in A_2$  و  $\eta_1(w)$  از یال  $v_1 v_2$  در  $G_2$  بگذرد. بنابر این،  $\eta_1$  پوشا نمی‌باشد. در نتیجه  $|A_1| < |A_2|$

$$M_{2k}(G_1) < M_{2k}(G_2).$$

□

لم ۳.۱.۲. فرض کنید  $p_n = v_1 v_2 \dots v_n$  گراف مسیر  $n$  رأسی می‌باشد، (نشان داده شده در شکل (۱.۲(b)). آنگاه یک تابع  $\xi_2$  یک به یک از  $W'_{2k}(v_1)$  به  $W'_{2k}(v_t)$  وجود دارد و  $\xi_2$  نیز برای  $n \geq 3$  و  $1 < t < n$  و  $k \geq 1$  پوشا نمی‌باشد. که  $W'_{2k}(v_1)$  و  $W'_{2k}(v_t)$  به ترتیب مجموعه گشت های بسته به طول  $2k$  از  $v_1$  و  $v_t$  در  $P_n$  می‌باشد.

برهان. اولاً: فرض کنید،  $f : \{v_1, v_2, \dots, v_t\} \rightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$  و  $f(v_i) = v_{t-i+1}$  برای  $i = 1, 2, \dots, t$  آنگاه یک تابع دوسوی  $f$  از  $w_{2k}(v_1)$  در زیر مسیر  $P_t = v_1 v_2 \dots v_t$  به  $w_{2k}(v_t)$  مسیر  $P_t$  را می‌توان به دست آورد.

دوماً: فرض کنید برای هر  $w \in W'_{2k}(v_1)$ ،  $\xi_2 : W'_{2k}(v_1) \rightarrow W'_{2k}(v_t)$  باشد.

(i) اگر  $P_t = v_1 v_2 \dots v_t$ ، یک گشت مانند  $w$  باشد و  $w$  از یال  $v_t v_{t+1}$  نتواند بگذرد، آنگاه

$$\xi_2(w) = f(w);$$

(ii) اگر  $w$  از یال  $v_t v_{t+1}$  بگذرد، در این صورت ما می‌توانیم  $w$  را به صورت  $w = w_1 \cup w_2 \cup w_3$  تجزیه کنیم، که  $w_1$  اولین بخش  $(v_1, v_t)$  از  $w$ ،  $w_3$  آخرین بخش  $(v_t, v_1)$  از  $w$  و  $w_2$  حداکثر بخش‌های داخلی از  $w$  می‌باشد. به عبارتی  $w$  یک گشت بسته از  $v_1$  اولین گذر گشت،  $w_1$  از  $v_1$  به  $v_t$  می‌باشد و گذر بعدی گشت،  $w_2$  از  $v_t$  به  $v_t$  می‌باشد، آخرین گذر گشت،  $w_3$  از  $v_t$  به  $v_1$  می‌باشد. آنگاه  $\xi_2(w) = w^{-1} \cup w_3^{-1} \cup w_2$  در این صورت  $\xi_2(w)$  یک گشت بسته از  $v_t$  که اولین گذر معکوس  $w_1$  از  $v_t$  به  $v_1$  می‌باشد و گذر بعدی معکوس  $w_3$  از  $v_1$  به  $v_t$  می‌باشد، آخرین گذر گشت  $w_2$  از  $v_t$  به  $v_t$  می‌باشد.

برای مثال در گراف مسیر  $P_6 = v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6$  و با فرض  $t = 3$  یک گشت بسته از  $v_1$  که نمی‌تواند، از یال  $v_3 v_4$  در  $P_6$  بگذرد و

$$w' = \underline{v_1 v_2 v_3 v_2 v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_4 v_3 v_2 v_1 v_2 v_3 v_4 v_3 v_2 v_1 v_2 v_1},$$

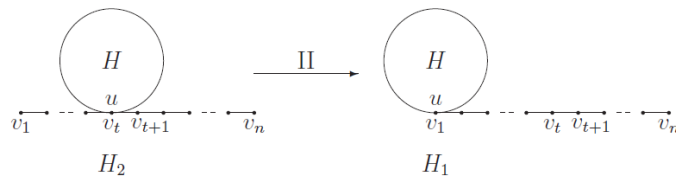
یک گشت بسته از  $v_1$  که از یال  $v_3 v_4$  در  $P_6$  می‌گذرد، آنگاه

$$\xi_2(w) = v_3 v_2 v_1 v_2 v_1 v_2 v_3,$$

$$\xi_2(w') = \underline{v_3 v_2 v_1 v_2 v_1 v_2 v_3 v_2 v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_4 v_3 v_2 v_1 v_2 v_3 v_4 v_3 v_2 v_1}.$$

بدیهی است که  $\xi_2$  یک به یک هست. ولی پوشا نمی‌باشد، زیرا نمی‌توان  $w \in W'_{2k}(v_1)$  به طوری که  $\xi_2(w)$  یک گشت بسته به طول  $2k$  از  $v_t$  که از یال  $v_t v_{t-1}$  در  $P_n$  بگذرد. □

لم ۴.۱.۲. فرض کنید  $u$  یک رأس غیر تنها از گراف ساده  $H$  باشد. اگر  $H_1$  و  $H_2$  به ترتیب گراف حاصل از  $H$  با یکی کردن رأس پایانی  $v_1$  با  $u$  باشد و یکی کردن رأس داخلی  $v_t$  به  $u$  در گراف  $P_n$  باشد (نشان داده شده در شکل ۳.۲). آنگاه برای  $n \geq 3$ ،  $k \geq 2$  داریم  $M_{2k}(H_1) < M_{2k}(H_2)$  می‌باشد.



شکل ۳.۲: تبدیل II

برهان. فرض کنید  $B_i$  مجموعه گشت های به طول  $2k$  از  $H_i$  برای  $i = 1, 2$  باشد، هریک از آن ها هر دو یال حداقل یکی در  $E(H)$  و حداقل یکی در  $E(P_n)$  به طور مشابه با لم ۲.۱.۲ کافی است که نشان دهیم،  $|B_1| < |B_2|$ .

فرض کنید  $B_1 \rightarrow B_2 : \eta_2$  برای هر  $w \in B_1$ ، تابع  $\eta_2$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\eta_2(w) = (w - w \cap P_n) \cup \xi_2(w \cap P_n).$$

با استفاده از لم ۳.۱.۲  $\xi_2$  یک به یک است، بنابراین نتیجه می شود که  $\eta_2$  نیز یک به یک می باشد. اما  $\eta_2$  پوشا نیست، زیرا نمی توان  $w \in B_1$  که  $\eta_2(w) \in B_2$  یافت، بطوریکه از یال  $v_t v_{t-1}$  در  $H_2$  بگذرد. بنابراین  $|B_1| < |B_2|$ .  $\square$

قضیه ۵.۱.۲. اگر  $T_n$  گراف درخت با  $n$  رأس، غیر از  $S_n$  و  $P_n$  باشد، انگاه

$$EE(P_n) < EE(T_n) < EE(S_n).$$

به عبارتی در بین درختا با  $n$  رأس،  $P_n$  دارای کمترین مشخصه استرداد می باشد و  $S_n$  دارای بیشترین مشخصه استرداد می باشد.

برهان. با تکرار تبدیل I شکل ۲.۲ هر درخت  $n$  رأس، را می توان به ستاره  $n$  تغییر داد. با استفاده از لم ۲.۱.۲ داریم  $M_{2k}(T) < M_{2k}(S_n)$  برای  $k \geq 2$  بنا براین:

$$EE(T) = \sum_{k \geq 0} \frac{M_{2k}(T)}{2k!} < \sum_{k \geq 0} \frac{M_{2k}(S_n)}{2k!} = EE(S_n).$$

از طرفی دیگر با از تکرار تبدیل II شکل ۳.۲ هر درخت  $n$  رأس، را می توان به مسیر  $n$  تغییر داد. با استفاده از لم ۴.۱.۲ داریم،  $M_{2k}(T) > M_{2k}(P_n)$  برای  $k \geq 2$  بنا براین:

$$EE(T) = \sum_{k \geq 0} \frac{M_{2k}(T)}{2k!} > \sum_{k \geq 0} \frac{M_{2k}(P_n)}{2k!} = EE(P_n).$$

در نتیجه  $EE(P_n) < EE(T_n) < EE(S_n)$ . بنابراین قضیه ۵.۱.۲ درستی حدس ۱ را ثابت می کند.  $\square$

$\square$

حدس ۲. [۳] در بین گراف های همبند و از مرتبه  $n$  گراف مسیر  $P_n$  دارای کمترین مشخصه استرداد و گراف کامل  $K_n$  دارای بیشترین مشخصه استرداد می باشد.

برهان. [۴] فرض کنید  $G$  یک گراف همبند و از مرتبه  $n$  و  $e$  یک یال از گراف  $G$  باشد. گراف  $G' = G - e$  گرافی است که با حذف یال  $e$  از گراف  $G$  حاصل می‌شود. بدیهی است هرگشت بسته به طول  $k$  در  $G'$  یک گشت بسته به طول  $k$  در  $G$  می‌باشد. بنابراین  $M_k(G') \leq M_k(G)$  می‌باشد،  $EE(G') \leq EE(G)$  و در حالت خاص اگر  $T$  یک درخت پوشا از  $G$  باشد، آنگاه  $M_k(T) \leq M_k(G)$ ،  $EE(T) \leq EE(G)$  از قضیه ۵.۱.۲ داریم:

$$EE(P_n) \leq EE(G).$$

قضیه ۶.۱.۲. اگر  $G$  گراف ساده و همبند از مرتبه  $n$  غیر از  $K_n$  و  $P_n$  باشد، آنگاه

$$EE(P_n) < EE(G) < EE(K_n).$$

به عبارتی در بین گراف‌های همبند و از مرتبه  $n$  گراف مسیر  $P_n$  دارای کمترین مشخصه استرادا و گراف کامل  $K_n$  دارای بیشترین مشخصه استرادا می‌باشد. بنابراین قضیه ۶.۱.۲ درستی حدس ۲ ثابت می‌کند.

□



# فصل ۳

## گراف‌های یک دور و دو دور با بیشترین مشخصه استرادا

### ۱.۳ مقدمه

در این فصل گراف‌های با بیشترین مشخصه استرادا در میان گراف‌های با یک دور و دو دور را مشخص می‌کنیم.

**تعریف ۱.۱.۳.** فرض کنید  $G = (V, E)$  یک گراف ساده و همبند با مجموعه رأس‌های  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  و مجموعه یال‌های  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  باشد. اگر  $m = n - 1 + c$  آنگاه  $G$  را یک  $c$ -دور می‌گویند.

یک کلاس  $\mathcal{S}$  از گراف‌ها، یک گراف  $G \in \mathcal{S}$  دارای بیشترین استرادا نامیده می‌شود، اگر  $EE(G) \geq EE(H)$  برای  $H \in \mathcal{S}$  باشد. بیشترین مشخصه استرادا درختان، را می‌توان در [۶] دید. به‌طور طبیعی مسأله بعدی مشخص کردن، بیشترین مشخصه استراداد در بین همه گراف‌های با یک دور و دو دور می‌باشد. در این فصل ما گراف‌های با یک دور و دو دور، که دارای بیشترین مشخصه استرادا می‌باشند، را مشخص می‌کنیم.

برای دو رأس  $u, v \in V(G)$  یک  $(u, v)$ -گشت، گشتی از  $u$  به  $v$  در گراف  $G$  می‌باشد. فرض کنید  $\mathcal{W}_k(G; u, v)$  مجموعه از  $(u, v)$ -گشت به طول  $k$  در گراف  $G$  باشد، فرض کنید  $M_k(G; u, v) = |\mathcal{W}_k(G; u, v)|$  باشد. همچنین برای هر عدد صحیح  $k$  نیز داریم،  $M_k(G; u, v) = M_k(G; v, u)$  باشد. فرض کنید  $G_1$  و  $G_2$  دو گراف با  $u_1, v_1 \in V(G_1)$  و  $u_2, v_2 \in V(G_2)$  باشد. اگر برای هر عدد صحیح  $k$  داشته باشیم  $M_k(G_1; u_1, v_1) \leq M_k(G_2; u_2, v_2)$  آنگاه می‌نویسیم  $(G_1; u_1, v_1) \preceq (G_2; u_2, v_2)$  اگر داشته باشیم  $(G_1; u_1, v_1) \preceq (G_2; u_2, v_2)$  آنگاه حداقل یک عدد صحیح و مثبت مانند  $k$  وجود دارد، به‌طوری که داشته باشیم  $M_k(G_1; u_1, v_1) < M_k(G_2; u_2, v_2)$  باشد، آنگاه می‌

نویسیم  $(G_1; u_1, v_1) \prec (G_2; u_2, v_2)$ . فرض کنید،  $W_k(G; u) = W_k(G; u, u)$ ،  $M_k(G; u) = M_k(G; u, u)$ ،  $d_G(u)$  درجه رأس  $u$  در گراف  $G$  باشد، بدیهی است که  $M_2(G; u) = d_G(u)$  می‌باشد برای  $u \in V(G)$  باشد. برای هر زیر مجموعه  $M$  از یال‌های گراف  $G$ ،  $G - M$  گرافی است، حاصل از  $G$  با حذف یال‌های  $M$  از گراف  $G$  می‌باشد.  $G + M$  گرافی است، حاصل از  $G$  با اضافه کردن یال‌های  $M$  به گراف  $G$  می‌باشد.

لم ۲.۱.۳. فرض کنید  $H$  یک گراف (نه لزوماً همبند) با  $u, v \in V(H)$  باشد.  $w_i \in V(H)$ ،  $uw_i, vw_i \notin E(H)$  برای  $i = 1, 2, \dots, r$  که  $r$  یک عدد صحیح و مثبت می‌باشد. فرض کنید  $E_u = H + E_u$  و  $E_v = \{vw_1, vw_2, \dots, vw_r\}$  و  $\{uw_1, uw_2, \dots, uw_r\}$  همچنین فرض کنید  $H_u = H + E_u$  و  $H_v = H + E_v$  باشد. اگر  $(H; u) \prec (H; v)$  و  $(H; w_i, u) \preceq (H; w_i, v)$  باشد، برای  $1 \leq i \leq r$ ، آنگاه  $EE(H_u) < EE(H_v)$  می‌باشد.

برهان. فرض کنید برای  $x_1, x_2 \in V_u$  مجموعه از  $(x_1, x_2) -$  گشت به طول  $k$  در  $H_u$  که یال‌های آغازی و پایانی آن در  $E_u$  باشد، را به صورت  $\mathcal{T}_k(H_u; x_1, x_2)$  نمایش می‌دهیم. برای اثبات لم بالا لم زیر را بیان می‌کنیم.

لم ۳.۱.۳. [۵]. فرض کنید  $(H; u) \prec (H; v)$  و برای  $1 \leq i \leq r$  از  $(H; w_i, u) \preceq (H; w_i, v)$  باشد.

- (i)  $|\mathcal{T}_k(H_u; u, u)| \leq |\mathcal{T}_k(H_v; v, v)|$ ;
- (ii)  $|\mathcal{T}_k(H_u; u, x_2)| \leq |\mathcal{T}_k(H_v; v, x_2)|$  برای  $x_2 \in V_u - \{u\}$ ;
- (iii)  $|\mathcal{T}_k(H_u; x_1, u)| \leq |\mathcal{T}_k(H_v; x_1, v)|$  برای  $x_1 \in V_u - \{u\}$ ;
- (iv)  $|\mathcal{T}_k(H_u; x_1, x_2)| \leq |\mathcal{T}_k(H_v; x_1, x_2)|$  برای  $x_1, x_2 \in V_u - \{u\}$ .

برای هر عدد صحیح و مثبت  $k$ ، فرض کنید که  $S_u(k)$  و  $S_v(k)$  به ترتیب مجموعه گشت‌های بسته به طول  $k$  در  $H_u$  و  $H_v$  که شامل بعضی یال‌ها در  $H_u$  و بعضی  $H_v$  می‌باشد.

آنگاه

$$M_k(H_u) = M_k(H) + |S_u(k)|,$$

$$M_k(H_v) = M_k(H) + |S_v(k)|.$$

بنابراین کافی است که ما برای هر عدد صحیح و مثبت  $k$  نشان دهیم که  $|S_u(k)| \leq |S_v(k)|$  می‌باشد. نامساوی اکید آن برای هر عدد صحیح و مثبت  $k$  برقرار می‌باشد.

پس ما هر مؤلفه  $W \in S_u(k)$  را به سه بخش یکتای  $W_1 W_2 W_3$  تجزیه می‌کنیم، که  $W_1$  گشتی در  $H$  که طول آن ممکن است صفر باشد،  $W_2$  طولانی‌ترین گشت از  $W$  در  $H_u$  که آغاز و پایان آن در یال‌های  $E_u$  می‌باشد و  $W_3$  گشتی در  $H$  که طول آن ممکن است صفر باشد. با انتخاب  $W_2$  که ما می‌دانیم  $W_2$  از برخی رأس در  $V_u$  شروع و به برخی رأس‌ها در  $V_u$  پایان می‌پذیرد.

فرض کنید

$$S_u^{(x_1, x_2)}(k) = \{W \in S_u(k) : \text{گشت} - (x_1, x_2) \text{ یک } W_2\},$$

که  $x_1, x_2 \in V_u$  آنگاه

$$\begin{aligned} |S_u(k)| &= \sum_{x_1, x_2 \in V_u} |S_u^{(x_1, x_2)}(k)| = |S_u^{(u, u)}(k)| + \sum_{x_2 \in V_u - \{u\}} |S_u^{(u, x_2)}(k)| \\ &+ \sum_{x_1 \in V_u - \{u\}} |S_u^{(x_1, u)}(k)| + \sum_{x_1, x_2 \in V_u - \{u\}} |S_u^{(x_1, x_2)}(k)|. \end{aligned}$$

به طور مشابه فرض کنید

$$S_v^{(x_1, x_2)}(k) = \{W \in S_v(k) : \text{گشت} - (x_1, x_2) \text{ یک } W_2\}$$

که  $x_1, x_2 \in V_v$  آنگاه

$$\begin{aligned} |S_v(k)| &= \sum_{x_1, x_2 \in V_v} |S_v^{(x_1, x_2)}(k)| = |S_v^{(v, v)}(k)| + \sum_{x_2 \in V_v - \{v\}} |S_v^{(u, x_2)}(k)| \\ &+ \sum_{x_1 \in V_v - \{v\}} |S_v^{(x_1, v)}(k)| + \sum_{x_1, x_2 \in V_v - \{v\}} |S_v^{(x_1, x_2)}(k)|. \end{aligned}$$

اکنون داریم :

$$\begin{aligned} |S_u^{(u, u)}(k)| &= \sum_{\substack{k_1 + k_2 + k_3 = k \\ k_1, k_2 \geq 0, k_3 \geq 1}} \sum_{y \in V(H)} M_{k_1}(H; y, u) \cdot |\mathcal{T}_{k_2}(H_u; u, u)| \cdot M_{k_3}(H; u, y) \\ &= \sum_{\substack{k_1 + k_2 + k_3 = k \\ k_1, k_2 \geq 0, k_3 \geq 1}} |\mathcal{T}_{k_2}(H_u; u, u)| \sum_{y \in V(H)} M_{k_1}(H; y, u) \cdot M_{k_3}(H; u, y) \\ &= \sum_{\substack{k_1 + k_2 + k_3 = k \\ k_1, k_2 \geq 0, k_3 \geq 1}} |\mathcal{T}_{k_2}(H_u; u, u)| \cdot M_{k_1 + k_2}(H; u, u). \end{aligned}$$

به طور مشابه نیز داریم:

$$|S_v^{(v, v)}(k)| = \sum_{\substack{k_1 + k_2 + k_3 = k \\ k_1, k_2 \geq 0, k_3 \geq 1}} |\mathcal{T}_{k_2}(H_v; v, v)| \cdot M_{k_1 + k_2}(H; v, v).$$

با استفاده از لم،  $(i) 3.1.3$  برای هر عدد صحیح و مثبت  $s$  داریم که  $|\mathcal{T}_s(H_u; u, u)| \leq \mathcal{T}_s(H_v; v, v)$  می باشد. چون  $(H; u) \prec (H; v)$  است، پس داریم که  $M_s(H; u, u) \leq M_s(H; v, v)$  می باشد.

و نا مساوی اکید آن برای برخی اعداد صحیح و مثبت  $s$  نیز برقرار می‌باشد. بنابراین برای عدد صحیح و مثبت  $k$  نیز داریم،  $|S_u^{(u,u)}(k)| \leq |S_v^{(v,v)}(k)|$  و نا مساوی اکید آن برای برخی اعداد صحیح و مثبت  $k$  نیز برقرار می‌باشد. مشابه لم (ii), (iii), ۳.۱.۳ و (iv) داریم که:

$$\begin{aligned} \sum_{x_2 \in V_u - \{u\}} |S_u^{(u,x_2)}(k)| &= \sum_{x_2 \in V_v - \{v\}} \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1, k_2 \geq 0, k_3 \geq 1}} |\mathcal{T}_{k_2}(H_u; u, x_2)| \\ &M_{k_1+k_3}(H; x_2, u), \\ &\leq \sum_{x_2 \in V_v - \{v\}} |S_u^{(v,x_2)}(k)| = \sum_{x_2 \in V_v - \{v\}} \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1, k_2 \geq 0, k_3 \geq 1}} |\mathcal{T}_{k_2}(H_u; u, x_2)| M_{k_1+k_3}(H; x_2, u), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{x_1 \in V_u - \{u\}} |S_u^{(x_1,u)}(k)| &= \sum_{x_1 \in V_v - \{v\}} \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1, k_2 \geq 0, k_3 \geq 1}} |\mathcal{T}_{k_2}(H_{x_1}; u)| M_{k_1+k_3}(H; u, x_2), \\ &\leq \sum_{x_1 \in V_v - \{v\}} |S_u^{(x_1,v)}(k)| = \sum_{x_1 \in V_v - \{v\}} \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1, k_2 \geq 0, k_3 \geq 1}} |\mathcal{T}_{k_2}(H_{x_1}; v)| \\ &M_{k_1+k_3}(H; v, x_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{x_1, x_2 \in V_u - \{u\}} |S_u^{(x_1, x_2)}(k)| &= \sum_{x_1, x_2 \in V_u - \{u\}} \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1, k_2 \geq 0, k_3 \geq 1}} |\mathcal{T}_{k_2}(H_u; x_1, x_2)| M_{k_1+k_3}(H; x_2, x_1), \\ &\leq \sum_{x_1, x_2 \in V_v - \{v\}} |S_v^{(x_1, x_2)}(k)| \sum_{x_1, x_2 \in V_v - \{v\}} \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1, k_2 \geq 0, k_3 \geq 1}} |\mathcal{T}_{k_2}(H_v; x_1, x_2)| M_{k_1+k_3}(H; x_2, x_1). \end{aligned}$$

بنابراین برای هر عدد صحیح و مثبت  $k$  نیز داریم که  $|S_u(k)| \leq |S_v(k)|$  می‌باشد. نامساوی اکید آن  $\square$  برای برخی اعداد صحیح و مثبت مانند  $k$  نیز برقرار می‌باشد.

### ۲.۳ لم‌ها

در این بخش لم‌های که از آن‌ها استفاده می‌کنیم، را اثبات می‌کنیم.

لم ۱.۲.۳. فرض کنید  $G$  یک گراف با دور یکتای  $C$  باشد. فرض کنید  $u$  رأسی بر روی  $C$  با همسایگی مستقل  $u_1$ ، و  $u_2$  یک همسایگی از  $u$  بر روی  $C$  باشد. آنگاه  $(G; u_1) \prec (G; u_2)$  می‌باشد.

برهان. فرض کنید  $k$  یک عدد صحیح و مثبت باشد. در این صورت نگاشت  $f$  از  $\mathcal{W}_k(G; u_1)$  به  $\mathcal{W}_k(G; u_2)$  تعریف می‌کنیم. برای  $W \in \mathcal{W}_k(G; u_1)$  فرض کنید  $f(W)$  گشتی حاصل از  $W$  که از جایگذاری اولین رأس  $(u_1)$  با آخرین رأس  $u_1$  با  $(u_2)$  به دست می‌آید. بدیهی است، که  $f(W) \in \mathcal{W}_k(G; u_2)$  و تابع  $f$  نیز یک به یک می‌باشد و به عبارتی  $M_k(G; u_1) \leq M_k(G; u_2)$  می‌باشد. از آنجا که  $d_G(u_2) > d_G(u_1) = 1$  می‌باشد، بنابراین داریم  $M_2(G; u_1) < M_2(G; u_2)$  می‌باشد و این یعنی  $(G; u_1) \prec (G; u_2)$  است.

□

فرض کنید  $C_n$  دوری با  $n \geq 3$  رأس باشد.  $\mathbb{U}(n, m)$  مجموعه گراف‌های  $n$  رأسی با یک دور که از اتصال  $n - m$  رأس مستقل به بعضی رأس‌های دور  $C_m$  به دست می‌آید که  $3 \leq m \leq n$  می‌باشد.

لم ۲.۲.۳. فرض کنید  $G$  یک گراف  $n$  رأسی با بیشترین مشخصه استرادا در بین گراف‌های با یک دور باشد، که طول دور آن  $m \geq 3$  می‌باشد، آنگاه  $G \in \mathbb{U}(n, m)$  می‌باشد.

برهان. فرض کنید  $G \notin \mathbb{U}(n, m)$  باشد.  $C_m$  دور یکتای  $G$  باشد، آنگاه حداقل یک رأسی مانند  $u$  بر روی  $C_m$  هست، با حداقل یک همسایگی غیر مستقل، مانند  $u_1$  که خارج از  $C_m$  باشد.  $v_1, v_2, \dots, v_t$  همسایگی‌های  $u_1$  در گراف  $G$  که غیر از  $u$  می‌باشد و  $u_2$  همسایگی از  $u$  بر روی  $C_m$  در گراف  $G$  باشد. فرض کنید  $E_{u_1} = \{u_1 v_1, u_1 v_2, \dots, u_1 v_t\}$ ،  $E_{u_2} = \{u_2 v_1, u_2 v_2, \dots, u_2 v_t\}$  و  $H = G - E_{u_1}$  باشد. با استفاده از لم ۱.۲.۳ داریم  $(H; u_1) \prec (H; u_2)$  می‌باشد، با استفاده از لم ۲.۱.۳  $EE(G) < EE(H + E_{u_2})$  می‌باشد که این تناقض است.

□

اگر  $G$  گراف دوبخشی در اثبات لم ۲.۲.۳ باشد، آنگاه  $G$  و  $H + E_{u_2}$  دارای دو بخش یکسان می‌باشد، با استدلال مشابه لم زیر را داریم.

لم ۳.۲.۳. اگر  $G$  گرافی با بیشترین مشخصه استرادا در بین گراف‌های دوبخشی با یک دور که شامل  $(p, q) -$  بخش می‌باشد، که  $p \geq q \geq 2$ ، آنگاه  $G \in \mathbb{U}(p + q, m)$  که  $m \geq 4$  یک عدد صحیح زوج می‌باشد.

برای دو رأس مجزای  $u, v \in V(G)$ ، فرض کنید  $\mathcal{W}_k(G; u, [v])$  مجموعه از  $(u, u) -$  گشت به طول  $k$  در گراف  $G$  که شامل رأس  $v$  باشد. فرض کنید  $M_k(G; u, [v]) = |\mathcal{W}_k(G; u, [v])|$  باشد.

لم ۴.۲.۳. فرض کنید  $G$  درختی که از مسیر  $P_t = v_1 v_2 \dots v_t$  با اتصال  $n_i$  رأس مستقل به  $v_i$  به دست آید، که  $i = 1, 2, \dots, t$  و  $n_i \geq 0, t \geq 5$  اگر  $n_1 \leq n_3$  باشد، آنگاه

(i)  $(G; v_1) \prec (G; v_3)$ ;

(ii)  $(G; v_t, v_1) \preceq (G; v_t, v_3)$ .

برهان. فرض کنید  $H_1$  و  $H_2$  مؤلفه‌های  $G - v_1v_2$  و  $G - v_2v_3$  که شامل رأس  $v_2$  باشد. بدیهی است که  $H_1$  زیرگراف سره از  $H_2$  است، زیرا  $n_1 \leq n_2$  و  $t \geq 5$  می‌باشد. بنابراین  $(H_1; v_1) \prec (H_2; v_3)$  و  $(H_1; v_1, v_2) \prec (H_2; v_3, v_2)$  می‌باشد. فرض کنید  $k$  یک عدد صحیح و مثبت باشد. در این صورت

$$M_k(G; v_1) = M_k(H_1; v_1) + M_k(G; v_1, [v_3])$$

و

$$M_k(G; v_3) = M_k(H_2; v_3) + M_k(G; v_3, [v_1]).$$

بنابراین کافی است که نشان دهیم  $M_k(G; v_1, [v_3]) \leq M_k(G; v_3, [v_1])$  می‌باشد. برای  $W \in \mathcal{W}_k(G; v_1, [v_3])$  ما  $W$  را به دو بخش یکتای  $W_1W_2$  تجزیه می‌کنیم که  $W_1$  کوتاه‌ترین  $(v_1, v_3)$  - بخش از  $W$  و  $W_2$  باقیمانده  $(v_3, v_1)$  - بخش از  $W$  می‌باشد. آنگاه

$$M_k(G; v_1, [v_3]) = \sum_{\substack{k_1+k_2=k \\ k_1, k_2 \geq 2}} M_{k_1-1}(H_1; v_1, v_2) M_{k_2}(G; v_3, v_1).$$

به‌طور مشابه

$$M_k(G; v_3, [v_1]) = \sum_{\substack{k_1+k_2=k \\ k_1, k_2 \geq 2}} M_{k_1-1}(H_1; v_3, v_2) M_{k_2}(G; v_1, v_3).$$

چون برای هر عدد صحیح و مثبت  $k_2$  داریم  $M_{k_2}(G; v_1, v_3) = M_{k_2}(G; v_3, v_1)$  است، بنابراین

$$M_k(G; v_1, [v_3]) \leq M_k(G; v_3, [v_1]).$$

(ii) فرض کنید  $u_1, u_2, \dots, u_{n_1}$  و  $w_1, w_2, \dots, w_{n_2}$  همسایگی‌های مستقل از رأس‌های  $v_1$  و  $v_3$  در گراف  $G$  خارج از مسیر  $P_t$  باشد. برای عدد صحیح و مثبت  $k$  نگاشت  $f$  از  $\mathcal{W}_k(G; v_t, v_1)$  به  $\mathcal{W}_k(G; v_t, v_3)$  تعریف می‌کنیم.  $W \in \mathcal{W}_k(G; v_1, [v_3])$  ما  $W$  را به دو بخش یکتای  $W_1W_2$  تجزیه می‌کنیم، که  $W_1$  طولانی‌ترین  $(v_t, v_2)$  - بخش از  $W$  و  $W_2$  باقیمانده  $(v_2, v_1)$  - بخش از  $W$  می‌باشد. فرض کنید  $f(W) = f(W_1)f(W_2)$  که  $f(W_1) = W_1$  و  $f(W_2) = f(W_2)$  یک  $(v_2, v_3)$  - گشت که از  $W_2$  با جایگذاری  $v_1$  با  $v_3$  و  $u_i$  با  $w_i$  برای  $i = 1, 2, \dots, n_1$  به دست می‌آید. بدیهی است که  $f(W) \in \mathcal{W}_k(G; v_t, v_3)$  یک به یک می‌باشد. بنابراین  $M_k(G; v_t, v_1) \leq M_k(G; v_t, v_3)$  است.

□

لم ۵.۲.۳. فرض کنید  $G \in \mathcal{U}(n, m)$  باشد که  $n \geq m \geq 5$  می‌باشد.  $C_m = v_1v_2 \dots v_mv_1$  یک دور یکتای از  $G$  باشد و  $d_G(v_3) = \max\{d_G(v_i) : 1 \leq i \leq m\}$  باشد. اگر  $G_1 = G - \{v_1v_m\} + \{v_3v_m\}$  آنگاه  $EE(G) < EE(G_1)$  می‌باشد.

برهان. فرض کنید  $H = G - \{v_1v_m\}$  باشد، چون  $d_G(v_3) = \max\{d_G(v_i) : 1 \leq i \leq m\}$  استفاده از لم ۴.۲.۳ داریم  $(H; v_1) \prec (H; v_3)$  و  $(H; v_m, v_1) \leq (H; v_m, v_3)$  باشد، در این صورت چون  $G = H + v_1v_m$  و  $G_1 = H + v_3v_m$  می‌باشد، بنابراین نتیجه با استفاده از لم ۲.۱.۳ به دست می‌آید.

□

ملاحظه ۶.۲.۳. گراف  $G_1$  در اثبات لم ۵.۲.۳ گراف  $n$  رأسی با یک دور که طول دور آن  $2 - m$  می‌باشد.

فرض کنید  $C_3(n_1, n_2, n_3)$  یک گراف با یک دور که از دور  $C_3 = v_1 v_2 v_3 v_1$  با اتصال  $n_i$  رأس مستقل به  $v_i$  برای  $i = 1, 2, 3$  به دست می‌آید  $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 0$  است. همچنین فرض کنید،  
 $C_3(n_1) = C_3(n_1, 0, 0)$  و  $C_3(n_1, n_2) = C_3(n_1, n_2, 0)$   
باشد.

لم ۷.۲.۳. اگر  $a \geq 1$  و  $b \geq 0$  باشد، آنگاه  $(C_3(a, b); v_1) \prec (C_3(a, b); v_3)$  است.

برهان. فرض کنید  $H_1$  و  $H_2$  به ترتیب مؤلفه‌های از  $C_3(a, b) - \{v_1 v_3, v_1 v_2\}$  و  $C_3(a, b) - \{v_1 v_3, v_1 v_2\}$  که شامل رأس  $v_2$  باشد. چون  $a \geq 1$  بنابراین  $H_1$  یک زیرگراف سره  $H_2$  می‌باشد، در این صورت  $(H_1; v_3) \prec (H_2; v_1)$  و  $(H_1; v_3) \preceq (H_2; v_1, v_2)$  می‌باشد. توجه کنید که برای عدد صحیح و مثبت  $k$  داریم:

$$M_k(C_3(a, b); v_3) = M_k(H_1; v_3) + M_k(C_3(a, b); v_3, [v_1])$$

و

$$M_k(C_3(a, b); v_1) = M_k(H_2; v_1) + M_k(C_3(a, b); v_1, [v_3]).$$

بنابراین کافی است، که نشان دهیم

$$M_k(C_3(a, b); v_3, [v_1]) \leq M_k(C_3(a, b); v_1, [v_3]).$$

برای  $W \in \mathcal{W}_k(C_3(a, b); v_3, [v_1])$ ، ما  $W$  را به دو بخش یکتای  $W_1 W_2$  تجزیه می‌کنیم، که  $W_1$  کوتاه‌ترین  $(v_3, v_1)$  - بخش از  $W$  و  $W_2$  باقیمانده  $(v_1, v_3)$  - بخش از  $W$  می‌باشد. توجه کنید که  $W_1$  از یک  $(v_3, v_3)$  - گشت در  $H_1$  تشکیل می‌شود، که ممکن است طول آن صفر و یک یال تنها  $v_3 v_1$  داشته باشد، یا یک  $(v_3, v_2)$  - گشت در  $H_1$  و یک یال تنها  $v_2 v_1$  داشته باشد. آنگاه

$$M_k(C_3(a, b); v_3, [v_1]) = \sum_{\substack{k_1+k_2=k \\ k_1, k_2 \geq 1}} [M_{k_1-1}(H_1; v_3) + M_{k_1-1}(H_1; v_3, v_2)] M_{k_2}(C_3(a, b); v_1, v_3).$$

به‌طور مشابه داریم:

$$M_k(C_3(a, b); v_1, [v_3]) = \sum_{\substack{k_1+k_2=k \\ k_1, k_2 \geq 1}} [M_{k_1-1}(H_2; v_1) + M_{k_1-1}(H_2; v_1, v_2)] M_{k_2}(C_3(a, b); v_3, v_1).$$

با مقایسه طرف راست دو معادله بالا داریم  $M_k(C_3(a, b); v_3, [v_1]) \leq M_k(C_3(a, b); v_1, [v_3])$  می‌باشد.  $\square$

لم ۸.۲.۳. فرض کنید  $n_1, n_2, n_3$  اعداد صحیح و نامنفی باشند. اگر  $n_2 \geq 1$  آنگاه

$$EE(C_3(n_1, n_2, n_3)) < EE(C_3(n_1 + n_2, n_3)).$$

برهان. فرض کنید  $H$  گرافی باشد که از اجتماع رأس‌های مجزا  $C_3(n_1, n_2)$  و رأس‌های تنهای

$u_1, u_2, \dots, u_{n_2}$  باشد. با استفاده از لم ۷.۲.۳ داریم

$$(C_3(n_1, n_3); v_3) \prec (C_3(n_1, n_3); v_1)$$

می‌باشد یا به عبارتی  $(H; v_3) \prec (H; v_1)$  می‌باشد. فرض کنید  $E_{v_3} = \{v_3 u_1, v_3 u_2, \dots, v_3 u_{n_2}\}$  و

$E_{v_1} = \{v_1 u_1, v_1 u_2, \dots, v_1 u_{n_2}\}$  باشد. روشن است که  $C_3(n_1, n_2, n_3) \cong H + E_{v_3}$  و  $C_3(n_1 + n_2, n_3) \cong H + E_{v_1}$

است. بنابراین نتیجه با استفاده از لم ۲.۱.۳ حاصل می‌شود.  $\square$

فرض کنید  $G \in \mathbb{U}(n, 3)$  که  $n \geq 4$  می‌باشد. با استفاده از لم ۸.۲.۳ داریم

$$EE(G) \leq EE(C_3(n-3))$$

می‌باشد و تساوی برقرار می‌شود، اگر و فقط اگر  $G \cong C_3(n-3)$  باشد.

فرض کنید  $C_4(n_1, n_2, n_3, n_4)$  گرافی با یک دور که از  $C_4 = v_1 v_2 v_3 v_4 v_1$  با اتصال  $n_i$  رأس مستقل

به  $v_i$  برای  $i = 1, 2, 3, 4$  که  $n_1 \geq n_3 \geq 0, n_2 \geq n_4 \geq 0, n_1 + n_3 \geq n_2 + n_4$  می‌باشد، به

دست می‌آید. همچنین فرض کنید  $C_4(n_1, n_2) = C_4(n_1, n_2, 0, 0)$  و  $C_4(n_1) = C_4(n_1, 0, 0, 0)$

باشد. با استدلالی مشابه اثبات‌های لم‌های ۷.۲.۳ و ۸.۲.۳ لم زیر را داریم.

لم ۹.۲.۳. فرض کنید  $n_1, n_2, n_3, n_4$  اعداد صحیح و نامنفی باشند.

(i) اگر  $n_3 \geq 1$  یا  $n_4 \geq 1$  باشد، آنگاه  $EE(C_4(n_1, n_2, n_3, n_4)) < EE(C_4(n_1 + n_3, n_2 + n_4))$

می‌باشد.

(ii) اگر  $n_1 \geq n_2 \geq 1$  باشد، آنگاه  $EE(C_4(n_1, n_2)) < EE(C_4(n_1 + n_2))$  می‌باشد.

### ۳.۳ گراف‌های با یک دور با بیشترین مشخصه استرادا

در این بخش گراف‌های شامل بیشترین مقدار مشخصه استرادا در بین گراف‌های با یک دور را مشخص می‌کنیم.

قضیه ۱.۳.۳. فرض کنید  $G$  یک گراف دوبخشی با  $(p, q)$  - بخش و یک دور باشد، که  $p \geq q \geq 2$

می‌باشد، آنگاه  $EE(G) \leq EE(C_4(p-2, q-2))$  تساوی برقرار می‌شود، اگر و فقط اگر  $G \cong C_4(p-2, q-2)$

باشد.

برهان. فرض کنید  $G$  گراف با بیشترین مشخصه استرادا در بین گراف‌های دوبخشی،  $(p, q)$  - بخش

و یک دور باشد. طول دور یکتای از  $G$  باشد، بدیهی است که  $m \geq 4$  عددی زوج می‌باشد. با

استفاده از لم‌های ۳.۲.۳ و ۵.۲.۳ و ملاحظه ۶.۲.۳ داریم  $G \in \mathbb{U}(p+q, 4)$  می‌باشد به عبارتی

$G = C_4(n_1, n_2, n_3, n_4)$  که  $n_2 + n_4 = q - 2$  و  $n_1 + n_3 = p - 2$  باشد. به علاوه اگر در لم ۹.۲.۳

(i)،  $n_3 = n_4 = 0$  قرار دهیم، بنابراین  $G \cong C_4(p-2, q-2)$  می‌باشد.  $\square$



با استفاده از قضیه ۱.۳.۳ و لم ۹.۲.۳ (ii) قضیه زیر را داریم.

**قضیه ۲.۳.۳.** فرض کنید  $G$  گراف دویخس  $n \geq 4$  رأس و یک دور باشد. آنگاه  $EE(G) \leq EE(C_4(n-4))$  می‌باشد و تساوی برقرار می‌شود، اگر و فقط اگر  $G \cong C_4(n-4)$  باشد.

چند جمله ای مشخصه گراف  $G$  را چندجمله ای مشخصه  $A(G)$  و با  $\varphi(G, x)$  نمایش می‌دهیم. برای یک زیر مجموعه سره  $V_1$  از  $V(G)$ ، گراف  $G - V_1$  گرافی که از  $G$  با حذف رأس‌های  $V_1$  به دست می‌آید و فرض کنید  $G - \{v\} = G - v$  برای  $v \in V(G)$  باشد.

**لم ۳.۳.۳.** [۲] فرض کنید  $v$  رأسی از گراف  $G$  باشد و  $\mathcal{C}(v)$  مجموعه دورهای شامل رأس  $v$  باشد. آنگاه

$$\varphi(G, x) = x \cdot \varphi(G - v, x) - \sum_{vw \in E(G)} \varphi(G - v - w, x) - 2 \sum_{Z \in \mathcal{C}(v)} \varphi(G - V(Z), x),$$

که  $\varphi(G - v - w, x) = 1$  اگر  $G$  یک یال تنها باشد و  $\varphi(G - V(Z), x) = 1$  اگر  $G$  یک دور باشد.

**لم ۴.۳.۳.** برای  $n \geq 4$ ،  $EE(C_3(n-3)) > EE(C_4(n-4))$  می‌باشد.

**برهان.** با استفاده از لم ۳.۳.۳ داریم که  $\varphi(C_3(n-3), x) = x^{n-4}f(x)$  و  $\varphi(C_4(n-4), x) = x^{n-4}g(x)$  که

$$f(x) = x^4 - nx^2 - 2x + n - 3$$

و

$$g(x) = x^4 - nx^2 + 2n - 8.$$

با استفاده از محاسبه مستقیم داریم که برای  $4 \leq n \leq 12$ ،  $EE(C_3(n-3)) > EE(C_4(n-4))$  می‌باشد. برای  $n \geq 13$  فرض کنید  $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4$  ریشه‌های  $f(x) = 0$  باشد و  $y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq y_4$  ریشه‌های  $g(x) = 0$  باشد. چون  $x_1 x_2 x_3 x_4 = n - 3 > 0$  و  $x_4 < 0$  بنابراین داریم  $x_1, x_2 > 0$  و  $x_3, x_4 < 0$  می‌باشد. به‌طور مشابه  $y_1, y_2 > 0$  و  $y_3, y_4 < 0$  می‌باشد. از آنجا که  $f(\sqrt{n-1}) = -2\sqrt{n-1} - 2 < 0$  و  $f(\frac{1}{\sqrt{n-1}}) = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - 2\sqrt{n-1} - 2 > 0$ ، داریم  $x_2 > \frac{1}{\sqrt{n-1}}$  و  $x_1 > \sqrt{n-1}$  می‌باشد. با توجه به این که  $f(-1) = 0$ ، داریم  $EE(C_3(n-3)) > EE(C_4(n-4))$  می‌باشد. به‌طور مشابه چون  $g(\sqrt{n-\frac{4}{3}}) = -\frac{1}{3}\sqrt{n-\frac{4}{3}} - \frac{1}{3} > 0$  و  $g(\frac{1}{\sqrt{n-\frac{4}{3}}}) = -\frac{1}{3}\sqrt{n-\frac{4}{3}} - \frac{1}{3} < 0$ ، بنابراین داریم  $y_2 < \frac{1}{\sqrt{n-\frac{4}{3}}}$  و  $y_1 < \sqrt{n-\frac{4}{3}}$  می‌باشد. با استفاده از [۲]  $y_4 = \lambda_n \leq -1$ ، داریم که  $y_3, y_4 < 0$  است. آنگاه  $h(t) = e^{\sqrt{t}} + e^{1/\sqrt{t}} + 2e^{-1} + (n-4)e^0$  فرض کنید  $EE(C_4(n-4)) < EE(C_3(n-3))$  می‌باشد. برای  $t > 1$  باشد. آنگاه  $h'(t) = \frac{1}{2}e^{\sqrt{t}}(e^{-1} + e^{\frac{1}{\sqrt{t}}}) > 0$  و این دلالت بر  $h''(t) = \frac{1}{4}e^{\sqrt{t}}(e^{-1} + e^{\frac{1}{\sqrt{t}}}) > 0$  دارد. آنگاه  $h(n-1) - h(n-\frac{4}{3}) = e^{\sqrt{n-1}} - e^{n-\frac{4}{3}}$  به عبارت دیگر  $n \geq 3$  برای  $n \geq 3$  صعودی می‌باشد. آنگاه

$$\begin{aligned} & \left( e^{\sqrt{n-1}} + e^{.82} + e^{-1} + (n-4)e^0 \right) - \left( e^{\sqrt{n-4}} + e^{1.42} + 2e^{-1} + (n-4)e^0 \right) \\ &= e^{\sqrt{n-1}} - e^{\sqrt{n-4}} + e^{.82} - e^{-1} - e^{1.42} \\ &\geq e^{\sqrt{13-1}} - e^{\sqrt{13-4}} + e^{.82} - e^{-1} - e^{1.42}, \end{aligned}$$

در این صورت داریم که:

$$EE(C_3(n-3)) > EE(C_4(n-4)).$$

□

**قضیه ۵.۳.۳.** فرض کنید  $G$  گرافی با یک دور و دارای  $n \geq 4$  رأس باشد. آنگاه  $EE(G) \leq EE(C_3(n-3))$  می‌باشد. و تساوی برقرار می‌شود، اگر و فقط اگر  $G \cong C_3(n-3)$  باشد.

**برهان.** فرض کنید  $G$  گراف  $n$  رأسی با یک دور و بیشترین مشخصه استرادا باشد. با استفاده از لم‌های ۲.۲.۳ و ۵.۲.۳ و ملاحظه ۶.۲.۳ داریم  $G \in \mathcal{U}(n, 3) \cup \mathcal{U}(n, 4)$  می‌باشد، در این صورت نتیجه با استفاده از لم ۸.۲.۳ و قضیه ۲.۳.۳، لم ۴.۳.۳ برقرار می‌باشد.

□

### ۴.۳ گراف‌های دو دور با بیشترین مشخصه استرادا

**تعریف ۱.۴.۳.** یک دو دور گراف  $G = (V, E)$  گرافی است، ساده و همبند که در شرط  $|E| = |V| + 1$  صدق می‌کند.

**ملاحظه ۲.۴.۳.** گراف‌های با دو دور، دو گراف اساسی:  $\infty$ -گراف و  $\theta$ -گراف می‌باشند.

**تعریف ۳.۴.۳.** یک  $\infty$ -گراف گرافی است، که از دو رأس مجزای دورهای  $C_p$  و  $C_q$  که یک رأس از  $C_p$  و یک رأس از  $C_q$  با اتصال به یک گراف مسیر  $P_l$  با طول  $l-1$  به دست می‌آید و با  $\infty(p, q, l)$  مشخص می‌شود.

**تعریف ۴.۴.۳.** یک  $\theta$ -گراف گرافی است، که از اجتماع سه مسیر داخلی مجزای گراف‌های  $P_{l+1}, P_{q+1}, P_{p+1}$  به ترتیب با طول  $l, q, p$  و با رأس پایانی مشترک که  $l, q, p \geq 1$  و حداکثر یکی از آنها ۱ باشد، به دست می‌آید و با  $\theta(p, q, l)$  مشخص می‌شود.

مشاهده می‌کنیم که هر دو دور گراف  $G$  از یک  $\infty$ -گراف یا یک  $\theta$ -گراف،  $G$  با اتصال درخت‌های به برخی رأس‌های آنها به دست می‌آید که  $G$  را هسته گراف  $G$  نامیده می‌شود.

## ۵.۳ لم‌ها

تعریف ۱.۵.۳. کلاس همه گراف‌های همبند و با دو رأس مجزا، گراف‌های  $G$  و  $H$  گرافی است که از یکی کردن رأس  $u$  از  $G$  و رأس  $w$  از  $H$  به دست می‌آید و با  $G(u) \circ H(w)$  مشخص می‌شود، که  $u \in V(G)$  و  $w \in V(H)$  می‌باشد.

لم ۲.۵.۳. [۷] فرض کنید  $G$  گراف همبند و شامل دو رأس  $u$  و  $v$  باشد، همچنین  $H$  یک گراف غیر بدیهی و همبند که شامل یک رأس  $w$  می‌باشد. اگر  $(G; u, u) \succ (G; v, v)$  آنگاه  $EE(G(u) \circ H(w)) > EE(G(v) \circ H(w))$  می‌باشد.

لم ۳.۵.۳. [۷] فرض کنید  $H_1$  یک گراف غیر بدیهی و همبند که شامل یک رأس  $w$  می‌باشد.  $H_2$  گراف همبند و از مرتبه حداقل ۳ که شامل یال مستقل  $uv$  باشد که  $v$  رأس مستقل است. آنگاه  $EE(H_1(w) \circ H_2(u)) > EE(H_1(w) \circ H_2(v))$  می‌باشد.

لم ۴.۵.۳. فرض کنید  $H_1$  گراف همبند، که شامل دو رأس  $u$  و  $v$  باشد.  $H_2$  گراف مجزا از  $H_1$  که شامل یک رأس  $w$  باشد.  $H'_2$  زوجی (کپی) از  $H_2$  شامل رأس  $w'$  مربوط به  $w$  از  $H_2$  باشد. فرض کنید  $G = (H_1(u) \circ H_2(w))(v) \circ H'_2(w')$  باشد. اگر وجود داشته باشد، اتومورفیزم  $\sigma$  از  $H_1$  به طوری که رأس‌های  $u$  و  $v$  را تغییر دهد، آنگاه  $(G; u, u) = (G; v, v)$  و  $(G; u, t) = (G; v, \sigma(t))$  برای هر رأس  $t$  مجزا از  $u$  باشد. همچنین  $\bar{H}_1$  گراف که از  $H_1$  با اضافه کردن بعضی یال‌های حادث به  $v$  نه  $u$  به دست می‌آید.  $\bar{H}'_2$  گرافی که از  $H'_2$  با اضافه کردن بعضی رأس‌ها یا یال‌ها به طوری که گراف حاصل همبند باشد به دست آید. فرض کنید  $\bar{G}$  گراف که از  $G$  با جایگذاری  $H_1$  با  $\bar{H}_1$  یا  $H_2$  با  $\bar{H}'_2$  به دست آید، آنگاه  $(\bar{G}; u, u) \prec (\bar{G}; v, v)$  و  $(\bar{G}; u, t) = (\bar{G}; v, \sigma(t))$  برای هر رأس  $t$  مجزا از  $u$  باشد.

برهان. مسلماً  $\sigma$  یک اتومورفیزم از گراف  $G$  می‌باشد، همچنین یک نگاشت یک به یک از  $\mathcal{W}_k(G; x, y)$  به  $\mathcal{W}_k(G; \sigma(x), \sigma(y))$  برای هر  $x$  و  $y$  و  $k$  می‌باشد. که ما از دو ادعای زیر، ادعای دوم را ثابت می‌کنیم.

$$M_k(\bar{G}; u, u) = M_k(\bar{G} - v; u, u) + M_k(\bar{G}; u, u, [v]),$$

$$M_k(\bar{G}; v, v) = M_k(\bar{G} - u; v, v) + M_k(\bar{G}; v, v, [u]);$$

$$\begin{aligned} M_k(\bar{G} - v; u, u) &= M_k((\bar{H}_1 - v)(u) \circ H_2(w); u, u) \\ &= M_k((H_1 - v)(u) \circ H_2(w); u, u) \\ &= M_k((H_1 - u)(v) \circ H'_2(w); v, v), \end{aligned}$$

تساوی قبل برقرار می‌باشد، در صورتی که  $\sigma$  یک اتومورفیزم بین  $(H_1 - v)(u) \circ H_2(w)$  و  $(H_1 - u)(v) \circ H'_2(w')$  باشد و رأس‌های  $u$  و  $v$  را تغییر دهد. در این صورت:

$$M_k(\bar{G} - u; v, v) = M_k((\bar{H}_1 - u)(v) \circ H'_2(w'); v, v).$$

چون  $H_1$  یک زیر گراف سره از  $\bar{H}_1$  یا  $H'_1$  یک زیر گراف سره از  $\bar{H}'_1$ ، بنابراین داریم:

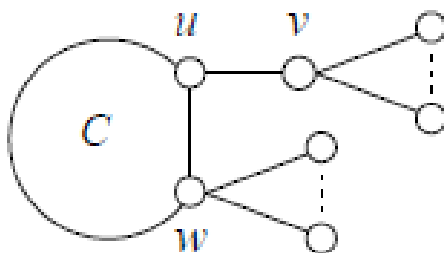
$$M_k(\bar{G} - v; u, u) \leq M_k(\bar{G} - u; v, v)$$

که نامساوی اکید آن برای حداقل یک  $k$  برقرار می‌باشد. برای هر گشت  $W \in \mathcal{W}_k(\bar{G}; u, u, [v])$ ،  $W$  را به دو زیربخش  $W_1$  و  $W_2$  تجزیه می‌کنیم و به صورت  $W = W_1 W_2$  می‌نویسیم که  $W_1$  طولانی‌ترین زیرگشت  $W$  از  $u$  به  $v$  می‌باشد.  $W_2$  باقیمانده زیربخش از  $v$  به  $u$  می‌باشد. نگاشت  $f : \mathcal{W}_k(\bar{G}; u, u, [v]) \rightarrow \mathcal{W}_k(\bar{G}; v, v, [u])$  را به صورت  $f(W) = W_2 W_1$  تعریف می‌کنیم. به آسانی می‌توان دید که  $f$  تابع یک به یک می‌باشد، بنابراین  $M_k(\bar{G}; u, u, [v]) \leq M_k(\bar{G}; v, v, [u])$  می‌باشد. پس بنابراین ثابت کردیم  $(\bar{G}; u, u) \prec (\bar{G}; v, v)$  است. با استدلال مشابه می‌توان ثابت کرد که  $(\bar{G}; u, t) \prec (\bar{G}; v, \sigma(t))$  می‌باشد.  $\square$

فرض کنید  $N_G(v)$  مجموعه همسایگی های رأس  $v$  در گراف  $G$  می‌باشد،  $d_G(v)$  کاردینال مجموعه  $N_G(v)$  می‌باشد.

**نتیجه ۵.۵.۳.** فرض کنید که  $G$  گرافی با یک دور باشد، که از یک دور  $C$  با اتصال درخت‌های به بعضی رأس‌های آن به دست می‌آید. فرض کنید که  $u$  و  $w$  دو رأس مجاور بر روی دور  $C$  باشد، به طوری که درخت متصل به رأس  $u$  ستاره با مرکز  $v$  که از یکی کردن یک رأس مستقل آن با  $w$  حاصل شود و درخت متصل به  $w$  که از یکی کردن مرکز ستاره با  $w$  به دست آید. (گراف نشان داده در شکل ۱.۳). اگر  $d_G(w) \geq d_G(v) + 1$  باشد، آنگاه

- (i)  $(G; w, w) \succ (G; v, v)$ ;
- (ii)  $(G; w, t) \succ (G; v, t)$  هر برای  $t \notin (N_G(v) \cup N_G(w) \cup \{w\}) - V(C)$ .



شکل ۱.۳: گراف  $G$  توضیح داده شده در نتیجه ۵.۵.۳.

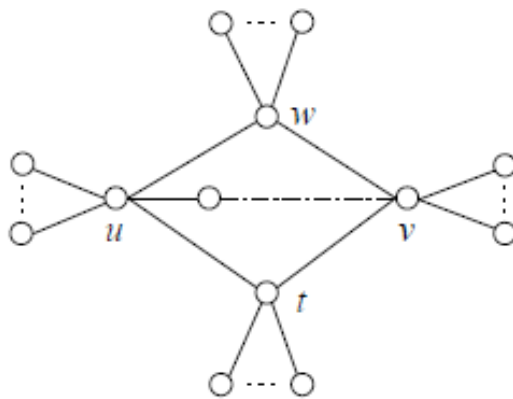
**برهان.** فرض کنید  $G'$  گرافی که از  $G$  با حذف یالی بر روی دور به مجاورت  $w$  به جز یال  $uw$  و حذف  $d_G(w) - d_G(v) - 1$  رأس مستقل از به دست می‌آید. آنگاه وجود دارد اتومورفیزی از  $G'$  که رأس‌های

$u$  و  $v$  با رأس‌های آویخته به آنها را تغییر داده و بقیه رأس‌ها را ثابت نگه می‌دارد. اکنون با توجه به لم ۴.۵.۳ نتیجه برقرار می‌باشد.

□

نتیجه ۶.۵.۳. فرض کنید  $G$  گرافی باشد، که از  $\theta(2, 2, l)$  با اتصال یال‌ها مستقل به بعضی رأس‌های دورهای آن به دست آید.  $u$  و  $v$  و  $w$  و  $t$  رأس‌های نشان داده شده در شکل ۲.۳ باشد.

- (i) اگر  $d_G(w) > 2$  و  $d_G(t) = 2$  آنگاه  $(G; w, w) \succ (G; t, t)$ ؛
- (ii) اگر  $d_G(u) > 3$ ،  $d_G(v) = 3$  و  $d_G(x) = 2$  برای هر  $x \in V(G) - \{u, v, w\}$  آنگاه  $(G; u, u) \succ (G; v, v)$ ؛
- (iii) اگر  $d_G(u) > 3$ ،  $d_G(v) = 3$  و  $d_G(x) = 2$  برای هر  $x \in V(G) - \{u, v\}$  آنگاه  $(G; u, u) \succ (G; w, w)$  باشد.



شکل ۲.۳: گراف  $G$  توضیح داده شده در نتیجه ۶.۵.۳.

برهان. برای اثبات ادعای (i) فرض کنید  $G'$  گرافی که از  $G$  با حذف رأس‌های آویخته از  $w$  به دست آید. آنگاه اتومورفیزم  $\sigma$  از  $G'$  وجود دارد، به طوری که رأس‌های  $w$  و  $t$  را تغییر داده و بقیه رأس‌های دیگر را ثابت نگه دارد، در این صورت طبق لم ۴.۵.۳ ادعا ثابت شده است. با استدلال مشابه می‌توان ادعای (ii) و (iii) را ثابت کرد.

□

لم ۷.۵.۳. فرض کنید  $G = \theta(p, q, l)$  و  $u$  و  $v$  دو رأس درجه ۳ از گراف  $G$  باشد، آنگاه برای هر  $w$  مجزا از  $u$  و  $v$   $(G; u, u) = (G; v, v) \succ (G; w, w)$  می‌باشد.

برهان. فرض کنید  $P_{p+1}$  و  $P_{q+1}$  و  $P_{l+1}$  به ترتیب سه مسیر از گراف  $G$  باشد که در رأس‌های  $u$  و  $v$  به هم متصل می‌شوند. اتومورفیزم  $\sigma$  از گراف  $G$  را به این صورت تعریف می‌کنیم که رأس‌های  $u$  و  $v$  را تغییر دهد، برای هر رأس  $x$  از مسیر  $P_{p+1}$  (به ترتیب  $(P_{l+1}, P_{q+1})$ ) و همچنین  $\sigma(x)$  روی  $P_{p+1}$  (به ترتیب  $(P_{l+1}, P_{q+1})$ ) به طوری که فاصله بین  $x$  و  $u$  در طول این مسیر مساوی با فاصله بین  $\sigma(x)$  و  $v$  باشد. آنگاه اتومورفیزم  $\sigma$  به طور طبیعی نگاهی از  $\mathcal{W}_k(G; s, t)$  به  $\mathcal{W}_k(G; \sigma(s), \sigma(t))$

به‌طوریکه  $\sigma(W_k(G; s, t)) = W_k(G; \sigma(s), \sigma(t))$  باشد و برای هر  $k$  و  $s, t \in V(G)$ ، جای که هر رأس  $x$  از  $W_k(G; s, t)$  را به  $\sigma(x)$  می‌نگارد. در حالت خاص  $\sigma$  نگاشت یک به یک از  $W_k(G; u, u)$  به  $W_k(G; v, v)$  برای هر  $k$  می‌باشد. پس بنابراین  $(G; u, u) = (G; v, v)$  می‌باشد. در اثبات به  $(G; u, u) \succ (G; w, w)$  برای هر رأس  $w$  که مجزا از  $v$  و  $u$  می‌باشد، در اینجا فقط مرحله که  $w$  در قسمت داخلی مسیر  $P_{l+1}$  نهفته باشد را در نظر می‌گیریم. مراحل دیگر به‌طور مشابه اثبات می‌شوند. در این صورت ما  $C_{ij}$  معرفی می‌کنیم، دوری که از  $P_{i+1}$  و  $P_{j+1}$  که  $i \notin j$  باشد و  $i, j$  یکی از  $p, q, l$  باشد. به آسانی می‌توان دید که  $M_k(C_{ql}; u, u) = M_k(C_{ql}; w, w)$  است. بنابراین کافی است ما گشت بسته به طول  $k$  از  $w$  به  $w$  که حداقل از یک یال  $P_{p+1}$  می‌گذرد شرح دهیم. فرض کنید  $W_k(G; w, w)$  یک گشت باشد. در این صورت ما گشت  $W_k(G; w, w)$  را به سه بخش یکتا  $W_1$  و  $W_2$  و  $W_3$  تجزیه می‌کنیم.  $W_1$  از  $w$  شروع و تا حد امکان در امتداد مسیر  $P_{l+1}$  که  $u$  یا  $v$  باید نقطه داخلی باشد، حرکت می‌کند.  $W_2$  از نقطه داخلی  $W_1$  شروع که اولین و آخرین گام آن بر روی یال‌های  $C_{pq}$  می‌باشد و  $W_3 = W - W_1 - W_2$  نباید شامل یال‌های  $C_{pq}$  باشد به‌طوری که  $u$  یا  $v$  باید نقطه داخلی و  $W_3 = W - W_1 - W_2$  باشد.

اکنون ما نگاشت  $g$  از  $W_k(G; w, w)$  به  $W_k(G; u, u)$  می‌سازیم. اگر  $W_2$  یک  $u - u$  گشت یا  $u - v$  گشت باشد، تعریف می‌کنیم:  $g(W_1 W_2 W_3) = W_2 W_3 W_1$  اگر  $W_2$  یک  $v - u$  گشت باشد، تعریف می‌کنیم:  $g(W_1 W_2 W_3) = W_2 W_1 W_3$  اگر  $W_2$  یک  $v - v$  گشت باشد، تعریف می‌کنیم:  $g(W_1 W_2 W_3) = \sigma(W_3 W_1 W_2)$ . با محاسبه به‌طور مستقیم می‌توان دید که  $g$  یک به یک می‌باشد. بنابراین برای هر  $k$  داریم  $M_k(G; u, u) \geq M_k(G; w, w)$  می‌باشد. بدیهی است که  $M_2(G; u, u) = M_2(G; w, w) = 2 > 3$  می‌باشد و در نتیجه اثبات کامل می‌باشد.  $\square$

### ۶.۳ نتیجه این بخش

**تعریف ۱.۶.۳.** فرض کنید  $\mathcal{G}_\infty(n; p, q)$  مجموعه همه گراف با دو دور و از مرتبه  $n$  که شامل هسته  $\infty$  - گراف و دو دور به طول‌های  $p$  و  $q$  باشد.

**تعریف ۲.۶.۳.** فرض کنید  $\mathcal{G}_\theta(n; p, q)$  مجموعه همه گراف با دو دور و از مرتبه  $n$  که شامل  $(p', q', l')$  به عنوان هسته آن به‌طوری که  $p' \geq q' \geq l'$  و  $p' + l' = p$  و  $q' + l' = q$  باشد.

ابتدا ما بعضی ویژگی‌های گراف‌های با بیشترین مشخصه استرادا را در  $\mathcal{G}_\infty(n; p, q)$  یا  $\mathcal{G}_\theta(n; p, q)$  را بررسی و نشان می‌دهیم، هر گراف با بیشترین مشخصه استرادا در  $\mathcal{G}_\infty(n; p, q)$  می‌باشد. بعضی گراف‌ها با کمترین مشخصه استرادا در  $\mathcal{G}_\theta(n; p, q)$  می‌باشد. در آخر گراف‌های یکتا با بیشترین مشخصه استرادا را در بین گراف با دو دور مشخص می‌کنیم.

**لم ۳.۶.۳.** فرض کنید  $G$  گرافی با بیشترین مشخصه استرادا در بین گراف‌های با دو دور و از مرتبه  $n$  باشد، آنگاه  $G$  از اتصال بعضی یال‌های مستقل به هسته آن به دست می‌آید.

برهان. فرض کنید چنین نباشد، در این صورت گراف  $G$  که یال مستقلی به مرکز آن متصل نیست. آنگاه یال برشی مانند  $uw$  وجود دارد، به طوری که  $G - uw$  شامل دو مؤلفه  $G_1$  و  $G_2$  می‌باشد. که  $G_1$  شامل رأس  $u$  و هسته ای از  $G$  می‌باشد و  $G_2$  درخت غیر بدیهی که شامل رأس  $w$  باشد و در  $G_2$  رأس  $w$  را حذف کنیم و آن را به  $u$  وصل می‌کنیم، پس طبق لم ۳.۵.۳ ما به گرافی جدیدی با دو دور و مشخصه استرادا بیشتری می‌رسیم که این تناقض می‌باشد.

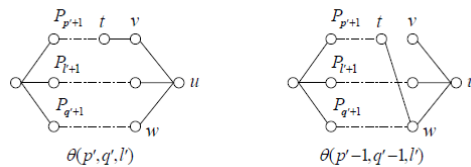
□

قضیه ۴.۶.۳. اگر  $G$  گرافی با بیشترین مشخصه استرادا در  $\mathcal{G}_\infty(n; p, q)$  باشد، آنگاه  $G$  از اتصال بعضی یال های مستقل به  $\infty(n; p, 1)$  به دست می‌آید.

برهان. فرض کنید  $G$  گرافی با بیشترین مشخصه استرادا در  $\mathcal{G}_\infty(n; p, q)$  و شامل هسته  $\infty(n; p, 1)$  باشد. با استفاده از لم ۳.۶.۳ گرافی است که از اتصال بعضی یال های مستقل به  $\infty(p, q, l)$  به دست آید. ما ادعا می‌کنیم  $l = 1$  می‌باشد. در غیر این صورت فرض کنید  $l > 1$  مسیر شامل  $C_p$  و  $C_q$  و یال شروع  $P_l$  باشد که  $v_1 \in V(C_p)$  می‌باشد در این صورت می‌نویسیم  $G = G_1(v_1) \circ G_2(v_1)$  که  $G_1$  شامل  $C_p$  و  $G_2$  شامل  $C_q$  و یک رأس مستقل  $v_1$  باشد. در  $G_1$  رأس  $v_1$  را حذف کنیم و آن را به  $v_2$  وصل کنیم، در این صورت گراف جدیدی مانند  $G'$  به دست می‌آید، بطوریکه  $G' \in \mathcal{G}_\infty(n; p, q)$  باشد. بنابراین با استفاده از لم ۳.۵.۳ داریم  $EE(G') > EE(G)$  و این نیز تناقض می‌باشد.

□

قضیه ۵.۶.۳. فرض کنید  $G$  گرافی با بیشترین مشخصه استرادا در  $\mathcal{G}_\theta(n; p, q)$  باشد، آنگاه  $G$  از اتصال یال های مستقل به  $\theta(p-1, q-1, 1)$  یا  $\theta(2, 2, 2)$  به دست می‌آید.



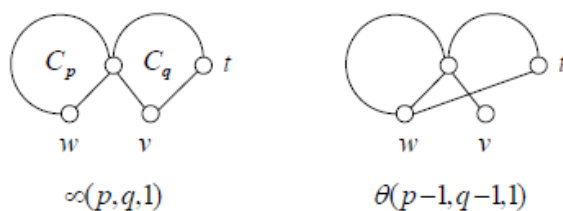
شکل ۳.۳: گراف توضیح داده شده در اثبات قضیه ۵.۶.۳.

برهان. فرض کنید  $G$  گرافی با بیشترین مشخصه استرادا در  $\mathcal{G}_\theta(n; p, q)$  باشد و شامل هسته  $\theta(p', q', l')$  باشد، که  $p' \geq q' \geq l'$  و  $p' + l' = p$  و  $q' + l' = q$  باشد. با استفاده از لم ۳.۶.۳ گرافی است که از اتصال یال های مستقل به  $\theta(p', q', l')$  به دست می‌آید. اگر  $l' = 1$  یا  $l' = 2$  و  $p' = q' = 2$  باشد نتیجه برقرار می‌باشد. اکنون فرض کنید  $l' \geq 3$  و  $p' \geq 3$  باشد، فرض کنید  $u, v, w, t$  رأس های نشان داده شده در شکل ۲.۳ سمت چپ باشد. بدون کاستن از کلیات فرض کنید  $d_G(w) \geq d_G(v)$  باشد. در این صورت یال  $tv$  را حذف و یال جدید  $tw$  را اضافه کنید، به گراف جدیدی مانند  $\bar{G}$  با هسته  $\theta(p' - 1, q' - 1, l')$  می‌رسیم، که در شکل ۳.۳ سمت راست نشان داده شده است. که یک گراف با یک دور می‌باشد، با استفاده از نتیجه ۵.۳.۴ داریم  $(G - tv; w, w) \succ (G - tv; v, v)$  و

۳.۵.۳.  $EE(\bar{G}) > EE(G)$  می‌باشد. بنابراین با استفاده از لم ۳.۵.۳ که تناقض می‌باشد.  $(G - tv; w, t) \succ (G - tv; v, t)$

لم ۶.۶.۳. فرض کنید  $G$  گرافی با دو دور که از  $\infty(p, q, 1)$  با اتصال بعضی یال‌های مستقل به رأس‌های آن به دست می‌آید. در این صورت یک گراف با دو دور مانند  $\bar{G}$  که هسته آن  $\infty(p-1, q-1, 1)$  هست وجود دارد، به طوری که  $EE(\bar{G}) > EE(G)$  می‌باشد.

برهان. فرض کنید  $v, w, t$  رأس‌های از گراف  $\infty(p, q, 1)$  باشد (نشان داده در شکل ۴.۳)، که  $d_G(w) \geq d_G(v)$  باشد. با حذف یال  $tv$  و اضافه کردن یال جدید  $tw$  به گراف جدیدی مانند  $\bar{G}$  که هسته آن  $\infty(p-1, q-1, 1)$  می‌رسیم. (نشان داده شده در شکل ۴.۳) که  $G - tv$  را گرافی با دور واحد در نظر می‌گیریم. با استفاده از نتیجه ۵.۳.۴ داریم  $(G - tv; v, v) \succ (G - tv; w, w)$  و  $(G - tv; w, t) \succ (G - tv; v, t)$  می‌باشد. بنابراین با استفاده از لم ۳.۵.۳ داریم  $EE(\bar{G}) > EE(G)$ ، این تناقض می‌باشد.



شکل ۴.۳: گراف توضیح داده شده در اثبات لم ۶.۶.۳.

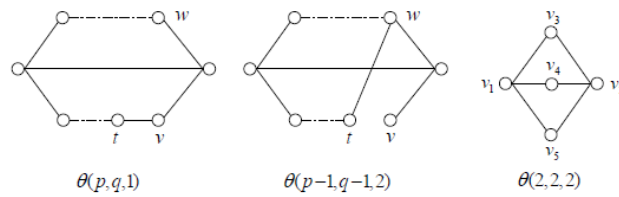
□

فرض کنید  $G_1$  گرافی با دو دور و از مرتبه  $n$  که از  $\theta(2, 2, 1)$  با اتصال  $n-4$  یال مستقل به یکی از رأس‌های درجه سه آن به دست می‌آید و  $G_2$  گرافی با دو دور و از مرتبه  $n$  که از  $\theta(2, 2, 2)$  با اتصال  $n-5$  یال مستقل به یکی از رأس‌های درجه سه آن به دست می‌آید.

لم ۷.۶.۳. فرض کنید  $G$  گرافی با بیشترین مشخصه استرادا در بین گراف‌های با دو دور و از مرتبه  $n$  باشد، آنگاه  $G$  یا  $G_1$  یا  $G_2$  می‌باشد.

برهان. با استفاده از قضیه ۴.۶.۳ و لم ۷.۶.۳ گراف  $G$  باید شامل هسته  $\theta$ -گراف باشد. با استفاده از لم ۴.۶.۳ از  $G$  از  $\theta(p, q, 1)$  یا  $\theta(2, 2, 2)$  با اتصال بعضی یال‌های مستقل به دست می‌آید. فرض کنید  $G$  شامل هسته  $\theta(p, q, 1)$  که  $p \geq 3$  و  $p \geq q$  باشد، فرض کنید  $v, w, t$  رأس‌های نشان داده شده، در شکل ۴.۳ از گراف  $\theta(p, q, 1)$  که  $d_G(w) \geq d_G(v)$  باشد. با حذف یال  $tv$  و اضافه کردن یال جدید  $tw$  به گراف دیگری مانند  $\bar{G}$  که شامل هسته  $\theta(p-1, q-1, 2)$  می‌رسیم (نشان داده شده در شکل ۵.۳). با استدلال مشابه لم ۶.۶.۳ داریم  $EE(\bar{G}) > EE(G)$  که تناقض می‌باشد. پس بنابراین  $G$  از





شکل ۵.۳: گراف توضیح داده شده در اثبات لم ۷.۶.۳.

اکنون نشان می‌دهیم همه یال‌های مستقل  $G$  به یک رأس یکتای از  $\theta(2,2,1)$  یا  $\theta(2,2,2)$  با درجه سه متصل می‌شوند، از این رو  $G$  یا  $G_1$  یا  $G_2$  می‌باشد. بنابراین ما فقط مرحله که  $\theta(2,2,2)$  هسته گراف  $G$  باشد را ثابت می‌کنیم با استدلال مشابه مرحله دیگر هم نیز ثابت می‌شود. فرض کنید برای  $v_i = 1, \dots, 5$  رأس‌های گراف  $\theta(2,2,2)$  باشد (نشان داده شده در شکل ۵.۳). فرض کنید هر  $v_i$  به  $m_i$  یال مستقل در گراف  $G$  متصل باشد، برای  $i = 1, \dots, 5$  که  $m_i \geq 0$  و  $\sum_{i=1}^5 m_i = n - 5$  باشد. فرض کنید  $G = G(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$  باشد. اگر حداقل دو تا از  $m_3, m_4, m_5$  نا صفر باشد، مثلاً  $m_3 > 0$  و  $m_4 > 0$  با استفاده از نتیجه (i) ۶.۵.۳  $(G(m_1, m_2, m_3, 0, m_5; v_3, v_4)) \succ (G(m_1, m_2, m_3, 0, m_5; v_4, v_3))$  همه یال‌های مستقل از  $G(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$  به  $v_4$  را حذف می‌کنیم و به  $v_3$  وصل می‌کنیم. که یک گراف با بیشترین مشخصه استرادا به دست می‌آید و این تناقض می‌باشد. بنابراین حداقل دو تا از  $m_3, m_4, m_5$  صفر می‌باشد، یعنی  $m_4 = m_5 = 0$  باشد. آنگاه  $G = G(m_1, m_2, m_3, 0, 0)$  می‌باشد. اگر هر دو  $m_1, m_2$  نا صفر باشند با استفاده از نتیجه (ii) ۶.۵.۳ داریم  $(G(m_1, 0, m_3, 0, 0; v_1, v_2)) \succ (G(m_1, 0, m_3, 0, 0; v_2, v_1))$  با استفاده از لم ۳.۵.۳ همه یال‌های مستقل از  $G(m_1, 0, m_3, 0, 0)$  به  $v_2$  را حذف می‌کنیم و به  $v_1$  وصل می‌کنیم که به گراف  $G(m_1 + m_2, 0, m_3, 0, 0)$  با بیشترین مشخصه استرادا می‌رسیم و این باز هم تناقض می‌باشد. بنابراین اگر حداقل یکی از  $m_1, m_2$  صفر باشد، مثلاً  $m_2 = 0$  یا به عبارتی  $G = G(m_1, 0, m_3, 0, 0)$  باشد با استفاده از لم ۴.۵.۳ و لم ۷.۵.۳  $(G(m_1, 0, 0, 0, 0; v_1, v_2)) \succ (G(m_1, 0, 0, 0, 0; v_2, v_1))$  می‌باشد و  $m_1 = 0$  نیست. اگر  $m_3 > 0$  با استدلالی مشابه داریم  $(G(m_1, 0, 0, 0, 0; v_1, v_2)) \succ (G(m_1, 0, m_3, 0, 0; v_1, v_2))$  است، که تناقض می‌باشد، پس بنابراین  $G = G(m_1, 0, 0, 0, 0)$  نتیجه برقرار می‌باشد.  $\square$

اکنون در پایان ما می‌خواهیم بیشترین مقدار بین  $EE(G_1)$  و  $EE(G_2)$  را مشخص کنیم. فرض کنید  $\phi(G, x)$  چند جمله‌ای مشخصه ماتریس مجاورت گراف  $G$  باشد.

گزاره ۸.۶.۳. برای  $n \geq 5$   $EE(G_1) > EE(G_2)$  می‌باشد.

برهان. با استفاده از لم ۳.۳.۳ داریم  $\phi(G_1, x) = x^{n-4}f(x)$  و  $\phi(G_2, x) = x^{n-4}g(x)$  که:

$$f(x) = x^4 - (n+1)x^2 - 4x + 2(n-4),$$

$$g(x) = x^4 - (n+1)x^2 + 3(n-5).$$

با استفاده از محاسبه مستقیم برای  $22 \leq n \leq 5$  داریم  $EE(G_1) > EE(G_2)$  باشد، اکنون فرض کنید  $n \geq 23$  باشد. چون  $0 < f(\sqrt{n-1}) = -6 - 4\sqrt{n-1} < 0$  و  $\lambda_1(G_1) > \sqrt{n-1}$  می‌باشد. از طرف دیگر  $g(x)$  برای  $x > \sqrt{\frac{n+1}{3}}$  تابع صعودی است. برای  $n \geq 23$ ،  $g(n - \frac{3}{4}) = \frac{n}{4} - \frac{45}{4} > 0$  که این دلالت دارد بر  $\lambda_1(G_2) < \sqrt{n - \frac{3}{4}}$  که برای  $n \geq 23$  برقرار می‌باشد. فرض کنید  $u$  و  $v$  رأس‌های  $G_1$  و  $G_2$  به ترتیب با بیشترین درجه باشد. در این صورت گراف  $G - u$  دارای مقادیر ویژه  $\pm\sqrt{2}$  و  $0$  که تعداد صفرها  $n - 3$  تا می‌باشد. گراف  $G - v$  دارای مقادیر ویژه  $\pm\sqrt{3}$  و  $0$  که تعداد صفرها  $n - 3$  تا می‌باشد. با استفاده از ویژگی‌های مقادیر ویژه (در [۲] می‌بینیم)، برای  $i = 2, 3, \dots, n-1$ ، داریم که  $\lambda_i(G_1) \geq \lambda_i(G_1 - u)$  می‌باشد، بنابراین:

$$EE(G_1) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(G_1)} + \sum_{i=2}^{n-1} e^{\lambda_i(G_1)} > e^{\sqrt{n-1}} + (n-3) + e^{-\sqrt{2}}.$$

به‌طور مشابه برای  $i = 2, 3, \dots, n$ ،  $\lambda_i(G_2) \leq \lambda_{i-1}(G_2 - v)$ ،

$$EE(G_2) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(G_2)} + \sum_{i=2}^{n-1} e^{\lambda_i(G_2)} > e^{\sqrt{n-\frac{3}{4}}} + (n-3) + e^{-\sqrt{3}} + e^{\sqrt{3}}.$$

□ اکنون توجه کنید، که برای  $n \geq 23$ ،  $e^{\sqrt{n-1}} > e^{\sqrt{n-\frac{3}{4}}} + e^{\sqrt{3}}$  برقرار می‌باشد.

با استفاده از لم ۳.۳.۳ و گزاره ۸.۶.۳ به نتیجه اصلی این بخش می‌رسیم.

قضیه ۹.۶.۳. فرض کنید  $G$  گرافی با دو دور و از مرتبه  $n$  باشد. آنگاه  $EE(G) \leq EE(G_1)$  می‌باشد و تساوی برقرار می‌شود اگر و فقط اگر  $G = G_1$  باشد.

# فصل ۴

## گراف‌های سه دور با بیشترین مشخصه استرادا

### ۱.۴ مقدمه

فرض کنید  $T_n$  کلاس همه گراف‌های سه دوری با  $n$  رأس باشد. در [۲۹] گراف‌های دو دور با بیشترین مشخصه استرادا را مشخص کرده. در این فصل گراف‌های با سه دور با بیشترین مشخصه استرادا را در  $T_n$  مشخص می‌کنیم. فرض کنید  $P_n$  و  $C_n$  و  $S_n$  به ترتیب گراف‌های مسیر و دور و ستاره  $n$  رأسی باشد.

### ۲.۴ لم‌ها

لم‌های که در اثبات از آنها استفاده خواهیم کرد را بیان می‌کنیم.

لم ۱.۲.۴. [۲] فرض کنید  $v$  رأسی از گراف  $G$  باشد و  $\mathcal{C}(v)$  مجموعه دور‌های شامل رأس  $v$  باشد. آنگاه

$$\varphi(G, x) = x \cdot \varphi(G - v, x) - \sum_{vw \in E(G)} \varphi(G - v - w, x) - 2 \sum_{Z \in \mathcal{C}(v)} \varphi(G - V(Z), x),$$

که  $\varphi(G - v - w, x) = 1$  اگر  $G$  یک یال تنها باشد و  $\varphi(G - V(Z), x) = 1$  اگر  $G$  یک دور باشد.

لم ۲.۲.۴. [۵] فرض کنید  $H$  یک گراف (نه لزوماً همبند) با  $u, v \in V(H)$  باشد.  $w_i \in V(H)$  و  $uw_i, vw_i \notin E(H)$  برای  $i = 1, 2, \dots, r$  که  $r$  یک عدد صحیح و مثبت می‌باشد. فرض کنید  $E_u = \{uw_1, uw_2, \dots, uw_r\}$  و  $E_v = \{vw_1, vw_2, \dots, vw_r\}$  همچنین فرض کنید  $H_u = H + E_u$  و  $H_v = H + E_v$  باشد. اگر  $(H; u) \prec (H; v)$  و  $(H; w_i, u) \preceq (H; w_i, v)$  باشد، برای  $1 \leq i \leq r$  آنگاه  $EE(H_u) < EE(H_v)$  می‌باشد.

تعریف ۳.۲.۴. کلاس همه گراف‌های همبند و با دو رأس مجزا  $G$  و  $H$  را با  $G(u) \circ H(w)$  نمایش می‌دهند که  $u \in V(G)$  و  $w \in V(H)$  می‌باشد، گرافی است که از یکی کردن رأس  $u$  و  $w$  به دست می‌آید.

لم ۴.۲.۴. [۷] فرض کنید  $G_1$  و  $G_2$  دو گراف همبند با  $u \in V(G_1)$  و  $v \in V(G_2)$  باشند. فرض کنید  $G$  گرافی که از اتصال  $u$  به  $v$  به دست آید و  $G'$  گرافی که از یکی کردن رأس های  $u$  و  $v$  و اتصال رأس های مستقل به رأس مشترک به دست آید. اگر  $d_G(u), d_G(v) \geq 2$  آنگاه  $EE(G) < EE(G')$  می باشد.

لم ۵.۲.۴. [۲۹] فرض کنید  $H_1$  گراف همبند که شامل دو رأس  $u$  و  $v$  باشد.  $H_2$  گراف مجزا از  $H_1$  که شامل یک رأس  $w$  باشد.  $H'_1$  زوجی (کیبی) از  $H_2$  شامل رأس  $w'$  مربوط به  $w$  از  $H_2$  باشد. فرض کنید  $G = (H_1(u) \circ H_2(w))(v) \circ H'_1(w')$  می باشد.

(i) اگر وجود داشته باشد، اتومورفیزم  $\sigma$  از  $H_1$  به طوری که رأس های  $u$  و  $v$  را تغییر دهد، آنگاه  $(G; u, t) = (G; v, \sigma(t))$  برای هر رأس  $t$  مجزا از  $u$  باشد.

(ii) اگر  $\bar{H}_1$  گراف که از  $H_1$  با اضافه کردن بعضی یال های تصادفی به  $v$  نه  $u$  و  $\bar{H}'_1$  گرافی که از  $H'_1$  با اضافه کردن بعضی رأس ها یا یال ها به طوری که گراف حاصل همبند باشد به دست آید. همچنین فرض کنید  $\bar{G}$  گراف که از  $G$  با جایگذاری  $H_1$  با  $\bar{H}_1$  یا  $H_2$  با  $\bar{H}'_1$  به دست آید، آنگاه  $(\bar{G}; u, t) < (\bar{G}; v, \sigma(t))$  برای هر رأس  $t$  مجزا از  $u$  باشد.

### ۳.۴ گراف های مینیمال سه دور با بیشترین مشخصه استرادا

برای گراف  $G \in \mathcal{T}_n$  زیر گراف های  $G$  با مینیمال سه دور را با  $B(G)$  مشخص می کنیم. روشن است که  $B(G)$  زیر گراف یکتای از سه دور گراف ها که شامل رأس مستقل نمی باشد و  $G$  میتواند از  $B(G)$  با اتصال درخت های به بعضی رأس های آن به دست آید. با استفاده از [۲۷] می دانیم که گراف های با سه دور به شکل چهار نوع زیر می باشند. (که در شکل ۱.۴-۲.۴ نشان داده شده):

$$G_j^3 (j = 1, \dots, 7), \quad G_j^4 (j = 1, \dots, 4), \quad G_j^6 (j = 1, \dots, 3), \quad G_j^7.$$

فرض کنید:

$$\mathcal{T}_n^3 = \{G | B(G) \cong G_j^3, j \in \{1, \dots, 7\}\}; \quad \mathcal{T}_n^4 = \{G | B(G) \cong G_j^4, j \in \{1, \dots, 4\}\};$$

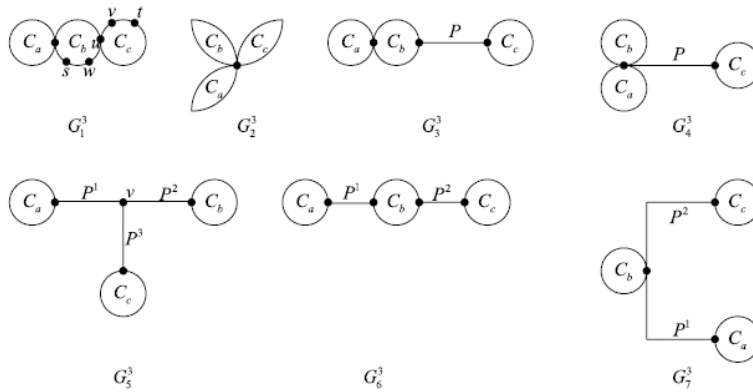
$$\mathcal{T}_n^6 = \{G | B(G) \cong G_j^6, j \in \{1, \dots, 3\}\}; \quad \mathcal{T}_n^7 = \{G | B(G) \cong G_j^7\}.$$

آنگاه  $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_n^3 \cup \mathcal{T}_n^4 \cup \mathcal{T}_n^6 \cup \mathcal{T}_n^7$  با تکرار لم ۴.۲.۴ لم های زیر را داریم.

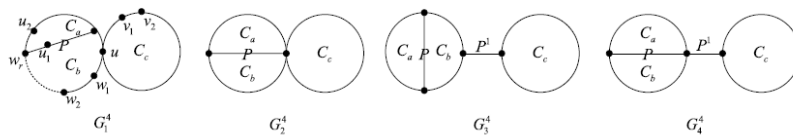
لم ۱.۳.۴. اگر  $G^*$  گرافی با بیشترین مشخصه استرادا در  $\mathcal{T}_n$  باشد، آنگاه  $G^*$  از اتصال رأس های مستقل به پایه های خود به دست می آید.

لم ۲.۳.۴. (i) اگر  $G^*$  گرافی با بیشترین مشخصه استرادا در  $\mathcal{T}_n^3$  باشد، آنگاه  $B(G^*) \cong G_j^3, j \in \{1, 2\}$  می باشد.

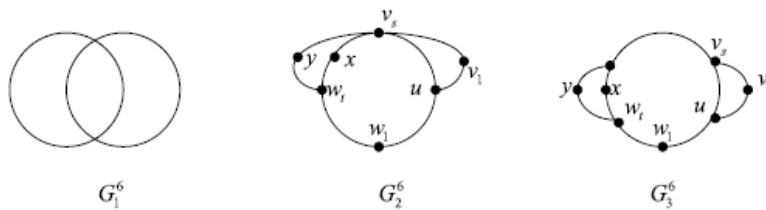
(ii) اگر  $G^*$  گرافی با بیشترین مشخصه استرادا در  $\mathcal{T}_n^4$  باشد، آنگاه  $B(G^*) \cong G_j^4, j \in \{1, 2\}$  می باشد.



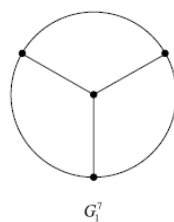
شکل ۱.۴: گراف‌های  $G_j^3 (j = 1, \dots, 7)$ .



شکل ۲.۴: گراف‌های  $G_j^4 (j = 1, \dots, 4)$ .



شکل ۳.۴: گراف‌های  $G_j^6 (j = 1, 2, 3)$ .



شکل ۴.۴: گراف‌های  $G_j^7$ .

لم ۳.۳.۴. اگر  $G_1$  گرافی با بیشترین مشخصه استرادا در  $T_n^3$  باشد، آنگاه گراف مانند  $G_2$  از  $T_n^4$  وجود دارد به طوری که  $EE(G_2) > EE(G_1)$  باشد.

برهان. با استفاده از لم ۲.۳.۴(i) می‌دانیم که  $B(G_1) \cong G_j^3, j \in \{1, 2\}$  می‌باشد. اگر  $B(G_1) \cong G_1^3$  باشد، فرض کنید  $uv, vt, uw, ws \in E(G_1)$  (نشان داده شده در شکل ۱.۴). بدون کاستن از کلیات فرض کنید که  $d_{G_1}(w) \geq d_{G_1}(v)$  باشد. فرض کنید  $H_1$  گرافی که از  $G_1$  با حذف  $ws, vt$  و  $2 - d_{G_1}(w)$  یال مستقل متصل به  $w$  و  $2 - d_{G_1}(v)$

یال مستقل متصل به  $v$  به دست آید. در این صورت اتومورفیزم  $\sigma$  از  $H_1$  وجود دارد، به طوری که رأس های  $w$  و  $v$  تغییر داده و بقیه رأس ها را ثابت نگه دارد. فرض کنید  $2 - d_{G_1}(v)$ ،  $H_2 \cong K_1$ ،  $H_2$  با مرکز  $c'$  و  $G_0 = (H_1(v) \circ H_2(v'))(w) \circ H_2(v')$  باشد. با استفاده از لم  $(i)$   $5.2.4$  برای هر رأس  $x \in V(G_0)$  داریم  $(G_0; w, x) = (G_0; v, \sigma(x))$  می باشد. همچنین فرض کنید  $G_3$  گرافی که از  $G_0$  با اضافه کردن یال  $ws$  و  $d_{G_1}(w) - d_{G_1}(v)$  یال مستقل متصل به  $w$  به دست آید. آنگاه با استفاده از لم  $(ii)$   $5.2.4$  برای هر رأس  $x \in V(G_3)$  داریم که  $(G_3; w, x) \succ (G_3; v, \sigma(x))$  می باشد. بدیهی است که  $G_1 = G_2 + vt$  است. فرض کنید  $G_2 = G_3 + wt$  در این صورت  $G_2 \in \mathcal{T}_n^*$  می باشد. بنابراین با استفاده از لم  $2.2.4$  داریم  $EE(G_2) > EE(G_1)$  می باشد. با استدلال مشابه می توان برای  $B(G_1) \cong G_3^*$  نیز ثابت کرد. بنابراین با استفاده از لم  $4.2.4$  اثبات کامل می باشد.

□

لم  $4.3.4$ . اگر  $\tilde{G}_1$  گرافی با بیشترین مشخصه استرادا در  $\mathcal{T}_n^*$  باشد، آنگاه گراف مانند  $\tilde{G}_2$  از  $\mathcal{T}_n^*$  وجود دارد به طوری که  $EE(\tilde{G}_2) > EE(\tilde{G}_1)$  باشد.

برهان. با استفاده از لم  $(ii)$   $2.3.4$  می دانیم که  $B(\tilde{G}_1) \cong G_j^*$ ،  $j \in \{1, 2\}$  می باشد. اگر  $B(\tilde{G}_1) \cong G_1^*$  باشد، فرض کنید  $uv_1, v_1v_2, ww_1, w_1w_2 \in E(\tilde{G}_1)$  باشد (نشان داده شده در شکل  $2.4$ ). توجه کنید که  $C_a \cap C_b = P$  در  $G_1^*$  می باشد، بدون کاستن از کلیات فرض کنید که  $d_{\tilde{G}_1}(w) \geq d_{\tilde{G}_1}(v)$  باشد.

مرحله ۱. اگر  $r \notin 1$  فرض کنید  $H_1$  گراف که از  $\tilde{G}_1$  با حذف یال های  $w_1w_2, v_1v_2$  و  $2 - d_{\tilde{G}_1}(w_1)$  یال مستقل متصل به  $w_1$  و  $2 - d_{\tilde{G}_1}(v_1)$  یال مستقل متصل به  $v_1$  به دست آید. در این صورت اتومورفیزم  $\sigma$  از  $H_1$  وجود دارد، به طوری که رأس های  $w_1$  و  $v_1$  تغییر داده و بقیه رأس ها را ثابت نگه دارد. فرض کنید  $2 - d_{\tilde{G}_1}(v_1)$ ،  $H_2 \cong K_1$ ،  $H_2$  با مرکز  $c'$  و  $G_0 = (H_1(v_1) \circ H_2(v'))(w_1) \circ H_2(v')$  باشد. با استفاده از لم  $(i)$   $5.2.4$  برای هر رأس  $x \in V(G_0)$  داریم  $(G_0; w_1, x) = (G_0; v_1, \sigma(x))$  می باشد. همچنین فرض کنید  $\tilde{G}_3$  گرافی که از  $G_0$  با اضافه کردن یال  $w_1w_2$  و  $d_{\tilde{G}_1}(w_1) - d_{\tilde{G}_1}(v_1)$  یال مستقل متصل به  $w_1$  به دست آید. آنگاه با استفاده از لم  $(ii)$   $5.2.4$  برای هر رأس  $x \in V(\tilde{G}_3)$  داریم که  $(\tilde{G}_3; w_1, x) \succ (\tilde{G}_3; v_1, \sigma(x))$  است. بدیهی است که  $\tilde{G}_1 = \tilde{G}_3 + v_1v_2$  می باشد. همچنین  $\tilde{G}_2 = \tilde{G}_3 + w_1v_2$  در این صورت  $\tilde{G}_2 \in \mathcal{T}_n^*$  می باشد. بنابراین با استفاده از لم  $2.2.4$  داریم  $EE(\tilde{G}_2) > EE(\tilde{G}_1)$  می باشد.

مرحله ۲. اگر  $r = 1$  و  $d_{\tilde{G}_1}(w_1) \geq d_{\tilde{G}_1}(v_1) + 1$  فرض کنید  $H_1$  گراف که از  $\tilde{G}_1$  با حذف  $v_1v_2$  و یال های  $w_1u_1, w_1u_2$  بر روی  $C_a$  که با  $w_1$  مجاور می باشند،  $3 - d_{\tilde{G}_1}(w_1)$  یال مستقل متصل به  $w_1$  و  $2 - d_{\tilde{G}_1}(v_1)$  یال مستقل متصل به  $v_1$  به دست آید. در این صورت اتومورفیزم  $\sigma$  از  $H_1$  وجود دارد، به طوری که رأس های  $w_1$  و  $v_1$  تغییر داده و بقیه رأس ها را ثابت نگه دارد. فرض کنید  $2 - d_{\tilde{G}_1}(v_1)$ ،  $H_2 \cong K_1$ ،  $H_2$  با مرکز  $c'$  و  $G_0 = (H_1(v_1) \circ H_2(v'))(w_1) \circ H_2(v')$  باشد. با استفاده از لم  $(i)$   $5.2.4$  برای هر رأس  $x \in V(G_0)$  داریم  $(G_0; w_1, x) = (G_0; v_1, \sigma(x))$  می باشد. همچنین فرض کنید  $\tilde{G}_3$  گرافی که از  $G_0$  با اضافه کردن یال  $w_1u_1, w_1u_2$  و  $d_{\tilde{G}_1}(w_1) - d_{\tilde{G}_1}(v_1) - 1$  یال مستقل متصل به  $w_1$  به دست آید. آنگاه با استفاده از لم  $(ii)$   $5.2.4$  برای هر رأس  $x \in V(\tilde{G}_3)$

داریم که  $(\tilde{G}_3; w_1, x) \succ (\tilde{G}_3; v_1, \sigma(x))$  می‌باشد. بدیهی است که  $\tilde{G}_1 = \tilde{G}_3 + v_1 v_2$  باشد. فرض کنید  $\tilde{G}_2 = \tilde{G}_3 + w_1 v_2$  در این صورت  $\tilde{G}_2 \in \mathcal{T}_n^{\neq}$  می‌باشد. بنابراین با استفاده از لم ۲.۲.۴ داریم  $EE(\tilde{G}_2) > EE(\tilde{G}_1)$  می‌باشد.

مرحله ۳. اگر  $r = 1$  و  $d_{\tilde{G}_1}(w_1) = d_{\tilde{G}_1}(v_1)$  فرض کنید  $H_1$  گراف که از  $\tilde{G}_1$  با حذف یال‌های  $w_1 u_1, w_1 u_2$  بر روی  $C_a$  که با  $w_1$  مجاور می‌باشند و یال  $v_1 v_2$  و  $3 - d_{\tilde{G}_1}(w_1)$  یال مستقل متصل به  $w_1$  و  $2 - d_{\tilde{G}_1}(v_1)$  یال مستقل متصل به  $v_1$  به دست آید. در این صورت اتومورفیزم  $\sigma$  از  $H_1$  وجود دارد به طوری که رأس‌های  $w_1$  و  $v_1$  تغییر داده و بقیه رأس‌ها را ثابت نگه دارد. فرض کنید  $G_* = (H_1(v_1) \circ H_2(v'))(w_1) \circ H_2(v')$  با مرکز  $c'$  و  $H_2 \cong K_{1, d_{\tilde{G}_1}(w_1) - 3}$  از لم (i) ۵.۲.۴ برای هر رأس  $x \in V(G_*)$  داریم  $(G_*; w_1, x) = (G_*; v_1, \sigma(x))$  می‌باشد. همچنین فرض کنید  $\tilde{G}_3$  گرافی که از  $G_*$  با اضافه کردن یال  $v_1 v_2$  و  $1 - d_{\tilde{G}_1}(v_1) - d_{\tilde{G}_1}(w_1)$  یال مستقل متصل به  $v_1$  به دست آید. آنگاه با استفاده از لم (ii) ۵.۲.۴ برای هر رأس  $x \in V(\tilde{G}_3)$  داریم که  $(\tilde{G}_3; w_1, \sigma(x)) \succ (\tilde{G}_3; v_1, x)$  می‌باشد. بدیهی است که  $\tilde{G}_1 = \tilde{G}_3 + w_1 u_1 + w_1 u_2$  است. فرض کنید  $\tilde{G}_2 = \tilde{G}_3 + v_1 u_1 + v_1 u_2$  بدیهی است که  $\tilde{G}_2 \in \mathcal{T}_n^{\neq}$  می‌باشد. بنابراین با استفاده از لم ۲.۲.۴ داریم  $EE(\tilde{G}_2) > EE(\tilde{G}_1)$  می‌باشد. با استدلال مشابه با  $G_1 \cong G_2^*$  نیز ثابت کرد. بنابراین با استفاده از لم ۴.۲.۴ اثبات کامل می‌باشد.  $\square$

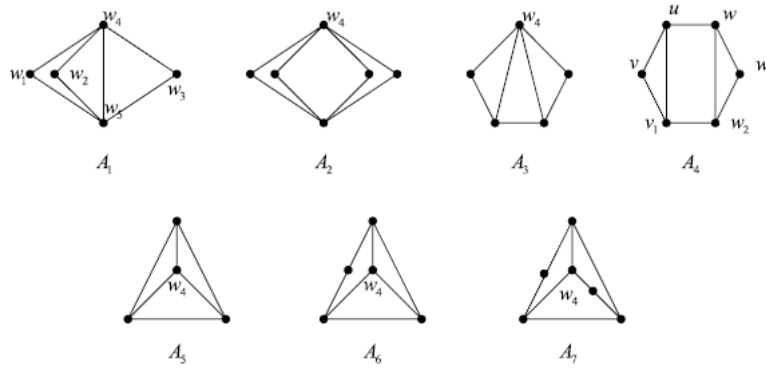
با استفاده از لم ۳.۳.۴ و ۴.۳.۴ نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۵.۳.۴. اگر  $G^*$  گرافی با بیشترین مشخصه استرادا در  $\mathcal{T}_n$  باشد، آنگاه  $j \in B(G^*) \cong G_j^*$  یا  $\{1, 2, 3\}$  می‌باشد.

تعریف ۶.۳.۴. به یک گشت  $v_s \dots v_1 v_0$  به طوری که رأس‌های  $v_s, \dots, v_1, v_0$  مجزا باشند،  $d_G(v_0) > 2$  و برای  $0 < i < s$  داشته باشیم که  $d_G(v_i) = 2$ ، را یک مسیر داخلی از گراف  $G$  می‌نامیم.

لم ۷.۳.۴. فرض کنید  $G \in \mathcal{T}_n^{\neq} \cup \mathcal{T}_n^{\vee}$ ،  $P_i^u$  ( $1 \leq i \leq d_B(G)(u)$ ) مسیر داخلی در  $B(G)$  باشد، با رأس پایانی  $u$  که  $d_B(G)(u) \geq 3$  ( $u \in B(G)$ ) می‌باشد. اگر دو گراف  $P_u^l$  و  $P_u^k$  ( $1 \leq l, k \leq d_B(G)(u)$ ) وجود داشته باشند، آنگاه گرافی  $\tilde{G} \in \mathcal{T}_n^{\neq} \cup \mathcal{T}_n^{\vee}$  وجود دارد به طوری که  $|E(B(G))| - |E(B(\tilde{G}))| = 1$  و  $EE(\tilde{G}) > EE(G)$  می‌باشد.

برهان. فرض کنید  $P_u^l = w_1 \dots w_t$  و  $P_u^k = w_1 \dots w_s$  که  $t \geq 3, s \geq 1$  می‌باشد. مرحله ۱. اگر  $s \geq 2, t \geq 3$ ، بدون کاستن از کلیات فرض کنید که  $d_G(w_1) \geq d_G(v_1)$  فرض کنید،  $H_1$  گرافی که از  $G$  با حذف  $w_1 w_2$  و  $2 - d_G(v_1)$  یال مستقل متصل به  $v_1$  و  $2 - d_G(w_1)$  یال مستقل متصل به  $w_1$  به دست آید. در این صورت اتومورفیزم  $\sigma$  از  $H_1$  وجود دارد، به طوری که رأس‌های  $w_1$  و  $v_1$  تغییر داده و بقیه رأس‌ها را ثابت نگه دارد. فرض کنید  $H_2 \cong K_{1, d_G(v_1) - 2}$  با مرکز  $c'$  و  $G_* = (H_1(v_1) \circ H_2(v'))(w_1) \circ H_2(v')$  باشد. با استفاده از لم (i) ۵.۲.۴ برای هر رأس  $v \in V(G_*)$  داریم  $(G_*; v_1, \sigma(v)) = (G_*; w_1, v)$  می‌باشد. همچنین فرض کنید  $G_1$  گرافی که از  $G_*$



شکل ۵.۴: گراف های  $A_1, \dots, A_7$ .

با اضافه کردن یال  $w_1 w_2$  و  $d_{G_1}(w_1) - d_{G_1}(v_1)$  یال مستقل متصل به  $w_1$  به دست آید. آنگاه با استفاده از لم ۵.۲.۴ (ii) برای هر رأس  $v \in V(G_1)$  داریم که  $(G_1; w_1, v) \succ (G_1; v_1, \sigma(v))$  می‌باشد. بدیهی است که  $G = G_1 + v_1 v_2$  می‌باشد. فرض کنید  $\tilde{G} = G_1 + w_1 v_2$  بدیهی است که  $\tilde{G} \in \mathcal{T}_n^e \cup \mathcal{T}^v$  است که  $EE(\tilde{G}) > EE(G)$  می‌باشد.  $|E(B(G))| - |E(B(\tilde{G}))| = 1$  بنابراین با استفاده از لم ۲.۲.۴  $EE(\tilde{G}) > EE(G)$  می‌باشد.

مرحله ۲. اگر  $t \geq 3, s = 1$  با استفاده از  $d_B(G)(u) \geq 3$  فرض کنید  $P_u^j = u x_1 \dots x_r$  که مسیر سومی با رأس پایانی  $u$  باشد به طوری که  $|P_u^j| \geq 1$  باشد. مرحله ۱. اگر  $|P_u^j| \geq 2$  در این صورت دو مسیر  $P_u^j$  و  $P_u^l$  وجود دارد، که مشابه با مرحله ۱ می‌توانیم گرافی با بیشترین مشخصه استرادا به دست آوریم.

مرحله ۲.۲. اگر  $|P_u^j| = 1$  آنگاه  $d_B(G)(x_1) \geq 3$  و  $x_1 \notin V(P_u^k)$  باشد. فرض کنید  $x_1^1$  و  $x_1^2$  دو رأس مجاور با  $x_1$  در  $B(G)$  باشد. اگر  $d_B(G)(x_1) \geq d_B(G)(w_1) + 1$  فرض کنید  $H_1$  گرافی که از  $G$  با حذف  $w_1 w_2$  و  $d_G(w_1) - 2$  یال مستقل متصل به  $w_1$  و  $d_G(x_1) - 3$  یال مستقل متصل به  $x_1$  به دست آید. در این صورت اتومورفیزم  $\sigma$  از  $H_1$  وجود دارد به طوری که رأس های  $w_1$  و  $x_1$  تغییر و بقیه رأس ها را ثابت نگه دارد. فرض کنید  $H_2 \cong K_{1, d_G(w_1) - 2}$  با مرکز  $c'$  و  $v \in V(G_0)$  برای هر رأس  $G_0 = (H_1(v_1) \circ H_2(v'))(x_1) \circ H_2(v')$  باشد. با استفاده از لم ۵.۲.۴ (i) برای هر رأس  $v \in V(G_0)$  داریم  $(G_0; w_1, v) = (G_0; x_1, \sigma(v))$  می‌باشد. همچنین فرض کنید  $G_1$  گرافی که از  $G_0$  با اضافه کردن یال  $x_1^1 x_1 + x_1 x_1^2$  و  $d_G(x_1) - d_G(w_1) - 1$  یال مستقل متصل به  $x_1$  به دست آید. آنگاه با استفاده از لم ۵.۲.۴ (ii) برای هر رأس  $v \in V(G_1)$  داریم که  $(G_1; x_1, v) \succ (G_1; w_1, \sigma(v))$  می‌باشد. بدیهی است که  $G = G_1 + w_1 w_2$  می‌باشد. فرض کنید  $\tilde{G} = G_1 + w_2 x_1$  در این صورت  $\tilde{G} \in \mathcal{T}_n^e \cup \mathcal{T}^v$  می‌باشد.  $|E(B(G))| - |E(B(\tilde{G}))| = 1$  بنابراین با استفاده از لم ۲.۲.۴  $EE(\tilde{G}) > EE(G)$  است. اگر  $d_B(G)(x_1) \leq d_B(G)(w_1)$  باشد، فرض کنید  $H_1$  گرافی که از  $G$  با حذف  $w_1 w_2$  و  $d_G(w_1) - 2$  یال مستقل متصل به  $w_1$  و  $d_G(x_1) - 3$  یال مستقل متصل به  $x_1$  به دست آید. در این صورت اتومورفیزم  $\sigma$  از  $H_1$  وجود دارد، به طوری که رأس های  $w_1$  و  $x_1$  تغییر داده و بقیه رأس ها را ثابت نگه دارد. فرض کنید  $H_2 \cong K_{1, d_G(x_1) - 3}$  با مرکز  $c'$  و



$v \in V(G_0)$  باشد. با استفاده از لم ۵.۲.۴(i) برای هر رأس  $v \in V(G_0)$  داریم  $(G_0; w_1, v) = (G_0; x_1, \sigma(v))$  می‌باشد. همچنین فرض کنید  $G_1$  گرافی که از  $G_0$  با اضافه کردن یال  $x_1x_2 + x_2x_1$  و  $d_G(w_1) - d_G(x_1) + 1$  یال مستقل متصل به  $w_1$  به دست آید. آنگاه با استفاده از لم ۵.۲.۴(ii) برای هر رأس  $v \in V(G_1)$  داریم که  $(G_1; w_1, v) \succ (G_1; x_1, \sigma(v))$  می‌باشد. بدیهی است که  $G = G_1 + x_1x_2 + x_2x_1$  می‌باشد. فرض کنید  $\tilde{G} = G_1 + w_1x_1 + w_1x_2$  در این صورت  $\tilde{G} \in \mathcal{T}_n^e \cup \mathcal{T}^v$  می‌باشد،  $|E(B(G))| - |E(B(\tilde{G}))| = 1$  بنابراین با استفاده از لم ۲.۲.۴  $EE(\tilde{G}) > EE(G)$  است.  $\square$

با استدلال مشابه لم ۷.۳.۴، لم زیر را داریم.

لم ۸.۳.۴. فرض کنید  $G \in \mathcal{T}_n^e \cup \mathcal{T}^v$  و  $P_u^l = uw_1w_2$  و  $P_u^k = uv_1v_2$  دو مسیر داخلی در  $B(G)$  باشد که  $(u \in B(G))d_B(G)(u) \geq 3$ ، اگر  $w_1 \neq w_2$  باشد، آنگاه گرافی مانند  $\tilde{G} \in \mathcal{T}_n^e \cup \mathcal{T}_n^e$  وجود دارد به طوری که  $|E(B(G))| - |E(B(\tilde{G}))| = 1$  و  $EE(\tilde{G}) > EE(G)$  باشد.

لم ۹.۳.۴. فرض کنید  $G$  گرافی با  $A_4 \cong B(G)$  ( نشان داده شده در شکل ۵.۴). آنگاه گرافی مانند  $\tilde{G}$  وجود دارد به طوری که  $B(\tilde{G}) \cong A_3$  و  $EE(\tilde{G}) > EE(G)$  می‌باشد.

فرض کنید  $P_u^i$  ( $1 \leq i \leq d_B(G)(u)$ ) مسیر داخلی در  $B(G)$  با رأس پایانی  $u$  باشد که  $(u \in B(G))d_B(G)(u) \geq 3$  و  $P_u^l$  و  $P_u^k$  که  $(1 \leq l, k \leq d_B(G)(u))$  دو مسیر باشند، به طوری که  $|P_u^k| = s, |P_u^l| = t$  باشد. با توجه به این که متمم مرحله  $1 \leq s, t \geq 3$ ، مرحله  $1 \leq s, t \leq 2$  می‌باشد. بنابراین ما می‌توانیم آن را به سه مرحله زیر تقسیم کنیم.

$$(i) s \geq 3, t = 2; \quad (ii) s \geq 3, t = 1; \quad (iii) s \leq 2, t \leq 2.$$

اگر (i) یا (ii) برقرار باشد با استفاده از لم ۴.۳.۴ ما می‌توانیم گرافی مانند  $\tilde{G}$  به دست آوریم، به طوری که  $EE(\tilde{G}) > EE(G)$  باشد. یا به عبارتی می‌توانیم گرافی با بیشترین مشخصه استرادا به دست آوریم. اکنون فقط کافی است  $(1 \leq i \leq d_B(G)(u)) |P_u^i| \leq 2$  را شرح دهیم. بعلاوه با استفاده از لم‌های ۷.۳.۴ و ۸.۳.۴ نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۱۰.۳.۴. اگر  $G^*$  گرافی با بیشترین مشخصه استرادا در  $\mathcal{T}_n^e \cup \mathcal{T}_n^e$  باشد، آنگاه  $B(G^*) \cong A_i, i \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$  می‌باشد (نشان داده شده در شکل ۵.۴).

لم ۱۱.۳.۴. اگر  $G^*$  گرافی با بیشترین مشخصه استرادا در  $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$  باشد  $B(G) \cong A_i, i \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$  (نشان داده شده در شکل ۵.۴)، آنگاه  $G^*$  از  $A_i$  با اتصال  $|V(A_i)| - n$  به رأس  $w_4$  با بیشترین درجه در  $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$  به دست می‌آید.

برهان. اگر  $B(G^*) \cong A_1$  و  $w_i (i \in \{1, 2, 3, 4, 5\})$  رأس‌های  $A_1$  که در شکل ۵.۴ نشان داده شده است. فرض کنید که هر  $w_i$  متصل  $m_i$  یال مستقل در  $G^*$  باشد. که  $m_i \geq 0$  و  $\sum_{i=1}^5 m_i = n - 5$

باشد. برای راحتی ما  $G^* = A_1(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$  را مشخص می‌کنیم. مرحله ۱. اگر حداقل دو تا از  $m_3, m_2, m_1$  نا صفر باشد، مثلا  $m_2 > 0, m_1 > 0$  باشد. فرض کنید  $H_1$  گراف که از  $A_1(m_1, 0, m_3, m_4, m_5)$  با حذف رأس‌های مستقل به  $w_1$  به دست آید. آنگاه اتومورفیزی وجود دارد، که  $w_1$  و  $w_2$  را تغییر داده و رأس‌های دیگر را ثابت نگه می‌دارد. با استفاده از لم (ii) ۵.۲.۴ داریم که :

$$(A_1(m_1, 0, m_3, m_4, m_5); w_1) \succ (A_1(m_1, 0, m_3, m_4, m_5); w_2).$$

بعلاوه با استفاده از لم ۲.۲.۴ داریم:

$$A_1(m_1 + m_2, 0, m_3, m_4, m_5) \succ A_1(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5).$$

که تناقض می‌باشد. بنابراین حداقل دو تا از  $m_3, m_2, m_1$  صفر باشند، مثلا  $m_2 = m_3 = 0$  باشد، آنگاه  $G^* = A_1(m_1, 0, 0, m_4, m_5)$  می‌باشد.

مرحله ۲. اگر هر دو  $m_4, m_5$  ناصفر باشند، مشابه استدلال مرحله ۱ گرافی با بیشترین مشخصه استرادا به دست می‌آوریم که تناقض می‌باشد. بنابراین حداقل یکی از  $m_4, m_5$  صفر می‌باشد، مثلا  $m_4 = 0$  باشد، آنگاه  $G^* = A_1(m_1, 0, 0, 0, m_5)$  می‌باشد.

مرحله ۳. اگر هر دو  $m_1, m_5$  ناصفر باشند، در این صورت  $H_1$  گرافی که از  $A_1$  با حذف یال‌های  $w_2w_5, w_4w_5$  به دست می‌آید. آنگاه اتومورفیزی وجود دارد که رأس‌های  $w_1$  و  $w_5$  را تغییر داده و رأس‌های دیگر را ثابت نگه می‌دارد. با استفاده از لم (ii) ۵.۲.۴ داریم :

$$(A_1(0, 0, 0, 0, m_5); w_5) \succ (A_1(0, 0, 0, 0, m_5); w_1).$$

بعلاوه با استفاده از لم ۲.۲.۴ داریم:

$$A_1(0, 0, 0, 0, m_1 + m_5) \succ A_1(m_1, 0, 0, 0, m_5),$$

که همچنین نیز تناقض می‌باشد. بنابراین  $G^* = A_1(0, 0, 0, 0, m_5)$  می‌باشد. به طور مشابه می‌توان  $\square$  برای  $B(G^*) \cong A_i (i \in \{2, 3, 5, 6, 7\})$  نیز ثابت کرد.

فرض کنید که  $T_i$  گراف که از  $A_i$  با اتصال  $|V(A_i)| - n$  رأس‌ها مستقل به راسی با بیشترین درجه در  $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$  به دست آید. با استفاده از لم ۱.۲.۴ نیز چند جمله‌ای‌های زیر را داریم:

$$\phi(T_1; x) = x^{n-4}[x^4 - (n+2)x^2 - 6x + 3(n-5)] = x^{n-4}f_1(x);$$

$$\phi(T_2; x) = x^{n-4}[x^4 - (n+2)x^2 + 4(n-6)] = x^{n-4}f_2(x);$$

$$\phi(T_3; x) = x^{n-6}[x^6 - (n+2)x^4 - 6x^3 + 3(n-4)x^2 + 2x - (n-5)] = x^{n-6}f_3(x);$$

$$\phi(T_5; x) = x^{n-5}[x^5 - (n+2)x^3 - 8x^2 + 3(n-3)x + 2(n-4)] = x^{n-5}f_5(x);$$

$$\phi(T_6; x) = x^{n-5}[x^5 - (n+2)x^3 - 4x^2 + 4(n-4)x + 4] = x^{n-5}f_6(x);$$

$$\phi(T_7; x) = x^{n-6}[x^6 - (n+2)x^4 + 5(n-5)x^2 - 2(n-8)] = x^{n-6}f_7(x).$$

قضیه ۱۲.۳.۴. فرض کنید  $G$  یک گراف در  $T_n$  باشد،

- (i) اگر  $4 \leq n \leq 9$ ،  $EE(G) \leq EE(T_5)$ ، تساوی برقرار می‌شود، اگر و فقط و اگر  $G \cong T_5$  باشد.  
(ii) اگر  $n \geq 10$  آنگاه  $EE(G) \leq EE(T_1)$  تساوی برقرار می‌شود، اگر و فقط اگر  $G \cong T_1$  باشد.

جدول ۱.۴: مشخصه استرادا گراف‌های  $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7$  برای  $4 \leq n \leq 15$ .

n	$EE(T_1)$	$EE(T_2)$	$EE(T_3)$	$EE(T_5)$	$EE(T_6)$	$EE(T_7)$
$n = 4$	-	-	-	۱۹.۶۰۶۷	-	-
$n = 5$	۲۲.۵۸۸۷	-	۲۲.۷۴۲۱	۲۳.۰۰۲۵	۱۹.۶۳۲۷	-
$n = 6$	۲۶.۰۳۹۵	۲۰.۹۷۷۹	۲۵.۱۶۵۳	۲۶.۳۶۶۶	۲۲.۵۶۶۹	۲۰.۱۳۹۰
$n = 7$	۲۹.۷۸۶۲	۲۴.۰۹۷۶	۲۸.۸۸۳۲	۳۰.۰۲۷۶	۲۵.۸۴۶۳	۲۲.۶۹۸۳
$n = 8$	۳۳.۸۵۴۵	۲۷.۴۹۲۱	۳۲.۹۲۱۵	۳۴.۰۱۰۶	۲۹.۴۱۱۶	۲۵.۶۰۳۱
$n = 9$	۳۸.۲۷۱۸	۳۱.۱۸۵۹	۳۷.۳۰۷۵	۳۸.۳۴۲۴	۳۳.۲۸۸۲	۳۳.۲۸۸۲
$n = 10$	۴۳.۰۶۷۴	۳۵.۲۰۵۴	۴۲.۰۷۰۵	۴۳.۰۶۳۴	۳۷.۵۰۳۱	۳۶.۵۶۳۸
$n = 11$	۴۸.۲۷۲۴	۳۹.۵۷۸۶	۴۷.۲۴۱۵	۴۸.۱۹۹۳	۴۲.۰۸۴۹	۴۰.۸۸۳۵
$n = 12$	۵۳.۹۲۰۱	۴۴.۳۳۵۴	۵۲.۸۵۳۶	۵۳.۷۷۴۶	۴۷.۰۶۴۲	۴۰.۸۸۳۵
$n = 13$	۶۰.۰۴۵۵	۴۹.۵۰۷۶	۵۸.۹۴۲۱	۵۹.۸۲۴۲	۵۲.۴۷۳۷	۴۵.۵۸۴۴
$n = 14$	۶۶.۶۸۶۲	۵۵.۱۲۹۲	۶۵.۵۴۴۳	۶۶.۳۸۵۶	۵۸.۳۴۷۹	۵۰.۶۹۸۲
$n = 15$	۷۳.۸۸۱	۶۱.۲۳۶۰	۷۲.۶۹۹۸	۶۶.۳۸۵۶	۶۴.۷۲۳۷	۵۶.۲۵۸۷۹

برهان. با استفاده از جدول ۱.۴،  $(i)$  برقرار می‌باشد.

بنابراین برای اثبات  $(ii)$  با استفاده از محاسبه مستقیم می‌توانیم ببینیم که برای هر عدد صحیح و مثبت و به اندازه کافی بزرگ  $N$  برای مثال  $N_0 = 100$  نتیجه برقرار می‌باشد. در زیر فرض کنید که  $n \geq N_0$  باشد.

اولاً داریم  $0 < f_1(\sqrt{n-1}) = -12 - \sqrt{n-1} < \lambda_1(T_1) > \sqrt{n-1}$  می‌باشد. به راحتی با استفاده از محاسبه می‌بینیم که مقادیر ویژه گراف  $T_1 - w_4$  برابر با  $0, \pm\sqrt{3}$  که مضرب  $0$ ،  $3 - n$  و بقیه مضارب یک می‌باشد. با استفاده از ویژگی‌های مقادیر ویژه  $A(T_1)$  و  $A(T_1 - w_4)$  برای  $i = 2, 3, \dots, n-1$  از [۲] داریم  $\lambda_i(T_1) \geq \lambda_i(T_1 - w_4)$  می‌باشد. آنگاه

$$EE(T_1) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(T_1)} > e^{\lambda_1(T_1)} + \sum_{i=2}^{n-1} e^{\lambda_i(T_1 - w_4)} > e^{\sqrt{n-1}} + (n-3) + e^{\sqrt{3}} + e^{-\sqrt{3}} = H_1.$$

حال نشان می‌دهیم  $EE(T_1) > EE(F_i)$  برای  $i = 2, \dots, 7$  می‌باشد.

می‌دانیم که جواب  $f_2(x) = 0$  برابر با  $\pm\sqrt{\frac{n+2-\sqrt{n^2-12n+100}}{2}}, \pm\sqrt{\frac{n+2+\sqrt{n^2-12n+100}}{2}}$  می‌باشد و گراف  $T_2 - w_4$  دارای مقادیر ویژه  $0, \pm 2$  که مضرب  $0$ ،  $3 - n$  و بقیه مضارب یک می‌باشد. حال با استفاده از این واقعیت برای  $i = 2, 3, \dots, n$  داریم  $\lambda_i(T_2) \leq \lambda_{i-1}(T_2 - w_4)$  می‌باشد، پس

بنابراین

$$\begin{aligned} EE(T_2) &= \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(T_2)} \\ &= e^{\lambda_1(T_2)} + \sum_{i=2}^n e^{\lambda_i(T_2)} < e^{\lambda_1(T_2)} + \sum_{i=1}^{n-1} e^{\lambda_i(T_2-w_2)} \\ &= e^{\sqrt{\frac{n+2+\sqrt{n^2+12n+10}}{2}}} + (n-3) + e^2 + e^{-2} = H_2. \end{aligned}$$

اکنون با توجه به این که برای  $n \geq 24$  داریم  $e^{\sqrt{n-1}} - e^{\sqrt{\frac{n+2+\sqrt{n^2+12n+10}}{2}}} + e^{\sqrt{3}} - e^2 > 0$  آنگاه

$$\begin{aligned} H_1 - H_2 &= e^{\sqrt{n-1}} - e^{\sqrt{\frac{n+2+\sqrt{n^2+12n+10}}{2}}} + e^{\sqrt{3}} + e^{-\sqrt{3}} - e^2 - e^{-2} \\ &> e^{\sqrt{n-1}} - e^{\sqrt{\frac{n+2+\sqrt{n^2+12n+10}}{2}}} + e^{\sqrt{3}} - e^2 > 0. \end{aligned}$$

بنابراین  $EE(T_1) > EE(T_2)$  می‌باشد.

با استفاده از محاسبه مستقیم می‌بینیم که مقادیر ویژه گراف  $T_6 - w_4$  برابر با  $0, \pm 2$  که مضرب  $0$ ،

$n-3$  و بقیه مضارب یک می‌باشد. برای  $n \geq 101$

$$f\left(\sqrt{n-\frac{3}{2}}\right) = \frac{2n-43}{4} \sqrt{n-\frac{3}{2}} - 4n+10 > 0 \quad (1.4)$$

$$f(\sqrt{n-2}) = -8\sqrt{n-2} - 4n+12 < 0 \quad (2.4)$$

$$f(1) = 3n-13 > 0. \quad (3.4)$$

با استفاده از خواص مقادیر ویژه  $T_6 - w_4$  و  $T_6$  داریم که  $\lambda_2(T_6) \leq \lambda_1(T_6 - w_4) = 2$  می‌باشد.

بنابراین با استفاده از ۴ و ۶ داریم  $\sqrt{n-\frac{3}{2}} < \lambda_1(T_6) < 2$  به طور مشابه با این واقعیت  $\lambda_i(T_6) \leq$  برای  $i = 2, 3, \dots, n$  برقرار می‌باشد.

$$\begin{aligned} EE(T_6) &= \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(T_6)} \leq e^{\lambda_1(T_6)} + \sum_{i=1}^{n-1} e^{\lambda_i(T_6-w_4)} \\ &< e^{\sqrt{n-\frac{3}{2}}} + (n-3) + e^2 + e^{-2} = H_6. \end{aligned}$$

با توجه به این که برای  $n \geq 11$  داریم  $e^{\sqrt{n-1}} - e^{\sqrt{n-\frac{3}{2}}} + (n-3) + e^{\sqrt{3}} - e^{-2} > 0$

$$\begin{aligned} H_1 - H_6 &= e^{\sqrt{n-1}} - e^{\sqrt{n-\frac{3}{2}}} + e^{\sqrt{3}} + e^{-\sqrt{3}} - e^2 - e^{-2} \\ &> e^{\sqrt{n-1}} - e^{\sqrt{\frac{n+2+\sqrt{n^2+12n+10}}{2}}} + e^{\sqrt{3}} - e^2 > 0. \end{aligned}$$

بنابراین  $EE(T_1) > EE(T_2)$  می‌باشد.  
 اکنون توجه کنید برای  $n \geq 14$

$$f_1(\sqrt{n - \frac{3}{2}}) = \left(n - \frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{2}n - \frac{79}{4}\right) - 2n + 16 > 0.$$

به طور مشابه با اثبات بالا می‌توان نشان داد که  $EE(T_1) > EE(T_3)$  است.  
 ثانیاً می‌دانیم که  $f_1(x) = x^4 - (n+2)x^2 + 3(n-5) - 6\sqrt{n-1} + 6\sqrt{n-1} - 6x$  که  
 ماکسیمم جواب  $x_1$  از  $x^4 - (n+2)x^2 + 3(n-5) - 6\sqrt{n-1} = 0$  برابر با

$$\sqrt{\frac{1}{2}(n+2 + \sqrt{n^2 - 8n + 64 + 24\sqrt{n-1}})}.$$

به آسانی می‌توان دید که

$$n^2 - 8n + 64 + 24\sqrt{n-1} = (n-4)^2 + 48 + 24\sqrt{n-1} < (n-4)^2,$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(n+2 + \sqrt{n^2 - 8n + 64 + 24\sqrt{n-1}})} < \sqrt{n-1},$$

$$f_1(x_1) = 6\sqrt{n-1} - 6\sqrt{\frac{1}{2}(n+2 + \sqrt{n^2 - 8n + 64 + 24\sqrt{n-1}})} < 0,$$

آنگاه

$$\lambda_1(T_1) > \sqrt{n-1} - 6\sqrt{\frac{1}{2}(n+2 + \sqrt{n^2 - 8n + 64 + 24\sqrt{n-1}})}.$$

در نتیجه با ادامه دادن  $f_1(x)$  عدد صحیح و مثبتی مانند  $\epsilon$  وجود دارد به طوری که

$$\lambda_1(T_1) > \sqrt{n-1} - 6\sqrt{\frac{1}{2}(n+2 + \sqrt{n^2 - 8n + 64 + 24\sqrt{n-1}})} + \epsilon.$$

آنگاه

$$EE(T_1) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(T_1)} > e^{\lambda_1(T_1)} + \sum_{i=1}^{n-1} e^{\lambda_i(T_1-w_*)} \quad (4.4)$$

$$\geq e^{\sqrt{n-1} - 6\sqrt{\frac{1}{2}(n+2 + \sqrt{n^2 - 8n + 64 + 24\sqrt{n-1}})} + \epsilon} + (n-3) + e^{\sqrt{3}} + e^{-\sqrt{3}} = H_1'. \quad (5.4)$$

برای  $n \geq 12$

$$f_3(x_1) = 6\sqrt{\frac{1}{2}(n+2+\sqrt{n^2-8n+64+24\sqrt{n-1}})} - 2n - 16 \quad (6.4)$$

$$- 4\sqrt{n^2-8n+64+24\sqrt{n-1}} \quad (7.4)$$

$$+ 6\sqrt{\frac{1}{2}(n-1)(n+2+\sqrt{n^2-8n+64+24\sqrt{n-1}})} \quad (8.4)$$

$$f_3(\sqrt{n-1}) = -(6n-8) - \sqrt{n-1} - 10n + 14 < 0 \quad (9.4)$$

$$f_3(1) = n - 12 \geq 0. \quad (10.4)$$

به راحتی با استفاده از محاسبه می بینیم که مقادیر ویژه گراف  $T_\Delta - w_4$  برابر با  $0, -1, 2$  که مضرب  $-1$  دو و مضرب  $0, 4-n$  و مضرب  $2$  نیز یک می باشد. با استفاده از خواص مقادیر ویژه  $T_\Delta - w_4$  و  $T_\Delta$  داریم که  $\lambda_2(T_\Delta) \leq \lambda_1(T_\Delta - w_4) = 2$  می باشد. بنابراین با استفاده از  $(14-12)$  و  $16$  داریم  $2 < \lambda_1(T_\Delta) < \sqrt{\frac{1}{2}(n+2+\sqrt{n^2-8n+64+24\sqrt{n-1}})}$  به طور مشابه با این واقعیت  $\lambda_i(T_\Delta) \leq \lambda_{i-1}(T_\Delta - w_4)$  که برای  $i = 2, 3, \dots, n$  برقرار می باشد.

$$\begin{aligned} EE(T_\Delta) &= \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(T_\Delta)} \leq e^{\lambda_1(T_\Delta)} + \sum_{i=1}^{n-1} e^{\lambda_i(T_\Delta - w_4)} \\ &< e^{\sqrt{\frac{1}{2}(n+2+\sqrt{n^2-8n+64+24\sqrt{n-1}})}} + (n-4) + e^2 + 2e^{-1} = H_\Delta. \end{aligned}$$

برای  $n \geq N_1(\epsilon_0)$  که  $N_1(\epsilon_0)$  یک عدد صحیح مثبت می باشد داریم

$$\begin{aligned} H'_1 - H_\Delta &= e^{\sqrt{\frac{1}{2}(n+2+\sqrt{n^2-8n+64+24\sqrt{n-1}})}+\epsilon_0} - e^{\sqrt{\frac{1}{2}(n+2+\sqrt{n^2-8n+64+24\sqrt{n-1}})}} + 1 + e^{\sqrt{3}} \\ &+ e^{-\sqrt{3}} - e^2 - 2e^{-1} \\ &> e^{\sqrt{\frac{1}{2}(n+2+\sqrt{n^2-8n+64+24\sqrt{n-1}})}+\epsilon_0} - e^{\sqrt{\frac{1}{2}(n+2+\sqrt{n^2-8n+64+24\sqrt{n-1}})}} + e^{\sqrt{3}} \\ &+ e^{-\sqrt{3}} - e^2 > 0. \end{aligned}$$

بنابراین  $EE(T_1) > EE(T_\Delta)$  است. به طور مشابه می توان نشان داد  $EE(T_1) > EE(T_2)$  می باشد.  $\square$

# فصل ۵

## گراف‌های چهاردور با بیشترین مشخصه استرادا

### ۱.۵ مقدمه

در [۲۷] گراف‌های دو دور بیشترین مشخصه استرادا و در [۳۲] گراف‌های سه دور با بیشترین مشخصه استرادا را مشخص کرده. در این فصل گراف‌های با چهار دور با بیشترین مشخصه استرادا را در  $\mathcal{F}_n$  مشخص می‌کنیم.

### ۲.۵ گراف‌های چهاردور با بیشترین مشخصه استرادا

برای گراف  $G \in \mathcal{F}_n$  زیرگراف‌های  $G$  از  $G$  با مینیمال چهار را با  $B(G)$  مشخص می‌کنیم. روشن است که  $B(G)$  زیرگراف یکتای از چهار دورگراف‌ها که شامل رأس مستقل نمی‌باشد و  $G$  می‌تواند از  $B(G)$  با اتصال درخت‌های به بعضی رأس‌های آن به دست آید. گراف‌های با چهار دور به شکل سه نوع زیرمی‌باشند. (که در شکل ۱.۵-۳.۵ نشان داده شده):

$$G_j^4 (j = 1, \dots, 9), \quad G_j^5 (j = 1, \dots, 21), \quad G_j^6 (j = 1, \dots, 14).$$

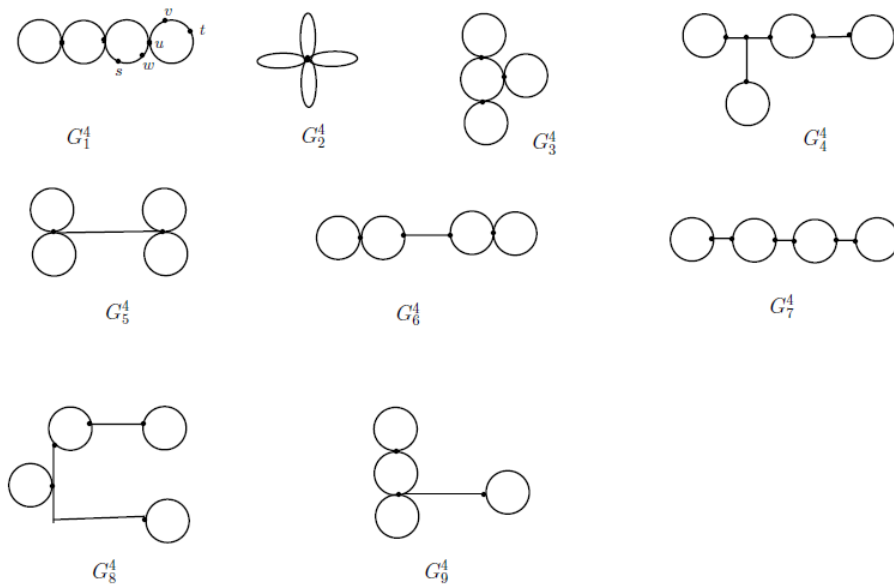
فرض کنید:

$$\mathcal{F}_n^4 = \{G | B(G) \cong G_j^4, j \in \{1, \dots, 9\}\}; \quad \mathcal{F}_n^5 = \{G | B(G) \cong G_j^5, j \in \{1, \dots, 21\}\};$$

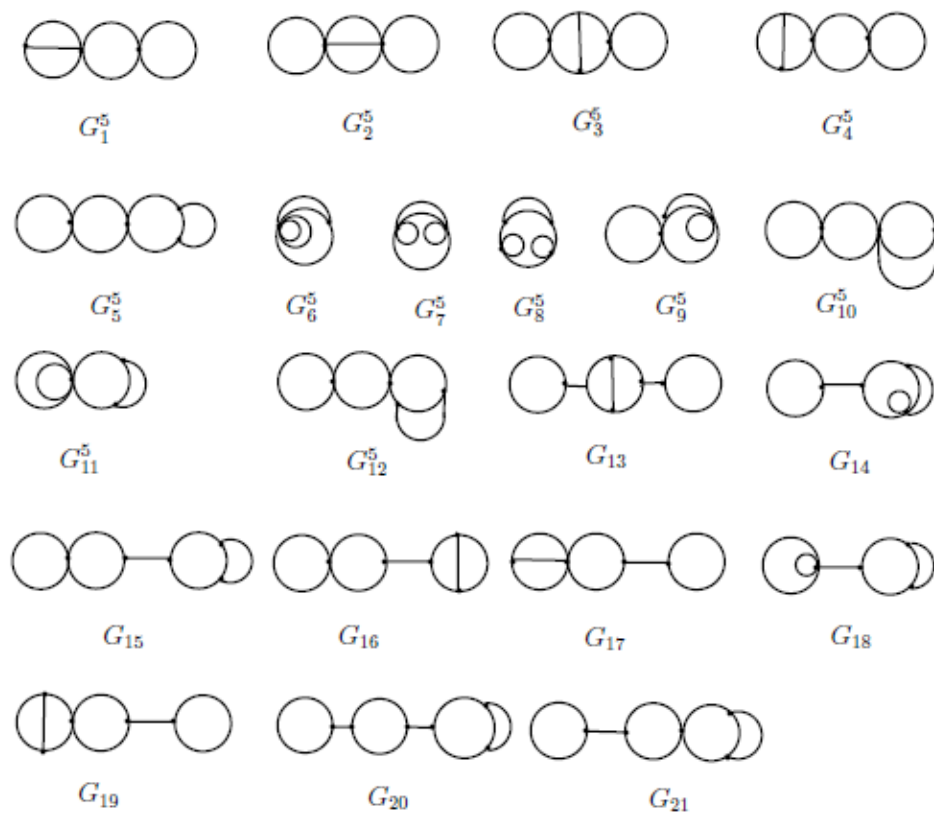
$$\mathcal{F}_n^6 = \{G | B(G) \cong G_j^6, j \in \{1, \dots, 14\}\}.$$

با تکرار لم ۴.۲.۴ لم‌های زیر را داریم.

لم ۱.۲.۵. اگر  $G^*$  گرافی با بیشترین مشخصه استرادا در  $\mathcal{F}_n$  باشد، آنگاه  $G^*$  از اتصال رأس‌های مستقل به پایه‌های خود به دست می‌آید.



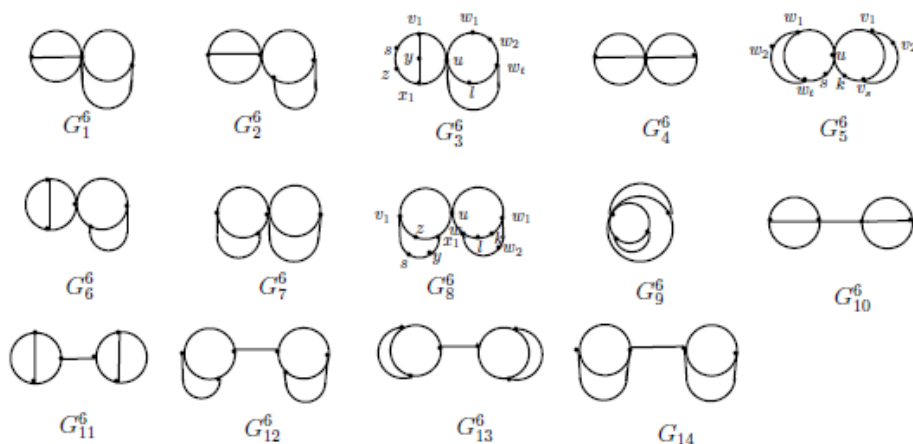
شکل ۱.۵: گراف‌های  $G_j^4 (j = 1, \dots, 9)$ .



شکل ۲.۵: گراف‌های  $G_j^5 (j = 1, \dots, 21)$ .

لم ۲.۲.۵. (i) اگر  $G^*$  گرافی با بیشترین مشخصه استرادا در  $\mathcal{F}_n^*$  باشد، آنگاه  $j \in \{1, 2, 3\}$  می‌باشد.  
 $B(G^*) \cong G_j^*$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$





شکل ۳.۵: گراف‌های  $G_j^6$  ( $j = 1, \dots, 14$ )

(ii) اگر  $G^*$  گرافی با بیشترین مشخصه استرادا در  $\mathcal{F}_n^5$  باشد، آنگاه  $j \in \{1, 2, \dots, 12\}$ ،  $B(G^*) \cong G_j^5$  می‌باشد.

(iii) اگر  $G^*$  گرافی با بیشترین مشخصه استرادا در  $\mathcal{F}_n^6$  باشد، آنگاه  $j \in \{1, 2, \dots, 9\}$ ،  $B(G^*) \cong G_j^6$  می‌باشد.

لم ۳.۲.۵. اگر  $G_1$  گرافی با بیشترین مشخصه استرادا در  $\mathcal{F}_n^4$  باشد، آنگاه گراف مانند  $G_2$  از  $\mathcal{F}_n^5$  وجود دارد به طوری که  $EE(G_2) > EE(G_1)$  باشد.

برهان. با استفاده از لم ۲.۲.۵(i) می‌دانیم که  $B(G_1) \cong G_j^4$ ،  $j \in \{1, 2, 3\}$  اگر  $B(G_1) \cong G_j^4$  باشد، فرض کنید  $wv, vt, uw, ws \in E(G_1)$  باشد (نشان داده شده در شکل ۱.۵). بدون کاستن از کلیات فرض کنید که  $d_{G_1}(w) \geq d_{G_1}(v)$  باشد.

فرض کنید  $H_1$  گرافی که از  $G_1$  با حذف  $ws, vt$  و  $d_{G_1}(w) - 2$  یال مستقل متصل به  $w$  و  $d_{G_1}(v) - 2$  یال مستقل متصل به  $v$  به دست آید. در این صورت اتومورفیزم  $\sigma$  از  $H_1$  وجود دارد، به طوری که رأس‌های  $w$  و  $v$  تغییر و بقیه رأس‌ها را ثابت نگه دارد. فرض کنید  $K_{1, d_{G_1}(v)-2} \cong H_2$  با مرکز  $c'$  و  $x \in V(G_0) = (H_1(v) \circ H_2(v'))(w) \circ H_2(v')$  باشد. با استفاده از لم ۵.۲.۴(i) برای هر رأس  $x \in V(G_0)$  داریم  $(G_0; w, x) = (G_0; v, \sigma(x))$  می‌باشد. همچنین فرض کنید  $G_3$  گرافی که از  $G_0$  با اضافه کردن یال  $ws$  و  $d_{G_1}(w) - d_{G_1}(v) - 2$  یال مستقل متصل به  $w$  به دست آید. آنگاه با استفاده از لم ۵.۲.۴(ii) برای هر رأس  $x \in V(G_3)$  داریم که  $(G_3; w, x) \succ (G_3; v, \sigma(x))$  می‌باشد. بدیهی است که  $G_1 = G_2 + vt$  می‌باشد. فرض کنید  $G_2 = G_3 + wt$  باشد که در این صورت  $G_2 \in \mathcal{F}_n^5$  می‌باشد. بنابراین با استفاده از لم ۲.۲.۴ داریم  $EE(G_2) > EE(G_1)$  است. با استدلال مشابه می‌توان برای  $B(G_1) \cong G_j^4$  یا  $B(G_1) \cong G_j^4$  نیز ثابت کرد. بنابراین با استفاده از لم ۴.۲.۴ اثبات کامل می‌باشد.

□

نتیجه ۴.۲.۵. اگر  $G^*$  گرافی با بیشترین مشخصه استرادا در  $\mathcal{F}_n$  باشد، آنگاه  $B(G^*) \cong G_j^5$  ( $j \in \{1, 2, \dots, 12\}$ ) یا  $B(G^*) \cong G_j^6$  ( $j \in \{1, 2, \dots, 9\}$ ) می‌باشد.

لم ۵.۲.۵. فرض کنید  $P_i^u, G \in \mathcal{F}_n^{\mathfrak{H}} \cup \mathcal{F}_n^{\mathfrak{F}}$  ( $1 \leq i \leq d_B(G)(u)$ ) مسیر داخلی در  $B(G)$  باشد، با رأس پایانی  $u$  که  $d_B(G)(u) \geq 3$  ( $u \in B(G)$ ) می‌باشد. اگر دوگراف  $P_u^l$  و  $P_u^k$  ( $1 \leq l, k \leq d_B(G)(u)$ ) که  $|P_u^k| \geq 1, |P_u^l| \geq 3$  وجود داشته باشند، آنگاه گرافی  $\tilde{G} \in \mathcal{F}_n^{\mathfrak{H}} \cup \mathcal{F}_n^{\mathfrak{F}}$  وجود دارد به طوری که  $|E(B(G))| - |E(B(\tilde{G}))| = 1$  و  $EE(\tilde{G}) > EE(G)$  می‌باشد.

برهان. فرض کنید  $P_u^l = uw_1 \dots w_t$  و  $P_u^k = uv_1 \dots v_s$  که  $t \geq 3, s \geq 1$  می‌باشد. مرحله ۱. اگر  $s \geq 2, t \geq 3$  بدون کاستن از کلیات فرض کنید که  $d_G(w_1) \geq d_G(v_1)$  باشد. فرض کنید  $H_1$  گرافی که از  $G$  با حذف  $w_1w_2, v_1v_2, uw_1, uv_1$  و  $v_1$  یال مستقل متصل به  $w_1$  و  $v_1$   $d_G(w_1) - 3$  یال مستقل متصل به  $w_1$  و  $v_1$   $d_G(v_1) - 3$  یال مستقل متصل به  $w_1$  و  $v_1$   $d_G(w_1) - 3$  یال مستقل متصل به  $w_1$  به دست آید. در این صورت اتومورفیزم  $\sigma$  از  $H_1$  وجود دارد، به طوری که رأس‌های  $w_1$  و  $v_1$  تغییر و بقیه رأس‌ها را ثابت نگه دارد. فرض کنید  $H_2 \cong K_{1, d_G(v_1)-3}$  با مرکز  $c'$  و  $G_0 = (H_1(v_1) \circ H_2(v'))(w_1) \circ H_2(v')$  باشد. با استفاده از لم ۵.۲.۴(i) برای هر رأس  $v \in V(G_0)$  داریم  $(G_0; w_1, v) = (G_0; v_1, \sigma(v))$  است. همچنین فرض کنید  $G_1$  گرافی که از  $G_0$  با اضافه کردن یال  $w_1w_2, v_1v_2$  و  $d_{G_1}(w_1) - d_{G_1}(v_1)$  یال مستقل متصل به  $w_1$  به دست آید. آنگاه با استفاده از لم ۵.۲.۴(ii) برای هر رأس  $v \in V(G_1)$  داریم که  $(G_1; w_1, v) \succ (G_1; v_1, \sigma(v))$  می‌باشد. بدیهی است که  $G = G_1 + uv_1 + uw_1$  فرض کنید  $\tilde{G} = G_1 + w_1k + v_1t$  در این صورت  $\tilde{G} \in \mathcal{F}_n^{\mathfrak{H}} \cup \mathcal{F}_n^{\mathfrak{F}}$  می‌باشد.  $|E(B(G))| - |E(B(\tilde{G}))| = 1$  بنابراین با استفاده از لم ۲.۲.۴،  $EE(\tilde{G}) > EE(G)$  است.

مرحله ۲. اگر  $t \geq 3, s = 1$  با استفاده از  $d_B(G)(u) \geq 3$  فرض کنید  $P_u^j = ux_1 \dots x_r$  که مسیر سومی با رأس پایانی  $u$  باشد، به طوری که  $|P_u^j| \geq 1$  باشد.

مرحله ۱. اگر  $|P_u^j| \geq 2$  در این صورت دو مسیر  $P_u^j$  و  $P_u^l$  وجود دارد، که مشابه با مرحله ۱ می‌توانیم گرافی با بیشترین مشخصه استرادا به دست آوریم.

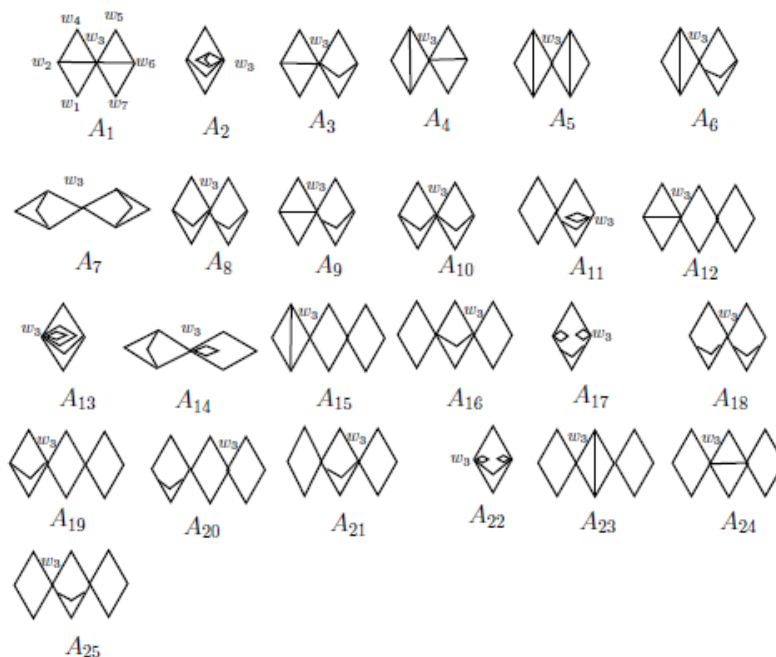
مرحله ۲. اگر  $|P_u^j| = 1$  آنگاه  $d_B(G)(x_1) \geq 3$  و  $x_1 \notin V(P_u^k)$  باشد. فرض کنید  $x_1^1$  و  $x_1^2$  دو رأس مجاور با  $x_1$  در  $B(G)$  باشد. اگر  $d_B(G)(x_1) \geq d_B(G)(w_1) + 1$  باشد، فرض کنید  $H_1$  گرافی که از  $G$  با حذف  $w_1w_2, yx_1, x_1z$  و  $d_G(w_1) - 2$  و  $d_G(x_1) - 3$  یال مستقل متصل به  $w_1$  و  $x_1$   $d_G(x_1) - 3$  یال مستقل متصل به  $x_1$  به دست آید. در این صورت اتومورفیزم  $\sigma$  از  $H_1$  وجود دارد، به طوری که رأس‌های  $w_1$  و  $x_1$  تغییر و بقیه رأس‌ها را ثابت نگه دارد. فرض کنید  $H_2 \cong K_{1, d_G(w_1) - 2}$  با مرکز  $c'$  و  $G_0 = (H_1(v_1) \circ H_2(v'))(x_1) \circ H_2(v')$  باشد. با استفاده از لم ۵.۲.۴(i) برای هر رأس  $v \in V(G_0)$  داریم  $(G_0; w_1, v) = (G_0; x_1, \sigma(v))$  می‌باشد. همچنین فرض کنید  $G_1$  گرافی که از  $G_0$  با اضافه کردن یال  $x_1y$  و  $d_G(x_1) - d_G(w_1) - 1$  یال مستقل متصل به  $x_1$  به دست آید. آنگاه با استفاده از لم ۵.۲.۴(ii) برای هر رأس  $v \in V(G_1)$  داریم که  $(G_1; x_1, v) \succ (G_1; w_1, \sigma(v))$  می‌باشد. بدیهی است که  $G = G_1 + x_1z + w_1w_2$  فرض کنید  $\tilde{G} = G_1 + w_1l + x_1s$  باشد. در این صورت  $\tilde{G} \in \mathcal{F}_n^{\mathfrak{H}} \cup \mathcal{F}_n^{\mathfrak{F}}$  است،  $|E(B(G))| - |E(B(\tilde{G}))| = 1$  بنابراین با استفاده از لم ۲.۲.۴  $EE(\tilde{G}) > EE(G)$  می‌باشد.  $d_B(G)(x_1) \leq d_B(G)(w_1)$  فرض کنید  $H_1$  گرافی که از  $G$  با حذف  $w_1k, w_1w_2$  و  $d_G(w_1) - 3$  و  $d_G(x_1) - 3$  یال مستقل متصل به  $w_1$  و  $x_1$   $d_G(x_1) - 3$  یال مستقل متصل به  $x_1$  به دست آید. در این صورت اتومورفیزم  $\sigma$  از  $H_1$  وجود دارد، به طوری که رأس

های  $w_1$  و  $x_1$  تغییر و بقیه رأس‌ها را ثابت نگه دارد. فرض کنید  $H_2 \cong K_{1, d_G(w_1)-3}$  با مرکز  $c'$  و  $v \in V(G_0) = (H_1(v_1) \circ H_2(v'))(x_1) \circ H_2(v')$  باشد. با استفاده از لم ۵.۲.۴(i) برای هر رأس  $v \in V(G_0)$  داریم  $(G_0; w_1, v) = (G_0; x_1, \sigma(v))$  می‌باشد. همچنین فرض کنید  $G_1$  گرافی که از  $G_0$  با اضافه کردن یال  $x_1z, w_1k$  و  $d_G(w_1) - d_G(x_1)$  یال مستقل متصل به  $x_1$  به دست آید. آنگاه با استفاده از لم ۵.۲.۴(ii) برای هر رأس  $v \in V(G_1)$  داریم که  $(G_1; x_1, v) \succ (G_1; w_1, \sigma(v))$  است. بدیهی است که  $G = G_1 + x_1y + w_1w_1$  است. فرض کنید  $\tilde{G} = G_1 + w_1l + x_1s$  در این صورت  $\tilde{G} \in \mathcal{F}_n^f \cup \mathcal{F}^y$  می‌باشد،  $|E(B(G))| - |E(B(\tilde{G}))| = 1$  بنابراین با استفاده از لم ۲.۲.۴،  $EE(\tilde{G}) > EE(G)$  است.

□

با استدلال مشابه لم ۵.۲.۵ لم زیر را داریم.

لم ۶.۲.۵. فرض کنید  $G \in \mathcal{F}_n^d \cup \mathcal{F}^f$  و  $P_u^l = uw_1w_2$  و  $P_u^k = uw_1v_2$  دو مسیر داخلی در  $B(G)$  باشد، که  $d_B(G)(u) \geq 3$ ، اگر  $w_1 \neq w_2$  باشد، آنگاه گرافی مانند  $\tilde{G} \in \mathcal{F}_n^d \cup \mathcal{F}_n^f$  وجود دارد به طوری که  $|E(B(G))| - |E(B(\tilde{G}))| = 1$  و  $EE(\tilde{G}) > EE(G)$  باشد.



شکل ۴.۵: گراف‌های  $A_1, \dots, A_{25}$ .

با استفاده از لم‌های ۶.۲.۵ نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۷.۲.۵. اگر  $G^*$  گرافی با بیشترین مشخصه استرادا در  $\mathcal{F}_n^d \cup \mathcal{F}_n^f$  باشد، آنگاه  $G^* \cong A_i, i \in \{1, 2, \dots, 25\}$  می‌باشد (نشان داده شده در شکل ۴.۵).

لم ۸.۲.۵. اگر  $G^*$  گرافی با بیشترین مشخصه استرادا در  $\{1, 2, \dots, 25\}$  باشد  $B(G) \cong A_i, i \in \{1, 2, \dots, 25\}$  (نشان داده شده در شکل ۴.۵)، آنگاه  $G^*$  از  $A_i$  با اتصال  $|V(A_i)| - n$  به رأس  $w_3$  با بیشترین درجه در  $\{1, 2, \dots, 25\}$  به دست می‌آید.

برهان. اگر  $B(G^*) \cong A_1$  و  $w_i (i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\})$  رأس‌های  $A_1$  که در شکل ۴.۵ نشان داده شده است. فرض کنید که هر  $w_i$  متصل  $m_i$  یال مستقل در  $G^*$  باشد. که  $m_i \geq 0$  و  $\sum_{i=1}^7 m_i = n - 7$  باشد. برای راحتی ما  $G^* = A_1(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7)$  را مشخص می‌کنیم.

مرحله ۱. اگر حداقل پنج تا از  $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7$  نا صفر باشد. فرض کنید  $H_1$  گراف که از  $A_1(m_1, 0, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7)$  با حذف رأس‌های مستقل به  $w_1$  به دست آید. آنگاه اتومورفیزی وجود دارد، که  $w_1$  و  $w_2$  را تغییر و رأس‌های دیگر را ثابت نگه می‌دارد. با استفاده از لم ۵.۲.۴(ii) داریم که:

$$(A_1(m_1, 0, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7); w_1) \succ (A_1(m_1, 0, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7); w_2).$$

بعلاوه با استفاده از لم ۲.۲.۴، داریم:

$$A_1(m_1 + m_2, 0, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7) \succ A_1(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7).$$

که تناقض می‌باشد. بنابراین حداقل چهارتا از  $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7$  نا صفر باشند، بدون کاستن از کلیات فرض کنید  $m_2 = m_4 = 0$  باشد، آنگاه با استدلال مشابه قبل به تناقض می‌رسیم. اگر حداقل سه تا از  $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7$  نا صفر باشند. این استدلال را ادامه می‌دهیم تا همه  $m_2, m_4, m_5, m_6, m_7$  صفر شوند، یا به عبارتی  $m_2 = m_4 = m_5 = m_6 = m_7 = 0$   $G^* = A_1(m_1, 0, m_3, 0, 0, 0, 0)$  باشد. اگر هر دو  $m_1, m_3$  ناصفر باشند، در این صورت  $H_1$  گرافی که از  $A_1$  با حذف یال‌های  $w_2w_3, w_4w_3, w_5w_3, w_6w_3$  به دست می‌آید. آنگاه اتومورفیزی وجود دارد که رأس‌های  $w_1$  و  $w_3$  را تغییر و رأس‌های دیگر را ثابت نگه می‌دارد. با استفاده از لم ۵.۲.۴(ii) داریم

$$(A_1(0, 0, m_3, 0, 0, 0, 0); w_3) \succ (A_1(0, 0, m_3, 0, 0, 0, 0); w_1).$$

بعلاوه با استفاده از لم ۲.۲.۴، داریم

$$A_1(0, 0, m_1 + m_3, 0, 0, 0, 0) \succ A_1(m_1, 0, m_3, 0, 0, 0, 0),$$

که همچنین نیز تناقض می‌باشد. بنابراین  $G^* = A_1(0, 0, m_3, 0, 0, 0, 0)$  است. به طور مشابه می‌توان  $\square$  برای  $B(G^*) \cong A_i (i \in \{2, 3, \dots, 25\})$  نیز ثابت کرد.

فرض کنید که  $F_i$  گراف که از  $A_i$  با اتصال  $|V(A_i)| - n$  رأس‌ها مستقل به راسی با بیشترین درجه در  $\{1, 2, \dots, 25\}$  به دست آید. با استفاده از لم ۱.۲.۴ نیز چند جمله‌ای‌های  $\phi(F_i; x)$  برای  $i = 1, 2, \dots, 6$  به صورت زیر به دست می‌آوریم. می‌توانید  $\phi(F_i; x)$  برای  $i = 7, 8, \dots, 25$  را در پیوست آ ببینید.

$$\begin{aligned} \phi(F_1; x) &= x^{n-7}[x^7 - (n+3)x^5 - 8x^4 + (4n-12)x^3 + 16x^2 - (4n-28)x] \\ &= x^{n-7}f_1(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(F_2; x) &= x^{n-9}[x^9 - (n+3)x^7 + (7n-63)x^5 - (12n-108)x^3] \\ &= x^{n-9}f_2(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(F_3; x) &= x^{n-8}[x^8 - (n+3)x^6 - 4x^5 + (5n-19)x^4 + 12x^3 - (6n-48)x^2] \\ &= x^{n-8}f_3(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(F_4; x) &= x^{n-7}[x^7 - (n+3)x^5 - 8x^4 + (5n-16)x^3 + (2n+12)x^2] \\ &= x^{n-7}f_4(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(F_5; x) &= x^{n-7}[x^7 - (n+3)x^5 - 8x^4 + (6n-21)x^3 + (4n+4)x^2 - (9n-59)x^2 \\ &\quad - (12n-68)] = x^{n-7}f_5(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(F_6; x) &= x^{n-9}[x^9 - (n+5)x^7 - 4x^6 + (9n-26)x^5 + (2n+8)x^4 - (23n-149)x^3 \\ &\quad - (12n-98)x^2 + (15-123)x] = x^{n-9}f_6(x).\end{aligned}$$

توجه کنید که  $\phi(F_i; x)$  برای  $i = 1, 2, \dots, 25$  نقش کلیدی در اثبات قضیه اصلی بازی می‌کنند. همچنین مشخصه استرادا  $EE(F_i)$  برای  $i = 1, 2, \dots, 25$  در جدول ۱.۵ محاسبه شده است.

اکنون ما می‌خواهیم نتیجه اصلی را در قضیه زیر بیان و اثبات کنیم.

**قضیه ۹.۲.۵.** فرض کنید  $G$  یک گراف در  $\mathcal{F}_n$  باشد و  $n \geq 7$  آنگاه  $EE(G) \leq EE(F_1)$  تساوی برقرار می‌شود، اگر و فقط اگر  $G \cong F_1$  باشد.

**برهان.** با استفاده از محاسبه مستقیم می‌توانیم ببینیم، که برای  $n \geq 3$

$$\begin{aligned}f_1(\sqrt{n-1}) &= -(n+3)(n-1)^{\frac{5}{2}} + (4n-12)x^{\frac{7}{2}} + (n-1)^{\frac{7}{2}} \\ &\quad - \sqrt{n-1}(4n-28) - 8(n-1)^2 + 16n - 16 < 0.\end{aligned}$$

و این دلالت بر این دارد که  $\lambda_1(F_1) > \sqrt{n-1}$  می‌باشد. به راحتی با استفاده از محاسبه می‌بینیم که مقادیر ویژه گراف  $F_1 - w_3$  برابر با  $\pm\sqrt{2}$ ،  $0$ ، که مضرب  $0$ ،  $n-5$  و مضرب  $\sqrt{2}$  و  $-\sqrt{2}$  دو می‌باشد. با استفاده از ویژگی‌های مقادیر ویژه  $A(F_1)$  و  $A(F_1 - w_3)$  برای  $i = 2, 3, \dots, n-1$  از [۲] داریم  $\lambda_i(F_1) \geq \lambda_i(F_1 - w_3)$  می‌باشد. آنگاه

$$\begin{aligned}EE(F_1) &= \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(F_1)} > e^{\lambda_1(F_1)} + \sum_{i=2}^{n-1} e^{\lambda_i(F_1 - w_3)} \\ &> e^{\sqrt{n-1}} + (n-5) + 2e^{\sqrt{2}} + 2e^{-\sqrt{2}} = H_1.\end{aligned}$$

حال نشان می‌دهیم برای  $i = 2, \dots, 25$   $EE(F_1) > EE(F_i)$  می‌باشد که ما در اینجا فقط برای  $i = 2, 3, 4, 5, 6$  ثابت می‌کنیم، بقیه موارد دیگر هم نیز به طور مشابه اثبات می‌شوند.

جدول ۱.۵: مشخصه استرادای گراف‌های  $F_i$  برای  $i = 1, 2, \dots, 25$  و  $7 \leq n \leq 9$ .

$EE(F_i)$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$
$EE(F_1)$	۳۲.۲۱۶	۳۶.۴۱۳	۴۰.۹۹۶
$EE(F_2)$	۳۲.۰۱۴	۳۴.۶۵۷	۳۸.۰۷۷
$EE(F_3)$	۲۶.۵۸۵	۳۱.۵۱۲	۳۵.۴۶۶
$EE(F_4)$	۳۰.۶۸۰	۳۴.۴۲۷	۳۷.۲۵۳
$EE(F_5)$	۲۹.۴۷۵	۳۲.۸۱۲	۳۵.۴۳۳
$EE(F_6)$	۲۶.۹۱۷	۳۰.۲۹۱	۳۳.۸۸۱
$EE(F_7)$	۲۲.۸۷۴	۲۴.۹۱۷	۲۹.۸۸۱
$EE(F_8)$	۲۳.۱۳۳	۲۶.۲۱۷	۲۸.۶۱۰
$EE(F_9)$	۲۶.۲۷۹	۲۶.۱۷۴	۳۳.۸۸۱
$EE(F_{10})$	۲۲.۱۳۶	۲۵.۸۹۹	۳۰.۹۶۴
$EE(F_{11})$	۲۵.۷۹۸	۱۸.۵۴۹	۱۹.۳۶۵
$EE(F_{12})$	۲۱.۸۷۰	۲۴.۳۷۷	۲۸.۶۱۲
$EE(F_{13})$	۲۱.۶۶۸	۲۴.۸۶۷	۲۷.۶۶۵
$EE(F_{14})$	۱۹.۸۸۸	۱۴.۶۵۸	۱۶.۸۸۳
$EE(F_{15})$	۱۸.۳۰۲	۱۷.۱۹۸	۱۹.۱۵۸
$EE(F_{16})$	۱۱.۵۰۰	۳.۴۴۵	۲.۰۴۶
$EE(F_{17})$	۱	۱۰.۶۵۳	۱۱.۷۱۳
$EE(F_{18})$	۱.۰۷۳	۳.۳۴۳	۳.۵۰۷
$EE(F_{19})$	۰.۵۹۴	۲۱.۲۵۶	۲۳.۲۲۵
$EE(F_{20})$	۰.۴۹۶	۱۰.۶۲۸	۱۱.۵۲۴
$EE(F_{21})$	۰.۷۱۷	۹.۱۵۱	۱۰.۶۲۳
$EE(F_{22})$	۰.۶۳۰	۱۹.۶۸۳	۲۱.۷۴۸
$EE(F_{23})$	۰.۵۹۴	۷.۵۹۲	۶.۹۷۳
$EE(F_{24})$	۴.۵۵۳	۰.۷۹۰	۱.۷۹۷
$EE(F_{25})$	۰.۸۴۰	۹.۶۷۲	۱۰.۶۱۱

$i = 2 \bullet$

با استفاده از محاسبه مستقیم می‌بینیم که مقادیر ویژه گراف  $F_2 - w_3$ ،  $\pm\sqrt{3}$ ،  $\pm 2$ ،  $\circ$  که مضرب  $\circ$ ،  $n - 8$  و بقیه مضارب یک می‌باشد. برای  $n \geq 2$  داریم

$$f_2\left(\sqrt{n - \frac{3}{4}}\right) = -(n + 3)\left(n - \frac{3}{4}\right)^{\frac{5}{4}} + (7n - 25)\left(n - \frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}} + \left(n - \frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} - (12n - 78)\left(n - \frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}} - 2\sqrt{n - \frac{3}{4}} > \circ.$$

و برای  $n \leq ۸$ ،  $0 < f_2(1) = -6n + 54 > 0$ .

با استفاده از ویژگی مقادیر ویژه  $F_2 - w_3$  و  $F_2$  داریم  $\lambda_2(F_2) \leq \lambda_1(F_2 - w_3) = 2$  می‌باشد. بعلاوه چون  $0 < f_2(1) = -6n + 54 > 0$  داریم که  $\sqrt{n - \frac{3}{2}} < \lambda_1(F_2) < 2$  حال به طور مشابه با استفاده از این واقعیت برای  $i = 2, 3, \dots, n$  داریم  $\lambda_i(F_2) \leq \lambda_{i-1}(F_2 - w_3)$  پس بنابراین:

$$EE(F_2) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(F_2)} \leq e^{\lambda_1(F_2)} + \sum_{i=1}^{n-1} e^{\lambda_i(F_2 - w_3)} < e^{\sqrt{n - \frac{3}{2}}} + (n - 7) + e^2 + e^{-2} + e^{\sqrt{3}} + e^{-\sqrt{3}} = H_2.$$

اکنون با توجه به این که برای  $n \geq 15$  داریم،

$$e^{\sqrt{n-1}} - e^{\sqrt{n-\frac{3}{2}}} + 2e^{\sqrt{2}} + 2e^{-\sqrt{2}} - e^2 - e^{-2} - e^{\sqrt{3}} - e^{-\sqrt{3}} + 2 > 0.$$

آنگاه

$$H_1 - H_2 = e^{\sqrt{n-1}} - e^{\sqrt{n-\frac{3}{2}}} + 2e^{\sqrt{2}} + 2e^{-\sqrt{2}} - e^2 - e^{-2} - e^{\sqrt{3}} - e^{-\sqrt{3}} + 2.$$

آنگاه  $0 < H_1 - H_2 > 0$  بنابراین  $EE(F_1) > EE(F_2)$  می‌باشد.

$$i = 3 \bullet$$

با استفاده از محاسبه مستقیم می‌بینیم که مقادیر ویژه گراف  $F_3 - w_3$ ،  $\pm\sqrt{2}$ ،  $\pm\sqrt{3}$  که مضرب  $0 < n - 6$  و بقیه مضارب یک می‌باشد.

برای  $n \geq 122$  داریم

$$f_3(\sqrt{n - \frac{3}{2}}) = \frac{n^2}{2} - 4(n - \frac{3}{2})^{\frac{5}{2}} - \frac{79n^2}{4} + 12(n - \frac{3}{2})^{\frac{3}{2}} + \frac{759n}{8} - \frac{1593}{16} > 0.$$

و برای  $n \leq 5$ ،  $0 < f_3(1) = -2n + 11 > 0$ .

$$f_3(1) = -2n + 11 > 0.$$

با استفاده از ویژگی مقادیر ویژه  $F_3 - w_3$  و  $F_3$  داریم  $\lambda_2(F_3) \leq \lambda_1(F_3 - w_3) = \sqrt{3}$  می‌باشد.

بعلاوه چون  $0 < f_3(1) = -2n + 11 > 0$  داریم که  $\sqrt{3} < \lambda_1(F_3) < \sqrt{n - \frac{3}{2}}$  حال به طور مشابه با استفاده از این واقعیت برای  $i = 2, 3, \dots, n$  داریم،  $\lambda_i(F_3) \leq \lambda_{i-1}(F_3 - w_3)$  پس بنابراین:

$$EE(F_3) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(F_3)} \leq e^{\lambda_1(F_3)} + \sum_{i=1}^{n-1} e^{\lambda_i(F_3 - w_3)} < e^{\sqrt{n - \frac{3}{2}}} + (n - 6) + e^{\sqrt{3}} + e^{\sqrt{2}} + e^{-\sqrt{2}} + e^{-\sqrt{3}} = H_3.$$

اکنون با توجه به این که برای  $n \geq 2$  داریم،  $e^{\sqrt{n-1}} - e^{\sqrt{n-\frac{3}{4}}} + e^{\sqrt{2}} + e^{-\sqrt{2}} - e^{\sqrt{3}} - e^{-\sqrt{3}} + 1 > 0$ ،  
 آنگاه

$$H_1 - H_3 = e^{\sqrt{n-1}} - e^{\sqrt{n-\frac{3}{4}}} + e^{\sqrt{2}} + e^{-\sqrt{2}} - e^{\sqrt{3}} - e^{-\sqrt{3}} + 1.$$

آنگاه  $H_1 - H_3 > 0$  بنابراین  $EE(F_1) > EE(F_3)$  می‌باشد.

$$i = 4 \bullet$$

با استفاده از محاسبه مستقیم می‌بینیم که مقادیر ویژه گراف  $F_4 - w_3$ ،  $F_4$ ،  $\pm\sqrt{2}$ ،  $-1$ ،  $2$ ،  $0$  که مضرب  $-1$  دو و مضرب  $0$ ،  $n-6$  و بقیه مضارب یک می‌باشد. برای  $n \geq 2$  داریم:

$$f_4(\sqrt{n-\frac{3}{4}}) = -(n+3)(n-\frac{3}{4})^{\frac{5}{4}} + (5n-16)(n-\frac{3}{4})^{\frac{3}{4}} + (n-\frac{3}{4})^{\frac{1}{4}} \\ + (n-\frac{3}{4})(2n+12) - \sqrt{n-\frac{3}{4}}(6n-50) - 8(n-\frac{3}{4})^2 > 0.$$

و برای  $0 \leq n \leq 15$

$$f_4(1) = -4n + 64 > 0.$$

با استفاده از ویژگی مقادیر ویژه  $F_4$  و  $F_4 - w_3$  داریم  $\lambda_2(F_4) \leq \lambda_1(F_4 - w_3) = 2$  علاوه  
 چون  $f_4(1) = -4n + 64 > 0$  داریم که  $2 < \lambda_1(F_4) < \sqrt{n-\frac{3}{4}}$  حال به طور مشابه با استفاده از  
 این واقعیت برای  $i = 2, 3, \dots, n$  داریم،  $\lambda_i(F_4) \leq \lambda_{i-1}(F_4 - w_3)$  پس بنابراین:

$$EE(F_4) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(F_4)} \leq e^{\lambda_1(F_4)} + \sum_{i=1}^{n-1} e^{\lambda_i(F_4 - w_3)} \\ < e^{\sqrt{n-\frac{3}{4}}} + (n-6) + 2e^{-1} + e^2 + e^{-\sqrt{2}} + e^{\sqrt{2}} = H_4.$$

اکنون با توجه به این که برای  $n \geq 16$  داریم

$$e^{\sqrt{n-1}} - e^{\sqrt{n-\frac{3}{4}}} + e^{\sqrt{2}} + e^{-\sqrt{2}} - 2e^{-1} - e^2 + 1 > 0.$$

آنگاه

$$H_1 - H_4 = e^{\sqrt{n-1}} - e^{\sqrt{n-\frac{3}{4}}} + e^{\sqrt{2}} + e^{-\sqrt{2}} - 2e^{-1} - e^2 + 1.$$

$H_1 - H_4 > 0$  بنابراین  $EE(F_1) > EE(F_4)$  می‌باشد.

$$i = 5 \bullet$$

با استفاده از محاسبه مستقیم می‌بینیم که مقادیر ویژه گراف  $F_5 - w_3$ ،  $F_5$ ،  $2$ ،  $-1$  که مضرب  $-1$  چهار و  
 مضرب  $2$  دو می‌باشد. برای  $n \geq 29$  داریم

$$f_5(\sqrt{n-\frac{3}{4}}) = -(n+3)(n-\frac{3}{4})^{\frac{5}{4}} + (6n-21)(n-\frac{3}{4})^{\frac{3}{4}} + (n-\frac{3}{4})^{\frac{1}{4}} + (n-\frac{3}{4})(4n+4) \\ - \sqrt{n-\frac{3}{4}}(9n-56) - 8(n-\frac{3}{4})^2 - 12n + 68 > 0.$$



و برای  $n \leq 8$  °

$$f_5(1) = -12n + 100 > 0.$$

با استفاده از ویژگی مقادیر ویژه  $F_5 - w_3$  و  $F_5$  داریم  $\lambda_2(F_5) \leq \lambda_1(F_5 - w_3) = 2$  می‌باشد.

بعلاوه چون  $f_5(1) = -12n + 100 > 0$  داریم که  $\sqrt{n - \frac{3}{4}} < \lambda_1(F_5) < 2$  حال به طور مشابه با استفاده از این واقعیت برای  $i = 2, 3, \dots, n$  داریم  $\lambda_i(F_5) \leq \lambda_{i-1}(F_5 - w_3)$  پس بنابراین :

$$\begin{aligned} EE(F_5) &= \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(F_5)} \leq e^{\lambda_1(F_5)} + \sum_{i=1}^{n-1} e^{\lambda_i(F_5 - w_3)} \\ &< e^{\sqrt{n - \frac{3}{4}}} + 2e^2 + 4e^{-1} = H_5. \end{aligned}$$

اکنون با توجه به این که برای  $n \geq 14$  داریم

$$e^{\sqrt{n-1}} - e^{\sqrt{n-\frac{3}{4}}} + (n-5) + 2e^{\sqrt{2}} + 2e^{-\sqrt{2}} - 2e^2 - 4e^{-1} > 0.$$

آنگاه

$$H_1 - H_5 = e^{\sqrt{n-1}} - e^{\sqrt{n-\frac{3}{4}}} + (n-5) + 2e^{\sqrt{2}} + 2e^{-\sqrt{2}} - 2e^2 - 4e^{-1}.$$

بنابراین  $H_1 - H_5 > 0$  آنگاه  $EE(F_1) > EE(F_5)$  می‌باشد.

•  $i = 6$

با استفاده از محاسبه مستقیم می‌بینیم که مقادیر ویژه گراف  $F_6 - w_3$  برابر با  $-1, 2, \pm 2, 136, \pm 0, 662$  که مضرب  $-1$  دو و بقیه مضارب یک می‌باشد.

برای  $n \geq 16$  داریم

$$\begin{aligned} f_6(\sqrt{n - \frac{3}{4}}) &= -(n+5)(n - \frac{3}{4})^{\frac{5}{4}} + (9n-26)(n - \frac{3}{4})^{\frac{6}{4}} + (n - \frac{3}{4})^{\frac{7}{4}} \\ &+ (2n+2)(n - \frac{3}{4})^2 - (23n-149)(n - \frac{3}{4})^{\frac{3}{4}} - (n - \frac{3}{4})(12n-98) \\ &- 4(n - \frac{3}{4})^2 - \sqrt{n - \frac{3}{4}}(15n-123) > 0. \end{aligned}$$

و برای  $n \leq 9$  °

$$f_6(1) = -10n + 97 > 0.$$

با استفاده از ویژگی مقادیر ویژه  $F_6 - w_3$  و  $F_6$  داریم  $\lambda_2(F_6) \leq \lambda_1(F_6 - w_3) = 2, 136$  می‌باشد.

بعلاوه چون  $f_6(1) = -10n + 97 > 0$  داریم که  $\sqrt{n - \frac{3}{4}} < \lambda_1(F_6) < 2, 136$  حال به طور مشابه با استفاده از این واقعیت برای  $i = 2, 3, \dots, n$  داریم  $\lambda_i(F_6) \leq \lambda_{i-1}(F_6 - w_3)$  پس بنابراین :

$$\begin{aligned} EE(F_6) &= \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(F_6)} \leq e^{\lambda_1(F_6)} + \sum_{i=1}^{n-1} e^{\lambda_i(F_6 - w_3)} \\ &< e^{\sqrt{n-\frac{3}{4}}} + 2e^{-1} + e^2 + e^{2,136} + e^{-2,136} + e^{0,662} + e^{-0,662} = H_6. \end{aligned}$$

اکنون با توجه به این که برای  $n \geq 11$  داریم،

$$e^{\sqrt{n-1}} - e^{\sqrt{n-4}} + (n-5) + 2e^{\sqrt{2}} + 2e^{-\sqrt{2}} - e^{-2.136} - e^{2.136} - e^{0.662} - e^{-0.662} > 0.$$

آنگاه

$$H_1 - H_6 = e^{\sqrt{n-1}} - e^{\sqrt{n-4}} + (n-5) + 2e^{\sqrt{2}} + 2e^{-\sqrt{2}} - e^{-2.136} - e^{2.136} - e^{0.662} - e^{-0.662}.$$

بنابراین  $H_1 - H_6 > 0$  آنگاه  $EE(F_1) > EE(F_6)$  می‌باشد.

□

# فصل ۶

## گراف‌های پنج دور با بیشترین مشخصه استرادا

### ۱.۶ مقدمه

در [۲۷] گراف‌های دو دور با بیشترین مشخصه استرادا و در [۳۲] گراف‌های سه دور با بیشترین مشخصه استرادا و همچنین در [۲۲] گراف‌های چهار دور با بیشترین مشخصه استرادا را مشخص کرده. در این فصل گراف‌های با پنج دور با بیشترین مشخصه استرادا را در  $F_n$  مشخص می‌کنیم.

### ۲.۶ گراف‌های پنج دور با بیشترین مشخصه استرادا

برای گراف  $G \in F_n$  زیر گراف‌های از  $G$  با مینیمال پنج دور را با  $B(G)$  مشخص می‌کنیم. روشن است که  $B(G)$  زیر گراف یکتای از پنج دور گراف‌ها که شامل رأس مستقل نمی‌باشد و  $G$  می‌تواند از  $B(G)$  با اتصال درخت‌های به بعضی رأس‌های آن به دست آید. گراف‌های با پنج دور به شکل دو نوع زیر می‌باشند. (که در شکل ۲-۱ نشان داده شده)

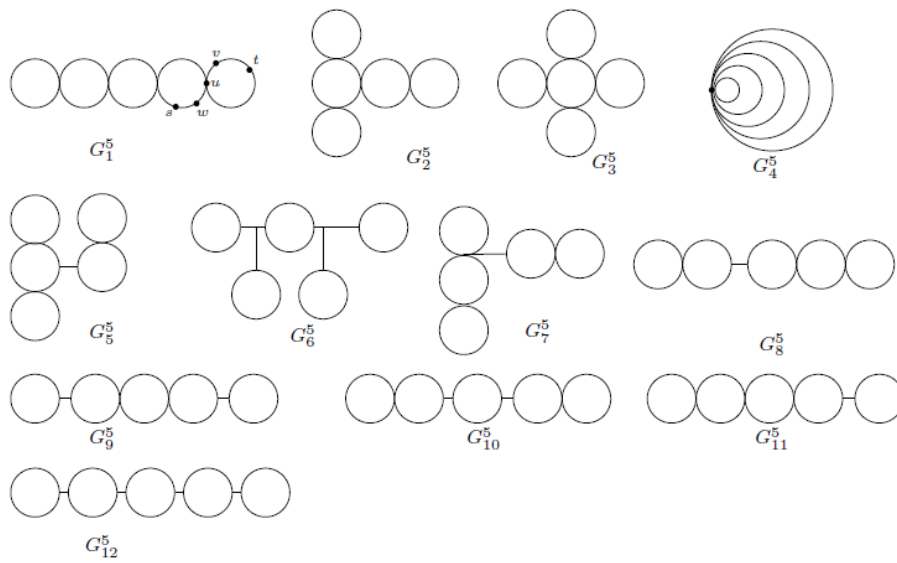
$$G_j^5 (j = 1, \dots, 12), \quad G_j^6 (j = 1, \dots, 33).$$

فرض کنید:

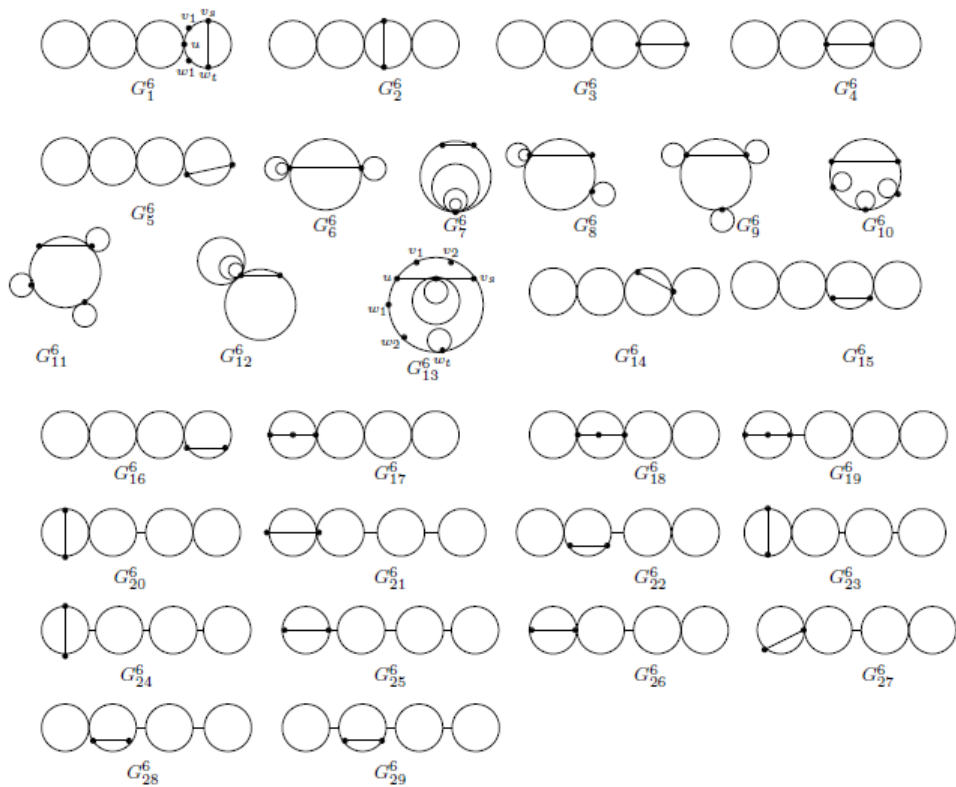
$$F_n^5 = \{G | B(G) \cong G_j^5, j \in \{1, \dots, 12\}\}; \quad F_n^6 = \{G | B(G) \cong G_j^6, j \in \{1, \dots, 33\}\};$$

آنگاه  $F_n = F_n^5 \cup F_n^6$  می‌باشم.

با تکرار لم ۴.۲.۴، لم‌های زیر را داریم.



شکل ۱.۶: گراف‌های  $G_j^5 (j = 1, \dots, 12)$ .



شکل ۲.۶: گراف‌های  $G_j^6 (j = 1, \dots, 29)$ .

لم ۱.۲.۶. اگر  $G^*$  گرافی با بیشترین مشخصه استرادا در  $F_n$  باشد، آنگاه  $G^*$  از اتصال رأس‌های مستقل به پایه‌های خود به دست می‌آید.

لم ۲.۲.۶. (i) اگر  $G^*$  گرافی با بیشترین مشخصه استرادا در  $F_n^5$  باشد، آنگاه  $j \in G_j^5, B(G^*) \cong G_j^5$ .

$\{1, 2, 3, 4\}$  می‌باشد.

(ii) اگر  $G^*$  گرافی با بیشترین مشخصه استرادا در  $F_n^6$  باشد، آنگاه  $\{1, 2, \dots, 18\}$   $G_j^6, j \in \{1, 2, \dots, 18\}$   $B(G^*) \cong G_j^6$  می‌باشد.

۳.۲.۰۶. اگر  $G_1$  گرافی با بیشترین مشخصه استرادا در  $F_n^4$  باشد، آنگاه گراف مانند  $G_2$  از  $F_n^5$  وجود دارد به طوری که  $EE(G_2) > EE(G_1)$  باشد.

برهان. با استفاده از لم ۲.۲.۰۶(i) می‌دانیم که  $B(G_1) \cong G_j^4, j \in \{1, 2, 3\}$  می‌باشد. اگر  $B(G_1) \cong G_1^4$  باشد، فرض کنید  $uv, vt, uw, ws \in E(G_1)$  باشد (نشان داده شده در شکل ۱.۰۶). بدون کاستن از کلیات فرض کنید که  $d_{G_1}(w) \geq d_{G_1}(v)$  باشد. فرض کنید  $H_1$  گرافی که از  $G_1$  با حذف  $ws, vt$  و  $2 - d_{G_1}(w)$  یال مستقل متصل به  $w$  و  $2 - d_{G_1}(v)$  یال مستقل متصل به  $v$  به دست آید. در این صورت اتومورفیزم  $\sigma$  از  $H_1$  وجود دارد، به طوری که رأس‌های  $w$  و  $v$  تغییر داده و بقیه رأس‌ها را ثابت نگه دارد. فرض کنید  $2 - d_{G_1}(v) - 2$   $H_2 \cong K_1$  با مرکز  $c'$  و  $G_0 = (H_1(v) \circ H_2(v'))(w) \circ H_2(v')$  باشد. با استفاده از لم ۵.۲.۰۴(i) برای هر رأس  $x \in V(G_0)$  داریم  $(G_0; w, x) = (G_0; v, \sigma(x))$  می‌باشد. همچنین فرض کنید  $G_3$  گرافی که از  $G_0$  با اضافه کردن یال  $ws$  و  $d_{G_1}(w) - d_{G_1}(v)$  یال مستقل متصل به  $w$  به دست آید. آنگاه با استفاده از لم ۵.۲.۰۴(ii) برای هر رأس  $x \in V(G_3)$  داریم که  $(G_3; w, x) > (G_3; v, \sigma(x))$  می‌باشد، بدیهی است که  $G_1 = G_3 + vt$  است. فرض کنید  $G_2 = G_3 + wt$  در این صورت  $G_2 \in F_n^5$  می‌باشد، بنابراین با استفاده از لم ۲.۲.۰۴ داریم  $EE(G_2) > EE(G_1)$  است. با استدلال مشابه می‌توان برای  $B(G_1) \cong G_2^4$  یا  $B(G_1) \cong G_3^4$  و  $B(G_1) \cong G_4^4$  نیز ثابت کرد، بنابراین با استفاده از لم ۲.۲.۰۴ اثبات کامل می‌باشد.

□

نتیجه ۴.۲.۰۶. اگر  $G^*$  گرافی با بیشترین مشخصه استرادا در  $F_n$  باشد، آنگاه  $B(G^*) \cong G_j^6 (j \in \{1, 2, \dots, 18\})$  می‌باشد.

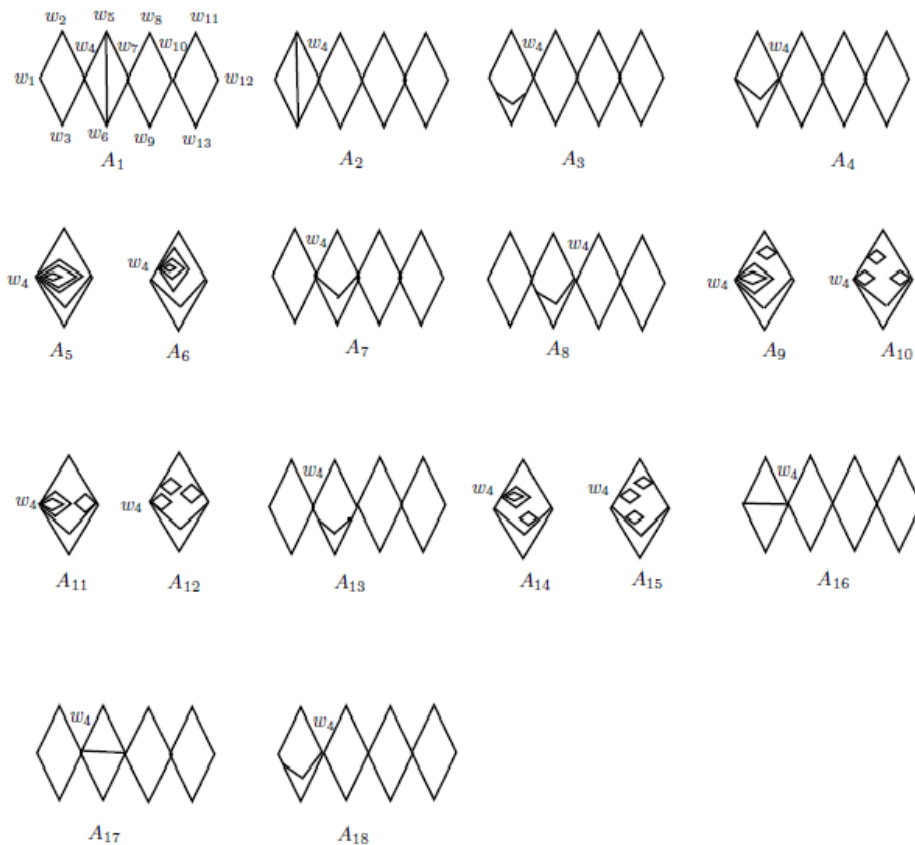
۵.۲.۰۶. فرض کنید  $G \in F_n^6$ ،  $P_i^u, (1 \leq i \leq d_B(G)(u))$  مسیر داخلی در  $B(G)$  باشد، با رأس پایانی  $u$  که  $d_B(G)(u) \geq 3$   $(u \in B(G))$  می‌باشد. اگر دو گراف  $P_u^k$  و  $P_u^l$   $(1 \leq l, k \leq d_B(G)(u))$  وجود داشته باشند، آنگاه گرافی  $\tilde{G} \in F_n^6$  وجود دارد به طوری که  $|E(B(G))| - |E(B(\tilde{G}))| = 1$  و  $EE(\tilde{G}) > EE(G)$  می‌باشد.

برهان. فرض کنید  $P_u^k = uv_1 \dots v_s$  و  $P_u^l = ww_1 \dots w_t$  که  $s \geq 1, t \geq 3$  می‌باشد. اگر  $s \geq 2, t \geq 3$  بدون کاستن از کلیات فرض کنید که  $d_G(w_1) \geq d_G(v_1)$  باشد. فرض کنید  $H_1$  گرافی که از  $G$  با حذف  $w_1v_2, v_1v_2$  و  $2 - d_G(v_1)$  یال مستقل متصل به  $v_1$  و  $2 - d_G(w_1)$  یال مستقل متصل به  $w_1$  به دست آید. در این صورت اتومورفیزم  $\sigma$  از  $H_1$  وجود دارد، به طوری که رأس‌های  $w_1$  و  $v_1$  تغییر داده و بقیه رأس‌ها را ثابت نگه دارد. فرض کنید  $2 - d_{G_1}(v_1) - 2$   $H_2 \cong K_1$  با مرکز  $c'$  و  $G_0 = (H_1(v_1) \circ H_2(v'))(w_1) \circ H_2(v')$  باشد. با استفاده از لم ۵.۲.۰۴(i) برای هر رأس  $v \in V(G_0)$  داریم  $(G_0; w_1, v) = (G_0; v_1, \sigma(v))$  می‌باشد. همچنین فرض کنید  $G_1$  گرافی که از

$G$  با اضافه کردن یال  $w_1 w_2$  و  $d_{G_1}(w_1) - d_{G_1}(v_1)$  یال مستقل متصل به  $w_1$  به دست آید. آنگاه با استفاده از لم ۵.۲.۴(ii) برای هر رأس  $v \in V(G_1)$  داریم که  $(G_1; w_1, v) \succ (G_1; v_1, \sigma(v))$  می‌باشد. بدیهی است که  $G = G_1 + v_1 v_2$  می‌باشد. فرض کنید  $\tilde{G} = G_1 + w_1 v_2$  باشد، در این صورت  $\tilde{G} \in F_n^{\neq}$  می‌باشد،  $|E(B(G))| - |E(B(\tilde{G}))| = 1$  بنابراین با استفاده از لم ۲.۲.۴  $EE(\tilde{G}) > EE(G)$  می‌باشد.  $\square$

با استدلال مشابه لم ۵.۲.۶ نتیجه زیر را داریم.

لم ۶.۲.۶. فرض کنید  $G \in F_n^{\neq}$  و  $P_u^k = uv_1 v_2$  و  $P_u^l = ww_1 w_2$  دو مسیر داخلی در  $B(G)$  باشد، که  $d_B(G)(u) \geq 3$ ، اگر  $w_1 \neq w_2$  باشد، آنگاه گرافی مانند  $\tilde{G} \in F_n^{\neq}$  وجود دارد به طوری که  $|E(B(G))| - |E(B(\tilde{G}))| = 1$  و  $EE(\tilde{G}) > EE(G)$  باشد.



شکل ۳.۶: گراف‌های  $A_1, \dots, A_{18}$

نتیجه ۷.۲.۶. اگر  $G^*$  گرافی با بیشترین مشخصه استرادا در  $F_n^{\neq}$  باشد، آنگاه  $i \in \{1, 2, \dots, 18\}$  می‌باشد (نشان داده شده در شکل ۳.۶).

لم ۸.۲.۶. اگر  $G^*$  گرافی با بیشترین مشخصه استرادا در  $\{1, 2, \dots, 25\}$  باشد (نشان داده شده در شکل ۳.۶)، آنگاه  $G^*$  از  $A_i$  با اتصال  $n - |V(A_i)|$  به رأس  $w_4$  با بیشترین درجه در  $\{1, 2, \dots, 25\}$  به دست می‌آید.

برهان. اگر  $B(G^*) \cong A_1$  و  $(i = 1, 2, \dots, 13)$  رأس‌های از  $A_1$  که در شکل ۳.۶ نشان داده شده است. فرض کنید که هر  $w_i$  متصل  $m_i$  یال مستقل در  $G^*$  باشد. که  $m_i \geq 0$  و  $\sum_{i=1}^{13} m_i = n - 13$  باشد. برای راحتی ما  $G'' = A_1(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9, m_{10}, m_{11}, m_{12}, m_{13})$  را مشخص می‌کنیم.

مرحله ۱. اگر حداقل نه تا از  $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9, m_{10}, m_{11}, m_{12}, m_{13}$  نا صفر باشد. فرض کنید  $H_1$  گراف که از  $A_1(m_1, 0, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9, m_{10}, m_{11}, m_{12}, m_{13})$  با حذف رأس‌های مستقل به  $w_1$  به دست آید. آنگاه اتومورفیزم وجود دارد، که  $w_1$  و  $w_2$  را تغییر داده و رأس‌های دیگر را ثابت نگه می‌دارد. با استفاده از لم ۵.۲.۴(ii) داریم که:

$$(A_1(m_1, 0, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9, m_{10}, m_{11}, m_{12}, m_{13}); w_1) \succ (A_1(m_1, 0, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9, m_{10}, m_{11}, m_{12}, m_{13}); w_2).$$

بعلاوه با استفاده از لم ۲.۲.۴ داریم:

$$(A_1(m_1 + m_2, 0, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9, m_{10}, m_{11}, m_{12}, m_{13})) \succ (A_1(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9, m_{10}, m_{11}, m_{12}, m_{13})).$$

که تناقض می‌باشد. بنابراین حداقل هشت تا از  $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9, m_{10}, m_{11}, m_{12}, m_{13}$  نا صفر باشند، بدون کاستن از کلیات فرض کنید  $m_2 = m_3 = 0$  باشد، آنگاه با استدلال مشابه قبل به تناقض می‌رسیم. اگر حداقل هفت تا از  $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9, m_{10}, m_{11}, m_{12}, m_{13}$  نا صفر باشند. این استدلال را ادامه می‌دهیم تا همه  $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9, m_{10}, m_{11}, m_{12}, m_{13}$  صفر شوند، یا به عبارتی  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = m_7 = m_8 = m_9 = m_{10} = m_{11} = m_{12} = m_{13} = 0$  آنگاه  $G'' = A_1(m_1, 0, 0, m_4, 0, 0, m_7, 0, 0, m_{10}, 0, 0, 0)$  می‌باشد. اگر هر سه تای  $m_4, m_7, m_{10}$  نا صفر باشند، با استدلال مشابه قبل به تناقض می‌رسیم. بنابراین اگر حداقل یکی از مقادیر  $m_4, m_7, m_{10}$  صفر باشد، مثلاً  $m_7 = 0$  آنگاه  $G'' = A_1(m_1, 0, 0, m_4, 0, 0, 0, 0, 0, m_{10}, 0, 0, 0)$  می‌باشد. اگر هر دو  $m_4, m_{10}$  نا صفر باشند، به طور مشابه استدلال قبل به تناقض می‌رسیم. بنابراین اگر حداقل یکی از مقادیر  $m_4, m_{10}$  صفر باشد، مثلاً  $m_{10} = 0$  باشد، آنگاه

$$G'' = A_1(m_1, 0, 0, m_4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

می‌باشد. اگر هر دو  $m_1, m_4$  نا صفر باشند، در این صورت  $H_1$  گرافی که از  $A_1$  با حذف یال‌های  $w_5 w_4, w_3 w_4$  به دست می‌آید. آنگاه اتومورفیزم وجود دارد که رأس‌های  $w_1$  و  $w_3$  را تغییر داده و رأس‌های دیگر را ثابت نگه می‌دارد. با استفاده از لم ۵.۲.۴(ii) داریم:

$$(A_1(0, 0, 0, m_4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); w_4) \succ (A_1(0, 0, 0, m_4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0); w_1).$$

بعلاوه با استفاده از لم ۲.۲.۴ داریم:

$$A_1(0, 0, 0, m_1 + m_4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \succ A_1(m_1, 0, 0, m_4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

که همچنین نیز تناقض می‌باشد. بنابراین  $G'' = A_1(0, 0, 0, m_4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$  می‌باشد.  $\square$  به طور مشابه می‌توان برای  $B(G^*) \cong A_i (i \in \{2, 3, \dots, 18\})$  نیز ثابت کرد.

فرض کنید که  $F_i$  گراف که از  $A_i$  با اتصال  $n - |V(A_i)|$  رأس‌ها مستقل به رأسی با بیشترین درجه در

با استفاده از لم ۱.۲.۴ نیز چند جمله ای های  $\phi(F_i; x)$  برای  $i = 1, 2, \dots, 5$  به صورت زیر به دست می آوریم. می‌توانید  $\phi(F_i; x)$  برای  $i = 6, 8, \dots, 18$  را در پیوست **ب** ببینید.

$$\begin{aligned} \phi(F_1; x) &= x^{n-13}[x^{13} - x^{12} - (n+3)x^{11} + (n-7)x^{10} + (12n-83)x^9 \\ &\quad - (6n-77)x^8 - (33n-331)x^7 + (9n-149)x^6 - (2n-34)x^5 \\ &\quad - (40n-80)x^4 + (24n-288)x^3] = x^{n-13}f_1(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(F_2; x) &= x^{n-13}[x^{13} - (n+8)x^{11} - 4x^{10} + (17n-70)x^9 + (2n+32)x^8 \\ &\quad - (91n-736)x^7 - (28n-118)x^6 + (183n-1849)x^5 \\ &\quad + (98n-954)x^4 - (108n-1212)x^3 - (72n-808)x^2] = x^{n-13}f_2(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(F_3; x) &= x^{n-16}[x^{16} - (n+9)x^{14} + (21n-102)x^{12} - (157n-1476)x^{10} \\ &\quad + (519n-6067)x^8 - (742n-9713)x^6 + (360n-4972)x^4] \\ &= x^{n-16}f_3(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(F_4; x) &= x^{n-14}[x^{14} - (n+9)x^{12} + (18n-71)x^{10} - (105n-899)x^8 \\ &\quad + (232n-2580)x^6 + (144n-1720)x^4] = x^{n-14}f_4(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(F_5; x) &= x^{n-14}[x^{14} - (n+5)x^{12} + (10n-32)x^{10} - (36n-292)x^8 \\ &\quad + (56n-632)x^6 - (32n-14)x^4] = x^{n-14}f_5(x). \end{aligned}$$

توجه کنید که  $\phi(F_i; x)$  برای  $i = 1, 2, \dots, 18$  نقش کلیدی در اثبات قضیه اصلی بازی می‌کنند. همچنین مشخصه استرادا  $EE(F_i)$  برای  $i = 1, 2, \dots, 18$  در جدول ۱.۶ محاسبه شده است.

اکنون ما می خواهیم نتیجه اصلی را در قضیه زیر بیان و اثبات کنیم.

**قضیه ۹.۲.۶.** فرض کنید  $G$  یک گراف در  $F_n$  باشد و  $n \geq 7$  آنگاه  $EE(G) \leq EE(F_1)$  تساوی برقرار می‌شود، اگر و فقط اگر  $G \cong F_1$  باشد.

**برهان.** با استفاده از محاسبه مستقیم می‌توانیم ببینیم، که برای  $n \geq 11$

$$\begin{aligned} f_1(\sqrt{n-10}) &= -n(n-10)^{\frac{11}{4}} + (n-10)^{\frac{13}{4}} + 12n(n-10)^{\frac{9}{4}} - 3n^5 - 33n(n-10)^{\frac{7}{4}} \\ &\quad - 83(n-10)^{\frac{5}{4}} + 176n^4 - 2n(n-10)^{\frac{3}{4}} + 331(n-10)^{\frac{1}{4}} - 4103n^3 \\ &\quad + 24n(n-10)^{\frac{3}{4}} + 34(n-10)^{\frac{1}{4}} + 47530n^2 - 288(n-10)^{\frac{3}{4}} - 273700n \\ &\quad + 627000 < 0. \end{aligned}$$



جدول ۱.۰۶: مشخصه استرادای گراف‌های  $F_i$  برای  $i = 1, 2, \dots, 18$ ،  $13 \leq n \leq 18$ .

$EE(F_i)$	$n = 13$	$n = 14$	$n = 15$	$n = 16$	$n = 17$	$n = 18$
$EE(F_1)$	۵۵.۵۵۲	۵۸.۸۸۶	۶۲.۵۴۶	۶۶.۲۱۴	۸۰.۸۴۹	۸۶.۴۵۵
$EE(F_2)$	۵۱.۰۱۸	۵۴.۴۳۷	۵۷.۷۱۷	۶۱.۶۳۹	۶۵.۶۲۲	۷۰.۴۹۵
$EE(F_3)$	۴۸.۷۷۸	۳۹.۳۹۰	۳۵.۹۹۸	۳۷.۸۴۹	۴۰.۰۳۳	۴۲.۶۲۷
$EE(F_4)$	۴۰.۴۲۱	۴	۵	۶	۷	۸
$EE(F_5)$	۳۶.۱۹۴	۴۳.۱۳۵	۵۶.۷۱۲	۵۵.۲۳۲	۵۷.۹۲۷	۶۴.۰۲۱
$EE(F_6)$	۳۲.۲۴۰	۲۸.۴۲۹	۴۱.۵۵۰	۵۴.۶۳۸	۵۰.۶۸۳	۶۴.۵۷۱
$EE(F_7)$	۳۳.۶۲۰	۳۱.۵۷۹	۳۴.۴۳۱	۲۴.۴۳۰	۲۸.۲۴۵	۴۱.۶۱۳
$EE(F_8)$	۳۰.۵۴۴	۳۳.۱۹۹	۳۸.۳۷۹	۳۷.۶۰۲	۴۰.۹۳۹	۴۴.۶۶۵
$EE(F_9)$	۲۶.۸۶۲	۲۸.۲۶۱	۳۰.۰۵۱	۳۱.۴۰۲	۳۳.۱۳۱	۳۴.۴۱۶
$EE(F_{10})$	۲۵.۴۰۳	۲۸.۴۱۵	۳۱.۷۷۰	۳۵.۴۹۳	۳۹.۵۹۶	۴۵.۲۳۴
$EE(F_{11})$	۲۱.۳۱۲	۴۱.۱۷۲	۳۵.۶۴۹	۴۰.۰۸۶	۴۴.۸۴۴	۴۹.۵۳۶
$EE(F_{12})$	۱۸.۲۳۴	۲۰.۰۹۸	۲۲.۰۱۴	۲۲.۰۹۵	۲۴.۹۱۶	۲۸.۲۰۳
$EE(F_{13})$	۱۹.۴۹۳	۲۰.۷۱۸	۲۱.۷۳۴	۲۲.۹۵۰	۲۶.۰۲۲	۳۶.۲۳۵
$EE(F_{14})$	۱۵.۵۲۲	۲۸.۲۱۸	۵.۰۷۱	۴	۵	۶
$EE(F_{15})$	۵.۱۳۱	۵.۷۹۹	۶.۴۸۸	۷.۲۸۴	۸.۷۸۸	۶.۶۴۷
$EE(F_{16})$	۵.۰۸۲	۶.۱۸۳	۷.۲۹۷	۷.۸۹۶	۹.۴۴۴	۱۰.۴۹۰
$EE(F_{17})$	۳.۶۰۷	۴.۵۸۰	۵.۵۳۷	۶.۷۱۹	۶.۸۵۲	۷.۰۲۵
$EE(F_{18})$	۳	۴	۵	۶	۷	۸

و این دلالت براین دارد که  $\lambda_1(F_1) > \sqrt{n-1}$  می‌باشد. به راحتی با استفاده از محاسبه می‌بینیم که مقادیر ویژه گراف  $F_1 - w_4$  برابر با  $1/638, 0/907, 0/407, 2, -1, 0$  که مضرب  $0, n-12$  و بقیه مضارب یک می‌باشد. با استفاده از ویژگی‌های مقادیر ویژه  $A(F_1)$  و  $A(F_1 - w_4)$  برای  $i = 2, 3, \dots, n-1$  از [۲] داریم  $\lambda_i(F_1) \geq \lambda_i(F_1 - w_4)$  می‌باشد. آنگاه

$$\begin{aligned}
 EE(F_1) &= \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(F_1)} > e^{\lambda_1(F_1)} + \sum_{i=2}^{n-1} e^{\lambda_i(F_1 - w_4)} \\
 &> e^{\sqrt{n-1}} + (n-12) + e^{-1} + e^{-2.513} + e^{2.649} + e^{-1.638} + e^{0.907} + e^{-0.407} + e^2 \\
 &+ e^{\sqrt{2}} + e^{-\sqrt{2}} = H_1.
 \end{aligned}$$

حال نشان می‌دهیم  $EE(F_1) > EE(F_i)$  برای  $i = 2, \dots, 18$  که ما در اینجا فقط برای  $i = 2, 3, 4, 5$  ثابت می‌کنیم، بقیه موارد دیگر هم نیز به طور مشابه اثبات می‌شوند.

$$i = 2 \bullet$$

با استفاده از محاسبه مستقیم می‌بینیم که مقادیر ویژه گراف  $F_2 - w_4$  برابر با  $\pm 2/548$ ،  $\pm 0/629$ ،  $\pm 1/763$ ،  $2$ ،  $-1$  که مضرب  $-1$  دو و بقیه مضارب یک می‌باشد. برای  $14 \leq n \leq 26$  داریم:

$$\begin{aligned} f_2(\sqrt{n-11}) &= -(n+8)(n-11)^{\frac{11}{4}} + (17n-70)(n-11)^{\frac{5}{4}} + (n-11)^{\frac{13}{4}} \\ &+ (2n+32)(n-11)^4 - (91n-736)(n-11)^{\frac{3}{4}} - 4(n-11)^5 \\ &+ (183n-1849)(n-11)^{\frac{7}{4}} + (98n-954)(n-11)^2 \\ &- (108n-212)(n-11)^{\frac{3}{4}} + 90(n-11)^3 > 0. \end{aligned}$$

و برای  $n \geq 19$

$$f_2(1) = 100n - 1814 > 0.$$

با استفاده از ویژگی مقادیر ویژه  $F_2 - w_4$  و  $F_2$  داریم  $\lambda_2(F_2) \leq \lambda_1(F_2 - w_4) = 2/548$

می‌باشد. بعلاوه چون  $f_2(1) = 100n - 1814 > 0$  داریم که  $\sqrt{n-11} < \lambda_1(F_2) < 2/548$  حال به طور مشابه با استفاده از این واقعیت برای  $i = 2, 3, \dots, n$  داریم  $\lambda_i(F_2) \leq \lambda_{i-1}(F_2 - w_4)$  پس بنابراین:

$$\begin{aligned} EE(F_2) &= \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(F_2)} \leq e^{\lambda_1(F_2)} + \sum_{i=1}^{n-1} e^{\lambda_i(F_2 - w_4)} \\ &< e^{\sqrt{n-11}} + 2e^{-1} + e^{2/548} + e^{-2/548} + e^{0/629} + e^{-0/629} + e^{1/763} \\ &+ e^{-1/763} + e^2 = H_2. \end{aligned}$$

اکنون با توجه به این که برای  $n \geq 13$  داریم

$$H_1 - H_2 = e^{\sqrt{n-10}} - e^{\sqrt{n-11}} + (n-12) + e^{2/649} + e^{0/807} + e^{\sqrt{2}} - e^{2/548} - e^{0/629} - e^{1/763}$$

$$\begin{aligned} H_1 - H_2 &= e^{\sqrt{n-10}} - e^{\sqrt{n-11}} + (n-12) + e^{-2/513} + e^{2/649} + e^{-1/628} \\ &+ e^{0/807} + e^{-0/405} + e^{\sqrt{2}} + e^{-\sqrt{2}} - e^{-1} - e^{2/548} - e^{-2/548} - e^{0/629} \\ &- e^{-0/629} - e^{1/763} - e^{-1/763} > e^{\sqrt{n-10}} - e^{\sqrt{n-11}} + (n-12) + e^{2/649} \\ &+ e^{0/807} + e^{\sqrt{2}} - e^{2/548} - e^{0/629} - e^{1/763}. \end{aligned}$$

آنگاه  $H_1 - H_2 > 0$  بنابراین  $EE(F_1) > EE(F_2)$  می‌باشد.

$$i = 3 \bullet$$

با استفاده از محاسبه مستقیم می‌بینیم که مقادیر ویژه گراف  $F_3 - w_4$  برابر با  $\pm 2/548$ ،  $\pm 0/629$ ،  $\pm 1/763$ ،  $\pm 2/175$ ،  $\pm 1/126$  با مضارب یک می‌باشد. برای  $n \geq 25$  داریم:

$$\begin{aligned} f_3(\sqrt{n-11}) &= n^7 - 105n^6 + 4657n^5 - 113245n^4 + 1632386n^3 - 13961046n^2 \\ &+ 1632386n^3 - 13961046n^2 + 65648792n - 13102364 > 0. \end{aligned}$$

برای  $0 \leq n \leq 13$

$$f_3(1) = -360n + 5012 > 0.$$

با استفاده از ویژگی مقادیر ویژه  $F_3 - w_3$  و  $F_3$  داریم  $\lambda_2(F_3) \leq \lambda_1(F_3 - w_3) = 2/548$  می‌باشد. بعلاوه چون  $f_3(1) = -360n + 5012 > 0$  داریم که  $\lambda_1(F_3) < \sqrt{n - \frac{3}{4}} < 2/548$  حال به طور مشابه با استفاده از این واقعیت برای  $i = 2, 3, \dots, n$  داریم  $\lambda_i(F_3) \leq \lambda_{i-1}(F_3 - w_3)$  پس بنابراین:

$$\begin{aligned} EE(F_3) &= \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(F_3)} \leq e^{\lambda_1(F_3)} + \sum_{i=1}^{n-1} e^{\lambda_i(F_3 - w_3)} \\ &< e^{\sqrt{n-11}} + e^{2/548} + e^{-2/548} + e^{0.629} + e^{-0.629} + e^{1/763} \\ &+ e^{-1/763} + e^{2/175} + e^{-2/175} + e^{1/126} + e^{-1/126} = H_3. \end{aligned}$$

اکنون با توجه به این که برای  $n \geq 18$  داریم  $e^{\sqrt{n-10}} - e^{\sqrt{n-11}} + (n-12) + e^{2/649} + e^2 + e^{0.907} + e^{\sqrt{2}} - e^{2/548} - e^{0.629} - e^{1/763} - e^{2/175} - e^{1/126} > 0$ .

آنگاه

$$\begin{aligned} H_1 - H_3 &= e^{\sqrt{n-10}} - e^{\sqrt{n-11}} + (n-12) + e^{-2/513} + e^{-1} + e^2 + e^{2/649} + e^{-1/638} \\ &+ e^{0.907} + e^{-0.405} + e^{\sqrt{2}} + e^{-\sqrt{2}} - e^{2/548} - e^{-2/548} - e^{0.629} - e^{-0.629} \\ &- e^{1/763} - e^{-1/763} - e^{2/175} - e^{-2/175} - e^{1/126} - e^{-1/126} \\ &> e^{\sqrt{n-10}} - e^{\sqrt{n-11}} + (n-12) + e^{2/649} + e^2 + e^{0.907} + e^{\sqrt{2}} - e^{2/548} \\ &- e^{0.629} - e^{1/763} - e^{2/175} - e^{1/126}. \end{aligned}$$

آنگاه  $H_1 - H_3 > 0$  بنابراین  $EE(F_1) > EE(F_3)$  می‌باشد.

$i = 4$

با استفاده از محاسبه مستقیم می‌بینیم که مقادیر ویژه گراف  $F_4 - w_4$  برابر با  $\pm 0.629$ ،  $\pm 2/548$ ،  $\pm \sqrt{3}$ ،  $\pm 1/763$  با مضارب یک می‌باشد. برای  $13 \leq n \leq 21$  داریم:

$$\begin{aligned} f_4(\sqrt{n-11}) &= -2n^6 + 154n^5 - 486n^4 + 81032n^3 - 753438n^2 + 7315998n \\ &- 7608480 > 0. \end{aligned}$$

برای  $n \geq 13$

$$f_4(1) = 288n - 3480 > 0.$$

با استفاده از ویژگی مقادیر ویژه  $F_4 - w_4$  و  $F_4$  داریم  $\lambda_2(F_4) \leq \lambda_1(F_4 - w_4) = 2/548$  می‌باشد. بعلاوه چون  $f_4(1) = 288n - 3480 > 0$  داریم که  $\lambda_1(F_4) < \sqrt{n - \frac{3}{4}} < 2/548$  حال

به طور مشابه با استفاده از این واقعیت برای  $i = 2, 3, \dots, n$  داریم  $\lambda_i(F_\varphi) \leq \lambda_{i-1}(F_\varphi - w_\varphi)$  پس بنابراین:

$$\begin{aligned} EE(F_\varphi) &= \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(F_\varphi)} \leq e^{\lambda_1(F_\varphi)} + \sum_{i=1}^{n-1} e^{\lambda_i(F_\varphi - w_\varphi)} \\ &< e^{\sqrt{n-11}} + e^{2.548} + e^{-2.548} + e^{0.629} + e^{-0.629} + e^{1.763} \\ &+ e^{-1.763} + e^{\sqrt{3}} + e^{-\sqrt{3}} = H_\varphi. \end{aligned}$$

اکنون با توجه به این که برای  $n \geq 13$  داریم  $e^{\sqrt{n-10}} - e^{\sqrt{n-11}} + (n-12) + e^2 + e^{2.649} + e^{0.907} + e^{\sqrt{2}} - e^{2.548} - e^{0.629} - e^{1.763} - e^{\sqrt{3}}$  آنگاه

$$\begin{aligned} H_1 - H_\varphi &= e^{\sqrt{n-10}} - e^{\sqrt{n-11}} + (n-12) + e^{-2.513} + e^{-1} + e^2 + e^{2.649} + e^{-1.638} \\ &+ e^{0.907} + e^{-0.405} + e^{\sqrt{2}} + e^{-\sqrt{2}} - e^{2.548} - e^{-2.548} - e^{0.629} - e^{-0.629} \\ &- e^{1.763} - e^{-1.763} - e^{\sqrt{3}} - e^{-\sqrt{3}} \\ &> e^{\sqrt{n-10}} - e^{\sqrt{n-11}} + (n-12) + e^{2.649} + e^{0.907} + e^{\sqrt{2}} - e^{2.548} \\ &- e^{0.629} - e^{1.763} - e^{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

آنگاه  $H_1 - H_\varphi > 0$  بنابراین  $EE(F_1) > EE(F_\varphi)$  می‌باشد.

$$i = 5 \bullet$$

با استفاده از محاسبه مستقیم می‌بینیم که مقادیر ویژه گراف  $F_\delta - w_\varphi$  برابر با  $\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{2}$  و  $0$  که مضرب  $0, 11, n$  و مضرب  $\sqrt{2}$  و  $-\sqrt{2}$  سه و بقیه مضارب یک می‌باشد. برای  $n = 10, 12, 13, \dots, 16$  داریم:

$$\begin{aligned} f_\delta(\sqrt{n-11}) &= -6n^6 + 438n^5 - 13248n^4 + 212604n^3 - 19098178n^2 \\ &+ 9108462n - 18020772 > 0. \end{aligned}$$

برای  $0 \leq n \leq 23$

$$f_\delta(1) = -3n + 72 > 0.$$

با استفاده از ویژگی مقادیر ویژه  $F_\delta - w_\varphi$  و  $F_\delta$  داریم  $\lambda_2(F_\delta) \leq \lambda_1(F_\delta - w_\varphi) = \sqrt{3}$  می‌باشد. بعلاوه چون  $f_\delta(1) = -3n + 72 > 0$  داریم که  $\sqrt{3} < \lambda_1(F_\delta) < \sqrt{n - \frac{1}{3}}$  حال به طور مشابه با استفاده از این واقعیت برای  $i = 2, 3, \dots, n$  داریم  $\lambda_i(F_\delta) \leq \lambda_{i-1}(F_\delta - w_\varphi)$  پس بنابراین:

$$\begin{aligned} EE(F_\delta) &= \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i(F_\delta)} \leq e^{\lambda_1(F_\delta)} + \sum_{i=1}^{n-1} e^{\lambda_i(F_\delta - w_\varphi)} \\ &< e^{\sqrt{n-11}} + (n-11) + 3e^{\sqrt{2}} + 3e^{-\sqrt{2}} + e^{\sqrt{3}} + e^{-\sqrt{3}} = H_\delta. \end{aligned}$$

اکنون با توجه به این که برای  $n \geq 11$  داریم

$$e^{\sqrt{n-10}} - e^{\sqrt{n-11}} + e^{2.649} + e^{0.907} + e^2 - 2e^{\sqrt{2}} - e^{\sqrt{3}} - 1 > 0.$$

آنگاه

$$\begin{aligned} H_1 - H_5 &= e^{\sqrt{n-10}} - e^{\sqrt{n-11}} + e^{-1} + e^{-2.513} + e^{2.649} \\ &\quad + e^{-1.638} + e^{0.907} + e^{-0.405} + e^2 - 2e^{\sqrt{2}} - 2e^{-\sqrt{2}} - e^{\sqrt{3}} - e^{-\sqrt{3}} - 1 \\ &> e^{\sqrt{n-10}} - e^{\sqrt{n-11}} + e^{2.649} + e^{0.907} + e^2 - 2e^{\sqrt{2}} - e^{\sqrt{3}} - 1. \end{aligned}$$

$H_1 - H_5 > 0$  بنابراین  $EE(F_1) > EE(F_5)$  می‌باشد.

□



# پیوست آ

## گراف‌های چهاردور با بیشترین مشخصه استرادا

برای  $\phi(F_i; x), i = 7, 8, \dots, 25$

$$\phi(F_7; x) = x^{n-9}[x^9 - (n+3)x^7 + (\lambda n - 40)x^5 - (16n - 132)x^3] = x^{n-9}f_7(x);$$

$$\phi(F_8; x) = x^{n-10}[x^{10} - (n+1)x^8 + (9n - 36)x^6 - 4x^5 - (23n - 179)x^4 + 12x^3 + (15n - 150)x^2] = x^{n-10}f_8(x);$$

$$\phi(F_9; x) = x^{n-9}[x^9 - (n+4)x^7 - 4x^6 + (\lambda n - 26)x^5 + 20x^4 - (17n - 114)x^3 - 12x^2 + (10n - 90)x] = x^{n-9}f_9(x);$$

$$\phi(F_{10}; x) = x^{n-9}[x^9 - (n+3)x^7 + (6n - 27)x^5 - (9n - 81)x^3] = x^{n-9}f_{10}(x);$$

$$\phi(F_{11}; x) = x^{n-13}[x^{13} - (n+3)x^{11} + (13n - 84)x^9 - (41n - 356)x^7 + (47n - 529)x^5 - (18n - 216)x^3 + 4x] = x^{n-13}f_{11}(x);$$

$$\phi(F_{12}; x) = x^{n-10}[x^{10} - (n+2)x^8 - 4x^7 + (7n - 29)x^6 + 20x^5 - (14n - 100)x^4 - 16x^3 + (\lambda n - 72)x^2] = x^{n-10}f_{12}(x);$$

$$\phi(F_{13}; x) = x^{n-11}[x^{11} - (n+3)x^9 + (7n - 29)x^7 - (16n - 28)x^5 + (12n - 132)x^3] = x^{n-11}f_{13}(x);$$

$$\begin{aligned}\phi(F_{14}; x) &= x^{n-11}[x^{11} - (n+3)x^9 + (\lambda n - 32)x^7 - 2x^6 - (20n - 138)x^5 + 6x^4 \\ &\quad + (16n - 184)x^3] = x^{n-11}f_{14}(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(F_{15}; x) &= x^{n-10}[x^{10} - (n+2)x^8 - 4x^7 + (\lambda n - 37)x^6 + (2n+4)x^5 + (2n-68)x^4 \\ &\quad - (10n-68)x^3 + (12n-108)x^2 + (\lambda n - 72)x] = x^{n-10}f_{15}(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(F_{16}; x) &= x^{n-11}[x^{11} - (n+1)x^9 + (7n-34)x^7 - 2x^6 + (14n-104)x^5 - 8x^4 \\ &\quad + (\lambda n - 72)x^3 - 8x^2] = x^{n-11}f_{16}(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(F_{17}; x) &= x^{n-13}[x^{13} - (n+2)x^{11} + (11n-64)x^9 - (42n-369)x^7 + (64n-674)x^5 \\ &\quad - (32n-368)x^3] = x^{n-13}f_{17}(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(F_{18}; x) &= x^{n-13}[x^{13} - (n+5)x^{11} + (14n-63)x^9 - (69n-537)x^7 - 2x^6 \\ &\quad + (140n-1318)x^5 + 42x^4 - (100n-1060)x^3 - 20x^2] = x^{n-13}f_{18}(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(F_{19}; x) &= x^{n-11}[x^{11} - (n+2)x^9 + (\lambda n - 38)x^7 - 2x^6 - (19n-147)x^5 + 10x^4 \\ &\quad + (12n-112)x^3 - 8x^2] = x^{n-11}f_{19}(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(F_{20}; x) &= x^{n-13}[x^{13} - (n+4)x^{11} + (12n-5)x^9 - 2x^8 - (49n-348)x^7 + 14x^6 \\ &\quad + (7\lambda n - 67)x^5 - 24x^4 - (40n-376)x^3 + 12x^2] = x^{n-13}f_{20}(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(F_{21}; x) &= x^{n-12}[x^{12} - (n+1)x^{10} + (\lambda n - 42)x^8 - 2x^7 - (21n-169)x^6 + 8x^5 \\ &\quad + (22n-221)x^4 - 8x^3 - (\lambda n - 92)x^2] = x^{n-12}f_{21}(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(F_{22}; x) &= x^{n-11}[x^{11} - (n+1)x^9 + (7n-36)x^7 - 2x^6 - (14n-112)x^5 + 8x^4 \\ &\quad + (\lambda n - 80)x^3 - 8x^2] = x^{n-11}f_{22}(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(F_{23}; x) &= x^{n-10}[x^{10} - (n+1)x^8 + 6x^7 + (7n-42)x^6 - 16x^5 - (14n-170)x^4 \\ &\quad - 88x^3 + (\lambda n - 74)x^2 - 12x] = x^{n-10}f_{23}(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(F_{24}; x) &= x^{n-10}[x^{10} - (n+2)x^8 - 4x^7 - (7n-110)x^6 + 16x^5 + (14n-180)x^4 \\ &\quad - 4x^3 - (\lambda n - 88)x^2] = x^{n-10}f_{24}(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(F_{25}; x) &= x^{n-13}[x^{13} - (n+2)x^{11} + (11n-62)x^9 - x^8 - (42n-35)x^7 + 10x^6 \\ &\quad + (64n-626)x^5 - 10x^4 - (32n-336)x^3] = x^{n-13}f_{25}(x).\end{aligned}$$



# پیوست ب

## گراف‌های پنج دور با بیشترین مشخصه استرادا

برای  $\phi(F_i; x), i = 6, 7, \dots, 18$ .

$$\begin{aligned}\phi(F_6; x) &= x^{n-15}[x^{15} - (n+5)x^{13} + (12n-47)x^{11} - 4x^{10} - (53n-415)x^9 \\ &+ 24x^8 + (110n-1166)x^7 - 48x^6 - (108n-1396)x^5 + 32x^4 \\ &+ (40n-600)x^3] = x^{n-15}f_6(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(F_7; x) &= x^{n-14}[x^{14} - (n+1)x^{12} + (10n-65)x^{10} - (33n-313)x^8 \\ &+ (40n-456)x^6 - (16n-198)x^4] = x^{n-14}f_7(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(F_8; x) &= x^{n-15}[x^{15} - (n+1)x^{13} + (11n-73)x^{11} - 4x^{10} - (43n-413)x^9 \\ &+ 28x^8 + (73n-848)x^7 - 56x^6 - (56n-748)x^5 + 32x^4 \\ &+ (16n-240)x^3] = x^{n-15}f_8(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(F_9; x) &= x^{n-15}[x^{15} - (n+2)x^{13} + 3x^{12} + (12n-25)x^{11} - 34x^{10} + (53n-5)x^9 \\ &- 312x^8 + (106n-510)x^7 + 720x^6 - (96n-1448)x^5 + 32x^4] \\ &= x^{n-15}f_9(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(F_{10}; x) &= x^{n-15}[x^{15} - (n+2)x^{13} + (10n-56)x^{11} - 4x^{10} - (37n-341)x^9 \\ &+ 36x^8 + (64n-768)x^7 - 48x^6 - (52n-772)x^5 + 32x^4 + 32x^3] \\ &= x^{n-15}f_{10}(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(F_{11}; x) &= x^{n-14}[x^{14} - (n+2)x^{12} + (9n-49)x^{10} - (28n-252)x^8 \\ &+ (36n-420)x^6 + (16n-224)x^4] = x^{n-14}f_{11}(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(F_{12}; x) &= x^{n-16}[x^{16} - (n+1)x^{14} + (12n-87)x^{12} - (53n-551)x^{10} \\ &+ (106n-1304)x^8 - (96n-1308)x^6 + (32n-464)x^4] \\ &= x^{n-16}f_{12}(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(F_{13}; x) &= x^{n-16}[x^{16} - (n+2)x^{14} + (14n-100)x^{12} - (73n-752)x^{10} \\ &+ (172n-2143)x^8 + (76n-1792)x^6 - (64n-1200)x^4] \\ &= x^{n-16}f_{13}(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(F_{14}; x) &= x^{n-16}[x^{16} - (n+3)x^{14} + (13n-78)x^{12} - (64n-615)x^{10} \\ &+ (148n-1768)x^8 + (160n-2204)x^6 + (64n-976)x^4] \\ &= x^{n-16}f_{14}(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(F_{15}; x) &= x^{n-17}[x^{17} - (n+3)x^{15} + 2x^{14} + (16n-126)x^{13} - 22x^{12} \\ &+ (101n-1141)x^{11} + 82x^{10} + (318n-4673)x^9 - 116x^8 \\ &- (520n-7546)x^7 + 40x^6 + (416n-6712)x^5 + 16x^4 - (128n-2144)x^3] \\ &= x^{n-17}f_{15}(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(F_{16}; x) &= x^{n-13}[x^{13} - (n+8)x^{11} - 4x^{10} + (16n-51)x^9 + 56x^8 - (77n-832)x^7 \\ &- 196x^6 + (134n-1285)x^5 + 136x^4 - (72n-808)x^3] \\ &= x^{n-13}f_{16}(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(F_{17}; x) &= x^{n-15}[x^{15} - (n+9)x^{13} + (19n-72)x^{11} - 4x^{10} - (123n-961)x^9 \\ &+ 56x^8 + (337n-3291)x^7 - 196x^6 - (376n-5026)x^5 + 144x^4 \\ &+ (144n-2264)x^3] = x^{n-15}f_{17}(x);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(F_{18}; x) &= x^{n-13}[x^{13} - (n+2)x^{11} - 4x^{10} + (10n-74)x^9 + 28x^8 + (33n-307)x^7 \\ &- 56x^6 + (40n-380)x^5 + 32x^4 - (72n-808)x^3] \\ &= x^{n-13}f_{18}(x).\end{aligned}$$

# مراجع

- [1] B. Bollobás, *Modern Graph Theory*, Springer-Verlag, 1998.
- [2] D. Cvetković, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of Graphs-Theory and Application*, third ed., Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg, Leipzig, 1995.
- [3] J. A. de la Peña, I. Gutman, J. Rada, Estimating the Estrada index, *Lin. Algebra Appl.* 427 (2007) 70–76.
- [4] H. Deng, A proof of a conjecture on the Estrada index, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* 62 (2009) 599–606.
- [5] Z. Du, Z. Liu, On the Estrada and Laplacian Estrada indices of graphs, *Linear Algebra Appl.* 435 (2011) 2065–2076.
- [6] Z. Du, B. Zhou, The Estrada index of trees, *Linear Algebra Appl.* 435 (2011) 2462–2467.
- [7] Z. Du, B. Zhou, On the Estrada index of graphs with given number of cut edges, *Electron. J. Linear Algebra* 22 (2011) 586–592.
- [8] Z. Du, B. Zhou, The Estrada index of unicyclic graphs, *Linear Algebra Appl.*, 436 (2012) 3149-3159.
- [9] E. Estrada, Characterization of 3D molecular structure, *Chem. Phys. Lett.* 319 (2000) 713–718.
- [10] E. Estrada, Characterization of the folding degree of proteins, *Bioinformatics* 18 (2002) 697–704.
- [11] E. Estrada, Characterization of the amino acid contribution to the folding degree of proteins, *Proteins* 54 (2004) 727–737.
- [12] E. Estrada, J. A. Rodríguez-Velázquez, Subgraph centrality in complex networks, *Phys. Rev. E* 71 (2005) 056103-1–056103-9.
- [13] E. Estrada, J. A. Rodríguez-Velázquez, Spectral measures of bipartivity in complex networks, *Phys. Rev. E* 72 (2005) 046105-1–046105-6.

- [14] E. Estrada, J. A. Rodríguez-Valázquez, M. Randić, Atomic branching in molecules, *Int. J. Quantum Chem.* 106 (2006) 823–832.
- [15] E. Estrada, J.A. Rodríguez-Valázquez, M. Randić, Atomic branching in molecules, *Int. J. Quantum Chem.* 106 (2006) 823-832.
- [16] I. Gutman, E. Estrada, J. A. Rodríguez-Valázquez, On a graph spectrum based structure descriptor, *Croat. Chem. Acta* 80 (2007) 151–154.
- [17] G. H. FATHTABAR, A. R. ASHRAFI, I. GUTMAN, note on estrada and l-estrada indices of graphs, Presented at the 6th Meeting, held on September 26, 2008.
- [18] I. Gutman, A. Graovac, Estrada index of cycles and paths, *Chem. Phys. Lett.* 436 (2007) 294–296.
- [19] I. Gutman, H. Deng, S. Radenkovic, The Estrada index: An updated survey in the book: D. Cvetkoviic, I. Gutman (Eds.), *Selected Topics on Applications of Graph Spectra*, Math. Inst., Belgrade, 2011, pp. 155-174.
- [20] I. Gutman, B. Furtula, X. Chen, J. Qian, Graphs with smallest resolvent Estrada indices, *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry* 73 (2015) 267-270.
- [21] A. Ilić, D. Stevanović, The Estrada index of chemical trees, *J. Math. Chem.* 47 (2010) 305–314.
- [22] N. Jafari Rad, A. Jahanbani, and D.A. Mojdeh, *Tetracyclic graphs with maximal Estrada index*, Manuscript (2015).
- [23] W. Li, A. Chang, On the trees with maximum nullity, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 2006, 56(3) 501-508.
- [24] J. Li, X. Li, L. Wang, The minimal Estrada index of trees with two maximum degree vertices, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* 64 (2010) 799-810.
- [25] S. Li, X. Li, On tetracyclic graphs with minimal energy, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* 60 (2008) 395-414.
- [26] Michelle L. Rittenhouse, *Properties and Recent Applications in Spectral Graph Theory*, thesis, Virginia Commonwealth University (2008).
- [27] L. Wang, Y.Z. Fan, Y. Wang, Maximum Estrada index of bicyclic graphs, *arXiv:1204.3686v1 [math. CO]* 17 Apr 2012.
- [28] H. Zhao, Y. Jia, On the Estrada index of bipartite graph, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* 61 (2009) 495–501.

- 
- [29] J. Zhang, B. Zhou, J. Li, On Estrada index of trees, *Linear Algebra Appl.* 434 (2011) 215–223.
- [30] B. Zhou, On Estrada index, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* 60 (2008) 485–492.
- [31] B. Zhou, N. Trinajsti ć, Estrada index of bipartite graphs, *Int. J. Chem. Model.* 1 (2008) 387–394.
- [32] Z. Zhu, L. Tan, Z. Qiu, Tricyclic graph with maximal Estrada index, *Discrete Applied Mathematics* 162 (2014) 364–372.



# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

surjective	پوشا
contradiction	تناقض
table	جدول
characteristic polynomial	چند جمله ای مشخصه
loop	حلقه
automorphism	خود ریختی
degree	درجه
tree	درخت
cyclic	دور
vertice	رأس
subgraph	زیرگراف
star	ستاره
proper	سره
length	طول
diam	قطر
trail	گذر
null graph	گراف تهی
bipartite graph	گراف دوبخشی
regular graph	گراف منتظم
walk	گشت
spectral moment	گشتاور طیف
adjacency matrix	مجاور
adjacent	ماتریس مجاورت
set	مجموعه
circuit	مدار

Case.....	مرحله
path.....	مسیر
internal path.....	مسیر داخلی
Estrada index.....	مشخصه استرادا
reversing.....	معکوس
eigenvalues.....	مقادیر ویژه
component.....	مؤلفه
map.....	نگاشت
connected.....	همبند
edge.....	یال
injective.....	یک به یک
unique.....	یکتا
isomorphism.....	یکریختی



# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

adjacent	مجاور
adjacency matrix	ماتریس مجاورت
automorphism	خود ریختی
bipartite graph	گراف دوبخشی
case	مرحله
characteristic polynomial	چند جمله ای مشخصه
circuit	مدار
component	مؤلفه
connected	همبند
contradiction	تناقض
cyclic	دور
degree	درجه
diam	قطر
edge	یال
eigenvalues	مقادیر ویژه
estrada index	مشخصه استرادا
injective	یک به یک
isomorphism	یکریختی
internal path	مسیر داخلی
length	طول
loop	حلقه
map	نگاشت
null graph	گراف تهی
order	مرتبه
path	مسیر

proper	.....	سره
regular graph	.....	گراف منتظم
reversing	.....	معکوس
set	.....	مجموعه
spectral moment	.....	گشتاور طیف
star	.....	ستاره
subgraph	.....	زیرگراف
surjective	.....	پوشا
table	.....	جدول
trail	.....	گذر
tree	.....	درخت
unique	.....	یکتا
vertice	.....	رأس
walk	.....	گشت

## **Aabstract**

The Estrada index of a simple connected graph  $G$  of order  $n$  is defined as  $EE(G) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i}$ , where  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  are the eigenvalues of the adjacency matrix of  $G$ . In this thesis, we characterize all the unique trees, unique unicyclic graphs, unique bicyclic graphs, unique tricyclic graphs, unique tetracyclic graphs, pentacyclic graphs of order  $n$  with maximal Estrada index.

**keywords:** Eigenvalue, Estrada index, Walk, cyclic.



**University of Shahrood**

**Faculty Of Mathematical Sciences**

# **Some results on the Estrada index in graphs**

**Akbar Jahanbani**

**Supervisor**

**Dr. Nader Jafari Rad**

**July 2015**